МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ ОСВІТИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ ВИЩОЇ ОСВІТИ
ОДЕСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

В. В. Новіков, С. А. Яценко

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Київ НМК ВО 1992

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ ОСВІТИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ ВИЩОЇ ОСВІТИ
ОДЕСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

В.В.Новіков, С.А.Яценко

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Затверджено радою Навчально-методичного
кабінету вищої освіти Мінвузу України
як навчальний посібник для студентів
технічних спеціальностей

Київ НМК ВО 1992

УДК 519.21 : 519.262.4

Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / В.В. Новиков, С.А.Яценко. - К.: УМК ВО, 1992. - 132 с. - На укр. яз.

Навчальний посібник складається з двох розділів /"Теорія ймовірностей" і "Математична статистика"/ та завдань до розрахунково-графічних робіт відповідно до цих розділів. Звертається увага як на формально-математичний бік, так і на прикладний зміст матеріалу.

Посібник призначається для студентів машинобудівних факультетів.

Іл. 20. Табл. 58. Бібліогр.: 19 назв.

Учебное пособие состоит из двух разделов /"Теория вероятностей" и "Математическая статистика"/ и заданий к расчетно-графическим работам соответственно к этим разделам. Обращается внимание как на формально-математическую сторону, так и на прикладное содержание материала.

Ил. 20. Табл. 58. Библиогр.: 19 назв.

Рецензенти: Д.І. Мартинюк, А.Ф. Шестопал

ISBN 5-7763-0990-5

Частина I

I. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

I.I. Основні поняття

Під множиною розуміють об"єднання окремих об"єктів в єдине ціле. Елементами множин можуть бути: букви, атоми, числа, функції, точки, кути тощо.

Множина вважається заданою, якщо вказано всі елементи. Вони можуть бути вказаними за допомогою якоїсь спільної ознаки. Якщо множина має скінченне число елементів, то всі елементи можуть бути визначені за допомогою деякого списку.

Множина, що містить скінченне число елементів, називається скінченною /наприклад, кількість книг у бібліотеці/, а множина, що містить нескінченне число елементів, - нескінченною /наприклад, множина натуральних чисел/. Множина, яка не містить ніяких елементів, називається пустою і позначається $\varnothing$.

Якщо множина складається з різних елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ /позначається $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$/, то належність елемента a_i до множини A позначається символом $\in$, тобто $a_1 \in A, a_2 \in A, \ldots, a_n \in A$. Якщо b не є елементом A, то пишуть $b \bar{\in} A$.

Множина A, всі елементи якої належать і множині B, називається підмножиною /частиною/ множини B. Таке співвідношення між множинами називається включенням і позначається символом $\subset$, тобто $A \subset B$. Будь-яка не пуста множина A включає до себе пусту множину $\varnothing$.

Множини, елементами яких є всі підмножини множини A, називаються множиною підмножин A. Наприклад, для множини $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ множина підмножин A є множина

$$P(A)=\{\varnothing,\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\},\{a_1,a_2,a_3\}\}.$$

Якщо множина A скінченна і складається з n елементів, то множина підмножин $P(A)$ містить 2^n елементів. Довести це можна за такою схемою. Число елементів множини підмножин N дорівнює сумі числа комбінацій:

$$N=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k;$$

з іншого боку, згідно з формулою бінома Ньютона, маємо

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n.$$

Поклавши $a=b=1$ в останній формулі, отримаємо, що $N=2^n$. До цього доведення необхідно буде повернутися після вивчення теми "Елементи комбінаторики".

У теорії множин розглядають також так звану основну множину, яка містить у собі фіксовану сукупність припустимих об"єктів, і множини, що розглядаються, які є підмножинами цієї сукупності. Так, наприклад, основною множиною арифметики служать числа, лінгвістики - слова, теорії ймовірностей - елементарні події. Основну множину будемо позначати Ω.

Множина /скінченна/ називається упорядкованою, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність деяке число /номер елемента/ від I до n, де n - число елементів множини, так що різним елементам відповідають різні числа.

I.2. Операції над множинами

I. Об"єднанням /сумою/ двох множин A і B називається множина $A\cup B$, що складається із усіх елементів, які належать до A чи B. Наприклад, $\{a,b,c\}\cup\{b,c,d\}=\{a,b,c,d\}$.

Якщо множини A і B мають спільні елементи, то кожен з цих елементів входить в $A\cup B$ лише I раз, тобто число елементів в сумі множин не обов"язково дорівнює сумі чисел елементів першої і другої множин, а може бути меншою за неї. Зокрема $A\cup A=A$.

2. Перерізом /добутком/ двох множин A і B називається множина $A\cap B$, що складається із усіх елементів, які одночасно приналежать як до A, так і до B. Наприклад, $\{a,b,c\}\cap\{b,c\}=\{b,c\}$.

3. Різницею двох множин A і B називається множина $A\setminus B$, що складається з усіх елементів A, що не входять у B. Наприклад, $\{a,b,c\}\setminus\{b,c,d\}=\{a\}$. Якщо $A\subset\Omega$, то $\Omega\setminus A$ називається доповненням множини A і позначається $\bar{A}$.

Основні властивості операцій над множинами:

1. $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$ /комутативність/.

2. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cup(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ /дистрибутивність/.

3. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ /асоціативність/.

4. $A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$.

5. $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$.

6. $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

7. $A\cup\bar{A}=\Omega, A\cap\bar{A}=\varnothing$.

8. $A\cup\Omega=\Omega, A\cap\Omega=A$.

Деколи об"єднання множин $A\cup B$ позначають у вигляді суми $(A+B)$, а переріз множин $A\cap B$ як $A\cdot B$.

Розглянемо дві скінченні множини A і B. Основна формула, якою користуються, щоб знаходити числа елементів N суми двох скінченних множин, має вигляд

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B).$$

1.3. Елементи комбінаторики

Основний принцип комбінаторики полягає у тому, що якщо деякий вибір A_1 можна здійснити n_1 різними способами, а для кожного з цих способів деякий інший вибір A_2 можна виконати n_2 способами, то вибір A_1 і A_2 можна здійснити $n_1\times n_2$ способами. Якщо потрібно виконати k різних виборів один за одним: A_1, $A_2,\dots,A_k$, при цьому перший вибір можна виконати n_1 способами, другий – n_2, третій – n_3 тощо, то всі k виборів разом можуть бути виконані $n_1\times n_2\times\dots\times n_k$ способами. Основний принцип комбінаторики ще називають правилом множення.

Приклад I. У першості країни з футболу беруть участь I6 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова медалі? /Припускаємо, що всі команди одного рівня/.

Розв"язання. Золоту медаль може одержати одна із I6 команд, тобто призера можна вибрати I6 способами / $n = 16$/. Якщо першого призера визначили, то другого /срібна медаль/ можна вибрати I5 способами / $n_2 = 15$/, а третього - I4 способами; число способів, за якими можуть бути розподілені призери, дорівнює /теоретично/

$$n_1 \times n_2 \times n_3 = 16 \times 15 \times 14 = 3360.$$

Приклад 2. Скількома способами можна посадити за круглий стіл п"ятьох чоловіків і п"ятьох жінок так, щоб дві особи однієї статі не сиділи поряд?

Розв"язання. Нехай стільці пронумеровані. Тоді на стільці з парними номерами можуть сісти жінки, на непарні - чоловіки. Всіх способів буде 5!x5!. Потім на парні сядуть чоловіки, на непарні - жінки, способів знову буде 5! x 5!. Тоді всіх способів буде 2 x 5! x 5!.

Переставлення. Нехай дана деяка множина A, що складається з n різних елементів $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Переставленнями із n елементів є всякі скінченні упорядковані множини, що містять n різних елементів, які можна одержати із множини A. Число переставлень із n елементів позначається P_n і дорівнює

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3 \times \dots \times (n-1)\, n = n!; \quad 0! = 1; \quad 1! = 1$$

Дійсно. Будемо послідовно вибирати елементи множини A і розміщувати їх у певному порядку на n місцях.

На першому місці можна поставити будь-який із n елементів. Після того, як перше місце заповнено, на друге місце можна поставити будь-який із n-I елементів, що залишилися, тощо. За правилом множення всі n місць можна заповнити $n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1 = n!$ способами. Отже, множину A із n елементів можна упорядкувати $n!$ способами.

Приклад 3. Скількома способами можна розмістити на полиці чотири книжки?

Розв"язання. Шукане число способів дорівнює числу упорядкованих множин, що складаються з чотирьох елементів, тобто $P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.

Комбінації з n по k. Нехай A - множина із n елементів. Довільна k-елементна підмножина множини A із n елементів називається комбінацією із n елементів по k. Порядок елементів у підмножині не є істотним, різні підмножини відрізняються одна від одної хоча б одним елементом. Число k -елемент підмножин із n елементів позначають C_n^k.

Приклад 1. Нехай $A=\{a_1,a_2,a_3\}$. Тоді $\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\}$ – всі можливі комбінації з трьох елементів по одному, тобто $C_3^1 = 3$. Всі можливі комбінації з трьох по два $\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\}$, тобто $C_3^2 = 3$.

Теорема. Число всіх k -елементних підмножин множини A із n елементів

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad /1/$$

Доведення. Щоб побудувати k-елементну підмножину множини A, потрібно до k $(k-1)$-елементної множини приєднати один із $n-k+1$ елементів, які не входять у цю підмножину. Оскільки $(k-1)$-елементних підмножин є C_n^{k-1} і кожну з них можна зробити k -елементною $n-k+1$ способами, то таким чином отримуємо $(n-k+1)C_n^{k-1}$ підмножин. Але не всі вони будуть різними, оскільки кожну k -елементну множину можна побудувати k -способами. Тому обчислене число $(n-k+1)C_n^{k-1}$ в k раз більше, ніж число C_n^k k -елементних підмножин. Отже,

$$kC_n^k=(n-k+1)C_n^{k-1}. \qquad /2/$$

Звідси знаходимо

$$C_n^k=\frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}=\frac{n-k+1}{k}\,\frac{n-k+2}{k-1}C_n^{k-2}=\frac{(n-k+1)\dots(n-1)}{k(k-1)\dots 2\cdot 1}C_n^1 .$$

Але число одноелементних підмножин множини A дорівнює кількості елементів, тобто n. Таким чином,

$$C_n^k=\frac{(n-k+1)\dots(n-1)}{k(k-1)\dots 2\cdot 1}n=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\,\frac{(n-k)(n-k-1)\dots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\dots 2\cdot 1}=$$
$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Отже, отримуємо $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Приклад 2. Скільки існує способів, щоб із семи чоловік вибрати комісію із трьох осіб?

Розв"язання. Число всіх трьохелементних підмножин множини, що складається з семи осіб,

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

Теорема. Існує рівність $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$.

Доведення. Оскільки $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, то

$$C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!};\quad C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}.$$

Знайдемо суму:

$$C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{(n-1)!\,n}{(k-1)!(n-k-1)!\,k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Таким чином,

$$C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k. \qquad /3/$$

Як уже було показано, виконується рівність

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n. \qquad /4/$$

Доведіть самостійно, що є правильною рівність

$$C_{m+n}^{n} = C_{m+n}^{m}. \qquad /5/$$

Упорядковані підмножини даної множини. Розглянемо упорядковані підмножини даної множини M, які містять n елементів. Сама множина M вважається неупорядкованою, тому кожна її підмножина може бути упорядкована якимось можливим способом. Число всіх k-елементних підмножин множини A дорівнює C_n^k, а кожну таку підмножину можна упорядкувати $k!$ способами. Отже, число всіх упорядкованих k-елементних підмножин множини A буде дорівнювати $k!\,C_n^k$, тобто

$$A_n^k = k!\;C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad /6/$$

Упорядковані k-елементні підмножини із n елементів називаються розміщеннями із n елементів по k. Різні розміщення із n по k відрізняються кількістю елементів або їх порядком.

Приклад 3. Студенту необхідно здати три іспити протягом 10 днів. Скількома способами можна це зробити?

Розв'язання. Число способів дорівнює числу 3-елементних упорядкованих підмножин /для складання іспитів/ множини із 10 елементів, тобто

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{3!} = 604800.$$

Переставлення з повтореннями. Число різних переставлень, які можна утворити з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, k_m елементів m-го типу

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}; \quad k_1+k_2+\dots+k_m = n. \qquad /7/$$

Дійсно. Розглянемо множину A з n елементів. Скількома способами можна розкласти множину A на суму m підмножин $A = B_1 \cup B_2 \cup \dots B_m$ так, щоб $N(B_1)=k_1$, $N(B_2)=k_2, \dots, N(B_m)=k_m$? Множини $B_1, B_2, \dots, B_m$ не повинні мати спільних елементів.

Довільна k_1-елементна підмножина B_1 множини A може бути отримана $C_n^{k_1}$ способами; із $n-k_1$ елементів, що залишились, візьмемо k_2-елементну підмножину B_2, яку можна одержати $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами, тощо. Таким чином, загальна кількість способів вибору різних множин $B_1, B_2, \dots, B_m$ за правилом множення

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \dots C_{n-k_1-\dots-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}. \qquad /8/$$

Розглянемо наступну інтерпретацію отриманого результату. Нехай маємо n букв: k_1 - букв a_1, k_2 - букв $a_2, \dots, k_m$ - букв a_m $(k_1+k_2+\dots+k_m=n)$. Визначимо, скільки різних слів можна скласти з цих букв /слова складаються зліва направо/. Пронумеруємо місця, зайняті буквами, числами 1, 2, ..., n. Кожне слово визначається множиною B_1 /номери місць, де стоїть буква a_1/, B_2 /номери місць, де стоїть буква a_2/, ..., B_m /номери місць, де стоїть буква a_m/. Отже, число різних слів дорівнює числу способів, за допомогою яких можна зобразити множину $A=\{1,2,\dots,n\}$ у вигляді суми множин $B_1, B_2,\dots,B_m$, тобто

$$P_n(k_1,k_2,\dots,k_m)=\frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_m!}. \qquad /9/$$

Наприклад, число різних слів, які можна отримати, переставляючи букви слова "математика",

$$P_{10}(2,3,2,1,1)=\frac{10!}{2!\,3!\,2!}=151200.$$

<u>Взаємно однозначна відповідність</u>. Нехай задано дві множини A і B. Кажуть, що між множинами A і B існує взаємно однозначна відповідність, якщо кожному елементу із A відповідає лише один елемент із B і різним елементам множини A відповідають різні елементи множини B.

Множини, для яких існує взаємно однозначна відповідність, називаються <u>еквівалентними</u>.

<u>Теорема</u>. Для того щоб дві множини були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб вони мали однакову кількість елементів.

<u>Приклад</u>. Знайти число розміщень n однакових предметів в m урнах.

<u>Розв"язання</u>. Пронумеруємо урни. Поставимо у відповідність до кожного розміщення предметів в урнах послідовність із нулів та одиниць наступним чином: спочатку послідовність має групу нулів, кількість яких дорівнює числу предметів у першій урні, далі записуємо одиницю і потім стільки нулів, скільки предметів в другій урні, знову записуємо одиницю, потім стільки нулів, скільки предметів у третій урні, тощо. Закінчує послідовність група нулів, яка є число предметів у останній урні.

Отже, послідовність має n нулів, m –1 одиниць, всього $n+m$ – 1 чисел. Наприклад, при n = 10, m = 4 послідовність 1011000000000 відповідає розміщенню: перша урна пуста, в другій – один предмет; третя – пуста, в четвертій – дев"ять предметів.

Отже, число елементів утвореної множини дорівнює C_{n+m-1}^{m-1}.

<u>Прямий добуток множин</u>. Припустимо, що задано множини $A_1,\dots,A_k$. Множина всіх елементів вигляду $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, де $a_1\in A_1, a_2\in A_2,\dots$ $\dots, a_k\in A_k$ називається прямим добутком множин $A_1,\dots,A_k$ і позначається $A_1\times A_2\times\dots\times A_k$.

Приклад 1. Якщо $A=\{a,b\}, B=\{c,d,e\}$, то $A\times B=\{(a,e),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}$.

Приклад 2. Нехай маємо множину A з n елементів. Візьмемо з A будь-який елемент, позначимо його a_1 і повернемо знову в множину A. Далі візьмемо з A деякий елемент, позначимо його через a_2 /може статися, що знову трапиться a_1/. Виконавши цю операцію k раз, одержимо набір $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, який назвемо k-словом, складеним з елементів A. Множина всіх k-слів, складених з елементів A, є прямим добутком $A\times A\times\ldots\times A$ і позначається A^k. Наприклад, якщо A - множина з двох букв $\{a,b\}$, то множина A^2 всіх слів має вигляд $\{a,a,ab,ba,bb\}$.

Всі десяткові записи чисел є словами, складеними з цифр 0,... ..,9; звичайні слова - з букв алфавіту.

З елементів множини A, котрі мають n елементів, можна скласти різні k-слова, число яких $N(A_1\times A_2\times\ldots\times A_k)$ дорівнює

$$N(A_1\times A_2\times\ldots\times A_k)=N(A_1)\times N(A_2)\times\ldots\times N(A_k). \qquad /10/$$

Приклад. Визначимо, скількома способами можна розподілити k різних предметів серед n осіб.

Розв"язання. Нехай A - множина осіб, серед яких розподіляють предмети. Пронумеруємо предмети і у відповідність до кожного способу розподілу символ $(a_1,\ldots,a_k)$, де a_1 - особа, яка отримала 1-й предмет. Очевидно, $(a_1,\ldots,a_k)$ - k-слово, складене з елементів множини A. Встановлена відповідність є взаємно однозначною, і тому число способів розподілу k предметів серед n осіб дорівнює числу k-слів, які можна скласти із елементів множини A, тобто n^k.

Запитання для самоконтролю

1. Дати визначення суми, добутку та різниці двох множин.
2. Перелічити основні властивості операцій над множинами.
3. У чому полягає основний принцип комбінаторики?
4. Які сполуки називаються розміщеннями?
5. Які сполуки називаються переставленнями?
6. Які сполуки називаються комбінаціями?
7. Довести теорему: $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

8. Довести теорему: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$.

9. Які сполуки називаються переставленням з повтореннями?

2. ІМОВІРНІСНИЙ ПРОСТІР

2.І. Випадкові події

Здійснення певного комплексу умов будемо називати випробуванням. Результатом випробування є подія. Подія, яка завжди наступає в результаті випробування, називається достовірною /детермінованою/. Наприклад, схід і захід сонця є подія детермінована.

Подія, яка за певних умов може відбутися чи не відбутися, називається випадковою. Наприклад, під час стрільби не можливо завбачити точку в мішені, в яку попаде куля.

Випадкові події підпорядковуються деяким закономірностям, які називаються ймовірнісними. Далі будемо розглядати лише масові випадкові події, тобто такі, коли є можливість створити багато разів одні і ті самі умови, за кожною з яких може відбутися чи не відбутися деяка випадкова подія.

Події A і B називаються сумісними, якщо внаслідок випробування можливе їх сумісне здійснення. Наприклад, поразка мішені при двох пострілах. Події називаються несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу інших в одному і тому самому випробуванні. Наприклад, одиночно кидаючи кубик, подія A – поява грані з парним числом очок і подія B – поява грані з непарним числом очок – несумісні.

Випадкові події називаються незалежними, якщо поява однієї з них унаслідок випробування не впливає на появу /чи непояву/ будь-якої іншої.

Події називаються рівноможливими, якщо ні одна з них не є більш можливою, ніж інша. Наприклад, випадання герба чи цифри при підкиданні монети.

Випадкові події утворюють повну групу несумісних подій, якщо в кожному випробуванні обов"язково відбудеться одна із них. Наприклад, поява очок І, 2, 3, 4, 5, 6 при метанні гральної кості.

Нехай, повторюючи /багаторазово/ експеримент / N раз/, випадкова подія A здійснюється $N(A)$ раз. Число $N(A)$ називається частотою події A. Виявляється, що при великих N відносна частота $N(A)/N$ прямує до постійного числа, тобто при кількох серіях $N_1, N_2, \dots, N_s$ спостережень події A в одних і тих самих умовах виконується

$$\frac{N_1(A)}{N_1} \cong \frac{N_2(A)}{N_2} \cong \dots \cong \frac{N_s(A)}{N_s}. \qquad /11/$$

Число кидань	Число появ герба	Відносна частота
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Таким чином, відносна частота $\omega_k(A)$ коливається біля одного і того самого числа, яке характеризує дану випадкову подію A. Це $P(A)$ число називають <u>імовірністю події A</u>. Наприклад, кидаючи монету багаторазово, випадкова подія A – випадання герба настає з імовірністю 1/2, тобто $P(A) = 1/2$.

<u>Простір елементарних наслідків</u>. Розглянемо деякий експеримент, всі можливі наслідки якого можна описати деяким числом різних наслідків $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \dots$.

Множина всіх можливих наслідків експерименту буде зображена як <u>простір елементарних наслідків</u> $\Omega(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots)$, в якому кожен можливий результат експерименту зображено <u>одним і тільки одним</u> елементарним наслідком.

Вивчення простору елементарних подій являє собою перший крок до формулювання поняття <u>ймовірнісної моделі того чи іншого експерименту</u>.

<u>Приклад 1</u>. Монету підкидають 1 раз. Простір елементарних наслідків цього експерименту складається з двох елементів $\Omega = \{Г, Р\}$, де буква $Г$ – означає появу герба, а $Р$ – цифра.

<u>Приклад 2</u>. Монету підкидають двічі. Тоді $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

<u>Приклад 3.</u> Кидають кубик, на якому вибито очки від 1 до 6. Тут $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

У розглянутих прикладах простір елементарних наслідків є <u>скінченним</u>. У багатьох випадках Ω може бути <u>нескінченним</u>, тобто містити в собі нескінченне число елементарних наслідків.

<u>Приклад 4</u>. Дві особи A і B домовились зустрітись у проміжку часу $[0,T]$. Якщо через x позначити час приходу A, а через y – час приходу B, то простором елементарних наслідків буде множина

$$\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le T,\ 0 \le y \le T\}.$$ /12/

Подія – це наслідок експерименту.

Зауваження. Випадкову подію можна визначити як деяку підмножину простору елементарних наслідків. Наприклад, у прикладі 3 подіями можуть бути:

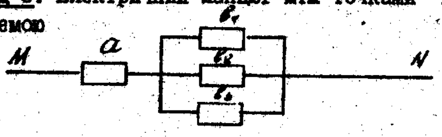
$A = \{2, 4, 6\}$ – поява парного числа очок;

$B = \{1, 3, 5\}$ – поява непарного числа очок.

Зрозуміло, що $A \cap B = \varphi$. За таким підходом неможлива подія ототожнюється з пустою множиною φ, а достовірна подія – з простором елементарних наслідків Ω, який породжений даним випробуванням.

Нарешті, такий підхід дає змогу визначити операції над подіями.

Приклад 5. Електричний ланцюг між точками M і N влаштовано за схемою



Подія A – вихід із ладу елемента a, B_K – вихід з ладу елемента b_K, $K = 1, 2, 3$. Описати події C і $\bar{C}$, якщо C означає розрив ланцюга.

Розв"язання. Розрив ланцюга відбудеться, якщо вийде з ладу елемент a або всі три елементи b_K, $K = 1, 2, 3$, тобто $C = A + B_1 B_2 B_3$, тоді $\bar{C} = \overline{A + B_1 B_2 B_3}$ або $\bar{C} = \bar{A}(\bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_3)$, або $\bar{C} = \bar{A} \cdot \overline{B_1 B_2 B_3}$.

Аксіоми теорії ймовірностей

Аксіома 1. Розглянемо простір елементарних наслідків $\Omega = (\omega_K)$. Кожній точці цього простору приписується деяке число $P(\omega_K)$, яке називається ймовірністю елементарного наслідку. При цьому виконується:

1/ $P(\omega) \ge 0$;

2/ $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_K) + \ldots = 1$, тобто $\sum\limits_{\Omega(\omega_K)} P(\omega_K) = 1$,

сума поширюється на всі точки простору елементарних наслідків.

Аксіома 2. Ймовірність події A дорівнює сумі ймовірностей усіх тих елементарних наслідків ω_K, які утворюють дану подію, тобто

$$P(A)=\sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i). \qquad /13/$$

Наслідки:

1/ $P(A)+P(\bar{A})=1$;

2/ $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$, якщо $A \cap B = V$;

3/ $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$;

$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+$
$+P(A \cap B \cap C)$.

2.2. Класичне правило обчислення ймовірностей

У багатьох випадках усі можливі елементарні наслідки ω_K, із міркувань симетрії зображають як рівноможливі. В тому разі, якщо простір елементарних наслідків $\Omega(\omega)$ складається з точок $\omega_1, \ldots, \omega_N$, де $N < \infty$, вважається, що

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\ldots=P(\omega_N)=\frac{1}{N}. \qquad /14/$$

Отже, для будь-якої події A маємо $P(A)=N(A)/N$, де $N(A)$ – число елементарних наслідків, що сприяють появі A. Останню формулу ще записують як

$$P(A)=\frac{m}{N}, \qquad /14а/$$

де m – число наслідків, що сприяють появі події A; N – число всіх можливих наслідків.

Приклад 1. Кидають кубик. Визначити ймовірність того, що випаде число очок кратне 2:

$$A=\{2,4,6\},\ P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Кубик кидають двічі. Знайти ймовірність того, що сума очок, які випадуть, буде дорівнювати 5:

$$A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\};\ N=6\times6=36,\ P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

Приклад 3. Стріляючи, ймовірність влучення в ціль дорівнює 0,7. Визначити ймовірність влучення, якщо по мішені зроблено два постріли:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0{,}91.$$

Приклад 4. Технічний контроль перевіряє взяті навмання M деталей із партії в N деталей $(M<N)$. В партії виявилось K бракованих деталей. Яка ймовірність того, що серед деталей, що перевіряються, виявиться рівно L $(L \leq K)$ бракованих?

Розв"язання. За класичним визначенням, шукана ймовірність $P = \frac{m}{n}$, n - число всіх можливих наслідків. У даній задачі $n = C_N^m$, m - число наслідків, що сприяють наявності серед перевірених L бракованих деталей, тобто їх число дорівнює C_K^L, а $m = C_K^L \, C_{N-K}^{M-L}$. Тоді $$P = \frac{C_K^L \, C_{N-K}^{M-L}}{C_N^m}.$$

2.3. Геометрична ймовірність

Під геометричною ймовірністю будемо розуміти ймовірність попадання точки в деяку область /відрізок, частину площини тощо/.

Нехай D - деяка область, що має міру $mes(D)$ /довжину, площу, об"єм/; $D_1, D_2, \ldots, D_n$ - підобласті області D. Умови експерименту такі, що ймовірність попадання в ту чи іншу підобласть не залежить від розміщення підобласті в D і пропорційна мірі підобласті, тобто $P(D_1) = k\,mes(D_1)$, а оскільки $P(D) = k\,mes(D) = 1$, то $K = \frac{1}{mes(D)}$. Звідси $$P(D_1) = \frac{mes(D_1)}{mes(D)}.$$

Приклад 5. Усередину круга радіуса R кинуто точку. Встановити ймовірність того, що точка опиниться всередині вписаного в круг квадрата.

Розв"язання. mes круга $= \pi R^2$. Сторона вписаного в круг квадрата $a = R\sqrt{2}$, а mes квадрата дорівнює $2R^2$. Шукана ймовірність

$$P = \frac{mes \text{ квадрата}}{mes \text{ круга}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \cong 0{,}6.$$

2.4. Умовна ймовірність

Нехай події A_1 і A_2 можуть з"являтися, коли здійснюється деякий експеримент. При цьому ймовірність подій A_1, A_2 і $A_1 \cap A_2$ дорівнює відповідно $P(A_1), P(A_2), P(A_1 \cap A_2)$.

Нехай відомо, що подія A_2 відбулася. Необхідно визначити ймовірність того, що при цьому відбудеться подія A_1, тобто $P(A_1/A_2)$, яка називається умовною ймовірністю. $P(A_1/A_2)$ можна визначити за наступною схемою.

Дамо визначення умовної ймовірності елементарних наслідків ω_i:

$$P(\omega_i/A_2) = P(\omega_i)/P(A_2), \qquad /15/$$

для яких виконується

$$\sum_{\omega_i \in A_2} P(\omega_i/A_2) = \frac{1}{P(A_2)} \sum_{\omega_i \in A_2} P(\omega_i) = \frac{P(A_2)}{P(A_2)} = 1.$$

Звідси випливає, що для обчислення $P(A_1/A_2)$ потрібно підсумувати умовні ймовірності $P(\omega_i/A_2)$ всіх елементарних наслідків ω_i, які належать A_1 і A_2 одночасно, тобто $A_1 \cap A_2$:

$$P(A_1/A_2) = \sum_{\omega_i \in A_1 \cap A_2} P(\omega_i/A_2) = \frac{1}{P(A_2)} \sum_{\omega_i \in A_1 \cap A_2} P(\omega_i) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}.$$

Таким чином, отримуємо

$$P(A_1/A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}. \qquad /16/$$

Звідси випливає, що

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)P(A_1/A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1). \qquad /17/$$

Якщо події A_1 і A_2 незалежні, то $P(A_1/A_2) = P(A_1)$.

Приклад 6. В урні п"ять білих, чотири чорних і три синіх кулі. Кожне випробування полягає в тому, що виймають одну за одною три кулі, не повертаючи їх назад. Знайти ймовірність того, що при першому випробуванні з"явиться біла куля /подія A /, при другому – чорна /подія B /, при третьому – синя /подія C /.

