П. П. ОВЧИННИКОВ
Ф.П. ЯРЕМЧУК
В. М. МИХАЙЛЕНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина I

- ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА
- АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
- ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ І ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

П. П. ОВЧИННИКОВ
Ф.П.ЯРЕМЧУК
В. М. МИХАЙЛЕНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА

У двох частинах

Частина I

За загальною редакцією
П. П. Овчинникова

Переклав з російської
П. М. Юрченко

3-тє видання,
виправлене

- ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА
- АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
- ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ І ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Затверджено Міністерством
освіти і науки України
як підручник для студентів
вищих технічних навчальних закладів

Київ
"Техніка"
2003

ББК 22.11я73
О35
УДК 51(075.8)

Гриф надано
Міністерством освіти і науки України,
лист № 1/12–2 від 02.01.2002 р.

Перекладено за виданням:
Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Высшая математика. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987.–552 с.

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. В. Новиков*
(Одеський національний політехнічний університет),
д-р фіз.-мат. наук, проф. *Ю. Й. Черський*
(Одеська державна академія будівництва і архітектури)

Овчинников П. П. та ін.
О35 Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко; За заг. ред. П. П. Овчинникова; Пер. з рос. П. М. Юрченка. – 3-тє вид., випр. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.: іл.

ISBN 966-575-050-X (повне зібрання)
ISBN 966-575-055-0 (ч. 1)

Розглянуто розділи вищої математики, що входять до програми перших курсів вищих технічних навчальних закладів – лінійна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне та інтегральне числення. Використано метод паралельного викладу, тобто наводяться одночасно окремі і загальні поняття. Теоретичний матеріал ілюструється великою кількістю прикладів і вправ для самостійної роботи.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів.

ББК 22.11я73

ISBN 966-575-050-X (повне зібрання)
ISBN 966-575-055-0 (ч. 1)

ПЕРЕДМОВА

Підручник написано відповідно до програми з вищої математики для вищих технічних закладів освіти. Використано один з нових дидактичних методів — метод паралельного викладу, який полягає в тому, що виклад і введення таких основних понять математики, як простір, вектор, функція, границя, послідовність, диференціал, інтеграл, функціонал, даються одночасно: одновимірний і скінченновимірний простір, одновимірний і n-вимірний вектори, функції однієї і n змінних, похідні функції однієї і n змінних, одновимірний і багатовимірний інтеграли. Паралельний виклад — це деякою мірою дедуктивний спосіб викладу, але автори додержувались його не скрізь. Так, індуктивно викладено поняття і теореми про границі, неперервності, диференційовності як в одновимірному, так і в багатовимірному випадках.

Повний дедуктивний виклад здійснено при розгляді визначених інтегралів.

У першій главі введено поняття одновимірного і багатовимірного просторів та векторів у них. Задання системи векторів приводить до необхідності введення матриць і дій над ними. Розглянуто дії з векторами, заданими геометрично і в координатній формі, лінійний векторний простір, базис у ньому. Вивчено лінійні алгебраїчні системи, лінійні та квадратичні форми, значний інтерес до яких пояснюється широким застосуванням лінійної алгебри у техніці та економіці.

Рівняння площини і прямої у просторі (пряма на площині отримана як окремий випадок), криві і поверхні другого порядку розглянуто у другій главі; рівняння кривих і поверхонь другого порядку приводяться до канонічного вигляду з використанням квадратичних форм.

У третій главі розглядаються функції однієї і багатьох дійсних змінних, функцій комплекснозначних і комплексних змінних, вектор-функції скалярного і векторного аргументів. Для цих функцій введено поняття границі (через послідовність) і неперервності для однієї, а потім для багатьох змінних.

Поняття про похідні функції однієї і багатьох змінних, векторне і скалярне поля, екстремум функцій однієї і багатьох змінних, визначені квадратичні форми, а також наближені методи розв'язання скінченних рівнянь дано у четвертій главі.

У п'ятій главі традиційно дано поняття невизначеного інтеграла, викладено методи інтегрування різних класів функцій. Детальніше розглянуто методи відшукання невизначених коефіцієнтів при розкладанні раціонального дробу на елементарні. Тут, крім загальноприйнятих, наведено метод множення і метод послідовного диференціювання, які часто використовуються в операційному численні при розкладанні зображення на елементарні дроби.

Усі види визначених інтегралів і векторний аналіз викладено у шостій главі на основі поняття міри, яка вводиться аксіоматично, і поняття інтеграла по області (по мірі), з якого як окремий випадок випливають усі види інтегралів: визначений, криволінійний, кратні, по поверхні.

Кожний параграф ілюстровано прикладами і вправами для самостійного розв'язування.

У третє видання підручника "Вища математика. Частина 1" авторами внесені деякі зміни, запропоновані рецензентами – докторами фіз-мат. наук, професорами Новиковим В. В. і Черським Ю. Й.: у першій главі подано коротке доведення нерівності Коші–Буняковського–Шварца.

У другій главі, використовуючи викладену в підручнику загальну властивість кривих 2-го порядку, доведено загальне полярне рівняння кривої 2-го порядку, а також більш детально розглянуто схему зведення поверхонь 2-го порядку до канонічного вигляду. Як ілюстрація наведено приклад.

У четвертій главі викладено поняття природного тригранника та поняття скрута, розглянуто формули Серре–Френе.

У п'ятій главі наведено розв'язання ілюстративного прикладу до методу Остроградського – пошуку невизначених інтегралів від многочлена n-го степеня, діленого на квадратний корінь з квадратного тричлена.

Глава 1
ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

§ 1. ЧИСЛА І ПРОСТОРИ

1.1. Координатна вісь, або одновимірний простір

Візьмемо пряму лінію і задамо на ній додатний напрям (звичайно його показують стрілкою). Тоді протилежний напрям буде від'ємним (рис. 1.1). Напрямлена пряма називається **віссю.** Якщо на осі вибрати довільну точку обліку O і масштаб, то така вісь називається **координатною** або **одновимірною системою координат.** Точка O називається **початком координат.**

Якщо координатна вісь розміщена горизонтально, то її називають **віссю абсцис** і позначають буквами x або Ox. Візьмемо на осі x точку M і визначимо її положення (рис. 1.1). Для цього виміряємо масштабною одиницею $m = |OE|$ довжину відрізка OM. Дістанемо абстрактне число, яке буде **раціональним**, якщо масштабна одиниця і даний відрізок сумірні, та **ірраціональним**, якщо вони не сумірні.

Координатою точки M називається додатне число, яке дорівнює довжині відрізка OM, якщо точка M розміщена в додатному напрямі від початку координат, і від'ємне число, модуль якого дорівнює довжині відрізка OM, якщо точка M розміщена у від'ємному напрямі від початку координат. Координатою початку координат вважають число нуль.

Якщо x є координатою точки M, то пишуть $M(x)$.

Кожній точці координатної осі відповідає єдине дійсне число, і навпаки, кожному дійсному числу відповідає тільки одна визначена точка на координатній осі. При цьому говорять, що встановлено **взаємно однозначну відповідність** між точками координатної осі і дійсними числами. Координатну вісь називають ще **числовою** або **дійсною віссю.**

1.2. Кут між осями

Нехай дано дві осі, які перетинаються, і вказано порядок розміщення їх у просторі; такі осі називаються **впорядкованими**. **Кутом між двома впорядкованими осями** x_1 і x_2 називається кут, на який треба повернути вісь x_1 до x_2 навколо осі, перпендикулярної до площини, в якій лежать ці осі, щоб напрями осей x_1 і x_2 збігалися (рис. 1.2).

Якщо поворот здійснюється протилежно до напряму обертання годинникової стрілки, то кут вважається **додатним**, а якщо за годинниковою стрілкою, то **від'ємним.** Легко помітити, що кут між осями

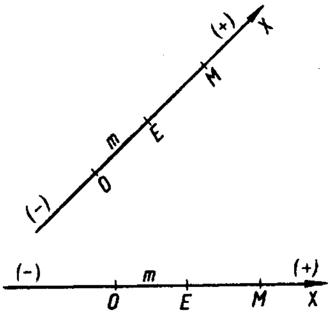


Рис. 1.1

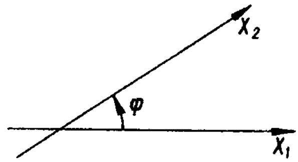


Рис. 1.2

визначається неоднозначно. Якщо найменший по модулю кут між осями позначити через φ, то кут $\varphi + 2\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$, також буде кутом між цими осями. Якщо треба знайти кут однозначно, то накладають обмеження, розглядаючи, наприклад, $0 \le \varphi < 2\pi$, або $-\pi < \varphi \le \pi$. Надалі вважатимемо, що $0 \le \varphi < 2\pi$.

1.3. Косокутна і прямокутна системи координат на площині. Двовимірний простір

Нехай дано дві впорядковані координатні осі X_1 і X_2, які перетинаються під кутом φ. Точка перетину осей приймається за початок відліку осей координат.

Впорядковані координатні осі, які розміщені в одній площині і перетинаються під кутом φ у точці, що приймається за початок відліку, складають косокутну систему координат на площині (рис. 1.3). Ця площина називається **координатною.** Візьмемо в координатній площині точку P і проведемо через неї прямі, паралельні осям X_1

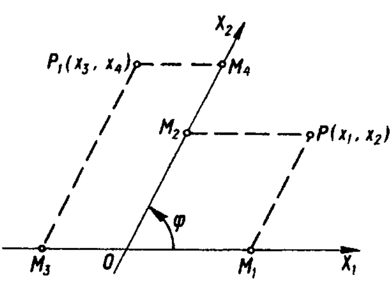


Рис. 1.3

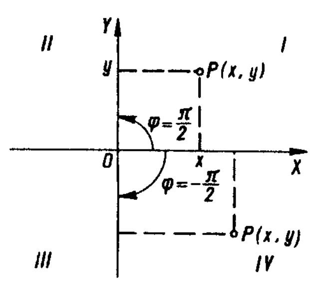


Рис. 1.4

і X_2. Точки перетину цих прямих з осями координат позначимо через M_1 і M_2, а їхні координати — відповідно через x_1 і x_2.

Таким чином, точці P відповідає пара чисел (x_1, x_2). Ці числа записують у порядку розміщення координатних осей і називають **косокутними координатами точки** P. Легко помітити, що кожній точці P, яка розміщена в координатній площині, відповідає упорядкована пара чисел. При цьому записують: $P(x_1, x_2)$. Навпаки, кожній заданій упорядкованій парі чисел (x_3, x_4) у координатній площині відповідає точка P_1. Щоб знайти її, треба через точки $M_3(x_3)$ і $M_4(x_4)$ провести прямі, паралельні координатним осям. Точка перетину їх є шуканою точкою P_1 (рис. 1.3).

Таким чином, *між точками координатної площини і впорядкованими парами дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність*. Множина впорядкованих пар чисел (x_1, x_2) в обраній системі координат називається **двовимірним простором** і позначається $\mathbf{R}_2$.

Якщо в косокутній системі координат на площині кут $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, то така система координат називається **прямокутною системою координат Декарта**[1] **на площині.** Якщо $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, то система називається **правою** (рис. 1.4), якщо $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, то система називається **лівою.** Горизонтальна вісь координат називається **віссю абсцис** і позначається X або OX, а вертикальна вісь — **віссю ординат** і позначається Y або OY.

Зазначимо, що координатні осі розбивають координатну площину на чотири частини, або квадранти, які нумерують римськими цифрами I, II, III, IV.

1.4. Полярна система координат

Спосіб визначення положення точок чи інших об'єктів на площині і в просторі за допомогою чисел називають **методом координат.**

Розглянемо так звану полярну систему координат, яку часто використовують під час пояснення багатьох фізичних явищ. Виберемо в площині довільну точку O, назвемо її **полюсом** і проведемо промінь OP, який називається **полярною віссю,** задамо масштабну одиницю довжини $m = |OE|$. Положення будь-якої точки M у площині визначимо так. Сполучимо відрізком прямої полюс з точкою M. Довжину відрізка OM позначимо через ρ. Цей відрізок називається **полярним радіусом** точки M; задамо на ньому напрям від O до M. Дістанемо вісь OM. Таким чином, маємо дві осі: перша — полярна вісь, а друга — вісь OM. Величину кута pOM (з урахуванням напряму повороту)

---

[1] Рене Декарт (1596—1650) — французький філософ, математик, фізик, фізіолог.

позначимо через φ (у градусах, радіанах або абстрактних одиницях) і назвемо його **полярним кутом** точки M (рис. 1.5).

Полярними координатами точки M називається упорядкована пара чисел (ρ, φ), де ρ — довжина полярного радіуса; φ — величина полярного кута точки M. Для полюса $\rho = 0$, а φ має довільне значення. Той факт, що числа ρ і φ — координати точки M, записують так: M (ρ, φ).

Полярні координати ρ *і* φ *однозначно визначають положення точки на площині.* Обернене твердження неправильне, оскільки кожній точці координатної площини відповідає одне й те саме ρ і нескінченна множина полярних кутів, які можуть відрізнятись один від одного на $2\pi k$, де $k \in Z$.

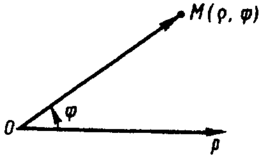


Рис. 1.5

Для того щоб дістати взаємно однозначну відповідність, на полярний кут φ накладають обмеження:

$$0 \le \varphi < 2\pi \text{ або } -\pi < \varphi \le \pi. \qquad (1.1)$$

Ці значення називаються **головними значеннями полярного кута.**

Знайдемо залежність між полярними і прямокутними декартовими координатами точки M. Сумістимо прямокутну систему координат XOY з полярною так, щоб початок координат збігався з полюсом, а полярна вісь — з додатною піввіссю абсцис (рис. 1.6).

Нехай точка M у декартовій системі визначається координатами (x, y), а у полярній — координатами (ρ, φ). Використовуючи означення тригонометричних функцій, знаходимо

$$x = \rho \cos \varphi, \ y = \rho \sin \varphi. \qquad (1.2)$$

Ці формули виражають декартові координати точки площини через полярні. Розв'язуючи систему (1.2) відносно ρ і φ за умови, що $\rho \ge 0$

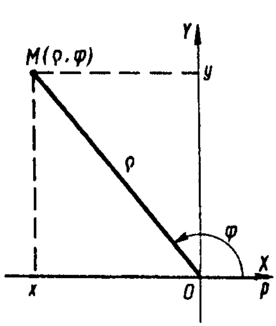


Рис. 1.6

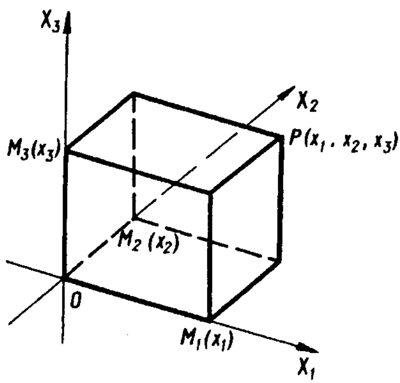


Рис. 1.7

і $0 \le \varphi < 2\pi$, маємо

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \tag{1.3}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при } y \ge 0; \\ 2\pi - \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при } y < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Формули (1.3) і (1.4) показують взаємно однозначну відповідність між прямокутними і полярними координатами точок площини.

1.5. Косокутна система координат у просторі. Тривимірний простір

Візьмемо три впорядковані координатні осі X_1, X_2, X_3, які не лежать в одній площині і перетинаються в одній точці O. Вважатимемо цю точку за початок відліку. Упорядковані координатні осі, які не лежать в одній площині та мають одну спільну точку, називаються **косокутною системою координат у просторі.** Площини OX_1X_2, OX_1X_3, OX_2X_3 називають **координатними.** Нехай P — довільна точка простору. Проведемо через неї площини, паралельні координатним площинам (рис. 1.7).

Точки перетину площин з відповідними осями позначимо через M_1 (x_1), M_2 (x_2), M_3 (x_3). **Координатами точки** P в даній системі координат називають упорядковану трійку чисел (x_1, x_2, x_3) і записують P (x_1, x_2, x_3).

Очевидно, *що кожній точці простору відповідає у вибраній системі координат упорядкована трійка чисел.* Справедливе і обернене твердження: *кожній упорядкованій трійці чисел у вибраній системі координат відповідає точка простору.* Таким чином, установлено взаємно однозначну відповідність між точками простору і упорядкованими трійками дійсних чисел. Множина упорядкованих трійок чисел в обраній системі координат називається **тривимірним простором** і позначається $\mathbf{R}_3$.

Якщо координатні осі X_1, X_2, X_3 взаємно перпендикулярні, то косокутну систему координат називають **прямокутною системою координат Декарта у просторі** і позначають $X_1X_2X_3$ або XYZ.

1.6. Прямокутна система координат Декарта у просторі

Нехай дано прямокутну систему координат Декарта XYZ (рис. 1.8).

Площини XOY, YOZ і XOZ називаються **координатними площинами**. Координатна вісь OX називається **віссю абсцис,** OY — **віссю ординат,** OZ — **віссю аплікат.** Відповідно називаються і координати точок: x — **абсциса,** y — **ордината,** z — **апліката.** Координатні

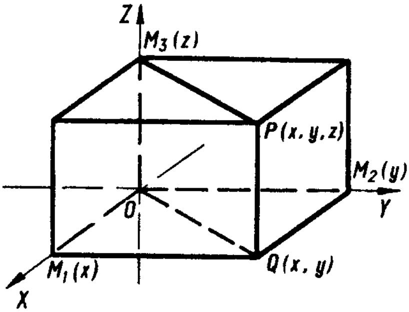


Рис.1.8

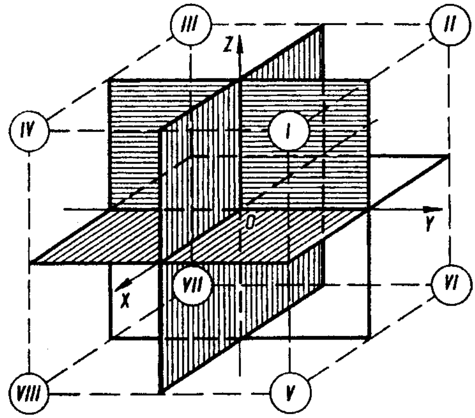


Рис. 1.9

площини розбивають простір на вісім октант (рис. 1.9). Координати точок, розміщених в октантах, задовольняють такі умови:

$$\mathrm{I}\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0; \end{cases} \quad \mathrm{II}\begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0; \end{cases} \quad \mathrm{III}\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0, \\ z \geq 0; \end{cases} \quad \mathrm{IV}\begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0, \\ z \geq 0; \end{cases}$$

$$\mathrm{V}\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \leq 0; \end{cases} \quad \mathrm{VI}\begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0, \\ z \leq 0; \end{cases} \quad \mathrm{VII}\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0, \\ z \leq 0; \end{cases} \quad \mathrm{VIII}\begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0, \\ z \leq 0. \end{cases}$$

Упорядкована трійка координатних осей, які не лежать в одній площині, називається **правою,** якщо з кінця додатного напряму третьої осі найкоротший поворот від першої осі до другої видно проти руху годинникової стрілки. У противному разі система координат називається **лівою** (рис. 1.10).

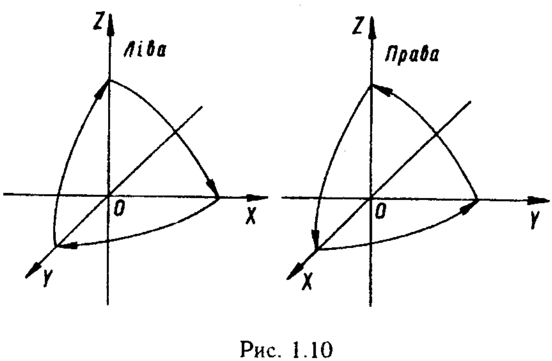


Рис. 1.10

1.7. Циліндрична система координат

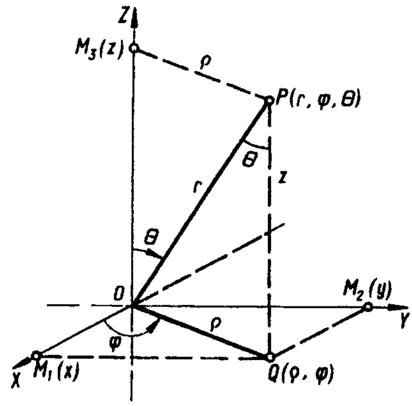


Рис.1.11

Якщо в прямокутній системі координат XYZ замість перших двох координат x і y взяти полярні координати, а третю залишити без змін, то дістанемо циліндричну систему координат. Координати точки P простору в цій системі записуються у вигляді $P(\rho, \varphi, z)$.

Далі при побудові систем координат масштаб не зображатимемо. Звичайно на всіх осях координат задають один і той самий масштаб.

Знайдемо залежності між прямокутними декартовими координатами точки $P(x, y, z)$ і її циліндричними координатами $P(\rho, \varphi, z)$. (рис. 1.11). Враховуючи формули (1.2), маємо

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \\ z = z, \end{cases} \tag{1.5}$$

де $0 \le \rho < +\infty$; $0 \le \varphi < 2\pi$; $-\infty \le z < +\infty$.

1.8. Сферична система координат

У тривимірному просторі XYZ візьмемо точку P і через цю точку та вісь аплікат проведемо площину. Нехай відстань точки P від початку координат (полюса) дорівнює r, двогранний кут між координатною площиною XOZ і площиною ZOP дорівнює φ, а кут між віссю OZ і променем OP дорівнює θ. Упорядкована трійка чисел (r, φ, θ) однозначно визначає положення точки P у просторі XYZ. Ці числа називають **сферичними координатами точки** P і записують $P(r, \varphi, \theta)$.

Знайдемо залежність між прямокутними декартовими координатами і сферичними координатами точки. З прямокутного трикутника OQP (рис. 1.11) знаходимо

$$z = r\cos\theta, \quad \rho = r\sin\theta.$$

З прямокутного трикутника OQM_1 дістанемо

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Тоді

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{1.6}$$

де

$$0 \le r < +\infty;\ 0 \le \varphi < 2\pi;\ 0 \le \theta < \pi.$$

Формули (1.6) визначають взаємно однозначну відповідність між прямокутними декартовими і сферичними координатами точок простору XYZ.

1.9. n-Вимірний простір

Розглянуті в п.п. 1.5, 1.6 координати називаються прямолінійними, оскільки координати точки P (рис. 1.7) отримуються в результаті перетину координатних осей X_1, X_2, X_3 з площинами. Якщо замість площин через точку P проводити за якимось законом поверхні, то отримані координати називаються криволінійними. Прикладом останніх є циліндричні, сферичні координати.

Як було показано, між множиною дійсних чисел і множиною точок одновимірного простору існує взаємно однозначна відповідність. Те саме стосується двовимірного і тривимірного простору. Точками двовимірного простору є упорядковані пари дійсних чисел, а точками тривимірного простору — упорядковані трійки чисел. Природно ввести поняття n-вимірного простору.

***n*-Вимірним (скінченновимірним) простором** або **простором *n* вимірів** називають множину упорядкованих сукупностей дійсних чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ в обраній системі координат і позначають $\mathbf{R}_n$ ($\mathbf{R}^n$).

Множина $\mathbf{R}_n$ називається ще **афінним простором** n вимірів.

Елемент $(x_1, x_2, ..., x_n)$ множини $\mathbf{R}_n$, де $x_1, x_2, ..., x_n$ — задані дійсні числа, називають точкою n-вимірного простору, а числа — координатами цієї точки і записують $P\ (x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо точка P належить простору $\mathbf{R}_n$, то пишуть $P \in \mathbf{R}_n$, або $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}_n$.

Зазначимо, що окремими випадками n-вимірного простору є одновимірний простір $\mathbf{R}_1$ ($\mathbf{R}^1$), двовимірний простір $\mathbf{R}_2$ ($\mathbf{R}^2$) і тривимірний простір $\mathbf{R}_3$ ($\mathbf{R}^3$), які можна зобразити геометрично. Далі простори $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ називатимемо **наочними просторами.** Для n-вимірного простору, де $n \ge 4$, ця наочність зникає. Так, зрозуміло як ввести поняття кута між двома осями в тривимірному просторі, а як це зробити для n-вимірного простору, поки що невідомо (взагалі це можна зробити за допомогою поняття вектора).

§ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРІВ

2.1. *Векторні і скалярні величини*

Відомо такі два типи величин:

1) величини, для визначення яких досить задати число. Ці величини називаються **скалярними** (наприклад, довжина, густина, температура);

2) величини, для визначення яких недостатньо знати тільки число. Ці величини називаються **векторними** або просто **векторами**. Далі під

вектором будемо розуміти напрямлений відрізок. Векторними величинами є, наприклад, сила, швидкість, прискорення.

Розрізняють вектори **зв'язані, ковзні і вільні.**

Зв'язаний вектор — це величина, яка задається числом, точкою прикладання, лінією дії та напрямом (наприклад, сила).

Якщо величина визначається числом, лінією дії та напрямом, то така величина називається **ковзним вектором** (наприклад, кутова швидкість).

Вільним вектором називається величина, яка визначається числом і напрямом, а лінія дії і точка прикладання можуть бути довільними.

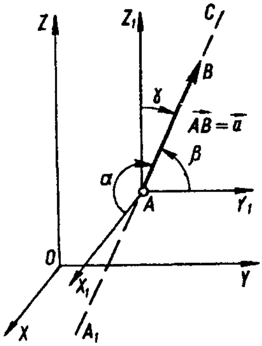


Рис. 1.12

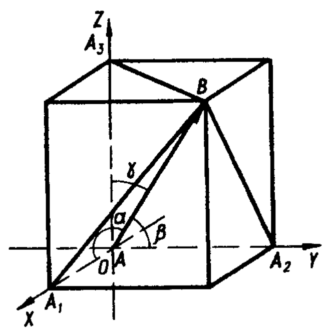


Рис. 1.13

Далі розглядатимемо лише вільні вектори і називатимемо їх просто векторами.

Число визначає довжину вектора, а напрям визначає ту пряму, на якій розміщено вектор (пряма A_1C, рис. 1.12). Для напряму вектора достатньо задати кути, які складає пряма A_1C з осями координат, вони позначаються через α, β, γ. Косинуси цих кутів називаються **напрямними косинусами.** Для побудови кутів α, β, γ досить із довільної точки A на прямій A_1C побудувати осі AX_1, AY_1, AZ_1, паралельні OX, OY, OZ.

Для побудови вектора на указаній прямій A_1C обирається точка A, яка приймається за початок вектора. Число, яке виражає довжину вектора, дає змогу знайти його кінець. Для цього із точки A у заданому напрямі A_1C відкладаємо відрізок AB, довжина якого дорівнює довжині вектора. Кінець цього відрізка і є кінцем вектора.

Побудований вектор позначається так: $\vec{AB} = \vec{a}$. Положення точки B визначено однозначно, тому що кути α, β, γ мають бути побудовані так, щоб при повороті осей OX, OY, OZ до прямої A_1C напрями вектора і осей збігалися. При цьому не враховується напрям повороту осі до вектора чи вектора до осі. Дійсно, хоч кути і будуть різними, але

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, X}\right) = \cos\left(\widehat{X, \vec{a}}\right) = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, Y}\right) = \cos\left(\widehat{Y, \vec{a}}\right) = \cos\beta,$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, Z}\right) = \cos\left(\widehat{Z, \vec{a}}\right) = \cos\gamma.$$

Таким чином, побудовано вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Початок вектора можна сумістити з початком координат. Тоді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ (рис. 1.13). Якщо прийняти OB за діагональ паралелепіпеда і побудувати його, то за теоремою про квадрат діагоналі паралелепіпеда знайдемо

$$|OB|^2 = |OA_1|^2 + |OA_2|^2 + |OA_3|^2.$$

Із прямокутних трикутників OA_1B, OA_2B, OA_3B знаходимо відповідно

$$|OA_1| = |OB|\cos\alpha; \quad |OA_2| = |OB|\cos\beta; \quad |OA_3| = |OB|\cos\gamma.$$

Підставимо знайдені дані у рівність для OB і поділимо її на $|OB|^2$, тоді

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Таким чином, із трьох кутів α, β, γ лише два кути є незалежними.

Вектор, початок якого збігається з початком координат, позначають $\overrightarrow{OB}$ або $\vec{r}$. **Довжиною** або **модулем вектора** $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB і позначають $|\vec{a}|$, a, AB, $|\overrightarrow{AB}|$.

Два вектори називають **рівними між собою,** якщо рівні між собою їхні довжини (модулі), вони паралельні, тобто лежать на одній прямій або на паралельних прямих, і однаково напрямлені. Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називають **нульовим** або **нуль-вектором** і позначають $\vec{0}$.

2.2. Визначення вектора за компонентами

Розглянутий спосіб описання вектора грунтується на наочності і узагальненню на випадок n-вимірного простору не піддається. Тому розглянемо інший спосіб описання вектора.

Візьмемо тривимірний простір XYZ. Нехай у ньому задано вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Через початок і кінець цього вектора проведемо площини, паралельні координатним площинам. Координати точок перетину цих площин з координатними осями позначимо відповідно x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, (рис. 1.14).

Початок і кінець вектора $\vec{AB} = \vec{a}$ містяться в точках A (x_1, y_1, z_1) і B $(x_2, y_2, z_2,)$. Різниці $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ називають **компонентами (координатами** або **проекціями на координатні осі)** вектора $\vec{AB} = \vec{a}$.

Вектор $\vec{AB}$ однозначно визначається упорядкованою трійкою чисел $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$ або компонентами.

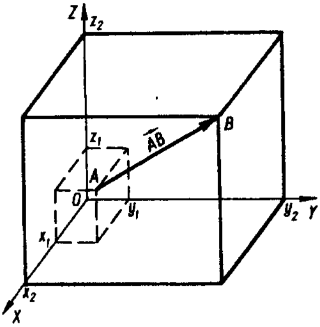


Рис. 1.14

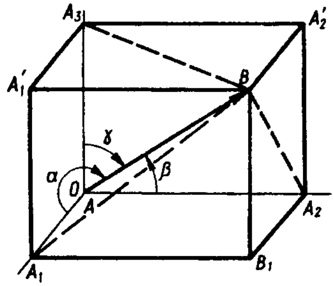


Рис. 1.15

Записують це так:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

Справді, побудуємо на $\vec{AB}$, як на діагоналі, прямокутний паралелепіпед $AA_1B_1A_2A_2'BA_1'A_3$ (рис. 1.15) із сторонами $AA_1 = x_2 - x_1$; $AA_2 = y_2 - y_1$; $AA_3 = z_2 - z_1$. Із прямокутних трикутників AA_1B, AA_2B, AA_3B знаходимо

$$a_x = x_2 - x_1 = |\vec{a}|\cos\alpha,$$

$$a_y = y_2 - y_1 = |\vec{a}|\cos\beta,$$

$$a_z = z_2 - z_1 = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

де $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Оскільки при паралельному переносі вектора його довжина і кути не змінюються, то два рівних між собою вектори завжди мають одні і ті самі компоненти.

Два вектори рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їхні відповідні компоненти.

Якщо початок вектора збігається з початком координат, то вектор $\vec{OB}$ називається **радіусом-вектором точки** B і його компоненти збігаються з координатами його кінця — точки B.

Розглянемо n-вимірний простір. Будь-яка упорядкована пара точок A і B n-вимірного простору називається **n-вимірним вектором.** Одна з цих точок називається **початком,** друга — **кінцем вектора.** Упорядкованій парі точок A і B з координатами A $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ і B $(y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ відповідає упорядкована сукупність різниць $a_1 = y_1 - x_1$; $a_2 = y_2 - x_2$; $a_3 = y_3 - x_3$; ...; $a_n = y_n - x_n$, які називають **компонентами вектора** $\vec{a}$ і пишуть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$. Таким чином, компоненти n-вимірного вектора — це упорядкований набір дійсних чисел. Тому n-вимірний вектор можна визначити як довільний упорядкований набір $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ дійсних чисел у вибраній системі координат.

Вектор, всі компоненти якого дорівнюють нулю, називається **нуль-вектором**. Два n-вимірні вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ вважаються рівними між собою, якщо рівні між собою їхні відповідні компоненти, тобто

$$\vec{a} = \vec{b},\ \text{якщо}\ a_1 = b_1;\ a_2 = b_2;\ ...;\ a_n = b_n;$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) = \vec{0},\ \text{якщо}\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ ...,\ a_n = 0.$$

Афінний простір називається **векторним простором,** якщо в ньому введено поняття вектора так, що:

1) будь-якій парі точок A і B відповідає єдиний вектор $\overrightarrow{AB}$;

2) для будь-якої точки A афінного простору і будь-якого вектора $\vec{a}$ існує єдина точка B така, що $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$;

3) для будь-яких трьох точок A, B і C справджується рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Компоненти n-вимірного вектора можна розміщувати у рядок або у стовпчик. У першому випадку говорять про **вектор-рядок** $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, а у другому — про **вектор-стовпець.** Вектор-рядок або вектор-стовпець називають ще **матрицею-рядком** або **матрицею- стовпцем** і позначають так:

$$\vec{a} = \|a_1 a_2 \dots a_n\|,\ \text{або}\ \vec{a} = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Vmatrix};$$

$$\vec{a} = (a_1 a_2 \dots a_n)\ \text{або}\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

2.3. Операції над векторами у наочному просторі

Додавання векторів. **Сумою двох векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, напрямлений із початку першого вектора в кінець другого, якщо початок другого вектора збігається з кінцем першого (рис. 1.16). Це правило додавання векторів називається **правилом трикутника.**

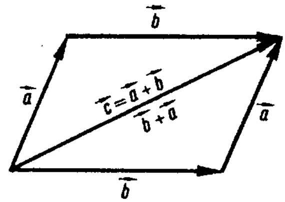


Рис. 1.16

Використовується також **правило паралелограма** додавання векторів.

Сумою векторів $\vec{a}+\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, який виходить із спільного початку даних векторів і збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

Сумою будь-якого скінченного числа векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ називається вектор $\vec{a}$, який утворюється внаслідок послідовного застосування правила трикутника (рис. 1.17).

Віднімання векторів. Два рівних між собою за довжиною, протилежних за напрямом і паралельних вектори $\vec{a}$ і $-\vec{a}$ називаються **протилежними векторами** (сума їх дорівнює нуль-вектору).

Віднімання векторів визначається як дія, обернена до додавання

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}, \text{ якщо } \vec{b}+\vec{c}=\vec{a},$$

або

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

Таким чином, *щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний до вектора $\vec{b}$* (рис. 1.18).

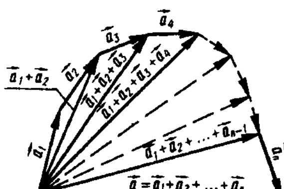
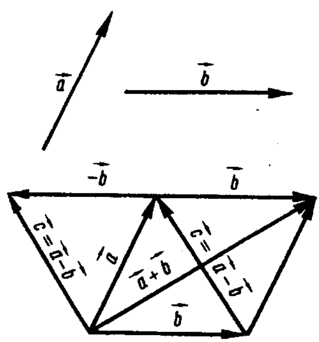


Рис. 1.17



Множення вектора на число. Нехай дано вектор $\vec{a}$ і деяке дійсне число λ. Тоді $\lambda\vec{a}$ є вектор, довжина якого дорівнює $|\lambda|\,|\vec{a}|$. Якщо $\lambda > 0$ і $\vec{a} \neq 0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені однаково (співнапрямлені); якщо $\lambda < 0$ і $\vec{a} \neq 0$, то вони напрямлені протилежно. Якщо $\lambda = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пов'язані співвідношенням $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то вони називаються **колінеарними.**

Операції додавання векторів і множення вектора на число мають такі властивості.

1°. *$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ для будь-яких векторів $\vec{a}$* і *$\vec{b}$*.

2°. *$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$* і *$\vec{c}$.*

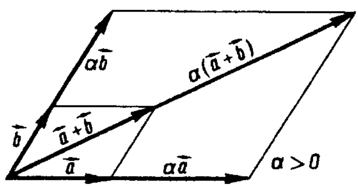


Рис. 1.19

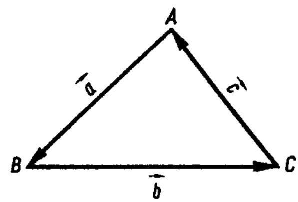


Рис. 1.20

3°. *Для будь-якого вектора $\vec{a}$*

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

4°. *Для будь-якого вектора $\vec{a}$ існує такий вектор $\vec{a}'$, що*

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}.$$

Вектор $\vec{a}'$ протилежний до вектора $\vec{a}$.

5°. *$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.*

6°. *$(\alpha\beta)\,\vec{a} = \alpha\,(\beta\vec{a})$ для будь-якого вектора $\vec{a}$ і будь-яких дійсних чисел α і β.*

7°. *$\alpha\,(\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) + (\alpha\vec{b})$ для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та будь-якого дійсного числа α* (рис. 1.19).

8°. *$(\alpha + \beta)\,\vec{a} = (\alpha\vec{a}) + (\beta\vec{a})$ для будь-якого вектора $\vec{a}$ і будь-яких дійсних чисел α і β.*

Приклад. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, щоб з них можна було утворити трикутник?

Розв'язання. Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють трикутник ABC (рис. 1.20). Очевидно, умова $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ є необхідною і достатньою умовою того, що ці вектори утворюють трикутник.

ВПРАВИ. **1.** Користуючись паралелограмом, побудованим на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перевірити графічно справедливість рівності:

а) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{b}$;

б) $\left(\vec{a}+\dfrac{\vec{b}}{2}\right)+\left(\vec{b}+\dfrac{\vec{a}}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

2. Якими мають бути вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб виконувались співвідношення:

а) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; б) $\vec{a}+\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$;

в) $\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$; г) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$?

3. Знайти радіус-вектор $\vec{r}$ середини відрізка AB, знаючи радіуси-вектори його кінців $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$.

2.4. Операції над векторами, заданими своїми компонентами

Сумою двох векторів $\vec{a}=\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ і $\vec{b}=\left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)$, які належать одному простору і задані своїми компонентами, називається третій вектор $\vec{c}=\left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонент даних векторів:

$$c_1=a_1+b_1;\;\; c_2=a_2+b_2;\;\; c_3=a_3+b_3;\;\; \ldots;\;\; c_n=a_n+b_n.$$

Векторну рівність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ можна записати ще так:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)+(b_1, b_2, \ldots, b_n)=$$
$$=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$$

(матриці-рядки можна додавати).

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які належать одному і тому самому простору, назвемо третій вектор $\vec{c}$, компоненти якого дорівнюють різниці компонент векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, \ldots, a_n-b_n).$$

Операція додавання векторів одного і того самого простору, що задані своїми компонентами, має властивості 1°–4° наочного простору.

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*переставний закон*).

2°. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (*сполучний закон*).

3°. *Для будь-якого* $\vec{a}$

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

4°. *Для будь-якого вектора* $\vec{a}$ *існує такий вектор* $\vec{a}'$, *що* $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$.

Вектор $\vec{a}'$ *називається вектором,* ***протилежним*** *до* $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$. Вектор $-\vec{a}$ має компоненти $(-a_1, -a_2, ..., -a_n)$.

Перейдемо до множення n-вимірного вектора, заданого своїми компонентами, на число.

Добутком n-вимірного вектора $\vec{a}=(a_1, a_2, ..., a_n)$ **на дійсне число** λ називається вектор, компоненти якого дорівнюють добуткам на це число компонент вектора $\vec{a}$:

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n).$$

Два n-вимірних вектори $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ і $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ називаються **колінеарними,** якщо справедливе співвідношення $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ (див. п. 2.3).

Як і в тривимірному просторі, операція множення вектора на число в n-вимірному просторі має властивості 5°–8° наочного простору.

2.5. Лінійний простір

Векторний простір називається **лінійним,** якщо у ньому визначено операції над векторами — додавання і множення на число із властивостями 1°—8° (п.2.3) цих операцій. Проте лінійний простір може бути утворений об'єктами будь-якої природи.

Нехай E — дана множина і x, y, z, ... — її елементи; K — множина усіх дійсних (або усіх комплексних) чисел α, β, γ, ... Нехай кожній парі x, y елементів множини E поставлено у відповідність деякий елемент тієї самої множини, який позначається $x + y$ і називається їхньою **сумою.** Нехай кожному елементу x множини E і кожному числу α із K поставлено у відповідність деякий елемент множини E, який позначається αx і називається **добутком** числа α на елемент x.

Якщо операція додавання елементів множини E і операція множення їх на число задовольняють розглянуті в п. 2.3 властивості 1°–8°, то множина E називається **дійсним** (відповідно **комплексним**) **лінійним векторним простором,** а його елементи, незалежно від їхньої природи, називаються **векторами.**

Так, множина многочленів не вище даного степеня із звичайними операціями додавання і множення на числа є лінійним векторним простором. У цьому розумінні кожний такий многочлен можна назвати вектором.

Множина функцій, неперервних на даному інтервалі, також називається векторним простором, і у цьому розумінні кожна така функція може бути названа вектором.

2.6. Система векторів і спосіб її задання. Лінійна комбінація векторів

Нехай задано систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ в n-вимірному просторі:

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \quad \text{або} \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \ldots \\ a_{1n} \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \quad \text{або} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{2n} \end{pmatrix},$$

. . . .

$$\vec{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}) \quad \text{або} \quad \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \ldots \\ a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Складемо із компонент векторів прямокутну таблицю, яка називається **прямокутною матрицею** і позначається буквою A:

$$A(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

або

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{k1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, задання системи векторів у n-вимірному просторі означає задання матриці, яку складено з компонент векторів даної системи. Для одновимірного простору, $n = 1$, матриця (2.1) перетворюється або на матрицю-рядок, або на матрицю-стовпець:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{k1} \end{pmatrix}.$$

Для двовимірного простору ($n = 2$) матриця (2.1) набирає вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k2} \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} \end{pmatrix}.$$

Для тривимірного простору ($n = 3$) маємо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{k3} \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{pmatrix}.$$

Нехай дано k векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$. Помножимо кожний вектор на число λ_j, де $j = 1, 2, \dots, k$, і знайдені результати додамо. У результаті цього дістанемо вектор, який називається лінійною **комбінацією даних векторів:**

$$\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k. \tag{2.2}$$

Числа λ_j називаються **коефіцієнтами даної лінійної комбінації.**

Якщо вектор $\vec{a}_j$ має компоненти $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$, а вектор $\vec{b}$ має компоненти $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, то рівність (2.2) запишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} b_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_k a_{1k}, \\ b_2 = \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_k a_{2k}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n = \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \dots + \lambda_k a_{nk}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Рівності (2.2) і (2.3) рівносильні. У першому випадку залежність записано у векторній формі, а у другому — в скалярній.

Розглянемо питання про те, чи може дорівнювати нулю лінійна комбінація векторів:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}. \tag{2.4}$$

Якщо рівність (2.4) можлива за умови, що принаймні одне з чисел λ_j, де $j = 1, 2, \ldots, k$, не дорівнює нулю, то система даних векторів називається **лінійно залежною,** а рівність (2.4) називається **нетривіальною**. Якщо ж рівність (2.4) можлива лише за умови, що всі $\lambda_j = 0$ одночасно дорівнюють нулю, то система даних векторів називається **лінійно незалежною,** а рівність (2.4) — **тривіальною.**

2.7. Матриці та їх види

Введемо поняття матриці незалежно від системи векторів. Запишемо прямокутну таблицю чисел із k рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{kn} \end{Vmatrix}.$$

Прямокутна таблиця, складена із довільного набору величин, називається **прямокутною матрицею.** При цьому величини називаються **елементами матриці,** а сукупність елементів, розкладених на горизонтальній (вертикальній) прямій, складають **рядок (стовпець) матриці.** Місце елемента визначається номером рядка і номером стовпця, на перетині яких він розміщений. У прийнятому позначенні перший індекс елемента вказує на номер рядка, а другий — на номер стовпця. Будь-який елемент матриці звичайно позначається через a_{ij}, де i — номер рядка, j— номер стовпця, на перетині яких розміщено цей елемент.

Наприклад, для матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

маємо $a_{13} = 3$, $a_{22} = 5$, $a_{32} = 8$.

Символічний добуток числа рядків k на число стовпців n матриці називають **розміром матриці** і позначають $k \times n$.

Матриця, в якій число рядків дорівнює числу стовпців, називається **квадратною матрицею:**

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її **порядком.** Так, матриця B має порядок n.

Наприклад,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця другого порядку,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ — матриця четвертого порядку.

Розмір квадратної матриці дорівнює n^2. У квадратних матрицях звичайно виділяють два види елементів. Це елементи, які містяться на діагоналях квадрата, складеного із елементів матриці. Елементи

$$b_{11},\ b_{22},\ b_{33},\ \ldots,\ b_{nn}$$

складають так звану **головну діагональ** матриці B, а сукупність елементів

$$b_{1n},\ b_{2(n-1)},\ \ldots,\ b_{n1}$$

— її побічну **діагональ.**

У матриці

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

елементи b_{11}, b_{22}, b_{33} складають головну діагональ, а елементи b_{13}, b_{22}, b_{31} — побічну.

Замінимо у матриці A рядки на стовпці так, щоб перший рядок став першим стовпцем, другий рядок — другим стовпцем, третій рядок — третім стовпцем тощо. У результаті цього дістанемо матрицю

$$A_{\text{т}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

Матриця A називається **транспонованою матрицею** відносно матриці A. Перехід матриці A до матриці A_{T} називається **операцією транспонування.** У матрицях A і A_{T} елементи a_{ij} і a'_{ij} пов'язані співвідношенням $a'_{ij} = a_{ji}$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$ і $j = 1, 2, \ldots, k$.

Наприклад, транспонуючи матрицю

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

дістанемо

$$C_{\text{T}} = (c_1 \; c_2 \; c_3).$$

Транспонуючи матрицю

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

дістанемо

$$C_{\text{T}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Як видно із попереднього, система векторів може бути задана двома матрицями, одна з яких є транспонованою відносно другої.

Матриця називається **нульовою,** якщо всі її елементи — нулі:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо в квадратній матриці всі елементи, розміщені поза головною діагоналлю, — нулі, то матриця називається **діагональною:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називається **одиничною.** Одинична матриця позначається так:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо для квадратної матриці B справджується рівність $b_{ij} = b_{ji}$, то матриця називається **симетричною.**

Наприклад, матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 5 & 4 \\ 8 & 5 & 0 & 2 \\ 9 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

є симетричною. Тут $b_{12} = b_{21} = 7$, $b_{13} = b_{31} = 8$, $b_{32} = b_{23} = 5$, $b_{41} = b_{14} = 9$, $b_{42} = b_{24} = 4$ тощо.

Симетричні матриці інваріантні відносно транспонування, тобто транспонована і задана матриці збігаються.

Дві матриці однакових розмірів, з однаковими відповідними елементами називаються **рівними між собою.**

2.8. Дії над матрицями

Сумою двох матриць однакових розмірів називається матриця такого самого розміру, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць, які додаються.

Сумою матриць A і B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

є матриця C

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Легко помітити, що операція додавання матриць, як і операція додавання чисел у арифметиці, підлягає переставному (комутативному) закону:

$$A + B = B + A.$$

Із означення суми матриць випливає, що сума будь-якої матриці і нуль-матриці того самого розміру дорівнює даній матриці:

$$A + 0 = A, \quad 0 + A = A,$$

Тобто нуль-матриця в теорії матриць виконує ту саму роль, що і число нуль у теорії чисел.

Різницею двох матриць однакових розмірів називається матриця того самого розміру, елементи якої дорівнюють різницям відповідних елементів матриць зменшуваного і від'ємника:

$$C = A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Матриці A і B називаються **протилежними,** якщо їхня сума $A + B = 0$ є нуль-матриця. Матриця, протилежна до матриці A, позначається $-A$, і її відповідні елементи протилежні до елементів матриці A, тоді

$$A - B = A + (-B).$$

Добутком матриці на число (або числа на матрицю) називається матриця, елементами якої є добутки елементів даної матриці на це число:

$$\lambda A = A\lambda = \lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операція множення матриці на число має розподільну властивість.

$$\lambda\ (A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

Якщо число $\lambda = 0$, то добуток $A \cdot 0$ дорівнює нуль-матриці:

$$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0.$$

Якщо порівняти означення операцій додавання, віднімання і множення матриць на число з аналогічними операціями над векторами, то легко помітити повну аналогію їх.

Введемо поняття лінійної залежності і незалежності матриць стосовно до матриці-стовпця або матриці-рядка.

Нехай дано набір матриць-стовпців з однаковою кількістю рядків

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix},\quad \dots,\quad A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Візьмемо набір чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ і помножимо λ_1 на A_1, λ_2 на A_2, ..., λ_k на A_k. Знайдені результати додамо. Дістанемо нову матрицю-стовпець

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_k a_{1k} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_k a_{2k} \\ \dots \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \dots + \lambda_k a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Вираз $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$ називається лінійною комбінацією стовпців $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Нехай задано матрицю-стовпець

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Доберемо числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ такі, що

$$B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k,$$

тобто

$$\begin{aligned} b_1 &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_k a_{1k}, \\ b_2 &= \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_k a_{2k}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n &= \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \dots + \lambda_k a_{nk}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Тоді говорять, що матриця-стовпець B лінійно виражається через матриці-стовпці $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Якщо для даних матриць-стовпців $A_1, A_2, \dots, A_k$ числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, принаймні одне з яких відмінне від нуля, можна дібрати такими, що лінійна комбінація

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k = 0 \tag{2.8}$$

дорівнює нуль-матриці, то дані матриці-стовпці називаються **лінійно залежними,** а якщо рівність (2.8) справджується тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, то **лінійно незалежними.** Якщо матриці-стовпці подати у вигляді векторів, то умова (2.8) збігається з умовою (2.4). Викладене має силу і для матриці-рядка.

Добутком двох матриць A і B, число стовпців першої з яких дорівнює числу рядків другої, називається третя матриця C, елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

Нехай дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix},$$

тоді їхній добуток

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix},$$

де

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, m; \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, p.$$

Наведене правило множення матриць викликане необхідністю записувати в компактній формі системи лінійних рівнянь, наприклад (2.3).

Дві матриці A і B називаються **узгодженими,** якщо число стовпців першої дорівнює числу рядків другої, тобто вони мають розміри $m \times n$ і $n \times p$. Перемножати можна тільки узгоджені матриці.

Приклад. Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Р о з в' я з а н н я. Ці матриці можна перемножати, тому що число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. За означенням знаходимо

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + (-4)(-1) \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Якщо розміри матриць A і B відповідно $m \times n$ і $n \times p$, то розмір матриці-добутку $A \cdot B$ є $m \times p$, тобто $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$.

В л а с т и в о с т і о п е р а ц і ї м н о ж е н н я м а т р и ц ь.

1°. *Добуток будь-якої матриці на узгоджену з нею нуль-матрицю дорівнює нуль-матриці:*

$$A \cdot 0 = 0.$$

2°. *Добуток будь-якої матриці на узгоджену з нею одиничну матрицю дорівнює даній матриці:*

$$A \cdot E = A.$$

3°. *Добуток матриць не має переставної (комутативної) властивості, тобто не завжди $A \cdot B = B \cdot A$. При цьому передбачається, що як $A \cdot B$, так і $B \cdot A$ мають сенс.*

Якщо $A \cdot B = B \cdot A$, то матриці називаються **переставними (комутативними).**

4°. *Нехай A, B і C — матриці, які можна додавати або перемножати, а α — деяке число, тоді справедливі такі рівності:*

$$\alpha\,(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B),$$
$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

5°. *Якщо дано матриці A і B, то для транспонованих відповідних матриць $A_т$ і $B_т$ виконується співвідношення*

$$(AB)_т = B_т A_т.$$

6°. *Якщо для квадратної матриці A виконується рівність $A_т = A$, то ця матриця симетрична.*

2.9. Визначник і мінори матриці

Розглянемо квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке називається **детермінантом** або **визначником матриці.** Детермінант матриці позначається так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.9)$$

Детермінант так само, як і матриці, має порядок. Він дорівнює порядку відповідної матриці. Детермінанти можуть бути першого, другого і n-го порядків. Поняття детермінанта вводиться лише для квадратних матриць. Якщо розглянути деякий елемент квадратної матриці A, який позначимо a_{ij}, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця, і побудувати матрицю без цього рядка і стовпця, то дістанемо матрицю $(n-1)$-го порядку

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.10)$$

Цій матриці відповідає визначник $(n-1)$-го порядку, який називається **мінором матриці** A, який відповідає елементу a_{ij}.

Мінором $(n-1)$-го порядку **елемента** a_{ij} **матриці** n-го порядку називається визначник нової матриці, яка утворюється з даної матриці внаслідок викреслювання рядка і стовпця, які перетинаються на цьому елементі. Мінор матриці позначається так:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.11)$$

У матриці першого порядку $A = (a_{11})$ за означенням мінора немає.

Матриця другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ має чотири мінори першого порядку:

$$M_{11} = a_{22}; \qquad M_{12} = a_{21}; \qquad M_{21} = a_{12}; \qquad M_{22} = a_{11}.$$

Для матриці (2.10) мінори $M_{11}, M_{22}, ..., M_{nn}$ називаються **головними.**

Тепер означимо детермінант порядку n, де $n > 1$, як величину, що можна знайти за формулою

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}. \qquad (2.12)$$

Це означення є змістовним у індуктивному плані. Наприклад,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Як бачимо, визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів, які стоять на головній і побічній діагоналях.

Якщо маємо визначник третього порядку, то

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Перший доданок у цій рівності є добутком елементів, розміщених на головній діагоналі. Два наступних доданки є добутками елементів,

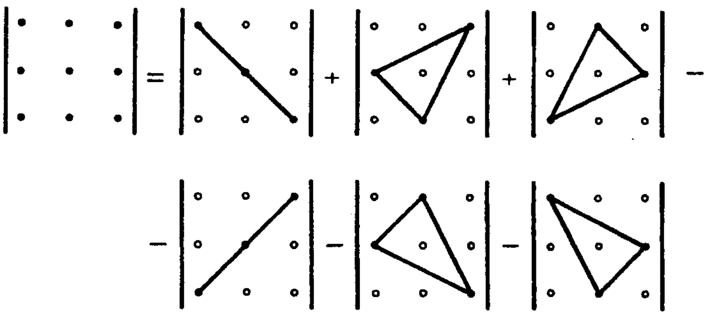
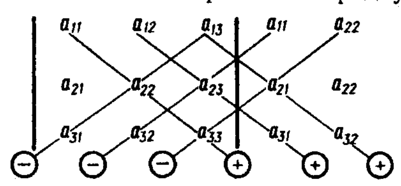


Рис. 1.21

два з яких лежать на прямій, паралельній головній діагоналі, а третій — на вершині побічної діагоналі. При цьому всі три добутки беруться із своїми знаками. Наступні три доданки утворюються аналогічно, але замість елементів головної діагоналі треба взяти елементи, які стоять на побічній діагоналі, і всі добутки записати з протилежними знаками. Це правило знаходження визначника третього порядку називається **правилом трикутників** (рис. 1.21).

Правило трикутників можна замінити правилом «приписування» стовпців, яке передбачає приписування двох перших стовпців справа від визначника:



Легко помітити, що співмножники кожного з шести доданків правила трикутників тепер розміщуються на прямих, паралельних головній і побічній діагоналям.

Введемо поняття **алгебраїчного доповнення елемента** a_{ij}, позначивши його через A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{2.13}$$

Тоді визначення детермінанта можна записати у вигляді

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} \qquad (2.14)$$

і довести, що

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} M_{ij}, \; i = 1, 2, ..., n, \qquad (2.15)$$

або

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \; j = 1, 2, ..., n.$$

Формули (2.15) називаються **розкладом детермінанта за елементами рядка або стовпця.**

Визначник дорівнює сумі добутків елементів a_{ij} деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

Використовуючи формули (2.15), запишемо розклад визначника третього порядку за елементами, наприклад, першого рядка:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \qquad (2.16)$$

де

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, щоб розкрити визначник третього порядку, можна використати три правила: правило трикутників, правило приписування рядків і правило розкладання за елементами якого-небудь стовпця або рядка.

Розкривають визначник вищого порядку лише розкладанням за елементами якого-небудь стовпця або рядка.

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{vmatrix}.$$

Р о з в' я з а н н я. Розкладемо визначник за елементами четвертого рядка:

$$\Delta = 0 + 0 + (-1)^{4+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 19 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 18 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи визначник третього порядку за правилом трикутників або приписування стовпців, дістанемо

$$\Delta = -2 \cdot 12 + 18 \cdot 2 = 12.$$

2.10. Властивості визначників

1°. *Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити стовпцями, причому кожний рядок замінити стовпцем з тим самим номером.*

Ця властивість означає *рівнозначність рядків і стовпців визначника.*

2°. *Якщо поміняти місцями два стовпці (рядки) визначника, то визначник поміняє знак на протилежний.*

Для доведення властивостей 1° і 2° достатньо розкрити кожний визначник і порівняти знайдені результати.

3°. *Визначник, який має два однакові стовпці (рядки), дорівнює нулю.*

Дійсно, нехай визначник Δ має два однакові стовпці. Тоді, помінявши місцями ці стовпці, дістанемо визначник, що дорівнює $-\Delta$, тобто $\Delta = -\Delta$, звідси знаходимо $2\Delta = 0$, або $\Delta = 0$.

4°. *Якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.* Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ma_{12} \\ a_{21} & ma_{22} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Звідси як наслідок маємо, що коли помножити всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) на одне і те саме число, то і визначник помножиться на це число.

Якщо елементи стовпця визначника подати як компоненти вектора, то властивість 4° випливає із означення операції множення вектора на число.

5°. *Визначник, елементи двох стовпців (рядків) якого відповідно пропорціональні, дорівнює нулю.*

Дійсно, нехай маємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

в якому $a_{12} = ma_{11}$ і $a_{22} = ma_{21}$. Тоді, враховуючи властивості 3°, 4°, дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & ma_{11} \\ a_{21} & ma_{21} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

6°. *Якщо кожний елемент якого-небудь стовпця (рядка) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких стовпцями (рядками) є відповідні доданки, а решта збігається із* *стовпцями (рядками) заданого визначника:*

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Якщо позначити

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

то

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

тобто властивість 6° виражає правило додавання визначників.

7°. *Визначник не зміниться, якщо до елементів якого-небудь його стовпця (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка), помножені на одне і те саме число.*

Справді, нехай дано два визначники, наприклад, третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{і} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}+ma_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ma_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ma_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тоді з урахуванням властивостей 3°, 4° і 6°, маємо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + m \cdot 0 = \Delta.$$

8°. *Сума добутків елементів a_{ij} деякого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

2.11. Скалярна форма лінійної залежності і незалежності системи векторів

Для вирішення питання про лінійну залежність (незалежність) системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ вираз (2.4)

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \cdots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}$$

запишемо в скалярній формі:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.17)$$

або

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_k a_{1k} = 0, \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_k a_{2k} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \cdots + \lambda_k a_{nk} = 0. \end{cases} \qquad (2.18)$$

Ця система називається лінійною однорідною системою рівнянь з невідомими $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Вона має завжди так званий тривіальний або нульовий розв'язок $(0, 0, \ldots, 0)$. Якщо крім тривіального розв'язку в системі (2.18) існують й інші розв'язки, то система даних векторів лінійно залежна, а якщо система (2.18), крім тривіального, інших розв'язків не має, то система даних векторів буде лінійно незалежною.

Систему (2.18) завжди можна розв'язати методом виключення відносно невідомих $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Приклад. Показати, що вектори $\vec{a}_1 = (1, 3)$ і $\vec{a}_2 = (2, 6)$ лінійно залежні.

Р о з в' я з а н н я. Складемо лінійну комбінацію векторів:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 + 2\lambda_2\\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2\end{pmatrix}$$

і з'ясуємо, при яких λ_1 і λ_2 виконується рівність

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 = \vec{0}. \qquad (2.19)$$

Це векторне рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0; \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Поділивши обидві частини другого рівняння на 3, помічаємо, що рівняння системи однакові, тобто

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0.$$

Це рівняння має не рівні нулю розв'язки для λ_1 і λ_2. Наприклад, при $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = -1$ рівність (2.19) виконується. Тому вектори $\vec{a}_1 = (1, 3)$ і $\vec{a}_2 = (2, 6)$ лінійно залежні.

ВПРАВИ. **1**. Довести лінійну залежність векторів:

а) $\vec{a}_1 = (2, -1, 2)$ і $\vec{a}_2 = (6, -3, 6)$;

б) $\vec{a}_1 = (5, 2)$, $\vec{a}_2 = (10, 4)$, $\vec{a}_3 = (-15, -6)$.

2. Довести лінійну незалежність векторів:

а) $\vec{a}_1 = (1, 3)$ і $\vec{a}_2 = (2, 5)$;

б) $\vec{a}_1 = (2, -1, -2)$ і $\vec{a}_2 = (6, -3, 1)$;

в) $\vec{a}_1 = (5, 2)$ і $\vec{a}_2 = (10, 0)$.

2.12. Теореми про лінійно залежні і лінійно незалежні вектори

Теорема 1. *Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ лінійно залежна, то після приєднання до неї будь-якої кількості нових векторів знову утворюється лінійно залежна система.*

Доведення. Це випливає із рівності

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{a}_k + \lambda_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \cdots + \lambda_{k+m}\vec{a}_{k+m} = \vec{0},$$

в якій серед λ_1, λ_2, ..., λ_k є такі, які відрізняються від нуля, а всі λ_{k+1}, λ_{k+2}, ..., λ_{k+m} дорівнюють нулю.

Нехай задано систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$. Будь-яку частину цієї системи векторів назвемо її підсистемою. Тоді теорему 1 можна сформулювати так: *Якщо будь-яка підсистема даної системи векторів лінійно залежна, то і сама система лінійно залежна.*

Для системи лінійно незалежних векторів справедливе таке твердження:

якщо система складається із лінійно незалежних векторів, то будь-яка її підсистема також складається із лінійно незалежних векторів.

Теорема 2. *Для того щоб система із k векторів була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один із її векторів був лінійною комбінацією решти векторів.*

Теорема 3. *Будь-яка система векторів, до якої входить нуль-вектор, є лінійно залежною.*

Теорема 4. *Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ лінійно незалежна, а система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{b}$ — лінійно залежна, то вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією решти векторів системи.*

Доведення. Рівність

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{a}_k + \lambda\vec{b} = \vec{0}$$

можлива лише при $\lambda \neq 0$, тому що в протилежному випадку дана система буде лінійно незалежною. З останньої рівності знаходимо

$$\vec{b} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda}\vec{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda}\vec{a}_k.$$

Позначивши

$$\alpha_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda}; \quad \alpha_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda}; \quad \ldots; \quad \alpha_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda},$$

дістанемо

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{a}_k.$$

Теорема 5. *Якщо $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ — лінійно незалежна система векторів, а вектор $\vec{b}$ не можна подати у вигляді лінійної комбінації цих векторів, то система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{b}$ є лінійно незалежною.*

Цю теорему легко довести від супротивного.

2.13. Базис. Лінійний підпростір. Ранг матриці

Будь-яку впорядковану сукупність n векторів називають **базисом деякого простору,** якщо:

1) усі вектори даної сукупності лінійно незалежні;

2) будь-який вектор цього простору є лінійною комбінацією даної сукупності векторів.

Теорема 1. *У n-вимірному просторі система векторів*

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, ..., 0),$$
$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{e}_n = (0, 0, 0, ..., 1)$$

являється базисом цього простору.

Доведення. 1) Доведемо, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ лінійно незалежні. Для цього треба довести, що векторне рівняння

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0} \qquad (2.20)$$

має лише тривіальний розв'язок: $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. Рівність (2.20) рівносильна системі скалярних рівнянь

$$\lambda_1 \cdot 1 = 0;\ \lambda_2 \cdot 1 = 0;\ ...,\ \lambda_n \cdot 1 = 0,$$

які мають єдиний розв'язок:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$$

2) Легко помітити, що будь-який вектор $\vec{a}$ з відмінними від нуля компонентами $a_1, a_2, ..., a_n$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ з коефіцієнтами $a_1, a_2, ..., a_n$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n, \qquad (2.21)$$

тобто система $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ є базисом. Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ називають **ортонормованим,** а рівність (2.21) — **розкладом вектора** $\vec{a}$ у лінійному просторі за ортонормованим базисом.

Для тривимірного простору ортонормовані вектори базису називаються **ортами** (рис. 1.22) і позначаються так:

$$\vec{i} = (1, 0, 0);\quad \vec{j} = (0, 1, 0);\quad \vec{k} = (0, 0, 1).$$

Розклад (2.21) вектора $\vec{a}$ для тривимірного простору має вигляд

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}. \tag{2.22}$$

Оскільки a_1, a_2, a_3 є проекціями вектора $\vec{a}$ на осі координат, то

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{2.23}$$

Теорема 2. *Будь-яка впорядкована система n лінійно незалежних векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ n-вимірного простору є його базисом.*

Для доведення того, що система векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ є базисом, достатньо довести, що система векторів $\vec{a}$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ де $\vec{a}$ — будь-який відмінний від нуля вектор n-вимірного лінійного простору, лінійно залежна.

Доведення. Запишемо лінійну комбінацію векторів $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$

$$\mu\vec{a} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{b}_i = \vec{0}.$$

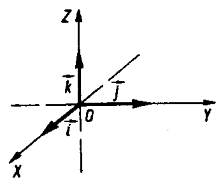


Рис. 1.22

Використовуючи теорему 1, виражаємо вектори $\vec{b}_i$ через вектори базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$:

$$\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\vec{e}_i, \qquad i, j = 1, 2, ..., n,$$

тоді

$$\mu\vec{a} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\vec{e}_j = \vec{0}$$

або

$$\mu\vec{a} + \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_{i1}\right)\vec{e}_1 + \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_{i2}\right)\vec{e}_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_{in}\right)\vec{e}_n = \vec{0}.$$

Звідси випливає, що $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, тобто $\mu \neq 0$. Це означає, що система $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ лінійно залежна. Будь-який вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$:

$$\vec{a} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_n\vec{b}_n. \tag{2.24}$$

Теорему доведено.

Числа x_1, x_2, ..., x_n називаються **компонентами вектора** $\vec{a}$ в базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$. Вираз (2.24) називають **розкладом вектора** $\vec{a}$ **за базисом** $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$.

Порівнюючи (2.21) і (2.24), можна стверджувати, що один і той самий вектор у різних базисах має різні компоненти. Однак в одному і тому самому базисі компоненти вектора визначаються однозначно.

Теорема 3. *У заданому базисі компоненти вектора визначаються однозначно.*

Доведення. Припустимо, що вектор $\vec{a}$ в базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ має різні компоненти:

$$\vec{a} = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ і } \vec{a} = (y_1, y_2, ..., y_n).$$

Тоді, використовуючи рівність (2.24), можна записати

$$\vec{a} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_n\vec{b}_n \tag{2.25}$$

та

$$\vec{a} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + \cdots + y_n\vec{b}_n. \tag{2.26}$$

Віднімаючи від рівності (2.25) рівність (2.26), дістанемо

$$(x_1 - y_1)\vec{b}_1 + (x_2 - y_2)\vec{b}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\vec{b}_n = 0. \tag{2.27}$$

Оскільки вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ — лінійно незалежні, то рівність (2.27) можлива тільки при

$$x_1 - y_1 = 0,\ x_2 - y_2 = 0,\ ...,\ x_n - y_n = 0,$$

звідки

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ ...,\ x_n = y_n.$$

Отже, розклад (2.24) єдиний.

Наслідок. *У n-вимірному лінійному просторі максимальне число лінійно незалежних векторів дорівнює числу його вимірів (розмірності).*

Доведення. У теоремі 2 доведено, що у n-вимірному просторі лінійно незалежних векторів є n, а додавання одного вектора, відмінного від нуль-вектора, робить систему векторів лінійно залежною.

Відповідно до цього наслідку можна дати таке означення розмірності простору: максимальне число лінійно незалежних векторів простору називається розмірністю простору.

У нульовому просторі немає базису, оскільки система, яка складається з нуль-вектора, лінійно залежна. Тому розмірність нульового простору приймається рівною нулю. Може статись, що набір векторів простору з будь-яким номером є лінійно незалежною системою векторів. Тоді простір вважається **нескінченновимірним.**

Теореми 1–3 стосовно до наочних просторів дають змогу сформулювати такі твердження:

1. *Будь-які два непаралельні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на площині є лінійно незалежними, а будь-які три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежними, причому* *будь який третій вектор можна подати у вигляді лінійної комбінації двох лінійно незалежних векторів:*

$$\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b}. \tag{2.28}$$

2. *Будь-які три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які непаралельні і не лежать в одній площині, є лінійно незалежними. Причому будь-який четвертий вектор $\vec{d}$ є лінійною комбінацією трьох даних векторів:*

$$\vec{d} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c}. \tag{2.29}$$

Зазначимо, що вектори, розміщені в одній і тій самій площині або паралельні одній і тій самій площині, називаються **компланарними.** Умова (2.28) саме і відповідає умові компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Іноді цю умову записують ще й у вигляді

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0},\ \lambda_3 \neq 0, \tag{2.30}$$

а умову (2.29) — у вигляді

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} + \lambda_4 \vec{d} = \vec{0}, \tag{2.31}$$

де λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — дійсні числа і $\lambda_4 \neq 0$.

Множина векторів називається **лінійним підпростором (лінійним многовидом),** якщо сума будь-яких векторів цієї множини є вектором, який належить до цієї самої множини, і добуток числа на вектор цієї множини є вектором, який належить до цієї самої множини.

Так, двовимірний простір є підпростором тривимірного простору, оскільки сума будь-яких двох векторів, які належать деякій площині, належить цій самій площині; те саме стосується і множення вектора на число.

Будь-який лінійний простір можна розглядати як підпростір. Нульовий простір (простір, який складається тільки з нульового вектора) є нульовим підпростором.

Розмірність підпростору визначається так само, як і для простору,— максимальним числом лінійно незалежних векторів.

Два підпростори γ_1 і γ_2 збігаються, якщо будь-який вектор $\vec{a} \in \gamma_1$ належить γ_2, і навпаки.

З підпросторами можна виконувати дії додавання і множення (перерізу). Так, **перерізом** двох підпросторів γ_1 і γ_2 називається підпростір, який складається з векторів, що належать одночасно двом підпросторам.

ВПРАВИ. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис тривимірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі, якщо:

а) $\vec{a} = (2, -1, -1)$, $\vec{b} = (2, -3, 0)$, $\vec{c} = (1, 1, -1)$ і $\vec{d} = (-5, -4, -2)$;

б) $\vec{a} = (-3, 2, -2)$, $\vec{b} = (3, -2, -1)$, $\vec{c} = (1, 1, -1)$ і $\vec{d} = (4, -1, -5)$;

в) $\vec{a} = (3, 3, 1)$, $\vec{b} = (2, -2, 1)$, $\vec{c} = (2, 1, 1)$ і $\vec{d} = (3, 9, 1)$.

У п. 2.9 введено поняття мінора для квадратної матриці. Проте поняття мінора можна ввести і для прямокутної матриці. Для цього треба з прямокутної матриці закреслити стільки рядків і стовпців, щоб після закреслювання утворювалась квадратна матриця.

Наприклад, для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

можна побудувати чотири квадратні матриці третього порядку:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Кожний з визначників цих матриць буде мінором матриці A.

Нехай дано матрицю розміру $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

У цій матриці вибираємо які-небудь s рядків та s стовпців і побудуємо квадратні матриці для кожної такої комбінації. Визначники цих матриць є мінорами матриці A.

Введемо поняття рангу матриці. Якщо матриця має відмінний від нуля мінор порядку r, а всі мінори вищого порядку (якщо вони є) дорівнюють нулю, то число r називається **рангом матриці.** Це записують так: $r = \operatorname{rang} A = \operatorname{Rg} A$. Ранг нуль-матриці за означенням вважають рівним нулю. Відмінний від нуля мінор найвищого порядку називається **базисним.** Зрозуміло, що у матриці може бути декілька базисних мінорів. Стовпці матриці, на яких міститься базисний мінор, називаються **базисними стовпцями,** а рядки, на яких він лежить,— **базисними рядками.**

Теорема 1 (про базисний мінор). *Базисні стовпці (рядки) лінійно незалежні. Будь-який рядок (стовпець) довільної матриці є лінійною комбінацією базисних рядків (стовпців).*

Доведення цієї теореми не наводимо. Із теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок. *Максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків, і це число дорівнює рангу матриці.*

Якщо рядки (стовпці) матриці являють собою компоненти векторів, то ранг матриці розміру $m \times n$ дорівнює числу r її лінійно незалежних векторів. При цьому $r \le m \le n$. Число лінійно незалежних векторів у системі векторів називають рангом системи векторів. Ранг системи векторів дорівнює рангу матриці, яка складається із компонентів цих векторів.

Для визначення рангу матриці використовується метод обвідних (які містять у собі) мінорів, що грунтується на такій теоремі.

Теорема 2. *Якщо матриця A містить мінор r-го порядку, який не дорівнює нулю, а всі мінори $(r+1)$-го порядку, що обводять цей мінор, дорівнюють нулю, то r є рангом матриці.*

Приклад. Визначити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо матриці третього порядку:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Мінор першого порядку, розміщений у верхньому куті матриці A_1, не дорівнює нулю $(1 \ne 0)$. Обвідний її мінор другого порядку також не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \ne 0.$$

Обвідний мінор третього порядку матриці A_1

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 + 4 - 9 + 4 - 2 = 0.$$

Інші матриці A_2, A_3, A_4 дадуть ті самі результати, що і матриця A_1. *Відповідь.* $r(A) = 2$.

Для обчислення рангу матриці A застосовується також **метод елементарних перетворень.**

Елементарними перетвореннями матриці є:

1) перестановка рядків (стовпців);

2) множення стовпця (рядка) на число, відмінне від нуля;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), попередньо помножених на деяке число.

Справедлива така теорема.

Теорема 3. *Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.*

Скориставшись цими перетвореннями, матрицю можна привести до вигляду, коли усі її елементи, крім α_{11}, α_{22}, ..., α_{rr}, де $r \leq \min(m, n)$, дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці дорівнює r.

Приклад. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Застосовуючи послідовно елементарні перетворення, дістанемо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $r = 2$.

2.14. Скалярний добуток двох векторів

Добуток двох векторів може бути як числом, так і вектором. Для наочних просторів **скалярним добутком** двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута між ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \qquad (2.32)$$

У n-вимірному просторі скалярний добуток двох векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ визначається такою рівністю:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n. \qquad (2.33)$$

В л а с т и в о с т і с к а л я р н о г о д о б у т к у.

1°. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2°. $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$;

3°. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

4°. *Якщо* $\vec{a} \neq 0$, *то* $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$; *якщо* $\vec{a} = \vec{0}$, *то* $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$.

Розглянемо питання про рівність нулю скалярного добутку, якщо кожний із векторів-співмножників не є нуль-вектором.

Візьмемо рівність

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ або } a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 0.$$

Така рівність цілком можлива. Наприклад, для векторів $\vec{a} = (2, 3, 4, 1)$ і $\vec{b} = (3, -4, 1, 2)$ маємо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0.$$

Вектори, скалярний добуток яких дорівнює нулю, називаються **ортогональними.** Скалярний добуток векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ дорівнює $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ при $i \neq j$ і $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1$ при $i = j$. Отже, вектори базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ попарно ортогональні. Для наочного простору поняття ортогональності і перпендикулярності збігаються. Дійсно, якщо скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то з формули (2.32) випливає, що $\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0$, а це можливо, коли $\vec{a} \perp \vec{b}$, оскільки $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$.

2.15. Довжина вектора і кут у n-вимірному просторі. Нерівність Буняковського — Коші — Шварца

Згідно з означенням, якщо $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ не є нуль-вектором, то

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0. \tag{2.34}$$

Позначимо $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ і назвемо **скалярним квадратом вектора** $\vec{a}$.

Довжиною вектора $\vec{a}$ у n-вимірному просторі називається арифметичне значення квадратного кореня із його скалярного квадрата:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}. \tag{2.35}$$

Це означення довжини вектора є узагальненням поняття довжини вектора в наочному просторі. Знайдемо довжину будь-якого вектора системи ортонормованих векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$:

$$|\vec{e}_i| = \sqrt{\vec{e}_i^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + \dots + 1^2 + 0^2 + \dots + 0^2} = 1.$$

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається **нормованим (одиничним).** Легко помітити, що нормований вектор

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \tag{2.36}$$

Якщо у лінійному просторі визначено скалярний добуток двох векторів за правилом (2.33) із властивостями 1°–4°, то лінійний простір називається **евклідовим.**

Введемо поняття відстані між двома точками евклідового простору. В лінійному евклідовому просторі вектор — це напрямлений відрізок, початком якого є деяка точка A $(x_1, x_2, ..., x_n)$, а кінцем — точка B $(y_1, y_2, ..., y_n)$. Довжина вектора, що сполучає точки A і B, позначається $|\vec{AB}|$ і приймається за відстань між цими точками:

$$|\vec{AB}| = AB = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Компонентами вектора $\vec{a}$ є різниці

$$a_1 = y_1 - x_1, \quad a_2 = y_2 - x_2, \quad ..., \quad a_n = y_n - x_n,$$

тому $$AB = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}. \qquad (2.37)$$

Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у n-вимірному просторі назвемо будь-яке число φ, яке задовольняє умову

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \qquad (2.38)$$

звідки $$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (2.39)$$

Для того щоб це означення мало сенс, необхідно довести, що

$$-1 \le \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \le 1 \quad \text{або} \quad \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{(\vec{a}\cdot\vec{a})^2(\vec{b}\cdot\vec{b})^2} \le 1,$$

тобто $$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \le (\vec{a}\cdot\vec{a})^2(\vec{b}\cdot\vec{b})^2, \qquad (2.40)$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|. \qquad (2.41)$$

Ця нерівність називається **нерівністю Буняковського**[1] — **Коші**[2] — **Шварца**[3]. Таким чином означення (2.38) справджується, якщо доведемо нерівність (2.41). Останнє випливає з умови 4 (п. 2.14), що запишемо у вигляді

$$(\vec{a} - \lambda\vec{b})\cdot(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \ge 0,$$

де λ – будь-яке число. Після розкриття дужок λ покладемо рівним $\lambda = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ $(\vec{a} \ne 0; \vec{b} \ne 0)$. Нерівність (2.41)доведена.

Доведемо так зване **правило трикутника.** Для наочного простору відомо, що довжина будь-якої сторони трикутника не більша за суму довжин двох інших його сторін:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|. \qquad (2.42)$$

---

[1] В. Я. Буняковський (1804–1889) — російський математик.
[2] О. Л. Коші (1789–1857) — французький математик.
[3] К. Г. А. Шварц (1843–1921) — німецький математик.

Покажемо, що ця нерівність справджується і для n-вимірних векторів. Дійсно, нерівність (2.42) можна записати у вигляді

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 \le \left(\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\right)^2,$$

але

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2.$$

Враховуючи нерівність (2.41), маємо

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 \le \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right| + \left|\vec{b}\right|^2 = \left(\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\right)^2,$$

звідки й випливає нерівність (2.42).

2.16. Проекція вектора на вісь

Надалі напрям осі визначатимемо одиничним вектором $\vec{e}$, а вісь позначимо буквою u.

Нехай дано вектор $\vec{a}$ і вісь u. Проекцією a_u вектора $\vec{a}$ на вісь u називається довжина відрізка $A'B'$, який відтинається від цієї осі

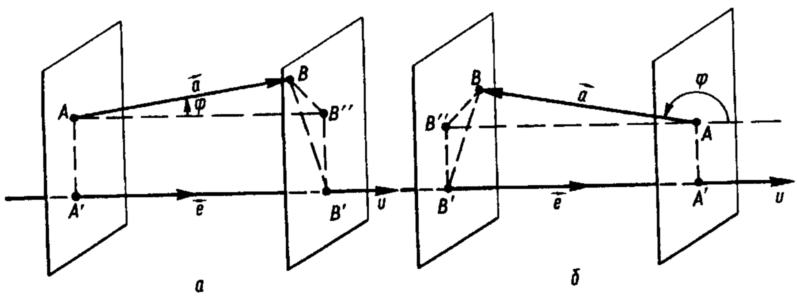


Рис. 1.23

площинами, що проходять через початок A і кінець B вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ перпендикулярно до осі. Довжину відрізка $A'B'$ беремо із знаком «плюс» або «мінус» залежно від того, однаково чи протилежно напрямлені вектор $\overrightarrow{AB}$ і вісь u (рис. 1.23, $а$, $б$), тобто

$$a_u = \pm\,|A'B'|.$$

Проведемо через точку A пряму, паралельну осі u, до перетину з площиною, яка перпендикулярна до осі u і проходить через точку B. Дістанемо відрізок AB''. Позначимо через φ кут між віссю u і вектором $\vec{a}$. Тоді з прямокутного трикутника ABB'' знаходимо

$$AB'' = a_u = |\vec{a}|\cos\varphi,$$

причому

$$a_u = |A'B'| = |\vec{a}|\cos\varphi, \text{ якщо } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$

$$a_u = -|A'B'| = |\vec{a}|\cos\varphi, \text{ якщо } \frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi.$$

Таким чином, *проекція вектора на вісь дорівнює добутку довжини вектора на косинус кута між віссю і вектором*:

$$a_u = |\vec{a}|\cos\varphi = a\cos\varphi. \tag{2.43}$$

Проекцію вектора на вісь позначають ще й так:

$$\text{пр}_u\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a}, u}\right). \tag{2.44}$$

Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь u, одиничний вектор якої $\vec{e}$, можна подати у вигляді скалярного добутку вектора $\vec{a}$ на одиничний вектор $\vec{e}$:

$$\text{пр}_u\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = |\vec{a}||\vec{e}|\cos\varphi = \vec{a}\cdot\vec{e}. \tag{2.45}$$

Розглянемо проекцію вектора на вектор. *Проекція одного вектора на інший дорівнює скалярному добутку першого вектора на одиничний вектор другого*:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \text{пр}_{\vec{b}_0}\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b}_0, \tag{2.46}$$

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \text{пр}_{\vec{a}_0}\vec{b} = \vec{a}_0\cdot\vec{b}, \tag{2.47}$$

де $\vec{b}_0 = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ і $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ — відповідно одиничні вектори векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$.

Для координатних осей декартової прямокутної системи координат XYZ одиничні вектори, як уже зазначалось, відповідно позначають $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тоді проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі

$$a_x = \text{пр}_x\,\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{i} = |\vec{a}|\cos\alpha,$$

$$a_y = \text{пр}_y\,\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{j} = |\vec{a}|\cos\beta,$$

$$a_z = \text{пр}_z\,\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{k} = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

де α, β і γ — напрямні кути вектора $\vec{a}$. Ці формули вже було знайдено в п. 2.2.

Скориставшись формулами (2.46) і (2.47), скалярний добуток

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)$$

можна записати у вигляді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a},\qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}. \tag{2.48}$$

Теорема. *Проекція на вісь лінійної комбінації скінченного числа векторів дорівнює відповідній лінійній комбінації їхніх проекцій на ту саму вісь*:

$$\text{пр}_u\left(\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n\right)=$$

$$=\alpha_1\,\text{пр}_u\,\vec{a}_1+\alpha_2\,\text{пр}_u\,\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\,\text{пр}_u\,\vec{a}_n. \tag{2.49}$$

Доведення. Використавши рівність (2.45) і властивість скалярного добутку, дістанемо рівність (2.49).

Наслідок 1. *Проекція суми скінченного числа векторів на вісь (вектор) дорівнює сумі відповідних проекцій цих векторів на ту саму вісь (вектор)*.

Для доведення треба у формулі (2.49) покласти

$$\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=1.$$

Наслідок 2. *Сталий множник можна виносити за знак проекції*:

$$\text{пр}_u\left(\alpha\vec{a}\right)=\alpha\,\text{пр}_u\,\vec{a}.$$

2.17. Основні застосування скалярного добутку двох векторів

Нехай два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано їхніми проекціями:

$$\vec{a}=(a_x,\,a_y,\,a_z)\text{ і }\vec{b}=(b_x,\,b_y,\,b_z).$$

Тоді можна знайти:

а) кут між даними векторами (напрямами)

$$\cos\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}; \tag{2.50}$$

б) проекцію одного вектора на інший

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=\vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

в) роботу сталої сили на прямолінійній ділянці шляху.

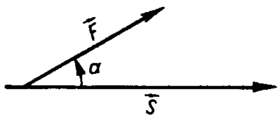


Рис. 1.24

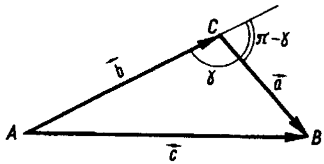


Рис. 1.25

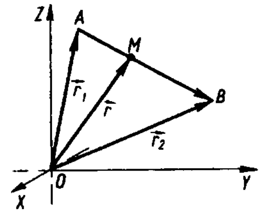


Рис. 1.26

Справді, робота A сталої сили $\vec{a} = \vec{F}$ на прямолінійному шляху $\vec{b} = \vec{S}$, який складає кут α з вектором $\vec{F}$, дорівнює $A = Fs\cos\alpha$, або $A = \vec{F}\cdot\vec{s}$ (рис. 1.24).

Скалярний добуток використовується для означення лінійної незалежності системи векторів. Нехай дано систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ з компонентами $\vec{a}_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), i = \overline{1,n}$. Треба побудувати визначник із системи скалярних добутків векторів

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_n \\ \vec{a}_2\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a}_n\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_n\cdot\vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n\cdot\vec{a}_n \end{vmatrix} = \Gamma_{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n}.$$

Цей визначник називається **визначником Грама**[1].

Теорема. *Для того щоб система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ була лінійно незалежною, необхідно і достатньо, щоб визначник Грама був додатним.*

Приклад. Нехай дано трикутник ABC, сторони якого дорівнюють a, b, c. Довести теорему косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, які збігаються з відповідними сторонами трикутника і напрямлені так, як показано на рис. 1.25. Тоді $\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$.

Скалярний квадрат вектора $\vec{c}$ дорівнює

$$\vec{c}^{\,2} = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b}),$$

звідки

$$\vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^{\,2},$$

[1] Йорген Грам (1850–1916) — датський математик.

або

$$\left|\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos\left(\pi - \gamma\right) + \left|\vec{b}\right|^2.$$

Отже,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Це співвідношення називається **теоремою косинусів.**

2.18. Поділ відрізка у даному відношенні. Координати центра мас (тяжіння)

Нехай дано відрізок AB, де A (x_1, y_1, z_1) і B (x_2, y_2, z_2) (рис. 1.26). Знайдемо на відрізку AB таку точку M, яка поділяє цей відрізок у відношенні λ, тобто

$$AM : MB = \lambda.$$

Радіусами-векторами точок A і B є відповідно

$$\vec{r}_1 = \left(x_1, y_1, z_1\right) \text{ і } \vec{r}_2 = \left(x_2, y_2, z_2\right).$$

Тоді радіус-вектор шуканої точки M (x, y, z).

$$\vec{r} = \left(x, y, z\right).$$

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$. Маємо $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$. За правилом віднімання векторів знаходимо (рис. 1.26)

$$\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1 \quad \text{і} \quad \overrightarrow{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}.$$

Отже,

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda\left(\vec{r}_2 - \vec{r}\right),$$

звідки

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1 + \lambda}. \tag{2.51}$$

Проектуючи радіуси-вектори рівності (2.51) на осі координат, дістаємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Якщо точка M є серединою відрізка AB, то $\lambda = 1$ і тоді

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}; \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Зазначимо, що λ може бути і від'ємною. Тоді точка M лежить на прямій, яка проходить через точки A і B поза відрізком AB.

Виведемо тепер формули для координат центра мас системи матеріальних точок.

Нехай у точках M_1, M_2, ..., M_n сконцентровано маси m_1, m_2, ..., m_n (рис. 1.27). Виберемо прямокутну систему координат XYZ у тривимірному просторі. Позначимо координати даних точок: M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), ..., M_n (x_n, y_n, z_n), а радіуси-вектори цих точок відповідно

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1),\quad \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2),\quad \ldots,\quad \vec{r}_n = (x_n, y_n, z_n).$$

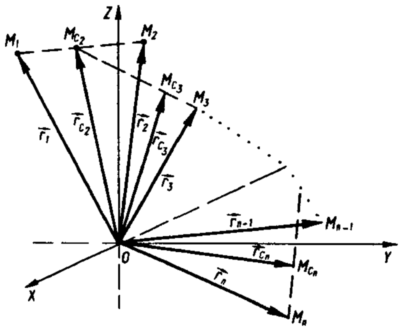


Рис. 1.27

Поділимо відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1}$. Відповідно до формули (2.51) дістанемо

$$\vec{r}_{C_2} = \frac{\vec{r}_1 + \dfrac{m_2}{m_1}\vec{r}_2}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Точка, радіус-вектор якої обчислюється за формулою

$$\vec{r}_{C_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{2.52}$$

називається **центром мас двох матеріальних точок** M_1 і M_2.

Знайдемо радіус-вектор центра мас точок M_{C_2}, з масою $m_1 + m_2$ і M_3 з масою m_3. Маємо

$$\vec{r}_{C_3} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{r}_{C_2} + m_3\vec{r}_3}{(m_1 + m_2) + m_3}. \tag{2.53}$$

Підставивши значення $\vec{r}_{C_2}$ з формули (2.52) у (2.53), знайдемо

$$\vec{r}_{C_3} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \tag{2.54}$$

Точка, радіус-вектор якої обчислюється за формулою (2.54), називається **центром мас трьох матеріальних точок** M_1, M_2 і M_3.

Методом математичної індукції можна довести, що центром мас даної системи n матеріальних точок є точка M_{C_n} (позначимо її C). Радіус-вектор цієї точки обчислюється за формулою

$$\vec{r}_{C_n} = \vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \tag{2.55}$$

Проектуючи радіуси-вектори з цієї формули на осі координат, дістанемо

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \tag{2.56}$$

де x_C, y_C, z_C — координати центра мас m_1, m_2, ..., m_n, сконцентрованих у точках M_i (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, ..., n$.

Якщо чисельник і знаменник у формулах (2.55) і (2.56) помножити на прискорення g вільного падіння і врахувати, що $m_i g_i = p_i$, де p_i — вага відповідної точки, то дістанемо формули для радіуса-вектора і координат центра ваги системи n матеріальних точок:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \quad x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \tag{2.57}$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \quad (2.58); \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}. \tag{2.59}$$

2.19. Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ такий, що:

а) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$; (2.60)

б) $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;

в) якщо $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку.

Упорядкована трійка некомпланарних векторів називається **правою,** якщо з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого вектора до другого здійснюється проти обертання годинникової стрілки.

Згідно з умовою а), вектор $\vec{c} = \vec{0}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. В окремому випадку, коли який-небудь із векторів ($\vec{a}$ чи $\vec{b}$) є нуль-вектором, то вони колінеарні, і, як наслідок, $\vec{c} = \vec{0}$. Якщо $\vec{c} \neq \vec{0}$, то $|\vec{c}|$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, приведених до спільного початку (рис. 1.28).

Векторний добуток позначається

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

В л а с т и в о с т і   в е к т о р н о г о   д о б у т к у.

1°. *Векторний добуток двох векторів не має комутативної (переставної) властивості. Для векторного добутку справджується рівність*

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

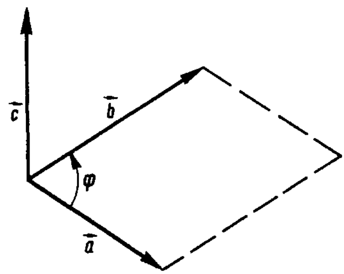


Рис. 1.28

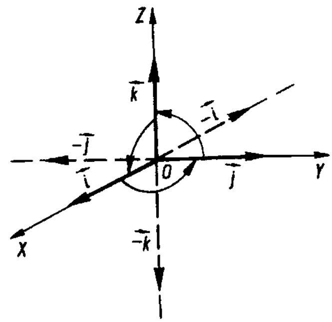


Рис. 1.29

2°. Розглянемо векторний добуток одиничних векторів координатних осей (ортів) (рис. 1.22, 1.29). Згідно з означенням векторного добутку знаходимо

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

3°. *Векторний добуток має розподільну властивість відносно скалярного множника:*

$$\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right).$$

4°. *Векторний добуток має розподільну властивість відносно векторного множника:*

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

5°. *Векторний добуток у координатній формі. Нехай задано вектор*

$$\vec{a} = (a_x, a_y, ..., a_z); \ \vec{b} = (b_x, b_y, ..., b_z)$$

у прямокутній системі координат з ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Знайдемо векторний добуток цих векторів:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \times \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$

$$= a_x b_x\left(\vec{i} \times \vec{i}\right) + a_x b_y\left(\vec{i} \times \vec{j}\right) + a_x b_z\left(\vec{i} \times \vec{k}\right) +$$

$$+ a_y b_x\left(\vec{j} \times \vec{i}\right) + a_y b_y\left(\vec{j} \times \vec{j}\right) + a_y b_z\left(\vec{j} \times \vec{k}\right) +$$

$$+ a_z b_x\left(\vec{k} \times \vec{i}\right) + a_z b_y\left(\vec{k} \times \vec{j}\right) + a_z b_z\left(\vec{k} \times \vec{k}\right).$$

Враховуючи властивість 2°, дістанемо

$$\vec{c} = a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} + a_y b_z \vec{i} - a_y b_x \vec{k} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}.$$

Отже, проекції вектора $\vec{c}$ на координатні осі дорівнюють

$$c_x = \text{пр}_x \ \vec{c} = a_y b_z - a_z b_y = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},$$

$$c_y = \text{пр}_y \ \vec{c} = a_z b_x - a_x b_z = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix},$$

$$c_z = \text{пр}_z \ \vec{c} = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Тоді для знаходження векторного добутку двох даних векторів маємо формулу

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Приклад. Знайти векторний добуток $\vec{a} = (2, -1, 3)$ і $\vec{b} = (3, 1, 4)$.
Розв'язання. Маємо

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}.$$

Відповідь. $\vec{c} = (-7, 1, 5)$.

2.20. Застосування векторного добутку

1. ***Обчислення площі трикутника.***

Нехай дано трикутник з вершинами у точках

$$A\,(x_1,\ y_1,\ z_1),\ B\,(x_2,\ y_2,\ z_2)\ \text{і}\ C\,(x_3,\ y_3,\ z_3).$$

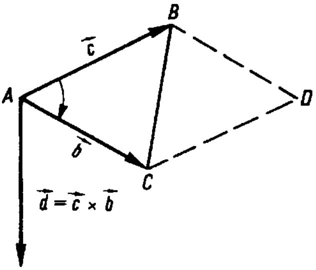


Рис. 1.30

Знайти площу трикутника ABC (рис. 1.30).

Розв'язання. Розглянемо два вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ і $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, що збігаються із сторонами трикутника ABC. Модуль векторного добутку $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$, згідно з означенням векторного добутку, дорівнює площі паралелограма $ABCD$. Тоді площа трикутника ABC

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\vec{c} \times \vec{b}\right|.$$

Знаючи координати початку і кінця векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, знайдемо ці вектори:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c} = \left(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\right),$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{b} = \left(x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1\right).$$

Тоді площа трикутника

$$S = \frac{1}{2}|\vec{c} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\right|.$$

Розглянемо вектор $\vec{d}$, який дорівнює добутку векторів $\vec{c}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Проекціями вектора $\vec{d}$ на координатні осі будуть

$$d_x = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \qquad d_y = \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix},$$

$$d_z = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

а довжина

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}.$$

Тоді площу трикутника можна записати у вигляді

$$S = \frac{1}{2}|\vec{d}|.$$

Розглянемо окремий випадок, коли трикутник лежить в одній з координатних площин, наприклад у площині xOy. При цьому $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, а проекції вектора $\vec{d}$ дорівнюють відповідно

$$d_x = 0,\ d_y = 0,\ d_z = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Площа трикутника, який лежить у площині $z = 0$ з вершинами в точках $A\ (x_1,\ y_1)$, $B\ (x_2,\ y_2)$ і $C\ (x_3,\ y_3)$, дорівнює

$$S_{xy} = \frac{1}{2}|d_z| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right|.$$

Визначник другого порядку в останній формулі можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тоді площа трикутника з вершинами у точках $A\ (x_1,\ y_1)$, $B\ (x_2,\ y_2)$ і $C\ (x_3,\ y_3)$ може бути виражена формулою

$$S_{xy} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Аналогічно можна записати формули площ трикутників, які лежать у координатних площинах yOz і xOz.

Приклад. Знайти площу трикутника, вершини якого розміщені в точках A (1, 2, 3), B (5, 2, −1) і C (−1, 6, 3).

Розв'язання. Маємо

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 1,\ 2 - 2,\ -1 - 3) = (4,\ 0,\ -4),$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1 - 1,\ 6 - 2,\ 3 - 3) = (-2,\ 4,\ 0),$$

тоді

$$S = 0{,}5\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0{,}5\sqrt{16^2 + (-8)^2 + 16^2} = 12 \text{ (кв. од.)}.$$

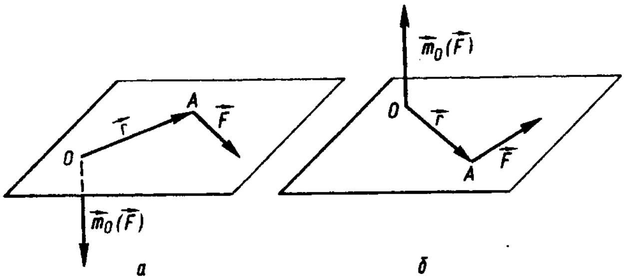


Рис. 1.31

2. ***Умова паралельності (колінеарності, або лінійної залежності) двох векторів.***

Два вектори тривимірного простору, що відмінні від нуль-вектора, паралельні тоді і тільки тоді, коли їхній векторний добуток дорівнює нуль-вектору.

а) Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні, тоді $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, де λ — деяке дійсне число, або

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda .$$

Тоді

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} .$$

б) Нехай векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, тоді $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

3. ***Момент сили відносно полюса.***

Відомо, що момент сили $\vec{F}$ відносно полюса (точки) O дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$ точки прикладання сили на вектор сили (рис. 1.31, а, б):

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} .$$

2.21. Добуток трьох векторів. Змішаний добуток і його властивості

Послідовне множення трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна здійснити різними способами.

1. Можна два перших вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перемножити скалярно, а потім знайдене число помножити на третій вектор $\vec{c}$. При цьому вектор $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$ буде колінеарним вектору $\vec{c}$, тобто $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} = \lambda \vec{c}$, де $\lambda =$

$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$. Очевидно,

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{c}\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right).$$

2. Можна вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перемножити векторно і знайдений вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ помножити скалярно на вектор $\vec{c}$:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

У результаті цього дістанемо число, яке називається **змішаним добутком трьох векторів.**

3. Можна два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перемножити векторно і знайдений вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ помножити векторно на третій вектор $\vec{c}$. Дістанемо вектор $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$, який називається **подвійним векторним добутком** даних трьох векторів:

$$\vec{d}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}.$$

Властивості змішаного добутку.

1°. Розглянемо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які не лежать в одній площині (рис. 1.32).

Побудуємо на цих векторах, як на ребрах, що виходять із однієї точки, паралелепіпед. Знайдемо об'єм цього паралелепіпеда. Відомо, що об'єм паралелепіпеда

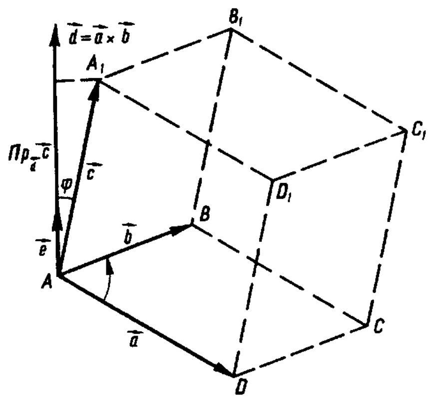


Рис. 1.32

$$V=QH,$$

де Q — площа основи, а H — висота.

Згідно з означенням векторного добутку двох векторів,

$$Q=|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Висота паралелепіпеда H дорівнює модулю проекції вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$:

$$H=|np_{\vec{e}}\,\vec{c}|,$$

де $\vec{e}$ — одиничний вектор векторного добутку $\vec{d}$.

Таким чином,

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}||np_{\vec{e}}\,\vec{c}| = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|. \qquad (2.61)$$

Отже, *геометрично змішаний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, взятий за абсолютною величиною, є об'ємом паралелепіпеда, побудованого на векторах, які перемножаються, як на ребрах, що виходять з однієї точки.*

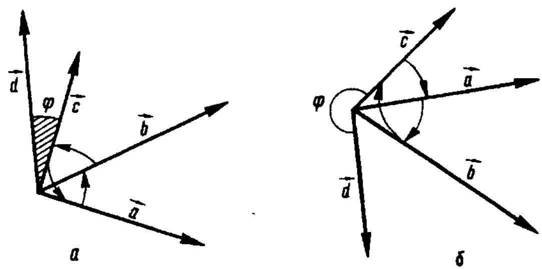


Рис. 1.33

2°. *Змішаний добуток трьох векторів додатний, якщо розміщення векторів відповідає правій системі координат, і від'ємний, якщо розміщення векторів відповідає лівій системі координат.*

Справді, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ розміщені так, як показано на рис. 1.33, *а*, то кут φ між векторами $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{c}$ гострий, тоді $\vec{d} \cdot \vec{c} > 0$. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ розміщені так, як показано на рис. 1.33, *б*, то кут φ між векторами $\vec{d}$ і $\vec{c}$ тупий. Тому в першому випадку скалярний добуток $\vec{d} \cdot \vec{c}$ додатний, а у другому — від'ємний.

Таким чином,

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a},$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{c} = -\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a}.$$

3°. *Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, відмінні від нуль-вектора, лежать на одній і тій самій площині, тобто є лінійно залежними, тоді і тільки тоді, коли їхній змішаний добуток дорівнює нулю.*

Це випливає з формули (2.61).

4°. Нехай задано три вектори в координатній формі:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z),\ \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

Тоді їхній змішаний добуток

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = d_x c_x + d_y c_y + d_z c_z.$$

Як відомо,

$$d_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad d_y = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \quad d_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином, змішаний добуток векторів, заданих в координатній формі, дорівнює

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.62}$$

Користуючись формулою (2.62), формулу (2.61) для обчислення об'єму паралелепіпеда можна записати у вигляді

$$V = \pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

де знак «+» треба брати тоді, коли значення визначника додатне, і знак «−» тоді, коли це значення від'ємне.

Якщо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ (рис. 1.32) задано координатами їхніх початку і кінця, тобто точками $A\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $D\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $A_1\,(x_3,\ y_3,\ z_3)$, то

$$V = \pm\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}.$$

Умову компланарності трьох векторів можна записати у вигляді

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \pm\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогічно знаходимо умову належності чотирьох точок $A\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $B\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $C\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$ і $D\,(x_3,\ y_3,\ z_3)$ тривимірного простору однієї і тієї самої площини (рис. 1.34).

Дані точки лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ лежать у тій самій площині, а це буде тоді і тільки тоді, коли

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD} = 0,$$

або

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.63)$$

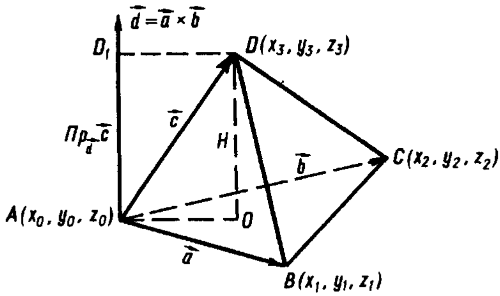


Рис. 1.34

5°. Розглянемо застосування змішаного добутку векторів до обчислення об'єму трикутної піраміди.

Нехай вершини трикутної піраміди (рис. 1.34) лежать у точках A (x_0, y_0, z_0), B (x_1, y_1, z_1), C (x_2, y_2, z_2) і D (x_3, y_3, z_3). Площу трикутника ABC (основи піраміди) позначимо через Q, а її висоту $|DO|$ — через H. Об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{3}QH.$$

Знайдемо вектори:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \left(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0\right),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \left(x_2 - x_0,\ y_2 - y_0,\ z_2 - z_0\right),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = \left(x_3 - x_0,\ y_3 - y_0,\ z_3 - z_0\right).$$

Тоді

$$Q = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|, \text{ а } H = |OD| = \left|\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c}\right|.$$

Таким чином,

$$V = \frac{1}{3}QH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|.$$

Тобто *об'єм трикутної піраміди дорівнює* $1/6$ *модуля змішаного добутку векторів, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з однієї і тієї самої вершини*:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}\right|. \qquad (2.64)$$

Приклад. Визначити, чи будуть лінійно залежними вектори

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{c} = 7\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Розв'язання. Обчислимо змішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 2\\ 7 & 4 & -5\end{vmatrix}=0,$$

тобто дані вектори лінійно залежні.

2.22. Подвійний векторний добуток

Нехай задано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Розглянемо їхній добуток

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}.$$

Позначимо $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$, тоді $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{d}\times\vec{c}=\vec{l}$. Можна показати, що проекції l_x, l_y, l_z вектора $\vec{l}=(l_x, l_y, l_z)$ на координатні осі відповідно дорівнюють:

$$l_x=b_x\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-a_x\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),\qquad l_y=b_y\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-a_y\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),$$

$$l_z=b_z\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-a_z\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),$$

а

$$\vec{l}=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),$$

або

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right).$$

Розглянемо тепер добуток $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$. Маємо

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}=-\vec{c}\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)+\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right),$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$

Зауваження. Розглянуті в п.п. 2.19–2.22 поняття не поширюються на випадок вектора з числом компонент $n\geq 4$.

ВПРАВИ. **1.** Вершини чотирикутника лежать у точках A (3, 1, 5), B (8, −14, 17), C (0, 0, 12) і D (−13, 29, −5).

Довести, що чотирикутник $ABCD$ — трапеція.

2. Довести, що чотирикутник з вершинами у точках A (−3, 5, 6), B (1, −5, 7), C (8, −3, −1) і D (4, 7, −2) — квадрат.

3. Дано вектори $\vec{a}=(2, 1, 2)$, $\vec{b}=(1, -3, 2)$, $\vec{c}=(2, 3, 1)$.

Знайти $\text{пр}_{\vec{a}}\left(2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}\right)$.

4. Дано вектори $\vec{a}=(1, 1, -2)$, $\vec{b}=(3, -2, -1)$, $\vec{c}=(2, 3, 1)$.

Знайти $\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{b}-3\vec{c}$.

5. Довести, що вектори $\vec{a} = (2, 4, -4)$, $\vec{b} = (-1, 2, -1)$, $\vec{c} = (-10, 4, 2)$ компланарні.

6. Знайти площу трикутника ABC, якщо його вершини лежать у точках A (2, 1, 3), B (−1, 2, 1), C (3, −1, 2).

7. Знайти об'єм піраміди $ABCD$, вершини якої містяться в точках A (5, 2, 0), B (−10, −2, 5), C (4, 3, 0) і D (7, 3, 2).

8. Дано вершини піраміди A (2, 3, 1), B (4, 1, −2), C (6, 3, 7) і D (−5, −4, 8). Знайти висоту піраміди, проведену з вершини D на основу ABC.

9. Дано вектори $\overrightarrow{AB} = (2, -3, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, -2)$. Знайти кут $\angle ABC$ і одиничний вектор бісектриси цього кута.

10. Визначити, чи будуть лінійно залежними вектори:

а) $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$, $\vec{c} = (5, 5, 10)$;

б) $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 1)$, $\vec{c} = (2, 1, 1)$.

11. Дано точки A (1, 3, 2), B (2, −1, 0), C (−2, 1, 3) і D (3, 1, −1). Знайти подвійний добуток $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \times \overrightarrow{AD}$.

§ 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Лінійні алгебраїчні рівняння. Теорема Кронекера[1] — Капеллі[2]

Нехай задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (3.1)$$

в якій коефіцієнти a_{ij} і вільні члени $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відомі, а $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ — невідомі. Розв'язати систему (3.1) — це означає знайти впорядковану сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ таку, що при заміні x_1, $x_2, \ldots, x_n$ відповідно на $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ кожне рівняння перетворюється на тотожність.

Систему рівнянь (3.1) можна записати у векторній формі. Для цього введемо у просторі, розмірність якого дорівнює числу рівнянь, вектори

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

[1] Леопольд Кронекер (1823–1891) — німецький математик.
[2] Альфред Капеллі (1855–1910) — італійський математик.

Тоді система (3.1) набере вигляду

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \ldots + \vec{a}_n x_n = \vec{b}. \tag{3.2}$$

Згідно з рівнянням (3.2), розв'язання системи (3.1) можна звести до встановлення лінійної залежності системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{b}$. Так, система (3.1) не має розв'язку, коли вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно незалежні.

Введемо матрицю коефіцієнтів системи векторів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

матрицю-стовпець правої частини

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

матрицю-стовпець невідомих

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Використовуючи означення добутку матриць (див. п. 2.8), систему (3.1) можна записати у вигляді

$$AX = B. \tag{3.6}$$

Ця форма запису системи (3.1) називається **матричною.**

Поставивши задачу про відшукання розв'язку системи (3.1), ми не задавали ніяких обмежень ні на число рівнянь, ні на число невідомих. Тому система (3.1) **може не мати розв'язку.** Наприклад,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Система може мати **нескінченну множину розв'язків.** Наприклад,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Для цієї системи впорядкована трійка чисел

$$\alpha_1 = 1 + a,\ \alpha_2 = 1 - 2a,\ \alpha_3 = a,$$

де a (будь-яке дійсне число) є розв'язком.

Система може мати також **єдиний розв'язок.** Наприклад,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Розв'язком цієї системи є тільки одна впорядкована пара чисел (2, 1).

Система лінійних рівнянь називається **сумісною,** якщо вона має розв'язок, і **несумісною,** якщо не має розв'язків.

Перед тим як встановити умову сумісності системи лінійних рівнянь, введемо деякі поняття. Матриця A (3.3) коефіцієнтів при невідомих системи (3.1) називається **основною.**

Приєднаємо до матриці A стовпець вільних членів системи (3.1). Дістанемо так звану **розширену матрицю** A^* даної системи:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Теорема Кронекера — Капеллі **(умова сумісності системи лінійних рівнянь).** *Система* (3.1) *сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці:*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^*\ (\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^*).$$

Доведення. Якщо система (3.1) має розв'язок $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \vec{0}$, то вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ (див. (3.2)), тобто стовпчик із вільних членів матриці є лінійною комбінацією стовпців матриці A системи. Базисні мінори матриць A і A^* не змінювались: $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^*$ (див. теорему 1, п. 2.13). Якщо $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^*$, то базисні мінори обох матриць збігаються, і згідно з теоремою 1, п. 2.13, справедливе рівняння (3.2), тобто система (3.1) має розв'язок.

3.2. Метод Гаусса[1]

Нехай дано систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.10}$$

[1] Карл Фрідріх Гаусс (1777–1855) — німецький математик.

Серед цих рівнянь можуть бути і такі, що

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b. \qquad (3.11)$$

Далі вважатимемо, що система (3.10) має розв'язок, тобто сумісна.

Якщо $b \neq 0$, то рівняння (3.11) не задовольняє ніякі значення x_i. У цьому разі система не має розв'язку, вона несумісна.

Якщо $b = 0$, то рівняння (3.11) задовольняють будь-які значення $x_1, x_2, \dots, x_n$. При цьому вираз (3.11) називають не рівнянням, а **тотожністю** і записують $0 \equiv 0$. Тотожність можна вилучити із системи. При цьому решта рівнянь матиме ті самі розв'язки, що і раніше. Говорять, що *системи з тотожністю і без тотожності рівносильні*. Дві системи лінійних рівнянь називаються **рівносильними,** якщо вони мають однакові розв'язки.

Над системами лінійних рівнянь виконують операції, які називаються **елементарними:**

а) додавання до обох частин рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число λ;

б) перестановку рівнянь у системі;

в) вилучення із системи тотожності $0 \equiv 0$;

г) множення якого-небудь рівняння системи на дійсне число, відмінне від нуля;

д) перенумерування як рівнянь, так і невідомих.

Ці операції не порушують рівносильності системи рівнянь.

За допомогою операції а) можна вилучити будь-яке невідоме з усіх рівнянь системи, окрім одного. При цьому невідоме, яке вилучають, називається **провідним невідомим;** коефіцієнти при провідному невідомому називаються провідними елементами, а рівняння, у якому зберігається провідне невідоме, називається **провідним рівнянням.**

Як приклад вилучимо з $(m-1)$-го рівняння системи (3.1) невідоме x_1 і приймемо за головне перше рівняння. Для цього помножимо рівняння, з якого вилучимо x_1, на λ_k, де $k = 2, 3, \dots, m$, і додамо знайдене рівняння до головного. У результаті цього маємо

$$(a_{11} + \lambda_k a_{k1})\, x_1 + (a_{12} + \lambda_k a_{k2})\, x_2 + \dots + (a_{1n} + \lambda_k a_{kn})\, x_n = b_1 + \lambda_k b_k.$$

Поклавши $a_{11} + \lambda_k a_{k1} = 0$, або $\lambda_k = -\dfrac{a_{11}}{a_{k1}}$, дістанемо рівняння, в якому відсутнє невідоме x_1. Аналогічно вилучимо з усіх рівнянь x_1, крім головного (першого) рівняння. Потім, взявши за головне друге рівняння знайденої системи, вилучимо x_2 з усіх наступних рівнянь і т. д. У результаті цього дістанемо так звану **ступінчасту систему**

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1; \\
\qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r,
\end{cases}
\tag{3.12}
$$

або систему у трикутній формі

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\
\qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rr}x_n = d_r, \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n.
\end{cases}
\tag{3.13}
$$

Система (3.13) має єдиний розв'язок, а система (3.12) при $r < n$ має $n - r$ так званих вільних змінних, тобто невідомих, які набувають довільних значень.

Для того щоб довільну систему вигляду (3.10) привести до вигляду (3.12) або (3.13), часто достатньо перенумерувати як рівняння, так і невідомі.

Розглянута методика перетворення системи (3.10) на системи (3.12) і (3.13) називається **методом послідовних вилучень невідомих Жордана**[1] **— Гаусса** або коротко **методом Гаусса.**

Цей метод можна використовувати і для визначення сумісності системи (3.10). У цьому разі в результаті послідовного вилучення невідомих дійдемо системи (3.12), в якій деякі рівняння матимуть вигляд

$$
\begin{cases}
0 = d_{r+1}, \\
0 = d_{r+2}, \\
\cdots\cdots \\
0 = d_m.
\end{cases}
$$

Якщо в останніх рівностях хоча б одне з чисел d_k, $k = r + 1$, $r + 2$, ..., m не дорівнює нулю, то початкова система несумісна.

Таким чином, методом Гаусса можна відшукати розв'язок будь-якої системи без попереднього визначення її сумісності.

***Приклади.* 1.** Розв'язати методом Гаусса систему

$$
\begin{cases}
4x_1 + 2x_2 + \ x_3 = 4, \\
\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\
2x_1 - \ x_2 + \ x_3 = 5,
\end{cases}
\quad
\left|\begin{matrix} \\ -4 \\ -2 \end{matrix}\right|.
$$

Розв'язання. За провідне рівняння візьмемо перше рівняння даної системи, а за провідне невідоме — x_1.

[1] Каміль Жордан (1838–1922) — французький математик.

Помножимо друге рівняння на (−4), а третє — на (−2) і утворені рівняння додамо до першого:

$$\left\{\begin{aligned} 4x_1+2x_2+x_3&=4, \\ -10x_2-7x_3&=-4, \\ 4x_2-x_3&=-6 \end{aligned}\right.\left|\begin{array}{c} \\ \\ 2{,}5 \end{array}\right|.$$

Тепер помножимо третє рівняння утвореної системи на 2,5 і додамо до нього друге рівняння:

$$\left\{\begin{aligned} 4x_1+2x_2+x_3&=4, \\ -10x_2-7x_3&=-4, \\ -9{,}5x_3&=-19. \end{aligned}\right.$$

З останнього рівняння системи знаходимо $x_3=2$, з другого $x_2=-1$ і з першого $x_1=1$. *Відповідь*. (1, −1, 2).

2. Показати, що система

$$\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ x_1+x_2=0 \end{cases}$$

несумісна.

Розв'язання. Вилучимо із другого рівняння x_1, для чого помножимо його на (−1):

$$\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ -x_1-x_2=0. \end{cases}$$

Після додавання рівнянь дістанемо

$$0=1\neq 0.$$

але це і є рівняння типу

$$0=d_k\neq 0.$$

Відповідь. Система несумісна.

3. Показати, що система

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1+x_2&=3, \\ x_1-x_2&=1, \\ 8x_1+7x_2&=2 \end{aligned}\right.\left|\begin{array}{c} \\ -2 \\ -\dfrac{1}{4} \end{array}\right|$$

несумісна.

Розв'язання. Візьмемо за провідне невідоме x_1, а за провідне рівняння — перше. Після множення другого рівняння на (−2), третього — на $\left(-\frac{1}{4}\right)$ і додавання їх до першого дістанемо

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1+x_2&=3, \\ 3x_2&=1, \\ -\frac{3}{4}x_2&=2\frac{1}{2} \end{aligned}\right.\left|\begin{array}{c} \\ \\ 4 \end{array}\right|.$$

Вилучаючи з третього рівняння x_2 множенням його на 4 і додаванням до другого, матимемо

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ \quad 3x_2 = 1, \\ \quad\quad 0 = 11 \neq 0, \end{cases}$$

звідси і випливає несумісність системи. *Відповідь*. Система несумісна.

3.3. Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Загальний і частинний розв'язки

Система лінійних рівнянь називається **однорідною,** якщо праві частини цих рівнянь дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_2x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (3.14)$$

Система (3.14) завжди сумісна, тому що розширена матриця відрізняється від основної на стовпець, який являє собою нуль-вектор. Оскільки система, яка має нуль-вектор, завжди лінійно залежна, то ранг розширеної матриці збігається з рангом основної. Це очевидно, тому що система (3.14) завжди має тривіальний зв'язок:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0.$$

Запишемо систему (3.14) у векторній формі:

$$\vec{a}_1x_1 + \vec{a}_2x_2 + \dots + \vec{a}_nx_n = \vec{0} \qquad (3.15)$$

і доведемо, що сукупність розв'язків системи (3.14), або (3.15), утворює підпростір. Для цього треба довести, що коли вектори

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \ \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

є розв'язком системи, то $\vec{x} + \vec{y}$ і $\lambda\vec{x}$ також будуть розв'язками цієї системи.

Дійсно, за умовою

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

і

$$y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \cdots + y_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Додавши ці рівності, дістанемо

$$\left(x_1 + y_1\right)\vec{a}_1 + \left(x_2 + y_2\right)\vec{a}_2 + \cdots + \left(x_n + y_n\right)\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Помноживши рівняння (3.15) на λ, знайдемо

$$(\lambda x_1)\vec{a}_1 + (\lambda x_2)\vec{a}_2 + \cdots + (\lambda x_n)\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Це означає, що $\vec{x} + \vec{y}$ та $\lambda\vec{x}$ також є розв'язками системи (3.15).

Нехай матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

має ранг r, тобто серед векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ є r лінійно незалежних, причому $r \le m \le n$. Тоді система векторів

$$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots,\ \vec{a}_r,\ \vec{a}_j,$$

де $j = r + 1, r + 2, \dots, n$, лінійно залежна:

$$\vec{a}_j = z_1^{(j)}\vec{a}_1 + z_2^{(j)}\vec{a}_2 + \cdots + z_r^{(j)}\vec{a}_r.$$

Покладемо $z_i^{(j)} = -y_i^{(j)}$, тоді

$$y_1^{(j)}\vec{a}_1 + y_2^{(j)}\vec{a}_2 + \cdots + y_r^{(j)}\vec{a}_r + \vec{a}_j = \vec{0}. \tag{3.16}$$

Розв'язками цього рівняння є вектори

$$\begin{aligned} \vec{y}_1 &= \left(y_1^{(r+1)},\ y_2^{(r+1)},\ \dots,\ y_r^{(r+1)},\ 1,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0\right) \\ \vec{y}_2 &= \left(y_1^{(r+2)},\ y_2^{(r+2)},\ \dots,\ y_r^{(r+2)},\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0\right) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{y}_{n-r} &= \left(y_1^{(n)},\ y_2^{(n)},\ \dots,\ y_r^{(n)},\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

при цьому число координат у векторів $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{n-r}$ дорівнює n.

Доведемо, що вектори $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{n-r}$ лінійно незалежні. Дійсно, якщо рівність

$$\lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\vec{y}_{n-r} = \vec{0} \qquad 3.18)$$

записати в скалярній формі (див. п. 2.11), використавши компоненти (3.17), то вона виконується лише за умови

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-r} = 0.$$

Доведемо, що будь-який розв'язок однорідної системи (3.14) $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$, є лінійною комбінацією векторів $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{n-r}$, тобто

$$\vec{x} = x_{r+1}\vec{y}_1 + x_{r+2}\vec{y}_2 + \cdots + x_n\vec{y}_{n-r}. \tag{3.19}$$

Припустимо, що рівність (3.19) не виконується, тобто

$$\vec{x} - x_{r+1}\vec{y}_1 - x_{r+2}\vec{y}_2 - \cdots - x_n\vec{y}_{n-r} = \vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Знайдемо координати вектора $\vec{u}$, використовуючи (3.17):

$$\begin{aligned}
u_1 &= x_1 - x_{r+1}y_1^{(r+1)} - x_{r+2}y_1^{(r+2)} - \cdots - x_n y_1^{(n)}, \\
u_2 &= x_2 - x_{r+1}y_2^{(r+1)} - x_{r+2}y_2^{(r+2)} - \cdots - x_n y_2^{(n)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_r &= x_r - x_{r+1}y_r^{(r+1)} - x_{r+2}y_r^{(r+2)} - \cdots - x_n y_r^{(n)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{r+1} &= x_{r+1} - x_{r+1} \cdot 1 - x_{r+2} \cdot 0 - \cdots - x_n \cdot 0 = 0, \\
u_{r+2} &= x_{r+2} - x_{r+1} \cdot 0 - x_{r+2} \cdot 1 - \cdots - x_n \cdot 0 = 0, \\
u_{r+3} &= 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_n &= 0.
\end{aligned}$$

Оскільки вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{n-r}$ є розв'язками системи (3.14), то і вектор $\vec{u}$ є розв'язком цієї системи:

$$u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + \cdots + u_r\vec{a}_r + u_{r+1}\vec{a}_{r+1} + \cdots + u_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Через те що $u_{r+1} = u_{r+2} = \cdots = u_n = 0$, останні $n - r$ доданків дорівнюють нулю. Тоді

$$u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + \cdots + u_r\vec{a}_r = \vec{0}.$$

Оскільки вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$ лінійно незалежні, остання рівність можлива лише при

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \ldots,\ u_r = 0,$$

тобто $\vec{u} = \vec{0}$ і (3.19) доведено.

Таким чином, вектори $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{n-r}$ утворюють базис підпростору розмірності $n - r$.

Сукупність розв'язків системи (3.14) утворює підпростір розмірності $n - r$. Число рівнянь m збігається з розмірністю підпростору, в якому задано вектори (див. п. 3.1). У цьому просторі максимальне число лінійно незалежних векторів може бути не більше m, ранг $r \le m$, а число невідомих n. Тобто система (3.14) має нетривіальний розв'язок, якщо число невідомих більше числа рівнянь: $n - m > 0$. Якщо ж число рівнянь m збігається з рангом матриці і дорівнює числу невідомих, то однорідна система має єдиний тривіальний (нульовий) розв'язок. Те саме спостерігаємо, коли в однорідній системі число рівнянь буде більше числа невідомих. Розв'язки (3.17) називаються **загальними розв'язками однорідної системи.** Сукупність лінійно незалежних розв'язків системи (3.14) $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{n-r}$ називається **фундаментальною системою розв'язків.** Змінні x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots, x_n$ називаються **вільними,** $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — **базисними.**

Приклад. Нехай дано однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 12x_2 - 17x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

в якій чотири невідомих і три рівняння. Якщо ввести вектори

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -17 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то систему можна записати у вигляді

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4 = \vec{0}.$$

Виключимо з другого і третього рівнянь x_1. Для цього помножимо перше рівняння на λ і додамо до другого:

$$(2 + \lambda)\, x_1 + (5 + 2\lambda)\, x_2 - (6 + 5\lambda)\, x_3 + (-1 + 3\lambda)\, x_4 = 0.$$

Поклавши $\lambda = -2$, дістанемо

$$x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0.$$

Аналогічно помножимо перше рівняння на λ і додамо його до третього:

$$(5 + \lambda)\, x_1 + (12 + 2\lambda)\, x_2 - (17 + 5\lambda)\, x_3 + (1 + 3\lambda)\, x_4 = 0.$$

Поклавши $\lambda = -5$, дістанемо

$$2x_2 + 8x_3 - 14x_4 = 0, \text{ або } x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0.$$

Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ \quad\quad x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ \quad\quad x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Відкинувши третє рівняння, яке збігається з другим, дістанемо систему двох рівнянь.

З другого рівняння знаходимо x_2, а з першого x_1:

$$\begin{cases} x_2 = -4x_3 + 7x_4, \\ x_1 = 13x_3 - 17x_4. \end{cases} \tag{3.20}$$

Вільними змінними тут є x_3 і x_4, а базисними — x_1 і x_2.

Поклавши у (3.20) $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, дістанемо вектор

$$\vec{y}_1 = (13, -4, 1, 0),$$

а при $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ дістанемо вектор

$$\vec{y}_2 = (-17, 7, 0, 1).$$

Вектори $\vec{y}_1$ і $\vec{y}_2$ лінійно незалежні. Тоді загальний розв'язок даної системи рівнянь можна записати у вигляді

$$\vec{x} = x_3\vec{y}_1 + x_4\vec{y}_2. \tag{3.21}$$

Як випливає з (3.19) і (3.21), ці розв'язки складають лінійний підпростір розмірності $n-r$. У даному прикладі розмірність підпростору, який описано однорідною системою, дорівнює 2. Вектори $\vec{y}_1$ і $\vec{y}_2$ являють собою базис цього підпростору. Справедливо і обернене: *кожний лінійний підпростір можна подати як сукупність розв'язків відповідно підібраної системи лінійних рівнянь.*

У зв'язку з цим виникає ряд задач, пов'язаних з можливістю описання лінійною системою підпросторів. Одним із способів визначення розмірності підпросторів, що описані системою лінійних рівнянь, є метод Гаусса, який було використано у попередньому прикладі. Цей метод дає змогу визначити зразу число вільних змінних. Число вільних змінних дорівнює розмірності підпростору, який задано системою лінійних рівнянь. Ранг матриці, що задає однорідну систему, дорівнює різниці між числом невідомих і числом вільних змінних.

На закінчення сформулюємо теорему про однорідні системи.

Теорема. *Однорідна система, у якої однакове число невідомих і рівнянь, тільки тоді має ненульовий розв'язок, коли визначник системи дорівнює нулю. Якщо визначник цієї системи відмінний від нуля, то система має тільки нульовий (тривіальний) розв'язок.*

Доведення. Нехай дано систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однорідна система має ненульовий розв'язок, якщо число рівнянь (невідомих) більше за ранг матриці, тобто більше за порядок r базисного мінору ($n > r$), а це означає, що всі мінори $r+1$, $r+2$, ..., n дорівнюють нулю. Це і є доведенням теореми.

Зазначимо, що у цьому разі серед рівнянь є такі, які являються наслідком інших (як у наведеному вище прикладі). У зв'язку з цим вводять поняття про **незалежні рівняння.**

Два рівняння називаються незалежними, якщо внаслідок лінійних операцій над рівняннями (додавання і множення на число) жодне з них не можна привести до іншого. Якщо в системі немає рівнянь, які являють собою лінійну комбінацію інших рівнянь цієї системи, то кажуть, що система складається з незалежних рівнянь. Число рівнянь при цьому збігається з рангом матриці. Метод Гаусса зручний тому, що при поданні системи у певній формі (див. (3.12), (3.13)) число рівнянь після відкидання тих, які повторюються, дорівнює рангу матриці.

Якщо внаслідок додавання якого-небудь рівняння до інших, помножених на деякі числа, дістають рівняння виду

$$0 = b, \text{ де } b \neq 0,$$

то це означає, що система несумісна.

Приклад. Знайти базис і розмірність простору, який утворюється сукупністю розв'язків однорідної системи

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ -2x + 4y - 2z = 0, \\ 3x - 6y + 3z = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Розв'язання. Друге і третє рівняння заданої системи є наслідками першого, тобто фактично задане одне незалежне рівняння

$$x - 2y + z = 0. \tag{3.23}$$

Ранг заданої системи $r = 1$. Дійсно,

$$\Delta_1 = 1 \neq 0,$$

а всі мінори вищих порядків дорівнюють нулю.

Маємо три невідомих, $n = 3$. Сукупність розв'язків системи утворює підпростір розмірності $n - r = 3 - 1 = 2$. Вільних змінних у системі дві, а базисних — одна. Для визначення базису розв'яжемо рівняння (3.23) відносно x:

$$x = 2y - z. \tag{3.24}$$

Приймемо як вільні змінні y і z. Нехай вони набувають почергово значень 1, 0 і 0, 1. Дістанемо вектори

$$\vec{y}_1 = (2, 1, 0) \text{ і } \vec{y}_2 = (-1, 0, 1). \tag{3.25}$$

Ці вектори лінійно незалежні. Дійсно, доведемо, що векторне рівняння

$$\lambda_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2 = \vec{0} \tag{3.26}$$

має єдиний розв'язок $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Запишемо рівняння (3.26) у вигляді

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot (-1) = 0; \\ \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = 0; \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Система (3.27) має єдиний розв'язок

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.$$

Відповідь. Сукупність розв'язків утворює підпростір розмірності 2, а базис утворюють вектори $\vec{y}_1 = (2, 1, 0)$ і $\vec{y}_2 = (-1, 0, 1)$.

ВПРАВИ. Знайти базис і розмірність підпростору, утвореного сукупністю розв'язків однорідної системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

3.4. Неоднорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Загальний і частинний розв'язки

Нехай задано неоднорідну систему рівнянь, яку у векторній формі можна подати у вигляді

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \ldots + \vec{a}_n x_n = \vec{b}. \tag{3.28}$$

Розглянемо відповідну однорідну систему

$$y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 + \cdots + y_n \vec{a}_n = \vec{0}. \tag{3.29}$$

Нехай вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є розв'язком неоднорідної системи (3.28), а вектор $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ є розв'язком однорідної системи (3.29). Тоді, додавши систему (3.28) до (3.29), дістанемо систему

$$(x_1 + y_1)\vec{a}_1 + (x_2 + y_2)\vec{a}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\vec{a}_n = \vec{b}$$

таку, що $\vec{x} + \vec{y}$ також є розв'язком неоднорідної системи. Неважко помітити, що коли вектор $\vec{z}$ є розв'язком системи (3.28), тоді вектор $\vec{z} - \vec{x} = \vec{y}$ є розв'язком системи (3.29).

Таким чином, вектор $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ має такий зміст: якщо $\vec{x}$ — частинний розв'язок системи (3.28), а $\vec{y}$ — будь-який розв'язок системи (3.29), то $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ є розв'язком системи (3.28). Тоді, використавши формулу (3.19), матимемо

$$\vec{y} = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2 + \cdots + c_{n-r}\vec{y}_{n-r},$$

а тому

$$\vec{z} = \vec{x} + c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2 + \cdots + c_{n-r}\vec{y}_{n-r}, \tag{3.30}$$

тобто якщо $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{n-r}$ є системою лінійно незалежних векторів-розв'язків однорідної системи, то розв'язком неоднорідної системи є сукупність її частинного і загального розв'язків однорідної системи.

Розв'язок (3.30) називається **загальним розв'язком неоднорідної системи рівнянь.**

Неоднорідна система рівнянь має єдиний розв'язок, якщо система сумісна і ранг основної матриці збігається з кількістю рівнянь і кількістю невідомих системи: $m = n = r$. При цьому маємо на увазі, що усі рівняння системи незалежні. З умови сумісності випливає, що ранг розширеної матриці дорівнює рангу основної, але ранг дорівнює найвищому порядку мінору, відмінного від нуля, у даному разі n. Таким чином, визначник основної матриці має бути відмінним від нуля. Якщо ж визначник основної матриці системи дорівнює нулю, то система має або нескінченну множину розв'язків, або несумісна (не має розв'язків).

Якщо система (3.28) сумісна, то вона або розв'язувана при будь-якому векторі $\vec{b}$, або відповідне однорідне рівняння (3.29) має нескінченну множину розв'язків. Це припущення називається **альтернативою Фредгольма.**

Правило Крамера[1]. Розглянемо окремий випадок системи (3.28), коли кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих, при цьому всі рівняння незалежні. *Система n рівнянь з n невідомими, якщо детермінант основної матриці не дорівнює нулю, має один і тільки один розв'язок*

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.31}$$

де Δ — визначник основної матриці; Δx_i — визначник, утворений із визначника Δ заміною коефіцієнтів невідомого x_i вільними членами системи b_i.

[1] Карл Крамер (1893–1977) — шведський математик.

3.5. Обернена матриця

Матрицею A^{-1}, **оберненою до квадратної матриці** A розміру $n \times n$, називається така, для якої справедлива рівність

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \tag{3.32}$$

Наприклад, легко перевірити рівність

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 11 & -2 & 6 \\ -9 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, одна із перемножуваних матриць є оберненою відносно іншої.

Матриця, визначник якої не дорівнює нулю, називається **невиродженою.**

Для того щоб дана матриця мала обернену, необхідно і достатньо, щоб вона була невиродженою.

Щоб знайти матрицю, обернену до даної, треба:

а) знайти визначник даної матриці; якщо він не дорівнює нулю, то дана матриця має обернену;

б) скласти матрицю з алгебраїчних доповнень елементів даної матриці;

в) транспонувати матрицю з алгебраїчних доповнень;

г) кожний елемент транспонованої матриці поділити на визначник даної матриці.

Властивості невироджених матриць.

1°. $\det A^{-1} \cdot \det A = 1$.
2°. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3°. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4°. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то вона називається **виродженою** або **особливою.**

Приклад. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Розв'язання. Знаходимо визначник даної матриці

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \tag{3.34}$$

тобто дана матриця має обернену.

Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів даної матриці:

$$A_{11} = -2, \quad A_{12} = -4, \quad A_{13} = 5,$$
$$A_{21} = 2, \quad A_{22} = 3, \quad A_{23} = -4,$$
$$A_{31} = -3, \quad A_{32} = -5, \quad A_{33} = 7.$$

Складаємо матрицю з алгебраїчних доповнень:

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -5 & 7 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Транспонуємо матрицю

$$A^*_{\text{т}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Поділивши кожний елемент транспонованої матриці на визначник даної матриці $\Delta = 1$, дістанемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

3.6. Матричний спосіб розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Запишемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.37}$$

у матричній формі

$$AX = B, \tag{3.38}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що матриця A невироджена, тоді система (3.37) називається **невиродженою,** у протилежному разі — **виродженою,** причому визначник $\Delta = |A| \neq 0$ і матриця A має обернену матрицю A^{-1}, яка єдина.

Помножимо обидві частини рівняння (3.38) на A^{-1} зліва:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то

$$X = A^{-1}B. \tag{3.39}$$

Рівність (3.39) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

або, перемноживши A^{-1} і B, дістанемо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n \end{pmatrix},$$

звідки

$$x_k = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \cdots + A_{nk}b_n\right),$$

де $k = 1, 2, \ldots, n$, а $A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \cdots + A_{nk}b_n = \Delta x_k$. Тоді $x_k = \dfrac{\Delta x_k}{\Delta}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тим самим доведено правило Крамера.

Матричний метод розв'язання системи (3.37) не простіший, ніж метод, розглянутий раніше, але дає змогу зручно і компактно записати розв'язок.

Приклад. Розв'язати матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 4y + 4z = 7, \\ 5x - 3y + 4z = 11, \\ x - 2y + 2z = 3, \end{cases}$$

Розв'язання. Утворюємо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix},$$

тоді система набере вигляду

$$AX = B.$$

Обчислюємо визначник матриці A:

$$\Delta = \det A = 2 \neq 0,$$

тобто існує обернена матриця

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -\frac{7}{2} & 1 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Запишемо розв'язок системи в матричній формі:

$$X = A^{-1}B, \text{ або } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -\frac{7}{2} & 1 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Перемножимо матриці:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 0 \cdot 11 - 2 \cdot 3 \\ -3 \cdot 7 + 1 \cdot 11 + 4 \cdot 3 \\ -\frac{7}{2} \cdot 7 + 1 \cdot 11 + \frac{11}{2} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

ВПРАВИ. **1.** Користуючись правилом Крамера, розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$$

Відповідь. (1, 1, 1).

2. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Відповідь. (2, 1, 1).

3. Розв'язати матричним способом систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 2x - y - z = 2, \\ x - y + 2z = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 14, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10. \end{cases}$

Відповідь. а) (2, 1, 1), б) (1, −1, 2, 1).

4. Чи сумісна система рівнянь? Якщо сумісна, то розв'язати її:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

Відповідь. а) $(c_1,\ c_2,\ 4 - 9c_1 - 6c_2,\ 6c_1 + 4c_2 - 3)$; б) несумісна.

§ 4. ЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

4.1. Перетворення (оператори, відображення)

Нехай дано дві множини Q і Q_1 елементів різного походження. **Перетворенням (оператором, відображенням)** називають закон, що дає змогу за заданим елементом x множини Q знайти елемент y множини Q_1.

Перетворення позначають буквою $\mathcal{A}$ і записують

$$y = \mathcal{A}x \in Q_1 \text{ при } x \in Q.$$

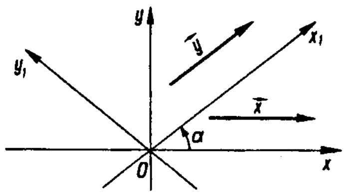


Рис. 1.35

Якщо множини Q і Q_1 збігаються, то говорять про **перетворення множини самої в себе.** У цьому разі перетворенням називають закон, що дає змогу за заданим елементом x множини Q знайти елемент y, який належить тій самій множині, і записують

$$y = \mathcal{A}x \in Q \text{ при } x \in Q.$$

Далі розглядатимемо перетворення множини самої в себе. Крім того, під x і y будемо розуміти вектори з евклідового простору.

Приклади. **1.** Нехай у площині xOy лежить вектор $\vec{x}$ (рис. 1.35). Повернемо площину xOy на кут α навколо точки O, зберігаючи положення площини у просторі. Тоді вектор $\vec{x}$ перейде в новий вектор $\vec{y}$, який належить площині:

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

Тут перетворення $\mathcal{A}$ — це поворот площини на кут α. Перетворення $\mathcal{A}$ називається **перетворенням обертання.**

2. Нехай перетворення $\mathcal{A}$ кожному вектору $\vec{x}$ ставить у відповідність той самий вектор $\vec{x}$, тобто $\vec{x} = \mathcal{A}\vec{x}$. Таке перетворення називається **тотожним** або **одиничним** і позначається буквою E:

$$\vec{x} = E\vec{x}.$$

3. Нехай $\mathcal{A}$ перетворює вектор $\vec{x}$ у вектор $\vec{y} = k\vec{x}$, тобто

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} = k\vec{x}.$$

Таке перетворення називається **перетворенням подібності.**

4. Нехай перетворення $\mathcal{A}$ кожному вектору $\vec{x}$ ставить у відповідність нуль-вектор $\vec{0}$:

$$\mathcal{A}\vec{x} = \vec{0}.$$

Таке перетворення називається **нульовим** і позначається

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

5. Нехай задано n-вимірний афінний простір, елементами якого є точки. Нехай перетворення $\mathcal{A}$ кожній точці M цього простору ставить у відповідність число U:

$$U = \mathcal{A}M.$$

Таке перетворення називається **функцією** і позначається, наприклад, буквою f:

$$U = f\,(M).$$

Множина усіх точок M, які розглядаються при цьому перетворенні, називається **областю визначення функції** f, а множина усіх чисел U — **областю значень даної функції.**

6. Нехай перетворення $\mathcal{A}$ — це проектування векторів, які виходять з однієї точки простору, на площину, яка проходить через ту саму точку. Як відомо, проекцією вектора $\vec{x}$ на площину є вектор $\vec{y}$:

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

Тут перетворення $\mathcal{A}$ називається **перетворенням проектування.**

4.2. Лінійні перетворення і їхній зв'язок з матрицями

Перетворення $\mathcal{A}$ називається **лінійним,** якщо для будь-яких векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$, що належать лінійному простору, виконуються умови:

1) $\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{A}\vec{y}$.

2) $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\,(\mathcal{A}\vec{x})$.

Обертання, подібність, тотожне і нульове перетворення, перетворення проектування — це лінійні перетворення.

Лінійне перетворення переводить лінійну комбінацію одних векторів у лінійну комбінацію інших векторів.

Справді, нехай дано n векторів: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ і перетворення $\mathcal{A}$. Застосовуючи послідовно умови 1) і 2), дістаємо

$$\mathcal{A}\left(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n\right) = \lambda_1\mathcal{A}\vec{a}_1 + \lambda_2\mathcal{A}\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\mathcal{A}\vec{a}_n.$$

Візьмемо у n-вимірному просторі базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Нехай дано перетворення $\mathcal{A}$, яке переводить $\vec{e}_1$ в $\mathcal{A}\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ в $\mathcal{A}\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$ в $\mathcal{A}\vec{e}_n$. Кожний вектор $\mathcal{A}\vec{e}_i$, де $i = 1, 2, ..., n$, можна виразити через базис:

$$\mathcal{A}\vec{e}_i = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + ... + a_{ni}\vec{e}_n. \tag{4.1}$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

що складається з координат векторів $\mathcal{A}\vec{e}_i$, називається матрицею лінійного перетворення у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Покажемо, що заданням матриці A цілком визначається перетворення $\mathcal{A}$.

Візьмемо деякий вектор

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \tag{4.3}$$

і знайдемо вектор $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, припускаючи, що матриця A відома. Маємо

$$\vec{y} = \mathcal{A} \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{A} \vec{e}_i.$$

Враховуючи рівність (4.1), дістанемо

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i a_{1i}) \vec{e}_1 + (x_i a_{2i}) \vec{e}_2 + \cdots + (x_i a_{ni}) \vec{e}_n \right] =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{1i} \right) \vec{e}_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{2i} \right) \vec{e}_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ni} \right) \vec{e}_n.$$

Якщо координати вектора $\vec{y}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ позначити через $y_1, y_2, ..., y_n$ і записати $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \cdots + y_n \vec{e}_n$, то, порівнюючи цей вираз з попередньою рівністю, дістанемо

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^{n} x_i a_{1i} = x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n}, \\ y_2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i a_{2i} = x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_n a_{2n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ni} = x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots + x_n a_{nn}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Таким чином, знайдено координати вектора $\vec{y}$. Кожному перетворенню $\mathcal{A}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ відповідає єдина матриця А і, навпаки, кожній матриці А відповідає єдине перетворення $\mathcal{A}$ векторів у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Лінійне перетворення $\mathcal{A}$ векторів

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \tag{4.5}$$

можна записати у матричній формі. Якщо ввести матриці координат векторів $\vec{y}$, $\vec{x}$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

то, згідно з системою (4.4),

$$Y = A\,X.$$

Нехай тепер перетворення $\mathcal{A}$ задане своєю матрицею A, визначник якої відмінний від нуля. Тоді існує єдина обернена матриця A^{-1}.

Припустимо, що перетворення $\mathcal{A}$ переводить вектор $\vec{x}$ у вектор $\vec{x}_1$, тобто

$$\vec{x}_1 = \mathcal{A}\,\vec{x},$$

або у матричній формі

$$X_1 = A\,X. \tag{4.8}$$

Помноживши цю рівність на A^{-1} зліва, дістанемо

$$A^{-1}X_1 = A^{-1}A\,X.$$

Враховуючи, що $A^{-1}A = E$, знаходимо

$$X = A^{-1}X_1, \tag{4.9}$$

або у векторній формі

$$\vec{x} = \mathcal{A}^{-1}\,\vec{x}_1. \tag{4.10}$$

Нехай тепер дано перетворення $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, задані своїми матрицями A і B так, що

$$\vec{x}_1 = \mathcal{A}\,\vec{x}, \tag{4.11}$$

$$\vec{x}_2 = \mathcal{B}\vec{x}_1. \tag{4.12}$$

Знайдемо перетворення, які виражають $\vec{x}_2$ через $\vec{x}$. Замінивши у перетворенні (4.12) $\vec{x}_1$ через $\mathcal{A}\,\vec{x}$, матимемо

$$\vec{x}_2 = \mathcal{B}\left(\mathcal{A}\vec{x}\right) = \mathcal{B}\mathcal{A}\,\vec{x}. \tag{4.13}$$

Таким чином, $\vec{x}$ переводиться в $\vec{x}_2$ перетворенням $\mathcal{B}$, що має матрицю, яка дорівнює добутку матриць перетворень B і A:

$$C = BA.$$

Використовуючи (4.13) і (4.10), можна знайти обернене перетворення, яке переводить $\vec{x}_2$ у $\vec{x}$. Якщо визначник $|BA| \neq 0$, то існує обернена матриця $(BA)^{-1}$, тоді

$$X = (BA)^{-1}X_2, \quad \text{або } \vec{x} = (\mathcal{B}\mathcal{A})^{-1}\vec{x}_2. \tag{4.14}$$

ВПРАВА. Дано два лінійних перетворення. Засобами матричного числення знайти перетворення, які виражають $\vec{x}'' = (x_1'', x_2'', x_3'')$ через $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо:

а) $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 + 3x_3, \\ x_2' = x_1 - 2x_2, \\ x_3' = 7x_2 - x_3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' + x_3', \\ x_2'' = x_2' - 5x_3', \\ x_3'' = x_2'; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 4x_3, \\ x_2' = 4x_2 - 9x_3, \\ x_3' = 3x_1 + x_2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_2' - 6x_3', \\ x_2'' = 3x_1' + 7x_3', \\ x_3'' = x_1' + x_2' - x_3'; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 - x_3, \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 + 7x_3, \\ x_3' = 8x_1 + x_2 - x_3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3', \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_3', \\ x_3'' = x_2' - x_3'. \end{cases}$

4.3. Матриця переходу від одного базису до іншого. Випадок наочних просторів

Нехай у n-вимірному просторі задано два базиси:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \text{ і } \vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'.$$

Виразимо вектори $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$ через вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, які утворюють перший базис. Маємо

$$\vec{e}_i' = \alpha_{i1}\vec{e}_1 + \alpha_{i2}\vec{e}_2 + \dots + \alpha_{in}\vec{e}_n,$$

де $i = 1, 2, \dots, n$.

Координати векторів $\vec{e}_i'$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ можна записати у вигляді матриці

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

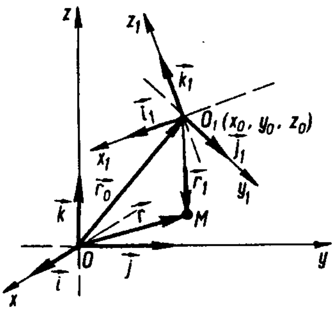


Рис. 1.36

Ця матриця називається **матрицею переходу** від одного базису до іншого. Введемо величини

$$\Pi = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \dots \\ \vec{e}_n \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \Pi' = \begin{bmatrix} \vec{e}\,'_1 \\ \vec{e}\,'_2 \\ \dots \\ \vec{e}\,'_n \end{bmatrix},$$

тоді

$$\Pi' = L\,\Pi. \tag{4.16}$$

Матриця переходу (перетворення) L має визначник, відмінний від нуля, оскільки у протилежному разі вектори $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \dots, \vec{e}\,'_n$ будуть лінійно залежними. Помноживши рівність (4.16) на L^{-1} зліва, дістанемо

$$\Pi = L^{-1}\Pi'. \tag{4.17}$$

Запишемо матрицю L для тривимірного простору. Виберемо за перший базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а за другий базис $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ (рис. 1.36). Тоді

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 &= l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}, \\ \vec{j}_1 &= l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}, \\ \vec{k}_1 &= l_3\vec{i} + m_3\vec{j} + n_3\vec{k}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Якщо перший рядок помножимо послідовно на $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то дістанемо

$$l_1 = \text{пр}_x \vec{i}_1 = \cos(\widehat{x, \vec{i}_1}),$$

$$m_1 = \text{пр}_y \vec{i}_1 = \cos(\widehat{y, \vec{i}_1}),$$

$$n_1 = \text{пр}_y \vec{i}_1 = \cos(\widehat{z, \vec{i}_1}).$$

Після аналогічних дій над другим і третім рядками рівностей (4.18) знаходимо

$$l_2 = \text{пр}_x \vec{j}_1 = \cos(\widehat{x, \vec{j}_1}),$$

$$m_2 = \text{пр}_y \vec{j}_1 = \cos(\widehat{y, \vec{j}_1}),$$

$$n_2 = \text{пр}_z \vec{j}_1 = \cos(\widehat{z, \vec{j}_1})$$

та

$$l_3 = \text{пр}_x \vec{k}_1 = \cos(x, \widehat{\vec{k}_1}),$$

$$m_3 = \text{пр}_y \vec{k}_1 = \cos(y, \widehat{\vec{k}_1}),$$

$$n_3 = \text{пр}_z \vec{k}_1 = \cos(z, \widehat{\vec{k}_1}).$$

При цьому матриця переходу

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

а матриця оберненого переходу

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Тоді

$$\Pi' = L\Pi \quad \text{і} \quad \Pi = L^{-1}\Pi'. \tag{4.21}$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1, \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned} \tag{4.22}$$

і

$$\begin{aligned} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0, \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0, \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Порівнюючи (4.19) і (4.20), переконуємось, що $L^{-1} = L_т$. Квадратна матриця A, для якої $A^{-1} = A_т$, називається **ортогональною.** Матриці L і L^{-1} ортогональні. Для ортогональних матриць

$$\det(AA_т) = (\det A)(\det A_т) = (\det A)^2 = 1.$$

Зауваження. Величина Π' визначається трьома векторами $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, або L-матрицею, тобто дев'ятьма числами. Величина Π' відрізняється від звичайного вільного вектора хоча б тим, що останній визначається лише трійкою чисел. Величина Π' називається **афінним ортогональним тензором другого рангу** або **афінором.**

Повернемось тепер до матриці переходу L. Елементи цієї матриці мають задовольняти умови (4.22) і (4.23), тобто із дев'яти величин, які складають елементи матриці L, тільки три будь-які можна вибирати довільно. Решта шість визначаються з умов (4.22) і (4.23). Три довільно вибрані елементи матриці L називаються **незалежними,** а решта — **залежними.**

Якщо за базис вважати три будь-яких некомпланарних вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$, то, позначаючи проекції цих векторів на координатні осі через $\vec{a}_1 = (a_{11}; a_{12}; a_{13})$, $\vec{a}_2 = (a_{21}; a_{22}; a_{23})$, $\vec{a}_3 = (a_{31}; a_{32}; a_{33})$, і враховуючи рівності (4.18), маємо

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_{11}\vec{i} + a_{12}\vec{j} + a_{13}\vec{k}, \\ \vec{a}_2 &= a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{23}\vec{k}, \\ \vec{a}_3 &= a_{31}\vec{i} + a_{32}\vec{j} + a_{33}\vec{k}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Тепер матриця переходу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

має елементи, для яких не виконуються умови (4.22) і (4.23).

4.4. Перетворення координат. Паралельне перенесення і поворот (у наочних просторах) системи координат

Задача перетворення координат полягає ось у чому. Нехай дано дві системи координат: $Oxyz$ і $O_1x_1y_1z_1$, а також координати точки M або вектора в одній системі через їхні координати в іншій системі (рис. 1.36).

Розглянемо декілька випадків.

Якщо напрями осей обох систем координат збігаються, то говорять про **паралельне перенесення системи координат** (рис. 1.37).

Початок нової системи координат $O_1x_1y_1z_1$ перенесено у точку O_1, радіус-вектор якої у старій системі координат $Oxyz$

$$\overrightarrow{OO_1} = \vec{r}_0.$$

Якщо початки нової системи координат O_1 і старої O збігаються, тобто $\vec{r}_0 = 0$, а осі нової системи повернуто відносно старої, то говорять про **поворот системи координат** (рис. 1.38).

Коли напрям осей змінюється і здійснюється перенесення початку координат $\vec{r}_0 \neq 0$, то йдеться про **загальний випадок** або **спільний поворот і перенесення системи координат** (рис. 1.36).

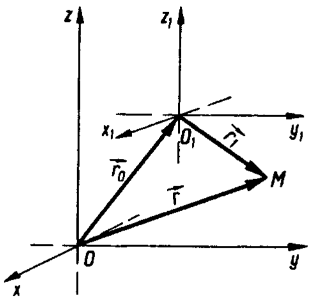


Рис. 1.37

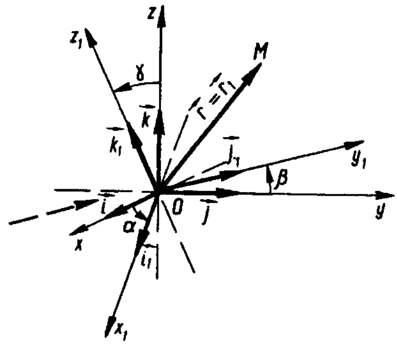


Рис. 1.38

I. ***Паралельне перенесення системи координат.*** Нехай положення точки M у системі $Oxyz$ визначається її радіусом-вектором $\vec{r} = (x,\ y,\ z)$, а у системі $O_1x_1y_1z_1$ — радіусом-вектором $\vec{r}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)$. Положення нового початку координат (точки O_1) визначається радіусом-вектором $\vec{r}_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Тоді з векторного трикутника OO_1M (рис. 1.37) маємо

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1, \tag{4.25}$$

тобто радіус-вектор точки у старій системі координат дорівнює сумі радіуса-вектора цієї точки у новій системі координат і радіуса-вектора початку нової системи координат.

Вираз (4.25) у координатній формі можна записати у вигляді

$$x = x_0 + x_1; \quad y = y_0 + y_1; \quad z = z_0 + z_1. \tag{4.26}$$

У формулах (4.25) і (4.26) вважаються відомими

$$\vec{r}_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0) \text{ і } \vec{r}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1),$$

тобто відомі координати точки у новій системі координат, а відшукуються координати точки у старій системі.

Природнішою є обернена задача: коли відомі $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$, а треба знайти $\vec{r}_1$. Тоді із рівності (4.25) знаходимо

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_0$$

і відповідно

$$x_1 = x - x_0; \quad y_1 = y - y_0; \quad z_1 = z - z_0. \tag{4.27}$$

При паралельному перенесенні $\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{j}_1 = \vec{j}$, $\vec{k}_1 = \vec{k}$, тоді

$$l_1 = 1,\ m_1 = 0,\ n_1 = 0,$$

$$l_2 = 0, \quad m_2 = 1, \quad n_2 = 0,$$
$$l_3 = 0, \quad m_3 = 0, \quad n_3 = 1$$

і L-матриця набирає вигляду

$$L = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто є одиничною.

II. *Поворот системи координат.* Нехай положення точки M у обох системах координат визначається одним і тим самим вектором $\vec{r} = \vec{r}_1$ (рис. 1.38), який через базис системи можна записати

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad \vec{r}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1, \tag{4.28}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1. \tag{4.29}$$

Замінюючи тут $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ за формулами (4.18) і групуючи, дістанемо

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_1l_1 + y_1l_2 + z_1l_3)\vec{i} +$$
$$+ (x_1m_1 + y_1m_2 + z_1m_3)\vec{j} + (x_1n_1 + y_1n_2 + z_1n_3)\vec{k},$$

або

$$\begin{aligned} x &= l_1x_1 + l_2y_1 + l_3z_1, \\ y &= m_1x_1 + m_2y_1 + m_3z_1, \\ z &= n_1x_1 + n_2y_1 + n_3z_1. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Формули (4.30) виражають координати точки у старій системі через координати тієї самої точки у новій системі координат.

Щоб записати формули (4.30) у матричній формі, введемо позначення

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; L_{\text{т}} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}, \; X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

або

$$X = L_{\text{т}}X_1. \tag{4.33}$$

Матриця $L_т$ є транспонованою відносно L-матриці.

Виразимо координати x_1, y_1, z_1 через координати x, y, z точки M. Для цього помножимо (4.33) зліва на L-матрицю, обернену до матриці $L_т$:

$$LX = LL_тX_1. \tag{4.34}$$

Оскільки

$$LL_т = E, \tag{4.35}$$

то рівність (4.34) запишемо у вигляді

$$X_1 = LX. \tag{4.36}$$

Записавши (4.36) у вигляді (4.32), дістанемо формули, які виражають координати точки у новій системі координат через її координати у старій системі при повороті системи координат:

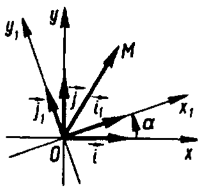


Рис. 1.39

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1x + m_1y + n_1z, \\ y_1 &= l_2x + m_2y + n_2z, \\ z_1 &= l_3x + m_3y + n_3z. \end{aligned} \tag{4.37}$$

III. ***Загальний випадок (поворот і паралельне перенесення системи координат).*** Внаслідок незалежності повороту і паралельного перенесення системи координат і грунтуючись на (4.26) і (4.30) маємо:

$$\begin{aligned} x &= l_1x_1 + l_2y_1 + l_3z_1 + x_0, \\ y &= m_1x_1 + m_2y_1 + m_3z_1 + y_0, \\ z &= n_1x_1 + n_2y_1 + n_3z_1 + z_0, \end{aligned} \tag{4.38}$$

а також

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1x + m_1y + n_1z - x_0, \\ y_1 &= l_2x + m_2y + n_2z - y_0, \\ z_1 &= l_3x + m_3y + n_3z - z_0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Запишемо ці формули у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \tag{4.40}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \tag{4.41}$$

$$X = L_тX_1 + X_0, \quad X_1 = LX - X_0. \tag{4.42}$$

IV. ***Поворот системи координат, розміщеної у площині*** (рис. 1.39). Розглянемо окремий випадок — поворот системи координат

Oxy. У цьому разі L-матриця (4.19) набирає вигляду

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix}, \tag{4.43}$$

при цьому

$$l_1^2 + m_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \tag{4.44}$$

Як бачимо, з чотирьох елементів матриці (4.43) лише один елемент є довільним. Вважатимемо таким елементом косинус кута між $\vec{i}$ та $\vec{i}_1$ і позначимо цей кут через α. Тоді

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(\widehat{\vec{i}_1, \vec{i}}) = \cos\alpha, \\ m_1 &= \cos(\widehat{\vec{i}_1, \vec{j}}) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \\ l_2 &= \cos(\widehat{\vec{j}_1, \vec{i}}) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha, \\ m_2 &= \cos(\widehat{\vec{j}_1, \vec{j}}) = \cos\alpha. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Отже, формули (4.30), (4.37) і (4.38) для системи координат, розміщеної у площині, наберуть вигляду

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases} \tag{4.46}$$

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{4.47}$$

Якщо виконати паралельне перенесення системи координат на вектор $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ і одночасно поворот на кут α, то формули перетворення координат точки M набирають вигляду

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha + x_0, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha + y_0. \end{cases} \tag{4.48}$$

і

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha - x_0, \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - y_0. \end{cases} \tag{4.49}$$

4.5. Дробово-лінійна функція і її геометричний зміст

Дробово-лінійною називається функція

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Якщо $c = 0$ і $d \neq 0$, то дробово-лінійна функція називається **цілою лінійною функцією.** При $ad - bc = 0$ дробово-лінійна функція є сталою величиною. Доведемо, що при $c \neq 0$ і $ad - bc \neq 0$ графіком дробово-лінійної функції є **графік оберненої пропорційності,** який ще називається **рівнобічною гіперболою** (див. гл. 2, п. 5.4).

Справді, виконавши паралельне перенесення системи координат таким чином, щоб її початок перейшов у точку O_1 (x_0, y_0), і вибравши координати точки O_1 так, щоб

$$x_0 = -\frac{d}{c}, \quad y_0 = \frac{d}{c}, \quad c \neq 0,$$

дістанемо рівняння гіперболи

$$x_1 y_1 = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Позначимо $\frac{bc - ad}{c^2} = k$, тоді

$$x_1 y_1 = k, \quad \text{або} \quad y_1 = \frac{k}{x_1}.$$

Як відомо, це і виражає обернену пропорційну залежність між x_1 та y_1.

4.6. Перетворення координат n-вимірного вектора при переході до нового базису

Розглянемо у n-вимірному, лінійному просторі два базиси: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$. Перший називатимемо **старим,** а другий — **новим.**

Матрицею переходу від старого базису до нового називається матриця системи векторів $\vec{b}_i$ у базисі $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Позначимо цю матрицю за аналогією з (4.15) через

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.50}$$

Тоді

$$\vec{b}_i = t_{1i}\vec{a}_1 + t_{2i}\vec{a}_2 + \cdots + t_{ni}\vec{a}_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.51}$$

Матриця T є аналогом матриці (4.2). Формули, які зв'язують координати n-вимірного вектора у різних базисах, називаються **формулами перетворення координат.**

Теорема. *Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координати вектора $\vec{x}$ у базисі $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ — координати цього самого вектора у базисі $\vec{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то справджується співвідношення*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad X = TX',$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

а T — матриця переходу від базису $\vec{a}_i$ до базису $\vec{b}_i$.

Доведення. Виразимо вектор $\vec{x}$ через базиси $\vec{a}_i$ і $\vec{b}_i$:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a}_i, \qquad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \vec{b}_i. \tag{4.52}$$

Враховуючи (4.51), дістанемо

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \left(t_{1i}\vec{a}_1 + t_{2i}\vec{a}_2 + \cdots + t_{ni}\vec{a}_n \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i' t_{1i} \right) \vec{a}_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i' t_{2i} \right) \vec{a}_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i' t_{ni} \right) \vec{a}_n.$$

Порівнюючи цю рівність з рівністю

$$\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n, \tag{4.53}$$

знаходимо

$$x_j = x_1' t_{j1} + x_2' t_{j2} + \cdots + x_n' t_{jn}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

або у матричній формі

$$X = TX'.$$

Матриця T має обернену T^{-1}, а тому

$$X' = T^{-1}X.$$

4.7. Ядро і область значень лінійного перетворення

Нехай задано множину $\mathfrak{m}$ векторів n-вимірного простору і довільне лінійне перетворення $\mathcal{A}$. Застосувавши до вектора $\vec{a} \in \mathfrak{m}$ перетворення $\mathcal{A}$, дістанемо вектор $\vec{b} = \mathcal{A}\vec{a}$, який називається **образом вектора** $\vec{a}$. Вектор $\vec{b}$ може належати або не належати множині $\mathfrak{m}$ векторів. Сукупність векторів $\vec{b}$, які є образами усіх $\mathfrak{m}$ векторів, називається **образом множини** $\mathfrak{m}$ векторів відносно перетворення $\mathcal{A}$.

Областю значень перетворення $\mathcal{A}$ називається сукупність усіх векторів n-вимірного простору. Розмірність області значень перетворення $\mathcal{A}$ називається **рангом перетворення.**

Ядром лінійного перетворення називається сукупність усіх тих векторів n-вимірного простору, які перетворення $\mathcal{A}$ переводить у нульовий вектор. Розмірність ядра називається **дефектом перетворення** $\mathcal{A}$.

Приклад. Нехай дано тривимірний простір і у ньому множину векторів, які виходять із деякої точки O. Виберемо систему прямокутних координат з початком у точці O. За перетворення $\mathcal{A}$ виберемо перетворення проектування векторів, які виходять із точки O, на площину xOy. Тоді ранг перетворення дорівнює 2. Ядром перетворення є множина векторів, які лежать на осі Oz, оскільки лише ці вектори при проектуванні на площину xOy дають нульовий вектор. Дефект перетворення при цьому дорівнює 1. Сума рангу і дефекту перетворення дорівнює 3 (розмірності простору). Цей факт є загальним. Справедлива ***теорема:*** *сума рангу і дефекту лінійного перетворення дорівнює розмірності простору.*

4.8. Власні вектори і власні числа матриці лінійного перетворення

Нехай $\mathcal{A}$ — перетворення, задане квадратною матрицею A порядку n. Якщо існує ненульовий вектор $\vec{x}$ і таке число λ, що

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}, \tag{4.54}$$

то говорять, що λ — власне число матриці A, а $\vec{x}$ — її власний вектор, який відповідає власному числу.

Властивості власних векторів лінійного перетворення $\mathcal{A}$.

1°. *Кожному власному вектору відповідає одне власне число.*

Справді, нехай $\vec{x}$ — власний вектор. Припустимо, що йому відповідають два різних власних числа: λ_1 і λ_2. Внаслідок рівності (4.54) $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda_1\vec{x}$ і $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda_2\vec{x}$, або $\vec{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}$. Оскільки $\vec{x} \neq 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2$.

2°. *Якщо $\vec{x}$ — власний вектор матриці A з власним числом λ, то будь-який вектор $\gamma\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{x}$, також є власним вектором матриці A з тим самим власним числом.*

Справді,

$$A(\gamma\vec{x}) = \gamma(A\vec{x}) = \gamma(\lambda\vec{x}) = \lambda(\gamma\vec{x}).$$

3°. *Якщо $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ — власні вектори матриці A з одним і тим самим власним числом λ, то їхня сума $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ також є власним вектором матриці A з тим самим власним числом.*

Із властивостей 2° і 3° випливає, що кожному власному числу відповідає нескінченна множина (колінеарних) власних векторів. Ця множина утворює підпростір.

Розв'яжемо тепер рівняння (4.54). Нехай, наприклад, перетворення задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

а вектор $\vec{x}$ подамо у вигляді матриці $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X.$$

Тоді рівняння (4.54) запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{4.55}$$

або

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = \lambda x, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = \lambda y, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \lambda z. \end{cases} \tag{4.56}$$

Звідси

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - \lambda)z = 0. \end{cases} \tag{4.57}$$

Для того щоб ця однорідна система мала відмінні від нуля розв'язки, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.58}$$

Дістанемо кубічне рівняння. Корені цього рівняння не обов'язково дійсні і не обов'язково різні. У комплексному просторі всі три корені власні числа. У дійсному просторі власними числами будуть тільки дійсні корені (один або усі три).

Якщо λ_1, λ_2, λ_3 — три різних дійсних корені, то, підставивши їх у систему (4.57), знайдемо координати трьох власних векторів:

$$\vec{x}_1 = X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = X_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Справедлива така теорема.

Теорема. *Якщо $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ — власні вектори матриці A відповідно з різними власними числами λ_1, λ_2, λ_3, то вектори $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ лінійно незалежні.*

Протилежне твердження у загальному випадку не справджується, оскільки існують лінійно незалежні вектори, які відповідають одному і тому самому власному числу.

Для визначення власних чисел λ матриці A треба знайти всі розв'язки рівняння (4.58). Підставляючи кожне із знайдених власних чисел λ_i у систему (4.57), відшукаємо її лінійно незалежні розв'язки, які і визначають координати власних векторів, відповідних λ_i.

Ці міркування можна навести і для n-вимірного випадку. Рівняння (4.54) запишемо у вигляді

$$AX = \lambda EX, \tag{4.59}$$

або

$$(A - \lambda E)\, X = 0, \tag{4.60}$$

де

$$X = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рівняння (4.60) —це матрична форма запису рівняння, аналогічного рівнянню (4.57). Тоді

$$\det|A - \lambda E| = 0 \tag{4.61}$$

є матричною формою запису рівняння (4.58). Рівняння (4.61) називається **характеристичним.** У розгорнутій формі рівняння (4.61) записується у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.62}$$

Приклад. Знайти власні числа і власні вектори симетричної матриці A (лінійного перетворення $\mathcal{A}$), якщо

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \tag{4.63}$$

Для визначення власних чисел симетричної матриці (4.63) складемо її характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.64}$$

Розв'язками цього рівняння є

$$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 3. \tag{4.65}$$

Оскільки усі корені різні, матриця A має три лінійно незалежні власні вектори. Координати цих векторів визначимо із системи (4.57):

$$\begin{cases} (7-\lambda)x - 2y + 0\cdot z = 0, \\ -2x + (6-\lambda)y - 2z = 0, \\ 0\cdot x - 2y + (5-\lambda)z = 0. \end{cases} \tag{4.66}$$

Підставивши сюди $\lambda = 6$, дістанемо координати вектора

$$\vec{x}_1 = X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ x_1 = -2t;\ \ y_1 = -t;\ \ z_1 = 2t, \tag{4.67}$$

тобто одним із власних векторів, який відповідає $\lambda_1 = 6$, перетворення $\mathcal{A}$ є

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Його довжина

$$|\vec{x}_1| = \sqrt{4t^2 + t^2 + 4t^2} = 3|t|.$$

Далі нормуємо вектор $\vec{x}_1$, тобто знаходимо одиничний вектор

$$\vec{i}_1 = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} = \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right). \tag{4.68}$$

Аналогічно знаходимо по одному із власних векторів, які відповідають $\lambda_2 = 9$ і $\lambda_3 = 3$:

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix}. \tag{4.69}$$

Нормуючи їх, дістанемо

$$\vec{j}_1 = \frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|} = \left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),$$

і відповідно

$$\vec{k}_1 = \frac{\vec{x}_3}{|\vec{x}_3|} = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right).$$

Таким чином, матриця A має три лінійно незалежні вектори:

$$\vec{i}_1 = \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),$$

$$\vec{j}_1 = \left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),$$

$$\vec{k}_1 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right).$$

Обчислимо скалярні добутки:

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0,$$

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 0,$$

$$\vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 0.$$

Тобто *власні вектори симетричної матриці* (4.63), *які відповідають різним власним числам, утворюють базис.*

Ця властивість власних векторів симетричних матриць є загальною.

Доведемо таку теорему.

Теорема. *Нехай лінійне перетворення $\mathcal{A}$ задано симетричною матрицею A, тоді:*

1) *власні вектори матриці A утворюють базис;*

2) *у цьому базисі матриця перетворення має діагональний вигляд.*

Доведення. Припустимо, що матриця A має n різних власних чисел. Поставимо у відповідність кожному власному числу один із власних векторів, позначивши їх $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n$. Ці вектори лінійно незалежні. Справді, припустимо, що система векторів $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n$ лінійно залежна, тобто

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0}, \tag{4.70}$$

де, наприклад, $\alpha_1 \neq 0$. Застосувавши до виразу (4.70) перетворення $\mathcal{A}$,

дістанемо

$$\mathcal{A}\left(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\cdots+\alpha_n\vec{x}_n\right)=\vec{0},$$

$$\alpha_1\mathcal{A}\vec{x}_1+\alpha_2\mathcal{A}\vec{x}_2+\cdots+\alpha_n\mathcal{A}\vec{x}_n=\vec{0}.$$

Оскільки $\mathcal{A}\vec{x}_i=\lambda_i\vec{x}_i=A\vec{x}_i$, то

$$\alpha_1\lambda_1\vec{x}_1+\alpha_2\lambda_2\vec{x}_2+\cdots+\alpha_n\lambda_n\vec{x}_n=\vec{0}, \tag{4.71}$$

де λ_1, λ_2, ..., λ_n — власні числа матриці A. Помножимо рівність (4.70) на λ_n і результат віднімемо від (4.71):

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_n)\vec{x}_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_n)\vec{x}_2+\cdots+\alpha_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\vec{x}_{n-1}=\vec{0}. \tag{4.72}$$

Лінійна комбінація у останній рівності вміщує вже $(n-1)$ вектор. Продовжуючи цей процес, дійдемо рівності

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_1-\lambda_{n-1})(\lambda_1-\lambda_{n-2})\cdots(\lambda_1-\lambda_2)\vec{x}_1=\vec{0}.$$

Оскільки власні числа попарно різні, то дістанемо $\vec{x}_1=\vec{0}$, що неможливо. Таким чином, вектори $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ..., $\vec{x}_n$ лінійно незалежні і їх можна ортогоналізувати, внаслідок чого дістанемо ортонормований базис

$$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n.$$

У цьому базисі матриця лінійного перетворення має діагональний вигляд.

Справді, якщо вектор $\vec{e}_i$ — власний, то $A\vec{e}_i=\lambda_i\vec{e}_i$ і, отже, елемент i координатного стовпця дорівнює λ_i, а решта елементів стовпця $A\vec{e}_i$ є нулями:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Тим самим доведено теорему для окремого випадку попарно різних власних чисел. Якщо власне число матриці A має кратність k, то йому відповідає не більше k лінійно незалежних власних векторів. Доведення цього припущення не даємо.

Покажемо на конкретному прикладі матриці A третього порядку, як вибирати власні вектори, якщо серед власних чисел є кратні.

1. Нехай серед коренів λ_1, λ_2, λ_3 характеристичного рівняння (4.57) є два кратних: $\lambda_2=\lambda_3\neq\lambda_1$. Тоді кореням λ_2 і λ_3 відповідає нескінченна множина власних векторів. Система (4.57) при цьому зводиться до одного рівняння, інші рівняння системи мають коефіцієнти, пропорційні коефіцієнтам даного рівняння. Нехай це буде рівняння

$$(a_{11} - \lambda)\, x + a_{12}y + a_{13}z = 0. \tag{4.73}$$

Тоді будь-який ненульовий розв'язок цього рівняння при $\lambda = \lambda_1$ визначає власний вектор $\vec{x}_1$ з координатами (x, y, z). За другий власний вектор можна вважати $\vec{x}_2$ з координатами $(a_{11} - \lambda_2, a_{12}, a_{13})$. Із рівняння (4.73) випливає, що ці вектори взаємно перпендикулярні.

Нормуючи вектори $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$, знайдемо $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$. Помноживши векторно нормовані вектори $\vec{i}_1 \times \vec{j}_1 = \vec{k}_1$, дістанемо третій одиничний вектор базису $\vec{k}_1$, який відповідає власному числу $\lambda_2 = \lambda_3$.

2. Нехай усі корені характеристичного рівняння (4.58) рівні між собою: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, тоді усі вектори простору є власними. За базис можна вибрати будь-яку трійку попарно перпендикулярних векторів.

Приклад. Скласти ортонормований базис із власних векторів матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р о з в' я з а н н я. Запишемо характеристичне рівняння даної матриці:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, дістанемо

$$\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0.$$

Із цього рівняння знаходимо корені (власні числа матриці)

$$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -3.$$

Система рівнянь для визначення координат власних векторів матриці має вигляд

$$\begin{cases} (1-\lambda)\,x + 2y - 4z = 0, \\ 2x - (2+\lambda)\,y - 2z = 0, \\ -4x - 2y + (1-\lambda)\,z = 0. \end{cases} \tag{4.74}$$

Покладаючи $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = -3$, дістаємо

$$2x + y - 2z = 0. \tag{4.75}$$

При $\lambda = \lambda_1 = 6$ система (4.74) має розв'язок

$$x_1 = 2t,\ y_1 = t,\ z_1 = -2t.$$

Тоді відповідний власний вектор

$$\vec{x}_1 = (2t,\ t,\ -2t).$$

Нормуючи цей вектор, знаходимо

$$\vec{i}_1 = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right).$$

Візьмемо будь-який розв'язок рівняння (4.75), наприклад $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $z_2 = 2$ і дістанемо

$$\vec{x}_2 = (t, 2t, 2t).$$

Нормуючи його, знайдемо

$$\vec{j}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Тепер визначимо третій вектор, перпендикулярний до двох знайдених:

$$\vec{k}_1 = \vec{i}_1 \times \vec{j}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Відповідь. Ортонормований базис складають вектори

$$\vec{i}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad \vec{j}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\vec{k}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

ВПРАВА. Знайти власні числа і власні вектори лінійного перетворення $\mathcal{A}$, заданого матрицею:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 5. ЛІНІЙНІ І КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ. ПРИВЕДЕННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

5.1. Лінійні форми

Розглянемо n-вимірний евклідів простір. Поставимо у відповідність до n-вимірного вектора $\vec{x}$ з цього простору певне дійсне число $f(\vec{x})$. Дістанемо числову функцію векторного аргументу

$$u = f(\vec{x}). \tag{5.1}$$

Функція (5.1) називається **лінійною функцією** або **лінійною формою,** якщо справджуються такі умови:

1) $f(c\vec{x}) = cf(\vec{x})$, (5.2)

2) $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$. (5.3)

Із цих умов дістанемо ще одну умову:

3) $f(c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) = c_1 f(\vec{x}_1) + c_2 f(\vec{x}_2)$. (5.4)

Якщо при цьому $c_1 = c_2 = 0$, то

$$f(\vec{0}) = 0. \tag{5.5}$$

Враховуючи цю умову, часто замість «лінійної функції» говорять про «лінійну однорідну функцію». У одновимірному просторі лінійна однорідна функція має вигляд $y = kx$.

Якщо задано базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ n-вимірного простру, в якому координати вектора $\vec{x}$ є $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

На основі рівності (5.4)

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n).$$

Позначимо

$$f(\vec{e}_1) = a_1; \quad f(\vec{e}_2) = a_2; \quad \ldots; \quad f(\vec{e}_n) = a_n,$$

тоді

$$f(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n. \tag{5.6}$$

Зазначимо, що при переході від одного базису до другого лінійні форми перетворюються так само, як і вектори базису.

5.2. Квадратичні форми

Квадратичною формою називається многочлен, однорідний відносно змінних другого ступеня. Наприклад,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

$$x^2 + 2xy + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 8xz - 10yz$$

є квадратичні форми, а вираз

$$x^2 + xy + y^2 - 7x + 8$$

вже не є квадратичною формою.

Запишемо квадратичну форму двовимірного вектора $\vec{x}$, $\vec{x} = (x, y) = (x_1, x_2)$, або двох змінних:

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{21}xy + a_{22}y^2. \tag{5.7}$$

Якщо $a_{12} = a_{21}$, то

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{5.8}$$

або

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \tag{5.9}$$

Зазначимо, що умова $a_{12} = a_{21}$ виконується завжди. Справді, нехай $a_{12} \neq a_{21}$, тоді

$$a_{12}xy + a_{21}xy = (a_{12} + a_{21})xy = 2b_{12}xy,$$

при цьому

$$b_{12} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}.$$

Квадратична форма трьох змінних має вигляд

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz, \tag{5.10}$$

або

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \tag{5.11}$$

Вирази (5.9) і (5.11) можна записати у вигляді

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j, \tag{5.12}$$

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j.$$

Остання форма запису компактніша і дає змогу узагальнення на n-вимірний випадок. Так, для n-вимірного вектора формула (5.12) набирає вигляду

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j. \tag{5.13}$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

називається **матрицею квадратичної форми** (5.13). Для матриці A завжди справджується рівність $a_{ij} = a_{ji}$. Матриця A є симетричною.

Введемо вектор-стовпець і матрицю-стовпець:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

та вектор-рядок (матрицю-рядок)

$$\vec{x}' = (x_1, x_2, ..., x_n), X' = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Легко помітити, що

$$\vec{x}_\text{т} = \vec{x}', \qquad X_\text{т} = X'.$$

Теорема. *Квадратичну форму* $\Phi(\vec{x}, \vec{x})$ *завжди можна подати у вигляді скалярного добутку* $\vec{x}'$ *і* $A\vec{x}$:

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}' \cdot A\vec{x}. \tag{5.15}$$

Доведення проведемо на прикладі квадратичної форми двох змінних. Розглянемо квадратичну форму двох змінних. Тоді

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_1 +$$

$$+(a_{12}x_1 + a_{22}x_2)x_2 = (x_1 \ \ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{x}' \cdot A\vec{x}.$$

Теорему доведено.

Із доведення теореми випливає, що квадратичну форму $\Phi(\vec{x}, \vec{x})$ завжди можна подати у вигляді добутку матриць X', A, X:

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = X'AX. \tag{5.16}$$

Розглянемо залежність зміни матриці квадратичної форми при зміні базису. Нехай дано ортонормований базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, в якому квадратична форма задана матрицею A. Нехай здійснюється перехід до нового ортонормованого базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$, в якому квадратична форма має матрицю B. Знайдемо залежність між A і B. Використавши позначення (4.15), (4.16), де Π' — це матриця-стовпець, складена із векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$, можна записати

$$\Pi' = L\Pi \text{ і } \Pi = L^{-1}\Pi'.$$

Введемо дві системи координат (стару і нову), які відповідають двом базисам: Π і Π'. Розмістимо початки цих систем у одній точці і позначимо один і той самий вектор у двох базисах відповідно матрицями X і Y. Тоді

$$Y = LX, \qquad X = L^{-1}Y, \qquad X' = Y'L.$$

Підставимо значення X і X' у формулу (5.16):

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = X'AX = X'A(L^{-1}Y) = Y'LAL^{-1}Y.$$

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = Y'LAL^{-1}Y, \tag{5.17}$$

але

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = Y'BY. \qquad (5.18)$$

Порівнюючи вирази (5.17) і (5.18), знаходимо

$$B = LAL^{-1}. \qquad (5.19)$$

Таким чином, при зміні базису матриця квадратичної форми у новому базисі має вигляд (5.19).

Якщо матриця квадратичної форми має діагональний вигляд, то квадратичну форму називають **канонічною.**

Канонічна квадратична форма має вигляд

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i^2, \qquad (5.20)$$

де η_i — координати вектора $\vec{x}$ у новому базисі. Для форми (5.20) матриця A має діагональний вигляд, тобто

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (5.21)$$

Напрями, в яких квадратична форма має вигляд (5.20), називаються **головними напрямами** або **напрямами власних векторів.**

Теорема. *Із власних векторів матриці квадратичної форми можна побудувати ортонормований базис. У цьому базисі квадратична форма має канонічний вигляд.*

Справді, якщо за базис вважати ортонормовану систему власних векторів, то матриця A матиме діагональний вигляд, а квадратична форма — канонічний.

Таким чином, щоб квадратичну форму привести до канонічного вигляду, потрібно:

1) знайти матрицю A квадратичної форми;

2) знайти власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ і власні вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ матриці A;

3) записати в канонічному вигляді квадратичну форму.

Приклад. Привести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_3^2.$$

Розв'язання. 1) Складемо матрицю квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Записуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння, знаходимо власні числа

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = -1.$$

Позначимо координати вектора $\vec{x}$ у системі власних векторів матриці через η_1, η_2, η_3. Тоді квадратична форма має вигляд

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_3^2.$$

3) Знаходимо ортонормовані власні вектори матриці

$$\vec{b}_1 = (l_1, m_1, n_1);\ \vec{b}_2 = (l_2, m_2, n_2);\ \vec{b}_3 = (l_3, m_3, n_3).$$

Координати l, m, n задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} (3-\lambda)l + 2m + 0\cdot n = 0, \\ 2l + (0-\lambda)m + 0\cdot n = 0, \\ 0\cdot l + 0\cdot m + (1-\lambda)n = 0. \end{cases} \tag{5.22}$$

Покладемо $\lambda = \lambda_1 = 1$, тоді система набере вигляду

$$\begin{cases} 2l_1^* + 2m_1^* = 0, \\ 2l_1^* - m_1^* = 0. \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв'язок

$$l_1^* = 0, \quad m_1^* = 0.$$

Значення компоненти n_1^* будь-яке. Щоб вектор $\vec{b}_1$ був нормованим, покладемо $n_1^* = 1$. Маємо $\vec{b}_1 = (0;\ 0;\ 1)$. Оскільки $\lambda = \lambda_2 = 4$, то система (5.22) набере вигляду

$$\begin{cases} -l_2^* + 2m_2^* = 0, \\ 2l_2^* - 4m_2^* = 0, \\ \qquad - 3n_2^* = 0. \end{cases}$$

Звідси $l_2^* = 2t,\ m_2^* = t,\ n_2^* = 0\cdot t.$

Нормуючи, дістанемо

$$l_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad m_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad n_2 = 0,$$

тобто

$$\vec{b}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right).$$

Для третього власного числа $\lambda = \lambda_3 = -1$ маємо із (5.22) систему

$$\begin{cases} 4l_3^* + 2m_3^* = 0, \\ 2l_3^* + m_3^* = 0, \\ 2n_3^* = 0, \end{cases}$$

звідси $l_3^* = -t,\ m_3^* = 2t,\ n_3^* = 0 \cdot t.$

Нормуючи $\vec{b}_3^* = (-t,\ 2t,\ 0)$, знаходимо

$$l_3 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad m_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad n_3 = 0.$$

Тобто вектор

$$\vec{b}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right).$$

Відповідь. Канонічна форма квадратичної форми

$$\Phi\left(\vec{x},\ \vec{x}\right) = \eta_1^2 + 4\eta_2^2 - \eta_3^2,$$

власні вектори квадратичної форми

$$\vec{b}_1 = (0,\ 0,\ 1),\ \vec{b}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right),\ \vec{b}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right).$$

ВПРАВА. Привести до канонічного вигляду квадратичні форми і знайти їхні власні вектори, якщо:

а) $\Phi\left(\vec{x},\ \vec{x}\right) = 3x^2 - 48xy + 27y^2$;

б) $\Phi\left(\vec{x},\ \vec{x}\right) = 99x_1^2 - 12x_1x_2 + 48x_1x_3 + 130x_2^2 - 60x_2x_3 + 71x_3^2$;

в) $\Phi\left(\vec{x},\ \vec{x}\right) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$;

г) $\Phi\left(\vec{x},\ \vec{x}\right) = x^2 - 2\sqrt{21}xy + 5y^2$.

Глава 2
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Аналітична геометрія — це розділ математики, в якому геометричним об'єктам ставлять у відповідність певні рівняння таким чином, що властивості об'єктів виражаються у властивостях цих рівнянь. Рівняння записуються відносно вибраної системи координат.

§ 1. ПОВЕРХНІ І ЇХНІ РІВНЯННЯ

1.1. Поверхня і її загальне рівняння

Співвідношення $F(x, y, z) = 0$, що пов'язує три змінні в деякій системі координат, називається **рівнянням,** якщо одні точки простору задовольняють це співвідношення, а інші ні.

Наприклад, співвідношення $x^2 + y^2 - z = 0$ задовольняє точка (2, 1, 5) і не задовольняє точка (2, 1, 3). Отже, дане співвідношення — це рівняння.

Припустимо, що задано деяку поверхню, наприклад поверхню кулі (сферичну поверхню), радіус якої дорівнює R, а центр міститься у точці M_0. Тоді точки простору можна поділити на дві категорії: одні з них належать даній поверхні, а інші ні.

Рівняння

$$F(x, y, z) = 0$$

називається **рівнянням даної поверхні в деякій системі координат,** якщо кожна точка цієї поверхні задовольняє дане рівняння, а будь-яка, точка, що не належить цій поверхні, це рівняння не задовольняє. Координати x, y, z будь-якої точки поверхні називаються поточними (змінними) координатами.

Таким чином, поверхню можна задати геометрично і аналітично — за допомогою рівняння.

Якщо поверхня задана геометрично, то ставиться задача про знаходження в деякій системі координат її рівняння, та навпаки, якщо задано рівняння поверхні, то ставиться задача про знаходження геометричного образу поверхні, яка відповідає даному рівнянню.

1.2. Рівняння сферичної поверхні

Сферичною поверхнею називається множина точок тривимірного простору, рівновіддалених від однієї і тієї самої точки даного простору. Ця точка називається **центром** сферичної поверхні, а відстань від неї до будь-якої точки поверхні — її **радіусом.**

Нехай центр сферичної поверхні міститься у точці M_0 (a, b, c) тривимірного простору xyz, а її радіус дорівнює R (рис. 2.1). Складемо рівняння цієї поверхні.

Візьмемо довільну точку M (x, y, z) простору і знайдемо її відстань від точки M_0:

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Точка M належатиме даній сферичній поверхні тоді і тільки тоді, коли

$$d = R,$$

або

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R.$$

Звідси

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \qquad (1.1)$$

Знайдене рівняння називається **канонічним рівнянням сферичної поверхні** з центром у точці M_0 (a, b, c) і радіусом R. Якщо центр сферичної поверхні збігається з початком координат, то її рівняння набирає вигляду

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (1.2)$$

1.3. Прості циліндричні поверхні

Циліндричною поверхнею називається поверхня, що утворена переміщенням прямої (твірної) вздовж деякої заданої лінії (напрямної) паралельно заданому напряму.

Прості циліндричні поверхні — це циліндричні поверхні, твірні яких паралельні одній з координатних осей.

Розглянемо у прямокутній системі координат xyz рівняння $y^2 = 2px + b$ (рис. 2.2). Візьмемо точку M_0 (x_0, y_0, z_0). Нехай точка

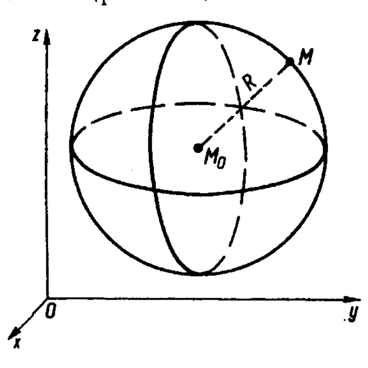


Рис. 2.1

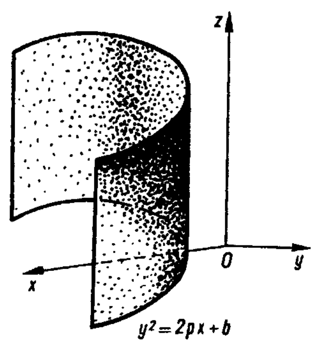


Рис. 2.2

(x_0, y_0) задовольняє дане рівняння, а z — довільне. Тоді кожній парі (x_0, y_0) відповідає пряма, паралельна осі Oz, а множина всіх таких прямих, згідно з означенням, утворює просту циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі Oz.

Розглянемо рівняння $F(x, y) = 0$. Це рівняння не містить змінної z, тобто воно пов'язує тільки змінні x і y. Нехай це рівняння задає в системі xyz деяку поверхню. Тоді будь-яка точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, де $F(x_0, y_0) = 0$, а z — довільне, належить цій поверхні. Це означає, що рівняння $F(x, y) = 0$ визначає просту циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі аплікат.

Аналогічно рівняння $F(x, z) = 0$ визначає циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі ординат, а рівняння $F(y, z) = 0$ — циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі абсцис.

Якщо рівняння $F(x, y) = 0$ розглядати у двовимірному просторі, то одні точки цього простору задовольнятимуть це рівняння, а інші — ні. Ті точки площини xOy, які задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$, утворюють лінію (криву або пряму). Отже, рівняння $F(x, y) = 0$ задає лінію, розміщену на площині xOy. Аналогічно рівняння $F(x, z) = 0$ і $F(y, z) = 0$ задають лінії відповідно у площинах xOz і yOz.

Якщо в рівнянні $F(x, y, z) = 0$ одна з координат дорівнює нулю, то воно є рівнянням лінії, що лежить в координатній площині, перпендикулярній до відповідної осі.

Тому рівняння будь-якої лінії, яка розміщена в координатній площині (плоскої кривої), можна записати у вигляді

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} F(x, z) = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

1.4. Рівняння лінії у просторі

Лінію у тривимірному просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0; \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Лінія у просторі — це множина точок цього простору, які задовольняють систему рівнянь (1.3). Якщо кожне рівняння системи (1.3) визначає площину, то ця система визначає пряму лінію. Якщо кожне з рівнянь системи (1.3) не визначає площину, то система може визначати як пряму, так і криву в тривимірному просторі. Якщо тільки одне з рівнянь системи (1.3) визначає площину, то ця система визначає плоску криву.

Нарешті, якщо обидва рівняння системи (1.3) визначають площину, одна з яких є координатною, то система визначає пряму, яка лежить в цій координатній площині.

1.5. Алгебраїчні поверхні

Поверхня називається **алгебраїчною,** якщо у деякій просторовій прямокутній системі координат рівняння поверхні є алгебраїчним.

Якщо поверхня або лінія визначається в декартовій прямокутній системі координат алгебраїчним рівнянням n-го степеня, то вона називається **алгебраїчною поверхнею (лінією) n-го порядку.**

Алгебраїчна поверхня першого порядку визначається рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1.4}$$

Це рівняння називається **загальним рівнянням першого степеня,** в якому хоча б один із коефіцієнтів при змінних відмінний від нуля.

Алгебраїчна поверхня (лінія) другого порядку визначається рівнянням

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz +$$
$$+ 2a_{23}yz + a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z + a_{00} = 0. \tag{1.5}$$

Це рівняння називається **загальним рівнянням другого степеня,** в якому хоча б один із коефіцієнтів a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} відмінний від нуля.

Рівняння

$$x^4 + yz^2 - z + 2 = 0$$

у прямокутній декартовій системі координат xyz визначає **поверхню четвертого порядку.**

До неалгебраїчних належать рівняння

$$\sin x + \cos y - z = 0, \quad 2^x - \lg y + 5 = 0, \quad x - x^y - z^2 = 0.$$

Ці рівняння визначають поверхні (лінії), **які називаються трансцендентними (неалгебраїчними).**

§ 2. ПЛОЩИНА

2.1. Векторне і загальне рівняння площини

Покажемо, що алгебраїчною поверхнею першого порядку є площина. Для цього доведемо такі теореми.

Теорема 1. *Площина в прямокутній декартовій системі координат визначається загальним рівнянням першого степеня відносно поточних координат.*

Доведення. Геометрично будь-яку площину в просторі xyz можна задати за допомогою вектора $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярного до цієї площини, і точки $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$, через яку проходить дана площина (рис. 2.3).

Візьмемо довільну точку $M\ (x,\ y,\ z)$ і знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{a}$. Точка M належить заданій площині тоді і тільки тоді, коли $\vec{n} \perp \vec{a}$. Тоді

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0.$$

Оскільки $\vec{a} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$, то скалярний добуток можна записати у вигляді

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (2.1)$$

або

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0.$$

Позначивши

$$-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D,$$

дістанемо загальне алгебраїчне рівняння першого степеня

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2.2)$$

Отже, *будь-яка площина в декартових прямокутних координатах може бути зображена рівнянням першого степеня.*

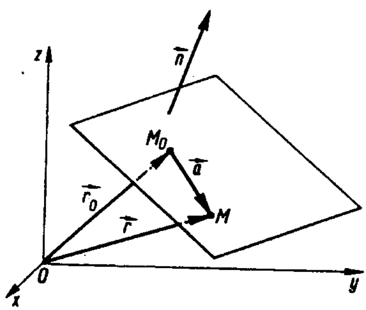


Рис. 2.3

Зауважимо, що рівняння (2.1) є рівнянням площини, яка проходить через точку $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A,\ B,\ C)$.

Доведемо тепер обернену теорему.

***Теорема** 2. Загальне рівняння першого степеня*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2.3)$$

де A, B, C і D — довільні дійсні числа; x, y, z — поточні координати, визначає в декартовій прямокутній системі координат площину.

Доведення. Доберемо трійку чисел $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, які задовольняють рівняння (2.3). Це можна зробити таким чином. Два числа x_0 і y_0 візьмемо довільно, а третє z_0 знайдемо з рівняння (2.3). Тоді

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (2.4)$$

Віднімаючи від рівняння (2.3) рівняння (2.4), дістаємо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2.5)$$

Це рівняння **є рівнянням площини, перпендикулярної до вектора** $\vec{n} = (A,\ B,\ C)$ **і такої, що проходить через точку** $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Таким чином, *кожна площина є поверхнею першого порядку, і, навпаки, кожна поверхня першого порядку є площиною.* Тому рівняння (2.1) або (2.3) називається **загальним рівнянням площини.**

Рівняння

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \qquad (2.6)$$

називається **векторним рівнянням площини.** Враховуючи, що $\vec{a} = \vec{r} - \vec{r}_0$, векторне рівняння площини запишемо у вигляді $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, або $\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0$.

Якщо у загальному рівнянні площини покласти $z - z_0 = 0$, то дістанемо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

або

$$Ax + By + C = 0, \qquad (2.7)$$

де $C = -(Ax_0 + By_0)$. Рівняння (2.7) називається **загальним рівнянням прямої, що лежить у площині** xOy.

2.2. Дослідження загального рівняння площини

Розглянемо загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2.8)$$

де A, B, C і D — довільні числа, причому хоча б одне з перших трьох відмінне від нуля.

Дослідимо окремі випадки цього рівняння.

Якщо $D = 0$, то рівняння (2.8) набирає вигляду

$$Ax + By + Cz = 0. \qquad (2.9)$$

Це рівняння задовольняє точка O (0, 0, 0). Отже, рівняння (2.9) визначає **площину, яка проходить через початок координат.**

Якщо $A = 0$, то рівняння (2.8) має вигляд

$$By + Cz + D = 0 \qquad (2.10)$$

і визначає площину, нормальний вектор якої $\vec{n} = (O, B, C)$ перпендикулярний до осі Ox. Отже, рівняння (2.10) визначає **площину, паралельну осі абсцис, або перпендикулярну до площини** yOz.

Якщо $A = B = 0$, а $C \neq 0$, то маємо рівняння **площини, паралельної** xOy:

$$z = -\frac{D}{C}.$$

Рівняння $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ визначають відповідно **координатні площини** yOz, xOz, xOy.

2.3. Рівняння площини у відрізках на координатних осях

Розглянемо загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2.11}$$

коли всі його коефіцієнти і вільний член відмінні від нуля.

Поділимо обидві частини рівняння (2.11) на $D \neq 0$ і запишемо його у вигляді

$$\frac{x}{D/A} + \frac{y}{D/B} + \frac{z}{D/C} + 1 = 0. \tag{2.12}$$

Позначимо $\frac{D}{A} = -a$; $\frac{D}{B} = -b$; $\frac{D}{C} = -c$. Тоді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{2.13}$$

Рівняння площини у вигляді (2.13) називається **рівнянням у відрізках.**

Знайдемо точки перетину площини (2.13) з координатними осями:
на осі абсцис $y = z = 0$, тоді $x = a$,
на осі ординат $x = z = 0$, тоді $y = b$,
на осі аплікат $x = y = 0$, тоді $z = c$.

Таким чином, *площина, задана рівнянням у відрізках, відтинає на координатних осях відповідно відрізки a, b і c* (рис. 2.4).

Якщо потрібно побудувати площину, задану рівнянням, то зручно це рівняння записати у відрізках на осях. Тоді по точках M_1 (a, 0, 0), M_2 (0, b, 0) і M_3 (0, 0, c) легко побудувати площину.

2.4. Рівняння площини, що проходить через три дані точки

Нехай дано три точки M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), M_3 (x_3, y_3, z_3), що не лежать на одній прямій. Ці точки однозначно визначають площину, яка проходить через них. Знайдемо рівняння цієї площини.

Візьмемо довільну точку простору M (x, y, z) (рис. 2.5) і побудуємо вектори

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1).$$

Точка M (x, y, z) належить шуканій площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лежать у цій площині, тобто коли вони компланарні.

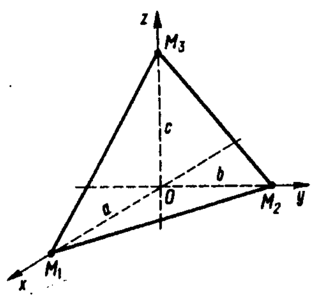


Рис. 2.4

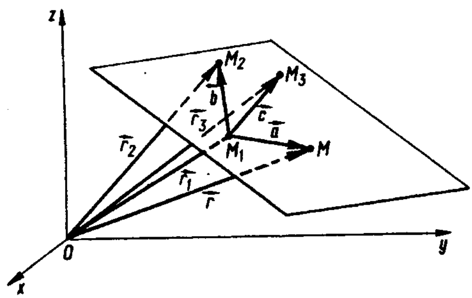


Рис. 2.5

Отже, мішаний добуток їх дорівнює нулю:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0. \tag{2.14}$$

Запишемо цей добуток через координати векторів, які перемножаються. Маємо:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{2.15}$$

Якщо радіуси-вектори точок M, M_1, M_2 і M_3 відповідно позначити через $\vec{r}$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ і $\vec{r}_3$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна зобразити у вигляді

$$\vec{a}=\vec{r}-\vec{r}_1; \quad \vec{b}=\vec{r}_2-\vec{r}_1; \quad \vec{c}=\vec{r}_3-\vec{r}_1.$$

Тоді рівняння (2.14) можна записати таким чином:

$$\left[\left(\vec{r}-\vec{r}_1\right)\times\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)\right]\cdot\left(\vec{r}_3-\vec{r}_1\right)=0. \tag{2.16}$$

Рівняння (2.15) називається **рівнянням площини, що проходить через три дані точки,** у координатній формі, а рівняння (2.16) — у векторній формі.

2.5. Рівняння площини, що проходить через дану точку паралельно двом даним векторам

Нехай задано точку M_0 (x_0, y_0, z_0) і два неколінеарних (не паралельних) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Ці умови геометрично однозначно визначають площину, що проходить через задану точку паралельно заданим векторам. Знайдемо рівняння площини.

Рівняння площини, що проходить через точку M_0, грунтуючись на (2.1), запишемо у вигляді

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{2.17}$$

де $\vec{n} = (A,\ B,\ C)$ — вектор, перпендикулярний до даної площини, або нормальний вектор площини (рис. 2.6).

За умовою площина паралельна векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Отже, нормальний вектор площини можна виразити через векторний добуток даних векторів $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Якщо позначити радіуси-вектори точок M і M_0 відповідно через $\vec{r}$ і $\vec{r}_0$, то рівняння (2.17) можна записати у вигляді $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, звідки $\vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r}_0)$, але $\vec{n} \perp \vec{a}$ і $\vec{n} \perp \vec{b}$. Отже, вектори $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лежать в одній площині, тобто

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \qquad (2.18)$$

Вираз (2.18) є **векторною формою рівняння площини, що проходить через дану точку паралельно двом даним векторам.**

Рівняння заданої площини у координатній формі має вигляд

$$(a_y b_z - a_z b_y)(x - x_0) + (a_z b_x - a_x b_z)(y - y_0) + \\ + (a_x b_y - a_y b_x)(z - z_0) = 0. \qquad (2.19)$$

2.6. Рівняння площини, що проходить через дві дані точки паралельно даному вектору

Нехай дано дві точки $M_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ і вектор $\vec{a}$. Знайдемо рівняння площини, що проходить через дані точки паралельно вектору $\vec{a}$. Нехай $M\ (x,\ y,\ z)$ — довільна точка простору. Позначимо радіуси-вектори точок M, M_1, M_2 відповідно через $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$. За другий вектор, через який проходить задана площина, візьмемо вектор $\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Тоді рівняння даної площини, згідно з рівнянням (2.18), можна записати у вигляді

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0, \qquad (2.20)$$

або, враховуючи, що $\vec{b} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, дістаємо

$$[\vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0. \qquad (2.21)$$

2.7. Кут між двома площинами

Нехай дві площини задані своїми рівняннями

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (2.22)$$

Знайдемо кут між цими площинами.

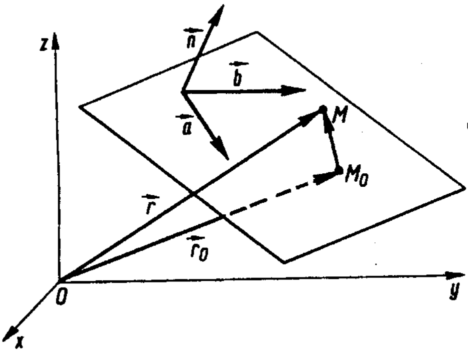


Рис. 2.6

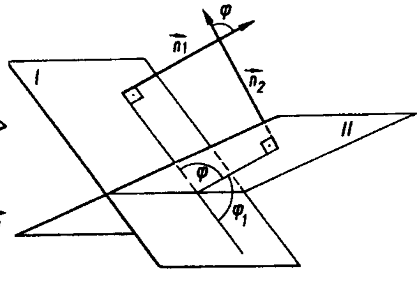


Рис. 2.7

Кутом між двома площинами називають один із суміжних двогранних кутів φ або φ_1, утворених цими площинами (рис. 2.7). Якщо площини не перетинаються, тобто паралельні, то кут між ними дорівнює 0 або π.

Нехай кут між даними площинами φ. Тоді кут між нормальними векторами цих площин $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ також дорівнюватиме φ або $\pi - \varphi$. Кут φ знайдемо за формулою (2.50) з гл.1:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (2.23)$$

Поклавши в цій формулі $\varphi = \frac{\pi}{2}$, дістанемо умову перпендикулярності площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (2.24)$$

Якщо площини (2.22) паралельні, то і їхні нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ також паралельні (колінеарні). Із умови паралельності векторів маємо

$$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2,$$

або

$$A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2,\ C_1 = \lambda C_2.$$

Звідси дістаємо умову паралельності площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda. \qquad (2.25)$$

Таким чином, *у паралельних площин коефіцієнти при відповідних координатах пропорційні.*

2.8. Умова перетину трьох площин в одній точці

Нехай дано три площини:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{2.26}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{2.27}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \tag{2.28}$$

Знайдемо умову, коли всі три площини перетинаються в одній і тільки в одній точці. Це буде тоді, коли система рівнянь (2.26) — (2.28) з невідомими x, y, z матиме єдиний розв'язок, тобто коли її основний визначник не дорівнює нулю.

Таким чином, три дані площини перетинаються в одній і тільки в одній точці, якщо

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.29}$$

Умову (2.29) можна записати у векторній формі:

$$\left(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\right) \cdot \vec{n}_3 \neq 0, \tag{2.30}$$

де $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ — нормальні вектори даних площин.

Таким чином, *якщо нормальні вектори трьох площин не компланарні, то ці площини перетинаються в одній і тільки в одній точці.*

2.9. Нормальне рівняння площини

Нехай дано деяку площину, що не проходить через початок координат O. Проведемо із точки O промінь, перпендикулярний до площини. Точку перетину променя з площиною позначимо через P, а довжину перпендикуляра OP — через p (рис. 2.8). Виберемо на промені $\overrightarrow{OP}$ одиничний вектор $\vec{n}_0$ з напрямними косинусами кутів α, β, γ. Додатним напрямом $\vec{n}_0$ вважатимемо напрям від O до P. Складемо рівняння площини, вважаючи відомими довжину $p = |\overrightarrow{OP}|$ і кути нахилу α, β, γ вектора $\vec{n}_0$ відповідно до осей Ox, Oy, Oz.

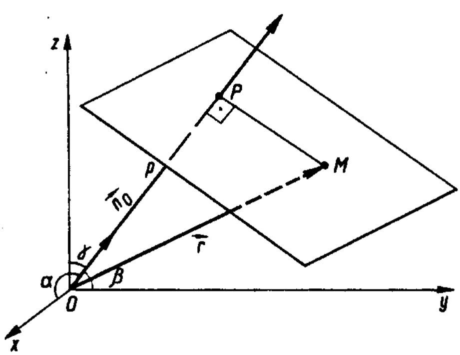


Рис. 2.8

Візьмемо довільну точку $M\ (x,\ y,\ z)$, яка належить заданій площині тоді і тільки тоді, коли проекція її радіуса-вектора $\vec{r}$ на промінь $\overrightarrow{OP}$ дорівнює p:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{OP}}\,\vec{r} = p. \tag{2.31}$$

Цю проекцію можна знайти як скалярний добуток $\vec{r}$ на одиничний вектор $\vec{n}_0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$

$$\text{пр}_{\overrightarrow{OP}}\,\vec{r} = \vec{r}\cdot\vec{n}_0 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \tag{2.32}$$

Із рівностей (2.31) і (2.32) дістанемо рівняння

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{2.33}$$

яке називається **нормальним рівнянням площини.**

Зауважимо, що для косинусів напрямних кутів променя $\overrightarrow{OP}$ виконується рівність

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.34}$$

Таким чином, рівняння площини називається нормальним, якщо сума квадратів коефіцієнтів при змінних дорівнює 1, а вільний член є від'ємним числом:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ -p < 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

У векторній формі нормальне рівняння площини має вигляд

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = p \quad \text{або} \quad \vec{r}\cdot\vec{n}_0 - p = 0. \tag{2.36}$$

2.10. Зведення загального рівняння площини до нормального вигляду

Нехай дано загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{2.37}$$

Помножимо обидві частини цього рівняння на число $M \neq 0$:

$$AMx + BMy + CMz + DM = 0. \tag{2.38}$$

Рівняння (2.38) буде зведеним до нормального вигляду, якщо виконуватимуться умови (2.35):

$$\begin{cases} (AM)^2 + (BM)^2 + (CM)^2 = 1, \\ DM < 0. \end{cases}$$

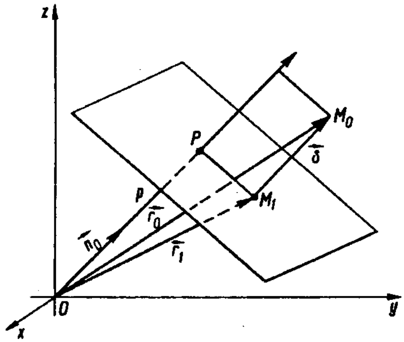


Рис. 2.9

Розв'язавши цю систему відносно M, дістанемо

$$\begin{cases} |M| = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ DM < 0. \end{cases}$$

Число M називається **нормувальним множником** рівняння (2.37).

Якщо $D < 0$, *то* $M > 0$, *і тоді*

$$M = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Якщо $D > 0$, *то* $M < 0$, *і тоді*

$$M = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Таким чином, *знак нормувального множника протилежний знаку вільного члена рівняння площини.*

Отже, *щоб перетворити загальне рівняння площини на нормальне, треба обидві частини загального рівняння помножити на його нормувальний множник.*

2.11. Відстань від точки до площини

Нехай площина задана нормальним рівнянням (2.33) і дано точку M_0 (x_0, y_0, z_0), що лежить поза площиною. Відстань від точки M_0 до площини позначимо через d. **Відхилом точки M_0 від даної площини** називається число $\delta = d$, якщо точка M_0 і початок координат лежать по різні боки від даної площини, і число $\delta = -d$, якщо точка M_0 і початок координат лежать по один бік від площини (рис. 2.9).

Із точки M_0 на дану площину опустимо перпендикуляр M_0M_1, де M_1 (x_1, y_1, z_1). Позначимо $|\overrightarrow{M_0M_1}| = d$.

Розглянемо вектори

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0), \ \vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\vec{\delta} = \overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1).$$

За правилом додавання векторів

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \vec{\delta}.$$

Враховуючи означення відхилу, вектор $\vec{\delta}$ можна записати у вигляді

$$\vec{\delta} = \delta \vec{n}_0,$$

де $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — одиничний вектор променя $\overrightarrow{OP}$.

Тоді дістанемо

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \delta\vec{n}_0.$$

Помножимо обидві частини цього рівняння скалярно на $\vec{n}_0$:

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 = \vec{r}_1 \cdot \vec{n}_0 + \delta\vec{n}_0^2.$$

Оскільки скалярний добуток $\vec{n}_0^2 = \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = 1$, а

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{n}_0 = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = p,$$

то

$$\delta = \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 - p,$$

або

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p. \qquad (2.39)$$

Відхил точки від площини, яку задано нормальним рівнянням (2.33), дорівнює значенню лівої частини цього рівняння у цій точці.

Відстань точки від площини дорівнює модулю відхилу цієї точки від даної площини:

$$d = |\delta| = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|. \qquad (2.40)$$

Якщо площину задано загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то щоб знайти відхіл точки M_0 (x_0, y_0, z_0) від даної площини, треба спочатку звести рівняння до нормального вигляду, а потім знайти значення його лівої частини у точці M_0:

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (2.41)$$

Тоді відстань від точки M_0 до площини

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

2.12. Пряма на координатній площині

Пряму на координатній площині можна дістати в результаті перетину довільної площини

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

з координатною площиною.

Складемо рівняння прямої, що належить, наприклад, площині xOy. Ця пряма визначається системою двох рівнянь:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0; \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} Ax + By + D = 0; \\ z = 0. \end{cases} \qquad (2.42)$$

Аналогічно записується рівняння прямих, що належать відповідно координатним площинам yOz і xOz:

$$\begin{cases} By + Cz + D = 0, \\ x = 0 \end{cases} \qquad (2.43)$$

і

$$\begin{cases} Ax + Cz + D = 0, \\ y = 0. \end{cases} \qquad (2.44)$$

Усі ці рівняння називаються **загальними рівняннями прямої на координатних площинах.**

Якщо відомо, що пряма розміщена в площині xOy, то в рівнянні (2.42) значення $z = 0$ можна опустити, тоді рівняння набирає вигляду

$$Ax + By + C = 0, \qquad (2.45)$$

де C — вільний член. Це рівняння називається **загальним рівнянням прямої в площині** xOy.

Вектор $\vec{n} = (A, B)$ називається **нормальним вектором цієї прямої.**

Будь-яку пряму на площині можна записати у вигляді рівнянь (2.42) — (2.44), і навпаки, *будь-яке рівняння першого степеня з двома змінними визначає на площині пряму лінію, тобто рівняння* (2.42) — (2.44) *є загальними рівняннями прямої.*

Дослідимо загальне рівняння. Розглянемо рівняння (2.45).

Якщо $C = 0$, то $Ax + By = 0$ — рівняння прямої, що проходить через початок, координат.

Якщо $A = 0$, то $By + C = 0$ — рівняння прямої, паралельної осі абсцис або перпендикулярної до осі ординат.

Якщо $B = 0$, то $Ax + C = 0$ — рівняння прямої, паралельної осі ординат або перпендикулярної до осі абсцис.

Якщо $A = C = 0$, то $By = 0$, або $y = 0$ — рівняння осі абсцис.

Якщо $B = C = 0$, то $Ax = 0$, або $x = 0$ — рівняння осі ординат.

Рівняння прямої у відрізках на осях дістанемо із рівняння (2.13) при $z = 0$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (2.46)$$

де a і b — відрізки, які відтинає пряма від координатних осей.

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, дістанемо із рівняння (2.15):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.47)$$

або

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (2.48)$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом дістанемо із рівняння (2.45), поклавши, що $B \neq 0$, тобто що пряма не перпендикулярна до осі абсцис.
Тоді

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Позначивши $-\dfrac{A}{B} = k,\ -\dfrac{C}{B} = b$, знаходимо

$$y = kx + b \qquad (2.49)$$

— рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом у площині xOy.

З'ясуємо геометричний зміст параметрів b і k. При $x = 0$ із рівняння (2.49) знаходимо $y = b$, тобто b — це величина відрізка, який відтинається від осі ординат прямою (2.49). Параметр b називають ще **початковою ординатою** цієї прямої.

Тепер із рівняння (2.49) знайдемо параметр k:

$$k = \frac{y - b}{x} = \operatorname{tg}\alpha,$$

де α — кут, утворений прямою (2.49) з додатним напрямом осі абсцис (рис. 2.10).

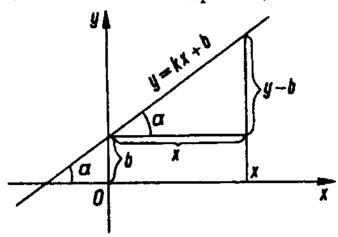


Рис. 2.10

Таким чином, *параметр k дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі абсцис*. Тому його і називають **кутовим коефіцієнтом.**

Аналогічно можна скласти рівняння прямих, розміщених в інших координатних площинах.

Знайдемо рівняння пучка прямих, що проходять через дану точку. Нехай пряма (2.49) проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. Тоді

$$y_0 = kx_0 + b. \qquad (2.50)$$

Віднявши від рівняння (2.49) тотожність (2.50), знайдемо

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (2.51)$$

— рівняння пучка прямих, що проходять через точку M_0. Це рівняння не містить лише прямої, перпендикулярної до осі абсцис.

Визначимо кут між двома прямими. Нехай прямі задано рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Кут між цими прямими знайдемо із формули (2.23):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (2.52)$$

Якщо прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{і} \quad y = k_2x + b_2,$$

то кут між ними знаходимо із формули

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (2.53)$$

Тут φ — кут, на який треба повернути пряму з кутовим коефіцієнтом k_1 до суміщення з прямою, кутовий коефіцієнт якої k_2. Поворот здійснюється проти обертання годинникової стрілки.

Знайдемо умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Якщо прямі задано загальними рівняннями, то ці прямі паралельні при

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (2.54)$$

і перпендикулярні при

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (2.55)$$

Якщо прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами, то вони паралельні при

$$k_1 = k_2$$

і перпендикулярні при

$$k_1k_2 = -1.$$

Приклад. Знайти величину внутрішнього кута A трикутника ABC, якщо його вершини містяться у точках A (5; 4), B (2; 7) і C (1; 1).

Розв'язання. Складемо рівняння сторін трикутника, що виходять із вершини A. Запишемо пучок прямих, що проходять через цю точку:

$$y - 4 = k\,(x - 5).$$

Виділимо із пучка рівняння сторони AB. Ця пряма проходить через точку B, тому

$$7 - 4 = k_{AB}\,(2 - 5), \text{ звідки } k_{AB} = -1.$$

Рівняння прямої, що проходить через точки A і B, має вигляд

$$x + y - 9 = 0.$$

Аналогічно знаходимо кутовий коефіцієнт прямої, яка збігається зі стороною AC:

$$k_{AC} = \frac{3}{4}.$$

Рівняння цієї прямої

$$3x - 4y + 1 = 0.$$

Щоб знайти внутрішній кут A, треба повернути сторону AB навколо точки A проти обертання годинникової стрілки (у додатному напрямі) до суміщення зі стороною AC. Тоді формулу (2.53) запишемо у вигляді

$$\operatorname{tg}(\widehat{BAC}) = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC}k_{AB}},$$

або

$$\operatorname{tg}(\widehat{BAC}) = \frac{3/4 - (-1)}{1 + (3/4)(-1)} = 7.$$

Зауважимо, що для розв'язання задачі досить знайти тільки кутові коефіцієнти сторін AB і AC. *Відповідь.* $\widehat{BAC} = \operatorname{arctg} 7$.

2.13. Нормальне рівняння прямої на площині

Нехай пряма, що лежить в координатній площині xOy, міститься на відстані p від початку координат і перпендикулярна до заданого вектора $\vec{n}$. Складемо рівняння цієї прямої.

Проведемо промінь $\overrightarrow{ON}$, співнапрямлений з вектором $\vec{n}$ (рис. 2.11). Точку перетину променя із заданою прямою позначимо через P. Тоді $|\overrightarrow{OP}| = p$. Якщо полярний кут точки P позначити через α, то одиничний вектор заданого напряму можна записати у вигляді $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, де $0 \le \alpha < 2\pi$.

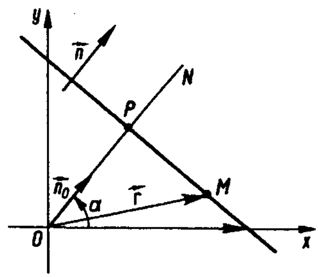


Рис. 2.11

Візьмемо в площині xOy на прямій яку-небудь точку $M(x, y)$, її радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y)$.

У векторній формі нормальне рівняння прямої на площині таке саме, як і рівняння (2.36):

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0.$$

Оскільки

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

то

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

— нормальне рівняння прямої в координатній формі.

Таким чином, загальне рівняння називається **нормальним** або **нормованим,** якщо сума квадратів коефіцієнтів при поточних координатах дорівнює 1, а вільний член є від'ємним числом:

$$\begin{cases}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,\\ -p < 0.\end{cases}$$

Щоб звести загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального вигляду, треба обидві його частини помножити на нормувальний множник

$$M_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

При цьому нормувальний множник має знак, протилежний знаку C із рівняння (2.45). Якщо $C = 0$, то M_1 беруть з будь-яким знаком.

Нормальним рівнянням доцільно користуватися при визначенні відстані від точки до прямої.

Із формули (2.41) при $z_0 = 0$ дістанемо відхил точки

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (2.56)$$

а відстань d від точки M_0 до даної прямої

$$d = |\delta| = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Приклад. Дано вершини трикутника A (−3; 4), B (1; 7) і C (4; 3). Знайти рівняння бісектриси внутрішнього кута B даного трикутника.

Розв'язання. Точка M (x, y) належить шуканій бісектрисі, якщо її відстані від сторін кута рівні між собою:

$$d_1 = d_2.$$

Складемо рівняння прямої AB:

$$\frac{x+3}{1+3} = \frac{y-4}{7-4},$$

або

$$3x - 4y + 25 = 0.$$

Зведемо це рівняння до нормального вигляду. Нормувальний множник

$$M_1 = -\frac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = -0{,}2,$$

тоді

$$-0{,}6x + 0{,}8y - 5 = 0.$$

Відхил точки M (x, y) від прямої AB

$$\delta = -0{,}6x + 0{,}8y - 5.$$

Складемо рівняння сторони BC:

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-7}{3-7},$$

або

$$4x + 3y - 25 = 0.$$

Зведемо це рівняння до нормального вигляду. Нормувальний множник

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0{,}2,$$

тоді

$$0{,}8x + 0{,}6y - 5 = 0.$$

Відхил δ_2 точки $M\ (x,\ y)$ від сторони BC

$$\delta_2 = 0{,}8x + 0{,}6y - 5.$$

Таким чином,

$$d_1 = |\delta_1|,\ d_2 = |\delta_2|.$$

Оскільки $d_1 = d_2$, то $|\delta_1| = |\delta_2|$.

Враховуючи, що точка M і початок координат O лежать по один бік від кожної із прямих AB і BC, маємо $\delta_1 < 0$, $\delta_2 < 0$ і $-\delta_1 = -\delta_2$, або

$$0{,}6x - 0{,}8y + 5 = -0{,}8x - 0{,}6y + 5,$$

$$1{,}4x - 0{,}2y = 0.$$

Тепер можна записати рівняння бісектриси:

$$y = 7x.$$

Відповідь. $y = 7x$.

§ 3. ПРЯМА ЛІНІЯ У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

3.1. Канонічні і параметричні рівняння прямої у тривимірному просторі

Пряма лінія у тривимірному просторі може бути задана різними способами: двома точками, точкою і напрямом, перетином двох площин та ін.

Нехай пряма проходить через точку $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (m,\ n,\ p)$, який називається **напрямним вектором прямої** (рис. 2.12).

Складемо рівняння цієї прямої. Візьмемо на прямій довільну точку $M\ (x,\ y,\ z)$. Позначимо радіуси-вектори точок M_0 і M відповідно через $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$. Точка $M\ (x,\ y,\ z)$ належить даній прямій, якщо вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні, тобто $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$.

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ зобразимо у вигляді $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$.

Оскільки $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$, то умова колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (3.1)$$

Рівняння (3.1) називаються **канонічними рівняннями прямої у тривимірному просторі,** а числа m, n і p — **напрямними коефіцієнтами прямої.**

Канонічні рівняння прямої (3.1) можна записати у векторній формі. В силу колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ векторний добуток їх дорівнює нуль-вектору, а рівняння (3.1) набирають вигляду

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{s}=\vec{0}. \tag{3.2}$$

Розглянемо окремі випадки рівнянь (3.1).

Якщо $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, то рівняння

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$$

визначають пряму, що проходить через початок координат.

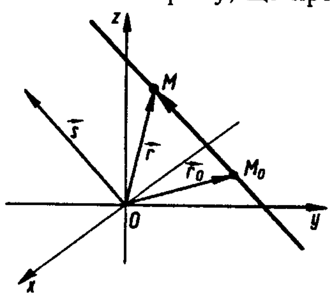


Рис. 2.12

У рівняннях (3.1) одне або два числа із чисел m, n, p можуть дорівнювати нулю. Одночасно всі три числа m, n, p не можуть обертатися на нуль, бо $\vec{s}\neq\vec{0}$. Якщо один із знаменників рівнянь (3.1) обертається на нуль, то відповідний чисельник обертається також на нуль. Наприклад, відношення $\dfrac{x-x_0}{0}$ означає, що $x-x_0=0$, або $x=x_0$, тобто воно визначає площину, перпендикулярну до осі Ox.

Якщо $m = 0$, то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі абсцис. Тоді рівняння

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

визначають пряму, перпендикулярну до осі Ox.

Аналогічно рівняння, в яких $n = 0$ або $p = 0$, визначають відповідно прямі, перпендикулярні до осей Oy і Oz. Якщо $m = n = 0$ або $m = p = 0$, або $n = p = 0$, то рівняння (3.1) визначають прямі, відповідно паралельні координатним осям Ox, Oy і Oz.

Умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ і $\vec{s}$ можна виразити ще й таким чином:

$$\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{s},$$

де t — будь-яке дійсне число, що називається **параметром.**

Запишемо останню рівність у вигляді

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}. \tag{3.3}$$

Це **векторне рівняння прямої в параметричній формі.**

У скалярному вигляді параметричні рівняння прямої (3.3) такі:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{3.4}$$

Це **параметричні рівняння прямої в координатній формі.**

3.2. Канонічні і загальне рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Система рівнянь двох непаралельних площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

визначає пряму лінію — геометричне місце точок перетину цих площин. Система (3.5) називається **загальним рівнянням прямої у тривимірному просторі.**

Знайдемо залежність між канонічними і загальними рівняннями однієї й тієї самої прямої. Нехай пряму задано канонічними рівняннями (3.1). Запишемо ці рівняння у вигляді системи

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{p}, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} px - mz - (px_0 - mz_0) = 0, \\ py - nz - (py_0 - nz_0) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Це і є загальне рівняння прямої (3.1).

Зауважимо, що перше рівняння системи (3.6) визначає площину, паралельну осі ординат, а друге — площину, паралельну осі абсцис.

Нехай пряму задано загальним рівнянням (3.5), де вектори — нормалі даних площин $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — не паралельні між собою.

Складемо канонічні рівняння прямої (3.5). Знайдемо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить цій прямій. Одну з координат, наприклад x_0, візьмемо довільно, а дві інші визначимо із системи (3.5).

Знайдемо компоненти напрямного вектора $\vec{s} = (m, n, p)$ прямої (3.5). Вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ перпендикулярні до даної прямої. Тому за напрямний вектор прямої можна вважати вектор

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

звідки

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Тоді канонічні рівняння прямої (3.5) можна записати у вигляді

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{3.7}$$

Приклад. Знайти канонічні рівняння прямої, заданої загальним рівнянням

$$\begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0, \\ x + y - z - 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Визначимо точку M_0 (x_0, y_0, z_0), яка належить даній прямій. Для цього покладемо $z_0 = 1$. Тоді

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 + 1 - 5 = 0, \\ x_0 + y_0 - 1 - 4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 = 4, \\ x_0 + y_0 = 5, \end{cases}$$

звідки

$$x_0 = 3,\ y_0 = 2,$$

тобто точка M_0 (3, 2, 1) належить даній прямій.

Знайдемо напрямний вектор $\vec{s} = (m,\ n,\ p)$. Нормальні вектори площин, якими задано пряму, $\vec{n}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{n}_2 = (1, 2, -1)$. Тоді

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 3, 3).$$

Шукані канонічні рівняння прямої можна записати у вигляді

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}.$$

Складемо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки M_0 (x_0, y_0, z_0) і M_1 (x_1, y_1, z_1) (рис. 2.13). Візьмемо на прямій довільну точку M (x, y, z), а за напрямний вектор прямої — вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_0M_1} =$

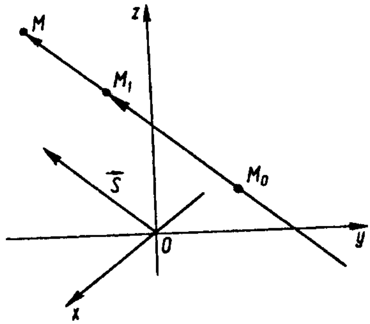


Рис. 2.13

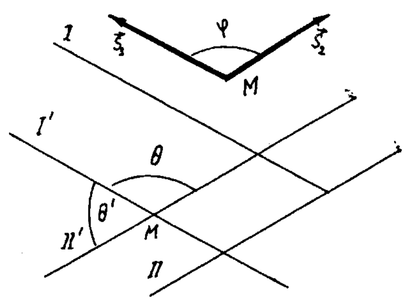


Рис. 2.14

$= (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$. Точка M належить даній прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{M_0M_1} \text{ або } \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}.$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{3.8}$$

3.3. Кут між двома прямими в тривимірному просторі

Кутом між двома прямими в тривимірному просторі називається будь-який із суміжних кутів θ або θ', утворених прямими, що проходять через деяку точку цього простору паралельно заданим прямим (рис. 2.14).

Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями

$$\begin{aligned} &\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \\ &\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Тоді один із кутів, утворених прямими, дорівнює куту між напрямними векторами цих прямих $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Позначивши цей кут через φ, маємо

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Якщо $\varphi = \theta$, то $\theta' = \pi - \varphi$.

Прямі (3.9) паралельні, якщо паралельні їхні напрямні вектори $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{3.10}$$

Прямі (3.9) взаємно перпендикулярні, якщо перпендикулярні їхні напрямні вектори $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, тобто

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \tag{3.11}$$

3.4. Умова належності двох прямих одній площині

Нехай прямі (3.9) належать одній і тій самій площині. Тоді їхні напрямні вектори $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ і вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$ компланарні (рис. 2.15), тобто мішаний добуток

$$(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0.$$

Умова належності прямих одній площині, записана в координатній формі, має вигляд

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.12}$$

3.5. Відстань від точки до прямої в тривимірному просторі

Нехай задано пряму (3.1) і точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 2.16). **Відстанню від точки до прямої** називається довжина перпендикуляра, опущеного із даної точки на цю пряму.

Розглянемо паралелограм, побудований на векторах

$$\vec{s} = (m, n, p) \text{ і } \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$$

як на сторонах, що виходять із вершини M_0. Висотою цього паралелограма $d = M_1M_2$ є перпендикуляр, опущений із точки M_1 на дану пряму.

Знайдемо площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{s}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}$:

$$Q = |\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}|, \text{ або } Q = |\vec{s}|\, d.$$

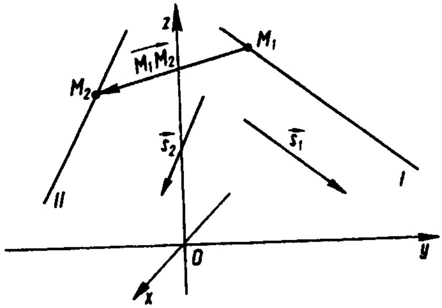


Рис. 2.15

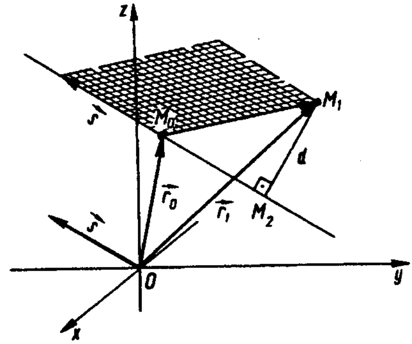


Рис. 2.16

Отже, $|\vec{s}|\,d = |\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|$, звідки $d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \dfrac{|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{s}|}$.

Запишемо вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ у вигляді $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$. Тоді відстань від точки до прямої

$$d = \frac{|\vec{s}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_0)|}{|\vec{s}|}, \text{ або } d = |\vec{s}_0\times(\vec{r}_1-\vec{r}_0)|, \qquad (3.13)$$

де $\vec{s}_0 = \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ — одиничний вектор напрямного вектора прямої, а $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_0$ — відповідно радіуси-вектори точок M_1 і M_2.

Приклад. Знайти відстань від точки M_1 (2, 1, 0) до прямої, заданої параметричними рівняннями.

$$\begin{cases} x = 3t + 4, \\ y = 2t + 4, \\ z = 2t - 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Напрямний вектор заданої прямої

$$\vec{s} = (3, 2, 2),$$

а точка, що належить цій прямій, має координати M_0 (4, 4, −6). Радіусами-векторами точок M_0 і M_1 є відповідно $\vec{r}_1 = (4, 4, -6)$ і $\vec{r}_0 = (2, 1, 0)$. Тоді $\vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (-2, -3, 6)$. Шукана відстань

$$d = \frac{|\vec{s}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_0)|}{|\vec{s}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}} = 7.$$

Відповідь. $d = 7$.

§ 4. ПРЯМА І ПЛОЩИНА

4.1. Кут між прямою і площиною

Кутом між прямою і площиною називається один із суміжних кутів φ або $\pi - \varphi$, утворених даною прямою та її проекцією на цю площину (рис. 2.17).

Проекцією прямої на площину називається пряма, утворена перетином даної площини з площиною, що проходить через дану пряму перпендикулярно до даної площини.

Нехай площину і пряму задано відповідно рівняннями

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{і} \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (4.1)$$

Позначимо кут між прямою і площиною через φ, а кут між нормальним вектором $\vec{n}$ і напрямним вектором прямої $\vec{s}$ — через α. Якщо вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ лежать по один бік від площини, то кут $\alpha = \alpha'$ між ними гострий, а по різні боки, — то $\alpha = \alpha''$ — тупий (рис. 2.18.). Виразивши α через φ, матимемо $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\cos\alpha' = \sin\varphi$; $\alpha'' = \frac{\pi}{2} + \varphi$, $\cos\alpha'' = -\sin\varphi$. Тоді $\sin\varphi = \pm\cos\alpha$, але

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}||\vec{s}|}.$$

Таким чином, кути, утворені прямою і площиною, визначаються за формулою

$$\sin\varphi = \pm\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (4.2)$$

При цьому плюс беремо, якщо $\cos\alpha > 0$, а мінус — якщо $\cos\alpha < 0$.

4.2. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Пряма паралельна площині (включаючи належність прямої площині), якщо $\vec{s} \perp \vec{n}$, тобто коли

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

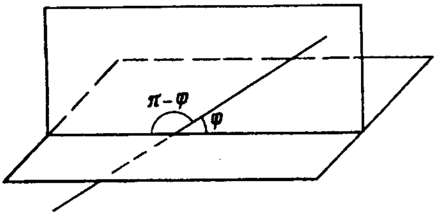


Рис. 2.17

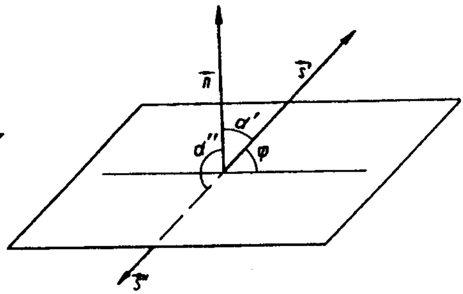


Рис. 2.18

Пряма перпендикулярна до площини, якщо $\vec{s} \parallel \vec{n}$, тобто коли

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

4.3. Точка перетину прямої з площиною

Нехай площину і пряму задано рівняннями у векторній формі

$$\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0 \quad \text{і} \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s},$$

де $\vec{r} = (x, y, z)$ — радіус-вектор поточної точки; $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — радіус-вектор заданої точки на прямій; $\vec{n} = (A, B, C)$ — нормальний вектор площини; $\vec{s} = (m, n, p)$ — напрямний вектор прямої. Знайдемо координати і радіус-вектор точки перетину прямої з площиною. Позначимо цю точку через $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а її радіус-вектор — через $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

Якщо $\vec{n} \cdot \vec{s} \neq 0$, тобто $\vec{n}$ і $\vec{s}$ не перпендикулярні, то пряма і площина перетинаються тільки в одній точці. Радіус-вектор $\vec{r}_1$ має задовольняти задані рівняння, з яких знаходимо

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 + t_1\vec{s}) + D = 0,$$

або

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_0 + (\vec{n} \cdot \vec{s})\, t_1 + D = 0,$$

звідки

$$t_1 = -\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_0 + D}{\vec{n} \cdot \vec{s}}.$$

Тоді радіус-вектор $\vec{r}_1$ точки перетину запишемо у вигляді

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_0 + D}{\vec{n} \cdot \vec{s}}\,\vec{s}.$$

Якщо пряму і площину задано рівняннями (4.1), то

$$t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp},$$

а координатами точки перетину $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ є

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - mt_1, \\ y_1 = y_0 - nt_1, \\ z_1 = z_0 - pt_1, \end{cases}$$

причому

$$Am + Bn + Cp \neq 0.$$

4.4. Пучок площин

Пучком площин називається сукупність площин, що проходять через дану пряму.

Нехай пряму задано загальним рівнянням

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Розглянемо рівняння

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{4.4}$$

Покажемо, що це є рівняння площини, яка проходить через пряму (4.3). Зобразимо рівняння (4.4) у вигляді

$$(A_1 + \lambda A_2)\,x + (B_1 + \lambda B_2)\,y + (C_1 + \lambda C_2)\,z + (D_1 + \lambda D_2) = 0.$$

Будь-яка точка M, що задовольняє рівняння (4.3), задовольняє і рівняння (4.4), причому $0 + \lambda \cdot 0 = 0$.

Якщо λ набуває всіх дійсних значень, то рівняння (4.4) визначає множину всіх площин, що проходять через пряму (4.3), крім площини

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Рівняння (4.4) називається **рівнянням пучка площин, що проходять через пряму** (4.3).

Якщо $z = 0$, то рівняння (4.4) набирає вигляду

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Це рівняння визначає множину прямих на площині xOy, що проходить через точку їх перетину, при цьому $D_1 = C_1$, $D_2 = C_2$, тобто маємо пучок прямих на площині xOy. Це рівняння пучка є більш загальним, ніж рівняння (2.51).

4.5. Рівняння площини, що проходить через пряму паралельно іншій прямій

Нехай потрібно провести площину через пряму

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

паралельно прямій

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Рівняння площини шукатимемо у вигляді

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4.5}$$

Оскільки площина містить задану пряму, то вона проходить через точку M_1 (x_1, y_1, z_1) і, отже, її координати задовольняють рівняння площини

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \tag{4.6}$$

Напрямний вектор прямої $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ перпендикулярний до нормального вектора площини $\vec{n} = (A, B, C)$, тому

$$Am_1 + Bn_1 + Cp_1 = 0. \tag{4.7}$$

Крім того, шукана площина має бути паралельна заданій прямій, тобто вектори $\vec{n} = (A, B, C)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ взаємно перпендикулярні, внаслідок чого

$$Am_2 + Bn_2 + Cp_2 = 0. \tag{4.8}$$

Із системи рівнянь (4.6) — (4.8) знаходимо A, B, C і D, виразивши три з них через четверту і підставивши у рівняння (4.5). Внаслідок однорідності рівняння (4.5) відносно A, B, C і D можна обидві частини знайденого рівняння поділити на вільну змінну, після чого дістанемо рівняння шуканої площини. Замість рівнянь (4.7), (4.8) можна використати умову

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2.$$

4.6. Відстань між двома мимобіжними прямими

Дві прямі тривимірного простору називаються **мимобіжними,** якщо вони не перетинаються і не паралельні. Через дві мимобіжні прямі можна провести тільки дві паралельні між собою площини. Відстані між цими площинами є найкоротшою відстанню між даними прямими.

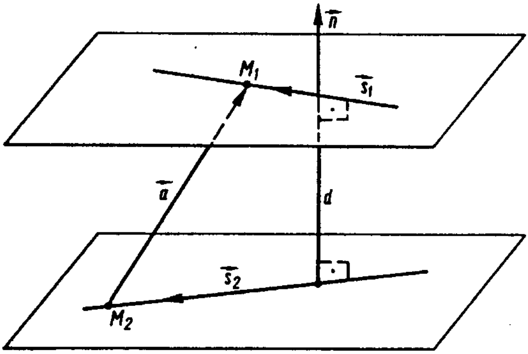


Рис. 2.19

Нехай дві мимобіжні прямі задано рівняннями (3.9) і потрібно знайти відстань d між ними.

Найкоротша відстань між заданими прямими дорівнює довжині відрізка спільного перпендикуляра до цих прямих, взятого між точками перетину його з прямими (рис. 2.19).

Векторний добуток напрямних векторів заданих прямих $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ є вектором, перпендикулярним до кожної з цих прямих:

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2.$$

Знайдемо вектор $\vec{a}$, який сполучає дані точки $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$ і $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_2M_1} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Тоді шукана відстань дорівнює модулю проекції вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{n}$:

$$d = \left| \text{пр}_{\vec{n}} \vec{a} \right| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|, \quad \text{або} \quad d = \frac{\left| \vec{a} \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \right|}{\left| \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \right|}. \tag{4.9}$$

ВПРАВИ. **1.** Дано вершини трикутника $A\ (0, -13)$, $B\ (8, 3)$ і $C\ (12, 1)$. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини C. *Відповідь.* $h = 4$.

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\ (2; 3)$ і рівновіддалена від точок $M_1\ (9, -1)$ і $M_2\ (7, 7)$. *Відповідь.* $4x + y - 11 = 0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M\ (2, 3, 5)$ паралельно площині $x - 2y + 3z = 0$. *Відповідь.* $x - 2y + 3z - 11 = 0$.

4. Скласти рівняння площин, паралельних площині $x + 2y - 2z - 3 = 0$ і віддалених від неї на відстань $d = 5$. *Відповідь.* $x + 2y - 2z - 18 = 0$, $x + 2y - 2z + 12 = 0$.

5. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M\ (2, 3, 0)$ паралельно прямій

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0; \\ x + 3y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Відповідь. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z}{-5}$.

6. Провести площину через пряму

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$$

і точку $M\ (4, —3, 2)$. *Відповідь.* $9x + 8y - 6z = 0$.

7. Знайти найкоротшу відстань між прямими

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z-1}{3} \quad \text{і} \quad \frac{x-5}{2}=\frac{y-8}{0}=\frac{z-2}{-3}.$$

Відповідь. $d = 2$.

§ 5. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5.1. Загальне рівняння кривої другого порядку

Нагадаємо загальне рівняння поверхні другого порядку (1.5):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz +$$
$$+ 2a_{23}yz + a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z + a_{00} = 0. \qquad (5.1)$$

Якщо поверхню другого порядку перетинає яка-небудь площина (поверхня першого порядку), то лінія перетину **називається кривою** другого порядку. Не порушуючи загальності міркувань, за січну площину можна взяти будь-яку з координатних площин.

Система рівнянь, яка складається з рівнянь (5.1) і одного з рівнянь $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, визначає криву другого порядку, розміщену відповідно в координатних площинах yOz, xOz і xOy.

Надалі будемо розглядати криві другого порядку, розміщені у площині xOy.

Рівняння такої кривої визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0; \\ z = 0. \end{cases}$$

Для спрощення записів нехтуватимемо другим рівнянням. Тоді рівняння кривої другого порядку, що лежить у площині xOy, матиме вигляд

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0. \qquad (5.2)$$

де $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, тобто хоча б одне з чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} відмінне від нуля.

Усі наступні міркування стосуються вирішення питання про різноманітність кривих або поверхонь другого порядку. Виявляється, що всі криві другого порядку можна поділити на кола, еліпси, гіперболи, параболи та їхні виродження — точки або прямі.

5.2. Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней кожної з яких від двох заданих точок цієї самої площини, що називаються **фокусами,** є величиною сталою і більшою, ніж відстань між фокусами. Нехай на площині дано дві точки F_1 і F_2, що називаються фокусами еліпса. Систему координат xOy розмістимо так, щоб вісь абсцис проходила через ці точки, а вісь ординат ділила відстань між ними навпіл (рис. 2.20).

Позначимо відстань між фокусами еліпса через $|F_1F_2| = 2c$, тоді $F_1(-c, 0)$, а $F_2(c, 0)$. Величина $2c$ називається **фокальною відстанню.** Знайдемо геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до даних точок F_1 і F_2 стала і дорівнює $2a$. Візьмемо довільну точку площини $M(x, y)$. Позначимо відстань її до точок F_1 і F_2 відповідно через r_1 і r_2. Точка M буде точкою еліпса, якщо

$$r_1 + r_2 = 2a = \text{const},$$

де r_1 і r_2 — фокальні радіуси точки M еліпса. Із означення еліпса і трикутника F_1MF_2 випливає, що $2a > 2c$ або $a > c$.

Виразимо фокальні радіуси через координати точок M, F_1 і F_2. За формулою відстані між двома точками маємо

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тоді дістаємо

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{5.3}$$

Рівняння (5.3) є **аналітичним рівнянням еліпса.**

На перший погляд, не зрозуміло, чи належить рівняння (5.3) до рівнянь кривих другого порядку типу (5.2). Виконаємо деякі перетворення рівняння (5.3), зокрема, звільнимося від ірраціональності. Перенесемо перший радикал у праву частину і обидві частини знайденого рівняння піднесемо до квадрата:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Звідси після перетворень знаходимо

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Піднесемо обидві частини цього рівняння до квадрата:

$$a^2\left[(x+c)^2 + y^2\right] = (a^2 + cx)^2,$$

або

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Оскільки $a > c$, то позначимо

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

тоді

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на $a^2b^2 > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.4}$$

Рівняння (5.4) називається **канонічним рівнянням еліпса.**

Покажемо, що рівняння (5.3) та (5.4) рівносильні. З рівняння (5.4) знаходимо

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) \tag{5.5}$$

Визначимо фокальні радіуси точки $M\ (x,\ y)$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)} = \sqrt{(x+c)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^4 + 2a^2cx + c^2x^2} = \frac{1}{a}\sqrt{\left(a^2 + cx\right)^2} = \frac{a^2 + cx}{a},$$

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x. \tag{5.6}$$

Аналогічно можна дістати значення r_2:

$$r_2 = a - \frac{c}{a}x. \tag{5.7}$$

Додаючи почленно рівняння (5.6) і (5.7), дістаємо рівняння (5.3).

Рівняння (5.6) і (5.7) називаються **рівняннями фокальних радіусів точки еліпса.**

Властивості еліпса.

1°. *Із канонічного рівняння еліпса* (5.4) *випливає, що еліпс належить до кривих другого порядку.*

2°. *Із рівняння* (5.5) *випливає, що*

$$|x| \le a, \quad |y| \le b,$$

тобто еліпс є обмеженою кривою.

3°. *Із рівняння* (5.4), *яке має поточні координати у парних степенях, дістаємо, що коли точка* $M\ (x,\ y)$ *належить еліпсу, то і точки* $M_1\ (-x,\ y)$, $M_2\ (x,\ -y)$ *і* $M_3\ (-x,\ -y)$ *також належать еліпсу.*

Отже, *еліпс має вертикальну та горизонтальну осі симетрії, а також центр симетрії.*

Крива, що має центр симетрії, називається **центральною.**

Наявність осей симетрії (ними, зокрема, є осі координат) дає змогу виконувати побудову еліпса лише в одній координатній чверті, а потім здійснювати дзеркальне відображення відносно осей і початку координат.

4°. *Еліпс перетинає осі координат у точках, координати яких дістаємо з рівняння* (5.4) *при* $x = 0$ *та* $y = 0$, *тобто* $A_1\ (-a,\ 0)$,

$A_2\,(a, 0)$, $B_1\,(0, b)$, $B_2\,(0, -b)$. Ці точки називаються **вершинами еліпса** (рис. 2.20).

Величини $2a$ і $2b$ називаються відповідно **великою** та **малою осями еліпса**, а a і b — **напівосями.** Назви «велика» і «мала» напівосі не пов'язані з їхньою довжиною.

5°. *Як випливає з рівняння* (5.4), *еліпс задано, якщо задані довжини його напівосей a і b або a і c. За цими напівосями можна побудувати еліпс.*

Одним із механічних способів побудови еліпса є такий. Беруть нерозтяжну нитку довжиною $2a$; кінці нитки закріплюють у фокусах F_1 і F_2; олівцем натягують нитку і креслять еліпс.

6°. *Якщо у рівнянні* (5.4) $a = b$, *то дістанемо* **рівняння кола**

$$x^2 + y^2 = b^2 \tag{5.8}$$

з *центром у початку координат і радіусом b.*

Оскільки для еліпса $a^2 - c^2 = b^2$, то при $a = b$ маємо $c = 0$. Таким чином, коло — це еліпс, у якого фокуси збігаються з центром симетрії, тобто фокальна відстань дорівнює нулю.

Для характеристики еліпса вводять відношення $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, яке називається **ексцентриситетом еліпса**

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \tag{5.9}$$

Ексцентриситет характеризує відхилення еліпса від кола — степінь «витягнутості» еліпса. Для кола $\varepsilon = 0$. Для еліпса

$$0 < \varepsilon < 1.$$

7°. *Використовуючи поняття ексцентриситету, рівності* (5.6) *і* (5.7) *можна записати у вигляді*

$$r_1 = a + \varepsilon x, \; r_2 = a - \varepsilon x.$$

8°. *Прямі* $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ *називаються* **директрисами (напрямними) еліпса.**

Рівняння директрис:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Оскільки $\varepsilon < 1$, то $\dfrac{a^2}{c} > a$, тобто директриси еліпса лежать поза ним.

Характерна особливість директрис полягає в тому, що *відношення фокального радіуса будь-якої точки еліпса до відповідної відстані до директриси є величиною сталою, що дорівнює ексцентриситету*

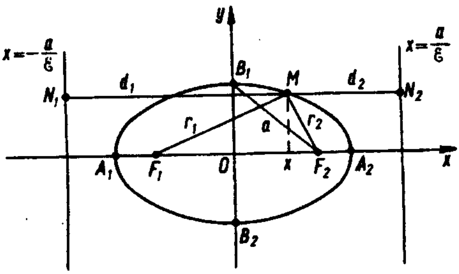


Рис. 2.20

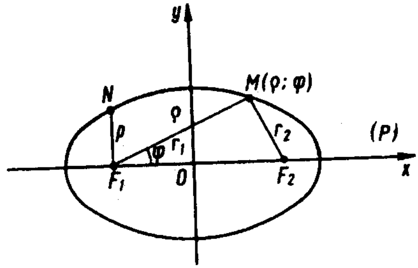


Рис. 2.21

еліпса. Дійсно (рис. 2.20),

$$d_1 = |MN_1| = \frac{a}{\varepsilon} + x; \qquad d_2 = |MN_2| = \frac{a}{\varepsilon} - x,$$

тоді

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_1}{|MN_1|} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} + x} = \varepsilon, \qquad \frac{r_2}{d_2} = \frac{r_2}{|MN_2|} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon.$$

Таким чином,

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

5.3. Полярне рівняння еліпса

Нехай еліпс задано канонічним рівнянням (5.4). Введемо полярну систему координат так, щоб її полюс збігався з фокусом F_1, а полярна вісь — з променем F_1x (рис. 2.21).

Полярні координати будь-якої точки еліпса позначимо через ρ і φ, тобто M (ρ, φ).

Згідно з означенням еліпса,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

За умовою $r_1 = \rho$, тоді

$$r_2 = 2a - \rho.$$

Із трикутника MF_1F_2 за теоремою косинусів знаходимо

$$r_2^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4\rho c\cos\varphi,$$

звідки

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4\rho c\cos\varphi,$$

або

$$a^2 - c^2 = a\rho - c\rho\cos\varphi.$$

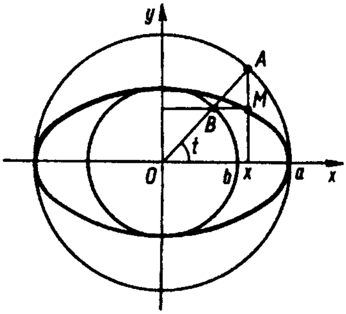


Рис. 2.22

Враховуючи, що $a^2 - c^2 = b^2$, маємо

$$b^2 = \rho\,(a - c\cos\varphi).$$

Звідси

$$\rho = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi}, \quad \text{або} \quad \rho = \frac{\dfrac{b^2}{a}}{1 - \dfrac{c}{a}\cos\varphi}.$$

Позначимо $\dfrac{b^2}{a} = p$. Число p називається **фокальним параметром еліпса,** воно дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного із фокуса до фокальної осі, до перетину з еліпсом, тобто

$$p = |F_1N|.$$

Таким чином, рівняння еліпса у полярних координатах має вигляд

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{5.10}$$

де ε і p — відповідно ексцентриситет і фокальний параметр еліпса.

Можна показати, що коли за полюс полярної системи координат взяти фокус F_2, а напрям полярної осі залишити той самий, то рівняння еліпса у полярних координатах набере вигляду

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}. \tag{5.11}$$

Приклад. Скласти параметричні рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, обравши за параметр t величину кута між радіусом-вектором точки еліпса та додатним напрямом осі Ox.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо два концентричні кола з центром у початку координат і радіусами b і a (рис. 2.22). Проведемо із початку координат промінь і точки його перетину з колами позначимо через B і A. Тоді $B\,(b\cos t,\ b\sin t)$ і $A\,(a\cos t,\ a\sin t)$.

Розглянемо точку M, абсциса якої дорівнює абсцисі точки A, а ордината — ординаті точки B, тобто

$$M\,(a\cos t,\ b\sin t).$$

Покажемо, що точка M незалежно від величини параметра t завжди належить даному еліпсу. Дійсно,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Таким чином, точка M при зміні параметра від 0 до 2π описує еліпс. Параметричні рівняння еліпса мають вигляд

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad \text{де} \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Зазначимо, що на рис. 2.22 показано еліпс, побудований таким способом: будуємо два концентричні кола з центром у початку координат і радіусами b і a. Далі певним кроком проводимо спільні радіуси цих кіл і будуємо точки M з абсцисою і ординатою відповідних точок кіл з радіусами a і b. Знайдені точки сполучаємо плавною кривою, яка і буде шуканим еліпсом.

5.4. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней кожної з яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величиною сталою і меншою за відстань між фокусами. Використаємо прямокутну систему координат і позначення з п. 5.2. Тоді рівняння гіперболи можна записати у вигляді

$$|r_1 - r_2| = 2a = \text{const},$$

причому $2a < 2c$, або $a < c$ (рис. 2.23).

Згідно з формулами

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

рівняння гіперболи можна подати у вигляді

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Внаслідок перетворень останнього рівняння, аналогічних тим, що було виконано при виведенні рівняння еліпса, знаходимо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.12}$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{5.13}$$

Рівняння (5.12) називається **канонічним рівнянням гіперболи.** Із цього рівняння знаходимо

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right) \tag{5.14}$$

звідки $|x| \geq a$.

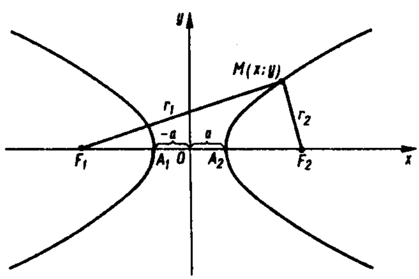


Рис. 2.23

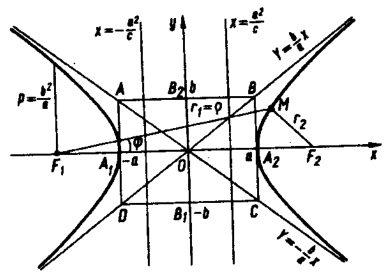


Рис. 2.24

Гіпербола складається з двох гілок. Ліва гілка лежить у півплощині $x \le -a$, а права — у півплощині $x \ge a$.

Рівняння фокальних радіусів точки гіперболи знаходять так само, як і для еліпса. Для лівої гілки гіперболи ці рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} r_1 = -a - \dfrac{c}{a}x, \\ r_2 = a - \dfrac{c}{a}x, \end{cases}$$

а для правої гілки

$$\begin{cases} r_1 = a + \dfrac{c}{a}x, \\ r_2 = -a + \dfrac{c}{a}x. \end{cases}$$

Властивості гіперболи.

1°. *Гіпербола є кривою другого порядку.*

2°. *З рівняння* (5.14) *випливає, що при* $|x| \ge a$ *маємо* $|y| \ge 0$, *тобто* $y \in \mathrm{R}$. *Отже, гіпербола є необмеженою кривою.*

3°. *Канонічне рівняння гіперболи* (5.12) *має поточні координати у парних степенях, отже, гіпербола, як і еліпс, має дві осі симетрії— осі координат, а центром симетрії є початок координат.*

4°. *Гіпербола перетинає вісь абсцис у двох точках* A_1 $(-a, 0)$ *і* A_2 $(a, 0)$, *а вісь ординат гіпербола не перетинає. Точки* A_1 *і* A_2 *називаються дійсними вершинами, або просто вершинами гіперболи.*

5°. *Як випливає із рівняння* (5.12), *гіпербола визначається параметрами* a *і* b, *або, якщо врахувати* (5.13), *то* a *і* c. На відрізках $2a$ і $2b$ можна побудувати прямокутник (рис. 2.24), який має з гіперболою дві спільні точки A_1 і A_2. Прямокутник $ABCD$, серединами сторін якого є точки A_1, B_2, A_2, B_1, називають **основним.** Величина $2a$ називається **дійсною (фокальною) віссю гіперболи,** а величина $2b$ — **уявною віссю гіперболи.** Відрізки $|A_1A_2| = 2a$ і $|B_1B_2| = 2b$ також називаються **дійсною і уявною осями гіперболи,** а величини a і b — її **півосями.** Назва «уявна вісь» пов'язана з тим, що гіпербола не перетинає вісь ординат.

Перед тим як розглянути метод побудови гіперболи, введемо дві прямі:

$$Y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{5.15}$$

Ці прямі називаються **асимптотами гіперболи** (рис. 2.24).

У рівняннях (5.12) і (5.15) вважаємо, що абсциса набуває одних і тих самих значень, а ординати різних: y — ордината на гіперболі, а Y — ордината на асимптоті.

Розглянемо частину гіперболи (5.14) і частину прямої (5.15), що лежать у першій чверті, та знайдемо різницю між їхніми ординатами, які відповідають одному й тому самому значенню x:

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right),$$

або, позбувшись ірраціональності у чисельнику, дістанемо

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Знайдемо границю цієї різниці, коли точка гіперболи віддаляється від початку координат у нескінченність:

$$\lim_{x\to+\infty}(Y - y) = \lim_{x\to+\infty}\frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0. \qquad (5.16)$$

Таким чином, асимптота гіперболи — це пряма, яка має таку властивість: *точка на гіперболі, яка віддаляється від початку координат у нескінченність, необмежено наближається до цієї прямої.* Рівність (5.16) було доведено для першої координатної чверті, але внаслідок симетрії вона справедлива і для інших координатних чвертей.

Перейдемо тепер до побудови гіперболи. Будуємо основний прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$; проводимо прямі, що збігаються з діагоналями цього прямокутника, тобто проводимо асимптоти; потім креслимо гіперболу (рис. 2.24).

6°. Ексцентриситетом гіперболи називається відношення

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}. \qquad (5.17)$$

Оскільки $b > 0$, $\varepsilon > 1$.

7°. Прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються **директрисами гіперболи.** Запишемо рівняння директрис у вигляді

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Враховуючи, що $\varepsilon > 1$, маємо $\dfrac{a^2}{c} < a$. *Директриси гіперболи мають ту саму властивість, що й директриси еліпса, тобто*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

8°. *Гіпербола називається рівнобічною, якщо півосі гіперболи рівні між собою, тобто $a = b$.* З урахуванням рівняння (5.12) рівнянням рівнобічної гіперболи є

$$x^2 - y^2 = a^2$$

і його можна записати у вигляді

$$(x + y)(x - y) = a^2.$$

Позначивши $x + y = x_1$, $x - y = y_1$, дістанемо рівняння рівнобічної гіперболи у вигляді

$$x_1 y_1 = a^2.$$

5.5. Полярне рівняння гіперболи

Нехай гіперболу задано канонічним рівнянням (5.12).

Введемо полярну систему координат так, щоб її полюс збігався з фокусом F_1, а полярна вісь — з додатним напрямом осі Ox (рис. 2.24). Координати будь-якої точки M гіперболи позначимо через ρ і φ, тобто $M(\rho, \varphi)$.

Запишемо рівняння гіперболи у вигляді

$$|r_1 - r_2| = 2a,$$

або для правої гілки

$$r_1 - r_2 = 2a, \tag{5.18}$$

а для лівої

$$r_2 - r_1 = 2a,$$

Запишемо рівняння (5.18) у полярних координатах. Для будь-якої точки M правої гілки гіперболи $r_1 = \rho$, тоді

$$r_2 = \rho - 2a,$$

За теоремою косинусів із трикутника MF_1F_2 знаходимо

$$r_2^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4r_1 c \cos\varphi,$$

або

$$(\rho - 2a)^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4\rho c \cos\varphi,$$

звідки

$$a^2 - c^2 = \rho\left(a - \frac{c}{a}\cos\varphi\right).$$

Враховуючи, що $a^2 - c^2 = -b^2$, маємо

$$-b^2 = a\rho\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right).$$

Отже,

$$\rho = \frac{-\dfrac{b^2}{a}}{1 - \dfrac{c}{a}\cos\varphi}.$$

Позначивши фокальний параметр гіперболи через $p = \dfrac{b^2}{a}$, дістаємо

$$\rho = \frac{-p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Маємо **полярне рівняння правої гілки гіперболи**. Аналогічно виводиться полярне рівняння лівої гілки гіперболи

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Якщо полюс помістити у правий фокус F_2 і зберегти напрям полярної осі, то полярне рівняння правої гілки гіперболи набуде вигляду

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

а лівої

$$\rho = \frac{-p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

5.6. Парабола

Нехай на площині дано точку F і пряму d, яка не проходить через F. Геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки F та фіксованої прямої d, що не проходить через точку F, називається **параболою**. Точка F називається **фокусом параболи**, а пряма d — **директрисою**.

Знайдемо рівняння параболи. Нехай на площині дано точку та пряму. Візьмемо таку систему координат xOy, щоб вісь абсцис проходила через фокус F перпендикулярно до прямої d, а вісь ординат ділила відстань між фокусом і директрисою навпіл (рис. 2.25, 2.27). Відстань між фокусом і директрисою параболи позначимо через p. За означенням $p > 0$, тоді точка F має координати $\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, а рівнянням директриси є

$$x = -\frac{p}{2}.$$

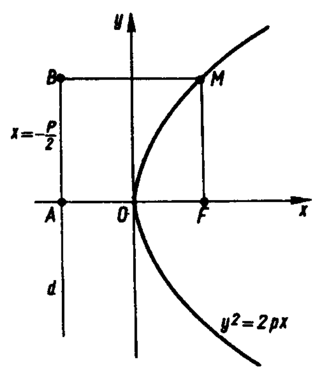


Рис.2.25

Нехай $M\ (x,\ y)$ — довільна точка площини. Точка M, за означенням, буде точкою параболи тоді і тільки тоді, коли

$$|MB| = |MF|.$$

Знаходимо

$$|MB| = x + \frac{p}{2},$$

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Отже,

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2, \qquad (5.19)$$

або

$$y^2 = 2px. \qquad (5.20)$$

Оскільки обидві частини рівняння (5.19) невід'ємні, то рівняння (5.20) рівносильне рівнянню (5.19).

Рівняння (5.20) називається **канонічним рівнянням параболи**.

У курсі математики середньої школи рівняння параболи розглядалось у вигляді

$$y = ax^2.$$

Це не канонічна форма запису рівняння параболи. Для канонічної форми характерна розв'язність рівняння відносно квадрата змінної, тобто

$$x^2 = \frac{1}{a}y.$$

Позначаючи $\frac{1}{a} = 2q$, дістаємо рівняння параболи у канонічній формі:

$$x^2 = 2qy. \qquad (5.21)$$

Властивості параболи.

1°. *Порівнюючи рівняння* (5.20), (5.21) *і* (5.1), *впевнюємося у тому, що парабола є кривою другого порядку.*

2°. *Оскільки* $p > 0$, *то з рівняння* (5.20) *маємо*

$$x \geq 0, \quad |y| \geq 0.$$

Отже, парабола є необмеженою кривою, що розміщена у правій півплощині. Із рівняння (5.21) *випливає, що* $y \geq 0$, $|x| \geq 0$ *при* $q > 0$, *тобто парабола розміщена у верхній півплощині.*

3°. *Парабола не має центра симетрії, вона не є центральною кривою. Парабола має одну вісь симетрії.* Для параболи (5.20) віссю симетрії є вісь абсцис, а для (5.21) — вісь ординат.

4°. *Парабола має одну вершину, яка лежить в початку координат.*

5°. *Для того щоб скласти канонічне рівняння параболи, достатньо задати тільки величину* p *(або* q*), яка називається параметром параболи.*

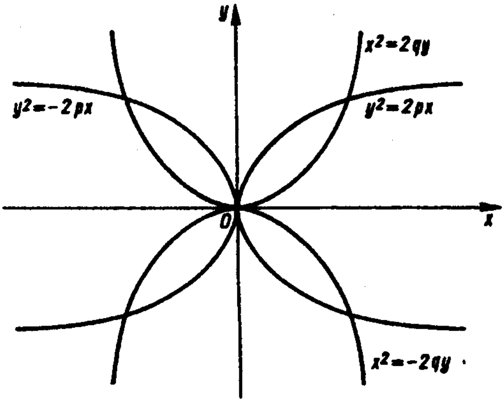


Рис. 2.26

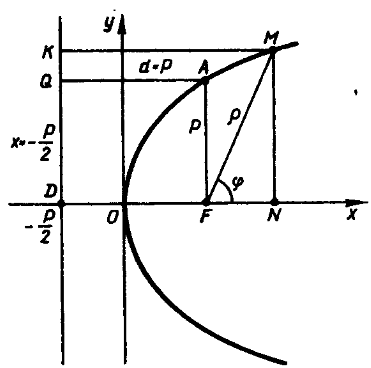


Рис. 2.27

Рівняння $y^2 = -2px$ (або $x^2 = -2qy$) при $p > 0$ (або $q > 0$) приводяться до рівнянь (5.20) і (5.21) внаслідок заміни x на $-x$, тобто шляхом перетворення координат, яке відповідає зміні напряму осі абсцис на протилежний (рис. 2.26).

6°. *Характерною властивістю директриси параболи є те, що відношення відстані будь-якої точки параболи від фокуса до відстані її від директриси є сталим і дорівнює ексцентриситету параболи.* Отже, ексцентриситет параболи

$$\varepsilon = \frac{|MF|}{|MB|} = 1.$$

7°. Знайдемо полярне рівняння параболи. Нехай полюс полярної системи координат збігається з фокусом параболи $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а полярна вісь — з додатним напрямом осі абсцис (рис. 2.27). Полярні координати точки параболи $M(x, y)$ позначимо через ρ і φ, тобто $M(\rho, \varphi)$. Із трикутника MFN знаходимо

$$y = \rho\sin\varphi;$$

$$x = |OF| + |FN| = \frac{p}{2} + \rho\cos\varphi.$$

Підставляючи значення x і y у рівняння (5.20), дістаємо

$$(\rho\sin\varphi)^2 = 2p\left(\frac{p}{2} + \rho\cos\varphi\right).$$

Якщо до обох частин цієї рівності додати $\rho^2\cos^2\varphi$, то дістанемо

$$\rho^2 = (p + \rho\cos\varphi)^2.$$

Враховуючи, що $\rho > 0$ і $p + \rho \cos \varphi > 0$, маємо $\rho = p + \rho\cos\varphi$. Тоді полярним рівнянням параболи є

$$\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi} \tag{5.22}$$

Розглядаючи отримані раніше полярні рівняння еліпса (5.10), гіперболи (5.18) та параболи (5.22), легко побачити, що всі три рівняння можна записати у вигляді одного

$$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \tag{5.23}$$

якщо вважати в рівнянні для еліпса $\varepsilon < 1$, гіперболи $\varepsilon > 1$, параболи $\varepsilon = 1$. Ексцентриситет для кривих другого порядку виражає їх загальну властивість: відношення відстані точки кривої від фокуса до відстані її від директриси є величина стала і дорівнює ексцентриситету (рис. 2.27) $\frac{MF}{MK} = \varepsilon$. Використовуючи тільки останню рівність, легко вивести рівняння (5.23). Тому рівняння (5.23) називається рівнянням кривої другого порядку в полярних координатах.

5.7. Приведення кривих другого порядку до найпростішого (канонічного) вигляду

Загальне рівняння кривої другого порядку (5.2) має такі групи членів:
а) квадратична форма (див. п. 5.2 з гл. 1)

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad \text{де } \vec{x} = (x, y);$$

б) лінійна форма (див. п. 5.1 з гл. 1) $f(x) = Л(x, y) = a_{10}x + a_{20}y$;
в) вільний член a_{00}.

Приведення рівняння (5.2) до найпростішого вигляду означає таке перетворення його, за яким легко визначити, чи задано цим рівнянням криву і яку саме (коло, еліпс, гіперболу, параболу, пряму, точку).

Приведемо канонічні рівняння кривих другого порядку у прямокутній декартовій системі координат:

1) $x^2 + y^2 = R^2$ — **коло**; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — **еліпс**;

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — **точка** O (0, 0); 4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ — **гіпербола**;

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — **порожня множина точок (уявний еліпс)**;

6) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — **дві прямі, що перетинаються:** $y = \frac{b}{a}x$ та $y = -\frac{b}{a}x$;

7) $y^2 = 2px$ або $x^2 = 2qy$ при $p \neq 0$, або $q \neq 0$ — **парабола**;

8) $y^2 = a^2$, або $x^2 = b^2$ при $a \neq 0$ або $b \neq 0$ — **дві паралельні прямі** $y = a$ та $y = -a$ або $x = b$ та $x = -b$;

9) $y^2 = 0$ або $x^2 = 0$ — **дві збіжні прямі, вісь абсцис або ординат**;

10) $y^2 = -a^2$ або $x^2 = -b^2$ при $a \neq 0$ або $b \neq 0$ — **порожня множина точок**.

