

536.2(075)  
0-13

Міністерство освіти України  
Вінницький державний технічний університет

Р.Р. Обертюх

## ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

Вінниця ВДТУ 1999

209

Міністерство освіти України  
Вінницький державний технічний університет

Р.Р. Обертюх

## ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів бакалаврського напрямку «Інженерна механіка». Протокол №4 від 25 листопада 1999 р.

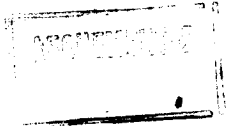
НТБ ВНТУ



465088

536.2(075) О-13 1999

Обертюх Р.Р. Теплопередача



Вінниця ВДТУ 1999

УДК 536.24(075.5)

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА. Навчальний посібник / Р.Р.Обертюх.

–В.: ВДТУ, 1999. – 98 с. Укр.мовою/

У навчальному посібнику викладені основні положення вчення про теплопровідність, конвективний теплообмін та теплопередачу випромінюванням. Розглянуті елементи теорії подібності та принципи моделювання процесів конвективного теплообміну, а також наведені відомості про особливості теплообміну в трубах і при зміні агрегатного стану рідини. Викладені основні поняття та закони тепло та масообміну в двокомпонентних системах.

Зміст посібника відповідає програмі дисципліни “Спеціальний курс фізики”, однією із цілей якої є поглиблена теоретична підготовка студентів машинобудівних спеціальностей з питань теплопередачі перед вивченням загальноінженерних та спеціальних професійно-орієнтованих дисциплін.

Іл. 29. Табл. 1. Бібліогр.: 8 назв.

465088

Рецензенти: д.т.н., проф. Пономарчук А.Ф.

к.т.н., проф. Берник П.С.

к.т.н., проф. Іванов М.І.



## ЗМІСТ

|  |    |
|--|----|
| Вступ.....   | 4  |
| 1 Основи вчення про теплопровідність .....   | 5  |
| 1.1 Методи вивчення фізичних явищ природи.....   | 5  |
| 1.2 Види теплопередачі. Температурне поле в твердому тілі .....                        | 6  |
| 1.3 Ізотермічні поверхні. Температурний градієнт.....                                  | 8  |
| 1.4 Основний закон теплопровідності .....  | 9  |
| 1.5 Коефіцієнт теплопровідності твердих, рідких та газоподібних тіл.....               | 11 |
| 1.6 Диференціальне рівняння теплопровідності. Джерела та стоки теплоти .....           | 13 |
| 1.7 Методи розв'язання диференціального рівняння теплопровідності .....                | 25 |
| 2 Основні положення вчення про конвективний теплообмін .....                           | 38 |
| 2.1 Основні поняття та визначення.....   | 38 |
| 2.2 Фізичні властивості рідин .....  | 40 |
| 2.3 Диференціальні рівняння конвективного теплообміну .....                            | 42 |
| 2.4 Гідродинамічний та тепловий прикордонний шари .....                                | 50 |
| 2.5 Елементи теорії подібності та моделювання процесів конвективного теплообміну ..... | 53 |
| 2.6 Особливості руху рідини та теплообміну в трубах.....                               | 62 |
| 2.7 Особливості теплообміну при зміні агрегатного стану рідини ...                     | 69 |
| 2.8 Основні поняття та закони тепло та масообміну в двокомпонентних середовищах .....  | 74 |
| 3 Теплообмін випромінюванням.....  | 79 |
| 3.1 Види та параметри променевих потоків .....   | 80 |
| 3.2 Закони теплового випромінювання.....   | 86 |
| 3.3 Методи визначення випромінювальної здатності твердих тіл.....                      | 91 |
| Запитання для самоперевірки.....   | 92 |
| Література .....   | 97 |

## ВСТУП

В сучасному машинобудуванні при виготовленні машин і механізмів різного призначення широко використовуються високоміцні та високов'язкі конструкційні матеріали. Обробка таких матеріалів супроводжується інтенсивним виділенням теплоти, впливом якої на технологічні процеси обробки, стійкість та довговічність інструменту знехтувати не можна. Без розуміння суті процесів теплообміну неможливо правильно призначити режими термічної чи хіміко-термічної обробки, яку обов'язково проходять усі важливі деталі сучасних машин. Теплові деформації в сучасних металорізальних верстатах, які працюють в умовах підвищених вимог до продуктивності і точності обробки, суттєво можуть впливати на якість деталей, що на них виготовляються. Тому при розробці технологічних процесів, призначенні режимів механічної обробки деталей, а також при створенні нових конструкцій технологічних машин інженер – механік повинен враховувати вплив теплових факторів на роботу механізмів машин і хід технологічних процесів. Це вимагає від нього знань основ теплопередачі і вміння використовувати ці знання при розв'язанні конкретних інженерних завдань.

З різних причин в загальному курсі фізики, що читається для машинобудівних спеціальностей, питанням теплопередачі приділяється мало уваги, а в професійно – орієнтованих загальноінженерних і спеціальних дисциплінах, наприклад, таких як “Деталі машин”, “Основи конструювання машин”, “Матеріалознавство”, “Теорія різання”, “Ріжучий інструмент”, “Металорізальні верстати” тощо, теплові розрахунки деталей та технологічних процесів виконуються за допомогою кінцевих розрахункових залежностей, які приводяться у відповідних підручниках та довідниках без теоретичного обґрунтування.

З метою більш фундаментальної підготовки студентів – машинобудівників з питань теплопередачі та теоретичних основ теплотехніки доцільно на молодших курсах перед вивченням загальноінженерних професійно-орієнтованих та спеціальних дисциплін мати невеликий за обсягом спецкурс, де б викладались ці питання.

Навчальний посібник написано на основі циклу лекцій з теплопередачі, які автор читав протягом декількох років для студентів другого курсу, що навчаються за напрямом 6.0902 – “Інженерна механіка” (спеціальності інженерії: 7.090202 – “Технологія машинобудування” та 7.090203 – “Металорізальні верстати та системи”).

В посібнику розглянуті основи теорії передачі теплоти теплопровідністю, конвекцією та випромінюванням, наведені відомості про елементи теорії подібності та моделювання конвективного теплообміну, а також викладені основні поняття про закони тепло – та

масообміну в двокомпонентних середовищах і особливості теплообміну при рухові рідини в трубах та зміні її агрегатного стану.

Набуті при користуванні посібником знання студенти можуть самостійно перевірити за переліком запитань, поставлених у відповідності зі змістом кожного з трьох розділів посібника.

Наведений список літератури дозволяє більш глибоко ознайомитись з окремими питаннями тепло – та масообміну і методами розв'язання інженерних теплофізичних задач.

## **1 ОСНОВИ ВЧЕННЯ ПРО ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ**

### **1.1 Методи вивчення фізичних явищ природи**

Відповідно до уявлень сучасної фізики явища природи і теплопровідності зокрема можна досліджувати двома методами: феноменологічним та статистичним.

При феноменологічному методі дослідження ігнорується мікроскопічна будова речовини і вважається, що речовина є суцільним середовищем (континіум). Цей метод дозволяє установити закони явищ природи в найбільш загальному вигляді. Вплив мікробудови речовини при використанні феноменологічного методу дослідження враховується за допомогою експериментальних коефіцієнтів, точність яких визначає точність самого методу. Перевага методу - це можливість зразу знайти загальні зв'язки між параметрами, що характеризують явище природи, а недолік - це необхідність проведення складних експериментальних досліджень які до того ж часто вимагають великих матеріальних витрат.

Статистичний метод дозволяє отримати загальні закони природи на основі заданих властивостей мікроскопічної структури речовини без додаткових експериментальних досліджень. Це основна перевага цього методу. При статистичному методі досліджень явищ природи речовина розглядається як система, що складається з великої кількості структурних елементів (молекул, іонів, електронів тощо) із заданими властивостями та законами взаємодії. Недолік методу - його складність, оскільки при сучасному розвитку науки кінцеві розрахункові співвідношення можливо отримати лише для найпростіших фізичних моделей речовини.

Аналітична теорія теплопровідності молекулярну будову речовини ігнорує і розглядає речовину як суцільне середовище. З цієї причини дослідження процесів теплопровідності проводиться феноменологічним методом, який є правомірним при умові, що розміри об'єктів дослідження великі в порівнянні із відстаннями ефективної молекулярної взаємодії.

## 1.2 Види теплопередачі. Температурне поле в твердому тілі

Процес теплопередачі або теплообміну - це обмін внутрішньою енергією між окремими елементами або областями розглядуваного середовища. Теплота може переноситись трьома способами: теплопровідністю, конвекцією та тепловим випромінюванням.

Теплопровідність - це молекулярний перенос теплоти в тілах (або між ними), обумовлений змінністю температури в розглядуваному просторі [1]. Процес теплопровідності здійснюється при безпосередньому стиканні окремих тіл, що мають різні температури, або іншими словами теплопровідність обумовлена рухом мікрочастинок речовини. В твердих тілах-діелектриках внутрішня енергія переноситься при пружних коливаннях атомів кристалевої ґратки. В металах енергія в основному передається за рахунок дифузії вільних електронів, а пружні коливання вузлів кристалевої ґратки в загальному балансі внутрішньої енергії мають незначну долю.

В рідинах процес теплопровідності здійснюється шляхом пружних хвиль, а в газах енергія переноситься внаслідок дифузії молекул і атомів.

Конвекція - це процес переносу теплоти при переміщенні об'ємів рідини або газу (текучого середовища) в просторі із області з однією температурою в область з другою температурою [1]. Конвекція можлива тільки в текучому середовищі і завжди супроводжується теплопровідністю. Процес переносу теплоти при конвекції нерозривно зв'язаний з переносом самого середовища. Сумісний процес переносу теплоти конвекцією та теплопровідністю називається конвективним теплообміном. Конвективний теплообмін між потоками рідини або газу і поверхнею твердого тіла називають тепловіддачею.

Теплове випромінювання - процес розповсюдження теплоти за допомогою електромагнітних хвиль. Цей процес визначається тільки температурою та оптичними властивостями випромінюючого тіла. При цьому виді теплопередачі внутрішня енергія тіла або середовища переходить в енергію випромінювання. Перетворення внутрішньої енергії речовини в енергію випромінювання, перенос випромінювання та його поглинання речовиною називається теплообміном випромінюванням. Всі три елементарні процеси переносу теплоти в природі і техніці часто проходять спільно. Спільний процес переносу теплоти випромінюванням та теплопровідністю називається радіаційно-кондуктивним теплообміном, а якщо цей процес ще й супроводжується конвекцією, то його називають радіаційно-конвективним або складним теплообміном.

В техніці та природі часто процеси переносу теплоти супроводжуються переносом речовини, наприклад, при випаровуванні води перенос пари здійснюється молекулярним та конвективним шляхом.

Такий спільний молекулярний та конвективний перенос маси речовини називається конвективним масообміном, що значно ускладнює процес теплообміну.

### 1.2.1 Температурне поле в твердому тілі

При передачі теплоти теплопровідністю температура тіла може змінюватись як в просторі від точки до точки тіла, так і в часі. Таким чином вивчення процесу теплопровідності зводиться до знаходження рівняння

$$t = f_1(x, y, z, \tau), \quad (1.1)$$

де  $x, y, z$ - координати точок тіла,  $\tau$ - час зміни температури.

Рівняння (1.1) - є математичне описання температурного поля в найбільш загальному виді, коли температура міняється в просторі і часі. Це поле відповідає неврівноваженому режиму теплопровідності і називається нестационарним.

При стабілізації теплового режиму температура кожної точки тіла з часом не змінюється, є функцією тільки координат і поле називається стаціонарним:

$$t = f_2(x, y, z). \quad (1.2)$$

Температурні поля, що відповідають рівнянням (1.1) та (1.2) є просторовими або тривимірними.

Якщо температура є функцією тільки двох координат, то таке поле називається двовимірним:

$$\text{нестационарне - } t = f_3(x, y, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0; \quad (1.3)$$

$$\text{стаціонарне - } t = f_3(x, y); \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0. \quad (1.4)$$

При залежності температури тільки від однієї координати визначають одновимірне температурне поле:

$$\text{нестационарне - } t = f_4(x, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0; \quad (1.5)$$

$$\text{стаціонарне - } t = f_5(x); \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0. \quad (1.6)$$



При аналізі процесу розповсюдження теплоти в твердих тілах від рухомих джерел теплоти часто користуються поняттям так званого квазістаціонарного температурного поля (ніби стаціонарне), якщо температура в системі координат, зв'язаній з рухомим джерелом, з часом не змінюється.

Двовимірні та одновимірні температурні поля є певною ідеалізацією процесу теплопередачі, коли зміною температури в напрямку однієї або двох координат можна знехтувати.

### 1.3 Ізотермічні поверхні. Температурний градієнт

В будь-якому тілі, що нагрівається чи охолоджується, завжди є точки, що мають однакову температуру. Якщо з'єднати всі точки тіла з однаковою температурою, то отримаємо поверхню рівних температур, яка називається ізотермічною.

Одна і та ж точка тіла одночасно не може мати різну температуру, а це значить, що ізотермічні поверхні не перетинаються між собою і не обриваються всередині тіла. Ці поверхні можуть закінчуватись на поверхні тіла або замикатись самі на себе всередині самого тіла. При перетині ізотермічних поверхонь площиною отримуємо сімейство ліній рівних температур - ізотерм, які мають такі ж властивості, що й ізотермічні поверхні.

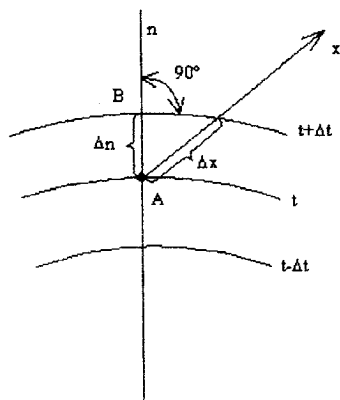


Рисунок 1.1 – Ізотерми

ізотермічної поверхні:

На рисунку 1.1 зображені ізотерми, температури яких відрізняються на  $\Delta t$ . Температура в тілі змінюється тільки в напрямках, що перетинають ізотермічні поверхні (на рисунку 1.1 - це напрямки за нормалю  $n$  і за лінією  $x$ ). Найбільший перепад температури на одиницю довжини має місце в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні.

Збільшення температури в напрямку нормалі характеризується градієнтом температури – вектором, що направлений в сторону зростання температури за нормалю до

$$\text{grad}t = n_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1.7)$$

де  $n_0$  - одиничний вектор, нормальний до ізотермічної поверхні і направлений в сторону збільшення температури;  $\frac{\partial t}{\partial n}$  - частинна похідна температури за нормалю  $n$ , яка є позитивною в напрямку збільшення температури і негативною в напрямку її зменшення.

Як всякий вектор градієнт температури може бути спроектований на координатні осі:

$$\begin{aligned}(\text{grad}t)_x &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, x) = \frac{\partial t}{\partial x}; \\(\text{grad}t)_y &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, y) = \frac{\partial t}{\partial y}; \\(\text{grad}t)_z &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, z) = \frac{\partial t}{\partial z},\end{aligned}\tag{1.8}$$

де  $(n, x)$ ;  $(n, y)$ ;  $(n, z)$  - відповідно, кути між нормаллю  $n$  і координатними осями.

#### 1.4 Основний закон теплопровідності

Для передачі теплоти теплопровідністю повинна виконуватись умова нерівномірного розподілу температури в розглядуваному середовищі, або іншими словами - температурний градієнт в різних точках тіла не повинен дорівнювати нулю.

Французький учений Жан Батіст Жозеф Фур'є в 1822 році запропонував гіпотезу, згідно з якою кількість теплоти  $dQ_\tau$ , що проходить через елемент ізотермічної поверхні  $dF$  за проміжок часу  $d\tau$ , пропорційна температурному градієнту  $\partial t / \partial n$ :

$$dQ_\tau = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF d\tau.\tag{1.9}$$

При віднесенні кількості теплоти  $dQ_\tau$  до одиниці ізотермічної поверхні і одиниці часу отримаємо величину, яка називається густиною теплового потоку:

$$\vec{q} = \frac{dQ_\tau}{dF d\tau} = -n_0 \lambda \frac{\partial t}{\partial n}.\tag{1.10}$$

Ця величина є вектором направленим по нормалі до ізотермічної поверхні, але в бік зменшення температури, оскільки, згідно з другим законом термодинаміки, тепло передається від більш гарячих частин тіла до холодних. Цим пояснюється знак “мінус” в правих частинах формул (1.8) і (1.10).

Багаточисельні експериментальні дослідження підтвердили гіпотезу Фур'є, перетворивши її на основний закон теплопровідності. Залежності (1.8) та (1.10) є різними формами математичного запису закону Фур'є. Коефіцієнт пропорційності  $\lambda$  в формулах закону Фур'є є фізичним параметром речовини. Цей коефіцієнт характеризує здатність речовини проводити теплоту і називається коефіцієнтом теплопровідності.

Якщо віднести кількість теплоти, що проходить через ізотермічну поверхню  $F$  до одиниці часу, то отримаємо величину, яка називається тепловим потоком або тепловою потужністю:

$$Q = \int_F q \cdot dF = - \int_F \lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF \text{ - інтегральна форма;} \quad (1.11)$$

$$dQ = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF \text{ - диференціальна форма.} \quad (1.12)$$

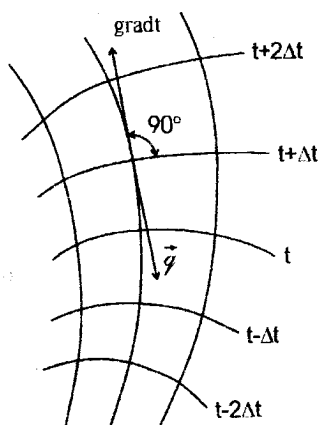
Формула (1.12) є ще однією формою математичного запису закону Фур'є.

При необхідності розрахунку повної кількості теплоти, що пройшла через ізотермічну поверхню  $F$  за час  $\tau$ , інтегруючи вираз (1.9), отримаємо

$$Q_\tau = \int_0^\tau \int_F \lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF \cdot d\tau. \quad (1.13)$$

Коефіцієнт теплопровідності в формулах (1.11) і (1.13) не виноситься за знаки інтегралів так, як  $\lambda$  для даної речовини не є сталою речовиною, а залежить від температури.

Як вже відмічено, вектори градієнта температур і теплового потоку лежать на нормалі до ізотермічної поверхні, але взаємно протилежні за напрямом. Передачу теплоти від однієї ізотермічної поверхні до іншої умовно можна характеризувати лініями теплового потоку, дотичні до яких



**Рисунок 1.2 – Лінії теплового потоку і ізотерми**

співпадають з напрямом вектора  $\vec{q}$  (рисунок 1.2). Лінії теплового потоку ортогональні до ізотерм. При проектуванні вектора густини теплового потоку  $\vec{q}$  на координатні осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  згідно з рівнянням (1.8) матимемо:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (1.14)$$

Теплові потоки, виражені рівняннями (1.14), є складовими вектора густини теплового потоку

$$\vec{q} = i\vec{q}_x + j\vec{q}_y + k\vec{q}_z, \quad (1.15)$$

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  - одиничні вектори в напрямках координатних осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (орти).

Величини, приведені в формулах (1.7)...(1.13) в міжнародній системі одиниць мають розмірності:  $\text{gradt}$ ,  $\text{K/м}$ ;  $Q_t$ ,  $\text{Дж}$ ;  $F$ ,  $\text{м}^2$ ;  $\tau$ ,  $\text{с}$ ;  $q$ ,  $\text{Вт/м}^2$ ;  $\lambda$ ,  $\text{Вт/(м}\cdot\text{K)}$ ;  $Q$ ,  $\text{Вт}$ .

### 1.5 Коефіцієнти теплопровідності твердих, рідких та газоподібних тіл

В загальному випадку коефіцієнт теплопровідності залежить від температури, тиску та роду речовини. Найчастіше цей коефіцієнт визначають експериментальним шляхом, вимірюючи густину теплового потоку [1,2,3] та градієнт температури в досліджуваній речовині. Знаходять коефіцієнт теплопровідності за співвідношенням:

$$\lambda = \frac{|\vec{q}|}{|\text{gradt}|}, \text{Вт/(м}\cdot\text{K)}. \quad (1.16)$$

При теплофізичних розрахунках важливо знати залежність коефіцієнта теплопровідності від температури. Як правило, всі формули, що встановлюють залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, є апроксимаціями результатів експериментів. Досліди показують, що для багатьох матеріалів з достатньою для практики точністю можна застосувати лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури [1]:

$$\lambda = \lambda_0 [1 + b(t - t_0)], \quad (1.17)$$

де  $\lambda_0$  - значення коефіцієнта теплопровідності при температурі  $t_0$ ;  $b$  - стала, що визначається родом речовини і знаходиться дослідним шляхом.

Для чистих металів основним передавачем теплоти є вільні електрони, які можна уподібнити ідеальному одноатомному газу. Доля передачі теплоти при коливальних рухах вузлів кристалевої ґратки в металах незначна в порівнянні з переносом енергії електронами. Вільні електрони в об'ємі металу рухаються як з більш нагрітих областей в більш холодні, так і в зворотньому порядку. В першому випадку вони віддають енергію атомам, а в другому відбирають її. Оскільки в металах електрони є носіями теплоти і струму, то коефіцієнти тепло- і електропровідності пропорційні один одному. При підвищенні температури внаслідок теплових неоднорідностей кристалевих ґраток збільшується розсіюванням електронів, що зменшує коефіцієнти тепло- і електропровідності чистих металів.

Коефіцієнти теплопровідності сплавів, діелектриків та композиційних матеріалів із ростом температури збільшуються. З графічними залежностями коефіцієнтів теплопровідності від температури для різних твердих речовин можна ознайомитись за роботами [1,2,4].

Матеріали з низьким значенням коефіцієнта теплопровідності (менше 0,25 Вт/(м·К)) називають теплоізоляційними.

Згідно з сучасними уявленнями [1] механізм розповсюдження теплоти теплопровідністю в крапельних рідинах проходить шляхом неструнких пружних коливань. Для більшості рідин ця теорія знайшла гарне експериментальне підтвердження. На підставі цієї теорії отримана формула для розрахунку коефіцієнта теплопровідності рідини [1]:

$$\lambda = A c_p \rho^{4/3} \cdot m_{\mu}^{-1/3}, \quad (1.18)$$

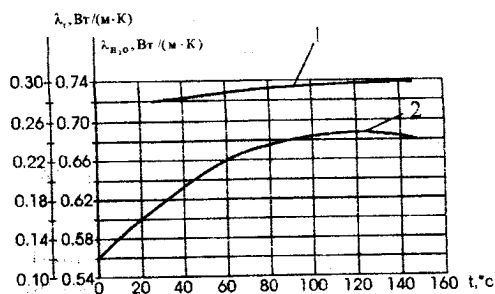


Рисунок 1.3 – Коефіцієнти теплопровідності гліцерину (1) і води (2)

де  $A$  - коефіцієнт, пропорційний швидкості розповсюдження пружних хвиль в рідині, який не залежить від природи рідини, але є функцією температури;  $c_p$  - теплоємність рідини при постійному тиску, Дж/(кг·К);  $\rho$  - густина рідини, кг/м<sup>3</sup>;  $m_{\mu}$  - молекулярна маса рідини, кг/кмоль. Оскільки коефіцієнт  $A$  і теплоємність  $c_p$  по різному залежать від

температури, то  $A \cdot c_p \cong \text{const}$ .

Густина рідини з підвищенням температури зменшується, то для неасоційованих рідин та слабоасоційованих рідин коефіцієнт теплопровідності з ростом температури також зменшується. Для сильноасоційованих рідин (вода, спирт та інш.) в формулу (1.18) необхідно ввести коефіцієнт асоціації, що враховує зміну молекулярної маси. Цей коефіцієнт також залежить від температури і по різному впливає на коефіцієнт теплопровідності при різних температурах. Досліди підтверджують, що для більшості рідин коефіцієнт теплопровідності із збільшенням температури зменшується за виключенням води і гліцерину [1] (рисунок 1.3). З підвищенням тиску коефіцієнти теплопровідності рідин зростають. Для крапельних рідин коефіцієнти теплопровідності наближено знаходяться в межах від 0,07 до 0,7 Вт/(м·К). В газах при нормальних тисках і температурах перенос теплоти теплопровідністю визначається передачею кінетичної енергії молекулярного руху в результаті хаотичного руху і зіткнення окремих молекул газу. Відповідно до цього зауваження коефіцієнт теплопровідності газів можна розрахувати за формулою [1]:

$$\lambda = \bar{w} l c_v \rho / 3, \quad (1.19)$$

де  $\bar{w} = \sqrt{3R_u T / m_u}$  - середня швидкість руху молекул газу, м/с;  $l$  - середня довжина вільного пробігу молекул газу між зіткненнями, м;  $c_v$  - питома теплоємність газу при сталому об'ємі Дж/(кг·К);  $\rho$  - густина газу, кг/м<sup>3</sup>;  $R_u = 8314,2$  Дж/(кмоль·К) - універсальна газова стала;  $T$  - температура газу, К;  $m_u$  - молекулярна маса газу, кг/кмоль.

При підвищенні температури газу зростає його теплоємність, що є причиною збільшення теплопровідності. Із ростом тиску густина газу збільшується, а довжина вільного пробігу молекул газу зменшується таким чином, що добуток  $l \cdot \rho = \text{const}$ . За цієї обставини коефіцієнт теплопровідності мало залежить від тиску (виключення - дуже малі або дуже великі тиски).

Серед газів своїм коефіцієнтом теплопровідності різко виділяються гелій та водень, які мають коефіцієнт теплопровідності в 5...10 раз вищий чим в інших газів [1]. Коефіцієнти теплопровідності водяної пари та інших реальних газів, які суттєво відрізняються від ідеальних, сильно залежать від тиску і їх знаходять дослідним шляхом.

## 1.6 Диференціальне рівняння теплопровідності. Джерела та стоки теплоти

Знаходження температурного поля в твердих тілах або в компонентах технологічних систем пов'язано з розв'язанням відповідного

диференціального рівняння теплопровідності. При виведенні цього рівняння приймемо наступні допущення: 1) тверде тіло однорідне і ізотропне; 2) при теплопередачі не відбуваються фазові перетворення; 3) деформація розглядуваного об'єму, що зв'язана зі зміною температури, дуже мала в порівнянні з розмірами тіла; 4) внутрішні джерела теплоти, що можуть діяти в об'ємі тіла, розподілені рівномірно і задані як  $q_v = f(x, y, z, \tau)$  ( $q_v$  - інтенсивність (об'ємна густина теплового потоку, Вт/м<sup>3</sup>) джерела). Виділимо в тілі, що нагрівається, елементарний об'єм  $dv = dx \cdot dy \cdot dz$  у формі паралелепіпеда (рисунок 1.4). На підставі закону збереження енергії рівняння теплового балансу

$$dQ = dQ_1 + dQ_2, \quad (1.20)$$

де  $dQ_1$  - кількість теплоти, введена в елементарний об'єм за час  $dt$  внаслідок теплопровідності тіла;  $dQ_2$  - кількість теплоти, яка виділилась в тілі за рахунок дії внутрішніх джерел теплоти (наприклад, при хімічних реакціях, дії електричного струму тощо);  $dQ$  - загальне змінення внутрішньої енергії або ентальпії речовини, що міститься в об'ємі  $dv$  за час  $dt$ . За час  $dt$  в напрямках  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  до граней елементарного паралелепіпеда підводяться кількості теплоти  $dQ_x$ ,  $dQ_y$  та  $dQ_z$ , і за цей же час через протилежні грані відводяться в

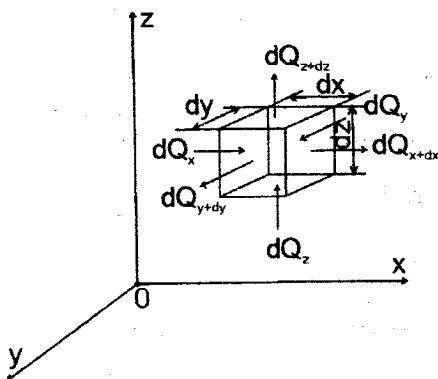


Рисунок 1.4 – Схема до виведення диференціального рівняння теплопровідності

тих же напрямках кількості теплоти  $dQ_{z+dz}$ ,  $dQ_{y+dy}$  та  $dQ_{x+dx}$ . Розглянемо грань, що зорієнтована в напрямку  $Ox$ . Кількості теплоти, що підводиться до цієї грані і відводиться з протилежної можна записати у вигляді:

$$dQ_x = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt; \quad (1.21)$$

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot dt, \quad (1.22)$$

де  $q_x$ ,  $q_{x+dx}$  - проекції густини теплового потоку на напрямок нормалі до вказаних граней.