Розв"язання. Події A, B, C – залежні, тому

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cong 0{,}04.$$

2.5. Формула повної ймовірності

Нехай набір випадкових подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворює повну групу, тобто

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = U; \quad A_i \cap A_j = V. \qquad /18/$$

Тоді

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\, P(B/A_k) \qquad /19/$$

Доведення. З /18/ випливає, що

$$B = B \cap U = B \cap A_1 + B \cap A_2 + \dots + B \cap A_n;$$
$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k).$$

З урахуванням /16/ отримуємо

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\, P(B/A_k).$$

Приклад 7. Нехай з пункту 0 потрібно пройти в пункт A. Рухаючись з пункту 0, шлях вибирається навмання /рис. 1/. Потрібно визначити ймовірність попадання з пункту O в пункт A.

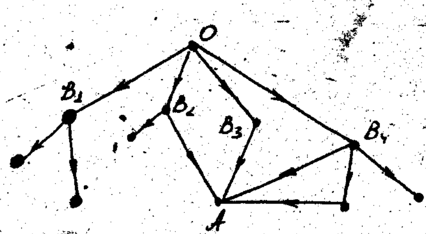


Рис. 1

Розв'язання. Шлях обов'язково проходить через одну з проміжних точок B_1, B_2, B_3, B_4. Події B_1, B_2, B_3, B_4 полягають у тому, що шлях буде проходити через пункт B_k, і вони утворюють повну групу:

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = U; \quad B_i \cap B_j = V.$$

Усі події B_1, B_2, B_3, B_4 рівноймовірні, тому $P(B_k) = 1/4$. Щоб попасти в пункт B_1, існує три рівноймовірних шляхи: $P(A/B_1) = \frac{1}{3}$.

Тотожно $P(A/B_2) = \frac{1}{2}$; $P(A/B_3) = 1$; $P(A/B_4) = \frac{2}{3}$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)+$$
$$+P(B_4)P(A/B_4)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+\frac{2}{3}\right).$$

Приклад 8. На склад надходять деталі з двох верстатів. Продуктивність праці першого верстата вдвічі вища, ніж у другого. Ймовірність браку на першому верстаті 0,10, на другому – 0,15. Встановити ймовірність того, що взята навмання зі складу деталь виявиться небракованою.

Розв"язання. Нехай A – деталь небракована. Вона може бути виготовлена на першому /подія B_1 / або другому /подія B_2 / верстаті

$$P(B_1)=\frac{2}{3};\ P(B_2)=\frac{1}{3};\ P(A/B_1)=0,90;\ P(A/B_2)=0,85.$$

Тоді шукана ймовірність обчислюється за формулою

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)=\frac{2}{3}\cdot 0,90+\frac{1}{3}\cdot 0,85\cong 0,88.$$

Формула Бейєса. Якщо виконується рівність /18/, то вірна

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)} \qquad /20/$$

рівність, яка називається формулою Бейєса.

Доведення.

$$P(A_k\cap B)=P(A_k)P(B/A_k)=P(B)P(A_k/B) \qquad /21/$$

Звідки

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)}. \qquad /22/$$

Ця формула носить назву формули Бейєса, чи теореми гіпотез.

Приклад 9. Є дві урни з білими і чорними кулями: в першій m_1 білих і n_1 чорних, в другій m_2 білих і n_2 чорних. Навмання вибирається урна і з неї навмання вибирається куля. Відомо, що вибрано білу кулю. Знайти вірогідність того, що була вибрана перша урна.

Розв"язання. Нехай B_1 – подія, яка полягає в тому, що вибрана перша урна, B_2 – подія, за якої була вибрана друга урна, A – подія, за якої внаслідок вибору урни і вибору кулі вибрано білу кулю.

За формулою Бейєса отримуємо:

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)} \qquad /23/$$

При цьому

$$P(A/B_1)=\frac{m_1}{m_1+n_1};\ P(A/B_2)=\frac{m_2}{m_2+n_2};\ P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$$

Тоді

$$P(B_1/A)=\frac{m_1(m_2+n_2)}{2m_1m_2+m_1n_2+m_2n_1}. \qquad /24/$$

Приклад 10. Інформація передається у двійковому коді "0" і "1". У процесі передачі можливі викривлення. Відомо, що в тексті, який передається, число сигналів "1" відноситься до числа "0" як 5:3. Відомо також, що викривляється 2/5 сигналів "1" та 1/3 сигналів "0". Прийнято "1". Яка ймовірність того, що було передано сигнал "1"?

Розв"язання. Подія A полягає в тому, що було прийнято "1". Гіпотеза B_1 – передано "1", B_2 – передано "0":

$$P(B_1)=\frac{5}{8};\ P(B_2)=\frac{3}{8};\ P(A/B_1)=\frac{3}{5};\ P(A/B_2)=\frac{1}{3};$$

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)}=\frac{5/8\cdot 3/5}{5/8\cdot 3/5+3/8\cdot 1/3}=\frac{3}{4}.$$

Формула Бернуллі. Розглянемо простір елементарних наслідків Ω, який складається з двох елементів ω_1 і ω_2: ω_1 – успіх; ω_2 – невдача.

Розглянемо множину всіх підмножин простору Ω:

$$A=\{\{\varnothing\},\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_1,\omega_2\}\}.$$

Введемо ймовірність $0, p, q$ $(p+q=1)$. Розглянемо новий простір Ω_n, де $\omega=(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\dots,\omega^{(n)})$, $\omega^{(i)}$ – або успіх ω_1, або невдача ω_2 $(i=1,\dots,n)$. Тут ω – послідовність незалежних наслідків.

Простір Ω_n можна розглянути як математичну модель n випробувань з двома наслідками в кожному.

Кожній точці простору припишемо ймовірність $p^m q^{n-m}$. При цьому $\sum_{m=0}^{n} p^m q^{n-m} = 1$.

Розглянута схема називається <u>схемою Бернуллі</u>.

<u>Теорема</u>. Для будь-якого цілого $m (0 \le m \le n)$ існує рівність

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

1. Якщо $m \le 0{,}14\sqrt{n}$, то матимемо наближену формулу

$$C_n^m p^m q^{n-m} \cong \frac{1}{m!}\left(\frac{np}{q}\right)^m q^n.$$

2. Якщо $n \to \infty, p \to 0$, а $np \to \lambda$, де λ - додатне число, то ймовірність

$$P_n(m) \cong e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \qquad /25/$$

називається формулою Пуассона.

3. Якщо $n \to \infty$, а $p \sim \frac{1}{2}$, то вірні формули Муавра - Лапласа:

$$P_m(m) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}; \qquad /26/$$

$$P\left\{a \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad /27/$$

Якщо ввести функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ і $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$, то формули /26/, /27/ будуть мати вигляд

$$P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}; \qquad /28/$$

$$P_n\{a \le m \le b\} \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad /29/$$

$$x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}; \quad x^2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}.$$

Є таблиці значень $\varphi(x)$, що відповідають додатним значенням x. Для від"ємних значень x використовуються ці самі таблиці, оскільки $\varphi(-x)=\varphi(x)$, причому для $x>4$ приймається $\varphi(x)=0$.

Функція Лапласа $\Phi(x)$ – непарна, тобто $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ і для $x>5$ приймають $\Phi(x)=0,5$.

Приклад II. В урні сім білих і три чорних кулі. Яка ймовірність того, що при 100 незалежних виборах з поверненням 60 раз буде вийматися біла куля?

Розв"язання. За формулою Бернуллі маємо:

$$P_{100}(60)=C_{100}^{60}(0,7)^{60}(0,3)^{40}.$$

За локальною теоремою Муавра – Лапласа

$$P_{100}(60)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\,100\cdot 0,7\cdot 0,3}}\,e^{-\frac{(60-0,7\cdot 100)^2}{2\sqrt{100\cdot 0,7\cdot 0,3}}}\cong\frac{e^{-2,38}}{\sqrt{42\pi}}.$$

Приклад I2. В урні сім білих і три чорних кулі. Яка ймовірність, що при 100 незалежних вибірках з поверненням не менше 80 раз буде вийматися біла куля?

Розв"язання. За інтегральною теоремою Муавра – Лапласа

$$P(\omega\geq 80)=1-P(\omega<80)=1-P\left(-\infty\leq\frac{\omega-100\cdot 0,7}{\sqrt{100\cdot 0,7\cdot 0,3}}\leq\frac{10}{\sqrt{21}}\right)\cong$$

$$\cong 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{10/\sqrt{21}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cong 0,05.$$

Приклад I3. В урні п"ять білих і 50 чорних куль. Яка ймовірність, що при I0 незалежних вибірках з поверненням 3 рази буде вийматися біла куля?

Розв"язання. За формулою Бернуллі

$$P_{10}(3)=C_{10}^{3}\left(\frac{1}{11}\right)^3\left(\frac{10}{11}\right)^7\cong 0,013.$$

За наближеною формулою Пуассона

$$P_{10}(3)=\frac{(0,9)^3}{3!}e^{-0,9}\cong 0,011.$$

Приклад I4. За даними ВТК на 100 металевих брусків 30 мають дефект. Яка ймовірність того, що з семи брусків без дефекту буде не більше двох /подія A/.

Розв"язання. $P(A)=P_7(k\le 2)=P_7(0)+P_7(1)+P_7(2)$.

Ймовірність наявності бруска без дефекту

$$p=\frac{70}{100}=0{,}7;\quad q=1-p=0{,}3;$$

$$P(A)=(0{,}3)^7+7\cdot 0{,}7\cdot(0{,}3)^6+\frac{7\cdot 6}{2}(0{,}7)^2(0{,}3)^5\cong 0{,}03$$

Приклад I5. Якщо виробництво діодів масове, ймовірність браку 0,I. Яка ймовірність того, що з 400 навмання взятих діодів буде рівно 50 бракованих?

Розв"язання. Тут n = 400; m = 50; p = 0,I; q = 0,9. За локальною формулою Лапласа

$$P_{400}(50)\cong\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\,\varphi(x);\quad x=\frac{50-400\cdot 0{,}1}{\sqrt{400\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}=1{,}67$$

За φ /I,67/ = 0,I02. Тоді $P_{400}(50)=\frac{1}{6}\cdot$ 0,I02 $\cong$ 0,0I7.

Приклад I6. Середня кількість літаків, що прибувають до аеропорту за I хв, дорівнює двом. Знайти ймовірність того, що за 3 хв прибуде: а/ два літаки; б/ менше двох літаків. Припускається, що потік літаків найпростіший.

Розв"язання. Середня кількість літаків за 3 хв λ = 2·3 = 6.

а/ $P_n(2)\cong e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-6}\frac{6^2}{2!}\cong 0{,}045;$

б/ $P_n(m<2)\cong P_n(m=0)+P_n(m=1)=\frac{7}{e^6}\cong 0{,}018$.

Запитання для самоконтролю

I. Які події називаються сумісними та несумісними?
2. Які події називаються залежними та незалежними?
3. Які події утворюють повну групу?
4. Що таке простір елементарних наслідків?
5. У чому полягає класичне визначення ймовірності?
6. У чому полягає геометричне визначення ймовірності?
7. Довести формулу повної ймовірності.
8. Довести формулу Бейєса.
9. Довести формулу Бернуллі.
I0. Довести формулу Пуассона, локальну та інтегральну теорему Лапласа.

3. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ І ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ

3.1. Випадкові величини

Числова величина ξ, значення якої залежать від елементарних наслідків $\omega \in \Omega$, називається випадковою, тобто випадковою величиною називається функція, що задана на просторі елементарних наслідків Ω:

$$\xi = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Приклад 1. Нехай двічі підкидають монету. Простір елементарних наслідків має вигляд $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

Нехай ξ – число появ герба /Г/. Величина ξ є функцією $\xi = \xi(\omega)$ елементарної події:

ω	ГГ	ГР	РГ	РР
$\xi(\omega)$	2	1	1	0

Якщо множина Ω, на якій задано випадкову величину $\xi(\omega)$, дискретна, то випадкова величина $\xi(\omega)$ називається дискретною.

Якщо множина Ω, на якій задано $\xi(\omega)$, неперервна, то $\xi(\omega)$ називається неперервною.

Таким чином, випадкова величина $\xi(\omega)$ має дискретний розподіл, якщо залежно від елементарних наслідків ω величина $\xi = \xi(\omega)$ приймає скінченне чи нескінченне число різних значень x з відповідними ймовірностями

$$P_\xi(x) = P(\xi = x), \sum_{-\infty}^{\infty} P_\xi(x) = 1, \qquad /30/$$

де x – можливе значення випадкової величини.

Випадкова величина $\xi = \xi(\omega)$ має неперервний розподіл ймовірностей, якщо для будь-яких x' і x'' $(x' < x'')$

$$P(x' \le \xi \le x'') = \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx, \qquad /31/$$

де $f(x)$ називається щільністю розподілу ймовірностей величини ξ, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Функція $F_\xi(x)$ називається <u>функцією розподілу</u> величини ξ, якщо $F_\xi(x)=P(\xi<x), -\infty<x<\infty$. Тобто $F_\xi(x)$ визначає ймовірність того, що випадкова величина $\xi(\omega)$ набуває значення менше за x. При цьому виконується $f(x)=F'_\xi(x)$.

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	P_1	P_2	...	P_n

Властивості функції розподілу $F_\xi(x)$:

1/ $0 \le F_\xi(x) \le 1$;

2/ $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$;

3/ $F_\xi(-\infty)=P(x<-\infty)=0$; $F_\xi(\infty)=P(x<-\infty)=1$;

4/ $P(a \le x \le b)=F_\xi(b)-F_\xi(a)$.

На рис. 2 і 3 зображено функції розподілу $F_\xi(x)$ відповідно для неперервної і дискретної випадкових величин.

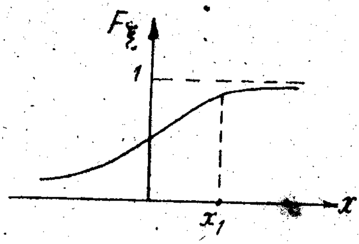


Рис. 2

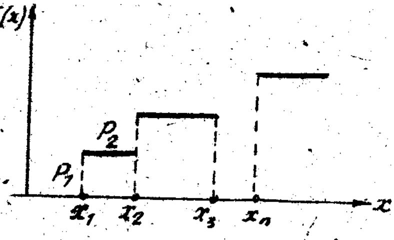


Рис. 3

Якщо випадкова величина $\xi(\omega)$ має неперервний розподіл ймовірностей, то для кожного окремого значення x_i матимемо

$$F_\xi(x_i)=P(\xi=x_i)=0,$$

тобто ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме конкретне значення x_i, дорівнює нулю.

Для дискретної випадкової величини $\xi(\omega)$ функція розподілу $F_\xi(x)$ є ступінчастою /рис. 3/ і стрибок у точці x_i дорівнює ймовірності того, що $\xi(\omega)=x_i$.

Функцією розподілу випадкових величин ξ і η називається ймовірність

$$F_{\xi\eta}(x,y)=P(\xi<x,\ \eta<y), \qquad /32/$$

яка розглядається як функція точки (x,y). Для $F_{\xi\eta}(x,y)$ виконується

$$\lim_{y\to\infty} F_{\xi\eta}(x,y)=F_{\xi}(x); \quad \lim_{x\to\infty} F_{\xi\eta}(x,y)=F_{\eta}(y). \qquad /33/$$

Випадкові величини $\xi(\omega)$, $\eta(\omega)$ називаються незалежними, якщо для будь-яких x, y виконується

$$F_{\xi\eta}(x,y)=F_{\xi}(x)\cdot F_{\eta}(y). \qquad /34/$$

3.2. Математичне сподівання

Математичне сподівання випадкової величини позначається M_{ξ} і визначається відповідно для перервної і неперервної випадкової величини:

$$M_{\xi}=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega); \quad M_{\xi}=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(x)f(x)\,dx. \qquad /35/$$

Властивості математичного сподівання:

1/ $M(\xi+\eta)=M_{\xi}+M_{\eta}$;

2/ $M(C\xi)=CM_{\xi}$, $MC=C$;

3/ якщо $\xi\geq\eta$, то $M_{\xi}\geq M_{\eta}$;

4/ якщо ξ_1 і ξ_2 незалежні випадкові величини, то
$M(\xi_1\xi_2)=M_{\xi_1}\cdot M_{\xi_2}$.

Математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини.

Математичне сподівання випадкової величини, підпорядкованої біноміальному розподілу, обчислюється як $M(\xi)=np$.

Приклад I. В партії з 10 деталей є 10 нестандартних. Навмання відібрано дві деталі. Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ – числа нестандартних деталей серед двох відібраних.

Розв"язання. Число нестандартних деталей може приймати значення $\xi_1=0$, $\xi_2=1$, $\xi_3=2$ з ймовірностями

$$P_1=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{7}{15}; \quad P_2=2\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{7}{15}; \quad P_3=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15}.$$

Тоді

$$M_\xi = 0\cdot\frac{7}{15} + 1\cdot\frac{7}{15} + 2\cdot\frac{1}{15} = 0{,}6.$$

Приклад 2. Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу $f(x)=C(x^2+2x)$ у проміжку /0,1/. Поза цим проміжком $f(x) = 0$. Знайти: а/ параметр C ; б/ математичне сподівання випадкової величини ξ.

Розв"язання. Використовуючи властивість $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$,

$$\int_0^1 C(x^2+2x)dx=1;\quad C\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^1=1;\quad C=3/4,$$

математичне сподівання

$$M_\xi=\int_a^b xf(x)dx=\int_0^1\frac{3}{4}x(x^2+2x)dx=\frac{11}{16}.$$

Приклад 3. Знайти математичне сподівання випадкової величини, заданої функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ x/4 & \text{при } 0<x\le 4;\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Розв"язання. Встановимо щільність розподілу величини:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ 1/4 & \text{при } 0<x\le 4;\\ 0 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Шукане математичне сподівання $M_\xi=\int_0^4 x\frac{1}{4}dx=2.$

3.3. Дисперсія

Дисперсія випадкової величини D_ξ визначається як

$$D_\xi=M(\xi-a)^2, \qquad /36/$$

де $a=M_\xi$.

Вона являє собою міру розсіювання значень випадкової величини відносно її математичного сподівання.

Дисперсія має такі властивості:

1. $D_\xi = M_{\xi^2} - (M_\xi)^2$ –

Доведення. Маємо $D_\xi = M(\xi - M_\xi)^2 = M(\xi^2) - 2M(\xi M_\xi) +$
$+ (M_\xi)^2 = M_{\xi^2} - 2M_\xi M_\xi + (M_\xi)^2 = M_{\xi^2} - (M_\xi)^2.$

2. Для будь-якої сталої C $D(C_\xi) = C^2 D_\xi$.

3. $D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2)$.

Доведення.

$$D(\xi_1+\xi_2)=M[\xi_1+\xi_2-M(\xi_1+\xi_2)]^2=M[(\xi_1-M(\xi_1))+$$
$$+(\xi_2-M(\xi_2))]^2=M(\xi_1-M(\xi_1))^2+2M(\xi_1-M(\xi_1))M(\xi_2-$$
$$-M(\xi_2))+M(\xi_2-M(\xi_2))^2=M(\xi_1-M(\xi_1))^2+M(\xi_2-M(\xi_2))^2=$$
$$=D(\xi_1)+D(\xi_2).$$

4. Дисперсія різниці двох випадкових величин $\xi_1(\omega)$ і $\xi_2(\omega)$ дорівнює сумі дисперсій $D(\xi_1 - \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2)$.

Доведення.

$$D(\xi_1-\xi_2)=D(\xi_1)+D(-\xi_2)=D(\xi_1)+D(\xi_2)(-1)^2=D(\xi_1)+D(\xi_2).$$

5. Дисперсія добутку двох випадкових незалежних величин $\xi_1(\omega)$ та $\xi_2(\omega)$ визначається за формулою

$$D(\xi_1\xi_2)=D(\xi_1)D(\xi_2)+[M(\xi_1)]^2D(\xi_2)+[M(\xi_2)]^2D(\xi_1).$$

Приклад 4. Випадкова величина ξ у проміжку $/0, \pi/$ задана щільністю розподілу $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$; поза цим проміжком $f(x) = 0$. Знайти ξ.

Розв"язання. Знайдемо:

$$D_\xi = \int_a^\ell x^2 f(x)dx - (M_\xi)^2$$

Математичне сподівання

$$M_\xi = \int_a^\ell x f(x)dx = \int_0^\pi x\frac{1}{2}\sin x dx = \frac{1}{2}\left[-x\cos x + \sin x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

тоді
$$D_\xi = \int_0^\pi x^2 \frac{1}{2}\sin x dx - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(\pi^2 - 8).$$

Величина $\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}$ називається середнім квадратичним відхиленням.

Узагальненням основних числових характеристик випадкових величин є поняття моментів.

Початковим моментом k -го порядку випадкової величини $\xi(\omega)$ називається математичне сподівання $\xi^k(\omega)$:

$$\nu_k = M\left[\xi^k(\omega)\right]. \qquad /37/$$

Для дискретної випадкової величини отримуємо

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^k(\omega) p_i ; \qquad /38/$$

а для неперервної випадкової величини –

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx. \qquad /39/$$

Центральним моментом k -го порядку випадкової величини називають математичне сподівання величини

$$\mu_k = M\left\{\left[\xi(\omega) - M_\xi\right]^k\right\}. \qquad /40/$$

Для дискретної випадкової величини

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n}\left[\xi_i - M_\xi\right]^k p_i , \qquad /41/$$

для неперервної –

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty}\left[x - M_\xi\right]^k f(x)\,dx. \qquad /42/$$

Початковий момент першого порядку являє собою математичне сподівання, а центральний момент другого порядку – дисперсію випадкової величини.

Нормований центральний момент третього порядку є характеристикою асиметрії розподілу:

$$A = \mu_3 / \sigma^3 \qquad /43/$$

Нормований центральний момент четвертого порядку є характеристикою площинновершинності розподілу:

$$E = \mu_4 / \sigma^4 - 3 \qquad /44/$$

Приклад 5. Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу $f(x)=2x$ у проміжку /0,1/; поза цим проміжком $f(x)=0$. Знайти початкові і центральні моменти першого, другого, третього і четвертого порядків.

Розв"язання. За формулою $\nu_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$ знаходимо початкові моменти:

$$\nu_1=\int\limits_0^1 x\,2x\,dx=\frac{2}{3};\quad \nu_2=\int\limits_0^1 x^2\,2x\,dx=\frac{1}{2};$$

$$\nu_3=\int\limits_0^1 x^3\,2x\,dx=\frac{2}{5};\quad \nu_4=\int\limits_0^1 x^4\,2x\,dx=\frac{1}{3}.$$

Знаходимо центральні моменти. Центральний момент першого порядку будь-якої випадкової величини $\mu_1=0$. Решту центральних моментів визначаємо як

$$\mu_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[x-M_\xi\right]^k f(x)dx,$$

тобто

$$\mu_2=\int\limits_0^1\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 2x\,dx=\frac{1}{18};\quad \mu_3=\int\limits_0^1\left(x-\frac{2}{3}\right)^3 2x\,dx=-\frac{1}{135};$$

$$\mu_4=\int\limits_0^1\left(x-\frac{2}{3}\right)^4 2x\,dx=\frac{1}{135}.$$

3.4. Рівномірний розподіл

Вважається, що неперервна випадкова величина $\xi(\omega)$ має рівномірний розподіл у проміжку $[a,b]$, якщо на ньому щільність розподілу випадкової величини постійна, а поза ним дорівнює нулю:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x<a;\\ c & \text{при}\quad a\le x\le b;\\ 0 & \text{при}\quad x>b.\end{cases}$$

Графік щільності рівномірного розподілу /рис. 4, 5/.

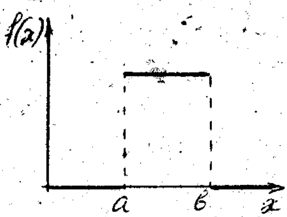


Рис. 4

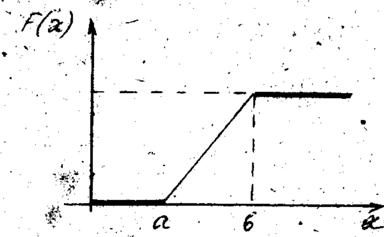


Рис. 5

Із умов нормування $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} c\,dx = 1$ отримуємо, що $C = \frac{1}{b-a}$.

У такому випадку функція розподілу

$$F(x) = \int f(x)dx = \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x-a}{b-a} \qquad /45/$$

Якщо $x<a$, то $F(x) = 0$. Якщо $x>b$, то $F(x) = 1$. Таким чином,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x<a; \\ (x-a)/(b-a) & \text{при } a \le x \le b; \\ 1 & \text{при } x>b. \end{cases} \qquad /46/$$

Математичне сподівання

$$M_\xi = \int\limits_{a}^{b} \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсія

$$D_\xi = \int\limits_{a}^{b} \left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

<u>Приклад 1.</u> Автобуси деякого маршруту йдуть строго за розкладом. Інтервал руху 5 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, буде чекати черговий автобус менше ніж 3 хв.

<u>Розв"язання.</u> ξ – можливе значення часу чекання автобуса. Для інтервалу $b-a = 5$, а щільність розподілу ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{5}; \quad P(2<\xi<5) = \int\limits_{2}^{5} \frac{1}{5}\,dx = 0,6.$$

3.5. Нормальний закон розподілу

Вважається, що випадкова величина x розподілена за нормальним законом з параметрами a і $\sigma^2 (-\infty < a < \infty)$ $\sigma > 0$, якщо вона має щільність імовірності

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right], \quad |x| < \infty. \qquad /47/$$

Функція $\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$ має такі властивості:

$$\varphi(u)=\varphi(-u),$$

$\varphi(u)\to 0$, коли $u\to\pm\infty$.

Найбільше значення функція $\varphi(u)$ має в точці $u=0$ і дві точки перегину $u=\pm 1$.

Графік функції $f(x)$ /47/ показано на рис. 6. При цьому виконується умова нормування

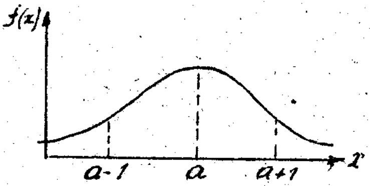


Рис. 6

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left[u=\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma};\ dx=\sqrt{2}\sigma du\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1.$$

Тут враховано, що $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=2\int_{0}^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$; $I_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-u^2}du$.

Обчислимо математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини

$$M_\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Зробимо заміну змінної: $\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}=t$, $x=a+\sqrt{2}\sigma t$, $dx=\sqrt{2}\sigma dt$,

$$M_\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(a+\sqrt{2}\sigma t)e^{-t^2}dt=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}dt=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=a,\quad \text{оскільки}\quad \int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}dt=0.$$

Таким чином, $M_\xi=a$. Точка $x=a$ є центром розподілу ймовірностей. В ній функція $f(x)$ має найбільше значення. Оскільки $f(x)$ симетрична відносно $x=a$, $\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\int_{a}^{\infty}f(x)dx$, тобто $x=a$ є медіаною.

Обчислимо дисперсію випадкової величини ξ. Якщо $a=0$, тоді $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. У цьому випадку дисперсія випадкової величини ξ.

$$D_\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\left[t=\frac{x}{\sqrt{2}\sigma};\ dx=\sqrt{2}\,\sigma dt\right]=$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\,2te^{-t^2}dt=\sigma^2 .$$

Таким чином, отримуємо $D_\xi=\sigma^2$

На рис. 7 зображено дві функції $f(x)$ з різними дисперсіями.

Функція Лапласа. Для визначення ймовірності попадання в заданий інтервал випадкової величини, яка має нормальний розподіл, використовується функція Лапласа. Розглянемо:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

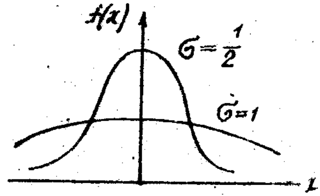


Рис. 7

Ймовірність, що ξ попаде в інтервал $\alpha<\xi<\beta$, така:

$$P(\alpha<\xi<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Зробимо заміну змінної інтегрування $\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}=t$. Тоді

$$P(\alpha<\xi<\beta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}}e^{-t^2}dt.$$

Інтеграл $I=\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}}e^{-t^2}dt$ не виражається через елементарні функції.

Інтеграл I виражається через значення інтеграла ймовірностей

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt, \qquad /48/$$

який має такі властивості:

1/ $\Phi(x)$ – визначена при всіх x;

2/ $\Phi(0)=0$;

3/ $\Phi(+\infty)=1$;

5 – 2–78

4/ $\Phi(x)$ монотонно зростає у проміжку $/0,\infty/$;

5/ $\Phi(x)$ функція непарна, оскільки $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;

6/ графік $\Phi(x)$ зображено на рис. 8.

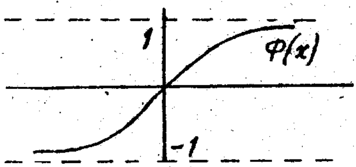


Рис. 8

Проведемо перетворення:

$$P(\alpha<x<\beta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{0} e^{-t^2}dt+\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt-\int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt\right]$$

Таким чином, отримуємо

$$P(\alpha<x<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad /49/$$

Якщо $a=0$, то

$$P(\alpha<x<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad /50/$$

Для $(a-\ell<x<a+\ell)$ маємо

$$P(a-\ell<x<a+\ell)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\ell}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{-\ell}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\ell}{\sigma\sqrt{2}}\right). \qquad /51/$$

Якщо $a=0$, то

$$P(-\ell<x<\ell)=\Phi\left(\frac{\ell}{\sigma\sqrt{2}}\right). \qquad /52/$$

Площа заштрихованої криволінійної трапеції дорівнює ймовірності попадання ξ в указаний інтервал /рис. 9/.