Загальне рівняння кривої другого порядку завжди можна привести до одного з рівнянь 1)—10).

Якщо у рівнянні (5.2) $a_{12} = 0$, то дістанемо

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0. \tag{5.24}$$

Це рівняння можна привести до одного з рівнянь 1)—10) за допомогою паралельного перенесення системи координат, або виділення повних квадратів у лівій частині рівняння.

Щоб привести рівняння (5.2) до канонічного вигляду, достатньо здійснити перетворення, яке зводить його до рівняння (5.24), такого, яке перетворює квадратичну форму до канонічного вигляду.

Матриця цієї квадратичної форми має вигляд (див. п. 5.2, гл. 1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ де } a_{12} = a_{21}.$$

Повернемо систему координат xOy на кут φ, який відповідає головним напрямам даної матриці. Позначимо координати векторів головних напрямів через $\vec{i}_1 = (l_1, m_1)$ і $\vec{j}_1 = (l_2, m_2)$. Оскільки матриця A симетрична, то $\vec{i}_1 \perp \vec{j}_1$. При перетворенні

$$\begin{cases} x = l_1x_1 + l_2y_2; \\ y = m_1x_1 + m_2y_1, \end{cases}$$

квадратична форма набирає вигляду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2,$$

де λ_1 і λ_2 — власні числа матриці A.

Тоді рівняння (5.2) можна записати у вигляді

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2 + (a_{10}l_1 + a_{20}m_1)x_1 + (a_{10}l_2 + a_{20}m_2)y_1 + a_{00} = 0.$$

Якщо позначити $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$, $a_{10}l_1 + a_{20}m_1 = a'_{10}$, $a_{10}l_2 + a_{20}m_2 = a'_{20}$, $a_{00} = a'_{00}$, то дістанемо рівняння вигляду (5.24):

$$a'_{11}x_1^2 + a'_{22}y_1^2 + a'_{10}x_1 + a'_{20}y_1 + a'_{00} = 0. \tag{5.25}$$

Рівняння (5.25) приводиться до канонічного вигляду за допомогою паралельного перенесення системи координат за формулами

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \dfrac{a'_{10}}{2a'_{11}}, \\ y_2 = y_1 + \dfrac{a'_{20}}{2a'_{22}}. \end{cases}$$

Перетворюючи рівняння (5.25) за цими формулами, дістаємо у системі $x_2O_2y_2$ таке рівняння:

$$a'_{11}x_2^2 + a'_{22}y_2^2 = b,$$

або

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = b. \tag{5.26}$$

Останнє рівняння легко приводиться до канонічного вигляду.

Дослідимо рівняння (5.26). Обчислимо визначник матриці A

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

і запишемо характеристичне рівняння матриці

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\lambda^2 - \left(a_{11} + a_{22}\right)\lambda + \left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right) = 0.$$

Звідси за теоремою Вієта знаходимо

$$\lambda_1\lambda_2 = \delta,$$

де δ — визначник матриці A.

Нагадаємо, що коли дискримінант характеристичного рівняння

$$D = \left(a_{11} - a_{22}\right)^2 + \left(2a_{12}\right)^2 \geq 0,$$

то його корені λ_1 і λ_2 дійсні.

Таким чином, виходячи з рівнянь (5.25), (5.26), а також з геометричного змісту канонічних рівнянь 1)—10), можна сказати, що загальне рівняння кривої другого порядку (5.2) визначає:

а) еліпс (коло), точку або уявний еліпс (уявне коло), якщо $\delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$. Коло маємо при $D = 0$, тобто при $\lambda_1 = \lambda_2$, які мають однаковий знак із вільним членом b рівняння (5.26). При цьому крива називається **кривою еліптичного типу**;

б) параболу, пару паралельних або збіжних, або уявних прямих (порожню множину точок), якщо $\delta = \lambda_1\lambda_2 = 0$, тобто одне з чисел λ_1 або λ_2 дорівнює нулю. При цьому крива називається **кривою параболічного типу**;

в) гіперболу, пару прямих, що перетинаються, якщо $\delta = \lambda_1\lambda_2 < 0$. Крива називається **кривою гіперболічного типу**.

***Приклади.* 1.** Привести рівняння кривої

$$2x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$$

до канонічного вигляду і побудувати криву, що визначається даним рівнянням.

Розв'язання. Приведемо до канонічного вигляду квадратичну форму

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 2x^2 + 6xy + 2y^2,$$

в якій $a_{11} = 2$, $a_{12} = a_{21} = 3$, $a_{22} = 2$.

Складаємо матрицю цієї квадратичної форми і характеристичне рівняння, з якого знаходимо

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 5.$$

Тоді

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 2x^2 + 6xy + 2y^2 = -1 \cdot x_1^2 + 5y_1^2.$$

Оскільки $\delta = \lambda_1\lambda_2 = -5 < 0$, то маємо криву гіперболічного типу.

Знайдемо одиничні вектори головних напрямів даної кривої (див. приклад із п. 5.2, гл. 1):

$$\vec{i}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ при } \lambda_1 = -1;$$

$$\vec{j}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ при } \lambda_2 = 5.$$

Відповідне лінійне перетворення набирає вигляду

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1, \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1. \end{cases}$$

Перетворимо лінійну форму

$$Л(x, y) = 2x - 2y = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) = 2\sqrt{2}x_1.$$

Рівняння кривої в системі координат x_1Oy_1

$$-x_1^2 + 5y_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 3 = 0.$$

Виділимо у лівій частині цього рівняння повний квадрат:

$$\left(x_1 - \sqrt{2}\right)^2 - 5y_1^2 = 5.$$

Здійснимо паралельне перенесення системи x_1Oy_1 за формулами:

$$\begin{cases} x_1 - \sqrt{2} = x_2 \\ y_1 = y_2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 + \sqrt{2}, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Тоді дістанемо у системі $x_2O_2y_2$

$$x_2^2 - 5y_2^2 = 5,$$

звідки

$$\frac{x_2^2}{5} - \frac{y_2^2}{1} = 1.$$

Це рівняння визначає гіперболу з напівосями $a = \sqrt{5}$ та $b = 1$ (рис. 2.28).

2. Привести рівняння

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$$

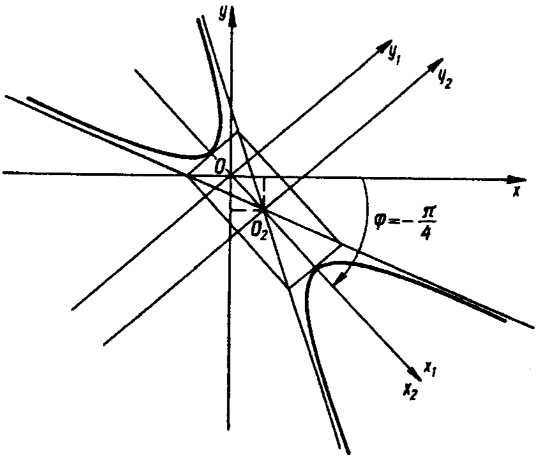


Рис. 2.28

до канонічного вигляду. Яка лінія визначається заданим рівнянням?

Р о з в' я з а н н я. Виділимо двічі у заданому рівнянні повний квадрат:

$$[(x - 2y) + 1]^2 - 4 = 0.$$

Це рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x - 2y - 1 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0. \end{array}\right.$$

Таким чином, задане рівняння визначає дві паралельні прямі.

ВПРАВИ. **1**. Скласти рівняння кола, діаметром якого є відрізок прямої $3x + 4y - 12 = 0$, обмежений осями координат. *Відповідь.* $(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

2. Упевнившись, що точка M $(-4;\ 2;\ 4)$ лежить на еліпсі

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

визначити її фокальні радіуси. *Відповідь.* $r_1 = 2{,}6$; $r_2 = 7{,}4$.

3. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстань кожної з яких від точки A $(0, 1)$ вдвічі менша за відстань від прямої $y - 4 = 0$. *Відповідь.* $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

4. Знайти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $\varepsilon = 2$ і фокуси збігаються з фокусами еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$. *Відповідь.* $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

5. Знайти канонічне рівняння параболи, коли відомо, що її фокус міститься у точці перетину прямої $4x - 3y - 4 = 0$ з віссю абсцис. *Відповідь.* $y^2 = 4x$.

6. Скласти полярне рівняння правої гілки гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс міститься у правому фокусі. *Відповідь.* $\rho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$.

7. Привести рівняння до канонічного вигляду і побудувати відповідну йому лінію:
а) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8x + 8y + 4 = 0$;
б) $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 16x + 16y + 24 = 0$.
Відповідь. а) $x_2^2 + 2y_2^2 = 2$; б) $x_2^2 - 4y_2^2 = 4$.

§ 6. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

6.1. Загальне рівняння поверхні другого порядку

Загальним рівнянням поверхні другого порядку називається рівняння виду

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy +$$

$$+ 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{10}x +$$
$$+ a_{20}y + a_{30}z + a_{00} = 0. \quad (6.1)$$

Розглянемо типи поверхонь, які визначаються цим рівнянням.

6.2. Довільна циліндрична поверхня

На відміну від простої, довільна циліндрична поверхня утворюється переміщенням прямої паралельно сталому вектору вздовж деякої просторової лінії, що називається **напрямною.**

Нехай напрямна циліндричної поверхні задана як перетин двох поверхонь:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0; & (6.2) \\ F_2(x, y, z) = 0, & (6.3) \end{cases}$$

а твірні цієї поверхні паралельні прямій з напрямним вектором $\vec{s} = (l, m, n)$. Тоді рівняння твірної, що проходять через точку M (x, y, z), яка лежить на напрямній, має вигляд

$$\frac{X - x}{l} = \frac{Y - y}{m} = \frac{Z - z}{n}, \quad (6.4)$$

де X, Y, Z — поточні координати точки P циліндричної поверхні (рис. 2.29).

Вилучивши з рівнянь (6.2) — (6.4) поточні координати напрямної (x, y, z), дістанемо рівняння циліндричної поверхні (рис. 2.29):

$$F\ (X, Y, Z) = 0. \quad (6.5)$$

Якщо в рівнянні (6.1) відсутня змінна координата z, то рівняння

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0$$

визначає просту циліндричну поверхню з напрямною

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

і твірними, паралельними осі аплікат (z — будь-яке дійсне число). Циліндричні поверхні, напрямними яких є лінії другого порядку, називаються **циліндричними поверхнями другого порядку.**

1. **Круговий циліндр** — циліндрична поверхня другого порядку, яка при відповідному виборі системи координат xyz може бути записана рівнянням

$$X^2 + Y^2 = R^2.$$

2. **Еліптичний циліндр** — циліндрична поверхня, рівняння якої має вигляд $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ (рис. 2.30).

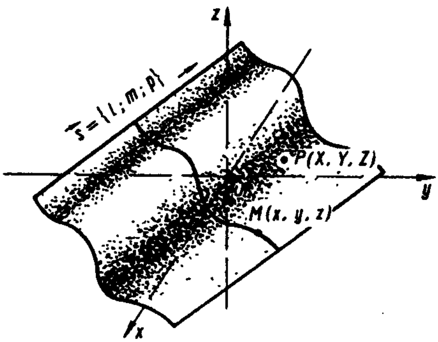


Рис. 2.29

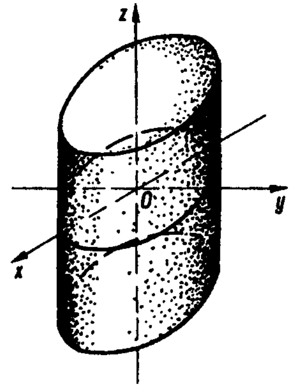


Рис. 2.30

3. **Гіперболічний циліндр** — поверхня, рівняння якої має вигляд $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ (рис. 2.31).

4. **Параболічний циліндр** — поверхня, рівняння якої має вигляд $Y^2 = 2pX$ (рис. 2.32).

6.3. Довільна конічна поверхня

Конічною поверхнею або **конусом** називається поверхня, утворена переміщенням прямої, що проходить через одну і ту саму точку і задану криву, за умови, що точка не належить цій кривій.

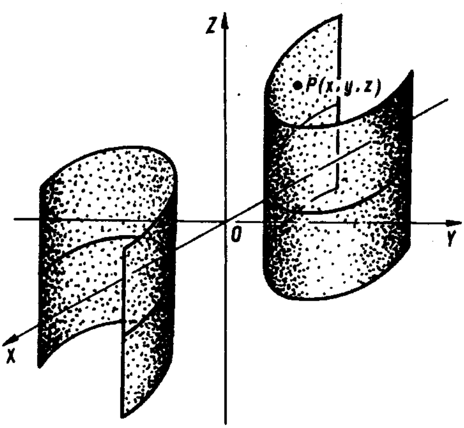


Рис. 2.31

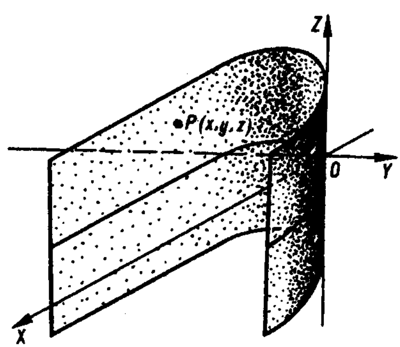


Рис. 2.32

Пряма, що переміщується, називається **твірною конуса,** дана точка — **вершиною,** а задана лінія — **напрямною** (рис. 2.33).

Нехай рівняння напрямної задано перетином поверхонь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \qquad (6.6)$$

а вершина міститься у точці S (x_0, y_0, z_0). Тоді твірна має проходити через дві точки: вершину S (x_0, y_0, z_0) і довільну точку напрямної M (x, y, z).

Якщо A (X, Y, Z) — довільна точка твірної і вона ж точка конічної поверхні, то її рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0}. \qquad (6.7)$$

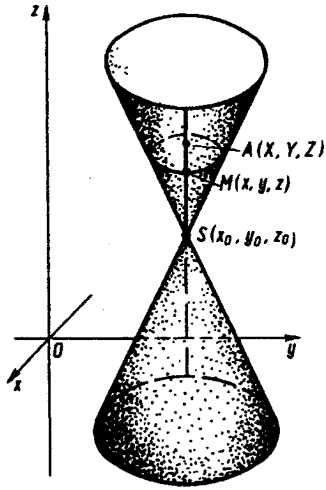


Рис. 2.33

Щоб знайти рівняння конічної поверхні, треба з рівнянь (6.6), (6.7) вилучити x, y і z — поточні координати напрямної. Дістанемо

$$F\ (X, Y, Z) = 0. \qquad (6.8)$$

Рівняння (6.8) за певних умов буде однорідним відносно поточних координат, тобто рівняння конічної поверхні не зміниться при заміні X, Y і Z відповідно на λX, λY і λZ, де λ — довільний параметр.

Дійсно, нехай вершина конуса розміщена у початку координат, а твірна проходить через точку (X, Y, Z). Тоді вона проходить і через точку з координатами λX, λY, λZ).

6.4. Поверхні обертання

Поверхнею обертання називається поверхня, утворена обертанням кривої, розміщеної в площині, навколо прямої, що лежить в одній площині з кривою.

Нехай в площині yOz задано криву

$$\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases} \qquad (6.9)$$

яка обертається навколо осі ординат (рис. 2.34). Складемо рівняння поверхні, яку при цьому дістали.

Візьмемо довільну точку M (X, Y, Z) поверхні обертання. При обертанні точка M опише коло з центром на осі ординат, яке лежить в площині, що перпендикулярна до цієї осі. Ордината будь-якої точки цього кола дорівнює відповідній ординаті кривої (6.9):

$$y = Y. \qquad (6.10)$$

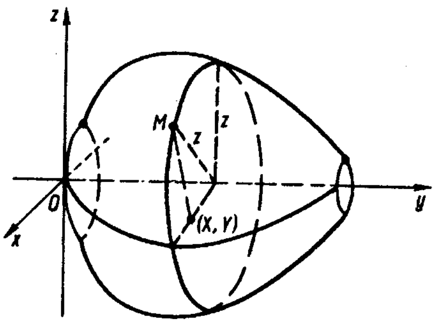


Рис. 2.34

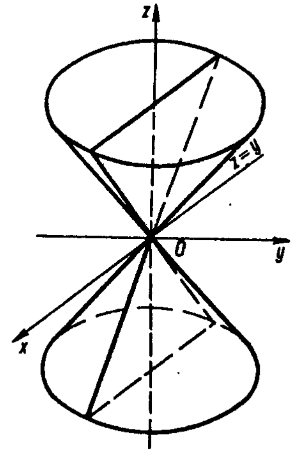


Рис. 2.35

Сума квадратів двох інших координат точки M дорівнює квадрату аплікати точки кривої (6.9):

$$X^2 + Z^2 = z^2. \qquad (6.11)$$

Підставляючи значення y і z із (6.10) і (6.11) у рівняння (6.9), знайдемо рівняння поверхні обертання

$$F\left(Y, \pm\sqrt{X^2 + Z^2}\right) = 0. \qquad (6.12)$$

Таким чином, щоб дістати рівняння поверхні обертання кривої навколо якої-небудь координатної осі, треба в рівнянні кривої залишити незмінною координату, що відповідає осі обертання, а іншу координату замінити на квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат.

Приклад. Знайти рівняння поверхні, яка утворена обертанням прямої $z = y$ навколо осі аплікат (рис. 2.35).

Р о з в ' я з а н н я. Виконаємо у рівнянні прямої заміну $z = Z$ і $y = \pm\sqrt{X^2 + Y^2}$, тоді

$$Z = \pm\sqrt{X^2 + Y^2}, \text{ або } X^2 + Y^2 - Z^2 = 0.$$

Це рівняння визначає круговий конус із вершиною у початку координат. Віссю обертання є вісь аплікат.

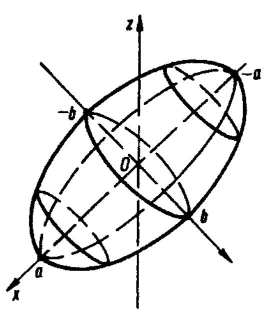


Рис. 2.36

Розглянемо поверхні, утворені обертанням кривих другого порядку навколо своїх осей.

Еліпсоїд обертання. Нехай еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, розміщений у площині xOy, обертається навколо однієї з осей x або y. Складемо рівняння поверхні обертання, яка називається еліпсоїдом обертання (рис. 2.36).

Для цього в заданому рівнянні необхідно здійснити заміну по (6.12). Дістанемо рівняння еліпсоїда обертання навколо осі Ox

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2+Z^2}{b^2}=1$$

або Oy

$$\frac{Y^2}{b^2}+\frac{X^2+Z^2}{a^2}=1. \qquad (6.13)$$

Гіперболоїд обертання. Нехай гіпербола

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (6.14)$$

обертається навколо осі Oz. Складемо рівняння поверхні обертання. Для цього в рівнянні (6.14) виконаємо заміну $z = Z$ і $y=\pm\sqrt{X^2+Y^2}$. Дістанемо

$$\frac{X^2+Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1. \qquad (6.15)$$

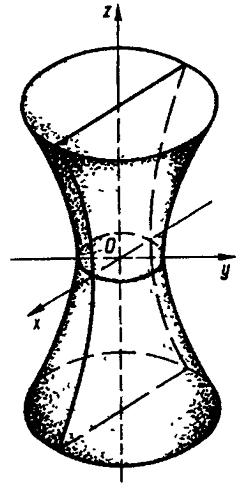


Рис. 2.37

Це рівняння визначає поверхню, яка називається **однопорожнинним гіперболоїдом обертання** (рис. 2.37). Якщо гіперболу (6.14) обертати навколо осі y, то дістанемо рівняння

$$\frac{X^2+Z^2}{c^2}-\frac{Y^2}{b^2}=-1, \qquad (6.16)$$

яке визначає поверхню, що називається **двопорожнинним гіперболоїдом обертання** (рис. 2.38).

Параболоїд обертання. Нехай парабола $y^2 = 2pz$, де $p > 0$, обертається навколо осі Oz. Тоді рівняння

$$\frac{X^2+Y^2}{p}=2Z \qquad (6.17)$$

визначає поверхню, що називається **параболоїдом обертання** (рис. 2.39).

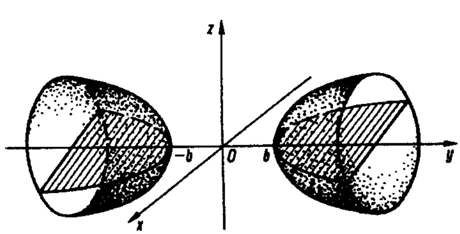


Рис. 2.38

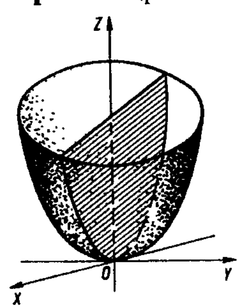


Рис. 2.39

6.5. Метод паралельних перетинів при дослідженні поверхонь другого порядку

У п. 6.2—6.4 розглядалась задача складання рівняння заданої поверхні. Тепер розв'яжемо обернену задачу: за заданим рівнянням поверхні побудувати поверхню.

Для визначення типу поверхні звичайно застосовують метод паралельних перетинів — метод перетинів даної поверхні площинами, які паралельні координатним площинам або координатним осям. Покажемо на прикладі, як це робиться.

Розглянемо конкретний приклад.

Тривісний еліпсоїд. Тривісним еліпсоїдом називається поверхня, задана рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{6.18}$$

Побудуємо поверхню, що визначається даним рівнянням.

Скористаємось **методом паралельних перерізів.** Перетнемо дану поверхню площиною, що паралельна площині xOy. Побудуємо площину $z = h$. Дістанемо лінію перетину

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h,\end{cases} \tag{6.19}$$

або

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}. \tag{6.20}$$

Дослідимо це рівняння.

а) Якщо $|h| > c$, то маємо уявний еліпс (права частина рівняння (6.20) від'ємна);

б) якщо $|h| = c$, то рівняння (6.20) набирає вигляду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

і визначає дві точки: $(0, 0, -c)$ і $(0, 0, c)$;

в) якщо $|h| < c$, то рівняння (6.20), подане у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1, \tag{6.21}$$

визначає еліпс, що лежить у площині $z = h$, з півосями

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\qquad b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

Напівосі a_1 і b_1 еліпса (6.21) при $0 \le |h| \le c$ змінюються відповідно від a^2 і b^2 до нуля.

Зокрема, у координатній площині $z = 0$ дістаємо еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (6.22)$$

Аналогічно в координатній площині $y = 0$ маємо еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (6.23)$$

а в координатній площині $x = 0$ — еліпс

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (6.24)$$

Еліпси (6.21)—(6.24), по яких еліпсоїд (6.18) перетинається з координатними площинами (рис. 2.40), дають уяву про поверхню, задану рівнянням (6.18).

Зауважимо, що еліпсоїд обертання є окремим випадком тривісного еліпсоїда, коли дві які-небудь півосі тривісного еліпсоїда дорівнюють одна одній. Якщо всі півосі тривісного еліпсоїда дорівнюють одна одній, то маємо сферичну поверхню.

Однопорожнинний гіперболоїд. Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, що визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (6.25)$$

Перетинаючи цю поверхню площинами $z = h$, паралельними площині xOy, дістаємо еліпси.

Перетинаючи тепер поверхню (6.25) площинами $x = h$, дістаємо гіперболи з дійсною віссю, що паралельна осі ординат (рис. 2.41).

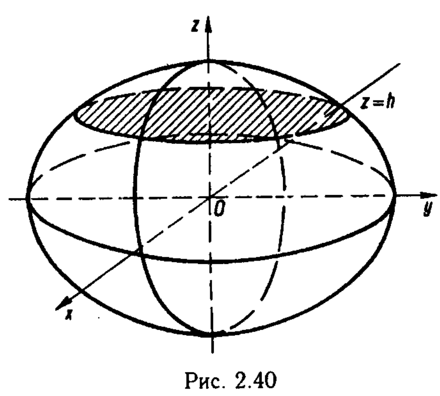


Рис. 2.40

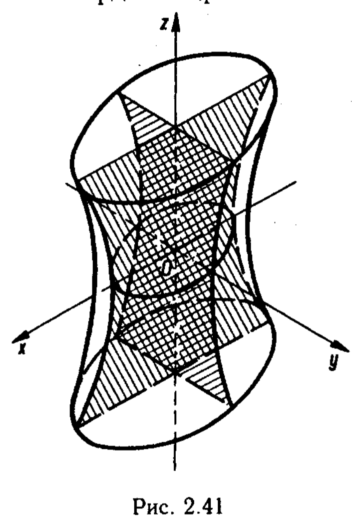


Рис. 2.41

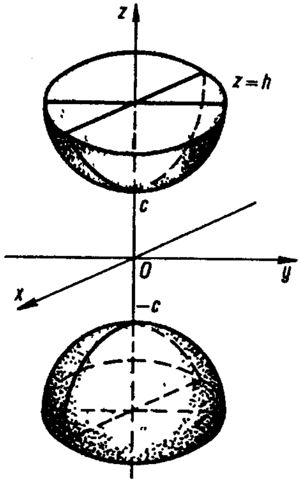


Рис. 2.42

Двопорожнинний гіперболоїд. Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, що визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (6.26)$$

(рис. 2.42).

Еліптичний параболоїд. Еліптичним параболоїдом називається поверхня, що визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, \quad q > 0 \qquad (6.27)$$

(рис. 2.43).

Гіперболічний параболоїд. Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, що задана рівнянням

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (6.28)$$

(рис. 2.44).

Поверхню (6.28) називають іноді **сідлоподібною поверхнею**.

Лінійчасті поверхні. Поверхні, твірні яких є прямими лініями, називаються лінійчастими.

До поверхонь, твірні яких є прямими лініями, належать циліндричні та конічні поверхні.

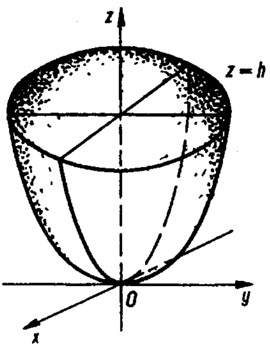


Рис. 2.43

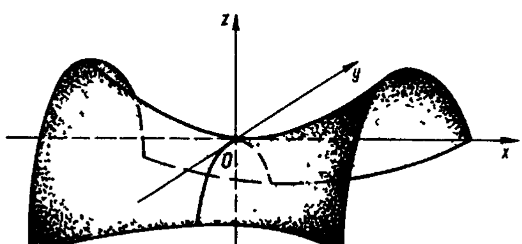


Рис. 2.44

Розглянемо рівняння однопорожнинного гіперболоїда (6.25) і подамо його у вигляді

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = k\left(1 \pm \dfrac{x}{a}\right), \\ \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{k}\left(1 \pm \dfrac{x}{a}\right), \end{cases} \tag{6.29}$$

де параметр k вибирають спеціально.

Кожне з рівнянь систем (6.29) визначає площину, а кожна з цих систем визначає пряму.

Таким чином, *через кожну точку однопорожнинного гіперболоїда проходять дві прямі, які лежать на поверхні гіперболоїда.* Однопорожнинний гіперболоїд — лінійчаста поверхня.

Те саме стосується гіперболічного параболоїда (6.28).

6.6. Схема приведення поверхонь другого порядку до канонічного вигляду

Загальне рівняння поверхні другого порядку (6.1) вміщує квадратичну форму

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \tag{6.30}$$

і лінійну форму

$$Л\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z. \tag{6.31}$$

Приведемо поверхню (6.1) до канонічного вигляду.

Приведемо до канонічного вигляду квадратичну форму. Маємо

$$\Phi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2,$$

де λ_1, λ_2, λ_3 — власні числа матриці квадратичної форми A. При цьому

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} = a_{32}.$$

Потім знайдемо власні вектори — головні напрями квадратичної форми, тобто визначимо перетворення, за допомогою якого квадратична форма набирає канонічного вигляду. Застосовуючи це перетворення до лінійної форми, дістанемо

$$Л\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 2\mu_1 x_1 + 2\mu_2 y_1 + 2\mu_3 z_1,$$

де μ_1, μ_2, μ_3 — нові коефіцієнти форми (6.31).

Таким чином, рівняння (6.1) набирає вигляду

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + 2\mu_1 x_1 + 2\mu_2 y_1 + 2\mu_3 z_1 + a_{00} = 0. \qquad (6.32)$$

Це рівняння може бути приведене до канонічної форми за допомогою паралельного перенесення системи координат за формулами

$$x_2 = x_1 - \mu_1,\ \ y_2 = y_1 - \mu_2,\ \ z_2 = z_1 - \mu_3.$$

Канонічне рівняння в системі x_2, y_2, z_2 у загальному випадку може мати вигляд (за умови $\lambda_1 \neq 0$; $\lambda_2 \neq 0$; $\lambda_3 \neq 0$)

$$\lambda_1^2 x_2^2 + \lambda_2^2 y_2^2 + \lambda_3^2 z_2^2 + D = 0\,. \qquad (6.33)$$

Тепер аналогічно п. 5.7 можна сформулювати можливі варіанти рівнянь поверхонь другого порядку, що відповідають рівнянням (6.32) та (6.33).

Приклад.

Звести до канонічного вигляду задану поверхню другого порядку, а також знайти базис, в якому написане канонічне рівняння поверхні

$$2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0\,. \qquad (6.34)$$

Розв'язання.

Запишемо квадратичну форму

$$\Phi(x;x) = 2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy + 2\cdot 0\cdot xz + 2\cdot 0\cdot yz,$$

$$a_{11} = 2;\ a_{12} = 1;\ a_{13} = 0;\ a_{21} = 1;\ a_{22} = 2;\ a_{23} = 0;\ a_{31} = 0;\ a_{32} = 0;\ a_{33} = -5\,.$$

Тоді матриця квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Дістанемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Розкриваючи визначник за елементами третього рядка, отримаємо

$$-(5+\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0\,.$$

Звідки

$$\lambda_3 = -5;\ (2-\lambda)^2 - 1^2 = 0 \ \text{ або } \ (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = 0;\ \ \lambda_2 = 1;\ \lambda_1 = 3.$$

Квадратична форма тепер набирає вигляду

$$\Phi(x;x) = 3x_1^2 + y_1^2 - 5z_1^2.$$

Знайдемо головні напрямки квадратичної форми або ненормовані власні вектори матриці

$$\bar{b}_i^* = \left(l_i^*,\, m_i^*,\, n_i^*\right),\ \ i = 1;\, 2;\, 3,$$

що відповідають власним числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а нормовані

$$\bar{b}_1 = (l_1;\, m_1;\, n_1) = \bar{i},$$

$$\bar{b}_2 = (l_2;\, m_2;\, n_2) = \bar{j},$$

$$\bar{b}_3 = (l_3;\, m_3;\, n_3) = \bar{k}$$

з системи рівнянь $\begin{cases}(2-\lambda)l^* + m^* + 0\cdot n^* = 0,\\ 1\cdot l^* + (2-\lambda)m^* + 0\cdot n^* = 0,\\ 0\cdot l^* + 0\cdot m^* - (5+\lambda)n^* = 0.\end{cases}$ (6.35)

При $\lambda = \lambda_1 = 3$ маємо

$$\begin{cases}-l_1^* + m_1^* = 0,\\ l_1^* - m_1^* = 0,\\ -8n_1^* = 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}l_1^* = m_1^*,\\ l_1^* = m_1^*,\\ n_1^* = 0;\end{cases} \qquad \begin{array}{l} l_1^* = t,\\ m_1^* = t,\\ n_1^* = 0\cdot t.\end{array}$$

Довжина вектора $\left|\bar{b}_1^*\right| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}.$ Нормуючи, отримаємо

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad m_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad n_1 = 0, \text{ вектор } \bar{i} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) = \bar{b}_1.$$

При $\lambda = \lambda_2 = 1$ з (6.35) маємо

$$\begin{cases}l_2^* + m_2^* + 0\cdot n_2^* = 0,\\ l_2^* + m_2^* + 0\cdot n_2^* = 0\ ,\\ 0+0-6\cdot n_2^* = 0\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{array}{l} l_2^* = t,\\ m_2^* = -t,\\ n_2^* = 0\cdot t.\end{array} \qquad \left|\bar{b}_2^*\right| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}.$$

Нормуючи, знайдемо

$$l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad m_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad n_2 = 0, \quad \bar{j} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) = \bar{b}_2.$$

При $\lambda = \lambda_3 = -5$

$$\begin{cases}7l_3^* + m_3^* + 0\cdot n_3^* = 0,\\ l_3^* + 7m_3^* + 0\cdot n_3^* = 0,\\ 0\cdot l_3^* + 0\cdot m_3^* - 0\cdot n_3^* = 0\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}7l_3^* + m_3^* = 0,\\ l_3^* + 7m_3^* = 0,\\ 0\cdot n_3^* = 0;\end{cases} \quad \begin{array}{l} l_3^* = 0,\\ m_3^* = 0,\\ n_3^* = 1.\end{array}$$

$$\begin{vmatrix}7 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix} \neq 0; \qquad \bar{k} = (0; 0; 1) = \bar{b}_3.$$

Значення $n_3 = 1$ взяли рівним одиниці, виходячи з нормування, оскільки рівняння $0\cdot n_3^* = 0$ задовольняє будь-яке число. Перших два рівняння мають нульовий розв'язок $\left(l_3^* = 0; m_3^* = 0\right)$, оскільки основний визначник $\begin{vmatrix}7 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix} = 48$ не дорівнює нулю.

Таким чином, $\bar{k} = (0; 0; 1)$.

Перевіримо ортогональність отриманих векторів

$$\bar{i}\cdot\bar{j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0\cdot 0 = 0; \quad \bar{i}\cdot\bar{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0; \quad \bar{j}\cdot\bar{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0.$$

Переведемо далі лінійну форму

$$Л\left(\overline{X}; \overline{X}\right) = -2x - 4y - 4z$$

в систему координат з ортами $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$. Для цього скористаємось формулами (4.30) з глави 1

$$\begin{aligned} X &= l_1x_1 + l_2y_1 + l_3z_1,\\ Y &= m_1x_1 + m_2y_1 + m_3z_1,\\ Z &= n_1x_1 + n_2y_1 + n_3z_1, \end{aligned}$$

де $l_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $m_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $n_1=0$; $l_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $m_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $n_2=0$; $l_3=0$; $m_3=0$; $n_3=1$.

Отримаємо
$$X=\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+0\cdot z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1),$$
$$Y=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+0\cdot z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-y_1), \tag{6.36}$$
$$Z=0\cdot x_1+0\cdot y_1+1\cdot z_1=z_1.$$

Тоді $\quad Л(X_1,X_1)=-\frac{2}{\sqrt{2}}(x_1+y_1)-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-y_1)-4z_1=-\frac{6}{\sqrt{2}}x_1+\frac{2}{\sqrt{2}}y_1-4z_1.$

Об'єднуючи вирази квадратичних та лінійних форм, рівнянню (6.34) надаємо вигляду
$$3x_1^2+y_1^2-5z_1^2-\frac{6}{\sqrt{2}}x_1+\frac{2}{\sqrt{2}}y_1-4z_1+2=0. \tag{6.37}$$

Здійснимо паралельний перенос системи x_1, y_1, z_1 в нову точку з координатами μ_1, μ_2, μ_3, для цього вираз (6.37) перетворимо так:
$$3x_1^2-\frac{6}{\sqrt{2}}x_1=3\left(x_1^2-2x_1\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\left[x_1^2-2x_1\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]=3\left(x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{3}{2};$$
$$y_1^2+\frac{2}{\sqrt{2}}y_1=y_1^2+2y_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=y_1^2+2y_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{2};$$
$$-5z_1^2-4z_1=-5\left(z_1^2+\frac{4}{5}z_1\right)=-5\left[z_1^2+2z_1\cdot\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]=-5\left(z_1+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{4}{5}.$$

Рівняння (6.37) тепер має вигляд
$$3\left(x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{3}{2}+\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{2}-5\left(z_1+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{4}{5}+2=0$$

або $3\left(x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-5\left(z_1+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{4}{5}=0.$

Позначимо $\quad x_2=x_1-\frac{1}{\sqrt{2}};\ y_2=y_1+\frac{1}{\sqrt{2}};\ z_2=z_1+\frac{2}{5},$

тоді $\quad 3x_2^2+y_2^2-5z_2^2+\frac{4}{5}=0$ або $\dfrac{x_2^2}{\frac{4}{5}}+\dfrac{y_2^2}{\frac{4}{15}}-\dfrac{z_2^2}{\frac{4}{25}}=1.$

Це рівняння поверхні двопорожнинного гіперболоїда. Якщо перепозначити власні числа, то отримаємо
$$\frac{x_2^2}{\frac{4}{5}}+\frac{y_2^2}{\frac{4}{15}}-\frac{z_2^2}{\frac{4}{25}}=-1.$$

Знайдемо координати початку координат (вони не обов'язково рівні нулю) $O(x;y;z)$ системи, в якій задане вихідне рівняння поверхні. Для цього використаємо отримані координати O_2 та вважатимемо, що
$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad y_1=-\frac{1}{\sqrt{2}};\quad z_1=-\frac{2}{5}.$$

Підставимо їх у систему (6.36).

Отримаємо $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0;$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-y_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1; \quad z=z_1=-\frac{2}{5}.$$

Таким чином $O\left(0;1;-\frac{2}{5}\right)$.

Остаточно $\bar{b}_1=\bar{i}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$; $\quad \bar{b}_2=\bar{j}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$; $\quad \bar{b}_3=\bar{k}=(0;0;1)$;

$\mu_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad \mu_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad \mu_3=-\frac{2}{5}$; $\quad O_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{2}{5}\right)$; $\quad O\left(0;1;-\frac{2}{5}\right)$.

Дістали рівняння поверхні двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x_2^2}{\frac{4}{5}}+\frac{y_2^2}{\frac{4}{15}}-\frac{z_2^2}{\frac{4}{25}}=-1.$$

ВПРАВИ. **1.** Знайти координати центра та радіус кола

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=100,\\2x-2y-z=18.\end{cases}$$

Відповідь. $C(4,4,-2)$; $R=8$.

2. Скласти рівняння циліндра з напрямною

$$\begin{cases}x^2+4y^2=8,\\z=0\end{cases}$$

і твірними, паралельними вектору $\vec{s}=(-3,2,1)$. *Відповідь.* $x^2+4y^2+25z^2+6xz-16yz-8=0$.

3. Знайти рівняння конічної поверхні з вершиною в точці (0, 0, 1), напрямною якої є крива

$$\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,\\z=0.\end{cases}$$

Відповідь. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z-1)^2}{1}=0.$

4. Скласти рівняння поверхні обертання, що утворена обертанням кривої

$$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\z=0\end{cases}$$

навколо осі абсцис і визначити вид поверхні. *Відповідь.* $x^2-y^2-z^2=1$ — двопорожнинний гіперболоїд.

5. Знайти точки перетину однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}=1$$

з прямою $\quad \frac{x-4}{4}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{1}$.

Відповідь. Пряма лежить на поверхні.

6. Яка поверхня визначається рівнянням

$$x^2+y^2-4x-4y+4=0?$$

Відповідь. Круговий циліндр $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Глава 3

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

§ 1. СИМВОЛІКА МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Під математичною або символічною логікою розуміють логіку, що розвивається за допомогою математичних методів. Тут вивчаються методи побудови математичних доведень і питання основ математики.

1.1. Висловлення

Основним поняттям математичної логіки є поняття висловлення. Висловлення належить до первинних понять, воно не визначається через інші поняття, а вводиться за допомогою опису.

Під висловленням розуміють будь-яке твердження, відносно якого можна з'ясувати, істинне воно чи хибне.

Висловлення позначають малими латинськими буквами p, q, r, s і т. д. Наприклад:

p: «Київ — столиця України»,

q: «$2 + 3 = 5$»,

r: «$6 < 4$»,

s: «18 кратне 7».

У наведених прикладах висловлення p і q — істинні, а r і s — хибні.

Множину всіх висловлень, яку позначимо буквою S, ділять на дві підмножини (класи):

T — клас усіх істинних висловлень, F — клас усіх хибних висловлень.

Два висловлення p і q називають **рівносильними (логічно рівними)**, якщо вони належать до одного й того самого класу, в якому істинності p і q співпадають, і записують

$$p \equiv q.$$

Із означення рівносильності висловлень випливають властивості:

1°. $p \equiv p$ **(рефлексивність).**

2°. *Якщо* $p \equiv q$, *то* $q \equiv p$ **(симетричність).**

3°. *Якщо* $p \equiv q$ *і* $q \equiv r$, *то* $p \equiv r$ **(транзитивність).**

1.2. Операції над висловленнями

У розмовній мові для сполучення двох речень вживають слова: «не», «або», «і», «якщо..., то...», «тоді і тільки тоді, коли». Уточнимо заперечення «не» та наведені вище сполучники, а також з'ясуємо те значення, в якому вони вживаються в логіці.

Заперечення. *Запереченням висловлення p називають висловлення «не p», яке істинне, коли p хибне, і хибне, коли p істинне.*

Позначення заперечення: p.

Часто для заперечення вживають символи: «$\neq$», «$\not\subset$» та інші.

Логічне додавання (диз'юнкція). *Логічною сумою (диз'юнкцією) двох висловлень p і q називають висловлення «p або q», яке хибне тоді і тільки тоді, коли p і q одночасно хибні.*

Позначення диз'юнкції: $p \vee q$. Ця операція вживається замість сполучника або.

Логічне множення (кон'юнкція). *Логічним добутком (кон'юнкцією) двох висловлень p і q називається висловлення «p і q», яке істинне тоді і тільки тоді, коли p і q одночасно істинні.*

Позначення кон'юнкції: $p \wedge q$. Ця операція вживається замість сполучників і, а, але, однак, хоча тощо.

Слідування (імплікація). *Логічним слідуванням (імплікацією) двох висловлень p і q називається висловлення «якщо p, то q», яке хибне тоді і тільки тоді, коли p істинне, а q — хибне.*

Ця логічна операція відповідає висловленню «якщо..., то...».

Позначення слідування: $p \Rightarrow q$.

Рівносильність (еквіваленція). *Рівносильністю (еквіваленцією) двох висловлень p і q називається висловлення «p тоді і тільки тоді, коли q», яке істинне тоді і тільки тоді, коли p і q належать до одного й того самого класу.*

Позначення рівносильності: $p \equiv q$ або $p \Leftrightarrow q$.

Таким чином,

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p).$$

Ми тут не спиняємось на властивостях (законах) введених логічних операцій, оскільки далі користуватимемося тільки символікою математичної логіки.

1.3. Предикат (неозначене висловлення, або висловлювальна форма)

Предикатом називається твердження, в яке входять вільні змінні і яке при заміні їх конкретними значеннями стає висловленням.

Предикати позначають великими буквами P, Q, R і т. д.

***Приклади.* 1.** Нехай $P(x)$ або P є твердження «$x^2 - 3x + 2 = 0$». Це твердження при $x = 1$ та $x = 2$ обертається відповідно на істинне висловлення $0 \equiv 0$ і $0 \equiv 0$, а при решті дійсних значень x — на хибне висловлення. Таким чином, $P(x)$ — предикат.

Предикат, в який входить одна вільна змінна, називається **одномісним**, якщо дві змінні — **двомісним** і т. д. Множина тих значень змінних, при яких предикат обертається на істинне висловлення, називається **областю істинності предиката**. Так, для наведеного вище предиката $P(x)$ областю істинності є множина $\{1; 2\}$.

2. Нехай $Q(a, b)$ — двомісний предикат «$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$». Цей предикат перетворюється на істинне висловлення при всіх дійсних значеннях «a» і «b». Областю істинності предиката Q є множина всіх дійсних чисел R. Такий предикат називається **тотожно істинним**, тобто предикат — істинний при всіх припустимих значеннях змінних.

3. Речення: «$x + y$» не є твердженням і не є предикатом, оскільки про істинність або хибність цього твердження при конкретних значеннях змінних нічого сказати не можна.

Рівності, рівняння, нерівності та їх системи, що розглядаються в математиці, з точки зору логіки — предикати.

1.4. Квантори

У математиці часто використовують вирази «для всіх», «для кожного», «яке б не було», «існує», «знайдеться хоча б одне». Для позначення цих виразів вживають символи, які називаються **кванторами**:

квантор загальності «$\forall$»: «для всіх», «для кожного», «яке б не було»;

квантор існування «$\exists$»: «існує», «знайдеться хоча б одне».

Приклади. **1.** Нехай $P(x)$ — «Трикутник x прямокутний», а $Q(x)$ — «Трикутник x, у якого квадрат довжини найбільшої сторони c дорівнює сумі квадратів довжин менших його сторін a і b».

Тоді теорема Піфагора може бути записана у вигляді

$$\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x).$$

2. Твердження «Існує дійсне число x таке, що $x > 5$» можна записати таким чином:

$$\exists x \in R \mid (x > 5).$$

1.5. Поняття про теореми. Взаємно обернені та взаємно протилежні теореми. Необхідність і достатність

Теорема — це математичне твердження, істинність якого з'ясовується доведенням (міркуваннями).

Формулювання будь-якої теореми складається з двох частин: умови і висновку, який випливає з даної умови.

Якщо умову теореми позначити через $P(x)$, а висновок — через $Q(x)$, то теорему можна записати у вигляді

$$(\forall x) : P(x) \Rightarrow Q(x) \text{ або } P \Rightarrow Q.$$

Приклад. Якщо $P(x)$: «Чотирикутник x — паралелограм», а $Q(x)$: «Чотирикутник x, діагоналі якого в точці їх перетину діляться навпіл», то теорема: «*Якщо чотирикутник — паралелограм, то його діагоналі в точці перетину діляться навпіл*» може бути записана таким чином:

$$(\forall x) : P(x) \Rightarrow Q(x).$$

Отже, наведений предикат

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

тотожно істинний.

Якщо предикат тотожно істинний, то теорему називають **правильною**, в протилежному випадку — **неправильною**.

Для того щоб показати, що теорема

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

неправильна, достатньо назвати хоча б одне таке x, при якому теорема неправильна.

Таке значення x називається **контрприкладом** для даної теореми.

Класифікація теорем і зв'язок між ними. У математиці розглядають такі чотири типи теорем.

I. *Пряма теорема*: $P \Rightarrow Q$.

II. *Обернена теорема*: $Q \Rightarrow P$.

III. *Протилежна теорема*: $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$.

IV. *Обернена протилежній (протилежна оберненій) теорема*: $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Користуючись означенням слідування, можна довести, що

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

і

$$(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}),$$

тобто пряма теорема і теорема, обернена протилежній, одночасно правильні або неправильні; а обернена і протилежна теореми одночасно правильні або неправильні.

Для того щоб всі чотири теореми були правильними, достатньо довести тільки дві теореми: I або IV і II або III.

Необхідність і достатність. У математиці трапляються теореми з трьома різними умовами: необхідна, достатня, необхідна і достатня.

Необхідна умова — це умова, без виконання якої дане твердження неправильне.

Якщо теорема правильна, тобто імплікація істинна:

$$P \Rightarrow Q,$$

то Q називають необхідною умовою для P.

Приклад. «Щоб чотирикутник був квадратом, необхідно, щоб його діагоналі були взаємно перпендикулярні».

Наведена умова є тільки необхідною, але не достатньою: якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то він не обов'язково є квадратом.

Достатня умова — це умова, з якої випливає, що дане твердження істинне.

Якщо теорема правильна, тобто імплікація істинна:

$$P \Rightarrow Q,$$

то P називається достатньою умовою для Q.

Приклад. «Якщо сторони чотирикутника рівні між собою, то чотирикутник — паралелограм».

Очевидно, що наведена умова тільки достатня, але не необхідна: якщо чотирикутник паралелограм, то його всі сторони не обов'язково рівні між собою.

Якщо теореми правильні,

$P \Rightarrow Q$ і $Q \Rightarrow P$,

то P є **необхідною і достатньою умовою** для Q, і навпаки, Q є необхідною і достатньою умовою для P.

§ 2. ПОСЛІДОВНОСТІ І ЗМІННІ

2.1. Числові проміжки

Нехай a і b — дійсні числа, причому $a < b$.

Відрізком називається множина всіх чисел (точок), які задовольняють умову

$$a \le x \le b. \tag{2.1}$$

Числа a і b називаються **кінцями відрізка**. Часто замість слова «відрізок» вживають термін «сегмент». Відрізок звичайно позначають $[a, b]$, а умову (2.1) символічно записують $x \in [a, b]$ і читають «x належить відрізку $[a, b]$».

Інтервалом називається множина всіх чисел x, які задовольняють умову

$$a < x < b. \tag{2.2}$$

Числа a і b називаються **кінцями інтервалу**. Інтервал позначають (a, b).

Нерівності (2.2) символічно записують: $x \in (a, b)$.

Множина всіх точок x, які задовольняють нерівності

$$a - \delta < x < a + \delta, \tag{2.3}$$

де $\delta > 0$, називається δ-околом точки a (рис. 3.1).

Отже, δ-окіл точки a — це інтервал, який вміщує точку a, тобто $(a - \delta, a + \delta)$.

Якщо в нерівностях (2.3) покласти $a = 0$, то дістанемо окіл нуля:

$$-\delta < x < \delta. \tag{2.4}$$

Умови (2.3) і (2.4) можна записати у вигляді

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ і } x \in (-\delta, \delta).$$

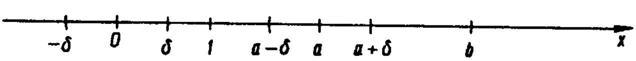


Рис. 3.1

Множина всіх чисел x, які задовольняють умову

$$a \le x < b, \tag{2.5}$$

називається **півсегментом** і позначається $[a, b)$.

Множина всіх чисел x, які задовольняють умову

$$a < x \le b, \tag{2.6}$$

називається **півінтервалом** і позначається $(a, b]$.

Множину всіх дійсних чисел (усіх точок числової осі) називають **нескінченно великим інтервалом** від $-\infty$ до $+\infty$ і пишуть $x \in (-\infty, +\infty)$. Символи $-\infty$ і $+\infty$ не слід розглядати як числа, це символічне позначення процесу необмеженого віддалення точок числової осі від її початку праворуч і ліворуч.

Арифметичні операції над символами $-\infty$ і $+\infty$ неприпустимі. Будь-яке дійсне число x вважають більшим, ніж $-\infty$, і меншим, ніж $+\infty$:

$$-\infty < x < +\infty. \tag{2.7}$$

Із цих нерівностей видно, що під x можна розуміти будь-яке дійсне число.

Враховуючи взаємно однозначну відповідність між точками числової осі і дійсними числами, можна зазначити, що нескінченно великому інтервалу $(-\infty, +\infty)$ відповідають нерівності (2.7).

Множина всіх точок x числової осі, що лежать справа (зліва) від точки a, називається **нескінченно великим інтервалом** «від a до $+\infty$» або «від $-\infty$ до a» і відповідно позначається $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ або $x \in (a, +\infty)$, $x \in (-\infty, a)$.

Враховуючи прийняті відносно символів $+\infty$, $-\infty$ умови, можна записати, що інтервалу $(a, +\infty)$ відповідають нерівності

$$a < x < +\infty, \text{ або } a < x, \tag{2.8}$$

а інтервалу $(-\infty, a)$ відповідають нерівності

$$-\infty < x < a, \text{ або } x < a. \tag{2.9}$$

Нерівності (2.8) позначають множину всіх дійсних чисел, більших за число a, а нерівності (2.9) — менших від числа a. **Півінтервалом** $(-\infty, a]$ називається множина всіх дійсних чисел, не більших за a.

Півінтервалу відповідають нерівності

$$-\infty < x \le a, \text{ або } x \le a. \tag{2.10}$$

Півсегментом $[a, +\infty)$ називається множина всіх чисел x, не менших від a, тобто

$$a \le x < +\infty, \text{ або } a \le x. \tag{2.11}$$

Сегмент, інтервал, півсегмент, півінтервал, що визначаються відповідно нерівностями (2.1), (2.2), (2.3), (2.6), називаються **скінченними**.

Сегменти, інтервали, півсегменти, півінтервали називають одним терміном **«проміжок»** і позначають $\langle a, b\rangle$.

У деяких випадках сегмент називають **закритим проміжком**, інтервал — **відкритим проміжком**, півсегмент — проміжком, закритим зліва, а півінтервал — проміжком, закритим справа.

2.2. Множини

Засновник теорії множин Г. Кантор[1] стверджував, що **множина** — це багато дечого, мислимого нами як єдине. Множина є чи не найширшим поняттям у математиці. Об'єкти, що складають множину, називаються її **елементами**. Проте можна уявити множину, в якій зовсім немає елементів. Така множина називається **порожньою**. Множини звичайно позначають великими буквами латинського алфавіту A, B, C, ..., а їхні елементи — малими буквами a, b, c, x, y, z, ... Порожня множина позначається символом $\varnothing$.

Той факт, що множина M вміщує елементи x_1, x_2, x_3, ..., x_n записують так:

$$M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Якщо елемент x належить множині M, то пишуть

$$x \in M,$$

а якщо не належить, то

$$x \notin M.$$

Задати множину — це означає вказати те спільне, що відрізняє її елементи від решти об'єктів.

Можна говорити, наприклад, про множину (табун) коней даного господарства, про множину шахових фігур, про множину присутніх на лекції слухачів і т. д.

Ряд множин має загальноприйняті позначення:

1) множина всіх **натуральних чисел**

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\};$$

2) множина всіх **цілих чисел**

$$\mathbf{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\};$$

множина всіх **невід'ємних цілих чисел**

$$\mathbf{Z}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\};$$

[1] Георг Кантор (1845–1918) — німецький математик.

3) множина всіх **раціональних чисел**

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q} \middle| p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N}\right\};$$

4) множина всіх **дійсних чисел**

$$\mathbf{R} = \{x \mid x = \pm\, a,\ \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \ldots\},$$

де a — ціле невід'ємне число, а α_i — цифри десяткової системи числення. Множина всіх додатних дійсних чисел позначається $\mathbf{R}_+$, а всіх від'ємних чисел — $\mathbf{R}_-$. Множина всіх невід'ємних дійсних чисел позначається $\mathbf{R}_0$.

Розглянуті раніше скінченні і нескінченні проміжки також є прикладом числових або точкових множин.

Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B належить множині A, і записують

$$\forall\, a \in B \Rightarrow a \in A.$$

Якщо множина B є підмножиною множини A, то пишуть

$$B \subset A, \text{ або } A \supset B,$$

і читають «B міститься в A», або «A вміщує B». Знак $\subset$ називається **символом включення.** За означенням приймають, що порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини:

$$\varnothing \subset A.$$

Будь-яка множина A, що складається з n елементів, має 2^n підмножин. Порожня множина і сама множина A називаються **невласними підмножинами множини** A, а решта підмножин A — її **частинами** або **власними підмножинами.**

Дві множини називаються **рівними,** якщо вони складаються з одних і тих самих елементів. Рівність двох множин записують так:

$$A = B.$$

Таким чином,

$$(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow (A = B).$$

У теорії множин часто множину задають за допомогою характеристичної властивості її елементів. Під **характеристичною властивістю множини** A розуміють таку властивість, яку мають всі елементи даної множини і тільки вони. Якщо характеристичну властивість множини A, елементом якої є x, позначити через $P\,(x)$, то множину A записують так:

$$A = \{x \mid P\,(x)\}, \text{ або } A = \{x : P\,(x)\}, \text{ або } \{x \in A \mid P\,(x)\}.$$

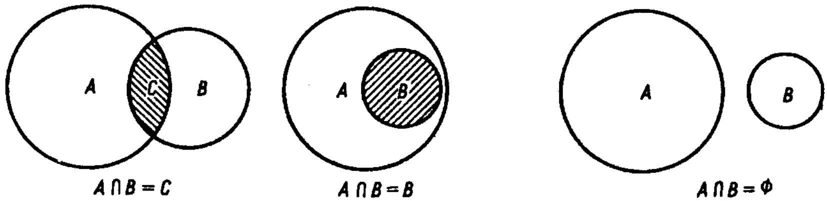


Рис. 3.2

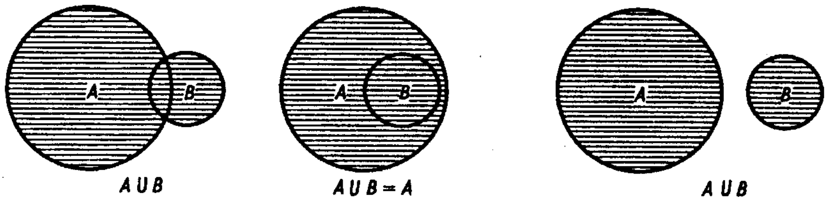


Рис. 3.3

Наприклад, якщо A є множиною дійсних чисел, які є коренями квадратного рівняння

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

то записують

$$A = \{x \in R \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

Перетином двох множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині A і множині B. Перетин множин позначають $\cap$ і записують

$$C = A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Перетин можна визначити також як спільну частину двох множин A і B. Для ілюстрації властивостей множин використовують графічне зображення множин у вигляді діаграм, кругів Ейлера[1] (рис. 3.2).

Властивості перетину.

1°. $A \cap A = A$.

2°. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

3°. $A \cap B = B \cap A$.

4°. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

5°. *Якщо* $A \subset B$, *то* $A \cap B = A$.

Об'єднанням двох множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з даних множин (рис. 3.3). Об'єднання множин позначають знаком $\cup$ і записують так:

$$C = A \cup B = \{X : X \in A \text{ або } X \in B\}.$$

---

[1] Леонард Ейлер (1707–1783) — математик, фізик, механік, астроном.

В л а с т и в о с т і о б ' є д н а н н я.

1°. $A \cup A = A$.

2°. $A \cup \varnothing = A$.

3°. *Якщо* $A \supset B$, *то* $A \cup B = A$.

4°. $A \cup B = B \cup A$.

5°. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

6°. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

7°. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Різницею множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів множини A, яких немає в B (рис. 3.4). Різницю множин позначають знаком \ і записують

$$C = A \backslash B = \{x \in C : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Якщо $B \subset A$, то різницю $A \backslash B$ називають **доповненням множини** B **до множини** A (рис. 3.5) і записують

$$C_A B = A \backslash B.$$

Користуючись символікою алгебри множин і логіки, можна по-новому записати числові проміжки. Наприклад, δ-околом точки a є множина

$$Q_\delta(a) = \{x \in \mathbf{R} : a - \delta < x < a + \delta\}.$$

Якщо з множини $Q_\delta(a)$ виключити точку a, то дістанемо **«проколотий» окіл точки** a:

$$Q_\delta(a) = Q_\delta(a) \backslash a = \{x \in \mathbf{R} : a - \delta < x < a + \delta \wedge x \neq a\}.$$

2.3. Змінні і сталі величини

Змінною називається величина, що набуває різних числових значень.

Числа x, які задовольняють будь-яку з умов (2.1)—(2.11), є прикладами змінних величин.

Сталою називається величина, що набуває єдиного числового значення. Наприклад, відношення довжини кола до його діаметра — величина стала для всіх кіл і дорівнює π.

Множина значень, яких набуває змінна величина, називається **областю** зміни цієї змінної. Так, наведені вище нерівності (2.1)—(2.11) визначають область зміни змінної величини x. При цьому нерівностям (2.1)—(2.6) відповідає обмежена область зміни змінної, а нерівностям (2.7)—(2.11) — необмежена.

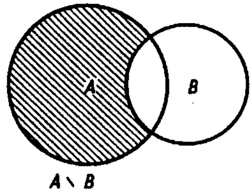


Рис. 3.4

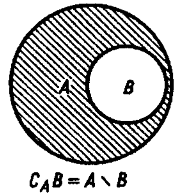


Рис. 3.5

Числові значення, яких набуває змінна, має властивість **упорядкованості,** тобто для будь-яких двох дійсних чисел x' і x'' виконується одне з трьох співвідношень:

1) $x' = x''$; 2) $x' < x''$; 3) $x' > x''$. Якщо $x' > x''$ і $x'' > x'''$, то $x' > x'''$.

Крім того, множина дійсних чисел має властивість щільності, яка полягає в тому, що між двома дійсними числами міститься принаймні одне дійсне число, а також властивістю **неперервності.** Розглянемо, у чому полягає властивість неперервності дійсних чисел **R**.

Поділимо множину **R** на дві підмножини X і Y, які задовольняють такі умови:

1) жодна з підмножин X і Y не порожня;

2) кожне дійсне число належить одній і тільки одній з множин X або Y;

3) кожне число з множини X, менше кожного числа, що міститься у множині Y.

Поділ множини **R** на дві підмножини X і Y називається **перетином** і позначається (X, Y). Множина Y називається **верхньою**, а X — **нижньою**.

Перетини (X, Y) можуть бути двох видів (**теорема Дедекінда**[1]):

1) *або у верхньому класі Y є найменше число, але у нижньому класі X немає найбільшого числа;*

2) *або у нижньому класі X є найбільше число, але у верхньому класі Y немає найменшого числа.*

2.4. Модуль (абсолютне значення) величини

Модуль додатного числа дорівнює самому числу; модуль нуля дорівнює нулю, а модуль від'ємного числа дорівнює протилежному числу:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Наприклад, $|-3| = -(-3) = 3$, $|0| = 0$, $|-7{,}8| = -(-7{,}8) = 7{,}8$; $|\cos 100°| = -\cos 100°$.

Геометрично модуль дійсного числа дорівнює відстані від початку координат до точки, що зображує дане число на числовій осі (рис. 3.6).

В л а с т и в о с т і м о д у л я д і й с н о г о ч и с л а.

1°. *Рівні числа мають рівні модулі:*

$$a = b \Rightarrow |a| = |b|.$$

2°. *Модуль числа є число невід'ємне:*

$$|a| \geq 0.$$

[1] Ріхард Д е д е к і н д (1831–1916) — німецький математик.

3°. *Число не більше свого модуля*:

$$a \le |a|.$$

4°. *Протилежні числа мають рівні модулі*:

$$|a| \equiv |-a|.$$

5°. *Модуль суми скінченної кількості доданків не більше суми модулів доданків*:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

6°. *Модуль різниці двох чисел не менше різниці модулів цих чисел:*

$$|a - b| \ge |a| - |b|.$$

7°. *Модуль добутку скінченної кількості співмножників дорівнює добутку модулів усіх співмножників*:

$$|a_1 a_2 \cdots a_n| \equiv |a_1||a_2||a_3| \cdots |a_n|.$$

8°. *Модуль частки дорівнює частці модулів діленого і дільника*:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \ne 0.$$

Розглянемо найпростіші нерівності із змінною під знаком модуля.

Приклади. **1.** Розв'язати нерівність $|x| < a$, де $a > 0$.

Р о з в' я з а н н я. Геометрична задана нерівність означає, що її задовольняють ті точки числової осі, відстань до яких від початку осі менша, ніж a (рис. 3.7). Таким чином,

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

2. Розв'язати нерівність $|x| > a$, де $a > 0$.

Р о з в' я з а н н я. Геометрично задана нерівність означає, що її задовольняють точки числової осі, які віддалені від початку осі на відстань більшу, ніж a. Таким чином,

$$|x| > a \Leftrightarrow \{x \mid x < -a \vee x > a\},$$

або

$$x \in (-\infty, -a) \text{ і } x \in (a, +\infty).$$

Тепер, користуючись поняттям модуля, нерівності (2.3), (2.4), (2.7) можна записати відповідно у вигляді

$$a - \delta < x < a + \delta \Leftrightarrow (a - \delta, a + \delta) \Leftrightarrow |x - a| < \delta,$$

$$-\delta < x < \delta \Leftrightarrow (-\delta, \delta) \Leftrightarrow |x| < \delta,$$

$$-\infty < x < +\infty \Leftrightarrow (-\infty, +\infty) \Leftrightarrow |x| < +\infty.$$

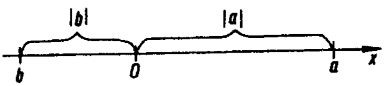


Рис. 3.6

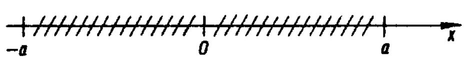


Рис. 3.7

Зокрема, δ-окіл точки a:

$$Q_\delta(a) = \{x \in \mathbf{R} : |x - a| < \delta\};$$

цей же окіл з виколотою точкою a:

$$\dot{Q}_\delta(a) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x - a| < \delta\}.$$

Наведемо кілька прикладів розв'язання нерівностей з модулем.

***Приклади.* 1.** Розв'язати нерівність $|x - 3| < 5$.

Розв'язання. Маємо

$$|x - 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 3 < 5 \Leftrightarrow -2 < x < 8.$$

Відповідь. $\{x \in \mathbf{R}: -2 < x < 8\}$.

2. Розв'язати нерівність $|x + 2| + |x - 4| < 10$.

Розв'язання. Якщо треба розв'язати нерівність (рівняння) в множині дійсних чисел, то доцільно всю множину розбити на підмножини точками, в яких вирази під знаком модуля перетворюються на нуль. У даному разі це точки -2 і 4.

а) Якщо $x \in \mathbf{R}_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < -2)$, то нерівність набирає вигляду $-x - 2 - x + 4 < 10$. Тоді розв'язання заданої нерівності зводиться до розв'язання системи:

$$\begin{cases} x < -2, \\ -x - 2 - x + 4 < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ 2x > -8, \end{cases}$$

звідки $-4 < x < -2$.

б) Якщо $x \in \mathbf{R}_2 = \{x \in \mathbf{R}: -2 \le x \le 4\}$, то

$$\begin{cases} -2 \le x \le 4, \\ x + 2 - x + 4 < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 4, \\ 6 < 10 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 4.$$

в) Якщо $x \in \mathbf{R}_3 = \{x \in \mathbf{R}: x > 4\}$, то

$$\begin{cases} x > 4, \\ x + 2 + x - 4 < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x < 6, \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x < 6.$$

Таким чином, розв'язками нерівності є множина

$$x \in \{x \in \mathbf{R}: -4 < x < -2 \vee -2 \le x \le 4 \vee 4 < x < 6\}.$$

Відповідь. $x \in \{x \in \mathbf{R}: -4 < x < 6\}$.

3. Розв'язати нерівність $2 < |x - 4| < 3$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$2 < |x - 4| < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 4 \ge 0, \\ 2 < x - 4 < 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 4 \quad , \\ 2 < -(x - 4) < 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 4, \\ 6 < x < 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 4, \\ -2 > x - 4 > -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 4, \\ 6 < x < 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 4, \\ 2 > x > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 6 < x < 7, \\ 1 < x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \{x \in \mathbf{R}: 1 < x < 2 \vee 6 < x < 7\}.$$

Відповідь. $x \in \{(1; 2) \cup (6; 7)\}$.

ВПРАВИ. Розв'язати нерівності.

1. $|x+1| < 0{,}01$. *Відповідь.* $-1{,}01 < x < -0{,}99$.

2. $|x| > |x+1|$. *Відповідь.* $x \in (-\infty; -0{,}5)$.

3. $|2x-1| < |x-1|$. *Відповідь.* $x \in \left(0; \dfrac{2}{3}\right)$.

4. $||x+1| - |x-1|| < 1$. *Відповідь.* $x \in \left\{x \in \mathbf{R}: -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}\right\}$.

2.5. Означення і приклади послідовностей

Якщо кожному натуральному числу за певним законом поставлене у відповідність число або змінна величина, то говорять, що множина останніх утворює **послідовність** і пишуть

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ \text{або}\ \{x_n\}.$$

Величини $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ називають **членами послідовності**, а x_n — **загальним членом**.

Послідовність, членами якої є числа, називається **числовою**. Якщо членами послідовності є змінні, наприклад функції, то послідовність називається **функціональною**.

Графічно числову послідовність можна зобразити на двох паралельних координатних осях (рис. 3.8) або точками координатної площини xOy (рис. 3.9) або на одній координатній осі з позначенням номерів її членів (рис. 3.10).

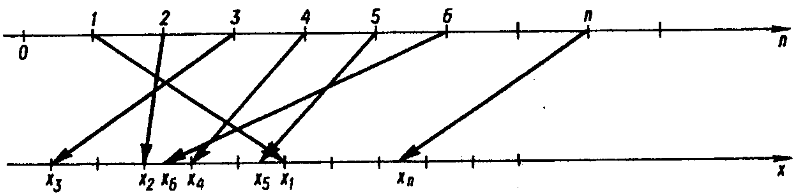


Рис. 3.8

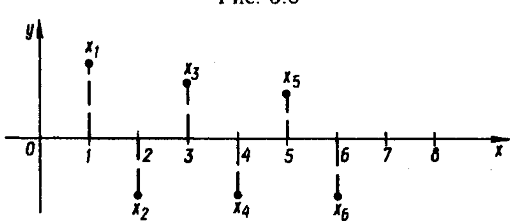


Рис. 3.9

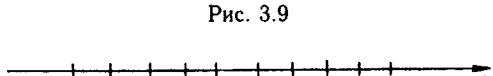


Рис. 3.10

Приклади. **1.** Зобразимо графічно послідовність

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\},$$

або

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

(рис. 3.11).

2. Зобразимо графічно послідовність

$$\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}, \text{ або } -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots$$

(рис. 3.12).

3. Розглянемо послідовність $\{x_n\} = \{x^{n-1}\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, де $x \in \mathbf{R}$, або $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, \ldots$, членами якої є степеневі функції з натуральними показниками. Це приклад **функціональної послідовності**. При певному числовому значенні змінної x, наприклад $x = 2$, з цієї послідовності можна дістати числову послідовність

$$1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$$

Далі розглядатимемо числові послідовності.

Арифметична прогресія. Арифметичною прогресією називається послідовність $\{x_n\}$, в якій для всіх $n \in \mathbf{N}$ виконується рівність

$$x_{n+1} = x_n + d.$$

Число d називається **різницею прогресії**.

Якщо число $x_1 = a$, то загальний член послідовності має вигляд

$$x_n = a + (n - 1)\, d.$$

Тоді послідовність (арифметична прогресія) набуває вигляду

$$\{x_n\} = \{a + (n - 1) d\} = a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)\, d, \ldots$$

Геометрична прогресія. Геометричною прогресією називається послідовність $\{x_n\}$, для якої при всіх $n \in \mathbf{N}$ виконується рівність

$$x_{n+1} = x_n q.$$

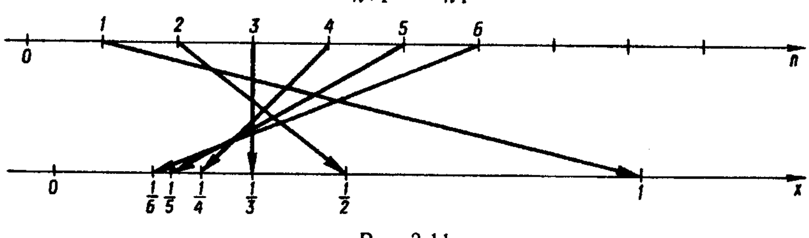


Рис. 3.11

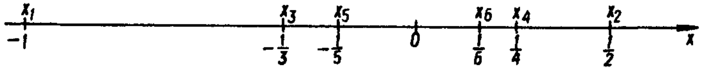


Рис. 3.12

Число q називається **знаменником прогресії**.

Якщо $x_1 = a$, то загальний член геометричної прогресії має вигляд $x_n = aq^{n-1}$, а геометричну прогресію можна записати таким чином:

$$\{x_n\} = \{aq^{n-1}\} = a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ \ldots$$

Послідовність може бути задана формулою її загального члена. Користуючись цією формулою, можна знайти член послідовності з будь-яким наперед заданим номером.

Приклад. Послідовність довжин периметрів правильних вписаних у коло многокутників може бути задана формулою загального члена:

$$x_n = 2nR\sin\frac{\pi}{n}.$$

Проте у загальному випадку задача написання формули загального члена послідовності не розв'язувана, тобто не можна стверджувати, що для будь-якої послідовності можна знайти формулу її загального члена.

Приклад. Евклід[1] довів, що множина простих чисел нескінченна, тобто прості числа утворюють послідовність, але досі не знайдено формулу загального члена цієї послідовності.

2.6. Границя послідовності. Границя змінної

Нехай задано послідовність $\{x_n\}$. Число a називається **границею послідовності** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа δ знайдеться таке натуральне число N (яке залежить від δ), що всі члени послідовності з номерами n, більшими від N, задовольняють нерівність

$$|x_n - a| < \delta. \tag{2.13}$$

Коротко це можна записати таким чином:

Якщо $\forall\ \delta > 0,\ \exists\ N(\delta)$ таке, що $\forall\ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \delta$, то число a є границею послідовності.

Позначення границі послідовності:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a;\ \lim x_n = a;\ x_n \to a. \tag{2.14}$$

Використовуючи означення модуля, нерівність (2.13) можна записати у вигляді

$$-\delta < x_n - a < \delta, \text{ або } a - \delta < x_n < a + \delta.$$

Геометрично означення границі послідовності можна тлумачити таким чином.

Зобразимо δ-окіл точки a, тобто інтервал $(a - \delta,\ a + \delta)$ (рис. 3.13), і побудуємо послідовність.

---

[1] Евклід (близько 365–300 до н. е.) — давньогрецький математик.

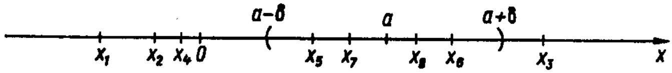


Рис. 3.13

Точка a буде границею послідовності $\{x_n\}$, якщо існує таке N, що всі члени послідовності, починаючи з номера $n > N$ (для випадку, що розглядається, $n > 4$), опиняться в δ-околі точки a. Тобто, яким би малим не взяли δ-окіл точки a, якщо в середині цього околу опиниться нескінченна множина членів послідовності, а зовні її — хіба лише скінченна кількість, то ця точка буде границею послідовності.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю a, то її називають **збіжною** і говорять, що ця послідовність збігається до a, або прямує до a, і пишуть $x_n \to a$.

Точку, що зображує геометрично число a, називають ще **граничною точкою даної послідовності**.

Гранична точка може як належати, так і не належати послідовності. Відповідно до цього окіл точки a буде $Q_\delta(a)$ або $\dot{Q}_\delta(a)$.

Приклади. 1. Довести, що границею послідовності $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ є число нуль.

Р о з в' я з а н н я. Покажемо, що для будь-якого $\delta > 0$ знайдеться число N, яке залежить від δ, таке, що для всіх членів послідовності з номерами $n > N$ виконується нерівність

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \delta, \text{ або } \left|\frac{1}{n}\right| < \delta.$$

Нехай для будь-якого $n > N$ справедлива нерівність $\left|\frac{1}{n}\right| < \delta$, тоді $n > \frac{1}{\delta}$. Число $\frac{1}{\delta}$ може бути цілим або дробовим, залежно від значення δ. Візьмемо за число N найбільше ціле число, яке не перевищує $\frac{1}{\delta}$. Домовимось останнє записувати у вигляді

$$N = E\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

(читається: N є E (ціла частина) від $\frac{1}{\delta}$). Тепер покажемо, що при всіх $n > N$ справджується нерівність

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \delta.$$

Справді, із нерівності $n > N$ випливає, що $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$. Оскільки $N < \frac{1}{\delta} < N+1$, то $\frac{1}{n} < \delta$ або $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \delta$. Отже, $\lim \frac{1}{n} = 0$.

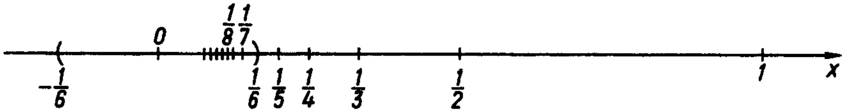


Рис. 3.14

Наприклад, нехай $\delta = \frac{1}{6}$. Тоді $N = E\left(\frac{1}{\delta}\right) = 6$. При $n > 6$ маємо $\frac{1}{n} < \frac{1}{6}$, або $0 < \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{6}$. Отже, всі члени послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, починаючи з сьомого члена, попадають в $\frac{1}{6}$-окіл $\left(\delta = \frac{1}{6}\right)$ точки 0 (рис. 3.14). Поза околом $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ залишається скінченне число членів послідовності, а саме:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}.$$

2. Дано послідовність із загальним членом $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Довести, що

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0.$$

Розв'язання. Задамо деяке мале додатне число δ. За цим числом знайдемо $N(\delta)$ таке, що для членів послідовності $\{x_n\}$ з номером $n > N$ буде виконуватись нерівність $|x_n - 0| < \delta$, або $|x_n| < \delta$.

Нехай справджується остання нерівність, тобто $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \delta$, звідки $n > \frac{1}{\delta}$. Покладемо $N = E\left(\frac{1}{\delta}\right)$. Тоді при всіх $n > N$ справджується нерівність $|x_n - 0| < \delta$, а це означає, що

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0.$$

Нехай, наприклад, $\delta = 0{,}3$, тоді $N = E\left(\frac{1}{0{,}3}\right) = 3$ і при всіх $n > N$ справджуються нерівності

$$0 < \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < 0{,}3.$$

Так, при $n = 4$ маємо $|x_4| = \frac{1}{4} < 0{,}3$, при $n = 5$ $|x_5| = \frac{1}{5} < 0{,}3$ і т. д. (рис. 3.15).

У 0,3-окіл точки O попадають всі члени послідовності $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ крім $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$. Таким чином, точка нуль для даної послідовності є граничною. У цьому прикладі члени послідовності розміщені по обидва боки від граничної точки.

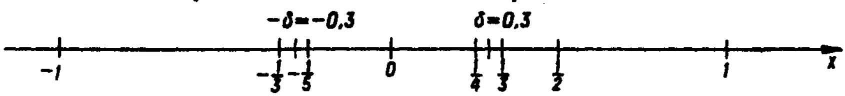


Рис. 3.15

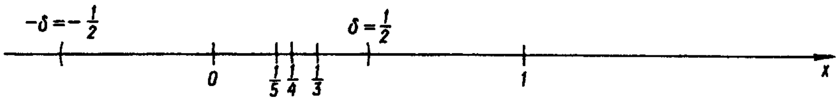


Рис. 3.16

3. Загальний член послідовності дорівнює

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}.$$

Довести, що $\lim x_n = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Нехай задано $\delta > 0$. Знайдемо $N(\delta)$ таке, що при всіх $n > N(\delta)$ справедлива нерівність $|x_n| < \delta$ (рис. 3.16), тоді

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{n}\right| < \delta.$$

За властивістю модуля суми

$$|x_n| = \left|\frac{1+(-1)^n}{n}\right| \le \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \le \frac{2}{n}.$$

Виберемо довільне $\delta > 0$ і доберемо n таким, щоб $\frac{2}{n} < \delta$. Тоді при всіх n, які задовольняють нерівність $\frac{2}{n} < \delta$, або $n > \frac{2}{\delta}$ виконується нерівність $|x_n| < \frac{2}{n} < \delta$, або $|x_n| < \delta$. Тому за $N(\delta)$ можна взяти $N = E\left(\frac{2}{\delta}\right)$, тоді $\forall\ n > N \Rightarrow |x_n| < \delta$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Наприклад, нехай $\delta = 0{,}5$, тоді $N = E\left(\frac{2}{0{,}5}\right) = 4$, тобто при $\forall\ n > 4 \Rightarrow |x_n| < 0{,}5$.

Знайдемо кілька членів даної послідовності:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0{,}5,\ x_5 = 0,\ x_6 = \frac{1}{3},$$
$$x_7 = 0,\ x_8 = 0{,}25,\ x_9 = 0,\ x_{10} = 0{,}2\ldots$$

Отже, в δ-околі $(-0{,}5,\ 0{,}5)$ точки O міститься нескінченна множина членів даної послідовності, а поза ним — тільки два члени: $x_2 = 1$ і $x_4 = 0{,}5$.

Гранична точка належить цій послідовності.

4. Розглянемо послідовність

$$x_1 = 7,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5,\ x_n = 2 \text{ при } \forall n \ge 4.$$

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Справді, для будь-якого $\delta > 0$ при $\forall\ n > 3$ виконується нерівність $|x_n - 2| < \delta$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

5. Довести, що послідовність із загальним членом $x_n = \frac{n}{n+1}$ має границю, яка дорівнює одиниці.

Д о в е д е н н я. Нехай задано будь-яке $\delta > 0$. Знайдемо таке натуральне число N, що при $\forall\ n > N$ справджується нерівність $|x_n - 1| < \delta$. Розглянемо нерівність $|x_n - 1| < \delta$, або $\left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \delta$, звідки $n+1 > \frac{1}{\delta}$, $n > \frac{1}{\delta}-1$.

Виберемо число $N = E\left(\frac{1}{\delta}-1\right)$ і покажемо, що при $\forall\ n > N$ виконується нерівність

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| < \delta,$$

звідки за означенням $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Нехай, наприклад, задано $\delta = \frac{1}{20}$, тоді $N = E\left(-\frac{1}{20}-1\right) = 19$,

тобто

$$\forall n > 19 \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1}-1\right| < \delta.$$

Зокрема, при $n = 20$ маємо

$$\left|\frac{20}{20+1}-1\right| = \frac{1}{21} < \frac{1}{20}.$$

Отже, в 0,05-околі точки 1 міститься нескінченна множина членів даної послідовності, а поза цим околом — не більше 19 (рис. 3.17).

Аналогічно можна довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

6. Довести, що послідовність, загальний член якої $x_n = (-1)^n n$, не має границі.

Доведення. Дана послідовність не має границі, оскільки в будь-якому δ-околі довільної точки числової осі міститься лише скінченне число членів даної послідовності (або взагалі не міститься).

7. Розглянемо послідовність

$$1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{8}{9}, \ldots,$$

загальний член якої

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ при } n \text{ непарному,} \\ \frac{n}{n+1}, \text{ при } n \text{ парному.} \end{cases}$$

Зобразимо схематично цю послідовність на числовій прямій (рис. 3.18).

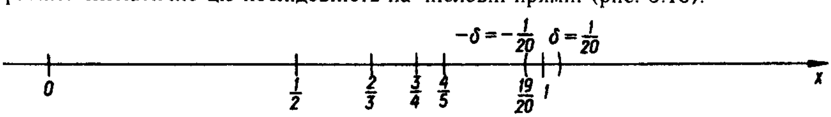


Рис. 3.17

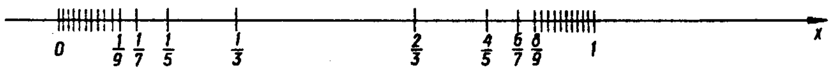


Рис. 3.18

За означення границі послідовності число a буде її границею, якщо в будь-якому δ-околі точки a міститься нескінченна множина членів цієї послідовності, а поза ним — скінченна або порожня. У даному разі в будь-якому δ-околі нуля, $\delta < 1$, міститься нескінченна множина членів цієї послідовності з непарними номерами, а поза цим околом нескінченна множина її членів з парними номерами.

Аналогічно в будь-якому δ-околі одиниці, $\delta < 1$, міститься нескінченна множина парних членів даної послідовності, а поза цим околом — нескінченна множина її непарних членів. При цьому говорять, що послідовність не має границі.

Уточнимо поняття граничної точки множини (послідовності). **Граничною точкою множини (послідовності)** називається така точка M, що в будь-якому її околі міститься хоча б одна точка цієї множини, відмінна від M. Таким чином, послідовність, розглянута в прикладі 7, має дві граничні точки: 0 і 1.

ВПРАВИ. **1.** Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$.

2. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3n+1} = \dfrac{1}{3}$.

3. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{1-n} = -2$. Починаючи з якого номера всі члени послідовності $\left\{\dfrac{2n+1}{1-n}\right\}$ містяться в 0,001-околі точки -2? *Відповідь.* N (0,001) = 3001.

4. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-3n}{5n+1} = -0{,}6$. Починаючи з якого номера всі члени послідовності $\left\{\dfrac{1-3n}{5n+1}\right\}$ містяться в 0,01-околі точки $-0{,}6$? *Відповідь.* N (0,01) = 32.

Нехай змінна x визначена в околі точки a.

Число a називають **границею змінної величини** x, якщо для $\delta > 0$ знайдеться таке значення x_0, починаючи з якого всі наступні значення x задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, і пишуть $\lim x = a$, або $x \to a$.

Якщо порівняти означення границі послідовності і границі змінної, то в означенні границі послідовності йдеться про номер того її члена, починаючи з якого виконується нерівність $|x_n - a| < \delta$, а в означенні границі змінної йдеться про чисельне значення цього члена, тобто про те значення змінної x, починаючи з якого $|x - a| < \delta$.

Отже, границею змінної величини x називається границя будь-якої послідовності значень, яких ця змінна набуває:

$$\lim x = a \Leftrightarrow \lim x_n = a, \text{ або } x \to a \Leftrightarrow, x_n \to a.$$

Далі йтиметься не тільки про границю послідовності, але і про границю змінної. Теореми можна формулювати відразу для границі змінної і для границі послідовності.

Якщо величина набуває своїх значень неперервно, то найчастіше вживають слово «змінна». Якщо ж величина набуває своїх значень стрибками (дискретно), то йдеться про послідовність.

Прикладами неперервної зміни змінної є час, шлях, швидкість (не завжди) та ін.

Розглянемо тепер границю сталої, яку позначають буквою C. Із означення сталої (величина, що набуває єдиного значення) випливає, що сталу можна розглядати як послідовність, у якої всі члени дорівнюють одному й тому самому числу — сталій C. Тоді із означення границі послідовності маємо, що *границя сталої величини дорівнює цій сталій.*

2.7. Єдиність границі послідовності (змінної величини)

Теорема 1. *Якщо послідовність має границю, то ця границя єдина.*

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай послідовність має дві границі

$$\lim x_n = a \text{ і } \lim x_n = b,$$

де $a \neq b$. Виберемо $a < b$. Візьмемо довільне $\delta > 0$ таке, щоб $\delta < \frac{b-a}{2}$. Знайдемо числа $N_1(\delta)$ і $N_2(\delta)$, при яких $\forall\, n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \delta$, а $\forall\, n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \delta$. Якщо вибрати N найбільшим з чисел N_1 і N_2, то $\forall\, n > N \Rightarrow a - \delta < x_n < a + \delta$ і $b - \delta < x_n < b + \delta$, що неможливо, тому що $a < b$.

За допомогою символів це доведення можна записати таким чином:

$$\forall\, \delta > 0 \quad \exists N_1(\delta) : \forall\, x_n \text{ з } n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \delta;$$

$$\forall\, \delta > 0 \quad \exists N_2(\delta) : \forall\, x_n \text{ з } n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \delta.$$

Якщо покласти $N =$ найбільше $\{N_1, N_2\}$, то

$$\forall\, \delta > 0 \quad \exists N(\delta) : \forall\, x_n \text{ з } n > N \Rightarrow |x_n - a| < \delta \wedge |x_n - b| < \delta,$$

але при $a < b$ $\{a - \delta < x_n < a + \delta \wedge b - \delta < x_n < b + \delta\} = \varnothing$.

2.8. Обмежена і необмежена змінні (послідовності)

Змінна x (послідовність x_n) називається **обмеженою**, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх значень змінної за абсолютною величиною (для всіх n) виконується нерівність

$$|x| \leq M \quad (|x_n| \leq M). \tag{2.15}$$

Геометрично це означає, що всі значення змінної (послідовності) потрапляють до відрізка $[-M, M]$. Змінна (послідовність), що не є обмеженою, називається **необмеженою**.

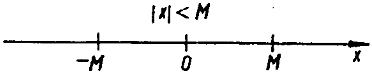


Рис. 3.19

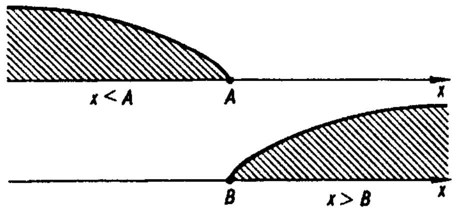


Рис. 3.20

Якщо для змінної виконується умова $x \leq A$ або $x \geq B$, то змінна називається відповідно **обмеженою зверху або знизу**. Можна дати рівносильне означення обмежених величин, поставивши вимогу справдження строгих нерівностей (рис. 3.19, 3.20):

$$|x| < M, \; x < A, \; x > B.$$

Можна дати означення обмеженої змінної (послідовності), поставивши вимогу замість нерівності (2.15) справдження нерівності:

$$P \leq x \leq Q \qquad (P \leq x_n \leq Q), \tag{2.16}$$

де P і Q — скінченні числа.

Це означення рівносильне початковому означенню, бо достатньо з чисел $|P|$ і $|Q|$ вибрати найбільше і, позначивши його через M, дістанемо

$$|x| \leq M.$$

***Приклади*. 1.** Змінна, що задовольняє нерівності $a \leq x \leq b$, або $x \in [a, b]$, де $a < b$, є обмеженою.

Справді, виберемо з чисел a і b найбільше за модулем M = найбільше $\{|a|, |b|\}$. Тоді

$$|x| \leq M, \text{ або } x \in [-M, M],$$

тобто змінна x — обмежена.

2. Змінні, що задовольняють нерівності $-\infty < x \leq a$ або $-\infty < x < a$ і $a \leq x < <+\infty$, або $a < x < +\infty$, є обмеженими відповідно зверху або знизу.

3. Послідовності

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}, \{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}, \{x_n\} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\},$$

$$\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

обмежені одиницею, бо для будь-якої з цих послідовностей справедлива нерівність $|x_n| \leq 1$.

Всі члени даної послідовності розміщені у проміжку $\langle -1, 1\rangle$ (рис. 3.14–3.17).

Якщо змінна (послідовність) задовольняє нерівність

$$-\infty < x < +\infty$$

і не задовольняє нерівність

$$-M < x < M,$$

то змінна (послідовність) є необмеженою.

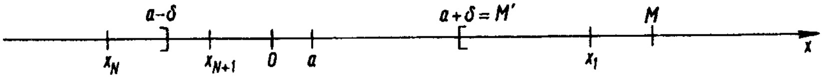


Рис. 3.21

Наприклад, послідовності

$$\{(-1)^n n\},\ \{n\},\ \{-n\}$$

є необмеженими.

Теорема 2. *Якщо послідовність має границю, то вона обмежена.*

Доведення. Нехай $\lim x_n = a$. Тоді в будь-який δ-окіл точки a потрапляють всі x_n, за винятком хіба лише скінченного числа точок x_n. Нехай, починаючи з $n = N + 1$, всі x_{N+1}, x_{N+2}, ... потрапили до околу $(a - \delta, a + \delta)$, тобто $a - \delta < x_n < a + \delta$ при $\forall\ n > N$.

Виберемо з чисел $a - \delta$ і $a + \delta$ найбільше за модулем: $M' = \max\{|a - \delta|, |a + \delta|\}$. Тоді $|x_n| < M'$ для $\forall\ n > N$ (рис. 3.21).

Тепер із скінченної множини чисел $|x_1|, |x_2|, ..., |x_N|, M'$ виберемо найбільше

$$M = \text{найбільше } \{|x_1|, |x_2|, ..., |x_N|, M'\}.$$

Тоді $\forall\ n \in \mathrm{N} \Rightarrow |x_n| < M$. Теорему доведено.

Зауважимо, що обернене твердження не справджується, бо не всяка обмежена послідовність має границю.

Наприклад, послідовність $\{x_n\}$, розглянута у прикладі 7 з п. 2.6, обмежена, але границі не має.

Послідовності

$$\{\cos \pi n\} = -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ ...,$$

$$\left\{\sin \frac{\pi n}{2}\right\} = 1;\ 0;\ -1;\ 0;\ 1;\ 0;\ -1;\ ...$$

обмежені, але границь не мають.

Справедлива теорема, яку наводимо без доведення.

Теорема 3. *Якщо для послідовностей* $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, *що мають скінченні (не обов'язково) границі* a *і* b, *і, починаючи з деякого номера для всіх наступних членів виконуються нерівності* $x_n \ge y_n$ *або* $x_n > y_n$, *то* $\lim x_n \ge \lim y_n$ *або* $a \ge b$.

Ця теорема дає змогу здійснювати граничний перехід в нерівностях.

Приклад. Для послідовностей із загальними членами $x_n = \frac{1}{n}$ і $y_n = -\frac{1}{n}$ при всіх n виконується нерівність $x_n > y_n$, але $\lim x_n = 0$ і $\lim y_n = 0$, тобто $\lim x_n = \lim y_n$. Із строгої нерівності $x_n > y_n$, взагалі, може випливати і нестрога нерівність

$$\lim x_n \ge \lim y_n.$$

***Теорема 4* (Гур'єва[1] або про порушника і двох конвоїрів).** *Якщо з трьох послідовностей (змінних)*

$$\{x_n\},\ \{y_n\},\ \{z_n\}$$

дві мають одну й ту саму границю $\lim x_n = \lim z_n = a$ *і при всіх* n, *починаючи з деякого номера, справджуються нерівності*

$$x_n \le y_n \le z_n, \text{ то } \lim y_n = a.$$

Дійсно, нехай дано $\delta > 0$. Оскільки $\lim x_n = a$, то існує таке N', що $\forall\ n > N' \Rightarrow |x_n - a| < \delta$, тобто $-\delta < x_n - a < \delta$ або $a - \delta < x_n < a + \delta$. Оскільки $\lim z_n = a$, то існує таке N'', що $\forall\ n > N'' \Rightarrow |z_n - a| < \delta$, тобто $-\delta < z_n - a < \delta$, або $a - \delta < z_n < a + \delta$. Нарешті, нехай нерівності $x_n \le y_n \le z_n$ справджуються при всіх $n > N'''$.

Виберемо тепер N = найбільше $\{N', N'', N'''\}$. Тоді $\forall\ n > N$ всі нерівності справджуватимуться одночасно:

$$\begin{cases} a - \delta < x_n < a + \delta, \\ a - \delta < z_n < a + \delta, \\ \quad x_n \le y_n \le z_n. \end{cases}$$

Звідси $a - \delta < x_n \le y_n \le z_n < a + \delta$, або $a - \delta < y_n < a + \delta$. Це означає, що $\lim y_n = a$.

2.9. Нескінченно малі змінні (послідовності)

Послідовність $\{\alpha_n\}$ (змінна α) називається **нескінченно малою,** якщо її границя дорівнює нулю.

Іншими словами, послідовність $\{\alpha_n\}$ називається нескінченно малою, якщо для будь-якого $\delta > 0$ знайдеться таке N, яке залежить від δ, що $\forall\ n > N$ справджується нерівність $|\alpha_n| < \delta$.

Змінна величина α називається нескінченно малою, якщо $|\alpha|$ може бути вибраний і далі залишається менше будь-якого наперед заданого числа $\delta > 0$.

Нескінченно мала послідовність — це послідовність, для якої за даним δ-околом точки O завжди можна знайти такий номер N, що всі члени послідовності з номерами n, більшими N, опиняться в цьому околі. Поза δ-околом O буде хіба лише скінченне число членів.

Коротка форма запису: послідовність нескінченно мала, якщо

$$\forall\ \delta > 0\ \ \exists N(\delta) > 0 \quad \forall\ n > N(\delta) \Rightarrow |\alpha_n| < \delta.$$

Розглянемо теореми, в яких дві (або більше) послідовності (змінні) пов'язані знаками арифметичних дій. При цьому знаки стосуються

---

[1] С. Є. Гур'єв (1764–1813) — російський педагог-математик і механік, йому належить означення границі монотонної змінної (1798 р.).

відповідних значень послідовностей (змінних). Говорячи, наприклад, про суму двох послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, які набувають відповідно значень $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ і $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, матимемо на увазі послідовність $\{x_n + y_n\}$, яка набуває значень $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots$.

Теорема 5. *Сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей (змінних) є послідовність (змінна) нескінченно мала.*

Теорема 6. *Добуток обмеженої послідовності (змінної) на нескінченно малу послідовність (змінну) є послідовність (змінна) нескінченно мала.*

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$ обмежена, тобто $|x_n| < M$, де $M > 0$, а послідовність $\{\alpha_n\}$ нескінченно мала: $\lim \alpha_n = 0$. Покажемо, що $x_n\alpha_n \to 0$ або $\lim (x_n\alpha_n) = 0$.

За умовою $\lim \alpha_n = 0$. Це означає, що $\forall\ \delta > 0\ \exists\ N(\delta)$ таке, що $\forall n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \dfrac{\delta}{M}$. Враховуючи властивості модуля, при всіх $n > N$ маємо

$$|x_n\alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\delta}{M} = \delta,$$

звідки $\lim (x_n\alpha_n) = 0$.

Висновок 1. *Добуток сталої на послідовність нескінченно малу є послідовність нескінченно мала.*

Висновок 2. *Добуток двох нескінченно малих послідовностей є послідовність нескінченно мала.*

Справді, якщо одну з двох нескінченно малих послідовностей розглядати як обмежену, то виконуються умови теореми.

Висновок 3. *Добуток нескінченно малої послідовності на послідовність, що має скінченну границю, є нескінченно мала послідовність.*

Теорема 7. *Для того щоб послідовність $\{x_n\}$ мала границю, яка дорівнює a, необхідно і достатньо, щоб існувала така нескінченно мала послідовність $\{\alpha_n\}$, що*

$$x_n = a + \alpha_n. \tag{2.17}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай послідовність $\{x_n\}$ має границю, що дорівнює a:

$$\lim x_n = a.$$

Покажемо, що $x_n = a + \alpha_n$, де $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала послідовність.

Рівність $\lim x_n = a$ означає, що для будь-якого $\delta > 0$ існує таке $N(\delta)$, що $\forall\ n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \delta.$$

Позначимо $x_n - a = \alpha_n$, тоді $\forall\ n > N\ |\alpha_n| < \delta$, тобто $\lim \alpha_n = 0$. Отже, послідовність $\{\alpha_n\}$ нескінченно мала.

Таким чином,

$$\lim x_n = a \Rightarrow x_n = a + \alpha_n, \tag{2.18}$$

де $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала послідовність.

Достатність. Нехай послідовність $\{x_n\}$ можна подати у вигляді (2.17), де $\lim \alpha_n = 0$. Це означає, що $\forall\ \delta > 0$ існує таке $N(\delta)$, що $\forall\ n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \delta$. Із рівності (2.17) випливає, що $\alpha_n = x_n - a$. Тоді $\forall\ n > N$ справджується нерівність

$$|x_n - a| < \delta,$$

звідки, за означенням, $\lim x_n = a$. Таким чином, із рівності $x_n = a + \alpha_n$ випливає, що

$$\lim x_n = a.$$

Враховуючи рівності (2.18) та (2.17), маємо

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n.$$

Умову (2.17) можна прочитати так: *будь-який член збіжної послідовності дорівнює сумі границі послідовності та відповідного члена нескінченно малої послідовності.*

Теорема 7 справджується для змінних, що мають границю.

2.10. Арифметичні операції із змінними, що мають границю

***Теорема 8* (про границю суми).** *Якщо послідовності $\{x_n\} \to a$ і $\{y_n\} \to b$, то послідовності $\{x_n \pm y_n\}$ мають границі, причому*

$$\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n.$$

Доведення. Нехай

$$\lim x_n = a,\ \lim y_n = b. \tag{2.19}$$

Доведемо, що існує $\lim (x_n \pm y_n)$ і

$$\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n.$$

За теоремою 7 п. 2.9 із рівностей (2.19) дістаємо

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

тоді

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

За теоремою 5 п. 2.9 $\alpha_n \pm \beta_n = \gamma_n$ — величина нескінченно мала.

Таким чином,

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + \gamma_n.$$

Звідси за теоремою 7

$$\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b,$$

або

$$\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n.$$

Для змінних x та y теорему запишемо у вигляді $\lim (x \pm y) = \lim x \pm \lim y$.

Теорему можна узагальнити для скінченного числа доданків.

***Теорема 9* (про границю добутку).** *Якщо послідовності $\{x_n\} \to a$ і $\{y_n\} \to b$, то послідовність $\{x_n y_n\}$ має границю, причому*

$$\lim (x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n,$$

або

$$\lim (x_n y_n) = ab.$$

Для змінних x та y теорему 9 запишемо у вигляді

$$\lim (xy) = \lim x \lim y.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 8.

Теорему можна узагальнити для скінченного числа співмножників.

Наслідок. *Сталий множник можна виносити за знак границі:*

$$\lim (cy_n) = c \lim y_n,$$

де $c = \text{const}$.

Дійсно, якщо послідовність стала $\{x_n\} = \{c\}$, то її границя $\lim x_n = c$; тоді за теоремою 9 $\lim (x_n y_n) = \lim (cy_n) = c \lim y_n$.

Лема. *Якщо послідовність $\{y_n\}$, $y_n \neq 0$ має границю, відмінну від нуля, то послідовність $\left|\frac{1}{y_n}\right|$ обмежена.*

Доведення. Нехай $\lim y_n = b$, де $b \neq 0$. Тоді для будь-якого $\delta > 0$ існує таке $N(\delta)$, що $\forall\, n > N$ виконується нерівність $b - \delta < y_n < b + \delta$.

Якщо $b > 0$, то вибираємо δ таким чином, щоб виконувалася нерівність $b - \delta > 0$. Тоді

$$b - \delta < y_n < b + \delta \Rightarrow \frac{1}{b+\delta} < \frac{1}{y_n} < \frac{1}{b-\delta}.$$

Вибравши $M' =$ найбільше $\left\{\frac{1}{b+\delta}, \frac{1}{b-\delta}\right\}$, дістанемо $\left|\frac{1}{y_n}\right| < M'$. Взявши з чисел $\left|\frac{1}{y_1}\right|, \left|\frac{1}{y_2}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{y_N}\right|$, M' найбільше

$$M = \text{найбільше} \left\{\left|\frac{1}{y_n}\right|, \left|\frac{1}{y_2}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{y_N}\right|, M'\right\},$$

де $y_n \neq 0$, знаходимо, що $\forall n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{y_n}\right| < M$, а це означає, що послідовність $\left|\frac{1}{y_n}\right|$ обмежена.

Доведення для випадку, коли $b < 0$, пропонуємо виконати читачеві самостійно.

***Теорема 10* (про границю частки).** *Якщо послідовності (змінні)* $\{x_n\} \to a$, $(x \to a)$ *і* $\{y_n\} \to b$, $(y \to b)$, *причому* $b \neq 0$ *і всі* $y_n \neq 0$, $(y \neq 0)$, *то границя частки* $\frac{x_n}{y_n}$ *існує і*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b}.$$

Доведення. Виконаємо доведення для послідовностей. З умов $\{x_n\} \to a$ і $\{y_n\} \to b$ маємо $x_n = a + \alpha_n$ і $y_n = b + \beta_n$, де $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ нескінченно малі, тоді

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \frac{a}{b} + \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}.$$

За властивостями нескінченно малих величин $b\alpha_n - a\beta_n$ є нескінченно малою величиною. Тоді

$$\gamma_n = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)$$

— нескінченно мала як добуток обмеженої та нескінченно малої послідовностей.

Таким чином,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \gamma_n,$$

де $\{\gamma_n\}$ — нескінченно мала послідовність. Звідси за теоремою 7

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \text{ або } \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}.$$

2.11. Монотонні послідовності

Послідовність $\{x_n\}$ називається **спадною**, якщо

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots,$$

або

$$x_n > x_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Послідовність $\{x_n\}$ називається **неспадною**, якщо

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le \ldots,$$

або

$$x_n \le x_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Послідовність $\{x_n\}$ називається **зростаючою**, якщо

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots,$$

або

$$x_n < x_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Послідовність $\{x_n\}$ називається **незростаючою**, якщо

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots,$$

або

$$x_n \geq x_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Всі перелічені послідовності називаються **монотонними**. Поняття монотонності поширюється і на неперервні змінні.

Приклади.

1. Показати, що послідовність

$$\{x_n\} = \left\{\frac{2n+1}{n^2}\right\}$$

спадна.

Розв'язання. Знайдемо різницю

$$x_n - x_{n+1} = \frac{2n+1}{n^2} - \frac{2n+3}{(n+1)^2} = \frac{2n^2+4n+1}{n^2(n+1)^2} > 0,$$

тоді $\forall\, n \in \mathbf{N} \Rightarrow x_n > x_{n+1}$. Це означає, що дана послідовність спадна.

2. Показати, що послідовність

$$\{y_n\} = \left\{\frac{n-1}{2n+1}\right\}$$

зростаюча.

Розв'язання. Знайдемо різницю

$$y_n - y_{n+1} = \frac{n-1}{2n+1} - \frac{n}{2n+3} = \frac{-3}{(2n+1)(2n+3)} < 0,$$

тоді $\forall\, n \in \mathbf{N} \Rightarrow y_n < y_{n+1}$, тобто послідовність зростаюча.

***Теорема 11* (достатня умова збіжності послідовності).** *Обмежена монотонна послідовність завжди має скінченну границю, тобто є збіжною.*

Цю теорему приймаємо без доведення.

Приклад. Довести, що послідовність

$$x_n = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

має скінченну границю, тобто збігається.

Доведення. Покажемо, що ця послідовність обмежена. Запишемо її загальний член у вигляді

$$x_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

звідки $0 < x_n < 1$.

Дослідимо цю послідовність на монотонність. Знайдемо різницю

$$x_n - x_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Таким чином, $\forall\ n \in \mathbf{N} \Rightarrow x_n < x_{n+1}$, тобто послідовність зростаюча. Тоді за теоремою 11 вона має скінченну границю, або збігається. Як вже було доведено (приклад 5 з п. 2.6,

$$\lim \frac{n}{n+1} = 1.$$

2.12. Сполуки. Біном Ньютона[1]. Число e

2.12.1. ***Сполуки (комбінаторики).*** Множини, що складаються із скінченного числа предметів (книжок, годинників тощо), називаються **сполуками**. Часто слово «предмети» замінюють словом «елементи». Розглянемо три типи сполук: розміщення, перестановки, комбінації.

Розміщеннями називаються сполуки, що мають по k елементів, взятих із заданих n елементів, і відрізняються одна від одної хоча б одним елементом або їх порядком.

Нехай маємо три предмета: a_1, a_2, a_3. Складемо з них сполуки по одному предмету. Таких сполук буде три: a_1, a_2, a_3. Вони відрізняються одна від одної елементами. Отже, маємо розміщення. Число розміщень з n елементів по k позначають символом A_n^k з двома індексами ($k \le n$). Нижній індекс n вказує число даних елементів, верхній k — число елементів у розміщенні. У нашому прикладі $A_3^1 = 3$.

Складемо з предметів a_1, a_2, a_3 сполуки по два:

$$a_1a_2;\ a_1a_3;\ a_2a_3;\ a_2a_1;\ a_3a_1;\ a_3a_2.$$

Три з цих сполук відрізняються одна від одної елементами, а решта — лише порядком. Отже, маємо $A_3^2 = 6$.

Складаючи з трьох елементів a_1, a_2, a_3 сполуки по три, дістаємо

$$a_1a_2a_3;\ a_1a_3a_2;\ a_3a_1a_2;\ a_3a_2a_1;\ a_2a_1a_3;\ a_2a_3a_1.$$

Ці сполуки відрізняються одна від одної порядком. Отже, також маємо розміщення $A_3^2 = 6$.

Наведемо без доведення таку теорему.

Теорема. *Число розміщень A_n^k з n елементів по k дорівнює добутку k послідовних натуральних чисел, найбільшим з яких є n:*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots\left[n-(k-1)\right]. \qquad (2.20)$$

Перестановками з n елементів називаються такі сполуки з n елементів, що відрізняються одна від одної лише порядком елементів. Число перестановок з n елементів позначають P_n.

---

[1] Ісаак Ньютон (1642–1727) — англійський фізик, механік, астроном і математик.

Має місце така теорема.

Теорема. *Число перестановок з n елементів дорівнює добутку послідовних натуральних чисел від* 1 *до n включно:*

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (2.21)$$

Добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ позначають через $n!$ (n-факторіал):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n; \; P_n = n!.$$

Наприклад, $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; $P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.
Розміщення можна записати через перестановки:

$$A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}. \qquad (2.22)$$

Вважають, що $0! = 1$, хоча поняття $P_0 = 0!$ не має смислу.

Комбінаціями з n елементів по k ($k \le n$) називаються сполуки, до кожної з них входить k елементів, взятих з даних n елементів, що відрізняються одна від одної хоча б одним елементом. Комбінації позначають через C_n^k або $\binom{k}{n}$.

Приклади. З трьох елементів a_1, a_2, a_3 по одному можна скласти три комбінації: $C_3^1 = 3$.

З трьох елементів по два можна скласти також три комбінації: a_1a_2; a_1a_3; a_3a_2; $C_3^2 = 3$.

Можна довести таку формулу для обчислення числа комбінацій з n елементів по k:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}. \qquad (2.23)$$

Вважатимемо, що $C_n^0 = 1$, хоча символ C_n^0 не має смислу.

Приклад. Знайти число комбінацій з 10 елементів по 3.
Розв'язання.

$$C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{P_3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Основні властивості комбінацій.

1°. $C_n^k = C_n^{n-k}$, $\qquad (2.24)$

наприклад, $C_{100}^{98} = C_{100}^{100-98} = C_{100}^2 = \dfrac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} = 4950.$

2°. $C_n^n = C_n^0 = 1.$ $\qquad (2.25)$

3°. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$ $\qquad (2.26)$

2.12.2. ***Формула бінома Ньютона.*** Розглянемо двочлен (біном) $(x + a)^n$ степеня n, де n — натуральне число.

При $n = 1$

$$(x + a)^1 = x + a;$$

при $n = 2$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 = C_2^0 x^2 + C_2^1 xa + C_2^2 a^2;$$

при $n = 3$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2 a + 3xa^2 + a^3 = C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2 a + C_3^2 xa^2 + C_3^3 a^3;$$

при $n = 4$

$$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3 a + 6x^2 a^2 + 4xa^3 + a^4 =$$

$$= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 a + C_4^2 x^2 a^2 + C_4^3 xa^3 + C_4^4 a^4.$$

Аналізуючи ці записи двочленів відповідних степенів, виявляємо правило утворення коефіцієнтів у правих частинах (розвиненнях) біномів. Коефіцієнти у розвиненнях виражають через комбінації, нижній індекс у яких дорівнює степеню двочлена, а верхній — степеню другого доданка двочлена.

Отже,

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + C_n^n a^n. \tag{2.27}$$

Ця рівність називається **формулою бінома Ньютона**.

Праву частину цієї формули називають **розвиненням бінома**.

Враховуючи властивість 1) комбінацій, формулу бінома Ньютона запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + \\ &+ C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + C_n^1 x a^{n-1} + C_n^0 a^n.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Числа $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^n$ називаються **біномними коефіцієнтами**. З формули (2.28) випливає, що біномні коефіцієнти, рівновіддалені від кінців розвинення, рівні між собою.

Формулу для бінома можна записати ще у вигляді

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= x^n + \frac{n}{1!} x^{n-1} a + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} a^2 + \ldots + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} x^{n-k} a^k + \ldots + \\ &+ \frac{n}{1!} x a^{n-1} + a^n.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Виходячи з цієї формули, можна записати вираз для загального члена розвинення бінома

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} x^{n-k} a^k. \quad (2.30)$$

Розвинення бінома Ньютона має такі властивості.

1°. Кількість членів розвинення бінома на одиницю більша показника степеня бінома.

2°. Сума всіх біномних коефіцієнтів дорівнює 2^n. Дійсно, поклавши в розвиненні бінома $x = a = 1$, дістанемо

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n.$$

Приклади. **1.** Знайти розвинення $(1 + x)^m$ для m — цілого додатного числа.

Розв'язання. За формулою (2.29) при $x = 1$, $a = x$, $n = m$ дістаємо відповідь

$$(1+x)^m = 1^m + \frac{m}{1!}1^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!}1^{m-2}x^2 + \ldots + x^m;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + x^m. \quad (2.31)$$

2. Знайти розвинення $(x - a)^n$.

Розв'язання. Замінимо у формулі (2.29) a на $-a$:

$$(x-a)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 - C_n^3 x^{n-3}a^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k x^{n-k}a^k + \ldots + (-1)^n C_n^n a^n. \quad (2.32)$$

2.12.3. ***Число е.*** У подальшому часто будемо використовувати границю послідовності

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Покажемо, що границя

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

існує. Розглянемо послідовність $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ і доведемо, що вона зростаюча.

Запишемо загальний член послідовності за формулою бінома Ньютона:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^n + n\cdot 1^{n-1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}1^{n-2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{2.33}$$

Замінивши n на $n+1$, дістанемо

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\times \tag{2.34}$$
$$\times\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Порівнюючи знайдені розвинення, помічаємо, що в рівності (2.34) на один член більше, ніж у рівності (2.33). Цей член, як і всі інші, є додатним.

Крім того, кожний член рівності (2.33), починаючи з третього, менший відповідного члена рівності (2.34), тому що від'ємники в (2.34) менші відповідних від'ємників у (2.33).

Отже,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

а дана послідовність зростаюча.

Перший член цієї послідовності $x_1=2$, тобто вона обмежена знизу: $2\le x_n\ \forall\ n\in\mathbf{N}$.

Тепер покажемо, що дана послідовність обмежена зверху. Розглянемо загальний член цієї послідовності

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$
$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<$$
$$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Знайдемо суму членів геометричної прогресії

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^n}<2.$$

Тоді

$$x_n < 1 + 2 = 3.$$

Отже,

$$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

тобто дана послідовність обмежена.

За теоремою 11 існує $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Ця границя називається **числом *e*** (на честь Леонарда Ейлера):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{2.35}$$

Знайдемо декілька членів даної послідовності:

$$x_1 = 2;\ x_2 = 2\frac{1}{4};\ x_3 = 3\frac{10}{27};\ \ldots .$$

Наведемо 18 перших цифр числа e у десятковому запису:

$$e = 2{,}718281828459045 23\ldots$$

2.13. Натуральні логарифми

Логарифми, основою яких є число e, називають натуральними і позначають $\ln a$.

Встановимо зв'язок між десятковими та натуральними логарифмами. Нехай $\ln a = x$, тоді $e^x = a$. Прологарифмуємо останню рівність за основою 10. Дістаємо

$$\lg a = \lg e^x, \text{ або } \lg a = x \lg e.$$

Звідси

$$x = \frac{\lg a}{\lg e}.$$

Тоді

$$\ln a = \frac{\lg a}{\lg e} = \frac{1}{\lg e}\lg a.$$

Число $M = \dfrac{1}{\lg e}$ називається **модулем переходу** від десяткових логарифмів до натуральних.

Оскільки $\lg e = 0{,}4342945...$, то

$$M = \frac{1}{\lg e} = \frac{1}{0{,}4342945...} = 2{,}3025751....$$

Таким чином,

$$\lg a \approx 0{,}4343 \ln a; \ \ln a \approx 2{,}3026 \lg a.$$

2.14. Нескінченно великі послідовності (змінні). Невизначені вирази

Послідовність $\{x_n\}$ називають **нескінченно великою**, якщо для будь-якого як завгодно великого $M > 0$ існує таке натуральне число N, залежне від M, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|x| > M.$$

Записують це таким чином:

$$\lim x_n = \infty, \text{ або } x_n \to \infty.$$

Якщо $x_n > 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty, x_n \to +\infty.$

Якщо $x_n < 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty, x_n \to -\infty.$

Із наведеного означення випливає, що послідовність нескінченно велика, якщо у будь-якому скінченному M-околі нуля $(-M, M)$ міститься скінченне число членів послідовності, а поза цим околом її членів нескінченно багато.

Зазначимо, що нескінченно велика послідовність є необмеженою, але обернене твердження не виконується, оскільки не кожна необмежена послідовність є нескінченно великою. Наприклад, послідовність

$$x_n = \frac{n + (-1)^n n}{2}$$

не обмежена. Дійсно, для будь-якого $M > 0$ знайдуться такі його члени, що задовольняють нерівність $|x_n| > M$, але не можна підібрати таке натуральне N, щоб $\forall\ n > N$ виконувалася та сама нерівність $|x_n| > M$.

Наведемо приклади нескінченно великих послідовностей:

1) $\{x_n\} = \{n \cos \pi n\} = -1; 2; -3; 4; -5; 6; ...; n \cos \pi n; ...;$
2) $\{x_n\} = \{n^2\} = 1; 4; 9; 16; 25; ...; n^2, ...;$
3) $\{x_n\} = \{-n^2\} = -1; -4; -9; -16; -25; ...; -n^2 ... .$

***Теорема 12* (про зв'язок нескінченно малої та нескінченно великої послідовностей).** *Якщо послідовність $\{x_n\}$ з відмінними від нуля чле-*

нами нескінченно велика, то послідовність $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ *нескінченно мала.*

Теорема 13. *Якщо послідовність* $\{\alpha_n\}$ *з відмінними від нуля членами нескінченно мала, то послідовність* $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ *нескінченно велика.*

Ці теореми наводимо без доведення.

Приклади. **1.** Довести, що послідовність із загальним членом

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

нескінченно велика.

Розв'язання. Нехай задано будь-яке $M > 0$. Покажемо, що існує таке N, що для всіх $n > N$ маємо $x_n > M$. Оцінимо загальний член послідовності:

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

тобто

$$x_n > \sqrt{n}.$$

Візьмемо $M^2 = N$. Тоді при всіх $n > N$, $N = M^2$ дістаємо $x_n > \sqrt{n} > M$. Це означає, що $\lim x_n = +\infty$.

2. Довести, що послідовність

$$\{x_n\} = \{a^n\} \text{ при } |a| > 1$$

нескінченно велика.

Розв'язання. Згідно з умовою, $|a| > 1$. Тоді $|a| = 1 + \alpha$, де $\alpha > 0$. За формулою бінома Ньютона,

$$|a^n| = |a|^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \dots + \alpha^n.$$

Оскільки у розвиненні бінома всі члени додатні, то

$$|a^n| \geq 1 + n\alpha \quad \forall\, n \in \mathbf{N},$$

або

$$|a^n| > n\alpha \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Тоді для будь-якого $M > 0$ досить взяти $N = \frac{M}{\alpha}$, щоб з нерівності $n > N$ дістати нерівність

$$|a^n| > n\alpha > N\alpha = \frac{M}{\alpha} \cdot \alpha = M,$$

тобто $|a^n| > M$. А це означає, що $\lim a^n = \infty$, де $|a| > 1$.

Нехай маємо дві нескінченно малі послідовності $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$, члени яких відмінні від нуля. Треба знайти границю відношення $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$. Тут теорему про границю частки застосувати не можна, оскільки границя знаменника дорівнює нулю.

***Приклади.* 1.** Знайти границю $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$, якщо

$$\{\alpha_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\} \text{ і } \{\beta_n\} = \left\{\frac{n+3}{n^2}\right\}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо $\lim \alpha_n = 0$; $\lim \beta_n = 0$. Знайдемо відношення

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\dfrac{2}{n}}{\dfrac{n+3}{n^2}} = 2 - \frac{6}{n+3}, \text{ тоді } \lim\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim\left(2 - \frac{6}{n+3}\right) = 2.$$

2. Знайти границю $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$, якщо $\{\alpha_n\} = \left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$ і $\{\beta_n\} = \left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$.

Розв'язання. Маємо $\lim \alpha_n = 0$; $\lim \beta_n = 0$. Знайдемо відношення

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1},$$

тоді

$$\lim\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim\left(n - 1 + \frac{1}{n+1}\right) = +\infty.$$

3. Знайти границю послідовності $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$, якщо

$$\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{n^2+1}\right\} \text{ і } \{\beta_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Тут $\lim \alpha_n = 0$; $\lim \beta_n = 0$. Знайдемо відношення

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\dfrac{1}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n + \dfrac{1}{n}},$$

тоді

$$\lim\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim\frac{1}{n + \dfrac{1}{n}} = 0.$$

4. Знайти границю послідовності $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$, якщо $\{\alpha_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n}{2}\right\}$, $\{\beta_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

Р о з в' я з а н н я. Тут $\lim \alpha_n = 0$ і $\lim \beta_n = 0$. Знайдемо відношення

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}}{\frac{1}{n}} = \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Послідовність $\left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\} = 1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; \ldots$ не має границі.

Наведені приклади показують, що границя відношення двох нескінченно малих послідовностей (змінних) може бути скінченною (числом), нескінченністю або не існувати зовсім.

Дробовий вираз, чисельник і знаменник якого є змінними величинами, що прямують до нуля, називається **невизначеністю типу** $\frac{0}{0}$. Операція визначення границі такого дробового виразу називається **розкриттям невизначеності** $\frac{0}{0}$.

Крім невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ існують невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0.

Зазначимо, що *різниця між нескінченно великими величинами буде невизначеністю тільки тоді, коли ці величини мають один і той самий знак*. Наприклад, різниці $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$, $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$ не є невизначеностями.

ВПРАВИ. Знайти границі.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{5n^2+1}$. *Відповідь.* 0,2.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+1)^3+(n-1)^3}$. *Відповідь.* 0.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4+(n-1)^4}{(n+1)^4-(n-1)^4}$. *Відповідь.* ∞.

§ 3. ФУНКЦІЇ

3.1. Функції однієї змінної. Складна функція

Нехай задано дві змінні x та y, а також області їх зміни. Якщо кожному значенню однієї змінної, наприклад x, можна поставити у відповідність за певним законом одне або декілька значень другої змінної y, то друга змінна називається **функцією**, а перша — **аргументом**. Якщо ця відповідність взаємно однозначна, то функція називається **однозначною**, у противному випадку — **многозначною**.

Це означення функції однієї змінної належить М. І. Лобачевському[1].

Приклади. **1.** Площа круга S є функцією його радіуса R.
Область зміни аргументу: $0 \le R < +\infty$, або $[0; +\infty)$.
Область зміни функції: $0 \le S < +\infty$, або $[0; +\infty)$.
Закон відповідності: $S = \pi R^2$.
2. Об'єм кулі V є функцією її радіуса R.
Область зміни аргументу: $0 \le R < +\infty$, або $[0; +\infty)$.
Область зміни функції: $0 \le V < +\infty$, або $[0; +\infty)$.
Закон відповідності: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
3. Період T коливання маятника є функцією його довжини l.
Область зміни аргументу: $0 \le l < +\infty$, або $[0; +\infty)$.
Область зміни функції: $0 \le T < +\infty$, або $[0; +\infty)$.
Закон відповідності: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Якщо відкинути умову, що $T > 0$, то y буде функцією многозначною (двозначною):

$$y = \pm 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Далі розглядатимемо лише однозначні функції. Якщо змінна y є функцією x, то це записують так:

$$y = f(x),$$

де f — характеристика функції.

Характеристикою функції позначають ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати значення функції. Так, у прикладі 1 необхідно R піднести до квадрата і помножити на π.

Сукупність тих значень x, при яких функція y існує, називається **областю визначення функції**. Якщо x набуває значень лише цілих невід'ємних, тобто натуральних чисел (цілочислових), то функція називається **числовою послідовністю**. Наприклад,

$$y_n = f(n) = \frac{1}{n}.$$

Розглянуті у попередньому параграфі властивості послідовностей можна вважати першим етапом у вивченні властивостей функцій.

Якщо аргумент набуває лише цілочислових значень, то кажуть, що аргумент змінюється **стрибкувато**. Символ $f(a)$ означає, що береться окреме значення функції $f(x)$ при $x = a$.

Наведемо теоретико-множинне визначення функції. Нехай дано дві непорожні множини X і Y з елементами $x \in X$ і $y \in Y$. Нехай перетворення f переводить x в y. Тоді це перетворення f (правило,

---

[1] М. І. Лобачевський (1792–1856) — російський математик, творець неевклідової геометрії.

закон, відповідність) називають **функцією** і записують

$$X \xrightarrow{f} Y, \quad \text{або} \quad f: X \to Y, \tag{3.1}$$

або

$$y = f(x). \tag{3.2}$$

Елемент x називається **прообразом**, а y — **образом**. Множина X називається **областю визначення функції**, а множина $f(X)$ — **областю значень функції**, де

$$f(X) = \{y \in Y \, \exists \, x \in X, f(x) = y\}. \tag{3.3}$$

Якщо $x \in \mathbf{R}$; $y \in \mathbf{R}$, то функція називається числовою.

Числовою функцією f називається відображення підмножини D множини $\mathbf{R}$ на підмножину E множини $\mathbf{R}$.

Множину D називають **областю визначення**, а E — **множиною значень** функції f і позначають $D(f)$ і $E(f)$.

З геометричної точки зору числова функція $y = f(x)$ визначає відображення множини точок $D(f)$ однієї прямої на деяку множину точок $E(f)$ іншої прямої.

Якщо $X \subset \mathbf{Z}_0$ або $X \subset \mathbf{N}$, а $Y \subset \mathbf{R}$, то функція називається **числовою послідовністю**.

Порівнюючи теоретико-множинне визначення функції з визначенням, запропонованим М. І. Лобачевським, помічаємо, що в останньому випадку під функцією розуміють її значення — образ Y, а істинну функцію f називають характеристикою. Поняття області визначення функції і області її значень в обох означеннях збігаються. У запису областей визначення і значень функції для першого визначення надають вигляд множин X і $f(X)$.

Так, у прикладах 1–3 маємо $X = \mathbf{R}_0$; $f(X) = \mathbf{R}_0$. Для функції $y = x^2$

$$X = \mathbf{R} \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty); \; f(X) = \mathbf{R}_0 \Rightarrow y \in [0; +\infty).$$

Задати функцію — означає вказати:
1) область визначення функції;
2) область значень функції (область зміни функції);
3) закон відповідності.

***Приклади*. 1.** Для функції $y = 2x$:
1) область визначення $-\infty < x < +\infty$, або $(-\infty; +\infty)$;
2) область зміни $-\infty < y < +\infty$, або $(-\infty; +\infty)$;
3) закон відповідності $x \to y = 2x$ (рис. 3.22).

2. Для функції $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$:

1) область визначення

$$1 < x < +\infty, \text{ або } X = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid 1 < x < +\infty\};$$

2) область зміни

$$0 < y < +\infty, \text{ або } Y = f(X) = \{y \in \mathbf{R}_+ \mid 0 < y < +\infty\};$$

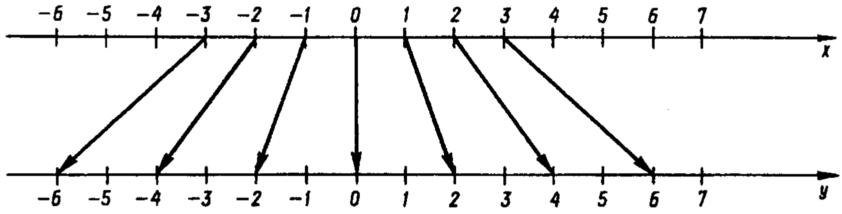


Рис. 3.22

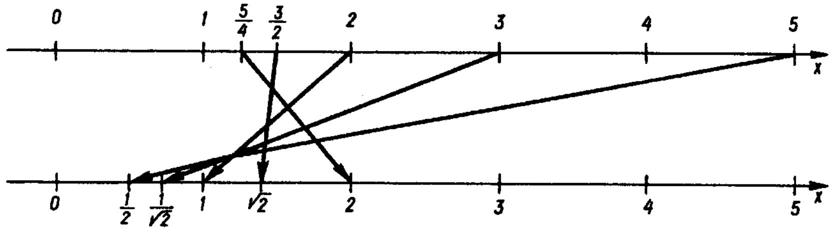


Рис. 3.23

3) закон відповідності

$$x \to y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \text{ (рис. 3.23).}$$

Існують три основних способи задання функції: табличний, графічний, аналітичний.

1. Табличний спосіб. Цей спосіб задання функції найчастіше зустрічається в експериментах. При цьому задають сукупність значень незалежної змінної, а значення функції знаходять дослідним шляхом, закон відповідності записують у вигляді таблиці.

2. Графічний спосіб. Графіком функції f називається множина точок (x, y) на координатній площині, де $y = f(x)$, а x перебігає всю множину $D(f)$.

Приклади. **1.** Графіком функції $y = f(n) = n^2$ (необмеженої послідовності) є сукупність ізольованих точок (рис. 3.24).

2. Графіком функції

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$$

є сукупність двох півпрямих, що виходять з початку координат (рис. 3.25).

3. Розглянемо функцію, визначену таким законом: y є найбільше ціле число, що не перевищує x ($n \leq x < n + 1 \to y = n$).

Таку функцію позначають

$$y = E(x), \text{ або } y = [x]$$

і цей запис читають так: «y є цілою частиною (антьє) від x».

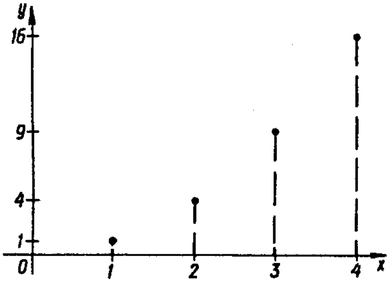


Рис. 3.24

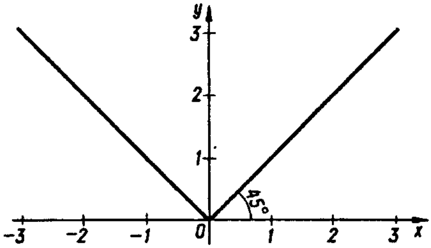


Рис. 3.25

Наприклад, $E(-8{,}3) = -9$; $E(0{,}3) = 0$; $E(5) = 5$; $E(9{,}9) = 9$. Із визначення функції E випливає, що коли n — ціле число, то при будь-якому значенні x з півсегмента $[n, n+1)$ $y = E(x) = n$ — стала. Тому графік функції $y = E(x)$ складається з прямолінійних відрізків, паралельних осі абсцис, за винятком їхніх правих кінців (рис. 3.26).

Областю визначення функції $y = E(x)$ є інтервал $(-\infty; +\infty)$. Множиною значень функції є множина всіх цілих чисел **Z**. Функцією $E\left(\frac{1}{\delta}\right)$, розглянутою у прикладах 1–5 п. 2.6, є $E(x)$ при $x = \frac{1}{\delta}$.

4. Розглянемо функцію $y = \frac{|x|}{x}$. Областю визначення цієї функції є сукупність двох інтервалів $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Множиною значень функції є $\{-1; 1\}$.

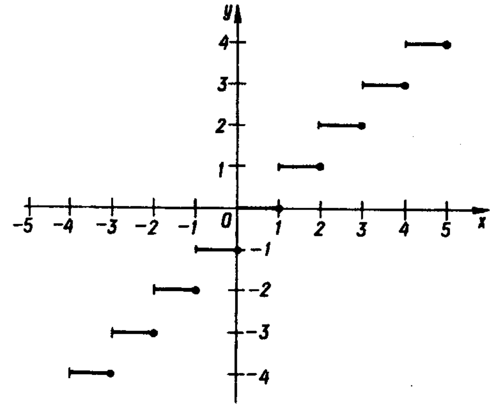


Рис. 3.26

Закон відповідності:

$$y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x < 0 \qquad X = R_+ \cup R_-, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0 \qquad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty). \end{cases}$$

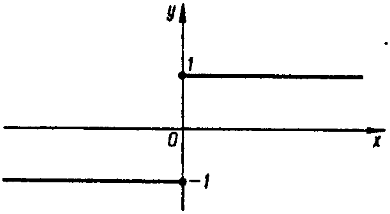
Отже, в кожному з інтервалів $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ функція стала і дорівнює відповідно -1 і 1.

Графіком функції $y = \frac{|x|}{x}$ є півпрямі (рис. 3.27, *а*).

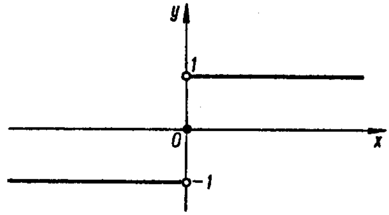
5. Розглянемо функцію від x, яка дорівнює 1 при $x > 0$, дорівнює 0 при $x = 0$ і -1 при $x < 0$. Цю функцію позначають символом — «сигнум» (знак):

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 \text{ при } x < 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ +1 \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Область визначення функції: множина дійсних чисел **R**.
Множина значень: $\{-1, 0, 1\}$.
Графік функції зображено на рис. 3.27, *б*.



а



б

Рис. 3.27

3. Аналітичний спосіб, або **спосіб задання функції формулою.**

Приклади. **1.** Нехай функцію задано аналітичним виразом

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Якщо функцію задано аналітично і область її визначення не вказано, то вважають, що областю її визначення є множина тих значень аргументу, при яких існує даний аналітичний вираз. Таку область іноді називають **природною областю визначення функції**.

Знайдемо область визначення функції $y = \sqrt{1 - x^2}$, розв'язавши нерівність

$$X = \{x \mid 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \mid |x| \leq 1\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$

Область значень заданої функції: $f(X) = \{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$.

2. Нехай функцію задано рівнянням

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Область визначення:

$$-1 < x < +1, \text{ або } X = \{x \mid -1 < x < 1\}.$$

Область значень: $1 \leq y < +\infty$, або $f(X) = \{y \mid 1 \leq y < +\infty\}$.

Розглянемо поняття складної функції. Нехай дано три непорожні множини X, U, Y з елементами $x \in X$, $u \in U$, $y \in Y$ та існує відображення φ, яке переводить елемент $x \in X$ в елемент $u \in U$, $X \xrightarrow{\varphi} U$; $u = \varphi(x)$, і відображення f, що переводить елемент $u \in U$ в елемент $y \in Y$, $U \to Y$; $y = f(u)$.

Якщо можливим є переведення елемента $x \in X$ в елемент $y \in Y$ за допомогою відображень f, φ, то таке відображення називають **складною функцією** і записують

$$X \xrightarrow{f,\varphi} Y, \text{ або } f, \varphi : X \to Y. \qquad (3.4)$$

Залежність між елементами x, y з відображеннями f, φ записують у вигляді

$$y = f[\varphi(x)], \text{ або } y = f(u); \; u = \varphi(x).$$

Областю визначення функції φ є множина X, а областю значень —

$$\varphi(X) = \{u \in U \; \exists \; x \in X, \varphi(x) = u\}.$$

Областю визначення функції f є множина U, а областю значень

$$f(U) = \{y \in Y \, \exists \, u \in \varphi(X), f(u) = y\}.$$

Областю визначення складної функції $y = f[\varphi(x)]$ є та частина множини X, яка відображається за допомогою f, φ в Y, тобто

$$X_0 = \{\forall \, x \in X \, \exists \, y \in Y, y = f[\varphi(x)]\}, \text{ де } X_0 \subset X$$

або

$$X_0 = \{\forall \, x \in X, \ \exists \, u \in U \wedge y \in Y \Rightarrow y = f(u), \ u = \varphi(x), \ y = f(\varphi(x))\}.$$

Аргумент $u = \varphi(x)$ функції $y = f(u)$ називається **проміжним аргументом** або **внутрішньою функцією**, а функція $y = f(u)$ — **зовнішньою**. Складну функцію визначають ще як функцію від функції.