Різниця

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} = (q_x - q_{x+dx}) dy dz dt \quad (1.23)$$

- це кількість теплоти, що введена в елементарний паралелепіпед із зовні за рахунок теплопровідності.

На інтервалі  $dx$  функція  $q_{x+d}$  є неперервною і її можна розкласти в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} dx^2 + \dots \quad (1.24)$$

Відкидаючи величини вищого порядку малості, починаючи з третього члена ряду, отримуємо після урахування (1.24) в рівнянні (1.23):

$$dQ_{x1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz d\tau = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dv d\tau. \quad (1.25)$$

Аналогічно  $dQ_{x1}$  знаходяться залежності для кількостей теплоти  $dQ_{y1}$  та  $dQ_{z1}$ , що поступають в об'єм  $dv$  за напрямками  $Q_y$  і  $Q_z$ . Сумуючи величини  $dQ_{x1}$ ,  $dQ_{y1}$  та  $dQ_{z1}$ , отримуємо:

$$dQ_1 = -(dQ_{x1} + dQ_{y1} + dQ_{z1}) = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dv d\tau. \quad (1.26)$$

Кількість теплоти, що виділилась в об'ємі  $dv$  за час  $d\tau$  при дії внутрішніх джерел теплоти знайдемо за залежністю:

$$dQ_2 = q_v dv d\tau. \quad (1.27)$$

Третя складова  $dQ$  рівняння теплового балансу визначається характером термодинамічного процесу, що проходить в розглядуваній системі.

Якщо в системі відбувається ізохорний процес ( $V=\text{const}$ ), то вся теплота, яка підведена до елементарного об'єму, буде затрачена на змінення внутрішньої енергії речовини, що міститься в об'ємі  $dv$  [1]:

$$dQ = dU = C_v \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dv = c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dv, \quad (1.28)$$

де  $C_v$  - ізохорна теплоємність одиниці об'єму, Дж/м<sup>3</sup>К;

$c_v$  - питома ізохорна теплоємність, Дж/(кгК);

$\rho$  - густина речовини, кг/м<sup>3</sup>.

Підставляючи (1.26), (1.27) та (1.28) в формулу (1.20), отримуємо диференціальне рівняння енергії для ізохорного процесу переносу теплоти:

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v = -\text{div} \vec{q} + q_v = -\nabla q + q_v, \quad (1.29)$$



де  $\vec{\text{div}} \mathbf{q} = \nabla \mathbf{q}$  - дивергенція вектора густини теплового потоку  
 $(\nabla = \frac{\partial \dots}{\partial x} + \frac{\partial \dots}{\partial y} + \frac{\partial \dots}{\partial z}$  - "набла" - оператор диференціювання [5]).

При ізобарному процесі переносу теплоти ( $p = \text{const}$  - тиск в термодинамічній системі) вся теплота, що підведена до об'єму, йде на змінення ентальпії  $H$  (тепловміщення) речовини, що міститься в об'ємі  $dv$ :  $dQ = dH$ . Ентальпія - це кількість теплоти, що є в тілі при даній температурі. Для твердого тіла  $H = cmT$  (тут,  $c$  - питома теплоємність речовини твердого тіла;  $m$  - маса тіла;  $T$  - температура тіла). Прийнято [6] вважати, що при:  $t = 0^\circ\text{C}$ ,  $H = 0$ ;  $t > 0^\circ\text{C}$  - ентальпія позитивна величина;  $t < 0^\circ\text{C}$  - ентальпія негативна.

Для одиниці об'єму ентальпію можна знайти за залежністю:

$$dH = C_p \frac{\partial t}{\partial t} dt dV = c_p \rho \frac{\partial h}{\partial t} dt dV = \rho \frac{\partial h}{\partial t} dt dV, \quad (1.30)$$

де  $C_p$  - ізобарна теплоємність одиниці об'єму, Дж/(м<sup>3</sup>К);  $c_p$  - питома ізобарна теплоємність, Дж/(кгК);  $\partial h = c_p \partial t$  - диференціал питомої ентальпії  $h = f(t, p)$ .

Підставляючи (1.30), (1.26) та (1.27) в вираз (1.20), отримаємо рівняння енергії для ізобарного процесу переносу теплоти:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\vec{\text{div}} \mathbf{q} + q_v = -\nabla \mathbf{q} + q_v. \quad (1.31)$$

Отримане рівняння буде використано при розгляді конвективного процесу переносу теплоти.

Для твердих тіл  $c_v \approx c_p = c$  та за законом Фур'є:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Враховуючи значення проєкції вектора густини теплового потоку у виразі (1.29), знайдемо в загальному вигляді диференціальне рівняння теплопровідності для твердого тіла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial t} &= \frac{1}{c\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c\rho} = \\ &= \frac{1}{c\rho} \text{div}(\lambda \text{grad}t) + \frac{q_v}{c\rho} = \frac{1}{c\rho} \nabla(\lambda \text{grad}t) + \frac{q_v}{c\rho}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

де  $c=c(x, y, z, t)$ ,  $\rho=\rho(x, y, z, t)$ ,  $\lambda=\lambda(x, y, z, t)$  – змінні величини. Якщо прийняти теплофізичні характеристики сталими ( $c=\text{const}$ ,  $\rho=\text{const}$ ,  $\lambda=\text{const}$ ), то рівняння (1.32) набуде вигляду:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c\rho} \left[ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + \frac{q_v}{c\rho} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.33)$$

де  $a=\lambda/c\rho$  – коефіцієнт температуропровідності речовини,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

$\nabla^2 = \frac{\partial^2 \dots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа в декартовій системі координат [5].

Іноді зручно розв'язувати теплофізичні задачі в циліндричній або сферичній системах координат, для яких, відповідно [1]:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}; \quad (1.34)$$

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \cdot \frac{\partial t}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2}, \quad (1.35)$$

де  $r$  – радіус-вектор;  $\varphi$  – полярний кут;  $z$  – апліката;  $\mu = \cos \theta$ ;  $\theta$  та  $\psi$  – відповідно полярна широта та довгота.

Коефіцієнт температуропровідності  $a$  є фізичним параметром речовини, який характеризує її теплоінерційні властивості, тобто швидкість зміни температури. Цей коефіцієнт має суттєве значення лише для нестационарних теплових процесів. Локальна швидкість  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$  зміни температури в часі (див. рівняння (1.33)) для будь-якої точки тіла буде тим більше, чим більше коефіцієнт температуропровідності.

Коефіцієнт температуропровідності залежить від природи речовини, наприклад рідини та газу мають малий коефіцієнт температуропровідності і велику теплоінерційність, а метали – малу теплоінерційність і великий коефіцієнт температуропровідності [1,2].

### 1.6.1 Диференціальне рівняння теплопровідності для окремих видів температурних полів

Рівняння у вигляді (1.33) отримано для тривимірного нестационарного температурного поля при наявності внутрішніх джерел теплоти. Іноколи при певних допущеннях це рівняння можна спростити. Розглянемо такі випадки [1,2].

1. В системі тіл відсутні внутрішні джерела теплоти ( $q_v=0$ ), тоді рівняння (1.33) приймає форму рівняння Фур'є

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t. \quad (1.36)$$

2. Температурне поле стаціонарне, тобто  $t = f(x, y, z)$ , але  $q_v \neq 0$ . В цьому випадку рівняння (1.33) перетворюється в рівняння Пуассона

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (1.37)$$

3. Тепловий процес стаціонарний і внутрішні джерела відсутні – рівняння Лапласа

$$\nabla^2 t = 0. \quad (1.38)$$

4. Температурне поле дво- або одновимірне ( $q_v=0$ ):

нестационарне двовимірне - 
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right); \quad (1.39)$$

стаціонарне двовимірне - 
$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0; \quad (1.40)$$

нестационарне одновимірне - 
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \quad (1.41)$$

стаціонарне одновимірне - 
$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \quad (1.42)$$

5. Одновимірне стаціонарне температурне поле при  $q_v=0$  та  $\lambda=\lambda(t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right] = 0. \quad (1.43)$$

При наявності в тілі рухомих зовнішніх джерел теплоти ( $q_v=0$ ) права частина рівняння (1.33) доповнюється додатковими членами:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}, \quad (1.44)$$

де  $w_x, w_y, w_z$  - проекції швидкості джерела теплоти на координатні осі. Таке рівняння значно складніше (1.33) і на практиці розв'язується шляхом моделювання [2].

### 1.6.2 Умови однозначності для процесів теплопровідності

При виведенні рівняння теплопровідності (1.33) не приймалися обмеження на форму тіла та умови взаємодії поверхні цього тіла з навколишнім середовищем. Рівняння (1.33), (1.36)... (1.44) описують цілий клас явищ теплопровідності і справедливі для будь-якої форми тіл (верстат, інструмент, деталь тощо) при нагріванні чи охолодженні в будь-яких умовах та середовищах. Ці рівняння в загальному випадку мають безліч розв'язків.

Для конкретизації розв'язку разом з рівнянням теплопровідності необхідно обумовити та математично описати особливості певного процесу теплопровідності. Ці конкретні особливості процесу називають умовами однозначності або красивими умовами.

Умови однозначності складаються з:

- 1) геометричних умов, які задають форму та лінійні розміри тіла і джерел (стоків) теплоти, що беруть участь в процесі теплопровідності;
- 2) фізичних умов, якими визначаються характеристики речовини тіла ( $\lambda, c, \rho$  та інш.), а також може задаватись закон розподілу внутрішніх джерел теплоти;
- 3) початкових (часових) умов, що визначають закон розподілу температури всередині тіла в початковий момент часу ( $\tau=0$ ), наприклад,  $t=f(x, y, z)$  або  $t=t_0=\text{const}$  – рівномірний розподіл температури;
- 4) межові умови, які задають закон теплообміну на поверхні тіла, що взаємодіє з навколишнім середовищем чи іншими тілами, що входять в систему в якій відбувається процес теплопровідності.

Межові умови діляться на три роди:

а) межові умови першого роду – визначають закон розподілу температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$t_c=f(x_c, y_c, z_c), \quad (1.45)$$

де  $t_c$  - температура поверхні тіла;  $x_c, y_c, z_c$  – координати поверхні тіла. При  $t_c=\text{const}$  рівняння (1.45) спрощується;

б) межові умови другого роду – задається густина теплового потоку для кожної точки поверхні тіла та будь-якого моменту часу (наприклад, нагрівання металевих виробів у високотемпературних печах [1]):

$$q_c=f(x_c, y_c, z_c, \tau) \quad (1.46)$$

або

$$q_c = q_0 = \text{const.} \quad (1.47)$$

в) межові умови третього роду – визначають температуру навколишнього середовища  $t_p$  та закон теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем.

Процес теплообміну між тілом і середовищем характеризується законом Ньютона-Ріхмана [1]:

$$q_c = \alpha(t_c - t_p), \quad (1.48)$$

де  $t_c > t_p$ ;  $\alpha$ -коєфіцієнт тепловіддачі, Вт/(м<sup>2</sup>К), який характеризує інтенсивність теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем. Цей закон визначає конвективний теплообмін, який більш детально буде розглянуто в другому розділі посібника.

Згідно з законом збереження енергії кількість теплоти, що підводиться до поверхні тіла за рахунок теплопровідності із внутрішнього об'єму тіла в одиницю часу повинна дорівнювати кількості теплоти, яка відводиться з поверхні тіла при тепловіддачі, тобто

$$\alpha(t_c - t_p) = -\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_c, \quad (1.49)$$

де  $n$  – нормаль до поверхні тіла;  $\lambda$  - коєфіцієнт теплопровідності тіла;  $\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_c$  - градієнт температури на поверхні тіла. Цю межову умову третього роду можна записати у виді

$$\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_c - t_p) = -\frac{\alpha}{\lambda} \Delta t_c, \quad (1.50)$$

де  $\Delta t_c = t_c - t_p$  - температурний напір на поверхні тіла. Рівняння (1.50) є окремим вираженням закону збереження енергії для поверхні тіла.

В теплофізиці зустрічаються задачі, коли ні одну з межових умов неможливо задати (наприклад, багатофазні середовища). В цьому випадку розв'язують спряжену задачу, в якій ставиться вимога рівності температур та теплових потоків по обидва боки від межі розділу середовищ:

$$\begin{cases} -\lambda_1 \left( \frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_m = -\lambda_2 \left( \frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_m + q_v(x_m, y_m, z_m, \tau); \\ t_1(x_m, y_m, z_m, \tau) = t_2(x_m, y_m, z_m, \tau), \end{cases} \quad (1.51)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2$  – відповідно, коєфіцієнти теплопровідності та температури середовищ, що торкаються;  $q_v(x_m, y_m, z_m, \tau)$  – джерела теплоти, що діють на

поверхні межі між середовищами;  $x_m$ ,  $y_m$ ,  $z_m$  – координати поверхні межі розділу середовищ.

### 1.6.3 Джерела та стоки теплоти

Джерела теплоти постачають тілу теплоту, а стоки її відводять. Стоки теж можна вважати джерелами теплоти, але з негативною інтенсивністю (об'ємною,  $\text{Вт}/\text{м}^3$ , поверхневою,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ , або лінійною,  $\text{Вт}/\text{м}$ , густиною теплового потоку).

Джерела та стоки теплоти класифікуються за наступними основними ознаками [2]:

- 1) розташування і форма джерел та стоків по відношенню до тіл, що беруть участь в процесі теплопередачі;
- 2) закон розподілу інтенсивності;
- 3) швидкість руху джерела (стока) теплоти;
- 4) час функціонування (дії);
- 5) стабільність основних характеристик джерела (стока) теплоти в часі.

За ознакою 1) джерела теплоти ділять на внутрішні та зовнішні. Внутрішні джерела (стоки) теплоти діють в об'ємі тіла, а зовнішні - на його поверхні.

В дійсності всі джерела теплоти є внутрішніми, але деякі з них розташовані так близько до поверхні тіла, що їх можна вважати такими, що діють на поверхні тіла.

Реальні джерела (стоки) теплоти мають дуже складну форму. З метою спрощення розрахунків джерела (стоки) теплоти схематизують, замінюючи реальні джерела ідеалізованими з формою наближеною до фактичної. Ступінь наближеності форми визначається потрібною точністю розрахунків. Ідеалізовані джерела можуть бути тривимірними (об'ємними), двовимірними, одновимірними та точковими. В принципі всі джерела (стоки) теплоти тривимірні, оскільки енергія (при терті, деформуванні тощо) виділяється в деякому об'ємі.

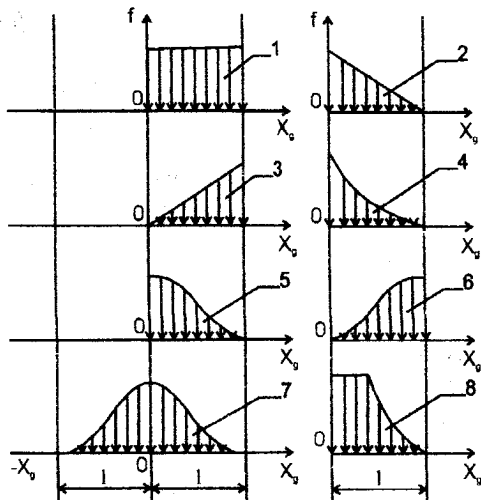
Якщо розміром джерела в напрямку однієї з осей координат можна знехтувати, то таке джерело можна вважати двовимірним (плоским), а коли два розміри тіла набагато менші третього, то джерело називається одновимірним або лінійним. Тоді, коли всі розміри джерела достатньо малі в порівнянні з розмірами тіла, де воно діє, то джерело теплоти вважають точковим, що є певною математичною абстракцією, зручною для конструювання формул, що описують процес розповсюдження теплоти від джерел іншої форми.

За формою об'ємні джерела (стоки) теплоти можуть бути паралелепіпедом, циліндром, кулею або будь-якою іншою об'ємною геометричною фігурою. Плоскі джерела (стоки) теплоти, обмежені в двох напрямках, можуть мати форму прямокутника, трикутника, круга або іншої плоскої фігури. Якщо двовимірне джерело теплоти обмежено тільки в одному напрямку, то воно має форму нескінченної стрічки. Слід пам'ятати, що обмеженість джерела не може перевищувати його вимірність, тому, наприклад, одновимірне джерело може бути обмеженим тільки в одному напрямку і мати форму відрізка прямої, дуги кола або ділянки якої небудь другої лінії.

Закони розподілу інтенсивності джерел (стоків) теплоти, що діють в реальних технічних та технологічних системах складні і, як правило, попередньо невідомі. Уявлення про ці закони складають при схематизації теплообміну на основі аналізу фізичних явищ і величин, що визначають тепловиділення (сили, коефіцієнти тертя, швидкості та т.п.), або за допомогою експериментальних досліджень знаходять вид ідеалізованої функції розподілу інтенсивності джерел (стоків) теплоти [2].

Об'ємна густина теплового потоку (інтенсивність) тривимірного джерела (стока) теплоти за визначенням знаходиться із співвідношення [2].

$$q(x_g, y_g, z_g, \tau) = dQ_\tau / (d\tau dv) = q_0 f(x_g, y_g, z_g, \tau), \quad (1.52)$$



**Рисунок 1.5 – Типові закони розподілу інтенсивності для одновимірних джерел (стоків)**

де  $dQ_\tau$  - елементарна кількість теплоти, що виділилась за час  $d\tau$  в об'ємі  $dv$ ;  $q_0$  - максимальна густина теплового потоку,  $Вт/м^3$ ;  $f(x_g, y_g, z_g, \tau)$  - безрозмірна функція, що описує закон розподілу інтенсивності в часі і розглядуваному об'ємі тіла;  $x_g, y_g, z_g$  - координати вузлової точки об'єму  $dv$ .

На рисунку 1.5 зображені графіки законів розподілу інтенсивності для одновимірних джерел (стоків) теплоти, що часто використовуються при теплофізичних розрахунках технологічних систем [2].

З цих одновимірних законів завжди можна при необхідності сконструювати закони розподілу інтенсивності для дво- і тривимірних джерел. Математичне описання законів розподілу інтенсивності, що представлені на рисунку 1.5, приведено в таблиці 1.1 [2].

**Таблиця 1.1 – Математичне описання законів розподілу інтенсивності одновимірних джерел (стоків) теплоти**

| Порядковий номер (див. рисунок 1.5) | Закон                                | Функція   |
|-------------------------------------|--------------------------------------|---|
| 1                                   | Рівномірно розподілений              | $f(x_g)=1$  |
| 2                                   | Лінійний                             | $f(x_g)=1-\psi_g$   |
| 3                                   |                                      | $f(x_g)=\psi_g$   |
| 4                                   | Експоненціальний                     | $f(x_g)=\exp[-kx_g]$  |
| 5                                   | Нормально розподілений несиметричний | $f(x_g)=\exp[-k_0 x_g^2]$<br>$x_g \geq 0$   |
| 6                                   |                                      | $f(x_g)=\exp[-k_0(1-x_g)^2]$<br>$x_g \leq 1$  |
| 7                                   | Нормально розподілений симетричний   | $f(x_g)=\exp[-k_0 x_g^2]$   |
| 8                                   | Комбінований                         | $f(x_g)=1$ при $0 \leq \psi_g \leq 0,5$ ;<br>$f(x_g)=\exp[-k(\psi_g-0,5)]$ при $0,5 \leq \psi_g \leq 1$ |

У формулах, приведених в графі 3 таблиці 1.1, величина  $\psi_g=x_g/l$  є відносною координатою вузлової точки джерела теплоти.

Прийнявши відповідний закон розподілу інтенсивності джерела (стоку) теплоти та знаючи  $q_0$ , можна розрахувати кількість теплоти, що виділяє джерело протягом часу  $\tau$  за формулою [2]

$$Q_\tau = \int_0^\tau d\tau \int_v q_0 \cdot f(x_g, y_g, z_g, \tau) \cdot Дж. \quad (1.53)$$

При практичних теплофізичних розрахунках технічних та технологічних систем частіше розв'язується зворотна задача. Як правило, кількість теплоти  $Q$ , або теплова потужність  $Q$ , що їх виділяє джерело за час  $\tau$  відомі і при заданому законі розподілу інтенсивності знаходять максимальну інтенсивність джерела  $q_0$ . Більш детально з розрахунками інтенсивності джерел (стоків) теплоти з різними законами її розподілу можна ознайомитись за працею [2].



Швидкість руху джерел теплоти, які переносять теплоту теплопровідністю, прийнято характеризувати безрозмірним критерієм Пекле [1,2]

$$Pe = wl/a, \quad (1.54)$$

де  $w$  - швидкість джерела теплоти, м/с;  $l$  - характерний розмір джерела (наприклад, довжина) в напрямку переміщення, м;  $a$  - коефіцієнт температуропровідності матеріалу тіла, в якому (або по якому) рухається джерело, м<sup>2</sup>/с. Критерій Пекле є одним з інваріантів подібності, що широко застосовуються в теплотехнічних, гідравлічних, аеродинамічних та інших розрахунках (див. розділ 2, елементи теорії подібності). Критерії подібності - безрозмірні комплекси, дозволяють при теплофізичних розрахунках скорочувати число змінних величини та узагальнювати результати аналізу теплових процесів на цілий клас подібних явищ.

В залежності від значення критерію Пекле джерела теплоти діляться на нерухомі ( $Pe=0$ ), середньошвидкісні ( $Pe<10$ ) та швидкісні ( $Pe\geq 10$ ), швидкість руху яких перевищує швидкість розповсюдження теплоти в тілі. В напрямку руху швидкісного джерела теплоти теплота розповсюджується позаду або під джерелом.

Час  $\tau$  функціонування джерела оцінюють безрозмірним критерієм Фур'є [1,2]

$$Fo = a\tau/l^2. \quad (1.55)$$

Критерій Фур'є ще називають безрозмірним часом.

За критерієм Фур'є джерела теплоти ділять на миттєві ( $Fo \rightarrow 0$ ), діючі протягом кінцевого проміжку часу ( $Fo > 0$ ), періодичні ( $Fo = F_{0max} \sin \omega \tau$ ) та діючі так довго, що їх можна вважати постійними ( $Fo \rightarrow \infty$ ). Миттєвих джерел теплоти в дійсності не існує, але в деяких процесах теплота виділяється так короткочасно (наприклад, тепла дія імпульсного лазера), що тривалістю цього теплового імпульсу можна знехтувати. Миттєві джерела також зручно використовувати як математичну абстракцію при розрахунках складних випадків процесів теплообміну.

Характеристики джерел (стоків) теплоти можуть бути сталими в часі або змінюватись. Якщо параметри джерела з часом не змінюються, то такі джерела відносять до стабільних, а при зміні - до нестабільних. В нестабільних джерелах можуть змінюватись форма, розміри, швидкість, інтенсивність як за окремими параметрами, так і комплексно.

## 1.7 Методи розв'язування диференціального рівняння теплопровідності

Методи інтегрування диференціального рівняння теплопровідності із заданими умовами однозначності діляться на аналітичні, чисельні та методи математичного моделювання [1,2].

До аналітичних методів відносять класичний метод безпосереднього інтегрування, інтегральних перетворень та метод джерел (стоків) теплоти. Класичний метод розв'язування рівняння теплопровідності полягає в знаходженні сукупності частинних розв'язків, що задовольняють задані умови однозначності. Як правило, кожний частинний розв'язок шукається у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить від часу, а друга - від координат. Загальний розв'язок знаходиться способом суперпозиції (накладання) частинних розв'язків. Для ілюстрації використання цього методу розглянемо передачу теплоти через:

- 1) плоску однорідну необмежену стінку;
- 2) циліндричну стінку ( трубу необмеженої довжини).

Такого типу задачі часто зустрічаються на практиці, наприклад при тепловому розрахунку черв'ячних передач та підшипників ковзання.

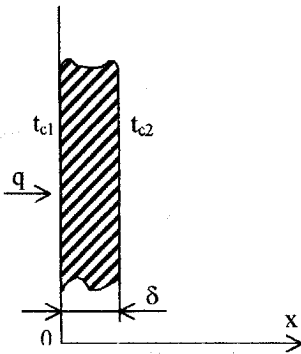


Рисунок 1.6 – Однорідна плоска необмежена стінка

Для простоти розв'язку вважатимемо, що процес теплопередачі стаціонарний, температура змінюється тільки в напрямку перпендикулярному до стінки і внутрішні джерела теплоти в стінці відсутні ( $q_v=0$ ), а межові умови - першого роду (рисунок 1.6):  $t_{c1}=\text{const}$  при  $x=0$ ;  $t_{c2}=\text{const}$  при  $x=\delta$ . (тут  $t_{c1}>t_{c2}$  - відповідно, температури однієї та другої поверхонь стінки;  $\delta$  - товщина стінки).

При прийнятих умовах ( $\frac{\partial t}{\partial t} = 0$ ;

$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$ ) рівняння теплопровід-

ності прийме вигляд

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \quad (1.56)$$

Для знаходження закону розподілу температур по товщині стінки два рази інтегруємо рівняння (1.56).

Після першого інтегрування матимемо

$$\frac{dt}{dx} = C_1, \quad (1.57)$$

де  $C_1$  - стала інтегрування, чисельно рівна градієнту температур.

Розділяємо змінні і виконуючи друге інтегрування рівняння (1.57), отримаємо

$$t = C_1 x + C_2, \quad (1.58)$$

де  $C_2$  - стала другого інтегрування.

Сталі інтегрування знайдемо за умовами однозначності:

$$\text{при } x=0, t=t_{c1}, \text{ та } C_2=t_{c2}; \quad (1.59)$$

$$\text{при } x=\delta, t=t_{c2} \text{ і } C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta}.$$

Підставляючи (1.59) в рівняння (1.58) отримуємо закон розподілу температур в стінці:

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} \cdot x = t_{c1} - \frac{\Delta t_0}{\delta} \cdot x, \quad (1.60)$$

де  $\Delta t_0 = t_{c1} - t_{c2}$  - повний температурний напір або найбільша надлишкова температура. Величина  $\Delta t_0 = t - t_{c2}$  називається поточним температурним напором, або надлишковою температурою [1].

Рівняння (1.60) можна представити і в такому виді:

$$\Delta t / \Delta t_0 = \theta = 1 - x / \delta = 1 - X, \quad (1.61)$$

де  $\theta = \Delta t / \Delta t_0$  - безрозмірний напір, або безрозмірна надлишкова температура;  $X = x / \delta$  - безрозмірна координата. Рівняння в формі (1.61) є універсальним, оскільки розподіл температур в стінці можна зобразити єдиною прямою у відрізках на осях для будь-якого заданого значення  $t_{c1}$ ,  $t_{c2}$  та  $\delta$  (рисунок 1.7).