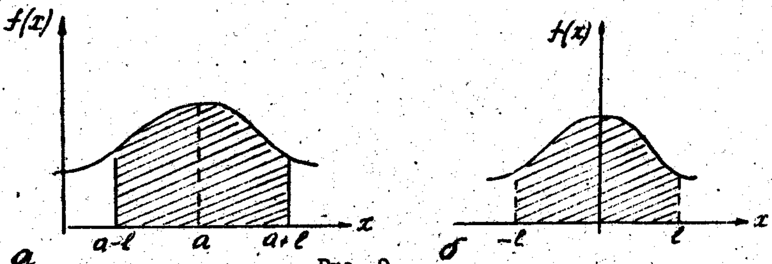


Рис. 9.

Замість $\Phi(x)$ часто користуються функцією Лапласа:

$$\bar{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \qquad /53/$$

яка зв"язана з $\Phi(x)$ простим співвідношенням $\frac{t}{\sqrt{2}}=z$:

$$\bar{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

тобто

$$\bar{\Phi}(x)=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \qquad /54/$$

Таким чином, отримуємо

$$P(\alpha<x<\beta)=\bar{\Phi}\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)-\bar{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right). \qquad /55/$$

Приклад 2. Відомо, що помилка радіодалекоміра підпорядкована нормальному закону. Математичне сподівання цієї помилки дорівнює 5 м, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 10 м. Знайти ймовірність того, що виміряне значення відстані буде відхилятися від істинного не більше, чим на 20 м.

Розв"язання. ξ – помилка далекоміра $m_\xi=5$, $\sigma_\xi=10$.

$$P(-20<\xi<20)=\bar{\Phi}\left(\frac{20-5}{10}\right)-\bar{\Phi}\left(\frac{-20-5}{10}\right)=\bar{\Phi}(1,5)-\bar{\Phi}(-2,5)=$$
$$=\bar{\Phi}(1,5)+\bar{\Phi}(2,5)\cong 0,4332+0,4938\cong 0,9270.$$

Значення $\bar{\Phi}$ /1,5/ і $\bar{\Phi}$ /2,5/ знаходимо за таблицею функції Лапласа. Надалі будемо користуватися позначеннями для математичного сподівання m_ξ, дисперсії D_ξ, випадкової величини ξ.

Інтегральну функцію нормального закону розподілу можна виразити через інтеграл ймовірностей $\Phi(x)$:

$$F(\bar{x})=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma}}dx=P(-\infty<\bar{x}<x),$$

таким чином,

$$F(\bar{x})=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi(-\infty)\right],$$

але

$$\Phi(-\infty)=1, \quad F(\bar{x})=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)+1\right] \qquad /56/$$

Ймовірним /серединним/ відхиленням називається таке число E, що ймовірність того, що випадкова величина /помилка/, підпорядкована нормальному закону розподілу $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, попадає в інтервал $/-E, E$ / і дорівнює 1/2, тобто $P(-E<x<E)=\frac{1}{2}$. Для будь-якої випадкової величини ξ, підпорядкованої нормальному закону розподілу з центром розсіювання при $\xi=a$, серединне відхилення задовольняє співвідношення

$$P(a-E<\xi<a+E)=\frac{1}{2}. \qquad /57/$$

Виразимо середнє квадратичне відхилення σ через серединну помилку E:

$$P(-E<\xi<E)=\int_{-E}^{E}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx,$$

тобто

$$P(-E<\xi<E)=\Phi\left(\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}\right). \qquad /58/$$

Таким чином, $\Phi\left(\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}\right)$ за таблицею функцій для $\Phi(x)$ знаходимо значення аргументу x = 0,4769, тобто $\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}$ = 0,4769 = ρ, звідси

$$E=\rho\sqrt{2}\sigma, \quad \sigma=\frac{E}{\rho\sqrt{2}}. \qquad /59/$$

Вираз нормального закону розподілу можна визначити через серединне відхилення у вигляді $f(x)=\frac{\rho}{E\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\rho^2x^2}{E^2}}$.

Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (α,β) відповідно

$$P(\alpha<\bar{x}<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\rho\frac{\beta}{E}\right)-\Phi\left(\rho\frac{\alpha}{E}\right)\right]$$

або

$$P(-\ell<\bar{x}<\ell)=\Phi\left(\rho\frac{\ell}{E}\right).$$

Якщо $a\neq 0$, то

$$P(\alpha<\bar{x}<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\rho\frac{\beta-a}{E}\right)-\Phi\left(\rho\frac{\alpha-a}{E}\right)\right]. \qquad /60/$$

Правило трьох сігм. Проводячи практичні обчислення, за одиницю виміру відхилення випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону від її центра розсіювання /математичного сподівання/, приймають середнє квадратичне відхилення σ. Тоді на підставі формул отримуємо:

$$P(-\sigma < \bar{x} < \sigma) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}683;$$
$$P(-2\sigma < \bar{x} < 2\sigma) = \Phi(\sqrt{2}) = 0{,}954;$$
$$P(-3\sigma < \bar{x} < 3\sigma) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}997.$$

Майже достовірно, що випадкова величина не відхилиться від математичного сподівання більш, ніж на 3σ.

Середня арифметична помилка дорівнює математичному сподіванню абсолютної величини помилок.

Визначаємо середню арифметичну помилку, якщо помилка підлягає нормальному закону:

$$d = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$$
$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(-\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

Таким чином, середня арифметична помилка виражається через середнє квадратичне відхилення σ:

$$d = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad /61/$$

Приклад 3. Вимірюється діаметр вала без систематичних помилок. Випадкові помилки вимірювання ξ підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням σ = 10 мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде виконано з помилкою, яка не перевершує за абсолютною величиною 15 мм.

Розв"язання. Математичне сподівання випадкових помилок дорівнює нулю, тому $P(|\xi| < \sigma) = 2\Phi(\delta/\sigma)$ або $P(|\xi| < 15) = 2\Phi$ /1,5/. За таблицею Φ /1,5/ = 0,4332. Тоді $P(|x| < 15)$ = 2·0,4332 = = 0,8662.

3.6. Нерівність Чебишова. Закон великих чисел

Нехай ξ – випадкова величина з математичним сподіванням M_ξ і дисперсією D_ξ.

<u>Теорема</u>. Для будь-якого $\alpha > 0$ маємо

$$P(|\xi| \geq \alpha) \leq \frac{M(\xi)}{\alpha}; \qquad /62/$$

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \alpha) \leq \frac{D(\xi)}{\alpha^2}. \qquad /63/$$

<u>Доведення</u>. Розглянемо випадок дискретної випадкової величини. Нехай задано розподіл випадкової величини відповідно до таблиці.

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	P_1	P_2	...	P_n

Зобразимо математичне сподівання $M(\xi)$ і можливі значення випадкової величини на осі $0x$ /рис. 10/.

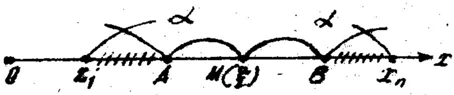


Рис. 10

Обчислимо ймовірність $P(|\xi - M(\xi)| \geq \alpha)$, тобто ймовірність того, що випадкова величина попаде не в середину відрізка $[AB]$, а поза нього. Для того щоб встановити цю ймовірність, потрібно зсумувати ймовірності всіх тих значень x_i, що лежать поза $[AB]$:

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \alpha) = \sum_{|x_i - M(\xi)| \geq \alpha} P_i. \qquad /64/$$

З іншого боку, за визначенням дисперсія

$$D(\xi) = M\left[(\xi - M(\xi))^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 P_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i - M(\xi)|^2 P_i. \qquad /65/$$

Тоді $D(\xi) \geq \sum\limits_{|x_i - M(\xi)| \geq \alpha} |x_i - M(\xi)|^2 P_i$, оскільки для всіх доданків $|x_i - M(\xi)| \geq \alpha$, то

$$D(\xi) \geq \sum_{|x_i - M(\xi)| \geq \alpha} \alpha^2 P_i = \alpha^2 \sum_{|x_i - M(\xi)| \geq \alpha} P_i = \alpha^2 P(|\xi - M(\xi)| \geq \alpha).$$

Звідси випливає нерівність /63/.

Аналогічно доводиться теорема, якщо ξ неперервна випадкова величина.

Нехай неперервна випадкова величина $\xi(\omega)$ має щільність ймовірності $f(x)$. Тоді

$$P(|\xi|-M(\xi)|\geq\alpha)=1-P(|\xi-M(\xi)|<\alpha)=1-\int_{M(\xi)-\alpha}^{M(\xi)+\alpha}f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx-\int_{M(\xi)-\alpha}^{M(\xi)+\alpha}f(x)dx=\int_{-\infty}^{M(\xi)-\alpha}f(x)dx+\int_{M(\xi)-\alpha}^{M(\xi)+\alpha}f(x)dx+\int_{M(\xi)+\alpha}^{\infty}f(x)dx-\int_{M(\xi)-\alpha}^{M(\xi)+\alpha}f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{M(\xi)-\alpha}f(x)dx+\int_{M(\xi)+\alpha}^{\infty}f(x)dx<\int_{-\infty}^{M(\xi)-\alpha}\left(\frac{x-M(\xi)}{\alpha}\right)^2f(x)dx+$$

$$+\int_{M(\xi)+\alpha}^{\infty}\left(\frac{x-M(\xi)}{\alpha}\right)^2f(x)dx\leq\int_{-\infty}^{M(\xi)-\alpha}\left(\frac{x-M(\xi)}{\alpha}\right)^2f(x)dx+$$

$$+\int_{M(\xi)-\alpha}^{M(\xi)+\alpha}\left(\frac{x-M(\xi)}{\alpha}\right)^2f(x)dx+\int_{M(\xi)+\alpha}^{\infty}\left(\frac{x-M(\xi)}{\alpha}\right)^2f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-M(\xi)}{\alpha}\right)^2f(x)dx=\frac{1}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^2f(x)dx=\frac{D(\xi)}{\alpha^2}.$$

Тут враховувалось, що $\left(\frac{x-M(\xi)}{\alpha}\right)^2>1.$

Таким чином, нерівність Чебишова /63/ доведено і для неперервних випадкових величин.

Теорема /теорема Чебишова/. Якщо $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ незалежні, існує така константа $C>0$, що $D(\xi_n)\leq C\ (n=1,2,\ldots)$, то при будь-якому $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{M(\xi_1)+M(\xi_2)+\ldots+M(\xi_n)}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1.\qquad /66/$$

Доведення. Позначимо $\xi_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ і застосуємо до ξ_n/n нерівність /I/. Маємо при будь-якому $\alpha>0$

$$1\geq P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-\frac{M(\xi_n)}{n}\right|<\alpha\right)\geq1-\frac{D(\xi_n)}{\alpha^2n^2}\geq1-\frac{C}{\alpha^2n}.\qquad /67/$$

Тут враховано, що $D(\xi_n) = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k) \leq nc$.

З /67/ випливає /66/ при $n \to \infty$.

Висновок. Якщо $\xi_1, \xi_2 \ldots$ незалежні і однаково розподілені, $M(\xi_n)=a$, $D(\xi_n)=\sigma^2$, то при будь-якому $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-a\right|<\alpha\right)=1 \qquad /68/$$

Граничні відношення /66/ і /67/ мають назву закону великих чисел.

Теорема Бернуллі. Нехай μ_n - число успіхів при n випробуваннях у схемі Бернуллі з імовірністю $0<p<1$ у кожному випробуванні. Тоді при будь-якому $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\leq\alpha\right)=1 \quad \left(\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|>\alpha\right)=0\right) \qquad /69/$$

Доведення. Можна уявити μ_n у вигляді суми незалежних доданків $\xi_1+\ldots+\xi_n$, де $\xi_i = 1$, якщо при i-му випробуванні стався успіх, і $\xi_i = 0$ - у протилежному випадку. Оскільки $M_{\xi_i}=p$, а $D_{\xi_i}=p(1-p)$, то $\mu_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ застосовується висновок /68/. Теорему доведено.

Приклад 4. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що нормальна випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання більше, ніж на три середніх квадратичних відхилення.

Розв"язання. Шукану величину визначаємо із співвідношення

$$P(|\xi-a|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}, \text{ тобто } P(|\xi-a|\geq 3\sigma)\leq\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{1}{9}.$$

Приклад 5. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

ξ	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|\xi-a|<\sqrt{0,4}$.

Розв"язання. $M(\xi) = 0{,}1\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}44;$

$$D(\xi) = 0{,}1^2\cdot 0{,}2 + 0{,}4^2\cdot 0{,}3 + 0{,}6^2\cdot 0{,}5 - 0{,}44^2 = 0{,}0132;$$

$$P\left(|\xi - 0{,}44| < \sqrt{0{,}4}\right) = 1 - \frac{0{,}0132}{0{,}4} = 0{,}997.$$

Центральна гранична теорема. Відомо, що нормально розподілені випадкові величини мають широке розповсюдження на практиці. Це можна пояснити за допомогою центральної граничної теореми А.М.Ляпунова.

Теорема. Якщо випадкова величина ξ є сумою об"ємного числа взаємно незалежних випадкових величин, вплив кожної із яких на всю суму нікчемно малий, то ξ має розподіл, близький до нормального.

Теорема. Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – незалежні випадкові величини, яким властивий один і той самий закон розподілу з математичним сподіванням m і дисперсією σ^2, то при необмеженому збільшенні значення n закон розподілу суми $\eta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_n$ необмежено наближається до нормального.

Теорема /Ляпунова/. Якщо послідовність попарно незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} M|\xi_k - M(\xi_n)|^3}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} D_{\xi_k}\right)^{3/2}},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - \sum\limits_{k=1}^{n} M(\xi_n)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} D(\xi_k)}} < b\right) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

випадкова величина $\eta = \dfrac{\sum\xi_n - \sum M(\xi_n)}{\sqrt{\sum D(\xi_n)}}$ розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням нуль і дисперсією одиниця.

Теорема Муавра – Лапласа. Випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$, наявні в центральній граничній теоремі, можуть мати довільні розподіли ймовірностей. Якщо вважати, що всі випадкові величини ξ_i однаково розподілені, дискретні і приймають лише два можливі значення: 0 або 1, то прийдемо до теореми Муавра – Лапласа, яка є найпростішим окремим випадком центральної граничної теореми.

Теорема Муавра - Лапласа. Якщо виконується n незалежних експериментів, в кожному з яких подія A з"являється з ймовірністю p, то для будь-якого інтервалу (α, β) вірним є співвідношення

$$P\left(\alpha < \frac{y-np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right], \qquad /70/$$

де y - число появ події A в n експериментах, $q = 1 - p$; $\Phi(x)$ - функція Лапласа.

Доведення. Нехай виконується n незалежних експериментів, в кожному з яких може з"явитися подія A з імовірністю P. Тоді число появи події A в n експериментах є випадкова величина y, яку можна зобразити як

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i , \qquad /71/$$

де ξ_i - випадкова величина, яка виражає число появи події A в i-му експерименті

$$M(\xi_i) = P, \quad D(\xi_i) = Pq.$$

Оскільки

x	0	1
p	q	p

$$m(x) = 0 \cdot q + 1\, p = p, \quad D(x) = (0-p)^2 q + (1-p)^2 p = pq.$$

Отже, випадкова величина y є сумою незалежних випадкових величин ξ_i, які мають один і той самий закон розподілу з математичним сподіванням $m = p$ і $\sigma^2 = pq$. На підставі центральної граничної теореми закон розподілу y при збільшенні числа експериментів наближається до нормального закону. Тому

$$P(\alpha < Y < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - m_y}{\sigma_y\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_y}{\sigma_y\sqrt{2}}\right)\right].$$

Обчислимо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Y:

$$m_y = M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[x_i] = \sum_{i=1}^{n} P = np;$$

$$\sigma_y^2 = D\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D(x_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

Таким чином,

$$P(\alpha<Y<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-np}{\sqrt{2npq}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-np}{\sqrt{2npq}}\right)\right]$$

чи, переходячи до нормованої випадкової величини, отримаємо:

$$P\left(\alpha<\frac{Y-np}{\sqrt{npq}}<\beta\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad /72/$$

Формула /72/ набагато спрощує обчислення:

$$P(\alpha<Y<\beta)=\sum_{k=1}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Яка величина називається випадковою?
2. Що називається функцією розподілу випадкової величини?
3. Що називається математичним сподіванням випадкової величини?
4. Довести властивості математичного сподівання.
5. Що називається дисперсією випадкової величини?
6. Довести властивості дисперсії.
7. Який розподіл випадкової величини називається рівномірним?
8. Який розподіл випадкової величини називається нормальним?
9. Сформулювати теорему Ляпунова.
10. Сформулювати і довести теорему Муавра – Лапласа.

4. СИСТЕМА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

4.1. Основні поняття

Вивчаючи випадкові явища, залежно від їх складності, доводиться використовувати два чи більше чисел випадкових величин, які утворюють систему випадкових величин. Наприклад, точка попадання під час пострілу визначається абсцисою і ординатою.

Нехай ξ_k і η_k – дискретні випадкові величини, можливі значення яких (x_i, y_j), $i=1,2,\ldots n$, а $j=1,2,\ldots,m$.

Розподіл системи таких випадкових величин можна охарактеризувати, вказавши ймовірності $P_{ij}=P(\xi=x_i,\ \eta=y_j)$. При цьому виконується:

$$\sum_{i,j} P_{ij}=1. \qquad /73/$$

y_j	x_i			
	x_1	x_2	...	x_n
y_1	P_{11}	P_{21}	...	P_{n1}
y_2	P_{12}	P_{22}	...	P_{n2}
$\vdots$	...	...	...	...
y_m	P_{1m}	P_{2m}	...	P_{nm}

Ймовірність $P(x_1)$ того, що ξ прийме значення x_1, дорівнює $P(x_1)=P_{11}+P_{12}+\dots+P_{1m}$, оскільки події $(\xi=x_1, \eta=y_1)\dots$ $\dots(\xi=x_1, \eta=y_m)$ несумісні.

4.2. Функція розподілу системи двох випадкових величин

Функцією розподілу системи двох випадкових величин називається функція двох аргументів $F(\xi,\eta)$, рівна ймовірності сумісного здійснення двох нерівностей $\xi<x$ і $\eta<y$, тобто

$$F(x,y)=P(\xi<x;\ \eta<y). \qquad /74/$$

Геометрично це означає ймовірність попадання випадкової точки $/\xi,\eta/$ в лівий нижній безмежний квадрат /рис. II/.

Функція двох аргументів $F(\xi,\eta)$ має такі властивості.

<u>Властивість I</u>. $\lim\limits_{y\to\infty} F(x,y)=F_1(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x,y)=F_2(y)$.

Ілюстрацію цієї властивості наведено на рис. I2.

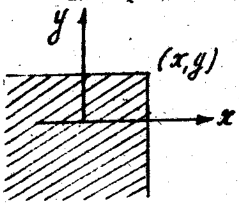


Рис. II

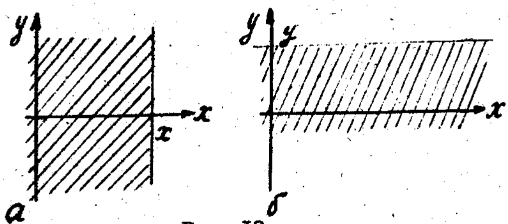


Рис. I2

<u>Властивість 2</u>. Якщо обидва аргументи прямують до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до одиниці:

$$\lim_{\substack{y\to\infty\\ x\to\infty}} F(x,y)=1,\quad F(+\infty,+\infty)=1.$$

Властивість 3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y)=0.$

Властивість 4. Функція розподілу $F(\xi,\eta)$ є неспадною функцією за кожним аргументом, тобто

$$F(x_2,y)\geq F(x_1,y), \quad \text{якщо} \quad x_2>x_1;$$
$$F(x,y_2)\geq F(x,y_1), \quad \text{якщо} \quad y_2>y_1.$$

Доведення. Розглянемо три події:

$$A=(\xi<x_1;\ \eta<y);\ B=(x_1\leq\xi<x_2,\ \eta<y);\ C=(\xi<x_2,\ \eta<y).$$

Очевидно, що $C=A+B$, тобто $P(C)=P(A)+P(B)$;

$$P(C)=P(\xi<x_2,\ \eta<y)=F(x_2,y);\ P(A)=P(\xi<x_1,\ \eta<y)=F(x_1,y);$$

$$P(B)=P(x_1\leq\xi<x_2,\ \eta<y).$$

Тому $F(x_2,y)=F(x_1,y)+P(x_1\leq\xi<x_2;\ \eta<y),$

тобто $F(x_2,y)-F(x_1,y)=P(x_1\leq\xi<x_2,\ \eta<y)\geq 0;$

$$F(x_2,y)>F(x_1,y).$$

Властивість 5. Ймовірність попадання випадкової точки (ξ,η) в довільний прямокутник зі сторонами, паралельними координатним вісям, обчислюється за формулою

$$P(a\leq\xi<b,\ c\leq\eta<d)=[F(b,d)-F(a,d)]-[F(b,c)-F(a,c)]. \quad /75/$$

Доведення. Розглянемо події /рис. 13, 14/:

$$A=(a\leq\xi<b,\ c\leq\eta<d);\ B=(a\leq\xi<b,\ \eta<c);\ C=(\xi<a,\ c\leq\eta<d);$$
$$D=(\xi<a,\ \eta<c);\ E=(\xi<b,\ \eta<d);$$
$$E=A+B+C+D \Rightarrow P(E)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D);$$
$$P(A)=P(E)-P(B)-P(C)-P(D);\ P(E)=F(b,d);$$
$$P(B)=F(b,c)-F(a,c);\ P(C)=F(a,d)-F(a,c);\ F(D)=F(a,c).$$

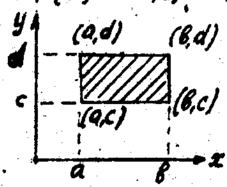


Рис. 13

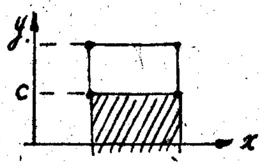


Рис. 14

4.3. Щільність розподілу системи двох випадкових величин

Нехай існує система двох неперервних випадкових величин $/\xi, \eta/$. Розглянемо ймовірність попадання випадкової точки (ξ, η) в елементарний прямокутник зі сторонами Δx і Δy /рис. I5/. Тоді

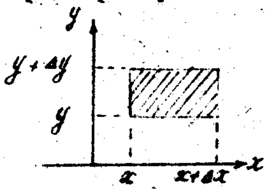


Рис. I5

$$P(x<\xi<x+\Delta x,\ y<\eta<y+\Delta y)=$$
$$=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y+\Delta y)-$$
$$-F(x+\Delta x, y)+F(x,y).$$

Розглянемо

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x<X<x+\Delta x,\ y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x\,\Delta y}=$$
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}=\frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)}{\Delta x\Delta y}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}, \qquad /76/$$

тоді

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=F''_{xy}(x,y). \qquad /77/$$

Функція $f(x,y)$ називається щільністю розподілу системи неперервних випадкових величин і <u>описує геометрично деяку поверхню</u>. За визначенням отримуємо, що

$$P((\xi,\eta)\subset D)=\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy; \qquad /78/$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\,dy. \qquad /79/$$

Функція $f(x,y)$ має такі властивості.

<u>Властивість I.</u> Функція $f(x,y)\geq 0$. Дійсно в /76/ під знаком $\lim$ чисельник і знаменник приймають додатні значення, тому і межа функції додатна.

<u>Властивість 2.</u> $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1.$

<u>Доведення.</u> $F(+\infty,+\infty)=1$, отже,

$$F(\infty,\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1.$$

4.4. Щільність розподілу окремих величин, які входять в систему. Умовні закони розподілу

Нехай відома щільність розподілу двох випадкових величин

$$F_1(x)=F(x,\infty);\quad F_2(x)=F(\infty,y). \qquad /80/$$

Тоді

$$F_1(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\,dy\,; \qquad /81/$$

$$F_2(y)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\,dy. \qquad /82/$$

Звідси, диференціюючи /81/ за x, а /82/ за y, отримуємо

$$\left.\begin{aligned} f_1(x)&=F_x'(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy \\ f_2(y)&=F_y'(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx \end{aligned}\right\}.$$

<u>Означення.</u> Розподіл однієї випадкової величини, що входить у систему, знайдений за умови, що інша випадкова величина, яка входить у систему, прийняла певне значення, називається умовним законом розподілу:

$$f(x/y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x<X<x+\Delta x,\ y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x}. \qquad /83/$$

За теоремою множення отримуємо

$$P(x<X<x+\Delta x,\ y<Y<y+\Delta y)=\frac{P(x<X<x+\Delta x,\ y<Y<y+\Delta y)}{P(y<Y<y+\Delta y)};$$

$$f(x/y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x<\xi<x+\Delta x,\ y<\eta<y+\Delta y)}{\Delta x\, P(y<\eta<y+\Delta y)}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{P(x<\xi<x+\Delta x,\ y<\eta<y+\Delta y)}{\Delta x\,\Delta y}}{\dfrac{P(y<\eta<y+\Delta y)}{\Delta y}}=$$

$$=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}. \qquad /84/$$

Відповідно отримуємо

$$f(y,x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$ /85/

Таким чином,

$$f(x,y)=f_1(x)f(y/x)=f_2(y)f(x/y).$$ /86/

Звідки

$$\left.\begin{aligned} f(x/y)&=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx}\\ f(y/x)&=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy}\end{aligned}\right\}$$ /87/

Звідси

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x/y)dx=1;\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y/x)dy=1.$$ /88/

Умовним математичним сподіванням випадкової величини називається

$$M[\xi/\eta=y]=\sum_{i=1}^{n}x_i\,p(x_i/y),$$ /89/

чи

$$M[\xi/\eta=y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x/y)dx.$$ /90/

Із /89/,/90/ випливає, що зі зміною y буде змінюватись, і математичне сподівання, тобто $m_x(y)=M[\xi/\eta=y]$. Це називається функцією регресії ξ за η.

Рівняння

$$\left.\begin{aligned} x&=m_x(y)\\ y&=m_y(x)\end{aligned}\right\}$$ /91/

називаються рівняннями регресії відповідно ξ за η і η за ξ.

Числові характеристики системи двох випадкових величин. Математичне сподівання: $M[\xi,\eta^{0}]=m_\xi$; $M[\xi^{0},\eta]=m_\eta$. Точка $/m_\xi$, m_η / визначає координати точки, яка називається центром розсіювання системи на площині.

4.5. Числові характеристики

Нехай ξ і η дві випадкові величини системи (ξ,η): m_ξ і m_η - їх математичні сподівання; D_ξ, D_η - їх дисперсії. Точка з координатами (m_ξ, m_y) називається центром розсіювання. Навколо цієї точки розкидано точки системи (ξ,η). Дисперсія D_ξ характеризує ступінь розсіювання точок системи відносно осі $0x$, а D_η - відносно осі $0y$. Для того щоб охарактеризувати ступінь залежності між випадковими величинами ξ і η, вводять поняття ще однієї числової характеристики - кореляційного моменту.

Кореляційним моментом $K_{\xi,\eta}$ двох неперервних випадкових величин ξ і η називається величина, яка визначається за формулою

$$K_{\xi,\eta}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_\xi)(y-m_\eta)f(x,y)\,dx\,dy. \qquad /92/$$

Якщо ξ і η дискретні випадкові величини, то

$$K_{\xi,\eta}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_i-m_\xi)(y_i-m_\eta)P_{ij}, \qquad /93/$$

де $P_{ij}=P(\xi=x_i;\ \eta=y_j)$.

Якщо випадкові величини ξ і η незалежні, то кореляційний момент дорівнює нулю.

Початковим моментом a_{ks} порядку $k+s$ системи (ξ,η) називається математичне сподівання добутку k-го степеня ξ на s-й степінь η:

$$a_{ks}=M[\xi^k,\eta^s],$$

отже, для дискретних і неперервних a_{ks} визначається у вигляді випадкових величин відповідно

$$a_{ks}=\sum_i\sum_j x_i^k\eta_j^s P_{ij};\quad a_{ks}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^k y^s f(x,y)\,dx\,dy. \qquad /94/$$

Початкові моменти першого порядку

$$a_{10} = M[\xi^1 \eta^0] = M[\xi] = m_\xi; \quad a_{01} = M[\xi^0 \eta^1] = M[\eta] = m_\eta. \qquad /95/$$

Центральним моментом порядку $k \neq s$ системи (ξ, η) називається математичне сподівання добутку k-го і s-го відповідних центральних моментів:

$$\mu_{ks} = M[(\xi - m_x)^k (\eta - m_y)^s]. \qquad /96/$$

Звідси

$$\mu_{ks} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s P_{ij};$$

$$\mu_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x,y)\,dx\,dy; \qquad /97/$$

$$D_\xi = \mu_{20} = M[(\xi - m_x)^2 (\eta - m_y)^0] = M[(\xi - m_x)^2];$$

$$D_\eta = \mu_{02} = M[(\eta - m_y)^2]. \qquad /98/$$

Кореляційний момент, чи момент зв"язку

$$K_{xy} = \mu_{11} = M[(\xi - m_x)(\eta - m_y)]. \qquad /99/$$

Для характеристики лінійного зв"язку між двома випадковими величинами служить коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \qquad /100/$$

Якщо ξ, η незалежні, то $K_{xy} = 0$. Дійсно, для незалежних випадкових величин здійснюється $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$. Звідси

$$K_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f_2(y)\,dy = 0.$$

Рівність нулю $K_{\xi\eta}$ є лише необхідною, але не достатньою умовою для незалежних випадкових величин, тобто рівність $K_{\xi\eta} = 0$ може здійснюватись і для залежних випадкових величин.