Приклади. **1.** Розглянемо складну функцію $y = \log_2(x - 1)$. Цю функцію можна записати у вигляді $y = \log_2 u$, де $u = x - 1$.

Областю визначення функції u є інтервал $-\infty < x < +\infty$, а областю зміни — інтервал $-\infty < u < +\infty$. Оскільки функція $y = \log_2 u$ існує лише при $0 < u < +\infty$, то область визначення заданої складної функції знайдемо з нерівності $0 < x - 1 < +\infty$, або $1 < x < +\infty$. Областю зміни складної функції є множина всіх дійсних чисел $\mathbf{R}$.

2. Якщо $y = \arcsin u$, а $u = x^2 + 2$, то складна функція $y = \arcsin(x^2 + 2)$ не існує, оскільки $\sin y = 2 + x^2$ не може бути більше одиниці.

Можна розглядати функції з будь-яким, але скінченним числом проміжних аргументів. Так, якщо $y = f(v)$, $v = \varphi(u)$, $u = \psi(x)$, то складну функцію запишемо у вигляді

$$y = f\{\varphi[\psi(x)]\},$$

якщо області даних функцій узгоджені.

Наприклад, ввівши проміжні елементи, складну функцію

$$y = 2\sin^3 \sqrt{(x^2 - 1)}$$

можна подати у вигляді

$$y = 2v^3, \quad v = \sin u, \quad u = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Тут функція $y = 2v^3$ визначена для всіх $v \in \mathbf{R}$, функція $v = \sin u$ — для всіх $u \in \mathbf{R}$, а функція $u = \sqrt{x^2 - 1}$ — для всіх $x \in \{(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)\}$. Тоді задана складна функція має таку область визначення:

$$\{(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)\}.$$

3.2. Операції над функціями

Сумою функцій $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ називається функція

$$y = f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

значення якої дорівнює сумі значень функцій-доданків, а область її визначення дорівнює перетину областей визначення всіх функцій-доданків.

Аналогічно визначаються й інші операції над функціями.

Запишемо визначення суми f, наприклад, для двох функцій f_1 і f_2 у термінах множин:

$$X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1,\quad f_1(X_1) = \{y_1 \in Y_1 \quad \exists x \in X_1,\ f_1(x) = y_1\},$$
$$X_2 \xrightarrow{f_2} Y_2,\quad f_2(X_2) = \{y_2 \in Y_2 \quad \exists x \in X_2,\ f_2(x) = y_2\},$$
$$X_1 \xrightarrow{f_1+f_2} Y,\quad f(X) = \{y \in Y \quad \exists x \in X_1 \cap X_2,\ y = f_1(x) + f_2(x)\}.$$

Приклад. Знайти область визначення функції

$$y = f(x) = \ln\frac{2-x}{x+1} + \sqrt{\sin x}.$$

Р о з в' я з а н н я. Позначимо $f_1(x) = \ln\frac{2-x}{x+1}$; $f_2(x) = \sqrt{\sin x}$. Тоді

$$X_1 = D(f_1) = \left\{x \left| \frac{2-x}{x+1} > 0\right.\right\} = \{x \mid (x+1)(2-x) > 0\} = \{x \mid -1 < x < 2\}.$$
$$X_2 = D(f_2) = \{x \mid \sin x \ge 0\} = \{x \mid 2\pi n \le x \le \pi + 2\pi n\ \forall\, n \in \mathbf{Z}\}.$$

Областю визначення функції f є множина

$$X = D(f) = X_1 \cap X_2 = \{x \mid -1 < x < 2\} \cap \{x \mid 2\pi n \le x \le \pi + 2\pi n\ \forall\, n \in Z\} =$$
$$= \{x \mid 0 \le x < 2\}.$$

Відповідь. $X = D(f) = \{x \mid 0 \le x < 2\}$.

ВПРАВИ. Знайти область визначення функцій, заданих аналітично.

1. $y = f(x) = \lg(27 + 6x - x^2) + \arcsin\frac{2x-5}{5}$. *Відповідь.* $[0{,}5]$.

2. $y = f(x) = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{6-x}\right) + \arccos\frac{x-2}{3}$. *Відповідь.* $\{x \mid 0 \le x \le 5\}$.

3. $y = f(x) = \ln\frac{x+1}{2-x} + \sqrt[4]{\cos x}$. *Відповідь.* $\left\{x \left| -1 < x \le \frac{\pi}{2}\right.\right\}$.

3.3. Елементарні функції та класифікація їх

Основні елементарні функції. До основних належать такі елементарні функції:

$y = x^a$, $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$; $y = a^x$, $a > 0$, $a \ne 1$, $x \in \mathbf{R}$;

$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \ne 1$, $x \in \mathbf{R}_+$;

$$\left.\begin{array}{l} y = \sin x;\ y = \cos x;\ y = \mathrm{tg} x; \\ y = \mathrm{ctg} x;\ y = \sec x;\ y = \mathrm{cosec} x; \end{array}\right\}\ x \in \mathbf{R};$$

$y = \arcsin x$, $x \in [-1, +1]$;

$y = \arccos x$, $x \in [-1, +1]$; $y = \mathrm{arctg}\, x$; $x \in \mathbf{R}$;

$y = \mathrm{arcctg}\, x$; $x \in \mathbf{R}$.

Функція, утворена з основних елементарних функцій та чисел виконання скінченного числа арифметичних дій та операцій взяття функції від функції (утворення складних функцій), називається **елементарною**.

Приклад. Функція $y = \sqrt{x^3 \cos x + \lg \operatorname{tg} x}$ є елементарною, оскільки вона утворена з основних елементарних функцій послідовним застосуванням таких операцій:

1) степенева функція $v_1 = x^3$ помножена на тригонометричну $\omega_1 = \cos x$; $\xi_1(x) = x^3 \cos x$;

2) із логарифмічної $v_2 = \lg w_2$ та тригонометричної $w_2 = \operatorname{tg} x$ функцій утворена складна функція $\xi_2(x) = \lg \operatorname{tg} x$;

3) запишемо суму побудованих функцій $\xi_1(x)$ і $\xi_2(x)$:

$$\xi_1(x) + \xi_2(x) = \xi(x);$$

4) із функції $u = \xi(x)$ та степеневої функції $y = \sqrt{u}$ побудуємо складну функцію $y = \sqrt{\xi(x)}$.

Відповідно до числа дій над незалежною змінною та їхнього характеру утворюються **класи елементарних функцій**.

Перший клас складають **цілі раціональні функції**, або **многочлени (поліноми).**

У загальному вигляді многочлен записують так:

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{3.5}$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — дійсні числа; n — натуральне число. Ця функція утворена з основних елементарних функцій $y_1 = x$ і $y_2 = 1$ додаванням, множенням та множенням на числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Область визначення: $X = D(f) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$.

Другим класом елементарних функцій є **дробово-раціональні функції**.

Дробово-раціональною функцією змінної x називається функція, яку можна зобразити у вигляді відношення двох многочленів відносно x:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}. \tag{3.6}$$

Областю визначення дробово-раціональної функції є множина всіх дійсних чисел $(-\infty, +\infty)$, крім тих точок, в яких знаменник перетворюється на нуль.

Дробово-раціональну функцію можна дістати з функцій $y = x$ і $y = 1$ за допомогою тих самих дій, що і функцію (3.5) та ще й ділення.

Цілі раціональні та дробово-раціональні функції утворюють клас **раціональних функцій**.

Третім класом є **ірраціональні функції**. Це функції, в яких, крім вказаних вище дій, використовується операція добування кореня.

При вивченні функцій дійсної змінної для радикала парного степеня враховують тільки арифметичне значення кореня.

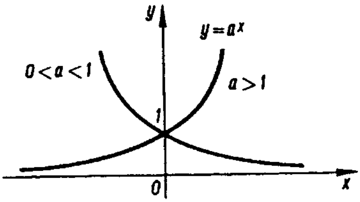


Рис. 3.28

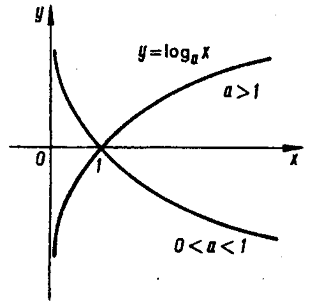


Рис. 3.29

Раціональні та ірраціональні функції входять до більш загального класу — **алгебраїчних функцій**, які розглядатимемо нижче.

Всі інші елементарні функції називаються трансцендентними. Це такі функції:

а) *показникова функція* $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$,
з областю визначення $X = \mathbf{R}$ (рис. 3.28);

б) *логарифмічна функція* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$,
з областю визначення $X = \mathbf{R}_+ = \{x \mid x > 0\}$ (рис. 3.29);

в) *тригонометричні функції:* $y = \sin x$
з областю визначення $X = \mathbf{R} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ (рис 3.30);

$y = \cos x$ з областю визначення $X = \mathbf{R} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ (рис. 3.31);

$y = \mathrm{tg}\, x$ з областю визначення

$$X = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n \forall n \in \mathbf{Z}\right\} \text{ (рис. 3.32);}$$

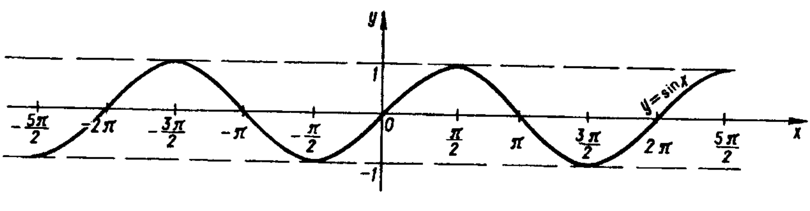


Рис. 3.30

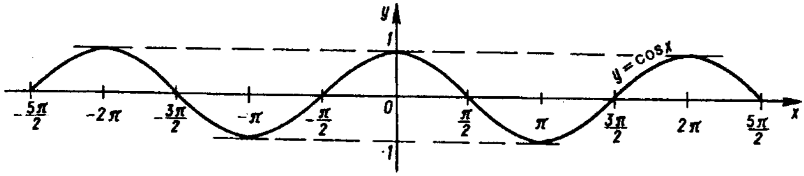


Рис. 3.31

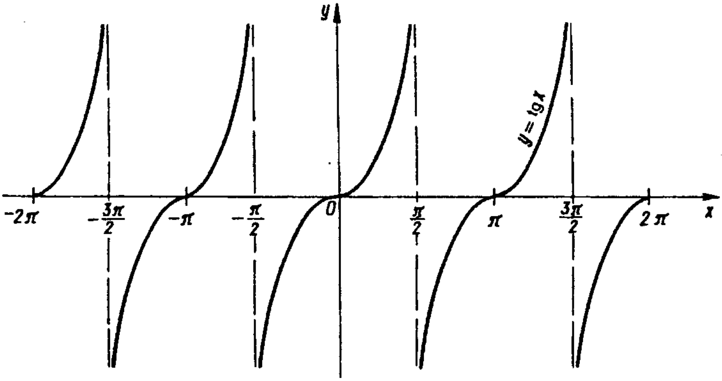


Рис. 3.32

$$y = \operatorname{ctg} x$$

з областю визначення $X = \{x \mid n\pi < x < \pi(n+1)\ \forall\ n \in \mathbf{Z}\}$ (рис. 3.33);

г) *гіперболічні функції*:

гіперболічний синус $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

з областю визначення $X = \mathbf{R}$ (рис. 3.34);

гіперболічний косинус $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

з областю визначення $X = \mathbf{R}$ (рис. 3.35);

гіперболічний тангенс $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

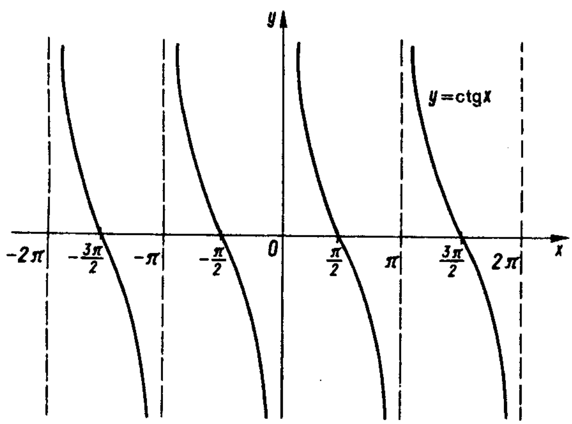


Рис. 3.33

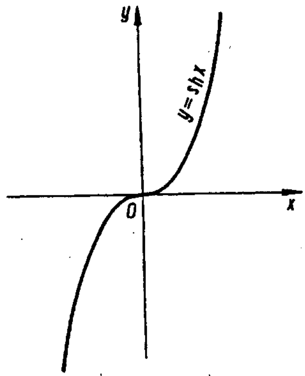


Рис. 3.34

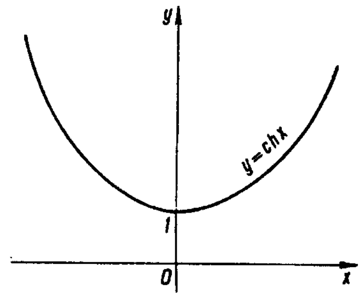


Рис. 3.35

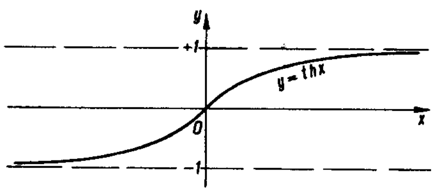


Рис. 3.36

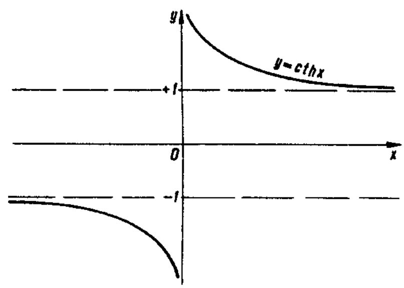


Рис. 3.37

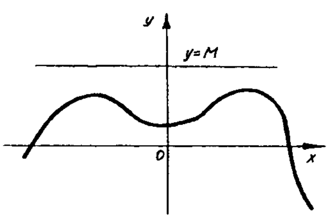


Рис. 3.38

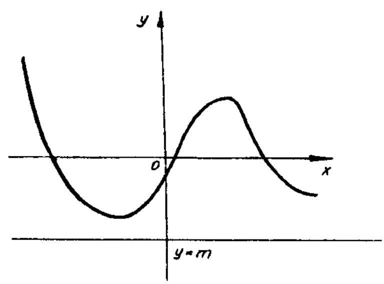


Рис. 3.39

з областю визначення $X = \mathbf{R}$ (рис. 3.36);

гіперболічний котангенс $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

з областю визначення $X = \{x \mid 0 < |x| < +\infty\} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (рис. 3.37).

Користуючись визначеннями гіперболічних функцій, можна вивести залежності між ними:

1) $\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1$.

Справді, $\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x =$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2+2}{4} = 1;$$

2) $\mathrm{ch}^2\, x + \mathrm{sh}^2\, x = \mathrm{ch}\, 2x$.

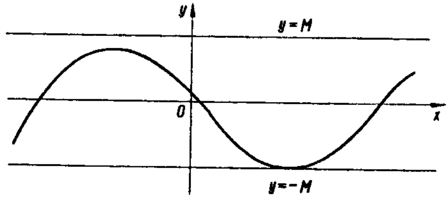


Рис. 3.40

Таким чином, всі елементарні функції поділяються на **алгебраїчні** та **трансцендентні.**

Алгебраїчні функції поділяються на раціональні та ірраціональні, а раціональні — на цілі раціональні та дробово-раціональні.

Трансцендентні функції поділяються на показникові, логарифмічні, тригонометричні, гіперболічні та ін.

Існують і **неелементарні функції**. До них належать, наприклад, функції $y = E\,(x)$, $y = \mathrm{sign}\; x$.

3.4. Обмежені функції

Функція $f\,(x)$, визначена на множині X, називається **обмеженою зверху або знизу**, якщо існує таке число M або m, що при всіх значеннях аргументу $x \in X$ виконується нерівність

$$f\,(x) \le M \text{ або } f\,(x) \ge m. \tag{3.7}$$

Якщо функція обмежена зверху і знизу, то кажуть, що **функція обмежена,** тобто

$$m \le f\,(x) \le M. \tag{3.8}$$

Виберемо з чисел m і M те, модуль якого більший. Нехай це буде M. Тоді

$$-M \le f\,(x) \le M, \text{ або } |f\,(x)| \le M. \tag{3.9}$$

Графік обмеженої зверху (знизу) функції розміщується нижче (вище) прямої $y = M$ $(y = m)$ (рис. 3.38, 3.39).

Графік обмеженої функції розміщується у смузі між прямими $y = -M$ і $y = M$ (рис. 3.40).

Якщо для функції $f\,(x)$ в усій області її визначення X не задовольняється умова (3.7) або (3.8), то функція називається відповідно **необмеженою зверху (знизу)**, або **необмеженою.**

Наприклад, функція $y = \sin\, x$ обмежена. Функція $y = 2^x$ обмежена знизу прямою $y = 0$, але не обмежена зверху. Функція $y = 5 + 2x - x^2$, яку можна зобразити у вигляді $y = 6 - (x - 1)^2$, обмежена зверху прямою $y = 6$, оскільки $6 - (x - 1)^2 \le 6$, але необмежена знизу. Функція $y = \mathrm{tg}\, x$ є необмеженою.

Враховуючи умови п. 2.8, можна зробити висновок, що визначення обмеженої функції і обмеженої змінної збігаються.

3.5. Монотонні функції

Якщо для двох будь-яких різних значень аргументу x_1 і x_2, взятих з області визначення функції, із нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається **зростаючою**;
б) $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція називається **неспадною**;
в) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається **спадною**;
г) $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функція називається **незростаючою**.

Зростаючі, неспадні, спадні та незростаючі функції називаються **монотонними**. Зростаючі та спадні функції ще називаються **строго монотонними**.

Наприклад, показникова функція $y = a^x$ при $a > 1$ зростає, оскільки $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$, а при $0 < a < 1$ ця функція спадає, оскільки $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ +\frac{\pi}{2}\right)$. Дійсно, $\forall\, x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2};\ +\frac{\pi}{2}\right)$ із нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$. Функція $y = \sin x$ на всій числовій осі не є монотонною.

3.6. Парні і непарні функції

Нехай функція визначена в області, симетричній відносно початку координат, за винятком, можливо, самої точки $x = 0$. Якщо при всіх протилежних значеннях аргументу значення функції рівні між собою, то функція називається **парною**:

$$y = f(x) = f(-x).$$

Якщо при протилежних значеннях аргументу значення функції протилежні

$$y = f(x) = -f(-x).$$

то функція називається **непарною.**

У термінах множин ці означення можна записати таким чином:

для парної функції $f : X \xrightarrow{f} Y$

$$f(X) = \{y \in Y \ \exists\, x \in X \ \text{ і } \ \exists\, -x \in X \Rightarrow y = f(x) = f(-x)\};$$

для непарної функції $f : X \xrightarrow{f} Y$

$$f(X) = \{y \in Y \ \exists\, x \in X \ \text{ і } \ \exists\, -x \in X \Rightarrow y = f(x) = -f(-x)\}.$$

Приклад. Функції

$$y = \cos x = \cos(-x),\ \ y = |x|,\ \ y = x^4,\ \ y = \text{ch}\, x \text{ — парні;}$$

$$y = \sin x = -\sin(-x),\ \ y = x\,|x|,\ \ y = x^3,\ \ y = \text{th}\, x \text{ — непарні.}$$

Функції $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = x^2 + x + 1$, $y = \sqrt{x}$ є ні парними, ні непарними.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, графік непарної — відносно початку координат.

3.7. Періодичні функції

Функція $y = f(x)$ називається **періодичною**, якщо існує таке дійсне число $l \neq 0$, що при будь-яких значеннях аргументу x, взятих з області визначення функції

$$f(x) = f(x + kl),$$

де k — будь-яке ціле число. Число $l \neq 0$ називається **періодом**. Найменший із додатних періодів функції називається **основним періодом функції.**

Наприклад, для функцій $y = \sin x = \sin(x + 2\pi k)$, $y = \cos x = \cos(x + 2\pi k)$ число $l = 2\pi$ є основним періодом. Для функцій $y = \text{tg}\, x = \text{tg}(x + \pi k)$, $y = \text{ctg}\, x = \text{ctg}(x + \pi k)$ основним періодом є число $l = \pi$.

У термінах множин функція $f : X \xrightarrow{f} Y$ називається **періодичною**, якщо:

1) $\forall\, x \in X\ \exists\, l \neq 0 \Rightarrow x + l \in X$ і $x - l \in X$;

2) $f(X) = \{y \in Y\ \exists\, x \in X;\ \ y = f(x) = f(x + l) = f(x - l)\}$.

3.8. Обернені функції

Розглянемо приклад. Функція $y = f(x) = \dfrac{x+2}{3}$ має область визначення $D(f) = \mathbf{R}$. Із заданого рівняння знаходимо $x = 3y - 2$, або $x = \varphi(y) = 3y - 2$. Функції f і φ є взаємно оберненими.

Функція $x = \varphi(y)$ називається **оберненою** по відношенню до функції $y = f(x)$, якщо:

1) область визначення функції f є областю значень функції φ;

2) область значень функції f є областю визначення функції φ;

3) одному значенню змінної $x \in D(f)$ відповідає одне і тільки одне значення змінної $y \in D(\varphi)$.

Функція $x = \varphi(y)$ є однозначною.

Із даного означення випливає, що будь-яку з двох функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ можна називати прямою або оберненою, тобто вони взаємно обернені.

Приклади. Функція $y = a^x$, $X = \mathbf{R}$, має обернену

$$x = \log_a y,\ Y = \mathbf{R}_+.$$

Функція $y = \sin x$, $X = \left\{x \middle| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$, має обернену

$$x = \arcsin y,\ Y = \{y \mid -1 \le y \le 1\}.$$

Функція $y = \cos x$, $X = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$, має обернену

$$x = \arccos y,\ Y = \{y \mid -1 \le y \le 1\}.$$

Функція $y = \operatorname{tg} x$, $X = \left\{x \middle| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$, має обернену

$$x = \operatorname{arctg} y,\ Y = \mathbf{R} = \{y \mid -\infty < y < +\infty\}.$$

Функція $y = \operatorname{ctg} x$, $X = \{x \mid 0 < x < \pi\}$, має обернену

$$x = \operatorname{arcctg} y,\ Y = \mathbf{R} = \{y \mid -\infty < y < +\infty\}.$$

Функція $y = E(x)$ не має оберненої, оскільки цілому значенню $y = n$ відповідає нескінченна множина значень x, які утворюють півсегмент $n \le x < n + 1$ (див. рис. 3.26). Тут порушується умова 3) означення взаємно обернених функцій. Згідно з цією умовою для взаємно обернених функцій різним значенням x відповідають різні значення y і навпаки.

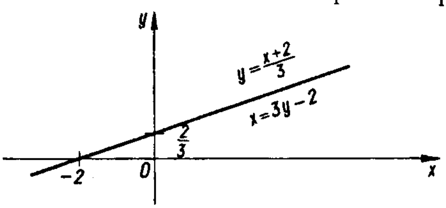


Рис. 3.41

Функція $y = x^2$, $X = \mathbf{R}$ не має оберненої, оскільки одному значенню $y > 0$ відповідають два значення $x = \pm\sqrt{y}$.

Якщо функцію $y = x^2$, $X = \mathbf{R}_0 = \{x \mid 0 \le x < +\infty\}$, розглядати при невід'ємних значеннях аргументу, то вона має обернену функцію $x = \sqrt{y}$, де $\sqrt{y}$ — арифметичне значення кореня. Оскільки переозначення аргументу і функції для взаємно обернених функцій не є істотним, то графік функції $y = f(x)$ і оберненої функції $x = \varphi(y)$ буде один і той самий.

Наприклад, графіком взаємно обернених функцій

$$y = \frac{x+2}{3} \text{ і } x = 3y - 2$$

є одна і та сама лінія (рис. 3.41).

Якщо в оберненій функції, як і в прямій, позначити аргумент через x, а функцію через y, тобто записати взаємно обернені функції

$$y = f(x) \text{ і } y = \varphi(x),$$

то графіки цих функцій будуть різними. Графік оберненої функції

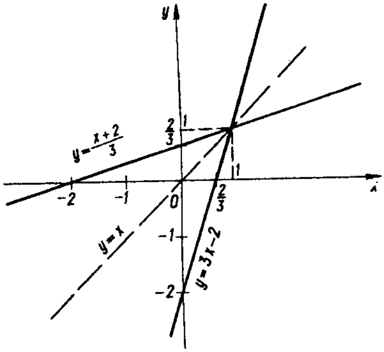


Рис. 3.42

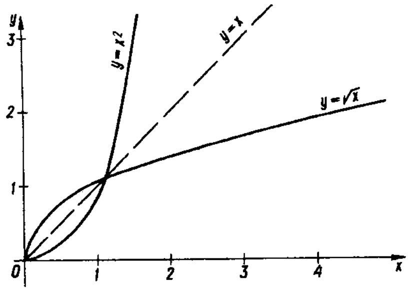


Рис. 3.43

буде симетричним до графіка прямої функції відносно бісектриси першого і третього координатних кутів $y = x$.

Наприклад, взаємно обернені функції

$$y = \frac{x+2}{3} \text{ і } x = 3y - 2$$

(рис. 3.41) після перепозначення змінних в оберненій функції на стандартні запишемо у вигляді

$$y = \frac{x+2}{3} \text{ і } y = 3x - 2,$$

а їхніми графіками будуть різні прямі, симетричні відносно прямої $y = x$, зображені на рис. 3.42. Так, графіки взаємно обернених функцій

$$y = x^2,\ X = \mathbf{R}_0 \text{ і } y = \sqrt{x},\ X = \mathbf{R}_0$$

симетричні відносно бісектриси першого координатного кута $y = x$ (рис. 3.43).

Дамо означення прямої і оберненої функцій у термінах множин. Нехай дано дві непорожні множини X і Y з елементами $x \in X$ і $y \in Y$ і задана функція f: $X \to Y$

$$f(X) = \{y \in Y \ \exists\, x \in X\ f(x) = y\}.$$

Якщо існує функція φ: $Y \to X$

$$\varphi(Y) = \{x \in X \ \exists\, y \in Y\ \varphi(y) = x\},$$

то φ називається **функцією, оберненою до функції** f.

При цьому

$$X = \varphi(Y), \text{ а } Y = f(X).$$

Для числових взаємно обернених функцій $f(x)$ і $\varphi(y)$ маємо

$$D(f) = E(\varphi) \text{ і } E(f) = D(\varphi).$$

***Теорема 1**. Будь-яка строго монотонна функція має обернену.*

Теорема 2. *Якщо функція $y = f(x)$ строго зростає (спадає), то і обернена до неї функція також строго зростає (спадає).*

Ці теореми випливають із означень. Для зростаючої функції

$$(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (y_1 < y_2).$$

Для спадної функції $(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (y_1 > y_2)$.

Наприклад, функція $y = a^x$ і обернена функція $y = \log_a x$ при $a > 1$ є строго зростаючими.

3.9. Функції, задані параметрично

Якщо функціональна залежність між змінними x і y виражена через третю змінну t, що називається **параметром,** тобто

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in T, \qquad (3.10)$$

то кажуть, що функція y від змінної x задана параметрично і рівняння (3.10) називаються **параметричними**.

Дамо означення параметрично заданих функцій в термінах теорії множин.

Нехай дано три непорожні множини X, Y, T з елементами $x \in X$, $y \in Y$, $t \in T$ і функції f_1 і f_2 такі, що

$$f_1\colon T \to X, \ \text{ а } \ f_2\colon T \to Y,$$

$$f_1(T) = \{x \in X \ \exists\, t \in T \ f_1(t) = x\},$$

$$f_2(T) = \{y \in Y \ \exists\, t \in T \ f_2(t) = y\}.$$

Крім того, нехай існує функція

$$f\colon X \to Y.$$

Тоді кажуть, що функція f **задана параметрично**.

Рівняння (3.10) задають у площині xOy криву параметрично, тобто задається відображення прообразів на прямій в образи — точки площини xOy.

Зауваження. Функціональну залежність $y = f(x)$ можна розглядати як параметричне рівняння, в якому за параметр t взято x, тобто

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Параметричне зображення функції $y = f(x)$ у багатьох випадках полегшує розв'язування деяких математичних і фізичних задач. Далі розглянемо приклади функцій, заданих параметрично.

3.10. Параметричні рівняння еліпса, кола та гіперболи

Як відомо (див. гл. 2, п. 5.3), параметричні рівняння еліпса з півосями a і b мають вигляд

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t; \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi. \tag{3.11}$$

Нехай задано коло радіуса R. Візьмемо центр цього кола за початок координат (рис. 3.44). Змінну точку позначимо через M (x, y). Тоді параметричні рівняння кола дістанемо з рівнянь (3.11) при $a = b = R$:

$$\begin{cases} ON = x = R\cos t; \\ NM = y = R\sin t; \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi. \tag{3.12}$$

Рівнянням (3.12) можна надати механічного тлумачення. Нехай стрижень OM обертається із сталою кутовою швидкістю навколо осі Oz. Тоді рівняння (3.12) є рівняннями руху точки стрижня, що обертається з кутовою швидкістю $\omega = 1$ [c^{-1}].

Розглянемо параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = a\,\text{ch}\,t, \\ y = b\,\text{sh}\,t. \end{cases} \tag{3.13}$$

Звідси визначимо ch t і sh t і піднесемо до квадрата обидві частини:

$$\frac{x^2}{a^2} = \text{ch}^2 t, \qquad \frac{y^2}{b^2} = \text{sh}^2 t.$$

Користуючись формулою

$$\text{ch}^2\, t - \text{sh}^2\, t = 1,$$

дістанемо рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.14}$$

Рівняння (3.13) називається **параметричним рівнянням гіперболи.** Звідси походить назва **«гіперболічні функції»**.

3.11. Циклоїда

Циклоїдою називається плоска крива, описувана точкою, яка лежить нерухомо на колі, що котиться без ковзання по нерухомій прямій (рис. 3.45).

Оскільки коло котиться без ковзання, то $MB = O_1B$. Визначимо координати точки M (x, y) після того, як коло повернулося на

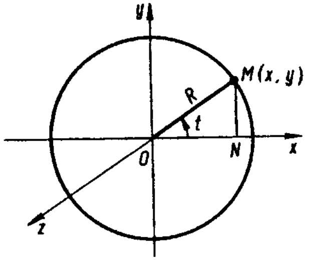


Рис. 3.44

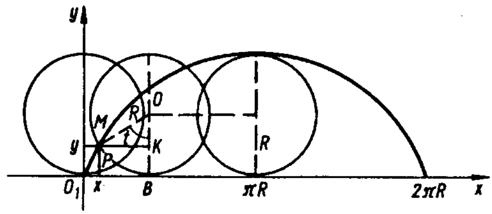


Рис. 3.45

кут t. Згідно з позначеннями на рис. 3.45, маємо:

$x = O_1P = O_1B - PB$, але $O_1B = MB = Rt$; $PB = MK = R\sin t$. Отже,

$$x = Rt - R\sin t = R(t - \sin t).$$

Далі

$$y = MP = OB - OK = R - R\cos t;\ \ y = R(1 - \cos t).$$

Рівняння

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi \tag{3.15}$$

є параметричним рівнянням однієї арки циклоїди.

Якщо параметр t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, то рівнянням (3.15) відповідає крива, яка називається **циклоїдою** або **звичайною циклоїдою** (рис. 3.46).

3.12. Параметричне або векторне задання просторової кривої

Просторову криву можна зобразити як траєкторію, яку описує точка $M(x, y, z)$ при зміні її поточних координат x, y, z.

Будемо вважати, що поточні координати є деякими функціями параметра t, який змінюється від T_0 до T, що відповідають точкам A і B (рис. 3.47):

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad T_0 \le t \le T. \\ z = z(t), \end{cases} \tag{3.16}$$

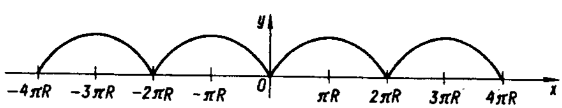


Рис. 3.46

Рівняння (3.16) називаються **параметричними рівняннями просторової кривої**. У цьому відображенні прообразами є значення параметра t (точки прямої), а образами — точки тривимірного простору xyz.

Вибираємо на осях координат одиничні орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ і побудуємо вектор

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Вектор $\vec{r}(t)$ називається **радіусом-вектором поточної точки** M. Із зміною параметра t вектор $\vec{r}(t)$ буде змінювати свою довжину і напрям. Вектор $\vec{r}(t)$ називається **вектор-функцією скалярного аргументу** t. Рівняння $\vec{r} = \vec{r}(t)$ називається **векторним рівнянням кривої** і є векторним способом задання кривої. Кінець вектора $\vec{r}(t)$ описує при зміні t криву AB, яка називається **годографом вектор-функції.**

Наприклад, рівняння (3.4) з гл. 2 є **параметричними рівняннями прямої у просторі**.

3.13. Гвинтова лінія

Якщо деяка точка M рівномірно рухається по твірній кругового циліндра, а сам циліндр рівномірно обертається навколо своєї осі, то точка M описує криву, що називається **гвинтовою лінією**.

Радіусом гвинтової лінії називається радіус циліндра, а віссю гвинтової лінії — вісь циліндра. Відстань, на яку зміщується точка M вздовж твірної при повному оберті циліндра, називається **кроком гвинта** і позначається h.

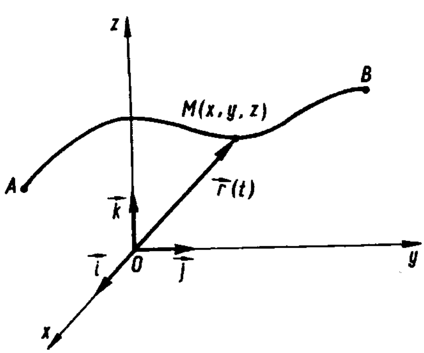


Рис. 3.47

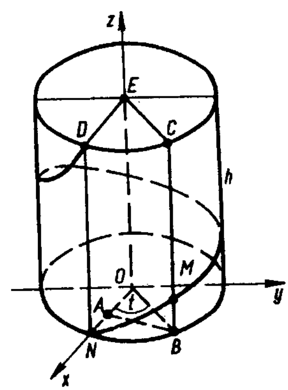


Рис. 3.48

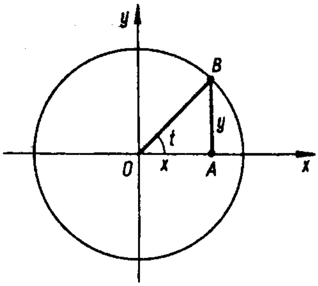


Рис. 3.49

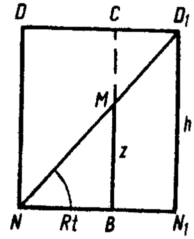


Рис. 3.50

Щоб вивести рівняння гвинтової лінії, візьмемо вісь циліндра за вісь Oz (рис. 3.48), площину xOz — за початок відліку кута повороту циліндра. Позначимо кут повороту циліндра $\widehat{NOB}$ через t, координати будь-якої точки M гвинтової лінії — через x, y, z, а проекцію точки M на площину xOy — через B (рис. 3.49). Координати x, y точки M збігаються з координатами точки B (рис. 3.49):

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t.$$

Для визначення координати $z = MB$ (рис. 3.50) точки M побудуємо розгортку циліндра NOD_1N_1, в якій $|NN_1| = 2\pi R$; висота $NO = N_1D_1 = h$, діагональ ND_1 — довжина одного витка гвинтової лінії, що відповідає одному оберту циліндра, довжина $NB = Rt$.

Із подібності трикутників MBN і D_1N_1N знаходимо

$$\frac{z}{h} = \frac{Rt}{2\pi R},\quad z = \frac{h}{2\pi}t.$$

Таким чином, маємо параметричне рівняння гвинтової лінії

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = \dfrac{h}{2\pi}t. \end{cases} \qquad (3.17)$$

3.14. Неявне задання функції

Нехай задано дві непорожні множини X і Y з елементами $x \in X$ і $y \in Y$ і функція f: $X \to Y$,

$$f(x) = \{y \in Y \text{ і } x \in X \ \exists\ F(x, y) = 0\}.$$

Тоді кажуть, що **функція** f **задана рівнянням** $F(x, y) = 0$, або **неявно**.

Неявна форма запису функціональної залежності має вигляд

$$F(x, y) = 0.$$

Так, рівняння (3.14) дає неявну залежність y від x.

Будь-яку задану функцію $y = f(x)$ можна записати у неявному вигляді $y - f(x) = 0$. Неявна форма задання функції є більш загальною, ніж явна.

Неявна форма задання функції часто зумовлюється неможливістю задання закону функціональної залежності у явному вигляді.

Наприклад, функцію, задану рівнянням $e^y + y - 2x = 0$, записати у явному вигляді неможливо.

Дамо визначення розв'язку рівняння $F(x, y) = 0$.

Функція $y = f(x)$ з областю визначення X і областю значень Y називається **розв'язками рівняння** $F(x, y) = 0$, якщо при підстановці замість y відповідних значень $f(x)$ ліва частина рівняння $F(x, y)$ перетворюється на нуль на множині X. Тому неявну функцію можна визначити так: функція, задана рівнянням, називається **неявною**.

Поняття неявної функції дозволяє дати пряме означення алгебраїчних функцій.

Функція називається **алгебраїчною**, якщо рівняння $F(x, y) = 0$ є цілим многочленом відносно x і y.

Наприклад, функції

$$x^3 + y^2 + 3x^2y + 5xy = 0,$$

$$7y^8 + x^3y^6 + 2xy^5 + 3y^4 - 7y + y^2 = 0$$

є алгебраїчними.

Поняттю неявної функції можна дати геометричне тлумачення. Запишемо рівняння $F(x, y) = 0$ у вигляді двох рівнянь: поверхні $z = F(x, y)$ і площини $z = 0$.

Нехай Z є множиною точок перетину площини $z = 0$ з поверхнею $z = F(x, y)$, а X — проекція цієї множини Z на вісь Ox. Якщо

$$\forall\, x \in X\ \exists\, y \in M(x, y, z) \subset Z$$

(існує y, що є ординатою однієї з точок множини Z, яка проектується на вісь Ox в точку $(x, 0)$), то дістанемо функцію $y = f(x)$, яка задовольняє дане рівняння.

Можливими є такі випадки. Площина $z = 0$:

а) перетинає поверхню $z = F(x, y)$ по одній, кільком або нескінченній множині ліній;

б) може мати окремі ізольовані спільні з поверхнею $z = F(x, y)$ точки або куски площини і т. д.;

в) може не перетинати поверхню $z = F(x, y)$. При цьому не існує жодної функції, що задовольняє дане рівняння, тобто рівняння $F(x, y) = 0$ не задає жодної неявної функції.

Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не задовольняє жодна функція, оскільки параболоїд $z = x^2 + y^2 + 1$ не перетинається з площиною $z = 0$.

Рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не задає неявну функцію. Рівняння $x^2 + y^2 = 0$ задовольняє єдина функція $y = 0$, розглядувана на множині $X = \{0\}$. Параболоїд $z = x^2 + y^2$ з площиною $z = 0$ має єдину спільну точку M (0, 0, 0). Рівняння $x^2 - y^2 = 0$ задовольняють чотири функції:

$$y = x, \;\; y = -x, \;\; y = |x|, \;\; y = -|x|,$$

тобто рівняння задає чотири функції.

3.15. Тіла у n-вимірному евклідовому просторі

Нагадаємо, що сукупність n дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, заданих у певній послідовності, називається **точкою n-вимірного простору**.

Числа $x_1, x_2, ..., x_n$, записані у певному порядку, називаються координатами точки n-вимірного простору. Точки n-вимірного простору позначаються M $(x_1, x_2, ..., x_n)$, або M (X), або M (x_i), де $i = 1$, 2, 3, ..., n $(i = \overline{1-n})$.

Дві точки n-вимірного простору A (a_i), B (b_i), $i = 1, 2, 3. ..., n$, називаються **збіжними** або **рівними**, якщо їхні координати $a_i = b_i$ при $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Точки n-вимірного простору утворюють евклідів простір, якщо визначено відстань між ними:

$$\rho(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}.$$

Для тривимірного простору E_3

$$\rho(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Далі розглянемо n-вимірний евклідів простір.

Введемо поняття лінії цього простору.

Нехай задано n функцій деякого параметра t:

$$x_i = \varphi_i(t), \; T_0 < t < T, \; i = 1, 2, ..., n, \qquad (3.18)$$

які є координатами точки M простору E_n.

При зміні параметра t точка M $(x_i(t))$, $i = 1, 2, ..., n$, описує лінію n-вимірного простору.

Так, рівняння (3.10) і (3.16) задають лінії відповідно у дво- і тривимірному просторі. Система функцій φ_i, здійснює відображення прообразів прямої t в образи-точки n-вимірного простору E_n.

Рівняння (3.18) називаються **параметричними рівняннями лінії простору E_n**. Якщо всі функції (3.18) лінійні відносно t, тобто

$$x_i = \alpha_i t + \beta_i, \quad i = 1, 2, 3, ..., n,$$

то лінія простору E_n називається **прямою**.

Маючи точки, прямі та криві, можна ввести поняття тіла n-вимірного простору E_n.

Так, у тривимірному просторі E_3 рівняння

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2$$

задає сферу радіуса r з центром у точці (a_1, a_2, a_3). Нерівність

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \le r^2$$

задає тривимірну кулю радіуса r з центром у точці (a_1, a_2, a_3).

Аналогічно рівняння n-вимірної кулі записується у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 \le r^2, \text{ або } \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} \le r, \tag{3.19}$$

де точка $A\ (a_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ — «центр» кулі, r — її радіус.

Якщо вираз (3.19) записано без знака рівності

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 < r^2, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} < r, \tag{3.20}$$

то така n-вимірна куля називається **відкритою**, а рівняння (3.19) задає **n-вимірну замкнену кулю**.

Точки, що належать сегменту $[a, b]$, задовольняють подвійну нерівність

$$a \le x \le b.$$

Точки, що належать прямокутнику, зображеному на рис. 3.51, задовольняють систему двох лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_1 \le x_1 \le b_1, \\ a_2 \le x_2 \le b_2. \end{cases}$$

Точки, що належать прямокутному паралелепіпеду (рис. 3.52), задовольняють систему трьох подвійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_1 \le x_1 \le b_1, \\ a_2 \le x_2 \le b_2, \\ a_3 \le x_3 \le b_3. \end{cases}$$

Центр цього паралелепіпеда міститься у точці

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right).$$

Аналогічно n-вимірним паралелепіпедом називається множина точок $M\ (x_1, x_2, ..., x_n)$ простору E_n, що задовольняють систему n подвійних нерівностей:

$$a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, 2, ..., n. \tag{3.21}$$

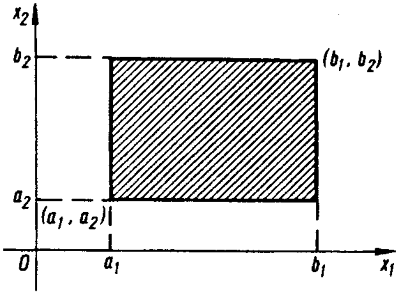


Рис. 3.51

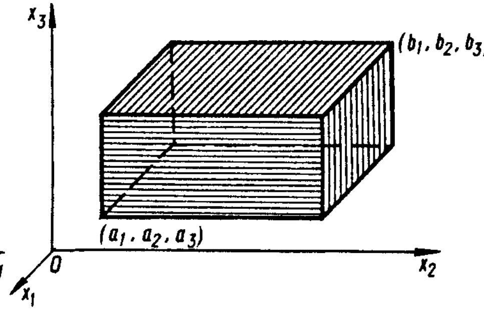


Рис. 3.52

Центр цього паралелепіпеда міститься у точці з координатами

$$\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right), \text{ де } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Вираз (3.21) задає закритий паралелепіпед, а система строгих подвійних нерівностей

$$a_i < x_i < b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.22}$$

— відкритий паралелепіпед.

Якщо вирази (3.21) і (3.22) записати у вигляді

$$-a_i \le x_i \le a_i,$$
$$-a_i < x_i < a_i,$$

то дістанемо відповідно замкнений і відкритий куби з центром у точці O (0, 0, ..., 0).

Якщо вирази (3.21) і (3.22) записати у вигляді

$$a_i - a \le x_i \le a_i + a,$$
$$a_i - a < x_i < a_i + a,$$

то ці нерівності задаватимуть відповідно **замкнений** і **відкритий куби** з центром у точці A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і стороною $2a$.

Можна також побудувати рівняння і нерівності для інших тіл у n-вимірному просторі.

3.16. Околи точки n-вимірного простору

Нехай задано довільну множину K точок M $(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ $= M$ (X) n-вимірного простору E_n. Точка M_0 називається **внутрішньою точкою** множини K, якщо існує відкрита куля з центром у точці M_0, що повністю належить K. Множина називається **відкритою**, якщо всі її точки внутрішні.

Наприклад, відкрита куля (3.20) є відкритою множиною, оскільки завжди можна знайти кулю з як завгодно малим радіусом δ і центром у будь-якій точці кулі радіуса r, що повністю належить заданій кулі.

Точка N_0 називається **зовнішньою** по відношенню до множини K, якщо вона не тільки не належить K, але й існує відкрита куля з центром у точці N_0, що повністю не належить множині K.

Точка N_0 називається межовою точкою множини K, якщо будь-яка відкрита куля з центром у точці N_0 містить у собі як точки множини K, так і точки, що не належать K.

Точка A називається **межовою точкою множини** $K \subset E_n$, якщо існує відкрита куля з центром у точці A, що містить хоча б одну точку $M \in K$, відмінну від A.

Множина всіх межових точок множини K називається **межею множини**. Множина K називається **замкненою**, якщо вона містить всі свої межові точки або не має межових точок.

Сформулюємо таку теорему, яку наведемо без доведення.

Теорема 3. *Межа будь-якої точкової множини є замкненою множиною.*

Множина K називається **обмеженою**, якщо вона міститься всередині деякої кулі досить великого, але скінченного радіуса. У протилежному випадку множина K називається **необмеженою**.

Околом точки A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-вимірного простору E_n називається довільна відкрита множина, що містить цю точку. Звичайно вводять два конкретні околи точки A: **кубічний і сферичний**.

Кубічним δ-околом точки A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називається відкритий куб з центром у точці A і стороною 2δ. Координати точок M $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що належать кубічному δ-околу, задовольняють систему n подвійних нерівностей

$$a_i - \delta < x_i < a_i + \delta, \text{ або } |x_i - a_i| < \delta, \; i = 1, 2, \ldots, n. \quad (3.23)$$

Сферичним δ-околом точки A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називається відкрита куля радіуса δ з центром у точці A.

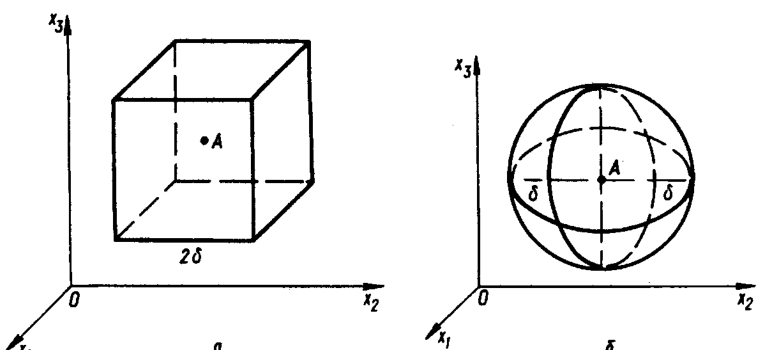


Рис. 3.53

Координати точок $M\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, що належать сферичному δ-околу точки A, задовольняють нерівність

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} < \delta, \text{ або } \rho(M, A) < \delta. \tag{3.24}$$

Для точки $A\ (a_1,\ a_2,\ a_3)$ тривимірного простору E_3 кубічний або сферичний δ-окіл можна зобразити геометрично (рис. 3.53, *а*, *б*).

Порівнюючи умови (3.23) і (3.24), знаходимо, що ці обидва околи мають **властивість еквівалентності:** *у будь-якому сферичному околі точки міститься деякий кубічний окіл цієї самої точки, і навпаки, у будь-якому кубічному околі точки завжди міститься деякий сферичний окіл цієї точки.*

Виходячи з умови еквівалентності, можна в означенні внутрішньої точки множини K слово «сфера» замінити на «куб».

3.17. Функції багатьох змінних та способи задання їх

Нехай дано множину m точок $X\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ простору E_n і множину U, що складається з чисел $\{u\}$. Якщо кожній точці X поставити у відповідність за деяким законом одне або декілька чисел u, то ця відповідність називається **функцією точки n-вимірного простору E_n** або **функцією n змінних.**

Функції n змінних позначають таким чином:

$$u = f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \text{ або } u = f\ (X).$$

При цьому $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ називаються **незалежними змінними** або **аргументами**.

Наприклад, $z = f\ (x,\ y)$; $u = f\ (x,\ y,\ z)$; $u = f\ (x,\ y,\ z,\ t)$ є відповідно функціями двох, трьох і чотирьох змінних.

Якщо відповідність між точками множини m і числами множини U однозначна, то функція багатьох змінних є **однозначною**, у протилежному випадку — **багатозначною**.

Множину m точок X, для яких існує u, називають **областю визначення функції** і позначають $D\ (f)$ або D, а множину значень u позначають $E\ (f) = f\ (m)$.

Для функції n змінних мають місце поняття (3.1) і (3.3):

$$m \xrightarrow{f} u;\quad f(m) = \{u \in U \quad \text{і} \quad \forall X \in m \quad u = f(X)\} = E(f).$$

Приклади. **1.** Площу прямокутника із змінними сторонами x_1 і x_2 можна розглядати як функцію двох змінних:

$$S = x_1 \cdot x_2.$$

Знайти область визначення цієї функції.

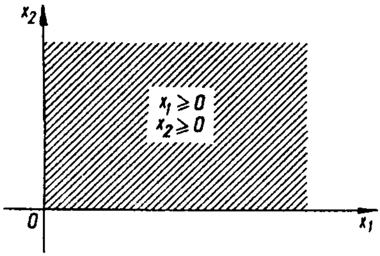


Рис. 3.54

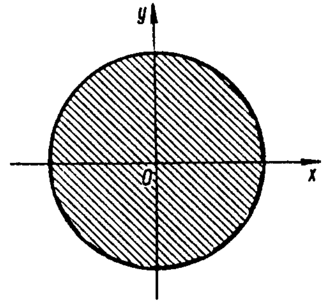


Рис. 3.55

Р о з в' я з а н н я. Скористаємося тим, що довжини сторін прямокутника додатні: $x_1 \geq 0$ і $x_2 \geq 0$, тобто

$$D\ (S) = \{\ x_1,\ x_2 \in R\colon x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0\}.$$

Якщо одна із сторін прямокутника або обидві сторони перетворюються на нуль, то прямокутник вироджується у відрізок або точку. Тоді $S = 0$.

Геометрично областю визначення цієї функції є множина точок з першого квадранта системи координат x_1Ox_2, включаючи точки, що лежать на координатних осях (рис. 3.54).

2. Знайти область визначення функції

$$u = f(x,\ y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\,.$$

Р о з в' я з а н н я. Оскільки u може бути лише дійсним числом, то область визначення $D\ (f)$ знайдемо з нерівності

$$1 - (x^2 + y^2) \geq 0,\ \text{або}\ x^2 + y^2 \leq 1.$$

Отже, геометрично областю визначення $D\ (f)$ є коло (разом з його межею) з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює 1. Ця область замкнена (рис. 3.55).

3. Знайти область визначення функції

$$u = f\ (x,\ y) = \ln\ (1 - x^2 - y^2).$$

Р о з в' я з а н н я. Натуральний логарифм існує для додатних значень свого аргументу, тому $D\ (f)$ знайдемо з нерівності

$$1 - x^2 - y^2 > 0,\ \text{або}\ x^2 + y^2 < 1.$$

Геометрично область $D\ (f)$ є одиничним кругом без точок самого кола (без межі). Така область відкрита (рис. 3.56).

4. Знайти область визначення функції

$$z = f(x,\ y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}.$$

Р о з в' я з а н н я. Область визначення знайдемо із системи нерівностей

$$\begin{cases} \ln(1 - x^2 - y^2) \neq 0; \\ 1 - x^2 - y^2 > 0; \\ 4x - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 + y^2 < 1; \\ y^2 \leq 4x. \end{cases}$$

Таким чином,

$$D\ (f) = \{x,\ y \in R\colon 0 < x^2 + y^2 < 1 \wedge y^2 \leq 4x\}.$$

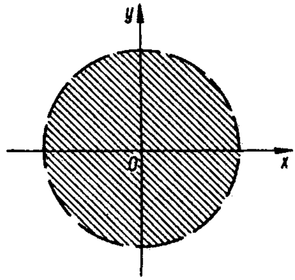


Рис. 3.56

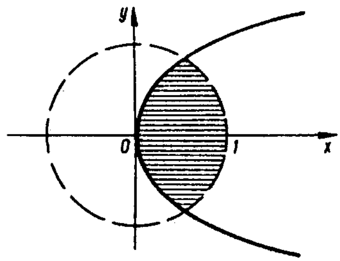


Рис. 3.57

Зобразимо знайдену область $D(f)$ на координатній площині xOy (рис. 3.57). Нерівність $y^2 \leq 4x$ задовольняють точки, що лежать на параболі $y^2 = 4x$ і праворуч від неї у напрямі осі абсцис. Нерівність $0 < x^2 + y^2 < 1$ задовольняють внутрішні точки одиничного круга за винятком точки (0, 0).

5. Знайти область визначення функції

$$z = f(x, y) = \arcsin[2y(1 + x^2) - 1].$$

Р о з в' я з а н н я. Відповідно до означення оберненої тригонометричної функції, маємо

$$\sin z = 2y(1 + x^2) - 1, \; -\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки $-1 \leq \sin z \leq 1$, то

$$-1 \leq 2y(1 + x^2) - 1 \leq 1,$$

або $0 \leq 2y(1 + x^2) \leq 2$.
Звідси

$$0 \leq y(1 + x^2) \leq 1.$$

При всіх дійсних значеннях x маємо

$$1 + x^2 > 0, \text{ тоді } 0 \leq y \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Крива, що визначається рівнянням

$$y = \frac{1}{1 + x^2},$$

називається **локоном Аньєзі**[1] (рис. 3.58), а рівнянню $y = 0$ відповідає вісь абсцис. Таким чином,

$$D(f) = \left\{x, y \in R : y \geq 0 \wedge y \leq \frac{1}{1 + x^2}\right\}.$$

Геометрично областю $D(f)$ є множина всіх точок площини xOy, розміщених між віссю абсцис і локоном Аньєзі, включаючи точки обмежувальних кривих.

6. Знайти область визначення функції

$$u = f(x, y, z) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}},$$

де $R > r$.

---

[1] Марія Гаетана А н ь є з і (1719–1799) — італійський математик.

Р о з в ' я з а н н я. Область визначення $D(f)$ знайдемо із системи нерівностей

$$\begin{cases} R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \geq 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2; \\ x^2 + y^2 + z^2 > r^2. \end{cases}$$

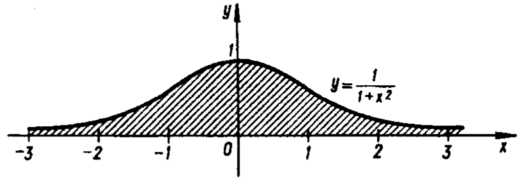


Рис. 3.58

Таким чином,

$$D(f) = \{x, y, z \in R;\ r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Геометрично область $D(f)$ є множиною всіх точок тривимірного простору E_3, що лежать між сферичними поверхнями з центрами на початку координат і радіусами r і R, виключаючи точки сфери радіуса r і включаючи точки сфери радіуса R. Таке тіло називають **кульовою оболонкою**.

Для функції трьох змінних областю визначення може бути або весь тривимірний простір, або його частина.

7. Відстань між двома точками $A(x_1, x_2, x_3)$ і $B(y_1, y_2, y_3)$ у тривимірному просторі

$$d = \rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

є функцією шести змінних: $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$. Знайти область її визначення.

Р о з в ' я з а н н я. Областю визначення цієї функції може бути або весь шестивимірний простір, або його частина.

З прикладів 1–5 випливає, що областю визначення функції двох змінних є вся площина або її частина.

Область визначення функції багатьох змінних розглянуто у прикладах 6–7. Вона може бути обмеженою, необмеженою, замкненою, незамкненою або відкритою.

Область D називається **відкритою (замкненою)**, якщо множина точок області відкрита (замкнена).

Кажуть, що область D обмежена (не обмежена), якщо множина точок області обмежена (не обмежена).

У прикладах 1, 5, 7 область D не обмежена, а в решті прикладів — обмежена.

Основні способи задання функції багатьох змінних ті ж самі, що і для функції однієї змінної — табличний, аналітичний і графічний.

У розглянутих прикладах 1–7 функції задано аналітично.

Графічно можна зобразити лише функцію двох змінних.

Як відомо з аналітичної геометрії, функція $z = f(x, y)$ визначає деяку поверхню. Проекцією цієї поверхні на площину xOy є область D визначення функції. Цю поверхню називають графіком функції.

Приклади. **1.** Графічним зображенням функції $z = Ax + By + C$ є площина. Областю визначення цієї функції є координатна площина xOy.

2. Графічним зображенням функції

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

є півсфера з центром на початку координат і радіусом R, яку можна записати у вигляді системи

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Областю визначення цієї функції є круг радіуса R з центром на початку координат

$$x^2 + y^2 \leq R^2.$$

3. Графічним зображенням функції

$$z = a^2x^2 + b^2y^2$$

є еліптичний параболоїд. Область визначення цієї функції — координатна площина xOy.

4. Графічно рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

визначає еліпсоїд, воно задає неявно двозначну функцію або дві такі функції:

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad c > 0,$$

з областю визначення

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Для дослідження функцій двох змінних часто використовують метод перерізів, який полягає в тому, що поверхню $z = f(x, y)$ перетинають площинами $x = x_0$ і $y = y_0$.

Розглядають графіки функцій $z = f(x_0, y)$ або $z = f(x, y_0)$ однієї змінної і за графіками цих функцій визначають графік функції двох змінних (рис. 3.59).

Можна фіксувати не поточні координати (x або y), а саму функцію. При цьому дістанемо функцію однієї змінної

$$f(x, y) = c.$$

Геометричне місце точок (x, y) площини, в яких функція набуває одного й того самого значення, називається **лінією рівня**. Рівняння лінії рівня записують у вигляді

$$f(x, y) = c.$$

Будуючи лінії рівня для різних значень $z = c$, можна здобути повне уявлення про графік функції двох змінних.

Наприклад, висота над рівнем моря точок земної поверхні є функцією координат цих точок.

Якщо сполучити точки, що розміщені на одній і тій самій висоті, то дістанемо лінію рівня. Звичайно ці лінії зображують на площині. Надамо c різних значень, рівновіддалених одне від одного, і побудуємо відповідно лінії рівня на площині xOy. Тоді щільність ліній рівня вказуватиме на швидкість зростання функції $z = f(x, y)$.

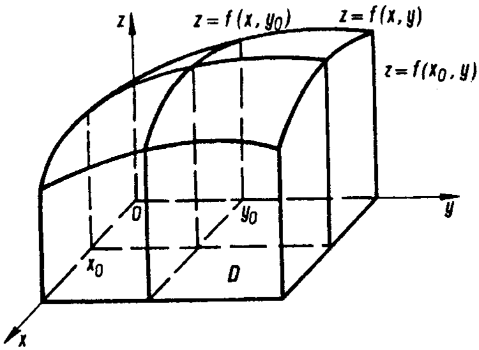


Рис. 3.59

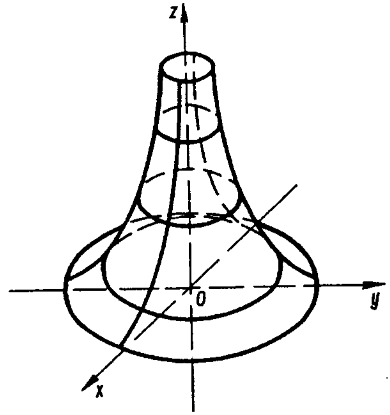


Рис. 3.60

Приклад. Знайти лінії рівня і побудувати графік функції

$$z = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}.$$

Р о з в' я з а н н я. Лінії рівня $z = c$ знайдемо з рівняння

$$\frac{1}{2x^2 + 3y^2} = c, \text{ де } c > 0.$$

Перетворимо рівняння сім'ї ліній рівня

$$2x^2 + 3y^2 = \frac{1}{c}, \quad \textit{або} \quad \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3c}}\right)^2} = 1.$$

Із останнього рівняння випливає, що лініями рівня даної функції є еліпси з півосями $a = \frac{1}{\sqrt{2c}}$ і $b = \frac{1}{\sqrt{3c}}$ (рис. 3.60).

Метод перерізів можна застосувати і для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$. Якщо зафіксувати $u = u_0$, то дістанемо неявну функцію двох змінних $f(x, y, z) = u_0$.

Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається геометричне місце точок простору, в яких функція набуває однакових значень. Рівняння поверхні рівня має вигляд

$$f(x, y, z) = c,$$

де c — стала.

3.18. Класифікація функцій багатьох змінних

Класифікація функцій багатьох змінних здійснюється аналогічно класифікації функцій однієї змінної. Не вдаючись до подробиць, звернімо увагу лише на можливість побудови цілих, дробових, алгебраїчних, трансцендентних, неявних, заданих параметрично, періодичних, парних, непарних, обмежених, необмежених, складних функцій багатьох змінних.

Так, поліном k-го степеня двох змінних запишемо у вигляді

$$z = f(x, y) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} c_{ij} x^i y^j = c_{00} + c_{10}x + c_{20}x^2 + \ldots +$$
$$+ c_{k0}x^k + c_{11}xy + c_{21}x^2y + \ldots + c_{k-1,1}x^{k-1}y + \ldots +$$
$$+ c_{01}y + c_{02}y^2 + \ldots + c_{0k}y^k.$$

Дамо означення складної функції k змінних.

Нехай задано n функцій від k змінних $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_k$:

$$\begin{array}{lcl} x_1 = \varphi_1 (t_1, t_2, \ldots, t_k), & & x_1 = \varphi_1 (P), \\ x_2 = \varphi_2 (t_1, t_2, \ldots, t_k), & \text{або} & x_2 = \varphi_2 (P), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n (t_1, t_2, \ldots, t_k), & & x_n = \varphi_n (P), \end{array}$$

де $P (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ — точка k-вимірного простору E_k. Нехай область значень функцій $x_1, x_2, \ldots, x_n$ утворює деякий n-вимірний простір E_n. Припустимо, що у цьому просторі визначена функція

$$u = f (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тоді ця функція називається **складною** і позначається

$$u = f (x_1 (t_1, t_2, \ldots, t_k), x_2 (t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, x_n (t_1, t_2, \ldots, t_k)).$$

Наприклад, функція

$$u = \arcsin (t_1 t_2) + t_1 t_2 + \ln (1 - t_1 t_2)$$

є складною функцією двох змінних: t_1 і t_2.

Дійсно, введемо функції

$$x_1 = \arcsin (t_1 t_2), \quad x_2 = t_1 t_2; \quad x_3 = \ln (1 - t_1 t_2).$$

Тоді функція

$$u = f (x_1 (t_1, t_2), \ x_2 (t_1, t_2), \ x_3 (t_1, t_2)) =$$
$$= x_1 (t_1, t_2) + x_2 (t_1, t_2) + x_3 (t_1, t_2)$$

є складною.

Якщо простір E_k одновимірний, тобто

$$x_1 = \varphi_1 (t), x_2 = \varphi_2 (t), \ldots, x_n = \varphi_n (t),$$

то кажуть, що функція

$$u = f (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

задана **параметрично.**

Функцію

$$u = f\,(x_1(t),\ x_2\,(t),\ \ldots,\ x_n\,(t))$$

можна розглядати як складну функцію однієї змінної.

Стисло означення складної функції багатьох змінних можна сформулювати таким чином:

якщо у функції багатьох змінних незалежні змінні є, у свою чергу, функціями інших змінних, то така функція багатьох змінних називається складною.

Наприклад, функція двох змінних

$$u = \sin^7\,(3xy)$$

не є складною функцією багатьох змінних, хоча з позиції функції однієї змінної x або y вона складна. Однак ця сама функція $u = \sin^7\,(3xy)$ при $x = 3t + 7$, $y = \sqrt{1 - t^2}$, $-1 \le t \le 1$, є складною.

Для складної функції можна повторити її означення у термінах множин (див. п. 3.1).

При розгляді складної функції у термінах внутрішньої і зовнішньої функцій можливі такі випадки.

1. Зовнішня і внутрішня функції є функціями однієї змінної:

$$u = f\,(\varphi\,(x)),\ \text{де}\ u = f\,(v),\ v = \varphi\,(x).$$

Наприклад, $u = a^{x^2}$, де $u = a^v$, $v = x^2$.

2. Зовнішня функція є функцією однієї змінної, а внутрішня — функцією багатьох змінних:

$$u = f\,(\varphi\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)),\ \text{де}\ u = f\,(v),\ v = \varphi\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

3. Зовнішня функція є функцією багатьох змінних, а кожна з цих змінних є функцією інших змінних:

$$u = f\,(x_1\,(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k),\ x_2\,(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k),\ \ldots,\ x_n\,(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k)),$$

де

$$\begin{aligned} u &= f\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\\ x_1 &= x_1\,(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k),\\ x_2 &= x_2\,(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n &= x_n\,(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k). \end{aligned}$$

Тільки у цьому випадку функція розглядається як складна функція багатьох змінних.

Введемо означення **неявної функції кількох змінних**.

Нехай задано рівняння

$$F\,(x,\ y,\ z) = 0$$

та існує деяка множина m точок $X(x, y)$, на якій визначена функція $z = f(x, y)$ така, що

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0, \quad \forall X \in m.$$

Тоді функція $z = f(x, y)$ називається **неявною функцією двох змінних**.

Отже, рівняння

$$F(x, y, z) = 0,$$

взагалі кажучи, задає функцію двох змінних, а рівняння

$$F(x, y, z, t) = 0$$

— функцію трьох змінних і т. д.

Нехай тепер задано два рівняння:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Нехай на множині m точок $X \in m$ існують дві функції

$$\begin{cases} y = f_1(x), \\ z = f_2(x), \end{cases} \tag{3.26}$$

при підстановці яких в рівняння (3.25) ліві частини цього рівняння перетворюються на нуль на всій множині m.

Функції (3.26) називаються **неявно заданими** або **функціями, заданими системою рівнянь** (3.25).

Взагалі система функцій

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_k), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_k), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_k), \end{cases}$$

визначена на деякій множині m точок $X(x_1, x_2, \dots, x_k)$, що є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \end{cases}$$

називається **неявно заданою системою функцій багатьох змінних.**

ВПРАВИ. **1.** Знайти область визначення функції

$$z = \arccos(|x| + |y|).$$

Відповідь. $D(f) = \{x, y \in \mathbf{R}: -1 \le x + y \le 1 \wedge -1 \le x - y \le 1\}$ — квадрат з вершинами у точках $(\pm 1, \pm 1)$, включаючи точки його сторін.

2. Знайти область визначення функції

$$u = f(x, y, z) = \ln(12 - 2x^2 - 3y^2 - 4z^2).$$

Відповідь. $D(f) = \left\{x, y, z \in R: \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{3} < 1\right\}$ — всі внутрішні точки еліпсоїда з півосями на координатних осях $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = \sqrt{3}$ і центром у початку координат.

3. Знайти область визначення функції

$$u = f(x, y, z) = \arcsin x + \arccos y + \sqrt{1 - z^2}.$$

Відповідь. $D(f) = \{x, y, z \in \mathbf{R}: |x| \le 1 \wedge |y| \le 1 \wedge |z| \le 1\}$ — куб, центр якого міститься в початку координат, сторона дорівнює 2, грані паралельні координатним площинам.

4. Знайти поверхні рівня c функції

$$z = f(x, y) = \lg(x^2 + y^2).$$

Відповідь. $x^2 + y^2 = 10^c$, де $10^c > 0$, є концентричні кола з центром у початку координат і радіусами $r = \sqrt{10^c}$.

5. Знайти поверхні рівня c функції

$$u = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - y^2 + z^2}.$$

Відповідь. $x^2 - y^2 + z^2 = c^2$, $c > 0$. При $c = 0$ це конічна поверхня, при $c > 0$ — однопорожнинні гіперболоїди.

§ 4. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

4.1. Границя функції однієї змінної за Коші

Припустимо, що незалежна змінна x має границю a. Розглянемо поведінку функції $y = f(x)$ при $x \to a$.

Число A називають **границею функції** $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо вона визначена у деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, що задовольняють нерівність

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{4.1}$$

функція $y = f(x)$ задовольняє нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Це записують таким чином:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A. \tag{4.3}$$

Умова $|x - a| > 0$ означає, що $x \ne a$.

При вивченні границі функції сама гранична точка $x = a$ виключається з розгляду, тому що:

1) функція у цій точці може бути і не визначеною;

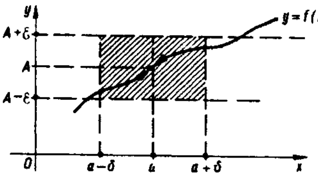


Рис. 3.61

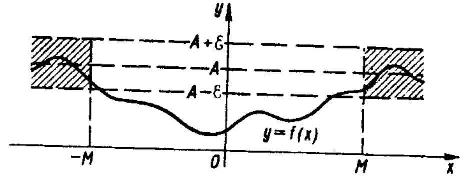


Рис. 3.62

2) якщо значення функції у точці $f(a)$ задано, то може трапитися, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, у точці a не виконується, а в усіх інших точках вона виконується.

Як у першому, так і в другому випадках границя функції може існувати, а може і не існувати.

Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого ε-околу точки A можна знайти такий δ-окіл точки a, що коли значення аргументу взято з «виколотого» δ-околу $(a - \delta; a + \delta)$, то значення функції належатиме ε-околу $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ (рис. 3.61).

Означення границі функції

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

символічно можна записати таким чином:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ Q_\delta(a) : \forall x \in Q_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

або $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $\forall x$, які задовольняють нерівність $0 < |x - a| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Введемо означення границі функції в точці будь-якої точкової множини (одно- або багатовимірної).

Для будь-якого $V(A)$-околу точки A існує такий виколотий окіл $Q(a)$ точки a, що всі значення функції на множині $Q(a)$ належать V-околу точки A. Символічно це запишемо таким чином:

$$\forall \ V(A) \ \exists \ Q(a) \text{ така, що } f(Q(a)) \subset V(A).$$

Зазначимо, що не можна говорити про границю функції, якщо не вказано до чого прямує незалежна змінна.

Приклади. **1.** Довести, що функція $y = 7x - 3$ при $x \to 2$ має границю

$$\lim_{x \to 2} y = 11.$$

Доведення. Нехай задано будь-яке $\varepsilon > 0$. Знайдемо $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - 2| < \delta$, виконується нерівність $|y - 11| < \varepsilon$.

Припустимо, що нерівність $|y - 11| < \varepsilon$ виконується. Тоді

$$|y - 11| = |7x - 3 - 11| = |7x - 14| < \varepsilon,$$

або

$$|7(x-2)| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{7}.$$

Звідси $\delta = \dfrac{\varepsilon}{7}$.

Тепер покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{7} \Rightarrow |7x - 14| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |(7x-3) - 11| < \varepsilon \Rightarrow |y - 11| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 2} y = 11.$$

2. Довести, що

$$\lim_{x\to 0}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 0, \quad x \neq 0.$$

Доведення. Тут $a = 0$, $A = 0$, функція в граничній точці 0 не визначена, тому $0 < |x - a|$.

Нехай задано будь-яке $\varepsilon > 0$. Знайдемо таке $\delta(\varepsilon) > 0$, щоб для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - 0| < \delta$, виконувалась нерівність

$$\left|x \sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon.$$

Припустимо, що нерівність $\left|x \sin\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$ виконується, тоді

$$\left|x \sin\frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|.$$

Якщо за δ взяти ε, тобто припустити, що $\delta = \varepsilon$, то

$$|x| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon \Rightarrow |x| \cdot \left|\sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|x \sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon,$$

звідки

$$\lim_{x\to 0}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Число A називається **границею функції** $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо функція визначена для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > k$ при деякому $k > 0$, і якщо для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $M(\varepsilon) > k$, що при всіх $|x| > M$ виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Позначають границю таким чином:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Дамо геометричну інтерпретацію поняття цієї границі. За заданим $\varepsilon > 0$ завжди знайдеться таке число $M > 0$, що для всіх x, що належать M-околу нескінченно віддаленої точки $(-\infty; -M)$ або $(M; +\infty)$, значення функції потрапляють в ε-окіл точки A (рис. 3.62). У цьому випадку число A є границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$.

Якщо розглядати лише додатні або від'ємні значення x, то можна говорити про границю функції при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$.

Можна легко сформулювати наведене вище означення границі функції при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$.

Приклад. Довести, що функція $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{3x^2 + 1}$ має при $x \to \infty$ границю

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{2}{3}.$$

Доведення. Нехай задано будь-яке $\varepsilon > 0$. Покажемо, що існує таке число $M > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > M$, виконується нерівність

$$\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon.$$

Дійсно, розглянемо вираз

$$\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2x^2 - 1}{3x^2 + 1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{-5}{9x^2 + 3} \right| = \frac{5}{9x^2 + 3} < \frac{5}{x^2} < \varepsilon.$$

Звідси знаходимо $|x| > \sqrt{\dfrac{5}{\varepsilon}}$. Нехай $M = \sqrt{\dfrac{5}{\varepsilon}}$. Тоді

$$|x| > M \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}} \Rightarrow x^2 > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{5}{x^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{5}{9x^2 + 3} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-5}{9x^2 + 3} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2x^2 - 1}{3x^2 + 1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 + 1} = \frac{2}{3}.$$

Функція $y = f(x)$ при $x \to a$ називається **нескінченно великою** (має границю ∞), якщо вона визначена у деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a, і для будь-якого $M > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$. Позначається це таким чином:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Яким би великим не було задане число $M > 0$, точки графіка $y = f(x)$, крім, можливо, точки $(a, f(a))$, лежать поза смугою, обмеженою прямими $y = \pm M$, якщо значення x взято із околу $(a - \delta; a + \delta)$ (рис. 3.63).

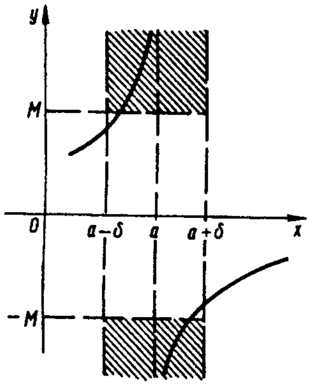


Рис. 3.63

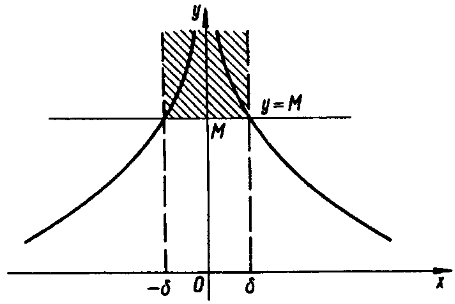


Рис. 3.64

Приклад. Показати, що функція $y = \frac{1}{x^2}$ при $x \to 0$ є нескінченно великою, тобто

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Р о з в' я з а н н я. Нехай задано будь-яке $M > 0$. Знайдемо такий δ-окіл нуля, що при всіх x ($x \neq 0$) із цього околу виконується нерівність $\left|\frac{1}{x^2}\right| > M$.

Розглянемо нерівність

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| > M \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M \Rightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Поклавши $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, дістанемо

$$\forall x : |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow \left|x^2\right| < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{\left|x^2\right|} > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2}\right| > M.$$

Оскільки функція $\frac{1}{x^2}$ при всіх x додатна, то $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (рис. 3.64).

Функція $y = f(x)$ при $x \to \infty$ називається **нескінченно великою** (має границю ∞), якщо вона визначена для всіх $|x| > k$, де $k > 0$, і для будь-якого $M > 0$ існує таке $N > k$, що при всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.

Позначають це таким чином:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Функція $y = f(x)$ є нескінченно великою при $x \to \infty$, якщо для будь-якого $M > 0$ знайдеться таке $N > k$, що як тільки значення x потрапляють у N-окіл нескінченно віддаленої точки $(-\infty; -N) \cup$

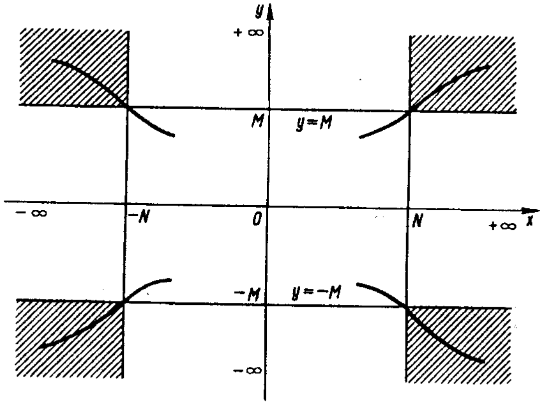


Рис. 3.65

$\cup$ $(+N;\ +\infty)$, значення функції потрапляють у M-окіл нескінченно віддаленої точки $(-\infty;\ -M) \cup (+M;\ +\infty)$ (рис. 3.65).

Приклад. Покажемо, що функція $y = x^3$ при $x \to \infty$ є нескінченно великою, тобто

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty.$$

Розв'язання. Нехай задано будь-яке $M > 0$. Знайдемо таке число $N > 0$, щоб при всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконувалася нерівність $|x^3| > M$. Маємо

$$|x^3| > M \to |x|^3 > M \to |x| > \sqrt[3]{M}.$$

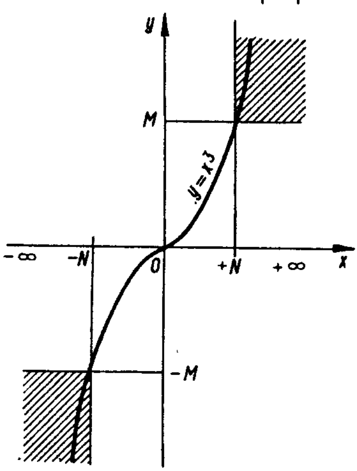


Рис. 3.66

Нехай $N = \sqrt[3]{M}$, тоді (рис. 3.66)

$$\forall x : |x| > N \Leftrightarrow |x| > \sqrt[3]{M} \Rightarrow |x|^3 > M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x^3| > M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty.$$

Для нескінченно великих функцій в околі точки $x = a$ умова (3.9) не виконується. Тому нескінченно великі функції належать до необмежених функцій в околі точки $x = a$.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $a \le x < b$ або $a \le x < +\infty$.

Число A_1 називається **границею функції** $y = f(x)$ **справа** при $x \to a$, $x > a$, якщо функція визначена у правому δ-околі точки a, і для будь-якого

$\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, взятих з інтервалу $a < x < a + \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Позначають це таким чином:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = A_1, \text{ або } \lim_{x \to a+0} f(x) = A_1. \tag{4.4}$$

Запис «$x \to a + 0$» означає, що x прямує до a справа, набуваючи значень, більших за a (рис. 3.67).

Число A_2 називається **границею функції** $y = f(x)$ **зліва** у точці a при $x \to a$, $x < a$, якщо функція визначена у лівому δ-околі точки a, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x з інтервалу $a - \delta < x < a$ виконується нерівність $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

Позначають це таким чином:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = A_2 \quad \text{або} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = A_2. \tag{4.5}$$

Запис «$x \to a - 0$» означає, що x прямує до a зліва, набуваючи значень, менших від a (рис. 3.68).

Для правої і лівої границь функції застосовують і такі позначення:

$$A_1 = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) = A^+,$$

$$A_2 = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) = A^-.$$

Якщо $a = 0$, а x прямує до 0 справа (або зліва), то пишуть $x \to +0$ (або $x \to -0$).

Теорема 4. *Для того щоб функція $y = f(x)$ при $x \to a$ мала границю A, необхідно і достатньо, щоб для неї у точці a існували однобічні (справа і зліва) границі, кожна з яких дорівнює A, тобто*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\lim_{x \to a-0} f(x) = A^- \wedge \lim_{x \to a+0} f(x) = A^+),$$

де $A^- = A^+ = A$.

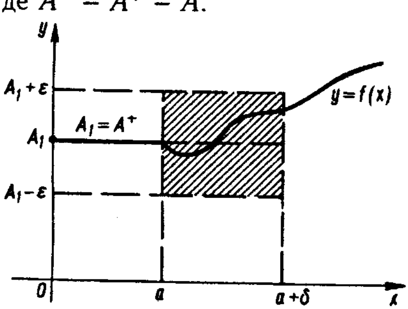


Рис. 3.67

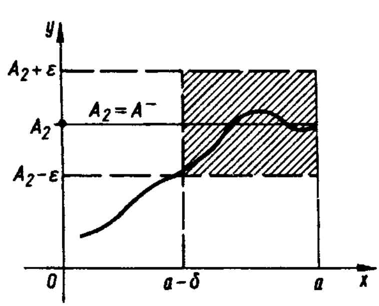


Рис. 3.68

Доведення. *Необхідність.* Нехай існує $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при всіх x із нерівності $0 < |x - a| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Звідси при всіх x, які задовольняють нерівність $a - \delta < x < a$ і $a < x < a + \delta$, випливає, що

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Враховуючи рівності (4.4) і (4.5), робимо висновок, що існують односторонні границі

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A^- = A \quad \text{і} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = A^+ = A.$$

Достатність. Нехай існують односторонні границі

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A^- \quad \text{і} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = A^+, \text{ причому } A^- = A^+ = A.$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх x, які задовольняють нерівності

$$a - \delta < x < a \text{ і } a < x < a + \delta,$$

виконуються відповідно нерівності

$$A^- - \varepsilon < f(x) < A^- + \varepsilon \quad \text{і} \quad A^+ - \varepsilon < f(x) < A^+ + \varepsilon.$$

Це можна записати таким чином:

$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \; A^- = A^+ = A.$$

Отже,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Так, функція $y = f(x)$ має границю при $x \to a$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Розглянуті вище означення границі функції були вперше введені Коші.

***Приклади.* 1.** Функція $y = \sqrt{x - a}$ має границю лише справа:

$$\lim_{x \to a+0} \sqrt{x - a} = 0,$$

оскільки функція $y = \sqrt{x - a}$ визначена лише для $x \ge a$.

2. Функція $y = \sqrt{a - x}$ має границю лише зліва:

$$\lim_{x \to a-0} \sqrt{a - x} = 0.$$

Для функцій $y = \sqrt{x - a}$ і $y = \sqrt{a - x}$ при $x \to a$ границі у звичайному розумінні не існує.

Якщо функція визначена у деякому околі точки a, а її односторонні границі у цій точці різні, то функція у даній точці границі не має (рис. 3.69).

3. Розглянемо функцію

$$y = f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \operatorname{sign} x = 1, \qquad \lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1.$$

Звідси випливає, що границя

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sign} x$$

не існує.

4.2. Границя функції за Гейне[1]

Число A називається **границею функції** $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо вона визначена у деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a, і для будь-якої послідовності значень аргументу $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, що має границю a, $\lim x_n = a$, $x_n \neq a$, $n = 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$, послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ для цих значень аргументу має границю A.

Теорема 5. *Для того щоб існувала границя за Коші, необхідно і достатньо, щоб існувала границя за Гейне, або, іншими словами, для того щоб існувала границя* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, *необхідно і достатньо, щоб для будь-якої послідовності значень аргументу* $\{x_n\}$, *збіжної до* a, *послідовність відповідних значень функції* $\{f(x_n)\}$ *збігалась до* A.

Доведення. *Необхідність.* Нехай існує границя

$$\lim_{x \to a} f(x) = A. \qquad (4.6)$$

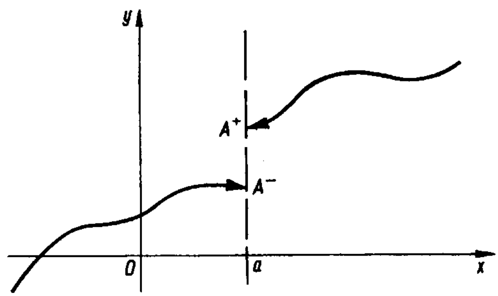


Рис. 3.69

Покажемо, що для будь-якої послідовності значень аргументу $\{x_n\}$, де $x_n \to a$, послідовність відповідних значень функції $\{f(x_n)\}$ має границю A.

За умовою (4.6) для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати

[1] Генріх Гейне (1821–1881) — німецький математик.

таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що коли

$$0 < |x - a| < \delta, \text{ то } |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4.7}$$

Тоді для $\delta > 0$, відповідного заданому $\varepsilon > 0$, підберемо $N(\delta) > 0$ таке, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \delta$. Тобто за умовою (4.6) маємо $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Таким чином,

$$\lim_{x_n \to a} f(x_n) = A. \tag{4.8}$$

Достатність. Нехай обрана така послідовність $\{x_n\}$, що $\lim x_n = a$ і $\lim\limits_{x_n \to a} f(x_n) = A$. Покажемо, що

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Згідно з умовою для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, а для $\delta > 0$ існує таке $N > 0$, що при всіх $n > N$ виконуються нерівності

$$0 < |x_n - a| < \delta \text{ і } |f(x_n) - A| < \varepsilon. \tag{4.9}$$

Нерівності (4.7) і (4.9) рівносильні за означенням (див. п. 2.6), тобто виконується нерівність

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Припустимо, що за цих умов

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq A.$$

Це означає, що для деяких значень x, які задовольняють нерівності

$$0 < |x - a| < \delta,$$

існує таке x_1^*, що при $|x_1^* - a| < \delta$ виконується нерівність

$$|f(x_1^*) - A| \geq \varepsilon.$$

Тепер виберемо послідовність

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots \to 0.$$

Для кожного члена цієї послідовності знайдемо таке значення аргументу $x = x_n^* \in \{(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)\}$, що при

$$\left|x_n^* - a\right| < \delta_n$$

виконується нерівність

$$\left|f(x_n^*) - A\right| \geq \varepsilon. \tag{4.10}$$

З нерівності (4.9) дістаємо

$$\lim x_n^* = a,$$

а із нерівності (4.10)

$$\lim_{x_n^* \to a} f(x_n^*) \neq A.$$

Тим самим визначена послідовність значень аргументу $\{x_n^*\}$, для якої відповідна послідовність значень функцій $\{f(x_n^*)\}$ не має границі A, що суперечить умові (4.8)[1].

Таким чином, теореми, доведені раніше для послідовностей, справджуються і для функцій. Отже, сформулюємо такі ***твердження (теореми)***.

1. *Функція, що має скінченну границю, обмежена в околі точки $x = a$. Таким чином, якщо існує* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, *то у деякому околі* $(a - \delta, a + \delta)$ *точки а виконується нерівність*

$$|f(x)| < M.$$

2. *Якщо функція має границю, то вона єдина.*

3. *Виконується теорема 3 з п. 2.8, а також теорема Гур'єва.*

Теорема Гур'єва. *Якщо* $f(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$ *і*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = A,$$

то

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = A.$$

4. *Функція називається нескінченно малою при* $x \to a$, *якщо*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

5. *Сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.*

6. *Добуток обмеженої функції та нескінченно малої функції є функцією нескінченно малою.*

7. *Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, що має границю, відмінну від нуля, є нескінченно малою функцією.*

8. *Для того щоб число А було границею функції* $y = f(x)$ *при* $x \to a$ *необхідно і достатньо, щоб різниця* $f(x) - A$ *була нескінченно малою функцією, тобто*

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(f(x) = A + \alpha(x),\ \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0\right).$$

Так само, як і для послідовностей, справджуються теореми про арифметичні операції над функціями, що мають границю (див. п. 2.10).

---

[1] При доведенні теореми суттєво використовується еквівалентність нерівностей (4.7) і (4.9).

9. *Якщо існують границі*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,\ \lim_{x\to a} \varphi(x) = B,\ \lim_{x\to a} \psi(x) = C,$$

то

$$\lim_{x\to a} [f(x) + \varphi(x) + \psi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} \varphi(x) + \lim_{x\to a} \psi(x).$$

10. *За тих самих умов*

$$\lim_{x\to a} \left[f(x) \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \varphi(x) \cdot \lim_{x\to a} \psi(x).$$

11. *Якщо існує* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *і* $\lim_{x\to a} \varphi(x) = B$, *причому* $B \neq 0$, *то*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

12. *Функція* $f(x)$, *обернена до нескінченно великої функції при* $x \to a$ *або* $x \to \infty$, *є функцією нескінченно малою при* $x \to a$ *або* $x \to \infty$ *і навпаки.*

13. *Наведемо аналог теореми про монотонну послідовність. Монотонна функція у кожній точці області визначення має границі зліва і справа.*

Використовуючи теореми 1–13, знайдемо границі деяких функцій $f(x)$ при $x \to a$, де a — деяке число.

Приклади. **1.** Нехай функція $y = f(x) = C$ — стала, тоді

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} C = C.$$

2. Нехай функція $y = f(x) = x$, тоді

$$\lim_{x\to a} x = a.$$

3. Нехай функція $y = f(x) = x^n$, де $n \in \mathbf{N}$, тоді, використовуючи твердження 10, маємо

$$\lim_{x\to a} x^n = \underbrace{\lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x \cdot \ldots \cdot \lim_{x\to a} x}_{n \text{ раз}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n.$$

4. Нехай функція $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$ — многочлен. Використовуючи твердження 9 і 10, а також результати попередніх прикладів, маємо

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n) =$$

$$= \lim_{x\to a} c_0 + \lim_{x\to a} c_1x + \cdots + \lim_{x\to a} c_nx^n = c_0 + c_1a + c_2a^2 + \cdots + c_na^n.$$

5. Нехай

$$y = f(x) = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$$

— дробово-раціональна функція, тоді, використовуючи результати розглянутих прикладів і твердження 11, а також припускаючи, що a не є коренем знаменника, дістанемо

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} = \frac{c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a^n}{b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \ldots + b_m a^m}.$$

6. Розглянемо приклади з нескінченно віддаленою граничною точкою. Очевидно, $\lim\limits_{x\to\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$;

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty^n = \infty, \text{ де } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

$$\lim_{x\to\infty}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[x^n\left(\frac{c_0}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_2}{x^{n-2}} + \cdots + c_n\right)\right] = \infty$$

як добуток нескінченно великої та обмеженої величин (у круглих дужках всі доданки, крім $c_n \neq 0$, при $x \to \infty$, нескінченно малі).

7. Знайдемо границю дробово-раціональної функції

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}.$$

Розглянемо такі випадки.

а) Нехай $n > m$, тоді, розділивши чисельник і знаменник на x^m, знаходимо

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{c_0}{x^m} + \dfrac{c_1}{x^{m-1}} + \dfrac{c_2}{x^{m-2}} + \ldots + c_n x^{n-m}}{\dfrac{b_0}{x^m} + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_2}{x^{m-2}} + \ldots + b_m}.$$

Якщо тепер перейти до границі у кожному доданку чисельника і знаменника, то у чисельнику дістанемо нескінченність, а у знаменнику — число b_m, тобто

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

б) Нехай $n = m$, тоді, поділивши чисельник і знаменник на $x^n = x^m$, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{c_0}{x^m} + \dfrac{c_1}{x^{m-1}} + \dfrac{c_2}{x^{m-2}} + \ldots + c_m}{\dfrac{b_0}{x^m} + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_2}{x^{m-2}} + \ldots + b_m} = \frac{c_m}{b_m}.$$

в) Нехай $n < m$, тоді, розділивши чисельник і знаменник на x^n, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{c_0}{x^n} + \dfrac{c_1}{x^{n-1}} + \dfrac{c_2}{x^{n-2}} + \ldots + c_n}{\dfrac{b_0}{x^n} + \dfrac{b_1}{x^{n-1}} + \dfrac{b_2}{x^{n-2}} + \ldots + b_m x^{m-n}} = 0,$$

оскільки c_n є скінченне число, відмінне від нуля, а у знаменнику — нескінченно велика величина.

Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m} =$$

$$= \begin{cases} \infty, \text{ якщо } n > m, \\ \dfrac{c_m}{b_m}, \text{ якщо } n = m, \\ 0, \text{ якщо } n < m. \end{cases}$$

8. Знайдемо границю функції $y = f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 3x + 2}$ при $x \to 2$. Границя чисельника

$$\lim_{x\to2}(x^4 - 16) = \lim_{x\to2} x^4 - \lim_{x\to2} 16 = 16 - 16 = 0,$$

границя знаменника

$$\lim_{x\to2}(x^2 - 3x + 2) = \lim_{x\to2} x^2 - 3\lim_{x\to2} x + \lim_{x\to2} 2 = 4 - 6 + 2 = 0.$$

Теорему про границю частки застосувати не можна, оскільки границя знаменника дорівнює нулю. Дістали невизначеність виду «$\frac{0}{0}$». Щоб розкрити цю невизначеність, перетворимо дану функцію, враховуючи, що $x \neq 2$.

Розкладемо чисельник і знаменник даного дробу на множники

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) =$$
$$= (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8),$$
$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1),$$

тоді

$$y = f(x) = \frac{(x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)}{(x-2)(x-1)} =$$
$$= \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x - 1},\ x \neq 2.$$

Оскільки невизначеність виключена, то можна знайти

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x - 1} = \frac{2^3 + 2\cdot2^2 + 4\cdot2 + 8}{2 - 1} = 32.$$

Зазначимо, що коли при відшуканні границі дробово-раціональної функції $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ граничне значення аргументу є коренем чисельника і знаменника, то цю функцію можна подати у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x - a)P_1(x)}{(x - a)Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

де $x \to a$, $x \neq a$.

Як і при відшуканні границь послідовностей, так і при відшуканні границь функцій, крім невизначеностей $\frac{0}{0}$, зустрічаються невизначеності типу

$$\frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0.$$

Поки що ці невизначеності будемо розкривати, користуючись поняттям про границю та твердженнями 1–13 про границю.

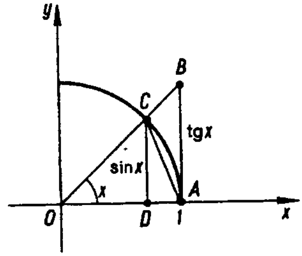


Рис. 3.70

У математичному аналізі існує загальний прийом розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя[1] — Бернуллі[2].

4.3. Дві важливі границі

Перша важлива границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ визначена в області $D(f)=\{x\in R \mid x\neq 0\}$, симетричній відносно початку координат, і, крім того, справджується рівність

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x).$$

Отже, ця функція парна. Тому, якщо у точці $x=0$ існують однобічні границі, то вони рівні між собою:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

Розглянемо границю цієї функції у точці $x=0$ справа і доведемо, що

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Побудуємо у першій чверті координатної площини xOy коло одиничного радіуса (рис. 3.70). Нехай величина кута AOC дорівнює значенню аргументу функції x. Враховуючи припущення про площі, знаходимо нерівності

$$S_{\Delta AOC}<S_{\text{сект.}AOC}<S_{\Delta AOB}.$$

---

[1] Франсуа Лопіталь (1661–1704) — французький математик.
[2] Йоган Бернуллі (1667–1748) — швейцарський математик.

Оскільки

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|CD| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{\text{сект.}AOC} = \frac{1}{2}x|OA|^2 = \frac{1}{2}x\cdot 1^2 = \frac{1}{2}x,$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|OB| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

то

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

або

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{де} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Розділивши обидві нерівності на $\sin x > 0$, дістанемо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ або } 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Звідси

$$1 - 1 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x,$$

або

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin^2\frac{x}{2}. \qquad (4.11)$$

Враховуючи, що $\sin x < x$ при $x > 0$, знаходимо

$$\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2} \quad \text{і} \quad \sin\frac{x}{2} \le 1.$$

Перемноживши ці нерівності, дістаємо

$$\sin^2\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}\cdot 1 = \frac{x}{2},$$

або

$$2\sin^2\frac{x}{2} < x. \qquad (4.12)$$

Із нерівностей (4.11) та (4.12) робимо висновок, що

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Оскільки

$$\lim_{x\to+0} 0 = \lim_{x\to+0} x = 0,$$

то за теоремою Гур'єва

$$\lim_{x\to+0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=0, \text{ або } \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Таким чином,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Приклади. **1.** Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x},\ a\neq 0.$$

Розв'язання. Нехай $ax=y$. Тоді при $x\to 0$ і $y\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{a\sin y}{y}=a\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=a\cdot 1=a.$$

2. Знайти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin mx},\quad m,\ n\neq 0.$$

Розв'язання. Запишемо цю границю у вигляді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin mx}=\lim_{x\to 0}\frac{n\dfrac{\sin nx}{nx}}{m\dfrac{\sin mx}{mx}}=$$

$$=\frac{n}{m}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx}{nx}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{mx}}=\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{1}=\frac{n}{m}.$$

Друга важлива границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \tag{4.13}$$

де $x\to\infty$, означає, що $x\to+\infty$ або $x\to-\infty$.
Як було показано у формулі (2.35),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

де n — натуральне число.
Доведемо, що рівність (4.13) справджується для $x\geq 1$, тобто

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{4.14}$$

Нехай $E(x)=n$. Тоді $n\leq x<n+1$, а $\dfrac{1}{n}\geq\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{n+1}$.

Таким чином, справджується нерівність

$$1+\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}.$$

Враховуючи, що $n+1>x\geq n$, дістаємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}. \qquad (4.15)$$

Тепер знайдемо границі:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=$$

$$=e\cdot 1^{-1}=e.$$

Оскільки з нерівностей $n\leq x<n+1$ при $n\to\infty$ випливає, що $x\to+\infty$, а у нерівностях (4.15) права і ліва частини при $n\to+\infty$ прямують до однієї і тієї самої границі, що дорівнює e, то за теоремою Гур'єва

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Покажемо, що

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\ \text{де}\ x<-1. \qquad (4.16)$$

Для доведення введемо змінну $t=-(x+1)$. Оскільки $x<-1$, то $t>0$ і при $x\to-\infty$ маємо $t\to+\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t-1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e\cdot 1=e.$$

З рівностей (4.14) і (4.16) дістаємо другу важливу границю (4.13).

4.4. Границя функції багатьох змінних

Число A називається **границею функції** $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при $x_1\to a_1$, $x_2\to a_2$, ..., $x_n\to a_n$, якщо ця функція визначена у деякому околі точки $M_0(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, крім, можливо, самої точки M_0, і для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon)>0$, що при всіх сукупностях значень $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, які задовольняють нерівності

$$\begin{gathered}0 < |x_1 - a_1| < \delta,\\ 0 < |x_2 - a_2| < \delta,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 0 < |x_n - a_n| < \delta,\end{gathered} \tag{4.17}$$

виконується нерівність

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon. \tag{4.18}$$

Границю функцій багатьох змінних позначають таким чином:

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1\\ x_2 \to a_2\\ \dots\dots\\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A. \tag{4.19}$$

Якщо деякі з аргументів прямують до нескінченності, то за даним $\varepsilon > 0$ знаходимо $\delta(\varepsilon) > 0$ і $N(\varepsilon) > 0$ такі, що нерівності (4.17) зберігаються лише для аргументів, які прямують до скінченного числа. Решта нерівностей перетворюються на такі:

$$|x_i| > N,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

При цьому нерівність (4.18) зберігається.

Очевидно, що це означення містить як окремий випадок означення границі функції однієї змінної (див. п. 4.1).

Візьмемо точку $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, або $M(X)$ і точку $M_0(a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n)$. Тоді нерівності (4.17) — (4.19) можна замінити еквівалентними (див. п. 3.15).

$$0 < \rho(M_0M) < \delta,\quad |f(M) - A| < \varepsilon,\quad \lim_{M \to M_0} f(M) = A. \tag{4.20}$$

Отже, можна сформулювати еквівалентне означення границі: *функція $u = f(M)$ має границею число A при $M \to M_0$, якщо вона визначена у деякому околі точки M_0, крім, можливо, самої M_0, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх M, взятих із кулі радіуса δ з центром у точці M_0, всі значення функції $f(M)$ задовольняють нерівність*

$$|f(M) - A| < \varepsilon.$$

Можна дати означення границі функції багатьох змінних у термінах послідовності за Гейне і показати, що наведене вище означення границі еквівалентне означенню границі в термінах послідовностей.

Для розглянутих границь, які ще називають n-кратними, справджуються твердження 1—13 про границі, які було сформульовано для функцій однієї змінної (див. п. 4.2).

Означення (4.20) символічно можна записати таким чином:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ Q(M_0) \text{ така, що } \forall\ M \subset Q(M_0)$$

$$|f(M) - A| < \varepsilon. \tag{4.21}$$

Функція $u = f(M)$ має у точці M_0 границю, що дорівнює A, якщо функція $f(M)$ визначена у деякому околі точки M_0, крім, можливо, самої точки M_0, і для $\forall\ \varepsilon > 0$ можна знайти проколотий окіл точки M_0 такий, що для $\forall\ M \subset Q(M_0)$ виконується нерівність (4.21).

Введемо поняття границі функції $u = f(M)$ за напрямом.

Нехай $u = f(M)$ визначена в околі точки M_0 n-вимірного евклідового простору E_n з радіусом-вектором $\vec{r}_0$. Виберемо в E_n одиничний вектор $\vec{\omega} = (\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n)$ і $t_0 \geq 0$ — скаляр. Тоді при будь-якому $t \geq 0$ вектор $\vec{r}_0 + t\vec{\omega}$ є променем, що виходить з точки M_0 і співнапрямлений з вектором $\vec{\omega}$. Для заданого $\vec{\omega}$ можна розглядати функцію

$$f(\vec{r}_0 + t\vec{\omega}) = f(a_1 + t\omega_1, a_2 + t\omega_2, \ldots, a_n + t\omega_n), \quad 0 < t < \delta_\omega \qquad (4.22)$$

від скалярного аргументу t, де δ_ω визначаються вектором $\vec{\omega}$.

Границя функції (4.22) як функція однієї змінної t дорівнює

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(\vec{r}_0 + t\vec{\omega}) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(a_1 + t\omega_1,\ a_2 + t\omega_2, \ldots,\ a_n + t\omega_n).$$

Якщо ця границя існує, то вона називається **границею за напрямом вектора** $\vec{\omega}$.

Якщо $\vec{\omega}$ — одиничний орт $\vec{l} = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, напрямлений по осі x_j, то говорять про границю функції в точці M_0 у напрямі додатної півосі x_j

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ (t\to 0+0)\\ t>0}} f(\vec{r}_0 + t\vec{l}) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{j-1},\ a_j + t,\ a_{j+1}, \ldots,\ a_n) \qquad (4.23)$$

і від'ємної півосі x_j

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ (t\to 0+0)\\ t>0}} f(\vec{r}_0 - t\vec{l}) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{j-1},\ a_j - t,\ a_{j+1}, \ldots,\ a_n). \qquad (4.24)$$

Границі (4.23) і (4.24) є аналогами односторонніх границь.

Якщо функція $f(M)$ має у точці M_0 границю, що дорівнює A, то вона має границю, що дорівнює A за будь-яким напрямом. Обернене твердження не виконується.

Для функцій багатьох змінних вводиться поняття про **окремі (прості) границі**.

Розглянемо як приклад функцію двох змінних. Нехай задано функцію $u = f(x, y)$ і при $x \to x_0$ існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$. Тоді ця границя називається окремою.

Окрема границя є функцією від y, тобто

$$\lim_{x\to x_0} u = \lim_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y).$$

Нехай тепер в області визначення функції $\varphi(y)$ існує границя при $y \to y_0$. Тоді

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} [\lim_{x\to x_0} f(x, y)] = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y).$$

Ця границя називається **повторною**.

Приклад. Для функції $f(x, y) = \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$ знайти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$; б) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = y - 1$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = -1$;

б) $\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = 1 + x$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = 1$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ не існує.

У повторних границях не завжди можна міняти місцями окремі границі.

Зазначимо, що істотною відмінністю між границями функції однієї змінної і функції двох (багатьох) змінних є те, що незалежна змінна функції однієї змінної прямує до граничної точки a по прямій (осі абсцис), а точка $M(x, y)$, де x і y — незалежні змінні двох змінних, може прямувати до точки M_0 по будь-якій лінії.

Тому, щоб показати, що функція двох (багатьох) змінних у деякій точці не має границі, досить вказати два різні шляхи прямування точки $M(x, y)$ до точки M_0, в яких значення функції прямують до двох різних чисел.

Приклади. **1.** Довести, що функція

$$u = f(x, y) = \frac{\sin x}{y}$$

не має границі при $x \to 0$ і $y \to 0$.

Розв'язання. Дійсно, якщо точка $M(x, y)$ прямує до точки $O(0, 0)$ по прямій $y = x$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin x}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а якщо по прямій $y = -x$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin x}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-x} = -1.$$

Це означає, що функція $f(x, y)$ у точці $O(0, 0)$ границі не має.

2. Довести, що функція

$$f(x, y) = \frac{x^6 + x^2y^2}{x^4y + x^6 - y^3}$$

у точці $M(0, 0)$ не має границі.

Розв'язання. Якщо точка $M(x, y)$ прямує до точки $M_0(0, 0)$ по осі ординат, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{-y^3} = \lim_{y\to 0} 0 = 0;$$

якщо по прямій $y = kx$, $k \neq 0$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, kx) = \lim_{x\to 0}\frac{x^6 + x^4k^2}{x^5k + x^6 - x^3k^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3 + xk^2}{x^2k + x^3 - k^3} = \frac{0}{-k^3} = 0;$$

якщо по осі абсцис, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^6}{x^6} = 1.$$

Отже, границя

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^6 + x^2y^2}{x^4y + x^6 - y^3}$$

не існує.

3. Знайти границю

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Розв'язання. При відшуканні границь функції двох змінних іноді зручно переходити до полярних координат

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Тоді при $M(x, y) \to M_0(0, 0)$ маємо $r \to 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Таким чином

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^5\cos^3\varphi\sin^2\varphi}{r^4} = \lim_{r\to 0} r\sin^2\varphi\cos^3\varphi = 0,$$

оскільки $|\sin^2\varphi\cos^3\varphi| \leq 1$.

ВПРАВИ. Знайти границі функцій.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 8}$. *Відповідь.* 0.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - 1}$. *Відповідь.* 1.

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^4 + x^3 + x + 1}$. *Відповідь.* ∞.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$. *Відповідь.* 0,75.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^3}{2x^3+x^2-1}$. *Відповідь.* −0,5.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^4+x^3+1}{x^3-1}-2x\right)$. *Відповідь.* 1.

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$. *Відповідь.* 0.

8. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to e}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$. *Відповідь.* e^e.

§ 5. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

5.1. Приріст аргументу і приріст функції

Нехай задано функцію однієї змінної $y = f(x)$ з областю визначення $\langle a,\ b\rangle$.

Візьмемо два значення x з проміжку $\langle a,\ b\rangle$ x_{10} і x_1. Різниця між двома значеннями аргументу називається **приростом аргументу** і позначається через Δx:

$$x_1 - x_{10} = \Delta x. \tag{5.1}$$

Звідси випливає, що приріст аргументу $\Delta x > 0$, якщо $x_1 > x_{10}$, і $\Delta x < 0$, якщо $x_1 < x_{10}$. Знайдемо значення функції в точках x_{10} і x_1:

$$y_{10} = f(x_{10}) \ \text{ і } \ y_1 = f(x_1).$$

Приростом функції називається різниця між двома значеннями функції (рис. 3.71) і позначається Δy:

$$y_1 - y_{10} = f(x_1) - f(x_{10}) = \Delta y. \tag{5.2}$$

Часто одне із значень аргументу або функції, наприклад x_{10} або y_{10}, називається **початковим значенням аргументу або функції**, а x_1 або y_1 — **нарощеним значенням аргументу або функції**.

За формулами (5.1) і (5.2) можна виразити нарощене значення аргументу (функції) через початкове значення і приріст:

$$x_1 = x_{10} + \Delta x,\ y_1 = f(x_{10}) + \Delta y,$$

$$\text{або } y_1 = y_{10} + \Delta y.$$

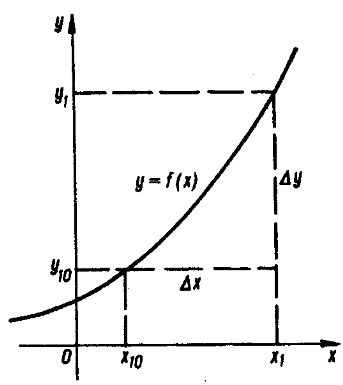


Рис. 3.71

Пропустимо індекс «10» у позначенні аргументу x_{10} і функції $y_{10} = f(x_{10})$, підкреслюючи тим самим довільний вибір фіксованого значення незалежної змінної. Нарощене значення аргументу позначимо через $x_1 = x + \Delta x$, а відповідне йому значення функції $y_1 = f(x + \Delta x)$. Тоді

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Нехай задано функцію n змінних $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, визначену у деякій області D. Виберемо в D фіксовану точку $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, \ldots, x_{n0})$ і змінну точку $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Знайдемо значення функції у кожній з цих точок

$$u_0 = f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \text{ і } u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Різниці

$$\begin{aligned} x_1 - x_{10} &= \Delta x_1, \\ x_2 - x_{20} &= \Delta x_2, \\ &\ldots\ldots \\ x_n - x_{n0} &= \Delta x_n \end{aligned} \tag{5.3}$$

називаються **приростами незалежних змінних** $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Прирости прийнято позначати через Δx_i або h_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Різниця значень функцій у змінній та фіксованій точках називається **повним приростом функції n змінних у фіксованій точці**.

Позначають повний приріст символом Δu, тобто

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}),$$

або

$$\Delta u = f(M) - f(M_0).$$

Як і для функції однієї змінної, числа $f(M_0)$, $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ називаються **початковими значеннями функції і аргументів**, а $f(M)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — **нарощеними значеннями**.

Якщо з рівностей (5.3) знайти нарощені значення аргументів

$$x_i = x_{i0} + \Delta x_i, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

то повний приріст функції

$$\Delta u = f(x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2, \ldots, x_{n0} + \Delta x_n) - f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$$

виразимо через прирости всіх незалежних змінних.

Для функції двох незалежних змінних

$$z = f(x, y)$$

приростами незалежних змінних є

$$\Delta x = x_2 - x_1, \ \Delta y = y_2 - y_1,$$

а повний приріст функції

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1). \tag{5.4}$$

Для функції трьох незалежних змінних

$$u = f(x, y, z)$$

приростами незалежних змінних є

$$x_2 - x_1 = \Delta x, \quad y_2 - y_1 = \Delta y, \quad z_2 - z_1 = \Delta z,$$

а повний приріст функції

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y, z_1 + \Delta z) - f(x_1, y_1, z_1). \qquad (5.5)$$

Якщо початкові значення аргументів або функції позначити через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ або u, то повний приріст функції n змінних запишемо у вигляді

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Якщо у виразі (5.4) покласти $x_1 = x$, $y_1 = y$, то повний приріст функції двох змінних запишемо у вигляді

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Аналогічно, поклавши в (5.5) $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, знаходимо

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

При визначенні повного приросту функції багатьох змінних припускають, що всі незалежні змінні одночасно набувають приросту. Однак приріст кожної незалежної змінної, у свою чергу, є величиною, що не залежить від приросту інших незалежних змінних.

Припустимо, що серед незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ функції

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

лише одна x_i набула приросту Δx_i, а решта змінних не змінили свої значення. Тоді нарощеним значенням функції є

$$u_2 = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

а початкове

$$u_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Запишемо приріст функції, спричинений приростом Δx_i:

$$\Delta_{x_i} u = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) -$$

$$- f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Частинним приростом функції n змінних по одній змінній називається різниця між нарощеним значенням функції і початковим у припущенні, що лише ця змінна набула відмінного від нуля приросту.

Очевидно, що для функції n змінних можна побудувати n частинних приростів.

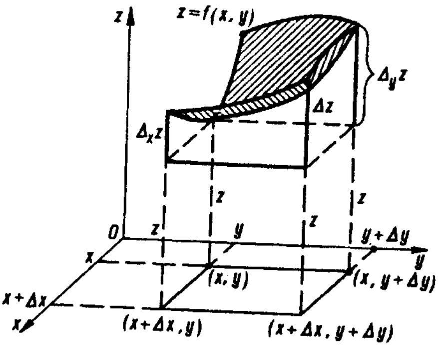


Рис. 3.72

Так, для функції двох змінних частинний приріст по x запишемо у вигляді

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

а частинний приріст по y

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Для функції трьох змінних частинні прирости по x, y і z відповідно мають вигляд

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z),$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z),$$

$$\Delta_z u = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

Зазначимо, що частинні прирости функції багатьох змінних, а також їх сума не завжди збігаються з повним приростом. На рис. 3.72 зображено частинні прирости $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ і повний приріст Δz функції двох змінних $z = f(x, y)$.

Приклад. Для функції $z = f(x, y) = x^2 y$ знайти прирости $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz.
Розв'язання.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)^2 y - x^2 y = 2xy\Delta x + y\Delta x^2;$$

$$\Delta_y z = (y + \Delta y) x^2 - x^2 y = x^2 \Delta y;$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y = 2xy\Delta x + y\Delta x^2 +$$
$$+ \ 2x\Delta x\Delta y + x^2\Delta y + \Delta x^2\Delta y.$$

Всі прирости різні і

$$\Delta_x z + \Delta_y z \neq \Delta z.$$

5.2. Неперервність функції однієї змінної у точці і області

Функція $y = f(x)$ називається **неперервною у деякій точці** a, якщо:

1) функція визначена у точці a та її околі;

2) існує границя функції при $x \to a$, що дорівнює значенню функції у точці a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a). \qquad (5.6)$$

***Приклади.* 1.** Дослідити на неперервність функцію

$$y = \frac{1}{x - 5}.$$

Розв'язання. Функція неперервна лише в тих точках, де виконуються умови 1) і 2).

Функція $y = \frac{1}{x-5}$ не визначена у точці $x = 5$, а в решті точок числової прямої $x = a$, де $a \neq 5$, вона визначена. Крім того,

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-5} = \frac{1}{a-5}, \quad a \neq 5.$$

Отже, функція $y = \frac{1}{x-5}$ неперервна в усіх точках числової осі, крім $x = 5$.

2. Дослідити на неперервність функцію

$$y = x^n, \text{ де } n \in \mathbf{N}.$$

Розв'язання. Задана функція визначена в усіх точках числової осі. У будь-якій точці a числової осі

$$y(a) = f(a) = a^n.$$

У п. 4.2 (приклад 3) було показано, що

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n, \text{ або } \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Отже, функція $y = x^n$ неперервна у будь-якій точці числової осі.

Рівність (5.6) показує, що для неперервних у точці функцій знак характеристики функції і знак границі можна міняти місцями.

Означення (5.6) можна сформулювати на мові «ε — δ» і дати ще одне означення неперервності функції в точці. Функція $y = f(x)$, визначена у точці a та її околі, буде **неперервною у точці a**, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність

$$|x - a| < \delta, \tag{5.7}$$

значення функції $f(x)$ задовольняють нерівність

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{5.8}$$

Якщо порівняти (5.7) і (5.8) з означенням границі функції (див. п. 4.1), то в нерівності (5.8) немає співвідношення

$$0 < |x - a|. \tag{5.9}$$

Як зазначалося, вимога (5.9) викликана тим, що $f(x)$ у точці a може бути і невизначеною. Однак неперервна у точці a функція має бути визначеною в цій точці. Тому вимога (5.9) тут є зайвою.

Символічно умови (5.7) і (5.8) можна записати таким чином:

$$y = f(x), \ x \in Q(a) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x : |x - a| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Запишемо це означення з використанням $Q(a)$-околу точки a і $V(f(a))$-околу точки $f(a)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists Q(a) : \forall x \in Q(a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

або

$$\forall\ V(f(a))\ \exists\ Q(a) : f(Q(a)) \subset V(f(a)).$$

До нерівностей (5.7) і (5.8) входять різниці двох значень аргументу і відповідних їм значень функції. Тому можна позначити

$$x - a = \Delta x,\ \ f(x) - f(a) = \Delta y,$$

і нерівності (5.7) і (5.8) набирають вигляду

$$|\Delta x| < \delta, \tag{5.10}$$

$$|\Delta y| < \varepsilon. \tag{5.11}$$

Тепер рівність (5.6) можна записати таким чином:

$$\lim_{x-a\to 0} [f(x) - f(a)] = 0, \tag{5.12}$$

або

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0. \tag{5.13}$$

Остання рівність дає змогу сформулювати третє рівносильне означення неперервності функції в точці: функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці *a***, якщо нескінченно малому приросту аргументу в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції.

Повернемося тепер до рівності (5.6). Як відомо, для існування $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ необхідно і достатньо, щоб існували границі справа і зліва у точці a і щоб ці границі були рівні між собою. Тому можна сформулювати четверте означення, рівносильне означенню неперервності функції в точці: *функція $y = f(x)$, визначена в точці a і в деякому її околі, неперервна в цій точці, якщо існують*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \ \text{ і } \lim_{x\to a+0} f(x)$$

і вони дорівнюють значенню $f(a)$ в точці a, тобто

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \ \text{ і } \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Доведемо, наприклад, що функція $y = \sin x$ неперервна в будь-якій точці x числової осі.

Скористаємося рівністю (5.13). Нехай x — довільна фіксована точка числової осі. Надамо їй приросту Δx, і знайдемо відповідний приріст функції:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Оскільки $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$ — функція обмежена, а $\sin\frac{\Delta x}{2}$ при $\Delta x \to 0$ — нескінченно мала, то

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Таким чином, нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст функції Δy. Внаслідок довільного вибору точки x дана функція неперервна в будь-якій точці числової осі.

Розглянемо тепер поняття **односторонньої неперервності функції в точці**.

Функція $y = f(x)$ називається **неперервною зліва** від точки a, якщо:

1) функція визначена в точці a і в лівому її півоколі;

2) існує границя функції в точці a зліва і ця границя дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) = f(a).$$

Аналогічно визначається **неперервність функції справа** від точки a. Умову 2) при цьому запишемо у вигляді

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) = f(a).$$

Функція $y = f(x)$ неперервна в точці a, якщо вона неперервна зліва і справа від цієї точки, тобто

$$f(a-0) = f(a) = f(a+0).$$

Виконується і обернене твердження: *якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці a, то вона неперервна в цій точці зліва і справа.*

***Приклади*. 1.** Дослідити на неперервність функцію

$$y = x^3 - 5x^2 + 6.$$

Р о з в' я з а н н я. Дана функція визначена в будь-якій точці числової осі. Візьмемо будь-яку точку a числової осі, тоді

$$\lim_{x \to a}(x^3 - 5x^2 + 6) = \lim_{x \to a} x^3 - 5 \lim_{x \to a} x^2 + 6 =$$

$$= a^3 - 5a^2 + 6 = y(a).$$

Дана функція неперервна в кожній точці числової осі.

2. Дослідити функцію $y = \dfrac{1}{x}$ на неперервність.

Р о з в' я з а н н я. Функція визначена в $D(y) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$ і при $a \neq 0$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$. Отже, функція неперервна в кожній точці числової осі, крім її початку.

5.3. Функції однієї змінної, неперервні в проміжку

Якщо функція неперервна в кожній внутрішній точці інтервалу, то така функція називається неперервною в цьому інтервалі.

Якщо функція неперервна в кожній внутрішній точці сегмента $[a, b]$, а в кінцевих точках — для лівого кінця неперервна справа, а для правого кінця неперервна зліва, тобто

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) = f(a) \quad \text{і} \quad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b-0) = f(b),$$

то говорять, що функція $y = f(x)$ **неперервна на сегменті** $[a, b]$.

Наприклад, функції $y = x^n$ і $y = \sin x$ неперервні в інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Функція $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$ також неперервна в інтервалі $(-\infty, +\infty)$, оскільки

$$\forall\ a \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow \lim_{x\to a} y = c_0 + c_1a + c_2a^2 + \ldots + c_na^n = y(a).$$

5.4. Геометрична інтерпретація неперервності функції однієї змінної в точці. Рівномірна неперервність

Побудуємо графік функції $y = f(x)$ з областю визначення $X = [a, b]$. Нехай $x = c$, $c \in X$. Побудуємо на осі ординат точку $f(c)$ і ε-окіл ($\varepsilon > 0$) цієї точки (рис. 3.73). Зафіксуємо на осі ординат точки $f(c) - \varepsilon$ і $f(c) + \varepsilon$ і через них проведемо прямі, паралельні осі Ox. Проекції точок перетину цих прямих з графіком функції на вісь абсцис позначимо через A і B, а їх абсциси — через $c - h_1$ і $c + h_2$. Нехай $\delta = \min\{h_1, h_2\}$. Графік даної функції лежить у цьому прямокутнику із сторонами 2δ і 2ε.

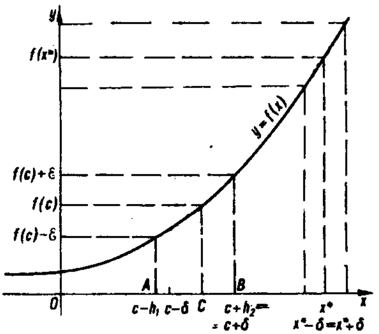


Рис. 3.73

Якщо візьмемо точку $x = x^*$ і функцію $f(x^*)$, то для того самого ε-околу δ-окіл може виявитися іншим.

Якщо для двох будь-яких значень x_1 і x_2, що належать сегменту $[a, b]$ з нерівності $|x_2 - x_1| < \delta$, випливає, що $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$, то функція $f(x)$ називається **рівномірно неперервною на сегменті** $[a, b]$. Точніше, функція **рівномірно неперервна в проміжку** $\langle a, b\rangle$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, яке залежить лише від ε, що для будь-яких x_1 і x_2 з проміжку $\langle a, b\rangle$, які задовольняють нерівність $|x_2 - x_1| < \delta$, значення функції задовольняють нерівність

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Приклад. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $y = \sqrt[3]{x}$, задану на сегменті $1 \le x \le 2$.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо модуль різниці

$$\left|\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_1}\right|=\frac{|x_2-x_1|}{\sqrt[3]{x_2^2}+\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_1^2}}\le\frac{1}{3}|x_2-x_1|.$$

Нехай задано $\varepsilon > 0$. Тоді покладемо $\delta = 3\varepsilon$.

Для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать сегменту [1; 2], з нерівності $|x_2 - x_1| < \delta$ випливає нерівність

$$\left|\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_1}\right|<\varepsilon.$$

Таким чином, дана функція $y=\sqrt[3]{x}$ рівномірно неперервна на сегменті [1, 2].

5.5. Неперервність функції багатьох змінних у точці і області

Функція $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається **неперервною в точці** $A(a_1, a_2, ..., a_n)$, якщо:

1) функція визначена в точці A і в деякому її околі;

2) існує границя функції f в точці A, яка дорівнює значенню функції в цій точці $f(A)$, тобто

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \cdots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n)=f(a_1, a_2, ..., a_n),$$

або

$$\lim_{M\to A} f(M)=f(\lim_{M\to A} M)=f(A).$$

Це означення у розширеному вигляді повторює перше означення неперервності, дане для функції однієї змінної.

Аналогічно можна перенести інші означення неперервності функції однієї змінної на випадок функції багатьох змінних.

Так, замість умов (5.7) і (5.8) для функції багатьох змінних маємо

$$|x_1-a_1|<\delta,\ |x_2-a_2|<\delta,\ ...,\ |x_n-a_n|<\delta,$$

$$|f(M)-f(A)|<\varepsilon. \tag{5.14}$$

Зауважимо, що коли

$$\rho(A, M)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}<\delta,$$

то умови (5.14) виконуються. Тому функція n змінних неперервна в точці A, якщо: 1) вона визначена в точці A і в деякому околі; 2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $\rho(A, M) < \delta$ виконується умова $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

Умови (5.10)–(5.13) для функції багатьох змінних мають вигляд

$$\left|\Delta x_i\right| < \delta, \text{ де } i = 1, 2, \ldots, n, \quad \left|\Delta u\right| < \varepsilon, \text{ або } \lim_{\rho(A,M)\to 0} \Delta u = 0.$$

Якщо функція $u = f(M)$ визначена в деякій області D і неперервна в кожній точці цієї області, то така функція називається **неперервною в цій області**.

Для функції однієї змінної областю D є проміжок $\langle a, b\rangle$.

Приклад. Дослідити функцію на неперервність

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Розв'язання. Функція визначена в будь-якій точці круга $x^2 + y^2 \le R^2$. Виберемо будь-яку внутрішню точку круга $M(x, y)$ і покажемо, що

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0.$$

Для цього знайдемо повний приріст функції

$$\Delta z = \sqrt{R^2 - (x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2} - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Перетворимо цей вираз

$$\Delta z = \frac{R^2 - (x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 - R^2 + x^2 + y^2}{\sqrt{R^2 - (x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= \frac{-2x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta x^2 - \Delta y^2}{\sqrt{R^2 - (x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

тоді

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{-2x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta x^2 - \Delta y^2}{\sqrt{R^2 - (x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = 0.$$

Це означає, що функція $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ неперервна в кожній внутрішній точці круга $x^2 + y^2 = R^2$, тобто неперервна у крузі. Визначена вище неперервність функції в точці A називається також **неперервністю за всією сукупністю змінних** x_1, x_2, x_3, ..., x_n. З неперервності функції по всій сукупності змінних випливає неперервність функції по кожній змінній, по кожній парі змінних і т. д.

5.6. Точки розриву. Розривні функції

Якщо функція однієї або кількох змінних визначена в деякому околі точки A і, можливо, в самій точці A, проте умови неперервності в цій точці не виконуються, то точка A називається **точкою розриву функції,** а функція називається **розривною.**

Функції можуть мати розриви першого або другого роду.

Функція $u = f(M)$ має **розрив першого роду** в точці A, якщо:

існує значення функції $f(A)$ в точці A та існує скінченна границя $\lim\limits_{M\to A} f(M)$, але $\lim\limits_{M\to A} f(M) \ne f(A)$,

або існує значення функції $f(A)$ в точці A та існують скінченні односторонні границі, але ці границі не рівні між собою, або, будучи рівними між собою, вони не дорівнюють значенню функції $f(A)$ в точці A,

або значення функції в точці A не визначено, тобто точка A не належить області визначення функції, але існують скінченні односторонні границі.

Функція $u = f(M)$ має **розрив другого роду** в точці A, якщо точка A не належить області визначення функції, а в околі точки A не існують односторонні границі, а отже, і загальна границя функції в точці A, або, існуючи, вони дорівнюють нескінченності.

***Приклади*.** **1.** Функція $y = \dfrac{1}{x}$ не визначена в точці $x = 0$. Отже, точка $x = 0$ є точкою розриву даної функції. Знайдемо границі

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x} = -\infty;\quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{x} = +\infty.$$

Це означає, що точка $x = 0$ є точкою розриву другого роду.

2. Функція $y = \dfrac{|x|}{x}$ не визначена в точці $x = 0$. Знайдемо границі

$$\lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{-x}{x} = -1 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to +0}\frac{x}{x} = 1.$$

Отже, точка $x = 0$ є точкою розриву першого роду.

3. Функція $y = \operatorname{tg} x$ не визначена в точках $x_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$. З'ясуємо характер розриву в точці $x = \dfrac{\pi}{2}$, для чого знайдемо границі

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg} x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg} x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\frac{\sin x}{\cos x} = -\infty.$$

Легко довести, що границі ліворуч і праворуч для інших точок розриву функції $\operatorname{tg} x$ такі самі, тобто точки $x_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ є точками розриву другого роду.

4. Функція $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ не визначена в точці $x = 0$. Знайдемо границі

$$\lim_{x\to -0} x\sin\frac{1}{x} = 0 \text{ і } \lim_{x\to +0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

як добуток нескінченно малої x на величину, обмежену $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le 1$ при $x \to 0$. Точка $x = 0$ є точкою розриву першого роду.

Якщо функція $f(x)$ в точці a має розрив першого роду, то, як випливає з означення, вона має в точці a скінченні границі зліва і справа:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) \quad \text{і} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0).$$

Тоді різниця

$$h = f(a+0) - f(a-0)$$

називається **стрибком даної функції в точці** a.

Так, у прикладі 2 стрибок функції $y = f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ в точці 0:

$$h = f(+0) - f(-0) = 1 - (-1) = 2.$$

У прикладі 4 стрибком функції $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ є $h = 0$.

Якщо в точці a стрибок функції $f(x)$ дорівнює нулю, тобто

$$f(a + 0) = f(a - 0),$$

то точка a називається **точкою усувного розриву.**

У випадку усувного розриву функцію можна довизначити таким чином, щоб здобути неперервну функцію в цій точці.

Наприклад, функцію

$$y = f(x) = x\sin\frac{1}{x},\ x \neq 0,$$

можна довизначити:

$$y = F(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Функцію

$$y = f(x) = \frac{\sin x}{x},\ x \neq 0,$$

можна довизначити:

$$y = F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 1, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Таким чином, *точки розриву першого роду поділяються на точки усувного і точки неусувного розривів*.

***Приклади*. 1.** Функція

$$z = f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

має розрив у точці A (0, 0).

Оскільки

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^2} = \infty,$$

то точка A є точкою розриву другого роду ($\rho^2 = x^2 + y^2$).

2. Функція

$$z = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

не визначена на множині точок $\{(x, y) \subset \mathbf{R}_2 : y = x \vee y = -x\}$. Точки, які лежать на прямих $y = x$ або $y = -x$, є точками розриву функції. Знайдемо границю

$$\lim_{\substack{x\to y\\ (x\to -y)}} z = \lim_{\substack{x\to y\\ (x\to -y)}} \frac{1}{x^2 - y^2} = \infty.$$

Дана функція на кожній із прямих $y = x$ і $y = -x$ має розрив другого роду.

3. Функція

$$z = f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

не визначена в точці O (0, 0).

Точка O (0, 0) є точкою розриву даної функції. Щоб визначити характер розриву, розглянемо границю

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

якщо точка M (x, y) прямує до точки O (0, 0) по прямих $y = kx$. Тоді

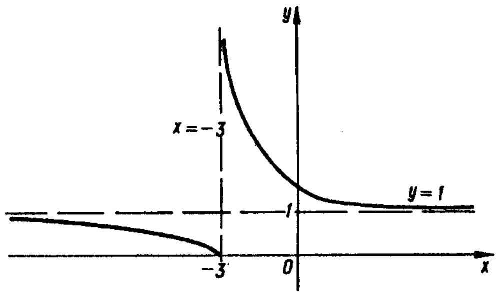


Рис. 3.74

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x; y) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 k}{x^2(1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Ця границя залежить від значень k, тобто від напряму. Тому функція в початку координат границі не має. Точка O (0, 0) є точкою розриву другого роду.

4. Для функції

$$u = \frac{xyz}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}}$$

кожна точка сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ є точкою розриву другого роду.

5. Дослідимо функцію $y = 2^{\frac{1}{x+3}}$ на неперервність і побудуємо її графік. Область визначення функції

$$D(y) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq -3\}.$$

У точці $x = -3$ функція не визначена. Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to -3-0} \frac{1}{x+3} = -\infty, \quad \lim_{x\to -3-0} y = \lim_{x\to -3-0} 2^{\frac{1}{x+3}} = 0;$$

$$\lim_{x\to -3+0} \frac{1}{x+3} = +\infty, \quad \lim_{x\to -3+0} y = \lim_{x\to -3+0} 2^{\frac{1}{x+3}} = +\infty,$$

отже, $x = -3$ є точкою розриву другого роду.

Нехай $a \in D(y)$. Знайдемо

$$y(a) = 2^{\frac{1}{a+3}} \quad \text{і} \quad \lim_{x\to a-0} y = \lim_{x\to a-0} 2^{\frac{1}{x+3}} = 2^{\frac{1}{a+3}};$$

$$\lim_{x\to a+0} y = \lim_{x\to a+0} 2^{\frac{1}{x+3}} = 2^{\frac{1}{a+3}}.$$

Таким чином, у кожній точці a з області визначення функція неперервна:

$$y(a - 0) = y(a + 0) = y(a).$$

З'ясуємо поводження функції на нескінченності:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x+3} = 0; \quad \lim_{x\to \pm\infty} y = \lim_{x\to \pm\infty} 2^{\frac{1}{x+3}} = 1.$$

Графік даної функції зображено на рис. 3.74.

Зауважимо, що *характер розривів функцій змінюється залежно від числа змінних: для функцій однієї змінної розриви можуть бути зображені лише точками; для функції двох змінних, крім точок, виникають лінії розриву; для функції трьох змінних, крім точок, ліній, виникають поверхні розриву.*

У загальному випадку для функції n змінних області розриву можуть бути дуже різноманітні: *від точок до багатовимірних областей розриву.*

5.7. Дії з неперервними функціями

Поняття суми, добутку, частки двох неперервних функцій означаються аналогічно до цих понять взагалі для функцій (див. п. 3.2). При цьому накладається умова, що на спільній частині області визначення функцій вони мають бути неперервними.

Дії додавання, віднімання, множення і ділення неперервних функцій однієї і кількох змінних виконуються за одними й тими самими правилами. Нижче наведемо ці правила для функцій однієї змінної. Проте їх легко перенести на загальний випадок, замінивши x на M і a на A.

1. *Стала функція — функція неперервна.*

2. *Сума скінченного числа неперервних функцій є функцією неперервною.*

3. *Добуток сталої на неперервну функцію є функцією неперервною.*

4. *Лінійна комбінація неперервних функцій є функцією неперервною.*

5. *Добуток скінченного числа неперервних функцій є функцією неперервною.*

6. *Частка від ділення двох неперервних функцій* $\varphi(x)$ *і* $\psi(x)$ *в точці* a *є функцією неперервною, якщо* $\psi(a) \neq 0$.

7. *Якщо* $f(x)$ *неперервна, то неперервна й функція* $|f(x)|$.

5.8. Неперервність найпростіших елементарних функцій

Ціла раціональна функція неперервна на всій числовій осі $(-\infty; +\infty)$. Дробово-раціональна функція як частка від ділення двох неперервних функцій є неперервною всюди, за винятком точок, в яких знаменник дорівнює нулю. Таких точок неодмінно скінченне число, оскільки число коренів цілої раціональної функції не більше найвищого показника степеня многочлена, який стоїть у знаменнику, причому це точки розриву другого роду.

Вже було показано, що функція $y = \sin x$ неперервна на всій числовій осі $\mathbf{R}$. Те саме стосується й функції $y = \cos x$.