Для знаходження густини теплового потоку, що проходить через стінку, скористасьмося законом Фур'є:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \lambda \frac{\Delta t_0}{\delta}, \quad (1.62)$$

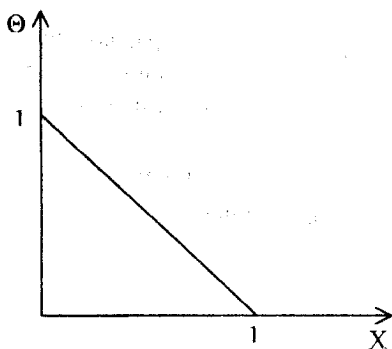


Рисунок 1.7 – Безрозмірне поле температур в плоскій стінці

де  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки. Відношення  $j_{\tau} = \lambda/\delta$ , Вт/(м<sup>2</sup>К), називається тепловою провідністю стінки, а зворотна величина -  $R_{\tau} = \delta/\lambda$ , (м<sup>2</sup>К)/Вт - тепловим, або термічним, опором стінки. Рівняння (1.62) у формі  $q = \Delta t_0/R_{\tau}$  можна назвати законом Ома для теплопередачі теплопровідністю через плоску стінку. Знаючи площу поверхні стінки можна легко розрахувати тепловий потік або кількість теплоти, що проходить через стінку за час  $\tau$ :

$$Q = q \cdot F = \Delta t_0 \cdot F / R_{\tau}; \quad (1.63)$$

$$Q_{\tau} = q \cdot F \cdot \tau = \Delta t_0 F \tau / R_{\tau}. \quad (1.64)$$

Враховавши в формулі (1.60), що  $\Delta t_0/\delta = q/\lambda$ , можна представити рівняння температурного поля у вигляді

$$t = t_{c1} - \frac{q}{\lambda} \cdot x. \quad (1.65)$$

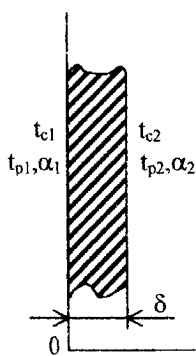


Рисунок 1.8 – Теплопередача через плоску стінку при межевих умовах третього ряду

З рівняння (1.65) випливає, що при інших рівних умовах температура в стінці зменшується тим швидше, чим більше густина теплового потоку.

При практичних інженерних розрахунках теплопередачі через плоску стінку часто зустрічаються межові умови третього ряду, коли теплопередача йде з одного середовища через стінку (чи багатoshарову стінку) в друге, наприклад, теплота, що виділяється в коробці швидкостей нагрівас мастило, яке в свою чергу передає її корпусу коробки, зовнішня поверхня

якого контактує із навколишнім середовищем.

На рисунку 1.8 зображено фрагмент стінки коробки швидкостей з межовими умовами третього роду ( тут нанесені величини  $t_{p1}$ ,  $t_{p2}$ - відповідно температури середовищ з одного та іншого боку стінки;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  - відповідно коефіцієнти тепловіддачі боків стінки).

Вважаємо, що величини  $t_{p1}$ ,  $t_{p2}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  сталі і не змінюються вздовж поверхні. Коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки від температури не залежить.

Згідно із законом збереження енергії

$$q = \alpha_1 (t_{p1} - t_{c1}) = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) = \alpha_2 (t_{c2} - t_{p2}). \quad (1.66)$$

Рівняння (1.66) можна записати у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} q \frac{1}{\alpha_1} = t_{p1} - t_{c1}; \\ q \frac{\delta}{\lambda} = t_{c1} - t_{c2}; \\ q \frac{1}{\alpha_2} = t_{c2} - t_{p2}. \end{cases} \quad (1.67)$$

Складаючи рівняння (1.67) почленно, отримаємо:

$$q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_{p1} - t_{p2} \quad (1.68)$$

або

$$q/k = t_{p1} - t_{p2}, \quad (1.69)$$

де  $k = \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}$  - коефіцієнт теплопередачі, Вт/(м<sup>2</sup>К).

Величина, обернена коефіцієнту теплопередачі, називається повним термічним опором теплопередачі:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} = R_1 + R_c + R_2, \quad (1.70)$$

де  $R_1 = 1/\alpha_1$  - термічний опір тепловіддачі від гарячої рідини до поверхні стінки;  $R_c$  - термічний опір стінки;  $R_2 = 1/\alpha_2$  - термічний опір тепловіддачі

від поверхні стінки до холодної рідини. Для багат шарової стінки термічний опір визначають за залежністю:

$$R_c = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}, \quad (1.71)$$

де  $\delta_i, \lambda_i$  - відповідно, товщина та коефіцієнт окремого шару. Іноді при теплофізичних розрахунках оперують еквівалентним коефіцієнтом теплопровідності багат шарової стінки [1]:

$$\lambda_{\text{екв}} = \sum_{i=1}^{i=n} \delta_i / \left[ \sum_{i=1}^{i=n} (\delta_i / \lambda_i) \right]. \quad (1.72)$$

Розглянемо стаціонарний процес теплопровідності в циліндричній стінці (трубі), що має внутрішній діаметр  $d_1=2r_1$  і зовнішній  $d_2=2r_2$  (рисунок 1.9).

В першому варіанті розв'язку задачі приймемо межові умови першого роду, коли задані температури зовнішньої  $t_{c2} = \text{const}$  та внутрішньої  $t_{c1} = \text{const}$  поверхонь труби ( $t_{c1} > t_{c2}$ ).

При цих умовах ізотермічні поверхні є циліндричними, що мають спільну геометричну вісь з трубою. Цю задачу зручно розв'язувати в циліндричних координатах. Рівняння теплопровідності при заданих умовах є рівнянням Лапласа

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (1.73)$$

Оскільки температура циліндричної стінки змінюється тільки в радіальному напрямку, то  $\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0$ ,  $\frac{\partial t}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0$  та  $\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$  і рівняння (1.73) набуває вигляду

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0 \quad (1.74)$$

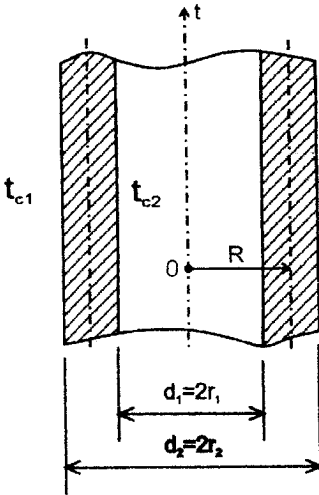


Рисунок 1.9 – теплопередача через циліндричну стінку

з межовими умовами:

$$\text{при } \begin{cases} r = r_1 & t = t_{c1}; \\ r = r_2 & t = t_{c2}. \end{cases} \quad (1.75)$$

Для отримання розв'язку рівняння (1.74) введемо нову змінну  $u = \frac{dt}{dr}$ , тоді  $\frac{d^2t}{dr^2} = \frac{du}{dr}$  і  $\frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{u}{r}$ . З врахуванням цих перетворень рівняння (1.74) набуде вигляду:

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r}u = 0. \quad (1.76)$$

Розділюємо змінні і інтегруємо (1.76):

$$\ln u + \ln r = \ln C_1. \quad (1.77)$$

Потенціюємо (1.77) та повертаємось до попередніх змінних:

$$dt = C_1 dr / r. \quad (1.78)$$

Інтегруючи рівняння (1.78), отримуємо:

$$t = C_1 \ln r + C_2 \quad (1.79)$$

Підставляючи в рівняння (1.79) межові умови, знаходимо сталі інтегрування:

$$C_1 = \Delta t_0 / \ln \frac{r_1}{r_2}; \quad C_2 = t_{c1} - \Delta t_0 \cdot \ln r_1 / \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad (1.80)$$

де  $\Delta t_0 = t_{c1} - t_{c2}$ .

Враховуючи значення сталих інтегрування в (1.79), знайдемо закон зміни температури в циліндричній стінці:

$$t = t_{c1} - \Delta t_0 \ln \frac{r}{r_1} / \ln \frac{r_1}{r_2} = t_{c1} - \Delta t_0 \ln \frac{d}{d_1} / \ln \frac{d}{d_2}. \quad (1.81)$$

Візьмемо відрізок труби довжиною  $l$  і визначимо тепловий потік через стінку цієї труби, скориставшись законом Фур'є

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F = -\frac{2\pi\lambda l \Delta t_0}{\ln \frac{r_1}{r_2}} = \frac{2\pi\lambda l \Delta t_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\lambda l \Delta t_0}{\ln \frac{d_2}{d_1}}, \quad (1.82)$$

де  $\frac{dt}{dr} = C_1/r = \Delta t_0 / (r \ln r_1 r_2) = -\Delta t_0 / (r \ln r_2 r_1) = -\Delta t_0 / (r \ln d_2 d_1)$  - градієнт температури;  $F = 2\pi r l$  - поточна площа ізотермічної поверхні труби. Віднісши тепловий потік до площі ізотермічної поверхні, знайдемо густини теплового потоку на внутрішній та зовнішній поверхнях труби:

$$q_1 = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{2\lambda \Delta t_0}{d_1 \ln d_2 d_1}; \quad (1.83)$$

$$q_2 = \frac{Q}{\pi d_2 l} = \frac{2\lambda \Delta t_0}{d_2 \ln d_2 d_1}. \quad (1.84)$$

З формул (1.83) і (1.84) видно, що густини теплового потоку на поверхнях труби неодинакові, причому завжди  $q_1 > q_2$ . При віднесенні теплового потоку до одиниці довжини труби (Вт/м), отримаємо лінійну густину теплового потоку:

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi \lambda \Delta t_0}{\ln d_2 d_1}. \quad (1.85)$$

Порівнюючи рівняння (1.83)...(1.85), визначимо зв'язок між величинами  $q_1$ ,  $q_2$  та  $q_l$ :

$$q_l = \pi d_1 q_1 = \pi d_2 q_2. \quad (1.86)$$

Якщо в розглянутому стаціонарному процесі теплопровідності через циліндричну стінку прийняти межові умови третього роду, то для лінійної густини теплового потоку отримаємо залежність [1] (виводиться за аналогією з плоскою стінкою):

$$q_l = k_l \cdot \pi (t_{p1} - t_{p2}), \quad (1.87)$$

де  $k_l = \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)^{-1}$  - лінійний коефіцієнт теплопередачі, Вт/(мК). Величина, обернена лінійному коефіцієнту теплопередачі, називається лінійним термічним опором теплопередачі:

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \quad (1.88)$$

При постійних значеннях  $\alpha_1$ ,  $d_1$ ,  $\lambda$  і  $\alpha_2$  повний термічний опір труби буде залежати від зовнішнього діаметра. Такого типу задачі часто зустрічаються в інженерній практиці, наприклад при розрахунку теплообмінних апаратів [1]. Якщо прийняти, що  $R_l = f(d_2)$ , то взявши



похідну  $d(R_1)/d(d_2)$  та прирівнявши її нулю, знайдемо критичний діаметр труби  $d_{кр}$  при якому термічний опір теплопередачі буде мінімальним:

$$d_{кр} = 2\lambda/\alpha_2. \quad (1.89)$$

Наведені приклади показують, що класичний метод безпосереднього інтегрування рівняння теплопровідності можна використовувати для розв'язання простих задач, як правило, для знаходження стаціонарних одновимірних температурних полів.

При розв'язанні окремих задач теплофізики іноді використовують методи інтегральних перетворень (операційні), зокрема метод Лапласа. Згідно з цим методом, функція  $f(\tau)$ , що шукається (оригінал), замінюється її зображенням  $F(S) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{s\tau} d\tau$ , де  $s = \sigma + i\omega$  - комплексна змінна, зображення аргументу  $\tau$ .

При такій зміні вихідне диференціальне рівняння перетворюється на алгебраїчне в зображеннях. Після розв'язання отриманого алгебраїчного рівняння в зображеннях виконується зворотнє перетворення. Методом інтегрального перетворення Лапласа можна розв'язувати лінійні диференціальні рівняння. При застосуванні цього методу для знаходження дво- та тривимірних температурних полів алгебраїчні рівняння мають високий порядок, розв'язання яких пов'язано із значними математичними труднощами.

В технологічній теплофізиці широко використовується для розв'язання рівняння теплопровідності метод джерел (стоків) теплоти [2]. Цей метод дозволяє відносно просто написати інтеграл, що задовольняє диференціальне рівняння теплопровідності та задані умови однозначності. Знайдений інтеграл може обчислюватись аналітичними чи чисельними методами.

Грунтується метод джерел (стоків) теплоти на наступних основних постулатах [2]:

1) джерело або стік теплоти будь-якої форми, рухоме чи нерухоме, діюче безперервно чи тимчасово, може бути представлено як система точкових миттєвих джерел (стоків) теплоти (принцип конструювання рішень);

2) процес розповсюдження теплоти в тілі обмежених розмірів може бути поданий як частина процесу розповсюдження теплоти в необмеженому тілі шляхом доповнення фактично діючої системи джерел (стоків) теплоти системою фіктивних джерел або стоків (принцип відображення джерел).

Математичний апарат методу джерел побудований на описанні температурного поля, що виникає в необмеженому тілі під дією теплоти, яка вноситься в тіло точковим джерелом теплоти:

$$t(x, y, z) = \frac{Q_\tau}{\lambda \sqrt{a} \cdot (4\pi\tau)^{3/2}} \cdot e^{-R^2 / (4a\tau)}, \quad (1.90)$$

де  $Q_\tau$  - кількість теплоти, що внесена в тіло миттєвим точковим джерелом;  $\tau$  - час, що пройшов з моменту теплового імпульсу;  $\lambda, a$  - відповідно коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності матеріалу тіла;  $R = \sqrt{(x - x_g)^2 + (y - y_g)^2 + (z - z_g)^2}$  - відстань від місця теплового спалаху  $I(x_g, y_g, z_g)$  до розглядуваної точки тіла з координатами  $x, y$  та  $z$ .

Більш детально з використанням методу джерел теплоти для розв'язання задач технологічної теплофізики можна ознайомитись за працею [2].

Чисельні методи розв'язання рівняння теплопровідності найчастіше використовуються тоді, коли точні аналітичні методи розрахунку пов'язані із значними математичними труднощами. Чисельні методи за своєю суттю є наближеними способами інтегрування диференціальних рівнянь. Ці методи дозволяють врахувати більшість особливостей конкретного процесу, але їх результати є справедливими тільки для цього процесу, а аналітичні розв'язки, отримані безпосереднім інтегруванням диференціального рівняння, наприклад, теплопровідності, дають можливість розрахувати температуру для будь-якої точки тіла. Перевагою чисельних методів перед аналітичними для конкретного процесу є можливість наближено задовольнити будь-які умови однозначності. Особливо бурний розвиток чисельних методів стався в зв'язку з розвитком обчислювальної техніки.

При розв'язанні задач технологічної теплофізики застосовують чисельні методи кінцевих різниць, кінцевих елементів та межових елементів. З цих методів для розв'язання задач теплопровідності найбільш широко використовується метод кінцевих різниць, який ще називають методом сіток.

Метод скінченних різниць ґрунтується на заміні похідних в диференціальних рівняннях теплопровідності приблизними співвідношеннями в окремих вузлових точках температурного поля. Ці точки називають вузлами сітки. При такій заміні диференціальне рівняння перетворюється в еквівалентне алгебраїчне. Такі алгебраїчні рівняння складаються для всіх вузлових точок розглядуваної ділянки тіла, включаючи і межові точки.

В результаті отримаємо замкнену систему алгебраїчних рівнянь, розв'язавши яку за допомогою ЕОМ, визначимо температури всіх вузлових точок.

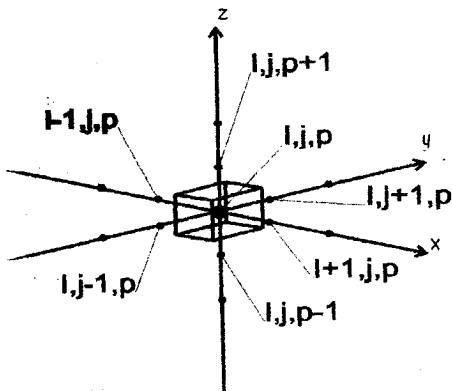


Рисунок 1.10 – Графічна інтерпретація методу кінцевих різниць

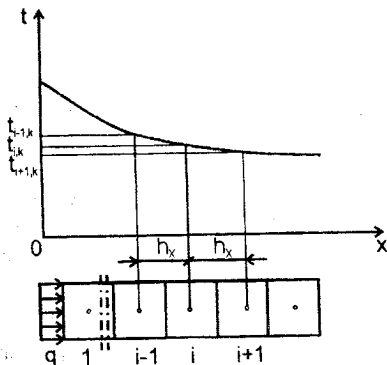


Рисунок 1.11 – Графічна ілюстрація методу кінцевих різниць для розрахунку температурного поля в одновимірному стрижні

При застосуванні методу скінчених різниць досліджуване тіло чи система розбивається на маленькі елементи (об'єми, площини, відрізки), від яких визначаються умовами задачі. Час проходження теплопередачі також ділиться на малі проміжки  $\Delta t$  та вводяться такі допущення:

1) термічні властивості кожного із елементів (наприклад, маленького паралелепіпеда) зосереджені в його центральній вузловій точці (рисунок 1.10) з порядковими номерами  $i, j, p$ , що відповідають координатам, відповідно,  $x, y, z$ ;

2) температура тіла міняється дискретно стрибком через проміжок часу  $\Delta t$ .

3) теплопередача між вузловими точками здійснюється через умовні теплопровідні стрижні.

Як приклад застосування чисельного методу скінчених різниць розв'яжемо рівняння теплопровідності для одновимірного нестационарного процесу:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (1.91)$$

Рівняння (1.29) описує процес зміни температури в напрямку осі  $Ox$  і часі, наприклад, температурне поле в одновимірному стрижні.

Графічна ілюстрація цього поля в одновимірному стрижні, зображена на рис. 1.11. Розділимо стрижень на маленькі об'єми довжиною  $h_x$  та пронумеруємо їх цифрами  $1, 2, \dots, k-1, k, k+1, \dots$ . Якщо відома температурна функція (див. рисунок 1.11), то першу похідну  $\frac{\partial t}{\partial x}$

поблизу точки  $i$  в момент часу  $k$  можна замінити одним з двох наближених виразів:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cong \begin{cases} \left(\frac{\Delta t}{h_x}\right)_+ = \frac{t_{i+1,k} - t_{i,k}}{h_x}, \\ \left(\frac{\Delta t}{h_x}\right)_- = \frac{t_{i,k} - t_{i-1,k}}{h_x}, \end{cases} \quad (1.92)$$

де  $(\Delta t/h_x)_+$  та  $(\Delta t/h_x)_-$  - прийнято називати різницевиими відношеннями вперед (+) та назад (-).

Другу похідну  $\partial^2 t / \partial x^2$  можна представити через різницю відношень вперед та назад, віднесену до  $h_x$ :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cong \frac{1}{h_x} \left[ \left(\frac{\Delta t}{h_x}\right)_+ - \left(\frac{\Delta t}{h_x}\right)_- \right] = \frac{t_{i+1,k} + t_{i-1,k} - 2t_{i,k}}{h_x^2}. \quad (1.93)$$

Оскільки часова вісь має один напрямок, то похідну  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$  можна описати тільки одним різницевим співвідношенням:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cong \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_{i,k+1} - t_{i,k}}{\Delta \tau}. \quad (1.94)$$

Підставляючи (1.93) та (1.94) в рівняння (1.91), після нескладних перетворень отримаємо вираз для розрахунку температури точки  $i$  в момент часу  $k+1$ :

$$\begin{aligned} t_{i,k+1} &= \frac{a\Delta t}{h_x^2} (t_{i+1,k} + t_{i-1,k}) + \left(1 - \frac{2a\Delta t}{h_x^2}\right) t_{i,k} = \\ &= F_{0x} (t_{i+1,k} + t_{i-1,k}) + (1 - 2F_{0x}) t_{i,k}, \end{aligned} \quad (1.95)$$

де  $F_{0x} = a\Delta t/h_x^2$  - критерій Фур'є відносно розміру  $h_x$  елементарного об'єму стрижня. Рівняння (1.95) є диференціальним рівнянням теплопровідності в кінцево-різницевій формі. Математичний аналіз рівняння (1.95) показує, що для забезпечення стійкості його розв'язку, необхідно виконати умову [1,2]  $F_{0x} \leq 0.5$ . При  $F_{0x} > 0.5$  результати розв'язку набувають стрибкоподібного характеру і розрахунок температурного поля буде неправильним. Прийmemo  $F_{0x} = 0.5$ , тоді

$$t_{i,k+1} = 0.5(t_{i+1,k} + t_{i-1,k}) \quad (1.96)$$

Рівняння (1.96) показує, що для знаходження температури точки  $i$  в момент часу  $k+1$  достатньо знати температуру двох сусідніх точок  $i-1$  та  $i+1$  в попередній проміжок часу  $k$ . При цьому майбутня температура точки  $i$  від теперішньої температури не залежить.

Складаючи рівняння типу (1.96) для всіх точок, включаючи точки, що розташовані на межі тіла, та враховуючи умови однозначності, можна розрахувати розподіл температур в тілі для будь-якого моменту часу. Точність розрахунків підвищується із зменшенням  $F_{0x}$ , наприклад при  $F_{0x}=0.25$   $t_{i,k+1} = 0.25(t_{i+1,k} + t_{i-1,k} + 2t_{i,k})$  - це більш точний вираз для розрахунку майбутньої температури точки  $i$ .

Методом скінченних різниць можна розв'язувати дво- та тривимірні задачі теплопровідності, наприклад [1,2] для тривимірного температурного поля рівняння теплопровідності в скінченно-різницевої формі має вигляд

$$t_{i,j,p,k+1} = F_{0x}(t_{i+1,j,p,k} + t_{i-1,j,p,k}) + F_{0y}(t_{i,j+1,p,k} + t_{i,j-1,p,k}) + F_{0z}(t_{i,j,p+1,k} + t_{i,j,p-1,k}) + [1 - 2(F_{0x} + F_{0y} + F_{0z})] \cdot t_{i,j,p,k}, \quad (1.97)$$

де  $F_{0x} = \frac{a\Delta\tau}{h_x^2}$ ;  $F_{0y} = \frac{a\Delta\tau}{h_y^2}$ ;  $F_{0z} = \frac{a\Delta\tau}{h_z^2}$  - критерії Фур'є відносно розмірів  $h_x$ ,

$h_y$ ,  $h_z$  елементарного об'єму тіла. Стійкість розв'язку рівняння (1.97) забезпечується при виконанні умови

$$F_{0x} + F_{0y} + F_{0z} \leq 0.5; \quad (1.98)$$

При виборі інтервалів (кроків) сітки  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_z$  їх величину узгоджують із ступенем деталізації вивчення температурного поля в тій чи іншій області твердого тіла. Кроки сітки, а також інтервал розбивання координати часу повинні відповідати умові (1.98).

З метою зменшення об'єму та вартості розрахунків при розв'язанні задач з теплофізики в теперішній час широко використовуються методи скінченних елементів і межових елементів, математичний апарат яких ґрунтується на варіаційному численні.

На відміну від методу скінченних різниць метод скінченних елементів дозволяє здійснювати різну деталізацію об'єктів дослідження. Елементарні об'єми можуть мати різні розміри та форму. За методом скінченних елементів скорочується число рівнянь та є можливість для окремих елементів врахувати різні властивості матеріалу. Метод межових елементів відрізняється від розглянутих тим, що на елементарні об'єми розбивається не все тіло, а тільки його межові поверхні, що значно скорочує обсяг розрахунків. В теплофізиці метод межових елементів поки що використовують обмежено, оскільки це пов'язано із значними математичними труднощами. Більш детально з особливостями та

прикладом застосування методів скінченних та межових елементів можна ознайомитись за працею [2].

Розв'язування задач теплопровідності шляхом моделювання відноситься до експериментальних методів. Використовується два методи моделювання [1,2]: вивчення теплообміну в реальному твердому тілі (або системі тіл) за аналізом подібного процесу розповсюдження теплоти в моделі (фізичне моделювання); вивчення теплообміну в реальному тілі на основі дослідження іншого фізичного явища, що має формально аналогічне процесу розповсюдження теплоти математичне описання (математичне або аналогове моделювання). Теоретичною базою моделювання є теорія подібності, елементи якої будуть розглянуті в розділі 2.

Приклади розв'язування задач теплопровідності за допомогою моделювання наведені в працях [1,2].

## 2 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ВЧЕННЯ ПРО КОНВЕКТИВНИЙ ТЕПЛООБМІН

### 2.1 Основні поняття та визначення

Конвективний процес теплообміну здійснюється при русові рідини чи газу, причому теплота одночасно переноситься конвекцією і теплопровідністю. Конвекція теплоти – це її перенос при переміщенні мікрочастинок текучого середовища в просторі з області з однією температурою в область з іншою температурою. Конвекція можлива тільки в рідині або газі, де перенос теплоти нерозривно пов'язаний з переносом самого текучого середовища.

В рух рідину чи газ приводять сили, які можна розділити на масові (об'ємні) та поверхневі. Масові сили прикладені до всіх частинок рідини (газу) і зумовлюються зовнішніми силовими полями (гравітаційне, магнітне, електричне). Поверхневі сили прикладаються до поверхні контрольного об'єму рідини (газу), внаслідок дії на неї навколишнього середовища або твердих тіл. Це сили зовнішнього тиску і тертя.

Конвекцію ділять на вільну (природну) та вимушену. При вільній конвекції рух рідини (газу) виникає через неоднорідну густину рідини і дію на її частинки масових сил. Це обумовлюється з нерівномірним розподілом температури в об'ємі рідини (газу), наприклад, опалення кімнати від водяної батареї, коли більш нагріті об'єми повітря через меншу густину піднімаються догори в полі земного тяжіння, а холодні шари повітря опускаються донизу. Ріх рідини (газу) при вимушеній конвекції відбувається під дією на розглядуваний об'єм рідини поверхневих сил, наприклад, за рахунок передачі об'єму рідини кінетичної енергії від насоса, вентилятора або інших пристроїв, при цьому, при русові рідини чи газу із області з однією температурою в область з іншою, разом із масою рідини (газу) переноситься певна кількість теплоти. Вимушена конвекція проходить і тоді, коли тверде тіло само переміщується в середовищі.

Вимушена та вільна конвекції в природі відбуваються одночасно, наприклад, при токарній обробці одна частина різця віддає теплоту в рухоме середовище – змащувально-охолоджувальну рідину, а інша – в умовно нерухоме навколишнє повітря. Вплив вільної конвекції на загальний тепловий баланс тим більший, чим більша різниця температур окремих частинок середовища та менша швидкість вимушеного руху і навпаки.

Конвективний теплообмін між потоком рідини (газу) та поверхнею тіла, що стикається з потоком, називається конвективною тепловіддачею або просто тепловіддачею. Процеси тепловіддачі можуть бути стаціонарними і нестаціонарними. Умова стаціонарності процесу

тепловіддачі – це незмінність в часі швидкості та температури в будь-якій точці рідини (газу).

В п.1.6.2 був розглянутий (див. формулу (1.48)) закон Ньютона-Ріхмана, який можна подати в інших формах:

$$dQ_{cr} = \alpha(t_c - t_p)dF \cdot d\tau; \quad (2.1)$$

$$dQ_c = \alpha(t_c - t_p)dF, \quad (2.2)$$

де  $dQ_{cr}$  - елементарна кількість теплоти, що передається від елемента поверхні тіла  $dF$  ( $m^2$ ) (або навпаки, коли  $t_p > t_c$ ) до рідини (газу), Дж;  $t_c$ ,  $t_p$  - температури поверхні тіла і рідини (газу), К;  $dQ_c = dQ_{cr}/d\tau$  - елементарний тепловий потік, Вт;  $d\tau$  - час теплообміну, с. Різницю  $t_c - t_{ж}$  називають температурним напором. Коефіцієнт пропорційності  $\alpha$  (див. рівняння (2.1) та (2.2)) називається коефіцієнтом тепловіддачі, Вт/( $m^2K$ ). Як вже раніше відмічалось (див. п. 1.6.2), коефіцієнт тепловіддачі не є фізичним параметром речовини і в загальному випадку залежить від форми і розмірів тіла, режиму руху, швидкості, температури і фізичних параметрів рідини та інших величин, зокрема від конкретних умов тепловіддачі, які впливають на її інтенсивність.

Експериментально коефіцієнт тепловіддачі визначають за залежністю

$$\alpha = \frac{dQ_c}{dF(t_c - t_p)} = \frac{q_c}{t_c - t_p}, \quad (2.3)$$

де  $q_c$  - густина теплового потоку на межі рідини (газу) та тіла, що стикається з нею,  $\frac{Вт}{m^2}$ .