Нормальний розподіл на площині. Якщо ξ і η незалежні і нормально розподілені, тоді

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};$$

$$f_2(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Отримуємо $\left(f(x,y)=f_1(x)f_2(y)\right)$:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_{y^2}}\right]}. \qquad /101/$$

Якщо $m_\xi = m_\eta = 0$ – центр розсіювання збігається з початком координат. Тоді

$$f(x,y)=\frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}.$$

Звідси /рис. 16/

$$P(a<x<b,\ c<Y<d)=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=$$

$$=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx\int_c^d\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_{y^2}}}dy;$$

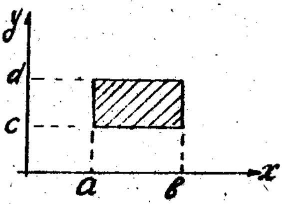


Рис. 16

$$P(a<\xi<b,\ c<\eta<d)=\frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{b-m_\xi}{\sigma_\xi\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_\xi}{\sigma_\xi\sqrt{2}}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{d-m_\eta}{\sigma_\eta\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{c-m_\eta}{\sigma_\eta\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad /102/$$

Щільність нормального розподілу для системи 2[ж] залежних випадкових величин X і Y виражається формулою

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-2r_{xy}\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_{y^2}}\right]}. \qquad /103/$$

Цей закон залежить від п"яти параметрів: $m_x, m_y, \sigma_x; \sigma_y, r_{xy}$.

ж

Розглянемо декілька типових прикладів.

Задача 6. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини:

$$F(x,y)=\begin{cases} \sin x \sin y & \text{при } 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x<0;\ y<0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність попадання випадкової точки (ξ,η) в прямокутник, обмежений прямими $X=0$, $X=\pi/4$, $y=\pi/6$, $y=\pi/3$.

Розв"язання. Використаємо формулу:

$$P(x_1<\xi<x_2,\ y_1<\eta<y_2)=[F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)]-$$
$$-[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)];$$
$$P=\left[\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}-\sin 0\sin\frac{\pi}{3}\right]-\left[\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right]=$$
$$=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4=0{,}26.$$

Задача 7. Задано дискретну двовимірну випадкову величину (ξ,η):

η	ξ: $x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
$y_1=0{,}4$	0,15	0,30	0,35
$y_2=0{,}8$	0,05	0,12	0,03

Знайти: а/ безумовні закони розподілу складових; б/ умовний закон розподілу складової за умови, що складова Y прийняла значення $y_1=0{,}4$; в/ умовний закон розподілу Y за умови, що $X=x_2=5$.

Розв"язання. а/. Склавши ймовірності за "стовпцями",

x	2	5	8
p	0,2	0,42	0,38

Склавши ймовірності за "рядками",

y	0,4	0,8
p	0,8	0,2

б/. Умовні ймовірності:

$$P(x_1/y_1)=P(x_1,y_1)/P(y_1)=0{,}15/0{,}8=3/16;$$
$$P(x_2/y_1)=P(x_2,y_1)/P(y_1)=0{,}3/0{,}8=3/8;$$
$$P(x_3/y_1)=P(x_3,y_1)/P(y_1)=0{,}35/0{,}8=7/16.$$

Умовний закон розподілу

ξ	2	5	8
$P(\xi/y_1)$	3/16	3/8	7/16

η	0,4	0,8
$P(\eta/x_2)$	5/7	2/7

Задача 8. Двовимірна випадкова величина (ξ,η), підпорядкована закону розподілу з щільністю $f(x,y)=Axy$ в області D і $f(x,y)=0$ поза цією областю. Область D - трикутник, обмежений прямими $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$. Знайти: а/ величину A; б/ $M(\xi), M(\eta)$; в/ D_ξ і D_η; г/ $K_{\xi\eta}$; д/ $r_{\xi\eta}$.

Розв"язання.

а/ $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow A\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x\,dy=A\frac{1}{24}=1;\ A=24.$

б/ $M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,dx\,dy=24\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2 y\,dy=\frac{2}{5};$

$M(\eta)=M(\xi).$

в/ $D(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M_\xi)^2 f(x,y)\,dx\,dy=24\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x-\frac{2}{5}\right)^2 x y\,dy=\frac{1}{25};$

$D(\eta)=D(\xi).$

г/ $K_{\xi\eta}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M_\xi)(y-M_\eta)f(x,y)\,dx\,dy=$

$=24\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(y-\frac{2}{5}\right)xy\,dy=-\frac{2}{75}.$

д/

$$r_{\xi\eta}=\frac{K_{\xi\eta}}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}=-\frac{2}{3}.$$

Приклад 9. Система двох випадкових величин (ξ, η) має рівномірну щільність імовірності всередині круга радіуса r з центром на початку координат. Необхідно:

а/ написати вираз для щільності ймовірності системи (ξ, η) і випадкових величин ξ і η;

б/ встановити, чи є випадкові величини ξ і η залежними;

в/ визначити, чи є вони корельованими.

Розв"язання. а/. Щільність ймовірності системи величини (ξ, η), рівномірна всередині круга радіуса r, виражається формулою

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2} & \text{при} \quad x^2+y^2 \le r^2, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2 > r^2. \end{cases}$$

Отримуємо

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2}\,dy = \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}.$$

Отже,

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2} & \text{при} \quad |x| \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

Відповідно отримуємо

$$f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2} & \text{при} \quad |y| \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad |y| > 2. \end{cases}$$

б/. Для того щоб встановити, чи є випадкові величини ξ і η залежними, перевіримо виконання умови незалежності для $x = 0$, $y = 0$:

$$f(0,0) = \frac{1}{\pi r^2}; \quad f_1(0) = \frac{2}{\pi r}; \quad f_2(0) = \frac{2}{\pi r},$$

$$\frac{1}{\pi r^2} \ne \frac{4}{\pi^2 r^2}, \quad \text{тобто} \quad f(0,0) \ne f_1(0) f_2(0).$$

Отже, випадкові величини ξ і η є залежними.

в/. З симетрії щільності ймовірності $M_\xi = M_\eta = 0$. Тоді

$$K_{\xi\eta} = \iint_{(D)} xyf(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{(D)} xy\,dx\,dy = \frac{1}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} x\,dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} x\,dx\, \frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{1}{2\pi r^2}\int_{-r}^{r} x\left[(r^2-x^2)-(r^2-x^2)\right]dx = 0,$$

тобто випадкові величини ξ і η некорельовані.

Приклад 10. Середня квадратична помилка висотоміра σ = 15 мм. Скільки потрібно мати таких приладів на літаку, щоб з надійністю 0,99 помилка середньої висоти x була не більше 30 м, якщо помилки висотомірів нормальні, а систематичні помилки відсутні?

Розв"язання. Умови задачі можна записати так:

$$P\{-30 < |x - Mx|\} = 0{,}99.$$

Випадкова величина

$$\xi = x - Mx = \frac{1}{n}\sum_i x_i - M_x$$

є функцією нормально розподілених випадкових величин, а тому також має нормальний розподіл, параметри якого

$$M_z = M\left[\frac{1}{n}\sum_j x_j - M_x\right] = 0; \quad \mathcal{D}_z = \frac{\sigma^2}{n},$$

тоді

$$P\{-30 < z\} = \int_{-30}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}\,dz = 1 - \Phi\left(-\frac{30}{\sigma_z}\right) = 0{,}99.$$

Розв"язуючи рівняння $\Phi\left(\frac{30\sqrt{n}}{\sigma}\right)$ = 0,01, за таблицею знаходимо

$$\frac{30\sqrt{n}}{\sigma} = 2{,}33; \qquad n = \left(\frac{2{,}33\sigma}{30}\right)^2 = 1{,}36.$$

Звідси випливає, що на літаку має бути не менш як два висотоміри.

Запитання для самоконтролю

1. Дати визначення функції розподілу системи двох випадкових величин і назвати її властивості.

2. Що називається щільністю розподілу системи двох випадкових величин?

3. Що називається рівняннями регресії?

4. Що називається кореляційним моментом $K_{\xi,\eta}$ двох неперервних величин ξ і η.

Частина II

I. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Математична статистика - це розділ математики, що займається розробкою методів отримання і обробки експериментальних даних з метою вивчення закономірностей випадкових масових явищ.

Задача математичної статистики полягає в тому, щоб вказати способи збирання і групування статистичних даних, а також розробити методи їх аналізу. Досліджуючи статично реальне явище, виникає чимало запитань. Ось деякі з них:

I. Оцінка невідомої ймовірності випадкового явища.

2. Визначення невідомої функції розподілу невідомих параметрів розподілу.

3. Перевірка статистичних гіпотез.

Припустимо, що необхідно обстежити сукупність однорідних об"єктів відносно деякої кількісної чи якісної ознаки, що характеризує ці об"єкти. Звичайно проводять не суцільне обстеження всієї сукупності, а випадково відбирають з неї деяку частину, яку потім вивчають. Генеральною називають сукупність усіх однорідних об"єктів, а випадково вибраних об"єктів - вибірковою сукупністю, або вибіркою. Характеристика, яка може набувати різних значень у різних об"єктів сукупності, називається її аргументом. Число об"єктів сукупності /вибіркової чи генеральної/ називається її об"ємом.

Генеральна сукупність може мати як скінченний, так і нескінченний об"єм. Генеральна сукупність нескінченного об"єму вважається заданою, якщо задано функції розподілу аргументу, - щільність розподілу чи інтегральний закон розподілу.

Приклад I. Розглянемо генеральну сукупність - множину всіх прямих різним чином орієнтованих у просторі, в якій аргументом є кут між прямою і деякою фіксованою площиною. Об"єм цієї сукупності нескінченний. Аргументом в ній може бути будь-яке із значень у проміжку від $[0, \pi/2]$.

2. РЕПРЕЗЕНТАТИВНІСТЬ ВИБІРКИ

Основна вимога, що пред"являється до вибірки, полягає в тому, щоб вибірка правильно відбивала кількісні співвідношення генеральної сукупності. Ця властивість називається репрезентативністю вибірки. Строгих числових характеристик /критеріїв/ репрезентативності вибірки немає, але можна вказати на дві необхідні умови:

1/ об"єм вибірки має бути достатньо великим;

2/ вибірка має бути випадковою, тобто кожен елемент генеральної сукупності повинен мати однакову ймовірність з іншими елементами попасти у вибірку.

Приклад 2. Для обстеження відбирають деталі, що виробляються на верстаті. Припустимо, що для цього кожен раз береться деталь перед заміною різця, тобто всі відібрані деталі виготовлені затупленим різцем. Вибірка проведена таким чином не є репрезентативною, оскільки не задовольняє другу умову.

3. СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИБІРКИ

Нехай обстежується ознака X деякої генеральної сукупності і проведено вибірку об"єму n: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, де x_i – значення ознаки X. Значення x_i $(i=\overline{1,k})$ можуть повторюватись. Нехай n_i – число появ значення x_i. Числа x_i називаються варіантами, а відповідні до них числа n_i – частотами. Очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$. Відношення $W_i = \frac{n_i}{n}$ називають відносними частотами, причому

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i = 1.$$

Статистичним розподілом вибірки /варіаційним рядом/ називають перелік варіант і відповідних до них частот. Варіанти при цьому прийнято розміщувати за порядком зростання /табл. 1/.

Таблиця 1

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Тут x_i – значення ознаки X, причому $x_\ell < x_{\ell+1}$, n_i – частота, відповідна до i-ї варіанти.

Якщо різниця між мінімальним і максимальним значеннями випадкової величини X велика і об"єм експериментальних даних теж великий, дискретний варіаційний ряд втрачає наочність. Тому замість переліку конкретних значень задаються інтервали, на які розбивається весь проміжок, що містить усі значення ознаки X. При цьому межі інтервалів вибираються так, щоб значення X не збігалися з межовими точками інтервалів. За частоту, відповідну до кожного інтервалу, приймають суму частот варіант, що попали в цей інтервал. Інтервали також розміщують за порядком зростання. В цьому випадку отримуємо табл. 2, яка називається інтервальним варіаційним рядом.

Таблиця 2

X	$\alpha_1-\alpha_2$	$\alpha_2-\alpha_3$	...	$\alpha_k-\alpha_{k+1}$
n	n_1	n_2	...	n_k

Для інтервального варіаційного ряду вводиться поняття щільності частоти – це частота, що припадає на одиницю довжини інтервалу. Якщо довжину інтервалу позначимо h, то щільність частоти дорівнює n_i/h.

Приклад 3. При визначенні межі міцності зразків конструкції на стискування отримано табл. 3.

Таблиця 3

Інтервали міцності, кг/мм	48...50	50...52	52...54	54...56	56...58	58...60
Частота	6	9	13	7	4	1

Необхідно визначити відносні частоти W_i і щільність частоти.

Розв"язання. Об"єм вибірки $n = 6 + 9 + 13 + 7 + 4 + 1 = 40$, довжина кожного з інтервалів $h = 2$. Будуємо табл. 4.

Таблиця 4

$W_i = n_i/h$	0,15	0,225	0,325	0,175	0,1	0,025
n_i/h	3	4,5	6,5	3,5	2	0,5

Для наочного зображення статистичного розподілу користуються графічним зображенням варіаційних рядів. Полігоном співвідносних частот називають ламану, відрізки якої з"єднують точки (X_1, W_1), $(X_2, W_2), \ldots, (X_k, W_k)$. Для його побудови на осі абсцис відкладають варіанти X_i, а на осі ординат відповідні до них відносні частоти W_i. Поєднуючи точки відрізками прямих, отримують полігон відносних частот.

Для графічного зображення інтервального варіаційного ряду користуються гістограмою відносних частот, яка являє собою східчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню W_i/h /щільність відносної частоти/.

Приклад 4. Побудувати полігон відносних частот розподілу

X	5	7	9	12
n	2	3	5	10

Розв"язання. Об"єм вибірки $n = 2 + 3 + 5 + 10 = 20$. Визначимо відносні частоти W_i:

$W_1 = 0{,}1;$ $W_2 = 0{,}15;$

$W_3 = 0{,}25;$ $W_4 = 0{,}5.$

Полігон відносних частот дискретного варіаційного ряду зображено на рис. 1.

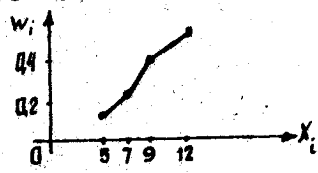


Рис. 1.

Приклад 5. Побудувати гістограму відносних частот інтервального варіаційного ряду, записаного у прикладі 2.

Розв"язання. Скористуємося табл. 1, враховуючи, що $h = 2$. Вирахуємо відношення W_i/h $(i = \overline{1,6})$:

$W_1/h = 0{,}075;$ $W_2/h = 0{,}1125;$

$W_3/h = 0{,}1625;$ $W_4/h = 0{,}0875;$

$W_5/h = 0{,}05;$ $W_6/h = 0{,}0125.$

Рис. 2

Гістограму відносних частот зображено на рис. 2.

4. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ

Математичне сподівання ознаки X називається генеральною середньою чи центром розподілу і позначається $\bar{X}_г$: $\bar{X}_г = MX$. Кожне значення вибірки можна розглядати як випадкову величину, що може приймати будь-яке значення з генеральної сукупності. Випадкова величина X_i має такий самий розподіл як і X. Тому $MX_i = MX = \bar{X}_г$.

Дисперсія ознаки називається генеральною дисперсією і позначається $D_г X$: $D_г X = DX$; $DX_i = DX = D_г X$.

8*

Величина $\sigma_г = \sqrt{D_г}$ називається генеральним середнім квадратичним відхиленням.

5. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИБІРКИ

Нехай із генеральної сукупності добуто вибірку $X_1, X_2, \dots, X_n$ об"єму n для вивчення ознаки X. Якщо всі значення X_i різні, то вибірковою середньою називається величина $\bar{X}_в = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Якщо ж значення $X_1, X_2, \dots, X_k$ мають відповідно частоти $n_1, n_2, \dots, n_k$, то $\bar{X}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i X_i$. Якщо значення n достатньо велике, $\bar{X}_в \cong X_г$, тобто вибіркова середня може служити оцінкою для генеральної середньої. Вибіркову середню можна розглядати як випадкову величину, оскільки для різних виборок однієї й тієї самої генеральної сукупності будуть виходити різні значення $\bar{X}_в$.

Властивість стійкості $\bar{X}_в$: для різних виборок однієї й тієї самої генеральної сукупності вибіркові середні мало відрізняються. Вибірковою дисперсією вибірки називається величина $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (X_i - \bar{X})^2$.

Праву частину даної рівності можна спростити:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n_i (X_i - \bar{X}_в)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i X_i^2 - 2\bar{X}_в \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i X_i +$$

$$+\bar{X}_в^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i = \bar{X_в^2} - 2\bar{X}_в^2 + \bar{X}_в^2 = \bar{X_в^2} - \bar{X}_в^2;$$

$$D_в = \bar{X_в^2} - \bar{X}_в^2.$$

Ця формула справедлива для обчислення і генеральної дисперсії.

Приклад 6. Вибіркова сукупність задана таблицею розподілу

X	I	2	3	4
n	20	I5	I0	5

Знайти вибіркову дисперсію.

Розв"язання. Знайдемо вибіркову середню

$$\bar{X}_в = \frac{20 \cdot I + I5 \cdot 2 + I0 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + I5 + I0 + 5} = \frac{I00}{50} = 2$$ і вибіркову дисперсію

$$D_в = \frac{20(I-2)^2 + I5(2-2)^2 + I0(3-2)^2 + 5(4-2)^2}{50} = \frac{50}{50} = I.$$

Приклад 7. Знайти дисперсію за розподілом, заданим у прикладі 5.

Розв"язання. Знайдемо загальну середню $\bar{X} = \bar{X}_B = 2$, потім визначаємо:

$$\overline{X^2} = \frac{20 \cdot 1^2 + 15 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2}{50} = 5.$$

Шукана дисперсія $D = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = 5 - 2^2 = 1.$

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням /стандартом/ називають квадратний корінь з вибіркової дисперсії: $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

6. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

Нехай із теоретичних міркувань відомо, який розподіл має певну ознаку. Тоді виникає задача наближеної оцінки невідомих параметрів цього розподілу. Ці оцінки будуть залежними від статистичних даних, тому вони й називаються статистичними оцінками. Оцінку невідомого параметра розподілу можна шукати у вигляді одного числа чи, при малій кількості спостережень, у вигляді двох чисел, або у вигляді цілого інтервалу. Тому розрізняють точкові та інтервальні оцінки.

7. ВЛАСТИВОСТІ ТОЧЕЧНИХ ОЦІНОК

Викладемо загальну задачу оцінки параметрів. Нехай випадкова величина ξ підпорядкована закону розподілу, який містить невідомий параметр θ. Потрібно на основі експериментальних даних знайти оцінку θ параметра θ.

Оскільки дослідити всі елементи генеральної сукупності звичайно неможливо, то про параметр θ судять за вибірками із генеральної сукупності. Розглянемо деяку множину виборок, кожна з яких має об"єм n. Оцінку параметра θ, обчислену за i-ю вибіркою, позначимо θ_i. Оскільки склад кожної вибірки випадковий, то θ_i прийме заздалегідь невідоме значення. Тому оцінку θ можна розглядати як випадкову величину, а θ_i – як її можливі значення.

Якщо позначимо значення випадкової величини ξ, що спостерігається, через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то на основі цього можна записати $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Щоб оцінка θ мала практичну цінність, вона повинна мати властивості незсуненості, ефективності і обгрунтованості.

1. Оцінку $\tilde{\Theta}$ параметра Θ називають незсуненою, якщо її математичне сподівання дорівнює параметру Θ, який оцінюється при будь-якому об"ємі вибірки, тобто

$$M\tilde{\Theta} = \Theta. \qquad /1/$$

2. Оцінку $\tilde{\Theta}$ параметра Θ називають обґрунтованою, якщо вона сходиться за ймовірністю до параметра Θ, який оцінюється, при необмеженому зростанні кількості експериментів, тобто

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\,|\tilde{\Theta} - \Theta| < \varepsilon\,\right] = 1. \qquad /2/$$

Викладемо без доведення наступну теорему.

Теорема 1. Якщо $M\tilde{\Theta} \to \Theta$ і $D\tilde{\Theta} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\tilde{\Theta}$ – обґрунтована оцінка параметра Θ.

Оцінки, що мають властивості незсуненості і обґрунтованості при необмеженому числі експериментів, можуть відрізнятися дисперсіями.

3. Оцінку $\tilde{\Theta}$ параметра Θ називають ефективною, якщо при заданому об"ємі вибірки вона має найменшу можливу дисперсію

$$D\tilde{\Theta} = D_{min}. \qquad /3/$$

8. ВИЗНАЧЕННЯ НАБЛИЖЕНОГО ІСТИННОГО ЗНАЧЕННЯ ВИМІРЮВАНОЇ ВЕЛИЧИНИ І НАБЛИЖЕНОГО ЗНАЧЕННЯ ДИСПЕРСІЇ У ВИПАДКУ ПРЯМИХ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Нехай виконується n незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини ξ. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ вибірки незалежних спостережень над випадковою величиною ξ. Ці величини мають одне і те саме математичне сподівання a (істинне значення вимірюваної величини) і однакові дисперсії σ^2 (вимірювання рівноточні). Обидва параметри a, σ^2 невідомі. Як оцінку $\tilde{a}$ для математичного сподівання a візьмемо середнє арифметичне $\bar{\xi}$:

$$\tilde{a} = \bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \qquad /4/$$

Покажемо, що ця оцінка є незсуненою і обгрунтованою:

$$M\tilde{a}=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Mx_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a=\frac{1}{n}na=a.$$

Звідси, за визначенням, одержуємо, що оцінка $\tilde{a}$ незміщена:

$$D\tilde{a}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Тепер знайдемо межу:

$$\lim_{n\to\infty}D\tilde{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n}=\sigma^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Отже, згідно з теоремою І оцінка $\tilde{a}$ є обгрунтованою оцінкою математичного сподівання a.

Введемо статистичну дисперсію:

$$\bar{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{\xi})^2, \qquad /5/$$

де $\bar{\xi}$ визначається за формулою /4/.

Перетворимо співвідношення /5/:

$$\bar{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{\xi}^2. \qquad /6/$$

Величина $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ сходиться за ймовірністю до $M\xi^2$, а $\bar{\xi}^2$ - до a^2. Це означає, що $\bar{\sigma}^2$ сходиться у величині

$$M\xi^2-a^2=\sigma^2. \qquad /7/$$

Отже, за визначенням оцінка $\bar{\sigma}^2$ є обгрунтованою. Перевіримо, чи є оцінка $\bar{\sigma}^2$ незсунутою оцінкою. Перепишемо вираз /5/, використовуючи /4/:

$$\bar{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-$$

$$-\frac{2}{n^2}\sum\sum_{i\neq j}X_iX_j=\frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{2}{n^2}\sum\sum_{i\neq j}X_iX_j.$$

Знайдемо математичне сподівання величини $\bar{\sigma}^2$:

$$M\bar{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} MX_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i\neq j}\sum MX_iX_j = \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - \frac{2}{n}\sum_{i\neq j}\sum KX_iX_j,$$

де $KX_iX_j = M(X_i-a)(X_j-a) = M(X_iX_j - aX_j + aX_i + a^2)$.

Використовуючи властивості математичного сподівання і враховуючи, що $X_1, X_2, \ldots, X_n$ незалежні спостереження випадкової величини з математичним сподіванням a, приходимо до висновку, що $KX_iX_j = 0$. Отже,

$$M\bar{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2, \qquad /8/$$

тобто статистична дисперсія $\bar{\sigma}^2$ не є незсунутою оцінкою для дисперсії σ^2, оскільки математичне сподівання не дорівнює σ^2, а дещо менше за нього.

Наведемо незсунуту оцінку σ^2. Якщо $\bar{\sigma}^2$ помножити на $n/(n-1)$, то з урахуванням співвідношення /8/, отримаємо

$$M\frac{n}{n-1}\bar{\sigma}^2 = \frac{n^2}{n-1}M\bar{\sigma}^2 = \frac{n^2}{n-1}\,\frac{n-1}{n^2}\sigma^2 = \sigma^2.$$

Оскільки $n/(n-1) \to 1$ при $n \to \infty$, то оцінка $\bar{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}\bar{\sigma}^2$ буде незсунутою.

Таким чином, при проведенні n незалежних спостережень $X_1, X_2, \ldots, X_n$ випадкової величини ξ з невідомим математичним сподіванням a і дисперсією σ^2 наближені оцінки математичного сподівання і дисперсії

$$\tilde{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i; \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2. \qquad /9/$$

9. НАДІЙНИЙ ІНТЕРВАЛ. НАДІЙНА ЙМОВІРНІСТЬ

Для визначення точності оцінки $\tilde{\Theta}$ параметра Θ в математичній статистиці при невеликому об"ємі вибірки користуються надійними інтервалами, а для визначення надійності оцінки – надійною ймовірністю.

Нехай для параметра Θ отримано із експеримента незсунуту оцінку $\tilde{\Theta}$. Потрібно оцінити можливу допущену при цьому помилку.

Надійним інтервалом $\mathcal{Y}$ для параметра Θ називають такий інтервал, відносно якого можна зі заздалегідь вибраною ймовірністю γ, яка близька до одиниці, стверджувати, що він містить значення параметра Θ. γ називають надійною ймовірністю (надійністю).

Задача знаходження надійного інтервалу для параметра Θ полягає у визначенні величини $\varepsilon > 0$, для якої виконується співвідношення $P[|\tilde{\Theta}-\Theta|<\varepsilon]=\gamma$ або

$$P[\tilde{\Theta}-\varepsilon<\Theta<\tilde{\Theta}+\varepsilon]=\gamma. \qquad /10/$$

Параметр ε характеризує точність оцінки. Довжина надійного інтервалу залежить від об"єму вибірки n і надійної ймовірності γ: якщо збільшувати об"єм вибірки, довжина надійного інтервалу зменшується, а з наближенням надійної ймовірності визначається конкретними умовами. Звичайно використовуються значення γ, що дорівнюють 0,90; 0,95; 0,99.

10. РОЗПОДІЛ ВИБІРКОВОГО СЕРЕДНЬОГО ЗНАЧЕННЯ І СТАНДАРТУ У ВИБІРКАХ ІЗ НОРМАЛЬНОЇ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ

Генеральна сукупність з нормально розподіленим аргументом називається нормальною генеральною сукупністю. Вона характеризується двома параметрами: математичним сподіванням a і дисперсією σ^2 аргументу.

Нехай отримано випадкову вибору $X_1, X_2, \ldots, X_n$ об"єму із генеральної сукупності. Вибіркове середнє цієї вибірки

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \qquad /11/$$

а вибіркова дисперсія

$$\bar{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2. \qquad /12/$$

Щільність ймовірності вибірки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ із нормальної генеральної сукупності при $x_i = X_i \ (i=\overline{1,n})$

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n)=Ce^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}, \qquad /13/$$

де $C=(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^{-n}$.

Перетворимо суму, що входить у показник експоненти в співвідношення /13/:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2=\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\bar{X})+(\bar{X}-a)\right]^2=$$
$$=n\bar{\sigma}^2+n(\bar{X}-a)^2. \qquad /14/$$

Таким чином,

$$f(X_1,X_2,\dots,X_n)=C\,e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{X}-a)^2-\frac{n}{2\sigma^2}\bar{\sigma}^2}. \qquad /15/$$

Рівність /15/ показує, що щільність імовірності випадкової вибірки визначається її середнім $\bar{X}$ і стандартом $\bar{\sigma}$.

Величина $f_1(\bar{x},\bar{\sigma})d\bar{x}d\bar{\sigma}$ є ймовірність того, що середнє значення і стандарт вибірки попадуть відповідно у проміжки

$$[\bar{x},\bar{x}+d\bar{x}],\quad [\bar{\sigma},\bar{\sigma}+d\bar{\sigma}]; \qquad /16/$$

$$f_1(\bar{x},\bar{\sigma})d\bar{x}d\bar{\sigma}=\int\limits_{G}\dots\int f(x_1,\dots,x_n)dx_1,\dots,dx_n, \qquad /17/$$

де G – область простору $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, що містить усі точки, для яких $\bar{x}$ і $\bar{\sigma}$, визначені за формулами, відповідними до /11/; /12/, попадають в область /16/.

Згідно з /13/ $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ стала в області G, тому /17/ можна переписати у вигляді

$$f_2(\bar{x},\bar{\sigma})d\bar{x}d\bar{\sigma}=C\,e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-a)^2-\frac{n}{2\sigma^2}\bar{\sigma}^2}\int\limits_{G}\dots\int dx_1\dots dx_n. \qquad /18/$$

Інтеграл у правій частині /18/ дорівнює об"єму області G. Щоб знайти його, зауважимо, що згідно з /11/ і /12/ для попадання $\bar{x}$ і $\bar{\sigma}$ в область /16/ необхідно, щоб в n-вимірному просторі точка $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ містилася між паралельними гіперплощинами;

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n\bar{x}; \qquad /19/$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n(\bar{x}+d\bar{x}) \qquad /20/$$

і між концентричними гіперсферами:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=n\bar{\sigma}^2; \qquad /21/$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=n(\bar{\sigma}+d\bar{\sigma})^2. \qquad /22/$$

Гіперплощина /19/ проходить через точку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка є центром гіперсфер /21/ і /22/. Радіус гіперсфери /21/ дорівнює $\bar{\sigma}\sqrt{n}$. Відстань між гіперплощинами дорівнює $\sqrt{n}\,d\bar{x}$, різність радіусів гіперсфер є $\sqrt{n}\,d\bar{\sigma}$.