Щодо функцій

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{і} \quad y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

то ці функції мають розрив другого роду в точках $x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ і $x_n = \pi n$, де k, $n \in \mathbf{Z}$ відповідно (див. п. 5.6).

Виключаючи ці точки, виявимо, що функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ неперервні в $(-\infty, +\infty)$ за винятком зчисленної множини точок.

Можна показати, що неперервними є функції

$$y = \arcsin x \text{ в } [-1, +1],$$
$$y = \arccos x \text{ в } [-1, +1],$$
$$y = \operatorname{arctg} x \text{ в } (-\infty, +\infty),$$
$$y = \operatorname{arcctg} x \text{ в } (-\infty, +\infty),$$
$$y = a^x \text{ в } (-\infty, +\infty),$$
$$y = \log_a x \text{ в } (0, +\infty)$$

як строго монотонні функції. Строго монотонна функція в кожній точці сегмента має границю і, отже, неперервна. Тому обернені тригонометричні функції неперервні в інтервалі своєї строгої монотонності.

Викладене вище цілком стосується й функцій багатьох змінних.

5.9. Неперервність складної функції

Якщо функція $v = \varphi(x)$ неперервна в точці a, а функція $y = f(v)$ неперервна в точці b, де $b = \varphi(a)$, то складна функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці a.

Отже,

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a) = b, \tag{5.15}$$

$$\lim_{v \to b} f(v) = f(b). \tag{5.16}$$

Доведемо, що

$$\lim_{x \to a} f[\varphi(x)] = f[\varphi(a)]. \tag{5.17}$$

З рівності (5.16) випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\eta > 0$, що для всіх v, які задовольняють нерівність $|v - b| < \eta$, виконується нерівність

$$|f(v) - f(b)| < \varepsilon.$$

З рівності (5.15) випливає, що для будь-якого $\eta > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, виконується нерівність

$$|\varphi(x) - b| < \eta, \text{ або } |v - b| < \eta.$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх x, які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(v) - f(b)| < \varepsilon,$$

але $f(v) = f[\varphi(x)]$, а $f(b) = f[\varphi(a)]$, отже, з нерівності $|x - a| < \delta$ випливає, що

$$|f[\varphi(x)] - f[\varphi(a)]| < \varepsilon,$$

або

$$\lim_{x \to a} f[\varphi(x)] = f[\varphi(a)].$$

Теорема про неперервність складної функції виконується і для функції n змінних.

5.10. Деякі важливі границі функції однієї змінної

Використовуючи другу важливу границю, можна довести такі рівності:

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \ \lim_{\alpha \to 0}(1 + a\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^a,$$

$$\lim_{\alpha \to 0}\frac{\log_a(1 + \lambda\alpha)}{\alpha} = \lambda \log_a e, \ \lim_{\alpha \to 0}\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a.$$

5.11. Порівняння нескінченно малих функцій однієї змінної

Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ визначені і не дорівнюють нулю в деякому околі точки a. Крім того, при $x \to a$ вони є нескінченно малими, тобто

$$\lim_{x \to a}\alpha(x) = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{x \to a}\beta(x) = 0.$$

Порівнювати дві нескінченно малі функції можна або за допомогою їх різниці, або за допомогою їх відношення.

Якщо $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ існує, то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються **порівнянними**. Якщо ж ця границя не існує, то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються **непорівнянними**.

Введемо класифікацію порівнянних нескінченно малих функцій.

Нескінченно мала $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою вищого порядку мализни**, ніж нескінченно мала $\beta(x)$ при $x \to a$, якщо границя їх відношення дорівнює 0 при $x \to a$:

$$\lim_{x \to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Якщо $\alpha(x)$ є функцією вищого порядку мализни, ніж функція $\beta(x)$ при $x \to a$, то пишуть

$$a = o(\beta(x)) \text{ при } x \to a$$

і читають «$\alpha(x)$ дорівнює o мале від $\beta(x)$».

Наприклад, функції $\alpha(x) = x^3$ і $\beta(x) = x^2$ є нескінченно малі при $x \to 0$. Границя їх відношення

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

тобто функція $\alpha(x) = x^3$ вищого порядку мализни, ніж функція $\beta(x) = x^2$ при $x \to 0$:

$$x^3 = o(x^2) \text{ при } x \to 0.$$

Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to a$ називаються **нескінченно малими одного порядку мализни** при $x \to a$, якщо границя їх відношення дорівнює числу, відмінному від нуля:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A,\ A \neq 0.$$

Оскільки функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ в околі точки a не дорівнюють нулю, то на підставі теореми про обмеженість функції, яка має скінченну границю в околі точки a, маємо

$$\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right| \le c,$$

або

$$|\alpha(x)| \le c\,|\beta(x)| \text{ в деякому околі точки } a.$$

Якщо існує окіл $Q(x)$, в якому відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ обмежене, то $\alpha(x)$ є «О велике» від $\beta(x)$ при $x \to a$. Останнє записують у вигляді

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ при } x \to a.$$

Наприклад, функції $\alpha(x) = \sin x$ і $\beta(x) = 2x$ нескінченно малі при $x \to 0$, а їх відношення має границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\sin x$ і $2x$ є функції нескінченно малі одного порядку мализни при $x \to 0$.

Якщо границя відношення двох нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to a$ дорівнює нескінченності:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty,$$

то функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою нижчого порядку мализни**, ніж $\beta(x)$ при $x \to a$.

Введемо шкалу порівняння нескінченно малих функцій.

Нескінченно мала функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою n-го порядку мализни** відносно нескінченно малої функції $\beta(x)$ при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = A,\ A \neq 0.$$

Наприклад, функції $\alpha(x) = \sin^3 x$ і $\beta(x) = x$ нескінченно малі при $x \to 0$. Доберемо таке число n, щоб границя відношення $\alpha(x)$ до $[\beta(x)]^n$ була скінченною, відмінною від нуля, тобто

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^n} = 1 \text{ при } n = 3.$$

Таким чином, функція $\sin^3 x$ нескінченно мала третього порядку мализни відносно x при $x \to 0$.

Із класу нескінченно малих функцій одного порядку в математичному аналізі важливу роль відіграють еквівалентні нескінченно малі.

Дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to a$ називаються **еквівалентними (рівними асимптотично)**, якщо границя їх відношення дорівнює одиниці, тобто

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Еквівалентність функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to a$ позначають

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to a.$$

Приклади. **1.** Довести, що при $x \to 0$

$$\ln(1 + x) \sim x.$$

Д о в е д е н н я. Маємо (див. п. 5.10)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

2. Довести, що при $x \to 0$

$$e^x - 1 \sim x.$$

Д о в е д е н н я. Маємо (див. п. 5.10)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1.$$

Нарешті наведемо еквівалентні нескінченно малі при $x \to 0$, які зустрічаються найчастіше:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1 + x) \sim e^x - 1 \sim x.$$

В л а с т и в о с т і е к в і в а л е н т н и х н е с к і н ч е н н о м а л и х:
1°. $\alpha \sim \alpha$.

2°. *Якщо* $\alpha \sim \beta$, *то* $\beta \sim \alpha$.

3°. *Якщо* $\alpha \sim \beta$ і $\beta \sim \gamma$, *то* $\alpha \sim \gamma$.

Теорема 1 **(необхідна й достатня ознака еквівалентності нескінченно малих).** *Для того щоб дві нескінченно малі функції були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб різниця їх була нескінченно малою більш високого порядку мализни, ніж вони самі.*

Доведення не наводимо.

Для розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$ часто користуються такою теоремою.

Теорема 2. *Границя відношення двох нескінченно малих дорівнює границі відношення двох нескінченно малих, відповідно їм еквівалентних:*

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\delta(x)},$$

якщо $\alpha \sim \gamma$ і $\beta \sim \delta$ *при* $x \to a$.

Приклади. **1.** Знайти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 3x}{\sin 6x}.$$

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $\operatorname{arctg} 3x \sim 3x$ і $\sin 6x \sim 6x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 3x}{\sin 6x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}.$$

2. Знайти

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1).$$

Р о з в' я з а н н я. При $x \to \infty$ $e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x}$, тоді

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1.$$

3. Знайти

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x - \sin 4x}{x^3}.$$

Р о з в' я з а н н я. Оскільки при $x \to 0$ маємо

$$2\sin 2x \sim 4x \text{ і } \sin 4x \sim 4x, \text{ то } 2\sin 2x \sim \sin 4x.$$

Однак різниця двох еквівалентних нескінченно малих є нескінченно мала більш високого порядку мализни, ніж дані. Тому в різниці еквівалентних нескінченно малих не можна переходити до таких, що їм еквіваленті, оскільки при цьому можемо дістати нуль замість нескінченно малої більш високого порядку. Якщо в даному прикладі у чисельнику замінити зменшуване і від'ємник на $4x$, то границя даного виразу дорівнюватиме нулю.

Розкриємо дану невизначеність. Перетворимо чисельник:

$$2\sin 2x - \sin 4x = 2\sin 2x\,(1-\cos 2x) = 4\sin 2x \cdot \sin^2 x.$$

При $x \to 0$

$$4\sin 2x \cdot \sin^2 x \sim 4 \cdot 2x \cdot x^2 = 8x^3,$$

тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x - \sin 4x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^3}{x^3} = 8.$$

5.12. Загальні властивості неперервних функцій

Загальні властивості неперервних функцій однакові як для функцій однієї змінної, так і для функцій багатьох змінних.

***Теорема 3* (Вейєрштрасса[1]).** *Функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, визначена і неперервна в обмеженій замкненій області D, є обмеженою.*

Для функції однієї змінної замкненою областю D є сегмент, наприклад, $[a, b]$.

Сформулюємо теорему 3 для функції однієї змінної $y = f(x)$. Функція $f(x)$, неперервна на $[a, b]$, є обмеженою.

Зауваження. Теорема 3 не виконується, якщо область D відкрита. Наприклад, $y = \dfrac{1}{x}$ неперервна в інтервалі $(0, 1)$, але вона в цьому інтервалі не обмежена.

***Теорема 4* (про знак функції).** *Якщо функція $u = f(M)$ неперервна в точці $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ і $f(A) \neq 0$, то функція в достатньо малому околі точки A зберігає знак.*

Сформулюємо теорему 4 в термінах функції однієї змінної:

якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці a і $f(a) \neq 0$, то функція в достатньо малому околі точки a зберігає знак.

Дійсно, нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \neq 0$, наприклад, $f(a) > 0$. Покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in (a-\delta, a+\delta)$ виконується нерівність $f(x) > 0$.

Побудуємо δ-окіл точки a і ε-окіл точки $f(a)$ (рис. 3.75).

Якщо взяти $\delta = \min(h_1, h_2)$, то завжди можна побудувати прямокутник із сторонами 2δ і 2ε такий, що $f(x) > 0$.

***Теорема 5* (про корінь функції).** *Якщо функція $u = f(M)$ визначена і неперервна в деякій однозв'язній області D, причому в цій області дві точки $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ і $B(b_1, b_2, ..., b_n)$, в яких функція набуває значень різних знаків:*

$$f(A) < 0, \quad f(B) > 0,$$

то в цій області знайдеться принаймні одна точка C, в якій функція перетворюється в нуль, тобто $f(C) = 0$.

---

[1] Карл Вейєрштрасс (1815–1897) — німецький математик.

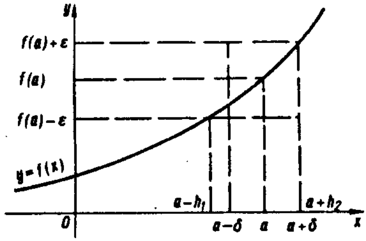


Рис. 3.75

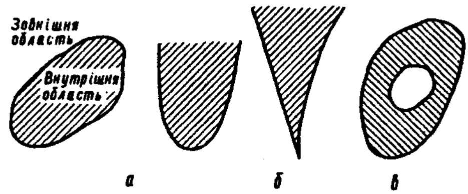


Рис. 3.76

Введемо поняття однозв'язної області. Множина точок простору E_n називається **простою дугою Жордана (простою кривою)**, якщо цей простір можна дістати в результаті відображення деякого сегмента $t_0 \le t \le T$ за допомогою системи функцій

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ \dots\dots \\ x_n = \varphi_n(t), \end{cases}$$

неперервних на цьому сегменті, причому двом різним значенням параметра t відповідають дві різні точки.

Якщо точка M_0 $(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \in E_n$ збігається з точкою M_T $(\varphi_1(T), \varphi_2(T), \dots, \varphi_n(T)) \in E_n$, то крива називається **простою замкненою кривою.**

Розглянемо просту криву, задану рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{5.18}$$

на площині. Якщо будь-які дві точки області, розміщеної на площині, можна сполучити простою кривою, яка міститься в цій області, то область називається **зв'язною**. Для утворення однозв'язної області необхідно розглядати замкнену криву (5.18).

Якщо побудувати просту замкнену криву (5.18) на площині, то площина розіб'ється на дві області — внутрішню і зовнішню.

Область D на площині називається **однозв'язною**, якщо будь-яка область внутрішня відносно простої довільної замкненої кривої, яка міститься в D, також міститься в D. На рис. 3.76 області *а* і *б* однозв'язні, а область *в* — неоднозв'язна. Поняття зв'язної і однозв'язної областей поширюється і на випадок n-вимірного простору.

Для функції однієї змінної теорема 5 формулюється таким чином: *якщо $y = f(x)$ неперервна на $[a, b]$ і на кінцях сегмента набуває значень різних знаків, то всередині сегмента знайдеться принаймні одна точка ξ така, що $f(\xi) = 0$.*

Точка ξ називається **коренем (нулем) функції** $f(x)$, а сформульована теорема називається **теоремою про корінь (про нуль)**. На рис. 3.77, *б* — три корені, а на рис. 3.77, *а* — один.

***Теорема 6* (про проміжне значення).** *Якщо функція $u = f(M)$ неперервна в зв'язній області D (відкритій або замкненій) і набуває різних значень у точках M_1 і M_2, то яким би не було число C, що міститься між значеннями $f(M_1)$ і $f(M_2)$, існує принаймні одна така точка M_3, яка лежить всередині D, що*

$$f(M_3) = C.$$

Сформулюємо теорему 6 для функції однієї змінної:

якщо $y = f(x)$ неперервна у проміжку $\langle l, d\rangle$ і набуває різних значень у двох точках a і b сегмента $[a, b] \subset \langle l, d\rangle$ $f(a) = A$ і $f(b) = B$, то для будь-якого C, що лежить між A і B, $A < C < B$, всередині сегмента знайдеться принаймні одна така точка ξ, що $C = f(\xi)$.

Доведення. Нехай $A < B$ і $A < C < B$ (рис. 3.78). Побудуємо функцію $H(x) = f(x) - C$.

Для цієї функції

$$H(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$
$$H(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Функція $H(x)$ неперервна на $[a, b]$ як різниця двох неперервних функцій $f(x)$ і сталої $\varphi(x) = C$. Отже, до функції $H(x)$ застосована теорема про корінь. Тоді на $[a, b]$ існує точка ξ така, що $H(\xi) = 0$, тобто

$$f(\xi) - C = 0.$$

Звідси

$$f(\xi) = C,$$

що й треба було довести.

***Теорема 7* (про найменше і найбільше значення).** *Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, то вона обмежена, тобто всі її значення містяться між двома скінченними числами m і M:*

$$m \le f(X) \le M.$$

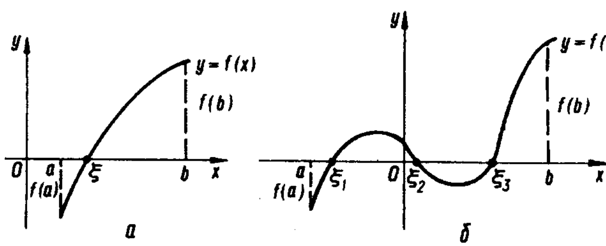


Рис. 3.77

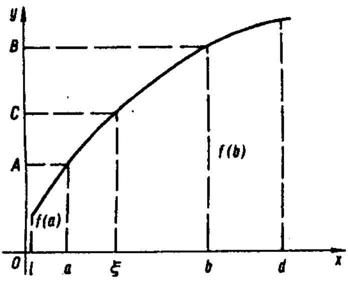


Рис. 3.78

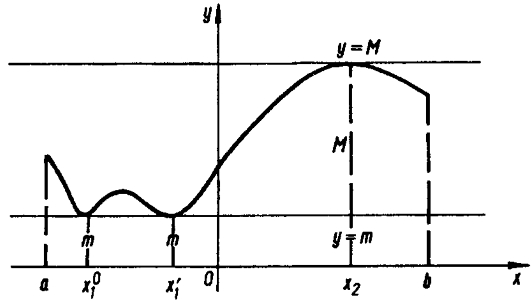


Рис. 3.79

Числа m і M називаються **найменшим і найбільшим значеннями функції.** При цьому в області D знайдеться принаймні одна точка $X_1 \in D$, в якій функція $f(X)$ набуває найменшого значення $f(X_1) = m$; і принаймні одна точка $X_2 \in D$, в якій функція набуває найбільшого значення $f(X_2) = M$.

Сформулюємо теорему 7 для функції однієї змінної:

якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то вона обмежена, тобто всі її значення містяться між двома скінченними числами m і M, які називаються найменшим і найбільшим значеннями функції на сегменті $[a, b]$:

$$m \le f(x) \le M.$$

На рис. 3.79 зображена неперервна на $[a, b]$ функція, у якої є дві точки x_1^0 і x_1^1 такі, що

$$f(x_1^0) = f(x_1^1) = m,$$

і одна точка x_2, в якій $f(x_2) = M$.

***Теорема 8* (Кантора).** *Якщо функція $u = f(X)$ неперервна в обмеженій замкнутій області D, то вона рівномірно неперервна в D.*

Теорему наводимо без доведення.

ВПРАВИ. **1.** Знайти точки розриву функції

$$y = f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-1}} - 1}{5^{\frac{1}{x-1}} + 1}$$

і з'ясувати їх характер. *Відповідь.* $x = 1$ — точка розриву першого роду.

2. Знайти точки розриву функції

$$y = f(x) = \frac{1}{\ln|x-1|}$$

і з'ясувати їх характер. *Відповідь.* $x_1 = 1$ — точка усувного розриву, $x_2 = 0$ і $x_3 = 2$ — точки розриву другого роду.

3. Дослідити на неперервність функцію

$$y = f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$$

і побудувати її графік.

4. Дослідити функцію

$$y = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

на неперервність і побудувати її схематичний графік.

5. Користуючись властивостями еквівалентних нескінченно малих, знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x - \cos 4x}{(x-x^2)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x + \operatorname{arctg} x}{x + x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2)}{\operatorname{arctg} x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^{\sqrt{2}}-1}$.

Відповідь. а) 6; б) 2; в) 3; г) $\sqrt{2}$.

§ 6. ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ПРО КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА І ФУНКЦІЇ

6.1. Комплексні числа

Перша спроба введення уявних чисел поряд з дійсними числами належить Ж. Р. Аргану[1]. У працях О. Л. Коші і К. Ф. Гаусса була розвинута загальна теорія комплексних чисел.

Гаусс запровадив **уявну одиницю** $\sqrt{-1} = i$ або $i^2 = -1$ із збереженням усіх дій над числами й для i. Уявну одиницю $\sqrt{-1}$ позначають також буквою j: $\sqrt{-1} = j$.

Таким чином,

$$i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,$$

$$i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,$$

де $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Добуток уявної одиниці на дійсне число називається **уявним числом** і позначається bi. При цьому дійсне число b іноді називається **коефіцієнтом при уявній одиниці.**

Вираз вигляду

$$a + bi = z,$$

(де a — дійсне число; bi — уявне число) називається **комплексним числом.**

---

[1] Жан Роберт Арган (1768–1822) — швейцарський математик.

Дійсна і уявна частини комплексного числа відповідно позначаються так:

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z,$$

тоді

$$z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} zi.$$

Комплексне число дорівнює нулю, якщо дійсна частина і коефіцієнт при уявній одиниці дорівнюють нулю.

Дійсно,

$$a + bi = 0 \Rightarrow a = -bi \Rightarrow a^2 = b^2i^2 \Rightarrow a^2 = -b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0.$$

Останнє можливе при $a = 0$ і $b = 0$.

Два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1i$ і $z_2 = a_2 + b_2i$ рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їхні дійсні частини і коефіцієнти при уявній одиниці:

$$(a_1 + b_1i = a_2 + b_2i) \Leftrightarrow (a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2).$$

Дійсно,

$$z_1 = z_2 \Rightarrow a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Rightarrow (a_1 - a_2) = (b_2 - b_1)\, i \Rightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2,\ b_1 = b_2.$$

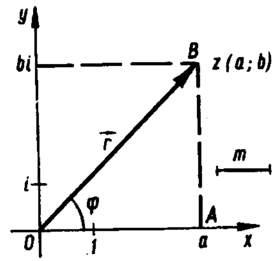


Рис. 3.80

Запис комплексного числа у вигляді

$$z = a + bi$$

називається **алгебраїчною формою комплексного числа**.

Дамо **геометричне тлумачення комплексного числа.** Відкладатимемо уявні числа на прямій, яка перпендикулярна до осі дійсних чисел і проходить через її початок, прийнявши за уявну одиницю будь-який масштаб. *Тоді кожній точці на вертикальній осі відповідатиме уявне число, і навпаки, кожному уявному числу відповідатиме точка на вертикальній осі, яка називається уявною віссю.* Таким чином, комплексне число $z = a + bi$ зображується точкою на площині з координатами (a, b).

Отже, комплексне число $a + bi$ є парою двох упорядкованих дійсних чисел (a, b).

Площина (x, y), на якій зображуються комплексні числа, називається **комплексною площиною** (рис. 3.80).

Якщо ввести радіус-вектор $\vec{r}$ точки $z(a, b)$ комплексної площини, то комплексне число можна зобразити радіусом-вектором $\vec{r}$.

Таким чином, комплексне число $a + bi$ можна зобразити точкою (a, b) комплексної площини xOy або кінцем радіуса-вектора $\vec{r} = (a, b)$.

Зобразимо комплексне число в полярній системі координат. Візьмемо за полярну вісь — Ox, а за полюс — точку O. Тоді довжина радіуса-вектора $|\vec{r}|$ буде **полярним радіусом**, а кут, що його утворює вектор $\vec{r}$ з віссю Ox, — **полярним кутом** φ точки (a, b). Отже, маємо

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Комплексне число $z = a + bi$ запишемо у вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Права частина цієї формули називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

Довжина вектора

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

називається **модулем комплексного числа** z і позначається

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{6.1}$$

Якщо $b = 0$, тобто $z = a$ — дійсне число, то

$$|z| = +\sqrt{a^2} = |a|.$$

Кут φ називається **аргументом** (або **амплітудою**) **комплексного числа.** Звичайно кут φ відлічують від осі Ox проти напряму обертання стрілки годинника. Для будь-якого комплексного числа аргумент визначений з точністю до доданка, кратного 2π. Для $z = 0$ аргумент не визначений. Значення аргументу $-\pi \le \varphi < \pi$, або $0 \le \varphi < 2\pi$ називають **головними значеннями аргументу комплексного числа** z і позначають $\arg z$. Будь-яке значення аргументу φ комплексного числа z позначають $\operatorname{Arg} z$.

Очевидно, що

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots\ .$$

Комплексні числа $a + bi$ і $a - bi$ називають **спряженими** і позначають

$$z = a + bi \quad \text{і} \quad \bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Для переведення комплексного числа, заданого в алгебраїчній формі $a + bi$, у тригонометричну необхідно знайти модуль і аргумент цього числа. Модуль визначається за формулою (6.1), а головне значення аргументу — за формулою

$$\arg z = \varphi, \quad \text{де} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{cases} \quad \text{і} \quad -\pi \le \varphi < \pi.$$

Для спряжених комплексних чисел модулі рівні між собою, а аргументи протилежні:

$$\arg z = -\arg \overline{z}.$$

6.2. Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній і тригонометричній формах

Додавання і віднімання комплексних чисел зручно виконувати, якщо вони задані в алгебраїчній або векторній формі.

Нехай

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad \text{і} \quad z_2 = a_2 + b_2 i,$$

тоді

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\, i,$$

тобто

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\, i.$$

Якщо комплексні числа задано у векторній формі, то додавання і віднімання їх виконують за правилами додавання і віднімання векторів.

Для спряжених комплексних чисел

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

При алгебраїчній формі задання комплексних чисел множення виконується за таким правилом:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

Множення тут виконується за загальними правилами множення многочленів, при цьому враховується, що $i^2 = -1$.

Для множення комплексних чисел найзручнішою є тригонометрична форма їх задання.

При тригонометричному заданні

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{і} \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

дістаємо

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)\, i] = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)],$$

або

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)\, r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Отже, *при множенні двох комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, модулі перемножаються, а аргументи додаються*:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \ \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Це правило поширюється на будь-яке скінченне число співмножників. Нехай

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$
$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z_n = r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n),$$

тоді

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n [\cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + \\ + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)].$$

Добуток спряжених комплексних чисел

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Піднесення до степеня комплексного числа зручно виконувати, якщо число записане в тригонометричній формі.

Користуючись формулою множення комплексних чисел у тригонометричній формі, дістаємо

$$z^n = [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Ця формула називається **першою формулою Муавра**[1].

Якщо покласти $r = 1$, то дістанемо

$$(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Розглянемо тепер операцію добування кореня будь-якого натурального степеня з комплексного числа $\sqrt[n]{z}$.

Нехай комплексне число z задано в тригонометричній формі. **Коренем n-го степеня з числа** z є таке комплексне число, n-й степінь якого дорівнює z:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \qquad (6.2)$$

де ρ і ψ підлягають визначенню.

Згідно з означенням кореня із комплексного числа знаходимо

$$[\rho (\cos \psi + i \sin \psi)]^n = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Використовуючи першу формулу Муавра, дістаємо

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

---

[1] Муавр де Абрахам (1667–1754) — англійський математик.

За умовою рівності комплексних чисел

$$\rho^n = r, \quad \text{або} \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \tag{6.3}$$

де $\sqrt[n]{r}$ — арифметичне значення кореня з модуля,

$$\varphi + 2\pi k = n\psi \quad \text{або} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \; k \in \mathbf{Z}. \tag{6.4}$$

Враховуючи рівності (6.3) і (6.4), рівність (6.2) можна записати у вигляді

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{6.5}$$

де $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3, \ldots$.

Як випливає з формули (6.5), корінь n-го степеня з комплексного числа має нескінченну множину значень. Чи усі ці значення різні?

Легко переконатися, що при $k = n$ дістанемо значення ψ, відмінне від його значення при $k = 0$ на 2π, тобто знайдемо одну й ту саму точку комплексної площини.

Таким чином, кількість значень кореня з комплексного числа дорівнює показнику степеня кореня.

Корінь n-го степеня з комплексного числа має n різних значень, які знаходять за формулою

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Ця формула називається **другою формулою Муавра**.

Як приклад розглянемо розв'язання двочленного рівняння.

Двочленним рівнянням називається рівняння виду

$$x^n = q, \tag{6.6}$$

де q — задане дійсне число; n — натуральне число, більше за одиницю.

Розв'язком цього рівняння у множині комплексних чисел є

$$x = \sqrt[n]{q}.$$

Запишемо число q в тригонометричній формі, вважаючи $q > 0$:

$$q = q + 0 \cdot i \Rightarrow r = \sqrt{q^2 + 0^2} = q; \quad \text{tg}\varphi = \frac{0}{q} = 0 \Rightarrow \varphi = 0;$$

$$q = q\,(\cos 0 + i\sin 0).$$

Тоді

$$\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{q}\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{n}\right),$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Таким чином, рівняння (6.6) має розв'язок:

$$x_k = \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{q}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, тобто двочленне рівняння n-го степеня має рівно n коренів.

Нехай, наприклад, $q = 8$, а $n = 3$, тоді рівняння

$$x^3 = 8$$

має розв'язок

$$x_k = \sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}\right),$$

де $k = 0, 1, 2$.

Підставляючи значення $k = 0, 1, 2$, дістаємо корені рівняння

$$x_0 = 2\left(\cos\frac{0}{3} + i\sin\frac{0}{3}\right) = 2,$$

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$x_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Якщо права частина рівняння (6.6) від'ємна, тобто $q < 0$, то тригонометрична форма числа q буде

$$q = q + 0 \cdot i = |q|\,(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Тоді корені рівняння (6.6) визначаються за формулою

$$x_k = \sqrt[n]{|q|}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{n}\right),$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Ділення комплексних чисел можна виконувати як в алгебраїчній, так і в тригонометричній формі.

Нехай $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$; знайдемо частку

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}.$$

Помножимо чисельник і знаменник на число, спряжене до знаменника

$$\frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\,i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i.$$

Таким чином, ділення комплексних чисел виконується за правилом

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Нехай комплексні числа задано в тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{і} \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тоді

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Таким чином, при діленні комплексних чисел у тригонометричній формі їх модулі діляться, а аргументи віднімаються. При діленні як дійсних, так і комплексних чисел припускається, що дільник відмінний від нуля.

Зауважимо, що дії над комплексними числами підлягають основним законам дій над дійсними числами. Тому всі формули, теореми і правила, виведені для дійсних чисел на підставі цих законів, вірні і для комплексних чисел.

6.3. Комплексні корені квадратного рівняння

У шкільному курсі математики для обчислення коренів квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

де a, b, c — дійсні числа, використовується формула

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

При цьому для дискримінанта D розглядають лише два випадки:

1) $D = b^2 - 4ac > 0$,
2) $D = b^2 - 4ac = 0$.

У результаті цього знаходять лише дійсні корені. Припустимо, що $D < 0$. Тоді формулу для коренів квадратного рівняння можна записати у вигляді

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-\left|b^2 - 4ac\right|}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-|D|}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Отже:

при $D = b^2 - 4ac > 0$ квадратне рівняння має два дійсні різні корені;

при $D = b^2 - 4ac = 0$ квадратичне рівняння має кратні корені

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a};$$

при $D = b^2 - 4ac < 0$ квадратне рівняння має два комплексно спряжених корені

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

6.4. Функції комплексної змінної

Якщо дійсна частина і коефіцієнт при уявній одиниці комплексного числа є змінними, то комплексне число називається **комплексною змінною**.

Позначимо дійсну частину $\operatorname{Re} z = x$, коефіцієнт при уявній одиниці $\operatorname{Im} z = y$.

Тоді комплексна змінна

$$z = x + iy.$$

Якщо x і y змінюються дискретно, тобто утворюють послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, то дістанемо послідовність комплексних чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$.

Геометрично послідовність $\{z_n\}$ зображається точками комплексної площини. Якщо послідовність $\{z_n\}$ обмежена, то на площині можна знайти таку обмежену область, до якої належать всі точки даної послідовності.

Означення границі послідовності з комплексними числами вводиться аналогічно введенню границі послідовності з дійсними числами.

Комплексне число $z_0 = x_0 + iy_0$ називають **границею послідовності** $\{z_n\}$, якщо для будь-якого $\delta > 0$ існує такий номер $N(\delta) > 0$, що при всіх $n > N$ справджується нерівність $|z_n - z_0| < \delta$ і записують

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0.$$

Нерівність

$$|z_n - z_0| < \delta$$

рівносильна нерівності

$$|(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| < \delta,$$

або

$$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \delta. \qquad (6.7)$$

Якщо останню нерівність зобразити геометрично, то дістанемо коло радіуса δ з центром у точці z_0. При цьому δ-околом точки z_0 є коло радіуса δ з центром у точці z_0. Тоді послідовність $\{z_n\}$ має границю z_0, якщо в будь-якому як завгодно малому околі точки z_0 розміщена нескінченна множина членів послідовності $\{z_n\}$, а поза цим околом може бути лише скінченне число.

Розглянемо нерівності, пов'язані з нерівністю (6.7).

Легко показати, що виконуються нерівності

$$|x_n - x_0| \le \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|,$$

$$|y_n - y_0| \le \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|.$$

З останньої нерівності дійдемо висновку, що коли

$$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \delta, \quad \text{то} \quad \begin{cases} |x_n - x_0| < \delta; \\ |y_n - y_0| < \delta \end{cases}$$

і навпаки, якщо

$$\begin{cases} |x_n - x_0| < \dfrac{\delta}{2}; \\ |y_n - y_0| < \dfrac{\delta}{2}, \end{cases} \quad \text{то} \quad \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \delta.$$

Таким чином, для того щоб послідовність $\{z_n\}$ з комплексними членами мала границю (збігалася), необхідно і достатньо, щоб мали скінченні границі послідовності $\{\mathrm{Re}\ z_n\} = \{x_n\}$ і $\{\mathrm{Im}\ z_n\} = \{y_n\}$. Отже, якщо

$$z_n = x_n + iy_n, \text{ то } \lim z_n = \lim x_n + i \lim y_n.$$

Нехай тепер змінні x і y є функціями змінної t, $t \in \mathbf{R}$. Тоді комплексне число

$$w(t) = x(t) + iy(t)$$

є функцією дійсної змінної. Функція $w(t)$ називається комплекснозначною функцією дійсної змінної.

Легко бачити, що існування границі і неперервність функції $w(t)$ визначаються характером дійсних функцій $x(t)$ і $y(t)$.

Нехай дано дві непорожні множини A і B, елементами яких є комплексні числа, і нехай f є відображенням A в B.

Тоді говорять, що на множині A визначена функція комплексної змінної

$$w = f(z) \Rightarrow \forall\ z \in A \quad \exists\ w \in B \Rightarrow w = f(z),$$

або

$$f(z) = \{\forall\ w \notin B \quad \exists\ z \in A, \quad f(z) = w\}.$$

6.5. Показникова форма комплексного числа. Формули Ейлера

Визначимо комплексну показникову функцію $e^{i\varphi}$ за допомогою формули

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (6.8)$$

Вона називається **формулою Ейлера.**

Можна довести, що

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (6.9)$$

Застосовуючи формули (6.8) і (6.9), дістаємо

$$w = e^{x+iy} = e^{x}\cdot e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y).$$

Тепер можна довести, що

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2};\ \left(e^{z}\right)^{n} = e^{nz}.$$

Із рівностей (6.8) і (6.9) випливає, що

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}. \qquad (6.10)$$

Нагадаємо, що

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2},\ \operatorname{sh}\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}.$$

Використовуючи рівність (6.8), комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, задане в тригонометричній формі, можна записати у вигляді

$$z = re^{i\varphi}.$$

Цей запис називається **показниковою формою комплексного числа.**

6.6. Неперервність функції комплексної змінної

Нехай задана функція комплексної змінної

$$w = f(z), \qquad (6.11)$$

область визначення якої позначимо $D(f)$, область значень $E(f)$.

Якщо ввести дійсні функції $u = \operatorname{Re} w = u(x, y)$ і $v = \operatorname{Im} w = v(x, y)$, незалежну змінну позначити через $z = x + iy$, то рівність (6.11) можна записати у вигляді

$$w = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Геометрично значення аргументу z зображується точками площини xOy або z, а значення функції w — точками площини uOv або w (рис. 3.81).

Якщо функція $w = f(z)$ однозначна, то вона кожну точку $z \in D(f)$ переводить в одну точку $w \in E(f)$, тобто

$$D(f) \ni z \xrightarrow{f} w = f(z) \in E(f).$$

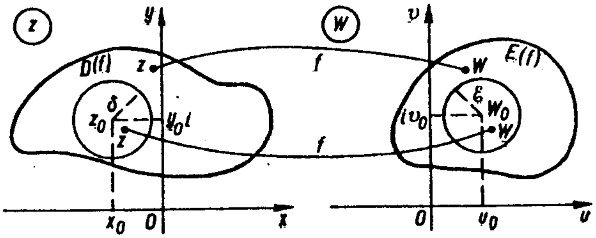


Рис. 3.81

Введемо поняття границі комплексної змінної. Число w_0 називають **границею функції** $w = f(z)$ при $z \to z_0$, якщо $f(z)$ визначена в деякому околі точки z_0, крім, хіба що, самої точки z_0 і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при всіх значеннях z, які задовольняють нерівності

$$0 < |z - z_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

і записують

$$\lim_{z \to z_0} w = \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Геометрично число w_0 буде границею функції $w = f(z)$ при $z \to \to z_0$, якщо для будь-якого ε-околу точки w_0 знайдеться такий δ-окіл точки z_0, що для всіх точок, розміщених у проколотому δ-околі точки z_0, відповідні значення функції будуть розміщені в ε-околі точки w_0. Функція в точці z_0 може бути й не визначена.

Можна показати, що для того щоб існувала границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ необхідно і достатньо, щоб існували границі дійсних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ в точці (x_0, y_0) і були відповідно рівні u_0 і v_0:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y).$$

Функція $w = f(z)$ називається **неперервною в точці** z_0, якщо вона визначена в цій точці і деякому її околі; існує границя функції в цій точці, яка дорівнює значенню функції в точці z_0, тобто

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Згідно з означенням границі, функція $w = f(z)$ неперервна в точці її визначення z_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна дібрати таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх z, які задовольняють нерівність $|z - z_0| < \delta$, виконується умова

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \tag{6.12}$$

Якщо ввести позначення $z - z_0 = \Delta z$ і $f(z) - f(z_0) = \Delta w$, то нерівність (6.12) можна записати у вигляді

$$|\Delta z| < \delta \Rightarrow |\Delta w| < \varepsilon.$$

Таким чином, функція $w = f(z)$ буде неперервною в точці z_0, якщо вона визначена в цій точці і в деякому її околі і

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0,$$

тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Можна показати, що функція

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

неперервна в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ тоді і тільки тоді, коли функції дійсних змінних $u(x, y)$ і $v(x, y)$ неперервні в точці (x_0, y_0).

Таким чином, означення неперервності функції, комплексної змінної виражається через означення неперервності функції дійсних змінних.

Функція комплексної змінної називається **неперервною в деякій області**, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

***Приклади.* 1.** Розв'язати рівняння $|z| - iz = 1 - 2i$.

Розв'язання. Враховуючи, що $z = x + iy$, де x і y — дійсні числа, і $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, задане рівняння можна записати у вигляді

$$\sqrt{x^2 + y^2} - i(x + iy) = 1 - 2i,$$

або

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + y\right) - ix = 1 - 2i.$$

Згідно з умовою рівності комплексних чисел дістаємо

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + y = 1 \\ -x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4 + y^2} = 1 - y \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 + y^2 = 1 - 2y + y^2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases}.$$

Відповідь. $z = 2 - 1{,}5i$.

2. Знайти а) $e^{i\pi}$; б) $e^{1 + i\frac{\pi}{2}}$; в) $\cos i$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу Ейлера, дістаємо

а) $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$;

б) $e^{1 + i\frac{\pi}{2}} = e \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = ei$;

в) Скориставшись формулою (6.10), знаходимо

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e} \approx 1{,}36.$$

Глава 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ І БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§ 1. ЗАДАЧІ І ПОНЯТТЯ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО ВВЕДЕННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.1. Фізичні задачі

Нехай треба знайти швидкість тіла, що падає (без обертання), у даній точці або в даний момент часу.

Припустимо, що з моменту початку падіння тіла пройшов час t. Зафіксуємо його і позначимо шлях, який відповідає цьому проміжку часу, через $s\,(t)$.

Як відомо з курсу фізики,

$$s(t)=\frac{gt^2}{2}.$$

Нехай з моменту t пройшов деякий проміжок часу, який позначимо через Δt, а шлях, пройдений за цей час,— через Δs. Тоді

$$\Delta s=\frac{g}{2}\left[(t+\Delta t)^2-t^2\right]=\frac{g}{2}\left(2t\Delta t+\Delta t^2\right)=\frac{g\Delta t}{2}(2t+\Delta t).$$

Середньою швидкістю руху тіла за час Δt називається відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{g}{2}\left(2t+\Delta t\right);\ v_{\text{ср}}=gt+\frac{g\Delta t}{2}.$$

Швидкість руху тіла в момент t найповніше характеризує та границя, до якої прямує середня швидкість при $\Delta t\to 0$. Цю границю і називають **швидкістю руху в даний момент часу** t:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}v_{\text{ср}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g\Delta t}{2}\right)=gt.$$

Ці міркування легко поширити на випадок будь-якого руху.

Нехай треба нагріти тіло від 0 до θ°С. Позначимо необхідну кількість теплоти через w. Очевидно, що $w=f\,(\theta)$. Нехай температуру потрібно підвищити від θ до $\theta+\Delta\theta$, тобто на $\Delta\theta$. Тоді кількість теплоти, яку треба надати тілу, запишеться у вигляді

$$w+\Delta w=f(\theta+\Delta\theta),\ \text{а}\ \Delta w=f(\theta+\Delta\theta)-f(\theta).$$

Середньою теплоємністю $C_{\text{ср}}$ називається відношення $\frac{\Delta w}{\Delta\theta}$:

$$C_{\text{ср}} = \frac{\Delta w}{\Delta\theta}.$$

Теплоємністю називається границя

$$C = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta\theta}.$$

Нехай Q — кількість електрики, яка протікає через поперечний переріз провідника за час t. Очевидно, що $Q = f(t)$. **Середньою силою струму** $I_{\text{ср}}$ називається відношення

$$I_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

а **силою струму** в даний момент часу t — границя

$$I = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

1.2. Дотична до кривої та її кутовий коефіцієнт

Нехай проста крива задана рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \le t \le b.$$

Візьмемо із проміжку $[a, b]$ внутрішню точку t_0, якій на заданій кривій відповідатиме точка $M_0(t_0)$ (рис. 4.1). Околу точки t_0, який належить відрізку $[a, b]$, на кривій відповідатиме дуга σ_1. Візьмемо з цього околу значення параметра t, відмінне від t_0, якому відповідатиме на даній кривій точка $M_1(t)$. Через точки M_0 і M_1 проведемо січну, кут нахилу якої до додатного напряму осі абсцис позначимо через $\alpha(t)$.

Пряма M_0T, яка проходить через точку M_0 і утворює з віссю абсцис кут $\varphi = \lim\limits_{t\to t_0} \alpha(t)$, називається **дотичною до даної кривої** в її точці M_0.

Можна дати ще й таке означення: **дотичною до даної кривої** в її точці M_0 називається граничне положення січної M_0M_1 при умові, що точка M_1 необмежено наближається вздовж кривої до точки M_0.

Примітки. 1. Оскільки границя функції $\alpha(t)$ може існувати (тоді вона єдина), а може й не існувати, то дотична до кривої може бути, а може й не бути. Розглянемо криву $y = |x|$:

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \ge 0; \\ -x, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$$

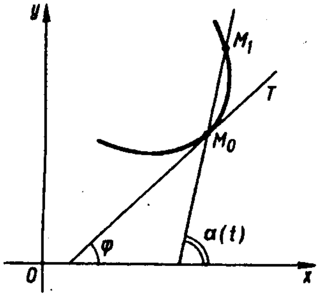


Рис. 4.1

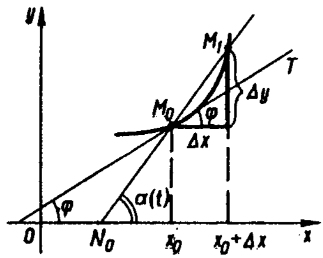


Рис. 4.2

(рис. 3.25). У точці O (0, 0) дотичної до кривої не існує, оскільки не може бути граничного положення січної.

2. Дотична до прямої збігається з цією прямою.

3. Означення дотичної до кола як прямої, яка має з кривою лише одну спільну точку, є окремим випадком загального означення і вірне тільки для кола.

Нехай функцію задано рівнянням $y = f(x)$ і в точці M_0 (x_0, y_0) графік функції має дотичну, не перпендикулярну до осі Ox (рис. 4.2). Надамо x приросту Δx. Тоді

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),\ \operatorname{tg}\alpha(t) = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо рівняння дотичної записати у вигляді $y = kx + b$, то

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

є **кутовим коефіцієнтом дотичної**.

§ 2. ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ДО КРИВОЇ. ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в проміжку. Зафіксуємо деяке значення $x = x_0$ і візьмемо нове значення $x = x_1$. Приріст аргументу позначимо через $\Delta x = x_1 - x_0$. Знайдемо значення функції в точці x_1

$$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$$

і приріст функції

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, називається **похідною функції однієї змінної в даній точці** x_0, або **звичайною похідною**:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0), \qquad (2.1)$$

або

$$\lim_{(x_1 - x_0) \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}. \qquad (2.2)$$

При $\Delta x = h$ і $x_1 = x_0 + h$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}. \qquad (2.3)$$

Якщо x_0 позначити через x, то $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ і похідна від функції $y = f(x)$ при будь-якому фіксованому x визначається як

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'(x) = y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}. \qquad (2.4)$$

Якщо позначити $x = a$ і $x + \Delta x = X$, то похідна від функції $y = f(x)$ в точці $x = a$ визначається як

$$\lim_{X \to a} \frac{f(X) - f(a)}{X - a} = f'(a). \qquad (2.5)$$

Якщо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

не існує, то не існує в точці x похідної від функції $y = f(x)$.

Наприклад, функція $y = |x|$ в точці $x = 0$ не має похідної, оскільки не існує

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

тому що

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

Користуючись означенням похідної, можна фізичні величини, розглянуті в § 1, означити таким чином:

швидкість у даний момент часу є похідною від пройденого шляху $s(t)$ по часу: $v = \dfrac{ds}{dt}$. Це механічне тлумачення похідної;

теплоємність є похідною від кількості теплоти по температурі: $C = \dfrac{d\omega}{d\theta}$;

сила струму є похідною від кількості електрики по часу: $I = \dfrac{dQ}{dt}$;

кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в даній точці, або тангенс кута, утвореного дотичною до кривої в даній точці і додатним напрямом осі абсцис, є похідною від ординати y по абсцисі x. Це геометричне тлумачення похідної.

Оскільки рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в її точці $M(x_0, y_0)$ є рівнянням прямої, яка проходить через дану точку в даному напрямі $k = y'(x_0)$, то

$$y - y_0 = k(x - x_0), \text{ або } y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \qquad (2.6)$$

— це рівняння дотичної до кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 4.2).

Дамо фізичне тлумачення загального означення (2.4) похідної функції однієї змінної. Нехай функція $y = f(x)$ описує якийсь фізичний процес. Тоді $y' = \dfrac{dy}{dx}$ є швидкістю зміни цього процесу.

Приклади. **1.** Довести, що функція $y = \sin x$ у будь-якій фіксованій точці x має похідну.

Розв'язання. Дійсно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Однак

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right].$$

Використовуючи першу важливу границю, знаходимо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

Оскільки $\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$ є неперервною функцією, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \cos x.$$

Таким чином, якщо $y = \sin x$, то $y' = \cos x$. У точці $x = 0$ маємо $y'(0) = \cos 0 = 1$.

Аналогічно доведемо, що функція $y = \cos x$ має похідну в будь-якій фіксованій точці x.

Дійсно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}.$$

Однак

$$\cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Тоді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\left[\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right].$$

Внаслідок неперервності на всій числовій осі функції $y = \sin x$ маємо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \sin x,$$

а оскільки

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1, \text{ то } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x.$$

Отже, якщо $y = \cos x$, то $y' = -\sin x$. Таким чином,

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

2. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$, де $x \geq 0$.

Розв'язання. Маємо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Отже,

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ де } x > 0.$$

Операція знаходження похідної функції називається **диференціюванням функції**.

2.1. Теорема про неперервність функції, яка має похідну

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ в деякій фіксованій точці має похідну, то

1) *приріст функції можна зобразити у вигляді*

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x,$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x,$$

де

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(x, \Delta x) = 0.$$

2) *функція в цій точці неперервна.*

Доведення. 1) Згідно з означенням похідної,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Користуючись теоремою про зображення функції, яка має границю у вигляді суми цієї границі і нескінченно малої, запишемо

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(x,\ \Delta x),$$

де

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(x,\ \Delta x)=0\ .$$

Тоді

$$\begin{aligned} &f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\alpha(x,\ \Delta x)\Delta x,\\ &\Delta y=y'\Delta x+\alpha(x,\ \Delta x)\Delta x. \end{aligned} \qquad (2.8)$$

2) Щоб довести неперервність функції, розглянемо вираз (2.8). При $\Delta x \to 0$ сума у правій частині (2.8) перетворюється на нуль. Отже,

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0, \text{ або } \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

а це означає, що функція в точці x неперервна.

Зауваження. З доведеної теореми випливає, що функція, яка має похідну в даній точці, є неперервною в цій точці. Проте неперервна в даній точці функція не завжди має похідну в цій точці. Так, у точці $x = 0$ функція $y = |x|$ є неперервною, однак похідної в цій точці вона не має.

§ 3. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

3.1. Означення частинних похідних

Нехай у деякій області простору задано функцію n незалежних змінних:

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Візьмемо довільну точку в області визначення функції багатьох змінних $P(x_1, x_2, ..., x_n)$. Зафіксуємо x_i і надамо аргументу x_i довільного приросту Δx_i, залишаючи значення інших $(n - 1)$ змінних сталими.

Дістанемо нову точку $P_1(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n)$. Приріст Δx_i спричинить відповідний приріст функції, який називається частинним:

$$\Delta u_i = \Delta_{x_i} u = f(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) -$$
$$- f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n).$$

Поділимо частинний приріст Δu_i на приріст Δx_i. Відношення $\frac{\Delta u_i}{\Delta x_i}$ виражає середню швидкість зміни функції $u = f(x_1, ..., x_n)$ за змінною x_i на ділянці від точки $P(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ до точки $P_1(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n)$. Перейдемо до границі у відношенні $\frac{\Delta u_i}{\Delta x_i}$, довільно спрямовуючи Δx_i, до нуля.

Частинною похідною першого порядку по x_i в точці $P(x_1, x_2, ..., ..., x_i, ..., x_n)$ від функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається границя відношення частинного приросту функції Δu_i до приросту аргументу Δx_i при $\Delta x_i \to 0$, якщо ця границя існує і скінченна. Записують це так:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Для частинних похідних прийнято позначення:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}, u'_{x_i}, \frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i}, f'_{x_i}(x_1, ..., x_n), \frac{\partial f(P)}{\partial x_i}.$$

Частинна похідна $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ характеризує швидкість зміни функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ в напрямі осі Ox_i. Для функції n змінних за цим принципом можна побудувати n частинних похідних першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ можна побудувати дві частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

3.2. Обчислення частинних похідних від функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Оскільки частинна похідна від функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є, за означенням, похідною за однією змінною при сталих значеннях інших змінних, то правила відшукання звичайних похідних цілком переносяться на частинні похідні. Щоб знайти $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, треба у думці зафіксувати всі інші $n - 1$ змінні і диференціювати функцію $u = f(x_{10}, x_{20}, ..., ..., x_{(i-1)0}, x_i, x_{(i+1)0}, ..., x_{n0})$ за x_i як функцію однієї змінної x_i.

Наприклад, функція

$$u = 5xy$$

має дві незалежні змінні. Запишемо дві частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x + \Delta x)y - 5xy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5y\Delta x}{\Delta x} = 5y; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 5y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{5x(y + \Delta y) - 5xy}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{5x\Delta y}{\Delta y} = 5x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 5x.$$

ВПРАВИ. Знайти частинні похідні таких функцій.

1. $u = 3x^2y$. *Відповідь.* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 6xy$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3x^2$.

2. $u = x + y + z$. *Відповідь.* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$.

3. $u = 7xy^2$. *Відповідь.* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 7y^2$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 14xy$.

4. $u = xyz$. *Відповідь.* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yz$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xz$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = xy$.

5. $u = \dfrac{x}{y}$. *Відповідь.* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}$.

6. $u = \dfrac{xy}{z}$. *Відповідь.* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{z}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{z}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{xy}{z^2}$.

3.3. Геометричне тлумачення частинних похідних функції $z = f(x, y)$

Нагадаємо, що похідна функції однієї змінної в точці $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює тангенсу кута, утвореного дотичною в точці $M_0(x_0, y_0)$ і променем, який збігається з додатним напрямом осі Ox (див. рис. 4.1).

Із означення частинної похідної випливає, що при відшуканні частинної похідної функції багатьох змінних останню розглядають, як функцію однієї змінної при фіксованих інших змінних. Тому геометричне тлумачення частинних похідних функції багатьох змінних аналогічне тлумаченню функції однієї змінної.

Функція $z = f(x, y)$ геометрично являє собою деяку поверхню (рис. 4.3).

Розглянемо в області визначення функції $z = f(x, y)$ фіксовану точку $P_0(x_0, y_0)$. Цій точці на поверхні $z = f(x, y)$ відповідає точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Щоб знайти $f'_x(x_0, y_0)$, треба продиференціювати функцію $z = f(x, y_0)$. Щоб побудувати криву $z = f(x, y_0)$, проведемо через точку P_0 площину $y = y_0$, перпендикулярну до площини xOy. Дістанемо площину $M_0P_0N_0$. У перерізі поверхні $z = f(x, y)$ цією площиною лежить крива $z = f(x, y_0)$, яка проходить через точку M_0. Проведемо дотичну M_0N_0 до кривої в точці M_0, позначивши через φ кут, утворений до-

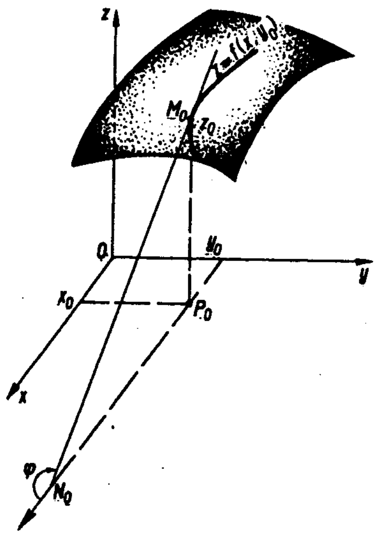


Рис. 4.3

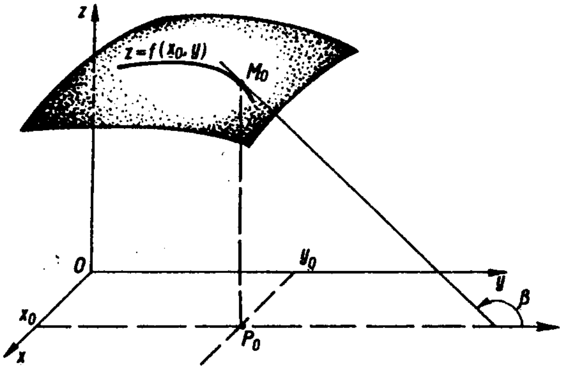


Рис. 4.4

тичною з додатним напрямом лінії, паралельної осі Ox. Тоді

$$f_x'(x_0,\ y_0) = \operatorname{tg}\varphi.$$

Аналогічно $f_y'(x_0,\ y_0) = \operatorname{tg}\beta$, де β — кут, утворений додатним напрямом лінії, паралельної осі Oy, і дотичною, проведеною через точку M_0 до кривої, утвореної перерізом поверхні $z = f(x,\ y)$ площиною $x = x_0$ (рис. 4.4):

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta.$$

Зауважимо, що чим крутіший напрям дотичної до осей Ox і Oy, тим швидше в цьому напрямі зростає крива.

§ 4. ТЕОРЕМИ ПРО ПОХІДНІ

4.1. Похідна сталої $y = c$

Маємо

$$y = c,\ y + \Delta y = f(x + \Delta x) = c,\ \Delta y = 0,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Отже,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0;\ (c)' = 0. \tag{4.1}$$

4.2. Похідна функції $y = x$

Маємо:

$$y + \Delta y = x + \Delta x,\ \Delta y = \Delta x,\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,\ (x)' = 1. \tag{4.2}$$

4.3. Похідна лінійної комбінації функцій

Лінійна комбінація функцій, які мають похідну,

$$F(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x)=\sum_{i=1}^{n}c_if_i(x),$$

має похідну, яка дорівнює лінійній комбінації похідних

$$F'(x)=c_1f_1'(x)+c_2f_2'(x)+\ldots+c_nf_n'(x)=\sum_{i=1}^{n}c_if_i'(x).$$

Дійсно,

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}c_if_i(x+\Delta x)-\sum\limits_{i=1}^{n}c_if_i(x)}{\Delta x}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}c_if_i'(x)=c_1f_1'(x)+c_2f_2'(x)+\ldots+c_nf_n'(x).$$

Окремі випадки:

1°. Нехай $n=1$, тоді $F(x)=c_1f_1(x)$ і $F'(x)=c_1f_1'(x)$, тобто *сталий множник можна виносити за знак похідної.*

2. Нехай $c_1=c_2=\ldots=c_n=1$. Тоді $F(x)=f_1(x)+f_2(x)+$ $+\ldots+f_n(x)$, а $F'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_n'(x)$, тобто *похідна від суми функцій, які мають похідну, дорівнює сумі похідних цих функцій.*

Приклад. Знайти похідну функції

$$y=5\sin x+6\cos x+x-8.$$

Розв'язання. Використовуючи правило диференціювання лінійної комбінації функцій і формули (2.7), (4.1) і (4.2), знаходимо

$$y'=5\cos x-6\sin x+1.$$

Наслідок. *Теорема справджується і для частинних похідних.* Нехай

$$u=c_1f_1(x,y,z)+c_2f_2(x,y,z)+c_3f_3(x,y,z).$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x}=c_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+c_2\frac{\partial f_2}{\partial x}+c_3\frac{\partial f_3}{\partial x}=\sum_{i=1}^{3}c_i\frac{\partial f_i}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=c_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+c_2\frac{\partial f_2}{\partial y}+c_3\frac{\partial f_3}{\partial y}=\sum_{i=1}^{3}c_i\frac{\partial f_i}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=c_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+c_2\frac{\partial f_2}{\partial z}+c_3\frac{\partial f_3}{\partial z}=\sum_{i=1}^{3}c_i\frac{\partial f_i}{\partial z}.$$

4.4. Теорема про похідну добутку функцій

Теорема. *Похідна добутку функцій $y = u \cdot v$, які мають похідну, дорівнює добутку похідної першої функції на другу функцію плюс добуток першої функції на похідну другої функції:*

$$y' = u'v + uv'. \tag{4.3}$$

Доведення. Маємо

$$y = u \cdot v, \quad y + \Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x),$$

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x),$$

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) +$$

$$+u(x + \Delta x)v(x) - u(x + \Delta x)v(x),$$

$$\Delta y = u(x + \Delta x)[v(x + \Delta x) - v(x)] +$$

$$+[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x + \Delta x)\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} +$$

$$+ v(x)\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x) \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} +$$

$$+ v(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u(x)v'(x) + v(x)\,u'(x),$$

оскільки $u(x)$ — неперервна функція.

Ця теорема справджується для добутку будь-якого скінченного числа функцій, які мають похідну. Якщо

$$y = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x),$$

де $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ мають похідну, то

$$y' = f_1'(x) \cdot [f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)] + f_2'(x) \cdot [f_1(x) \cdot f_3(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)] +$$

$$+ \ldots + f_n'(x) \cdot [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x)].$$

Наслідок 1. *Якщо* $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x)$, *то*

$$y = [f_1(x)]^n, \text{ а } \; y' = n[f_1(x)]^{n-1}f_1'(x),$$

$$[f_1^n(x)]' = nf_1^{n-1}(x)f_1'(x). \tag{4.4}$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sin^3 x$.

Розв'язання. $y' = 3\sin^2 x(\sin x)'$; $y' = 3\sin^2 x \cos x$.

Наслідок 2. *Якщо* $y = x^n$, то з рівності (4.4) *випливає, що* $y' = nx^{n-1}(x)' = n \cdot x^{n-1}$; тобто

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}. \qquad (4.5)$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ у точці (1, 1).
Розв'язання. Маємо

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0); \quad f'(x_0) = y' = 3x^2\big|_{x=1} = 3.$$

Рівняння дотичної:

$$y - 1 = 3(x - 1), \text{ або } y - 3x + 2 = 0.$$

Наслідок 3. Теорема справедлива і для частинних похідних. Наприклад: $u = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)$. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \cdot f_2(x, y) + \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \cdot f_1(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \cdot f_2(x, y) + \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \cdot f_1(x, y).$$

4.5. Теорема про похідну частки від ділення двох функцій

Лема. *Якщо* $f(x) \neq 0$ *і має похідну, то функція, обернена за величиною* $f(x)$, *тобто* $y = \dfrac{1}{f(x)}$ *має похідну*

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Доведення.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{f(x + \Delta x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[-\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \times$$

$$\times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f(x + \Delta x) f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

При цьому враховуємо, що функція $y = f(x)$ неперервна в будь-якій точці x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

Приклад. Знайти похідну функції

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Розв'язання.

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x, \quad (\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x.$$

Теорема. *Якщо функції* $u(x)$ і $v(x)$ *мають похідні, а* $v(x) \neq 0$, *то функція* $y = \frac{u}{v}$ *має похідну* $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Доведення. Маємо $y = \frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}$ Покладемо $\frac{1}{v} = w$. Тоді

$$y = u \cdot w \text{ і } y' = u'w + uw', \text{ але } w' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Отже,

$$y' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{4.6}$$

ВПРАВИ. Знайти похідні таких функцій:

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6 + \frac{4}{7}x^7$.

Відповідь. $y' = x^2 - 6x^3 + 13x^4 - 12x^5 + 4x^6$.

2. $y = a\sqrt{x} + x\sqrt{a}$, $a = \text{const}$. *Відповідь.* $y' = \frac{a}{2\sqrt{x}} + \sqrt{a}$.

3. $y = \frac{a}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{a\sin x}$, $a = \text{const}$; $\sin x \neq 0$.

Відповідь. $y' = -\frac{a}{4x\sqrt{x}} + \frac{\sin x - x\cos x}{a\sin^2 x}$.

4. $y = \frac{\cos x}{x} + x^3\sqrt{\frac{x}{a}}$, $a = \text{const}$. *Відповідь.* $y' = -\frac{x\sin x + \cos x}{x^2} + \frac{7x^3}{2\sqrt{ax}}$.

5. $y = \sin^7 x\cos x$. *Відповідь.* $y' = \sin^6 x\left(7\cos^2 x - \sin^{2x}\right)$.

4.6. Похідні тригонометричних функцій

1. $y = \sin x$. $\quad y' = (\sin x)' = \cos x$.

2. $y = \cos x$. $\quad y' = (\cos x)' = -\sin x$.

3. $y = \text{tg}\, x$, де $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$y' = (\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Дійсно,

$$y = \text{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

4. $y = \operatorname{ctg} x$, де $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, де $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$y' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot \operatorname{tg} x.$$

6. $y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$, де $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$y' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

ВПРАВИ. Знайти похідні таких функцій:

1. $y = \dfrac{\sin x(1 + \operatorname{ctg} x)}{\operatorname{tg} x}$. *Відповідь.* $y' = -(\sin x + 2\cos x + \cos x \cdot \operatorname{ctg}^2 x)$.

2. $y = \sin^2 x\left(1 + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$. *Відповідь.* $y' = \sin 2x + \cos 2x$.

3. $y = (1 + \operatorname{cosec} x)\cos x$. *Відповідь.* $y' = -(\sin x + \operatorname{cosec}^2 x)$.

4. $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \sec x}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{\sin 2x + \sin^3 x + \sin 2x \cos x}{\cos^2 x(1 + \cos x)^2}$.

4.7. Теорема про похідну оберненої функції

Теорема. *Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє такі умови:*

1) *функція строго монотонна на сегменті $[a, b]$;*

2) *існує похідна $y' = f'(x)$ в будь-якій точці інтервалу (a, b);*

3) $f'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$.

Тоді існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка має похідну, що дорівнює оберненій величині похідної прямої функції:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ або } x'_y = \frac{1}{y'_x}, \text{ або } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Доведення. Доведемо лише формулу для обчислення похідної оберненої функції.

Цю формулу легко довести геометрично (рис. 4.5).

Розглядаючи геометричний зміст похідної, маємо

$$y'_x = \operatorname{tg}\alpha, \; x'_y = \operatorname{tg}\beta.$$

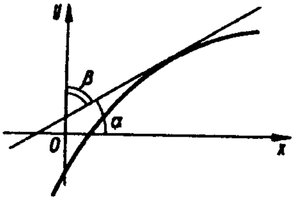


Рис. 4.5

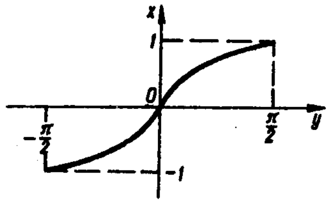


Рис. 4.6

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, то

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \qquad (4.7)$$

Очевидно, якщо $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, то $\beta \neq 0$ і $x'_y \neq 0$.

4.8. Похідні обернених тригонометричних функцій

1. $y = \arcsin x$.

Маємо

$$x = \sin y, \text{ де } y \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right], \ x \in [-1; +1].$$

Перевіримо виконання умов теореми про похідну оберненої функції.

1) На відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ функція $x = \sin y$ строго монотонна (рис. 4.6). При побудові графіка цієї функції можна y прийняти за аргумент (відкладати y по горизонтальній осі), а x — за функцію. Тоді ділянка строгої монотонності відповідатиме ділянці $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$. Якщо прийняти звичайне розташування осей, тобто відкладати значення x на горизонтальній осі, а y — на вертикальній, то дістанемо графік оберненої функції $y = \arcsin x$ (рис. 4.7).

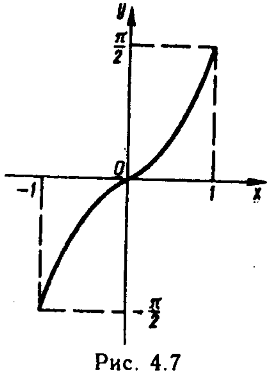


Рис. 4.7

2) У будь-якій точці сегмента $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ існує

$$x'_y = \cos y.$$

3) У будь-якій точці інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$ похідна $x'_y \neq 0$.

Таким чином, на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$

всі умови теореми про похідну оберненої функції виконані. Отже,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

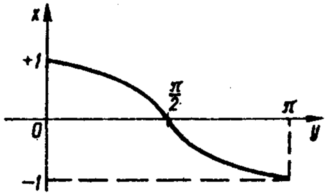


Рис. 4.8

або

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.8}$$

2. $y = \arccos x$.

Тоді $x = \cos y$. Перевіримо виконання теореми про похідну оберненої функції для $x = \cos y$.

1) На відрізку $[0; \pi]$ функція $x = \cos y$ спадає (рис. 4.8).

2) У будь-якій точці цього сегмента існує x'_y.

3) У будь-якій точці інтервалу $(0; \pi)$ похідна $x'_y = -\sin y \neq 0$.

Тоді

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

тобто

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.9}$$

Аналогічно доводиться, що

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{4.10}$$

Приклад. Знайти похідну функції

$$y = 5x^7 - 6\sin x + 32\operatorname{arctg} x - 13\arcsin x + 3.$$

Розв'язання. Маємо

$$y' = 35x^6 - 6\cos x + \frac{32}{1+x^2} - \frac{13}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4.9. Похідна логарифмічної функції

Нехай $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right] = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Оскільки $\log_a e = \dfrac{1}{\ln a}$, то

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (4.11)$$

Нехай $y = \ln x$. Тоді $y' = \dfrac{1}{x}$, тобто

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}. \qquad (4.12)$$

4.10. Похідна показникової функції

Нехай $y = a^x$, де $0 < a \neq 1$. Обернена функція $x = \log_a y$ задовольняє всі умови теореми про існування похідної оберненої функції

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a,$$

тобто

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a. \qquad (4.13)$$

Нехай $y = e^x$, тоді

$$\left(e^x\right)' = e^x. \qquad (4.14)$$

§ 5. ПОХІДНА СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ

***Теорема**. Якщо функція $y = f(u)$ має похідну в точці u, а u є функцією від x,* тобто $u = \varphi(x)$, *яка має похідну у фіксованій точці x, то складна функція $y = f[\varphi(x)]$ має похідну у відповідній точці x, причому $y'_x = y'_u u'_x$, або*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Доведення. Функція $y = f(u)$ має похідну в точці u. Тоді

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u;\ \Delta y = y'_u \Delta u + \alpha(u,\ \Delta u)\Delta u.$$

Функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x. Тоді

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x;\ \Delta u = u'_u \Delta x + \beta(x,\ \Delta x)\Delta x.$$

Маємо

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \Delta x + y'_u \beta \Delta x + u'_x \alpha \Delta x + \alpha\beta\Delta x.$$

Поділивши обидві частини останньої рівності на Δx, дістанемо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u u'_x + y'_u \beta + u'_x \alpha + \alpha\beta.$$

Переходячи до границі в обох частинах рівності при $\Delta x \to 0$, знаходимо

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x .$$

Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то

$$y = f(\varphi(\psi(x))), \quad y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x . \tag{5.1}$$

Похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції на похідну внутрішньої функції.

5.1. Похідні гіперболічних функцій

Розглянемо функцію $y = e^{-x}$. Запишемо її як складну:

$$y = e^u; \quad u = -x, \text{ тоді } y' = e^u \cdot (-1).$$

Отже,

$$\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x} . \tag{5.2}$$

Таким чином, знаходимо:

1°. $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $y' = (\operatorname{sh} x)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$,

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x . \tag{5.3}$$

2°. $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $y' = (\operatorname{ch} x)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$,

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x . \tag{5.4}$$

3°. $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$; $y' = (\operatorname{th} x)' = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} . \tag{5.5}$$

4°. $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$; $y' = (\operatorname{cth} x)' = \dfrac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$,

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0 . \tag{5.6}$$

ВПРАВИ. Знайти похідні таких функцій:

1. $y = ch^3 \dfrac{3}{x}$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{9}{x^2} \operatorname{ch}^2 \dfrac{3}{x} \operatorname{sh} \dfrac{3}{x}$.

2. $y = \sin\left(\arccos^2 3x\right)$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{6 \arccos 3x \cdot \cos\left(\arccos^2 3x\right)}{\sqrt{1 - 9x^2}}$.

3. $y = e^{\sin^2 7x}$. *Відповідь.* $y' = e^{\sin^2 7x} \cdot 7 \sin 14x$.

4. $y = e^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}} e^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}$.

5. $y = 5^{\ln\left(x^2 + x + 1\right)}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \cdot \ln 5 \cdot 5^{\ln\left(x^2 + x + 1\right)}$.

5. 2. Диференціювання неявно заданої функції однієї змінної

Неявна форма запису закону функціональної залежності однієї змінної має вигляд

$$F\ (x,\ y) = 0.$$

Щоб знайти похідну неявної функції, можна взяти похідну від обох частин рівності $F\ (x,\ y) = 0$, вважаючи y функцією від x, і здобуте рівняння розв'язати відносно y'.

Приклад. Знайти похідну функції

$$e^y + y - 2x = 0.$$

Розв'язання. Маємо

$$e^y \cdot y' + y' - 2 = 0;\ y' = \frac{2}{e^y + 1}.$$

ВПРАВИ. Знайти похідні таких функцій, заданих неявно.

1. $x^2y - x^2y^2 - \cos x = 0$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{2xy(1-y) + \sin x}{x^2(2y-1)}$.

2. $y = x + \operatorname{arctg} y$. *Відповідь.* $y' = 1 + \dfrac{1}{y^2}$.

3. $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y)$

Відповідь. $y' = \dfrac{\sec^2(x+y) + y(\sin(xy) - \cos(xy))}{x(\cos(xy) - \sin(xy)) - \sec^2(x+y)}$.

4. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, $a = \text{const}$. *Відповідь.* $y' = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

5.3. Рівняння дотичної до кривих другого порядку

Нехай еліпс задано рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рівняння дотичної шукатимемо у вигляді:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Знайдемо $y'(x_0)$:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}y' = 0,\ \text{або}\ y' = -\frac{b^2x}{a^2y};\ y'(x_0) = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Запишемо рівняння дотичної у будь-якій точці $M\ (x_0,\ y_0)$ еліпса, крім точок $(a;\ 0)$, $(-a;\ 0)$:

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Після перетворень дістанемо

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Аналогічно знаходимо рівняння дотичної в точці $M_0\ (x_0,\ y_0)$ до гіперболи

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

і до параболи

$$yy_0=p\left(x+x_0\right).$$

5.4. Похідна показниково-степеневої функції

Нехай $u=u\ (x)$ і $v=v\ (x)$ — функції, які мають похідні у фіксованій точці x. Знайдемо похідну функції

$$y=u^v.$$

Логарифмуючи цю рівність, дістанемо

$$\ln|y|=v\ln|u|.$$

Продиференціюємо обидві частини по x:

$$\frac{y'}{y}=v'\ \ln|u|+v\frac{u'}{u}.$$

Звідси

$$\left(u^v\right)'=v'u^v\ln|u|+vu^{v-1}u',$$

або

$$\left(u^v\right)'=vu^{v-1}u'+u^vv'\ln|u|. \qquad (5.7)$$

Таким чином, похідна показниково-степеневої функції дорівнює сумі похідної показникової функції за припущення, що $u=\mathrm{const}$, і похідної степеневої функції за припущення, що $v=\mathrm{const}$.

Приклад. Знайти похідну функції $y=x^{\operatorname{tg}x}$.

Розв'язання. Маємо

$$u=x,\ v=\operatorname{tg}x,$$

тоді $y'=\operatorname{tg}x\cdot x^{\operatorname{tg}x-1}+x^{\operatorname{tg}x}\ln|x|\sec^2 x$.

У багатьох випадках при відшуканні похідної показниково-степеневої функції її спочатку логарифмують, а потім знаходять похідну як від функції, заданої у неявній формі. Така операція називається **логарифмічним диференціюванням**.

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^{\sin x}$, $x > 0$.
Розв'язання. Маємо

$$\ln y = \sin x \ln x,\ \frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x},$$

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

ВПРАВИ. Знайти похідні таких функцій:

1. $y = x^{\ln x}$. *Відповідь.* $y' = 2\ln x \cdot x^{\ln x - 1}$.

2. $y = x^{x^2-4x-3}$. *Відповідь.* $y' = \left((2x-4)\ln x + x - 4 - \frac{3}{x}\right)x^{x^2-4x-3}$.

3. $y = x^{\ln x^2 + \frac{1}{x}}$. *Відповідь.* $y' = \left(\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\ln x + \frac{1}{x}\left(\ln x^2 + \frac{1}{x}\right)\right) x^{\ln x^2 + \frac{1}{x}}$.

4. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg}\ln x}$. *Відповідь.* $y' = \left(\frac{1}{x}\ln|\sin x|\sec^2 \ln x + \operatorname{ctg} x \operatorname{tg}\ln x\right) \times$
$\times (\sin x)^{\operatorname{tg}\ln x}$.

5.5. Похідна степеневої функції при будь-якому показнику степеня

Нехай $y = x^{\mu}$, де μ — будь-яке число. Тоді

$$\left(x^{\mu}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} = x^{\mu} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\Delta x} =$$

$$= x^{\mu-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}},$$

де $x \neq 0$. Враховуючи, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu,$$

знаходимо

$$\left(x^{\mu}\right)' = \mu x^{\mu-1}. \tag{5.8}$$

Дістали узагальнення формули (4.5). **Похідна степеневої функції** при будь-якому показнику степеня дорівнює показнику степеня, помноженому на основу, степінь якої на одиницю менше, ніж її показник.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Розв'язання. Маємо

$$y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}, \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

§ 6. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

1. $y = c, \; y' = 0.$
2. $y = [u(x)]^{\mu}, \; \mu \in \mathbf{R}, \; y' = \mu[u(x)]^{\mu-1} \cdot u'(x).$
3. $y = \sqrt{u(x)}, \; y' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$
4. $y = a^{u(x)}, \; y' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \ln a.$
5. $y = \log_a u(x), \; y' = \dfrac{u'(x)}{u(x) \ln a}.$
6. $y = \ln u(x), \; y' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}.$
7. $y = \lg u(x), \; y' = \dfrac{u'(x)}{u(x) \ln 10}.$
8. $y = u^v, \; y' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'.$
9. $y = \sin u(x), \; y' = u'(x) \cos u(x).$
10. $y = \cos u(x), \; y' = -u'(x) \sin u(x).$
11. $y = \operatorname{tg} u(x), \; y' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = u'(x) \sec^2 u(x).$
12. $y = \operatorname{ctg} u(x), \; y' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)} = -u'(x) \operatorname{cosec}^2 u(x).$
13. $y = \sec u(x), \; y' = \sec u(x) \cdot \operatorname{tg} u(x) \cdot u'(x).$
14. $y = \operatorname{cosec} u(x), \; y' = -\operatorname{cosec} u(x) \cdot \operatorname{ctg} u(x) \cdot u'(x).$
15. $y = \arcsin u(x), \; y' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}.$
16. $y = \arccos u(x), \; y' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}.$
17. $y = \operatorname{arctg} u(x), \; y' = \dfrac{u'(x)}{1 + u^2(x)}.$
18. $y = \operatorname{arcctg} u(x), \; y' = -\dfrac{u'(x)}{1 + u^2(x)}.$
19. $y = u + v + w, \; y' = u' + v' + w'.$
20. $y = u \cdot v, \; y' = u'v + uv'.$

21. $y = \dfrac{u}{v},\ v \neq 0,\quad y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}.$

22. $y = f(x),\ x = \varphi(y),\quad y'_x = \dfrac{1}{x'_y}.$

23. $y = f(u),\ u = \varphi(x),\quad y'_x = y'_u \cdot u'_x.$

24. $y = \dfrac{1}{f(x)},\quad y' = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}.$

25. $y = \operatorname{sh} u(x),\quad y' = \operatorname{ch} u(x) \cdot u'(x).$

26. $y = \operatorname{ch} u(x),\quad y' = \operatorname{sh} u(x) \cdot u'(x).$

27. $y = \operatorname{th} u(x),\quad y' = \dfrac{u'(x)}{\operatorname{ch}^2 u(x)}.$

28. $y = \operatorname{cth} u(x),\quad y' = -\dfrac{u'(x)}{\operatorname{sh}^2 u(x)}.$

§ 7. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ, ЗАДАНОЇ ПАРАМЕТРИЧНО

Нехай функцію $y = f(x)$ задано параметрично:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Припустимо, що функція $x = \varphi(t)$ на сегменті $[\alpha, \beta]$ задовольняє теорему про існування похідної оберненої функції, а функція $\psi(t)$ має похідну в інтервалі (α, β). Тоді існує похідна y'_x, причому

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ або } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}. \qquad (7.1)$$

Дійсно, оскільки функція $x = \varphi(t)$ є строго монотонна, то існує обернена функція $t = \lambda(x)$. Тепер $y = f(x)$ можна розглядати як складну функцію $y = \psi(t)$; $t = \lambda(x)$, де t — проміжний аргумент. За правилом диференціювання складної функції знаходимо

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'_t(t) \cdot \lambda'_x(x).$$

Функція $x = \varphi(t)$ задовольняє теорему про похідну оберненої функції. Отже, $\lambda'_x = \dfrac{1}{\varphi'_t(t)}$, а тому

$$y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}, \text{ або } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Приклад. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi,\ a > 0.$$

Розв'язання. Маємо

$$x'_t = -a\sin t, \quad y'_t = a\cos t, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\mathrm{ctg}\, t.$$

ВПРАВИ. Знайти похідні y'_x таких функцій, заданих параметрично:

1. $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $a > 0$. *Відповідь.* $y'_x = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$.

2. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+3t^2}; \\ y = \dfrac{3at^2}{1+3t^2}. \end{cases}$ *Відповідь.* $y'_x = \dfrac{2t}{1-3t^2}$.

3. $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = b\sin^3 t, \end{cases}$ $a > 0;\ b > 0$. *Відповідь.* $y'_x = -\dfrac{b}{a}\mathrm{tg}\, t$.

4. $\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \\ y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$ *Відповідь.* $y'_x = -1$.

§ 8. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Функція однієї змінної називається диференційовною в точці x, якщо приріст функції в цій точці має вигляд

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x,$$

де Δx — приріст аргументу x, якому відповідає приріст Δy функції y і

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x, \Delta x) = 0.$$

Теорема. *Для того щоб функція $y = f(x)$ була диференційовною у деякій фіксованій точці x, необхідно і достатньо, щоб у цій точці існувала похідна $f'(x)$.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в деякій точці x. Отже,

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x.$$

Поділимо на Δx обидві частини рівності і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(x, \Delta x); \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

але

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).$$

Отже,

$$A=f'(x).$$

Достатність. Нехай $y=f(x)$ має похідну в точці x, тобто $f'(x)$. Тоді за теоремою з п. 2.1

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(x,\Delta x)\Delta x,$$

тобто функція $f(x)$ диференційовна в точці x. Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що вирази «функція однієї змінної диференційовна в точці» і «функція має похідну в точці» еквівалентні.

§ 9. ОДНОСТОРОННІ ПОХІДНІ

Якщо функція $y=f(x)$ у деякій точці x має границю справа:

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

то ця границя називається **правою похідною функції** і позначається $f'_+(x)$. Аналогічно

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

називається **лівою похідною** і позначається $f'_-(x)$. Ліва і права похідні називаються **односторонніми.** Якщо $f'_+(x)=f'_-(x)$, то існує й $f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x)$. Якщо $f(x)$ не визначена справа від даної точки, то не існує правої похідної в цій точці.

Відносно лівої похідної міркування аналогічні.

Наявність односторонніх похідних геометрично означає наявність односторонніх дотичних.

Наприклад, функція $y=|x|$ в точці $x=0$ не має похідної, проте існують односторонні дотичні (рис. 3.25)

$$y'_+=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+1,\ y'_-=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1.$$

§ 10. НЕСКІНЧЕННІ ПОХІДНІ

Якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty(-\infty)$, то говорять, що функція в цій точці має **нескінченну похідну**.

Геометрично існування нескінченної похідної означає, що дотична до кривої в даній точці перпендикулярна до осі абсцис (рис. 4.9).

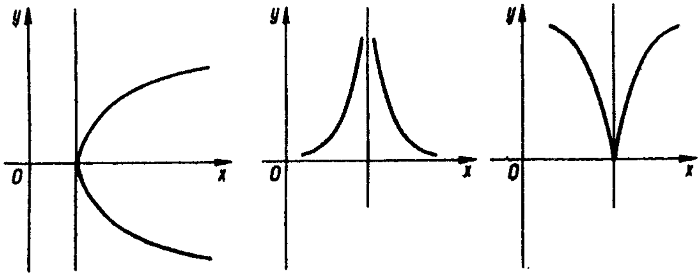


Рис. 4.9

§ 11. ПРИКЛАДИ ФУНКЦІЙ, ЯКІ МАЮТЬ РОЗРИВНІ ПОХІДНІ

Якщо функція $y = f(x)$ в інтервалі (a, b) має похідну $f'(x)$, то $f'(x)$ може бути як неперервною, так і розривною функцією. Наприклад:

1. Функція $y = \sin x$ має похідну на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, причому $y' = \cos x$ також неперервна на інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

2. Функція

$$y = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad y' = -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}$$

має похідну, яка в точці $x = 0$ розривна.

§ 12. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Нехай функція $y = f(x)$ в інтервалі (a, b) має похідну $y' = f'(x) = \varphi(x)$, яка є також функцією від x. Припустимо, що цю функцію можна диференціювати в точці x даного інтервалу.

Похідну функції $\varphi(x) = f'(x)$ в точці x називають **другою похідною функції** $f(x)$, або **похідною другого порядку** в цій точці і позначають

$$y'', \; f''(x), \; \frac{d^2y}{dx^2}, \; \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Похідну другої похідної, якщо вона існує, називають **третьою похідною**, і позначають

$$y''', \; f'''(x), \; \frac{d^3y}{dx^3}, \; \frac{d^3f}{dx^3}, \; \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right).$$

Взагалі, похідною n-го порядку функції $y = f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку і позначають

$$y^{(n)}, f^{(n)}(x), y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]', \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Наприклад, функція $y = 10x^7$ має похідні:

$$y' = 70x^6, \; y'' = 420x^5, \; y''' = 2100x^4 \text{ і т. д.}$$

Друга похідна має такий *фізичний зміст*. Якщо заданий закон прямолінійного руху тіла $s = f(t)$, то $\frac{ds}{dt} = v(t)$ — це швидкість у момент часу t. Введемо відношення $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ і визначимо його як середнє прискорення за проміжок часу $\langle t, t + \Delta t\rangle$. Позначимо $\frac{\Delta v}{\Delta t} = w_{\text{ср}}$. Границя середнього прискорення $\lim\limits_{\Delta t \to 0} w_{\text{ср}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ називається **прискоренням у момент часу** t. Отже,

$$w(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Таким чином, друга похідна від шляху по часу — це дотичне прискорення точки в момент часу t. Друга похідна деякої функції, яка описує фізичний процес, визначає прискорення цього процесу, або швидкість швидкості зміни функції.

12.1. Формула Лейбніца[1]

Нехай $y = u \cdot v$, де $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні до n-го порядку включно. Тоді

$$y' = u'v + uv',$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

$$y^{IV} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)},$$

. . . .

Наведений закон побудови похідних зберігається для похідних будь-якого порядку і полягає ось у чому: вираз $(u + v)^n$ розкладається за формулою бінома Ньютона і в цьому розвиненні показники степенів u, v замінюються на показники порядку похідних,

[1] Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646—1716) — німецький математик, фізик і філософ.

причому u^0, v^0 замінюються на самі функції:

$$y^{(n)} = (u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}. \qquad (12.1)$$

Цей вираз називається **формулою Лейбніца**, яку можна записати ще так:

$$(uv)^n = C_n^0 u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-2)}v' + \ldots +$$
$$+ C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + C_n^n uv^{(n)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

Приклад. Дано $y = x^3 \sin x$. Знайти $y^{(n)}$.
Розв'язання. Нехай $x^3 = u$, $\sin x = v$. Тоді

$$u = x^3,\ u' = 3x^2,\ u'' = 6x,\ u''' = 6,\ u^{(4)} = u^{(5)} = \ldots = u^{(n)} = 0;$$

$$v = \sin x,\ v' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$v'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$v''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \ldots, v^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y^{(n)} = x^3 \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 3x^2 n \cdot \sin\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] +$$
$$+ 3n(n-1)x \sin x\left[x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right] + n(n-1)(n-2)\sin\left[x + (n-3)\frac{\pi}{2}\right].$$

12.2. Похідна другого порядку функції однієї змінної, заданої параметрично

Нехай функції $x(t)$ і $y(t)$ мають похідні другого порядку, а $x(t)$ — строго монотонна функція, яка має відмінну від нуля похідну. Тоді існує

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}. \qquad (12.2)$$

Дійсно,

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Приклад. Дано

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t, \\ y(t) = b\sin t. \end{cases}$$

Знайти y''_{xx}.

Розв'язання. Маємо

$$x'_t = -a\sin t,\ x''_{tt} = -a\cos t,$$

$$y'_t = b\cos t,\ y''_{tt} = -b\sin t,$$

$$y''_{xx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{-a^3\sin^3 t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

§ 13. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ТЕОРЕМА ШВАРЦА

Частинні похідні вищих порядків знаходять аналогічно звичайним похідним вищих порядків. Припустимо, що функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X)$ має всі перші частинні похідні за своїми змінними. При цьому результатом диференціювання є функції $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{13.1}$$

Нехай функції $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мають, у свою чергу, перші частинні похідні за тими самими змінними, тобто

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} = \psi_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Використовуючи формулу (13.1), дістаємо

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} = \psi_{ik}(X). \tag{13.2}$$

Частинні похідні

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$$

називаються **другими частинними похідними**, або **частинними похідними другого порядку**. Для других частинних похідних від функції $u = f(X)$ прийнято також ще й такі позначення:

$$u''_{x_i x_k};\ u''_{x_k x_i};\ f''_{x_k x_i};\ f''_{x_i x_k}.$$

Похідні $u''_{x_i x_k}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq k$ називаються **мішаними**, їх дістають диференціюванням функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ спочатку по x_k, а потім по x_i.

Функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ може мати n^2 похідних другого порядку. Так, функція $u = f(x, y, z)$ має дев'ять других похідних. Якщо функції (13.2) мають похідні, то дістанемо **похідні третього порядку**

$$\frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x_\mu \partial x_k \partial x_i} = u'''_{x_\mu x_k x_i}.$$

При цьому **мішаними** будуть всі похідні, для яких μ, k, i не рівні між собою одночасно. Так, для функції трьох змінних можна дістати 27 похідних третього порядку, серед яких мішаними будуть, наприклад,

$$u'''_{xyy};\ u'''_{xzz};\ u'''_{xyz};\ u'''_{xxz}.$$

Виявляється, що за певних умов, які накладаються на функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, мішані похідні одного порядку рівні між собою.

Сформулюємо без доведення таку теорему.

Теорема Шварца. *Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена разом із своїми частинними похідними*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},\ i = 1, 2, ..., n;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k},\ k = 1, 2, ..., n$$

в деякому околі точки $P_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, причому

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k},\ i, k = 1, 2, ..., n,\ i \neq k,$$

неперервні в точці P_0, то значення мішаних похідних другого порядку за різними змінними не залежить від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i},\ i, k = 1, 2, ..., n,\ i \neq k.$$

Теорема справджується і для мішаних похідних й більш високого порядку.

Наприклад, для функції

$$z = x^3 y^2 - 3xy^3 - 7xy + 5$$

маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - 7y;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - 7x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 7;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 7;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy,$$

тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Аналогічно можна довести, що

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial z}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}.$$

Зауважимо, що коли якась умова теореми Шварца не виконана, то мішані похідні можуть залежати від порядку диференціювання.

Наприклад, нехай дано функцію

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

за умови, що $f(0, 0) = 0$ і $x^2 + y^2 > 0$. Знаходимо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right].$$

Припустимо, що $x = 0$. Тоді при будь-якому значенні y, в тому числі $y = 0$, дістанемо $\dfrac{\partial f(0, y)}{\partial x} = -y$.

Потім знаходимо $\dfrac{\partial^2 f(0, y)}{\partial y \partial x} = -1$ і, зокрема, $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = -1$. Обчисливши аналогічно $\dfrac{\partial^2 f(x,0)}{\partial x \partial y}$ в точці (0, 0), дістанемо $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 1$. Отже, для заданої функції

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}.$$

Тут перші частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в точці (0, 0) зазнають розриву.

ВПРАВИ. **1.** Знайти частинні похідні функції:

а) $z = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$; б) $u = \operatorname{arctg}\sqrt{x^y}$; в) $u = e^{x\left(x^2+y^2+z^2\right)}$.

Відповідь. а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2}{y \sin 2\dfrac{x}{y}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2x}{y^2 \sin 2\dfrac{x}{y}}$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{yx^{\frac{y}{2}-1}}{2\left(1 + x^y\right)}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\sqrt{x^y}\ln x}{2\left(1 + x^y\right)}$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{x\left(x^2+y^2+z^2\right)}\left(3x^2 + y^2 + z^2\right)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2e^{x\left(x^2+y^2+z^2\right)}xy$;

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2xze^{x\left(x^2+y^2+z^2\right)}$.

2. Знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ функції:

а) $z = y^{\ln x}$; б) $z = \arcsin xy$.

Відповідь. а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y - 1}{x^2} y^{\ln x} \ln y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y^{\ln x - 2} \ln x(\ln x - 1)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{y^{\ln x}(1 + \ln x \cdot \ln y)}{xy};$$

б) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{xy^3}{(1 - x^2y^2)\sqrt{1 - x^2y^2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3 y}{(1 - x^2y^2)\sqrt{1 - x^2y^2}}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{(1 - x^2y^2)\sqrt{1 - x^2y^2}}.$$

§ 14. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на відрізку $[a, b]$. Тоді її приріст можна зобразити у вигляді (див. (2.8))

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x.$$

У загальному випадку $f'(x) \neq 0$. Отже, при фіксованому x і $\Delta x \to 0$ добуток $f'(x)\Delta x$ — нескінченно мала величина першого порядку мализни відносно Δx. Добуток $\alpha(x, \Delta x)\Delta x$ є завжди нескінченно малою величиною вищого порядку мализни відносно Δx, оскільки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x, \Delta x) = 0.$$

Таким чином, приріст диференційовної функції складається з двох частин: перша частина $f'(x)\Delta x$ є лінійною відносно Δx, а друга частина є нелінійною відносно Δx. Перша частина приросту дістала назву **головної (головна лінійна відносно Δx частина** $f'(x)\Delta x$).

Головна частина $f'(x)\Delta x$ приросту функції $f(x)$ при фіксованому x називається **диференціалом функції** $f(x)$ і позначається dy або $df(x)$:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$. Отже, $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з його приростом Δx. Тепер

$$dy = f'(x)dx, \tag{14.1}$$

звідки

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Таким чином, *похідну* $f'(x)$ *можна розглядати як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної*. Диференціал $dy = f'(x)dx$ називається також **диференціалом першого порядку.** З формули (14.1) випливає, що для обчислення диференціала функції необхідно знайти її похідну і помножити на диференціал незалежної змінної.

14.1. Таблиця деяких диференціалів

Цю таблицю дістають з таблиці похідних множенням похідної на диференціал незалежної змінної:

1. $y = c, \qquad dy = c'dx = 0.$
2. $y = x^n, \qquad dy = nx^{n-1}dx.$
3. $y = \sin x, \qquad dy = \cos x\, dx.$
4. $y = u + v + w, \qquad dy = du + dv + dw.$
5. $y = u \cdot v, \qquad dy = udv + vdu.$
6. $y = \dfrac{u}{v}, \qquad dy = \dfrac{vdu - udv}{v^2}.$

14.2. Геометричний зміст диференціала

Нехай дано диференційовну функцію $y = f(x)$. Побудуємо графік функції (рис. 4.10, *а*, *б*). Виберемо на графіку довільну точку M з координатами x і y. Зафіксувавши координату x, надамо x приросту Δx. Тоді y набуде приросту Δy. Проведемо у точці M дотичну до графіка функції. Позначимо утворений між дотичною і віссю абсцис кут через α.

Як видно з рис. 4.10,

$$NP = \Delta y,\ NR = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x,\ \Delta x = dx,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x),\ NR = f'(x)dx.$$

Отже,

$$NR = dy,\ PR = \Delta y - dy = \alpha(x, \Delta x)\Delta x.$$

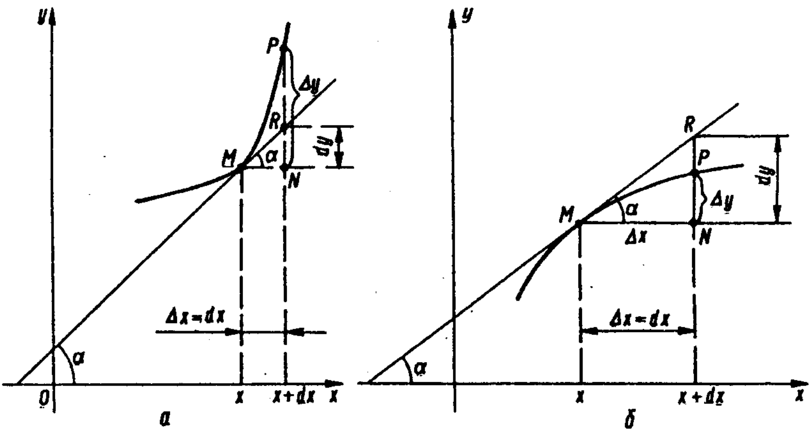


Рис. 4.10

Таким чином, диференціал функції $f(x)$, який відповідає даним значенням x і Δx, дорівнює приросту ординати, дотичної до кривої $y = f(x)$ у даній точці x. У той же час Δy є приростом ординати кривої.

14.3. Інваріантність форми диференціала

Нехай дана функція $y = f(x)$, де $x = \varphi(t)$, тобто $y = f\,[\varphi(t)]$. Якщо існують похідні y'_x і x'_t, то існує y'_t, причому $y'_t = y'_x \cdot x'_t$. Якщо x — незалежна змінна, то

$$dy = f'_x dx\text{, або } dy = y'_x dx\,.$$

Якщо незалежна змінна t, то

$$dy = y'_t\,dt\text{, а } dx = x'_t\,dt.$$

Враховуючи, що $y'_t = y'_x\,x'_t$, дістаємо $dy = y'_x\,x'_t\,dt = y'_t\,dx$. Таким чином,

$$dy = y'_x dx\,.$$

Як бачимо, формула для обчислення диференціала не залежить від того, чи буде x незалежною змінною або функцією від незалежної змінної.

Ця властивість називається **інваріантністю (незмінністю) форми диференціала функції однієї змінної.**

14.4. Застосування диференціала до наближених обчислень функції

Теорема. *Якщо* $y'_x = f'(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$, *тобто* Δy *і* dy *є еквівалентними нескінченно малими.*

Доведення. Маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x + \alpha(x,\ \Delta x)\Delta x}{f'(x)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left| 1 + \frac{\alpha(x,\ \Delta x)}{f'(x)} \right| = 1 + \frac{1}{f'(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x,\ \Delta x) = 1\,.$$

На підставі теореми з п. 5.11 гл. 3 дістаємо з точністю до нескінченно малої другого порядку мализни

$$\Delta y \approx dy\text{, або } f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x\,.$$

Ця формула визначає спосіб наближеного обчислення значення функції в точці.

Наприклад, нехай $f(x)=\sqrt{x}$. Тоді

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}.$$

Якщо $x = 1$, то $\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{\Delta x}{2}$. Так, $\sqrt{1{,}005}=\sqrt{1+0{,}005}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}005=1{,}0025$.

§ 15. ЧАСТИННИЙ І ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ФУНКЦІЇ

Розглянемо функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, визначену в деякій області D. Нехай вона має частинні похідні за всіма змінними в кожній точці області D, тобто

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_{x_i}u}{\Delta x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i},\ i=1,2,...,n. \qquad (15.1)$$

Використовуючи теорему про залежність між функцією, яка має границю, її границею і нескінченно малою функцією, дістаємо

$$\frac{\Delta_{x_i}u}{\Delta x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i}+\alpha_i,\ \lim_{\Delta x_i\to 0}\alpha_i=0,\ i=1,2,...,n, \qquad (15.2)$$

де α_i є нескінченно малими функціями.

З рівностей (15.2) знаходимо частинні прирости

$$\Delta_{x_i}u=\frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i+\alpha_i\Delta x_i. \qquad (15.3)$$

Якщо порівняти вираз (15.3) з означенням диференційовної функції однієї змінної $u = f(t)$, для якої

$$\Delta u=\frac{du}{dt}\Delta t+\alpha\Delta t, \qquad (15.4)$$

де α — нескінченно мала функція, то рівність (15.3) можна прийняти за означення диференційовності функції

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

за кожною із змінних.

Функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається **диференційовною в точці** $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ **за змінною** x_i, якщо її частинний приріст $\Delta_{x_i}u$ має вигляд

$$\Delta_{x_i}u=\frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i+\alpha_i\Delta x_i,$$

де

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \alpha_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Аналізуючи рівність (15.3) і порівнюючи її з (15.4), бачимо, що частинний приріст $\Delta_{x_i} u$ складається з двох частин. Перша частина, яка дорівнює $\frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i$, є лінійною відносно приросту незалежної змінної Δx_i; вона є нескінченно мала того самого порядку мализни, що і Δx_i. Оскільки $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha_i \Delta x_i}{\Delta x_i} = 0$, то друга частина $\alpha_i \Delta x_i$ є нескінченно мала більш високого порядку мализни, ніж Δx_i. Тому лінійна відносно Δx_i частина приросту $\Delta_{x_i} u$ дістала назву **головної**.

Головна (лінійна відносно Δx_i) частина $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Delta x_i$ приросту $\Delta_{x_i} u$ функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при фіксованих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається **частинним диференціалом функції** і позначається

$$d_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Покладаючи $\Delta x_i = dx_i$, знаходимо

$$d_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i,$$

тобто *частинний диференціал функції n змінних дорівнює частинній похідній функції, помноженій на диференціал відповідної незалежної змінної*.

Поставимо задачу зображення повного приросту Δu функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у формі (15.4).

Нагадаємо, що для зображення приросту функції однієї змінної у формі (15.4) має виконуватися одна умова — існування похідної в точці x. Щоб зобразити повний приріст функції n змінних у формі, аналогічній (15.4), недостатньо існування частинних похідних за всіма змінними в точці $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, потрібно, щоб вони були також неперервні в точці. Для спрощення викладок розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Нехай функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в точці $P(x, y)$. Тоді ці частинні похідні існують в ε-околі точки $P(x, y)$. Розглянемо повний приріст Δz функції $z = f(x, y)$ при переході від точки $P(x, y)$ до точки $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$, де Δx і Δy — довільні

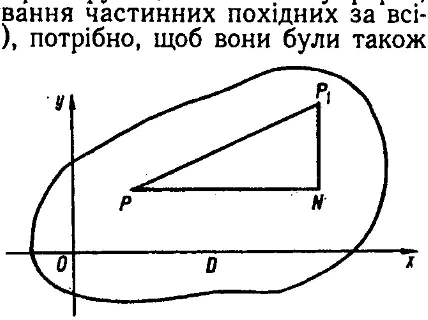


Рис. 4.11

області визначення функції $z = f(x, y)$, які не виводять точку P_1 з ε-околу точки P. Маємо

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y). \tag{15.5}$$

Якщо в правій частині рівності (15.5) додати і відняти величину $f(x + \Delta x, y)$, то дістанемо

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] + [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)],$$

тобто повний приріст функції на ділянці PP_1 (рис. 4.11) зображається у вигляді суми двох частинних приростів: 1) приросту на ділянці PN при сталому y; 2) приросту на ділянці NP_1 при сталому $x + \Delta x$.

Таким чином,

$$\Delta z = \Delta_y z(x + \Delta x, y) + \Delta_x z(x, y).$$

Із рівності (15.3) випливає, що

$$\Delta_y z(x + \Delta x,\ y) = \frac{\partial z(x + \Delta x,\ y)}{\partial y}\Delta y + \alpha(x + \Delta x,\ y + \Delta y)\Delta y,$$

де

$$\lim_{\Delta y \to 0} \alpha(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = 0.$$

Оскільки в точці P похідні є неперервними, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\partial z(x + \Delta x,\ y)}{\partial y} = \frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y},$$

звідки

$$\frac{\partial z(x + \Delta x,\ y)}{\partial y} = \frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y} + \beta(x,\ y,\ \Delta x),$$

де

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta(x, y, \Delta x) = 0.$$

Тепер знаходимо

$$\Delta_y z(x + \Delta x,\ y) = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \beta\,\Delta y + \alpha\,\Delta y,$$

$$\Delta_x z(x,\ y) = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \gamma(x,\ y,\ \Delta x)\Delta x,$$

де

$$\lim_{\Delta x \to 0} \gamma(x,\ y,\ \Delta x) = 0.$$

Отже,

$$\Delta z = \frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}\Delta y + \gamma\,\Delta x + (\alpha + \beta)\Delta y, \tag{15.6}$$

або

$$\Delta z = d_x z + d_y z + \alpha_x \Delta x + \alpha_y \Delta y,$$

де

$$\alpha_x = \gamma,\ \ \alpha_y = \alpha + \beta.$$

Вираз (15.6) зображує повний приріст Δz функції $z = f(x, y)$, яка має неперервні частинні похідні у вигляді суми частинних диференціалів і нескінченно малих більш високого порядку мализни.

Розглянемо тепер функцію $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка має неперервні частинні похідні за всіма змінними в точці $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тоді, міркуючи аналогічно, дістанемо

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n +$$

$$+ \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \cdots + \alpha_n\Delta x_n ,$$

де

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \alpha_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

або

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i . \qquad (15.7)$$

Перша сума є лінійною відносно приросту Δx_i, а друга — нелінійною.

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема. *Якщо функція* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *має неперервні частинні похідні в деякій точці* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *то її повний приріст зображується у вигляді* (15.7), *причому* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *не залежить від* Δx_i.

Позначивши $\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$, повний приріст функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна зобразити у вигляді

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} A_i\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i . \qquad (15.8)$$

Якщо приріст функції u в точці $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна зобразити у вигляді (15.8), де A_i не залежить від Δx_i, то функція u називається **диференційовною в точці.** Якщо $u = f(X)$ диференційовна в кожній точці області свого визначення, то вона називається **диференційовною в області.**

Зміст означення диференційовної функції багатьох змінних зводиться, таким чином, до зображення її повного приросту у вигляді двох частин, одна з яких лінійна відносно приросту незалежних змінних, а друга — нескінченно мала більш високого порядку мализни, ніж перша. Якщо останнє твердження прийняти за означення диференційовної функції багатьох змінних, то справджується така теорема.

Теорема. *Для того щоб функція* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *була диференційовною в точці, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні, і достатньо, щоб ці частинні похідні були неперервні в точці.*

Введемо поняття повного диференціала функції багатьох змінних. Сума частинних диференціалів функції багатьох змінних називається **повним диференціалом.** Для функції $z = f(x, y)$ маємо

$$dz = d_x z + d_y z, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Оскільки x і y — незалежні змінні, а для них $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогічно повний диференціал функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ запишемо у вигляді

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i.$$

Тоді формула (15.8) набирає вигляду

$$\Delta u = du + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \Delta x_i.$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. *Якщо функція багатьох змінних диференційовна в деякій точці, то її повний приріст дорівнює сумі повного диференціала і нескінченно малих більш високого порядку мализни.*

§ 16. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Розглянемо функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, задану в деякій області. Часто трапляється, що змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ є, в свою чергу, функціями від змінної t:

$$x_i = \varphi_i(t), \; i = 1, 2, \dots, n.$$

Тоді ставиться задача: за яких умов складну функцію n змінних можна диференціювати по незалежній змінній t? Похідна функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по t називається **повною похідною.**

Відповідь на питання про існування повної похідної функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за t дає така теорема.

Теорема. *Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має неперервні частинні похідні по $x_1, x_2, ..., x_n$ у фіксованій точці $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, а функції $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, мають похідні $\frac{dx_i}{dt}$ в точці t, то функція $u = f(P)$ має повну похідну*

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}. \quad (16.1)$$

Доведення. Згідно з умовами теореми

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n +$$

$$+ \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n ,$$

де

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \alpha_i = 0 .$$

Поділимо Δu на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta t} + \cdots +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x_n} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_n}{\Delta t} + \sum_{i=1}^{n} \lim_{\Delta t \to 0} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{\Delta t} .$$

Тоді

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \frac{dx_i}{dt}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha_i \Delta x_i}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \alpha_i \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = 0 \cdot \frac{dx_i}{dt} = 0 .$$

Теорему доведено.

Приклад. Знайти $\frac{du}{dt}$ функції $u = x \cdot \sin\frac{x}{y}$, якщо $x = 1 + 3t$, $y = \sqrt{1 + t^2}$.

Розв'язання. За формулою (16.1) знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y} = \sin\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}}\cos\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y} = -\frac{(1+3t)^2}{1+t^2}\cos\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} ,$$

$$\frac{dx}{dt} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} ,$$

$$\frac{du}{dt} = 3\left(\sin\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}}\cos\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}}\right) -$$

$$- \frac{(1+3t)^2}{1+t^2}\cos\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} .$$

Нехай $u = f(x, y)$, а $y = \varphi(x)$, тоді $u = f[x, \varphi(x)]$. Використовуючи формулу (16.1), знаходимо

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} . \qquad (16.2)$$

Формула (16.2) виконується і для того випадку, коли внутрішня функція є функцією кількох змінних, тобто

$$u = f[\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)], \; u = f(y), \; y = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n).$$

При цьому замість y'_x будуть $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, замість u'_x будуть $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, замість $\frac{\partial f}{\partial y}$ буде $\frac{du}{dy}$. Формула (16.2) набере вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{du}{dy}\frac{\partial y}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Розглянемо тепер більш загальний випадок, коли у функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кожна із змінних залежить, у свою чергу, від двох інших змінних: $x_i = \varphi_i(\omega, \eta)$ Використовуючи формулу (16.1) і вважаючи функції u і x_i диференційовними, запишемо

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \omega} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \omega} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \omega} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \omega},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \eta} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \eta}.$$

Приклад. Знайти $\frac{\partial u}{\partial t_1}$ і $\frac{\partial u}{\partial t_2}$ функції

$$u = x^2 \ln y, \quad x = \frac{t_1}{t_2}, \quad y = 3t_1 - 2t_2$$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\ln y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{y}; \quad \frac{\partial x}{\partial t_1} = \frac{1}{t_2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t_2} = -\frac{t_1}{t_2^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial t_1} = 3; \quad \frac{\partial y}{\partial t_2} = -2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1} = \frac{2x}{t_2}\ln y + 3\frac{x^2}{y} =$$

$$= 2\frac{t_1}{t_2^2}\ln(3t_1 - 2t_2) + 3\frac{t_1^2}{t_2^2(3t_1 - 2t_2)};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2} = 2x\ln y\left(-\frac{t_1}{t_2^2}\right) +$$

$$+ \frac{x^2}{y}(-2) = -2\frac{t_1^2}{t_2^3}\ln(3t_1 - 2t_2) - 2\frac{t_1^2}{t_2^2(3t_1 - 2t_2)}.$$

§ 17. ІНВАРІАНТНІСТЬ ФОРМИ ПЕРШОГО ДИФЕРЕНЦІАЛА ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

На прикладі функції двох змінних $u = f(x, y)$ покажемо, що вираз повного диференціала

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{17.1}$$

зберігає свою форму незалежно від того, є x і y незалежними змінними, чи функціями від інших незалежних змінних. Ця властивість форми повного диференціала називається **інваріантністю.**

Нехай

$$x = \varphi_1(t_1, t_2); \quad y = \varphi_2(t_1, t_2), \tag{17.2}$$

тоді $u = f[\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)]$, а

$$du = \frac{\partial f}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2}dt_2. \tag{17.3}$$

Покажемо, що вирази (17.1) і (17.3) збігаються. Дійсно,

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1}, \quad dx = \frac{\partial x}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x}{\partial t_2}dt_2 \tag{17.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2}, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial y}{\partial t_2}dt_2.$$

Тоді з формул (17.3) і (17.4) дістанемо

$$du = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1}\right)dt_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2}\right)dt_2 =$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x}{\partial t_2}dt_2\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial y}{\partial t_2}dt_2\right)\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

На підставі інваріантності форми повного диференціала легко довести справедливість формули з п. 14.1 для функції будь-якого скінченного числа незалежних змінних.

§ 18. ЗАСТОСУВАННЯ ПОВНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛА ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ І ПОХИБОК

Нехай задано функцію $z = f(x, y)$, її значення в деякій точці $A(x_0, y_0)$ і прирости Δx, Δy. Потрібно обчислити

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y).$$

Запишемо повний приріст функції

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \tag{18.1}$$

Звідси

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta z.$$

Замінимо Δz на dz:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

При цьому припускаються похибки на нескінченно малі більш високого порядку мализни, ніж dz. Тоді

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y, \tag{18.2}$$

або символічно

$$z \approx z_0 + dz.$$

Приклад. Визначити об'ємну кількість стружки, отриманої при обробці циліндра заввишки h і діаметром D, якщо висота циліндра зменшилась на Δh, а діаметр — на ΔD (рис. 4.12).

Розв'язання. Задача має точне розв'язання. Об'єм стружки за абсолютною величиною дорівнює приросту ΔV функції $V = \frac{1}{4}\pi D^2 h$ від двох змінних: D і h:

$$\Delta V = \frac{1}{4}\pi(D + \Delta D)^2(h + \Delta h) - \frac{1}{4}\pi D^2 h =$$

$$= \frac{1}{4}\pi\left(2Dh\Delta D + h\Delta D^2 + D^2\Delta h + 2D\Delta D\Delta h + 2D^2\Delta h\right).$$

Приріст ΔV можна обчислити за допомогою диференціала

$$\Delta V \approx dV = \frac{1}{4}\pi\left(D^2\Delta h + 2Dh\Delta h\right).$$

Якщо покласти $h = 30$ см; $D = 20$ см; $\Delta h = -3$ мм: $\Delta D = -2$ мм, то похибка наближеного результату становить близько 1 %, а обчислення при цьому значно спрощуються.

Оцінка похибки вимірювань. Нехай тепер задано функцію $u = f(x, y, ..., t)$ від n змінних і величини $x, y, ..., t$, виміряні з точністю $\Delta x, \Delta y, ..., \Delta t$. Потрібно знайти похибку, з якою вимірюється u. За похибку зручно прийняти

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, ..., t + \Delta t) - f(x, y, ..., t).$$

Для малих значень $\Delta x, \Delta y, ..., \Delta t$ приймемо

$$\Delta u \approx du = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t.$$

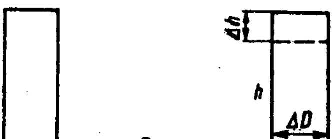


Рис. 4.12

Оскільки похибки і похідні можуть бути і від'ємними числами, доцільно брати їх абсолютні значення:

$$|\Delta u| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||\Delta t|.$$

Нехай похибка Δx вкладається в інтервал (−0,05; +0,05). Тоді найбільше значення $|\Delta x| = 0{,}05$, яке позначається $\Delta^* x$ і називається **максимальною абсолютною похибкою змінної *x*.** Те саме дістаємо й для інших змінних. Тоді максимальне значення абсолютної похибки задовольняє умову

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta^* x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta^* y| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||\Delta^* t|.$$

Як приклад знайдемо похибку суми, добутку і частки:

1) $u = x + y + z$,

$$\Delta u = \Delta x + \Delta y + \Delta z,\ |\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| + |\Delta^* z|;$$

2) $u = xy$,

$$\Delta u = y\Delta x + x\Delta y,\ |\Delta^* u| = |y||\Delta^* x| + |x||\Delta^* y|;$$

3) $u = \dfrac{x}{y}$,

$$|\Delta^* u| = \frac{|y||\Delta^* x| + |x||\Delta^* y|}{|y^2|}.$$

Розглянемо відносну похибку $\Delta\delta = \dfrac{\Delta x}{x}$ і максимальну відносну похибку $|\Delta^*\delta| = \dfrac{|\Delta^* x|}{|x|}$. Знайдемо відносну похибку функції $u = f(x, y, \ldots, t)$:

$$\Delta\delta = \frac{\Delta u}{u} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\Delta x + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\Delta y + \ldots + \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f}\Delta t =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\ln|f|\Delta y + \ldots + \frac{\partial}{\partial t}\ln|f|\Delta t.$$

Максимальна відносна похибка

$$|\Delta^*\delta| = \frac{|\Delta^* u|}{|u|} = \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|}{|f|}|\Delta^* x| + \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|}{|f|}|\Delta^* y| + \cdots + \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|}{|f|}|\Delta^* t|,$$

$$|\Delta^*\delta| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\right||\Delta^* x| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\ln|f|\right||\Delta^* y| + \ldots$$

$$\ldots+\left|\frac{\partial}{\partial t}\ln|f|\right||\Delta^* t|,$$

$$|\Delta^*\delta|=|\Delta^*\ln|f||.$$

Отже, *максимальна відносна похибка функції дорівнює максимальній абсолютній похибці натурального логарифма цієї функції*. Звідси виводяться правила, які застосовуються у наближених обчисленнях:

1. $u = xy$, $\Delta u \approx du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y = y\Delta x + x\Delta y$,

$$\frac{\Delta u}{u}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y},\ \left|\frac{\Delta u}{u}\right|\le\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right|,$$

$$\delta u \le \delta x + \delta y,$$

$$|\delta^* u|=\frac{|\Delta^* x|}{|x|}+\frac{|\Delta^* y|}{|y|}=|\delta^* x|+|\delta^* y|.$$

Максимальна відносна похибка добутку дорівнює сумі максимальних відносних похибок співмножників.

2. $u = \frac{x}{y}$,

$$|\delta^* u|=\left|\frac{\partial}{\partial x}\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right||\Delta^* x|+\left|\frac{\partial}{\partial y}\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right||\Delta^* y|=$$

$$=\left|\frac{\partial}{\partial x}(\ln|x|-\ln|y|)\right||\Delta^* x|+\left|\frac{\partial}{\partial y}(\ln|x|-\ln|y|)\right||\Delta^* y|=$$

$$=\frac{|\Delta^* x|}{|x|}+\frac{|\Delta^* y|}{|y|}=|\delta^* x|+|\delta^* y|.$$

Приклад. Маса 1 дм^3 матеріалу при 0 °С дорівнює m = 999,847 ± 0,001 г. Визначити відносну похибку результату зважування.

Розв'язання. Маємо

$$|\Delta^* m| = 0{,}001\text{ г},\ m \le 999{,}846,\ \text{тоді}\ |\delta^* m|=\frac{0{,}001}{999{,}846}=10^{-4}\,\%.$$

ВПРАВИ. **1.** Знайти значення повного диференціала функції $z=\frac{x^2y^2}{x^2-y^2}$, якщо $x = 2$; $y = 3$; $\Delta x = 0{,}005$; $\Delta y = 0{,}02$. *Відповідь*. $dz = 0{,}012$.

2. Обчислити наближено приріст функції $z=\frac{x+3y}{y^2-3x^2}$ при зміні x від $x_1 = 3$ до $x_2 = 3{,}2$ і від $y_1 = 2$ до $y_2 = 2{,}5$. *Відповідь*. $\Delta z = -4{,}669\cdot10^2$.

3. Радіус основи конуса дорівнює 30,3 ± 0,1 см, твірна дорівнює 41,8 ± 0,1 см. Знайти об'єм конуса і похибку розрахунку. *Відповідь*. V = 27684,1 ± 423.

§ 19. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай залежність між змінними x і y задано рівнянням

$$F(x, y) = 0. \qquad (19.1)$$

Поставимо запитання: коли можна твердити, що y є функція від x або x є функція від y?

Відповідь на це запитання дає теорема, яка називається **теоремою існування.**

Теорема 1. *Якщо функція $F(x, y) = 0$ задовольняє умови:*

1) *існує точка $M_0(x_0, y_0)$ така, що*

$$F(x_0, y_0) = 0;$$

2) *в околі точки M_0 функція $F(x, y)$ та її частинні похідні $F'_x\left(F'_y\right)$ неперервні;*

3) $F'_y(x, y) \neq 0 \quad \left(F'_x(x, y) \neq 0\right)$,

то в деякому околі точки M_0 існує єдина неперервна функція $y = f(x)$ $(x = \psi(y))$ така, що

$$F(x, f(x)) = 0 \quad (F(\psi(y), y) = 0) \text{ і } y_0 = f(x_0) \; (x_0 = \psi(y_0)).$$

Цю теорему можна сформулювати і для неявно заданої функції двох змінних x і y, записаної у вигляді

$$F(x, y, z) = 0.$$

Теорема 2. *Якщо функція $F(x, y, z) = 0$ задовольняє умови:*

1) *існує точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ така, що*

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

2) *в околі цієї точки функція $F(x, y, z)$ та її частинні похідні F'_x, F'_y, F'_z, неперервні;*

3) *якщо $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ існує єдина неперервна функція $z = \lambda(x, y)$, така, що*

$$F(x, y, \lambda(x, y)) = 0 \text{ і } z_0 = \lambda(x_0, y_0).$$

Теореми про існування і єдиність неявно заданих функцій приймемо без доведення.

Сформулюємо тепер **теореми про диференційовність неявно заданих функцій.** Ці теореми визначають умови, за яких неявно задані функції

$$y = f(x) \text{ або } z = \lambda(x, y).$$

мають відповідно похідні

$$\frac{dy}{dx} \text{ і } \frac{\partial z}{\partial x}, \; \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Теорема 3. Якщо функції $F(x, y)$ $[F(x, y, z)]$ задовольняють умови теореми про існування і є диференційовними за своїми змінними в точці M_0, то функції

$$y = f(x),\ z = \lambda(x, y)$$

мають неперервні похідні:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}};\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Доведення. Розглянемо спочатку функцію $F(x, y) = 0$. За умовою існує функція $y = f(x)$, тому

$$F(x, f(x)) = 0 \text{ і } \frac{dF}{dx} = 0.$$

Між тим

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0. \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{19.2}$$

Аналогічні результати отримуємо для функції $F(x, y, z) = 0$. Оскільки існує функція $z = \lambda(x, y)$, то $F(x, y, \lambda(x, y)) = 0$. Частинні похідні цієї функції за змінними x і y, з одного боку, дорівнюють нулю, а з другого — їх можна відшукати як похідні функції двох змінних. Звідси дістаємо два співвідношення:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{19.3}$$

Оскільки частинні похідні з рівностей (19.2) і (19.3), згідно з теоремою, існують і неперервні, то й похідні $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ неперервні.

На практиці користуються в основному двома методами відшукання похідних неявно заданих функцій. Один з них грунтується на використанні формул (19.2) і (19.3), а другий — на відшуканні повного диференціала функції.

Розглянемо приклад.

Приклад. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0 .$$

Розв'язання. *Перший спосіб.* Введемо функцію

$$F(x, y, z) = x^3 + 2y^3 - 3xyz - 2y + 3 + z^3$$

і знайдемо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6y^2 - 3xz - 2 , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy .$$

За формулами (19.3) маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy} , \tag{19.4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(z^2 - xy)} . \tag{19.5}$$

Другий спосіб. Знайдемо повний диференціал заданої функції як функції трьох змінних:

$$dF = 3x^2dx + 6y^2dy + 3z^2dz - 3yzdx - 3xzdy - 3xydz - 2dy = 0 .$$

Групуючи, дістанемо

$$3(x^2 - yz)dx + (6y^2 - 3xz - 2)dy + 3(z^2 - xy)dz = 0 .$$

Звідси

$$dz = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy}dx - \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(z^2 - xy)}dy . \tag{19.6}$$

Крім того,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy . \tag{19.7}$$

Порівнюючи (19.6) і (19.7), дістаємо (19.5) і (19.4).

§ 20. ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ І БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Нехай дано функцію однієї незалежної змінної $y = f(x)$. **Диференціалом другого порядку** або **другим диференціалом функції** $y = f(x)$ у деякій фіксованій точці називається диференціал першого диференціала в цій точці, який позначається

$$d^2y = d(dy),$$

за умови, що x є незалежною змінною.

Диференціалом третього порядку або **третім диференціалом** називається диференціал другого диференціала

$$d^3y = d(d^2y)$$

за умови, що x є незалежною змінною.

Взагалі **диференціалом n-го порядку** або **n-м диференціалом функції** $y = f(x)$ називається диференціал її $(n-1)$-го диференціала

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right)$$

за умови, що x є незалежною змінною.

При обчисленні диференціалів вищих порядків треба брати до уваги, що dx є довільне незалежне від x число, яке при диференціюванні по x слід розглядати як сталий множник. Так,

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y''dx)dx,$$

$$d^2y = y''dx^2,$$

$$d^3y = d\left(y''dx^2\right) = y'''dx^3.$$

Взагалі

$$d^n y = y^{(n)}dx^n.$$

Приклад. Знайти диференціал другого порядку функції $y = \sin^2 x$.

Розв'язання. Маємо

$$dy = 2\sin x\cos x dx = \sin 2x dx,$$

$$d^2y = d(\sin 2x dx) = 2\cos 2x dx^2.$$

У п. 14.3 було показано, що диференціал першого порядку має властивість інваріантності. Диференціали вищих порядків такої властивості не мають. Покажемо це на прикладі диференціала другого порядку.

Нехай $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$ такі, що можна утворити диференційовну складну функцію від t:

$$y = f[\varphi(t)].$$

Тоді $dy = y'_x dx$, де $dx = \varphi'_t(t)dt$,

$$dy = f'_x[\varphi(t)]\,\varphi'_t(t)dt.$$

Обчислимо другий диференціал по x:

$$d^2y = d\left(y'_x dx\right) = dy'_x \cdot dx + y'_x d(dx).$$

На підставі інваріантності першого диференціала маємо

$$dy'_x = y''_{x^2}dx, \text{ тоді } d^2y = y''_{x^2}dx^2 + y'_x d^2x.$$

Якщо x — незалежна змінна, то

$$d^2y = y''_{x^2}dx^2.$$

а це значить, що диференціал другого порядку не інваріантний.

Розглянемо тепер диференціали вищих порядків функції багатьох змінних. Візьмемо функцію двох змінних

$$u = f(x, y). \tag{20.1}$$

Тоді

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \varphi(x, y). \tag{20.2}$$

Подальші міркування справедливі лише для випадку, коли у формулах (20.1) і (20.2) змінні x і y є незалежними і відповідно dx і dy незалежні від x і y, тобто dx і dy розглядатимемо як сталі в тому розумінні, що

$$d(dx) = 0, \quad d(dy) = 0. \tag{20.3}$$

У зв'язку з цим диференціали dx і dy називаються **незалежними диференціалами.**

Диференціал другого порядку визначимо як диференціал диференціала першого порядку:

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = d\varphi(x,\ y).$$

Тоді

$$d\varphi(x,\ y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy,$$

але

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dy; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy. \tag{20.4}$$

Таким чином,

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2. \tag{20.5}$$

У рівностях (20.4) і (20.5) була використана умова (20.3). Припускаючи, що функція $u = f(x,\ y)$ задовольняє умови теореми Шварца, знаходимо

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Символічно це записується у вигляді

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u.$$

Можна показати, що й для диференціала n-го порядку справедлива формула

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u.$$

Аналогічно будуються диференціали вищих порядків для функції більшого числа змінних. Запишемо, наприклад, d^2u для функції n незалежних змінних $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Маємо

$$d^2u = d(du) = d\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx_j = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx_j.$$

Остання рівність записана на тій підставі, що dx_j, $j = 1, 2, ..., n$, є незалежний диференціал. Тоді

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i ,$$

$$d^2 u = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j , \tag{20.6}$$

Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ задовольняє умови теореми Шварца, то порядок підсумовування у формулі (20.6) можна міняти місцями.

Приклад. Знайти диференціал другого порядку функції

$$u = xy^2 - x^2 y.$$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - 2xy, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - x^2 ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y - 2x .$$

Тоді

$$d^2 u = -2y(dx)^2 + 4(y - x)dxdy + 2x(dy)^2 .$$

§ 21. ОРІЄНТОВАНІ КРИВІ

Нехай задано просторову криву рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t); \end{cases} \ t \in [t_0, T], \tag{21.1}$$

або плоску криву (тобто криву, розміщену в площині xOy) у параметричній формі

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} \ t \in [t_0, T],$$

або в кооординатній формі

$$y = f(x), \ x \in [a, b].$$

При цьому функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ мають неперервні похідні для всіх $t \in [t_0, T]$ ($x \in [a, b]$). Крива, задана функціями, які мають у кожній її точці неперервні похідні, одночасно не рівні нулю, називається **гладкою** і позначається Γ. У кожній точці гладкої кривої Γ існує дотична.

Далі розглядатимемо гладкі криві (21.1). Візьмемо деяку точку $t = t_1 \in [t_0, T]$ і припустимо, що $x(t_1) \neq 0$. Тоді, в силу неперервності $x(t)$, існує δ-окіл точки t_1 $(t_1-\delta;\ t_1+\delta)$, в якому $x(t)$ має той самий знак, що й $x(t_1)$. Однак тоді у проміжку $(t_1-\delta;\ t_1+\delta)$ функція $x(t)$ строго монотонна. Якщо $x(t) > 0,\ t \in (t_1-\delta;\ t_1+\delta)$, то $x(t)$ — строго зростаюча функція. В результаті цього дістаємо деякий малий відрізок кривої Γ (який містить у собі точку $M_1(t_1)$), на якому параметр t зростає від t_1 до t_2 (рис. 4.13). Якщо для всіх точок $t \in [t_0, T]$, $x(t) > 0$, то тим самим на кривій встановлено напрям зростання параметра t:

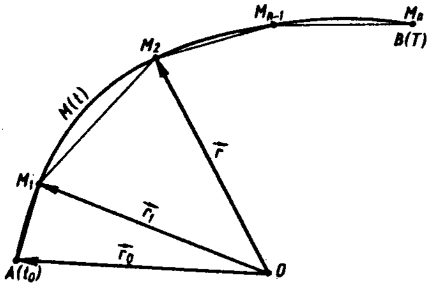


Рис. 4.13

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T.$$

Відповідно до цього буде встановлено порядок слідування точок $M(t)$ на кривій від початкової точки $A(t_0)$ до кінцевої точки $B(T)$. Криві Γ, в яких визначено порядок слідування точок на кривій, називають **орієнтованими.** Як випливає з попереднього, будь-яка гладка крива є орієнтованою, оскільки рівняння (21.1) визначають не лише криву, але й рух точки $M(t)$ на кривій Γ в напрямі зростання t. Якщо точки $A(t_0)$ і $B(T)$ збігаються, то крива називається **замкненою** (рис. 4.14).

Орієнтація кривої на рисунку зображена стрілкою, яка відповідає руху проти або за годинниковою стрілкою. Останнє часто використовують для замкнених кривих. За додатний приймають напрям, який відповідає руху проти годинникової стрілки. Напрям дотичної визначається встановленим на кривій напрямом.

Напрям дотичної можна визначити й таким чином. Виберемо на кривій дві точки $M_1(t_1)$ і $M_2(t_2)$ (рис. 4.15) і проведемо хорду M_1M_2. Оскільки $t_1 < t_2$, то на хорді M_1M_2 напрям вже встановлено. Граничне положення напряму хорди є напрямом дотичної. Звичайно напрям дотичної визначається одиничним вектором дотичної, який позначається $\vec{\tau}$.

21.1. Довжина дуги та її диференціал

Нехай дано гладку напрямлену криву. Поділимо її точками на частини і сполучимо ці точки відрізками прямої. Дістанемо ламану лінію. Позначимо

$$AM_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n = P_n,$$

де P_n — периметр ламаної (див. рис. 4.13).

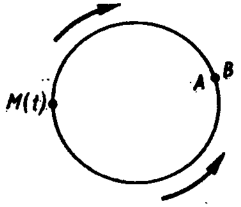


Рис. 4.14

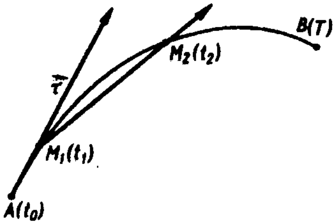


Рис. 4.15

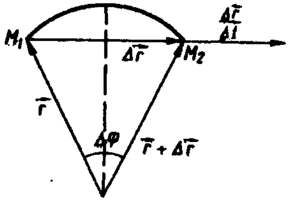


Рис. 4.16

Якщо існує границя довжини периметра цієї ламаної за умови, що найбільший відрізок ламаної прямує до нуля, і границя не залежить від закону вписування ламаної, то крива називається **спрямованою,** а величина цієї границі називається **довжиною дуги** і позначається

$$s = \lim_{\max M_i M_{i+1} \to 0} P_n .$$

Кожному значенню параметра t відповідає певна дуга, тому довжина дуги є функція параметра t, тобто $s = s\ (t)$. Довжина дуги може мати знак, який відповідає положенню точки $M\ (t)$ відносно точки $A\ (t_0)$. Праворуч від A довжина дуги $s > 0$, ліворуч від A довжина дуги $s < 0$, в точці $A\ (t_0)$ довжина дуги $s = 0$. Довжину дуги, що її взято з відповідним знаком, називають **натуральною координатою**. Натуральна координата і шлях — це різні поняття. Якщо крива (21.1) гладка, то

$$\lim_{M_1M_2 \to 0} \frac{\cup M_1M_2}{M_1M_2} = 1$$

(рис. 4.16). Таким чином, довжина хорди і довжина дуги, їй відповідна, є еквівалентні нескінченно малі. Розглянемо диференційовну функцію $s = s\ (t)$, $t \in [t_0, T]$. Тоді $\dfrac{ds}{dt}$ є відношенням двох диференціалів. Диференціал ds називається **диференціалом дуги**. Знайдемо його. Якщо Δt — приріст аргументу t, то Δx, Δy, Δz — приріст функцій (21.1) (рис. 4.17, 4.18). Маємо

$$M_1M_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\ ,$$

$$M_1M_2 = \frac{M_1M_2}{\Delta s}\Delta s = \frac{M_1M_2}{\cup M_1M_2}\Delta s\ .$$

Поділимо останній вираз на Δt і перейдемо до границі:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{M_1M_2}{\cup M_1M_2}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}\ .$$

Крім того,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{M_1 M_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} .$$

Згідно з умовою, крива є гладкою, тобто існує $\dot{x} = x'_t$, $\dot{y} = y'_t$, $\dot{z} = z'_t$. Порівнюючи два останніх вирази, знайдемо

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} .$$

Тоді диференціал дуги

$$ds = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt . \qquad (21.2)$$

Вносячи в останньому виразі dt під знак кореня, дістаємо

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} .$$

При цьому знак кореня визначається напрямом кривої. Для кривої, розміщеної в площині xOy і заданої параметрично, маємо

$$ds = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt . \qquad (21.3)$$

Якщо криву задано рівнянням $y = f(x)$, то, прийнявши $t = x$, дістаємо

$$ds = \pm\sqrt{1 + (y')^2}\,dx . \qquad (21.4)$$

21.2. Похідна вектор-функції за скалярним аргументом

Нехай задано криву (21.1). Виберемо на осях координат одиничні орти і побудуємо вектор

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} . \qquad (21.5)$$

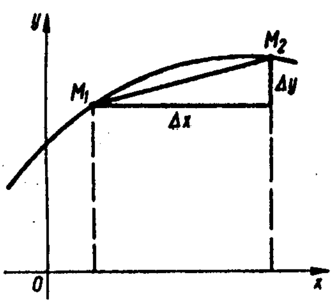


Рис. 4.17

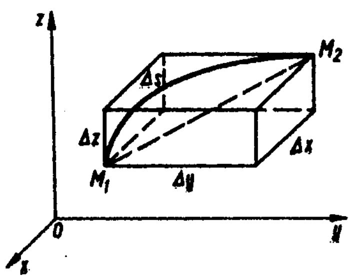


Рис. 4.18

Цей вектор називається **вектор-функцією скалярного аргументу.** З рівності (21.5) випливає, що питання про існування границі функції $\vec{r}(t)$ в точці $t = t_0$ або її неперервність зводиться до питання про існування границі або неперервність функцій $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Побудуємо $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ (рис. 4.16). Очевидно, що вектор $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ колінеарний до вектора $\Delta\vec{r}$.

Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

то вона називається **першою похідною вектор-функції** за скалярним аргументом.

Похідна $\frac{d\vec{r}}{dt}$ є вектором. Напрям вектора збігається з напрямом дотичної. З рівності (21.5) випливає, що

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k}, \quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,.$$

Якщо під t розуміти час, то $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ — швидкість кінця вектор-функції, а $\dot{x}(t) = v_x$, $\dot{y}(t) = v_y$, $\dot{z}(t) = v_z$ — це проекції швидкості на координатні осі:

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}\,.$$

У даній фізичній інтерпретації годограф вектор-функції звичайно називають **траєкторією**, а вектор-функцію $\vec{r}(t)$ — **радіусом-вектором**. При цьому швидкість напрямлена по дотичній до траєкторії в бік зростання часу. Вважаючи $\vec{v}$ функцією від t, дістанемо похідну

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k},$$

але $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, а тому $\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Таким чином, *прискорення* $\vec{w}$ *є першою похідною від вектора швидкості за часом, або друга похідна від вектор-функції за часом.*

Правила диференціювання вектор-функції за скалярним аргументом аналогічні правилам диференціювання звичайних скалярних функцій.