Оскільки конвекція завжди супроводжується теплопровідністю, то локальне (місцеве) значення густини теплового потоку  $q$ , що проходить за одиницю часу через одиницю поверхні контрольного об'єму рідини нормально до поверхні, можна описати векторним рівнянням [1]

$$\vec{q} = \vec{q}_{тепл} + \vec{q}_{конв} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{w} h, \quad (2.4)$$

де  $\vec{q}_{тепл} = -\lambda \nabla t$  - густина теплового потоку, що переноситься за рахунок теплопровідності рідини (газу);  $\vec{q}_{конв} = \rho \vec{w} h$  - густина теплового потоку, що переноситься конвекцією;  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності рідини;

$\nabla t = \left( \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} \right) \vec{n}_0$  - градієнт температури в рідині ( $\vec{n}_0$  - одиничний вектор);  $\rho$  - густина рідини;  $\vec{w}$  - швидкість потоку;  $h$  - питома ентальпія рідини (див. залежність (1.30)).



Процес теплообміну залежить від різних властивостей рідин (газів), які суттєво впливають на інтенсивність теплообміну та характер його проходження.

## 2.2 Фізичні властивості рідин

Властивості рідин (газів) визначаються через такі фізичні характеристики:

$\rho$  - густина,  $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

$c_p$  ( $c_v$ ) – питома теплоємність при сталому тиску (об'ємі),  $\frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{К})}$

$a = \frac{\lambda}{(c_p \cdot \rho)}$  - коефіцієнт температурної провідності,  $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$

$\epsilon$  - коефіцієнт стисливості,  $\frac{\text{м}^2}{\text{Н}} (\text{Па}^{-1})$ ;

$\beta$  - коефіцієнт теплового об'ємного розширення,  $\text{К}^{-1}$ ;

$\mu = \nu \cdot \rho$  - коефіцієнт динамічної в'язкості,  $\text{Па} \cdot \text{с}$  (тут  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  - коефіцієнт кінематичної в'язкості,  $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ ).

Для кожної речовини наведені величини мають певне значення і є функціями параметрів стану (тиску і температури).

В'язкість, стисливість, теплове об'ємне розширення в значній мірі визначають властивості рідин (газів), тому на характеристиці цих параметрів слід зупинитись докладніше.

Між окремими частинками або шарами рідини (газу), що рухаються з різними швидкостями, виникає сила внутрішнього тертя, яка протидіє рухові. Це дотична сила, величина якої, віднесена до одиниці поверхні, визначається за законом Ньютона:

$$\tau_s = \mu \frac{dw}{dn}, \quad (2.5)$$

де  $\tau_s$  – дотична напруга в рідині (газі), яка діє в будь-якій точці потоку в площині, орієнтованій по течії,  $\text{Па}$ ;  $\frac{dw}{dn}$  – градієнт швидкості за нормаллю

$n$  (м) до площини потоку,  $\frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{м}}$ ;  $\mu$  - коефіцієнт динамічної в'язкості,  $\text{Па} \cdot \text{с}$ .

Рідини, що підкоряються закону Ньютона, називаються "ньютонівськими". Деякі рідини при нормальних умовах і звичайні в екстремальних, закону Ньютона не підкоряються. Такі рідини називаються "неньютонівськими" і для них

$$\tau_s = \mu_{ef} (p_0, t, w, \frac{dw}{dn}) \frac{\partial w}{\partial n}, \quad (2.6)$$

де  $\mu_{ef}$  – локальний коефіцієнт динамічної в'язкості, який не є фізичним параметром речовини, а є параметром її стану і залежить від локального тиску, температури, швидкості та їх зміни.

Коефіцієнт динамічної в'язкості рідин і газів залежить від температури та тиску. Наближено зміну коефіцієнта динамічної в'язкості крапельних рідин від температури і тиску можна оцінити за залежностями:

$$\mu_t = \mu_{ot} \left( \frac{t}{t_0} \right)^m, \quad (2.7)$$

$$\mu_p = \mu_{op} \cdot e^{\alpha_n \Delta p}, \quad (2.8)$$

де  $\mu_t, \mu_p$  – динамічна в'язкість рідини, відповідно, при температурі  $t$  та тиску  $p$ ;  $\mu_{ot}, \mu_{op}$  – динамічна в'язкість рідини при початкових температурі  $t_0$  та тиску  $p_0$ ;  $\Delta p = p - p_0$ ;  $m$  – показник температурної залежності, що визначається родом рідини ( $m = 2,6 \dots 3$  – для мінеральних мастил);  $\alpha_n$  – п'езокоефіцієнт,  $\text{Па}^{-1}$ .

Таким чином, судячи із залежностей (2.7), (2.8), динамічна в'язкість рідини з підвищенням температури зменшується, а з ростом тиску збільшується. В газах динамічна та кінематична в'язкості із підвищенням температури та тиску збільшуються, сильно при зміні температури та слабо при збільшенні тиску.

На тепловіддачу суттєво впливає стисливість рідин. Закон Гука для рідин має вигляд:

$$-dV/V = dp/\rho = dp/\chi_v = dp \cdot \varepsilon, \quad (2.9)$$

де  $dV$  – зміна об'єму рідини при зміні тиску  $dp$ ;  $V$  – об'єм рідини при початковому тиску або при  $p = 0$ ;  $dp$  – зміна густини рідини;  $\rho$  – початкова густина рідини;  $\chi_v = 1/\varepsilon$  – адиабатичний модуль стиску,  $\text{Па}$ ;  $\varepsilon$  – коефіцієнт стисливості,  $\text{Па}^{-1}$ . При сталій температурі коефіцієнт стисливості можна виразити диференціальною залежністю [1]:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{t=\text{const}}. \quad (2.10)$$

Реальна ізотермічна стисливість крапельних рідин мала (наприклад, для води  $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ ), а для газів – велика (наприклад, повітря  $\varepsilon \approx 10^{-5} \text{ Па}^{-1}$ , що в  $2 \cdot 10^4$  більше, ніж у воді). Слід зауважити, що для газів головним є не здатність стискатись, а те, на скільки він стискається в потоці. Якщо

швидкість газу менша чверті швидкості звуку в ньому, то в розрахунках такий потік можна вважати нестисливим. Стисливість газу в потоці оцінюють числом Маха

$$M = \frac{w}{w_{зв}} , \quad (2.11)$$

де  $w$  – швидкість газу в потоці, м/с;  $w_{зв} = \sqrt{\chi_v / \rho}$  – швидкість звуку в газі, м/с.

На конвективний теплообмін значний вплив має теплове розширення рідин, яке характеризується коефіцієнтом теплового об'ємного розширення

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{p=\text{const}} = \frac{dV}{V dt} , \quad (2.12)$$

де  $dt$  – зміна температури,  $K^{-1}$ . В міжнародній системі одиниць коефіцієнт теплового об'ємного розширення має розмірність  $K^{-1}$ . Знак “мінус” в формулі (2.9) показує, що при стискуванні густина рідини збільшується, а в формулі (2.12) при тепловому розширенні – зменшується. Для деяких рідин в певному температурному інтервалі коефіцієнт теплового об'ємного розширення має від'ємне значення, тобто їх густина із ростом температури зростає, наприклад для води в діапазоні температур  $[0^{\circ}C \dots 4^{\circ}C]$  [1].

Для ідеальних газів та близьких до них (водень, гелій) коефіцієнт теплового об'ємного розширення є величина, обернена абсолютній температурі газу,  $T(K)$ :

$$\beta = \frac{1}{T} . \quad (2.13)$$

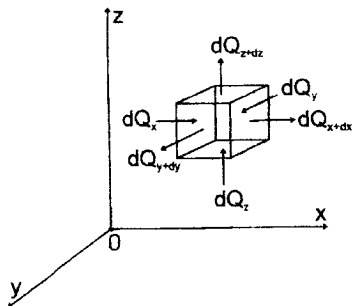
Внаслідок теплового розширення в нерівномірно нагрітій рідині виникає неоднорідне поле густини, яке в гравітаційному полі спричиняє вільну конвекцію.

### 2.3 Диференціальні рівняння конвективного теплообміну

Для однозначного визначення локальної густини теплового потоку в будь-якій точці об'єму рідини і кожного моменту часу, як це впливає із рівняння (2.4), необхідно мати поля температур, ентальпії та швидкості. Для знаходження цих полів необхідні відповідні диференціальні рівняння: енергії, руху та суцільності (нерозривності) потоку, а також відповідні умови однозначності.

### 2.3.1 Рівняння енергії

При виведенні рівняння енергії, яке описує температурне поле в рухомій рідині, приймемо наступні припущення: рідина однорідна і ізотропна; в порівнянні зі зміною внутрішньої енергії, енергія деформації рідини мала; інтенсивність внутрішніх джерел теплоти, що діють у виділеному в потоці рідини нерухомому елементарному паралелепіпеді об'ємом  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ , задана функцією  $q_v = f(x, y, z, \tau)$ ; фізичні параметри рідини стали ( $\rho = \text{const}$ ;  $\lambda = \text{const}$ ;  $\varepsilon = \text{const}$ ;  $\beta = \text{const}$ ;  $\mu = \text{const}$ ).



**Рисунок 2.1 – До виведення диференціального рівняння енергії конвективного теплообміну**

Теплота через грані елементарного паралелепіпед (рисунок 2.1) переноситься теплопровідністю та конвекцією.

При виведенні рівняння теплопровідності (див. підрозділ 1.6), розглядаючи ізобарний процес переносу теплоти було отримано рівняння (1.31):

$$\rho \frac{\partial p}{\partial \tau} = -\nabla q + q_v.$$

Враховуючи рівняння (2.4) та те, що  $\nabla q = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$ , знайдемо проекції густини теплового потоку на координатні вісі Ox, Oy і Oz:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \rho w_x h; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} + \rho w_y h; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} + \rho w_z h. \quad (2.14)$$

Підставляючи (2.14) в рівняння (1.31), отримаємо після нескладних перетворень:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial h}{\partial \tau} &= \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \rho \left( w_x \frac{\partial h}{\partial x} + w_y \frac{\partial h}{\partial y} + w_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \\ &- \rho h \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + q_v = \lambda \nabla^2 t - \\ &\rho \left( w_x \frac{\partial h}{\partial x} + w_y \frac{\partial h}{\partial y} + w_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \rho h \nabla \bar{w} + q_v. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При знаходженні рівняння суцільності потоку буде показано, що при  $\rho = \text{const}$   $\nabla \vec{w} = 0$ , тоді враховуючи, що  $\partial h = c_p \partial t$  (див. підрозділ 1.6), матимемо ( $c_p = \text{const}$ )

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \nabla^2 t - \rho c_p \left( w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v. \quad (2.16)$$

Розділимо праву та ліву частини рівняння (2.16) на  $\rho c_p$  та перенесемо середній член правої частини рівняння в її праву частину:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = \nabla^2 t + \frac{q_v}{(c_p \rho)}, \quad (2.17)$$

або

$$\frac{dt}{d\tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{(c_p \rho)}, \quad (2.18)$$

де  $\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial z}$  - повна похідна

температури за часом, якщо  $t = f(x, y, z, \tau)$ ;  $a = \frac{\lambda}{(c_p \rho)}$  - коефіцієнт теплопроводності рідини;  $w_x = \frac{dx}{d\tau}$ ,  $w_y = \frac{dy}{d\tau}$ ,  $w_z = \frac{dz}{d\tau}$  - проекції на координатні вісі швидкості потоку рідини  $w$ . Рівняння (2.18) називається рівнянням енергії конвективного теплообміну. Похідна  $\frac{dt}{d\tau}$  характеризує локальну зміну температури в часі у якій-небудь точці потоку рідини. Член рівняння  $w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$  визначає зміну температури рідини при переході від точки до точки, тобто характеризує конвективне змінення температури.

При  $w_x = w_y = w_z = 0$ , рівняння (2.18) переходить в рівняння теплопроводності. Для стаціонарного режиму конвективного теплообміну при  $w = \text{const}$  та  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$  рівняння набуде вигляду:

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \nabla^2 t + q_v / (c_p \rho). \quad (2.19)$$

З рівнянь (2.18) та (2.19) випливає, що температурне поле в рухомій рідині залежить від складових швидкості  $w_x$ ,  $w_y$  та  $w_z$ , тому для визначення цього поля необхідно мати диференціальні рівняння руху рідини, які описують зміну швидкості потоку в часі і просторі.

### 2.3.2 Рівняння руху

З метою спрощення математичних викладок приведемо виведення рівняння руху для одновимірної течії рідини, а для тривимірного руху рідини запишемо рівняння без виводу.

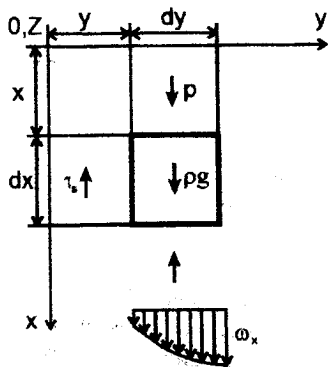


Рисунок 2.2 – До виведення рівняння руху рідини при конвективному теплообміні

Виділимо в потоці в'язкої рідини нерухомий елементарний об'єм  $dV=dx \cdot dy \cdot dz$ . Нехай потік рухається в напрямку осі  $O_x$ , а швидкість потоку змінюється в напрямку від осі  $O_y$  за довільним законом. Зорієнтуємо елементарний паралелепіпед відносно координатних осей так, як показано на рисунку 2.2, де вісь  $O_z$  перпендикулярна площині аркуша. На елементарний об'єм  $dV$  діють масові (сила інерції і сила тяжіння) та поверхневі (сили тиску і в'язкого тертя) сили. Рівняння рівноваги елемента рідини під дією цих сил

має вигляд:

$$df = df_1 + df_2 + df_3, \quad (2.20)$$

де  $df$  - елементарна сила інерції;  $df_1$  - елементарна сила тяжіння, прикладена в центрі ваги об'єму  $dV$ ;  $df_2$  - сила тиску;  $df_3$  - сила в'язкого тертя.

Силу інерції знайдемо за другим законом Ньютона:

$$df = dm_v \cdot \frac{dw_x}{dt} = \rho dV \frac{dw_x}{dt}, \quad (2.21)$$

де  $dm_v = \rho dV$  - маса елементарного паралелепіпеда;  $\frac{dw_x}{dt}$  - прискорення елементарного об'єму.

Сила тяжіння:

$$df_1 = dm_v \cdot g_x = \rho dV \cdot g_x, \quad (2.22)$$

де  $g_x$  - проекція на вісь  $O_x$  прискорення вільного падіння.

Силу тиску рідини на об'єм  $dV$  знайдемо із наступних міркувань. На верхню грань елементарного паралелепіпеда діє тиск  $p$  і відповідно сила

$$df_2' = p dydz, \text{ а на нижню} - p + \frac{dp}{dx} dx \text{ і } df_2'' = -\left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dydz \text{ (тиск}$$

на нижню грань знайдено при розкладенні функції  $p(x)$  в ряд Тейлора з точністю до другого члена розкладення). Рівнодіюча сил тиску

$$df_2 = df_2' + df_2'' = \left(p - p - \frac{dp}{dx} dx\right) dydz = -\frac{dp}{dx} dx dydz = -\frac{dp}{dx} dV, \quad (2.23)$$

де  $dydz$  – площа грані паралелепіпеда.

Рівнодіючу сил в'язкого тертя  $df_3$  знаходимо наступним чином. Оскільки швидкість потоку змінюється тільки в напрямку осі  $O_y$ , то сила тертя виникає на бокових гранях об'єму  $dV$ . Біля лівої грані (див. рисунок 2.2) швидкість руху частинок рідини менша, ніж в самому об'ємі, тому в перерізі з координатою  $y$  сила направлена проти потоку і рівна  $\tau_s dx \cdot dz$  ( $\tau_s$  – напруга зсуву в рідині). Біля правої грані швидкість руху частинок більша, ніж в самому елементі рідини, тому в перерізі  $y + dy$  сила тертя буде направлена в сторону руху рідини (об'єм  $dV$  ніби рухається проти потоку) і, з точністю розкладення  $\tau_s(y)$  в ряд Тейлора до двох членів, буде дорівнювати  $\left(\tau_s + \frac{d\tau_s}{dy} dy\right) dx dz$ . Рівнодіючу  $df_3$  цих сил знаходимо як алгебраїчну суму:

$$df_3 = \left(\tau_s + \frac{d\tau_s}{dy} dy - \tau_s\right) dx dz = \frac{d\tau_s}{dy} dy dx dz = \frac{d\tau_s}{dy} dy, \quad (2.24)$$

де  $dx dz$  – площа грані.

Для крапельних рідин, згідно з законом Ньютона  $\tau_s = \mu \frac{dw_x}{dy}$  ( $\mu$  – динамічна в'язкість рідини), тоді вираз (2.24) прийме вигляд

$$df_3 = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} dV. \quad (2.25)$$

Підставляючи (2.21), (2.22), (2.23) та (2.25) в (2.20), та скорочуючи праву і ліву частини отриманого виразу на  $dV$ , знайдемо рівняння руху одновимірного потоку:

$$\rho \frac{dw_x}{dt} = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}. \quad (2.26)$$

У випадку тривимірного руху рідини із постійними фізичними параметрами поле швидкості описується системою диференціальних рівнянь руху, які називають рівняннями Нав'є – Стокса [1]:

$$\begin{cases} \rho \frac{dw_x}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 w_x; \\ \rho \frac{dw_y}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 w_y; \\ \rho \frac{dw_z}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_z; \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\text{де } \nabla^2 w_x = \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}; \quad \nabla^2 w_y = \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2};$$

$$\nabla^2 w_z = \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}.$$

Використовуючи векторну форму запису, систему рівнянь (2.27) можна представити рівнянням

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w}, \quad (2.28)$$

$$\text{де } \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}.$$

На основі поняття повної похідної прискорення

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial x}. \quad (2.29)$$

Аналогічні вирази можна записати і для прискорень  $\frac{dw_y}{dt}$  та  $\frac{dw_z}{dt}$ . Похідні  $\frac{\partial w_x}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial w_y}{\partial t}$  та  $\frac{\partial w_z}{\partial t}$  характеризують локальні прискорення в будь-якій точці об'єму рідини, а градієнти  $\frac{\partial w_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w_x}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial w_x}{\partial z}$  та для проєкцій  $w_y$ ,  $w_z$ , характеризують зміну швидкості потоку при переході від точки до точки в об'ємі рідини.

Рівняння (2.28) отримано при сталих фізичних характеристиках рідини. Приймемо, що при  $\beta = \text{const}$  змінюється тільки густина  $\rho = \rho_0 [1 - \beta(t - t_0)]$ , де  $t_0$  – початкова фіксована температура рідини (точка відліку). Підставляючи значення густини в рівняння руху (2.28), що враховує масові сили, отримаємо:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho_0 [1 - \beta(t - t_0)] \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} = \rho_0 \vec{g} - \rho_0 \beta \vec{g} (t - t_0) - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} =$$

$$= -\rho_0 \beta \vec{g} (t - t_0) - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w}, \quad (2.30)$$



де  $\rho_0 \vec{g}$  - градієнт гідростатичного тиску  $p_0$  в нерухомій рідині з густиною  $\rho_0$  [1];  $\rho_0 \vec{g} \beta (t - t_0)$  - питома підймальна (архімедова) сила в рідині;  $\nabla p_1 = \nabla p - \rho_0 \vec{g}$ ;  $p_1 = p - p_0$  - перепад тиску в рідині.

Опускаючи при  $\rho$  індекс 0 та 1 при  $p$ , після ділення правої та лівої частин рівняння (2.30) на  $\rho$ , матимемо рівняння руху тривимірного потоку в формі:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = -\vec{g}\beta(t-t_0) - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{w}, \quad (2.31)$$

де  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  - кінематична в'язкість рідини. Щоб замкнути систему рівнянь руху до цих рівнянь потрібно додати рівняння суцільності (нерозривності) потоку.

### 2.3.3 Рівняння суцільності

Виділимо в потоці рідини нерухомий елементарний об'єм  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  та розрахуємо масу рідини, що протікає через нього в напрямку осей  $Ox$ ,  $Oy$  та  $Oz$  за час  $dt$  (рисунок 2.3)

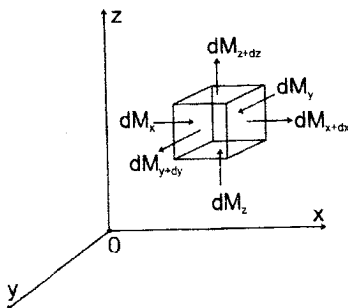


Рисунок 2.3 – До виведення рівняння суцільності

В напрямку вісі  $Ox$  в елементарний паралелепіпед входить маса рідини

$$dM_x = \rho w_x dy dz dt, \quad (2.32)$$

де  $\rho w_x$  - кількість маси рідини, яка перетікає за одиницю часу через одиницю поперечного перерізу.

З протилежної грані витікає маса

$$dM_{x+dx} = \rho w_{x+dx} \cdot dy dz dt =$$

$$\left[ \rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx \right] dy dx dt, \quad (2.33)$$

де функція  $\rho w_{x+dx}$  розкладена в ряд Тейлора з точністю до двох членів розкладення.

Надлишок  $dM_{x1}$  рідини, що витікає з об'єму  $dV$  в напрямку вісі  $Ox$ , знайдемо за залежністю

$$dM_{x1} = dM_{x+dx} - dM_x = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dV \cdot dt \quad (2.34)$$

Аналогічно розраховуються:

$$dM_{y_1} = dM_{y+dy} - dM_y = \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial x} dV \cdot dt; \quad (2.35)$$

$$dM_{z_1} = dM_{z+dz} - dM_z = \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial x} dV \cdot dt. \quad (2.36)$$

Сумуючи (2.34), (2.35) та (2.36), отримуємо надлишок  $dM$  маси рідини, що витікає з елементарного паралелепіпеда в напрямку всіх трьох осей координат. Цей надлишок обумовлюється зміною густини рідини в об'ємі  $dV$  і дорівнює зміні маси цього об'єму в часі ( $dM = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt$ ):

$$dM = dM_{x_1} + dM_{y_1} + dM_{z_1} \quad (2.37)$$

або після перетворень (скорочено на  $dV$  і  $dt$ )

$$-dM + dM_{x_1} + dM_{y_1} + dM_{z_1} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.38)$$

Рівняння (2.38) є рівнянням суцільності (збереження маси) стисливої рідини. Для нестисливої рідини  $\rho = \text{const}$ , отримуємо:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \text{div } \vec{w} = \nabla \vec{w} = 0. \quad (2.39)$$

Таким чином процес конвективного теплообміну в нестисливій однорідній рідині із сталими фізичними параметрами описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \vec{q} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{w} h; \\ \frac{dt}{dt} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p \rho}; \\ \frac{d\vec{w}}{dt} = -g\beta(t - t_0) \vec{e}_z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{w}; \\ \nabla \vec{w} = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Система рівнянь (2.40) має нескінченну кількість розв'язків. Для виділення конкретного процесу і однозначного його визначення, до системи диференціальних рівнянь (2.40) потрібно додати умови однозначності, які дають математичне описання конкретних особливостей розглядуваного явища. Умови однозначності складаються з тих пунктів, що й для процесу теплообміну теплопровідністю (див.п.1.6.2) і мають такий же зміст. Разом із умовами однозначності система диференціальних

рівнянь конвективного теплообміну представляє собою математичне формулювання красної задачі.

Аналітичне розв'язання системи рівнянь (2.40) пов'язано з дуже великими математичними труднощами. Спрощення математичного формулювання задачі конвективного теплообміну без суттєвих похибок може бути досягнуто при введенні понять гідродинамічного та теплового прикордонних шарів. Внаслідок складності процесів конвективної теплопередачі при її вивченні широко використовуються чисельні методи розрахунку та експериментальні дослідження. В результаті експериментів отримують синтезовані відомості про процес, в яких вплив окремих факторів не завжди можна виділити. Ці труднощі допомагає переборювати теорія подібності, яка є теоретичною базою експериментальних досліджень.

## 2.4 Гідродинамічний та тепловий прикордонні шари

При теплових розрахунках механізмів та машин, теплообмінних апаратів тощо особливо важливим є теплообмін між рідиною та твердим тілом (стілки корпусних деталей механізмів). Течія рідини та перенос теплоти в пристінному шарі має певні особливості. Частинки рідини, що безпосередньо прилягають до твердого тіла, адсорбуються ним (прилипають до поверхні тіла) і їх швидкість стає рівною швидкості тіла, а якщо тіло не рухоме, то нулю. Шар рідини, що "прилипла" до поверхні тіла можна вважати нескінченно тонким, тому теплопередача через цей шар проходить за законом Фур'є  $q_c = -\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}$ , де  $q_c$  - густина теплового

потoku на поверхні тіла;  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності рідини;  $n$  - нормаль до поверхні тіла. Знаючи  $q_c$  та градієнт температури в прикордонному шарі, легко розрахувати коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$ , скориставшись законом Ньютона-Ріхмана:

$$\alpha = -\frac{1}{t_c - t_p} \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (2.41)$$

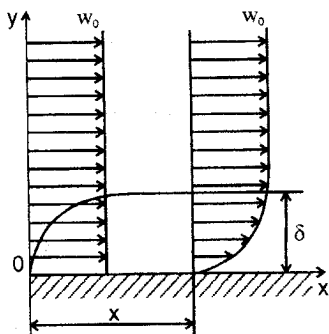
де  $t_c, t_p$  - відповідно температури поверхні тіла та рідини в прикордонному шарі.

Розглянемо поняття гідродинамічного та теплового прикордонних шарів.

### 2.4.1 Гідродинамічний прикордонний шар

Нехай безмежний потік рідини (рисунок 2.4) обтікає плоску поверхню тіла. Швидкість  $w_0$  та температура  $t_0$  потоку, що набігає постійні ( $w_0 = \text{const}$ ;  $t_0 = \text{const}$ ). При стиканні частинок рідини з поверхнею тіла вони

"прилипають" до неї. Внаслідок дії сил в'язкості поблизу поверхні тіла утворюється шар загальмованої рідини, в межах якого швидкість змінюється від нуля на поверхні тіла до швидкості незбудженого потоку (далеко від тіла). Цей шар загальмованої рідини отримав назву гідродинамічного прикордонного шару, а його теорія була запропонована в 1904р. Л.Прандлем [1].



**Рисунок 2.4 – Змінення швидкості руху рідини в гідродинамічному прикордонному шарі.**

Чим більша відстань  $x$  (див. рисунок 2.4) від переднього краю тіла (пластинки, наприклад), тим більшу товщину має прикордонний шар, так як вплив в'язкості по мірі руху рідини вздовж тіла все більше проникає в незбуджений потік.

Для течії рідини всередині прикордонного шару справедлива умова  $\partial w_x / \partial y \neq 0$ , а зовні цього шару і на його зовнішній межі  $\partial w_x / \partial y = 0$  і  $w_x = w_0$ . Різкої

межі між прикордонним шаром та потоком зовні шару немає, тому поняття "товщина прикордонного шару" та зовнішня межа прикордонного шару умовні. Під товщиною прикордонного шару  $\delta$  розуміють таку відстань від тіла, на якій швидкість буде відрізнитися від швидкості потоку далеко від тіла на малу, наперед задану, величину  $\varepsilon \ll 1$  (наприклад на 1%), тобто при  $y = \delta$   $w_x = (1 - \varepsilon)w_0$  [1]. Таким чином при обтіканні тіла потік рідини умовно ділиться на прикордонний шар та зовнішній потік. Вважається, що в зовнішньому потоці переважно діють сили інерції, а в'язкісні сили (сили тертя) не проявляються, і навпаки, в прикордонному шарі сили в'язкості та інерції співмірні.