Область G є кільце шириною $\sqrt{n}\,d\bar{x}$ і товщиною $\sqrt{n}\,d\bar{\sigma}$, замкнуте між двома гіперсферами і двома гіперплощинами. Переріз n-вимірної гіперсфери площиною, що проходить через центр, утворює $(n-1)$-вимірну гіперсферу з таким самим радіусом. Об"єм області G дорівнює добутку площі поверхні $(n-1)$-вимірної гіперсфери /довжина кола/. Таким чином,

$$\int_{G}\!\!\ldots\int dx_1\ldots dx_n=c_1\bar{\sigma}^{n-2}\,d\bar{\sigma}\,d\bar{x}, \qquad /23/$$

де всі множники, що містять степені n, включені в c_1.

Підставляючи /23/ в /18/, отримуємо

$$f_1(\bar{x},\bar{\sigma})\,d\bar{x}\,d\bar{\sigma}=c_2\bar{\sigma}^{n-2}e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-a)^2-\frac{n}{2\sigma^2}\bar{\sigma}^2}\,d\bar{x}\,d\bar{\sigma}. \qquad /24/$$

Геометричні міркування при визначенні $f_1(\bar{x},\bar{\sigma})d\bar{x}\,d\bar{\sigma}$ можна обгрунтувати за допомогою перетворення змінних.

В /24/ права частина розбивається на два множники, один з яких залежить лише від $\bar{x}$, а другий – тільки від $\bar{\sigma}$. Отже, випадкові змінні $\bar{X}$ і $\bar{\sigma}$ не залежать одна від одної, тобто вибіркове середнє і стандарт нормальної генеральної сукупності взаємно незалежні. Щільності ймовірностей цих випадкових величин мають вигляд

$$f_2(\bar{x})=c_3\,e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-a)^2}; \qquad /25/$$

$$f_3(\bar{\sigma})=c_4\,\bar{\sigma}^{n-2}e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\bar{\sigma}^2}, \qquad /26/$$

де $c_2=c_3c_4$.

Таким чином, $\bar{x}$ розподілено за нормальним законом з дисперсією, що дорівнює σ^2/n, і середнім, що дорівнює a. Згідно з нормуванням нормальної функції

$$C_3 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}. \qquad /27/$$

Оскільки $\bar{\sigma}$ може приймати значення у проміжку $[0,\infty]$, нормування C_4 дає

$$C_4 \int_0^\infty \bar{\sigma}^{n-2} e^{-\frac{n\bar{\sigma}^2}{2\sigma^2}} d\bar{\sigma} = C_4 \frac{2^{\frac{n-3}{2}}}{n^{\frac{n-1}{n}}} \int_0^\infty t^{\frac{n-3}{2}} e^{-t}\, dt = 1.$$

Таким чином,

$$C_4 = \frac{n^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{n-3}{n}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sigma^{n-1}}, \qquad /28/$$

де $\int_0^\infty t^{\frac{n-3}{2}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$ – гама-функція.

Підставляючи /27/ і /28/ в /24/, остаточно отримаємо

$$f_1(\bar{x},\bar{\sigma}) = \frac{n^{n/2}}{\sqrt{\pi}\,2^{(n-2)/2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\bar{\sigma}^{n-2}}{\sigma^n} e^{-\frac{n(\bar{x}-a)^2+n\bar{\sigma}^2}{2\sigma^2}}. \qquad /29/$$

II. РОЗПОДІЛ СТЬЮДЕНТА. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДІЙНОГО ІНТЕРВАЛУ

Розглянемо нову випадкову величину

$$z = \frac{\bar{x}-a}{\bar{\sigma}}, \qquad /30/$$

яка характеризує випадкову вибірку, і знайдемо щільність ймовірності випадкового вектора $(z,\bar{\sigma})$

$$f(z,\bar{\sigma})dz\,d\bar{\sigma} = f_1(\bar{x},\bar{\sigma})d\bar{x}\,d\bar{\sigma} =$$

$$= \frac{n^{n/2}}{\sqrt{\pi}\,2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\bar{\sigma}^{n-1}}{\sigma^n} e^{-\frac{n}{2}\frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma^2}(1+z^2)} dz\,d\bar{\sigma}. \qquad /31/$$

Щоб знайти щільність ймовірності $f_0(z)$, проінтегруємо /31/ за всіма можливими значеннями σ:

$$f_0(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+z^2\right)^{-n/2}. \qquad /32/$$

Розподіл /32/ називається розподілом Стьюдента, він не залежить від параметрів a і σ нормальної генеральної сукупності.

Введемо випадкову величину $U = z\sqrt{n-1} = \frac{\bar{X}-a}{\bar{\sigma}}\sqrt{n-1}$.

Її розподіл визначається щільністю

$$S(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{u^2}{n-1}\right)^{-n/2}. \qquad /33/$$

Ймовірність того, що U за абсолютною величиною не перевищить деякого числа $x > 0$, така:

$$P(-x \le U \le x) = \int_{-x}^{x} S(u)\,du. \qquad /34/$$

Вираз $-æ \le U \le æ$ можна записати у вигляді

$$\bar{X} - æ\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n-1}} < a < \bar{X} + æ\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n-1}}.$$

Таким чином, /34/ можна записати як

$$P(\bar{X} - æT < a < \bar{X} + æT) = S(æ, n), \qquad /35/$$

де

$$T = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}_i - \bar{X})^2};$$

$$S(æ, n) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-æ}^{æ}\left(1+\frac{u^2}{n-1}\right)^{-n/2} du.$$

Значення функції $S(æ, n)$ затабульовані, тому, користуючись /35/, можна знаходити надійний інтервал, в якому з заданою надійністю міститься параметр розподілу. Для оцінки параметра σ нормальної генеральної сукупності користуємося розподілом /26/.

Для будь-якого $æ\ (0 < æ < 1)$ можна записати

$$P\left(æ\sigma \le \bar{\sigma} \le \frac{\sigma}{æ}\right) = \int_{æ\sigma}^{\sigma/æ} f_s(\bar{\sigma})\, d\bar{\sigma} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{næ^2/2}^{n/2æ^2} t^{\frac{n-3}{2}} e^{-t}\, dt. \qquad /36/$$

Звичайно вводиться функція

$$K(\alpha, z) = \frac{\int_0^{\alpha} t^{z-1} e^{-t}\, dt}{\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt},$$

яка називається неповною гама-функцією.

Тепер вираз /36/ можна записати у вигляді

$$P\left(æ\bar{\sigma} \le \sigma \le \frac{\bar{\sigma}}{æ}\right) = K\left(\frac{n}{2æ^2}, \frac{n-1}{2}\right) - K\left(\frac{næ^2}{2}, \frac{n-1}{2}\right). \qquad /37/$$

Тут використано рівносильність нерівностей

$$æ\sigma \le \bar{\sigma} \le \frac{\sigma}{æ} \quad \text{та} \quad æ\bar{\sigma} \le \sigma \le \frac{\bar{\sigma}}{æ}.$$

Для функції $K(u\sqrt{z}, z)$ складено таблицю.

Рівність /37/ дозволяє знаходити надійні інтервали для σ за різними значеннями надійності.

Приклад 8. Було зроблено дев"ять вимірювань щільності матеріалу. Середня щільність дорівнює 2,09 т/м^3, σ = 1,02 г/м^3. Оцінити генеральну середню з надійністю γ = 0,95.

Розв"язання. n = 9, $\bar{X}$ = 2,09 г/м^3. За значеннями n = 9 і $\gamma = S(æ, 9)$ = 0,95 з таблиць для $S(æ, n)$ знаходимо $æ$ = 2,31. Отже, користуючись співвідношенням /35/, запишемо надійний інтервал:

$$2{,}09 - 2{,}31\, \frac{1{,}02}{\sqrt{9-1}} < a < 2{,}09 + 2{,}31\, \frac{1{,}02}{\sqrt{9-1}}$$

чи 1,25 $< a <$ 2,92 з надійністю γ = 0,95.

Приклад 9. За 15 рівноточними вимірами знайдено $\bar{\sigma}$ = 0,12. Знайти точність вимірювання з надійністю γ = 99.

Розв"язання. Точність вимірювань характеризується середнім квадратичним відхиленням σ випадкових помилок. Тому задача зводиться до відшукання надійного інтервалу, що покриває σ з заданою надійністю. За γ = 0,99 і n = 15 знаходимо $æ$ = 0,73. Шуканий надійний інтервал визначаємо, користуючись співвідношенням $\bar{\sigma}(1-\varkappa)<\sigma<\bar{\sigma}(1+\varkappa)$. Тоді $0,12(1-0,73)<\sigma<0,12(1-0,73)$ чи $0,03<\sigma<0,21$.

12. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Основні поняття.

Якщо закон розподілу генеральної сукупності невідомий, але є підстави припустити, що він має певний вигляд, то кажуть про гіпотезу вигляду розподілу, який припускається.

Гіпотези, що перевіряються, виникають на основі теоретичних міркувань чи в результаті статистичного дослідження інших спостережень.

Статистичною гіпотезою називається гіпотеза про закон невідомого розподілу чи про параметри відомого розподілу. Нарівні з висунутою гіпотезою розглядають і суперечну їй. Якщо висунуту гіпотезу буде відкинуто, то маємо суперечливу гіпотезу.

Нульовою /основною/ називають висунуту гіпотезу H_0, а конкуруючою /альтернативною/ - гіпотезу H_1, яка суперечить нульовій.

Приклад 10. Якщо нульова гіпотеза H_0 полягає в припущенні, що $M_X = M_Y$, то конкуруючою H_1 буде одна із таких гіпотез: $M_X \neq M_Y$ чи $M_X > M_Y$, чи $M_X < M_Y$.

Висунута гіпотеза може бути вірною чи невірною, тому виникає необхідність її перевірки. Оскільки перевірку виконують за допомогою статистичних методів, то її називають статистичною.

Перевіряючи гіпотезу, може виникнути одна із таких ситуацій:

1/ основна гіпотеза H_0 відкидається за умови, що вона вірна;

2/ гіпотеза H_0 приймається за умови, що вона невірна;

3/ гіпотеза H_0 приймається за умови, що вона вірна;

4/ гіпотеза H_0 відкидається за умови, що вона невірна.

В результаті статистичної перевірки гіпотези можна допустити два типи помилок:

1/ яка полягає у відкиданні основної гіпотези за умови, що вона вірна;

2/ яка полягає в прийнятті основної гіпотези за умови, що вона невірна.

Для перевірки гіпотези H_0 користуються спеціально підібраною випадковою величиною, розподіл якої є невідомим. Цю величину позначимо через Z, якщо вона розподілена нормально, F - за законом Фішера, T - за законом Стьюдента, χ^2 - за законом "Хі квадрат".

Статистичним критерієм називають величину K, закон розподілу якої відомий і яка служить для перевірки статистичної гіпотези.

Після вибору певного критерію множину всіх його можливих значень розбивають на дві неперерізані підмножини; одна з них містить значення критерію, за якими нульова гіпотеза відкидається, а друга - за якими вона /гіпотеза/ приймається.

Критичною областю називають сукупність значень критерію, за якими основна гіпотеза відкидається.

Областю припустимих значень називають сукупність значень критерію, за якими гіпотезу приймають.

Критичними точками $k_{кр}$ називають точки, які відділяють критичну область від області припустимих значень критерію. Розрізняють односторонню і двосторонню критичні області. Якщо $k_{кр}>0$ і критична область визначається нерівністю $K>k_{кр}$, то таку критичну область називають правосторонньою. Якщо $k_{кр}<0$ і критична область визначається нерівністю $K<k_{кр}$, то таку критичну область називають лівосторонньою. Двосторонньою називають критичну область, яка визначається нерівностями $K<k_1$, $K>k_2$, де $k_1<k_2$.

Рівнем значимості критерію називають імовірність помилки I-го типу. Позначимо рівень значимості через α, тоді $\alpha=P(A_1)$, де A_1 - подія, суть якої у відкиненні основної гіпотези H_0 за умови, що вона вірна. Або іншими словами: рівень значимості α є ймовірність попадання критерію в критичну область за умови, що вірною є основна гіпотеза.

Потужністю критерію називають імовірність відкинення основної гіпотези за умови, що вірною є конкуруюча гіпотеза. Або, інакше кажучи, потужність критерію - це ймовірність попадання критерію в критичну область за умови, що вірною є конкуруюча гіпотеза. Позначимо через β імовірність помилки 2-го типу, тоді $\beta=P(A_2)$, де A_2 - подія, яка полягає у прийнятті основної гіпотези за умови, що вона не є вірною. Отже, $(1-\beta)$ - потужність критерію - ймовірність відкидання основної гіпотези за умови, що вона не є вірною.

Якщо зменшується ймовірність помилок I-го типу, збільшується ймовірність помилок 2-го типу. На практиці деколи істотнішими є помилки I-го типу, деколи - 2-го.

13. ВІДШУКАННЯ КРИТИЧНОЇ ОБЛАСТІ

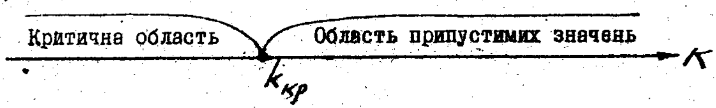
Розглянемо випадок правосторонньої критичної області

З певного рівня значимості α, як імовірності попадання критерію K у правосторонню критичну область, випливає рівність

$$P(K>k_{кр})=\alpha. \qquad /38/$$

Далі роблять так: задають значення α, рівним певному достатньо малому числу α /звичайно 0,01; ...; 0,05/, і рівність /38/ перетворюється на рівняння відносно $k_{кр}$. Для кожного з відомих критеріїв /χ^2, Стьюдента, Фішера/ складено таблиці, за якими і знаходять $k_{кр}$, які б задовольняли рівність /38/. Потім за даними вибірок визначають значення критерію, який спостерігався, – $K_{набл}$. Якщо виявиться, що $K_{набл} > k_{кр}$, то основну гіпотезу відкидають. Якщо ж $K_{набл} \le k_{кр}$, то основну гіпотезу приймають.

Відшукання лівосторонньої критичної області теж зводиться до знаходження відповідних критичних точок.

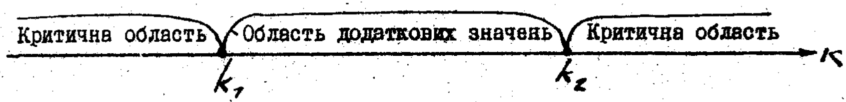


У даному разі рівність /38/ набуває вигляду

$$P(K<k_{кр})=\alpha. \qquad /39/$$

Розмірковуючи так, як і у випадку з правосторонньою критичною областю, знаходимо $k_{кр}$. Якщо $K_{набл}<k_{кр}$, то гіпотезу варто відкинути, в протилежному випадку – прийняти.

Розглянемо випадок двосторонньої критичної області.



Якщо розподіл критерію K симетричний відносно початку координат /функція парна/, то

$$P(K<-k_{кр})=P(K>k_{кр}) \qquad /40/$$

і рівність /40/ приймає вигляд $P(K>k_{кр})=\frac{\alpha}{2}$.

14. ПОРІВНЯННЯ ДВОХ СЕРЕДНІХ НОРМАЛЬНИХ ГЕНЕРАЛЬНИХ СУКУПНОСТЕЙ

Середня генеральної сукупності - це її математичне сподівання:

$$\bar{X}_г=M_X, \quad \bar{Y}_г=M_Y.$$

Нехай генеральні сукупності X і Y розподілені нормально, до того ж їх дисперсії відомі. Вибірка, взята з генеральної сукупності X, має об"єм n, а з Y, - об"єм m.

Потрібно за вибірковими середніми $\bar{X}$ і $\bar{Y}$ при заданому рівні значимості α перевірити нульову гіпотезу $H_0: M_X=M_Y$. Оскільки вибіркові середні є незсунутими оцінками генеральних середніх, то нульову гіпотезу можна записати так:

$$H_0: M_{\bar{X}}=M_{\bar{Y}}.$$

Якщо виявиться, що нульова гіпотеза вірна, то генеральні середні однакові, тобто вибіркові середні розрізняються мало. Якщо нульову гіпотезу відкинуто, то різниця між вибірковими середніми значна, тобто генеральні середні відмінні.

За критерій нульової гіпотези приймемо випадкову величину $Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma(\bar{X}-\bar{Y})}$, яка є нормальною нормованою величиною. Дійсно, Z - лінійна комбінація нормальних величин $\bar{X}$ і $\bar{Y}$, тому Z - нормальна величина.

Далі $M_Z=\frac{M_{\bar{X}}-M_{\bar{Y}}}{\sigma(\bar{X}-\bar{Y})}=0$ за умови, що $M_X=M_Y$.

Дисперсія

$$D_Z=\frac{D_{\bar{X}}-D_{\bar{Y}}}{\sigma^2(\bar{X}-\bar{Y})}=\frac{D_{\bar{X}}-D_{\bar{Y}}}{D_{\bar{X}}-D_{\bar{Y}}}=1,$$

таким чином, Z - нормована нормальна величина.

Виразимо Z через відомі D_X і D_Y:

$$\sigma^2(\bar{X}-\bar{Y})=D_{\bar{X}}+D_{\bar{Y}}=\frac{D_X}{n}+\frac{D_Y}{m}.$$

Отже,

$$z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{DX}{n} + \frac{DY}{m}}}.$$

Знаходження критичної області

Перший випадок. Як конкуруючу гіпотезу візьмемо гіпотезу $H_1: M_{\bar{x}} = M_{\bar{y}}$. У цьому випадку критична область є двосторонньою: $z<z_1, z>z_2$, де z_1 і z_2 – критичні точки, причому $z_1<z_2$.

За визначенням рівня значимості α у даному випадку маємо $P(z<z_1)=P(z>z_2)=\alpha$.

Найбільша потужність критерію /ймовірність попадання критерію в критичну область при вірності гіпотези H_1 / буде досягнута тоді, коли критичні точки z_1 і z_2 вибрані так, що $P(z<z_1) = P(z>z_2)=\alpha/2$. Оскільки z нормована нормальна величина, то її розподіл симетричний відносно нуля, і, значить, $z_1=-z_2$.

Введемо позначення $z_2=z_{кр}$. Тоді задача зводиться до знаходження критичної точки $z_{кр}$. Очевидно, що $P(-\infty<z<+\infty)=1$. З симетричності розподілу z відносно початку координат маємо:

$$P(0<z<+\infty)=1/2 \quad \text{чи} \quad P(0<z<z_{кр})+P(z_{кр}<z<+\infty)=1/2,$$

звідси $\Phi(z_{кр})-\Phi(0)+\alpha/2=1/2$, де $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-t^2/2}dt$ – функція Лапласа. Отже, $\Phi(z_{кр})=\frac{1-\alpha}{2}$.

За таблицями для функції Лапласа та вибраним рівнем значимості α знаходимо $z_{кр}$. Потім обчислюємо за даними спостережень $z_{набл}$. Якщо $|z_{набл}|>z_{кр}$, то гіпотеза відкидається. Якщо ж $|z_{набл}|\le z_{кр}$, то немає підстав її відкидати.

Приклад II. Існують дані про випробування на розрив зразків із двох виборок по 50 мотків дроту з продукції двох заводів, причому виявилось: $\bar{X}$ = 120,8 кг/мм^2 /завод I/; $\bar{Y}$ = 128,2 кг/мм^2 /завод II/. До цього ж на підставі спостережень отримано, що D_X = = 8 кг/мм^2; D_Y = 9,4 кг/мм^2. Потрібно визначити, чи існують реальні відмінності в механічних якостях дроту, що виготовляється заводами I і II. Задано α = 5%.

Розв"язання. Знаходимо:

$$Z_{набл} = \frac{120,8-128,2}{\sqrt{\frac{8^2}{50}+\frac{9,4^2}{50}}} = -\frac{7,4}{1,75} = -4,23$$

при $\alpha = 0,05$.

Використовуючи рівність $\Phi(z_{кр}) = \frac{1-0,05}{2} = 0,475$, за таблицями значень функції Лапласа знаходимо критичну точку $Z_{кр} = 1,96$. Тоді отримуємо $|Z_{набл}| > Z_{кр}$, оскільки $|-4,23| > 1,96$, тобто $4,23 > 1,96$. Значення критерію попадає в критичну область, гіпотеза про рівність середніх відкидається, тобто існує суттєве розходження між якістю продукції заводів I і II.

Другий випадок. Нехай в якийсь технологічний процес ввели удосконалення. Природно припустити, що воно приведе до збільшення продукції, тобто можна припустити, що $H_1: M_x > M_y$.

Гіпотеза H_1 є новою конкуруючою, виходячи з якої, критична область буде правосторонньою. За визначенням рівня значимості α у даному випадку маємо: $P(Z > Z_{кр}) = \alpha$. Тоді $\Phi(Z_{кр}) = \frac{1}{2} - \alpha$ чи $\Phi(Z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$.

З отриманої рівності за таблицями значень функції Лапласа визначають $Z_{кр}$. Потім за критерієм знаходять $Z_{набл}$. Якщо $Z_{набл} > Z_{кр}$, то гіпотезу відкидають, якщо $Z_{набл} \leq Z_{кр}$, то немає підстав її відкидати.

Третій випадок. Конкуруюча гіпотеза $H_1: M_x \leq M_y$. Згідно з конкуруючою гіпотезою критична область буде лівосторонньою. Міркуючи відповідно до двох попередніх випадків, критичну точку можна знайти за таблицею функцій Лапласа, користуючись рівністю $\Phi(z'_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$, тут $Z'_{кр} = -Z_{кр}$. Якщо $Z_{набл} < -Z_{кр}$, то гіпотезу відкидають, якщо $Z_{набл} \geq -Z_{кр}$, то немає підстав її відкидати.

15. ВИПАДОК МАЛОЇ ВИБІРКИ

Нехай генеральні сукупності X і $\bar{Y}$ розподілені нормально, причому їх дисперсії невідомі, але однакові, тобто $D_{\bar{x}} = D_{\bar{y}}$ і об"єми виборок n, m – малі $/n, m < 30/$. Отже, порівнюються дві середні нормальні генеральні сукупності, коли не відомі, але рівні їх дисперсії при малих вибірках. Наприклад, якщо порівнюються середні розміри двох партій деталей, виготовлених на одному і тому самому верстаті, можна припустити, що дисперсії розмірів однакові /дисперсія – точність прилада, а прилад /верстат/ один і той самий/. Основною залишається попередня гіпотеза: $H_0: M_x = M_y$. За критерій перевірки нульової гіпотези приймемо випадкову величину:

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}},$$

де S_x, S_y – виправлені вибіркові дисперсії.

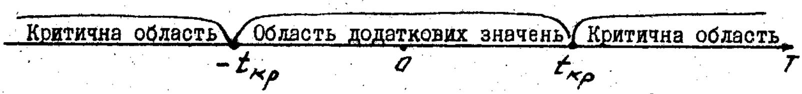
Величина T, коли є вірною нульова гіпотеза, має t-розподіл Стьюдента з $k = n+m-2$ ступенями вільності. Залежно від виду конкуруючої гіпотези будується критична область.

<u>Перший випадок</u>. Нехай конкуруюча гіпотеза $H_1: M_x \neq M_y$. Тоді критична область буде двосторонньою. Найбільша потужність критерію буде досягнута за умови

$$P(T < t_1) = P(T > t_2) = \frac{\alpha}{2},$$

де t_1, t_2 – критичні точки, причому $t_1 < t_2$.

Оскільки розподіл Стьюдента симетричний відносно нуля, то $t_1 = -t_2$, отже, задача зводиться до визначення $t_2 = t_{кр}$ з рівняння $P(t > t_{кр}) = \alpha/2$.



Критична точка розподілу Стьюдента $t_{кр}$ визначається з таблиць за числом ступенів вільності k і за рівнем значимості α. Позначимо значення критерію, обчислене за даними спостережень, через $T_{набл}$. Якщо $|T_{набл}| > t_{кр}$, то гіпотезу відкидають, якщо $|T_{набл}| \leq t_{кр}$, немає підстав її відкидати.

<u>Другий випадок</u>. Взято конкуруючу гіпотезу $H_1: M_x > M_y$. Тоді критична область правостороння $P(T > t_{кр}) = \alpha$. Якщо $T_{набл} \leq t_{кр}$, то немає підстав відкидати гіпотезу.

<u>Третій випадок</u>. Якщо конкуруюча гіпотеза є $H_1: M_x < M_y$, то міркування проходить відповідно до другого випадку. Якщо $T_{набл} < -t_{кр}$, то гіпотезу відкидають. Якщо $T_{набл} \geq -t_{кр}$, то немає підстав її відкидати.

<u>Приклад 12</u>. Нехай два заводи /І і ІІ/ випускають одну і ту саму продукцію. Для визначення деякої характеристики ξ продукції взяли шість проб з продукції кожного заводу. Результати вимірювань характеристики ξ такі:

Завод I	2,50	2,80	2,85	2,90	2,95	3,40
Завод II	2,50	2,55	2,60	2,75	2,80	2,95

Визначити, чи можна знехтувати розходження між X і Y як випадковими величинами і чи можна розглядати середні значення характеристики ξ продукції двох заводів як рівні.

Дано: X, Y – нормально розподілені генеральні сукупності:
вибірка з X: 2,5; 2,8; 2,85; 2,9; 2,95; 3,4;
вибірка з Y: 2,5; 2,55; 2,6; 2,75; 2,8; 2,95.

Рівень значимості заданий: $\alpha = 0{,}05$. Основна гіпотеза $H_0: M_X = M_Y$; конкуруюча – $H_1: M_X \neq M_Y$. Тут розглядається випадок порівняння середніх генеральних сукупностей при малих вибірках і невідомих дисперсіях.

Розв"язання. I. Знаходимо вибіркові середні $\bar{X}$ і $\bar{Y}$ за формулами

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{6}(2{,}5+2{,}8+2{,}85+2{,}9+2{,}95+3{,}4) = 2{,}9;$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{6}(2{,}5+2{,}55+2{,}6+2{,}75+2{,}8+2{,}95) = 2{,}69.$$

2. Знаходимо виправлені дисперсії:

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \frac{1}{5}\Big[(2{,}5-2{,}9)^2+(2{,}8-2{,}9)^2+(2{,}85-2{,}9)^2+$$
$$+(2{,}9-2{,}9)^2+(2{,}95-2{,}9)^2+(3{,}4-2{,}9)^2\Big] \approx 0{,}085;$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2 = \frac{1}{5}\Big[(2{,}5-2{,}69)^2+(2{,}55-2{,}69)^2+(2{,}6-2{,}69)^2+$$
$$+(2{,}75-2{,}69)^2+(2{,}8-2{,}69)^2+(2{,}95-2{,}69)^2\Big] \approx 0{,}0294.$$

3. Знаходимо значення критерію:

$$T_{набл} = \frac{2{,}9-2{,}69}{\sqrt{5\cdot 0{,}085+5\cdot 0{,}0294}} \cdot \frac{\sqrt{6\cdot 6\cdot 10}}{2} \approx 1{,}52.$$

4. Знаходимо критичні точки. Критична область, судячи з конкуруючої гіпотези, є двосторонньою. Оскільки число ступенів вільності $k = 6 + 6 - 2 = 10$, то $t_{кр}$ при рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ $t_{кр} = 2{,}23$.

5. Порівнюючи $|T_{набл}| = 1{,}52$ і $t_{кр} = 2{,}23$, отримуємо, що $|T_{набл}| < t_{кр}$. Отже, немає підстав відкидати основну гіпотезу H_0. Таким чином, ніяких висновків про різницю середніх робити не можна.

16. ПОРІВНЯННЯ ДВОХ ДИСПЕРСІЙ НОРМАЛЬНИХ ГЕНЕРАЛЬНИХ СУКУПНОСТЕЙ

На практиці ця задача виникає, коли потрібно порівняти точність приладів чи методів вимірювань.

Нехай існують дві нормально розподілені генеральні сукупності X і Y. Оцінками дисперсій є виправлені вибіркові дисперсії σ_x^2 і σ_y^2, обчислені за даними вибірок /з об"єма n, m /, добутих з генеральних сукупностей відповідно X і Y.

Звичайно σ_x^2, σ_y^2 різні. Визначимо, чи є ця різниця значимою чи незначимою. Якщо основна гіпотеза $H_0: D_x = D_y$ буде визнана вірною, то різниця між σ_x^2 і σ_y^2 пояснюється випадковими причинами. В цьому випадку можна вважати, що прилади чи методи вимірювань, які порівнюються, мають однакову точність. Якщо ж основна гіпотеза буде відкинута, тоді різниця між σ_x^2 і σ_y^2 є значимою і не пояснюється випадковими причинами. Отже, точність приладів різна.

Критерієм перевірки основної гіпотези беруть випадкову величину:

$$F = \frac{\sigma_б^2}{\sigma_м^2},$$

де $\sigma_б^2$ – більша за величиною виправлена вибіркова дисперсія; $\sigma_м^2$ – менша.