Наприклад,

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)\right]=\frac{d\vec{r}_1}{dt}+\frac{d\vec{r}_2}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\left[\alpha\,\vec{r}\,(t)\right]=\alpha\frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{21.6}$$

де $\alpha = \text{const}$,

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2\right]=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\cdot\vec{r}_2+\frac{d\vec{r}_2}{dt}\cdot\vec{r}_1, \tag{21.7}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1\times\vec{r}_2\right]=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\frac{d\vec{r}_2}{dt}.$$

В останньому випадку слід враховувати послідовність множення.

Доведення формул (21.6) і (21.7) аналогічні доведенню відповідних формул для скалярної функції. Якщо роль вектор-функції виконує одиничний вектор $\vec{e}(t)$, $|\vec{e}(t)| = 1$, то його годографом буде лише дуга на сфері радіуса 1. Похідну $\dfrac{d\vec{e}}{dt}$ за параметром t можна визначити таким чином. Розглянемо скалярний добуток $\vec{e}\cdot\vec{e}=\vec{e}^{\,2}=1$. Продиференціювавши його за параметром t, дістанемо (рис. 4.19):

$$2\vec{e}\cdot\frac{d\vec{e}}{dt}=0,\quad \vec{e}\perp\frac{d\vec{e}}{dt}.$$

Зауваження. Якщо за одиничний вектор $\vec{e}$ взяти одиничний вектор дотичної $\vec{\tau}$, а за параметр t — довжину дуги s, то $\vec{e}=\vec{\tau}(s)$. Тоді

$$\vec{\tau}(s)\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds}=0,\quad \vec{\tau}\perp\frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Із властивостей похідної вектор-функції за скалярним аргументом слід підкреслити одну властивість, якої не мають похідні скалярних функцій:

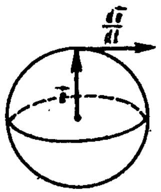


Рис. 4.19

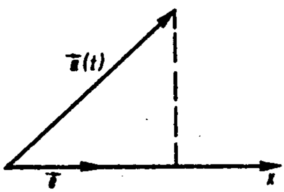


Рис. 4.20

проекція на вісь сталого напряму похідної вектор-функції за скалярним аргументом дорівнює похідній від проекції вектор-функції за тим самим аргументом і на ту саму вісь; іншими словами, операції проектування вектор-функції і диференціювання переставні (рис. 4.20), *тобто*

$$\text{пр}_{\bar{e}}\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d}{dt}\,\text{пр}_{\bar{e}}\bar{a} = \frac{da_e}{dt}.$$

Якщо криву задано у вигляді

$$x = x\,(s);\quad y = y\,(s);\quad z = z\,(s),$$

де s — довжина дуги (натуральна координата), яка відлічується від заданої початкової точки вздовж кривої, то говорять, що крива задана **природним способом.** У векторній формі природне задання кривої визначається рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}\,(s).$$

21.3. Рівняння дотичної до просторової кривої

Візьмемо на кривій фіксовану точку M_0 з координатами $x\,(t_0)$, $y\,(t_0)$, $z\,(t_0)$. Координати змінних точок, які лежать поза кривою, позначимо через X, Y, Z. Запишемо канонічну форму рівняння дотичної, яка проходить через задану точку M_0

$$\frac{X - x(t_0)}{m} = \frac{Y - y(t_0)}{n} = \frac{Z - z(t_0)}{p}.$$

Оскільки напрямний вектор дотичної $\vec{s}\,(m, n, p)$ паралельний вектору $\frac{d\vec{r}}{dt}$, то $m = kx\,(t_0)$, $n = ky\,(t_0)$, $p = kz\,(t_0)$, де k — коефіцієнт пропорційності. Тоді **рівняння дотичної до просторової кривої** запишеться у вигляді

$$\frac{X - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)}. \qquad (21.8)$$

Площина, яка проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної, називається **нормальною площиною,** а будь-яка пряма, яка проходить через ту саму точку і належить тій самій площині, називається **нормаллю.** Рівняння нормальної площини, яка проходить через точку кривої з координатами $x\,(t_0)$, $y\,(t_0)$, $z\,(t_0)$, запишеться у вигляді

$$A\,(X_н - x\,(t_0)) + B\,(Y_н - y\,(t_0)) + C\,(Z_н - z\,(t_0)) = 0,$$

де $X_н$, $Y_н$, $Z_н$ — змінні координати.

У цьому рівнянні значення A, B, C збігаються з $x\,(t_0)$, $y\,(t_0)$, $z\,(t_0)$ з точністю до сталої, а тому рівняння нормальної площини можна зобразити у вигляді

$$\dot{x}(t_0)(X_н - x(t_0)) + \dot{y}(t_0)(Y_н - y(t_0)) + \dot{z}(t_0)(Z_н - z(t_0)) = 0. \qquad (21.9)$$

Так $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, x, y, z обчислюються при $t = t_0$.

Якщо крива розміщена у площині xOy, то рівняння (21.8) запишемо таким чином:

$$\frac{X - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)}, \quad Y - y(t_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(X - x(t_0)),$$

але $\dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = y'_x(x_0)$. Рівняння

$$Y - y(t_0) = y'_x(x_0)(X - x(t_0)), \text{ де } y(t_0) = y_0,\ x(t_0) = x_0$$

збігається з рівнянням дотичної до кривої, розміщеної у площині xOy (див. § 2). Для цієї кривої з рівності (21.9) випливає

$$(X_н - x_0)\dot{x}(t_0) + (Y_н - y_0)\dot{y}(t_0) = 0,$$

$$Y_н - y_0 = -\frac{1}{y'_x(x_0)}(X_н - x_0). \qquad (21.10)$$

Рівняння (21.10) називається **рівнянням нормалі кривої**, розміщеної в площині xOy.

ВПРАВИ. Знайти рівняння дотичної.

1. $\begin{cases} x = at, \\ y = \frac{1}{2}at^2, \\ z = \frac{1}{3}at^3 \end{cases}$ у точці $M(6a, 18a, 72a)$. *Відповідь*. $\dfrac{x - 6a}{a} = \dfrac{y - 18a}{6a} = \dfrac{z - 72a}{36a}$.

2. $\begin{cases} y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ у точці $M(1, 3, 4)$. *Відповідь*. $\dfrac{x - 1}{12} = \dfrac{y - 3}{-4} = \dfrac{z - 4}{3}$.

3. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 4\sin\frac{t}{2} \end{cases}$ у точці $M\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$.

Відповідь. $\dfrac{x + 1 - \frac{\pi}{2}}{1} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

§ 22. КРИВИЗНА КРИВОЇ

Серед розглянутих раніше ліній перерізу двох поверхонь першого і другого порядку зустрічаються прямі і криві. Мірою відхилення прямої від кривої є кривизна. Наведемо аналітичне означення кривизни. Нехай дана гладка напрямлена крива (рис. 4.21). Виберемо на кривій дві точки A і A_1 побудуємо два орти дотичної $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$. Відрізок дуги кривої AA_1 позначимо через Δs. Побудуємо в точці A вектор $\vec{\tau}_1$.

Кут між $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$ називається **кутом суміжності** й позначається через $\Delta\varphi$. **Середньою кривизною** $K_{ср}$. дуги кривої AA_1 називається відношення кута суміжності $\Delta\varphi$ до довжини дуги Δs:

$$K_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Границя цього відношення при $\Delta s \to 0$ називається **кривизною кривої у даній точці**, або **справжньою кривизною**:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{A_1 \to A} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

З цих означень випливає, що

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} K_{ср}.$$

Величина, обернена до кривизни, називається **радіусом кривизни**

$$\rho = \frac{1}{K}.$$

Це означення підтверджується означенням **кривизни для кола радіуса** r (рис. 4. 22):

$$K_{ср} = \frac{\varphi}{\smile M_0M_1} = \frac{\varphi}{r\varphi} = \frac{1}{r}; \quad K = \frac{1}{r}.$$

Як бачимо, кривизна в усіх точках кола стала. Для прямої кривизна дорівнює нулю всюди, оскільки кут суміжності $\Delta\varphi$ дорівнює нулю.

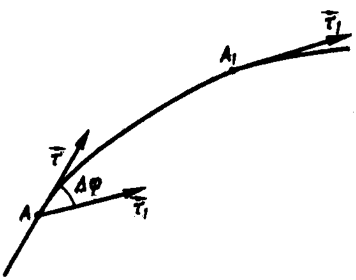


Рис. 4.21

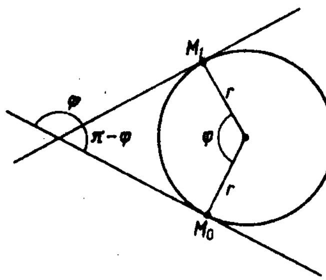


Рис. 4.22

Якщо радіус кривизни розглядається як додатне число, то $\rho = \frac{1}{|K|}$. У багатьох випадках кривизну також розглядають як додатне число. Тоді

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

Якщо кут суміжності є диференційовною функцією довжини дуги кривої, то

$$K = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Введемо деякі означення. Граничне положення площини, яка проходить через вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$, відкладені від однієї точки A при $\Delta s \to 0$ або $A_1 \to A$, називається **стичною площиною** (рис. 4.21). Для кривої, розміщеної у площині, стичною є площина розміщення точок кривої. Лінія перерізу стичної і нормальної площин називається **головною нормаллю.** Одиничний вектор головної нормалі $\vec{n}^0$ напрямлений в бік увігнутості кривої. Одиничний вектор $\vec{b}$ ортогональний до стичної площини, тобто площини, утвореної $\vec{\tau}$, $\vec{n}^0$ і напрямленої в бік, звідки обертання $\vec{\tau}$ до $\vec{n}^0$ на найменший кут видно проти годинникової стрілки, називається **бінормаллю**. Система координат, одиничними векторами якої є $\vec{\tau}$, $\vec{n}^0$, $\vec{b}$, називається натуральною. Площина, утворена векторами $\vec{\tau}$, $\vec{b}$, називається **спрямлюваною** (рис. 4. 23).

Тригранник, утворений нормальною, спрямлюваною та стичною площинами, проведеними до однієї точки кривої, називається природним тригранником.

Нехай криву задано у натуральній формі $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Доведемо, що похідна від $\vec{r}(s)$ по дузі дорівнює орту дотичної.

Згідно з означенням $\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$.

Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ за означенням напрямлений по дотичній у бік зростання скалярного аргументу. Довжина

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{M_2 \to M_1} \frac{M_1M_2}{\smile M_1M_2} = 1.$$

Таким чином, вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ має довжину, яка дорівнює одиниці, і напрямлений по дотичній. Таким вектором є орт дотичної $\vec{\tau}$, тоді $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}(s)$.

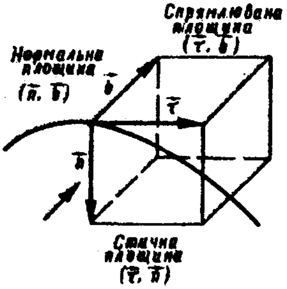


Рис. 4.23

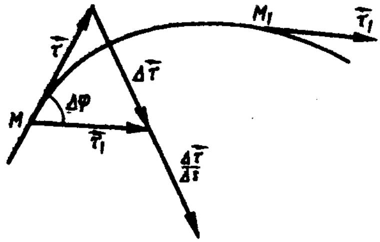


Рис. 4.24

Розглянемо тепер вектор $\vec{\tau}(s)$ і доведемо таку теорему.

Теорема. Похідна від орта дотичної за натуральною координатою дорівнює добутку орта головної нормалі на кривизну кривої, тобто

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{n}^0,$$

де $\vec{n}^0$ – одиничний вектор головної нормалі.

Доведення. З одного боку, $\frac{d\vec{\tau}}{ds} \perp \vec{\tau}$, тобто $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ належить нормальній площині. З другого боку, за означенням

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{\tau}_1 - \vec{\tau}}{\Delta s}$$

(рис. 4.24). Звідси випливає, що вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ належить стичній площині, тобто $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ лежить на головній нормалі. Знайдемо

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left|\vec{\tau}_1 - \vec{\tau}\right|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = K.$$

Таким чином, $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{n}^0$.

Вище було вказано, що кривизна характеризує відхил кривої від прямої. Але для просторової кривої цього недостатньо, тому вводять міру відхилення просторової кривої від плоскої кривої – скрут. Якщо побудувати стичну площину для плоскої кривої, то для всіх точок кривої стична площина буде одна. Для просторової кривої стичні площини можуть бути різними для різних точок на кривій.

Скрутом просторової кривої називається границя відношення двогранного кута між стичними площинами у двох суміжних точках A і A_1 (рис. 4.21.) на кривій до довжини дуги Δs між цими кривими при $\Delta s \to 0$. Позначимо кривизну кривої $\vec{r}(s)$ буквою χ. Тоді за означенням $\chi = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, де $\Delta\alpha$ – кут між стичними площинами.

Для одиничних векторів $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ природного тригранника вірні формули Серре–Френе

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{n}; \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{\tau} + \chi\vec{b}; \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\chi\vec{n},$$

з яких перша доведена вище. Інші доводяться аналогічно.

22.1. Обчислення кривизни кривої

Із формули $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{n}^0$ випливає, що

$$K = \left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|. \tag{22.1}$$

Крім того, $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ і, отже,

$$K = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|, \tag{22.2}$$

або

$$K = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{22.3}$$

Залежно від способу задання кривої дістаємо різні вирази для кривизни. За формулою (22.3) кривизну можна визначити при натуральному заданні кривої.

1) Нехай криву задано у векторній формі $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Кривизну знайдемо за формулою (22.2). Для цього визначимо спочатку $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Вектор-функцію $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ можна зобразити у вигляді $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt}$, але $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$, а тому

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\tau}\frac{ds}{dt}. \tag{22.4}$$

Помножимо скалярно вектор $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ на самого себе:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \left|\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}\right| \left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \text{ але } \vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1.$$

Тоді

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{22.5}$$

Візьмемо похідну за параметром t від вектор-функції (22.4):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{ds}{dt}+\vec{\tau}\,\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{22.6}$$

Враховуючи, що

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}=K\,\vec{n}^0\,\frac{ds}{dt},$$

рівність (22.6) запишемо у вигляді

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=K\,\vec{n}^0\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\vec{\tau}\,\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{22.7}$$

Помножимо скалярно вектор $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ на самого себе:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2=\left[\vec{n}^0K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\vec{\tau}\,\frac{d^2s}{dt^2}\right]^2=K^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^4+\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2. \tag{*}$$

Нагадаємо, що $\vec{n}^0\cdot\vec{\tau}=0$, оскільки $\vec{n}^0\perp\vec{\tau}$. З рівності (*) знаходимо

$$K^2=\frac{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^4}. \tag{22.8}$$

Виразимо в останній формулі $\frac{d^2s}{dt^2}$ через $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Для цього продиференціюємо рівність (22.5) за t:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2},$$

звідси

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)}{\frac{ds}{dt}},\quad \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2=\frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}.$$

Замінюючи тепер $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ на $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2$ згідно з (22.4), дістаємо

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2=\frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2}.$$

Крім того $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^4=\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right]^2.$$

Зауважимо, що $\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right]^2$ не можна записати як $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^4$, оскільки $\frac{d\vec{r}}{dt}$ – це вектор, а $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2$ – скалярний квадрат вектора.

Тепер підставимо отримані результати у співвідношення (22.8). Знаходимо

$$K^2=\frac{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}{\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right]^3}, \tag{22.9}$$

звідки $$K=\pm\sqrt{\frac{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}{\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right]^3}}.$$

Формулу кривизни можна зайти ще й так. Із (22.4) і (22.7) знаходимо векторний добуток

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{\tau}\frac{ds}{dt}\times\left[K\overrightarrow{n^0}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}\right]=K\left(\vec{\tau}\times\overrightarrow{n^0}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^3.$$

Але $\vec{\tau}\times\overrightarrow{n^0}=\vec{b}$. Тоді

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{\tau}}{dt^2}=K\vec{b}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3;\ \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|=K\left|\frac{ds}{dt}\right|^3;\ \left|\frac{ds}{dt}\right|=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3.$$

Тоді $$K=\frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}.$$

Приклад. Знайти кривизну кривої, заданої у векторній формі: $\vec{r}=e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+t\sqrt{2}\vec{k}$.

Розв'язання. Маємо $\frac{d\vec r}{dt}=e^t\vec i-e^{-t}\vec j+t\sqrt2\vec k,\quad \frac{d^2\vec r}{dt^2}=e^t\vec i+e^{-t}\vec j.$

$$\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)^2=\left(e^t\vec i-e^{-t}\vec j+\sqrt2\,\vec k\right)^2=e^{2t}+e^{-2t}+2,\quad \left(\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right)^2=e^{2t}+e^{-2t},$$

$$\frac{d^2\vec r}{dt^2}\cdot\frac{d\vec r}{dt}=\left(e^t\vec i+e^{-t}\vec j\right)\cdot\left(e^t\vec i+e^{-t}\vec j+\sqrt2\,\vec k\right)=e^{2t}-e^{-2t},$$

$$\left(\frac{d^2\vec r}{dt^2}\cdot\frac{d\vec r}{dt}\right)^2=\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)^2=e^{4t}-2+e^{-4t},$$

$$\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right)^2=\left(e^{2t}+e^{-2t}+2\right)\left(e^{2t}+e^{-2t}\right)=e^{4t}+2+e^{-4t}+2e^{2t}+2e^{-2t},$$

$$K^2=\frac{e^{4t}+2+e^{-4t}+2e^{2t}+2e^{-2t}-e^{4t}+2-e^{-4t}}{\left(e^{2t}+2+e^{-2t}\right)^3}=\frac{2e^{2t}+2e^{-2t}+4}{\left(e^t+e^{-t}\right)^6}=\frac{2\left(e^t+e^{-t}\right)^2}{\left(e^t+e^{-t}\right)^6}=\frac{2}{\left(e^t+e^{-t}\right)^4};$$

$$K=\frac{\sqrt2}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}.$$

2) Нехай тепер криву задано у параметричній формі:

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t).\end{cases}$$

Тоді

$$\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)=\dot x\vec i+\dot y\vec j+\dot z\vec k,\ \left(\frac{d\vec r}{dt}\right)^2=\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2, \tag{22.10}$$

$$\left(\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right)=\ddot x\vec i+\ddot y\vec j+\ddot z\vec k,\ \left(\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right)^2=\ddot x^2+\ddot y^2+\ddot z^2, \tag{22.11}$$

$$\left(\frac{d\vec r}{dt}\cdot\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right)=\left(\dot x\ddot x+\dot y\ddot y+\dot z\ddot z\right)^2, \tag{22.12}$$

$$\left[\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)^2\right]^3=\left(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2\right)^3. \tag{22.13}$$

Підставляючи значення (22.10) – (22.13) у формулу (22.9), знаходимо

$$K^2=\frac{\left(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2\right)\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-\left(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}\right)^2}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)^3}. \qquad (22.14)$$

Радіус кривизни

$$\rho^2=\frac{1}{K^2}.$$

3) Нехай криву, розміщену у площині, задано рівнянням

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases}$$

Тоді

$$K^2=\frac{\left(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2\right)\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-\left(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}\right)^2}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^3}=\frac{(\dot{x}\ddot{y})^2-2(\dot{x}\ddot{y})(\dot{y}\ddot{x})+(\dot{y}\ddot{x})^2}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^3},$$

$$K^2=\frac{(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})^2}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^3},$$

а

$$K=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ \rho=\frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}. \qquad (22.15)$$

Приклад. Знайти кривизну і радіус кривизни кривої

$$\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\dot{x}=6t;\ \ddot{x}=6;\ \dot{y}=3-3t^2;\ \ddot{y}=-6t.$$

За формулою (22.15) дістаємо

$$K=\frac{2}{3\left(t^2+1\right)^2},\ \rho=\frac{3\left(t^2+1\right)^2}{2},$$

4) Якщо крива задана у формі $y=f(x)$, то, позначаючи t через x, за формулою (22.15) маємо

$$\dot{x}=1,\ \ddot{x}=0;\ \dot{y}=y'=f'(x);\ \ddot{y}=y''=f''(x).$$

Тоді

$$K=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}},\ \rho=\frac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}. \qquad (22.16)$$

5) Розглянемо, зрештою, випадок, коли крива задана в полярній системі координат:

$$\rho=\rho(\theta),\ x=\rho(\theta)\cos\theta,\ y=\rho(\theta)\sin\theta.$$

Нехай $t = \theta$. Тоді

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta - \rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\sin\theta + 2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta,$$

Підставивши ці значення похідних у формулу (22.15), знайдемо

$$K = \frac{\left|\rho^2 - \rho\rho''_\theta + 2\left(\rho'_\theta\right)^2\right|}{\left[\rho^2 + \left(\rho'_\theta\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{22.17}$$

Приклад. Знайти кривизну кола $\rho = a\sin\theta$.

Розв'язання. Маємо

$$\rho'_\theta = \frac{d\rho}{d\theta} = a\cos\theta, \quad \rho''_\theta = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = -a\sin\theta,$$

$$K = \frac{\left|a^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + 2a^2\cos^2\theta\right|}{\left(a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a^2}{a^3} = \frac{2}{a}.$$

ВПРАВИ. Знайти кривизну і радіус кривизни кривої.

1. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ в точках $A_1\ (0, b)$ і $A_2\ (a, 0)$. *Відповідь* $K_{A_1} = \frac{b}{a^2}$, $\rho_{A_1} = \frac{1}{K_{A_1}}$; $K_{A_2} = \frac{a}{b^2}$, $\rho_{A_2} = \frac{b^2}{a}$.

2. $x = \cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ при $t = \frac{\pi}{3}$. *Відповідь.* $K = \frac{4}{3a\sqrt{3}}$, $\rho = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$.

3. $y = \ln x$ у точці $(1, 0)$. *Відповідь.* $K = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\rho = 2\sqrt{2}$.

4. $y = \sin x$ у точці $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. *Відповідь.* $K = 1$, $\rho = 1$.

22.2. Розкладання прискорення на нормальне і дотичне

Формулу (22.7) можна зобразити у вигляді

$$\vec{w} = \vec{n}^0\frac{v^2}{\rho} + \vec{\tau}\frac{dv}{dt} = \vec{w}_n + \vec{w}_\tau. \tag{22.18}$$

Вектор $\vec{n}^0 \dfrac{v^2}{\rho} = \vec{\omega}_n$ називається **нормальним прискоренням**, а вектор $\vec{\tau}\dfrac{dv}{dt} = \vec{\omega}_\tau$ — **дотичним прискоренням**.

Як випливає з формули (22.18), повне прискорення лежить у стичній площині.

§ 23. ВЕКТОРНЕ І СКАЛЯРНЕ ПОЛЯ

Задамо змінні точки M простору вектор-функцією $\vec{r} = \vec{r}(t)$, або $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Кожній точці M можна поставити у відповідність або скалярну функцію, або векторну функцію від точки M, тобто $\varphi(M)$ і $\vec{a}(M)$, або $\varphi(\vec{r})$ і $\vec{a}(\vec{r})$. Частина простору, в якому встановлена відповідність між $\varphi(\vec{r})$ і $\vec{r}$ (між $\vec{a}(\vec{r})$ і $\vec{r}$) називається **скалярним (векторним) полем**, а функції — **скалярними (векторними).** Прикладом скалярного поля може бути поле тисків повітря у просторі, а прикладом векторного поля — поле швидкостей частинок рідини. Щоб задати скалярне поле, слід задати одну функцію координат $\varphi(x, y, z) = u$, а векторне поле задається трьома функціями від координат:

$$a_x(x, y, z),\ a_y(x, y, z),\ a_z(x, y, z).$$

23.1. Похідна за напрямом. Градієнт

Нехай на відкритій множині Q тривимірного простору задано диференційовну функцію $u = f(x, y, z)$. Виберемо довільний одиничний вектор $\vec{e}\,(e_x, e_y, e_z)$ і скаляр $t \geq 0$.

Похідною за напрямом $\vec{e}$ функції $\varphi(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z) \in Q$ називається границя

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \lim_{t \to 0+0} \frac{\varphi\left(x + te_x;\ y + te_y;\ z + te_z\right) - \varphi(x, y, z)}{t}, \tag{23.1}$$

якщо ця границя існує.

Іншими словами, $\dfrac{\partial u}{\partial e}$ — це права похідна від функції $\varphi(x + te_x;$ $y + te_y;\ z + te_z)$ по t. Приймемо за t відстань між двома будь-якими точками M і M_1 одиничного вектора (рис. 4.25) $t = \rho$. Тоді

$$\varphi\left(x + te_x;\ y + te_y;\ z + te_z\right) - \varphi(x, y, z) = \varphi(M_1) - \varphi(M) = \Delta u,$$

а

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \lim_{\rho \to 0+0} \frac{\Delta u}{\rho}.$$

Внаслідок диференційовності функції $u = \varphi(x, y, z)$ її приріст

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \alpha,$$

де $\alpha = \varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y + \varepsilon_z \Delta z$.
При цьому

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\alpha}{\rho} = 0.$$

Поділимо Δu на величину ρ:

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho}. \tag{23.2}$$

Величини

$$\frac{\Delta x}{\rho} = \cos\alpha, \ \frac{\Delta y}{\rho} = \cos\beta, \ \frac{\Delta z}{\rho} = \cos\gamma$$

є напрямними косинусами одиничного вектора $\vec{e}$:

$$\vec{e} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma.$$

Знайдемо границю відношення (23.2):

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial \vec{e}}.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{23.3}$$

Розглянемо новий вектор

$$\vec{\Gamma}_u = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}, \tag{23.4}$$

який називається **градієнтом скалярної функції** u.

Використовуючи вектори $\vec{\Gamma}_u$ і $\vec{e}$, формулу похідної за напрямом можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \vec{\Gamma}_u \cdot \vec{e} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{e}.$$

Оскільки

$$\operatorname{grad} u \cdot \vec{e} = |\operatorname{grad} u| \, |\vec{e}| \cos\left(\vec{\Gamma}_u, \vec{e}\right), \quad |\vec{e}| = 1,$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = |\operatorname{grad} u| \cos\left(\vec{\Gamma}_u, \vec{e}\right).$$

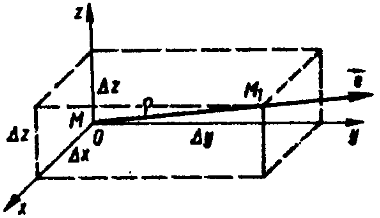


Рис. 4.25

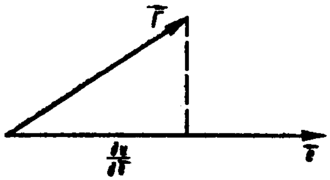


Рис. 4.26

Нехай $\cos\left(\vec{\Gamma}_u, \vec{e}\right) = 1$, тобто напрям градієнта збігається з напрямом $\vec{e}$. Тоді $\frac{du}{\partial \vec{e}}$ має найбільше значення, яке дорівнює довжині вектора $\vec{\Gamma}_u$. Таким чином,

$$\max \frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = |\mathrm{grad}\, u|. \tag{23.5}$$

Із формули (23.5) і рис. 4.26 випливає, що $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$ є проекція градієнта на напрям $\vec{e}$.

Зазначимо також, що будь-яку частинну похідну функції багатьох змінних за деякою змінною можна розглядати як похідну за напрямом.

Приклад. Знайти grad z у точці M (1, 1), якщо

$$z = \ln(x^2 + y^2).$$

Розв'язання. Маємо:

$$\mathrm{grad}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j};\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M(1;1)} = \frac{2}{1^2 + 1^2} = 1;\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M(1;1)} = \frac{2}{1^2 + 1^2} = 1;\ \mathrm{grad}\, z = \vec{i} + \vec{j}.$$

23.2. Рівняння дотичної площини до поверхні. Рівняння нормалі

Нехай деяка поверхня s задана рівнянням у неявній формі

$$F(x, y, z) = 0.$$

Візьмемо точку $P(x, y, z) \in s$, в якій функція F має неперервні частинні похідні, що одночасно не дорівнюють нулю. Тоді grad $F \neq 0$ в точці P.

Точки P поверхні, для яких grad $F \neq 0$, називаються **звичайними**. Множина точок, узятих з достатньо малого δ-околу звичайної точки і належних поверхні s, називається **гладким (простим) куском поверхні.**

Якщо всі точки поверхні s є звичайними, то поверхня називається **гладкою (простою).**

Дотичною прямою до поверхні у деякій її точці називається дотична до деякої кривої, яка розміщена на цій поверхні і проходить через дану точку. Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Усі дотичні прямі до гладкої поверхні у звичайній точці лежать в одній площині.*

Доведення. Нехай точку $P(x, y, z)$ розміщено на поверхні $F(x, y, z) = 0$. Розглянемо орієнтовану криву, яка належить цій поверхні і проходить через точку P. Нехай рівняння цієї кривої задано у параметричній формі:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t),\ t_0 \le t \le T.$$

По дотичній до кривої напрямлено вектор

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}.$$

Утворимо вектор

$$\vec{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}.$$

Якщо обчислити F'_x, F'_y, F'_z в точці $P(x, y, z)$, то принаймні одна з цих похідних не дорівнює нулю, тобто $\vec{N} \ne \vec{0}$. Розглянемо скалярний добуток

$$\vec{N} \cdot \frac{d\vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}(t) + \frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}(t).$$

Функцію $F(x, y, z)$ можна розглядати як скалярну функцію t. Оскільки функція F диференційовна, а $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ мають похідні, то

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Отже, $\vec{N} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$, тобто $\vec{N} \perp \frac{d\vec{r}}{dt}$, або вектор $\vec{N}$ перпендикулярний до всіх дотичних, які проходять через точку P. Звідси випливає, що всі дотичні у точці P лежать в одній площині. Ця площина й називається **дотичною до поверхні** у даній точці.

Отже, *площина, яка містить усі дотичні до кривих, що розміщені на поверхні і проходять через дану точку, називається дотичною площиною.*

Пряма, яка проходить через точку $P(x, y, z)$ перпендикулярно до дотичної площини, називається **нормаллю до поверхні** (рис. 4.27).

Вектор $\vec{N}$ лежить на нормалі. Тому рівнянням нормалі є рівняння прямої, напрямлений вектор якої має компоненти $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$, обчислені у точці P. Тоді рівняння нормалі запишеться таким чином:

$$\frac{X - x_P}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P} = \frac{Y - y_P}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P} = \frac{Z - z_P}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_P}. \tag{23.6}$$

Нехай поверхню задано рівнянням в явному вигляді

$$z = f(x, y).$$

Тоді $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ і, отже,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x};\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y};\ \frac{\partial F}{\partial z} = 1.$$

Рівняння нормалі до поверхні

$$\frac{X - x_P}{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P} = \frac{Y - y_P}{\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P} = \frac{Z - z_P}{1}. \tag{23.7}$$

У формулах (23.6) і (23.7) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_P$ означає, що відповідна похідна обчислюється в точці P. Тепер можна записати рівняння дотичної площини, яка проходить через точку P:

$$A(X - x_P) + B(Y - y_P) + C(Z - z_P) = 0.$$

Оскільки ця площина перпендикулярна до нормалі, то з точністю до сталого множника

$$A = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P,\ B = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P,\ C = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_P.$$

Рівняння дотичної площини:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P (X - x_P) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P (Y - y_P) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_P (Z - z_P) = 0.$$

Таким чином, *у кожній точці гладкої поверхні, заданої рівнянням* $F(x, y, z) = 0$, *можна провести дотичну площину і притому лише одну*.

Якщо функцію задано в явному вигляді:

$$z = f(x, y),$$

то рівняння дотичної площини запишеться у вигляді

$$Z - z_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P (X - x_P) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P (Y - y_P). \tag{23.8}$$

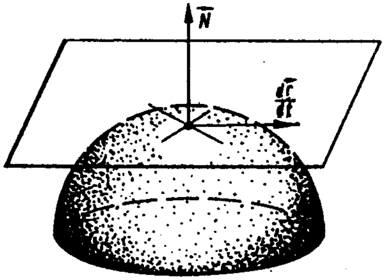


Рис. 4.27

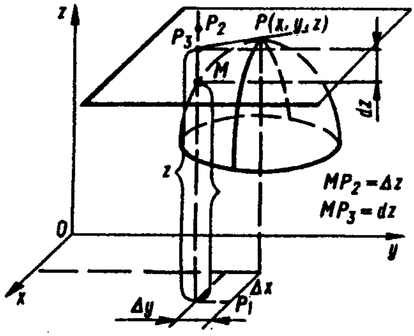


Рис. 4.28

Нехай точку $M(X, Y, Z)$ на дотичній площині розміщено близько до точки $P(x, y, z)$. Тоді, позначаючи

$$X - x_P = \Delta x; \; Y - y_P = \Delta y,$$

рівняння (23.8) можна записати у вигляді

$$Z - z_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P \Delta y .$$

Права частина цього виразу є повний диференціал функції $z = f(x, y)$. Отже,

$$Z - z_P = \Delta z .$$

Звідси випливає, що *з геометричної точки зору повний диференціал функції двох змінних є приріст аплікати дотичної площини* (рис.4.28).

Теорема 2. *Градієнт функції $u = f(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня.*

Дійсно, поверхня рівня має рівняння $u = f(x, y, z) = c$. Градієнт

$$\vec{\Gamma}_u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} .$$

Нехай

$$f(x, y, z) - c = 0 = F(x, y, z).$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z} .$$

$$\vec{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} .$$

Отже, $\overrightarrow{\Gamma_u} = \overrightarrow{N}$, тобто градієнт напрямлений по нормалі до поверхні рівня (рис. 4.29).

Зауважимо, що градієнт позначається символом $\vec{\nabla} u$ (набла), де $\vec{\nabla}$ —оператор, який кожній диференційовній функції $u(x, y, z)$ ставить у відповідність вектор grad u. Цей символічний вектор

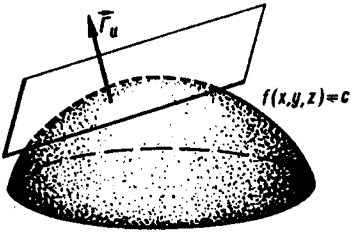


Рис. 4.29

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

називається **оператором набла** або оператором **Гамільтона**[1] і дає змогу розглядати grad$u$ як добуток вектора $\vec{\nabla}$ на скаляр u.

Приклад. Знайти рівняння нормалі і дотичної площини у точці $P(2; 2; 3)$ до поверхні $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$.

Розв'язання. Маємо

$$F(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P = (2x)_P = 2 \cdot 2 = 4, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P = (-8y)_P = -8 \cdot 2 = -16,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_P = (4z)_P = 4 \cdot 3 = 12.$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{X-2}{4} = \frac{Y-2}{-16} = \frac{Z-3}{12}.$$

Рівняння дотичної площини:

$$4(X-2) - 16(Y-2) + 12(Z-3) = 0, \quad X - 4Y + 3Z - 3 = 0.$$

§ 24. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ (ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ)

Лема. *Нехай функція $y = f(x)$ має скінченну і відмінну від нуля похідну в точці x_0. Тоді в околі цієї точки справедливі такі твердження:*

1) *якщо $f'(x_0) > 0$, то приріст функції Δy і приріст аргументу Δx мають один і той самий знак, тобто $\Delta y > 0$, $\Delta x > 0$, або $\Delta y < 0$, $\Delta x < 0$;*

2) *якщо $f'(x_0) < 0$, то приріст функції Δy і приріст аргументу Δx мають різні знаки, тобто $\Delta x < 0$, $\Delta y > 0$ або $\Delta x > 0$, $\Delta y < 0$;*

3) *існують точки, для яких $f(x) > f(x_0)$, і точки, для яких $f(x) < f(x_0)$.*

---

[1] Уільям Роуан Гамільтон (1805—1865) — ірландський математик.

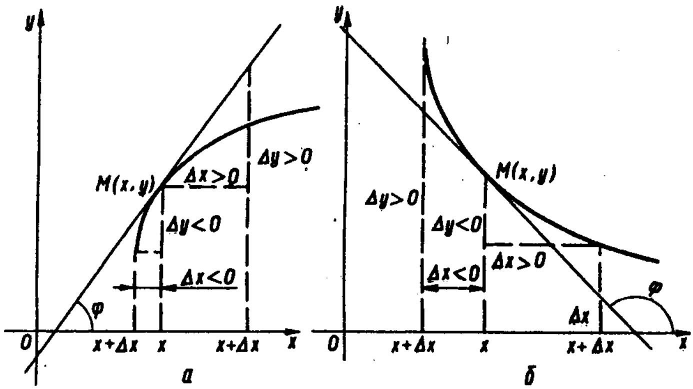


Рис. 4.30

Доведення. Геометрична інтерпретація леми дана на рис. 4.30, *а*, *б*. За означенням похідної

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ і } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

де $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$.

1) Нехай $f'(x_0) > 0$, тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ при достатньо малих Δx. Отже, а) $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$; б) $\Delta x < 0$, $\Delta y < 0$.

2) Нехай $f'(x_0) < 0$, тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$. Отже, а) $\Delta x > 0$, $\Delta y < 0$; б) $\Delta x < 0$, $\Delta y > 0$.

3) а) $\Delta y > 0$, тобто $f(x) - f(x_0) > 0$, тоді $f(x) > f(x_0)$; б) $\Delta y < 0$, тобто $f(x) - f(x_0) < 0$, тоді $f(x) < f(x_0)$.

24.1. Теорема Ролля [1]

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$

1) *визначена і неперервна на сегменті* $[a, b]$,
2) *має похідну в кожній точці інтервалу* (a, b),
3) *на кінцях сегмента набирає рівних значень*

$$f(a) = f(b),$$

то всередині сегмента $[a, b]$ *знайдеться принаймні одна точка* ξ, *похідна в якій* $f'(\xi)$ *дорівнює нулю.*

[1] Мішель Ролль (1652—1719) — французький математик.

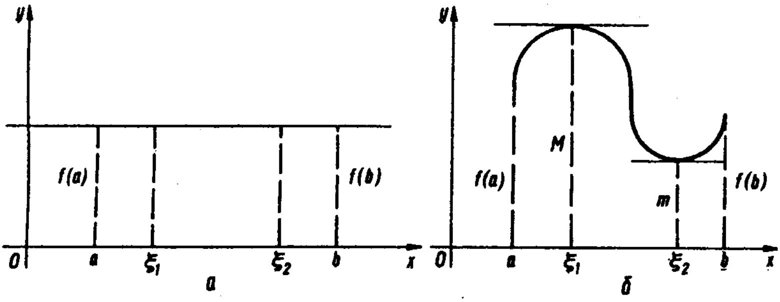


Рис. 4.31

З геометричної точки зору це означає, що всередині сегмента знайдуться такі точки ξ, *в яких дотична до кривої в цих точках паралельна осі* $0x$ (рис. 4.31).

Доведення. Оскільки $f(x)$ неперервна на сегменті $[a, b]$, то на цьому сегменті $f(x)$ набирає як своє найбільше значення M, так і своє найменше значення m.

При цьому можливі такі випадки.

Випадок 1. $M = m$, тоді $f(x) = \text{const}$, $a \le x \le b$ і $f'(x) = 0$ (рис. 4.31, a).

Випадок 2. $M \ne m = f(a) = f(b)$. Розглянемо точку ξ_1, в якій функція має найбільше значення M (рис. 4.31, б), і покажемо що похідна в цій точці дорівнює нулю.

Нехай $f'(\xi_1) \ne 0$. Зауважимо, що ξ_1 є внутрішня точка $[a, b]$, оскільки $f(a) = f(b)$ і $M \ne m$. Тоді:

а) $f'(\xi_1) > 0$. На підставі леми в околі точки ξ_1 знайдеться така точка x, що $f(x) > f(\xi_1)$, тобто $f(x) > M$. Прийшли до суперечності;

б) $f'(\xi_1) < 0$. Згідно з лемою знайдеться така точка x, що $f(x) > f(\xi_1)$, тобто $f(x) > M$. Прийшли також до суперечності.

Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай функція* $f(x)$ *задовольняє умови теореми Ролля, а на кінцях сегмента значення функції дорівнюють нулю. Тоді між коренями (нулями) функції знайдеться принаймні один корінь (нуль) похідної.*

Зауваження.

1. Теорема Ролля вказує на існування точки ξ, де $f'(\xi) = 0$, але не дає способу її відшукання.

2. Точок, в яких похідна функція дорівнює нулю, може бути більше ніж одна. Наприклад, функція $y = \sin x$

1) на сегменті $[0; 2\pi]$ неперервна;
2) має похідну на інтервалі $(0; 2\pi)$;
3) $f(0) = f(2\pi) = 0$;

$$y' = \cos x, \quad \cos x = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2}\pi.$$

Таким чином, на $[0; 2\pi]$ є дві точки $\xi_1 = \frac{\pi}{2}$ і $\xi_2 = \frac{3}{2}\pi$, в яких $f'(\xi) = 0$.

3. Якщо функція не задовольняє хоча б одну з трьох умов теореми, то теорема не виконується.

Наприклад, функція

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{якщо } x \geq 0; \\ -x, \text{якщо } x < 0, \end{cases} \quad x \in [-1;1];$$

1) неперервна на сегменті $[-1; +1]$;

2) $f(-1) = f(1)$, але в точці $x = 0$ задана функція похідної не має. Для цієї функції теорема Ролля на $[-1; +1]$ не виконується.

24.2. Теорема Лагранжа [1]

Теорема. *Нехай функція $y = f(x)$:*

1) неперервна на сегменті $[a, b]$;

2) має похідну в кожній точці інтервалу (a, b).

Тоді всередині сегмента $[a, b]$ існує принаймні одна така точка ξ, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \text{ де } a < \xi < b.$$

Геометрична інтерпретація теореми дана на рис. 4.32. Відношення $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\alpha$ дорівнює кутовому коефіцієнту січної.

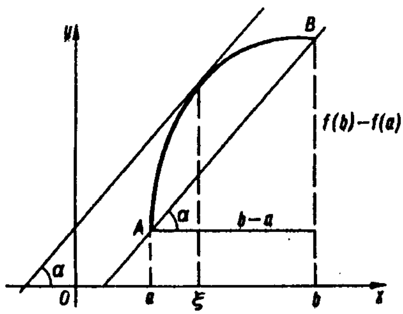


Рис. 4.32

У теоремі стверджується, що на інтервалі (a, b) існує точка ξ, в якій дотична до кривої паралельна січній, що сполучає точки A і B.

Теорема Ролля є окремим випадком теореми Лагранжа, оскільки в цьому випадку дотична паралельна осі Ox.

Доведення. Функція $y = f(x)$ не задовольняє вимоги теореми Ролля, оскільки $f(a) \neq f(b)$. Побудуємо таку допоміжну функцію $F(x)$, яка задовольняла б теорему Ролля. Для цього покладемо $F(x) = f(x) + \lambda x$, де λ — сталий множник. Щоб функція $F(x) = f(x) + \lambda x$ задовольняла теорему Ролля, має виконуватися умова $F(a) = F(b)$, звідки знайдемо λ:

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b; \ \lambda(a - b) = f(b) - f(a),$$

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

---

[1] Жозеф Луї Лагранж (1736—1819) — французький математик і механік.

За теоремою Ролля існує така точка ξ в інтервалі (a, b), що $F'(\xi) = 0$, тобто $f'(\xi) + \lambda = 0$. Отже, $\lambda = -f'(\xi)$. Тоді

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

24.3. Формула Лагранжа

Рівність

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

де $a < \xi < b$ називається **формулою Лагранжа** або **формулою скінченних приростів.** Цією формулою часто користуються для обчислення скінченного приросту функції, якщо знайдено ξ. Оскільки точка ξ лежить між a і b, тобто $a < \xi < b$, то $\xi - a < b - a$, $0 < \frac{\xi - a}{b - a} < 1$. Нехай $\frac{\xi - a}{b - a} = \theta$, де $0 < \theta < 1$. Тоді $\xi = a + (b - a)\theta$. Формула Лагранжа набирає вигляду

$$f(b) - f(a) = f'[a + (b - a)\theta](b - a).$$

Зокрема, поклавши $b - a = h$, $b = a + h$, знаходимо

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h.$$

Для сегмента $[a, x]$ формула Лагранжа запишеться таким чином:

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a), \text{ де } \xi = a + \theta(x - a),\ 0 < \theta < 1.$$

24.4. Теорема Коші

Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$

1) *неперервні на сегменті* $[a, b]$;

2) *в інтервалі* (a, b) *мають похідні*;

3) *похідна функції* $\varphi(x)$ *на інтервалі* (a, b) *не перетворюється на нуль.*

Тоді в інтервалі (a, b) знайдеться така точка ξ, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

тобто відношення приростів функцій на даному відрізку дорівнює відношенню їх похідних в точці ξ.

Доведення. Доведемо спочатку, що $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$. Коли припустити, що $\varphi(b) - \varphi(a) = 0$, або $\varphi(b) = \varphi(a)$, то за теоремою Ролля для функції $\varphi(x)$ знайдеться така точка $x = \xi$, в якій $\varphi'(\xi) = 0$. Це суперечить умові 3) теореми, оскільки $\varphi'(\xi) \neq 0$ на інтервалі (a, b). Побудуємо допоміжну функцію $F(x) = f(x) + \lambda\varphi(x)$, яка задовольняє теорему Ролля. Тоді $F(b) = F(a)$, або $f(b) + \lambda\varphi(b) = f(a) + \lambda\varphi(a)$, звідки

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

За теоремою Ролля в інтервалі (a, b) знайдеться така точка ξ, що $F'(\xi)=0$, тобто

$$f'(\xi)+\lambda\varphi'(\xi)=0,$$

звідки

$$\lambda = -\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \text{ або } \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

де $\xi = a + \theta\,(b - a)$, $0 < \theta < 1$.

Теорему Лагранжа можна розглядати як окремий випадок теореми Коші, коли $\varphi(x) = x$.

§ 25. ПРАВИЛО РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

Нехай треба знайти $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ за умови, що $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=0$. Дістаємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

Доведемо теорему, яка дає можливість розкрити цю невизначеність.

Теорема 1. *Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умови:*

1) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=0$;

2) *функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають похідні в околі точки c при $x \neq c$;*

3) *в околі точки c функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють теорему Коші;*

4) *існує $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, який дорівнює скінченному числу A, то існує*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ і } \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A.$$

Доведення. Можливі три випадки:

а) $f(x)$ і $\varphi(x)$ *у скінченній точці c визначені;*

б) $f(x)$ і $\varphi(x)$ *у скінченній точці c не визначені;*

в) $c = \infty$, *тобто c — нескінченно віддалена точка.*

Для доведення випадку а) доповнимо означення функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$, поклавши, що при $x = c$ вони дорівнюють нулю: $f(c) = \varphi(c) = 0$. Тоді $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці c, оскільки $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)=0$, $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=\varphi(c)=0$. Розглянемо сегмент $[c, x]$. Згідно з умовою 3),

$$\frac{f(x)-f(c)}{\varphi(x)-\varphi(c)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \text{ або } \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

$$c < \xi < x.$$

Якщо $x \to c$, то $\xi \to c$. За умовою теореми існує $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ для $x \in [c, \xi]$. Отже, ця границя буде тією самою й для $\xi \to c$, тобто

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{\xi \to c} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = A.$$

Тоді

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{\xi \to c} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = A; \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A.$$

Зауваження.

1. Якщо $\lim\limits_{x \to c} f'(x) = 0$ і $\lim\limits_{x \to c} \varphi'(x) = 0$, а функції $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють умови теореми 1, то

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ і т. п.}$$

2. Якщо $\lim\limits_{x \to c} f'(x) \neq 0$, а $\lim\limits_{x \to c} \varphi'(x) = 0$, то можна розглянути

$$\lim_{x \to c} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} \varphi'(x)}{\lim\limits_{x \to c} f'(x)} = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$, оскільки величина, обернена до нескінченно малої, є нескінченно великою.

Наприклад,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

У випадку б), якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x = c$ не визначені і точка c скінченна, то теорема виконується (доведення не наводимо).

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln|\sin ax|}{\ln|\sin bx|}$; $a > 0$, $b > 0$.

Розв'язання. Функції $\ln|\sin ax|$ і $\ln|\sin bx|$ у точці $x = 0$ не визначені, тоді

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{a \cos ax}{\sin ax}}{\frac{b \cos bx}{\sin bx}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos ax}{\cos bx} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin bx}{bx}}{\frac{\sin ax}{ax}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Теорема вірна і для випадку, коли $c = \infty$. Сформулюємо її.

Теорема 2. *Якщо*

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$;

2) *$f(x)$ і $\varphi(x)$ мають похідні в околі нескінченно віддаленої точки;*

3) *$f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють в околі нескінченно віддаленої точки теоремі Коші;*

4) *існує* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$.

Тоді існує

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ і } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A.$$

Цю теорему приймемо без доведення.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

Розв'язання. Маємо

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x; \quad \varphi(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Розглянемо тепер невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 3. *Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умови:*

1) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to c} \varphi(x) = \infty$, *де точка c може бути нескінченно віддаленою;*

2) *функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ в околі точки c мають похідні;*

3) *$f(x)$ і $\varphi(x)$ в околі точки c задовольняють теорему Коші;*

4) *існує скінченна або нескінченна границя*

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A.$$

Тоді існує

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A.$$

Доведення не наводимо.

Теореми 1—3 складають правило розкриття невизначеностей, яке називають ще **правилом Лопіталя—Бернуллі**, а іноді **правилом Лопіталя.**

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{\ln|1-x| + \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Розв'язання. Легко помітити, що

$$\lim_{x \to 1-0}\left[\ln|1-x| + \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right] = \infty, \ \lim_{x \to 1} \operatorname{ctg}\pi x = \infty.$$

Отже, маємо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для її розкриття застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\ln|1-x| + \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x} = \lim_{x \to 1-0} \frac{\ln|1-x|}{\operatorname{ctg}\pi x} + \lim_{x \to 1-0} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x},$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\ln|1-x|}{\operatorname{ctg}\pi x} = \lim_{x \to 1-0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\pi \operatorname{cosec}^2 \pi x} =$$

$$= \lim_{x \to 1-0} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi(1-x)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{2\pi \sin \pi x \cos \pi x}{-\pi} =$$

$$= -2 \lim_{x \to 1-0} \sin \pi x \cdot \lim_{x \to 1-0} \cos \pi x = -2 \cdot 0 \cdot 1 = 0,$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x} = \lim_{x \to 1-0} \frac{\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi x}{2}}{-\pi \operatorname{cosec}^2 \pi x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \to 1-0} \frac{\sin^2 \pi x}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \to 1-0} \frac{2\pi \sin \pi x \cos \pi x}{-2\cos\frac{\pi x}{2} \sin\frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to 1-0} \frac{\sin 2\pi x}{\sin \pi x} =$$

$$= \lim_{x \to 1-0} \frac{2\pi \cos 2\pi x}{\pi \cos \pi x} = 2\frac{1}{(-1)} = -2,$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x} = 0-2=-2.$$

Зауваження. Теореми залишаються справедливими й для односторонніх границь.

Розглянемо тепер невизначеності виду

$$0\cdot\infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty;\ \infty-\infty.$$

Нехай $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=\infty$. Треба знайти

$$\lim_{x\to c} f(x)\,\varphi(x)=[0\cdot\infty].$$

Ця границя може бути визначена як

$$\lim_{x\to c} f(x)\varphi(x)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right],$$

а цю невизначеність можна розкрити

$$\lim_{x\to c} f(x)\varphi(x)=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}}.$$

Наприклад,

$$\lim_{x\to 0} x^n\ln|x| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n}{-n}=0.$$

Нехай $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=0$. Треба знайти $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\varphi(x)}$.

Для розкриття такої невизначеності вводять функцію $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$ і логарифмують її. Тоді

$$\ln|y|=\varphi(x)\ln|f(x)|,$$

$$\lim_{x\to c}\ln|y|=\lim_{x\to c}\varphi(x)\ln|f(x)|=[0\cdot\infty].$$

Таку невизначеність вже можна розкрити.

Нехай $\lim\limits_{x\to c} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=\infty$. Знайти $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\varphi(x)}$.

Маємо

$$\lim_{x\to c}\ln[f(x)]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to c}\varphi(x)\ln|f(x)|=[\infty\cdot 0].$$

Зауважимо, що не всі невизначеності можна розкрити за допомогою правила Лопіталя.

Наприклад,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Проте цю границю можна знайти іншим способом. Дійсно, поділимо заданий дріб на e^x. Дістанемо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

§ 26. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ Й БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

26.1. Формула Тейлора [1] для функції однієї змінної

При обробці експериментальних результатів за даними значеннями двох величин x і y будують звичайно графік залежності y від x або $y = f(x)$, а потім графік описують аналітично. Для цього використовують многочлени першого степеня (прямо пропорційна залежність), другого степеня (параболічна залежність) і взагалі n-го степеня.

Формула Тейлора дає обгрунтування можливості наближено зображувати функцію $y = f(x)$ у вигляді многочлена.

Запишемо многочлен n-го степеня однієї змінної x:

$$P_n(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j. \qquad (26.1)$$

Якщо $x = 0$, то $P_n(0) = b_0$.

Рівність (26.1) називається також **зображенням** або **розвиненням многочлена за степенями букви** x. Числа b_0, b_1, b_2, ..., b_n називаються **коефіцієнтами даного розвинення.**

Запишемо тепер многочлен, який перетворюється на сталу b_0 при $x = x_0$. Такий многочлен має вигляд

$$P_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\ldots+b_n(x-x_0)^n=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}b_j(x-x_0)^j. \qquad (26.2)$$

Рівність (26.2) називається **розвиненням многочлена** $P_n(x)$ **за степенями** $(x - x_0)$, а b_0, b_1, b_2, ..., b_n називаються **коефіцієнтами розвинення.** Поставимо задачу визначення коефіцієнтів b_0, b_1, b_2, ..., b_n за допомогою похідних від многочлена (26.2), обчислених у точці $x = x_0$. За формулою (26.2) маємо

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}b_j(x-x_0)^j.$$

---

[1] Брук Тейлор (1685—1731) — англійський математик і філософ.

Тоді

$$P_n'(x)=\sum_{j=1}^{n} b_j(x-x_0)^{j-1} j = b_1 + 2b_2(x-x_0)+$$
$$+3b_3(x-x_0)^2+\ldots+nb_n(x-x_0)^{n-1},$$
$$P_n''(x)=\sum_{j=2}^{n} b_j(x-x_0)^{j-2} j(j-1)=1\cdot 2b_2+$$
$$+3\cdot 2b_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)(x-x_0)^{n-2},$$
$$P_n^{(k)}(x)=\sum_{j=k}^{n} b_j(x-x_0)^{j-k} j(j-1)\cdot\ldots\cdot[j-(k-1)]=$$
$$=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot kb_k+\ldots+n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)]\,b_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Покладаючи в цих рівностях $x = x_0$, знаходимо

$$b_0 = P_n(x_0),\ b_1 = \frac{P_n'(x_0)}{1!};$$
$$b_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2!}\ldots,\ b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!},\ \ldots,\ b_n = \frac{P_n^{(n)}}{n!}. \tag{26.3}$$

Тоді многочлен (26.2) набуває вигляду

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{P_n^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j,\quad \text{де}\quad 0!=1,$$

або

$$P_n(x) = P_n(x_0)+\frac{P_n'}{1!}(x-x_0)+\frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{26.4}$$

Формула (26.4) називається **формулою Тейлора зображення многочлена $P_n(x)$ за степенями $(x - x_0)$.**

Якщо взяти $x_0 = 0$, то формули (26.3) залишаються вірними і визначають коефіцієнт многочлена (26.1), тобто

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{P_n^{(j)}(0)}{j!}x^j. \tag{26.5}$$

Останню формулу називають **формулою зображення многочлена $P_n(x)$ за степенями x**, або **формулою Маклорена** [1] **зображення**

[1] Колін Маклорен (1698—1746) — шотландський математик.

многочлена $P_n(x)$ за степенями x. Існує лише єдине зображення многочлена (26.2) у вигляді (26.4). Дійсно, якщо

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j (x - x_0)^j \text{ і } P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \tilde{b}_j (x - x_0)^j ,$$

то b_j і $\tilde{b}_j$, обчислюють за формулами (26.3) і дістають $b_j = \tilde{b}_j$.

Приклад. Використовуючи формулу (26.5), вивести формулу бінома Ньютона.

Розв'язання. Розглянемо $P_n(x) = (a + x)^n$.
Знайдемо j-ту похідну при $x = 0$:

$$P_n^{(j)}(x) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot [n - (j-1)](a + x)^{n-j},$$

$$P_n^{(j)}(0) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot [n - (j-1)]a^{n-j}, \; j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

За формулою Маклорена для многочлена n-го степеня маємо

$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \ldots + x^n.$$

Якщо позначити

$$C_n^j = \frac{n(n-1)\ldots[n-(j-1)]}{j!}, \text{ то } (a + x)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a^{n-j} x^j.$$

Нехай тепер задана функція однієї змінної $y = f(x)$, яка не є многочленом n-го степеня і має похідні до $(n + 1)$-го порядку включно як у точці $x_0(0)$, так і в її ε-околі.

Поставимо задачу визначення коефіцієнтів многочлена (26.2) таким чином, щоб значення функції в точці $x_0(0)$ та її похідних до n-го порядку включно збігалися зі значеннями многочлена та всіх його похідних в цій точці, тобто

$$f(x_0) = P_n(x_0); \; f'(x_0) = P_n'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$$

Із формул (26.3) дістаємо формули для обчислення коефіцієнтів

$$b_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}, \; j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Підставивши здобуті значення b_j у формулу (26.2), знаходимо

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j = T_n(x). \tag{26.6}$$

Многочлен $T_n(x)$ називають **многочленом Тейлора для функції $f(x)$.** Позначивши

$$x - x_0 = \Delta x = dx,$$

дістанемо

$$f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^j = d^j f(x, x_0),$$

$$T_n(x) = f(x_0) + df(x, x_0) + \frac{d^2 f(x, x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x, x_0)}{n!}.$$

Введемо тепер різницю

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x).$$

Звідси

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x, x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x, x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x, x_0)}{n!} + R_n(x). \quad (26.7)$$

Вираз (26.7) називається **формулою Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки x_0, а $R_n(x)$ — залишковим членом формули Тейлора**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0) + R_n(x). \quad (26.8)$$

При $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x). \quad (26.9)$$

Формула (26.9) називається **формулою Маклорена для функції $f(x)$ в околі точки (0), а $R_n(x)$ — залишковим членом формули Маклорена для функції $f(x)$.** Якщо функція $f(x)$ — це многочлен $P_n(x)$, то з формули (26.8) дістаємо $R_n(x) = 0$. Якщо $f(x)$ не збігається з $P_n(x)$, то $R_n(x)$ в околі точки x_0 не дорівнює нулю. Проте при $x \to \to x_0$ залишковий член $R_n(x)$ має принаймні $(n+1)$-й порядок мализни порівняно з $(x - x_0)$, тобто більш високий порядок мализни, ніж останній з виписаних «точних» членів у формулах (26.8) або (26.9). Для доведення цього факту покладемо для спрощення $n = 2$, тобто

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + R_2(x).$$

Знайдемо з цієї формули значення $R_2(x)$ і застосуємо правило Лопіталя. Тоді

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^3} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^3} = \left[\frac{0}{0}\right],$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^3}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)}{3(x-x_0)^2}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{3\cdot 2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'''(x)}{3\cdot 2\cdot 1}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Дістали скінченну границю. Звідси випливає, що $R_n(x)$ має мализну $(n+1)$-го порядку порівняно з останнім членом при $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. Якщо позначити порядок мализни щодо $(x - x_0)$ у вигляді $O(x-x_0)^{n+1}$, то

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j+O(x-x_0)^{n+1}. \tag{26.10}$$

Цей вираз називається **формулою Тейлора розвинення функції $f(x)$ за степенями $(x - x_0)$ з залишковим членом у формі Пеано** [1]. Із формул (26.8) і (26.10) випливає, що при $x \to x_0$ у формулі Тейлора кожний наступний член має мализну вищого порядку, ніж попередній. Позначимо залишкові члени формули Тейлора через

$$R_0,\ R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_n\ .$$

Ця послідовність задовольняє умову

$$R_{k+1}=O(R_k)\ \text{при}\ x\to x_0.$$

Такі послідовності називаються **асимптотичними,** а зображення (26.10) називається **асимптотичним розвиненням функції $f(x)$ за степенями** $(x - x_0)$.

З асимптотичного розвинення (26.10) дістаємо наближені формули для виразу функції через многочлени Тейлора. Нехай $x = x_0 + \Delta x$. Тоді з точністю до величини порядку $(\Delta x)^2$ дістаємо

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x; \tag{26.11}$$

відповідно з точністю до величин порядку $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$ і т. д.

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2; \tag{26.12}$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(\Delta x)^3. \tag{26.13}$$

Оцінка останнього члена у розвиненні за формулою Тейлора має певне практичне застосування. Існує досить багато різних форм зображення залишкового члена. Одне належить Лагранжу. Розглянемо його.

Запишемо $f(x)$ у вигляді

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x)$$

---

[1] Джузеппе Пеано (1858—1932)— італійський математик.

Шукатимемо вираз для $R_n(x)$ у формі

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}Q,$$

де Q залежить від x. Зафіксуємо x, тоді Q буде сталою. Вважаючи x_0 змінною величиною і позначивши її через t, введемо функцію $F(t)$:

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\dots-$$

$$-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q.$$

Покажемо, що ця функція задовольняє умови теореми Ролля. Якщо $t=x_0$, то $F(x_0)=0$. Якщо $x=t$, то $F(x)=0$. Оскільки $F_t'(t)$ існує, то $F(t)$ задовольняє на $[x_0,\ x]$ умови теореми Ролля, тобто

$$F'(\xi)=0.$$

Далі знаходимо

$$F_t'(t)=-f'(x)-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+f'(t)-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+$$

$$+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-\frac{f^{(IV)}(t)}{3!}(x-t)^3+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-\dots-$$

$$-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+Q\frac{(x-t)^n}{n!},$$

$$F_t'(t)=Q\frac{(x-t)^n}{n!}-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n;$$

оскільки $F'(\xi)=0$, то

$$Q\frac{(x-\xi)^n}{n!}-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n=0,\ Q=f^{(n+1)}(\xi).$$

В результаті

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (26.14)$$

де $\xi=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1.$

При $x_0=0$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (26.15);$$

Вирази (26.14), (26.15) називаються **залишковими членами формули Тейлора у формі Лагранжа.**

Тепер формули Тейлора і Маклорена можна записати у вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Якщо залишковий член у проміжній точці позначити через диференціал:

$$R_n(x) = \frac{d^{n+1}f(\xi x)}{(n+1)!},\ R_n(x) = \frac{d^{n+1}f(\theta x)}{(n+1)!},$$

то формули Тейлора і Маклорена можна записати в компактній формі, аналогічній (26.7):

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0, x) + \frac{d^2 f(x_0, x)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0, x)}{n!} +$$

$$+ \frac{d^{n+1}f(\xi, x)}{(n+1)!}; \tag{26.16}$$

$$f(x) = f(0) + df(0, x) + \frac{d^2 f(0, x)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(0, x)}{n!} + \frac{d^n f(\theta, x)}{(n+1)!}. \tag{26.17}$$

Якщо в формулах (26.16) і (26.17) перенести в ліву частину $f(x_0)$ відповідно $f(0)$ і позначити $f(x) - f(x_0) = \Delta y$, то дістанемо

$$\Delta y = df(x_0, x) + \frac{d^2 f(x_0, x)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0, x)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\xi, x)}{(n+1)!}. \tag{26.18}$$

Формула (26.18) називається **розвиненням Тейлора приросту функції в точці x_0.** Аналогічно записується розвинення Маклорена приросту функції в точці 0:

$$\Delta y = df(0, x) + \frac{d^2 f(0, x)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(0, x)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\theta, x)}{(n+1)!},$$

де $0 < \theta < 1$.

Зазначимо, що многочлени Тейлора мають найкращу, так звану локальну апроксимацію, яка полягає в тому, що коли замість многочлена $T_n(x)$ взяти будь-який інший многочлен $P_n(x)$, то в достатньо малому околі точки x_0 виконується нерівність

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - P_n(x)|, \text{ де } x \neq x_0.$$

Приклади. **1.** Розвинути за формулами Маклорена $f(x) = e^x$ і оцінити залишковий член.

Розв'язання. Як випливає з формули (26.9), потрібно знайти відповідні похідні й їхні значення при $x = 0$:

$$f^{(j)}(x) = (e^x)^{(j)} = e^x;\ e^0 = 1.$$

Тоді за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Лагранжа маємо

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}. \tag{26.19}$$

Оцінимо залишковий член

$$|R_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}\right| < e^x \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!},$$

але $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} = 0$ при будь-якому скінченному x, а тому

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Отже, за формулою (26.19) можна обчислити значення e^x з будь-яким ступенем точності.

2. Розвинути за формулою Маклорена $f(x) = \sin x$ і оцінити залишковий член.

Розв'язання. Маємо

$$f^{(j)}(x) = (\sin x)^{(j)} = \sin\left(x + j\frac{\pi}{2}\right),\ j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Знайдемо значення похідних при $x = 0$:

$$f^{(j)}(0) = \sin j\frac{\pi}{2},\ j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Звідси при $j = 2k$ маємо $f^{(2k)}(0) = 0$, а

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Тоді

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x.$$

Оцінимо залишок

$$|R_n(x)| = \left|(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x\right| \le \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Нехай, наприклад, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Покладемо $k = 4$. Тоді

$$\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^9}{9!} \le \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^9}{9!} \le \frac{(0{,}8)^9}{9!} \le 5\cdot 10^{-6},$$

тобто

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

з точністю до 0,000005. Таким чином, якщо скласти таблицю синусів з точністю до п'яти правильних знаків, то достатньо скористатися многочленом Тейлора

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

Для малих значень x високу точність дає формула

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}.$$

3. Розвинути за формулою Маклорена $f(x) = \cos x$.

Розв'язання. Маємо

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cos \theta x.$$

26.2. Формула Тейлора для функції багатьох змінних

Виведення формули Тейлора для функції багатьох змінних виконується формально за тією самою схемою, що й для функції однієї змінної.Так, многочлен n-го степеня двох змінних x і y, розвинений за степенями x і y в околі точки (0, 0), має вигляд

$$P_n(x, y) = \sum_{i,j=0}^{i+j=n} b_{ij} x^i y^j. \tag{26.20}$$

Розвинення многочлена n-го степеня за степенями $(x - x_0)$ і $(y - y_0)$ є

$$P_n(x, y) = \sum_{i,j=0}^{i+j=n} b_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j. \tag{26.21}$$

Розвинення многочлена n-го степеня трьох змінних за степенями трьох різниць таке:

$$P_n(x, y, z) = \sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=n} b_{ijk} (x - x_0)^i (y - y_0)^j (z - z_0)^k. \tag{26.22}$$

Коефіцієнти у формулах (26.20)—(26.22) можна виразити через частинні похідні в точках (x_0, y_0); (x_0, y_0, z_0) аналогічно формулам (26.3). Тоді дістаємо поліноми Тейлора (26.4) — (26.6) та інші.

Якщо задано функцію $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то для неї можна побудувати многочлени Тейлора вигляду (26.6) та інші.

Дійсно, для функції двох змінних, $(n + 1)$ разів диференційовної за обома змінними як в точці (x_0, y_0), так і в її достатньо малому околі, формула Тейлора має вигляд

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} +$$

$$+ \ldots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + R_n(x, y), \tag{26.23}$$

де, наприклад,

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0),$$

. . . .

$$d^n f(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right]^n f(x_0, y_0), \tag{26.24}$$

$R_n(x, y)$ — залишковий член формули Тейлора.

Формула Тейлора розвинення функції m змінних, диференційовної в точці $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0})$ та її достатньо малому околі, має вигляд

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}) + $$
$$+ df(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) + \frac{d^2 f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{2!} + \dots +$$
$$+ \frac{d^n f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{n!} + R_n(x_1, x_2, \dots, x_m), \tag{26.25}$$

де $df(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) = \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{\partial x_1}(x_1 - x_{10}) +$

$$+ \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{\partial x_2}(x_2 - x_{20}) + \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{\partial x_3}(x_3 - x_{30}) +$$
$$+ \dots + \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{\partial x_m}(x_m - x_{m0}),$$

. . . .

$$d^n f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - x_{10}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 - x_{20}) + \right.$$
$$\left. + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m - x_{m0})\right]^n f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}),$$

$R_n(x_1, x_2, ..., x_m)$ — залишковий член формули Тейлора.

Якщо в формулі (26.25) позначити

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) - f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}) = \Delta u,$$

або

$$f(M) - f(M_0) = \Delta u,$$

де M — точка з координатами $(x_1, x_2, ..., x_m)$, то дістанемо формулу, аналогічну (26.18):

$$\Delta u = df(M, M_0) + \frac{d^2 f(M, M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(M, M_0)}{n!} + R_n(M, \xi), \tag{26.26}$$

де $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \in (M_0, M)$.

За певних умов, що накладаються на функцію багатьох змінних, зберігається асимптотичне розвинення вигляду (26.10), а також вираз для залишкового члена у формі Лагранжа. Так, для розвинення функції двох змінних дістаємо

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k,j=0}^{k+j=n+1}\frac{\partial^{k+j}f(\xi,\eta)}{\partial x^k\partial y^j}(x-x_0)^k(y-y_0)^j, \qquad (26.27)$$

де

$$\xi = x_0 + \theta_1(x - x_0),\ 0 < \theta_1 < 1;\ \eta = y_0 + \theta_2(y - y_0),\ 0 < \theta_2 < 1.$$

Якщо $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, то

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k,j=0}^{k+j=n+1}\frac{\partial^{k+j}f(\theta_1 x,\theta_2 y)}{\partial x^k\partial y^j}x^k y^j.$$

Для функції m змінних залишковий член у формі Лагранжа можна записати у вигляді

$$R_n(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k,j,\ldots,\mu=0}^{k+j+\ldots+\mu=n+1}\frac{\partial^{k+j+\ldots+\mu}f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)}{\partial x_1^k\partial x_2^j\ldots\partial x_m^\mu}\times$$
$$\times (x_1 - x_{10})^k(x_2 - x_{20})^j \cdot \ldots \cdot (x_m - x_{m0})^\mu,$$

де

$$\xi_1 = x_{10} + \theta_1(x_1 - x_{10}),\quad 0 < \theta_1 < 1;$$
$$\xi_2 = x_{20} + \theta_2(x_2 - x_{20}),\quad 0 < \theta_2 < 1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi_m = x_{m0} + \theta_m(x_m - x_{m0}),\quad 0 < \theta_m < 1.$$

Для розвинення функції m змінних в околі точки (0, 0, ..., 0) залишковий член має вигляд

$$R_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m) =$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k,j,\cdots,\mu=0}^{k+j+\ldots+\mu=n+1}\frac{\partial^{k+j+\ldots+\mu}f(\theta_1x_1,\theta_2x_2,\ldots,\theta_m x_m)}{\partial x_1^k\partial x_2^j\ldots\partial x_m^\mu}x_1^k x_2^j\ldots x_m^\mu.$$

Якщо ввести позначення залишкового члена у вигляді диференціала, то вираз залишкового члена формули Тейлора для функції двох змінних в околі точки $(x_0,\ y_0)$ набирає вигляду

$$R_n(x,y)=\frac{d^{n+1}f(\xi,\eta)}{(n+1)!},$$

або для формули Маклорена

$$R_n(x,y)=\frac{d^{n+1}(\theta_1 x,\theta_2 y)}{(n+1)!}.$$

Для функції m змінних залишковий член формули Тейлора для розвинення запишеться таким чином:

$$R_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{d^{n+1}f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{(n+1)!}, \tag{26.28}$$

а для формули Маклорена

$$R_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{d^{n+1}f(\theta_1 x_1, \theta_2 x_2, \ldots, \theta_m x_m)}{(n+1)!}.$$

При такому запису залишкових членів формули (26.23), (26.25), (26.27) набирають компактного вигляду. Так, формула Тейлора функції двох змінних в околі точки (x_0, y_0)

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df + \frac{d^2 f}{2!} + \ldots + \frac{d^n f}{n!} + \frac{d^{n+1}f(\xi, \eta)}{(n+1)!}. \tag{26.29}$$

Формулу Маклорена дістають із формули (26.29) при

$$x_0 = 0;\ y_0 = 0;\ \xi = \theta_1 x;\ \eta = \theta_2 y.$$

Формула Тейлора функції m змінних в околі точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$ має вигляд

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}) + \\ + \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \ldots + \frac{d^n f}{n!} + \frac{d^{n+1}f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{(n+1)!}, \tag{26.30}$$

де $\xi_i = x_{i0} + \theta_i (x_i - x_{i0})$, $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Формулу Маклорена дістаємо з формули (26.30) при

$$x_{10} = 0,\ x_{20} = 0,\ \ldots,\ x_{m0} = 0;\ \xi_1 = \theta_1 x_1,\ \xi_2 = \theta_2 x_2,\ \ldots,\ \xi_m = \theta_m x_m.$$

Формула (26.26) розвинення приросту функції з урахуванням (26.28) набирає вигляду

$$\Delta u = df(M, M_0) + \frac{d^2 f(M, M_0)}{2!} + \ldots + \\ + \frac{d^n f(M, M_0)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{(n+1)!}. \tag{26.31}$$

Розвинення приросту за формулою Маклорена дістаємо з розвинення (26.31) при $x_{i0} = 0$, $\xi_i = \theta_i x_i$, $M_0(0, 0, \ldots 0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Враховуючи можливість асимптотичного зображення функції багатьох змінних, можна дістати формули, аналогічні (26.11)—(26.13). Так, для функції двох змінних

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y,$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right].$$

Приклад. Записати формулу Тейлора для функції $f(x, y) = x^y$ в точці $(1, 1)$, поклавши $n = 3$.

Розв'язання. Обчислимо всі похідні до третього порядку в точці $(1, 1)$;

$f(x, y) = x^y$, $\qquad f(1,1) = 1$;

$f'_x(x, y) = yx^{y-1}$, $\qquad f'_x(1,1) = 1$;

$f'_y(x, y) = x^y \ln x$, $\qquad f'_y(1,1) = 0$;

$f''_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}$, $\qquad f''_{xx}(1,1) = 0$;

$f''_{xy}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$, $\qquad f''_{xy}(1,1) = 1$;

$f''_{yy}(x,y) = x^y \ln^2 x$, $\qquad f''_{yy}(1,1) = 0$;

$f'''_{xxx}(x,y) = y(y-1)(y-2)x^{y-3}$, $\qquad f'''_{xxx}(1,1) = 0$;

$f'''_{xxy}(x,y) = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x$, $\qquad f'''_{xxy}(1,1) = 1$;

$f'''_{xyy}(x,y) = yx^{y-1}\ln^2 x + 2x^{y-1}\ln x$, $\qquad f'''_{xyy}(1,1) = 0$;

$f'''_{yyy}(x,y) = x^y \ln^3 x$, $\qquad f'''_{yyy}(1,1) = 0$.

Знайдемо диференціали в точці $(1, 1)$:

$$df = f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) = x-1,$$

$$d^2 f = f''_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) +$$

$$+ f''_{yy}(1,1)(y-1)^2 = 2(x-1)(y-1),$$

$$d^3 f = 3(x-1)^2(y-1).$$

Підставивши ці результати у формулу (26.23), знайдемо

$$x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + R_3(\xi_1, \xi_2).$$

При малих значеннях $|x-1|$ і $|y-1|$ цією формулою користуються для обчислення значення функції x^y з певним ступенем точності.

§ 27. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

27.1. Умови сталості функції

Теорема 1. *Нехай функція $f(x)$ визначена на сегменті $[a, b]$ і має всередині нього скінченну похідну $f'(x)$. Для того щоб функція $f(x)$ була в інтервалі (a, b) сталою, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) = 0$ в інтервалі (a, b).*

Доведення. *Необхідність.* Оскільки

$$f(x) = C,$$

то

$$f'(x) = 0 \text{ при } \forall x \in (a, b).$$

Достатність. Якщо застосувати теорему Лагранжа на будь-якому із сегментів $[x, b]$, $[a, x]$, де $a < x < b$, то дістанемо $f(x) = C$.

Наслідок. *Якщо дві функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і неперервні на $[a, b]$ і мають скінченні похідні, причому $f'(x) = \varphi'(x)$, то на $[a, b]$ ці функції відрізняються лише сталою.*

27.2. Ознаки монотонності функції

Теорема 2. *Для того щоб функція, неперервна в проміжку $\langle a, b\rangle$ і така, що має в інтервалі (a, b) похідну, була неспадною або незростаючою в $\langle a, b\rangle$, необхідно і достатньо, щоб у (a, b)*

$$f'(x) \geq 0 \text{ або } f'(x) \leq 0.$$

Зауваження. Неспадну функцію визначають таким чином: $\Delta y \leq 0$ при $\Delta x > 0$ або $\Delta y < 0$ при $\Delta x < 0$ (рис. 4.30).

Незростаючу функцію визначають таким чином: $\Delta y \leq 0$ при $\Delta x > 0$ або $\Delta y \geq 0$ при $\Delta x < 0$ (рис. 4.30).

Для строго монотонних функцій наведені рівності не виконуються.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y = f(x)$ — неспадна в проміжку $\langle a, b\rangle$ функція. Довести, що $f'(x) \geq 0$. Згідно із зауваженням, маємо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. За теоремою про перехід до границі в нерівностях дістаємо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, тобто $f'(x) \geq 0$.

Достатність. Нехай в $\langle a, b\rangle$ виконується умова $f'(x) \geq 0$. Вимога теореми випливає з леми § 24.

Теорема 3 (ознака строгої монотонності). *Для того щоб функція, неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційовна в (a, b), була на $[a, b]$ зростаючою (спадною), необхідно і достатньо, щоб*

1) $f'(x) \geq 0$, $(f'(x) \leq 0)$, $x \in (a, b)$;

2) *не існувало на відрізку $[a, b]$ проміжку, в якому $f'(x)$ тотожно дорівнює нулю.*

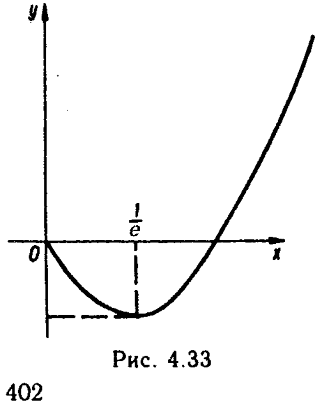


Рис. 4.33

Доведення не наводимо.

На практиці умову строгої монотонності у $\langle a, b\rangle$ можна використати в такій формі: *якщо $f'(x) > 0$ або $f'(x) < 0$ всюди, крім, можливо, в скінченному числі точок, в яких похідна перетворюється на нуль, то в $\langle a, b\rangle$ вона зростає або спадає.*

Наприклад, для функції $y = x^3$ похідна $y' = 3x^2$ перетворюється на нуль при $x = 0$. Проте функція всюди від $-\infty$ до $+\infty$ є зростаючою.

Таким чином, у проміжках строгої монотонності можуть бути окремі точки, в яких $f'(x) = 0$. Ці точки називаються **стаціонарними.**

27.3. Визначення проміжків монотонності функції

Щоб знайти проміжки монотонності функції, потрібно:

1) *знайти область визначення функції;*

2) *знайти похідну даної функції;*

3) *знайти стаціонарні точки з рівняння* $f'(x) = 0$;

4) *поділити стаціонарними точками область визначення функції на проміжки;*

5) *в кожному із здобутих проміжків визначити знак похідної.*

Приклад. Знайти проміжки монотонності функції $y = x\ln|x|$.

Розв'язання. 1) Область визначення $(0; +\infty)$. Знайдемо

$$\lim_{x\to+0} x\ln|x| = \lim_{x\to+0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0,$$

тобто при $x \to +0$, $y \to 0$;

2) $y' = \ln|x| + 1$;

3) $\ln|x| + 1 = 0$; $x = \frac{1}{e}$; $y\Big|_{x=\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$, тобто стаціонарна точка має координати $\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)$;

4) область визначення функції поділяється стаціонарною точкою на два проміжки: $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ і $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$;

5) дослідимо знак похідної на кожному проміжку (рис. 4.33):

а) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, $y' < 0$ — функція спадає;

б) $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$, $y' > 0$ — функція зростає.

§ 28. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ І БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. НЕОБХІДНІ УМОВИ ТА ЇХНЯ РОЛЬ

Функція $y = f(x)$ має локальний внутрішній максимум або мінімум у точці $x = x_0$, якщо виконуються дві умови:

1) $f(x)$ визначена в точці x_0 і її достатньо малому δ-околі:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; \tag{28.1}$$

2) всі значення функції з δ-околу менші або більші, ніж її значення в точці x_0:

$$f(x) < f(x_0) \text{ або } f(x) > f(x_0), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \qquad (28.2)$$

Функція $y = f(x)$ має локальний межовий максимум (мінімум) у межовій точці $x = x_0$ області визначення функції, якщо виконано умови (28.2) для одностороннього δ-околу точки $x = x_0$:

$$x_0 - \delta < x \text{ або } x_0 - \delta > x.$$

Введемо позначення

$$x - x_0 = \Delta x, \qquad (28.3)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \Delta y. \qquad (28.4)$$

У позначеннях (28.3) і (28.4) функція $y = f(x)$ має локальний внутрішній максимум або мінімум у точці $x = x_0$, якщо можна знайти мале додатне число δ таке, що для

$$0 < |\Delta x| < \delta \qquad (28.5)$$

виконується нерівність

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y < 0 \text{ або } \Delta y > 0. \qquad (28.6)$$

Таким чином, функція $y = f(x)$ має локальний внутрішній максимум або мінімум, якщо при будь-якому знаку приросту Δx приріст Δy від'ємний або додатний.

Означення межового екстремуму аналогічне, але при цьому приріст аргументу має лише один знак.

Наведені означення цілком переносяться на функцію із скінченним числом незалежних змінних.

Нехай дано функцію n змінних

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Позначимо через X точку n-вимірного простору:

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

тоді функцію можна записати у вигляді

$$y = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

У цих позначеннях означення локального або межового екстремуму в точці $X = X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ для функції n змінних аналогічне означенню екстремумів функції однієї змінної, проте окіл точки X_0 буде n-вимірним.

Так, співвідношення (28.2)—(28.4) можна записати у вигляді

$$f(X) < f(X_0) \ \ (f(X) > f(X_0)), \ \ X \in (X_0 - \delta, \ X_0 + \delta),$$

$$X(x_1, x_2, ..., x_n) - X(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) = \Delta X(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n),$$

де

$$x_1 - x_{10} = \Delta x_1, \quad x_2 - x_{20} = \Delta x_2, \ldots, x_n - x_{n0} = \Delta x_n,$$

$$\Delta y = f(X + \Delta X) - f(X) = f(x_{10} + \Delta x_1, \ldots, x_{n0} + \Delta x_n) -$$

$$- f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}).$$

Умови (28.5) і (28.6) набирають вигляду

$$0 < |\Delta x| < \delta, \; 0 < \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2} < \delta,$$

$$f(x_{10} + \Delta x_1, \ldots, x_{n0} + \Delta x_n) - f(x_{10}, \ldots, x_{n0}) = \Delta y < 0,$$

або

$$f(x_{10} + \Delta x_1, \ldots, x_{n0} + \Delta x_n) - f(x_{10}, \ldots, x_{n0}) = \Delta y > 0.$$

Нехай функція однієї або багатьох змінних $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена в замкненій обмеженій області D. Припустимо, що функція в цій області має кілька локальних (внутрішніх, межових) максимумів і мінімумів. Серед максимумів може бути найбільший, а серед мінімумів — найменший. Останні називають **абсолютними (тотальними) екстремумами** (максимумами і мінімумами). Всі інші екстремуми іноді називають **відносними.**

Якщо функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неперервна в області D, то в цій області існує найбільше і найменше значення функції. Ці значення є абсолютними максимумом і мінімумом функції в області D. Отже, для визначення найбільшого і найменшого значень функції, неперервної в області D, слід знайти всі локальні екстремуми функції всередині області, а також на межі і порівняти їх. Найбільший з максимумів або мінімумів — це найбільше або найменше значення функції в області.

28.1. Необхідні умови екстремуму функції

Для функції однієї і багатьох змінних є кілька формулювань необхідних умов локальних внутрішніх максимумів або мінімумів.

1. Якщо функція $y = f(X)$ має частинні похідні в точці $X = X_0$ і має в цій точці максимум або мінімум, то всі ці похідні в цій точці дорівнюють нулю:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{X=X_0} = 0; \; \left.\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_{X=X_0} = 0; \ldots \left.\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|_{X=X_0} = 0. \quad (28.7)$$

Для функції однієї змінної частинна і повна похідні рівні між собою.

2. Повний диференціал функції n змінних

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n. \quad (28.8)$$

З рівностей (28.7) і (28.8) випливає, що коли функція $y = f(X)$ в точці $X = X_0$ має повний диференціал і максимум або мінімум в цій точці, то повний диференціал в цій точці дорівнює нулю:

$$dy\Big|_{X=X_0} = 0.$$

3. Часто екстремуми існують в точках, в яких частинні похідні (28.7) або повний диференціал (28.8) не існують.

Тоді формулювання необхідної умови екстремуму таке:

якщо в деякій точці $X = X_0$ функція $y = f(X)$ має екстремум, то в цій точці повний диференціал функції або дорівнює нулю, або не існує.

Точки, в яких повний диференціал або існує і дорівнює нулю, або не існує, називаються **критичними.** Точки, в яких повний диференціал існує і дорівнює нулю, називаються **стаціонарними.** Для визначення стаціонарних точок потрібно розв'язати рівняння

$$dy = 0, \tag{28.9}$$

а для визначення критичних точок потрібно також знайти умови, за яких dy не існує. Серед стаціонарних точок слід шукати точки екстремуму диференційовних функцій, а серед критичних — ще й недиференційовних.

Наведемо *доведення необхідних умов*. Розглянемо спочатку функцію однієї змінної $y = f(x)$. Нехай в точці $x = x_0$ функція має екстремум і $f'(x_0)$ існує. Доведемо, що $f'(x_0) = 0$. Припустимо супротивне, що $f'(x_0) \neq 0$. Тоді відповідно до леми з § 24, в δ-околі точки є значення функції $f(x) > f(x_0)$ і $f(x) < f(x_0)$, що суперечить означенню екстремуму в точці x_0. Нехай тепер задана функція n змінних $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має екстремум у точці $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$. При цьому частинні похідні $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial y}{\partial x_n}$ за всіма змінними функції в точці M_0 існують. Розглянемо функцію $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в околі точки M_0 при даних значеннях аргументу $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, ..., x_{i-1} = x_{i-10}; x_i \neq x_{i0}, x_{i+1} = x_{i+10}, ..., x_n = x_{n0}$ як функцію одного аргументу x_i. Ця функція $f(x_{i0}, ..., x_{i-10}, x_i, x_{i+10}, ..., x_{n0})$ визначена в околі точки M_0 і має в ній екстремум. Отже,

$$\frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

28.2. Роль необхідних умов

При розв'язанні фізичних задач звичайно відомо, що функція має екстремум, а задача зводиться до відшукання стаціонарних або критичних точок з рівняння (28.9). Якщо з цього рівняння знаходимо лише одну точку, то це й є точка екстремуму.

Приклад. При плаванні судна витрати на його утримання протягом доби складаються з двох частин: сталої, що дорівнює a, і змінної, пропорційної v^3, де v — швидкість. З якою швидкістю судно пройде будь-яку відстань з найменшими витратами?

Розв'язання. Позначимо добові витрати через Q, тоді

$$Q = a + bv^3,$$

де b — коефіцієнт пропорційності.

Витрати на одиницю шляху становлять

$$y = \frac{Q}{v} = \frac{a}{v} + bv^2.$$

Витрати на одиницю шляху мають бути найменшими. Для цього потрібно дослідити функцію

$$y = \frac{a}{v} + bv^2$$

на мінімум. Знаходимо

$$\frac{dy}{dv} = -\frac{a}{v^2} + 2bv = 0,$$

звідки

$$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}.$$

При цій швидкості руху витрати будуть найменшими.

§ 29. ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Достатні умови локальних внутрішніх екстремумів розрізняють для диференційовних і недиференційовних функцій.

1. Якщо існує $f''(x_0) \neq 0$ і $f''(x)$ неперервна в околі точки x_0, то $f(x)$ в стаціонарній точці $x = x_0$ має максимум при

$$f'(x_0) = 0 \text{ і } f''(x_0) < 0$$

і мінімум при

$$f'(x_0) = 0 \text{ і } f''(x_0) > 0.$$

Ці умови можна записати за допомогою диференціалів другого і першого порядків.

Якщо $d^2y(x_0) \neq 0$ і $f''(x)$ *неперервна в околі точки* x_0, *то* $y = f(x)$ *в точці* $x = x_0$ має максимум при

$$dy(x_0) = 0 \text{ і } d^2y(x_0) < 0$$

і мінімум при

$$dy(x_0) = 0 \text{ і } d^2y(x_0) > 0.$$

Цю умову називають **другою достатньою умовою екстремуму функції однієї змінної.**

Сформулюємо більш загальні умови.

Якщо існує неперервна в околі точки x_0 похідна $f^{(n)}(x)$, причому $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, а

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

то $f(x_0)$ має в стаціонарній точці $x = x_0$ максимум при n парному і $f^{(n)}(x_0) < 0$ і мінімум при n парному і $f^{(n)}(x_0) > 0$.

При n непарному функція в точці $x = x_0$ не має ні максимуму, ні мінімуму.

Ця умова називається **третьою достатньою умовою існування екстремуму.**

Зауваження. Друга і третя достатні умови справджуються без вимог неперервності $f''(x)$ і $f^{(n)}(x)$ в околі стаціонарної точки.

2. *Якщо в околі критичної точки x_0 існує перша похідна функції $y = f(x)$ і при переході критичної точки зліва направо знак першої похідної змінюється з плюса на мінус або з мінуса на плюс, то критична точка є точкою максимуму або мінімуму.* Цю умову називають **першою достатньою умовою екстремуму.**

3. Перша достатня умова екстремуму справджується і для недиференційовних функцій. *Якщо функція $f(x)$ у критичній точці не диференційовна, але має праві і ліві похідні, які змінюють знак при переході критичної точки, то в критичній точці існує локальний екстремум.*

Розглянемо другу і третю достатні умови. Нехай

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0;\ f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{29.1}$$

Використовуючи розвинення Тейлора приросту функції (див. (26.18)), запишемо приріст функції $f(x)$ в околі точки x_0:

$$\Delta y = f'(x_0)dx + \frac{f''(x_0)}{2!}(dx)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(dx)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(dx)^n, \tag{29.2}$$

де $x - x_0 = dx$; $f(x) - f(x_0) = \Delta y$.

Із співвідношень (29.1) і (29.2) випливає, що

$$\Delta y = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(dx)^n.$$

Оскільки $f^{(n)}(x)$ неперервна в околі точки x_0, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(x_0), \text{ тобто } f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(x_0) + \beta(x_0, \Delta x),$$

де

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta(x_0, \Delta x) = 0.$$

Тоді

$$\Delta y = \frac{f^{(n)}(x_0) + \beta(x_0, \Delta x)}{n!}(dx)^n. \tag{29.3}$$

Звідси випливає, що знак Δy не залежить від знака dx тільки при $n = 2k$, тобто при n парному. Тому за означенням локального максимуму і мінімуму при $n = 2k + 1$ (непарному) функція в стаціонарній точці не має локального мінімуму або максимуму.

Якщо $n = 2k$, то з рівності (29.3) випливає, що знак Δy визначається лише знаком $f^{(2k)}(x_0)$. Тому при $f^{(2k)}(x_0) < 0$ в стаціонарній точці маємо максимум, а при $f^{(2k)}(x_0) > 0$ — мінімум.

При $k = 1$ маємо другу достатню умову.

Наведемо доведення першої достатньої умови.

Якщо в формулі (29.2) знехтувати всіма диференціалами, крім першого, то

$$\Delta y = dy(\xi) = dy(x_0 + \theta dx).$$

Згідно з умовою теореми, похідна в околі критичної точки існує, а тому

$$dy = f'(\xi)dx, \quad \Delta y = f'(\xi)dx.$$

Оскільки нас цікавить лише знак приросту Δy, то замість $f'(\xi)$ виберемо $f'(x)$ для x, які належать δ-околу критичної точки, де $f'(x)$ за умовою існує, тобто

$$\Delta y = f'(x)dx = f'(x)\,\Delta x = f'(x)(x - x_0).$$

Якщо $\Delta x > 0$ і $f'(x) > 0$, то $\Delta y > 0$;
якщо $\Delta x < 0$ і $f'(x) < 0$, то $\Delta y > 0$.
Згідно з означенням, в точці x_0 маємо мінімум.
Якщо $\Delta x > 0$ і $f'(x) < 0$, то $\Delta y < 0$;
якщо $\Delta x < 0$ і $f'(x) > 0$, то $\Delta y < 0$. (29.4)
Згідно з означенням, в точці x_0 маємо максимум.

Зауваження. Нехай $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$. Доведемо, що в точці x_0 маємо мінімум:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)}{\Delta x} > 0.$$

Тоді $\frac{f'(x)}{\Delta x} > 0$ в достатньо малому околі точки x_0. Отже, $f'(x) > 0$ для $\Delta x > 0$ і $f'(x) < 0$ для $\Delta x < 0$, а це збігається з (29.4).

§ 30. ОПУКЛІСТЬ І УГНУТІСТЬ КРИВОЇ

Крива, яка відповідає функції $y = f(x)$, називається **опуклою** або **угнутою** на (a, b) або (c, d), якщо всі її точки лежать нижче або вище будь-якої її дотичної на цьому інтервалі (рис. 4.34).

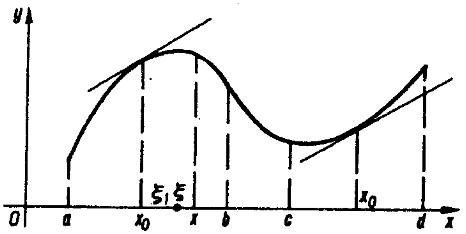


Рис. 4.34

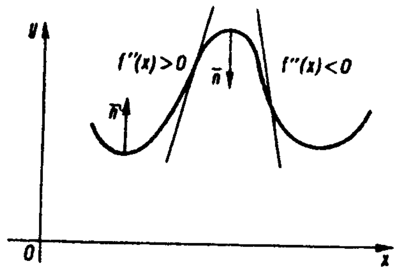


Рис. 4.35

У даному означенні крива має задовольняти такі умови: в кожній точці кривої існує дотична, тобто крива є гладкою, а функція в інтервалах (a, b) і (c, d) має бути диференційовною.

Аналітично означення опуклості або угнутості можна записати у вигляді

$$y_{\text{дот}} > y_{\text{кр}} \text{ — крива опукла;}$$

$$y_{\text{дот}} < y_{\text{кр}} \text{ — крива угнута;}$$

Рівняння дотичної до кривої в точці x_0:

$$y_{\text{дот}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Якщо крива опукла на (a, b), то для всіх $x \in (a, b)$

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{дот}} < 0 \text{ або } [f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)] < 0.$$

Якщо крива угнута на (a, b), то для всіх $x \in (a, b)$

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{дот}} > 0 \text{ або } [f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)] > 0.$$

30.1. Умова опуклості або угнутості кривої

Розглянемо сегмент $[x_0, x] \subset (a, b)$ і застосуємо до функції $f(x)$ теорему Лагранжа. Дістанемо

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \; x_0 < \xi < x,$$

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{дот}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0).$$

Розглянемо сегмент $[x_0, \xi]$. Введемо функцію $\varphi(x) = f'(x)$. Нехай функція $\varphi(x)$ задовольняє такі умови:

1) $\varphi(x)$ неперервна в сегменті $[x_0, \xi]$;
2) $\varphi(x)$ має похідну в інтервалі (x_0, ξ).

Тепер до функції $\varphi(x)$ на $[x_0, \xi]$ можна застосувати теорему Лагранжа:

$$\varphi(\xi) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi_1)(\xi - x_0), \quad x_0 < \xi_1 < \xi,$$

де

$$\varphi(\xi) = f'(\xi),\ \varphi(x_0) = f'(x_0),\ \varphi'(\xi_1) = f''(\xi_1),$$

або

$$f'(\xi) - f'(x_0) = f''(\xi_1)(\xi - x_0)$$

і

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{дот}} = f''(\xi_1)(x - x_0)(\xi - x_0).$$

Добуток $(x - x_0)(\xi - x_0) > 0$ при $x < x_0$ і при $x > x_0$. Отже, знак різниці $y_{\text{кр}} - y_{\text{дот}}$ залежить лише від знака $f''(\xi_1)$, де $\xi_1 \in (a, b)$. Якщо в інтервалі (a, b) $f''(x) < 0$, то $y_{\text{кр}} - y_{\text{дот}} < 0$ і за означенням крива $f(x)$ опукла на (a, b), а якщо $f''(x) > 0$, то $y_{\text{кр}} - y_{\text{дот}} > 0$ і за означенням крива угнута на (a, b).

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема. *Якщо в (a, b) функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною, то при $f''(x) < 0$ або $f''(x) > 0$, $x \in (a, b)$ функція, відповідно, опукла або угнута на (a, b).*

Іноді замість термінів «опуклість», «угнутість» вживають «опуклість вверх», «опуклість вниз».

30.2. Точки перегину кривої

Точки кривої, які відокремлюють її опуклу частину від угнутої, називають **точками перегину** (рис. 4.35). Оскільки ліворуч і праворуч від точки перегину величина другої похідної має різні знаки, то в точці перегину значення другої похідної або перетворюється на нуль, або її не існує.

Поняття точки перегину кривої щільно пов'язане з існуванням другої похідної функції $f(x)$, яка описує цю криву. Щоб ця похідна існувала, необхідне існування принаймні похідної $y' = f'(x)$. Існування першої похідної рівносильне існуванню дотичної до кривої в точці перегину. Із означення точки перегину як межі двох дуг, опуклих і угнутих, випливає, що дотична в точці перегину перетинає криву. Таким чином, точка перегину — це точка, в якій:

1) існує дотична, а отже, і похідна $f'(x)$;

2) ця дотична перетинає криву;

3) в околі точки перегину існує друга похідна $f''(x)$, яка при переході через точку перегину змінює знак. Як випливає з формули (22.16) (див. § 22)

$$K = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}},$$

в околі точки перегину кривизна кривої змінює знак;

4) значення другої похідної в самій точці перегину або дорівнює нулю, або не існує. Ці точки називаються **другими критичними точками** на відміну від критичних точок, в яких $df(x) = 0$.

Якщо хоч одна з перелічених умов не виконується, то точка не є точкою перегину.

30.3. Порядок визначення точок перегину

Щоб знайти точки перегину, потрібно:
1) знайти область визначення функції;
2) визначити другу похідну даної функції;
3) знайти другі критичні точки;
4) розбити область визначення даної функції на інтервали з межами, якими є другі критичні точки;
5) визначити знак $f''(x)$ в цих інтервалах. Якщо при переході другої критичної точки знак $f''(x)$ змінюється, то критична точка є точкою перегину.

Приклад. Знайти абсциси точок перегину кривої $y = \frac{1}{4}\sin 2x - \cos x$ у сегменті $[0, 2\pi]$.

Розв'язання. Знаходимо

$$y' = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x, \quad y'' = -\sin 2x + \cos x = \cos x(1 - 2\sin x);$$

$$\cos x(1 - 2\sin x) = 0,$$

звідси

$$\cos x = 0 \text{ у } [0; 2\pi]: \ x_1 = \frac{\pi}{2}, \ x_2 = \frac{3}{2}\pi;$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ у } [0; 2\pi]: \ x_3 = \frac{\pi}{6}, \ x_4 = \frac{5}{6}\pi;$$

$$\left(0, \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y'' > 0; \quad \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y'' < 0;$$

$$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi\right) \Rightarrow y'' > 0; \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow y'' < 0; \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow y'' > 0.$$

Таким чином, у сегменті $[0, 2\pi]$

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, \ x_2 = \frac{3}{2}\pi, \ x_3 = \frac{\pi}{6}, \ x_4 = \frac{5}{6}\pi$$

є абсцисами точок перегину.

§ 31. АСИМПТОТИ КРИВОЇ. ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Кривою з нескінченною гілкою називають графік функції, для якого виконана одна з умов:

1) область визначення функції не обмежена (наприклад, $y = \operatorname{th} x$;

2) область значень функції не обмежена (наприклад $y = \operatorname{tg} x$);

3) область визначення і область значень функції не обмежені (наприклад, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$).

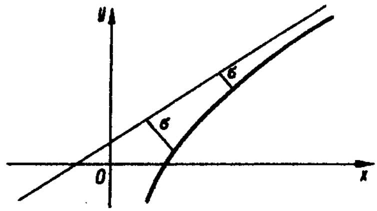


Рис. 4.36

Асимптотою кривої з нескінченною гілкою називається така пряма, для якої границя відстані σ від точок на кривій до прямої при зміні змінної дорівнює нулю (рис. 4.36):

$$\lim_{x \to \infty(c)} \sigma = 0. \tag{31.1}$$

Криві з нескінченною гілкою можуть мати три види асимптот: горизонтальні, вертикальні і похилі. Рівняння (31.1) можна розглядати як рівняння асимптоти.

31.1. Рівняння вертикальної асимптоти

Нехай функція $y = f(x)$ має обернену функцію $x = \varphi(y)$, тоді (рис. 4.37)

$$\sigma = d - \varphi(y),$$

$$\lim_{y \to \infty} \sigma = 0, \ \lim_{y \to \infty} [d - \varphi(y)] = 0, \ \lim_{y \to \infty} \varphi(y) = d,$$

$$\lim_{x \to d} f(x) = \infty. \tag{31.2}$$

Для існування вертикальної асимптоти необхідно і достатньо, щоб границя функції $y = f(x)$ при x, що прямує до скінченної границі, дорівнювала нескінченності.

Приклад. Знайти асимптоти кривої $y = \frac{1}{x-4}$.

Розв'язання. Рівняння вертикальної асимптоти: $x = 4$. Дійсно, $\lim_{x \to 4+0} y = +\infty$; $\lim_{x \to 4-0} y = -\infty$.

Крива, задана рівнянням $y = \frac{1}{x-4}$, є гіперболою.

31.2. Рівняння похилої асимптоти

Рівняння похилої асимптоти шукаємо у вигляді

$$y = kx + b. \tag{31.3}$$

Як випливає з рис. 4.38,

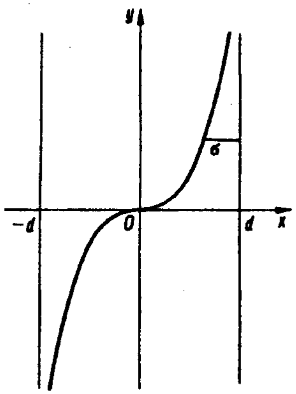


Рис. 4.37

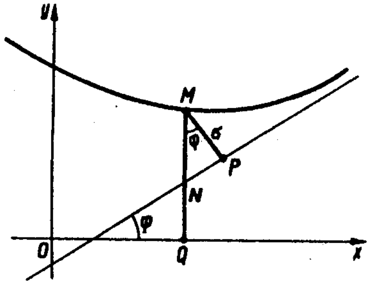


Рис. 4.38

$$\sigma = MP,\ MN = \frac{MP}{\cos\varphi},\ \lim_{x\to\infty}\sigma = \lim_{x\to\infty} MP = 0.$$

Якщо $\lim\limits_{x\to\infty} MP = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} MN = 0$, і навпаки. Проте $MN = QM - QN = f(x) - kf - b$, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}\sigma = 0$, якщо $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$. Визначимо k і b. Оскільки $x \to \infty$, то виконується рівність

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0,$$

звідки

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Знаючи k, з рівності $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$ знайдемо b:

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx].$$

Якщо k або b нескінченні, то похилих асимптот немає. Якщо $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Маємо горизонтальну асимптоту. У зв'язку з цим розрізняють не три, а два види асимптот: вертикальні (31.2) і невертикальні (31.3).

31.3. Побудова графіка функцій однієї змінної

Щоб побудувати графік функції однієї змінної, треба:

1) визначити область існування значень функції;

2) дослідити функцію на парність, непарність та періодичність, знайти точки, в яких крива перетинає осі координат;

3) знайти точки розриву функції;

4) знайти інтервали монотонності функції, точки екстремуму і значення функції в цих точках;

5) визначити інтервали опуклості і угнутості кривої і точки перегину;

6) знайти асимптоти кривої;

7) іноді необхідно додатково знайти значення функції в кількох точках;

8) побудувати графік функції.

Приклад. Дослідити функцію $y = 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Область визначення функції: $x \in (-\infty, 0)$ або $x \in (0, +\infty;)$; функція ні парна, ні непарна.

2) точки перетину з осями координат:

а) в точці $x = 0$ функція не існує, крива не перетинає вісь ординат;

б) $y = 0$; $1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$; $x^2 + 2x - 1 = 0$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$;

3) точка розриву: $x = 0$;

4) знаходимо

$$y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2(1-x)}{x^3}.$$

Отже, точка $x = 1$ стаціонарна, а точка $x = 0$ критична. Розбиваємо область визначення функції на інтервали

$$(-\infty, 0),\ y' < 0 \text{ — функція спадає;}$$

$$(0, 1),\ y' > 0 \text{ — функція зростає;}$$

$$(1, +\infty),\ y' < 0 \text{ — функція спадає.}$$

У точці $x = 1$ функція має максимум:

$$y'\big|_{x<1} > 0;\ y'\big|_{x>1} < 0;\ y\big|_{x=1} = 2;$$

5) маємо

$$y'' = \frac{-2x^3 - 3x^2(2 - 2x)}{x^6} = \frac{2(2x-3)}{x^4},$$

$$y'' = \frac{2(2x-3)}{x^4} = 0 \text{ при } x = \frac{3}{2};$$

$$y''\Big|_{x<\frac{3}{2}} < 0;\ y''\Big|_{x>\frac{3}{2}} > 0;\ y\Big|_{x=\frac{3}{2}} = 1 + \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = \frac{17}{9},$$

точка перегину $\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{9}\right)$;

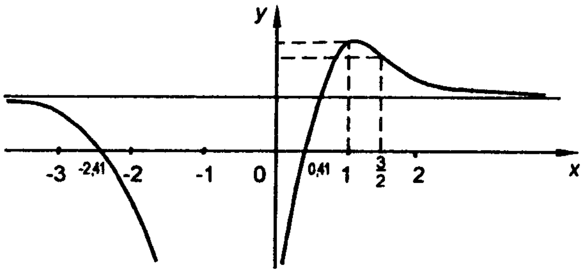


Рис. 4.39

6) задане рівняння функції записуємо у вигляді

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2}.$$

Вертикальна асимптота: $x = 0$.

Далі знаходимо

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3} = 0,\ b = \lim_{x \to \infty}(y - kx) = 1.$$

Горизонтальна асимптота: $y = 1$.

Точки перетину кривої з віссю Ox: $(-2{,}41;\ 0)$, $(0{,}41;\ 0)$;

7) графік функції зображено на рис. 4.39.

ВПРАВИ. **1.** Знайти інтервали зростання і спадання функції:

а) $y = \dfrac{2x^2}{1 - x^2}$, б) $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$,

в) $y = \sin x$, г) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Відповідь. а) функція спадає при $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0)$ і зростає при $x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$;

б) функція зростає при $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (3;\ \infty)$ і спадає при $x \in \left(\dfrac{1}{2}; 3\right)$;

в) функція зростає при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ і спадає при $x \in$ $\in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$;

г) функція спадає при $x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$ і зростає при $x \in (-1;\ +1)$.

2. Знайти екстремуми функції (використовуючи першу і другу похідні):

а) $y = e^x \sin x$; б) $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$;

в) $y = x \cdot e^{-x}$; г) $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Відповідь. а) min в точках $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; max в точках $x = -\frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

б) точок екстремуму немає;

в) max в точці $x = 1$, $y_{\max} = \frac{1}{e}$;

г) max в точці $x = -1$, $y_{\max} = 2$; min у точці $x = 1$, $y_{\min} = 2$.

3. Дослідити задану функцію на екстремум і побудувати графік:

а) $y = \frac{4 + x}{x^2}$, б) $y = (x+1)(x-2)^2$,

в) $y = 3x - x^3$, г) $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$,

д) $y = x \sin x$, е) $y = \frac{x}{e^x}$,

є) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$, ж) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t, \\ y = t^2. \end{cases}$

§ 32. ДОТИК ПЛОСКИХ КРИВИХ

Нехай дано дві криві: $y = f(x)$, $y = \psi(x)$. Дві криві мають n-й дотик у деякій фіксованій точці x_0, якщо

$$f(x_0) = \psi(x_0),\ f'(x_0) = \psi'(x_0),\ f''(x_0) = \psi''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = \psi^{(n)}(x_0),$$
$$f^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0).$$

Якщо $f(x_0) = \psi(x_0)$, а $f'(x_0) \neq \psi'(x_0)$, то говорять про **нульовий дотик** (рис. 4.40). Геометрично це означає, що криві перетинаються.

Якщо $f(x_0) = \psi(x_0)$, $f'(x_0) = \psi'(x_0)$, а $f''(x_0) \neq \psi''(x_0)$, то говорять про дотик першого порядку (рис. 4.41). Геометрично це

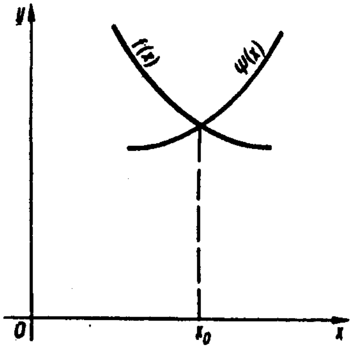


Рис. 4.40

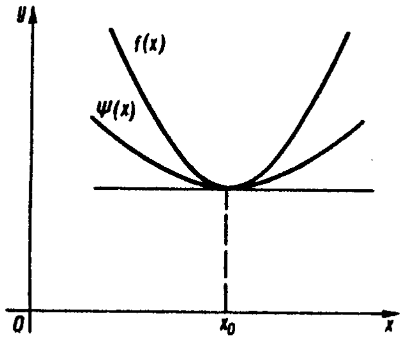


Рис. 4.41

означає, що криві мають не лише спільну точку, але і спільну дотичну в цій точці. Коло, яке має дотик другого порядку з даною кривою, називається **стичним колом**. Запишемо рівняння цього кола

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2,$$

де ξ, η, R — відповідно координати центра і радіус стичного кола. Невідомими в цьому рівнянні є ξ, η, R; їх можна визначити з таких умов, які відповідають дотику другого порядку цього кола і кривої в точці (x_0, y_0)

$$f(x_0)=\psi(x_0), \tag{32.1}$$

$$f'(x_0)=\psi'(x_0), \tag{32.2}$$

$$f''(x_0)=\psi''(x_0). \tag{32.3}$$

Візьмемо за $f(x)=y$ задану криву, а за $\psi(x, y)$ стичне коло

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-R^2=0=\psi(x, y). \tag{32.4}$$

Тоді умова (32.1) означає, що коло проходить через точку $M(x_0, y_0)$:

$$(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2=R^2.$$

Щоб записати умову (32.2), продиференціюємо рівняння (32.4) за x і замість x, y візьмемо x_0, y_0. Дістанемо

$$(x_0-\xi)+(y_0-\eta)f'(x_0)=0, \tag{32.5}$$

або

$$(x_0-\xi)+(y_0-\eta)y'_0=0, \text{ де } y'_0=f'(x_0).$$

Диференціюючи рівняння (32.4) ще раз і використовуючи умову (32.3), знаходимо

$$1+(y'_0)^2+(y_0-\eta)y''_0=0. \tag{32.6}$$

Із систем рівнянь (32.5) і (32.6) знаходимо координати центра стичного кола, поклавши $y''_0 \neq 0$:

$$1+(y'_0)^2+y_0y''_0=y''_0\eta; \ \eta=y_0+\frac{1+(y'_0)^2}{y''_0}.$$

Тепер із рівняння (32.5) маємо

$$(x_0-\xi)+(y_0-\eta)y'_0=0; \ \xi=x_0-\frac{1+(y'_0)^2}{y''_0}y'_0.$$

Таким чином,

$$\xi=x_0-\frac{1+(y'_0)^2}{y''_0}y'_0, \ \eta=y_0+\frac{1+(y'_0)^2}{y''_0}. \tag{32.7}$$

Якщо точка дотику змінює своє положення на кривій, тобто координати точки $M(x_0, y_0)$ не фіксовані, то дістаємо нескінченну множину стичних кіл. Позначимо координати змінної точки дотику через x і y. Тоді координати центра стичного кола, згідно з формулами (32.7), набирають вигляду

$$\xi = x - \frac{1+(y')^2}{y''}y', \quad \eta = y + \frac{1+(y')^2}{y''}. \tag{32.8}$$

§ 33. КОЛО І ЦЕНТР КРИВИЗНИ ПЛОСКИХ КРИВИХ. ЕВОЛЮТА І ЕВОЛЬВЕНТА

Колом кривизни називається коло, дотичне до кривої в даній точці, яке має радіус, що дорівнює радіусу кривизни кривої в точці дотику, і центр, розміщений на головній нормалі в напрямі угнутості кривої.

Центр цього кола називається **центром кривизни.**

Лінія центрів кривизни називається **еволютою,** а сама крива — **евольвентою.**

Знайдемо координати центра кривизни. Позначимо координати центра кривизни через ξ і η, а координати точки дотику кола з кривою — через x, y. Тоді при $y'' > 0$ маємо (рис. 4.42, *а*)

$$\begin{cases} \xi = x - \rho\sin\alpha, \\ \eta = y + \rho\cos\alpha. \end{cases} \tag{33.1}$$

При $y'' < 0$ маємо (рис. 4.42, *б*)

$$\begin{cases} \xi = x + \rho\sin\alpha, \\ \eta = y - \rho\cos\alpha. \end{cases} \tag{33.2}$$

але

$$\sin\alpha = \frac{y'}{\pm\sqrt{1+(y')^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+(y')^2}}, \quad \rho = \frac{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}{|y''|}.$$

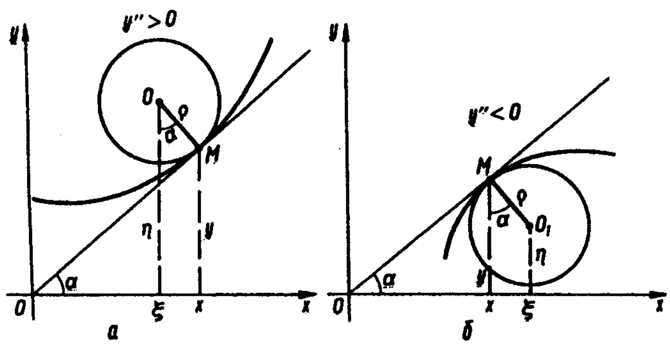


Рис. 4.42

При $y'' > 0$

$$\rho = \frac{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}{y''}.$$

При $y'' < 0$

$$\rho = -\frac{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}{y''}.$$

Підставляючи ці значення в (33.1) і (33.2), дістаємо формули для координат центра кривизни:

$$\xi = x - \frac{1+(y')^2}{y''}y'; \ \eta = y + \frac{1+(y')^2}{y''}. \qquad (33.3)$$

Порівнюючи ці формули (32.8), дійдемо висновку, що центр кривизни і центр стичного кола збігаються. Отже, *коло кривизни має з кривою дотик другого порядку.*

Рівняння кола кривизни визначається таким чином. За формулами (33.3) визначаємо координати центра кривизни. Радіус кривизни знаходимо за формулою

$$\rho = -\frac{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}{|y''|}.$$

Отримані значення ξ, η, ρ підставляємо в рівняння кола, змінні координати точок на якому позначимо через X і Y:

$$(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 = \rho^2.$$

Це й є рівняння кола кривизни. Зауважимо, що при визначенні центра кривизни точка дотику кола кривизни $M(x, y)$ є фіксованою.

Якщо y і x вважати у формулі (33.3) параметрами, то дістанемо параметричне рівняння лінії центрів кривизни, тобто еволюту. Таким чином, рівняння (33.2) або (33.3) є параметричними рівняннями еволюти.

Якщо крива задана в параметричній формі: $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$, то координати центра кривизни знайдемо таким чином. За формулами (7.1) і (12.2) знайдемо відповідно y'_x *і* y''_{xx}, потім підставимо їх у формулу (33.3). Дістанемо

$$\xi = x(t) - \frac{\left[(\dot{x}_t)^2 + (\dot{y}_t)^2\right]\dot{y}_t}{\ddot{y}_t\dot{x}_t - \ddot{x}_t\dot{y}_t}, \ \eta = y(t) + \frac{\left[(\dot{x}_t)^2 + (\dot{y}_t)^2\right]\dot{x}_t}{\ddot{y}_t\dot{x}_t - \ddot{x}_t\dot{y}_t}.$$

§ 34. ВИЗНАЧЕНІ, НЕВИЗНАЧЕНІ І НАПІВВИЗНАЧЕНІ КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

Нагадаємо, що квадратична форма скінченного числа змінних записується у вигляді

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{X}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j , \tag{34.1}$$

де матриця

$$\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n} \tag{34.2}$$

є симетричною.

Якщо за базис взяти ортогональні вектори $\vec{l_1}, \vec{l_2}, ..., \vec{l_n}$ матриці (34.2), то квадратична форма має канонічний вигляд

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{X}\right) = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + ... + \lambda_n \eta_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i^2 , \tag{34.3}$$

а матриця квадратичної форми записується таким чином:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Базис $\vec{l_1}, \vec{l_2}, ..., \vec{l_n}$, в якому квадратична форма має вигляд (34.3), і називається **канонічним.** Власні числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ визначаються з рівняння (див. рівняння (4.62)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{34.4}$$

34.1. Знаковизначені квадратичні форми

Квадратична форма називається **додатно** або **від'ємно визначеною,** якщо при будь-яких відмінних від нуля значеннях x_i, x_j

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{X}\right) > 0 \text{ або } \varphi\left(\vec{X}, \vec{X}\right) < 0 . \tag{34.5}$$

Якщо ж для всіх значень x_i, x_j, в тому числі і ненульових, нерівності (34.5) є нестрогими, тобто

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{X}\right) \geq 0 \text{ або } \varphi\left(\vec{X}, \vec{X}\right) \leq 0 , \tag{34.6}$$

то квадратична форма називається відповідно **невід'ємно** або **недодатно визначеною формою** або **напіввизначеною.** Визначені і напіввизначені квадратичні форми називаються **знаковизначеними.** Квадратичні форми, для яких не виконана жодна з умов (34.5) або (34.6), називаються **невизначеними квадратичними формами.** Іншими словами, квадратична форма $\varphi\left(\vec{X}, \vec{X}\right)$ називається невизначеною, якщо при відмінних від нуля значеннях x_i, x_j квадратична форма набуває як додатних, так і від'ємних значень.

Наприклад, квадратична форма

$$\varphi(\vec{X}, \vec{X}) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

є додатно визначеною, оскільки при $x \neq 0$ і $y \neq 0$

$$\varphi(\vec{X}, \vec{X}) > 0;$$

квадратична форма

$$\varphi(\vec{X}, \vec{X}) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

є невизначеною, оскільки при відмінних від нуля x, y знак правої частини може бути як додатним, так і від'ємним.

Оскільки кожну квадратичну форму можна записати в канонічному вигляді (34.3), то квадратична форма буде додатно визначеною, якщо всі власні числа матриці, яка задає квадратичну форму, будуть додатними, і від'ємно визначеною, якщо всі власні числа від'ємні.

Квадратична форма буде напіввизначеною, невід'ємною, недодатною, якщо власні числа відповідно невід'ємні (більші або дорівнюють нулю) або недодатні (менші або дорівнюють нулю). Зрештою, квадратична форма буде невизначеною, якщо серед власних чисел є додатні, від'ємні і нулі. Втім нулями може бути частина власних чисел і в напіввизначених квадратичних формах. Таким чином, питання про вигляд квадратичної форми зводиться до визначення знака коренів рівняння (34.4). Є кілька спеціальних ознак визначеності квадратичних форм. Наведемо тут лише **ознаку Сільвестра** [1].

Для того щоб квадратична форма (34.1) *із симетричною матрицею* (34.2) *була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб головні мінори матриці* (34.2) *були додатними, тобто*

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Доведемо справедливість цього твердження для квадратичної форми двох змінних:

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Для цього доведемо, що додатно визначеній формі

$$\varphi(x, y) = \lambda_1\eta_1{}^2 + \lambda_2\eta_2{}^2$$

відповідають власні числа $\lambda_1 > 0$ і $\lambda_2 > 0$, які є коренями рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

---

[1] Джем Джозеф Сільвестр (1814—1897) — англійський математик.

або

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = 0,$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо $\lambda_1 > 0$ і $\lambda_2 > 0$, то

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} > 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \tag{34.7}$$

або

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad a_{11}a_{22} > a_{12}^2 . \tag{34.8}$$

Звідси випливає, що a_{11} і a_{22} мають однакові знаки, тобто

$$a_{11} > 0, \; a_{22} > 0 \text{ або } a_{11} < 0, \; a_{22} < 0 .$$

З нерівності (34.7) знаходимо

$$a_{11} + a_{22} > 0,$$

а тому нерівності $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ не виконуються. Отже,

$$a_{11} > 0, \tag{34.9}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \tag{34.10}$$

Якщо виконуються умови (34.9) і (34.10), то виконується умова (34.8), з якої випливає, що λ_1 і λ_2 мають однакові знаки. Крім того, з умови (34.10) випливає також, що a_{11} і a_{22} мають однакові знаки. Однак оскільки $a_{11} > 0$, то і $a_{22} > 0$. Таким чином, виконується умова (34.7), звідки можливий лише випадок, коли

$$\lambda_1 > 0 \text{ і } \lambda_2 > 0.$$

З ознаки Сільвестра випливає **критерій від'ємно визначеної форми.**

Якщо $\varphi(\vec{X}, \vec{X}) > 0$, то $-\varphi(\vec{X}, \vec{X}) < 0$ і навпаки. Якщо $\varphi(\vec{X}, \vec{X}) < 0$, то $-\varphi(\vec{X}, \vec{X}) > 0$. Тоді згідно з критерієм Сільвестра для $-\varphi(\vec{X}, \vec{X})$ маємо

$$-a_{11} > 0, \; \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

або

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Таким чином, *якщо* $a_{11} < 0$ *і знаки головних мінорів квадратичної форми чергуються, то квадратична форма від'ємно визначена.*

ВПРАВА. При яких значеннях a додатно визначені такі квадратничні форми:
а) $x^2 + 2xy + ay^2$; б) $ax^2 + 2xy + 3y^2$; в) $ax^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$.

Відповідь. а) $a > 1$; б) $a > \frac{1}{3}$; в) $a \in \{ \varnothing \}$.

§ 35. ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Для диференційовних функцій багатьох змінних

$$u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = f(X)$$

справедлива формула

$$\Delta u = du + \frac{1}{2!} d^2 u + \frac{1}{3!} d^3 u + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!} d^n u + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} u\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right). \tag{35.1}$$

Тут перший диференціал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i \tag{35.2}$$

є лінійною формою, а другий диференціал

$$d^2 u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{35.3}$$

— квадратичною формою. Дійсно, позначимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}; \; dx_i = h_i, \; dx_j = k_j.$$

Тоді, по-перше,

$$a_{ij} = a_{ji} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right),$$

тобто матриця $[a]_{i,j=1}^{n}$ симетрична, і, по-друге,

$$d^2 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i k_j.$$

Припустимо, що є стаціонарна точка

$$X_0\left(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}\right).$$

У цій точці $du = 0$. Визначимо знак Δu у розвиненні (35.1). Припустимо, що цей знак визначається знаком d^2u. Тоді в рівності (35.1) всіма диференціалами більш високого порядку мализни, ніж другий, можна знехтувати. Отже, в стаціонарній точці

$$\Delta u \approx \frac{1}{2\,!} d^2u\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right), \tag{35.4}$$

де $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ є точкою з δ-околу стаціонарної точки. Запишемо праву частину (35.4) у формі (35.3):

$$\Delta u \approx \frac{1}{2\,!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u\left(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}\right)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j,$$

де

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} a_{ij} = 0.$$

Нехтуючи малими третього порядку $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$, дістанемо

$$\Delta u \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u\left(X_0\right)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Позначаючи $dx_i = h_i$, $dx_j = k_j$, знаходимо

$$\Delta u \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u\left(X_0\right)}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j. \tag{35.5}$$

Звідси випливає, *що функція має мінімум у стаціонарній точці, якщо форма* (35.5) *додатно визначена, і максимум — якщо від'ємно визначена; не має в критичній точці ні максимуму, ні мінімуму, якщо форма не визначена*. Якщо ж форма напіввизначена, то питання про існування максимуму або мінімуму в стаціонарній точці диференціалом другого порядку не визначається (не можна визначити знак Δu). При цьому необхідно враховувати диференціали більш високого порядку.

Запишемо достатні умови екстремуму для функції двох змінних $u = f(x, y)$ в стаціонарній точці (x_0, y_0). Маємо

$$\Delta u \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x \partial y} hk + \right.$$

$$+\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2}k^2\Bigg] = \frac{1}{2}\left(a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2\right),$$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \ a_{12} = \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \ a_{22} = \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2}. \qquad (35.6)$$

Згідно з критерієм Сільвестра в точці (x_0, y_0) маємо максимум, якщо квадратична форма (35.6) від'ємно визначена, тобто

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0.$$

Згідно з критерієм Сільвестра в точці (x_0, y_0) маємо мінімум, якщо квадратична форма додатно визначена, тобто

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0. \qquad (35.7)$$

Якщо

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0, \qquad (35.8)$$

то квадратична форма (35.6) не визначена, а тому в стаціонарній точці немає ні максимуму, ні мінімуму. Для функції однієї змінної $u = f(x)$

$$\Delta u \approx \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x^2}h^2.$$

Якщо

$$\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x^2} \gtrless 0, \ \Delta u \lesseqgtr 0,$$

тобто маємо **другу достатню умову екстремуму функції однієї змінної.** Виведені вище достатні умови екстремуму функції кількох змінних називаються **другими достатніми умовами.**

Приклад. Знайти екстремум функції $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$.

Розв'язання. Система рівнянь $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - 3y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - 3x) \end{cases}$ має два розв'язки:

$x_1 = y_1 = 0$ і $x_2 = y_2 = 3$. Знайдемо значення частинних похідних у точках P_1 (0, 0) і P_2 (3, 3):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(3,3)}{\partial x^2} = 18,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(3,3)}{\partial y^2} = 18, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -9.$$

Для $x = y = 0$ виконується умова (35.8), тобто в точці (0, 0) немає екстремуму, а для $x_2 = y_2 = 3$ виконується умова (35.7) і, крім того, $\dfrac{\partial^2 f(3,3)}{\partial x^2} > 0$, тобто в точці (3, 3) маємо мінімум: $f_{\min} = f(3, 3) = -26$.

ВПРАВИ. Дослідити на екстремум функції:

а) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$; б) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;

в) $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$, де $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

§ 36. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

Нехай задано функцію $u = f(x, y)$, визначену в області D (рис. 4.43, *а*), і нехай в цій області задано деяку лінію L, рівняння якої $\varphi(x, y) = 0$ (рис. 4.43, *б*). Вивчаючи екстремум функції $u = f(x, y)$ в області D, можна ставити дві задачі: визначити екстремум функції $u = f(x, y)$ в області D і екстремум функції $u(x, y)$ на лінії L, яка належить цій області. У першому випадку говорять про **безумовний екстремум,** а в другому — про **умовний.**

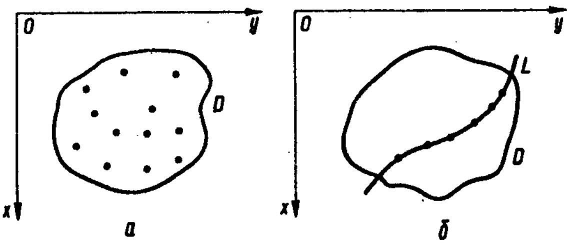


Рис. 4.43

Остання назва пов'язана з тим, що на змінні x і y накладено додаткову умову: $\varphi(x, y) = 0$. Якщо це рівняння розв'язане, наприклад щодо $y = \psi(x)$, то, підставляючи $y = \psi(x)$ у вираз для $y = f(x, y)$, дістанемо складну функцію однієї змінної $u = f(x, \psi(x))$.

Рівняння $\varphi(x, y) = 0$, яке задає лінію L, називається рівнянням зв'язку.

Нехай задана функція трьох змінних $u = f(x, y, z)$ визначена в деякому об'ємі V, і нехай в об'ємі V є деяка поверхня, задана рівнянням $\varphi(x, y, z) = 0$, або лінія L, задана системою рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Тоді можна сформулювати три задачі на екстремум функції $u = f(x, y, z)$: одну — на безумовний (визначення екстремуму функції в об'ємі V) і дві — на умовний (визначення екстремуму тієї самої функції на поверхні і на лінії).

Нехай тепер дано функцію n змінних $u = f(X)$ в деякій області D і нехай в цій області задано деяку m-вимірну лінію або поверхню L.

Якщо функція $f(X)$, розглядувана на поверхні або лінії L, має в точці $A \in L$ екстремум, то говорять, що $f(X)$ має в точці A даної поверхні або лінії умовний екстремум.

Розглядають локальні, глобальні, строгі і нестрогі умовні екстремуми. Так, строгий локальний умовний екстремум (максимум) характеризується нерівністю

$$f(X) < f(A)$$

в точках даної поверхні або лінії, які містяться в ε-околі точки A. Сформулюємо найпростіші задачі на умовний екстремум.

1. Знайти екстремум функції $u = f(x, y)$ на лінії, заданій параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$ або рівнянням $\varphi(x, y) = 0$.

2. Знайти екстремум функції $u = f(x, y, z)$ на лінії, заданій параметрично

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

або системою рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

У загальному випадку задача відшукання умовного екстремуму формулюється так: знайти екстремум функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на m-вимірній поверхні, заданій рівняннями

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, m,\ m < n.$$

Рівняння, які задають лінію або поверхню, називаються **в'язями.**

Задачу на умовний екстремум звичайно зводять до задачі на безумовний екстремум. Розглянемо це на прикладі функції двох змінних $u = f(x, y)$. Нехай x, y пов'язані рівнянням $\varphi(x, y) = 0$. Припустимо, що рівняння $\varphi(x, y) = 0$ розв'язне щодо y, тобто $y = \psi(x)$. Тоді задача зводиться до відшукання екстремуму від складної функції однієї змінної $u = f(x, \psi(x))$. Необхідна умова екстремуму для цієї функції запишеться у вигляді $\frac{du}{dx} = 0$. Однак

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{36.1}$$

Візьмемо тепер повну похідну по x функції $\varphi(x, y) = 0$. Маємо

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Помножимо останню рівність на сталий множник λ:

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \qquad (36.2)$$

Додаючи вирази (36.1) і (36.2), дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0. \qquad (36.3)$$

З рівняння (36.3) визначаємо стаціонарні точки. Параметр λ виберемо таким, щоб

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Тоді рівняння (36.3) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0.$$

Отже, стаціонарні точки визначаються з системи трьох рівнянь:

$$\begin{cases}\varphi(x,\ y)=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0\end{cases} \qquad (36.4)$$

з трьома невідомими x, y, λ. Аналізуючи цю систему, помічаємо, що відшукання умовного екстремуму зводиться до відшукання безумовного, якщо за досліджувану функцію взяти

$$F(x,\ y,\ \lambda)=f(x,\ y)+\lambda\,\varphi(x,\ y).$$

Функція F називається **функцією Лагранжа.** Характер умовного екстремуму так само, як і безумовного, визначається знаком диференціала (квадратичною формою) другого порядку

$$d^2F=\frac{d^2F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{d^2F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{d^2F}{\partial y^2}dy^2. \qquad (36.5)$$

Якщо в стаціонарній точці $M_0(x_0,\ y_0,\ \lambda_0)$ $d^2F<0$, то в цій точці функція має максимум, а при $d^2F>0$ функція в стаціонарній точці має мінімум.

Для функції трьох змінних $u=f(x,\ y,\ z)$ із в'язями $\varphi(x,\ y,\ z)=0$, $\psi(x,\ y,\ z)=0$ функція Лагранжа запишеться у вигляді

$$F(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu)=f(x,\ y,\ z)+\lambda\,\varphi(x,\ y,\ z)+\mu\psi(x,\ y,\ z),$$

а необхідні умови — у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \\ \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{36.6}$$

Приклад. Знайти прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму, якщо його повна поверхня має площу, яка дорівнює $2a$.

Розв'язання. Позначимо довжини сторін паралелепіпеда через x, y, z. Тоді його об'єм $V = xyz$, а площа поверхні

$$S = 2\,(xy + xz + yz).$$

Отже, потрібно знайти максимум функції $V = xyz$ за умови $xy + xz + yz - a = 0$. Тут $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. Побудуємо функцію Лагранжа

$$F\,(x, y, z, \lambda,) = xyz + \lambda\,(xy + xz + yz - a).$$

Необхідні умови:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ yz + \lambda(y + z) = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ xz + \lambda(x + z) = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0,\ xy + \lambda(x + y) = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0,\ xy + xz + yz - a = 0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістанемо стаціонарну точку $x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}$. Якщо в стаціонарній точці обчислити d^2F за формулою (36.5), то дістанемо $d^2F < 0$. Звідси випливає, що куб із стороною $\sqrt{\frac{a}{3}}$, площа поверхні якого дорівнює $2a$, має найбільший об'єм $V = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$.

Якщо задано функцію n змінних $u = f\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ з накладеними на них умовами зв'язку

$$\varphi_j\,(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ j = 1, 2, ..., m,\ m < n. \tag{36.7}$$

то складається функція Лагранжа

$$F = f\,(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j\,(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{36.8}$$

Необхідні умови $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ разом з рівняннями (36.7) утворюють систему рівнянь, з якої визначаються координати стаціонарних точок. Функція (36.8) зводить задачу умовного екстремуму до безумовного. Тому достатні умови існування умовного екстремуму можуть визначатися за знаком другого диференціала d^2F.