Розділення потоку рідини поблизу тіла сильно залежить від критерію (числа) Рейнольдса

$$Re = \frac{w_0 L}{\nu}$$

де  $L$  – характерний розмір тіла, а для нашого випадку масштаб поздовжньої координати  $x$ ;  $\nu$  – кінематична в'язкість рідини. Якщо  $Re \ll 1$ , то  $\delta/L \gg 1$  [1] ( $\delta \gg L$ ) і в цьому випадку практично немає поділу потоку на дві області, в усьому просторі біля тіла діють сили в'язкості. При  $Re \gg 1$

( $\delta \ll L$  [1]) біля поверхні тіла утворюється тонкий шар загальмованої рідини. Поняття прикордонного гідродинамічного шару значно спрощує математичне формулювання краєвої задачі конвективного теплообміну і зв'язані з цим можливості її розв'язання.

### 2.4.2 Тепловий прикордонний шар

Тепловий прикордонний шар - шар рідини біля поверхні (стінки), в межах якої температура змінюється від температури  $t_c$  поверхні тіла до температури  $t_0$  рідини далеко від тіла (рисунок 2.5). Поняття теплового прикордонного шару за аналогією з гідродинамічним прикордонним шаром було введено Г.М. Кружиліним.

Для області в середині теплового прикордонного шару справедлива умова  $\partial t / \partial y \neq 0$ , а на його зовнішній межі та далеко від тіла  $\partial t / \partial y = 0$  і  $t = (1 - \epsilon)t_0$ , де  $\epsilon \ll 1$ , оскільки температура  $t$  повинна асимптотично прямувати до значення  $t_0$  [1]. Наближено можна вважати, що  $t = t_0$ . Таким чином, всі зміни температури зосереджуються у відносно тонкому шарі

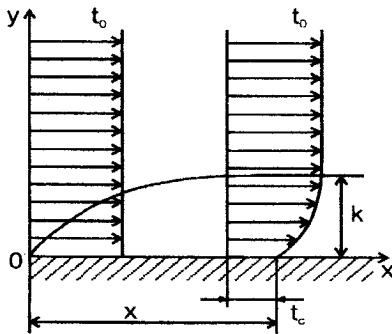


Рисунок 2.5 – Змінення температури рідини в тепловому прикордонному шарі

теплопровідністю рідини вздовж прикордонного шару в порівнянні з поперечним переносом теплоти, тобто  $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0$  (так як  $k^2 \ll L^2$ , то

$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ ). В цьому випадку рівняння енергії прийме вигляд

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \quad (2.42)$$

Аналогічно при  $\delta \ll L$   $\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}$  можна вважати, що  $\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \approx 0$ , а також через малу товщину прикордонного шару зміною тиску поперек цього шару можна знехтувати  $\left(\frac{\partial p}{\partial y} = 0\right)$ . Відповідно до цих зауважень рівняння руху рідини в прикордонному гідродинамічному шарі набуде вигляду

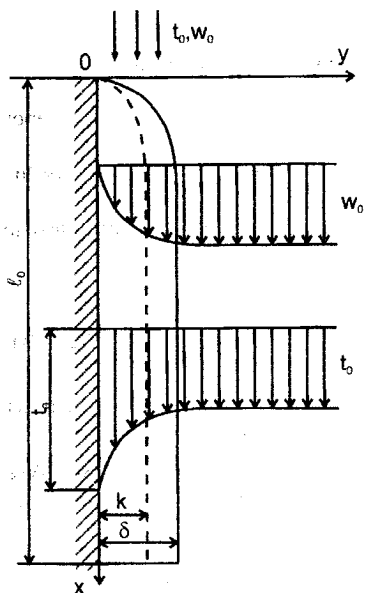
$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \quad (2.43)$$

В залежностях (2.42) та (2.43) прийнято, що плоске тіло (пластина) безкінечне в напрямку осі Oz.

Зв'язок між величинами  $\delta$  та  $k$  для тепловіддачі при ламінарному (без перемішування) русі рідини в прикордонному шарі буде приведено після розгляду елементів теорії подібності.

## 2.5 Елементи теорії подібності та моделювання процесів конвективного теплообміну

Як вже відмічалось в підрозділі 2.3, спроби розв'язання повної системи диференціальних рівнянь, що описують конвективний теплообмін, з відомими умовами однозначності через велику кількість змінних величин натикаються на практично непереборні математичні труднощі. В цьому випадку великого значення набуває експериментальний шлях досліджень, який дозволяє знайти числові значення змінних, а потім підібрати рівняння, що описують результати дослідів. Однак при вивченні такого складного явища як конвективний теплообмін важко проводити й експериментальні дослідження, оскільки при визначенні впливу на процес теплообміну якогось одного параметра інші необхідно зберігати незмінними, що утруднено, а то і неможливо через велику кількість змінних. Ці труднощі в якійсь мірі допомагає розв'язати теорія подібності, за допомогою якої розмірні фізичні величини об'єднуються в нові змінні — безрозмірні комплекси (числа), число яких менше числа величин з яких вони складені. Ці комплекси відображають вплив на процес не окремих величин, а їх сукупності, що дозволяє легше визначити фізичні зв'язки в досліджуваному процесі. Теорія подібності устанавлює такі умови, при яких результати експериментальних досліджень на моделі можна розповсюдити на інші процеси, подібні розглядуваному. Таким чином теорія подібності є теоретичною базою експериментальних та допоміжним засобом теоретичних досліджень.



**Рисунок 2.6 – До постановки крайові задачі конвективного теплообміну**

Розвивалась теорія подібності в основному працями вітчизняних учених А.А. Гухмана, Н.В. Кірпічова, М.А. Міхєєва, Л.С. Ейгенсона, П.К. Копакова, Б.С. Петухова та інш. [1,2,6].

При практичному використанні висновків з теорії подібності математичне описання процесів, що досліджуються, в розмірних фізичних величинах приводять до безрозмірного виду. Є декілька методів такого приведення, наприклад, метод масштабних перетворень. За масштаби перетворень, як правило, вибирають постійні величини, що входять в умови однозначності, наприклад, при описанні конвективного теплообміну в прикордонному шарі плоского тіла, необмеженого в напрямку осі Oz (рис. 2.6). Конвективний теплообмін для цього випадку описується системою

диференціальних рівнянь (процес стаціонарний):

$$\begin{cases} w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \text{рівняння енергії}; \\ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + g\beta(t - t_0) - \text{рівняння руху}; \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 - \text{рівняння суцільності}, \end{cases} \quad (2.44)$$

де  $g\beta(t-t_0)$  – член, що враховує підймальну силу в рідині через зміну густини.

Умови однозначності представлені у виді:

1) далеко від тіла ( $y=\infty$ )

$$\Delta t = t - t_0 = \Delta t_0 = 0; \quad w_x = w_0; \quad w_y = 0;$$

2) на поверхні тіла ( $y=0, 0 \leq x \leq l_0, -\infty \leq z \leq +\infty$ )

$$\Delta t = \Delta t_c = t_c - t_0 = \text{const} \quad (t_0 = \text{const});$$

$$w_x = w_y = w_z = 0.$$

Введемо безрозмірні величини:

температуру -  $\Theta = \Delta t / \Delta t_c = (t - t_0) / (t_c - t_0)$  ( $t_0$  - температура далеко від тіла,  $t_c$  - температура на поверхні тіла);

координати -  $X = x / l_0$ ;  $Y = y / l_0$  ( $l_0$  - характерний розмір тіла, наприклад довжина поверхні теплообміну (див. рисунок 2.6));

швидкість -  $W_x = w_x / w_0$ ;  $W_y = w_y / w_0$  ( $w_0 = \text{const}$  - швидкість потоку далеко від тіла).

Підставивши в систему (2.44) безрозмірні змінні, після нескладних перетворень, отримаємо систему рівнянь конвективного теплообміну в безрозмірних змінних:

$$\begin{cases} \frac{w_0 l_0}{a} \left( W_x \frac{\partial \Theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}; \\ \frac{w_0 l_0}{\nu} \left( W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g \beta \Delta t_c l_0^2}{\nu \omega_0} \Theta; \\ \frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Умови однозначності: при  $Y = \infty$

$$\Theta = \Theta_0 = 0; W_x = 1; W_y = 0;$$

на поверхні тіла ( $Y = 0, 0 \leq X \leq 1$ )

$$\Theta = \Theta_c = 1; W_x = W_y = 0.$$

При відомому температурному полі коефіцієнт тепловіддачі визначається за залежністю (2.41), де для нашого випадку

$$\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n_0} \equiv \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Привівши (2.41) до безрозмірного вигляду, знайдемо,

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda} = - \left( \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}. \quad (2.46)$$

- безрозмірний комплекс, який повністю визначається похідною  $(\partial \Theta / \partial Y)_{Y=0}$ . Перетворимо безрозмірний комплекс, що входить в праву частину рівняння руху системи (2.45) до вигляду:

$$\frac{g \beta \Delta t_c l_0^2}{\nu w_0} \Theta = \frac{g \beta \Delta t_c l_0^3}{\nu^2} \cdot \frac{\nu}{w_0 l_0} \Theta. \quad (2.47)$$

Аналізуючи систему (2.45) та залежність (2.46), зазначимо, що до неї окрім однорідних безрозмірних величин  $\Theta$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $W_x$ ,  $W_y$ , які складені з



однорідних фізичних величин, входять безрозмірні комплекси, побудовані з однорідних величин. Ці комплекси називаються числами або критеріями подібності. Їм присвоєні імена видатних учених, що зробили значний внесок в розвиток гідродинаміки або теплопередачі.

Розглянемо ці комплекси по порядку входження в систему рівнянь (2.45) і залежність (2.46).

$$\text{Критерій Пекле} \quad \text{Pe} = \frac{w_0 l_0}{a} \quad (2.48)$$

При вивченні явища теплопровідності в твердих тілах ми вже знайомились з цим числом (див. залежність (1.54)). Для конвективного теплообміну перетворимо критерій Пекле наступним чином:

$$\text{Pe} = \frac{w_0 l_0}{a} = \frac{\rho c_p w_0 \Delta t}{\frac{\lambda}{l_0} \Delta y} = \frac{q_{\text{конв}}}{q_{\text{тепл}}} \quad (2.49)$$

де  $q_{\text{конв}} = \rho c_p w_0 \Delta t$  – густина теплового потоку, що переноситься конвекцією, а  $q_{\text{тепл}} = \lambda \Delta t / l_0$  – теплопровідністю. Таким чином критерій Пекле характеризує співвідношення між кількостями теплоти, що переносяться конвекцією і теплопровідністю.

$$\text{Наступний критерій Рейнольдса} \quad \text{Re} = (w_0 l_0 / \nu) \quad (2.50)$$

Цей критерій установлює співвідношення між силами інерції та в'язкості в рідині і визначає режим течії.

$$\text{Критерій Грасгофа} \quad \text{Gr} = \frac{g \beta \Delta t_0 l_0^3}{\nu^2} \quad (2.51)$$

– характеризує підймальну силу, що виникає в рідині внаслідок різниці густини. Якщо при  $\beta = \text{const}$  прийняти до уваги, що  $\beta \Delta t_0 = (\rho_0 - \rho) / \rho_0$ , то можна написати більш загальну модифікацію критерія Грасгофа, яка називається числом Архімеда:

$$\text{Ar} = \frac{g l_0^3}{\nu^2} \cdot \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{g l_0^3}{\nu^2} \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad (2.52)$$

де  $\Delta \rho / \rho_0$  – параметричний критерій, що характеризує неоднорідне поле густини.

$$\text{Співвідношення} \quad \text{Nu} = \alpha l_0 / \lambda \quad (2.53)$$

– називають числом Нуссельта, або безрозмірним коефіцієнтом тепловіддачі, який визначає теплообмін на межі стінка-рідина. Критерій Нуссельта має зовнішню схожість з числом Біо:

$$Bi = \frac{\alpha l_0}{\lambda_m} = \frac{l_0 / \lambda_m}{1/\alpha} = \frac{R_T}{R_{T.B.}}, \quad (2.54)$$

де  $\lambda_m$  – коефіцієнт теплопровідності твердого тіла, а в критерії Нуссельта – рідини;  $R_T$  – термічний опір тіла (стінки);  $R_{T.B.}$  – термічний опір тепловіддачі. Критерій Біо, як відношення термічних опорів тіла і тепловіддачі, задається в умовах однозначності, а число Нуссельта є шуканою величиною, оскільки в нього входить коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$ , який потрібно визначити.

При врахуванні в рівнянні руху зміни тиску в рідині  $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right)$  в безрозмірній формі цього рівняння з'явиться критерій Ейлера

$$Eu = \frac{p}{\rho w_0^2}. \quad (2.55)$$

Це число характеризує співвідношення сил тиску та сил інерції. В рівняння конвективного теплообміну змінна  $Eu$  входить під знаком похідної, тому для нестисливої рідини з постійними фізичними параметрами важливо не абсолютне значення тиску, а його змінення.

В цьому випадку число Ейлера представляють у виді

$$Eu = (p - p_0) / (\rho w_0^2), \quad (2.56)$$

де  $p_0$  – яке-небудь фіксоване значення тиску, наприклад тиску на вході в трубу тощо.

Отримані при приведенні рівнянь енергії та руху до безрозмірного виду числа подібності можна представити як співвідношення між двома або декількома безрозмірними змінними, які є новими комплексами, що враховують взаємозв'язок між силовими та енергетичними параметрами конвективного теплообміну. Розглянемо деякі з цих критеріїв.

Число Пекле можна записати як добуток двох безрозмірних комплексів:

$$Pe = Re \cdot Pr, \quad (2.57)$$

де  $Pr = \nu / a = \mu c_p / \lambda$  – число Прандтля, яке складено з фізичних параметрів речовини, тому само є фізичним параметром. Ця безрозмірна фізична характеристика речовини є мірою подібності полів температур та швидкостей, наприклад, при  $a = \nu$  ( $Pr = 1$ ) поля температур (див. (2.42)) та швидкостей (див. (2.43)) будуть подібні, якщо аналогічні умови однозначності.

Для крапельних рідин числа  $Pr$  сильно залежать від температури [1]. В основному ця залежність від температури ідентична залежності від

температури динамічної в'язкості, оскільки коефіцієнти теплопровідності та питомої теплосмності від температури залежать більш слабо. В залежності від значення числа Прандтля рідини ділять на три групи: рідкі метали -  $Pr \ll 1$ ; теплоносії -  $Pr \approx 1$  (неметалеві крапельні рідини при великих температурах та тисках); неметалеві крапельні рідини при помірних температурах -  $Pr > 1$ .

Для газів число  $Pr$  від температури і тиску практично не залежить, а визначається атомністю газу [1]: одноатомні -  $Pr=0,17$ ; двоатомні -  $Pr=0,72$ ; триатомні -  $Pr=0,8$ ; чотириатомні і більше -  $Pr=1$ .

Критерій Нуссельта можна подати як добуток трьох чисел подібності:

$$Nu = Re \cdot Pr \cdot St = \frac{w_0 l_0}{\nu} \cdot \frac{\nu}{a} \cdot \frac{\alpha}{\rho c_p w_0} = \frac{w_0 l_0}{\nu} \cdot \frac{\nu c_p \rho}{\lambda} \cdot \frac{\alpha}{\rho c_p w_0} = \frac{\alpha l_0}{\lambda}, \quad (2.58)$$

де  $St = \alpha / \rho c_p w_0$  - число Стантона, яке установлює відношення між потоком теплоти від рідини до поверхні тіла і конвективним потоком теплоти, що переноситься рухомою рідиною.

При описанні процесів вільної конвекції в безрозмірних змінних використовуються такі безрозмірні комплекси:

1) число Фруда

$$Fr = gl/w^2 \quad (2.59)$$

- що характеризує відношення між силами інерції та тяжіння;

2) число Галілея

$$Ga = gl^3/v^2 = Re^2 \cdot Fr \quad (2.60)$$

- встановлює співвідношення між масовими силами та силами в'язкості;

3) число Релея

$$Ra = gl^3 \beta \Delta t_c / (\nu \cdot a) = Gr \cdot Pr \quad (2.61)$$

- яке комплексно враховує піднімальну силу в рідині, де проходить процес вільної конвекції і подібність полів температур та швидкостей.

Числа  $Re$ ,  $Fr$ ,  $Ga$ ,  $Gr$ ,  $Eu$ ,  $Fr$  з'являються при приведенні до безрозмірного виду рівняння руху рідини і їх називають критеріями гідродинамічної подібності, а числа  $Pe$ ,  $Fo$ ,  $Nu$ ,  $Gr$ ,  $St$ ,  $Pr$ ,  $Ra$  - є наслідком приведення до безрозмірного виду рівняння енергії - це критерії теплової подібності.

### 2.5.1 Умови подібності фізичних явищ

Багато явищ різної фізичної природи описуються аналогічними за формою запису диференціальними рівняннями, наприклад, процеси теплопровідності і електропровідності, рівняння енергії (див. (2.42)) та

руху рідини (див. (2.43)) при конвективному теплообміні. Якщо в диференціальні рівняння, що описують ці явища, ввести однакові позначення, то за своїм зовнішнім виглядом вони не будуть відрізнятися одне від одного. Ті явища природи, які характеризуються однаковими за формою запису диференціальними рівняннями, але мають різний фізичний зміст, називають аналогічними. Таких аналогій в природі багато (наприклад, закон всесвітнього тяжіння Ньютона та закон Кулона), що свідчить про глибинну і єдину структуру матерії, яку ще належить науці установити.

Подібні явища природи відрізняються від аналогічних (неоднорідних) тим, що мають однакову фізичну природу. Найбільш загальні умови подібності фізичних процесів сформульовані в 1931 році Кірпічовим М.В. і Гухманом А.А. (теорема Кірпічова-Гухмана) у вигляді трьох правил [1]:

1. Подібні процеси повинні бути якісно однаковими, тобто вони повинні мати однакову фізичну природу і описуватись однаковими за формою запису диференціальними рівняннями.

2. Умови однозначності подібних процесів повинні бути однаковими в усьому, окрім числових значень розмірних величин, що містяться в цих умовах.

3. Одноіменні визначальні безрозмірні змінні подібних процесів повинні мати однакове числове значення.

Визначальні безрозмірні змінні – це числа повністю складені із незалежних змінних та сталих величин, що входять в умови однозначності (X, Y, Re, Pr, Fo тощо).

Для того, щоб процеси однакової фізичної природи були подібні достатньо, щоб чисельно були рівні однойменні визначальні змінні, які складені з постійних величин, що задані в умовах однозначності. Локальні (точкові) значення змінних які потрібно визначити, необхідно розглядати в точках, що характеризуються рівністю однойменних безрозмірних координат, а при нестационарних процесах повинен бути рівним і безрозмірний час подібних процесів (критерій Фур'є). Таким чином два процеси А та Б будуть подібні, якщо  $Re_A = Re_B$ ,  $Pr_A = Pr_B$ ,  $Fo_A = Fo_B$  і т.д.

За третім правилом теореми подібності виходить, що безрозмірні координати подібних процесів (наприклад А та Б) в споріднених точках рівні між собою, тобто  $X_A = X_B$ ;  $Y_A = Y_B$ ;  $Z_A = Z_B$ .

Для приведення координат процесів до безрозмірного вигляду за масштаб вибирається будь-який характерний розмір процесу, наприклад, розміри каналів  $h_A$  і  $h_B$  для подібних процесів конвективного теплообміну. Враховуючи це зауваження, визначимо безрозмірні координати:  $X_A = x_A/h_A$ ;  $Y_A = y_A/h_A$ ;  $Z_A = z_A/h_A$ ;  $X_B = x_B/h_B$ ;  $Y_B = y_B/h_B$ ;  $Z_B = z_B/h_B$ . Застосовуючи третє правило подібності, знайдемо:

$$X_A = X_B \cdot \frac{h_A}{h_B} = X_B C_1, Y_A = Y_B \cdot \frac{h_A}{h_B} = Y_B C_1, Z_A = Z_B \cdot \frac{h_A}{h_B} = Z_B C_1,$$

де  $C_1 = h_A/h_B = \text{const}$  – коефіцієнт пропорційності, який називається константою подібності.

Аналогічні константи можна визначити для швидкості потоків в подібних точках процесів А та Б і інших параметрів процесів:

$$C_w = \frac{w_{xA}}{w_{xB}} = \frac{w_{0A}}{w_{0B}}, \frac{v_A}{v_B} = C_v, \text{ де } w_{0A}, w_{0B} \text{ – швидкості потоків в процесях А}$$

та Б, задані в умовах однозначності. Таким чином константи подібності можна вважати масштабними коефіцієнтами, причому масштаби різномірних величин можуть бути неоднаковими.

Вибір констант подібності не може бути довільним, наприклад, для подібності процесів А та Б повинна виконуватись умова:  $Re_A = Re_B, Pr_A = Pr_B$

тощо, де  $Re_A = \frac{w_{0A} l_{0A}}{v_A}; Re_B = \frac{w_{0B} l_{0B}}{v_B}; Pr_A = \frac{v_A}{a_A} = \frac{v_A \rho_A C_{pA}}{\lambda_A};$

$$Pr_B = \frac{v_B}{a_B} = \frac{v_B \rho_B C_{pB}}{\lambda_B}. \text{ Приймаючи до уваги, що } w_{0A} = C_w w_{0B}; l_{0A} = C_l l_{0B};$$

$\rho_A = C_\rho \rho_B; v_A = C_v v_B; C_{pA} = C_{cp} C_{pB}; \lambda_A = C_\lambda \lambda_B,$  отримаємо:

$$Re_A = \frac{C_w C_l}{C_v} \cdot \frac{w_{0B} l_{0B}}{v_B} = \frac{C_w C_l}{C_v} Re_B; Pr_A = \frac{C_v}{C_a} Pr_B = \frac{C_v C_\rho C_{cp}}{C_\lambda} Pr_B,$$

або

$$\frac{Re_A}{Re_B} = \frac{C_w C_l}{C_v} = 1; \frac{Pr_A}{Pr_B} = \frac{C_v}{C_a} = \frac{C_v C_\rho C_{cp}}{C_\lambda} = 1.$$

Основні положення теорії подібності справедливі не тільки для конвективного теплообміну але і для інших процесів, оскільки безрозмірні змінні можна отримати для будь-якого фізичного явища при наявності певного математичного описання для нього.

Умови подібності можна використати для встановлення аналогії двох фізично різнорідних процесів, якщо в першому правилі теореми подібності обмежитись лише формальною тотожністю диференціальних рівнянь.

## 2.5.2 Емпіричні залежності конвективного теплообміну

В підрозділі 2.6 відмічалось, що теорія подібності є базою для обробки результатів експериментальних досліджень. Для того, щоб скористатись положеннями цієї теорії для експериментально досліджуваного процесу складається система диференціальних рівнянь, що його описує, та формулюються умови однозначності. Потім математичне описання процесу приводиться до безрозмірного виду і встановлюється

залежність між параметрами процесу. Цю залежність представляють у вигляді критеріального рівняння, наприклад, для визначення коефіцієнта тепловіддачі  $\alpha$  це рівняння в загальному випадку може мати таку форму [2]:

$$Nu = c Re^m Pr^n Gr^p, \quad (2.62)$$

де  $c, m, n, p$  – постійні безрозмірні експериментальні числа.

При вільній конвекції, коли коефіцієнт тепловіддачі визначається при умові розміщення тіла в середовищі практично необмеженого об'єму, рівняння (2.62) спрощується:

$$Nu = c(Gr Pr)^n = c \cdot Ra^n, \quad (2.63)$$

тут  $m=0; p \approx 1$ .

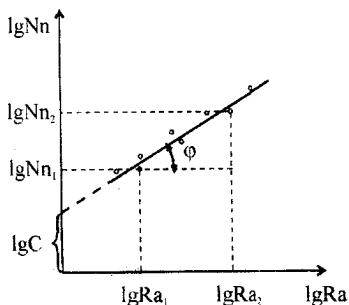
Логарифмуючи (2.63), отримаємо рівняння прямої лінії в логарифмічних координатах (рисунок 2.7)

$$\lg Nu = \lg c + n \lg Ra. \quad (2.64)$$

Показник степеня  $n$  в (2.63) визначається як тангенс кута  $\varphi$  нахилу прямої до осі  $\lg Ra$  (абсцис):

$$n = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\lg Nu_2 - \lg Nu_1}{\lg Ra_2 - \lg Ra_1} = \frac{\lg(Nu_2 / Nu_1)}{\lg(Ra_2 / Ra_1)}. \quad (2.65)$$

Постійна  $c$  знаходиться з рівняння  $c = \frac{Nu}{Ra^n}$ , яке задовольняє будь-яка точка прямої, зображеної на рисунку 2.7. З іншого боку  $\lg c = \lg Nu_0$  при  $\lg Ra = 0$ , де  $Nu_0$  – початкове значення числа Нуссельта, яке визначається при величині  $Ra=1$  ( $\lg Ra = 0$ ).



**Рисунок 2.7 – Графічна інтерпретація рівняння (2.64)**

Критеріальне рівняння типу (2.63) широко застосовується при розрахунках коефіцієнтів тепловіддачі плоских горизонтальних та вертикальних плит або поверхонь, близьких до них за розмірами і конфігурацією (корпуса великогабаритних редукторів, верстатів тощо) [1,2] при природному охолодженні.

Якщо конвекція проходить в повітряному середовищі, то,

оскільки для газів число  $Pr$  мало змінюється при зміні температури ( $Pr \approx 1$ ), критеріальне рівняння спрощується, наприклад, в ЕНІМВ [2,7] отримано рівняння для розрахунку коефіцієнта тепловіддачі деталей верстатів

$$Nu = 0.2 \cdot K \cdot Gr^{0.3}, \quad (2.66)$$

де  $K$  – коефіцієнт, що залежить від форми та розташування деталей верстатів.

Останнім часом широко почав використовуватись напівемпіричний метод знаходження критеріальних формул. Попередньо з точністю до постійних, які визначаються із дослідів, при аналітичному розгляді задачі конвективного теплообміну залежність між безрозмірними змінними представляють у вигляді функції, на основі якої створюють критеріальне рівняння. Такий підхід дозволяє більш точно врахувати особливості реального процесу.

## 2.6 Особливості руху рідини та теплообміну в трубах

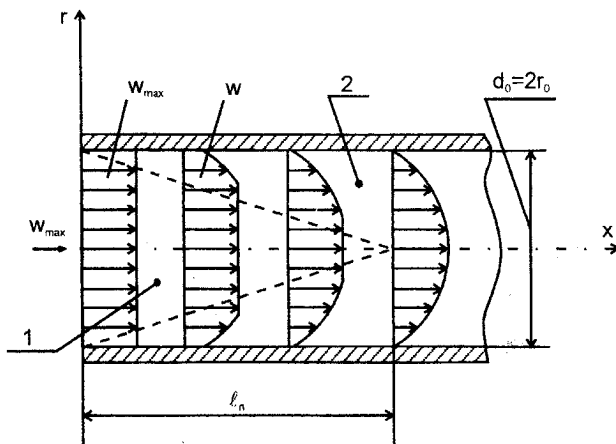
Процес тепловіддачі при русі рідини в трубах має велике практичне значення і є більш складним явищем в порівнянні з тепловіддачею при обмиванні поверхні тіла необмеженим потоком. Рідина, що тече далеко від тіла (наприклад стінки пластини), не відчуває впливу процесів, які відбуваються біля поверхні тіла. В трубах ці процеси проходять по іншому, оскільки поперечний переріз труби має кінцеві розміри, тому починаючи з деякої відстані від входу труби рідина по всьому її поперечному перерізі гальмується силами в'язкості. Це гальмування супроводжується зміною температури як в перерізі, так і по довжині труби (чи каналу, наприклад в теплообмінних або гідравлічних апаратах тощо).

Режим руху рідини може бути ламінарним або турбулентним і визначається числом Рейнольдса  $Re = wd/\nu$ , де  $w$  - середня швидкість руху рідини;  $d$  - діаметр труби (характерний розмір);  $\nu$  - кінематична в'язкість.

Для гідравлічно гладеньких труб режим течії рідини при:  $Re < Re_{кр1} \approx 2000$  - ламінарний;  $2000 < Re < 10000$  - перехідний;  $Re > Re_{кр2} \approx 10000$  - турбулентний (тут  $Re_{кр1}$ ,  $Re_{кр2}$  - відповідно нижнє та верхнє критичні числа Рейнольдса). В гідравлічних апаратах із складною конфігурацією каналів турбулентний режим руху рідини виникає при значно менших значеннях числа Рейнольдса.