Можна довести, що випадкова величина F розподілена за законом Фішера – Снедокера /за умови вірності основної гіпотези/ з ступенями вільності $k_1 = n_1 - 1$ і $k_2 = n_2 - 1$, де n_1 – об"єм вибірки, за якою знайдено меншу дисперсію.

Критична область будується залежно від виду конкуруючої гіпотези.

Перший випадок. Конкуруюча гіпотеза має вигляд $H_1: D_x \neq D_y$. У цьому випадку критична область буде двосторонньою. Найбільша потужність критерію досягається тоді, коли ймовірність попадання критерію в кожен із двох інтервалів критичної області дорівнює $\alpha/2$. Отже, якщо f_1 і f_2 – критичні точки, причому $f_1 < f_2$, то $P(F<f_1)=P(F>f_2)=\alpha/2$. Праву критичну точку $f_2 = f_{кр}(\alpha/2; k_1; k_2)$

знаходять за таблицею критичних точок розподілу Фішера - Снедокера. Лівих критичних точок таблиця не містить, тому обмежимося знаходженням правої критичної точки $f_2 = f_{кр}$.

Позначимо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої, обчислене за даними спостережень, через $F_{набл}$. Якщо $F_{набл} > f_{кр}$, то гіпотезу варто відкинути, якщо $F_{набл} \le f_{кр}$, то нема підстав її відкидати.

Другий випадок. Конкуруюча гіпотеза буде $H_1 : D_x > D_y$, критична область - правосторонньою. Виконуючи умову $P(F > f_{кр}) = \alpha$, знаходимо за таблицею критичних точок розподілу Фішера - Снедокера значення $f_{кр} = f(\alpha; k_1; k_2)$. Якщо $F_{набл} > f_{кр}$, то гіпотезу відкидаємо, якщо $F_{набл} \le f_{кр}$, то нема підстав її відкидати. Якщо є підстави думати, що $D_x = D_y$, то розмірковують відповідно до другого випадку.

Приклад 13. Розроблено два методи вимірювань. Проведено 26 пар вимірювань. Результати подано в табл. 5.

Таблиця 5

Номер досліду	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I метод вимірювання	1,65	1,2	0,24	1,15	0,3	0,15	1,3	0,45	1,0
II метод вимірювання	2,5	1,1	0,31	0,64	1,3	0,25	0,3	1,2	0,25

Номер досліду	10	11	12	13	14	15	16	17	18
I метод вимірювання	1	0,75	0,8	0,2	1,05	0,65	0,17	1,2	0,5
II метод вимірювання	0,75	0,75	1,1	0,1	1,2	1,1	0,2	1,15	0,4

Номер досліду	19	20	21	22	23	24	25	26
I метод вимірювання	0,95	0,75	0,14	0,73	0,65	1,5	1,2	-
II метод вимірювання	0,8	0,45	0,65	1,0	0,35	1,1	1,5	0,1

Розв"язання. 1. Знаходимо виправлені вибіркові дисперсії:

$$\sigma_1^2 = \frac{5 \cdot 423}{25} = 0,227; \qquad \sigma_2^2 = \frac{7 \cdot 444}{25} = 0,297.$$

2. Знаходимо

$$F_{набл} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{0,297}{0,227} = 1,37.$$

3. При $k_1 = k_2 = 26 - 1 = 25$ і рівні значимості $\alpha = 10\%$ за таблицями матимемо $f_{кр}$ /0,25; 25; 25/ = 1,96.

4. Отримуємо $F_{набл} < f_{кр}$ Звідси випливає висновок, що немає підстав відкидати гіпотезу, тобто відмінності між даними, отриманими за допомогою різних методів вимірювань, не є значними щодо випадкових помилок.

17. КРИТЕРІЙ ЗГОДИ ПІРСОНА

Досі припускали, що закон розподілу генеральної сукупності відомий, і перевіряли гіпотези про параметри цього розподілу. Але частіше виникала ситуація, що закон розподілу невідомий. Коли при цьому є підстави припускати, що закон розподілу має даний вигляд, то потрібно буде перевірити гіпотезу про вигляд розподілу. Наприклад, якщо коефіцієнти асиметрії і ексцесу /надлишку/ виявились близькими відповідно до 0 і 3, то можна думати, що даний розподіл є нормальним.

Тут передусім складається критерій перевірки, який тепер називається критерієм згоди, тобто перевіряється чи узгоджується даний розподіл з відомим.

Розглянемо критерій Пірсона. Складемо суму $\sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$, яка є випадковою величиною. Тут n_i – частоти, що спостерігаються /емпіричні/; m_i – частоти теоретичні, тобто обчислювані за формулами, відповідними до згаданого закону; s – число інтервалів /у випадку неперервної величини/ чи число груп, складених з окремих значень дискретної величини.

Можна довести, що при виконанні данної гіпотези і $n \to \infty$, ця величина розподіляється за законом χ^2 з числом ступенів вільності $k = s - r - 1$, де r – число параметрів розподілу.

Тому позначають $\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$ і називають критерієм згоди "хі квадрат", чи критерієм Пірсона з числом ступенів вільності k.

Наприклад, у випадку з нормальним законом розподілу доводиться визначати два параметри a і σ, тобто $z=2$ і $k=s-3$. У випадку з законом Пуассона – один параметр λ, тому $k=s-2$.

Зазначимо таке:

розподіл χ^2 виходить з сумування квадратів нормальних величин, а щоб наявні в критерії Пірсона величини були нормальними, необхідно, щоб об"єм вибірки був великим $(n>50)$;

характер застосування критерію Пірсона вимагає, щоб спостереження за емпіричними частотами n_i були не занадто малі. Якщо ж такі є, то їх об"єднують з сусідніми для збільшення груп.

Задача перевірки гіпотези про згоду з даним законом розподілу розв"язується за таким планом.

I. Знаходимо теоретичні частоти: $m_i=n_i p_i$. Тут використовується формула для математичного сподівання числа появ події в n незалежних випробуваннях, p_i визначається за формулами, відповідними до гіпотетичного закону розподілу.

Наприклад, якщо гіпотетичним є закон Пуассона, то $p_i=\frac{a^i e^{-a}}{i!}$,

де a – математичне сподівання. Якщо врахувати, що $a=\bar{x}_B$,

то $p_i=\frac{(\bar{x}_B)^i e^{-\bar{x}_B}}{i!}$. Якщо гіпотетичним є нормальний закон розподілу, то

$$p_i=\frac{h_i}{\sigma_B}\varphi(u_i), \qquad /41/$$

де h_i – довжина інтервалу /чи відстань між сусідніми варіантами/;

$$u_i=\frac{x_i-\bar{x}_B}{\sigma_B};\quad \varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}.$$

Функція $\varphi(u)$ табульована.

Доведемо формулу /41/. Ймовірність попадання в інтервал довжини h_i

$$p_i=h_i f(x_i), \qquad /42/$$

де $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ – щільність імовірності у випадку нормального розподілу.

Позначимо $(X-a)/\sigma=u$, тоді $f(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-u^2/2}=\frac{1}{\sigma}\varphi(u)$.

Враховуючи, що $a=\bar{X}_B, \sigma=\sigma_B$, отримаємо, що $f(X)=\frac{1}{\sigma_B}\cdot\varphi(u)$,

де $u=\frac{X-\bar{X}_B}{\sigma_B}$.

Відповідно

$$f(X_i)=\frac{1}{\sigma_B}\varphi(u_i), \qquad /43/$$

де $u_i=\frac{X_i-\bar{X}_B}{\sigma_B}$.

Підставляючи /43/ в /42/, отримаємо /41/.

2. Далі обчислюємо $\chi^2_{набл}=\sum_{i=1}^{s}\frac{(n_i-m_i)^2}{m_i}$.

3. Обчислюємо число ступенів вільності за формулою $k=s-z-1$.

4. Визначаємо рівень значимості α і знаходимо за таблицею $\chi^2_{кр}=\chi^2(\alpha,k)$.

5. Будуємо правосторонню критичну область, оскільки односторонній критерій більш "жорстко" відкидає основну гіпотезу, виходячи з вимоги

$$P(\chi^2>\chi^2_{кр})=\alpha.$$

Якщо $\chi^2_{набл}>\chi^2_{кр}$, то гіпотезу відкидають; якщо $\chi^2_{набл}\leq\chi^2_{кр}$, то немає підстав її відкидати.

Приклад I4. У таблиці дано розподіл вмісту золота за даними аналізу 257 проб руди. Емпіричний розподіл вмісту золота неістотно відрізняється від нормального розподілу. Перевіримо відповідність цього твердження фактичного матеріалу:

Вміст золота, %	Середина інтервалу X_i	Число проб n_i
/28; 32/	30	I
/32; 36/	34	9
/36; 40/	38	29
/40; 44/	42	55
/44; 48/	46	72
/48; 52/	50	56
/52; 56/	54	27
/56; 60/	58	7
/60; 64/	62	I
		Всього 257

Розв"язання. I. За даними задачі отримуємо такі характеристики: $\bar{X} = 45,86 \approx 46$; $\sigma_B = 5,64$.

2. Обчислюємо теоретичні частоти:

$$m_i = \frac{n\, h_i}{\sigma_B}\varphi(u_i), \quad \text{де} \quad u_i = \frac{X_i - \bar{X}_B}{\sigma_B}.$$

Обчислення розміщуємо в табл. 6, причому $h_i = 4$, $n = 257$,

$$\frac{n\, h_i}{\sigma_B} = 182,3.$$

Таблиця 6

X_i	n_i	$X_i - \bar{X}_B$	u_i	$\varphi(u_i)$	m_i	Округлені значення
30	1	-16	-2,84	0,00707	1,3	1
34	9	-12	-2,13	0,04128	7,6	8
38	29	-8	-1,42	0,14556	26,6	27
42	55	-4	-0,71	0,31006	56,6	56
46	72	0	0	0,39894	72,8	73
50	56	4	0,71	0,31006	56,6	56
54	27	8	1,42	0,14556	26,6	27
58	7	12	2,13	0,04128	7,6	8
62	1	16	2,84	0,00707	1,3	1
						257

3. Знаходимо $\chi^2_{набл}$. Обчислення розміщуємо в табл. 7.

Таблиця 7

X_i	n_i	m_i	$n_i - m_i$	$(n_i - m_i)^2$	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$
30	I0	0	I	I	0,I25
34	29	9			0,I48
38	55	27	2	4	0,0I8
42	72	56	-I	I	
46	56	73	-I	I	0,0I4
50	27	56	0	0	0
54		27	0	0	0
58	8	9	-I	I	0,I25
62					

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i} = 0,43.$$

Приклад I5. Дано I00 значень температури радіоелектронної апаратури /РЕА/ в космічному об"єкті при нормальній роботі.

36	46	37	45	38	44	39	43	40	41	42	36
38	40	41	44	37	40	45	39	41	36	46	41
42	38	42	42	42	38	42	41	38	36	42	37
40	42	39	43	41	43	38	37	37	38	37	39
43	40	43	49	41	42	39	39	43	39	44	40
39	40	41	50	42	40	40	42	41	42	43	42
43	39	42	42	39	39	40	42	39	40	39	45
41	39	42	41	40	41	50	39	40	41	40	39
41	44	42	39								

Потрібно виконати такі обчислення:

I. Скласти інтервальний ряд розподілу частот і щільність відносних частот значень температури РЕА, що спостерігались.

2. Побудувати гістограму і полігон відносних частот температури РЕА.

3. За виглядом гістограми і полігона відносних частот і, виходячи з механізму утворення значень випадкової величини, що досліджується, зробити попередній вибір закону її розподілу.

4. Припустивши, що випадкова величина розподілена за нормальним законом, знайти точечні оцінки його параметрів, записати гіпотетичну функцію розподілу.

5. Знайти теоретичні частоти нормального розподілу, перевірити згоду гіпотетичної функції розподілу з нормальним законом за допомогою критерію згоди χ^2 /за рівень значимості прийняти $\alpha = 0,05$/.

6. Знайти інтервальні оцінки параметрів нормального розподілу /надійну ймовірність прийняти $\gamma = 0,95$/.

Розв"язання. Температура в РЕА є неперервною випадковою величиною. Позначимо її X.

I. Для побудови інтервального статистичного ряду вибираємо x_{max} і найменше x_{min} із значень випадкових величин X:

$$x_{max} = 46, \quad x_{min} = 36.$$

Діапазон значень, що спостерігалися, розіб"ємо на шість часткових інтервалів однакової довжини h. Розбиття проведемо так, щоб x_{min} була серединною першого часткового інтервалу, а x_{max} – серединною останнього / k -го інтервалу/. Очевидно, довжина відрізка $[x_{min}, x_{max}]$ буде дорівнювати $(k-1)h$. Звідси знаходимо, що

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k-1} = \frac{46-36}{5} = 2.$$

Початкову точку берем $x_{min} - h/2 = 46 - 1 = 45$. Отримуємо часткові інтервали] 45, 47 [;]47, 49 [;] 49, 51 [;... ;] 55, 57 [. Підрахуємо для кожного інтервалу частоти n_i і обчислимо відносні частоти:

$$W_i = \frac{n_i}{n},$$

де $n = 100$ – число вибіркових значень випадкової величини X.

У результаті інтервальний статистичний ряд частот n_i і відносних частот W_i випадкової величини X має вигляд

x_i	]35, 37[	]37, 39[	]39, 41[	]41, 43[	]43, 45[	]45, 47[
n_i	4	13	34	32	12	5
W_i	0,04	0,13	0,34	0,32	0,12	0,05

2. Щоб одержати гістограму щільності відносних частот на кожному з інтервалів, будуємо прямокутник висотою W_i / h. З"єднуючи середини верхніх сторін прямокутників, отримаємо гістограму щільності відносних /рис. 3/.

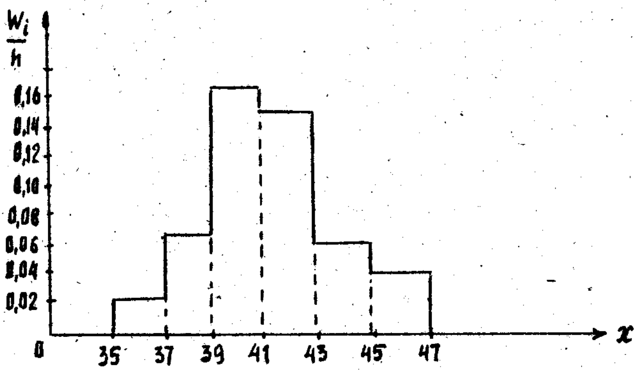


Рис. 3

3. Вигляд полігона і гістограми щільності відносні відносних частот, нагадує криву нормального розподілу. Крім того, температура РЕА складається під впливом великої кількості незалежних чинників, порівняних за своїм розсіюванням.

Викладене дозволяє зробити припущення про нормальний розподіл випадкової величини X.

4. Обчислимо точкові оцінки параметрів нормального розподілу:

$$a \approx \bar{x} = \frac{36\cdot 4+38\cdot 13+40\cdot 34+42\cdot 32+44\cdot 12+46\cdot 5}{100} = 41.$$

Обчислимо $\bar{S}$ /вибіркова дисперсія/:

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\bar{x}^2-(\bar{x})^2\right)}, \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i)^2 n_i;$$

$$\bar{x}^2 = \frac{36^2\cdot 4+38^2\cdot 13+40^2\cdot 34+42^2\cdot 32+44^2\cdot 12+46^2\cdot 5}{100} = 186{,}16;$$

$$\sigma \approx \bar{S} = \frac{100}{99}\left(1686{,}16 - 41^2\right) = 2{,}283.$$

Записуємо гіпотетичну функцію розподілу:

$$F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-5{,}1}{2{,}283}\right).$$

5. Обчислимо ймовірність P_i попадання випадкової величини з функцією розподілу $F_0(x)$ в i-й інтервал частот і теоретичні частоти nP_i. Значення функції $\Phi(x)$ знаходимо за дод. 2:

$$P_1 = P(-\infty \le X \le 47) = \Phi\left(\frac{37-41}{2{,}283}\right) - \Phi(-\infty) = -0{,}4599+0{,}5=0{,}0401;$$

$$np_1 = 4{,}01;$$

$$P_2 = P(37 \le X \le 39) = \Phi\left(\frac{39-41}{2{,}283}\right) - \Phi\left(\frac{37-41}{2{,}283}\right) = -0{,}3078+0{,}4599=0{,}1521;$$

$$np_2 = 15{,}21 > 10;$$

$$P_3 = P(39 \le X < 41) = \Phi\left(\frac{41-41}{2{,}283}\right) - \Phi\left(\frac{39-41}{2{,}283}\right) = 0{,}3078;$$

$$np_3 = 30{,}78 > 10;$$

$$P_4 = P(41 \le X < 43) = \Phi\left(\frac{43-41}{2{,}283}\right) - \Phi\left(\frac{41-41}{2{,}283}\right) = 0{,}3078;$$

$$np_4 = 30{,}78 > 10;$$

$$P_5 = P(43 \le X < 46) = \Phi\left(\frac{45-41}{2{,}283}\right) - \Phi\left(\frac{43-41}{2{,}283}\right) = 0{,}1521;$$

$$np_5 = 15{,}21 > 10;$$

$$P_6 = P(45 \le X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{45-41}{2{,}283}\right) = 0{,}5 - 0{,}4599 = 0{,}0401;$$

$$np_6 = 4{,}01.$$

Знаходимо χ^2 - статистику Пірсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(4-4{,}01)^2}{4{,}01} + \frac{(13-15{,}21)^2}{15{,}21} + \frac{(34-30{,}78)^2}{30{,}78} + \frac{(32-30{,}78)^2}{30{,}78} +$$

$$+ \frac{(15-15{,}21)^2}{15{,}21} + \frac{(5-4{,}01)^2}{4{,}01} \approx 1{,}6305.$$

Із таблиць χ^2 -розподілу /дод. 3/ за рівнем значимості $\alpha = 0{,}05$ і числом $\partial = 6 - 3 = 3$ вибираємо значення $\chi^2 = 78$. Порівнюючи обчислене значення χ^2 з табличним маємо $1{,}6305 < 7{,}8$. Оскільки $\chi^2 < \chi^2_0$, то гіпотеза про нормальний розподіл температури РЕА з параметром $a = 41$, $\sigma = 2{,}283$ узгоджується з експериментальними даними.

Щоб записати надійний інтервал для $a = M_X$, із таблиці t-розподілу /дод. 4/ за даними γ і n вибираємо $t_{\alpha,\partial}$, де $\alpha = \frac{1}{2}(1-\gamma) = 0{,}025$, $\gamma = n - 1 = 99$: $t = 1{,}984$.

Обчислюємо $t_{s,\gamma} \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}} = 1{,}984 \frac{2 \cdot 283}{10} = 0{,}4533$. З імовірністю 0,95 невідоме значення a попадає в інтервал $41 - 0{,}4533 < a < 41 + 0{,}4533$, тобто $40{,}547 < a < 41{,}453$. Щоб записати надійний інтервал для $\sigma = \sqrt{DX}$, з спеціальної таблиці /дод. 6/ за надійною ймовірністю $\gamma = n\gamma_2 = 0{,}95$ і числом $\gamma = 100 - 1 = 99$ беремо коефіцієнт $\gamma_1 = 0{,}878$ і $\gamma_2 = 1{,}161$. З імовірністю 0,95 невідоме значення σ попадає в інтервал $2{,}285 \cdot 0{,}878 < \sigma < 2{,}285 \cdot 1{,}161$, або $2{,}006 < \sigma < 2{,}653$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається генеральною сукупністю?
2. У чому полягає репрезентативність вибірки?
3. Що називається статистичним розподілом вибірки?

4. Що називається щільністю частот варіаційного ряду?

5. Що називається гістограмою відносних частот?

6. Що називається вибірковим стандартом?

7. У чому полягають властивості: незсуненості, обгрунтованості та ефективності?

8. Що називається надійним інтервалом та надійною ймовірністю?

9. У чому полягає розподіл Стьюдента?

10. Що називається статистичною гіпотезою?

11. У чому полягає порівняння середніх нормальних генеральних сукупностей?

12. У чому полягає порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей?

13. У чому полягає критерій згоди Пірсона?

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ

Варіанти завдань

№ 1

1. Випадково розподіляються три кулі різного кольору у три ящики. Описати простір елементарних подій. Виразити через елементарні події: 1/ подію A - "існує ящик, який містить не більше ніж дві кулі", 2/ подію B - "перший ящик не порожній"; 3/ подію C - "перший ящик порожній і не існує ящика, який би містив більше ніж одну кулю".

2. В партії, що складається з N виробів, є N бракованих. Навмання відбирається n виробів з цієї партії $(n \le N)$. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них буде m бракованих.

3. Припустимо, що у прикладі 1 всі елементарні події однаково ймовірні. Нехай випадкова величина ξ означає число зайнятих ящиків, а η_i $(i = 1, 2, 3)$ - число куль у i-му ящику. Знайти:

1/ закон розподілу випадкового вектора (ξ, η);

2/ $M(\xi)$; $M(\xi^2)$; $M(\xi, \eta)$; $D(\xi)$, $cov(\xi, \eta)$.

3/ Нехай $f(x,y) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$ —

щільність розподілу нормального закону на площині. Потрібно обчислити ймовірність попадання випадкової точки (ξ, η) в прямокутник

$$(D)\begin{cases} x_1 < x < x_2; \\ y_1 < y < y_2. \end{cases}$$

№ 2

1. Серед студентів, що прийшли на лекцію з теорії ймовірностей, вибирають навмання одного. Нехай подія A полягає в тому, що вибраний виявиться юнаком; подія B – в тому, що він не палить, а подія C – в тому, що він мешкає у гуртожитку.

1/ Описати подію $A \cap B \cap \bar{C}$.

2/ За якої умови будемо мати тотожність $A \cap B \cap C = A$?

3/ Коли буде вірним співвідношення $\bar{C} \subset B$?

4/ Коли буде рівність $\bar{A} = B$, чи буде вона справджуватись, якщо всі юнаки палять?

2. В шафі знаходиться 5 пар черевиків різних за розміром. З них випадково відбираються 5 шт. черевиків. Яка ймовірність того, що серед вибраних черевиків а/ відсутні парні і б/ є рівно одна комплектна пара.

3. В умовах прикладу 3 /варіант 1/ знайти:

1/ закон розподілу випадкового вектора (η_1, η_2);

2/ $\mu(\eta_1)$; $M(\eta_1^2)$; $M(\eta_1; \eta_2)$; $D(\eta_1)$; $cov(\eta_1; \eta_2)$.

4. Нехай

$$f(x,y) = \frac{\rho^2}{\pi E_\xi E_\eta} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_\xi^2} + \frac{y^2}{E_\eta^2}\right)} -$$

щільність розподілу нормального закону на площині. Потрібно обчислити ймовірність попадання випадкової точки (ξ, η) в еліпс розсіювання B_k, рівняння якого

$$\frac{x^2}{E_\xi^2} + \frac{y^2}{E_\eta^2} = k^2,$$

де параметр k являє собою відношення півосей еліпса розсіювання до головних векторних відхилень.

№ 3

1. Робітник виготовив n деталей. Нехай подія A_i $(i=1,2,\dots,n)$ полягає в тому, що i-а виготовлена ним деталь має дефект. Записати подію, яка полягає в тому, що:

а/ ні одна деталь не має дефекту;

б/ лише одна деталь має дефект;

в/ у крайньому разі два вироби не мають дефектів.

2. Орбіта супутника Землі пролягає між 60^0 північної і 60^0 південної широти. Вважаючи падіння супутника у будь-яку точку земної поверхні поміж вказаних координатів рівноймовірним, знайти ймовірність того, що супутник впаде вище 30^0 північної широти.

3. В умовах прикладу 3 /варіант № I/ знайти:

I/ закони розподілу випадкових величин $\eta_1+\eta_3$; $\eta_1\eta_3$;

2/ $M(\eta_1+\eta_3)$ та $M(\eta_1\eta_3)$;

3/ функцію розподілу випадкової величини $\eta_1\eta_3$ і побудувати графік.

4. Нехай ξ і η – незалежні і нормально розподілені випадкові величини. Обчислити $P(\xi^2+\eta^2\leq R^2)$.

№ 4

I. В умовах задачі I /варіант № 3/ записати подію, яка полягає в тому, що:

а/ хоча б одна деталь має дефект;

б/ не більше як дві деталі мають дефекти;

в/ лише два вироби є дефектними.

2. На відрізку довжиною ℓ поставлено навмання дві точки A_1 і A_2. Знайти ймовірність того, що відстань між ними буде меншою h $(h<\ell)$.

3. В умовах прикладу 3 /варіант №I/ знайти:

I/ закони розподілу випадкових величин $\xi+\eta_1$; $\xi\eta_1$; η_1/ξ;

2/ $M(\xi+\eta_1)$, $M(\xi\eta_1)$;

3/ функцію розподілу випадкової величини $\xi+\eta_1$. і побудувати графік.

4. Випадковий вектор (ξ,η) має щільність розподілу:

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases} xye^{-(x+y)} & \text{при } \min(x,y)\geq 0; \\ 0 & \text{при } \min(x,y)<0. \end{cases}$$

Знайти: $F_{\xi,\eta}(x,y)$, $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$; $f_\xi(x)$; $f_\eta(y)$.

№ 5

I. Машинно-котельна установка складається з двох котлів і однієї машини. Подія A – справна машина, подія B_k $(k=1,2)$ – справний k-й котел. Подія C означає працездатність машинокотельної установки, що можливо у випадку, коли справна машина і хоча б один котел. Виразити C і $\bar{C}$ через A і B_k.

2. Студент прийшов на іспит, знаючи лише 20 з 25 питань програми. Екзаменатор задав студенту три запитання. Використовуючи правило множення ймовірностей, знайти ймовірність того, що студент знає всі ці питання. Знайти цю саму ймовірність, користуючись класичним визначенням імовірності.

3. В умовах прикладу 3 /варіант № I/ знайти $F_{\xi,\eta}(x,y), F_\xi(x); F_\eta(y)$.

4. Випадковий вектор (ξ,η) має щільність розподілу:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{при } 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2; \\ 0 & \text{в решті випадків.} \end{cases}$$

Знайти: $P(\xi<1;\eta<1); P(\xi+\eta<1)$ та $P(\xi+\eta)>2$.

№ 6

I. Покажіть, що число подій у полі, збудованому на просторі наслідків, що містить n елементів, дорівнює 2^n.

2. Дано: $P(A)=P;\ P(B)=q;\ P(A \cup B)=2$.

Знайти: $P(A \triangle B);\ P(A \cap \bar{B});\ P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

3. Сумісний розподіл (ξ_1, ξ_2) як

ξ_1 \ ξ_2	-I	0	I
-I	I/6	I/6	I/6
I	I/4	I/8	I/8

Знайти одновимірний розподіл ξ_1 і ξ_2, розподіли величин $\eta_1=\xi_1+\xi_2;\ \eta_2=\xi_1 \xi_2$, а також $M(\xi_1+\xi_2)$ та $D(\xi_1+\xi_2)$.

4. Випадковий вектор (ξ,η) має щільніоть розподілу

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{при } x \ge 0;\ y \ge 0; \\ 0 & \text{в решті випадків.} \end{cases}$$

Обчислити $P(\xi<1;\eta<1), P(\xi+\eta<1);\ P(\xi+\eta>2)$.

№ 7

1. Знайти поле подій для експерименту з підкиданням двох монет.

2. Кидаються дві кості. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що сума очок непарна; B – подія, яка полягає в тому, що хоча б на одній кості випала одиниця. Описати події $A \cap B, A \cup B, A \cap \bar{B}$. Знайти їх імовірності.

3. Позначимо через ξ число випробувань у схемі Бернуллі до появи першого успіху включно. Знайти закони розподілу ξ і $M(\xi)$. Довести, що $P\{\xi = n+m \mid \xi \geq n\} = P\{\xi = m\}$ $(m \geq 1)$.

4. В умовах задачі 4 /варіант № 6/ обчислити $P(\eta > 1 \mid \xi < 1)$ і $P(\xi > 1 \mid \eta > 1)$.

№ 8

1. Вкажіть простори елементарної події Ω для кожного з наступних експериментів:

а/ вибирається навмання одне число, що міститься між 1 і 5;

б/ тричі підкидається монета;

в/ студента запитують, коли день його народження.

2. В квадрат $\{(x,y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ навмання кинута точка. Нехай (ξ, η) – її координати. Знайти функції $F(x) = P(\xi + \eta < x, F(x))$.

3. Для випадкових величин ξ_1, ξ_2, які визначені в задачі 3 /варіант № 6/, знайти $M(\xi_1), M(\xi_2), D(\xi_1), D(\xi_2), cov(\xi_1, \xi_2)$.

4. В умовах задачі 4 /варіант № 6/ знайти $P(\xi < 2\eta)$ і $P(\xi > 1)$.

№ 9

1. Довести, що події $A, \bar{A} \cap B$ і $\overline{A \cup B}$ утворюють повну систему /групу/.

2. Монета підкидається доти, поки двічі підряд вона не впаде однією й тією самою стороною. Описати простір елементарних подій. Знайти ймовірність таких подій:

а/ дослід закінчиться до шостого кидання;

б/ потрібно буде парне число кидань.

3. Закон розподілу випадкового вектора (ξ_1, ξ_2) задано за допомогою таблиці розподілу:

ξ_1	ξ_2		
	-I	0	I
-I	0	I/4	0
0	I/4	0	I/4
I	0	I/4	0

Знайти $M(\xi_1), M(\xi_2), D(\xi_1), D(\xi_2), cov(\xi_1, \xi_2)$. Чи є ξ_1, ξ_2 незалежними величинами?