ВПРАВИ. Знайти умовний екстремум функції:

а) $z = x^2 + y^2$ при $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$;

б) $u = x + y + z$ при $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, де $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$;

в) $u = xy^2z^2$ при $x + y + z = 12$, де $x > 0$; $y > 0$; $z > 0$. *Відповідь.* а) min в точці $\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right)$, $z_{\min} = \frac{36}{13}$, б) min в точці $\left(-\frac{a^2}{\lambda}; -\frac{b^2}{\lambda}; -\frac{c^2}{\lambda}\right)$ при $\lambda < 0$ і max при $\lambda > 0$, $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; в) min в точці $\left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}, \frac{24}{5}\right)$, $u_{\min} = \left(\frac{12}{5}\right)^5 \cdot 16$.

§ 37. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Нехай проведено $n + 1$ експеримент з вимірювання двох величин x і y, в результаті чого отримано $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ і $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Аналізуючи залежність змінної y від x, встановлено, що невідому функціональну залежність $y = f(x)$ можна описати за допомогою полінома.

$$Q_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m, \text{ де } m < n. \tag{37.1}$$

При цьому виникає питання: як підібрати коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, щоб графік невідомої функції і графік полінома були якомога найближчими? Для цього вводять величину

$$S = \sum_{i=0}^{n} [Q_m(x_i) - f(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \cdots + a_mx_i^m - f(x_i)]^2 = \psi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m), \tag{37.2}$$

яка є функцією $m + 1$ змінних коефіцієнтів. Якщо ці коефіцієнти вибрати так, щоб функція S була мінімальною, то тим самим задача буде розв'язана. Величина $Q_m(x_i) - f(x_i)$ називається **відхилом.** У формулі (37.2) беруть суму квадратів таких відхилів і знаходять їх мінімум. Звідси й назва — **метод найменших квадратів.**

Для визначення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, ..., a_m складемо необхідні умови екстремуму:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial s}{\partial a_0} = \sum_{i=0}^{n}\left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - f(x_i)\right]\cdot 1 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial s}{\partial a_1} = \sum_{i=0}^{n}\left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - f(x_i)\right] x_i = 0,$$

. . . .

$$\frac{1}{2}\frac{\partial s}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^{n}\left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - f(x_i)\right] x_i^j = 0,$$

. . . .

$$\frac{1}{2}\frac{\partial s}{\partial a_m} = \sum_{i=0}^{n}\left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - f(x_i)\right] x_i^m = 0. \qquad (37.3)$$

Введемо позначення

$$s_k = x_0^k + x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k,$$

$$t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + \cdots + x_n^k y_n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (37.4)$$

Систему (37.3) можна перетворити і з урахуванням позначень (37.4) записати таким чином:

$$a_0 s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_m s_m = t_0,$$

$$a_0 s_1 + a_1 s_2 + \cdots + a_m s_{m+1} = t_1,$$

. . . .

$$a_0 s_j + a_1 s_{j+1} + \cdots + a_m s_{m+j} = t_j, \qquad (37.5)$$

. . . .

$$a_0 s_m + a_1 s_{m+1} + \cdots + a_m s_{2m} = t_m,$$

де

$$s_0 = x_0^0 + x_1^0 + \cdots + x_n^0 = n + 1.$$

Систему (37.5) звичайно розв'язують на ЕОМ.

Наприклад, нехай

$$Q_m(x) = Q_1(x) = a_0 + a_1 x,$$

тоді

$$S = \sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 = S(a_0, a_1).$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i - y_i)\cdot 1 = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i - y_i) x_i = 0.$$

Останню систему можна записати у вигляді

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i y_i. \end{cases} \qquad (37.6)$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо a_0 і a_1. Нехай $n = 5$ і

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,$$
$$y_0 = 0,\ y_1 = 2,\ y_2 = 4,\ y_3 = 6,\ y_4 = 8.$$

Тепер обчислюємо суми

$$\sum_{i=0}^{4} x_i = 10,\quad \sum_{i=0}^{4} y_i = 20,\quad \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 30,\quad \sum_{i=0}^{4} x_i y_i = 60.$$

Підставляючи отримані суми в систему (37.6), знаходимо

$$\begin{cases} 5a_0 + 10a_1 = 20, \\ 10a_0 + 30a_1 = 60, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a_0 + 2a_1 = 4, \\ a_0 + 3a_1 = 6, \end{cases}$$

звідки $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.

§ 38. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СКІНЧЕННИХ РІВНЯНЬ

Корені рівняння першого і другого степенів щодо невідомого можна знайти за певними формулами. Є формули і для розв'язання рівнянь третього степеня, а також рівнянь більш високих степенів. Рівняння, корені яких обчислюються за формулами, називаються **рівняннями, розв'язними в радикалах.** До рівнянь, розв'язних у радикалах, належать рівняння першого — четвертого степеня і деякі окремі типи рівнянь більш високих степенів.

Для рівнянь вище четвертого степеня у загальному випадку доведено теорему про те, що не існує формул для визначення коренів рівняння. Доведення цієї теореми пов'язане з іменами Абеля [1] і Галуа [2]. Для визначення коренів таких рівнянь застосовують методи наближеного визначення. Ці методи використовують іноді й до рівнянь, розв'язних в радикалах, зокрема при громіздких обчислювальних операціях.

Отже, нехай треба розв'язати скінченне рівняння

$$f(x) = 0. \qquad (38.1)$$

Припустимо, що функція $f(x)$ дійсної змінної дійсна. Всі коефіцієнти, що входять до функції, відомі. Рівняння (38.1) може бути як алгебраїчним, так і трансцендентним. Тому рівняння (38.1) може мати як

[1] Нільс Хенрік Абель (1802—1829) — норвезький математик.
[2] Еваріст Галуа (1811—1832) — французький математик.

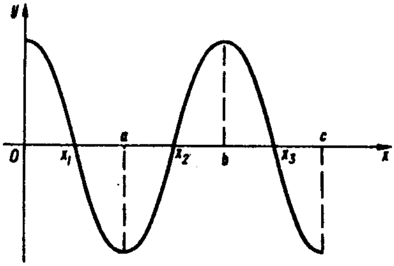


Рис. 4.44

скінченне число коренів, так і нескінченне. Далі розглядатимемо лише дійсні корені. Звичайно для визначення одного якогось дійсного кореня необхідно знайти ті відрізки, які містять тільки один корінь функції $y = f(x)$. Способи відшукання таких відрізків називаються **способами відокремлювання коренів,** а самі проміжки (відрізки) називаються **проміжками (відрізками) ізоляції.** Найпростіший метод відокремлення коренів полягає в побудові графіка функції $y = f(x)$. При побудові, хоч і наближено, визначаються точки перетину графіка $y = f(x)$ з віссю Ox, що дозволяє виділити відрізки, які містять окремі дійсні корені x_1, x_2, x_3 (рис. 4.44). На цьому рисунку проміжки ізоляції позначені через $\langle 0, a\rangle$, $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$.

Якщо виділити околи точок x_1, x_2, ... і побудувати в них графік функції в більшому масштабі, то можна знайти більш точні значення коренів x_1, x_2, ... У багатьох випадках функцію $y = f(x)$ зображують у вигляді різниці двох функцій:

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) = 0, \quad \varphi(x) = \psi(x).$$

Тоді за абсцисами точок перетину графіків функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ наближено оцінюють значення коренів і визначають їх.

Приклад. Визначити проміжки ізоляції коренів рівняння

$$\cos x - 3x + 1 = 0.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\cos x = 3x - 1,$$

тоді

$$\varphi(x) = \cos x, \ \psi(x) = 3x - 1.$$

Побудуємо графік цих функцій (рис. 4.45). Як випливає з графіка, є єдиний проміжок ізоляції $\left\langle \frac{1}{3}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Для диференційовних функцій $y = f(x)$ відшукання проміжків ізоляції здійснюється на підставі такої теореми.

Теорема. *Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною і визначено сегмент $[a, b]$, в якому*

1) *$f(x)$ неперервна;*

2) $f(a) \cdot f(b) < 0$,

3) *похідні $f'(x)$ і $f''(x)$ в $[a, b]$ зберігають свої знаки.*

Тоді $f(x)$ на $[a, b]$ має лише один корінь.

Доведення. З умови 2) випливає, що графік функції перетинає вісь не менше одного разу, а з умови 3) випливає монотонність і

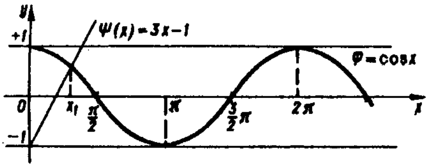


Рис. 4.45

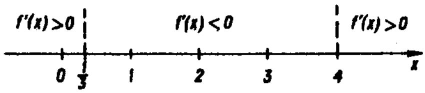


Рис. 4.46

сталість опуклості (угнутості), тобто графік функції перетинає вісь один раз. Однак умови 2) і 3) є тільки достатніми. Проміжком ізоляції може бути і проміжок, в якому лише одна з умов виконана.

Таким чином, для відокремлення коренів диференційовної функції необхідно знайти інтервали її монотонності.

Приклад. Знайти проміжки ізоляції коренів рівняння

$$x^3 - 6{,}5\,x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Розв'язання. Маємо

$$f(x) = x^3 - 6{,}5\,x^2 + 4x - 5,\quad f'(x) = 3x^2 - 13x + 4.$$

Рівняння $3x^2 - 13x + 4 = 0$ має корені $x_1 = 4$; $x_2 = \frac{1}{3}$. Дослідимо знак $f'(x)$ в інтервалі $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$;$\left(\frac{1}{3};\ 4\right)$; $(4;\ +\infty)$ (рис. 4.46).

У кожному із вказаних інтервалів похідна

$$f'(x) = 3\,(x-4)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

зберігає знак, а отже, функція має по одному кореню. Отже, задане рівняння має три проміжки ізоляції, три дійсних корені, розміщених в цих проміжках.

38.1. Метод спроб

Для уточнення розміщення коренів у проміжках ізоляції використовують різні методи. Один з них називається **методом спроб,** суть якого полягає ось у чому.

Розглянемо проміжок $\left\langle\frac{1}{3},\ 4\right\rangle$ з наведеного вище прикладу. За наближення кореня можна взяти будь-який з кінців проміжку $\frac{1}{3}$ і 4, за друге наближення — середину відрізка $\left[\frac{1}{3},\ 4\right]$. Дістанемо більш вузький проміжок. Щоб звузити проміжок $[4,\ +\infty)$, знайдемо знак

$f(4) = 4^3 - 6{,}5 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 5$, $f(4) < 0$. Виберемо число $a >$ > 4 таке, що $f(a) > 0$. Нехай $a = 50$. Тоді

$$f(50) = 50^3 - 6{,}5 \cdot 50^2 + 4 \cdot 50 - 5;\ f(50) > 0.$$

Отже, корінь міститься в проміжку $\langle 4,\ 50\rangle$. За наступне наближене значення кореня можна взяти $x_1 = \frac{4+50}{2} = 27$. Продовжуючи процес звуження проміжку ізоляції, ми кожного разу дістаємо точніше значення кореня. Відхилення від точного значення кореня не перевищують довжину відрізка.

Викладемо тепер метод спроб у загальному вигляді. Нехай відомий проміжок ізоляції $\langle a, b\rangle$. Візьмемо за перше наближення значення кореня $x_1 = \frac{a+b}{2}$ і обчислимо $f(x_1)$. Якщо $f(x_1) = 0$, то задачу розв'язано. Якщо $f(x_1) \neq 0$, то утворимо проміжки $\langle a, x_1\rangle$ і $\langle x_1, b\rangle$ і візьмемо той з них, на кінцях якого функція $f(x)$ має різні знаки. Нехай це проміжок $\langle a, x_1\rangle$. Застосуємо до нього попередні міркування. Тоді

$$x_2 = \frac{a+x_1}{2} = \frac{a+\frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3a+b}{2^2};\ x_2 \in \langle a, x_1\rangle.$$

Проміжок $\langle a, x_1\rangle$ поділимо на два: $\langle a, x_2\rangle$ і $\langle x_2, x_1\rangle$. Нехай $f(a) < 0$, $f(x_2) > 0$, тоді

$$x_3 = \frac{a+x_2}{2} = \frac{a+\frac{3a+b}{2^2}}{2} = \frac{(2^3-1)a+b}{2^3}.$$

Продовжуючи цей процес, запишемо

$$x_n = \frac{(2^n-1)a+b}{2^n}.$$

Метод спроб зручно здійснювати на ЕОМ.

Приклад. Знайти наближене значення одного з дійсних коренів рівняння

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0.$$

Розв'язання. Маємо

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1,\ f(0) = -1,\ f(1) = 1;$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 1;\ f''(x) = 12x^2 + 12x(x+1).$$

Для $x \in (0, 1)$ $f''(x)$ зберігає знак. Отже, $(0, 1)$ є проміжком ізоляції. Уточнимо проміжок ізоляції:

$$x_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2},\ f(0) = -1 < 0,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -1{,}19;$$

вибираємо $\left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$;

$$x_2 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75,\quad f(0{,}75) = -0{,}59,$$

вибираємо ⟨0,75; 1⟩

$$x_3 = \frac{0,75 + 1}{2} = 0,875, \quad f\,(0,875) = 0,005,$$

вибираємо ⟨0,75; 0,875⟩

$$x_4 = \frac{0,75 + 0,875}{2} = 0,8125, \quad f\,(0,8125) = -\,0,304,$$

вибираємо ⟨0,8125; 0,875⟩

$$x_5 = \frac{0,8125 + 0,875}{2} = 0,8438, \quad f\,(0,8438) = -\,0,135,$$

вибираємо ⟨0,8438; 0,875⟩

$$x_6 = \frac{0,8438 + 0,875}{2} = 0,8594.$$

Якщо за точне значення кореня прийняти x_6, то похибка дорівнюватиме довжині ⟨0,8438; 0,875⟩, тобто 0,312.

38.2. Метод хорд, або метод пропорційних відрізків

Розглянемо так званий метод хорд уточнення значень дійсного кореня рівняння $y = f(x) = 0$ в проміжку ізоляції. Нехай функція задовольняє умови наведеної вище теореми.

Тоді можуть бути такі варіанти розміщення кривої у проміжку $\langle a, b\rangle$:

1) $y' = f'(x) > 0$, $y'' = f''(x) > 0$ (рис. 4.47);

2) $y' = f'(x) > 0$, $y'' = f''(x) < 0$ (рис. 4.48);

3) $y' = f'(x) < 0$, $y'' = f''(x) > 0$ (рис. 4.49);

4) $y' = f'(x) < 0$, $y'' = f''(x) < 0$ (рис. 4.50).

Позначимо через ξ наближене значення кореня рівняння. Розглянемо докладніше випадок, коли $y' > 0$, $y'' > 0$. Сполучимо точки

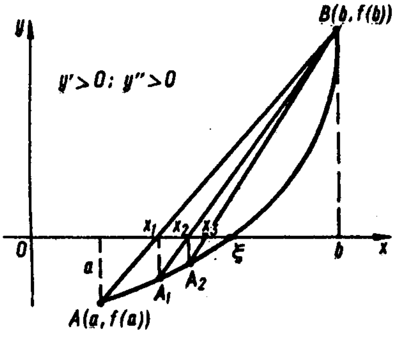


Рис. 4.47

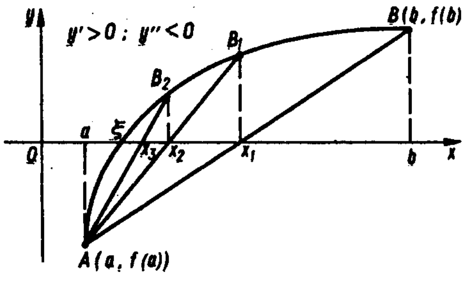


Рис. 4.48

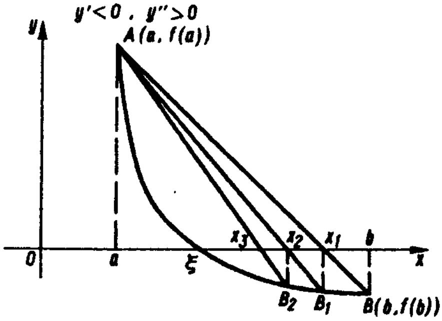


Рис. 4.49

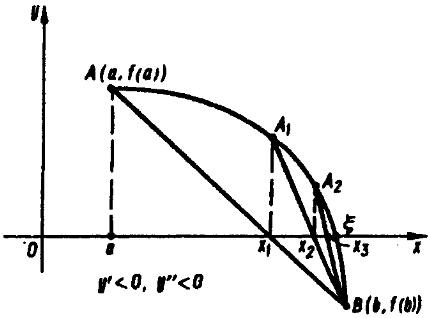


Рис. 4.50

A і B відрізком. Точку перетину хорди AB з віссю Ox позначимо через x_1. Проведемо через точку x_1 пряму, паралельну Oy, до перетину з графіком. Дістанемо точку A_1. Точка A_1 лежить нижче осі Ox. Отже, точки a і x_1 лежать ліворуч від ξ. Сполучивши відрізком точки A_1 і B, дістанемо точку x_2, яка лежить між x_1 і ξ. Продовжуючи цей процес, дістанемо послідовність $\{a, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, яка прямує до ξ.

Як випливає з рис. 4.47—4.50, точки A, A_1, A_2, ... необхідно сполучати з точкою на кінці кривої, ордината якої має той самий знак, що й друга похідна. Аналітичний вираз для членів послідовності $\{x_n\}$ дістаємо з рівняння хорди

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \text{ або } \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Поклавши $y = 0$, $x = x_1$, дістаємо

$$x_1 = a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)},$$

а при $y = 0$, $x = x_2$ маємо

$$x_2 = x_1-\frac{(b-x_1)f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}.$$

Взагалі

$$x_{n+1} = x_n-\frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}.$$

Можна показати, що побудована послідовність $\{x_n\}$ має границю ξ, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$, оскільки вона монотонна:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots < b.$$

Якщо задано ступінь точності визначення кореня ε, то операція закінчується, коли

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

38.3. Метод Ньютона, або метод дотичних

Проведемо дотичну до кривої через той кінець її відрізка, в якому знак функції збігається із знаком другої похідної y'' (рис. 4.51). Ця дотична перетинає вісь Ox у точці $\tilde{x}_1$. Із умов $y' > 0$, $y'' > 0$ та $\forall x \in (a, b)$ випливає, що ξ і $\tilde{x}_1$ лежать по один бік від b і $\tilde{x}_1$ міститься між ξ і b. Отже, $\tilde{x}_1$ забезпечує більш точне наближення кореня, ніж b. На кривій знайдемо точку B_1, що відповідає $\tilde{x}_1$, і проведемо до неї дотичну. Дістанемо точку $\tilde{x}_2$, яка розміщена ближче до ξ, ніж $\tilde{x}_1$, і т. д.

Аналітичний вираз членів послідовності $\{\tilde{x}_n\}$ визначається з рівняння дотичної

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Поклавши в ньому $y = 0$, а $x = \tilde{x}_1$, знаходимо

$$\tilde{x}_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Для

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 - \frac{f(\tilde{x}_1)}{f'(\tilde{x}_1)}, \ldots, \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{f(\tilde{x}_n)}{f'(\tilde{x}_n)}. \qquad (38.2)$$

При цьому

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{x}_n = \xi.$$

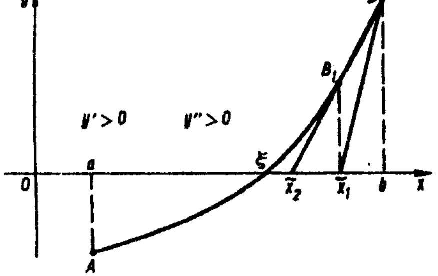


Рис. 4.51

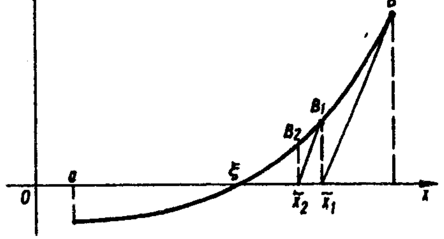


Рис. 4.52

Обчислення припиняються, коли $f(\tilde{x}_n)$ матиме той самий знак, що й $f(a)$. Іноді, користуючись цим методом, кожного разу через точки B_1, B_2, ... (рис. 4.52) проводять прямі, паралельні першій дотичній, що проходить через точку B, тоді

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{f(\tilde{x}_n)}{f'(b)}.$$

Формулу (38.2) можна дістати ще і з таких міркувань. Припустимо, що функція $y = f(x) = 0$ є диференційовною в околі точки ξ, тоді її приріст можна записати у вигляді

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Поклавши тут $x = \tilde{x}_n$, а $\Delta x = \Delta\tilde{x}_n$, вважатимемо, що

$$f(\tilde{x}_n + \Delta\tilde{x}_n) \approx 0,\ \alpha\Delta\tilde{x}_n \approx 0,$$

тоді

$$0 = f(\tilde{x}_n) + f'(\tilde{x}_n)\Delta\tilde{x}_n, \tag{38.3}$$

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \Delta\tilde{x}_n. \tag{38.4}$$

Із формули (38.3) знаходимо

$$\Delta\tilde{x}_n = -\frac{f(\tilde{x}_n)}{f'(\tilde{x}_n)},$$

а з формули (38.4) дістаємо

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{f(\tilde{x}_n)}{f'(\tilde{x}_n)}.$$

Ця методика переноситься і на систему рівнянь. Покажемо це на прикладі системи двох рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Припустивши, що функції f_1 і f_2 диференційовні по обох змінних, маємо

$$f_1(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f_1(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y; \tag{38.5}$$

$$f_2(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f_2(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\Delta y + \alpha_3\Delta x + \alpha_4\Delta y. \tag{38.6}$$

Нехай в рівностях (38.5) і (38.6)

$$x = x_n,\ y = y_n,\ \Delta x = \Delta x_n,\ \Delta y = \Delta y_n.$$

Будемо вважати, що

$$f_1(x_n + \Delta x_n,\ y_n + \Delta y_n) = 0, \quad (38.7)$$

$$f_2(x_n + \Delta x_n,\ y_n + \Delta y_n) = 0, \quad (38.8)$$

$$\alpha_1 \Delta x_n + \alpha_2 \Delta y_n = 0, \quad (38.9)$$

$$\alpha_3 \Delta x_n + \alpha_4 \Delta y_n = 0, \quad (38.10)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad (38.11)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n. \quad (38.12)$$

Беручи до уваги рівності (38.7)— (38.12), з рівнянь (38.5) і (38.6) дістанемо

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\Delta x_n + \frac{\partial f_1}{\partial y}\Delta y_n = -f_1(x_n, y_n),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\Delta x_n + \frac{\partial f_2}{\partial y}\Delta y_n = -f_2(x_n, y_n),$$

$$\Delta x_n = \frac{\begin{vmatrix} -f_1 & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ -f_2 & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{I};\ \Delta y_n = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & -f_1 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & -f_2 \end{vmatrix}}{I},$$

де

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Отже

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\begin{vmatrix} -f_1 & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ -f_2 & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{I};\ y_{n+1} = y_n + \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & -f_1 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & -f_2 \end{vmatrix}}{I}.$$

Нульове наближення x_0, y_0 звичайно визначається методом відокремлення коренів, тобто шляхом наближеної побудови графіків функцій $f_1(x, y) = 0$ і $f_2(x, y) = 0$ на площині xOy. Для оцінки номера n наближення можна скористатися мінімумом функції $V(x,y) = f_1^2(x,y) + f_2^2(x,y)$. Із пари чисел (x_n, y_n) найточніше визначають корені рівняння ті значення, які спричиняють мінімум функції $V(x, y)$.

38.4. Комбінований метод хорд і дотичних

Метод хорд і метод Ньютона часто застосовують до проміжку ізоляції разом. Оскільки здобуте методом хорд наближене значення кореня відхиляється від точного значення кореня в напрямі угнутості, а за методом дотичних — у протилежному напрямі, то шуканий корінь ξ розміщений між x_1 і $\bar{x}_1$, а довжина $|x_1 - \bar{x}_1|$ є мірою точності кожного із здобутих наближень. Послідовності $\{x_n\}$ і $\{\bar{x}_n\}$ дістаємо за формулами

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(\bar{x}_n - x_n)f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)},$$

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(b)}, \ \xi = \frac{x_n + \bar{x}_n}{2}.$$

Обчислення припиняється, коли довжина $|x_n - \bar{x}_n|$ не перевищуватиме потрібного ступеня точності.

38.5. Метод ітерацій, або метод повторень

Метод ітерацій вже використовувався у розглянутих вище методах. Тепер розглянемо дещо інший метод послідовних повторень. Цей метод застосовують для рівнянь, що допускають запис у формі $x = \varphi(x)$, де $|\varphi'(x)| \le r < 1$ всюди на проміжку $\langle a, b \rangle$, в якому вихідне рівняння має єдиний корінь. Візьмемо у $\langle a, b \rangle$ яке-небудь число x_0. Тепер побудуємо послідовність

$$x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\ x_{n+1} = \varphi(x_n),\ \ldots,$$

яка збігається незалежно від вибору точки x_0.

Границею послідовності $\{x_n\}$ є єдиний корінь, що належить $\langle a, b \rangle$. Похибки наближення оцінюють за формулою

$$|\xi - x_n| < \frac{r}{1-r}|x_n - x_{n-1}|.$$

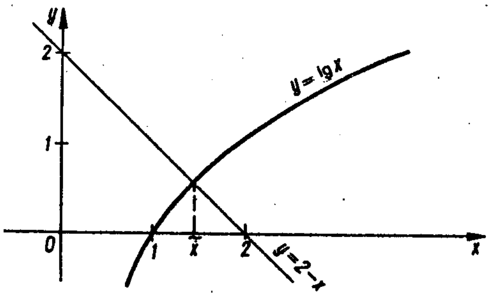


Рис. 4.53

Якщо треба знайти значення кореня з точністю, що не перевищує ε, досить визначити n таким чином, щоб виконувалась нерівність

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-r}{r}\varepsilon.$$

Метод ітерацій переноситься і на системи. Для вибору функції $\varphi(x)$ зручно скористатися такою методикою. Рівняння $f(x) = 0$ можна записати у вигляді $\lambda f(x) = 0$ або $x + \lambda f(x) = x$. Нехай $x + \lambda f(x) = \varphi(x)$. Тоді дістанемо рівняння $x = \varphi(x)$. Виберемо λ таким, що $|\varphi'(x)| < 1$, тобто ітераційний процес буде збіжним.

Приклад. Розв'язати рівняння $2 - \lg x - x = 0$ методом ітерацій, визначивши значення кореня з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

Розв'язання. Передусім визначимо проміжок ізоляції. Для цього подамо рівняння у вигляді $\lg|x| = 2 - x$. Побудуємо графіки функцій $y = \lg|x|$ і $y = 2 - x$ (рис. 4.53). Як випливає з рисунка, існує лише один корінь $\tilde{x} \in \langle 1, 2 \rangle$. Щоб застосувати метод ітерацій, запишемо рівняння у вигляді $x = 2 - \lg|x|$. Тоді $\varphi(x) = 2 - \lg|x|$, а $\varphi'(x) = -\dfrac{\lg e}{x}$. При $x \in \langle 1, 2 \rangle$ маємо $|\varphi'(x)| < 1$. Отже, ітерована послідовність $\{x_n\} \to \tilde{x}$. Нехай $x_0 = 1$, тоді

$$x_1 = 2 - \lg 1 = 2,$$

$$x_2 = 2 - \lg 2 = 1{,}6990,$$

$$x_3 = 2 - \lg 1{,}6990 = 1{,}7698,$$

$$x_4 = 2 - \lg 1{,}7698 = 1{,}7520,$$

$$x_5 = 2 - \lg 1{,}7520 = 1{,}7565,$$

$$x_6 = 2 - \lg 1{,}7565 = 1{,}7555,$$

$$x_7 = 2 - \lg 1{,}7555 = 1{,}7556,$$

$$|x_7 - x_6| = 1{,}7556 - 1{,}7555 = 0{,}0001 < 0{,}001.$$

Таким чином, $\tilde{x} \approx 1{,}7556$.

Глава 5
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§ 1. ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Функція $F(x)$, диференційовна на $\langle a, b\rangle$, похідна якої в кожній точці проміжку дорівнює заданій функції $f(x)$, називається **первісною** функції $f(x)$ у цьому проміжку, тобто

$$F'(x) = f(x), \text{ або } \frac{dF}{dx} = f(x),\ x \in \langle a, b\rangle. \qquad (1.1)$$

Приклад. Знати первісну $F'(x)$ функції $f(x) = x^3$.

Розв'язання. Знаходимо $F'(x) = x^3$, $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Однак первісною буде і функція $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, де $C = \text{const}$, оскільки

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3.$$

Виникає таке запитання: скільки первісних у даної функції $f(x)$? Виходячи з попереднього прикладу, можна сказати, що їх нескінченна множина і всі вони відрізняються одна від одної на сталу величину.

Теорема. *Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то всі первісні функції $f(x)$ мають вигляд $F(x) + C$.*

Це випливає із наслідку теореми про умову сталості функції (див. гл. 4, п. 27.1). Множина $F(x) + C$ всіх первісних даної функції називається **невизначеним інтегралом** і записують це таким чином:

$$F(x) + C = \int f(x)dx,$$

де $\int$ — знак інтеграла; $f(x)$ — підінтегральна функція; $f(x)\,dx$ — підінтегральний вираз; x — змінна інтегрування.

Відшукання первісної $F(x)$ за її похідною $f(x)$, або операція, обернена до диференціювання, називається **інтегруванням.** Функція, що має первісну, називається **інтегровною.**

У диференціальному численні за функцією знаходять її похідні, диференціали. В інтегральному численні за заданою похідною функції знаходять саму функцію.

1.1. Властивості невизначеного інтеграла

Розглянемо спочатку ті властивості невизначеного інтеграла, які випливають із його означення.

1°. Згідно з означенням, інтеграл є множиною всіх первісних $F(x) + C$ заданої функції $f(x)$, тобто

$$F(x) + C = \int f(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Функція $f(x)$ задовольняє ще умову

$$F'(x) = f(x). \tag{1.3}$$

Враховуючи рівність (1.2), запишемо рівність (1.3)

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) = f(x), \tag{1.4}$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \tag{1.5}$$

Умову (1.5) формулюють у вигляді властивості: *похідна інтеграла дорівнює підінтегральній функції. Разом з тим, ця властивість свідчить про те, що операції інтегрування і диференціювання взаємно обернені. Результат інтегрування завжди можна перевірити диференціюванням.*

2°. Із співвідношення (1.4) маємо

$$d\left(\int f'(x)dx\right) = f(x)dx\,. \tag{1.6}$$

Диференціал від інтеграла дорівнює диференціалу первісної функції або підінтегральному виразу.

3°. Із рівностей (1.2) і (1.3) маємо

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C. \tag{1.7}$$

Інтеграл від похідної первісної функції дорівнює сумі самої первісної функції і довільної сталої.

4°. Рівність (1.3) можна записати у вигляді

$$dF(x) = f(x)\,dx. \tag{1.8}$$

Тоді

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{1.9}$$

Інтеграл від диференціала первісної функції дорівнює сумі первісної і довільної сталої.

5°. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.* Нехай $f(x)$ має первісну $F(x)$ і треба знайти первісну функції $kf(x)$, де k — стала. За означенням інтеграла

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{1.10}$$

для функції $kf(x)$

$$F_1'(x) = kf(x), \tag{1.11}$$

але

$$F_1'(x) = kF'(x). \tag{1.12}$$

Рівності (1.11) і (1.12) набирають вигляду

$$\int kf(x)\,dx = k\,[F(x) + C]. \tag{1.13}$$

Із рівностей (1.10) і (1.13) маємо

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \tag{1.14}$$

6°. *Інтеграл від суми скінченного числа функцій, що мають первісні, дорівнює сумі інтегралів від додаваних функцій.*

Для двох функцій

$$\int [\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)]\,dx = \int \varphi_1(x)\,dx \pm \int \varphi_2(x)\,dx. \tag{1.15}$$

За умовою

$$\int \varphi_1(x)\,dx = F_1(x) + C_1, \quad \int \varphi_2(x)\,dx = F_2(x) + C_2,$$

$$\varphi_1(x) = F_1'(x),\ \varphi_2(x) = F_2'(x),\ \ \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) = [\,F_1'(x) \pm F_2'(x)].$$

Остаточно знаходимо

$$\int [\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)]\,dx = \int \varphi_1(x)\,dx \pm \int \varphi_2(x)\,dx.$$

7°. *Інтеграл від лінійної комбінації інтегровних функцій дорівнює лінійній комбінації інтегралів:*

$$\int [C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)]\,dx =$$

$$= C_1\int \varphi_1(x)\,dx + C_2\int \varphi_2(x)\,dx + \cdots + C_n\int \varphi_n(x)\,dx. \tag{1.16}$$

Ця властивість випливає із властивостей 5° і 6°.

§ 2. ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Наведемо формули для обчислення інтегралів, які безпосередньо випливають із таблиці похідних.

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

2. $\int x^{\mu}\,dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \ \ \mu \neq -1.$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1.$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

8. $\int \sec^2 x\, dx = \mathrm{tg}\, x + C.$

9. $\int \mathrm{cosec}^2 x\, dx = -\mathrm{ctg}\, x + C.$

10. $\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C.$

11. $\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln|\sin x| + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C = -\mathrm{arcctg}\, x + C.$

15. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\, \dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\mathrm{arcctg} \dfrac{x}{a} + C.$

16. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

18. Якщо в останній функції взяти $a^2 = s$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm s}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm s}| + C.$$

19. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln|\sec x + \mathrm{tg}\, x| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

20. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln|\mathrm{cosec}\, x - \mathrm{ctg}\, x| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C.$

21. $\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C.$ 22. $\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C.$

23. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C.$ 24. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{cth}\, x + C.$

§ 3. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

Задача інтегрування — це задача, обернена до диференціювання. Вона складніша, ніж диференціювання, і, крім того, приводить до нових понять. Якщо уважно проаналізувати таблицю інтегралів, то можна виявити несподівані співвідношення між ірраціональними функціями і оберненими тригонометричними функціями.

Задача обчислення інтеграла полягає в тому, щоб за допомогою властивостей інтегралів перетворити обчислювальний інтеграл на табличний. Якщо досягти цього не вдається, як, наприклад, для інтегралів

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \sqrt{\sin x}\,dx,\quad \int \sqrt{\cos x}\,dx,$$

то інтеграл визначає клас нових функцій — вищих трансцендентних. Інтеграл є джерелом нових, неелементарних функцій.

Розглянемо основні методи інтегрування: 1) безпосереднє інтегрування; 2) метод підстановки; 3) інтегрування частинами.

3.1. Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод грунтується на загальних властивостях невизначеного інтеграла і таблиці основних інтегралів. У окремих випадках використовують метод зображення функції у вигляді суми функцій.

Наприклад,

$$\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{2}{3}}+1}{x^{\frac{1}{4}}}\,dx =$$

$$= \int\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}-2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)dx =$$

$$= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C.$$

ВПРАВИ. Обчислити інтеграли і перевірити відповіді диференціюванням.

1. $\int\left(x+\sqrt{x}\right)dx$. *Відповідь.* $\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$.

2. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$. *Відповідь.* $\left(6-0{,}1x^2\right)\sqrt{x}+C$.

3. $\int\left(\sin x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$. *Відповідь.* $6\sqrt{x}-\cos x+C$.

4. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. *Відповідь.* $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$.

3.2. Метод заміни змінної під знаком інтеграла

Суть цього методу полягає у введенні під знак інтеграла такої змінної, що після підстановки і заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної дістають табличний інтеграл.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int\sin(7x+5)dx.$$

Розв'язання. Покладемо $7x+5=t$, тоді

$$dt=7dx,\ \ dx=\frac{1}{7}dt.$$

Виконаємо заміну

$$\int\sin(7x+5)dx=\int\sin t\cdot\frac{dt}{7}=\frac{1}{7}\int\sin t\,dt=$$

$$=-\frac{1}{7}\cos t+C=-\frac{1}{7}\cos(7x+5)+C.$$

Отже,

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(t)dt,\text{ де } t=ax+b.$$

Наведемо загальні міркування щодо методу заміни змінних під знаком інтеграла.

Нехай дана функція $f(x)$ така, що $y'=f(x)$, а $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ — неперервна і диференційовна на (α,β) функція. Тоді

$$dy=f(x)\,dx=f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

або в інтегральній формі

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{3.1}$$

Цю формулу записують ще таким чином:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(t)dt.$$

Отже, за допомогою введення нової змінної інтеграл від складного виразу зводиться до простішого. В процесі міркувань доводиться розв'язувати функцію $x=\varphi(t)$ відносно t, а також знаходити похідні за x і t. Тому підстановку $x=\varphi(t)$ можна використовувати лише тоді, коли функція $\varphi(t)$ є монотонною і неперервно диференційовною на деякому інтервалі (α, β).

Теорема. *Якщо дано інтеграл $\int f(x)dx$ і функція $x = \varphi(t)$ на інтервалі (α, β) є монотонною і неперервно диференційовною, то*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

3.3. Узагальнення деяких табличних інтегралів

Користуючись формулою (3.1), деякі табличні інтеграли можна узагальнити так.

1. $\int (x \pm a)^{\alpha} dx = \dfrac{(x \pm a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.

   $\int (ax + b)^{\alpha} dx = \dfrac{1}{a}\dfrac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.

2. $\int \dfrac{dx}{x \pm a} = \ln|x \pm a| + C$; $\int \dfrac{dx}{ax + b} = \dfrac{1}{a}\ln|ax + b| + C$.

3. $\int e^{ax+b} dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + C$.

4. $\int a^{kx+b} dx = \dfrac{1}{k}\dfrac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$.

5. $\int \sin(ax \pm b)dx = -\dfrac{1}{a}\cos(ax \pm b) + C$.

6. $\int \cos(ax \pm b)dx = \dfrac{1}{a}\sin(ax \pm b) + C$.

7. $\int \operatorname{tg}(ax \pm b)dx = -\dfrac{1}{a}\ln|\cos(ax \pm b)| + C$.

8. $\int \operatorname{ctg}(ax \pm b)dx = \dfrac{1}{a}\ln|\sin(ax \pm b)| + C$.

9. $\int \sec^2(ax \pm b)dx = \dfrac{1}{a}\operatorname{tg}(ax \pm b) + C$.

10. $\int \operatorname{cosec}^2(ax \pm b)dx = -\dfrac{1}{a}\operatorname{ctg}(ax \pm b) + C$.

В інтегралах 1—10 $a \neq 0$.

Приклад.

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg} x = t \\ dt = \dfrac{1}{1 + x^2} dx \end{bmatrix} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C.$$

ВПРАВИ. Обчислити інтеграли і здобуті відповіді перевірити диференціюванням.

1. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} dx$. *Відповідь.* $-\operatorname{sh}^{-1} x + C$.

2. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2\sin x + 1}}$. *Відповідь.* $\sqrt{2\sin x + 1} + C$.

3. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$. *Відповідь.* $2\sqrt{1 + \sin^2 x} + C$.

4. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{(2 + 3\sin 2x)^3}$. *Відповідь.* $-\frac{1}{12(2 + 3\sin 2x)^2} + C$.

5. $\int \frac{e^x dx}{3 + 4e^x}$. *Відповідь.* $\frac{1}{4}\ln(3 + 4e^x) + C$.

6. $\int \frac{x dx}{\sqrt{9 - x^2}}$. *Відповідь.* $-\sqrt{9 - x^2} + C$.

7. $\int \frac{x dx}{9x^2 + 7}$. *Відповідь.* $\frac{1}{18}\ln(9x^2 + 4) + C$.

8. $\int \frac{x dx}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}}$. *Відповідь.* $\frac{1}{b^2}\sqrt{b^2x^2 - a^2} + C$.

9. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 3} + C$.

10. $\int \frac{x^3 dx}{x^4 + a^4}$. *Відповідь.* $\frac{1}{4}\ln(x^4 + a^4) + C$.

3.4. Метод інтегрування частинами

Нехай задано дві неперервно диференційовні функції: $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Розглянемо добуток $y = u \cdot v$. Знайдемо

$$dy = udv + vdu;\ d(u \cdot v) = udv + vdu.$$

Взявши від обох частин останньої рівності інтеграли, дістанемо

$$\int d(uv) = \int u\, dv + \int v\, du,$$

або

$$uv = \int u\, dv + \int v\, du, \quad \int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Ця формула називається **формулою інтегрування частинами.** Тут інтеграл від деякої функції зводиться до обчислення іншого інтеграла.

Наприклад,

$$\int x e^x dx = \begin{bmatrix} x = u, & dv = e^x dx, \\ du = dx, & v = e^x \end{bmatrix} =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C.$$

3.5. Типи інтегралів, які обчислюються інтегруванням частинами

1. $\int P_n(x)e^x dx$, де $P_n(x)$ — многочлен степеня n.

Цей інтеграл можна зобразити через елементарні функції, якщо послідовно застосувати формулу інтегрування частинами, поклавши

$$P_i(x) = u, \quad i = n,\ n-1,\ \dots,\ 1; \quad e^x dx = dv.$$

2. Аналогічно обчислюють інтеграли

$$\int P_n(x)e^{ax+b}dx, \quad \int P_n(x)\sin(ax+b)dx,$$

$$\int P_n(x)\cos(ax+b)dx, \quad \int P_n(x)\cos x\, dx, \quad \int P_n(x)\sin x\, dx.$$

При цьому через u позначають $P_n(x)$, а через dv — решту виразу.

Наприклад,

$$\int x^2 \sin x\, dx = \begin{bmatrix} x^2 = u, & dv = \sin x\, dx, \\ du = 2x\, dx; & v = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx = \begin{bmatrix} x = u, & dv = \cos x\, dx, \\ du = dx; & v = \sin x \end{bmatrix} =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\, dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

3. $\int P_n(x)\ln|x|dx$. Цей інтеграл можна зобразити через елементарні функції, якщо застосувати формулу інтегрування частинами, поклавши

$$\ln|x| = u, \quad P_n(x)\, dx = dv.$$

4. $\int P_n(x)\ln^m|x|dx$, де m — ціле додатне число, $m > 1$.

Інтеграл виражається через елементарні функції, якщо послідовно застосувати формулу інтегрування частинами, поклавши

$$\ln^i|x| = u, \quad i = m,\ m-1,\ \dots,\ 1, \quad P_n(x)\, dx = dv.$$

Наприклад,

$$\int x\ln^2|x|dx = \begin{bmatrix} \ln^2|x| = u, & dv = x\, dx \\ du = 2\ln|x|\cdot\frac{1}{x}dx; & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2|x| - \int\frac{x^2}{2}\cdot 2\ln|x|\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln^2|x| - \int x\ln|x|dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \ln|x| = u, & dv = x\, dx, \\ du = \frac{dx}{x}; & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln^2|x| - \frac{x^2}{2}\ln|x| + \int\frac{x}{2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2|x| - \frac{x^2}{2}\ln|x| + \frac{x^2}{4} + C.$$

5. $\int P_n(x)\arcsin x\,dx$. Цей інтеграл можна записати через інтеграл

$$\int P_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ m = n + 1,$$

якщо покласти $\arcsin x = u$, $dv = P_n(x)\,dx$.

Аналогічно обчислюють інтеграли, в яких під знаком інтеграла містяться функції

$$\arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x.$$

6. $\int e^x \sin x\,dx$. В результаті дворазового застосування методу інтегрування частинами дістаємо лінійне рівняння відносно заданого інтеграла.

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо вираз інтеграла в елементарних функціях.

Наприклад,

$$\int e^x \sin x\,dx = \begin{bmatrix} \sin x = u, & dv = e^x\,dx, \\ du = \cos x\,dx; & v = e^x \end{bmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx;$$

$$\int e^x \cos x\,dx = \begin{bmatrix} \cos x = u, & dv = e^x\,dx, \\ du = -\sin x\,dx; & v = e^x \end{bmatrix} =$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx.$$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx,$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

ВПРАВИ. Обчислити інтеграли і здобуті відповіді перевірити диференціюванням.

1. $\int x e^x dx$. *Відповідь.* $(x-1)e^x + C$.

2. $\int \arcsin x\,dx$. *Відповідь.* $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

3. $\int x^3 \ln|x|\,dx$. *Відповідь.* $\frac{x^3}{9}(3\ln|x| - 1) + C$.

4. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}x + C$.

§ 4. ІНТЕГРАЛИ, ЩО МІСТЯТЬ У ЗНАМЕННИКУ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

Розглянемо інтеграли виду

1. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$.

Виконаємо деякі перетворення:

$$\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}.$$

Введемо позначення

$$\left|\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right|=k^2,\quad x+\frac{b}{2a}=t.$$

Тоді інтеграл набирає вигляду

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}.$$

Якщо корені квадратного тричлена комплексні, то

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{ak}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C,$$

а якщо дійсні, то

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C.$$

Наприклад,

$$\int\frac{dx}{5x^2-3x+40}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2-2\cdot 0,3\,x+0,09+8-0,09}=$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{(x-0,3)^2+7,91}=\frac{1}{5\sqrt{7,91}}\operatorname{arctg}\frac{x-0,3}{\sqrt{7,91}}+C.$$

2. $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx.$

Маємо

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{Axdx}{ax^2+bx+c}+\int\frac{Bdx}{ax^2+bx+c}.$$

Другий інтеграл є інтегралом типу 1. Що ж стосується першого інтеграла, то у ньому в чисельнику можна поділити похідну від знаменника таким чином. Оскільки

$$\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b,$$

то

$$Ax=\frac{A}{2a}2ax+\frac{A}{2a}b-\frac{A}{2a}b=\frac{A}{2a}(2ax+b)-\frac{Ab}{2a}.$$

Отже,

$$\int\frac{Axdx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx-\frac{Ab}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=$$

$$=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|-\frac{Ab}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}+C.$$

Таким чином,

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Інтеграли цього типу можна привести до інтеграла

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a\left(t^2 \pm k^2\right)}},$$

який має зміст при $a > 0$ і будь-якому знаку k^2. При цьому для $a > 0$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a\left(t^2 \pm k^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t^2 \pm k^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t + \sqrt{\left(t^2 \pm k^2\right)}\right| + C.$$

Якщо $a < 0$, то має зміст лише інтеграл

$$\int \frac{dt}{\sqrt{|a|}\sqrt{\left(k^2 - t^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{t}{k} + C.$$

Наприклад,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-3x+8}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-0{,}3)^2+1{,}51}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|(x-0{,}3) + \sqrt{(x-0{,}3)^2+1{,}51}\right| + C.$$

4. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

Аналогічно попередньому знаходимо

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\left(ax^2+bx+c\right)^{\frac{1}{2}}}dx +$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{2a}\frac{\left(ax^2+bx+c\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{1-\frac{1}{2}} +$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

5. $\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$, $n \geq 2$, $n \in \mathrm{N}$.

Розглянемо лише випадок, коли квадратний тричлен має комплексні корені. Тоді

$$ax^2 + bx + c = a\left(t^2 + k^2\right) = a\left(t^2 + s\right),$$

$$x + \frac{b}{2a} = t, \quad \left|\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right| = k^2 = s$$

і інтеграл набирає вигляду

$$\frac{1}{a^n}\int\frac{dt}{\left(t^2 + s\right)^n}, \ n \geq 2;$$

$$\int\frac{dt}{\left(t^2 + s\right)^n} = \frac{1}{s}\int\frac{\left(t^2 + s - t^2\right)}{\left(t^2 + s\right)^n}dt = \frac{1}{s}\int\frac{dt}{\left(t^2 + s\right)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int\frac{t \cdot tdt}{\left(t^2 + s\right)^n};$$

$$\left[\begin{array}{l} u = t, \ dv = \dfrac{tdt}{\left(t^2 + s\right)^n} = \left(t^2 + s\right)^{-n} t\,dt = \varphi^{-n}\dfrac{d\varphi}{2}, \\ du = dt; \text{ де } \varphi = t^2 + s;\ d\varphi = 2t\,dt;\ tdt = \dfrac{d\varphi}{2}, \\ \quad v = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\varphi^{-n+1}}{-n+1} = -\dfrac{1}{2(n-1)\left(t^2 + s\right)^{n-1}} \end{array}\right];$$

$$\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2 + s\right)^n} = -\frac{t}{2(n-1)\left(t^2 + s\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2 + s\right)^{n-1}},$$

$$\int\frac{dt}{\left(t^2 + s\right)^n} = \frac{t}{2s(n-1)\left(t^2 + s\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2s(n-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2 + s\right)^{n-1}}. \qquad (4.1)$$

Формула (4.1) дає змогу перейти від інтеграла $\int\frac{dt}{\left(t^2 + s\right)^n}$ до інтеграла $\int\frac{dt}{\left(t^2 + s\right)^{n-1}}$.

Застосовуючи цю формулу декілька разів, здобудемо $\int\frac{dt}{t^2 + s}$, який виражається через елементарні функції. Формула (4.1) називається **рекурентною.** Зазначимо, що її можна використовувати і тоді, коли $b^2 - 4ac > 0$, тобто коли квадратний тричлен має дійсні корені. У цьому разі у кінцевому інтегралі дістаємо натуральний логарифм.

6. $\int\frac{Ax + B}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n}dx$.

Виконаємо деякі перетворення:

$$\int\frac{Ax + B}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n}dx = \int\frac{Ax}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n}dx + B\int\frac{dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n} =$$

$$= \frac{A}{2a}\int\left(ax^2 + bx + c\right)^{-n}(2ax + b)dx +$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}=\frac{A}{2a(1-n)}\left(ax^2+bx+c\right)^{-n+1}+$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}.$$

7. $\int\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Виконаємо підстановку

$$\frac{1}{mx+n}=t,\quad mx+n=\frac{1}{t},$$

звідки

$$x=\frac{1-nt}{mt},\quad mdx=-\frac{1}{t^2}dt,\quad dx=-\frac{1}{mt^2}dt.$$

Тепер

$$\int\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dt}{\sqrt{\left(an^2+m^2c-bmn\right)t^2+(b-2an)t+a}}.$$

Це інтеграл типу 3.

ВПРАВИ. Обчислити інтеграли і здобуті відповіді перевірити диференціюванням.

1. $\int\frac{dx}{x^2-6x+5}$. **2.** $\int\frac{dx}{x^2-4x+3}$. **3.** $\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$.

4. $\int\frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$. **5.** $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. **6.** $\int\frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. **8.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

§ 5. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖНИКИ

Розглянемо цілу раціональну відносно x функцію (многочлен)

$$f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\dots+c_n=P_n(x), \tag{5.1}$$

де c_0, c_1, ..., c_n — коефіцієнти.

Якщо $c_0=1$, то многочлен називається **зведеним.**

Будь-який многочлен можна зобразити зведеним.

Теорема. Для того щоб многочлен (5.1) тотожно дорівнював нулю, необхідно і достатньо, щоб всі його коефіцієнти дорівнювали нулю.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $P_n(x)=0$ для $x\in(-\infty,+\infty)$. Тоді

$$c_0x^n+c_1x^{n-1}+\dots+c_{n-1}x+c_n=0.$$

Ця рівність справджується при будь-якому x, у тому числі і при $x=0$. Покладаючи тут $x=0$, знаходимо, що $c_n=0$. Тепер рівність можна записати у вигляді

$$c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \ldots + c_{n-2}x + c_{n-1} = 0.$$

Покладаючи $x = 0$, знаходимо c_{n-1} і т. д.

Остаточно маємо

$$c_n = c_{n-1} = c_{n-2} = \cdots = c_0 = 0.$$

Достатність. Нехай у многочлені $P_n(x)$

$$c_n = c_{n-1} = c_{n-2} = \cdots = c_0 = 0.$$

Тоді при будь-якому $x \in (-\infty, +\infty)$

$$P_n(x) = 0.$$

Наслідок. *Для того щоб два многочлени $Q_n(x)$ і $P_n(x)$ однакових степенів були тотожно рівні між собою, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти при однакових степенях змінної многочленів були рівні між собою.*

Доведення. Нехай

$$\begin{matrix} Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n, \\ P_n(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n, \end{matrix} \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Необхідність. Припустимо, що

$$Q_n(x) = P_n(x). \tag{5.2}$$

Доведемо, що

$$b_0 = c_0,\ b_1 = c_1,\ \ldots,\ b_n = c_n. \tag{5.3}$$

Рівність (5.2) можна записати у вигляді

$$(b_0 - c_0)x^n + (b_1 - c_1)x^{n-1} + \ldots + (b_n - c_n) = 0.$$

З умови теореми випливає виконання рівностей (5.3).

Достатність пропонуємо довести самостійно.

5.1. Теорема Безу[1]. Основна теорема алгебри

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена (5.1) *на двочлен $x - a$ дорівнює значенню многочлена при $x = a$.*

Доведення. При діленні многочлена (5.1) на $x - a$ дістанемо многочлен степеня $n - 1$, тобто $P_{n-1}(x)$, а в остачі — число R. Тоді

$$f(x) = P_{n-1}(x)(x - a) + R.$$

Маємо тотожність, справедливу при будь-якому значенні x, у тому числі і при $x = a$. Підставляючи в останню рівність $x = a$, дістаємо

$$R = f(a) = P_n(a). \tag{5.4}$$

[1] Етьєн Безу (1730—1783) — французький математик.

Наслідок. *Якщо $x = a$ є коренем многочлена, тобто $P_n(a) = 0$, то многочлен (5.1) ділиться без остачі на $x - a$.*

***Теорема Гаусса* (основна теорема алгебри).** *Будь-яка ціла раціональна функція (5.1) не нижче першого степеня з будь-якими дійсними або комплексними коефіцієнтами має хоча б один корінь — дійсний або комплексний.*

Приймаємо теорему без доведення.

На підставі цієї теореми можна довести наступну теорему.

Теорема. *Будь-який многочлен (5.1) степеня n має рівно n коренів, враховуючи і кратні.*

Дійсно, за теоремою Гаусса многочлен (5.1) має хоча б один корінь, наприклад, a_1. Тоді за теоремою Безу

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - a_1).$$

Застосовуючи основну теорему алгебри і теорему Безу до многочлена $P_{n-1}(x)$, виявляємо, що $P_{n-1}(x)$ також має хоча б один корінь, наприклад a_2. Продовжуючи цей процес, виявляємо, з одного боку, що многочлен степеня n має точно n коренів, а з іншого —

$$P_n(x) = c_0(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n), \tag{5.5}$$

де $a_1, a_2, \ldots a_n$ — дійсні або комплексні корені многочлена.

5.2. Розкладання многочлена на лінійні і нелінійні множники

Вираз (5.5) називається **розкладом многочлена (цілої раціональної функції) на лінійні множники,** або **канонічною формою запису многочлена.** Якщо серед коренів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є рівні між собою (кратні) корені, то вираз (5.5) запишемо у вигляді

$$P_n(x) = c_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_m)^{k_m}, \tag{5.6}$$

де $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — кратності і $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Вираз (5.6) називається **розкладом многочлена на лінійні і нелінійні множники.**

Наприклад, у рівнянні $(x - 1)^5 (x + 2)^3 (x - 8) = 0$ корінь $a_1 = 1$ має кратність 5, корінь $a_2 = -2$ має кратність 3, а корінь $a_3 = 8$ має кратність 1.

Теорема. *Якщо многочлен (5.1) з дійсними коефіцієнтами має корінь $a + ib = z$, $b \neq 0$, то $a - bi = \bar{z}$ також є коренем цього многочлена.*

Доведення. Нехай $z = a + ib$, тоді $\bar{z} = a - ib$.

Доведемо, що для многочлена виконується рівність $P_n(\bar{z}) = 0$. Оскільки $P_n(z) = M + iN$, а $P_n(\bar{z}) = M - iN$, то за умовою тео-

реми
$$M + iN = 0,\ M = 0,\ N = 0.$$

Нехай тепер a_j — комплексний корінь многочлена (5.1). Тоді $\bar{a}_j$, за доведеним також є коренем многочлена (5.1). Розглянемо многочлен
$$(x - a_j)(x - \bar{a}_j) = x^2 - (a_j + \bar{a}_j)\,x + a_j\,\bar{a}_j.$$
Нехай $(a_j + \bar{a}_j) = p_j$, і $a_j\,\bar{a}_j = q_j$, де p_j і q_j — дійсні числа. Тоді
$$(x - a_j)(x - \bar{a}_j) = x^2 + p_j x + q_j,\ p_j^2 - 4\,q_j < 0.$$
Припустимо, що многочлен (5.1) має m дійсних коренів відповідно кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_m$ і s попарно спряжених коренів кратностей $l_1, l_2, \ldots, l_s$. Тоді розклад (5.6) можна записати у вигляді
$$P_n(x) = c_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_m)^{k_m} \times$$
$$\times \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{l_2} \cdots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s}, \tag{5.7}$$
де
$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m + 2l_1 + 2l_2 + \ldots + 2l_s = n.$$

Якщо комплексно-спряжені корені позначити через z_j і $\bar{z}_j$, то розклад (5.7) набирає вигляду
$$P_n(x) = c_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_m)^{k_m} \times$$
$$\times (x - z_{m+1})^{l_1} (x - \bar{z}_{m+1})^{l_1} \cdots (x - z_s)^{l_s} (x - \bar{z}_s)^{l_s}.$$

§ 6. РОЗКЛАДАННЯ ПРАВИЛЬНОГО РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ НА ЕЛЕМЕНТАРНІ

Дроби
$$\frac{A}{ax+b},\quad \frac{A}{(ax+b)^m},\quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},\quad \frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^m},$$
де $m \ge 2$; A, B, a, b, c — дійсні числа і $D = b^2 - 4ac < 0$, називаються **елементарними**, або **найпростішими дробами.**

Елементарними називають також дроби
$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^m},\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\quad \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^m},$$
де $m \ge 2$; A, B, p, q, a — дійсні числа; $\frac{p^2}{4} - q < 0$, тобто квадратний тричлен не має дійсних коренів. Числа A і B називаються **невизначеними коефіцієнтами.**

Відношення двох многочленів

$$R(x)=\frac{Q_r(x)}{P_n(x)} \tag{6.1}$$

називають **правильним раціональним дробом,** якщо $r < n$, і **неправильним,** якщо $r \geq n$.

Якщо дріб (6.1) неправильний, то його завжди можна подати у вигляді алгебраїчної суми многочлена і правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)} = M(x) + \frac{Q_{r_1}(x)}{P_n(x)}, \tag{6.2}$$

де $r_1 < n$.

Розглянемо тепер правильний дріб (6.1) і доведемо наступну теорему.

Теорема. Будь-який правильний раціональний дріб можна єдиним способом подати у вигляді суми скінченного числа елементарних дробів. Якщо многочлен $P_n(x)$ зображено у вигляді (5.7), *то відношення* (6.1) *подамо у вигляді*

$$R(x)=\frac{Q_r(x)}{P_n(x)}=$$

$$=\frac{Q_r(x)}{c_0(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}=$$

$$=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{(x-a_2)}+\frac{B_2}{(x-a_2)^2}+\cdots+$$

$$+\frac{B_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+$$

$$+\frac{M_{l_1}x+N_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\cdots+\frac{R_1x+z_1}{x^2+p_sx+q_s}+$$

$$+\frac{R_2x+z_2}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\cdots+\frac{R_{l_s}x+z_{l_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}. \tag{6.3}$$

Вираз (6.3) називається **розкладом правильного раціонального дробу на елементарні.**

Доведення. Виконаємо спочатку доведення для кратних дійсних коренів.

Якщо a_1 — корінь кратності k_1 рівняння $P_n(x) = 0$, то $P_n(x)$, за теоремою Безу, ділиться без остачі на $(x-a_1)^{k_1}$, тобто

$$P_n(x) = (x-a_1)^{k_1} P_{n-k_1}(x),$$

де $P_{n-k_1}(a_1) \neq 0$. Покажемо це:

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)} = \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{Q_{r_1}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1} P_{n-k_1}(x)}, \qquad (6.4)$$

де $Q_{r_1}(x)$ — многочлен, степінь якого нижче степеня многочлена, що міститься у знаменнику дробу (6.4).

Розглянемо тотожність:

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)} = \frac{Q_r(x)}{P_n(x)} - \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}. \qquad (6.5)$$

Виконаємо деякі перетворення:

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)} - \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} = \frac{Q_r(x)}{(x-a_1)^{k_1} P_{n-k_1}(x)} - \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} =$$

$$= \frac{Q_r(x) - A_{k_1} P_{n-k_1}(x)}{(x-a_1)^{k_1} P_{n-k_1}(x)}. \qquad (6.6)$$

Підберемо A_{k_1}, таким чином, щоб многочлен $Q_r(x) - A_{k_1} P_{n-k_1}(x)$ ділився націло на $x - a_1$. За теоремою Безу це можливо, якщо

$$Q_r(a_1) - A_{k_1} P_{n-k_1}(a_1) = 0.$$

Звідси

$$A_{k_1} = \frac{Q_r(a_1)}{P_{n-k_1}(a_1)},$$

де A_{k_1} — певне число, оскільки

$$P_{n-k_1}(a_1) \neq 0.$$

В результаті ділення $Q_r(x) - A_{k_1} P_{n-k_1}(x)$ на $x - a_1$ дістанемо многочлен $Q_{r_1}(x)$, степінь якого не менш як на одиницю менший степеня многочлена, розміщеного у знаменнику. Отже,

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)} - \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} = \frac{Q_{r_1}(x)(x-a_1)}{(x-a_1)^{k_1} P_{n-k_1}(x)} = \frac{Q_{r_1}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1} P_{n-k_1}(x)}. \qquad (6.7)$$

Замінивши у виразі (6.5) перший і другий доданки на вираз (6.7), дістаємо

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)} = \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{Q_{r_1}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1} P_{n-k_1}(x)}.$$

Якщо до правильного дробу

$$\frac{Q_{r_1}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}P_{n-k_1}(x)}=\frac{Q_{r_1}(x)}{P_{n-1}(x)}$$

застосувати такі самі міркування, то знайдемо

$$\frac{Q_{r_1}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}P_{n-k_1}(x)}=\frac{A_{k_1-1}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\frac{Q_{r_2}(x)}{(x-a_1)^{k_1-2}P_{n-k_1}(x)}.$$

Продовжуючи цей процес до вичерпання множників перед $P_{n-k_1}(x)$, дістанемо

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)}=\frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_{k_1-1}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\frac{A_{k_1-2}}{(x-a_1)^{k_1-2}}+\dots+$$

$$+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{Q_{rk_1}(x)}{P_{n-k_1}(x)}.$$

Ці самі міркування можна застосувати до дробу

$$\frac{Q_{rk_1}(x)}{P_{n-k_1}(x)}.$$

В результаті цього дістанемо елементарні дроби з невизначеними коефіцієнтами.

Якщо аналогічно міркувати стосовно комплексно-спряжених коренів, то замість одного невизначеного коефіцієнта у розкладі (6.5) матимемо два невизначених коефіцієнти. Вони визначаються за умови, що многочлен, який міститься у чисельнику правої частини рівності (6.6), ділиться націло на x^2+px+q, тобто цей многочлен має корені $z=\alpha+i\beta$ і $\bar{z}=\alpha-i\beta$.

Приклад. Розкласти на елементарні дроби правильний дріб

$$\frac{x^3+2x+1}{x(x+6)^3(x^2+3x+4)^2}.$$

Розв'язання. Для x маємо один дріб $\frac{A}{x}$, для $(x-6)^3$ — три:

$$\frac{B_1}{(x+6)^3},\ \frac{B_2}{(x+6)^2},\ \frac{B_3}{x+6}.$$

Щоб знайти елементарні дроби для множника $(x^2+3x+4)^2$, треба перевірити, які корені має квадратний тричлен. Якщо вони комплексні, то елементарні дроби у класі дійсних чисел мають вигляд

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

а якщо дійсні, то

$$\frac{A}{(x-a)^m}.$$

У даному разі $D=b^2-4ac=9-4\cdot1\cdot4=-7<0$, тобто корені комплексно-спряжені, а тому множнику $(x^2+3x+4)^2$ відповідають елементарні дроби

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+3x+4)^2} \text{ і } \frac{M_2x+N_2}{x^2+3x+4}.$$

Відповідь. $\dfrac{x^3+2x+1}{x(x+6)^3(x^2+3x+4)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B_1}{(x+6)^3}+\dfrac{B_2}{(x+6)^2}+\dfrac{B_3}{x+6}+$
$+\dfrac{M_1x+N_1}{(x^2+3x+4)^2}+\dfrac{M_2x+N_2}{x^2+3x+4}$, де A_1, B_1, B_2, B_3, M_1, N_1, M_2, N_2 — невизначені коефіцієнти.

ВПРАВИ. Розкласти на елементарні дроби:

а) $\dfrac{1}{(x-1)^3(x^2-5x+6)^3}$; б) $\dfrac{1}{x^3(x-3)^2}$; в) $\dfrac{1}{(x^2+x+1)^3}$.

Відповідь. а) $\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2}{(x-1)^2}+\dfrac{A_3}{(x-1)^3}+\dfrac{B_1}{x-3}+\dfrac{B_2}{(x-3)^2}+\dfrac{B_3}{(x-3)^3}+$
$+\dfrac{C_1}{x-2}+\dfrac{C_2}{(x-2)^2}+\dfrac{C_3}{(x-2)^3}$;

б) $\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{A_2}{x^2}+\dfrac{A_3}{x^3}+\dfrac{B_1}{x-3}+\dfrac{B_2}{(x-3)^2}$;

в) $\dfrac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\dfrac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}+\dfrac{M_3x+N_3}{(x^2+x+1)^3}$.

§ 7. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Нехай треба знайти

$$\int R(x)dx=\int\frac{Q_r(x)}{P_n(x)}dx. \tag{7.1}$$

Враховуючи рівність (6.2), можна інтеграл (7.1) подати у вигляді

$$\int\frac{Q_r(x)}{P_n(x)}dx=\int(\textit{многочлен})dx+\int\frac{Q_{r_1}(x)}{P_n(x)}dx, \tag{7.2}$$

тобто задача зводиться до обчислення інтеграла від правильного раціонального дробу.

Якщо тепер скористатися виразом (6.3), то задача інтегрування раціональних дробів зводиться до обчислення інтегралів типу

$$\int\frac{dx}{x-a},\ \int\frac{A\,dx}{(x-a)^k},\ \int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx,\ \int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx.$$

Всі ці інтеграли виражаються через елементарні функції. Таким чином, задача інтегрування раціональних виразів повністю розв'язана.

Теорема. *Інтеграл від будь-якої раціональної функції будь-якого дійсного аргументу виражається через елементарні функції.*

§ 8. МЕТОДИ ВІДШУКАННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ У РОЗКЛАДІ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ НА ЕЛЕМЕНТАРНІ

Розглянемо такі методи відшукання невизначених коефіцієнтів: *метод порівняння коефіцієнтів при однакових степенях змінної двох многочленів, метод надання аргументу довільних (підхожих) значень, метод множення і метод диференціювання.*

8.1. Метод порівняння коефіцієнтів

Якщо дроби (6.3) звести до спільного знаменника і відкинути його, то дістанемо тотожність, у лівій частині якої маємо многочлен з відомими коефіцієнтами, а у правій — з невідомими.

На підставі наслідку з § 5 два многочлени (5.2) будуть тотожно рівними, якщо коефіцієнти при однакових степенях змінної многочленів будуть рівними між собою. Дістанемо систему лінійних рівнянь для відшукання невизначених коефіцієнтів.

Наприклад,

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1},$$

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1),$$

$$\begin{cases} A + C = 0; \\ B - A = 1; \\ C - B = 0. \end{cases} \quad C = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2},\ A = -\frac{1}{2}.$$

8.2. Метод довільних (підхожих) значень аргументу

Якщо у тотожності (5.2) надавати x конкретних значень стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів, то дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{x^2-2}{x^5+4x^4+4x^3}dx.$$

Розв'язання. Задача зводиться до розкладання правильного раціонального дробу

$$\frac{x^2-2}{x^5+4x^4+4x^3}$$

на елементарні.

Можна легко помітити, що знаменник $x^5 + 4x^4 + 4x^3 = x^3\ (x + 2)^2$ має дійсні корені 0 і −2 відповідно кратності 3 і 2. Тоді

$$\frac{x^2-2}{x^5+4x^4+4x^3} = \frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2}. \qquad (8.1)$$

Знайдемо коефіцієнти A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 спочатку методом порівняння. Звівши рівність (8.1) до спільного знаменника та помноживши на нього обидві частини цієї рівності, дістанемо

$$x^2-2=A_1\left(x^4+4x^3+4x^2\right)+A_2\left(x^3+4x^2+4x\right)+$$
$$+A_3\left(x^2+4x\ +4\right)+B_1\left(x^4+2x^3\right)+B_2x^3;$$
$$0\cdot x^4+0\cdot x^3+1\cdot x^2+0\cdot x-2=\left(A_1+B_1\right)x^4+\left(4A_1+A_2+2B_1+B_2\right)x^3+$$
$$+\left(4A_1+A_3+4A_2\right)x^2+\left(4A_2+4A_3\right)x+4A_3;$$

$$\begin{array}{c|l|l}
x^4 & A_1+B_1=0, & A_3=-\dfrac{1}{2}, \\
x^3 & A_2+4A_1+2B_1+B_2=0, & A_2=\dfrac{1}{2}, \\
x^2 & 4A_1+A_3+4A_2=1, & 2-\dfrac{1}{2}+4A_1=1;\ A_1=-\dfrac{1}{8}, \\
x & 4A_2+4A_3=0, & B_1=\dfrac{1}{8}, \\
x^0 & 4A_3=-2. & B_2=-\dfrac{1}{4}.
\end{array}$$

Щоб застосувати метод довільних (підхожих) значень, треба після зведення до спільного знаменника не розкривати дужки у додаткових множниках, оскільки вирази у дужках часто визначають те значення, яке треба вибрати для найпростішого відшукання значення невизначених коефіцієнтів.

Наприклад,

$$x^2-2=A_1(x+2)^2x^2+A_2(x+2)^2x+A_3(x+2)^2+B_1x^3(x+2)+B_2x^3.$$

Якщо тут покласти $x=0$, то дістанемо $4A_3=-2$, звідки $A_3=-\dfrac{1}{2}$. Поклавши $x=-2$, маємо $B_2\cdot(-8)=2$, або $B_2=-\dfrac{1}{4}$.

Отже,

$$\frac{1}{2}(x+2)^2+\frac{1}{4}x^3+x^2-2=(x+2)x\left[A_1(x+2)\ x+A_2(x+2)+B_1x^2\right]. \qquad (8.2)$$

До цього многочлена можна застосувати метод порівняння коефіцієнтів.

Насамперед у лівій частині рівності (8.2) виконаємо всі вказані дії. При цьому завжди спільний множник правої частини (тут $(x+2)\ x$) буде і в лівій частині. Після ділення обох частин рівності на цей множник можна застосувати метод порівняння або метод довільних значень аргументу. Перетворимо ліву частину рівності (8.2):

$$\frac{1}{2}(x+2)^2+\frac{1}{4}x^3+x^2-2=\frac{1}{2}x^2+2x+2+\frac{1}{4}x^3+x^2-2=$$
$$=x\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2\right)=\frac{1}{4}x\left(x^2+6x+8\right)=\frac{1}{4}x(x+4)(x+2). \qquad (8.3)$$

Підставляючи вираз (8.3) у рівність (8.2), маємо

$$\frac{x+4}{4} = A_1(x+2)x + A_2(x+2) + B_1x^2.$$

Знову застосуємо метод довільних значень аргументу. При $x = 0$ маємо $1 = 2A_2$, $A_2 = \frac{1}{2}$. При $x = -2$ дістаємо $B_1 \cdot 4 = \frac{1}{2}$, $B_1 = \frac{1}{8}$. Щоб визначити A_1, можна покласти $x = -1$. Тоді

$$\frac{3}{4} = -A_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}, \quad A_1 = \frac{5}{8} - \frac{6}{8} = -\frac{1}{8}.$$

8.3. Метод множення

Нехай треба визначити коефіцієнт A_{k_1} у рівнянні (6.3), тобто знайти коефіцієнт при вищому степені двочлена $x - a_1$, розміщеного у знаменнику. Помножимо обидві частини тотожності (6.3) на $(x - a_1)^{k_1}$. Тоді у правій частині залишаться A_{k_1} і доданки, де множником є двочлен $(x - a_1)$ не менше, як у першому степені. Позначимо ці доданки через $\Phi(x)$. Тоді

$$\frac{Q_r(x)}{P_{n-k_1}(x)} = A_{k_1} + \Phi(x)(x - a_1). \tag{8.4}$$

Поклавши тут $x = a_1$, дістанемо

$$A_{k_1} = \frac{Q_r(a_1)}{P_{n-k_1}(a_1)}.$$

Після цього переносимо член, що містить $\frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}$, до лівої частини рівності і виконуємо відповідні дії.

Після перетворення лівої частини рівності можна застосувати попередні міркування до дробу

$$\frac{A_{k_1-1}}{(x-a_1)^{k_1-1}}$$

і т. д., до вичерпання всіх коефіцієнтів A_1, A_2, ..., A_{k_1}. Потім ці міркування повторюємо для інших коефіцієнтів.

Метод множення застосовується як для дійсних, так і для комплексних коренів.

Звернімо увагу на чітке дотримання описаного вище порядку визначення невизначених коефіцієнтів. Наприклад, не можна визначати A_{k_1-1}, якщо не визначено A_{k_1}.

Наприклад, у рівності (8.1) за методом множення спочатку визначаємо коефіцієнт A_3. Помноживши (8.1) на x^3, дістанемо

$$\frac{x^2-2}{(x+2)^2} = A_1x^2 + A_2x + A_3 + \frac{B_1}{x+2}x^3 + \frac{B_2}{(x+2)^2}x^3.$$

Запишемо цей вираз у вигляді

$$\frac{x^2-2}{(x+2)^2}=A_3+x\Phi(x), \tag{8.5}$$

де вираз

$$\Phi(x)=\left[A_1x+A_2+\frac{B_1x^2}{x+2}+\frac{B_2x^2}{(x+2)^2}\right]$$

не містить у знаменнику множника x. Рівність (8.5) має зміст при $x=0$. Тоді

$$A_3=\frac{0-2}{(0+2)^2}=-\frac{1}{2}.$$

Якщо одразу визначити коефіцієнт A_2, то не можна використати умову $x=0$. Щоб знайти A_2, треба рівність (8.1) записати у вигляді

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}+\frac{1}{2x^3}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}. \tag{8.6}$$

Виконаємо дії у лівій частині:

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}+\frac{1}{2x^3}=\frac{1}{x^3}\left[\frac{2x^2-4+x^2+4x+4}{2(x+2)^2}\right]=$$

$$=\frac{x(3x+4)}{2x^3(x+2)^2}=\frac{3x+4}{2x^2(x+2)^2}. \tag{8.7}$$

Підставимо вираз (8.7) у рівність (8.6):

$$\frac{3x+4}{2x^2(x+2)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}. \tag{8.8}$$

У лівій частині цієї рівності і в одному із знаменників правої частини маємо x^2. Цей факт є загальним. Якщо в рівності (6.3) перенести дріб $\frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}$ до лівої частини і виконати відповідні дії, то дістанемо вираз, що містить у знаменнику вираз $(x-a_1)^{k_1-1}$. Отже, рівності (8.1) і (8.8) еквівалентні. Помноживши обидві частини рівності (8.8) на x^2, знаходимо

$$\frac{3x+4}{2(x+2)^2}=A_2+\Phi_1(x)x, \tag{8.9}$$

де

$$\Phi_1(x)=A_1+\frac{B_1x}{x+2}+\frac{B_1x}{(x+2)^2}.$$

Поклавши в рівності (8.9) $x=0$, знаходимо $A_2=\frac{1}{2}$. Далі маємо

$$\frac{3x+4}{2x^2(x+2)^2}-\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{3x+4-x^2-4x-4}{(x+2)^2}=$$
$$=\frac{-x(x+1)}{2x^2(x+2)^2}=-\frac{1+x}{2x(x+2)};\quad -\frac{1+x}{2x(x+2)}=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}. \tag{8.10}$$

Помноживши обидві частини (8.10) на x, знайдемо

$$-\frac{1+x}{2(x+2)} = A_1 + \Phi_2(x)x.$$

При $x = 0$ маємо $A_1 = -\frac{1}{8}$. Аналогічно визначаються коефіцієнти B_2 і B_1.

Досить просто методом множення знаходять невизначені коефіцієнти для простих коренів.

Приклад. Знайти коефіцієнти A_1, A_2, A_3, A_4 у розкладі

$$\frac{1}{x(x+2)(x-1)(x+4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{x+4}. \tag{8.11}$$

Розв'язання. Помноживши обидві частини рівності (8.11) на x, знайдемо

$$\frac{1}{x(x+2)(x-1)(x+4)} = A_1 + \Phi_1(x)x,$$

де $\Phi_1(x)$ — певне число при $x = 0$, тоді

$$A_1 = \frac{1}{2\cdot(-1)\cdot 4} = -\frac{1}{8}.$$

Аналогічно, помноживши рівність (8.11) на $x + 2$ і поклавши у здобутому виразі $x = -2$, маємо

$$A_2 = \frac{1}{(-2)(-2-1)(-2+4)} = \frac{1}{12}, \quad A_3 = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} = \frac{1}{15},$$

$$A_4 = \frac{1}{(-4)(-4+2)(-4-1)} = -\frac{1}{40}.$$

8.4. Метод послідовного диференціювання

Припускаючи, що серед коренів многочлена (5.6) є комплексні корені, запишемо

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{Q_{r_1}(x)}{P_{n-k_1}(x)}. \tag{8.12}$$

Помноживши цю рівність на $(x-a_1)^{k_1}$, дістанемо

$$\frac{Q_r(x)}{P_{n-k_1}(x)} = A_{k_1} + A_{k_1-1}(x-a_1) + \cdots + A_1(x-a_1)^{k_1-1} +$$

$$+(x-a_1)^{k_1}\frac{Q_{r_1}(x)}{P_{n-k_1}(x)}. \tag{8.13}$$

Обчислимо похідні до $(k_1 - 1)$-го порядку від обох частин останньої рівності:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{Q_r(x)}{P_{n-k_1}(x)}\right] = A_{k_1-1} + 2A_{k_1-2}(x-a_1) + \cdots +$$

$$+(k_1-1)A_1\times(x-a_1)^{k_1-2}+\frac{d}{dx}\left[(x-a_1)^{k_1}\frac{Q_{r_1}(x)}{P_{n-k_1}(x)}\right],$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{Q_r(x)}{P_{n-k_1}(x)}\right]=2!A_{k_1-2}+\cdots+(k_1-1)(k_1-2)A_1(x-a_1)^{k_1-3}+$$

$$+\frac{d^2}{dx^2}\left[(x-a_1)^{k_1}\frac{Q_{r_1}(x)}{P_{n-k_1}(x)}\right],$$

. . . .

$$\frac{d^{k_1-1}}{dx^{k_1-1}}\left[\frac{Q_r(x)}{P_{n-k_1}(x)}\right]=(k_1-1)!A_1+\frac{d^{k_1-1}}{dx^{k_1-1}}\left[(x-a_1)^{k_1}\frac{Q_{r_1}(x)}{P_{n-k_1}(x)}\right]. \tag{8.14}$$

Поклавши у виразах (8.13) і (8.14) $x=a_1$, дістанемо

$$A_{k_1}=\left[\frac{Q_r(x)}{P_{n-k_1}(x)}\right]\Bigg|_{x=a_1},\ A_{k_1-1}=\frac{d}{dx}\left[\frac{Q_r(x)}{P_{n-k_1}(x)}\right]\Bigg|_{x=a_1},\ldots$$

$$\ldots,\ A_1=\frac{1}{(k_1-1)!}\frac{d^{k_1-1}}{dx^{k_1-1}}\left[\frac{Q_r(x)}{P_{n-k_1}(x)}\right]\Bigg|_{x=a_1}.$$

Запропонована методика справедлива і для інших коефіцієнтів типу $B_1, B_2, \ldots, B_{k_2}$, у виразі (6.3). Нехай в рівності (8.12) многочлен $P_n(x)$ має лише прості корені $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тоді

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\cdots+\frac{A_n}{x-x_n}.$$

Після множення на $x-x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, враховуючи, що $P_n(x_i)=0$, знаходимо

$$A_i=\frac{Q_r(x)}{\dfrac{P_n(x)-P_n(x_i)}{x-x_i}}.$$

Переходячи до границі при $x\to x_i$, маємо

$$A_i=\frac{Q_r(x_i)}{\left.\dfrac{dP_n(x)}{dx}\right|_{x=x_i}}.$$

Якщо ця методика застосовується і для комплексних коренів, то A_i можуть бути і комплексними. Після додавання членів, що містять комплексно-спряжені корені, дістанемо вираз з дійсними коефіцієнтами.

Наприклад, розглянемо знову рівність (8.1). Помноживши обидві частини цієї рівності на x^3, дістанемо

$$\frac{x^2-2}{(x+2)^2}=A_3+A_2x+A_1x^2+x^3\psi(x),$$

де

$$\psi(x)=\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}.$$

Тоді

$$A_3=\left.\frac{x^2-2}{(x+2)^2}\right|_{x=0}=-\frac{1}{2},$$

$$A_2=\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-2}{(x+2)^2}\right)\right|_{x=0}=\left.\frac{(x+2)^2\cdot 2x-(x+2)\cdot 2\left(x^2-2\right)}{(x+2)^4}\right|_{x=0}=\frac{2^3}{2^4}=\frac{1}{2},$$

$$A_1=\left.\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2-2}{(x+2)^2}\right)\right|_{x=0}=-\frac{1}{8}.$$

Для визначення коефіцієнтів B_1 і B_2 помножимо обидві частини рівності (8.1) на $(x+2)^2$:

$$\frac{x^2-2}{x^3}=B_2+B_1(x+2)+\lambda(x)(x+2)^2,$$

де

$$\lambda(x)=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3},$$

тоді

$$B_2=\left.\left(\frac{x^2-2}{x^3}\right)\right|_{x=-2}=\frac{4-2}{-8}=-\frac{1}{4},$$

$$B_1=\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-2}{x^3}\right)\right|_{x=-2}=\left.\frac{x^3\cdot 2x-\left(x^2-2\right)\cdot 3x^2}{x^6}\right|_{x=-2}=$$

$$=\left.\frac{2x^2-3x^2+6}{x^4}\right|_{x=-2}=\left.\frac{-x^2+6}{x^4}\right|_{x=-2}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}.$$

ВПРАВА. Обчислити інтеграли:

а) $\int\frac{x^4}{\left(x^2-1\right)(x+2)}dx$; б) $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$; в) $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$;

г) $\int\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$; д) $\int\frac{dx}{x^3+1}$; е) $\int\frac{x^5}{x^3-1}dx$;

Відповідь. а) $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C$;

б) $2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$; в) $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x+4}+C$;

г) $\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$;

д) $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

е) $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x^2+x+1|+C$.

§ 9. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ, ДО ЯКИХ ВХОДЯТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Теорема 1. *Інтеграл від раціональної функції, аргументами якої є тригонометричні функції, тобто інтеграл типу*

$$\int R(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \sec x,\ \operatorname{cosec} x)dx,$$

за допомогою підстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ *зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно нової змінної* t: $\int R_1(t)dt$, *а отже, виражається через елементарні функції.*

Доведення. Запишемо тригонометричні функції, що входять до підінтегрального виразу, через t:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2},\ \operatorname{ctg} x=\frac{1-t^2}{2t},$$

$$\sec x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\ \operatorname{cosec} x=\frac{1+t^2}{2t},$$

$$x=2\operatorname{arctg} t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Підставляючи ці вирази замість відповідних функцій під знак раціональної функції, дістанемо $\int R_1(t)dt$. Підстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ називають універсальною. Хоча вона доцільна у будь-якому випадку, частіше користуються підстановками $\sin x = t$, $\cos x = t$, що приводять до простіших інтегралів.

Розглянемо окремі випадки.

Теорема 2. *Якщо* $R(\sin x, \cos x)$ *є непарною функцією відносно* $\sin x$ або $\cos x$, *тобто*

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то можна скористатися підстановкою

$$t = \cos x \text{ або } t = \sin x.$$

Теорема 3. *Якщо* $R(\sin x, \cos x)$ *є парною функцією відносно* $\sin x$ і $\cos x$ *одночасно, тобто*

$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, \cos x),$$

то інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки* $\operatorname{tg} x = t$.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Розв'язання. Нехай

$$t = \operatorname{tg} x, \; dt = \sec^2 x dx,$$

$$dx = \frac{dt}{\sec^2 x} = \frac{dt}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{dt}{1 + t^2}, \quad \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x},$$

тоді

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{t dt}{(1 + t)(1 + t^2)}.$$

Дістали інтеграл від правильного раціонального дробу, який легко можна виразити через елементарні функції.

Наведемо деякі окремі випадки теорем 1—3.

1. Інтеграл $\int R(\sin x)\cos x\, dx$ підстановкою $\sin x = t$ зводиться до інтеграла $\int R(t)dt$.

2. Інтеграл $\int R(\cos x)\sin x\, dx$ підстановкою $\cos x = t$ зводиться до інтеграла $-\int R(t)dt$.

3. Інтеграл $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ підстановкою $\operatorname{tg} x = t$ зводиться до інтеграла $\int R(t)\frac{dt}{1 + t^2}$.

9.1. Інтеграли від добутку синуса і косинуса

1. $\int \sin px \cos qx\, dx, \int \sin px \sin qx\, dx, \int \cos px \cos qx\, dx,$

де $p \neq \pm q$, $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Нагадаємо спочатку відомі з курсу математики середньої школи деякі формули:

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)],$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)],$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)].$$

Тоді

$$\int \sin px \cos qx dx = \frac{1}{2} \int [\sin(p+q)x + \sin(p-q)x] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(p+q)x}{p+q} - \frac{\cos(p-q)x}{p-q}\right] + C,$$

$$\int \cos px \cos qx dx = \frac{1}{2} \int [\cos(p+q)x + \cos(p-q)x] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right] + C,$$

$$\int \sin px \sin qx dx = -\frac{1}{2} \int [\cos(p+q)x - \cos(p-q)x] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right] + C.$$

2. Інтеграли від степеня однієї тригонометричної функції

$$\int \sin^m x dx, \ \int \cos^m x dx, \ \int \mathrm{tg}^m x dx, \ \int \mathrm{ctg}^m x dx$$

обчислюють інтегруванням частинами або заміною змінної.

3. Інтеграли, що містять добуток степенів синусів і косинусів,

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Нехай m, n — цілі додатні або від'ємні числа і одне з цих чисел непарне, наприклад $n = 2p + 1$, тоді

$$I = \int \sin^m x \left(1 - \sin^2 x\right)^p \cos x dx, \ \sin x = t,$$

$$I = \int \sin^m x \left(1 - \sin^2 x\right)^p \cos x dx = \int t^m \left(1 - t^2\right)^p dt.$$

Якщо непарним буде число $m = 2k + 1$, то слід застосувати підстановку $t = \cos x$. Обчислення цього інтеграла здійснюється за теоремою 2.

Якщо m і n — цілі додатні парні числа, то

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2k} x dx = \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int (1 - \cos 2x)^p (1 + \cos 2x)^q \frac{dx}{2^{p+q}}.$$

Якщо числа m і n — цілі парні, але одне з них від'ємне, то можна скористатися підстановкою tg $x = t$. Наприклад,

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{t^6} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^6} + \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{5t^5} - \frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.$$

Якщо обидва показники степеня мають однакову парність і від'ємні, то зручно користуватися підстановкою tg $x = t$.

Наприклад,

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} = [t = \operatorname{tg} x,\ m = 5,\ n = 3] = \int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{5+3}{2}-1}}{\operatorname{tg}^5 x} d\operatorname{tg} x =$$

$$= \int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^5} dt = \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^5} dt = \int t^{-5}dt + 3\int t^{-3}dt +$$

$$+ 3\int \frac{dt}{t} + \int t\,dt = \frac{t^{-4}}{-4} + \frac{3t^{-2}}{-2} + 3\ln|t| + \frac{t^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 3\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x + C.$$

ВПРАВА. Обчислити інтеграли:

а) $\int \sin^5 x dx$; б) $\int \cos^6 x dx$; в) $\int \sin x \sin^3 x dx$; г) $\int \cos 4x \cos 7x dx$.

Відповідь. а) $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$;

б) $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$;

в) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$; г) $\frac{1}{22}\sin 11x + \frac{1}{6}\sin 3x + C$.

§ 10. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Раніше зазначалося, що інтеграли типу

$$\int \frac{\sin x}{x} dx;\ \int \frac{\cos x}{x} dx;\ \int e^{-x^2} dx$$

через елементарні функції не виражаються в скінченному вигляді.

Інтеграли, які не виражаються через елементарні функції в скінченному вигляді, часто зустрічаються при інтегруванні функцій, що містять радикали:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \tag{10.1}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \tag{10.2}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{R_m(x)}\right) dx. \tag{10.3}$$

Останній інтеграл при $n > 2$ і $m > 4$ не виражається через елементарні функції і не обчислюється у скінченному вигляді. Інтеграли такого типу називаються **ультраеліптичними.** Якщо покласти $n = 2$, а $m = 3$ і $m = 4$, то ці інтеграли також не виражаються через елементарні функції у скінченному вигляді. Такі інтеграли називаються **еліптичними.** Що ж стосується інтегралів (10.1) і (10.2), то і вони не завжди виражаються через елементарні функції. Розглянемо інтеграл (10.1).

Теорема 1*. Інтеграл*

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \tag{10.4}$$

підстановкою

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{при } ad \neq bc \tag{10.5}$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції від t.

Доведення. Із співвідношення (10.5) знаходимо

$$cxt^n + t^n d = ax + b, \quad x(ct^n - a) = b - dt^n,$$

$$x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a}, \quad dx = R_1(t)dt,$$

де $R_1(t)$ — раціональна відносно t функція. Тоді

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n - a}, t\right)R_1(t)dt = \int R_2(t)dt.$$

Наприклад,

$$\int \frac{x + \sqrt{\frac{3x+1}{3x-7}}}{\sqrt{\frac{3x+1}{3x-7}}}dx = \left[\begin{array}{c} t^2 = \frac{3x+1}{3x-7}, x = \frac{1+7t^2}{3t^2-3} \\ dx = -\frac{48t}{(3t^2-3)^2}dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\left(\frac{1+7t^2}{3t^2-3} + t\right)(-48t)}{t(3t^2-3)^2}dt = -\frac{16}{9}\int \frac{3t^3 + 7t^2 - 3t + 1}{(3t^2-3)^2}dt =$$

$$= \frac{16}{9}\left[\frac{2t}{(t^2-1)^2} + \frac{t+3}{t^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right] + C,$$

де $t = \sqrt{\frac{3x+1}{3x-1}}$.

Теорема 2*. Інтеграл*

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$

за допомогою підстановки

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},$$

де n — найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, зводиться до інтеграла від раціональної функції. Очевидною є також підстановка

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_i}{n_i}\cdot n} = t^{r_i},$$

де r_i — ціле число.

Наслідок 1. *Теорема справедлива при $c = 0$, $d = 1$, тобто інтеграл*

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції підстановкою

$$(ax+b) = t^n,$$

де n — найменше спільне кратне цілих чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Наслідок 2. *Теорема справедлива при $c = 0$, $d = 1$, $a = 1$, $b = 0$. Інтеграл запишемо у вигляді*

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$$

а підстановка має вигляд $t^n = x$.

Наприклад,

$$\int \sqrt{x^3}\,(1+x^2)(2\sqrt{x}-x)^2dx = \left[x = t^2,\ dx = 2tdt\right] =$$

$$= \int t^3(1+t^4)(2t-t^2)^2\,2tdt = 2\int(t^4+t^8)(4t^2-4t^3+t^4)dt =$$

$$= 2\int(4t^6-4t^7+t^8+4t^{10}-4t^{11}+t^{12})dt = \frac{8}{7}t^7 - t^8 + \frac{2}{9}t^9 + \frac{8}{11}t^{11} -$$

$$-\frac{2}{3}t^{12} + \frac{2}{13}t^{13} + C = \frac{8}{7}x^{\frac{7}{2}} - x^4 + \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} +$$

$$+\frac{8}{11}x^{\frac{11}{2}} - \frac{2}{3}x^6 + \frac{2}{13}x^{\frac{13}{2}} + C.$$

ВПРАВА. Обчислити інтеграли:

а) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$; б) $\int\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx$; в) $\int\frac{\sqrt{1-x}}{x^2\sqrt{1+x}}dx$;

г) $\int\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx$.

Відповідь. а) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}-\frac{4}{3}\ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|-\frac{4}{3}\ln\left|x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1\right|+C$;

б) $24\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{12}}}{x^{\frac{1}{12}}+1}\right|+12x^{-\frac{1}{12}}-6x^{\frac{1}{6}}+C$;

в) $\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right|-\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right|+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right)^{-1}+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right)^{-1}+C$;

г) $\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}}+\frac{11}{2}\left(t+\sqrt{3}\right)^{-1}+\frac{11}{2}\left(t-\sqrt{3}\right)^{-1}+C$, де $t^2=\frac{2+3x}{x-3}$.

§ 11. ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ БІНОМІВ

Вираз типу $x^m\,(a+bx^n)^p dx$, де m, n, p — сталі раціональні числа, а a і b — будь-які сталі числа, називається **диференціальним біномом.**

Розглянемо інтеграл

$$I=\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx.$$

Теорема. *Інтеграл від диференціального бінома виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:*

1) *p — ціле число (додатне, від'ємне або 0) і введено підстановку $x=t^s$, де s — найменший спільний знаменник дробів m і n;*

2) *$\frac{m+1}{n}$ — ціле число (додатне, від'ємне або 0) і введено підстановку $a+bx^n=t^s$, де s — знаменник дробу p;*

3) *$\frac{m+1}{n}+p$ — ціле число (додатне, від'ємне або 0) і введено підстановку $ax^{-n}+b=t^s$, де s — знаменник дробу p.*

В інших випадках інтеграл від диференціального бінома не виражається у скінченному вигляді через елементарні функції.

Доведення. Позначимо $x=z^{\frac{1}{n}}$, тоді

$$dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$$

і

$$I=\int z^{\frac{m}{n}}\left(a+bz\right)^p\cdot\frac{1}{n}z^{\frac{1-n}{n}}dz=\int z^{\frac{m-n+1}{n}}\left(a+bz\right)^p dz.$$

1. Нехай p ціле, тоді

$$q=\frac{m+1}{n}-1=\frac{r}{s},\ z=t^s,\ dz=st^{s-1}ds,\ x^n=t^s$$

і

$$I = \frac{1}{n}\int t^{r}\left(a + b t^{s}\right)^{p} s t^{s-1} dt .$$

2. Нехай $\frac{m+1}{n}$ — ціле, тоді q — ціле число, а $p = \frac{r}{s}$ — раціональне. Введемо підстановку $a + bz = t^s$, $a + bx^n = t^s$.

3. Нехай $\frac{m+1}{n} + p$ — ціле, тоді $\frac{m+1}{n} - 1 + p$ — також ціле і $\frac{m+1}{n} - 1 + p = q + p$, отже

$$\int z^{q}\left(a + bz\right)^{p} dz = \int z^{p+q}\left(\frac{a + bz}{z}\right)^{p} dz .$$

Оскільки $p + q$ — ціле, а $p = \frac{r}{s}$, то

$$\frac{a + bz}{z} = t^{s},\ az^{-1} + b = t^{s}, \text{ або } az^{-n} + b = t^{s} .$$

Наприклад,

$$\int \frac{dx}{x^{3}\sqrt{x-1}} = \int x^{-3}(-1 + x)^{-\frac{1}{2}} dx;\ m = -3,\ n = 1,\ p = -\frac{1}{2} .$$

Тепер знаходимо $\frac{m+1}{n} = \frac{-3+1}{1} = -2$. Маємо випадок 2), тоді

$$(-1 + x) = t^{2},\ x = t^{2} + 1,\ dx = 2t dt,$$

$$\int x^{-3}(-1 + x)^{-\frac{1}{2}} dx = \int \left(t^{2} + 1\right)^{-3} t^{-1} \cdot 2t dt = 2\int \frac{dt}{\left(t^{2} + 1\right)^{3}} .$$

Далі використаємо формулу (4.1). Оскільки $s = 1$, $n = 3$, маємо

$$\int \frac{dt}{\left(t^{2} + 1\right)^{3}} = \frac{t}{4\left(t^{2} + 1\right)^{2}} + \frac{3}{4}\int \frac{dt}{\left(t^{2} + 1\right)^{2}},$$

$$\int \frac{dt}{\left(t^{2} + 1\right)^{2}} = \frac{t}{2 \cdot 1 \cdot \left(t^{2} + 1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^{2} + 1} = \frac{t}{2\left(t^{2} + 1\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t,$$

$$\int \frac{dt}{\left(t^{2} + 1\right)^{3}} = \frac{t}{4\left(t^{2} + 1\right)^{2}} + \frac{3}{8}\frac{t}{t^{2} + 1} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} t + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^{3}\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{2x^{2}} + \frac{3\sqrt{x-1}}{4x} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + C .$$

§ 12. ПІДСТАНОВКИ ЕЙЛЕРА. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПІДСТАНОВКИ. МЕТОД ОСТРОГРАДСЬКОГО

***Теорема.** Інтеграл*

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^{2} + bx + c}\right) dx \qquad (12.1)$$

виражається через раціональні функції за допомогою підстановок:

при $a > 0$ $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t, \tag{12.2}$$

при $c > 0$ $$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}, \tag{12.3}$$

при $b^2 - 4ac > 0$ $$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t, \tag{12.4}$$

де α *— корінь квадратного тричлена.*

Підстановки (12.2) — (12.4) називаються **підстановками Ейлера.**

Найзручнішим способом зведення інтеграла (12.1) до інтеграла від раціональної функції є застосування тригонометричних підстановок.

1. Нехай $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$, тоді

$$\sqrt{\frac{(ax^2+bx+c)a}{a}} = \frac{\sqrt{a^2x^2+bax+ca}}{\sqrt{a}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4}}.$$

Тепер

$$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{ac - \frac{b^2}{4}}\operatorname{tg}\varphi, \text{ або } 2ax + b = \sqrt{4ac-b^2}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$x = \frac{\sqrt{4ac-b^2}\operatorname{tg}\varphi - b}{2a}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{ac - \frac{bh^2}{4}}\sec\varphi}{\sqrt{a}},$$

$$dx = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\sec^2\varphi d\varphi.$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\int R\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}\ \operatorname{tg}\varphi - b}{2a}, \frac{\sqrt{ac-\frac{b^2}{4}}}{\sqrt{a}}\sec\varphi\right)\sec^2\varphi d\varphi.$$

Отже, дістали інтеграл від раціонального тригонометричного виразу.

2. Нехай $a > 0$ і $b^2 - 4ac > 0$. Скористаємося підстановкою

$$2ax + b = \sqrt{b^2-4ac}\sec\varphi.$$

3. Нехай $a < 0$, тоді

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\sqrt{-a^2x^2+bx(-a)-ca} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\sqrt{-\left[(ax)^2 + 2ax\cdot\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + ca\right]} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac - \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-a}}\sqrt{\left(b^2 - 4ac\right) - (2ax + b)^2}\,.$$

При $b^2 - 4ac < 0$ маємо уявний вираз. При $b^2 - 4ac > 0$ треба скористатися підстановкою

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}\sin\varphi\,.$$

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}\,.$$

Розв'язання. Тут $a = -1 < 0$. Маємо випадок 3).

Оскільки

$$\sqrt{1 - 2x - x^2} = \sqrt{1 - \left(x^2 + 2x + 1 - 1\right)} = \sqrt{2 - (x + 1)^2}\,,$$

то введемо підстановку

$$x + 1 = \sqrt{2}\sin\varphi;\; x = \sqrt{2}\sin\varphi - 1;\; dx = \sqrt{2}\cos\varphi d\varphi\,.$$

Дістанемо

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} = \int\frac{\left(\sqrt{2}\sin\varphi - 1\right)^2}{\sqrt{2 - 2\sin^2\varphi}}\sqrt{2}\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int\frac{\left(\sqrt{2}\sin\varphi - 1\right)^2}{\sqrt{2}\cos\varphi}\sqrt{2}\cos\varphi\, d\varphi = \int\left(\sqrt{2}\sin\varphi - 1\right)^2 d\varphi =$$

$$= \int\left(2\sin^2\varphi - 2\sqrt{2}\sin\varphi + 1\right)d\varphi = \int\left(1 - \cos 2\varphi - 2\sqrt{2}\sin\varphi + 1\right)d\varphi =$$

$$= \int\left(2 - \cos 2\varphi - 2\sqrt{2}\sin\varphi\right)d\varphi = 2\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi + C\,.$$

Враховуючи, що

$$\varphi = \arcsin\frac{x + 1}{\sqrt{2}},\; \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi =$$

$$= 2\sin\varphi\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \frac{2(x + 1)}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{(x + 1)^2}{2}} = (x + 1)\sqrt{1 - 2x - x^2}\,,$$

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \pm\sqrt{1 - \frac{(x + 1)^2}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 2x - x^2}\,,$$

остаточно знаходимо

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} = 2\arcsin\frac{x + 1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(x + 1)\sqrt{1 - 2x - x^2} +$$

$$+ 2\sqrt{1 - 2x - x^2} + C = 2\arcsin\frac{x + 1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(3 - x)\sqrt{1 - 2x - x^2} + C\,.$$

Інтеграли типу $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n, можна звести до обчислення простішого інтеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ методом невизначених коефіцієнтів, або методом Остроградського.

Запишемо

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (12.5)$$

де $P_{n-1}(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами; A – невизначений множник. Для визначення коефіцієнтів многочлена $P_{n-1}(x)$ і A продиференціюємо (12.5) і помножимо на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, а потім прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах здобутої рівності.

Приклад. Обчислити $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

Розв'язання.

Тут $P_n(x) = P_3(x) = 1x^3 + 0x^2 + 0x + 0$; $\quad P_{n-1}(x) = Mx^2 + Nx + R$.

Тоді $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = (Mx^2+Nx+R)\sqrt{1+2x-x^2} + A\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

Після диференціювання і множення останньої рівності на $\sqrt{1+2x-x^2}$ отримаємо

$$x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = (2Mx+N)(1+2x-x^2) + (Mx^2+Nx+R)(1-x) + A.$$

Розкриваючи дужки і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях многочленів, розташованих ліворуч і праворуч від знака рівності, отримаємо систему рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1 = -3M; \\ x^2 & 0 = 4M - N + M - N = 5M - 2N; \\ x & 0 = 2M + 2N + N - R = 2M + 3N = R; \\ x^0 & 0 = N + R + A. \end{array}$$

Розв'язуючи вказану систему, дістанемо $M = -\frac{1}{3}$; $N = -\frac{5}{6}$; $R = -\frac{19}{6}$; $A = 4$.

Знайдемо $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x-1+1-1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(1-x)^2}} = \begin{bmatrix} 1-x=t; \\ -dx = dt \end{bmatrix} =$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - t^2}} = -\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}} + C.$$

Остаточно маємо

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}\right)\sqrt{1+2x-x^2} - 4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2} - 4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}} + C.$$

Глава 6

ВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ

У цій главі вводиться поняття міри, залежної від орієнтації. Це дає змогу викласти всі типи визначених інтегралів з єдиної позиції. З наукової точки зору поняття орієнтованої міри міститься в означенні інтеграла, яке ввів А. М. Колмогоров [1].

§ 1. МІРА ОБЛАСТІ ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

У широкому розумінні **міру** розглядають як об'єднання якісних та кількісних характеристик об'єкта, якими цей об'єкт можна виміряти. Об'єктом вимірювання в математиці є область евклідового простору, або загальна множина D. Область має розмірність, що збігається з розмірністю простору, в якому вона розміщена. Мова може йти про дво-, три-, n-вимірний простори. Область може бути **обмеженою** і **необмеженою, відкритою** і **замкненою.** В евклідовому просторі вводиться поняття відстані і її одиниці.

Спочатку розглядатимемо міру області D як процес кількісного вимірювання в області D за допомогою певної одиниці.

Процес кількісного вимірювання області D полягає у діленні одиниці області. Наприклад, одиниця довжини метр ділиться на сантиметри, мікрометри, нанометри, ангстреми. Те саме стосується квадратних, кубічних та інших одиниць. Процес ділення на все дрібніші одиниці необмежений. Його можна характеризувати послідовністю $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, де n — число поділок. При цьому сума дрібніших одиниць складає крупнішу одиницю виміру. Це означає, що точки, які поділяють одиницю, наприклад метр, не мають виміру, тобто *міра точок на прямій дорівнює нулю*. Прямі, що ділять квадратний метр на квадратні сантиметри, також не мають виміру, тобто *міра прямих на плоскій області дорівнює нулю*. Те саме стосується і точок області. Аналогічно міра площин, що ділять кубічний метр на кубічні сантиметри, дорівнює нулю. Площини, прямі, точки у тривимірному просторі також не мають виміру: їх міра дорівнює нулю. У загальному вигляді це положення можна сформулювати таким чином.

---

[1] А. М. Колмогоров (1903—1987) — російський математик.

Якщо в n-вимірному просторі область D розбити областями розмірності $m \leq n - 1$ на скінченну множину підобластей D_1, D_2, D_3, ..., D_n, що задовольняють умову

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \ldots \cup D_n\,, \tag{1.1}$$

то міра μ (D) області дорівнює сумі мір підобластей

$$\mu(D) = \Delta\mu_1(D_1) + \Delta\mu_2(D_2) + \ldots + \Delta\mu_n(D_n), \tag{1.2}$$

де $\Delta\mu_i(D_i)$ — міра підобласті.

Процес кількісного вимірювання області D полягає у покриванні цієї області одиницями виміру, що відповідають розмірності області. При такому покритті може виникнути необхідність використовувати дрібніші одиниці. Однак це не гарантує точного покриття заданої області. Можливими є три типи покриття області: з недостачею, з надлишком і точне покриття. В процесі покриття іноді істотне значення має напрям покриття.

Припустимо, що треба виміряти відрізок AB у напрямі від A до B або навпаки. Покриття вимірюваного об'єкта мірою з урахуванням напряму називається **орієнтованим покриттям.** Якщо покриття з недостачею і з надлишком із дедалі зменшуваними одиницями зрештою збігаються, то кажуть, що область має міру, або є вимірною.

Розглянемо поняття, пов'язане із зменшенням одиниці виміру. Нехай при покритті, наприклад, плоскої області використовуються різні одиниці — квадратний метр, квадратний сантиметр, $\frac{1}{n^2}$, де $n = 1, 2, 3$, і т. д. Найбільший лінійний розмір таких одиниць — це діагональ квадрата. Тоді для того, щоб здобути дедалі зменшувані одиниці, наприклад $\frac{1}{n^2}$, достатньо, щоб найбільший із лінійних розмірів одиниць виміру, наприклад $\frac{1}{n}$, прямував до нуля. Найбільший лінійний розмір одиниць покриттів області називають **рангом розбиття** і позначають λ.

Нехай маємо два покриття $\overline{\Pi}_n$ і $\underline{\Pi}_n$ області D, що покривають її відповідно з надлишком і з недостачею. Тоді можуть існувати границі обох покриттів:

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{\Pi}_n = \overline{\Pi} \text{ і } \lim_{\lambda \to 0} \underline{\Pi}_n = \underline{\Pi}\,.$$

Величини $\overline{\Pi}$ і $\underline{\Pi}$ називають відповідно **зовнішньою і внутрішньою мірами області.** Якщо

$$\Pi = \overline{\Pi} = \underline{\Pi}\,,\ \lim_{\lambda \to 0} \overline{\Pi}_n = \lim_{\lambda \to 0} \underline{\Pi}_n = \Pi\,,$$

то Π називається **мірою області.** Наприклад, якщо областю D є двовимірний простір, то $П$ називається **площею області.** Якщо область D міститься у тривимірному просторі, то $П$ є **об'ємом.**

При вимірюванні області D дістанемо число, якщо межі області визначені, і функцію, якщо межі області змінні. Дістаємо функцію меж області. Очевидно, що як число, так і функція є додатними. Якщо врахувати, що до функції входить і напрям покриття, то це буде вектор-функція. Таким чином, міра області μ (D) є вектор-функцією $\overline{v}(D)$, визначеною на D $|\overline{v}(D)| > 0$ і $\mu(D) > 0$.

Якщо область D не містить жодної точки, то вона є порожньою множиною. Міра порожньої множини дорівнює нулю. Отже, μ $(D) \geq$ ≥ 0.

У процесі кількісного вимірювання передбачається, що існує область D, яка відповідає обраній одиниці величини, тобто існує область D, міра якої дорівнює одиниці. Наприклад, існують такі одиниці відстані, як кілометр, метр, сантиметр і т. д., існує плоска область в один квадратний метр. Ці роз'яснення дають змогу сформулювати строге визначення міри.

Мірою області D евклідового простору називається функція $\mu(D)$, визначена у кожній точці області, яка задовольняє такі умови:

1) μ $(D) \geq 0$;

2) якщо множина точок області D порожня, то міра такої множини дорівнює нулю: μ $(\varnothing) = 0$;

3) якщо область D n-вимірного простору розбити областями розмірності $m \leq n - 1$ на скінченну множину підобластей D_1, D_2, ..., D_n, то міра μ (D) всієї області дорівнюватиме сумі мір підобластей $\Delta\mu_i$ $(D_i) \geq$ ≥ 0, що задовольняє умови (1.1) і (1.2);

4) існують області, міра яких дорівнює 1;

5) рівні області мають однакові міри.

Твердження. *Міра областей, що розбивають область D на підобласті D_i, дорівнює нулю.*

Це випливає з умови 3. Звідси також випливає, що *в одновимірній області має міру нуль і точка, у двовимірній — точка і проста лінія, у тривимірній — проста поверхня, лінія і точка.*

Розглянемо обмежені замкнені області.

1.1. Міра одновимірного простору

В одновимірному просторі за область D виберемо сегмент $[a, b]$, де $a < b$. Відкладемо на осі Ox відрізок $a \leq x \leq b$. Визначимо орієнтацію осі вектором $\vec{i}$. Розіб'ємо сегмент $[a, b]$ на частини точками $x_0 = a$, x_1, x_2, ... , x_{n-1}, $x_n = b$, враховуючи при цьому орієнтацію, тобто

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

Тоді міра відрізка

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\,,\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i\,.$$

Дійсно, візьмемо відрізок $[A,\ B]$, довжина якого дорівнює одиниці. Розіб'ємо відрізок $[A,\ B]$ на n рівних частин. Тоді міра кожного з малих відрізків дорівнює $\frac{1}{n}$, а міра всього відрізка — одиниця. Припускаємо також, що коли маємо два різних за довжиною відрізки, то, відклавши менший відрізок достатнє число разів, завжди можна дістати відрізок, більший за будь-який з них. Відрізки з мірою $\frac{1}{n}$ можуть покривати Δx_i, виходячи за межі Δx_i або не виходячи. Мірою Δx_i, тобто довжиною з урахуванням орієнтації, тут буде спільна границя суми двох типів малих відрізків $\underline{S}_n^{(i)}$ і $\overline{S}_n^{(i)}$ з мірами $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n^{(i)} = \Delta x_i\,.$$

Спільна міра сегмента $[a,\ b]$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\,,\ \Delta x_i > 0\,.$$

Число L називається **довжиною відрізка** $[a,\ b]$. Рангом розбиття є $\frac{1}{n} = \lambda$. На координатній осі міра

$$L = b - a,\ \text{де}\ b > a.$$

Ця міра залежить від орієнтації осі, тобто від порядку слідування точок на прямій. Якщо змінити напрям орієнтації, то зміниться і міра.

Міру з урахуванням орієнтації записують у вигляді

$$\vec{L} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{i}\,\Delta x_i\,.$$

Як міру відрізка $[a,\ b]$ можна взяти також абсолютну величину різниці $b - a$

$$L_1 = |b - a|;\ L_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|.$$

Ця міра не залежить від орієнтації.

Отже, в одновимірному просторі можна ввести дві міри, одна з яких залежить від орієнтації, а друга ні. Якщо точка b має будь-яку координату $x > a$, то міра відрізка $[a,\ x]$ є функцією від x:

$$\vec{L}(x) = (x - a)\,\vec{i}\,;\ L_1(x) = |x - a|.$$

Роль міри в одновимірному просторі може виконувати не тільки довжина, а й маса, густина, заряд або інші величини, що задовольняють умови 1) — 5) означення міри.

1.2. Міра двовимірного простору

Як міру двовимірного простору можна взяти площу. Дійсно, візьмемо як область квадрат, сторона якого дорівнює одиниці, а межі утворені прямими, паралельними координатним осям (рис. 6.1).

За міру цієї області візьмемо площу квадрата, що дорівнює одиниці. Ця міра існує згідно з означенням міри.

Розіб'ємо довжину кожної із сторін квадрата на n рівних частин і через точки розбиття проведемо прямі, паралельні координатним осям. У результаті цього розбиття дістанемо n^2 квадратиків. Враховуючи міру основного квадрата, за міру кожного квадратика візьмемо $\frac{1}{n^2}$. Таким чином, ми дістали покриття квадрата меншими квадратиками з мірою $\frac{1}{n^2}$. Площа основного квадрата

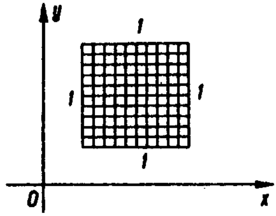


Рис. 6.1

$$\frac{1}{n^2} \cdot n^2 = 1.$$

Нехай тепер сторони квадрата, міра якого дорівнює 1, не паралельні координатним осям. Покриємо цей квадрат меншими квадратиками з мірою $\frac{1}{n^2}$ і сторонами, паралельними координатним осям. Можливими є три випадки: 1) покриття збігається з основним квадратом; 2) частина площі основного квадрата залишиться не покритою; 3) основний квадрат повністю покритий і частина менших квадратиків виходить за межу основного квадрата.

Очевидно, площа основного квадрата дорівнює сумі площ менших квадратиків у випадку 1) — точно, у випадку 2) — з недостачею, у випадку 3) — з надлишком. Якщо число менших квадратиків збільшувати, зменшуючи відповідно довжини їхніх сторін, то недостача і надлишок будуть зменшуватись. Позначимо суму площ менших квадратиків, що покривають область основного квадрата з недостачею, через $\underline{S}_n$, а з надлишком — через $\overline{S}_n$. Тоді площа основного квадрата дорівнює

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{S_n} = 1, \tag{1.3}$$

Границі $\underline{S}_n$ і $\overline{S_n}$ існують, і кожна з них дорівнює одиниці. Очевидно, що $\underline{S}_n \le \overline{S_n} \le 1$, причому послідовність $\{\underline{S}_n\}$ неспадна, а $\{\overline{S}_n\}$ — не-зростаюча. Зазначимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_n$ називається **внутрішньою,** а $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n$ — **зовнішньою мірами Жордана.**

Нехай тепер маємо квадрат, сторона якого дорівнює a. Цей квадрат можна покрити квадратиками площею $\frac{1}{n^2}$ з надлишком, з недостачею або точно. Позначаючи, як і вище, площі покриття через $\underline{S}_n$ і $\overline{S}_n$, знайдемо площу S_a квадрата із стороною a:

$$S_a = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = a^2 . \tag{1.4}$$

Внутрішня і зовнішня міри в (1.3) і (1.4) збігаються.

Якщо областю є прямокутник, або многокутник, то описаний вище процес покриття цих фігур дрібнішими квадратиками є аналогічним. За міру прямокутника або многокутника беруть величину

$$S_1 = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n . \tag{1.5}$$

Цю величину називають **площею прямокутника** або **многокутника.**

Зауваження. Тут ми припускали, що будь-якій області деякої сім'ї областей, яка містить всі відомі із середньої школи многокутники, відповідає додатне число. Це число називається **площею** або **мірою.** Крім того, тут виконується умова 3) означення міри, тобто будь-якій області, утвореній об'єднанням, наприклад, двох неперетинних областей, відповідає площа, що є сумою площ цих двох областей.

Нехай межею області є проста замкнена плоска крива (рис. 6.2). Цю область також покриємо квадратиками із зменшуваними довжинами сторін. Суму площ квадратиків, що повністю містяться в області, позначимо через $\underline{S}_n$, суму площ всіх квадратиків, враховуючи і ті, що частково виходять за межі області, — через $\overline{S}_n$. Очевидно, що $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$.

Послідовності $\{\underline{S}_n\}$ і $\{\overline{S}_n\}$ обмежені, наприклад, площею прямокутника $ABCD$ (рис. 6.2), який повністю містить дану область, причому кожна з них є монотонною: $\{\underline{S}_n\}$ — неспадною, $\{\overline{S}_n\}$ — незростаючою. Отже, існують границі цих послідовностей $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_n$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n$, які називаються відповідно **внутрішньою** і **зовнішньою мірами Жордана.** Якщо

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = S , \tag{1.6}$$

то S називають **площею даної області,** а область називають **квадровною.**

Площу S області приймають за міру двовимірного простору. Всі властивості міри виконуються для площі S, визначеної рівністю (1.6).

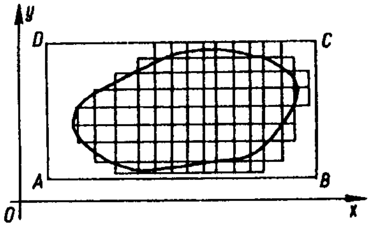


Рис. 6.2

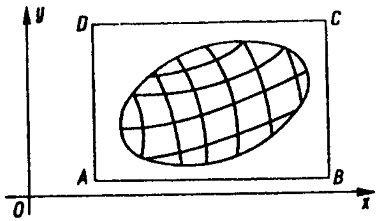


Рис. 6.3

Зауваження. У рівностях (1.3) — (1.5) наперед було відомо, що існує спільна границя 1, a^2, S_1. У рівності (1.6) це не було очевидним, тому довелося ставити умову існування границі, яку і назвали **площею області, обмеженої простою замкненою кривою.**

Отже, ми ввели поняття площі плоскої фігури, обмеженої простою замкненою кривою. Попередні міркування стосуються розбиття плоскої області D на підобласті за допомогою прямих. Тепер розіб'ємо область (рис. 6.2) за допомогою довільних кривих на частини, які назвемо **комірками** (рис. 6.3). Таке розбиття області називається **довільним.**

Довільне розбиття області називається **правильним,** якщо:

1) кожна комірка має міру (площу);

2) комірки можуть мати між собою лише спільні межові точки і лінії і не можуть мати спільних внутрішніх точок;

3) кожна точка області належить принаймні до однієї комірки;

4) будь-яку область, обмежену замкненою кривою, можна покрити скінченним числом комірок таким чином, що площа області буде дорівнювати сумі площ комірок:

$$S_{\text{обл}} = \sum_{i=1}^{m} \Delta S_i\,; \tag{1.7}$$

5) будь-яку комірку можна розмістити в колі найменшого радіуса δ. Найбільший з діаметрів $2\delta = \lambda$ можна прийняти за ранг даного розбиття.

Розглянемо довільне правильне розбиття області, обмеженої простою кривою. Комірки розбиття, як і квадратики, можуть покривати область з недостачею (всі комірки містяться всередині області); повністю (включаючи і межу) і з надлишком (покриваючи область, комірки виходять за її межі). Позначимо площу всіх комірок, розміщених всередині області, через $\underline{S}_n$ а площу комірок, розміщених всередині області і тих, що виходять за її межу, — через $\overline{S}_n$.

Будемо вважати область квадровною. Тоді кожну комірку правильного розбиття можна покрити системою квадратиків, спільна межа яких дорівнює мірі комірки згідно з умовою. Покриваючи всю область D квадратиками і прямокутником $ABCD$ (рис. 6.3), що повністю покривають область D, приходимо до висновку, що послідовності $\{\underline{S}_n\}$ і $\{\overline{S}_n\}$ монотонні і обмежені одним і тим самим числом — площею прямокутника. Тоді

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}_n = \lim_{n\to\infty}\underline{S}_n = \underline{S},\ \lim_{\lambda\to 0}\overline{S}_n = \lim_{n\to\infty}\overline{S}_n = \overline{S}$$

і існує спільна границя

$$S = \underline{S} = \overline{S},$$

яку і приймають за міру області D.

Таким чином, для обчислення міри двовимірного простору (площі обмеженої області) можна скористатися правильним розбиттям з комірками якої завгодно форми.

1.3. Міра тривимірного простору

Роль міри у цьому просторі може виконувати об'єм. Нехай у тривимірному просторі задано область, обмежену гладкою поверхнею. Для покриття цієї області візьмемо куб із стороною $\frac{1}{n}$. Побудуємо послідовності $\underline{V}_n$ і $\overline{V}_n$ і рівності виду (1.3)—(1.6) для них. Якщо виконується умова

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{V}_n = \lim_{\lambda\to 0}\overline{V}_n = V, \tag{1.8}$$

то тіло називається кубованим. Тут можливе правильне розбиття на комірки. Коміркою є тіло, обмежене поверхнями. Будь-яку комірку можна помістити у кулю найменшого радіуса δ. Найбільший із діаметрів $2\delta = \lambda$ є рангом розбиття.

1.4. Міра на просторовій кривій

Введемо поняття міри на кривій у просторі (рис. 6.4). Так само, як і для прямолінійного відрізка, за міру можна брати дві величини:

1) довжину кривої, яка залежить від орієнтації або порядку слідування точок на кривій;

2) довжину кривої, яка не залежить від порядку слідування точок на кривій.

Як відомо, за довжину l кривої AB беруть границю — довжину периметрів P_n, вписаних у цю криву, близьких за розміщенням і напрямом ламаних, якщо довжини ланок прямують до нуля (див. гл. 4, п. 21.1):

$$l = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{\max|\Delta l_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i .$$

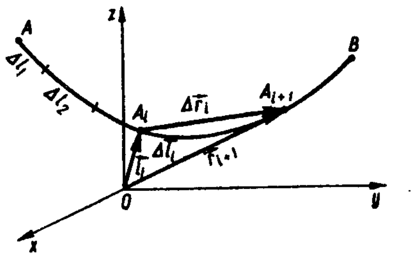


Рис. 6.4

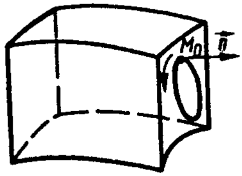


Рис. 6.5

Для орієнтованої кривої Δl_i введемо напрямлений відрізок $\Delta \vec{l}_i = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$. Позначимо довжину кривої, враховуючи орієнтацію, через $\vec{l}$, тоді

$$\vec{l} = \lim_{n\to\infty} \vec{P}_n = \lim_{\max|\Delta l_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{l}_i .$$

Замість $\Delta\vec{l}_i$ можна взяти $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$. Тоді для орієнтованої кривої

$$\vec{l} = \lim_{\max|\Delta \vec{r}_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{r}_i .$$

Розбиття кривої на частини типу $\Delta\vec{r}_i$ точками A_i приводить до поділу відповідних проекцій кривої на осях координат на Δx_i, Δy_i, Δz_i.

При цьому орієнтація $\Delta\vec{r}_i$ або $\Delta\vec{l}_i$ визначається однозначно орієнтацією Δx_i, Δy_i, Δz_i:

$$\Delta\vec{r}_i = \Delta x_i\,\vec{i} + \Delta y_i\,\vec{j} + \Delta z_i\,\vec{k} .$$

Справедливе і обернене твердження. Орієнтація Δx_i, Δy_i, Δz_i визначає орієнтацію кривої. Тому міра для орієнтованої кривої однозначно означається за допомогою орієнтованих мір, що установлюються на осях координат. За міру неорієнтованої кривої можна взяти її довжину. Якщо точка B кривої є біжучою точкою з координатами x, y, z, то міра $\vec{l}$ буде вектор-функцією трьох поточних змінних: x, y, z.

1.5. Міра на поверхні

За міру на поверхні можна взяти площу цієї поверхні. Проте при цьому треба означити поняття площі поверхні. Крім того, поверхні можуть бути орієнтованими. Розглянемо деяку поверхню, задану рівнянням $z = f(x, y)$ або $F(x, y, z) = 0$ (рис. 6.5). При цьому функції $f(x, y)$ і $F(x, y, z)$ є диференційованими за своїми змінними і

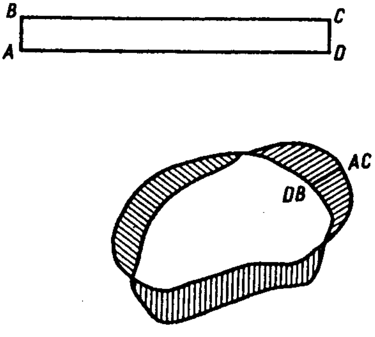


Рис. 6.6

поверхня особливих точок не має. Візьмемо будь-яку точку M_0 на поверхні і проведемо через неї довільну замкнену криву, що не перетинає межу поверхні. Виберемо у точці M_0 нормаль і задамо на нормалі напрям. Дістанемо вектор $\vec{n}$. Будемо переміщати цей вектор по кривій від точки M_0 по замкненому контуру. При цьому можливі два випадки: вектор після обходу або зберігає свій напрям, або змінює його на протилежний. У першому випадку поверхня називається **двосторонньою**, у другому — **односторонньою**. Класичним прикладом односторонньої поверхні є так званий листок Мебіуса[1] (рис. 6.6). Далі розглядатимемо тільки двосторонні поверхні.

Множина точок поверхні з певним напрямом нормалі в одній будь-якій точці (від поверхні або до поверхні) називається **стороною поверхні.** Поверхня називається **орієнтованою**, якщо на побудованій замкненій кривій, що належить вибраній стороні поверхні, установлена за якимось правилом її орієнтація або напрям. Наприклад, при обході кривої внутрішня частина області, обмежена кривою, лежить зліва. Така орієнтація називається **правою.** Права орієнтація поверхні аналогічна правій системі координат. Оскільки орієнтація визначається вектором нормалі, то праву орієнтацію визначимо за правилом: беремо із знаком плюс радикали, що визначають напрямні косинуси вектора нормалі.

Перейдемо до означення площі поверхні. Розглянемо один із можливих варіантів означення цього поняття. Нехай задано гладку поверхню, обмежену кусково-гладкими контурами. Розіб'ємо цю поверхню на комірки $\Delta\sigma_i$. У кожній з них візьмемо точку і проведемо у цих точках дотичні площини. Спроектуємо точки поверхні комірки $\Delta\sigma_i$ на дотичну площину. Дістанемо плоску фігуру, площа якої ΔS_i. За площу поверхні комірки $\Delta\sigma_i$, приймають наближено площу Δs_i. Розмістимо комірки у сфери, радіуси яких δ_i. Виберемо з них найбільший, наприклад δ. Діаметр 2δ є **рангом розбиття.** Позначимо його λ.

Площею σ поверхні називається границя суми площ Δs_i плоских фігур, які є проекціями комірок:

$$\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i ,$$

причому $\Delta\sigma_i \approx \Delta s_i$.

[1] Август Фердінанд Мебіус (1790—1868) — німецький геометр і астроном.

Поверхня, для якої існує площа σ, називається квадровною. Таким чином, σ є мірою, визначеною на поверхні. Оскільки площа σ лежить на певному боці поверхні, яка визначається напрямом нормалі, то міра на поверхні визначається з урахуванням орієнтації вектором $\vec{\sigma} = \sigma\vec{n^\circ}$, де $\vec{n^\circ}$ — одиничний вектор з напрямними косинусами: cos α, cos β, cos γ. Міра комірки $\Delta\sigma_i$ може бути записана також у векторній формі:

$$\Delta\vec{\sigma_i} = \Delta\sigma_i \vec{n_i^\circ}.$$

1.6. Міра на n-вимірному евклідовому просторі

Раніше було введено поняття n-вимірного куба, паралелепіпеда, многогранника, довільної n-вимірної поверхні. У зв'язку з цим за міру області n-вимірного простору можна взяти об'єм цієї області. Все, що стосується поняття міри для тривимірного простору, виконується і для n-вимірного евклідового простору.

§ 2. ІНТЕГРАЛ ПО ОБЛАСТІ (МІРІ)

Нехай дано вимірну область D і функцію $u = f(X)$, визначену у кожній точці області. Розіб'ємо область довільним чином на n комірок D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, позначивши ранг розбиття області через λ, міру області — через μ, міру комірки — через $\Delta\mu_i$.

Виберемо в комірці D_i довільну точку p_i. Обчислимо $u_i = f(p_i)$ і побудуємо добуток $f(p_i)\Delta\mu_i$. Складемо суму $\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i$, яка називається **інтегральною сумою для функції $f(X)$ по області (мірі)** D. Якщо ця інтегральна сума має скінченну границю $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i$, яка не залежить від способу розбиття області D на комірки $\Delta\mu_i$ і від способу вибору точок p_i в комірках, то цю границю називають **інтегралом по області (мірі)** і позначають

$$I = \int\limits_D f(X)d\mu.$$

Таким чином,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i = \int\limits_D f(X)d\mu. \tag{2.1}$$

Це означення показує, що для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке мале $\delta(\varepsilon) > 0$, що при $\lambda < \delta$

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i \right| < \varepsilon .$$

Якщо для функції $f(X)$ границя (2.1) існує, то $f(X)$ називається **інтегровною в D-області.**

Із рівності (2.1) для різних функцій, визначених у довільних областях, легко дістати різні типи інтегралів.

§ 3. ОКРЕМІ ТИПИ ІНТЕГРАЛІВ І ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО НИХ

3.1. Визначений інтеграл (простий, однократний)

Нехай $f(X)$ є функцією однієї змінної x, що визначена у $[a, b]$, де $a < b$, тобто $y = f(x)$. Тоді в рівності (2.1)

$$D = [a, b];\ d\mu = dx,\ \mu = b - a,\ \Delta\mu_i = \Delta x_i,$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \text{ де } \xi_i \in \Delta x_i . \qquad (3.1)$$

Інтеграл (3.1) називається **визначеним інтегралом (простим, однократним).**

3.2. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Задача про обчислення площі криволінійної трапеції. Криволінійною трапецією називається плоска фігура, обмежена віссю Ox, прямими $x = a$ і $x = b$, причому $a < b$, та графіком функції $f(x) \geq 0$ (рис. 6.7).

Припустимо, що функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$. Розіб'ємо сегмент $[a, b]$ довільно на n частин. За комірку візьмемо елементарну трапецію з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Позначимо площу цієї комірки через Δs_i, найменше значення $f(x)$ на Δx_i — через m_i, а найбільше — через M_i. Тоді

$$m_i\Delta x_i \leq \Delta s_i \leq M_i\Delta x_i. \qquad (3.2)$$

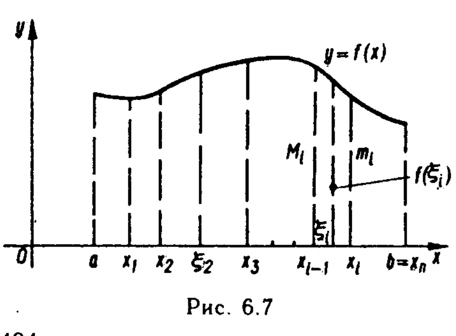


Рис. 6.7

Підсумовуючи, дістаємо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i . \qquad (3.3)$$

Введемо позначення

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i\,;\ \overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i\,. \qquad (3.4)$$

Послідовності $\{\underline{S}_n\}$ і $\{\overline{S}_n\}$ монотонні і обмежені одним і тим самим числом $M\,(b - a)$, де M — найбільше значення $f\,(x)$ на $[a,\ b]$, функція $f\,(x)$ неперервна на $[a,\ b]$.

Отже, існують $\lim\limits_{\lambda \to 0} \underline{S}_n$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \overline{S}_n$ і

$$\lim_{\lambda \to 0} \underline{S}_n = \lim_{\lambda \to 0} \overline{S}_n = S\,.$$

Тоді існує і

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = S\,.$$

Виберемо тепер на $[x_{i-1},\ x_i]$ довільну точку ξ_i і утворимо добуток $f\,(\xi_i)\,\Delta x_i \approx \Delta s_i$.

Тоді згідно з нерівностями (3.2)

$$m_i\,\Delta x_i \le f\,(\xi_i)\Delta x_i \le M_i\,\Delta x_i,$$

а згідно з нерівностями (3.3) і рівностями (3.4)

$$\underline{S}_n \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \overline{S}_n\,.$$

Переходячи до границі, знаходимо

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S\,.$$

Проте

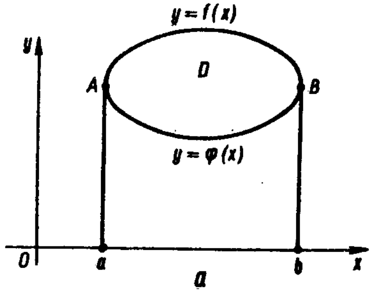
$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx\,,$$

і, отже,

$$S = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Таким чином, доведено, *що коли* $f\,(x)$ *неперервна на* $[a,\ b]$, *то існує визначений інтеграл.*

Якщо $f\,(x) \ge 0$, то визначений інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції.



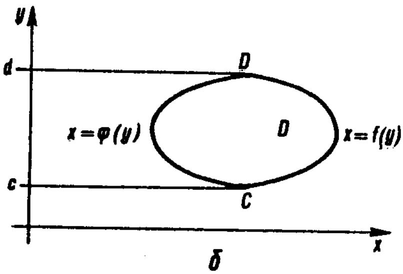


Рис. 6.8

Якщо $f(x) \leq 0$, то

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Знак мінус стоїть тому, що $S \geq 0$.

Задача про обчислення площі області D плоскої фігури, обмеженої простою замкненою кривою. Нехай межі області D (рис. 6.8, a) задано рівняннями

$$x = a,\ x = b,\ \text{де } a < b,$$

$$y = \varphi(x) \geq 0,\ y = f(x) \geq 0,\ \text{де } \varphi(x) \leq f(x).$$

Розглядаючи площу області D як різницю двох криволінійних трапецій, знаходимо

$$S_D = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx.$$

Якщо межі області D задано рівняннями (рис. 6.8, $б$)

$$y = c,\ y = d,\ \text{де } c < d$$

$$x = \varphi(y) \geq 0,\ x = f(y) \geq 0,\ \text{де } \varphi(y) \leq f(y),$$

то, міркуючи аналогічно, дістаємо

$$S_D = \int_a^b [f(y) - \varphi(y)]dy.$$

3.3. Подвійний інтеграл

Задача про обчислення об'єму циліндричного тіла. Нехай $X \in D$, де D — область, розміщена на площині і обмежена простою кривою, а функція $u = f(x, y)$. Тоді інтеграл по області називається **подвій-**

ним. Тут в (2.1)

$$\Delta\mu_i = \Delta s_i,\ d\mu = ds = dxdy,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta s_i = \iint_D f(x,y)ds,$$

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Припустимо, що функція $u = f(x, y)$ неперервна в області D (рис. 6.9, *а*) і $f(x, y) \geq 0$. Здійснимо правильне розбиття області D на комірки з площею Δs_i. Виберемо в кожній комірці точку p_i (рис. 6.9, *б*) і позначимо найменше і найбільше значення $f(x, y)$ на комірці Δs_i відповідно через m_i і M_i. Знайдемо суми

$$\underline{V}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta s_i,\ \overline{V}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta s_i,\ V_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta s_i.\ \underline{V}_n \leq V_n \leq \overline{V}_n.$$

Границі $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{V}_n$ і $\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{V}_n$ існують і рівні між собою, причому

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{V}_n = \lim_{\lambda\to 0}\overline{V}_n = V,$$

де V — об'єм тіла.