### 2.6.1 Ділянка гідродинамічної та теплової стабілізації потоку рідини в трубі

Якщо рідина втікає в трубу з великого об'єму і краї труби на вході заокруглені, то розподіл швидкості в початковому поперечному перерізі труби можна вважати рівномірним [1] (рисунк 2.8).



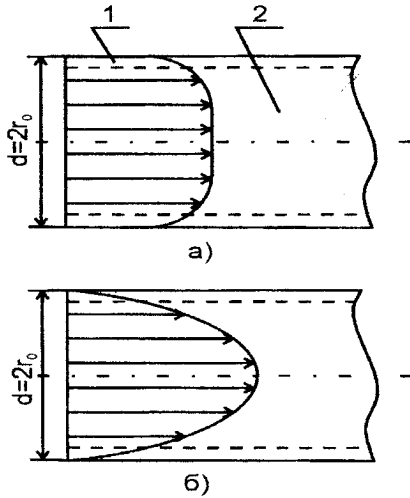
**Рисунок 2.8 – Стабілізація розподілу швидкості при русі рідини в трубі**

При русі рідини біля її стінок утворюється гідродинамічний прикордонний шар (див. п.2.4.1), товщина якого поступово зростаючи, на деякій відстані від входу охоплює весь поперечний переріз ( $\delta=r_0$ ). Якщо фізичні параметри рідини постійні, то на певній відстані від входу устальнюються постійний розподіл швидкості в поперечному перерізі труби, характерний для даного режиму течії. Ця відстань називається довжиною гідродинамічної початкової ділянки або ділянкою гідродинамічної стабілізації потоку. Ця ділянка ділить об'єм рідини в трубі на дві частини – ядро не загальмованої рідини 1 і об'єм 2 рідини, де сили в'язкості діють в усьому поперечному перерізі труби (прикордонні гідродинамічні шари зливаються, див. рисунок 2.8). Стабілізована течія рідини при  $x \geq l_n$  від розподілу швидкості на вході  $x=0$  не залежить, але цей розподіл як при  $x < l_n$ , так і при  $x \geq l_n$  може залежати від процесу теплообміну.

Гідродинамічна ділянка стабілізації потоку має місце як при ламінарному, так і при турбулентному режимі руху рідини. При перехідному режимі руху в передній частині труби може існувати ламінарна форма течії рідини, при цьому ламінарний шар при досягненні критичної товщини переходить в турбулентний, який швидко заповнює весь поперечний переріз труби. Інколи зміна режиму течії проходить за межами початкової гідродинамічної ділянки ( $x \geq l_n$ ). При  $Re > Re_{кр2}$  практично із входу в трубу розвивається турбулентний прикордонний шар [1], особливо, якщо труба має гостру кромку. Довжина ділянки гідродинамічної стабілізації потоку та її частки, зайняті відповідно



ламінариим та турбулентним прикордонним шарами, залежать від числа  $Re$  і степеня турбулентності  $Tu$  [1]



1 – ламинарний підшар;  
2 – турбулентне ядро.

**Рисунок 2.9 – Розподіл швидкості по перерізу труби при ламинарній (а) та турбулентній течії (б) рідини**

$$Tu = \sqrt{2 \cdot E / 3w_0^2} = \frac{1}{w_0} \sqrt{\frac{1}{3}(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)}$$

тут  $E$  – кінетична енергія турбулентної течії для одиниці маси рідини, характеризує швидкість процесу, наприклад швидкість потоку, що набігає;  $w_x, w_y, w_z$  – пульсаційні складові швидкості в будь-якій точці (гранично малій області турбулентного потоку) потоку на вході та інших факторів, багато з яких між собою взаємозв'язані.

При ламинарному ізотермічному рухові рідини і стабілізованому потокові ( $x > l_n$ ), швидкості по перерізу труби розподіляються за параболою (рисунок 2.9.б):

$$w_x = w_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad (2.67)$$

де  $w_{\max}$  – швидкість потоку на осі труби (при  $r=0$ ). Середня швидкість потоку  $\bar{w}_x = 0.5w_{\max}$ . При турбулентній течії біля стінки труби утворюється в'язкий підшар рідини, де режим течії ламинарний. При великих числах  $Re$  товщина цього підшару дуже мала в порівнянні з діаметром труби, але для малотеплопровідних рідин в'язкий підшар є основним термічним опором [1]. Розподіл швидкості по поперечному перерізу труби при стабілізованому режимові руху рідини має вид зрізаної параболи з максимумом швидкості на осі труби (рисунок 2.9.а). Змінюється швидкість потоку найбільш інтенсивно поблизу стінки. В турбулентній частині потоку розподіл швидкості описується логарифмічним законом [1]:

$$\frac{\bar{w}_x}{w_*} = \frac{1}{\chi} \ln y_* + \eta, \quad (2.68)$$

де  $w_x$  - середня швидкість потоку;  $w_* = \sqrt{\tau_c/\rho}$  - динамічна швидкість потоку;  $\tau_c$  - дотична напруга в рідині на межі стінки труби;  $\rho$  - густина рідини, тут прийнято, що  $\tau_c/\rho = \text{const}$  та сталість дотичної напруги по координаті  $r \equiv y$ );  $y_* = w_* \cdot y/\nu$ ;  $y = r_0 - r$ ;  $\nu$  - кінематична в'язкість рідини;  $\eta = \frac{w_m}{w_*} - \frac{1}{\chi} \ln \frac{w_m}{w_*}$ ;  $w_m$  - швидкість потоку на зовнішній межі в'язкого підшару;  $\chi$  - безрозмірний коефіцієнт зв'язку між масштабом турбулентності (деякий середній розмір мас рідини, що турбулентно переміщуються) та координатою  $y$ . Експериментальними дослідженнями виявлено, що [1]: для турбулентного ядра ( $y_* \geq 30$ )  $\chi = 0.4$  та  $\eta = 5.5$ ; для проміжної між турбулентним ядром та в'язким підшаром області ( $y_* \approx 5 \dots 30$ )  $\chi = 0.2$  та  $\eta = 3.05$ . В межах в'язкого підшару приймають лінійний закон зміння швидкості:  $\frac{\bar{w}_x}{w_*} = y_*$  або  $\bar{w}_x = \frac{\tau_c}{\mu} y$  (тут  $\mu = \nu \cdot \rho$  - динамічна в'язкість рідини).

При рухові рідини по трубі, температура якої відрізняється від температури рідини, має місце прогрівання чи охолодження рідини в шарах поблизу стінки. На початку труби (рисунок 2.10) ядро рідини має температуру, рівну температурі на вході. Це ядро в теплообміні участі не бере і всі зміни температури зосереджуються в шарі рідини біля стінки труби, тобто біля поверхні труби в початковій її частині утворюється

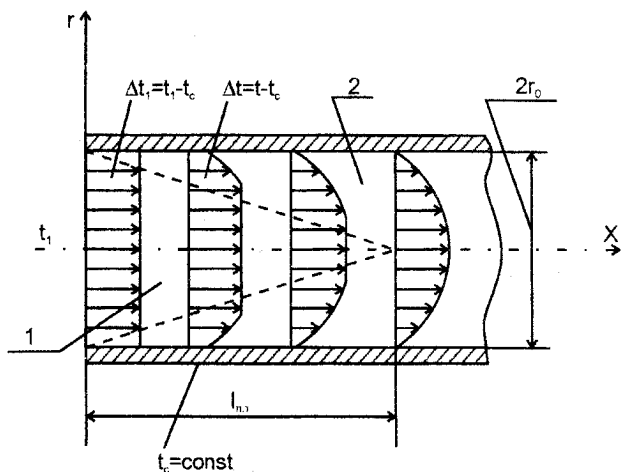


Рисунок 2.10 – Зміння розподілу температури при русі рідини в трубі

тепловий прикордонний шар. При збільшенні відстані від входу в трубу товщина прикордонного шару збільшується і на деякій відстані  $l_{пт}$  тепловий прикордонний шар заповнює весь переріз труби. При  $x > l_{пт}$  вся рідина в трубі бере участь в теплообміні, причому інтенсивність теплообміну вже не залежить від розподілу швидкості і температури на вході. Ділянку труби довжиною  $l_{пт}$  називають початковою тепловою ділянкою або ділянкою термічної стабілізації потоку. Якщо при  $x > l_{пт}$  закон задання межових умов на стінці не змінюється, то такий теплообмін називають стабілізованим. На відміну від епюр швидкості (див. рисунок 2.8) епюри температури при  $x > l_{пт}$  навіть у випадку постійних фізичних властивостей рідини незмінними не залишаються. Якщо межові умови можуть суттєво змінюватись, то може виникнути ефект формування нового прикордонного шару, наприклад при різкому збільшенні теплового навантаження, або збуренні потоку якою-небудь місцевою перешкодою.

Довжина початкової теплової ділянки залежить від великої кількості факторів: коефіцієнта теплопровідності рідини, наявності гідродинамічної стабілізації потоку, числа Рейнольдса, розподілу температур на вході та т.п. Як показує теорія, при ламінарній гідродинамічно стабілізованій течії рідини з постійними фізичними параметрами і однорідною температурою  $t_1$  на вході в трубу (див. рисунок 2.10) при  $t_c = \text{const} - l_{пт}/d = 0.055Pe$ ;  $q_c$

$= \text{const} - l_{пт}/d = 0.07Pe$ , де  $Pe = \frac{w_0 d}{a}$  - число Пекле;  $a = \lambda/(c_p \rho)$  - коефіцієнт температуропровідності рідини.

Для газів при ламінарному рухові потоку ( $Pr \approx 1$ ,  $Re \approx 2000$ ,  $Pe = Re \cdot Pr$ ) розрахункова довжина ділянки термічної стабілізації досягає приблизно ста діаметрів труби. При ламінарній течії дуже в'язких рідин ( $Pr > 1$ ) значення  $l_{пт}$  змінюється від декількох сотень діаметрів до декількох тисяч [1], а це значить, що теплообмін практично завжди проходить в межах початкової ділянки. При турбулентному режимі течії за багаточисельними дослідними даними [1]  $l_{пт} = (10 \dots 15)d$ .

## 2.6.2 Інтегральне рівняння тепловіддачі для стабілізованого теплообміну в прямій круглій трубі

Для спрощення розв'язку задачі приймемо такі допущення: рідина нестислива і має постійні фізичні параметри; теплою, що виділяється при терті нехтуємо; внутрішні джерела теплоти відсутні; передача теплоти в радіальному напрямку труби на багато більша, ніж в осьовому, тобто

$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0$ ; складова швидкості потоку в радіальному напрямку рівна нулю

( $w_r = 0$ ). При врахуванні тієї обставини, що в турбулентному потокові теплога переноситься не тільки теплопровідністю, але і шляхом

турбулентних пульсацій [1], рівняння енергії в циліндричних координатах матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda + \lambda_T \frac{\partial t}{\partial r} \right] = \rho c_p w_x r \frac{\partial t}{\partial x}, \quad (2.69)$$

де  $\lambda_T = \rho c_p \varepsilon_q$  - коефіцієнт турбулентного переносу теплоти;  $\varepsilon_q$  - кінематичний коефіцієнт турбулентного переносу теплоти (величина аналогічна коефіцієнту температуропровідності  $a$ , має таку ж розмірність,  $m^2/s$ );  $t$  і  $w_x$  - осереднені за часом місцеві значення температури та швидкості турбулентного потоку.

Приймаємо межові умови  $q_c = \text{const}$ . При постійному коефіцієнті тепловіддачі  $\alpha = \text{const}$   $q_c / \alpha = t_c - t_p = \text{const}$ , де  $t_p$  - середньомасова температура рідини в розглядуваному перерізі труби. Як показано в праці [1] при незмінних фізичних властивостях рідини місцева температура рідини змінюється вздовж труби за лінійним законом, причому

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{2q_c}{\rho c_p \bar{w}_x r_0} = \text{const}, \quad (2.70)$$

де  $\bar{w}_x$  - середня швидкість потоку в розглядуваному перерізі труби  $d = 2r_0$ .

Підставляючи (2.70) в (2.69), отримаємо

$$\frac{d}{dr} \left[ (\lambda + \lambda_T) r \frac{dt}{dr} \right] = 2q_c \cdot \frac{w_x r}{\bar{w}_x r_0} \quad (2.71)$$

або в безрозмірній формі

$$\frac{d}{dR} \left[ (\lambda + \lambda_T) R \frac{dt}{dR} \right] = 2q_c \cdot r_0 W_x R, \quad (2.72)$$

де  $W_x = w_x / \bar{w}_x$ ,  $R = r / r_0$  - відповідно безрозмірні швидкість та радіус.

Розділюючи в рівнянні (2.72) змінні та інтегруючи його в межах від 0 до  $R$  та від 0 до  $(\lambda + \lambda_T) R dt/dR$ , знайдемо

$$\frac{dt}{dR} = \frac{2q_c r_0}{(\lambda + \lambda_T) R} \int_0^R W_x R dR. \quad (2.73)$$

Середньомасову температуру рідини при  $c_p = \text{const}$  і  $\rho = \text{const}$  для круглої труби можна визначити за виразом [1]

$$t_p = t_c - 2 \int_0^1 \left( \int_0^R W_x R dR \right) dt. \quad (2.74)$$

Підставляючи в (2.74) значення  $dt$  з (2.73), отримаємо

$$t_p = t_c - \frac{4q_c r_0}{\lambda} \int_0^1 \frac{\left( \int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left( 1 + \frac{\lambda_T}{\lambda} \right) R} dR, \quad (2.75)$$

звідки

$$\frac{\lambda(t_c - t_p)}{2q_c r_0} = 2 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left( 1 + \frac{\lambda_T}{\lambda} \right) R} dR = 2 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left( 1 + \frac{Pr \varepsilon_s}{Pr_T \nu} \right) R} dR, \quad (2.76)$$

де  $Pr = \nu/a$ ;  $Pr_T = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_q}$  - турбулентне число Прандтля;  $\varepsilon_s = \mu_T/\rho$  -

кінематичний коефіцієнт турбулентного переносу кількості руху;  $\mu_T$  - коефіцієнт турбулентного переносу кількості руху;  $\lambda_T, \mu_T$  - не є фізичні параметри речовини, вони залежать від параметрів процесу і змінюються в розглядуваному просторі. Розглянемо більш детально ліву частину виразу (2.76), де згідно з законом Ньютона - Ріхмана  $(t_c - t_p)/q_c = 1/\alpha$ ;  $2r_0=d$ , тоді

$$\frac{\lambda(t_c - t_p)}{2q_c r_0} = \frac{\lambda}{(\alpha d)} = \frac{1}{Nu_d}. \quad (2.77)$$

Підставляючи в (2.76) (2.77), запишемо інтегральне рівняння тепловіддачі для стабілізованого теплообміну в трубі:

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left( 1 + \frac{Pr \varepsilon_s}{Pr_T \nu} \right) R} dR. \quad (2.78)$$

Рівняння (2.78) вперше було отримано Лайоном.

Для ламінарного режиму  $\lambda_T = 0$  і рівняння Лайона спрощується

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^1 \frac{dR}{R} \left( \int_0^R W_x R dR \right)^2. \quad (2.79)$$

При гідродинамічно стабілізованому ламінарному режимі руху рідини з незмінними фізичними властивостями [1]  $w_x = 2\bar{w}_x \left[ 1 - (r/r_0)^2 \right]$  або

$W_x = 2(1 - R^2)$ . Підставляючи це значення безрозмірної швидкості в (2.79), знайдемо

$$\frac{1}{Nu_\alpha} = 2 \int_0^1 dR \left[ \int_0^R 2(1 - R^2) R dR \right]^2 / R = 11/48,$$

звідки  $Nu_\alpha = 48/11 \approx 4,36$  при  $q_c = \text{const}$ .

При  $t_p = \text{const}$  теорія дає  $Nu_\alpha = 3,66$ . Змінність фізичних параметрів рідини приводить до значних розходжень теоретичних та дослідних результатів. Аналітичне врахування впливу цієї змінності вимагає дуже складної і трудомісткої праці, тому практичні розрахунки ведуть за допомогою емпіричних критеріальних залежностей, отриманих дослідним шляхом [1,2].

## 2.7 Особливості теплообміну при зміні агрегатного стану рідини

Теплові процеси, які супроводжують роботу технологічних машин, часто пов'язані із зміною агрегатного стану речовини, наприклад, охолодження інструментів, заготовок чи деталей при механічній обробці або виготовлення деталей машин виливанням. Найчастіше зустрічаються такі процеси як кипіння рідин та конденсація пари.

Кипіння - це процес інтенсивного пароутворення, яке проходить у всьому об'ємі рідини, перегрітої відносно температури насичення, і супроводжується утворенням парових бульбашок. Розрізняють види кипіння рідини на твердій поверхні теплообміну, до якої зовні підводиться теплота, та кипіння в об'ємі рідини. При кипінні рідини на твердій поверхні утворення парової фази спостерігається в окремих місцях цієї поверхні, а при об'ємному кипінні парова фаза виникає спонтанно безпосередньо в об'ємі рідини. Об'ємне кипіння можливе лише при значному перегріванні рідкої фази відносно температури насичення при даному тиску. Температура  $t_n$  насичення - це температура переходу речовини із рідкого стану в газоподібний або навіяки. Ця температура залежить від властивостей речовини і сильно залежить від тиску, наприклад, для води при атмосферному тиску  $t_n \approx 100^\circ \text{C}$ .

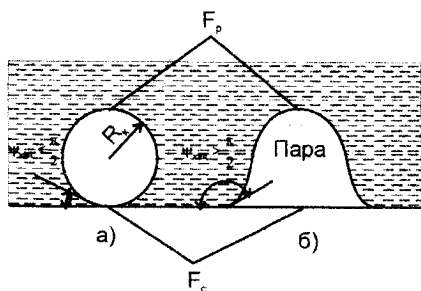
Механізм теплообміну при кипінні відрізняється від механізму тепловіддачі шляхом конвекції однофазної рідини наявністю додаткового переносу маси речовини та теплоти паровими бульбашками з прикордонного шару в об'єм киплячої рідини. Щоб виникнув процес кипіння необхідно мати перегріту рідину та центри пароутворення. Максимальне перегрівання рідини має місце безпосередньо біля гарячої поверхні теплообміну, на якій знаходяться центри пароутворення у вигляді окремих нерівностей стінки, бульбашок повітря, пилинок та т.п.

Є два основних режими кипіння: бульбашковий та плівковий. При бульбашковому режимі пара утворюється у вигляді окремих бульбашок, які періодично зароджуються, ростуть і відриваються від поверхні. При зростанні теплового потоку до деякого значення окремі бульбашки зливаються і утворюють біля поверхні теплообміну суцільний паровий шар, який періодично проривається в об'єм рідини. Наявність на поверхні тіла теплообміну плівки пари, що відділяє цю поверхню від рідини, характеризує плівковий режим кипіння [1]. Інтенсивність тепловіддачі при плівковому режимі кипіння значно менша, ніж при бульбашковому. Інтенсивність бульбашкового режиму кипіння визначається режимами та мікрохарактеристиками кипіння - це критичний радіус бульбашки  $R_k$ ; швидкість росту, відривний діаметр та частота відриву бульбашок. Критичний радіус бульбашки визначається за умовами термодинамічної та механічної рівноваги парової та рідкої фаз [1]:

$$R_k = 2\sigma \cdot t_n / [r \cdot \rho_n (t_c - t_n)], \quad (2.80)$$

де  $\sigma$  - коефіцієнт поверхневого натягіння на межі пара - рідина, Н/м;  $\rho_n$  - густина пари, кг/м<sup>3</sup>;  $r$  - теплота фазового переходу рідини в пару, Дж/кг. У формі залежності (2.80) величина  $R_k$  характеризує радіус кривизни зовнішньої поверхні бульбашок, що зароджуються на поверхні теплообміну, одночасно ця величина визначає порядок розмірів тих елементів шорсткості, які при даних умовах (тиску, перегрівання та т.д.) можуть служити центрами пароутворення. При збільшенні перегрівання рідини при заданому тиску і навпаки, при заданому перегріванні і збільшенні тиску мінімальний радіус  $R_k$  зменшується, що приводить до збільшення загального числа діючих центрів пароутворення, інтенсивного перемішування рідини в прикордонному шарі і зростання тепловіддачі.

Після зародження бульбашок на центрах кипіння радіусом  $R \geq R_k$  починається ріст бульбашок пари за рахунок підведення до них теплоти шляхом теплопровідності з навколишнього шару перегрітої рідини через міжфазну поверхню  $F_p$  і поверхню під бульбашкою  $F_c$  в її основі (рисунок 2.11 а,б). Підведена до бульбашки теплота іде на випаровування рідини і роботу розширю-



$\psi_{\text{кип}}$  - межовий кут змочування при кипінні.

**Рисунок 2.11 – Форма парових бульбашок при кипінні рідини при гарному (б) і поганому (а) змочуванні поверхні**

вання. Швидкість зростання бульбашок залежить від інтенсивності підведення теплоти обома складовими теплового потоку. Інтенсивність теплообміну при кипінні характеризується числом Якоба

$$Ja = c_p \Delta t_p / (g_{p,n}), \quad (2.81)$$

де  $\rho_p$  - густина рідини;  $\Delta t = t_p - t_n = t_c - t_n$ .

Число Якоба характеризує співвідношення між тепловим потоком, що іде на перегрівання одиниці об'єму рідини, та об'ємного теплового пароутворення. Це число залежить від тиску та ступеня перегрівання рідини. При підвищенні тиску число Якоба зменшується, так як суттєво збільшується густина пари. При збільшенні перегрівання рідини це число зростає.

В загальному випадку, коли теплота до бульбашок підходить через поверхні  $F_p$  і  $F_c$  в приблизно співмірній пропорції, швидкість росту парової бульбашки виражається рівнянням [1]

$$\frac{dR}{d\tau} = \beta \frac{a}{R} Ja \cdot \varphi(Ja), \quad (2.82)$$

де  $a$  - коефіцієнт температуропровідності рідкої фази;  $\beta=6$  - постійна величина;  $\varphi(Ja) = 1 + \gamma \cdot Ja / \beta + \gamma \sqrt{2\beta \cdot Ja + (\gamma \cdot Ja)^2} / \beta$ ;  $\gamma=0,1 \dots 0,49$  при  $\psi_{\text{кин}}=40 \dots 90^\circ$  - геометричний фактор.

В момент відриву від поверхні теплообміну бульбашки суттєво деформуються. Відривний діаметр  $d_0$  бульбашки може визначатися за залежністю [1]:

$$d_0 = 0.0208 \psi_{\text{кин}} \sqrt{\sigma/g \cdot (\rho_p - \rho_n)}, \quad (2.83)$$

де  $\psi_{\text{кин}}$  - межовий кут в градусах;  $d_0$  - в метрах.

Для розрахунку тепловіддачі при кипінні використовують критеріальні рівняння типу [2]

$$Nu_* = C \cdot Re^m \cdot Pr^n, \quad (2.84)$$

де  $Nu_* = \alpha_k l_* / \lambda_p$ ;  $Re_* = w_k l_* / \nu_p$ ;  $Pr_* = \frac{\nu_p}{W_R}$ ;  $\lambda_p, \nu_p, W_R$  - фізичні параметри рідини при температурі  $t_n$ ;  $w_k$  - умовна швидкість кипіння пари ( $w_k = q / (g_{p,n}) = \alpha_k \Delta t / (g_{p,n})$ ), тут  $q$  - густина потоку тепловіддачі в рідину;  $\alpha_k$  - коефіцієнт тепловіддачі при кипінні);  $C = \text{const}$ ;  $m = \text{const}$ ;  $n = \text{const}$  - експериментальні постійні.

Механізм та інтенсивність кипіння протягом часу проходження цього процесу суттєво змінюються. Її зміни названі кризами кипіння [1,2].



Перша криза кипіння виникає на початку переходу бульбашкового кипіння в плівкове. В момент зміни режимів кипіння спостерігається різке зниження максимальної тепловіддачі і відповідно підвищення температури поверхні теплообміну, яке інколи може супроводжуватися розплавленням або перепаленням поверхні теплообміну.

Коефіцієнт тепловіддачі в момент початку кризи

$$\alpha_{кр} = q_{кр1} / \Delta t_{кр1},$$

де  $q_{кр1}$  - перша критична густина теплового потоку;  $\Delta t_{кр1}$  - перший критичний температурний напір.

Зворотній перехід від плівкового режиму кипіння до бульбашкового називається другою кризою кипіння. При руйнуванні парової плівки тепловіддача різко зростає, а температура поверхні знижується. Ця криза характеризується густиною  $q_{кр2}$  та температурним напором  $\Delta t_{кр2}$ . Критична зведена швидкість пароутворення при другій кризі  $W_{кр2} = q_{кр2} / (gr_{п})$  пропорційна швидкості спливання великих деформованих бульбашок пари:

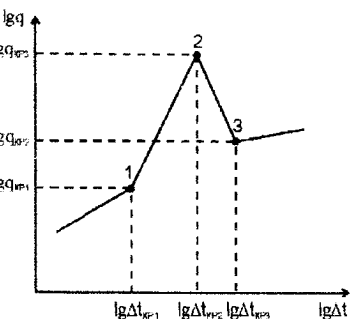
$$q_{кр2} / (gr_{п}) = \sqrt[4]{\sigma_{д} \cdot g \cdot (\rho_{п} - \rho_{р})} / \rho_{р}^2. \quad (2.86)$$

Безпосередній перехід однофазної конвекції до плівкового режиму кипіння, минаючи стадію бульбашкового кипіння, називається третьою кризою кипіння, якій відповідає густина потоку  $q_{кр3}$  і температурний напір  $\Delta t_{кр3}$ . Графічно процес кипіння можна проілюструвати кривою в

логарифмічній системі координат, що зображена на рисунку 2.12. Критичні густини теплового потоку при кризах кипіння між собою зв'язані нерівністю  $q_{кр1} < q_{кр2} < q_{кр3}$ .

З особливостями теплообміну при кипінні більш детально можна ознайомитись за працями [1,2].

Конденсація - це процес переходу пари (газу) в рідкий або твердий стан (фазовий перехід першого роду). В якійсь мірі конденсацію можна вважати процесом протилежним кипінню. Процес конденсації можливий тільки при докритичних станах газу (пари).



**Рисунок 2.12 – Ілюстрація криз кипіння**

Цей процес здійснюється шляхом охолодження пари або в результаті

такого стискування коли, при досягнутих значеннях температури і тиску, конденсована фаза термодинамічно більш стійка ніж газоподібна.

Якщо при цьому температура та тиск більші значень, що відповідають трійній точці [4] для деякої речовини, то утворюється конденсована фаза, а коли менші - то пара переходить в твердий стан.

Коли рідка конденсована фаза утворюється на твердій поверхні теплообміну у вигляді стійкої плівки, то конденсація називається плівковою, а коли утворюються краплі - то крапельною. Плівкова конденсація має місце при змочуванні конденсатом поверхні теплообміну, а крапельна при не змочуванні. Перегріта пара конденсується на поверхні теплообміну тоді, коли температура поверхні менше температури насичення  $t_n$  при даному тиску.

При крапельній конденсації тепловіддача може бути значно більша, ніж при плівковій. Це пояснюється тим, що плівка конденсата є великим термічним опором передачі теплоти фазового переходу від поверхні конденсації до стінки. Внаслідок розриву плівки при крапельній конденсації цей опір значно менший.