4. Випадкова величина ξ розподілена рівномірно на інтервалі $[-I, I]$. Знайти щільності розподілу випадкових величин $\eta = e^{\xi}$ і $\eta = 2\xi + 1$.

№ IO

I. Прилад складається з двох блоків першого типу і трьох – другого. Події: A_k $(k=1,2)$ – k-й блок першого типу справний, B_j $(j=1,2,3)$ – справний j-й блок другого типу. Прилад є справним, якщо справні хоча б один блок першого типу і не менше ніж два блоки другого типу. Виразити подію C, яка означає справність приладу, через A_k і B_j.

2. На відрізок $[0,I]$ навмання кинуто точку. Нехай ξ – її координата. Знайти функції $F(x)=P(\xi<x)$, $F'(x)$. Побудувати їх графіки.

3. Закон розподілу (ξ, η) вектора задано як

ξ	η: -I	I
-2	0,4	0,I
2	0,I	0,4

Знайти: $D(\xi)$, $D(\eta)$, $cov(\xi,\eta)$, $D(\xi+\eta)$.

4. Випадкова величина ξ підпорядкована нормальному закону розподілу $N(m,\sigma)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = e^{\xi}$.

№ II

I. Знайти випадкову подію X з рівності $\overline{X \cup A} \cup \overline{X \cup \bar{A}} = B$.

2. Справність обмотки статора електродвигуна може бути порушена лише внаслідок перенапруги або пошкодження ізоляції. За деякий час t ймовірність перенапруги $q_1 = 0,1$, а ймовірність пошкодження ізоляції $q_2 = 0,2$. Протягом часу t двигун вийшов з ладу. Знайти ймовірність того, що єдиною причиною аварії було пошкодження ізоляції.

3. Щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини ξ визначається за формулою /розподілу Лапласа/ $f(x)=ae^{-|x|}$. Визначити коефіцієнт a, $M(\xi)$, $D(\xi)$.

4. Випадковий вектор (ξ,η) має щільність розподілу $f(x,y)=$ $= \dfrac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$. Потрібно знайти: коефіцієнт a, $P(0<\xi<1,$ $0<\eta<1)$, $F_{\xi,\eta}(x,y)$, $F_\xi(x)$ і $F_\eta(y)$. Виявити, чи є складові ξ і η залежними.

№ 12

1. З певної кількості подружжів навмання вибирається одне подружжя. Подія A – чоловікові більше 30 років; подія B – чоловік старший за жінку; подія C – дружині більше 30 років:

а/ виявити смисл подій $A\cap B\cap C$, $A-(A\cap B)$, $A\cap\bar{B}\cap C$;

б/ перевірити, що $A\cap\bar{C}\subset B$.

2. Ймовірність хоча б одного влучення при двох пострілах дорівнює 0,96. Знайти ймовірність трьох влучень при чотирьох пострілах.

3. Функція розподілу неперервної випадкової величини задана виразом

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ ax^3 & \text{при } 0<x<2;\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a і щільність імовірності випадкової величини ξ, побудувати її графік. Визначити ймовірність нерівності $0<\xi<1$.

4. Випадковий вектор (ξ,η) має щільність розподілу:

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(1+y)} & \text{при } x>0;\ y>0;\\ 0 & \text{при } x\le 0;\ y\le 0.\end{cases}$$

Знайти: $f_\xi(x)$; $f_\eta(y)$.

№ 13

1. Знайти випадкову подію X з рівності

$$(A\cup\bar{X})\cap(\bar{A}\cup\bar{X})\cup\overline{X\cup A}\cup\overline{X\cup\bar{A}}=B.$$

2. Експедиція видавництва відправила газети у два поштових відділення. Ймовірність своєчасної доставки газет у кожне відділення дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що:

а/ обидва поштових відділення отримають газети вчасно;

б/ обидва поштових відділення отримають газети з запізненням;

в/ тільки одне поштове відділення отримає газети вчасно;

г/ хоча б одне поштове відділення отримає газети вчасно.

3. Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд /закону арксинуса/

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-1;\\ a+b\arcsin x & \text{при} \quad -1\le x\le 1;\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Визначити сталі a і b. Знайти $M(\xi)$ й $D(\xi)$.

4. Випадковий вектор (ξ,η) задано щільністю розподілу

$$f(x,y)=\frac{2}{c^2}e^{-\frac{x+y}{2}} \quad \text{в області} \quad D:\begin{cases}0\le x<\infty,\\ x\le y<\infty.\end{cases}$$

Знайти: $f_\xi(x), f_\eta(y), f_\xi(x/y), f_\eta(y/x), M(\eta/x)$.

№ 14

1. Об"єднання $A\cup B$ двох подій може бути виражено як об"єднання двох несумісних подій, а саме: $A\cup B=A\cup[B-(A\cap B)]$. Виразити відповідним чином об"єднання трьох подій.

2. В кожній з трьох груп урн міститься шість чорних і чотири білих кулі. З першої урни навмання витягнули одну кулю і переклали в другу, після чого з другої урни навмання витягнули одну кулю і перемістили в третю. Знайти ймовірність того, що куля, витягнута навмання з третьої урни буде білою.

3. Функція розподілу випадкового часу безвідмовної роботи радіоапаратури має вигляд /показниковий розподіл/

$$F(t)=1-e^{-\frac{t}{T}} \quad (0<t<\infty).$$

Знайти ймовірність безвідмовної роботи апаратури протягом часу T.

4. Випадковий вектор (ξ, η) має щільність розподілу

$$f(x,y) = \frac{a}{1+(x^2+y^2)^2}.$$

Вимагається: а/ визначити коефіцієнт a; б/ знайти радіус круга з центром у початку координат, ймовірність попадання в який дорівнює 0,5.

№ 15

1. Мішень складається з 10 кругів, обмежених концентричними колами з радіусами z_k $(k = 1,2,3,\dots 10)$, причому $z_1, \dots, z_{10}$. Подія A_k – попадання в круг радіуса z_k. Що означають події:

$$B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k; \quad C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k, \quad D = A_5 \Delta A_6; \quad E = \overline{A_1} \cap A_2?$$

2. В урні дві білих і чотири чорних кулі. Двоє гравців по черзі дістають кулю /без повернення/. Виграє той, хто першим дістане білу кулю. Описати простори елементарних подій. Обчислити ймовірність виграшу для кожного учасника.

3. Випадкова величина ξ розподілена за законом Релея з щільністю ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{при } x>0 \ (\sigma>0), \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Знайти $F_\xi(x)$ моду і медіану цього розподілу.

4. В умовах задачі 3 /варіант № 15/ знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \ln \xi$.

№ 16

1. Нехай A_n – подія, яка полягає в тому, що при n-му повторенні експеримента u здійснювалась подія A; $B_{n,m}$ подія, яка полягає в тому, що при n перших повтореннях u подія A відбувалася m раз:

1/ виразити $B_{4,2}$ через A_i;

2/ який смисл подій $B_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=0}^{m} B_{n,k} \right\}$.

2. Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні в сукупності, причому $P(A_k) = p_k$. Знайти ймовірність: а/ появи хоча б однієї з цих подій; б/ появи всіх цих подій; в/ появи рівно однієї з них.

3. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл $N(2,2)$. Знайти: $P(0 \le \xi < 3)$, $P(|\xi| \le 1)$; $P(-1 \le \xi < 1 \mid 0 \le \xi < 3)$.

4. На відрізку, довжина якого дорівнює ℓ, поставлено навмання дві точки. Вважаючи, що всі положення цих точок на відрізку є однаково ймовірними, написати вираз для функції і щільності розподілу відстані між цими двома точками. Знайти математичне сподівання і дисперсію відстані між ними.

№ 17

1. Описати простір елементарних подій, які відповідають трьом випробуванням, у кожному з яких може з'явитися 1 /успіх/ чи 0 /неуспіх/. Виразити через елементарні події:

1/ подія A – при першому випробуванні стався успіх;

2/ подія B – сталося рівно два успіхи;

3/ подія C – сталося не більше двох успіхів.

2. В коло вписано квадрат. Яка ймовірність того, що з 10 точок, кинутих навмання в коло, чотири попадуть в квадрат, три в один сегмент, і по одній – в три сегменти, що залишились?

3. Випадкова величина ξ має щільність розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} c \ln\left(\frac{a}{x}\right) & \text{при} \quad x \in [0,a[, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0,a[. \end{cases}$$

Знайти сталу C, $M(\xi)$, $D(\xi)$.

4. Поверхня розподілу $f(x,y)$ випадкового вектора (ξ,η) являє собою прямий круговий циліндр, центр основи якого збігається з початком координат, а висота дорівнює h. Визначити радіус циліндра Z, знайти $f_\xi(x), f_\eta(y), f_\xi(x/y); f_\eta(y/x); M(\xi); D(\xi)$, $cov(\xi,\eta)$.

№ 18

1. Знайти прості вирази для подій:

а/ $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$;

б/ $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$.

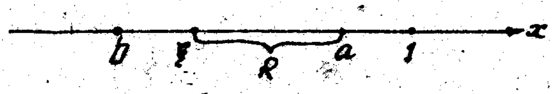
2. На відрізок $[0,10]$ навмання кинуто п'ять точок. Знайти ймовірність того, що дві точки попадуть в $[0,2]$ одна в $[2,3]$ і дві в $[3,10]$.

3. Випадкова величина ξ має щільність:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{при} \quad x \in [0;1]; \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт $a, D(\xi), P(\frac{1}{4}<\xi<\frac{1}{2})$ та $P(\xi>\frac{3}{4} \mid \xi>\frac{1}{2})$.

4. В інтервалі] 0,1 [зафіксовано точку a. Випадкова точка ξ розподілена рівномірно в тому самому інтервалі. Знайти коефіцієнт кореляції між випадковою величиною ξ і R відстанню від точки a до точки ξ /відстань R завжди вважається додатною/. Визначити, за яким значенням a величини ξ і R будуть не корельованими.



№ 19

1. Довести рівність $[(A\cap B)\cap(A\cup\bar{B})]\cup[(\bar{A}\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})]=\Omega$.

2. В першій урні знаходяться дві білих і три чорних кулі, а в другій – одна біла і три чорних. З першої урни в другу переклали дві кулі. Знайти ймовірність того, що куля, яку дістають з другої урни, буде білою.

3. Довести, що якщо ξ має показниковий розподіл, то $P(\xi<y+x \mid \xi\geq y)=P(\xi\leq x)$, де $x>0$ і $y\geq 0$ /показниковий розподіл має властивість відсутності наслідку/.

4. Випадкова величина ξ розподілена рівномірно на] 0,1 [. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta=\ln\frac{1}{\xi}$ і обчислити $M(\eta)$.

№ 20

1. Довести рівність $(A\cup B)\cap(A\cup\bar{B})\cap(\bar{A}\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})=\varnothing$.

2. Скільки разів потрібно повторити випробування, щоб з імовірністю, не меншою за 0,75, стверджувати, що хоч один раз відбудеться подія A, ймовірність якого в кожному випробуванні дорівнює 0,05?

3. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$f(x)=\frac{k}{\sqrt{k^2-x^2}}; \quad (|x|<k).$$

Знайти сталу k, $M(\xi)$, $D(\xi)$, $F(x)$ і $P(0<\xi<k)$.

4. Випадковий вектор (ξ,η) нерівномірно розподілений у трикутнику, який обмежений прямими $x=a$, $y=a$ і $x+y=a$, де $a>0$. Потрібно визначити: $F_{\xi,\eta}(x,y)$; $f_{\xi,\eta}(x,y)$; $f_{\xi}(x)$; $f_{\eta}(x)$; $f_{\xi}(x/y)$; $f_{\eta}(y/x)$.

№ 21

1. Довести рівність $\overline{(A\cap B)\cup(C\cap D)}=(\bar{A}\cup\bar{B})\cap(\bar{C}\cup\bar{D})$.

2. Ймовірність того, що настане подія в кожному з незалежних випробувань, дорівнює 0,2. Виконано 900 випробувань. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності не більше, ніж на 0,04.

3. Прилад почав працювати в момент часу $t=0$. Припустимо, що умови ймовірності виходу приладу із ладу в інтервалі часу $]t,t+\Delta t[$ за умови, що прилад не вийде з ладу до моменту часу t, дорівнює $\lambda\Delta t+O(\Delta t)$. Нехай ξ тривалість безвідмовної роботи приладу. Знайти: $F_{\xi}(x)$; $f_{\xi}(x)$; $M(\xi)$; $D(\xi)$; $\sigma(\xi)$.

4. Випадкові величини ξ і η незалежні і розподілені за законом гіперболічного секанса:

$$f_{\xi}(x)=f_{\eta}(x)=\frac{1}{\pi \operatorname{ch} x}=\frac{2}{\pi(e^{x}+e^{-x})}.$$

Знайти закон розподілу їх суми.

№ 22

1. Спростити вираз $(A\cap\bar{C})\cup(A\cap B\cap C)\cup(A\cap C)$.

2. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що подія станеться 20 раз в 100 випробуваннях.

3. Розглянемо ткацький верстат. Припустимо, що $\Delta t/\lambda$ – ймовірність того, що за проміжок часу тривалістю Δt пряжа обірветься і $P(t)$ – ймовірність того, що до моменту часу t не буде обривів. Знайти щільність розподілу часу роботи цього верстата.

4. Випадковий вектор (ξ, η) задано щільністю розподілу

$$f(x,y)=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}e^{-4x^2-6xy-9y^2}.$$

Знайти умовні щільності розподілу складових.

№ 23

I. Довести рівність $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

2. В урні міститься чотири зелених і вісім червоних куль. З неї дістається куля і фіксується її колір. Ця куля і дві кулі такого самого кольору повертаються в урну, і всі кулі переміщуються. Якщо з урни знову дістати кулю, то знайти ймовірність того, що I/ друга куля буде зеленою; 2/ перша і друга кулі будуть обидві червоними; 3/ перша куля буде червоною, а друга зеленою.

3. Швидкість молекул газу має щільність розподілу /закон Максвелла/ $f(v)=Av^2e^{-h^2v^2}$ $(v>0)$. Знайти величину A, математичне сподівання і дисперсію швидкості молекул.

4. Щільність розподілу випадкового вектора (ξ, η) має вигляд

$$f(x,y)=\begin{cases}[(1+ax)(1+ay)-a]e^{-x-y-axy} & \text{при } x>0;\ y>0,\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ або } y<0.\end{cases}$$

Знайти: $f_\xi(x); f_\eta(y); F_{\xi,\eta}(x,y)$.

№ 24

I. Довести рівності: а/ $\overline{A\cap\overline{B}\cup B}=\overline{A}\cup B$; б/ $\overline{A\cup\overline{B}}\cap B=\overline{A}\cap B$.

2. В ящику знаходиться 94 хороших і шість поганих гвинтів. З ящика випадково відібрано п"ять гвинтів. Знайти ймовірність того, що I/ ні один гвинт не буде поганим; 2/ всі погані; 3/ хоча б один гвинт поганий. Дайте дві відповіді: одну для вибору з поверненням, другу для вибору без повернення.

3. Випадкова величина ξ має щільність:

$$f(x)=\frac{A}{1+x^2} \quad \text{/розподіл Коші/.}$$

Знайти коефіцієнт A, $F_\xi(x)$ і $P(-1<\xi<1)$.

4. Щільність імовірності випадкового вектора (ξ, η) задано виразом

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{при } 0<x<1;\ 0<y<1; \\ 0 & \text{при будь-яких інших значеннях } x \text{ і } y. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт кореляції компонент ξ і η.

№ 25

1. Покажіть, що $A \cap (\bar{A} \cup B) \cup B \cap (B \cup C) \cup B = B$.

2. Серед N екзаменаційних білетів n "щасливих". Студенти підходять за білетами один за другим. У кого більша ймовірність витягнути "щасливий" білет: у того, хто підійшов першим, чи в того, хто підійшов другим?

3. Випадкова величина ξ має щільність $f(x) = \dfrac{a}{e^{-x}+e^{x}}$. Знайти сталу величину a і ймовірність того, що в двох незалежних спостереженнях ξ прийме одне значення менше за одиницю, а друге – більше за одиницю, тобто обчислити $P(\xi_1 < 1,\ \xi_2 \geq 1)$.

4. Незалежні випадкові величини ξ і η задано щільностями розподілів

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{при } |x|<1; \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1; \end{cases} \quad f_\eta(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{при } x>0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Довести, що випадкова величина $\xi\eta$ має нормальний закон розподілу.

№ 26

1. Довести рівність $A - \{A - [B - (B - C)]\} = A \cap B \cap C$.

2. В урні є n однакових куль з номерами від одиниці до n. Кулі дістають по одній без повернення. Визначити ймовірність того, що хоч би в одному випадку номер кулі збігається з номером досліду.

3. Кість кидають доти, поки не випаде шість очок. Описати простір елементарних подій. Нехай ξ – число кидань: а/ знайти закон розподілу випадкової величини ξ; б/ обчислити $M(\xi)$ і $D(\xi)$.

4. Випадковий вектор (ξ, η) має щільність розподілу:

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy(1-x^2) & \text{при } 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{для всіх інших } x \text{ і } y. \end{cases}$$

Довести, що випадкові величини ξ і η незалежні.

1. Довести рівність $A \cup B - (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

2. Дія приладу автоматики визначається двома регуляторами. Ймовірність відмови приладу при роботі обох регуляторів $q_{1,2}$, при роботі тільки першого q_1, при роботі тільки другого q_2, при відмові обох регуляторів q_0. Ймовірність безвідмовної роботи першого регулятора p_1, другого, - p_2. Всі елементи виходять із ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу - ймовірність події A.

3. Щільність ймовірності випадкової величини ξ задано так:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos^2 x & \text{при } |x| \le \pi/2; \\ 0 & \text{при } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти сталу величину a і ймовірність того, що в двох незалежних випробування випадкова величина має значення більше за $\pi/4$.

4. Незалежні випадкові величини ξ і η задано щільностями розподілів:

$$f_\xi(x) = 1/3\, e^{-x/3}; \quad (0 < x < \infty);$$
$$f_\eta(y) = 1/5\, e^{-y/5}; \quad (0 < y < \infty).$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА З МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Варіанти завдань

№ I

I. Розподіл часу роботи електронної лампи характеризується щільністю

$$f(t,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}, & \text{якщо } t \ge 0; \\ 0, & \text{якщо } t < 0. \end{cases}$$

а/ Користуючись методом найбільшої правдоподібності і припускаючи, що $t_1, t_2, \ldots, t_n$ - тривалість роботи n електронних ламп, знайти оцінку θ.

б/ Показати, що $\tilde{\theta}$ є незсуненою оцінкою θ.

2. Для порівняння точності двох приладів було виміряно деяку величину. За $n = 10$ вимірюванням для першого приладу знайдено виправлену вибіркову дисперсію $\sigma_1^2 = 1{,}11$, за $n_2 = 15$ вимірюванням для другого приладу – $\sigma_2^2 = 0{,}52$. При рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ перевірити, чи можна вважати точність приладів однаковою, чи другий прилад забезпечує більшу точність вимірювань.

3. Випробування насосного агрегата системи зрошування при семи значеннях $(n = 7)$ витрат води показали такі результати:

i	1	2	3	4	5	6	7
W, м³/ч	140	150	160	170	180	190	200
P_i, кВт	18,5	18,5	20,5	22,5	21,5	23,5	26,0

де W_i – витрата води; P_i – потужність агрегату. Скласти рівняння лінійної регресії P за W.

№ 2

1. Нехай $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – вибірка з генеральної сукупності, в якій ознака, що досліджується, є випадковою величиною ξ з щільністю розподілу:

$$f(x, \lambda, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \leq 0. \end{cases}$$

Користуючись методом найбільшої правдоподібності, оцінимо параметри λ і α.

2. Для певного класу приладів допустиме розсіяння показів $\sigma_0 = 1{,}03$. Для перевірки точності одного приладу виконано $n = 11$ вимірювань деякої величини і отримано виправлену вибіркову дисперсію $\sigma^2 = 2{,}54$. При рівні значимості $\alpha = 0{,}01$ перевірити, чи можна вважати, що цей прилад відповідає вимогам стандарту?

3. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y за даними кореляційної таблиці:

y	X						
	10	15	20	25	30	35	n_y
40	2	4	–	–	–	–	6
50	–	3	7	–	–	–	10
60	–	–	5	30	10	–	45
70	–	–	7	10	8	–	25
80	–	–	–	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	$n = 100$

№ 3

1. Припустимо, що час роботи електрогенератора має щільність розподілу:

$$f(x;\lambda;\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

і терміни роботи семи електрогенераторів дорівнюють 100; 110; 175; 150; 185; 200 і 220 г. Користуючись методом найбільшої правдоподібності, оцінимо параметри λ і α.

2. Протягом 502 днів фіксувалась кількість автоматичних відхилень електродвигунів унаслідок перевантаження.

i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	120	148	133	66	28	4	1

В таблиці подано кількість m_i днів, протягом яких спостерігалось i відхилень. Перевірити, користуючись критерієм χ^2 /Пірсона/, гіпотезу про згоду даних спостережень з законом розподілу Пуассона, прийнявши рівень значимості $\alpha = 0{,}05$.

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x: 15	20	25	30	35	40	n_y
15	4	1	–	–	–	–	5
25	–	6	4	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	9	7	–	17
55	–	–	–	4	3	7	14
n_x	4	7	7	63	12	7	n = 100

№ 4

1. Визначення швидкості снаряда було проведено на п"яти випробуваннях, в результаті яких обчислено оцінку: $\bar{v}$ = 870 м/с. Знайти 95 %-й надійний інтервал, якщо відомо, що розсіювання швидкості підпорядковано нормальному закону з серединним відхиленням E_v = 2,1 м/с.

2. Термін служби деякого типу електролампи потужністю 100 Вт можна розглядати як випадкову величину X з нормальним розподілом N /1500, 200^2/. Вибірка з 25 таких ламп забезпечує середню тривалість горіння 1380 г.

а/ При рівні значимості α = 0,01 перевірити гіпотезу $H_0: m = m_0 = 1500$ відповідно до альтернативної гіпотези H_1: $m = m_1 < 1500$.

б/ Яка потужність критерію для m_1 = 1400.

3. Див. умови до задачі 3 /варіант № 2/.

y	x: 2	7	12	17	22	27	n_y
110	1	5	–	–	–	–	6
120	–	5	3	–	–	–	8
130	–	–	3	40	12	–	55
140	–	–	2	10	5	–	17
150	–	–	–	3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	n = 100

1. Глибина моря вимірюється приладом, систематична помилка якого дорівнює нулю, а випадкові помилки розподілено нормально з серединним відхиленням $E = 2$ м. Скільки потрібно зробити незалежних вимірювань, щоб визначити глибину з помилкою не більшою за 15 м при надійній імовірності 90 %.

2. Досвід показує, що опір на розрив дротів, вироблених деяким підприємством, можна розглядати як випадкову величину ξ, нормально розподілену з середнім квадратичним відхиленням, яке дорівнює 15 кгс. Вибірка об"єму 9 призводить до середнього опору $\bar{x} = 400$ кгс. Нехай m – середнє значення опору на розрив.

а/ Перевірити при рівні значимості $\alpha = 0{,}01$ гіпотезу H_0: $m = m_0 = 450$ відповідно до альтернативної гіпотези H_1: $m = m_1 \neq m_0$.

б/ Визначити об"єм n вибірки так, щоб критерій мав потужність 0,99.

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x: 5	10	15	20	25	30	n_y
10	3	5	–	–	–	–	8
20	–	4	4	–	–	–	8
30	–	–	7	35	8	–	50
40	–	–	2	10	8	–	20
50	–	–	–	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	$n = 100$

№ 6

1. За даними 16 незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини знайдено середнє арифметичне результатів вимірювань $\bar{x}_в = 42{,}8$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 8$. Знайти справжнє значення вимірюваної величини a з надійністю $\beta = 0{,}999$.

2. Досвід показує, що міцність автопокришки можна вважати випадковою величиною N /30000 км / 800 км^2/. Вносяться зміни в технологічний процес. Вибірка з 100 покришок має $\bar{x} = 29000$ км. На основі цієї вибірки при рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ чи можна зробити

висновок, що новий метод призводить до погіршення міцності покришок?

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	X						
	I2	I7	22	27	32	37	n_y
25	2	4	–	–	–	–	6
35	–	6	3	–	–	–	9
45	–	–	6	35	4	–	45
55	–	–	2	8	6	–	I6
65	–	–	–	I4	7	3	24
n_x	2	I0	II	57	I7	3	n = I00

№ 7

I. У 300 однотипних радіоламп було в заданих умовах перевірено силу анодного струму, причому в 60 з них вона виявилась вищою за гарантовану паспортом. Знайти з надійністю 0,95 межі інтервалу, який містить долю таких радіоламп серед усіх радіоламп даного типу.

2. В таблиці міститься кількість m_i ділянок площі /0,25 км^2/ південної частини Лондона на кожний з яких доводилось по i попадань бомб за другу світову війну. Перевірити за критерієм χ^2 згоду дослідних даних з законом розподілу Пуассона $P(i,\lambda)=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$, прийнявши за рівень значимості α = 0,05.

i	0	I	2	3	4	5	Разом
m_i	229	2II	93	35	7	I	m = 576

3. Див. умови задачі /варіант № 2/.

y	X						
	I5	20	25	30	35	40	n_y
25	3	4	–	–	–	–	7
35	–	4	3	–	–	–	9
45	–	–	6	35	2	–	43
55	–	–	I2	8	6	–	26
65	–	–	–	4	7	4	I5
n_x	3	I0	2I	47	I5	4	n = I00

№ 8

I. Якою повинна бути кількість дослідів, щоб з надійністю 0,98 точність оцінки математичного сподівання m_x була 0,2, якщо середнє квадратичне відхилення $\sigma_x = 4$?

2. Через рівні проміжки часу в тонкому шарі розчину золота реєструвалася кількість часток золота, які попадали в поле зору мікроскопа. Результати спостережень наведено в таблиці. Перевірити, користуючись критерієм χ^2, згоду з законом розподілу Пуассона, взявши за рівень значимості $\alpha = 0,05$.

Кількість часток i	0	I	2	3	4	5	6	7	Разом
m_i	II2	I68	I30	68	32	5	I	I	m = 5I7

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x						
	4	9	I4	I9	24	29	n_y
30	3	3	–	–	–	–	6
40	–	5	4	–	–	–	9
50	–	–	40	2	8	–	50
60	–	–	5	I0	6	–	2I
70	–	–	–	4	7	3	I4
n_x	3	8	49	I6	2I	3	n = I00

№ 9

I. Визначення діаметра втулки виконано чотирма способами, точність яких характеризується дисперсіями $\sigma_1^2 = 1,6$; $\sigma_2^2 = 2$; $\sigma_3^2 = 2,5$; $\sigma_4^2 = 3$ мм^2. Результати вимірювань: $x_1 = 19$; $x_2 = 18$; $x_3 = 20$; $x_4 = 21$ мм. Визначити наближене значення діаметра втулки і оцінити його точність.

2. В таблиці дано відхилення діаметрів валків, оброблених на верстаті, від заданого розміру. Перевірити, користуючись критерієм χ^2, гіпотезу про згоду спостережень з законом нормального розподілу, прийнявши рівень значимості 0,05.

Межі інтервалу	0 + 5	5 + I0	I0 + I5	I5 + 20	20 + 25
Чисельність розряду m_i	I5	75	I00	50	I0
Частота p_i^*	0,06	0,30	0,40	0,20	0,04

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x						
	5	I0	I5	20	25	30	n_y
30	2	6	–	–	–	–	8
40	–	5	3	–	–	–	8
50	–	–	7	40	2	–	49
60	–	–	4	9	6	–	I9
70	–	–	–	4	7	5	I6
n_x	2	II	I4	53	I5	5	n = I00

№ I0

I. За допомогою радіодалекоміра проведено дев"ять незалежних вимірювань до цілі. Оцінити точність визначення відстані до цілі з надійністю $\beta = 0{,}9$, якщо точність вимірювання характеризується серединною помилкою E_x = 90 м.

2. Цифри 0, I, 2, ..., 9 серед 800 перших десяткових знаків числа π з"явились відповідно 74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 76, 9I раз. Перевірити за допомогою критерію χ^2 гіпотезу про згоду цих даних з законом рівномірного розподілу при рівні значимості $\alpha = 0{,}10$.

3. Див. умови задачі /варіант № 2/.

y	x						
	I0	I5	20	25	30	35	n_y
20	5	I	–	–	–	–	6
30	–	6	2	–	–	–	8
40	–	–	5	40	5	–	50
50	–	–	2	8	7	–	I7
60	–	–	–	4	7	8	I9
n_x	5	7	9	52	I9	8	n = I00

№ II

I. Виходячи з умов задачі I /варіант № IO/, визначити ймовірність того, що максимальна помилка визначення відстані до цілі не буде перевищувати 60 м.

2. Розв"язати задачу 2 /варіант № IO/, вважаючи припустим використання критерію Колмогорова і вважаючи, що ймовірність вияву будь-якої цифри на місці будь-якого десяткового знаку дорівнює 0,IO.