Термічний опір  $R_{\Sigma}$  передачі теплоти від пари до стінки можна представити у вигляді суми двох складових [1]:

$$R_{\Sigma} = \frac{t_n - t_c}{q} = \frac{1}{\alpha} = R_{\text{кон}} + R_{\phi}, \quad (2.87)$$

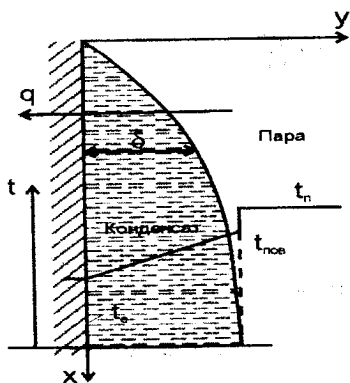


Рисунок 2.13 – Характер розподілу температури при плівковій конденсації чистої насиченої пари

де  $t_n$  та  $t_c$  - температура пари і поверхні стінки (рисунок 2.13);  $q$  - густина теплового потоку;  $\alpha$  - коефіцієнт тепловіддачі від пари до стінки;  $R_{\text{кон}}$  - термічний опір плівки конденсата;  $R_{\phi}$  - міжфазний термічний опір (опір на межі розділення фаз). Опір  $R_{\phi}$  не є термічним опором у звичайному розумінні. Поява цього опору обумовлена стрибком температури на межі розділу парової та рідкої фази.

Стрибок температур має наступну фізичну природу. Конденсація, яку ми спостерігаємо, є підсумковим ефектом конденсації сукупності молекул, які стикаються з поверхнею тіла і захоплюються нею та випаровуванням молекул, що відриваються від

тієї ж поверхні за той же час. Переважання кількості захоплених молекул в

порівнянні з кількістю тих, що випаровувались і є конденсацією, що спостерігається. Внаслідок цих двох процесів в поверхневому шарі пари товщиною, що має порядок середньої довжини вільного пробігу молекули, рухається два нерівних потоки молекул, що мають різну температуру (енергію).

Цей шар називають кнудсеновським [1]. Температура пари в цьому шарі в середньому відрізняється від температури поверхні рідини.

Перепад температур в такому тонкому шарі в теорії суцільних середовищ сприймається як стрибок. За межами цього шару внаслідок співударів молекул температура вирівнюється. Чим більше молекул, які падають на рідину і відбиваються не конденсуючись, тим більший стрибок

температур. Це враховується коефіцієнтом конденсації  $k_k = \frac{n_1}{n_2}$ , де  $n_1$  - число захоплених молекул,  $n_2$  - загальна кількість молекул, що стикнулись з поверхнею конденсата ( $0 \leq k_k \leq 1$  [1]).

Підсумковий потік  $j$  пари, віднесений до одиниці поверхні, визначають за рівнянням Герца-Кнудсена [1]:

$$j = \frac{k_k}{\sqrt{2\pi R_n}} \cdot \left( \frac{p_n}{\sqrt{t_n}} - \frac{p_{пов}}{\sqrt{t_{пов}}} \right), \quad (2.88)$$

де  $R_n$  - газова постійна пари;  $t_n, t_{пов}$  - відповідно температури пари і поверхні конденсата;  $p_n, p_{пов}$  - тиск насиченої пари відповідно при температурах  $t_n, t_{пов}$ ;  $\rho_n = p_n / (R_n t_n)$ ;  $\rho_{пов} = p_{пов} / (R_n t_{пов})$ ; - густина пари при  $t_n$  та  $t_{пов}$ .

Міжфазний термічний опір знаходять за формулою [1]:

$$R_\phi = \frac{t_n - t_{пов}}{q}, \quad (2.89)$$

де  $q = \tau j$ ;  $\tau$  - теплота фазового переходу.

Більш детальні відомості про явище конденсації та особливості теплових процесів при конденсації можна знайти в працях [1,2].

## 2.8 Основні поняття та закони тепло- та масообміну в двокомпонентних середовищах

Багато процесів в природі та техніці супроводжуються переносом маси одного компонента відносно маси іншого. Компонентами [1] називають речовини, найменше число яких достатнє для утворення всіх фаз, тобто гомогенних частин розглядуваної системи, наприклад суміш води, водяної пари та азоту.

В цій системі є два компонента: водяна пара та азот. Для спрощення

наступних міркувань приймемо допущення, що компоненти між собою в хімічну взаємодію не вступають.

Типовим процесом масообміну є дифузія - самовільний процес установалення в середині фаз рівноважного розподілення концентрацій. В середовищі однорідному за температурами та тисками суміші процес дифузії направлений до вирівнювання концентрації в системі. При дифузії здійснюється перенос речовини з області з більшою в область з меншою концентрацією.

Аналогічно теплообміну дифузія може проходити молекулярним (мікроскопічним) або молярним (макроскопічним) шляхом. В газах молекулярна дифузія здійснюється за рахунок теплового руху молекул.

За аналогією з теплообміном визначають густину потоку маси

$$j = \frac{dI}{dF}, \quad (2.90)$$

де  $I$  - потік маси речовини, кг/с;  $F$  - площа через яку проходить потік маси, паралельно до напрямку потоку. Густина потоку є вектором. Повний потік маси знаходять інтегруванням виразу (2.90):

$$I = \int_F j dF, \quad (2.91)$$

або при  $j = \text{const}$

$$I = jF. \quad (2.92)$$

В однорідній за температурою та тиском макроскопічно нерухомій двокомпонентній суміші густина потоку маси одного з компонентів за рахунок молекулярної дифузії визначається законом Фіка [1]:

$$j_{k,n} = -D \frac{\partial p_i}{\partial n}, \quad (2.93)$$

або

$$j_{k,n} = -\rho D \frac{\partial m_i}{\partial n}, \quad (2.94)$$

де  $p_i$  - кінцева концентрація даної речовини (компонента), яка є відношенням маси компонента до об'єму сумішей кг/м<sup>3</sup>;  $m_i = p_i/\rho$  - відносна масова концентрація  $i$ -го компонента;  $\rho$  - густина суміші;  $D$  - коефіцієнт молекулярної дифузії (коротко- коефіцієнт дифузії) одного компонента відносно другого, м<sup>2</sup>/с;  $n$  - напрямок до поверхні однакової концентрації даної речовини;  $\partial p_i/\partial n$ ,  $\partial m_i/\partial n$  - градієнти концентрації (відносної концентрації), які завжди направлені в сторону зростання концентрації. Градієнт концентрації (за аналогією з градієнтом температури) є рухомою

силою, що обумовлює перенос речовини. Знак "мінус" показує, що переміщення речовини здійснюється в сторону зменшення градієнта концентрації. Дифузія, що описується законом Фіка, називається концентраційною дифузією.

Згідно з кінетичною теорією газів, коефіцієнт дифузії зростає при збільшенні температури і зменшується при рості тиску. Для суміші газів закон Фіка можна записати у формі [1]:

$$J_{к.л.} = -D \frac{\partial p_i}{\partial n}, \quad (2.95)$$

де  $p_i$  - місцевий парціальний тиск даного компонента, Па;  $n$  - напрямком нормалі до поверхні однакових парціальних тисків даного компонента;  $D_p = D/RT$  - коефіцієнт молекулярної дифузії, віднесений до градієнта парціального тиску розглядуваного компонента, с;  $R$  - газова стала;  $T$  - термодинамічна температура.

На відміну від  $D$  коефіцієнт  $D_p$  є різним для компонентів даної бінарної суміші, для якої використовується рівність:

$$D = D_{p1} R_1 T = D_{p2} R_2 T, \quad (2.96)$$

звідки

$$\frac{D_{p1}}{D_{p2}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{M_1}{M_2}, \quad (2.97)$$

де  $M_i$  - молекулярна маса компонента;  $i=1,2$ .

При змінній температурі суміші виникає термічна дифузія (ефект Соре [1]). Якщо маси молекул двох компонентів різні, то, згідно з кінетичною теорією газів, за рахунок термодифузії більш важкі молекули більшою частиною намагаються перейти в більш холодні області. Якщо ж маси молекул однакові, то в холодні області прямують більш крупні за розмірами молекули, але слід відмітити, що при певних умовах (наприклад в іонізованому газі) цей напрямок термодифузії може змінитися.

Термодифузія приводить до утворення градієнта концентрації, а цьому протирічить процес концентраційної дифузії, який намагається вирівняти склад суміші. Як наслідок, з часом може установитися стаціонарний стан, при якому протилежні впливи термодифузії та концентраційної дифузії зрівноважуються.

Наслідком молекулярного дифузійного переносу теплоти є так званий дифузійний термoeфект (ефект Дюфо [1]) - явище виникнення різниці температур в результаті дифузійного переміщення двох газів, які спочатку мали однакову температуру. Явище дифузійного ефекту є зворотним по відношенню до термодифузії. Градієнт температури, що виникає при

дифузійному термоелекту, має такий же напрям що і термодифузія, яка є його результатом, а саме термодифузія протилежна дифузії, завдяки якій цей градієнт з'явився.

При наявності в суміші газів градієнта повного тиску може виникнути дифузія за рахунок неоднорідності тиску, яку називають бародифузією [1]. При цьому виді дифузії, великі молекули намагаються перейти в область підвищеного, а легкі - в область пониженого тиску. Також як і термодифузія, бародифузія супроводжується звичайним переносом маси, обумовленим різницею концентрації. Бародифузія має місце, наприклад, в газі, що обертається навколо осі; важкі молекули намагаються перейти в області, найбільш віддалені від центру.

Густина потоку маси і-го компонента за рахунок молекулярного переносу з урахуванням концентраційної дифузії, термодифузії і бародифузії, описується рівнянням [1]:

$$\vec{j}_{m,i} = -\rho \left( D \nabla m_i + \frac{D_T}{T} \nabla t + \frac{D_6}{p} \nabla p \right), \quad (2.98)$$

де  $D_T = k_T D$  - коефіцієнт термодифузії  $m^2/c$ ;  $D_6 = k_6 D$  - коефіцієнт бародифузії  $m^2/c$ ;  $p$  - тиск суміші, Па. В рівнянні (2.98) в дужках перший член враховує концентраційну дифузію, другий - термодифузію і третій - бародифузію. Складові потоку маси нормальні до поверхні рівних концентрацій, ізотермічної та ізобарної поверхонь. Закон (2.98) при  $\text{grad} \nabla p = 0$  і  $\text{grad} \nabla t = 0$  переходить в закон Фіка. Коефіцієнти  $k_T = D_T/D$  та  $k_6 = D_6/D$  називаються, відповідно термодифузійним та бародифузійним відношеннями. Для суміші газів  $k_T \leq 0,1$  [1]. Бародифузійне відношення для бінарної суміші знаходиться за виразом [1]

$$k_T = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \frac{M_2 - M_1}{M}, \quad (2.99)$$

де  $\rho_1, \rho_2, \rho$  - відповідно, густини компонентів і суміші;  $M_1, M_2, M$  - відповідно, молекулярні маси компонентів та суміші.

В рухомому середовищі речовина переноситься не тільки молекулярною дифузією, але й конвекцією. Сумарна густина потоку  $j$  речовини за рахунок молекулярного і конвективного  $j_{ki}$  переносу визначається рівнянням [1]:

$$\vec{j} = \vec{j}_{m,i} + \vec{j}_k = -\rho \left( D m_i + \frac{D_T}{T} \nabla t + \frac{D_6}{p} \nabla p \right) + \rho_i \vec{w}. \quad (2.100)$$

Оскільки разом з масою речовини переноситься і ентальпія  $\sum j_i h_i$  (де  $h_i$  - питома ентальпія і-го компонента, Дж/кг), то локальну густину

теплого потоку, що переноситься в суміші, можна представити рівнянням [1]:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{w} h + \sum_{m,li} \vec{j}_{m,li} h_i. \quad (2.101)$$

В порівнянні з однокомпонентною рухомою рідиною (див.(2.4)) в суміші теплота додатково переноситься дифузійною складовою теплового потоку.

За аналогією з конвективним переносом теплоти в однокомпонентній рідині тепло та масообмін описується системою диференціальних рівнянь масообміну, енергії, руху та суцільності потоку, записаних для суміші вцілому.

Рівняння масообміну та енергії для бінарної суміші виводяться за методикою, яка нами використовувалась при вивченні явищ теплопровідності та конвекції, і мають вигляд [1]:

$$\frac{dm_i}{dt} = D \nabla^2 m_i - \text{рівняння масообміну}; \quad (2.102)$$

$$\rho c_p \frac{dt}{dt} = \lambda \nabla^2 t + (c_{p1} - c_{p2}) \rho D \nabla m_i \nabla t - \text{рівняння енергії}. \quad (2.103)$$

Для кінцевого формулювання краєвої задачі тепло - та масообміну до системи рівнянь, що описує цей процес, ще додають умови однозначності.

Обсяг посібника не дозволяє детально зупинитись на питаннях тепло та масообміну. Більш глибоко з цим питанням можна ознайомитись за працею [1].

### 3 ТЕПЛОБМІН ВИПРОМІНЮВАННЯМ

Процеси променевого теплообміну широко розповсюджені в різних галузях техніки: теплотехніці, ядерній енергетиці, ракетній техніці, металургії, світлотехніці, хімічній технології тощо.

Теплообмін випромінюванням - це процес розповсюдження теплоти шляхом електромагнітних хвиль. Теплова енергія, яка переноситься електромагнітними хвилями при поглинанні цих хвиль іншими тілами знову перетворюється в енергію теплового руху молекул або атомів. Збудниками електромагнітних хвиль є заряджені частинки: електрони, іони, протони тощо. Ці частинки входять як структурні елементи в склад речовини. Електромагнітні коливання низької частоти відповідають коливанням іонів, а випромінювання, що обумовлюється рухом електронів, може мати високу частоту, якщо ці електрони входять в склад атомів та молекул і утримуються біля свого стану рівноваги значними силами.

В міжвузлях кристалевої ґратки металів електрони рухаються вільно і їх гальмування нерегулярне. Внаслідок цього електромагнітне випромінювання металів має характер імпульсів, частота хвиль яких може бути різною, в тому числі і низькою. Будь-яке випромінювання має подвійну природу - корпускулярно-хвильову.

Корпускулярність випромінювання проявляється в тому, що променева енергія розповсюджується та поглинається не безперервно, а окремими дискретними порціями - квантами або фотонами. На цій підставі теплове випромінювання можна розглядати як фотонний газ.

Синтезом хвильових і корпускулярних властивостей є твердження, що енергія та імпульси випромінювання зосереджені у фотонах, а ймовірність знаходження в тому або іншому місці простору - в хвилях.

Електромагнітне випромінювання має дуже широкий діапазон довжин хвиль від  $\lambda = 5 \cdot 10^{-14}$  м (космічні промені) до  $\lambda > 2 \cdot 10^4$  м (радіохвилі) і однакову фізичну природу у всьому діапазоні. Кількісна різниця в довжині хвилі є причиною того, що корпускулярні властивості більш чітко проявляються в короткохвильовому випромінюванні, а хвильові - в довгохвильовому.

Тепловому випромінюванню (інфрачервоне випромінювання) відповідає частина електромагнітного спектра з довжиною хвилі  $\lambda = 8 \cdot 10^{-7} \dots 8 \cdot 10^{-4}$  м.

Випромінювання твердих та рідких тіл, як правило, мають суцільний (безперервний) спектр ( $\lambda = 0 \dots \infty$ ). Виключення з цього правила - метали з полірованою поверхнею, які мають селективний (переривистий) спектр випромінювання. Такий же спектр мають гази та пари. Інтенсивність випромінювання залежить від природи тіла, його температури, довжини хвилі і стану поверхні тіла, а для газів - додатково від товщини шару і тиску. Тверді та рідкі тіла мають значні поглинальну та випромінювальну



здатності, внаслідок чого в променевому теплообміні беруть участь лише поверхневі шари: для теплоізоляторів товщина цього шару близько 1 мм, а для провідників теплоти близько  $10^{-3}$  мм [1]. Мала товщина поверхневого шару тіла, що бере участь в променевому теплообміні, дозволяє розглядати теплообмін випромінюванням як поверхневе явище. Гази, пари, напівпрозорі тіла (скло, кварц, оптична кераміка тощо) характеризуються об'ємним процесом випромінювання в якому беруть участь всі частинки об'єму речовини.

При зростанні температури інтенсивність випромінювання збільшується, оскільки збільшується внутрішня енергія тіла, при цьому змінюється також і спектральний склад випромінювання, яке зміщується в бік короткохвильового випромінювання. При високих температурах основним видом теплопереносу є випромінювання, оскільки залежність від температури інтенсивності теплового потоку в процесах випромінювання значно більша, ніж при теплопровідності та конвекції.

У вакуумі електромагнітні хвилі розповсюджуються із швидкістю світла  $c=2.9979 \cdot 10^8$  м/с ( $c=(\epsilon_0\mu_0)^{-0,5}$ , тут  $\epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м - абсолютна діелектрична проникність вакуума, а  $\mu_0=1,257 \cdot 10^{-6}$  Гн/м - абсолютна магнітна проникність). Квант електромагнітного поля – фотон має масу спокою  $m_0=0$ , а його релятивістська маса залежить від частоти коливання електромагнітного поля:  $m_\phi=h\nu/c^2=h/(c\lambda)$ , де  $h=6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с - постійна Планка,  $\nu=c/\lambda$  - частота, Гц.

В цьому розділі будуть розглядатися тільки основні закони теплового випромінювання та основні параметри променевих потоків.

Питання теплообміну випромінюванням між твердими тілами, розділеними прозорим середовищем, а також теплообмін в поглинальних і випромінювальних середовищах, виходять за межі спецкурсу фізики для спеціальностей "Технологія машинобудування" і "Металорізальні верстати та системи". Студенти, які бажають більш глибоко ознайомитися з теоретичними та експериментальними дослідженнями променевого теплообміну можуть звернутися до праць [1, 8].

### 3.1 Види та параметри променевих потоків

Фізичні тіла випромінюють електромагнітну енергію у вигляді неперервного (суцільного) або переривистого спектру за довжинами хвиль. Якщо потік енергії, що випромінюється довільною поверхнею тіла в одиницю часу в усіх можливих напрямках напівпростору відповідає вузькому інтервалу довжин хвиль  $[\lambda, \lambda+d\lambda]$ , то він називається монохроматичним або однорідним спектральним, або однорідним випромінюванням  $Q_\lambda$ . Сумарне випромінювання з поверхні в усьому діапазоні хвиль електромагнітного спектру називається інтегральним або

повним потоком випромінювання  $Q$ . Між собою ці потоки зв'язані залежністю [1]:

$$Q = \int_0^{\infty} Q_{\lambda} \cdot d\lambda . \quad (3.1)$$

Для характеристики інтенсивності випромінювання використовують поняття поверхневої густини потоку [1]:

інтегрального випромінювання -

$$E = dQ/dF; \text{ Вт/м}^2 \quad (3.2)$$

спектрального випромінювання -

$$E_{\lambda} = \frac{dQ_{\lambda}}{dF} = dE/d\lambda , \text{ Вт/м}^3 \quad (3.3)$$

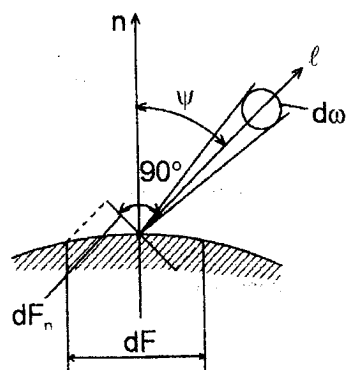
де  $dF$  - елементарна площадка ( $\text{м}^2$ ), що випромінює елементарний потік  $dQ$  (Вт), або  $dQ_{\lambda}$  (Вт/м). Поверхневі потоки зі всієї поверхні для інтегрального та спектрального випромінювання можна знайти із співвідношень (3.2) та (3.3):

$$Q = \int_F E \cdot dF ; \quad (3.4)$$

$$Q_{\lambda} = \int_F E_{\lambda} \cdot dF . \quad (3.5)$$

Поверхневі густини інтегрального та спектрального потоку в інтегральній формі зв'язані залежністю, аналогічною (3.1):

$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda} \cdot d\lambda . \quad (3.6)$$



**Рисунок 3.1 – До визначення яскравості випромінювання**

Густина потоку випромінювання змінюється за напрямком випромінювання. Кількість енергії випромінювання з одиниці елементарної площадки  $dF$  в напрямку  $l$ , що визначається кутом  $\psi$  з нормаллю  $n$  до поверхні (рисунок 3.1), за одиницю часу в межах одиничного тілесного кута  $d\omega$ , називається кутовою густиною випромінювання:

спектрального потоку -

$$I_{\psi\lambda} = \frac{d^2 Q_{\psi\lambda}}{dF \cdot d\omega} = \frac{dE_{\psi\lambda}}{d\omega}; \quad (3.7)$$

інтегрального потоку -

$$I_{\psi} = \frac{d^2 Q_{\psi}}{dF \cdot d\omega} = \frac{dE_{\psi}}{d\omega}, \quad (3.8)$$

де  $Q_{\psi\lambda}$ ,  $Q_{\psi}$  - відповідно променеві потоки спектрального та інтегрального випромінювання в напрямку  $l$ ;  $E_{\psi\lambda}$ ,  $E_{\psi}$  - поверхневі густоти спектрального та інтегрального потоків у напрямку  $l$ . Із співвідношень (3.7) та (3.8) випливає, що:

$$dE_{\psi\lambda} = I_{\psi\lambda} d\omega; \quad (3.9)$$

$$dE_{\psi} = I_{\psi} d\omega. \quad (3.10)$$

Якщо в (3.2) та (3.9) потоки спектрального та інтегрального випромінювання віднести до площадки  $dF_n$ , ортогональної до напрямку  $l$  ( $dF_n = dF \cdot \cos\psi$  - проекція площадки  $dF$ ), то отримаємо величини, які називаються інтенсивностями або яскравостями випромінювання:

спектрального потоку -

$$I_{\lambda} = \frac{d^2 Q_{\psi\lambda}}{dF_n \cdot d\omega} = \frac{d^2 Q_{\psi\lambda}}{dF \cdot \cos\psi \cdot d\omega} = \frac{I_{\psi\lambda}}{\cos\psi}, \quad \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}; \quad (3.11)$$

інтегрального потоку -

$$I_{\lambda} = \frac{d^2 Q_{\psi}}{dF_n \cdot d\omega} = \frac{d^2 Q_{\psi}}{dF \cdot \cos\psi \cdot d\omega} = \frac{I_{\psi}}{\cos\psi}, \quad \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}, \quad (3.12)$$

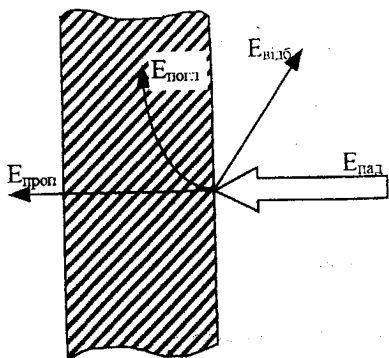
звідки

$$d^2 Q_{\psi\lambda} = I_{\lambda} \cdot d\omega \cdot \cos\psi \cdot dF; \quad (3.13)$$

$$d^2 Q_{\psi} = I \cdot d\omega \cdot \cos\psi \cdot dF. \quad (3.14)$$

Яскравості інтегрального та спектрального потоків між собою зв'язані співвідношенням

$$I = \int_0^{\infty} I_{\lambda} \cdot d\lambda. \quad (3.15)$$



**Рисунок 3.2 – Ілюстрація взаємодії потоку випромінювання, що падає, з поверхнею тіла**

Якщо інтенсивність випромінювання однакова в усіх напрямках, то таке випромінювання носить назву ізотропного [1]. Випромінювання, що визначається природою розглядуваного тіла та його температурою, називається власним випромінюванням. Якщо випромінювання виходить з поверхні твердого тіла, то воно називається ідеально-дифузійним випромінюванням.

В променевому теплообміні, як правило, беруть участь як мінімум два тіла. Енергія, що випромінюється одним тілом, може частково поглинатись,

відбиватись поверхнею іншого тіла або проходити крізь нього (рис. 3.2).

За законом збереження енергії густини потоку, що падає  $E_{пад}$ , відбитого  $E_{відб}$  поглинутого  $E_{погл}$  та пропущеного  $E_{проп}$  потоків зв'язані залежністю

$$E_{пад} = E_{погл} + E_{відб} + E_{проп}. \quad (3.16)$$

Густини поглинутого, відбитого та пропущеного потоків можна виразити як долі потоку, що падає:

$$E_{погл} = A \cdot E_{пад}; \quad (3.17)$$

$$E_{відб} = R \cdot E_{пад}; \quad (3.18)$$

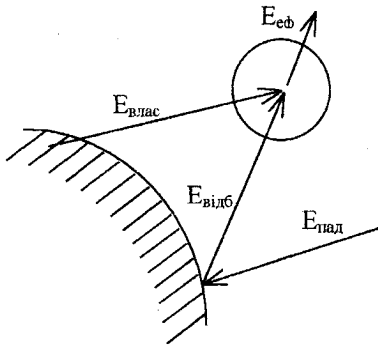
$$E_{проп} = D \cdot E_{пад}, \quad (3.19)$$

де  $A$ ,  $R$ ,  $D$  - відповідно коефіцієнти поглинання, відбивання та пропускання (прозорості), причому  $A+R+D=1$ , а значення коефіцієнтів лежать в межах від 0 до 1. Тіла у яких  $A=1$ , поглинають всю енергію, що падає на них називаються абсолютно чорними. Коефіцієнт  $A$  може бути спектральним ( $A_\lambda$ ) чи інтегральним  $A$ . Реальні тіла, у яких  $0 \leq A \leq 1$  та  $A_\lambda = \text{const} \leq 1$ , називаються сірими.

При значенні коефіцієнта відбивання  $R=1$  поверхня тіла називається дзеркальною або блискучою. Якщо відбивання енергії є ідеально дифузійним (ізотропним), то поверхня тіла називається абсолютно білою. Ця поверхня відбиває випромінювання рівномірно в усіх напрямках незалежно від напрямку випромінювання, що падає на поверхню.

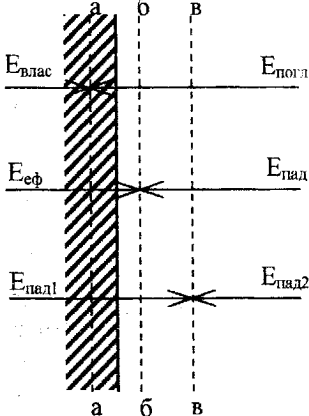
Тіла, які повністю пропускають потік ( $D=1$ ) енергії, що падає на них, називаються прозорими або діатермічними. Тонкі шари сухого повітря,

шари атомних газів можна вважати такими тілами. Тіла, у яких  $0 \leq D \leq 1$ , називаються напівпрозорими. До них відноситься скло, кварц, сапфір, алмаз тощо.



**Рисунок 3.3 – До визначення густини ефективного випромінювання**

теплообміну підсумковий потік можна знаходити різними способами [1]



**Рисунок 3.4 – До визначення підсумкового теплового потоку випромінювання**

поверхню в-в:

Сумарна густина потоків власного  $E_{\text{влас}}$  та відбитого  $E_{\text{відб}}$  випромінювання, що випускається поверхнею розглядуваного тіла, називається густиною ефективного випромінювання [1] (рисунок 3.3):

$$E_{\text{еф}} = E_{\text{влас}} + E_{\text{відб}} = E_{\text{влас}} + R \cdot E_{\text{пад}} \quad (3.20)$$

Променевий теплообмін між тілами визначається потоком підсумкового випромінювання  $q_{\text{рез}}$ , який є різницею між променевим потоком, що отримує розглядуване тіло ззовні, і променевим потоком, який це тіло посилає в навколишній простір. При дослідженні променевого теплообміну підсумковий потік можна знаходити різними способами [1] в залежності від розташування умовної розрахункової поверхні (рисунок 3.4):

1) Нуссельта - потік визначається за рівнянням теплового балансу відносно поверхні а-а, що розташована в середині тіла поблизу його поверхні при умові, що  $E_{\text{цроп}} = 0$ :

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{влас}} - E_{\text{пад1}} = E_{\text{влас}} - A \cdot E_{\text{пад}}; \quad (3.21)$$

2) О.Е.Власова - знаходиться за рівнянням теплового балансу відносно умовної поверхні б-б, що знаходиться зовні тіла, але близько до його поверхні:

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{еф}} - E_{\text{пад}}; \quad (3.22)$$

3) Ю.О.Сурінова - визначається за різницею зустрічних потоків ( $E_{\text{пад1}}$  та  $E_{\text{пад2}}$ ), які падають на умовну

$$q_{рез} = E_{пад1} - E_{пад2} \quad (3.23)$$

Підсумковий потік  $q_{рез}$  може бути величиною позитивною, від'ємною або рівною нулю (рівноважне випромінювання).

Порівнюючи залежності (3.21) та (3.22), можна установити взаємозв'язок між густинами підсумкового та ефективного потоків випромінювання:

$$E_{эф} = \frac{E_{влас}}{A} + q_{рез} \left(1 - \frac{1}{A}\right) \quad (3.24)$$

або з урахуванням, що при  $D=0$   $1 - \frac{1}{A} = \frac{A-1}{A} = \frac{A-R-A}{A} = -\frac{R}{A}$  і

$$E_{эф} = \frac{E_{влас}}{A} - \frac{R}{A} q_{рез} \quad (3.25)$$

Для абсолютно чорного тіла ( $A=1$ ) ефективно випромінювання вироджується у власне:  $E_{эф} = E_{влас} = E_0$ .

Середовище, яке заповнює деякий об'єм, може також випромінювати, поглинати або розсіювати енергію. Потоки випромінювання середовища можна характеризувати залежностями, аналогічними, приведеним для твердих тіл. З цими залежностями можна ознайомитись за працею [1].

Напрямок найбільш інтенсивного переносу променевої енергії в розглядуваній точці поля випромінювання визначається вектором випромінювання (радіації):

$$\vec{q}_p = \vec{i} q_{резx} + \vec{j} q_{резy} + \vec{k} q_{резz} = \int_{4\pi} \vec{l} I d\omega, \quad (3.26)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - одиничні вектори за напрямком осей координат, відповідно  $x, y, z$ ;  $q_{резx}, q_{резy}, q_{резz}$  - проекції густини підсумкового потоку випромінювання на координатні осі;  $I$  - інтенсивність випромінювання (яскравість);  $\vec{l}$  - напрям випромінювання і  $d\omega$  - елементарний тілесний кут.

Якщо променевий перенос теплоти розглядається як процес розповсюдження фотонів, то використовують градієнтну форму вектора випромінювання, аналогічну закону Фур'є [1]:

$$\vec{q}_p = -\lambda_p \cdot \text{grad} T, \quad (3.27)$$

де  $\lambda_p = \frac{16 \sigma_b}{3} \frac{T^3}{\alpha}$  - умовний коефіцієнт теплопровідності за рахунок випромінювання (радіації), який можна ввести при відносно малій довжині пробігу фотона, що дозволяє розглядати променевий перенос теплоти як

дифузію енергії випромінювання у фотонному газі;  $\sigma=5,67 \cdot 10^{-8} \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  - постійна Стефана-Больцмана;  $\bar{\alpha}$  - середній коефіцієнт тепловіддачі тіла.

Дифузійне уявлення про перенос променевої енергії справедливе в умовах, близьких до термодинамічної рівноваги для сірих середовищ, що мають велику оптичну товщину [1], а також для систем випромінювальних тіл простої геометричної форми.

### 3.2 Закони теплового випромінювання

Теплове випромінювання регламентується законами Планка, Релея-Джінса, Віна, Стефана-Больцмана, Кірхгофа і Ламберта. Всі ці закони отримані для ідеального абсолютно чорного тіла і термодинамічної рівноваги. При термодинамічній рівновазі всі тіла, що входять у випромінювальну систему, приймають однакову температуру. Випромінювання, яким обмінюються тіла в стані термодинамічної рівноваги, називається рівноважним або чорним. При термодинамічній рівновазі кожне із тіл системи випромінює і поглинає енергію в однакових кількостях і таким чином підсумковий тепловий потік  $Q_{\text{рез}}=0$ . Це говорить про те, що теплове випромінювання має динамічний характер.

#### 3.2.1 Закон Планка

Випромінювання енергії за довжинами хвиль проходить нерівномірно і залежить від температури. В 1900 році Планком була встановлена залежність спектральної густоти потоку випромінювання від довжини хвилі та температури:

$$E_{0\lambda} = \frac{2\pi C_1}{\lambda^5} \left[ e^{C_2/(\lambda T)} - 1 \right]^{-1}, \quad (3.28)$$

де  $C_1=hc^2=5,95 \cdot 10^{-17}$  - перша константа випромінювання,  $\text{Вт}\cdot\text{м}^2$ ;  $C_2=hc/k=1,439 \cdot 10^{-2}$  - друга константа випромінювання,  $\text{м}\cdot\text{К}$ ;  $\lambda$  - довжина хвилі,  $\text{м}$ ;  $T$  - температура тіла,  $\text{К}$ ;  $c=2,998 \cdot 10^8$  - швидкість світла у вакуумі,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $h=6,626 \cdot 10^{-34}$  - постійна Планка,  $\text{Дж}\cdot\text{с}$ ;  $k=1,381 \cdot 10^{-23}$  - постійна Больцмана,  $\text{Дж}/\text{К}$ .

Закон Планка встановлений теоретично. По відношенню до нечорних тіл він виражає максимально можливу густину потоку випромінювання. Для цих тіл випромінювання при термодинамічній рівновазі з спектром, подібним до спектру рівноважного випромінювання систем абсолютно чорних тіл, називається сірим.

Для нечорних тіл спектральний склад випромінювання крім довжини хвилі залежить від фізичних властивостей тіл і знаходиться дослідним шляхом.

### 3.2.2 Закон Релея-Джінса

Цей закон отримано раніше від закону Планка експериментально. Він є одним з межових випадків закону Планка при  $\lambda T \gg C_2$ . Розкладаючи експоненціальну функцію  $e^{C_2/(\lambda T)}$  в степеневий ряд  $e^{C_2/(\lambda T)} = 1 + \frac{1}{1!} \left( \frac{C_2}{\lambda T} \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{C_2}{\lambda T} \right)^2 + \dots$  і обмежуючись першими двома складовими, знайдемо вираз для закону Релея-Джінса [1]:

$$E_{0\lambda} = 2\pi C_1 T / (C_2 \lambda^4), \quad (3.29)$$

### 3.2.3 Закон зміщення Віна

Закон зміщення Віна є другим межовим випадком закону Планка при  $\lambda T \ll C_2$ . Оскільки  $e^{C_2/(\lambda T)} \gg 1$ , то нехтуючи у формулі (3.28) одиницею, матимемо закон, який Він отримав в 1893 році:

$$E_{0\lambda} = \frac{2\pi C_1}{\lambda^5} e^{-C_2/(\lambda T)}. \quad (3.30)$$

Якщо похідну  $dE_{0\lambda}/d\lambda$  в законі Планка (див. (3.28)) прирівняти до нуля, то знайдемо іншу форму закону Віна:

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2,8978 \cdot 10^{-3}, \quad \text{м} \cdot \text{К}, \quad (3.31)$$

де  $\lambda_{\max}$  - довжина хвилі випромінювання, якій відповідає максимальна густина випромінювання. З залежності (3.31) видно, що при підвищенні температури максимальне значення  $(E_{0\lambda})_{\max}$  зміщується в бік коротких хвиль. Підставляючи з (3.31) значення  $\lambda_{\max}$  в (3.28) матимемо:

$$(E_{0\lambda})_{\max} = C_3 \cdot T^5, \quad (3.32)$$

де  $C_3 = 1,268 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$ .

Розділивши (3.28) на (3.32), отримаємо закон Планка в безрозмірній формі:

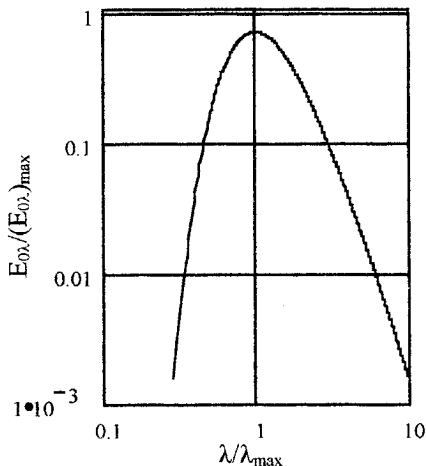
$$\frac{E_{0\lambda}}{(E_{0\lambda})_{\max}} = \frac{2\pi C_1}{C_3 (\lambda T)^5} \left[ e^{C_2/(\lambda T)} - 1 \right]^{-1}, \quad (3.33)$$

або, підставивши з (3.31)  $T = 2,8987 \cdot 10^{-3} / \lambda_{\max}$ , знайдемо

$$\frac{E_{0\lambda}}{(E_{0\lambda})_{\max}} = \frac{2\pi C_1}{C_4 (\lambda / \lambda_{\max})} \left[ e^{C_5/(\lambda / \lambda_{\max})} - 1 \right]^{-1} = f \left( \frac{\lambda}{\lambda_{\max}} \right), \quad (3.34)$$

де  $C_4 = 3,726 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ ;  $C_5 = 4,966$ .





**Рисунок 3.5 – Графічна ілюстрація закону Планка в безрозмірній формі**

Больцманом теоретично (в 1884 році) була встановлена залежність густини інтегрального потоку напівсферичного випромінювання від температури. Для абсолютно чорних тіл ця залежність має вид:

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{0\lambda} d\lambda = \sigma_0 \cdot T^4, \quad (3.35)$$

де  $\sigma_0 = 5,6753 \cdot 10^{-8} \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  - постійна Стефана – Больцмана. Для практичного розрахунку частіше використовують іншу форму закону Стефана - Больцмана:

$$E_0 = C_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4, \quad (3.36)$$

де  $C_0 = 5,6703 \approx 5,67 \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  - випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла.

Інтенсивність об'ємного випромінювання у вакуумі не залежить ні від координат, ні від напрямку. Закон Стефана – Больцмана для об'ємної густини  $U_0$  інтегрального випромінювання в вакуумі виражається формулою [1]:

Графічно закон Планка в безрозмірній формулі (3.34) можна представити кривою, зображеною на рисунку 3.5. Як видно з цього рисунку, максимум відношення  $E_{0\lambda}/(E_{0\lambda})_{\max} = 1$  відповідає  $\lambda/\lambda_{\max} = 1$ . Ця графічна залежність справедлива для будь-яких довгих хвиль та температур тіла.

### 3.2.4 Закон Стефана - Больцмана

Задовго до появи квантової теорії Планка Стефаном експериментально (в 1879 році), а

$$U_0 = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_0 d\omega = \frac{4\pi}{c} I_0 = \frac{4}{c} E_0, \quad (3.38)$$

де  $I_0$  - яскравість випромінювання абсолютно чорного тіла;  $d\omega$  - елементарний тілесний кут.

Для сірих тіл закон Стефана - Больцмана має форму:

$$E = \varepsilon \cdot E_0 = \varepsilon \cdot C_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4 = C \left( \frac{T}{100} \right)^4, \quad (3.38)$$

де  $\varepsilon = E/E_0 = C/C_0$  - коефіцієнт теплового випромінювання;  $C$  - випромінювальна здатність сірого тіла; Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>). Коефіцієнт теплового випромінювання сірого тіла залежить від природи, температури та стану поверхні тіла. В більшості випадків цей коефіцієнт знаходять експериментально.

### 3.2.5 Закон Кірхгофа

Кількісний зв'язок між енергіями випромінювання та поглинання поверхнями сірих тіл та абсолютно чорних тіл установлюється за законом Кірхгофа при умові термодинамічної рівноваги випромінювальної системи. Коли енергія випромінювання дорівнює енергії поглинання:

$$E_1 = E_{\text{погл}1} = A_1 \cdot E_{\text{пад}1} = A_1 \cdot E_0; \quad E_2 = E_{\text{погл}2} = A_2 \cdot E_{\text{пад}2} = A_2 \cdot E_0; \quad \dots$$

$$E_n = E_{\text{погл}n} = A_n \cdot E_{\text{пад}n} = A_n \cdot E_0, \quad (3.39)$$

звідки отримасмо

$$E_1/A_1 = E_2/A_2 = \dots = E_n/A_n = E_0 = f(T). \quad (3.40)$$

Враховуючи залежність (3.38), знайдемо

$$E = \varepsilon E_0 = A E_0,$$

звідки

$$\varepsilon = A. \quad (3.41)$$

Залежність (3.41) показує, що при термодинамічній рівновазі коефіцієнти випромінювання і поглинання сірих тіл рівні між собою.

Закон Кірхгофа справедливий і для спектрального теплового випромінювання, як в напрямку нормального до поверхні тіла так і в кутовому напрямку:

$$\varepsilon_\lambda = E_\lambda / E_{0\lambda}; \quad (3.42)$$

$$\varepsilon_{\psi\lambda} = E_{\psi\lambda} / E_{0\psi\lambda}. \quad (3.43)$$

### 3.2.6 Закон косинусів Ламберта

Закон Ламберта установлює зв'язок між кутовими густинами випромінювання тіла в напрямках нормалі до поверхні тіла  $I_n$  і під кутом  $\psi(I_\psi)$ :

$$I_\psi = I_n \cos \psi. \quad (3.44)$$

В підрозділі 3.1 було встановлено (див. залежність (3.12)), що яскравість випромінювання  $I = I_\psi / \cos \psi$ . Порівнюючи цю залежність з (3.44), знайдемо  $I = I_n$ . Це означає, що у випадку, коли випромінювання тіла підкоряється закону Ламберта, то яскравість не залежить від напрямку і є величиною постійною.

Яскравість  $I$  і густина інтегрального напівсферичного теплового випромінювання зв'язані залежністю [1]:

$$I = E / \pi. \quad (3.45)$$

Закон Ламберта справедливий для чорних тіл і тіл з дифузійним випромінюванням. Багато тіл йому не підкоряються, наприклад поліровані метали, які мають найбільшу яскравість випромінювання при  $\psi = 60^\circ \dots 80^\circ$ .

### 3.2.7 Чорні температури

Під чорною температурою розуміють таку умовну температуру, яку б могло мати тіло при умові, що його випромінювання чорне. Кожне тіло може характеризуватись цілим рядом чорних температур, які визначаються видом випромінювання.

При рівності густин потоків інтегрального випромінювання досліджуваного і абсолютно чорного тіл, чорна температура називається радіаційною  $T_p$ . Знаходять цю температуру за законом Стефана - Больцмана:

$$T_p = T \cdot \sqrt[4]{\varepsilon}, \quad (3.46)$$

де  $T$  - дійсна температура, К;

$\varepsilon$  - коефіцієнт випромінювання.

У випадку визначення чорної температури при порівнянні спектральних потоків випромінювання, чорну температуру називають кольоровою  $T_k$ . Як правило, при цьому розглядають випромінювання лише для яких-небудь двох довгих хвиль  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  (двох кольорів) і використовують пропорцію:

$$\frac{E_{\lambda_1}(T)}{E_{\lambda_2}(T)} = \frac{E_{0\lambda_1}(T_k)}{E_{0\lambda_2}(T_k)}.$$

Використовуючи закон зміщення Віна (3.30), залежності (3.42)

та (3.45), отримаємо:

$$T_k = \frac{c_2 \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \cdot T}{\ln(\varepsilon_{\lambda_1} / \varepsilon_{\lambda_2}) \cdot T + c_2 \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)}, \quad (3.47)$$

де  $\varepsilon_{\lambda_1}$  та  $\varepsilon_{\lambda_2}$  - спектральний коефіцієнт випромінювання.

При порівнянні яскравостей чорну температуру  $T_a$  називають яскравісною і визначають за формулою [1]:

$$T_a = \frac{c_2 \cdot T}{c_2 - \lambda T \ln \varepsilon_\lambda}. \quad (3.48)$$

Співвідношення (3.46), (3.47) та (3.48) лежать в основі оптичних методів безконтактного вимірювання високих температур.

### 3.3 Методи визначення випромінювальної здатності твердих тіл

При дослідженні променевого теплообміну між твердими тілами, що розділені прозорим середовищем, для визначення підсумкових потоків випромінювання необхідно знати випромінювальну здатність (або коефіцієнт теплового випромінювання) тіл, які беруть участь в променевому теплообміні.

Випромінювальна здатність залежить від природи випромінюючого тіла, його температури та стану поверхні, а для металів - від ступеня окислення поверхні тіла. Коефіцієнт теплового випромінювання чистих металів можна розрахувати за формулою [1]:

$$\varepsilon = 3,49 \sqrt{\rho_c} \left( \frac{T}{100} \right), \quad (3.49)$$

де  $\rho_c$  - питомий електричний опір металу при  $0^\circ\text{C}$ , Ом·мм<sup>2</sup>/м;  $T$  - температура тіла, К.

Коефіцієнти випромінювання сплавів та інших реальних тіл знаходять дослідним шляхом різними методами: радіаційним, калориметричним, регулярного теплового режиму та неперервним нагріванням з постійною швидкістю. Для досягнення потрібної точності при використанні цих методів перенос теплоти за рахунок конвекції та теплопровідності повинен бути значно менше в порівнянні з теплопередачею випромінюванням.

Обсяг посібника не дозволяє детально розглянути всі перераховані методи визначення випромінювальної здатності твердих тіл, тому обмежимося знайомством лише з радіаційним методом. Цей метод

грунтується на порівнянні випромінювання досліджуваного тіла з випромінюванням абсолютно чорного тіла або другого тіла з відомою випромінювальною здатністю (еталоном). Основною вимірювальною ланкою експериментального пристрою є диференціальна термopapa. Один спай термopari сприймає випромінювання досліджуваного тіла, а інший - еталона. Підсумковий потік випромінювання визначається за термоелектричною силою диференціальної термopari, яка вимірюється гальванометром. Залежність для розрахунку густини  $q_{1,2}$  підсумкового потоку випромінювання згідно з законом Стефана-Больцмана можна записати в такій формі:

$$q_{1,2} = C \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = k \cdot \varphi, \quad (3.50)$$

звідки

$$C = (k \cdot \varphi) / [ (T_1/100)^4 - (T_2/100)^4 ], \quad (3.51)$$

де  $C$  - випромінювальна здатність досліджуваного тіла, Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>);  $T_1, T_2$  - відповідно, абсолютні температури досліджуваного тіла і приймача випромінювання (один зі спаїв термopari), К;  $k$  - постійна вимірювального приладу,  $\varphi$  - показання гальванометра.

Постійну приладу  $k$  знаходять із попередніх тарувальних дослідів, в яких досліджуване тіло замінено еталоном

$$k = \frac{C_e}{\varphi_e} \left[ \left( \frac{T_e}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (3.52)$$

тут  $C_e$  - відома випромінювальна здатність еталона, Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>);  $\varphi_e$  - показання гальванометра при дослідах з еталоном;  $T_e$  - абсолютна температура еталона, К.

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

### 1 ОСНОВИ ВЧЕННЯ ПРО ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ

1. Що розуміють під феноменологічним та статистичним методами дослідження явищ природи ?
2. Дайте визначення видам теплопередачі: теплопровідність; конвекція; теплове випромінювання.
3. Який вид теплопередачі називають складним теплообміном?
4. Чим відрізняються між собою нестационарне і стаціонарне температурні поля?

5. Запишіть в загальному вигляді залежності, що характеризують одно-, дво- та тривимірні нестационарні температурні поля.
6. Дайте визначення ізотермічної поверхні.
7. Запишіть вираз для градієнта температури. Куди направлений вектор градієнта температури?
8. Наведіть визначення закону Фур'є в різних формах.
9. Як направлений вектор густини теплового потоку?
10. Що розуміють під поняттям коефіцієнта теплопровідності? Яка розмірність цього коефіцієнта в міжнародній системі одиниць СІ?
11. Під яким кутом перетинаються лінії теплового потоку та ізотерми?
12. Наведіть залежності для розрахунку коефіцієнтів теплопровідності для крапельних рідин та газів.
13. Які матеріали називаються теплоізоляційними?
14. Перерахуйте основні допущення, що приймаються при виведенні диференціального рівняння теплопровідності.
15. На що затрачується надлишкова кількість теплоти, що виділяється в елементарному об'ємі  $dV$  за час  $dt$  при ізохорному та ізобарному термодинамічних процесах?
16. Запишіть в загальному вигляді диференціальні рівняння теплопровідності при змінних теплофізичних характеристиках твердого тіла і при сталих.
17. Що характеризує коефіцієнт температуропровідності? Для яких теплових процесів цей коефіцієнт має значення?
18. Запишіть і поясніть рівняння теплопровідності Фур'є, Лапласа і Пуассона.
19. Із яких основних пунктів складаються умови однозначності розв'язку диференціального рівняння теплопровідності?
20. На скільки родів поділяються межові умови? Наведіть характеристику кожного роду.
21. Запишіть умову збереження енергії для поверхні тіла при його теплообміні з навколишнім середовищем.
22. Яка відмінність між джерелами та стоками теплоти?
23. За якими ознаками класифікують джерела теплоти?
24. Наведіть графіки типових законів розподілу інтенсивності для одновимірних джерел (стоків) теплоти, а також запишіть функції цього розподілу.
25. Запишіть залежність для визначення інтенсивності джерела теплоти при відомій функції її розподілу.
26. Якими безрозмірними критеріями можна характеризувати час дії і швидкість руху джерела (стоку) теплоти?

27. Як поділяються в залежності від швидкості руху і часу дії джерела теплоти?
28. Перерахуйте методи розв'язування диференціального рівняння теплопровідності і коротко охарактеризуйте кожний метод.
29. Які величини називають тепловою провідністю і термічним опором стінки?
30. Запишіть залежність для повного термічного опору теплопередачі. Поясніть цю залежність.
31. Як визначається еквівалентний коефіцієнт теплопровідності багат шарової стінки при відомих товщинах і коефіцієнтах теплопровідності шарів?
32. Запишіть залежність для розрахунку діаметра труби при якому термічний опір теплопередачі буде мінімальним.
33. На яких основних положеннях ґрунтується метод джерел (стоків) теплоти для розв'язування рівняння теплопровідності?
34. Яка залежність є основою математичного апарату методу джерел теплоти?
35. На яких основних положеннях ґрунтується чисельний метод кінцевих різниць (метод сіток) для розв'язування задач теплопровідності?

## 2 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ВЧЕННЯ ПРО КОНВЕКТИВНИЙ ТЕПЛООБМІН

1. Наведіть визначення масових та поверхневих сил.
2. На які види ділять конвекцію?
3. При яких умовах процес конвективної тепловіддачі буде стаціонарним?
4. Запишіть в різних формах вираз для закону Ньютона-Ріхмана.
5. Наведіть залежність для локального вектора густини теплового потоку при конвективному теплообміні. Поясніть цю залежність.
6. Якими основними фізичними параметрами визначаються властивості рідин? Наведіть залежності для кожного параметра і поясніть їх.
7. Які диференціальні рівняння потрібні для повного математичного описання процесу конвективної теплопередачі. При яких допущеннях виводяться ці рівняння?
8. Виведіть рівняння енергії, руху та сущільності потоку для конвективної тепловіддачі.
9. Наведіть визначення гідродинамічного та теплового прикордонного шарів.

10. Що визначає критерій Рейнольдса? Запишіть вираз для його обчислення.
11. Яке основне призначення має теорія подібності?
12. Які величини в теорії подібності відносять до однорідних безрозмірних змінних?
13. Наведіть основні критерії подібності, що використовуються в теорії подібності для дослідження конвективного теплообміну і дайте їм коротку характеристику.
14. Які потрібні умови для подібності фізичних явищ?
15. Що розуміють під поняттям констант подібності? Як пов'язані між собою константи подібності розмірних величин?
16. Для чого складають і використовують критеріальні рівняння?
17. Що розуміють під поняттям ділянки гідродинамічної стабілізації потоку?
18. Що розуміють під поняттям ділянки термічної стабілізації потоку?
19. Які допущення приймають при виведенні інтегрального рівняння тепловіддачі для руху рідини в прямій круглій трубі?
20. Запишіть і поясніть інтегральне рівняння тепловіддачі в круглій трубі (рівняння Лайона).
21. Наведіть визначення процесу кипіння рідини?
22. Які є два основних режими кипіння?
23. Наведіть залежність для визначення критичного радіуса бульбашки при кипінні. Поясніть цю залежність.
24. Яким безрозмірним критерієм характеризується інтенсивність теплообміну при кипінні?
25. Дайте визначення першої, другої і третьої криз кипіння. Наведіть графічну ілюстрацію цих криз.
26. За якою залежністю можна оцінити термічний опір теплопередачі при кипінні?
27. Запишіть рівняння Герца-Кнудсена і поясніть його.
28. За якою залежністю знаходять міжфазовий термічний опір при кипінні?
29. Наведіть визначення явищу дифузії.
30. Запишіть в різних формах закон Фіка і поясніть його фізичну суть.
31. Яку дифузію описує закон Фіка?
32. Що розуміють під поняттям термічна дифузія?
33. Наведіть визначення дифузійного термoeфекту.
34. Яке явище називають бародифузією?



35. Запишіть рівняння для визначення густини потоку маси з урахуванням концентраційної, термічної і бародифузії. Поясніть це рівняння.
36. Запишіть вираз для локальної густини теплового потоку при наявності дифузійних процесів. Поясніть цю залежність.

### 3 ТЕПЛООБМІН ВИПРОМІНЮВАННЯМ

1. Яку природу має теплове випромінювання?
2. Які тіла мають суцільний, а які селективний спектр випромінювання?
3. Який вид теплопередачі є переважаючим при високих температурах?
4. Назвіть основні види та параметри променивих потоків.
5. Як пов'язані між собою параметри інтегрального та спектрального потоків випромінювання?
6. Як пов'язані між собою поверхневі та кутові густини потоків випромінювання?
7. Запишіть закон збереження енергії при взаємодії потоку випромінювання, що падає, з тілом.
8. Які тіла називають абсолютно чорним, білим і прозорим ?
9. Яку величину називають густиною ефективного випромінювання ?
10. За якими способами можна визначити густину підсумкового теплового потоку випромінювання при його взаємодії з твердим тілом ?
11. Яке випромінювання називається рівноважним або чорним ?
12. Запишіть вираз закону Планка і поясніть його.
13. За яких умов із закону Планка можна отримати закони Релея-Джінса та Віна ?
14. Наведіть математичну залежність для закону Стефана-Больцмана і поясніть її.
15. Як можна розрахувати на основі закону Стефана-Больцмана випромінювальну здатність і коефіцієнт випромінювання сірого тіла ?
16. Який фізичний зміст має закон Кірхгофа ?
17. Що установлює закон косинусів Ламберта ?
18. Що розуміють під поняттям “чорна” температура ?
19. На які види поділяються “чорні” температури ?
20. Перерахуйте методи визначення випромінювальної здатності твердих тіл ?
21. Поясніть суть радіаційного методу визначення випромінювальної здатності твердих тіл ?

## ЛІТЕРАТУРА

1. Теплопередача: Учебн. для вузов/ В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.
2. Резников А.Н., Резников Л.А. Тепловые процессы в технологических системах: Учебн. для вузов по специальностям “Технология машиностроения” и “Металлорежущие станки и инструменты”. –М.: Машиностроение, 1990. –288с.
3. Лабораторный практикум по термодинамике и теплопередаче: Учебн. пособие для энергомашиностроительных спец. вузов/ В.Н. Афанасьев, А.А. Афонин, С.И. Исаев и др.; под ред В.И. Крутова, Е.В. Шишова. –М.: Выш. шк., 1988. –216 с.
4. Кухлинг Х. Справочник по физике: Пер. с нем. –М.: Мир, 1982. – 520с.
5. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. –4-е изд. –М.: Наука, 1978. –832с.
6. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. –М.: Высш. шк., 1973. – 254с.
7. Алферов В.И., Соколов Ю.Н. Теплообмен деталей станков с воздухом цеха// Станки и инструмент, 1968. №9. С. 10-11.
8. Спэрроу Э.М. Сесс Р.Д. Теплообмен излучением. –Л.: Энергия, 1971. –294с.

**Міністерство освіти України**  
**Вінницький державний технічний університет**

Навчальне видання

Роман Романович Обертюх

## **ТЕПЛОПЕРЕДАЧА**

**Навчальний посібник**

Редактор В.О. Дружиніна  
Коректор З.В. Поліщук

Тир. 35 прим. Зам. №

---

ВДТУ, 21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95