3. Див. умови задачі /варіант № 2/.

y	x						
	2	7	I2	I7	22	27	n_y
II0	I	5	–	–	–	–	6
I20	–	5	3	–	–	–	8
I30	–	–	3	40	I2	–	55
I40	–	–	2	I0	5	–	I7
I50	–	–	–	3	4	7	I4
n_x	I	I0	8	53	2I	7	n = I00

№ I2

I. Виходячи з умов задачі I /варіант № IO/, визначити необхідне число вимірювань для забезпечення точності визначення відстані до цілі ℓ = 50 м з надійністю 0,95.

2. Відлік за шкалою вимірювального приладу оцінюється приблизно в долях поділу шкали. В таблиці наведено 200 результатів відліку останньої цифри між сусідніми поділками шкали. Встановити, користуючись критерієм χ^2, чи узгоджуються спостереження з законом рівномірного розподілу, при якому ймовірність появи будь-якої цифри P_i = 0,IO при рівні значимості α = 0,05.

Цифра i	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	35	I6	I5	I7	I7	I9	II	I6	30	24

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x						
	5	10	15	20	25	30	n_y
10	3	5	–	–	–	–	8
20	–	4	4	–	–	–	8
30	–	–	37	35	8	–	50
40	–	–	2	10	8	–	20
50	–	–	–	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	$n = 100$

№ 13

1. За результатами 20 вимірювань визначено $\widehat{m}_x = 115$ м і $D_x = 4$ м. Оцінити точність визначення дисперсії з надійністю 0,96.

2. Партія виробів приймається, якщо ймовірність того, що виріб виявиться бракованим, не перевищує 0,03. Серед випадково відібраних 400 виробів виявилося 18 бракованих. Чи можна прийняти партію?

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x						
	15	20	25	30	35	40	n_y
15	4	1	–	–	–	–	5
25	–	6	4	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	9	7	–	17
55	–	–	–	4	3	7	14
n_x	4	7	7	63	12	7	$n = 100$

№ 14

1. За результатами п"яти вимірювань визначено оцінку для дисперсії $\widetilde{D}_x = 9$ м^2. Оцінити надійність того, що справжнє значення дисперсії D_x знаходиться в межах] 4,5 м; 13,5 м [.

2. З нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 40$ зроблено вибірку об"єму $n = 64$ і за нею знайдено вибіркову середню $\bar{x} = 136,5$. Потрібно при рівні значимості 0,01 перевірити нульову гіпотезу $H_0: a = a = 130$ при конкуруючій гіпотезі $H_1: a \neq 130$.

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x						
	4	9	I4	I9	24	29	n_y
30	3	3	–	–	–	–	6
40	–	5	4	–	–	–	9
50	–	–	40	2	8	–	50
60	–	–	5	I0	6	–	2I
70	–	–	–	4	7	3	I4
n_x	3	8	49	I6	2I	3	n = I00

№ I5

I. Для визначення точності вимірювального приладу, систематична помилка якого практично дорівнює нулю, було проведено I0 незалежних вимірювань. На основі їх результатів отримано оцінку для дисперсії $\tilde{D}_x = 4$ м^2. Потрібно визначити надійний інтервал для дисперсії D_x з надійністю 0,96 за умови, що значення вимірюваної величини було відомим.

2. Розв"язати задачу 3 /варіант № I4/ при конкуруючій гіпотезі H_1: a.7 130.

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x						
	5	I0	I5	20	25	30	n_y
30	2	6	–	–	–	–	8
40	–	5	3	–	–	–	8
50	–	–	7	40	2	–	49
60	–	–	4	9	6	–	I9
70	–	–	–	4	7	5	I6
n_x	2	II	I4	53	I5	5	n = I00

№ I6

I. За результатами I0 вимірювань визначено $\tilde{\sigma}_x = 3$ м. Оцінити надійність того, що істинне значення σ_x знаходиться в межах] 2 м; 4 м [.

2. Для порівняння точності двох верстатів-автоматів взято дві проби /вибірки/, об"єми яких $n_1 = $ I0 і $n_2 = 8$. Внаслідок вимірювання контрольованого розміру відібраних виробів отримано такі результати:

I5 – 2-73

x_i	I,08	I,I0	I,I2	I,I4	I,I5	I,25	I,36	I,38	I,40	I,42
y_i	I,II	I,I2	I,I8	I,22	I,33	I,35	I,36	I,38	-	-

Чи можна вважати, що верстати мають однакову точність $(H_0: D(X)=D(Y))$, якщо прийняти рівень значимості α = 0,I і за конкуруючу гіпотезу $H_1: D(X) \neq D(Y)$?

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

Y	X						
	I5	20	25	30	35	40	n_y
25	3	4	-	-	-	-	7
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	35	2	-	43
55	-	-	I2	8	6	-	26
65	-	-	-	4	7	4	I5
n_x	3	I0	2I	47	I5	4	n = I00

№ I7

I. За результатами п"яти пусків ракет визначено відстань до середньої точки падіння I285 км і наближене значення середнього квадратичного відхилення I000 м. Знайти значення того, що істинне значення центру розсіювання знаходиться в межах I283...I287 км, а істинне значення середнього квадратичного відхилення - 850... ...I250 м.

2. За вибіркою об"єму n = 30 знайдено середню вагу $\bar{x}$ = = I30 г виробів, виготовлених на першому верстаті; за вибіркою m = 40 знайдено середню вагу $\bar{y}$ = I25 г виробів, виготовлених на другому верстаті. Генеральні дисперсії відомі: $D(X)$ = 60, $D(Y)$ = = 80. Потрібно при рівні значимості 0,05 перевірити нульову гіпотезу $H_0: M(X)=M(Y)$. Припускається, що випадкові величини X і Y розподілено нормально і вибірки незалежні.

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	X: I2	I7	22	27	32	37	n_y
25	2	4	–	–	–	–	6
35	–	6	3	–	–	–	9
45	–	–	6	35	4	–	45
55	–	–	2	8	6	–	I6
65	–	–	–	I4	7	3	24
n_x	2	I0	II	57	I7	3	n = I00

№ I8

I. У результаті I0 вимірювань індуктивності котушки отримано такі значення: 8,345; 8,346; 8,348; 8,342; 8,343; 8,345; 8,343; 8,347; 8,344; 8,347 МГн.

I/ З практичною вірогідністю, що відповідає надійності 0,98, вказати межі, між якими знаходиться істинне значення індуктивності.

2/ З практичною достовірністю, що відповідає надійності 0,94, вказати межі, між якими знаходиться середнє квадратичне відхилення можливого результату вимірювання.

2. За вибіркою об"єму n = 50 знайдено середній розмір $\bar{x}$ = = 20,I мм діаметра валків, виготовлених автоматом № I; за вибіркою об"єму m = 50 знайдено середній розмір $\bar{y}$ = I8,8 мм діаметра валків, виготовлених автоматом № 2. Генеральні дисперсії відомі: $D(x)$ = I,750 мм^2, $D(y)$ = I,375 мм^2. Потрібно при рівні значимості 0,05 перевірити нульову гіпотезу $H_0: M(x) = M(y)$ при конкуруючій гіпотезі $H_1: M(x) \neq M(y)$. Припускається, що випадкові величини X і Y розподілено нормально і вибірки незалежні.

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	X: 5	I0	I5	20	25	30	n_y
II	4	2	–	–	–	–	6
2I	–	5	3	–	–	–	8
3I	–	–	5	45	5	–	55
4I	–	–	2	8	7	–	I7
5I	–	–	–	4	7	3	I4
n_x	4	7	I0	57	I9	3	n = I00

I. Є вибірка об"єму $n: x_1, x_2, \ldots, x_n$ з генеральної сукупності, розподіленої за законом χ^2 з невідомим параметром α, тобто з щільністю

$$f(x) = \frac{\alpha^p x^{p-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(p)} \quad (x>0).$$

Знайти за допомогою методу максимальної правдоподібності оцінку параметра α.

2. У процесі восьмикратного визначення в"язкості двох видів мастила A і B для автомашин отримано такі результати:

Марка A	В"язкість	I0,28	I0,27	I0,30	I0,32	I0,27	I0,27	I0,28	I0,29
Марка B	В"язкість	I0,3I	I0,3I	I0,26	I0,30	I0,27	I0,3I	I0,29	I0,26

Потрібно при рівні значимості 0,05 перевірити нульову гіпотезу $H_0: m_A = m_B$ при конкуруючій гіпотезі $H_1: m_A \neq m_B$.

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	X						
	4	9	I4	I9	24	29	n_y
8	3	3	–	–	–	–	6
I8	–	5	4	–	–	–	9
28	–	–	40	2	8	–	50
38	–	–	5	I0	6	–	2I
48	–	–	–	4	7	3	I4
n_x	3	8	49	I6	2I	3	n = I00

№ 20

I. У 500 однотипних радіоламп було в заданих умовах перевірено силу анодного струму, причому у I50 з них вона виявилась вищою за гарантовану паспортом. Знайти з коефіцієнтом надійності 0,95 інтервал, який містить частку таких радіоламп серед усіх радіоламп даного типу.

2. Користуючись критерієм Пірсона, при рівні значимості 0,05 перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X з емпіричним розподілом вибірки об"єму n = = 200:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	I,I	I,3	I,5	I,7	I,9	2,2	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	2I	24	20	8	5

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x						
	II	I6	2I	26	3I	36	n_y
25	2	4	–	–	–	–	6
35	–	6	3	–	–	–	9
45	–	–	6	45	4	–	55
55	–	–	2	8	6	–	I6
65	–	–	–	4	7	3	I4
n_x	2	I0	II	57	I7	3	n = I00

№ 2I

I. З великої партії деяких виробів відібрано навмання для контролю 500 шт., причому серед них виявилося 20, які не задовольняють стандарт /брак/. Знайти з надійним рівнем 0,05 /тобто надійністю 0,95/ інтервал, що містить відсоток браку у всій партії.

2. Користуючись критерієм Пірсона, при рівні значимості 0,05 встановити, чи випадково значиме розходження між емпіричними частотами n_i і теоретичними частотами n_i', які обчислені. Згідно з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності X

n_i	5	I0	20	8	7
n_i'	6	I4	I8	7	5

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x						
	25	30	35	40	45	50	n_y
35	4	2	–	–	–	–	6
45	–	5	3	–	–	–	8
55	–	–	5	45	5	–	55
65	–	–	2	8	7	–	I7
75	–	–	–	4	7	3	I4
n_x	4	7	I0	57	I9	3	n = I00

№ 22

І. Методом моментів і методом максимальної правдоподібності знайти оцінку параметра λ розподілу Пуассона за вибіркою об"єму n: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і довести незсуненість і ефективність цієї оцінки.

2. Див. умови задачі 2 /варіант № 2І/.

n_i	6	8	I3	I5	20	I6	I0	7	5
n'_i	5	8	I4	I6	I8	I6	9	6	7

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	X						
	20	25	30	35	40	45	n_y
25	2	4	–	–	–	–	6
35	–	6	3	–	–	–	9
45	–	–	6	45	4	–	55
55	–	–	2	8	6	–	I6
65	–	–	–	4	7	3	I4
n_x	2	I0	II	57	I7	3	n = I00

№ 23

І. З генеральної сукупності, розподіленої за біноміальним законом $\xi = 0, 1, 2, \ldots, m$; $P\{\xi = k\} = P_m(k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$, добуто вибірку об"єму n: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Знайти методом моментів і методом максимальної правдоподібності статистичну оцінку параметра p і показати, що це буде незсунена і ефективна оцінка.

2. Див. умови задачі 2 /варіант № 2І/.

n_i	I4	I8	32	70	20	36	I0
n'_i	I0	24	34	80	I8	22	I2

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x						
	15	20	25	30	35	40	n_y
30	3	3	–	–	–	–	6
40	–	5	4	–	–	–	9
50	–	–	8	40	2	–	50
60	–	–	5	10	6	–	21
70	–	–	–	4	7	3	14
n_x	3	8	17	54	15	3	n = 100

№ 24

1. Дано результати восьми незалежних вимірювань однієї й тієї самої величини приладом, який не має систематичних помилок: 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383 м. Визначити незсунену оцінку дисперсії помилок вимірювань, якщо а/ довжина вимірюваної бази відома: $\bar{x}$ = = 375 м; б/ довжина вимірюваної бази не відома.

2. Див. умови задачі 1 /варіант № 21/.

n_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n_i'	6	6	14	15	22	16	8	8	6

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	x						
	10	15	20	25	30	35	n_y
30	2	6	–	–	–	–	8
40	–	4	4	–	–	–	8
50	–	–	7	–	–	–	50
60	–	–	2	10	8	–	20
70	–	–	–	5	6	3	14
n_x	2	10	13	50	22	3	n = 100

№ 25

1. При обробці даних шести випробувань спортивного катера було одержано такі значення його максимальної швидкості: 27, 38, 30, 37, 35, 31 м/с. Визначити незсунені оцінки математичного сподівання і серединного відхилення максимальної швидкості, вважаючи, що максимальна швидкість катера має нормальний розподіл.

2. Задано вибіркові середні $\bar{x}$ і $\bar{y}$, знайдені за вибірками об"єму $n = 60$ і $m = 50$, які добуті з нормальних генеральних сукупностей ξ і η з відомими дисперсіями $D(\xi)$ і $D(\eta)$. Потрібно при рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: M(\xi)=M(\eta)$ при конкуруючій гіпотезі $H_1: M(\xi) \neq M(\eta)$, тобто необхідно встановити, значно чи ні відрізняються вибіркові середні $\bar{x} = 520$, $\bar{y} = 500$; $D(\xi) = 72$, $D(\eta) = 140$.

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y \ x	5	10	15	20	25	30	n_y
20	1	5	–	–	–	–	6
30	–	5	3	–	–	–	8
40	–	–	9	40	2	–	51
50	–	–	4	11	6	–	21
60	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	10	16	35	15	3	$n = 100$

№ 26

1. Стала величина виміряна 25 раз за допомогою приладу, систематична помилка якого дорівнює нулю, а випадкові помилки вимірювання розподілені нормально з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 10$ м. Визначити межі надійного інтервалу для значення вимірюваної величини при надійній імовірності 0,99, якщо $\bar{x} = 100$ м.

2. Див. умови задачі 2 /варіант № 25/. $\bar{x} = 780$; $\bar{y} = 785$; $D(\xi) = 120$; $D(\eta) = 100$.

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y \ x	5	10	15	20	25	30	n_y
45	2	4	–	–	–	–	6
55	–	3	5	–	–	–	8
65	–	–	5	35	5	–	45
75	–	–	2	8	17	–	27
85	–	–	–	4	7	3	14
n_x	2	7	12	47	29	3	$n = 100$

1. На основі 100 дослідів було визначено, що в середньому для виробництва деталі потрібно $\bar{t}$ = 5,5 с, з σ_t = 1,7 с. Припустивши, що під час виробництва деталі є нормальна випадкова величина, визначити межі, в яких знаходяться справжні значення для t і σ_t з надійною ймовірністю відповідно 85 і 90 %.

2. Див. умови задачі 2 /варіант № 25/.

$$\bar{x} = 1000; \quad \bar{y} = 990; \quad D(\xi) = 84; \quad D(\eta) = 130.$$

3. Див. умови задачі 3 /варіант № 2/.

y	X						
	15	20	25	30	35	40	n_y
5	4	2	–	–	–	–	6
10	–	6	4	–	–	–	10
15	–	–	6	45	2	–	53
20	–	–	2	8	6	–	16
25	–	–	–	4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	n = 100

Додаток I

Значення функції $\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$

u	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,I	3970	3965	396I	3956	395I	3945	3939	3932	3825	39I8
0,2	39I0	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	38I4	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	37I2	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	362I	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	352I	3503	3485	3467	3448	3429	34I0	339I	3372	3352
0,6	3332	33I2	3292	327I	325I	3230	3209	3I87	3I66	3I44
0,7	3I23	3I0I	3079	3056	3034	30II	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	266I	2637	26I3	2589	2665	254I	25I6	2492	2468	2444
I,0	0,2420	2396	237I	2347	2323	2299	2275	225I	2227	2203
I,I	2I79	2I55	2I3I	2I07	2083	2059	2036	20I2	I989	I965
I,2	I942	I9I9	I895	I872	I849	I826	I804	I78I	I758	I736
I,3	I7I4	I69I	I669	I647	I626	I604	I582	I56I	I539	I5I8
I,4	I497	I476	I456	I435	I4I5	I394	I374	I354	I334	I3I5
I,5	I295	I276	I257	I238	I2I9	I200	II82	II63	II45	II27
I,6	II09	I092	I074	I057	I040	I023	I006	0989	0973	0957
I,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	08I8	0804
I,8	0790	0775	076I	0748	0734	072I	0707	0694	068I	0669
I,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	055I
2,0	0,0540	0529	05I9	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,I	0440	043I	0422	04I3	0404	0396	0387	0379	037I	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	03I7	03I0	0303	0297	0290
2,3	0285	0277	0270	0264	0258	0252	0246	024I	0235	0229
2,4	0224	02I9	02I3	0208	0203	0I98	0I94	0I89	0I84	0I80
2,5	0I75	0I7I	0I67	0I63	0I58	0I54	0I5I	0I47	0I43	0I39
2,6	0I36	0I32	0I29	0I26	0I22	0II9	0II6	0II3	0II0	0I07
2,7	0I04	0I0I	0099	0096	0093	009I	0088	0086	0084	008I
2,8	0079	0077	0075	0073	007I	0069	0067	0065	0063	006I
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	005I	0050	0048	0047	0046

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Значення функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,I6	0,0836	0,46	0,I844	0,80	0,288I	I,I2	0,3686
0,I7	0,0675	0,49	0,I879	0,8I	0,29I0	I,I3	0,3708
0,I8	0,07I4	0,50	0,I9I5	0,82	0,2939	I,I4	0,3729
0,I9	0,0753	0,5I	0,I950	0,83	0,2967	I,I5	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,I985	0,84	0,2995	I,I6	0,3770
0,2I	0,0832	0,53	0,20I9	0,85	0,3023	I,I7	0,3790
0,22	0,087I	0,54	0,2054	0,86	0,305I	I,I8	0,38I0
0,23	0,09I0	0,55	0,2088	0,87	0,3078	I,I9	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2I23	0,88	0,3I06	I,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2I57	0,89	0,3I33	I,2I	0,3869
0,26	0,I026	0,58	0,2I90	0,90	0,3I59	I,22	0,3883
0,27	0,I064	0,59	0,2224	0,9I	0,3I86	I,23	0,3907
0,28	0,II03	0,60	0,2257	0,92	0,32I2	I,24	0,3925
0,29	0,II4I	0,6I	0,229I	0,93	0,3238	I,25	0,3944
0,30	0,II79	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,3I	0,I2I7	0,63	0,2357	0,95	0,3289		
I,26	0,3962	I,59	0,444I	I,92	0,4726	2,50	0,4938
I,27	0,3980	I,60	0,4452	I,93	0,4732	2,52	0,494I
I,28	0,3997	I,6I	0,4463	I,94	0,4738	I,54	0,4945
I,29	0,40I5	I,62	0,4474	I,95	0,4744	2,56	0,4948
I,30	0,4032	I,63	0,4484	I,96	0,4750	2,58	0,495I
I,3I	0,4049	I,64	0,4495	I,97	0,4756	2,60	0,4953
I,32	0,4066	I,65	0,4505	I,98	0,476I	2,62	0,4956
I,33	0,4082	I,66	0,45I5	I,99	0,4767	2,64	0,4959
I,34	0,4099	I,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,496I
I,35	0,4II5	I,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
I,36	0,4I3I	I,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
I,37	0,4I47	I,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
I,38	0,4I62	I,7I	0,4564	2,08	0,48I2	2,74	0,4969
I,39	0,4I77	I,72	0,4573	2,I0	0,482I	2,76	0,497I
I,40	0,4I92	I,73	0,4582	2,I2	0,4830	2,78	0,4973
I,4I	0,4207	I,74	0,459I	2,I4	0,4838	2,80	0,4974
I,42	0,4222	I,75	0,4599	2,I6	0,4846	2,82	0,4976
I,43	0,4236	I,76	0,4608	2,I8	0,4854	2,84	0,4977

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
I,44	0,425I	I,77	0,46I6	2,20	0,486I	2,86	0,4979
I,45	0,4265	I,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
I,46	0,4279	I,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,498I
I,47	0,4292	I,80	0,464I	2,26	0,488I	2,92	0,4982
I,48	0,4306	I,8I	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
I,49	0,43I9	I,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
I,50	0,4332	I,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
I,5I	0,4345	I,84	0,467I	2,34	0,4904	3,00	0,49865
I,52	0,4357	I,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,4993I
I,53	0,4370	I,86	0,4686	2,38	0,49I3	3,40	0,49966
I,54	0,4382	I,87	0,4693	2,40	0,49I8	3,60	0,49984I
I,55	0,4394	I,88	0,4699	2,42	0,4922	3,60	0,499928
I,56	0,4406	I,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
I,57	0,44I8	I,90	0,47I3	2,46	0,493I	4,50	0,499997
I,58	0,4429	I,9I	0,47I9	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Додаток 8

Значення функції $\varkappa_{\alpha,\nu}$: $P(\varkappa_\nu^2 \geq \varkappa_{\alpha,\nu}^2)=\alpha$
с.в. $\varkappa_\nu^2$ має $\varkappa^2$ -розподіл з ν ступенями волі

ν	α					
	0,20	0,I0	0,05	0,02	0,0I	0,00I
I	I,642	2,706	3,84I	5,4I2	6,635	I0,827
2	3,2I9	4,605	5,99I	7,824	9,2I0	I3,8I5
3	4,642	6,25I	7,8I5	9,837	II,345	I6,266
4	5,989	7,779	9,488	II,668	I3,277	I8,467
5	7,289	9,236	II,070	I3,388	I5,086	20,5I5
6	8,558	I0,645	I2,592	I5,033	I6,8I2	22,457
7	9,803	I2,0I7	I4,067	I6,622	I8,475	24,322
8	II,030	I3,362	I5,507	I8,I68	20,090	26,I25
9	I2,242	I4,684	I6,9I9	I9,679	2I,666	27,877
I0	I3,442	I5,987	I8,307	2I,I6I	23,209	29,588
II	I4,63I	I7,275	I9,675	22,6I8	24,725	3I,264

ν	α					
	0,20	0,I0	0,05	0,02	0,0I	0,00I
I2	I5,8I2	I8,549	2I,026	24,054	26,2I7	32,909
I3	I6,985	I9,8I2	22,362	25,472	27,688	34,528
I4	I8,I5I	2I,064	23,685	26,783	29,I4I	36,I23
I5	I9,3II	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
I6	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
I7	2I,6I5	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
I8	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,3I2
I9	23,900	27,204	30,I44	33,687	36,I9I	43,820
20	25,038	28,4I2	3I,4I0	35,020	37,566	45,3I5
2I	26,I7I	29,6I5	32,67I	36,343	38,932	46,797
22	27,30I	30,8I3	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,I72	38,968	4I,638	49,728
24	29,553	33,I96	36,4I5	40,270	42,980	5I,I79
25	30,675	34,382	37,652	4I,566	44,3I4	52,620
26	3I,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,9I2	36,74I	40,II3	44,I40	46,963	55,052
28	34,027	37,9I6	4I,337	45,4I9	48,278	56,893
29	35,I39	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Додаток 4

Розподіл Стьюдента

/значення $t_{\alpha,\nu}$ задовольняють умову $P(t_\nu \geq t_{\alpha,\nu})$,
св t_ν має t-розподіл з ν ступенями волі/

ν	α									
	0,40	0,30	0,20	0,I0	0,050	0,025	0,0I0	0,005	0,00I	0,0005
I	0,325	0,727	I,376	3,078	6,3I4	I2,7I	3I,82	63,66	3I8,3	636,6
2	0,289	0,6I7	I,06I	I,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	3I,60
3	0,277	0,584	0,978	I,638	2,353	3,I82	4,54I	5,84I	I0,22	I2,94
4	0,27I	0,569	0,94I	I,533	2,I32	2,776	3,747	4,604	7,I73	8,6I0
5	0,267	0,559	0,920	I,476	2,0I5	2,57I	3,365	5,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	I,440	I,943	2,447	3,I43	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	I,4I5	I,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405

ν	α									
	0,40	0,30	0,20	0,I0	0,050	0,025	0,0I0	0,005	0,00I	0,0005
8	0,262	0,546	0,889	I,397	I,860	2,306	2,896	3,355	4,50I	5,04I
9	0,26I	0,543	0,883	I,383	I,833	2,262	2,82I	3,250	4,297	4,78I
I0	0,260	0,542	0,879	I,372	I,8I2	2,228	2,764	3,I69	4,I44	4,587
II	0,260	0,540	0,876	I,363	I,796	2,20I	2,7I8	3,I06	4,025	4,437
I2	0,259	0,539	0,873	I,356	I,782	2,I79	2,68I	3,055	3,930	4,3I8
I3	0,259	0,538	0,870	I,350	I,77I	2,I60	2,650	3,0I2	3,852	4,22I
I4	0,258	0,537	0,868	I,345	I,76I	2,I45	2,624	2,977	3,787	4,I40
I5	0,258	0,536	0,866	I,34I	I,753	2,I3I	2,602	2,947	3,733	4,073
I6	0,258	0,535	0,865	I,337	I,746	2,I20	2,583	2,92I	3,686	4,0I5
I7	0,257	0,534	0,863	I,333	I,740	2,II0	2,567	2,898	3,646	3,965
I8	0,257	0,534	0,862	I,330	I,734	2,I0I	2,552	2,878	3,6II	3,922
I9	0,257	0,533	0,86I	I,328	I,729	2,093	2,539	2,86I	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	I,325	I,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
2I	0,257	0,532	0,859	I,323	I,72I	2,080	2,5I8	2,83I	3,527	3,8I9
22	0,256	0,532	0,858	I,32I	I,7I7	2,074	2,508	2,8I9	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	I,3I9	I,7I4	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,53I	0,857	I,3I8	I,7II	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,53I	0,856	I,3I6	I,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,53I	0,856	I,3I5	I,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,53I	0,855	I,3I4	I,703	2,052	2,473	2,77I	3,42I	3,690
28	0,256	0,530	0,855	I,3I3	I,70I	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	I,3II	I,669	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	I,3I0	I,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,85I	I,303	I,684	2,02I	2,423	2,704	3,307	3,55I
50	0,255	0,528	0,849	I,298	I,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	I,296	I,67I	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	I,292	I,664	I,990	2,374	2,639	3,I95	3,4I5
I00	0,254	0,526	0,845	I,290	I,660	I,984	2,365	2,626	3,I74	3,389
200	0,254	0,525	0,843	I,286	I,653	I,972	2,345	2,60I	3,I3I	3,339
500	0,253	0,525	0,842	I,283	I,648	I,965	2,334	2,586	3,I06	3,3I0
	0,253	0,524	0,842	I,282	I,645	I,960	2,326	2,576	3,090	3,29I

17*

Значення функції $t_{\alpha,\nu} = t(\gamma, n)$

$$\left(\bar{x} - t(\gamma; n)\frac{\bar{s}}{n} < a < \bar{x} + t(\gamma, n)\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} \right)$$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,693	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	4,558
10	2,26	3,25	4,76	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97		1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 6

Значення коефіцієнтів γ_1 і γ_2

$$(\gamma_1 \bar{s} < \sigma < \gamma_2 \bar{s})$$

ν	P							
	0,99		0,98		0,95		0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
1	0,356	15,9	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797

ν	P							
	0,99		0,98		0,95		0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,677	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,666	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,444	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
22	0,717	1,595	0,739	1,519	0,773	1,416	0,805	1,335
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
28	0,741	1,499	0,762	1,436	0,794	1,352	0,823	1,286
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,648	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,856	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

ЛІТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969.

2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969.

3. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятносте и метематическая статистика. - Киев: Выща шк., 1979.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1977.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высш. шк., 1975.

6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1969.

7. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. - Минск: Вышэйш. шк., 1975.

8. Теорія ймовірностей: Збірник задач / А.Я.Дороговцев, Д.С.Сільвестров, А.В.Скороход, М.І.Ядренко. - Київ: Вища шк., 1976.

9. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.

10. Кемени Дж., Снел Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. - М.: Мир, 1965.

11. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1973.

12. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963.

13. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А.Свешникова. - М.: Наука, 1970.

14. Синьков В.М., Пересыпкина С.И., Филиппов Н.М. Математические задачи сельской электрификации. - Киев: Выща шк., 1978.

15. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики. - М.: Наука, 1969.

16. Тернер Л. Вероятность, статистика и исследование операций. - М.: Статистика, 1976.

17. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. - М.: Мир, 1967. - Т.1.

18. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей - М.: Наука, 1978.

19. Шторм Р. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. - М.: Мир, 1970.

ЗМІСТ

Министерство высшего образования Украины
Учебно-методический кабинет высшего образования
Одесский политехнический институт

Учебное издание

Новиков В.В., Яценко С.А.

Теория вероятностей и математическая статистика

Учебное пособие
Киев УМК ВО 1992

На украинском языке

Навчальне видання

Новіков В.В., Яценко С.А.

Теорія ймовірностей і математична статистика

Редактор А.Д. Пантелієнко
Коректори: С.М. Кушнір
Т.М. Божко

Підп. до друку 04.03.92. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Папір друк. № 3. Друк офсетний. Ум. др. арк. 1,67. Ум. фарбо-відб. 7,78.
Облік.-вид. арк. 8,22. Тираж 500.
Зам. № 2-73. Ціна 1 крб.

НМК ВО Мінвузу України
252135, м. Київ, проспект Перемоги, 10

РОВО «Укрвузполіграф».
252151, Київ, вул. Волинська, 60.