З одного боку,

$$\lim_{\lambda\to 0} V_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta s_i = \iint_D f(x,y)ds,$$

а з другого —

$$\lim_{\lambda\to 0} V_n = V.$$

Таким чином,

$$V = \iint_D f(x,y)ds. \tag{3.5}$$

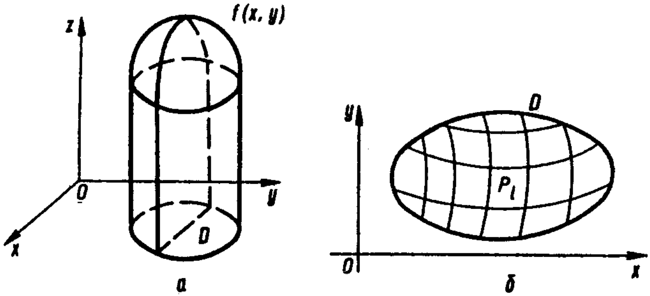


Рис. 6.9

Тим самим доведено, що коли $f(x, y)$ неперервна в області D функція, то існує подвійний інтеграл. Якщо $f(x, y) \geq 0$, то подвійний інтеграл по області D дорівнює об'єму тіла, обмеженого зверху поверхнею $u = f(x, y)$, знизу областю D і циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz, а також напрямною — межею області D. Таке тіло називається **циліндричним** (рис. 6.9, *а*). При $f(x, y) \leq 0$ маємо $V = -\iint\limits_D f(x,y)ds$. Коли тіло утворено двома поверхнями $\varphi(x, y) \leq f(x, y)$ із спільною областю визначення D, тоді

$$V = \iint\limits_D [f(x,y) - \varphi(x,y)]ds.$$

Якщо у формулі (3.5) $f(x, y) = 1$, то дістанемо площу області D:

$$S_D = \iint\limits_D ds = \iint\limits_D dxdy. \qquad (3.6)$$

3.4. Потрійний інтеграл

Задача про обчислення маси тіла. Нехай X належить деякій тривимірній області V, а $u = f(x, y, z)$. Тепер покладемо в (2.1)

$$\Delta\mu_i = \Delta v_i,\ d\mu = dv = dxdydz,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta v_i = \iiint\limits_V f(x,y,z)dv, \qquad (3.7)$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz. \qquad (3.8)$$

Інтеграли (3.7), (3.8) називаються **потрійними.** Розглянемо фізичний зміст інтеграла (3.7).

Нехай $u = f(x, y, z)$, де $u = f(x, y, z) \geq 0$, є неперервною функцією і являє собою змінну густину деякого матеріального тіла об'єму V. Розіб'ємо тіло на комірки об'єму Δv_i, виберемо в них довільно точки p_i, знайдемо найменше і найбільше значення функції в комірках m_i і M_i. Побудуємо суми

$$\underline{m}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta v_i;\ m_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta v_i,\ \overline{m}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta v_i.$$

Границі $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{m}_n$ і $\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{m}_n$ існують. Тоді існує і $\lim\limits_{\lambda\to 0} m_n = m$, де m — маса тіла V,

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\underline{m}_n = \lim_{\lambda\to 0}\overline{m}_n = \lim_{\lambda\to 0} m_n.$$

Проте

$$\lim_{\lambda\to 0} m_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta v_i = \iiint_V f(x,y,z)\,dv,$$

тоді

$$m = \iiint_V f(x,y,z)\,dv. \qquad (3.9)$$

Таким чином, доведено, що *коли $f(x, y, z)$ неперервна в області свого визначення, то існує потрійний інтеграл*. Якщо $f(x, y, z) \geq 0$ і є густиною, то потрійний інтеграл дорівнює масі тіла об'єму V. Коли в формулі (3.9) покласти $f(x, y, z) = 1$, то маса тіла чисельно дорівнюватиме об'єму тіла

$$V = \iiint_V dv = \iiint_V dx\,dy\,dz. \qquad (3.10)$$

3.5. Кратні інтеграли

Нехай $X \in D \subset E_n$ і $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. При цьому **інтеграл по області** називається n-кратним. У формулі (2.1) приймемо

$$\Delta\mu_i = \Delta\sigma_i,\ d\mu = d\sigma,\ D \subset E_n,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\sigma_i =$$

$$= \int\int_D\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,d\sigma. \qquad (3.11)$$

Тут кількість повторень інтеграла дорівнює розмірності простору E_n.

3.6. Криволінійний інтеграл першого роду

Задача про обчислення маси тонкої дротини. Нехай точка X міститься на просторовій кривій AB (рис. 6.4), на цій кривій визначена скалярна функція $u = f(x, y, z)$. У формулі (2.1) приймаємо $\Delta\mu_i = \Delta l_i$, $d\mu = dl$, $D = AB$. Тоді

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta l_i = \int_{AB} f(x, y, z)\,dl. \qquad (3.12)$$

При цьому інтеграл по області називається **криволінійним інтегралом по довжині дуги** або **криволінійним інтегралом першого роду.** Розглянемо фізичний зміст інтеграла (3.12).

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ є неперервною у всіх точках деякої матеріальної кривої AB і являє собою густину розподілу речовини.

Тоді, міркуючи аналогічно (3.4), знайдемо, що маса кривої AB

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta l_i = \int_{AB} f(x, y, z)dl. \tag{3.13}$$

Таким чином, із фізичної точки зору криволінійний інтеграл першого роду уздовж кривої дорівнює масі цієї кривої.

3.7. Криволінійний інтеграл другого роду

Задача про обчислення роботи. Нехай точка X лежить на просторовій орієнтованій кривій AB і на цій кривій визначена векторна функція

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Якщо у формулі (2.1) взяти за $f(X)$ функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, а за $\Delta\mu_i$ — відповідно Δx_i, Δy_i, Δz_i, то можна побудувати інтегральні суми і відповідно інтеграли, які називаються **криволінійними інтегралами за координатами** або **криволінійними інтегралами другого роду:**

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(p_i)\Delta x_i = \int_{AB} P(x, y, z)dx, \tag{3.14}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(p_i)\Delta y_i = \int_{AB} Q(x, y, z)dy, \tag{3.15}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(p_i)\Delta z_i = \int_{AB} R(x, y, z)dz. \tag{3.16}$$

Вираз

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \tag{3.17}$$

також називається **криволінійним інтегралом другого роду.** Враховуючи, що крива AB орієнтована, за $\Delta\mu_i$ можна взяти $\Delta\vec{r}_i$ (рис. 6.4), а за функцію $f(X)$ — вектор $\vec{a}$. Вважатимемо, що вираз $f(p_i)\,\Delta\mu_i$ у формулі (2.1) дорівнює скалярному добутку $\vec{a}(p_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$. Тоді інтеграл по області називається **інтегралом від векторної функції** або **лінійним інтегралом:**

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(p_i)\cdot\Delta\vec{r}_i = \int_{AB} \vec{a}(x, y, z)\cdot d\vec{r}. \tag{3.18}$$

Оскільки

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ = Pdx + Qdy + Rdz, \tag{3.19}$$

то

$$\int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \tag{3.20}$$

Таким чином доведено, що лінійний інтеграл виражається через криволінійні інтеграли другого роду. Іноді криву AB позначають через L. Якщо крива AB замкнена, то інтеграл (3.20) **називають циркуляцією вектора** $\vec{a}$ **вздовж кривої** L і позначають

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \tag{3.21}$$

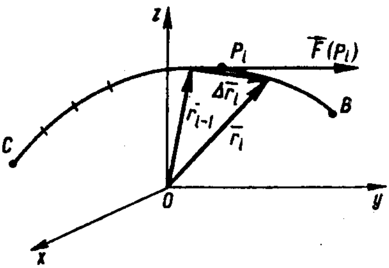


Рис. 6.10

Дамо фізичну інтерпретацію цього інтеграла. Розглянемо задачу про обчислення роботи сили по криволінійній ділянці шляху.

Нехай на кривій CB визначено вектор-функцію $\vec{a} = \vec{F}(\vec{r})$, що є позиційною силою (рис. 6.10). З фізичної точки зору

$$\vec{F}(p_i) \cdot \Delta\vec{r}_i = \Delta A_i$$

є елементарною роботою середнього значення сили $\vec{F}(p_i)$. Складаючи суму ΔA_i і переходячи до границі, дістаємо роботу A сили по переміщенню точки вздовж орієнтованої кривої

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(p_i) \cdot \Delta\vec{r}_i.$$

Крім того,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(p_i) \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_{CB} \vec{F}(p) \cdot d\vec{r} = \int_{CB} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Отже,

$$A = \int_{CB} \vec{F}(p) \cdot d\vec{r}. \tag{3.22}$$

Таким чином, з фізичної точки зору криволінійний інтеграл уздовж кривої CB від вектора $\vec{F} = \vec{a}$ дорівнює роботі сили $\vec{F}$ на CB. Якщо

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \text{ а } d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k},$$

то $A = \int\limits_{CB} F_x dx + F_y dy + F_z dz$.

Зокрема, при

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}, \quad A = \int\limits_{CB} F_x dx + F_y dy,$$

при

$$\vec{F} = F_x\vec{i} = f(x)\vec{i}, \quad x \in [a, b], \quad A = \int\limits_{CB} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

3.8. Поверхневий інтеграл першого роду

Задача про обчислення маси поверхні. Нехай у рівності (2.1) областю D є поверхня σ, у кожній точці якої визначена скалярна функція $u = f(x, y, z)$. Візьмемо у формулі (2.1)

$$\Delta\mu_i = \Delta\sigma_i, \; d\mu = d\sigma, \; D = \sigma.$$

Тоді

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma$$

називається **поверхневим інтегралом першого роду** або **інтегралом першого роду по поверхні.**

Дамо фізичну інтерпретацію цього інтеграла. Нехай $u = f(x, y, z) \geq 0$ неперервна у кожній точці матеріальної поверхні σ і є густиною речовини. Міркуючи аналогічно (3.4), знайдемо, що маса поверхні:

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma.$$

3.9. Поверхневий інтеграл другого роду

Задача про обчислення потоку рідини через поверхню. Нехай задано орієнтовану поверхню з нормаллю

$$\overrightarrow{n^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

у кожній точці якої визначена вектор-функція

$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Візьмемо у рівності (2.1) за $f(X)$ вектор $\vec{a}$, а за міру — орієнтовану площу комірки $\overrightarrow{n_i^0}\Delta\sigma_i$. Тоді

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{a}(p_i)\cdot\overrightarrow{n_i^0}\,\Delta\sigma_i=\iint_{\sigma^+}\vec{a}(x,\,y,\,z)\cdot\overrightarrow{n^0}d\sigma \qquad (3.23)$$

називається **поверхневим інтегралом другого роду** або **інтегралом другого роду по поверхні.** Щоб підкреслити, що при інтегруванні йдеться про певний бік поверхні, використовують знак + або −: σ^+ або σ^-. Інтеграл (3.23) називається ще **потоком** Π **вектора через поверхню.** Якщо ввести вектор $\overrightarrow{n^0}d\sigma=d\vec{\sigma}$, то інтеграл (3.23) можна записати аналогічно інтегралу (3.20):

$$\Pi=\iint_{\sigma^+}\vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}d\sigma=\iint_{\sigma^+}\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}.$$

Якщо поверхня замкнена, то

$$\Pi=\oint\!\!\!\oint_{\sigma}\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}.$$

Оскільки

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}=P(x,\,y,\,z)\cos\alpha+Q(x,\,y,\,z)\cos\beta+R(x,\,y,\,z)\cos\gamma,$$

то
$$\iint_{\sigma^+}\vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}d\sigma=\iint_{\sigma^+}[P(x,\,y,\,z)\cos\alpha+Q(x,\,y,\,z)\cos\beta+$$

$$+R(x,\,y,\,z)\cos\gamma]d\sigma=\iint_{\sigma^+}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma. \qquad (3.24)$$

Знайдемо залежність між орієнтованим диференціалом площини поверхні і його проекцією на координатну площину. Нехай елемент поверхні має площу $\Delta\sigma_i$, а проекція цього елемента на площину xOy має площу Δs_i. Побудуємо векторні величини

$$\overrightarrow{\Delta\sigma_i}=\overrightarrow{n_i^0}\Delta\sigma_i \;\text{ і }\; \overrightarrow{\Delta s_i}=\vec{k}\Delta s_i,$$

де $\overrightarrow{n_i^0}$ — одиничний вектор нормалі у деякій точці p_i, розміщеній на поверхні $\Delta\sigma_i$, а $\vec{k}$ — орт осі z. Кут між $\overrightarrow{n_i^0}$ і $\vec{k}$ позначимо через γ_i. Тоді дістанемо $\Delta s_i=\Delta\sigma_i\cos\gamma_i$ (рис. 6.11). Переходячи у цій рівності до границі, якщо ранг розбиття $\lambda\to 0$, і припускаючи існування диференціалів ds, $d\sigma$ і γ, знаходимо $ds=d\sigma\cos\gamma$.

Елемент $ds=dxdy$, тоді $d\sigma\cos\gamma=dxdy$. Міркуючи аналогічно, дістанемо

$$d\sigma\cos\alpha=dydz,\quad d\sigma\cos\beta=dxdz.$$

Тепер формулу (3.24) запишемо у вигляді

$$\iint\limits_{\sigma^+} \vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}d\sigma = \iint\limits_{\sigma^+}[P(x,\ y,\ z)dydz + Q(x,\ y,\ z)dxdz +$$
$$+ R(x,\ y,\ z)dxdy]\ . \qquad (3.25)$$

Інтеграли

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\sigma^+} P(x,\ y,\ z)dydz &= \iint\limits_{\sigma^+} P\cos\alpha d\sigma\ , \\ \iint\limits_{\sigma^+} Q(x,\ y,\ z)dxdz &= \iint\limits_{\sigma^+} Q\cos\beta d\sigma\ , \\ \iint\limits_{\sigma^+} R(x,\ y,\ z)dxdy &= \iint\limits_{\sigma^+} R\cos\gamma d\sigma \end{aligned} \qquad (3.26)$$

називаються **поверхневими інтегралами по координатах.**

Розглянемо задачу, що приводить до інтегралів (3.25) і (3.26). Нехай треба знайти кількість рідини, що протікає через поверхню σ у певний бік за нескінченно малий проміжок часу Δt. Розглянемо елемент поверхні $\Delta\sigma_i$. Нехай $\vec{v_i} = \vec{v}(p_i)$ — швидкість потоку рідини через елемент

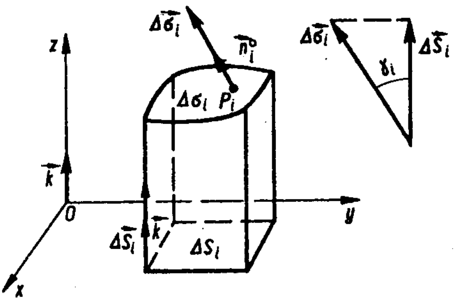


Рис. 6.11

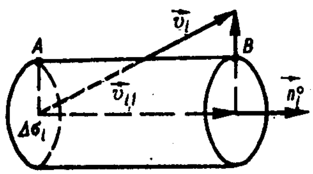


Рис. 6.12

$\Delta\sigma_i$. Вважатимемо, що потік стаціонарний, тобто швидкість потоку у точці простору не зміниться з часом. Визначимо кількість рідини, що проходить через площу $\Delta\sigma_i$ у напрямі її нормалі $\overrightarrow{n_i^0}$ (рис. 6.12). Нехай $\overrightarrow{v_{i1}}$ — швидкість, що задає напрям потоку по нормалі $\overrightarrow{n_i^0}$ або проти неї. Кількість $\Delta\vec{q_i}$ рідини, що протікає через $\Delta\sigma_i$ за час Δt у напрямі $\overrightarrow{n_i^0}$, дорівнює

$$\Delta\vec{q_i} = m_i\overrightarrow{n_i^0}\ ,$$

де m_i — маса рідини.

Об'єм рідини, що витікає за час Δt, дорівнює об'єму циліндра, висота якого $v_{i1}\Delta t = AB$, а площа перерізу $\Delta\sigma_i$. Тоді

$$m_i = \rho v_i = \rho\Delta\sigma_i v_{i1}\Delta t\ ,\ \ \Delta\vec{q_i} = \rho\Delta\sigma_i v_{i1}\Delta\vec{t}\, n_i^o\ .$$

Покладаючи, що густина потоку $\rho = 1$, знаходимо

$$\Delta\overrightarrow{q_i} = v_{i1}\Delta\sigma_i\Delta t\overrightarrow{n_i^0}.$$

Визначимо кількість рідини, що протікає через $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу:

$$\Delta\overrightarrow{q_i} = v_{i1}\Delta\sigma_i\overrightarrow{n_i^0}.$$

Тоді $|\Delta\overrightarrow{q_i}| = \Delta q_i = v_{i1}\Delta\sigma_i$. Оскільки

$$v_{i1} = \left|\overrightarrow{v_i}\right|\cos\left(\overrightarrow{v_i},\ \overrightarrow{n_i^0}\right) = \overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{n_i^0},$$

то

$$\Delta q_i = \overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{n_i^0}\,\Delta\sigma_i.$$

Для будь-якого вектора $\vec{a}$ маємо $\Delta q_i = \overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{n_i^0}\,\Delta\sigma_i$. Загальна кількість рідини, що протікає через поверхню σ у напрямі $\overrightarrow{n^0}$, дорівнює

$$Q = \iint\limits_{\sigma^+}\vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}d\sigma.$$

Якщо врахувати вектор кількості рідини, що протікає через поверхню σ, то

$$\vec{Q} = \iint\limits_{\sigma^+}\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}\right)\vec{n}^0 d\sigma.$$

Так, потік вектора $\vec{a}$ через поверхню — це кількість рідини (або магнітного потоку) через поверхню σ у даному напрямі нормалі. Якщо маємо одночасно два потоки, то Q є різницею між кількістю рідини, що стікається і витікає через дану поверхню.

§ 4. ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ ІНТЕГРАЛА ПО ОБЛАСТІ

Теореми існування визначають, за яких умов, що накладаються на функцію $f(X)$ і міру μ, існує єдина скінченна границя (2.1), яка не залежить ні від способу розбиття області D на підобласті, ні від способу вибору точки p_i в підобластях.

Розрізняють необхідну, достатню, необхідну і достатню умови існування інтеграла по області.

Необхідна умова: *якщо інтеграл по області існує, то функція $f(X)$ обмежена.*

Дійсно, у противному разі серед доданків сум $\sum\limits_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i$ знайдеться хоча б один доданок, значення якого необмежене, а отже, не існує скінченної границі.

Достатня умова: *якщо функція $f(X)$ в області визначення D неперервна і існує диференціал міри, то інтеграл по області існує і не залежить ні від способу розбиття області на підобласті, ні від вибору точок p_i.*

Необхідна і достатня умова: *для того щоб інтеграл по області існував, необхідно і достатньо, щоб існував диференціал міри, а функція $f(X)$ була неперервна в області D всюди, крім, можливо, областей, міра яких дорівнює нулю і на яких функція може мати розрив першого роду.*

Ці теореми приймемо без доведення.

У теоремі існування функція $f(X)$, визначена в n-вимірному просторі, може мати розрив лише у точках, на кривих, на поверхнях, за допомогою яких здійснюється розбиття області D на підобласті.

§ 5. ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛІВ ПО ОБЛАСТІ

1°. *Величина інтеграла по області не залежить від способу позначення незалежних змінних:*

$$\int_D f(X)d\mu = \int_D f(T)d\mu . \tag{5.1}$$

2°. *Якщо область визначення D функції $f(X)$ розбити на скінченне число підобластей, що не мають інших спільних точок, крім межових, то інтеграл по всій області дорівнює сумі інтегралів по підобластях:*

$$\int_D f(X)d\mu = \int_{D_1} f(X)d\mu + \int_{D_2} f(X)d\mu + \cdots + \int_{D_n} f(X)d\mu . \tag{5.2}$$

3°. *Сталий множник можна винести за знак інтеграла:*

$$\int_D kf(X)d\mu = k\int_D f(X)d\mu . \tag{5.3}$$

4°. *Інтеграл від суми скінченного числа функцій, інтегровних в області D, дорівнює сумі інтегралів від кожної функції:*

$$\int_D [f_1(X) + f_2(X) + \cdots + f_n(X)]d\mu =$$

$$= \int_D f_1(X)d\mu + \int_D f_2(X)d\mu + \cdots + \int_D f_n(X)d\mu . \tag{5.4}$$

Наслідок (*із властивостей 3° і 4°*). *Інтеграл від лінійної комбінації функцій, інтегровних в області D, дорівнює лінійній комбіна-*

ції інтегралів по області D:

$$\int_D \left[c_1 f_1(X) + c_2 f_2(X) + \cdots + c_n f_n(X)\right] d\mu =$$

$$= c_1 \int_D f_1(X) d\mu + c_2 \int_D f_2(X) d\mu + \cdots + c_n \int_D f_n(X) d\mu . \qquad (5.5)$$

5°. *Якщо $f(X) \geq 0$ в області D і $d\mu \geq 0$, то*

$$\int_D f(X) d\mu \geq 0 . \qquad (5.6)$$

6°. *Якщо функції $f(X)$ і $\varphi(X)$ визначені в одній і тій самій області D і*

$$f(X) \geq \varphi(X), \qquad (5.7)$$

то

$$\int_D f(X) d\mu \geq \int_D \varphi(X) d\mu . \qquad (5.8)$$

7°. *Якщо $f(X) = 1$, то*

$$\int_D d\mu = \mu . \qquad (5.9)$$

Таким чином,

$$\int_a^b dx = b - a ; \quad \iint_s ds = S ; \quad \iiint_V dv = V , \qquad (5.10)$$

тобто інтеграл від диференціала міри дорівнює мірі області.

8°. ***Теорема* (про оцінку інтеграла по області).** *Якщо функція $f(X)$ в області D неперервна і*

$$m \leq f(X) \leq M, \qquad (5.11)$$

то

$$m\mu \leq \int_D f(X) d\mu \leq M\mu. \qquad (5.12)$$

Доведення. Дійсно, помноживши нерівності (5.11) на $d\mu \geq 0$, дістанемо

$$m d\mu \leq f(X) d\mu \leq M d\mu.$$

Звідси

$$m \int_D d\mu \leq \int_D f(X) d\mu \leq M \int_D d\mu .$$

За властивістю 7 дістаємо нерівності (5.12), які для однократного інтеграла запишуться у вигляді

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

для двократного:

$$mS \leq \int_D f(x,y)dxdy \leq MS,$$

для трикратного:

$$mV \leq \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq MV.$$

9°. *Теорема про середнє.* *Якщо функція $f(X)$ неперервна в замкненій області D, то*

$$\int_D f(X)d\mu = f(\xi)\mu; \; \xi \in D. \tag{5.13}$$

Дійсно, для функції $f(X)$ справедливі формули (5.11) і (5.12). Тому

$$m \leq \frac{\int_D f(X)d\mu}{\mu} \leq M.$$

Порівнюючи з нерівностями (5.11), знаходимо

$$\frac{\int_D f(X)d\mu}{\mu} = f(\xi); \; \xi \in D.$$

Звідси випливає рівність (5.13). Інколи $f(\xi)$ називають **середнім значенням функції $f(X)$ по мірі.**

§ 6. ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛІВ З ОРІЄНТОВАНОЮ МІРОЮ

Перш за все зазначимо, що коли існує інтеграл з орієнтованою в одному напрямі мірою, то він існує і тоді, коли напрям орієнтації змінено на протилежний. У зв'язку з цим справедливі такі властивості інтегралів з орієнтованою мірою.

1°. *Якщо в інтегралі з орієнтованою мірою змінити напрям орієнтації на протилежний, то інтеграли по обох мірах рівні за абсолютною величиною і протилежні за знаком:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx\,; \quad \int_{AB} \vec{a}\cdot d\vec{r} = -\int_{BA} \vec{a}\cdot d\vec{r}\,;$$

$$\iint_{\sigma^+} \vec{a}\cdot d\vec{\sigma} = -\iint_{\sigma^-} \vec{a}\cdot d\sigma\,; \quad \int_{AB} P(x,y,z)dx = -\int_{BA} P(x,y,z)dx\,.$$

2°. *Криволінійний інтеграл по замкненому контуру не залежить від вибору початкової точки його обходу* (рис. 6.13):

$$\int_{AA_1BCDA} P(x,y,z)dx = \int_{A_1BCDAA_1} P(x,y,z)dx\,.$$

Справді, за властивістю 2° інтегралів

$$\int_{AA_1BCDA} P(x,y,z)dx = \int_{AA_1} + \int_{A_1B} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} =$$

$$= \int_{A_1B} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} + \int_{AA_1} = \int_{A_1BCDAA_1} P(x,y,z)dx\,.$$

3°. $\int_{AB} P(x,y,z)dx = 0$, якщо $AB \perp Ox$ (рис. 6.14). Дійсно, $\int_{AB} Pdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i$. Оскільки координата x_i точок M_i і M_{i+1} одна і та сама (рис. 6.14), то $\Delta x_i = 0$.

4°. $\iint_{\sigma^+} P(x,y,z)dxdy = 0$, *якщо поверхня* σ^+ *є циліндричною із твірною, паралельною осі* z.

Справді, у цьому випадку $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, і тоді за формулою $ds = d\sigma\cos\gamma$ дістаємо

$$dxdy = 0.$$

Аналогічно

$$\iint_{\sigma^+} Q(x,y,z)dxdz = 0\,; \quad \iint_{\sigma^+} R(x,y,z)dydz = 0\,,$$

якщо σ^+ — циліндрична поверхня з твірною, паралельною осям y або x.

§ 7. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

7.1. Обчислення визначеного інтеграла

Розглянемо $I = \int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ неперервна на $[a, b]$. Обчислення визначеного інтеграла можна виконати кількома способами. Один

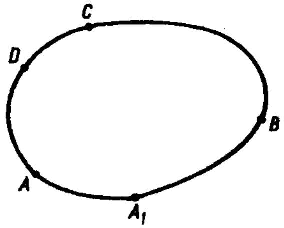


Рис. 6.13

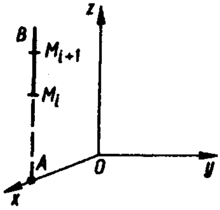


Рис. 6.14

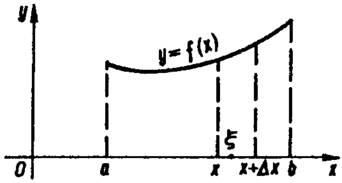


Рис. 6.15

з них пов'язаний з безпосереднім використанням означення інтеграла як границі інтегральних сум

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i\,.$$

Другий спосіб обчислення визначеного інтеграла пов'язаний із знаходженням первісної.

Нехай на $[a, b]$ взято точку $x \in [a, b]$ (рис. 6.15). Розглянемо

$$I = \int_a^x f(t)dt\,.$$

Це інтеграл із змінною верхньою межею. Змінюючи x, дістаємо різні значення I, тобто I є функцією від x:

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt\,.$$

Знайдемо похідну $\dfrac{dI}{dx}$, користуючись її означенням:

$$\frac{dI}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,.$$

Застосуємо до інтеграла $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ теорему про середнє:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x, \text{ де } \xi \in [x, x+\Delta x].$$

Нагадаємо, що $f(x)$ має бути неперервною на $[a, b]$. Тоді

$$\frac{dI}{dx} = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x)\,.$$

Таким чином,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Теорема. *Похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею від неперервної функції дорівнює підінтегральній функції, в якій незалежна змінна замінена верхньою межею. Отже,* $\int_a^x f(t)dt$ *є невизначеним інтегралом, тобто*

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)+C, \qquad (7.1)$$

де $F(x)$ — первісна $f(x)$.

Доведення. Покладемо $x = a$, тоді, з одного боку, $\int_a^a f(t)dt = 0$, а з другого — $0 = F(a) + C$, звідси $C = -F(a)$. Тепер рівність (7.1) запишеться у вигляді

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Підставимо сюди $x = b$. Тоді дістанемо формулу Ньютона — Лейбніца[1] $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Враховуючи незалежність інтеграла від способу позначення змінних, цю формулу запишемо у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Цю формулу можна записати ще й так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Символ $F(x)\Big|_a^b$ називають подвійною підстановкою, тобто $F(b) - F(a)$.

Наприклад, $\int_1^2 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

---

[1] Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646—1716) — німецький математик.

Оскільки обчислення визначеного інтеграла зводиться до відшукання первісної, то є цікавим питання про перенесення на визначені інтеграли формули заміни змінної під знаком визначеного інтеграла, а також формули інтегрування частинами.

7.2. Заміна змінної під знаком визначеного інтеграла

Теорема. *Якщо функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(t)$ задовольняють умови:*
1) *функція $f(x)$ неперервна в сегменті $[a, b]$;*
2) *функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t)$ в $[\alpha, \beta]$*

$$\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b;$$

3) *складна функція $f[\varphi(t)]$ визначена і неперервна в $[\alpha, \beta]$, то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (7.2)$$

Доведення. Розглянемо інтеграл із змінною верхньою межею

$$\int_a^x f(z)dz = F(x). \qquad (7.3)$$

Оскільки $x = \varphi(t)$, то

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(z)dz = F[\varphi(t)] = \Phi(t). \qquad (7.4)$$

Похідна

$$\Phi'(t) = F_t'[\varphi(t)] = F_x' \cdot \varphi_t'(t) = f[\varphi(t)]\varphi_t'(t).$$

Розглянемо

$$\int_a^t f[\varphi(z)]\varphi_t'(z)dz = \psi(t). \qquad (7.5)$$

Похідна

$$\psi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi_t'(t).$$

Порівнюючи вирази для похідних $\Phi'(t)$ і $\psi'(t)$, знаходимо

$$\Phi'(t) = \psi'(t).$$

Звідси $\Phi(t) = \psi(t) + C$. При $t = \alpha$ із рівностей (7.4) і (7.5) дістаємо

$$\Phi(\alpha) = \psi(\alpha) = 0,$$

і, отже, $C = 0$, а $\Phi(t) = \psi(t)$, або $F(x) = \psi(t)$. Тоді із рівностей (7.3) і (7.5) при $x = b$ і $t = \beta$ дістаємо формулу (7.2).

Відмінність формули заміни змінної у визначеному інтегралі від аналогічної формули для невизначеного інтеграла полягає в тому, що при використанні формули (7.2) немає необхідності повертатись до перших змінних, як у формулі для невизначеного інтеграла. Однак при переході від змінної x до змінної t необхідно знайти її нові межі інтегрування α і β.

Приклад. Знайти $\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$.

Розв'язання. Підінтегральну функцію $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ можна записати у вигляді $x^2 + y^2 = r^2$. Тому щоб позбавитися від ірраціональності, скористаємось підстановкою

$$x = r\sin t.$$

Тоді $dx = r\cos t\,dt$. У цьому прикладі $a = 0$, $b = r$. Знайдемо сегмент $[\alpha, \beta]$. Оскільки $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ при $x \in [0, r]$ є рівнянням чверті кола, розміщеного у першому квадранті, то $t \in [\alpha, \beta]$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Функція в $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ має неперервну похідну. Тому застосована формула (7.2). Виконаємо обчислення:

$$\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; r\cos t\,dt = r^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= r^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{r^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right] = \frac{\pi r^2}{4}.$$

7.3. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема. *Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ є в $[a, b]$ диференційовними, то*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx. \tag{7.6}$$

Доведення. Маємо

$$d(u \cdot v) = u'v\,dx + uv'\,dx.$$

Тоді

$$\int\limits_a^b d(u, v) = \int\limits_a^b u'v\,dx + \int\limits_a^b uv'\,dx, \tag{7.7}$$

але $\int\limits_a^b d(uv) = u(x)v(x)\Big|_a^b$. Тоді із рівності (7.7)

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int\limits_a^b vu'\,dx + \int\limits_a^b uv'\,dx.$$

Звідси випливає рівність (7.6). Формулу (7.7) можна записати і так, як для невизначеного інтеграла (див. п. 3.3 з гл. 5)

$$\int\limits_a^b u(x)dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du. \tag{7.8}$$

Всі міркування щодо застосування формули інтегрування частинами в невизначеному інтегралі повністю переносяться на визначений інтеграл.

Наприклад,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = x; & dv = \sin x dx \\ du = dx; & v = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

ВПРАВИ. **1.** Знайти визначений інтеграл:

а) $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$; в) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$.

Відповідь. а) $\ln\frac{4}{3}$; б) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; в) $\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$.

2. Знайти площу фігури, обмеженої параболами $y^2 = x + 1$ і $y^2 = 9 - x$. *Відповідь.* $\frac{40\sqrt{5}}{3}$.

3. Знайти площу фігури, обмеженої гіперболою $xy = 4$ і прямою $x + y - 5 = 0$. *Відповідь.* 7,5 – 8 ln 2.

7.4. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Нехай крива AB задана рівнянням у параметричній формі

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t),\ t_0 \le t \le T. \tag{7.9}$$

При цьому точці A відповідає параметр t_0, а точці B — параметр T

(рис. 6.4). Крім того (див. п. 21.1 з гл. 4),

$$dl = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dt. \qquad (7.10)$$

Використовуючи рівності (7.9) і (7.10), запишемо рівність (3.12) у вигляді

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,dl = \int\limits_{t_0}^{T} f\,[x(t),\ y(t),\ \ z(t)]\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dt. \qquad (7.11)$$

Оскільки справа під інтегралом міститься функція тільки від параметра t, то маємо визначений інтеграл з межами t_0, T.

Таким чином, задача обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла. Якщо крива AB належить площині xOy, то формула (7.11) набирає вигляду

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_{t_0}^{T} f\,(x(t), y(t))\sqrt{x^2 + y^2}\, dt. \qquad (7.12)$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_{AB}(x^2 + y^2 + z^2)\,dl$ вздовж одного витка гвинтової лінії

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \frac{h}{2\pi}t.$$

Розв'язання. Знайдемо похідні

$$\dot{x} = -R\sin t,\ \dot{y} = R\cos t\ ,\ \dot{z} = \frac{h}{2\pi}.$$

Тоді

$$dl = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dt = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\,dt = a\,dt,\ \text{де}\ a = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\,,$$

$$\int\limits_{AB}(x^2 + y^2 + z^2)\,dl = \int\limits_{0}^{2\pi}\left(R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)a\,dt =$$

$$= R^2 at\Big|_0^{2\pi} + \frac{h^2}{4\pi^2}a\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \left(2\pi R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\cdot\frac{8\pi^3}{3}\right)a =$$

$$= \left(2\pi R^2 + \frac{2\pi h^2}{3}\right)a = \frac{2\pi a}{3}(3R^2 + h^2).$$

Розглянемо випадок, коли крива AB розміщена у площині xOy і задана рівнянням $y = \psi\,(x)$, $x \in [a, b]$. Тоді $dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx$ і

$$\int\limits_{AB} f\,(x, y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f\,(x, \psi\,(x))\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx. \qquad (7.13)$$

Якщо у формулах (7.11) — (7.13) покласти $f(x, y, z) = 1$, то інтеграли, що містяться у цих формулах, визначають довжину дуги кривої. Отже, маємо:

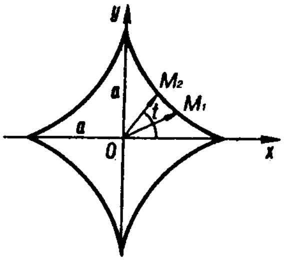


Рис. 6.16

а) довжину просторової кривої, заданої в параметричній формі, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \le t \le T$,

$$l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dt;$$

б) довжину плоскої кривої, заданої в параметричній формі,

$$l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x^2 + y^2}\, dt; \qquad (7.14)$$

в) довжину плоскої кривої, заданої рівнянням $y = \psi(x)$, $x \in [a, b]$,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [\psi'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

Приклад. Знайти довжину дуги астроїди (рис. 6.16).

Розв'язання. Рівняння астроїди

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Оскільки задана крива симетрична відносно початку координат, то можна обчислити одну чверть довжини дуги, для якої t змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$. За формулою (7.14)

$$\dot{x} = -3a\cos^2 t\, \sin t,\ \dot{y} = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$$\frac{l}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\, dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}, \quad l = \frac{3a}{2}\cdot 4 = 6a.$$

Використовуючи формулу (7.11), можна уточнити теорему існування криволінійного інтеграла першого роду:

якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в області визначення, а крива AB гладка, то інтеграл першого роду існує.

ВПРАВИ. **1.** Обчислити криволінійний інтеграл:

а) $\int_L x^2 dl$ вздовж кривої $y = \ln x$, кінці якої знаходяться в точках з абсцисами $x = 1$ і $x = 3$;

б) $\int\limits_{L} y\,dl$ вздовж лінії першої арки циклоїди

$$x = a\,(t - \sin t),\ y = a\,(1 - \cos t);$$

в) $\int\limits_{L} x\,dl$ вздовж прямої від точки A (0, 0) до точки B (1, 2).

Відповідь. а) $\frac{2}{3}\left(5\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)$; б) $\frac{32a^2}{3}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. Знайти довжину дуги кривої:

а) $y = \sqrt{x^3}$ при $0 \le x \le 1$; б) $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ при $0 \le x \le a$;

в) $x = a\,(t - \sin t),\ y = a\,(1 - \cos t)$, при $0 \le t \le 2\pi$;

г) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ при $0 \le t \le t_0$;

д) $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t$ при $0 \le t \le 2$.

Відповідь. а) $\frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$; б) $a\operatorname{sh} 1$; в) $8a$; г) $\sqrt{a^2 + b^2}\,t_0$;
д) $\sqrt{3}\left(e^2 - 1\right)$.

7.6. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду

Розглянемо спочатку інтеграли по координатах типу

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx,\quad \int\limits_{AB} Q(x, y, z)\,dy,\quad \int\limits_{AB} R(x, y, z)\,dz. \tag{7.15}$$

Нехай криву AB задано в параметричній формі (7.9), тоді

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx = \int\limits_{t_0}^{T} P[x(t), y(t), z(t)]\,\dot{x}(t)\,dt.$$

Аналогічно можна записати й інші інтеграли (7.15).

Таким чином, обчислення криволінійного інтеграла по координатах зводиться до обчислення визначеного інтеграла і всі міркування зберігаються, якщо крива розміщена в площині.

Розглянемо далі лінійний інтеграл (3.17). Маємо

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \{P[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,\dot{x}(t) + Q[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,\dot{y}(t) +$$

$$+ R[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,\dot{z}(t)\}\,dt. \tag{7.16}$$

Звідси випливає, що обчислення лінійного інтеграла зводиться до обчислення визначеного інтеграла. За властивістю 4° з § 5 знаходимо

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{t_0}^{T} P\dot{x}dt + \int\limits_{t_0}^{T} Q\dot{y}dt + \int\limits_{t_0}^{T} R\dot{z}dt.$$

Кожний з інтегралів правої частини цієї рівності відповідно дорівнює інтегралу по координатах, а тому

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} Pdx + \int\limits_{AB} Qdy + \int\limits_{AB} Rdz.$$

Отже, лінійний інтеграл дорівнює сумі інтегралів по координатах.

Для кривої, що міститься у площині xOy, $z = 0$ і тому $dz = 0$. При цьому маємо

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{t_0}^{T} \{P[x(t), y(t)]\dot{x}(t) +$$

$$+ Q[x(t), y(t)]\dot{y}(t)\}dt = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)dy.$$

Якщо криву AB, що міститься у площині xOy, задано рівнянням $y = \psi(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{a}^{b} \{P[x, \psi(x)] + Q[x, \psi(x)]\psi'(x)\}dx. \qquad (7.17)$$

***Приклади.* 1.** Знайти $\int\limits_{AB} x^2dx + yzdy + zdz$ вздовж відрізка AB, що проходить через точки $A(1, 2, -1)$ і $B(3, 3, 2)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки A і B, в параметричній формі;

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3} = t.$$

Звідси

$$x = 1 + 2t;\ y = 2 + t;\ z = -1 + 3t,$$

а

$$P(x, y, z) = x^2,\ Q(x, y, z) = yz,\ R(x, y, z) = z.$$

Межі t_0 і T знайдемо з параметричних рівнянь прямої, використовуючи координати точок A і B:

$$t_0 = 0,\ T = 1.$$

Далі знаходимо

$$\dot{x} = 2,\ \dot{y} = 1,\ \dot{z} = 3.$$

Із рівняння (7.16) маємо

$$\int\limits_{AB} x^2dx + yzdy + zdz = \int\limits_0^1 \left[(1+2t)^2 \cdot 2 + (2+t)(3t-1)\cdot 1 +\right.$$

$$\left. + (3t-1)\cdot 3\right]dt = \int\limits_0^1 \left(11t^2 + 22t - 3\right)dt = \left(11\cdot\frac{t^3}{3} + 22\cdot\frac{t^2}{2} - 3t\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{11}{3} + 11 - 3 = 11\frac{2}{3}.$$

2. Знайти інтеграл $\int\limits_{AB} ydx$ вздовж параболи $y^2 = x$ від точки $A\,(1;\,-1)$ до точки $B\,(1;\,1)$.

Розв'язання. Тут зручно $\int\limits_{AB} ydx$ подати у вигляді суми

$$\int\limits_{AB} ydx = \int\limits_{AO} ydx + \int\limits_{OB} ydx,$$

але на OA $y = -\sqrt{x}$, а на OB $y = \sqrt{x}$ (рис. 6.17). Межі інтегрування на OA — від 1 до 0 і на OB — від 0 до 1. Отже,

$$\int\limits_{AO} ydx = \int\limits_1^0 \left(-\sqrt{x}\right)dx = -\int\limits_1^0 x^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^0 = \frac{2}{3},$$

$$\int\limits_{OB} ydx = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3},\quad \int\limits_{AB} ydx = \frac{4}{3}.$$

Уточнимо тепер теорему існування криволінійного інтеграла другого роду. Як випливає з рівності (7.16), якщо функції, що задають криву AB, мають неперервні похідні скрізь, крім, можливо, скінченного числа точок розриву першого роду, а функції $P\,(x,\,y,\,z)$, $Q\,(x,\,y,\,z)$, $R\,(x,\,y,\,z)$, визначені на кривій, неперервні, то криволінійний інтеграл другого роду існує.

7.7. Застосування криволінійного інтеграла другого роду до обчислення площі області, обмеженої замкненою кривою

Нехай замкнена крива $ABCE$ задана рівнянням $y = \psi\,(x)$, або $x = \gamma\,(y)$, причому $x \in [a,\,b]$, а $y \in [c,\,d]$ (рис. 6.18). Позначимо криву $ABCE$ через L, значення y на ABC — через $y_1\,(x)$, а на AEC — через $y_2\,(x)$, причому

$$y_1\,(x) \le y_2\,(x).$$

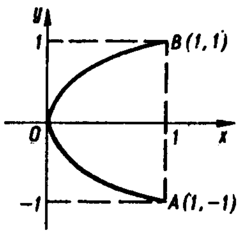


Рис. 6.17

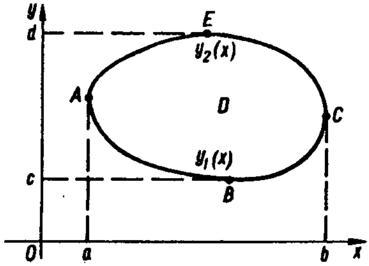


Рис. 6.18

Тоді площа, обмежена кривою $ABCEA$ (див. п. 3.2),

$$S_D = \int_a^b y_2(x)dx - \int_a^b y_1(x)dx.$$

Однак

$$\int_a^b y_2(x)dx = \int_{AEC} ydx, \quad \int_a^b y_1(x)dx = \int_{ABC} ydx.$$

Тепер дістаємо

$$S_D = \int_{AEC} ydx - \int_{ABC} ydx = -\int_{CEA} ydx - \int_{ABC} ydx =$$

$$= -\oint_{ABCEA} ydx = -\oint_L ydx, \quad S_D = -\oint_L ydx. \qquad (7.18)$$

Якщо вважати, що криву L задано рівнянням $x = \gamma(y)$, то, міркуючи аналогічно, знайдемо

$$S_D = \oint_L xdy. \qquad (7.19)$$

Об'єднавши (7.18) і (7.19), дістанемо

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx. \qquad (7.20)$$

Ця формула виражає площу, обмежену замкненою кривою, через криволінійний інтеграл типу (7.17).

Приклад. Знайти площу еліпса.

Розв'язання. Запишемо рівняння еліпса у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi;$$

тоді

$$\dot{x} = -a\sin t,\ \dot{y} = b\cos t,\ dx = -a\sin t\,dt,\ dy = b\cos t\,dt;$$

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t + b\sin t\cdot a\sin t)dt;$$

$$S_D = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Отже, площа еліпса

$$S_{\text{ел}} = \pi ab.$$

Якщо $a = b$, то дістанемо площу круга

$$S_{\text{кр}} = \pi a^2.$$

ВПРАВИ. **1.** Обчислити криволінійний інтеграл:

а) $\int_L (x + y)dx + (2x - y)dy$ вздовж кола $y = 5\sin\varphi$; $x = 5\cos\varphi$, якщо обхід здійснюється проти руху стрілки годинника;

б) $\int_{AB} \frac{y^2 + 1}{y}dx - \frac{x - 2y^2}{y^2}dy$ від точки A (1, 2) до точки B (2, 4) вздовж прямої, що проходить через ці точки. *Відповідь*. а) 25π; б) 7.

2. Використовуючи формулу (7.20), знайти площу:

а) сектора астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, обмеженого прямими OM_1 і OM_2, що виходять з початку координат, і дугою M_1M_2 астроїди, якщо t змінюється від $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{4}$ (рис. 6.16);

б) сектора гіперболи $x = a\,\text{ch}\,t$, $y = b\,\text{sh}\,t$, обмеженого віссю Ox, дугою гіперболи до точки M (x_0, y_0) і прямою OM. Точці M (x_0, y_0) відповідає параметр t_0.

Відповідь. а) $\frac{a^2\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)}{128}$; б) $\frac{abt_0}{2}$.

7.8. Правильні області

Нехай область D є фігурою, що розміщена в площині xOy і обмежена кривими $y_1 = \varphi_1(x)$ і $y_2 = \varphi_2(x)$ так, що $y_1 \le y \le y_2$, $a \le x \le b$ (рис. 6.19), або кривими $x_1 = x_1(y)$, $x_2 = x_2(y)$ (рис. 6.20) так, що $x_1 \le x \le x_2$, $c \le y \le d$.

Область $\bar{D}_1$ називається **правильною у напрямі осі** x, а $\bar{D}_2$ **— у напрямі осі** y.

Нехай в області D визначена функція $u = f(x, y)$. Область D визначення функції $u = f(x, y)$ називається правильною у напрямі осі y, якщо будь-яка пряма, що паралельна осі y і проходить через будь-яку внутрішню точку області D, перетинає межі області не більше ніж у двох точках. Аналогічно означається область, правильна у напрямі осі x. Якщо область D є правильною у напрямі обох осей

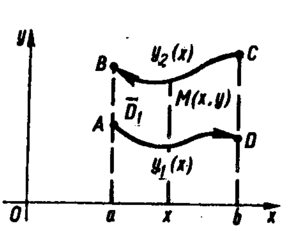


Рис. 6.19

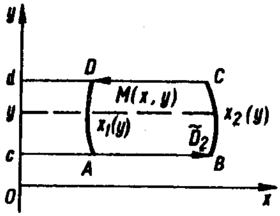


Рис. 6.20

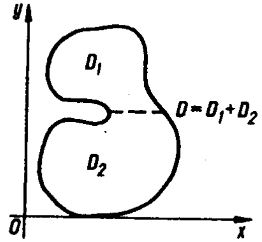


Рис. 6.21

одночасно, то вона називається просто **правильною.** Наприклад, область D, межею якої є еліпс або коло, є правильною. Якщо область D **неправильна**, то можна її розбити на підобласті, правильні у напрямі однієї з координатних осей. Наприклад, область D, зображена на рис. 6.21, є неправильною у напрямі осі y. Розіб'ємо її на області D_1 і D_2. Ці області вже правильні.

Зазначимо також, що коли говорять про правильні області, то мають на увазі криві, рівняння яких $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$, що обмежують область, описуються кожна одним рівнянням. Якщо таких рівнянь кілька, то щоб дістати правильну область, задану область треба розбити на стільки частин, скільки існує функцій (рис. 6.22). Нехай, наприклад, області D_1 і D_2 задано нерівностями:

$$D_1 \begin{cases} \psi_3(x) \le y \le \psi_1(x); \\ a \le x \le c, \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} \psi_4(x) \le y \le \psi_2(x); \\ c \le x \le b \end{cases} \qquad \text{(рис. 6.22)}$$

і

$$D_1 \begin{cases} 0 \le y < x^2; \\ 0 \le x \le 1, \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} 0 \le y \le 2 - x; \\ 1 \le x \le 2. \end{cases} \qquad \text{(рис. 6.23)}$$

Введемо поняття правильної області у тривимірному просторі (рис. 6.24). Розглянемо об'єм V, утворений циліндричною поверхнею з твірною, паралельною осі Oz, і обмеженою знизу і зверху поверхнями

$$z_1 = H_1(x, y) \text{ і } z_2 = H_2(x, y)$$

так, що

$$H_1(x, y) \le z \le H_2(x, y).$$

Припустимо, що поверхні $H_1(x, y)$ і $H_2(x, y)$ проектуються на площину xOy в область D, правильну в якому-небудь напрямі (рис. 6.24). Тоді об'єм V називається правильним у напрямі осі z. Аналогічно можна ввести поняття правильного об'єму V у напрямі осей x і y, а також правильного в усіх напрямах об'єму V.

Наприклад, куля або еліпсоїд правильні в усіх напрямах об'ємами V.

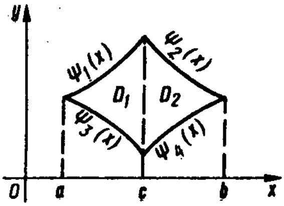


Рис. 6.22

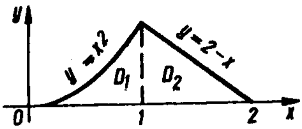


Рис. 6.23

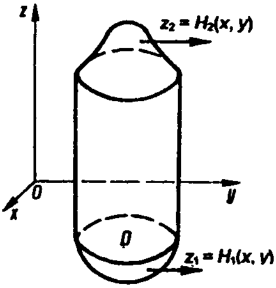


Рис. 6.24

7.9. Повторні інтеграли

Нехай в області D_1 (рис. 6.19) визначено функцію $u = f(x, y)$. Побудуємо на області D_1 поверхню $u = f(x, y)$ (рис. 6.25). Виберемо $x_0 \in [a, b]$ і проведемо через точку $M_0(x_0, 0, 0)$ площину, паралельну площині yOz. У перерізі дістанемо криволінійну трапецію $ABCD$. Спроектуємо цю проекцію на площину yOz. У площині yOz дістанемо трапецію $A_1B_1C_1D_1$, утворену прямими $y = y_1$ і $y = y_2$ віссю ординат і графіком $f(x_0, y)$. Площа трапеції $ABCD$ дорівнює площі трапеції $A_1B_1C_1D_1$. Згідно з п. 3.2, площа криволінійної трапеції $ABCD$

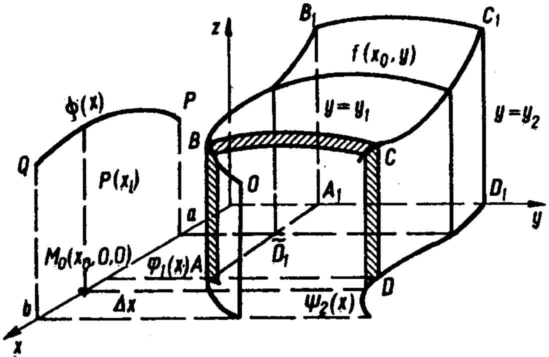


Рис. 6.25

$$S_{ABCD} = \int_{y_1}^{y_2} f(x_0, y)\,dy .$$

Проведене міркування справедливе для будь-якого $x_0 \in [a, b]$. Тому площа S_{ABCD} є функцією від x. Позначивши цю функцію через $\Phi(x)$, знайдемо (рис. 6.19)

$$\Phi(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy . \tag{7.21}$$

Цей інтеграл обчислюється як звичайний визначений інтеграл по змінній y при фіксованому x. Аналогічно можна дістати інтеграл

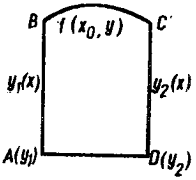


Рис. 6.26

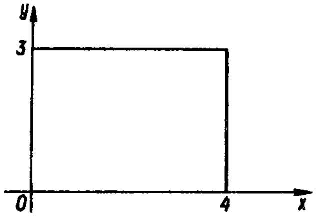


Рис. 6.27

для області D_2 (рис. 6.20):

$$F(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)dx = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)dx. \quad (7.22)$$

Тут параметром є y.

Геометрично ці інтеграли є площами криволінійної трапеції, здобутої при перерізі циліндричного тіла площиною $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ (рис. 6.26).

Нехай функції $\Phi(x)$ і $F(y)$ інтегровні відповідно на сегментах $[a, b]$ або $[c, d]$. Тоді можна дістати інтеграли

$$I_{\tilde{D}_1} = \int_a^b \Phi(x)dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right]dx, \quad (7.23)$$

$$I_{\tilde{D}_2} = \int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx\right]dy. \quad (7.24)$$

Ці інтеграли називаються повторними або двократними, їх побудова пов'язана з областями $\tilde{D}_1$ і $\tilde{D}_2$, які зображено на рис. 6.19 і 6.20. Для обчислення повторного інтеграла досить послідовно зінтегрувати функцію $f(x, y)$ спочатку за одним аргументом, вважаючи інший сталим, а потім за другим, вважаючи перший сталим.

Наприклад, нехай область інтегрування задано нерівностями $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$ (рис. 6.27), а $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

Побудуємо

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (x^2 + 2y^2)dy = \int_0^3 (x^2 + 2y^2)dy = \left(x^2 y + \frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^3 = 3x^2 + 18,$$

$$I_{\tilde{D}_1} = \int_0^4 (3x^2 + 18)dx = (x^3 + 18x)\Big|_0^4 = 4(16 + 18) = 136,$$

$$F(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} (x^2 + 2y^2)dx = \int_0^4 (x^2 + 2y^2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2y^2 x\right)\Big|_0^4 = \frac{4^3}{3} + 8y^2,$$

$$I_{\tilde{D}_2} = \int_0^3 \left(8y^2 + \frac{4^3}{3}\right)dy = \left(8 \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{4^3}{3}y\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 8 \cdot \frac{3^3}{3} + \frac{4^3}{3} \cdot 3 = 4(18 + 16) = 136.$$

Із розглянутого прикладу бачимо, що, змінюючи порядок інтегрування (спочатку по y, а потім по x, і навпаки), дістаємо, взагалі кажучи, різні повторні інтеграли. Інтеграли (7.23) і (7.24) називаються інтегралами з різним порядком інтегрування.

Якщо області $\tilde{D}_1$ і $\tilde{D}_2$ збігаються, то інтеграли (7.23) і (7.24) рівні між собою:

$$I_D = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy, \qquad (7.25)$$

де $D = \tilde{D}_1 = \tilde{D}_2$.

7.10. Зв'язок між подвійним і двократним (повторним) інтегралами

Нехай функція $f(x, y)$ задана в області D і є в ній неперервною і невід'ємною. Нехай область D правильна, причому існує два типи повторних інтегралів (7.25). Тоді існує інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, який дорівнює об'єму тіла, побудованого на області D:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy. \qquad (7.26)$$

Розглянемо інтеграл (7.21) для деякого значення x_i:

$$\Phi(x_i) = \int_{y_1}^{y_2} f(x_i, y)\,dy.$$

Надамо x_i приросту Δx_i і утворимо добуток $\Phi(x_i)\,\Delta x_i$, який дорівнює елементарному об'єму, ΔV_i (рис. 6.25):

$$\Delta V_i = \Phi(x_i)\,\Delta x_i.$$

Наближене значення об'єму всього тіла

$$V_n \approx \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\Delta x_i.$$

Точне значення дістанемо, якщо перейдемо до границі:

$$V \approx \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\Delta x_i = \int_a^b \Phi(x)\,dx,$$

або

$$V = \int_a^b \left[\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \right] dx. \qquad (7.27)$$

Порівнюючи об'єми (7.26) і (7.27), знаходимо

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx. \tag{7.28}$$

Якщо область D є правильною у напрямі осі x, то, міркуючи аналогічно, дістаємо

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy. \tag{7.29}$$

Якщо область D правильна в обох напрямах, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy. \tag{7.30}$$

Вибираючи різний порядок інтегрування, маємо різні способи обчислення подвійного інтеграла через повторні. Зазначимо, що формули (7.28)—(7.30) справедливі для будь-якої неперервної в області D функції. Отже, якщо функція $u = f(x, y)$ неперервна в області D, то обчислення подвійного інтеграла зводиться до повторного. Доведення цього загального твердження опускаємо.

Приклад. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy$, якщо область D обмежена прямими $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ (рис. 6.28).

Розв'язання. Область D є правильною в обох напрямах, а тому можна побудувати інтеграли (7.28) і (7.29):

$$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^x e^{\frac{y}{x}}dy \right] dx = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_y^1 e^{\frac{y}{x}}dx \right] dy.$$

Обчислюючи кожний інтеграл окремо, дістаємо

$$\int\limits_0^x e^{\frac{y}{x}}dy = xe^{\frac{y}{x}}\Big|_0^x = x(e-1),$$

$$\int\limits_0^1 x(e-1)\,dx = (e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}, \quad \iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy = \frac{e-1}{2}.$$

З метою спрощення в повторних інтегралах квадратні дужки опускають і записують

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy, \text{ або } \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

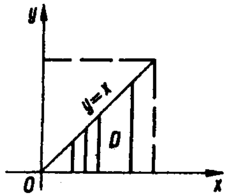


Рис. 6.28

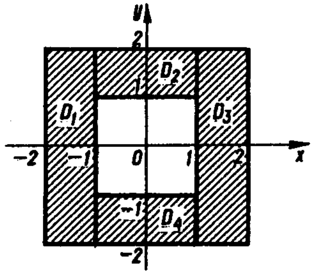


Рис. 6.29

Зауваження. Якщо область D не є правильною у жодному напрямі, то її можна розбити на ряд правильних областей D_1, D_2, ..., D_n. Тоді записують

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds + \ldots + \iint\limits_{D_n} f(x,y)ds.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\iint\limits_D e^{x+y}ds$ по області D, що міститься між двома квадратами: $\begin{cases}-2 \le x \le 2, \\ -2 \le y \le 2,\end{cases}$ $\begin{cases}-1 \le x \le 1, \\ -1 \le x \le 1\end{cases}$ (рис. 6.29).

Розв'язання. Область D є неправильною. Розіб'ємо її на чотири правильні області D_1, D_2, D_3, D_4. Тоді

$$\iint\limits_D e^{x+y}ds = \int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_{-2}^{2}e^{x+y}dy + \int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{1}^{2}e^{x+y}dy +$$

$$+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{-2}^{2}e^{x+y}dy + \int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-2}^{-1}e^{x+y}dy = 2(\mathrm{sh}4 - \mathrm{ch}2).$$

ВПРАВИ. **1.** Змінити порядок інтегрування і зобразити область інтегрування для інтеграла:

а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$;

в) $\int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$; г) $\int\limits_0^{3/4} dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy$.

2. Знайти повторний інтеграл

$\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{(2x+y+1)^2}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

3. Знайти подвійні інтеграли:

а) $\iint\limits_S (x+y)dxdy$, якщо область S обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$;

б) $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dxdy$, якщо область S обмежена лініями $y = 0$, $y = x$, $x = 2$.

Відповідь. а) $\frac{8}{3}$; б) $\frac{8}{3}$.

4. Користуючись формулою $S_D = \iint\limits_D dxdy$, знайти площу фігури, обмежену кривими:

а) $y = 2x - x^2$, $y = x^2$; б) $2y = x^2$, $x = y$. *Відповідь.* а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$.

5. За допомогою подвійного інтеграла знайти об'єми, обмежені поверхнями:

а) $x + y + z = 6$, $x = 0$, $z = 0$, $x + 2y < 4$, $y = 0$;
б) $x - y + z = 6$, $x + y = 2$, $x = y$, $y = 0$, $z = 0$;

в) $z^2 = xy$, $x = a$, $x = 0$, $y = b$, $y = 0$. *Відповідь.* а) 16; б) $\frac{16}{3}$; в) $\frac{8}{9}ab\sqrt{ab}$.

7.11. Трикратний і потрійний інтеграли

Введемо поняття трикратного інтеграла. Нехай в об'ємі V визначена неперервна функція $u = f(x, y, z)$ (рис. 6.24). Зафіксуємо змінні x і y. Тоді $u = f(x, y, z)$ є функцією однієї змінної z.

Побудуємо інтеграл $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)dz$, який буде функцією від x і y; а $z_1 = H_1(x, y)$, $z_2 = H_2(x, y)$. Позначимо цю функцію через $\gamma(x, y)$ і запишемо

$$\gamma(x, y) = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)dz = \int\limits_{H_1(x,y)}^{H_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Припустимо, що функція $\gamma(x, y)$ в області D неперервна, а область D правильна у напрямі осі y або x. Тоді, фіксуючи x або y, можна побудувати інтеграли типу (7.21) або (7.22), а потім за ними інтеграли (7.23) і (7.24). Таким чином,

$$I_V = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_{H_1(x,y)}^{H_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dy \right\} dx, \tag{7.31}$$

$$I_V = \int\limits_c^d \left\{ \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left[\int\limits_{H_1(x,y)}^{H_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dx \right\} dy. \tag{7.32}$$

Інтеграли (7.31) і (7.32) називаються **трикратними інтегралами**. Якщо вважати, що маємо матеріальний об'єм V і $f(x, y, z)$ є густиною речовини, то I_V є масою цього об'єму. Крім того (див. п. 3.4), потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV$$

з фізичної точки зору є також масою того самого об'єму. Ці міркування дають змогу обчислення потрійного інтеграла звести до обчислення трикратного інтеграла:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_{H_1(x,y)}^{H_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx, \qquad (7.33)$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_c^d \left\{ \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left[\int\limits_{H_1(x,y)}^{H_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dx \right\} dy. \qquad (7.34)$$

Обчислення трикратних інтегралів зводиться до обчислення звичайних інтегралів по одній змінній при фіксованих інших змінних.

Приклад. Обчислити

$$I = \iiint\limits_V x^3y^2dxdydz,$$

де V задається системою нерівностей

$$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy.$$

Розв'язання. Маємо

$$\iiint\limits_V x^3y^2dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3y^2dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x x^4y^3dy =$$

$$= \int\limits_0^1 x^4 \frac{y^4}{4}\Bigg|_0^x dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^8dx = \frac{1}{36}.$$

Звичайно, формули (7.33) і (7.34), по суті, залишилися недоведеними. Розглянемо ідею доведення. Ці формули так само, як і формули (7.28) і (7.29), доводять спочатку для прямокутного паралелепіпеда (прямокутника), а потім — для будь-якого об'єму з криволінійними поверхнями, який можна помістити в прямокутний паралелепіпед (прямокутник). Область розбивають на елементарні комірки і для кожної комірки знаходять три значення функції: найменше, найбільше і в довільній точці. Помноживши ці значення функції на міру комірки і додавши їх, дістають три інтегральні суми, що задовольняють теорему Гур'єва. Граничний перехід у цих сумах дають формули (7.33) і (7.34).

ВПРАВИ. **1.** Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, де область V обмежена площинами $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 1$. *Відповідь*. 6.

2. Знайти масу кулі, радіус якої r, а густина γ у кожній точці з координатами x, y, z пропорційна квадрату відстані від цієї точки до центра кулі:

$$\gamma\ (x,\ u,\ z) = k\ (x^2 + y^2 + z^2).$$

Відповідь. $\frac{2}{3}\pi r^3 k$.

3. Використовуючи потрійний інтеграл, знайти об'єм тіла, обмеженого:

а) циліндрами $x^2 + y^2 = 4$, $z = \dfrac{x^2}{3}$ і площиною $z = 0$;

б) площинами $z = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$ і параболічним циліндром $z = x^2$.

Відповідь. а) $\dfrac{4}{3}\pi$; б) $\dfrac{4}{3}$.

7.12. Заміна змінних у подвійному і потрійному інтегралах

Оскільки обчислення подвійних і потрійних інтегралів зводиться до обчислення двічі і тричі повторних визначених інтегралів, то цікавою є формула переходу від подвійних, потрійних інтегралів, міра області яких задана в прямокутній системі координат, до таких в будь-якій іншій системі координат. Розглянемо спочатку подвійні інтеграли.

Нехай дано інтеграл $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ і введено заміну змінних

$$x = \varphi\,(u,\, v) = x\,(u,\, v),\; y = \psi\,(u,\, v) = y\,(u,\, v) \tag{7.35}$$

таким чином, що між $(u,\, v)$ і $(x,\, y)$ встановлено взаємно однозначну відповідність. З'ясуємо, як пов'язані між собою інтеграли

$$\iint\limits_{D x,y} f(x, y)dxdy \quad \text{і} \quad \iint\limits_{D u,v} f[x(u,v),\, y(u,v)]dudv.$$

Теорема. *Якщо рівності* (7.35) *встановлюють взаємно однозначну відповідність між областями $D_{x,y}$ і $D_{u,v}$, області $D_{x,y}$ і $D_{u,v}$ квадровані і правильні в будь-якому напрямі, функції $x\,(u,\, v)$, $y\,(u,\, v)$ є диференційовними за обома змінними, а $f\,(x,\, y)$ — неперервна в $D_{x,y}$ функція, то*

$$\iint\limits_{D x,y} f(x, y)ds = \iint\limits_{D u,v} f[x(u,v),\, y(u,v)]\left|\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\right| ds'. \tag{7.36}$$

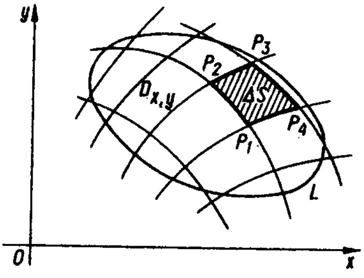


Рис. 6.30

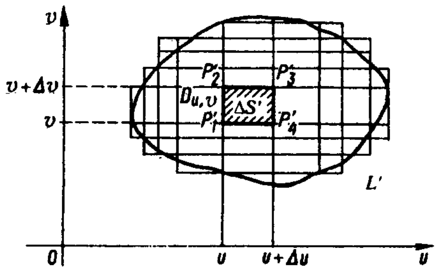


Рис. 6.31

Доведення. Нехай області $D_{x,y}$ і $D_{u,v}$, обмежені простими кривими L і L', є правильними. Розіб'ємо область $D_{x,y}$ на довільні комірки $P_1 P_2 P_3 P_4$ (рис. 6.30), а $D_{u,v}$ — на прямокутні комірки $P_1' P_2' P_3' P_4'$ (рис. 6.31). Площі цих комірок дорівнюють відповідно Δs і $\Delta s'$. Знайдемо залежність між цими площами. Вважаючи відомими координати точок P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2), P_3 (x_3, y_3), площу Δs наближено знайдемо за формулою площі трикутника, вираженої через координати його вершин:

$$\Delta s \approx 2S_{\Delta P_1 P_2 P_3} = \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|. \qquad (7.37)$$

За формулами (7.35) виразимо координати x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 через u, v. Встановимо відповідність між точками P_1, P_2, P_3 і $P_1' P_2' P_3'$:

$$P_1(x_1, y_1) \Leftrightarrow P_1'(u, v),$$
$$P_2(x_2, y_2) \Leftrightarrow P_2'(u, v + \Delta v),$$
$$P_3(x_3, y_3) \Leftrightarrow P_3'(u + \Delta u, v + \Delta v).$$

Тоді

$$\begin{cases} x_1 = x(u, v), \\ x_2 = x(u, v + \Delta v), \\ x_3 = x(u + \Delta u, v + \Delta v); \\ y_1 = y(u, v) \\ y_2 = y(u, v + \Delta v), \\ y_3 = y(u + \Delta u, v + \Delta v). \end{cases} \qquad (7.38)$$

Застосуємо до функцій, що містяться у правих частинах рівностей (7.38), формулу Лагранжа для приростів Δu і Δv:

$$x_2 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ x_3 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,$$

$$y_2 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v,\ y_3 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v.$$

Тоді

$$x_2 - x_1 = \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ x_3 - x_1 = \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,$$

$$y_2 - y_1 = \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v,\ y_3 - y_1 = \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v.$$

Тут частинні похідні обчислюються у деякій проміжній точці, що належить прямокутнику $P_1' P_2' P_3' P_4'$. Підставляючи здобуті значення у рівність (7.37), знаходимо

$$\Delta s \approx \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \Delta u \cdot \Delta v .$$

Переходячи тут до границі і вважаючи $\Delta s = ds$, а $\Delta u \cdot \Delta v = du \times \times dv = ds'$, знаходимо

$$ds \approx \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| ds' = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| ds' .$$

Тут частинні похідні обчислюються вже в точці з координатами (u, v).

Вираз

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \tag{7.39}$$

називається **якобіаном**. Якобіан є величиною спотворення площі при переході від однієї системи координат до другої за допомогою функцій (7.35). Тепер співвідношення між інтегралами по областях $D_{x,y}$ і $D_{u,v}$ можна записати у вигляді

$$\iint\limits_{D x,y} f(x,y)ds = \iint\limits_{D u,v} f[x(u,v),\ y(u,v)]\,|I|\,ds' .$$

Позначаючи

$$f[x(u,v),\ y(u,v)] = F(u,v),$$

дістаємо

$$\iint\limits_{D x,y} f(x,y)ds = \iint\limits_{D u,v} F(u,v)\,|I|\,ds' .$$

Зазначимо, що знак якобіана залежить від напряму обходу контуру L, що обмежує область $D_{x,y}$. Для прикладу виконаємо перехід до полярних координат у подвійному інтегралі, тобто

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

При цьому для виконання взаємно однозначної відповідності необхідно, щоб виконувались нерівності $0 \le \rho < +\infty$, а $0 \le \varphi < 2\pi$. Нехай $u = \rho$, $v = \varphi$, тоді

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi, \ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi, \ \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi.$$

Підставляючи ці значення в якобіан (7.39), знайдемо $I = \rho$. Тоді

$$\iint\limits_{D_{x,y}} f(x,y)ds = \iint\limits_{D_{\rho,\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi.$$

Якщо $f(x, y) = 1$, то інтеграл у правій частині є площею області. Таким чином,

$$S_D = \iint\limits_{D_{\rho,\varphi}} \rho d\rho d\varphi.$$

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$ по кільцю $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, розміщеному у першій чверті (рис. 6.32, *а*).

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат (рис. 6.32, *б*). Тоді рівняння кільця запишеться у вигляді

$$1 \le \rho \le 2, \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Далі маємо

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{D_{\rho,\varphi}} e^{\rho^2}\rho d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 e^{\rho^2}\rho d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}e^{\rho^2}\Big|_1^2 d\varphi = \frac{1}{2}(e^4 - e)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{4}(e^4 - e).$$

Введемо тепер заміну змінних у потрійних інтегралах. Нехай задано інтеграл

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \tag{7.40}$$

і функціональна заміна змінних виконується згідно з рівностями

$$x = x(u, v, w), \ y = y(u, v, w), \ z = z(u, v, w). \tag{7.41}$$

Аналогічно рівностям (7.35) побудуємо два об'єми $V(x, y, z)$ і $V'(u, v, w)$ та інтеграл

$$\iiint\limits_{V'} F(u,v,w)dudvdw. \tag{7.42}$$

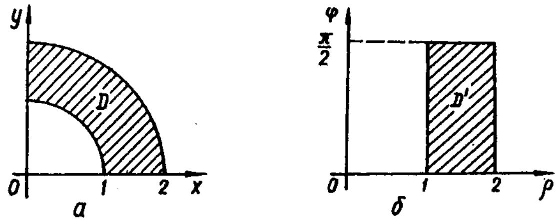


Рис. 6.32

Установлено співвідношення між інтегралами (7.40) і (7.42). Методами, аналогічними розглянутому вище випадку подвійних інтегралів, доведемо таку теорему.

Теорема. *Якщо функції* (7.41) *встановлюють взаємно однозначну відповідність між об'ємами V і V', об'єми V і V' є кубованими і правильними, функції* (7.41) *диференційовні, а функція* $f(x, y, z)$ *неперервна за всіма змінними в об'ємі V, то*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f\left[x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\right]\left|I\right| dudvdw, \qquad (7.43)$$

де

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}. \qquad (7.44)$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)dV$ по області $x + y + z = a$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x + y + z < a$ (рис. 6.33).

Розв'язання. Введемо нові змінні $x + y + z = u$, $a(y + z) = uv$. Тоді

$$a^2z = uvw.$$

Звідси

$$u = x + y + z;\ v = \frac{a(y+z)}{x+y+z};\ w = \frac{az}{y+z},$$

або

$$x = \frac{u(a-v)}{a};\ y = \frac{uv(a-w)}{a^2};\ z = \frac{uvw}{a^2}.$$

При цьому тетраедр переходить у куб $0 < u < a$, $0 < v < a$, $0 < w < a$, і

$$I = \frac{u^2v}{a^3}.$$

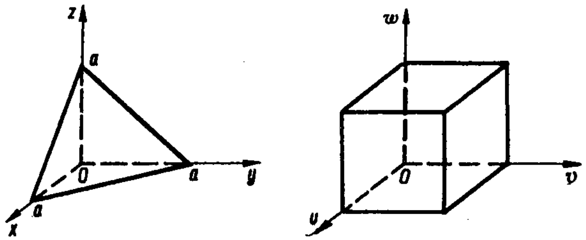


Рис. 6.33

Таким чином,

$$\iiint\limits_V (x+y+z)dv = \iiint\limits_{V'} u\frac{u^2v}{a^3}dudvdw = \frac{1}{a^3}\int\limits_0^a u^3du\int\limits_0^a vdv\int\limits_0^a dw =$$

$$= \frac{1}{a^3}\frac{a^4}{4}\frac{a^2}{2}a = \frac{a^4}{8}.$$

7.13. Перехід у потрійних інтегралах до циліндричних і сферичних координат

Як відомо, прямокутні координати через циліндричні виражаються формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi,\ 0 \le \rho < +\infty, \\ y = \rho\sin\varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ z = z,\ -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

Якщо взяти $\rho = u$, $\varphi = v$, $z = w$, то, скориставшись формулою (7.44), знайдемо

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Тоді

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

Якщо $f(x, y, z) = 1$, то інтеграл у правій частині дорівнює об'єму, а тому

$$V = \iiint\limits_{V'} \rho d\rho d\varphi dz.$$

Приклади. **1.** Обчислити масу тіла, обмеженого площинами $z = 0$, $z = 2$ і циліндричною поверхнею $y^2 = 3x - x^2$, в якому розподіл густини задано функцією $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. За формулою (3.9) маса тіла

$$m = \iiint_V f(x, y, z)dv = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz.$$

У даному прикладі

$$m = \iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz = I_m.$$

де V — циліндричне тіло (рис. 6.34). Для обчислення інтеграла I_m скористаємось циліндричними координатами, при цьому $I = \rho$. Знайдемо межі інтегрування. Очевидно, змінна z змінюється від 0 до 2. Нижньою межею для z є 0, а верхньою 2. Щоб визначити межі для φ і ρ, перейдемо у рівнянні кола $y^2 + x^2 = 3x$ до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тоді

$$\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = 3\rho\cos\varphi,\ \rho^2 = 3\rho\cos\varphi;\ \rho = 3\cos\varphi.$$

Отже,

$$\rho_{\text{нижн}} = 0;\ \rho_{\text{верх}} = 3\cos\varphi.$$

Кут φ змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Таким чином,

$$m = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} \rho d\rho \int_0^2 \rho z dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} \rho^2 d\rho \frac{z^2}{2}\Big|_0^2 =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} \rho^2 d\rho = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{3\cos\varphi} d\varphi = 18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= 18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\varphi\right)\cos\varphi d\varphi = 18\left(\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= 18\,(1 + 1) - 6\,(1 + 1) = 24.$$

2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V \left(x^2 + z^2\right)dxdydz$, де V — область, обмежена параболоїдом обертання $z = 1 - x^2 - y^2$, циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = 1$ і площиною $z = 1$ (рис. 6.35).

Розв'язання. Очевидно,

$$1 - x^2 - y^2 \le z \le 1,$$

тоді

$$\iiint_V \left(x^2 + z^2\right)dxdydz = \iint_D \left\{\int_{1-x^2-y^2}^{1} \left(x^2 + z^2\right)dz\right\}dxdy =$$

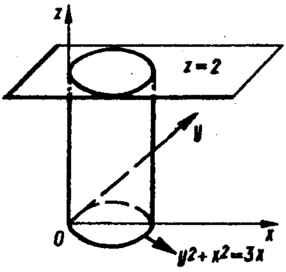


Рис. 6.34

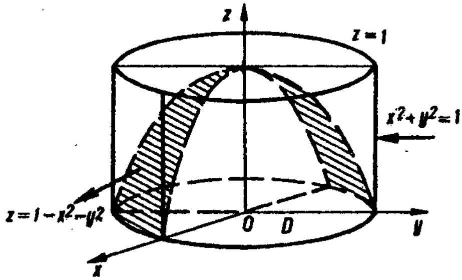


Рис. 6.35

$$= \iint_D \left(x^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Bigg|_{1-x^2-y^2}^{1} dxdy = \iint_D \Big[x^2 + \frac{1}{3} - x^2 (1 - x^2 - y^2) -$$

$$- \frac{1}{3} (1 - x^2 - y^2)^3 \Big] dxdy.$$

Для обчислення останнього інтеграла перейдемо до полярних координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $I = \rho$. Межі інтегрування: $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \rho < 1$ (рівняння кола $\rho^2 = 1$), тоді

$$\iiint_V (x^2 + z^2) dxdydz = \iint_D \Big[\rho^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{3} - \rho^2 \cos^2 \varphi (1 - \rho^2) -$$

$$- \frac{1}{3} (1 - \rho^2)^3 \Big] \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^5 \cos^2 \varphi + \rho^3 - \rho^5 + \frac{1}{3} \rho^7 \right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{6} \cos^2 \varphi + \frac{1}{8} \right) d\varphi = \frac{5}{12} \pi.$$

Перехід від прямокутних координат до сферичних здійснюється згідно з рівностями

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \ 0 \le r < +\infty, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ z = r \cos \theta, \ 0 \le \theta \le \pi. \end{cases}$$

Якщо взяти $r = u$, $\varphi = v$, $\theta = w$, то, скориставшись формулою (7.44), дістанемо

$$I = r^2 \sin \theta.$$

Тоді

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz =$$

$$= \iiint_{V'} f[r \sin \theta \cos \varphi, \ r \sin \theta \sin \varphi, \ r \cos \theta] r^2 \, |\sin \theta| \, dr d\varphi d\theta.$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, якщо воно міститься у першому октанті і обмежене сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, конусом $z^2 = x^2 + y^2$ і площинами $z = 0$, $y = 0$, $y = x$ (рис. 6.36).

Розв'язання. Маємо

$$z^2 = 4 - z^2;\ 2z^2 = 4;\ z^2 = 2.$$

Об'єм тіла $\iiint\limits_V dxdydz$. Переходячи до сферичних координат, дістаємо

$$V = \iiint\limits_{V'} \rho^2 |\sin\theta|\, d\varphi d\rho d\theta.$$

Рівняння сфер у сферичних координатах: $r^2 = 4$ і $r^2 = 9$;

рівняння конуса: $\theta = \dfrac{\pi}{4}$;

рівняння площини xOy: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$;

рівняння площини zOx: $\varphi = 0$;

рівняння бісекторної площини: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

При цьому $2 \le r \le 3$, $\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$, тоді

$$V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_2^3 \rho^2 \sin\theta d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_2^3 \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{19}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = \frac{19}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (-\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{19}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi =$$

$$= \frac{19\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{19\sqrt{2}}{24}\pi.$$

ВПРАВИ. **1.** За допомогою подвійного інтеграла у полярних координатах обчислити площу фігури, обмеженої кривою, заданою в декартових координатах: а) $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 + 4y^2)$, $a > 0$; б) $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (2x^2 + 3y^2)$, $a > 0$; в) $(x^2 + y^2)^2 = a^4 y^2$, а > 0. *Відповідь.* а) $\frac{5}{2}\pi a^2$; б) $\frac{5}{2}\pi a^2$; в) $\frac{5}{2}\pi a^4$.

2. За допомогою переходу в потрійному інтегралі до сферичних координат знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею: а) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a\,(x^2 + y^2)^2$; б) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$. *Відповідь.* а) $\frac{64}{105}\pi a^3$; б) $\frac{2}{3}\pi a^3$.

7.14. Обчислення площі поверхні

Нехай треба знайти площу гладкої криволінійної поверхні, заданої рівнянням $z = f\,(x,\, y)$ і обмеженої деякою кривою Γ (рис. 6.37). Спроектуємо точки поверхні, обмеженої кривою Γ, на площину xOy.

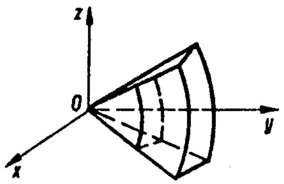


Рис. 6.36

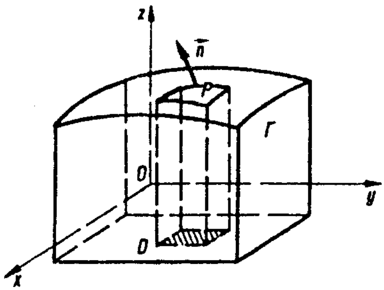


Рис. 6.37

Дістанемо область D визначення функції $f(x, y)$. Розіб'ємо цю область на комірки і розглянемо одну із комірок; нехай її площа дорівнює ΔS_i, а відповідна їй комірка на поверхні дорівнює $\Delta\sigma_i$. У граничному випадку диференціали площ, що відповідають цим коміркам, пов'язані співвідношенням $ds = d\sigma \cos\gamma$ (див. п. 3.9). Звідси

$$d\sigma = \frac{ds}{\cos\gamma}, \text{ де } \cos\gamma \neq 0.$$

Із рівняння нормалі в точці $P(x, y, z)$ до поверхні $z = f(x, y)$ (див. п. 23.2 з гл. 4)

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

а

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, ds.$$

Звичайно прийнято позначати $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, $\frac{\partial f}{\partial y} = q$, тоді $d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, ds$. Враховуючи, що $ds = dxdy$, дістаємо

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy, \quad \sigma = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy.$$

ВПРАВИ. **1.** Знайти площу однієї частини поверхні параболоїда $y^2 + z^2 = 4ax$, що відтинається циліндром $y^2 = ax$ і площиною $x = 3a$, $a > 0$. *Відповідь.* $\frac{56}{9}a^2\pi$.

2. Знайти площу поверхні:
а) $z^2 = 2xy$ при $z > 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$;

б) $x^2 = 2az$ при $3x < y < 7x$, $0 < x < a$. *Відповідь.* а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}(a + b)\sqrt{ab}$; б) $\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)a^2$.

7.15. Обчислення інтеграла першого роду по поверхні

Нехай поверхня, вздовж якої береться інтеграл, задана рівнянням $z = \varphi(x, y)$. Тоді (див. п. 3.8)

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint_{D} f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy.$$

Таким чином, обчислення інтеграла першого роду по поверхні зводиться до відшукання подвійного інтеграла.

7.16. Обчислення інтеграла другого роду по поверхні

Розглянемо поверхневі інтеграли за координатами (3.26). Їхні підінтегральні вирази містять добутки $\cos\alpha d\sigma$, $\cos\beta d\sigma$, $\cos\gamma d\sigma$. Якщо поверхня задана рівнянням $z = \varphi(x, y)$ (див. п.7. 14), то

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \ \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

а

$$\cos\alpha d\sigma = -pds, \ \cos\beta d\sigma = -qds.$$

Тоді

$$\iint_{\sigma+} P(x, y, z)\cos\alpha d\sigma = \pm\iint_{D} P[x, y, \varphi(x, y)](-p)ds,$$

$$\iint_{\sigma+} Q(x, y, z)\cos\beta d\sigma = \pm\iint_{D} Q[x, y, \varphi(x, y)](-q)ds,$$

$$\iint_{\sigma+} R(x, y, z)\cos\gamma d\sigma = \pm\iint_{D} R[x, y, \varphi(x, y)]ds.$$

Таким чином, обчислення поверхневих інтегралів за координатами зводиться до обчислення подвійних інтегралів. Знак «+» або «−» перед подвійними інтегралами ставиться у відповідність із стороною поверхні, що відповідає знаку перед коренем $\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, або у відповідність із знаком $\cos\gamma$.

Потік вектора через поверхню (3.24) запишемо у вигляді

$$\Pi = \iint_{\sigma+} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma = \iint_{\sigma+}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma =$$

$$= \pm\iint_{D}\{P[x, y, \varphi(x, y)](-p) + Q[x, y, \varphi(x, y)](-q) +$$

$$+ R[x, y, \varphi(x, y)]\}\, dxdy. \qquad (7.45)$$

Приклад. Обчислити потік вектора

$$\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z + y)\vec{j} + (2x + y)\vec{k}$$

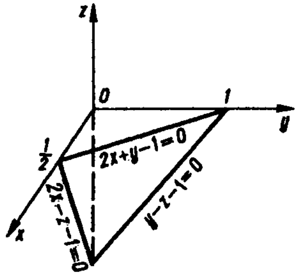


Рис. 6.38

через трикутник σ, вирізаний із площини $2x + y - z - 1 = 0$ координатними площинами у тому напрямі нормалі до даної площини, який утворює з віссю Oz гострий кут (рис. 6.38).

Розв'язання. Векторне рівняння площини

$$\left(\vec{n} \cdot \vec{r}\right) + D = 0,$$

тоді

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k},\ \vec{n} = 2\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},$$

$$\vec{n}^0 = \frac{2\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{n}} = \frac{2\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\pm\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}},$$

$$\vec{n}^0 = \frac{2}{\pm\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\pm\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\pm\sqrt{6}}\vec{k},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\pm\sqrt{6}};\ \cos\beta = \frac{1}{\pm\sqrt{6}};\ \cos\gamma = -\frac{1}{\pm\sqrt{6}}.$$

Нам треба, щоб $\cos\gamma$ був додатним. Для цього треба взяти $-\sqrt{6}$. Тоді

$$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{6}};\ \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{6}};\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Рівняння поверхні запишемо у вигляді

$$z = \varphi(x, y) = 2x + y - 1.$$

Далі знайдемо функції

$$P(x, y, z) = y - z = y - 2x - y + 1 = 1 - 2x;$$
$$Q(x, y, z) = z + y = 2x + y - 1 + y = 2x + 2y - 1;$$
$$R(x, y, z) = 2x + y.$$

Частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = q = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1.$$

За формулою (7.45) знайдемо

$$П = \iint\limits_{\sigma+} \vec{a}\cdot\vec{n}^0\, d\sigma = \iint\limits_{D} \{(1 - 2x)(-2) + (2x + 2y - 1)(-1) + (2x + y)\}dxdy.$$

Розкриваючи дужки, дістаємо

$$П = \iint\limits_{\sigma+} \vec{a}\cdot\vec{n}^0\, d\sigma = \iint\limits_{D} (4x - y - 1)dxdy =$$

$$= \int_0^{1/2} dx \int_0^{1-2x} (4x - y - 1)dy = \int_0^{1/2} dx\left(4xy - \frac{y^2}{2} - y\right)\Bigg|_0^{1-2x} =$$

$$= \int_0^{1/2}\left(-10x^2 + 8x - \frac{3}{2}\right)dx = \frac{1}{3}.$$

ВПРАВИ. **1.** Обчислити інтеграл $I = \iint\limits_{\sigma+} z dx dy$, де σ — зовнішня сторона поверхні еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Відповідь. $\frac{4}{3}\pi abc$.

2. Обчислити інтеграл $I = \iint\limits_{\sigma+} (x + y + z)d\sigma$, де σ — верхня півсфера одиничного радіуса. *Відповідь.* 3π.

3. Обчислити інтеграл $I = \iint\limits_{\sigma+} z dx dy$, взятий по зовнішній стороні частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, що міститься в першому октанті, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{3}$.

4. Обчислити інтеграл $I = \iint\limits_{\sigma+} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)d\sigma$ по поверхні $x^2 + y^2 = z^2$, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = 1$. *Відповідь.* $\pi\sqrt{2}$.

§ 8. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ РІЗНИМИ ТИПАМИ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ (ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ)

Вище було знайдено співвідношення між визначеним і криволінійним інтегралами, між визначеним і двічі та тричі повторними інтегралами, між повторними інтегралами і кратними, між інтегралами по поверхні і подвійними. Проте цим не вичерпуються всі співвідношення між інтегралами. Доказом цього є спосіб обчислення площі плоскої фігури D, обмеженої простою замкненою кривою (рис. 6.18). Для обчислення цієї площі було визначено формули (п. 3.2), що виражають площу через простий інтеграл. У формулах (7.18)—(7.20) цю площу виражено через криволінійний інтеграл, а у формулі (3.6) — через подвійний інтеграл. Застосування різних типів інтегралів для обчислення однієї і тієї самої величини свідчить про існування співвідношення між подвійними і криволінійними інтегралами другого роду. Це співвідношення вперше встановлено М. В. Остроградським [1]

---

[1] М. В. Остроградський (1801—1862) — російський математик.

і трохи пізніше Дж. Гріном [1]. Тому формула, що пов'язує подвійний і криволінійний інтеграли другого роду, називається **формулою Остроградського—Гріна.**

8.1. Формула Остроградського—Гріна

Нехай область $\tilde{D}_1$ задано нерівностями (рис. 6.19)

$$y_1(x) \le y(x) \le y_2(x),\ a \le x \le b.$$

Припустимо, що в області $\tilde{D}_1$ визначено диференційовні за змінними дві функції: $P(x, y)$ і $Q(x, y)$. Виразимо $\iint\limits_{\tilde{D}_1} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ через повторні інтеграли, вважаючи область $\tilde{D}_1$ правильною у напрямі осі y (див. (7.28)). Маємо

$$\iint\limits_{\tilde{D}_1} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy .$$

Проте

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = P\left[x, y_2(x)\right] - P\left[x, y_1(x)\right].$$

Тоді

$$\iint\limits_{\tilde{D}_1} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b P\left[x, y_2(x)\right]dx - \int_a^b P\left[x, y_1(x)\right]dx . \tag{8.1}$$

Виразимо останні інтеграли через криволінійні інтеграли другого роду, обходячи контур, як показано на рис. 6.19. Дістанемо

$$\begin{cases} \int_a^b P(x, y_2)dx = -\int_b^a P\left[x, y_2\right]dx = -\int\limits_{CB} P(x, y)dx, \\ -\int_a^b P(x, y_1)dx = -\int\limits_{AD} P(x, y)dx, \\ 0 = -\int\limits_{BA} P(x, y)dx,\ 0 = -\int\limits_{DC} P(x, y)dx. \end{cases} \tag{8.2}$$

---

[1] Джордж Грін (1793—1841) — англійський математик.

Із рівностей (8.1) і (8.2) знаходимо

$$\iint\limits_{\tilde{D}_1} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{AD} P(x,y)dx - \int\limits_{DC} P(x,y)dx -$$

$$-\int\limits_{CB} P(x,y)dx - \int\limits_{BA} P(x,y)dx = -\oint\limits_{L} P(x,y)dx.$$

В останньому інтегралі контур $ADCBA$ позначено через L. Таким чином,

$$\iint\limits_{\tilde{D}_1} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_{L} P(x,y)dx,$$

або

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx = -\iint\limits_{\tilde{D}_1} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \tag{8.3}$$

Якщо, область $\tilde{D}_2$ є правильною у напрямі осі x (рис. 6.20) і в ній визначено диференційовні функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$, то

$$\iint\limits_{\tilde{D}_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_{c}^{d} Q(x_2,y)dy - \int\limits_{c}^{d} Q(x_1,y)dy.$$

Інтеграли, що містяться у правій частині останньої рівності, виразимо через криволінійні:

$$\int\limits_{c}^{d} Q(x_2,y)dy = \int\limits_{ABC} Q(x,y)dy; \quad -\int\limits_{c}^{d} Q(x_1,y)dy = \int\limits_{CDA} Q(x,y)dy.$$

Отже,

$$\iint\limits_{\tilde{D}_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{ABC} Q(x,y)dy + \int\limits_{CDA} Q(x,y)dy = \oint\limits_{L} Q(x,y)dy. \tag{8.4}$$

Якщо області $\tilde{D}_1$ і $\tilde{D}_2$ збігаються: $\tilde{D}_1 = \tilde{D}_2 = D$, то на підставі формул (8.3) і (8.4) знаходимо

$$\oint\limits_{L} (Pdx + Qdy) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{8.5}$$

Ця формула називається **формулою Остроградського—Гріна.** Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. *Якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ диференційовні відповідно за змінними x і y в замкненій області D, обмеженій кусково-гладкою кривою, то справедлива формула* (8.5).

Зазначимо, що доведення проведено для окремого випадку області D, заданої криволінійною трапецією. Проте формула (8.5) справедлива і для більш загальної області, заданої в умові теореми.

8.2. Умова незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування

Нехай задано відкриту однозв'язну область D площини, у якій визначено диференційовні функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$. Розглянемо криволінійний інтеграл вздовж кривої $AB = L$, що належить області D:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Знайдемо умови, коли криволінійний інтеграл залежить лише від початку A і кінця B кривої, але не залежить від форми кривої, що сполучає ці точки (рис. 6.39), тобто коли

$$\int_{AnB} Pdx + Qdy = \int_{AmB} Pdx + Qdy = \int_{A\lambda B} \cdots = \int_{A\nu B} \cdots \qquad (8.6)$$

Теорема 1. *Для того щоб криволінійний інтеграл не залежав від форми кривої, що сполучає точки A і B і розміщена в однозв'язній області D, необхідно і достатньо, щоб інтеграл по будь-якому простому замкненому контуру, що проходить через ці точки, дорівнював нулю:*

$$\int_{AnB\lambda A} Pdx + Qdy = 0. \qquad (8.7)$$

Доведення опускаємо.

Тепер ставимо запитання: коли криволінійний інтеграл по простому замкненому контуру дорівнюватиме нулю? Позначимо простий замкнений контур, що належить області D, через L.

Теорема 2. *Для того щоб дорівнював нулю криволінійний інтеграл* $\oint_L Pdx + Qdy$, де P і Q *— неперервні функції, які мають неперервні частинні похідні по y і x в однозв'язній області D, що містить контур L, необхідно і достатньо, щоб*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0. \qquad (8.8)$$

Доведемо, що

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{8.9}$$

За формулою Остроградського—Гріна знаходимо

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

Останнє можливо, коли $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Достатність. Умова (8.9) є необхідною і достатньою умовою того, щоб існувала така функція двох змінних $u\ (x,\ y)$, для якої її повний диференціал

$$du = P\ (x,\ y)\ dx + Q\ (x,\ y)\ dy,$$

причому

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Вектор $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ є градієнтом функції u. Функція u називається **потенціалом вектора** $\vec{F}$.

Якщо виконується умова (8.9), то

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int_A^B du = u(B) - u(A) \tag{8.10}$$

Доведемо це. Припустимо, що $x = x\ (t)$, $y = y\ (t)$, $t_0 \le t \le T$, тоді

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt = \frac{du}{dt}dt = du(t),$$

$$\oint_{AB} du = \int_A^B \frac{du}{dt}dt = \int_{A(t_0)}^{B(T)} du(t) = u(B) - u(A).$$

Отже, криволінійний інтеграл від повного диференціала не залежить від форми кривої, по якій проводиться інтегрування. Тоді за теоре-

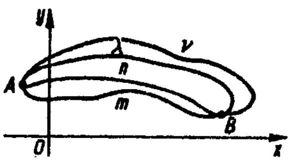


Рис. 6.39

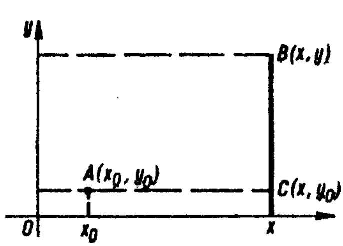


Рис. 6.40

мою 1 умова (8.8) виконується. Тепер можна остаточно сформулювати умову незалежності криволінійного інтеграла від форми кривої:

для того щоб криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ *не залежав від форми кривої, що сполучає точки A і B, необхідно і достатньо, щоб підінтегральний вираз Pdx + Qdy був повним диференціалом деякої функції u (x, y) в однозв'язній області D, тобто*

$$Pdx + Qdy = du. \tag{8.11}$$

Якщо в рівності (8.10) точку A вважати фіксованою, а B —довільною, то

$$u(x, y) = \int\limits_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} Pdx + Qdy + u(x_0, y_0). \tag{8.12}$$

За цією формулою визначають функцію $u\ (x,\ y)$ за її повним диференціалом за допомогою криволінійного інтеграла. Оскільки тут криволінійний інтеграл не залежить від форми кривої, що сполучає точки A і B, то доцільно замість кривої взяти дві прямі, паралельні координатним осям (рис. 6.40). Тоді формулу (8.12) можна записати у вигляді

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy,$$

$$\int\limits_{AC} Pdx + Qdy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx,$$

$$\int\limits_{CB} Pdx + Pdy = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy,$$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy. \tag{8.13}$$

Якщо функції $P\ (x,\ y)$ і $Q\ (x,\ y)$ при $x = x_0 = 0$ і $y = y_0 = 0$ визначені, то за координати точки A можна взяти $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. У цьому разі (і тільки в цьому!) формулу (8.13) можна записати у вигляді

$$u(x, y) = u(0, 0) + \int\limits_{0}^{x} P(x, 0)dx + \int\limits_{0}^{y} Q(x, y)dy. \tag{8.14}$$

Дуже часто $u\ (x_0,\ y_0)$ позначають через C, де C — const.

Приклад. Чи дорівнюватиме нулю криволінійний інтеграл $\oint\limits_{L}(x^2 + y^2)(xdx + {}$ $+ ydy)$ по будь-якому замкненому контуру?

Розв'язання. Підінтегральний вираз є повним диференціалом функції

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2 .$$

ВПРАВИ. Чи є повними диференціалами деякої функції вирази:

а) $(10xy^3+12x^3+6)\,dx+(16x^2y-5)\,ydy$;

б) $(\cos x\cos y+6x+3)\,dx+(18y^2-\sin x\sin y)\,dy$;

в) $\left(\sin x+\dfrac{\cos x\cos y}{\sin^2 x}\right)dx+\left(\dfrac{\sin y}{\sin x}-\cos y\right)dy$;

г) $\left[\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{y}{(x-1)^2}-1\right]dx+\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{(y-1)^2}+2y\right]dy$?

У випадку позитивної відповіді, знайти $u\ (x,\ y)$ за допомогою криволінійного інтеграла. *Відповідь.* а) Ні; б) так, $u\ (x,\ y)=3x^2+3x+6y^3+\cos y\sin x+C$; в) так, $u(x,y)=C-\cos x-\dfrac{\cos y}{\sin x}-\sin y$; г) так, $u(x,y)=-x+\dfrac{y}{x-1}+\dfrac{x}{y-1}+y^2+C$.

8.3. Формула Остроградського

Формула Остроградського—Гріна пов'язує криволінійний інтеграл другого роду по замкненій кривій з подвійним інтегралом по площі, обмеженій цією кривою. Аналогом цієї формули є формула, що пов'язує інтеграли по об'єму з поверхневими інтегралами по поверхні, яка обмежує цей об'єм.

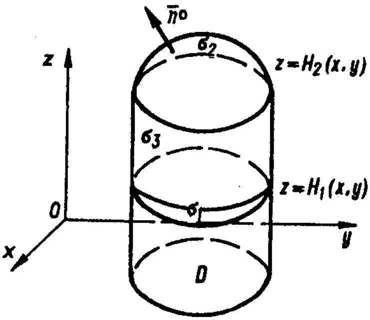


Рис. 6.41

Нехай задано тіло, обмежене поверхнями $z=H_1\,(x,\ y)$ і $z=H_2\,(x,\ y)$, які позначимо через σ_1 і σ_2, причому $H_1\ (x,\ y)\le H_2\ (x,\ y)$, а також циліндричною поверхнею σ_3 (рис. 6.41).

Вважатимемо, що поверхні σ_1 і σ_2 проектуються на площину xOy в квадровану область D. Нехай на поверхні $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$ визначено функції $P(x,\ y,\ z)$, $Q\ (x,\ y,\ z)$, $R\,(x,\ y,\ z)$, що мають неперервні похідні за своїми змінними.

Розглянемо інтеграл

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{H_1(x,y)}^{H_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz=\iint\limits_D dxdy\big[R\left(x,y,H_2(x,y)\right)-$$

$$-R\left(x,y,H_1(x,y)\right)\big]=\iint\limits_D R\left(x,y,H_2(x,y)\right)dxdy-$$

$$-\iint\limits_D R\left(x,y,H_1(x,y)\right)dxdy .$$

Замінимо кожний з інтегралів відповідним інтегралом по поверхні (див. (3.26)). Дістанемо

$$\iint\limits_{D} R\left[x, y, H_2(x, y)\right] dxdy = \iint\limits_{\sigma_2 +} R(x, y, z)\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_2 +} R(x, y, z)\cos\gamma d\sigma = \iint\limits_{\sigma_2 +} R \cos\gamma d\sigma,$$

$$-\iint\limits_{D} R\left[x, y, H_1(x, y)\right] dxdy = \iint\limits_{\sigma_1 +} R(x, y, z)\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_1 +} R(x, y, z)\cos\gamma d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1 +} R \cos\gamma d\sigma,$$

$$\iint\limits_{\sigma_3 +} R(x, y, z)\, dxdy = \iint\limits_{\sigma_3 +} R \cos\gamma d\sigma.$$

Інтеграл по замкнутій поверхні σ

$$\oiint\limits_{\sigma +} R(x, y, z)\, dxdy = \iint\limits_{\sigma +} R(x, y, z)\cos\gamma d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_1 +} R\cos\gamma d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2 +} R\cos\gamma d\sigma + \iint\limits_{\sigma_3 +} R \cos\gamma d\sigma,$$

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \oiint\limits_{\sigma +} R dxdy = \oiint\limits_{\sigma +} R\cos\gamma d\sigma.$$

Аналогічно

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdydz = \oiint\limits_{\sigma +} Q(x, y, z) dxdz = \oiint\limits_{\sigma +} Q\cos\beta d\sigma,$$

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdydz = \oiint\limits_{\sigma +} P(x, y, z) dydz = \oiint\limits_{\sigma +} P\cos\alpha d\sigma.$$

Додаючи, знайдемо

$$\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint\limits_{\sigma +} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \oiint\limits_{\sigma +} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma = \oiint\limits_{\sigma +} \vec{F} \cdot \vec{n^0}\, d\sigma, \qquad (8.15)$$

де $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

Формула (8.15) називається **формулою Остроградського.** За допомогою цієї формули обчислюють об'єми тіл, використовуючи поверхневі інтеграли. Знайдемо значення об'єму через інтеграли по поверхні. Відомо, що $V = \iiint\limits_V dv$. Покладаючи у формулі (8.15)

$$P(x, y, z) = x,\ Q(x, y, z) = R(x, y, z) = 0,$$

знайдемо

$$V = \underset{\sigma+}{\oiint} x\,dy\,dz.$$

Покладаючи тепер у (8.15) $P = 0$, $Q = y$, $R = 0$, знайдемо

$$V = \underset{\sigma+}{\oiint} y\,dx\,dz$$

і, нарешті, покладаючи $P = Q = 0$ і $R = z$, знайдемо

$$V = \underset{\sigma+}{\oiint} z\,dx\,dy.$$

Додавши ці рівності і розділивши їхню суму на 3, дістанемо ще одну формулу

$$V = \frac{1}{3}\underset{\sigma+}{\oiint} z\,dx\,dy + y\,dx\,dz + x\,dy\,dz. \tag{8.16}$$

Надалі використовуватимемо інший вигляд формули (8.15). Нехай $\vec{F} = \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, тобто $P = a_x$; $Q = a_y$, $R = a_z$, тоді

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dv = \underset{\sigma+}{\oiint} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 dv. \tag{8.17}$$

8.4. Дивергенція векторного поля

Нехай дано векторне поле $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ і замкнена поверхня $\sigma+$, задана функцією $z = \varphi(x, y)$, на якій діє вектор $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x, y, z)$. Нехай V — об'єм тіла, що перебуває всередині поверхні $\sigma+$. Знайдемо потік $П$ вектора $\vec{a}$ через цю поверхню:

$$П = \underset{\sigma+}{\oiint} \vec{a}\cdot\vec{n}^0\, d\sigma.$$

Нехай цей потік є кількістю рідини, що проходить через поверхню $\sigma+$ об'єму V. Знайдемо відношення

$$\frac{П}{V} = \frac{1}{V}\underset{\sigma+}{\oiint} \vec{a}\cdot\vec{n}^0\, d\sigma.$$

Це відношення можна тлумачити як кількість рідини, що надходить до нього через замкнену поверхню і припадає на одиницю об'єму, або як середню потужність потоку. Якщо відношення $\frac{П}{V} > 0$, то із об'єму V витікає рідина, а якщо $\frac{П}{V} < 0$, то втікає. У першому випадку кажуть, що об'єм V є витоком, а в другому — стоком. Якщо говорити про векторні або силові лінії, то при $\frac{П}{V} > 0$ із об'єму V поверхні σ вони виходять, а при $\frac{П}{V} < 0$ — входять в об'єм V. Обидва потоки мають потужність $\frac{П}{V}$.

Розглянемо тепер

$$\lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oiint_{\sigma+} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 \, d\sigma .$$

Припустимо, що ця границя існує. Тоді це буде потужність точкового витоку або стоку. Іншими словами це кількість рідини, що проходить через будь-яку нескінченно малу поверхню, яка оточує точку. Дана границя називається **дивергенцією** або **розходженням векторного поля** $\vec{a}$. Отже, *дивергенція векторного поля* $\vec{a}$ *є границею відношення потоку вектора через нескінченно малу поверхню, що оточує дану точку, до об'єму, обмеженого цією поверхнею, коли* $V \to 0$,

$$\lim_{V \to 0} \frac{\oiint\limits_{\sigma+} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 \, d\sigma}{V} = \operatorname{div} \vec{a} .$$

Якщо $\operatorname{div} \vec{a} > 0$, то у даній точці є витік, відбувається відтік рідини і $\operatorname{div} \vec{a}$ є мірою потужності цього потоку. Коли $\operatorname{div} \vec{a} < 0$, то у даній точці є стік, тобто відбувається надходження рідини, і $\operatorname{div} \vec{a}$ є мірою потужності стоку. Якщо $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, то у даній точці немає ні витоку, ні стоку, тобто скільки рідини виливається, стільки і вливається.

Для нестисливих рідин об'єм не змінюється, тобто $\operatorname{div} \vec{a} = 0$. Поле $\vec{a}$, в якому $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, називається **соленоїдальним** або **трубчастим.** Знайдемо аналітичний вираз для $\operatorname{div} \vec{a}$. Застосуємо до лівої частини формули (8.17) теорему про середнє

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dv =$$

$$= \left[\frac{\partial a_x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(\xi, \eta, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial z} \right] V .$$

Тоді формула (8.17) набере вигляду

$$\oiint\limits_{\sigma+} \vec{a}\cdot\vec{n}^0\,d\sigma = \left[\frac{\partial a_x(p)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(p)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(p)}{\partial z}\right]V,$$

$$\frac{\partial a_x(p)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(p)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(p)}{\partial z} = \frac{\oiint\limits_{\sigma+} \vec{a}\cdot\vec{n}^0\,d\sigma}{V}, \tag{8.18}$$

де p має координати ξ, η, ζ. Переходячи у цій формулі до границі при $V \to 0$, дістаємо

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{8.19}$$

Тепер формулу (8.17) можна записати так:

$$\oiint\limits_{\sigma+} \vec{a}\cdot\vec{n}^0\,d\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,dv. \tag{8.20}$$

8.5. Формула Стокса[1]

Формула Стокса пов'язує криволінійний інтеграл по замкненому контуру L з інтегралом по поверхні σ, обмеженій цим контуром (рис. 6.42) і заданій рівнянням $z = \varphi(x, y)$. Нехай на поверхні визначено вектор-функцію

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \text{ або } \vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}.$$

Тоді

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint\limits_L a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma+}\left\{\cos\alpha\left(-\frac{\partial a_y}{\partial z} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\right) - \cos\beta\left(-\frac{\partial a_z}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\gamma\left(-\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\right)\right\}d\sigma. \tag{8.21}$$

Ця формула називається **формулою Стокса.**

8.6. Вихор або ротор векторного поля

Розглянемо зміст циркуляції у випадку, коли вектор $\vec{a}$ виражає швидкість потоку $\vec{a} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

[1] Джордж Габріель Стокс (1819—1903) — англійський фізик.

Візьмемо скалярний добуток $\vec{a}\cdot d\vec{r}=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot d\vec{r}$. Його розмірність L^2T^{-1} (см^2/с). Те саме стосується і $\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}$. Знайдемо тепер відношення цього інтеграла до площі поверхні, замкненої і обмеженої контуром L:

$$\frac{\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}}{\sigma}=\omega. \tag{8.22}$$

Величина ω має розмірність кутової швидкості. Отже, цю кутову швидкість можна трактувати як швидкість обертання контуру L під дією потоку рідини. Обчислимо границю

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}}{\sigma},$$

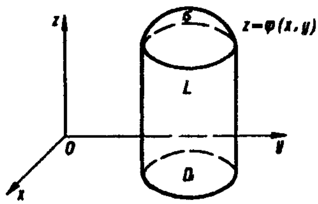


Рис. 6.42

яка також має розмірність кутової швидкості. За формулою (8.21), враховуючи теорему про середнє, знайдемо

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}}{\sigma}=\cos\alpha\left(-\frac{\partial a_y}{\partial z}+\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)+$$
$$+\cos\beta\left(-\frac{\partial a_z}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)+\cos\gamma\left(-\frac{\partial a_x}{\partial y}+\frac{\partial a_y}{\partial x}\right).$$

Вектор $\vec{B}$, визначений рівністю

$$\vec{B}=\left(-\frac{\partial a_y}{\partial z}+\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)\vec{i}+\left(-\frac{\partial a_z}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{j}+$$
$$+\left(-\frac{\partial a_x}{\partial y}+\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)\vec{k}=\operatorname{rot}\vec{a},$$

називається **вихором** або **ротором векторного поля:**

$$rot\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\vec{B}. \tag{8.23}$$

Тепер маємо

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}}{\sigma}=\vec{n}^0\cdot\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_{\vec{n}^0},$$

де

$$\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_{\vec{n}^0} = \text{пр}_{\vec{n}^0}\operatorname{rot}\vec{a}.$$

Таким чином, $\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_{\vec{n}^0}$ є кутовою швидкістю обертання потоку рідини. Формулу Стокса тепер можна записати у вигляді

$$\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma+} \vec{n}^0\cdot \operatorname{rot}\vec{a}\, d\sigma = \iint_{\sigma+}\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_{\vec{n}^0} d\sigma. \qquad (8.24)$$

8.7. Диференціальні операції векторного поля

Для векторного і скалярного полів введено такі величини:

1) $$\operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (8.25)$$

— градієнт, що визначає величину і напрям найбільшої швидкості зміни функції $u = u\,(x,\, y,\, z)$ у точці $M\,(x,\, y,\, z)$;

2) $$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (8.26)$$

— символічний вектор-оператор Гамільтона.

Тоді

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u = \vec{\nabla} u.$$

Розглянемо скалярний добуток

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{a}. \qquad (8.27)$$

Цей скалярний добуток дорівнює дивергенції (розбіжності) вектора $\vec{a}$. Фізичний зміст дивергенції визначається фізичним змістом вектора $\vec{a}$. Для довільного вектора при розгляді фізичного змісту вводять поняття векторної лінії. **Векторна лінія** — це крива, у кожній точці якої вектор $\vec{a}$ є дотичним до неї. Векторними, зокрема, є силові лінії, лінії струму або поля швидкостей. Таким чином, дивергенція — це кількість векторних ліній, що починаються у нескінченно малому об'ємі і припадають на одиницю об'єму. Якщо $\vec{a} = \vec{v}$ є полем швидкостей під час протікання газу або потоку рідини, то div $\vec{v}$ дорівнює швидкості збільшення нескінченно малого об'єму, а div $(\rho\vec{v})$, де ρ — густина джерела мас.

Якщо густина ρ = const, то $\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$. Якщо $\rho \neq$ const, то $\operatorname{div}(\rho\vec{v}) \neq 0$. Якщо $\vec{a} = \vec{F}$ є силою, то $\operatorname{div}\vec{F}$ є роботою, а точніше, потужністю потоку (це випливає із формули (8.27)).

Складемо векторний добуток

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{B}. \tag{8.28}$$

Тоді із формули (8.23) знаходимо

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{a}.$$

З механічної точки зору векторний добуток — це момент вектора. Під дією цього моменту векторне поле може обертатись. При цьому $\operatorname{rot}\vec{a}$ є вектором подвоєної кутової швидкості обертання поля. Таким чином, векторне поле

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

породжує два поля: скалярне поле $\operatorname{div}\vec{a}$ і векторне поле $\operatorname{rot}\vec{a}$. Отже, можна знайти градієнт скалярного поля, тобто

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}, \text{ або } \vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{a}.$$

Для векторного поля $\operatorname{rot}\vec{a}$ можна знайти $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$ і $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$.

Отже, векторне поле породжує шість операцій:

1°. $$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = u(x, y, z); \tag{8.29}$$

2°. $$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}; \tag{8.30}$$

3°. $$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}; \tag{8.31}$$

4°. $$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} u; \tag{8.32}$$

5°. $$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{\nabla} u = 0; \tag{8.33}$$

6°. $$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0. \tag{8.34}$$

Ці операції називаються **диференціальними операціями векторного поля.** Вони широко застосовуються у техніці.

8.8. Потенціальне поле

Для плоского (двовимірного) векторного поля було введено поняття потенціалу. Якщо

$$\vec{F} = \vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} = \operatorname{grad} u, \tag{8.35}$$

то u називається **потенціалом вектора** $\vec{a}$.

Введемо поняття потенціалу для тривимірного поля. Якщо

$$\vec{a} = \operatorname{grad} v = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k},$$

то функція

$$u(x, y, z) = -v(x, y, z) \tag{8.36}$$

називається **потенціальною функцією** або **потенціалом векторного поля** $\vec{a}$. Векторне поле $\vec{a}$ називається **потенціальним**, якщо вектор $\vec{a}$ є градієнтом скалярної функції — v.

Таким чином,

$$\vec{a} = -\operatorname{grad} u = -\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{8.37}$$

Оскільки $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, то

$$a_x = -\frac{\partial u}{\partial x};\ a_y = -\frac{\partial u}{\partial y};\ a_z = -\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{8.38}$$

Знак мінус вибрано із фізичних міркувань. Виходячи з формули (8.36), дістаємо, що потенціальне поле повністю визначається однією скалярною функцією.

Теорема. *Для того щоб поле було потенціальним, необхідно і достатньо, щоб воно було безвихровим, тобто щоб*

$$\operatorname{rot} \vec{a} = 0. \tag{8.39}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\vec{a} = -\operatorname{grad} u$. Згідно з рівністю (8.33),

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot}(-\operatorname{grad} u) = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0.$$

Достатність. Нехай $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$. За формулою (8.24) маємо

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0. \tag{8.40}$$

Візьмемо дві точки A і B і сполучимо їх просторовими кривими (рис. 6.43). Тоді

$$\int\limits_{AmB} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int\limits_{B\lambda A} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0,$$

або

$$\int\limits_{AmB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{A\lambda B} \vec{a} \cdot d\vec{r}. \qquad (8.41)$$

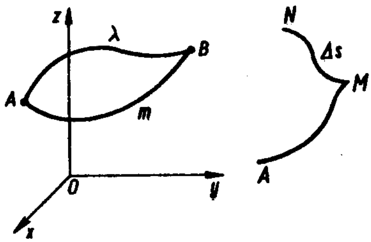


Рис. 6.43

Отже, криволінійний інтеграл (8.41) не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від положення точок A і B. Якщо точка A фіксована, а точка B біжуча, то, позначивши її через M (x, y, z), дістаємо

$$\int\limits_{AM} \vec{a} \cdot d\vec{r} = v(x, y, z).$$

Нехай $MN = \Delta s$ — приріст дуги AM (рис. 6.43), тоді

$$\Delta v = \int\limits_{MN} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{MN} a_\tau ds, \qquad (8.42)$$

де

$$a_\tau = \text{пр}_{\bar{MN}} \bar{a}.$$

За теоремою про середнє, застосованою до рівності (8.42), дістаємо

$$\Delta v = a_{\tau\text{ср}} \Delta s; \quad \frac{\Delta v}{\Delta s} = a_{\tau\text{ср}};$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta s} = a_\tau; \quad \frac{dv}{ds} = a_\tau. \qquad (8.43)$$

За формулами (8.42) і (8.43) знаходимо (див. також § 23, гл. 4)

$$\vec{a} = \text{grad } v.$$

Покладаючи $u = -v$, дістаємо те, що треба було знайти. Теорему доведено.

Для інтеграла по дузі AB можна записати

$$\int\limits_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = v(B) - v(A).$$

Враховуючи, що $v = -u$, знаходимо

$$\int\limits_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = u(A) - u(B).$$

Таким чином, *у потенціальному полі лінійний інтеграл від вектора поля вздовж деякої кривої дорівнює різниці значень потенціалів поля* *в початковій і кінцевій точках на кривій.* Всі властивості, розглянуті для плоского поля (див. п. 8.2), справедливі і для просторового поля.

8.9. Оператор Лапласа

Розглянемо операцію (8.32). Оператор

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

називається **оператором Лапласа** або **лапласіаном**.

Оскільки квадрат модуля вектора дорівнює сумі квадратів проекцій, то

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Застосувавши лапласіан до вектор-функції

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

знаходимо

$$\nabla^2 \vec{a} = \nabla^2 a_x \vec{i} + \nabla^2 a_y \vec{j} + \nabla^2 a_z \vec{k}.$$

При складанні цієї рівності було враховано таку властивість: *щоб помножити скаляр ∇^2 на вектор, треба кожну складову вектора помножити на цей скаляр.*

Лапласіан широко застосовується у фізиці.

ВПРАВИ. **1.** Обчислити дивергенцію радіуса-вектора

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z).$$

Відповідь. 3.

2. Обчислити div ($\varphi \vec{a}$), де $\varphi(x, y, z)$ — скалярна, а $\vec{a}$ — векторна функції поля

$$\vec{a} = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}.$$

Відповідь. div ($\varphi \vec{a}$) = φ div $\vec{a}$ + grad $\varphi \cdot \vec{a}$.

3. Використовуючи формулу Остроградського, знайти значення інтеграла

$$\oiint_\sigma \left(\vec{r} \cdot \vec{a}\right)\vec{n}\, d\sigma,$$

де $\vec{r}$ — радіус-вектор; $\vec{a}$ — сталий вектор; $\vec{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до поверхні σ. *Відповідь.* $V\vec{a}$, де V — об'єм, обмежений поверхнею σ.

4. Довести, що

$$\operatorname{rot}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \operatorname{rot}\vec{a}_1 + \operatorname{rot}\vec{a}_2.$$

5. Обчислити rot ($\varphi \vec{a}$), де φ і $\vec{a}$ задовольняють умовам задачі 2. *Відповідь.* rot ($\varphi \vec{a}$) = φ rot $\vec{a}$ +grad φ.

6. Обчислити

$$\vec{n^0} \cdot \left\{ \operatorname{grad}\left(\vec{a} \cdot \vec{n^0}\right) - \operatorname{rot}\left(\vec{a} \times \vec{n^0}\right) \right\},$$

де $\vec{a}$ — змінний вектор; $\vec{n^0}$ — одиничний сталий вектор. *Відповідь.* $\operatorname{div} \vec{a}$.

§ 9. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Раніше було введено поняття інтеграла по області (див. формулу (2.1)). При цьому припускалось, що область D, обмежена функцією $f(X)$, в області свого визначення також обмежена. Далі інтеграл (2.1) за цих припущень відносно області D і функції $f(X)$ називатимемо **власним.**

Невласними інтегралами називаються інтеграли, для яких або область D не обмежена, або при обмеженій області функція $f(X)$ на множині міри нуль або не визначена, або не обмежена (має розриви другого роду), або і функція, і область її визначення не обмежені.

9.1. Невласні інтеграли по необмеженій області

Невласним інтегралом по необмеженій області G називається границя власного інтеграла, коли обмежена область D розширюється довільно так, що в неї входить і залишається в ній довільна підобласть області G. Таке розширення області називається **вичерпним.**

Таким чином,

$$\lim_{D \to G} \int_D f(X) d\mu = \int_G f(X) d\mu. \tag{9.1}$$

Побудуємо послідовність скінченних областей D_1, D_2, D_3, ..., D_k, ..., що має таку властивість: довільна скінченна область $D \subset G$ може бути покрита скінченним числом областей D_1, D_2, ..., D_n.

Наприклад, якщо область G є площиною або тривимірним простором, то за послідовність $\{D_k\}$ можна вибрати послідовність кругів або куль з центром у початку координат і радіусом $r_k = k$. Тоді інтеграл (9.1) можна записати у вигляді

$$\lim_{k \to \infty} \int_{D_k} f(X) d\mu = \int_G f(X) d\mu. \tag{9.2}$$

Якщо при цьому границя (9.1) або (9.2) існує і дорівнює скінченному числу, то невласний інтеграл називається **збіжним**, у противному разі — **розбіжним.**

Звичайно розглядають тільки збіжні невласні інтеграли, а тому треба вирішити питання про існування границь (9.1) і (9.2).

Наприклад, нехай задано інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ у скінченному сегменті $[a, b]$ від функції $f(x)$.

Припустимо, що $f(x)$ визначена для $x \geq a$ і інтегровна у будь-якому сегменті $[a, B]$, де $a < B$. Тоді $\int\limits_a^B f(x)dx$ має зміст для $\forall\, B > a$. Невласним тут є інтеграл

$$\lim_{B\to\infty}\int\limits_a^B f(x)dx,$$

який позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Отже,

$$\lim_{B\to\infty}\int\limits_a^B f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Аналогічно визначають невласний інтеграл від $-\infty$ до b:

$$\lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^b f(x)dx.$$

Розглядають також інтеграли виду

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int\limits_A^B f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int\limits_b^B f(x)dx.$$

Візьмемо конкретну функцію $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Функція визначена для $x \in (-\infty; +\infty)$ і для кожного сегмента $[A, B] \in (-\infty; +\infty)$ інтегровна. Розглянемо інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$. Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^0\frac{dx}{1+x^2} +$$

$$+\lim_{B\to-\infty}\int\limits_0^B\frac{dx}{1+x^2},$$

але

$$\int\limits_0^B\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} B,\quad \lim_{B\to+\infty}\int\limits_0^B\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty}\operatorname{arctg} B = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогічно

$$\int\limits_A^0\frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arctg} A,\quad \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^0\frac{dx}{1+x^2} = -\lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg} A = +\frac{\pi}{2}.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \tag{9.3}$$

Побудуємо графік функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (рис. 3.58, 6.44).

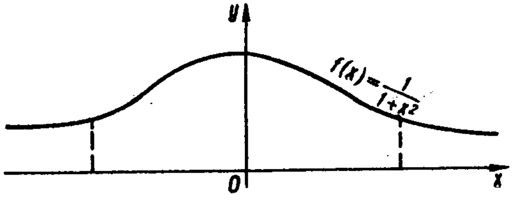


Рис. 6.44

Враховуючи, що визначений інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції, робимо висновок, що площа, обмежена кривою $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ і віссю абсцис, скінченна і дорівнює π. Обчислення інтеграла (9.3) можна провести безпосередньо за формулою Ньютона—Лейбніца:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Взагалі справедлива така рівність:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \to +\infty} F(B) - \lim_{B \to -\infty} F(A) = F(+\infty) - F(-\infty),$$

де $F(x) = \int f(x)dx$ — первісна $f(x)$.

Якщо $F(+\infty)$ і $F(-\infty)$ мають зміст для заданого інтеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, то це вказує на збіжність невласного інтеграла. Таким чином, формулу Ньютона—Лейбніца можна використовувати і у випадку невласних інтегралів, якщо значення $F(+\infty)$, $F(-\infty)$ мають зміст.

Розглянемо подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)ds$. Нехай D — необмежена область (площина). Покриваючи площину системою концентричних кругів D_k радіуса $r_k = k$, визначимо невласний інтеграл $\iint_D f(x,y)ds$ як границю:

$$\lim_{k \to +\infty} \iint_{D_k} f(x,y)ds = \iint_D f(x,y)ds = \iint_\infty f(x,y)ds. \tag{9.4}$$

Аналогічно визначається невласний потрійний інтеграл.

Оскільки всі види інтегралів у кінцевому підсумку визначаються через визначений інтеграл виду $\int\limits_a^b f(x)dx$, то за допомогою цього інтеграла можна проілюструвати деякі положення теорії невласних інтегралів. Перш за все розглянемо теореми про збіжність невласних інтегралів. Основна ідея, покладена в основу теорем про збіжність, полягає у використанні критерію збіжності монотонної функції або монотонної послідовності. Як відомо, будь-яка монотонна і обмежена послідовність має границю, а будь-яка монотонна і обмежена функція має у кожній точці області свого визначення скінченну границю. Для невласних інтегралів ця теорема про збіжність формулюється таким чином:

Теорема 1. *Якщо $f(x) \geq 0$, $x \in [a, +\infty]$, і інтеграл $\int\limits_a^A f(x)dx = \Phi(A) \leq L$ для будь-якого $A > a$ обмежений, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \leq L$, тобто цей інтеграл існує і дорівнює скінченному числу.*

Доведення. Враховуючи, що $f(x) \geq 0$, а $\int\limits_a^A f(x)dx$ є площею, запишемо $0 \leq \Phi(A) \leq L$, і при $A_1 < A_2$ маємо

$$\Phi(A_1) \leq \Phi(A_2),$$

тобто функція $\Phi(A)$ обмежена і монотонна.

Наслідок. *Якщо $f(x)$ і $g(x)$ невід'ємні при $x \in [a, +\infty)$ і для $x \geq A > a$ виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$, а $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігається, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.*

Якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається, то $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ розбігається при $f(x) \leq g(x)$.

Теорема 2. *Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.*

Якщо разом з інтегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *збігається інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, *то кажуть, що* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ **збігається абсолютно.**

Якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *збігається, а* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *розбігається, то кажуть, що* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ **збігається умовно.**

Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *збігається, то функція* $f\ (x)$ *називається* **абсолютно інтегровною.**

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2} dx$, де $k \neq 0$.

Розв'язання. Інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{k^2 + x^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x}{k} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2k}$ збігається, $\frac{|\cos ax|}{k^2 + x^2} \leq \frac{1}{k^2 + x^2}$. За теоремою 2 інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\cos ax|}{k^2 + x^2} dx$ збігається. Тоді збігається, причому абсолютно, і заданий інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2} dx$, а функція $\frac{\cos ax}{k^2 + x^2}$ є абсолютно інтегровною.

ВПРАВИ. Обчислити невласний інтеграл і довести його розбіжність:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x)x^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} x \sin x dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x}{2}} dx$.

Відповідь. а) $1 - \ln 2$; б) π; в) розбігається; г) розбігається.

9.2. Інтеграли від необмеженої функції

Розглянемо тепер інтеграли від необмежених функцій. Нехай функція $f\ (X)$, визначена в n-вимірній обмеженій області D і на множині міри нуль, має розриви другого роду, тобто у точці або лінії, або поверхні ця функція перетворюється у нескінченність (необмежена). Виріжемо із області D E_ε-окіл, що покриває розрив. Тоді границя

$$\lim_{E_\varepsilon \to 0} \int_{D-E_\varepsilon} f(X)d\mu$$

називається **невласним інтегралом від необмеженої функції.** Якщо цей інтеграл існує і дорівнює скінченному числу, то невласний інтеграл називається **збіжним.** Якщо ж границя не існує або дорівнює нескінченності, то інтеграл називається **розбіжним.**

Розглянемо функцію однієї змінної $f(x)$.

Нехай $f(x)$ неінтегровна лише у точці $a \in [a, c]$. Тоді $\lim\limits_{\eta \to 0} \int\limits_a^{c-\eta} f(x)dx$ буде невласним інтегралом від необмеженої функції. Якщо цей інтеграл збігається, то

$$\lim_{\eta \to 0} \int_a^{c-\eta} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Нехай $f(x)$ неінтегровна лише в точці $a \in [a, c]$. Тоді $\lim\limits_{\eta \to 0} \int\limits_{a+\eta}^{c} f(x)dx$ також є невласним інтегралом від необмеженої функції. Якщо інтеграл збігається, то

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{a+\eta}^{c} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Нехай функція неінтегровна лише при $x = c$, де $c \in [a, b]$ і $a < c < b$. Тоді проміжок $[a, b]$ розіб'ємо на два: $[a, c]$ і $[c, b]$. Розглянемо тепер

$$\lim_{\eta \to 0} \int_a^{c-\eta} f(x)dx \quad \text{і} \quad \lim_{\eta \to 0} \int_{c+\eta}^{b} f(x)dx.$$

Якщо ці інтеграли збігаються, то

$$\lim_{\eta \to 0} \int_a^{c-\eta} f(x)dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{c+\eta}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Зазначимо, що так само, як і для невласних інтегралів по обмежених областях, коли невласний інтеграл від необмежених функцій збігається, можна користуватися формулами Ньютона—Лейбніца, інтегрування частинами, заміни змінної.

Приклади. **1.** Обчислити інтеграл $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Точка розриву підінтегральної функції $x = -1$. Тоді

$$\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-1+\eta}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 0}\arcsin x\,\Big|_{-1+\eta}^{0} = -\lim_{\eta\to 0}\arcsin(-1+\eta) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Точки розриву підінтегральної функції $x = -1$, $x = 1$. Тоді

$$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-1+\eta}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{0}^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Розглянемо тепер ознаки збіжності невласних інтегралів від необмежених функцій. Проілюструємо ці ознаки на прикладі функції, інтегровної усюди на $[a,\ c]$, крім точки c. Ці ознаки також базуються на теоремі про границю монотонної і обмеженої функції.

***Теорема* 1.** *Для того щоб існував невласний інтеграл*

$$\int\limits_{a}^{c} f(x)dx = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{a}^{c-\eta} f(x)dx\,, \text{ де } f(x) \ge 0, \tag{9.5}$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\int\limits_{a}^{c-\eta} f(x)dx \le L \quad \textit{для будь-якого } \eta > 0.$$

Якщо остання умова не виконується, то інтеграл (9.5) розбігається. Для інтегралів від необмежених функцій справедливі також наслідок і теорема 2, сформульовані для інтегралів по необмежених областях у п. 9.1.

Наслідок. *Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні в $[a,\ c]$ всюди, крім точки c, причому $0 \le f(x) \le g(x)$, і збігається інтеграл $\int\limits_{a}^{c} g(x)dx$, то $\int\limits_{a}^{c} f(x)dx$ також збігається.*

Теорема 2. Якщо $f(x)$ знакозмінна *у* $[a, c]$ *і інтегровна в ньому всюди, крім точки с, то із збіжності* $\int_a^c |f(x)|dx$ *випливає збіжність* $\int_a^c f(x)dx$.

ВПРАВА. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$; б) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; в) $\int_{-1}^{e} \frac{dx}{x\ln^5 x}$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}$. *Відповідь.* а) $3(1+\sqrt[3]{3})$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) розбігається;

г) розбігається.

§ 10. ІНТЕГРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРА

Нехай дана функція $u = f(x, y)$ визначена в прямокутній області D, $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, і неперервна у кожній точці цієї області (рис. 6.45). Зафіксуємо у функції $u = f(x, y)$ змінну x і розглянемо інтеграл

$$\int_c^d f(x,y)dy, \qquad (10.1)$$

який є функцією від x. Позначимо

$$\int_c^d f(x, y)dy = F(x). \qquad (10.2)$$

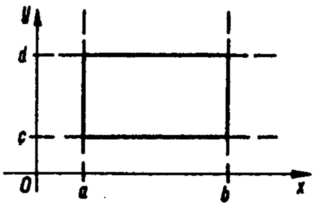


Рис. 6.45

Інтеграл (10.1) є функцією від змінної x, яка називається **параметром**. Цей параметр x рівняння (10.2) входить лише у підінтегральну функцію. Якщо область визначення і неперервність функції $u = f(x, y)$ задано нерівностями $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ (див., наприклад, (7.21)), то треба розглянути інтеграл

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy = \Phi(x).$$

Цей інтеграл також залежить від параметра x, але параметр входить не лише в підінтегральну функцію, а й у межі інтегрування. Зазначимо, що інтеграли (10.1) і (10.2) можуть бути і не власними.

Нехай $a < B < +\infty$. Розглянемо власний інтеграл

$$\int_a^B f(x,\alpha)dx.$$

Якщо $\lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x,\alpha)dx$ існує і дорівнює $\Phi(\alpha)$, то такий невласний інтеграл називається **збіжним**.

Наприклад, інтеграл $\int_0^1 y^x\,dy$ при $x > -1$ є інтегралом від степеневої функції з параметром x:

$$\int_0^1 y^x\,dy = \frac{y^{x+1}}{x+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{x+1} = F(x).$$

Інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = F(p)$ є інтегралом від параметра p.

Кількість параметрів у інтеграла може бути і більше одного, як, наприклад, при обчисленні потрійних інтегралів. Так, інтеграл $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = B(a,b)$, де $a > 0$, $b > 0$, є інтегралом від двох параметрів: a і b. Цей інтеграл називається **інтегралом Ейлера першого роду** або **бета-функцією.**

Інтеграл

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \Gamma(a),$$

залежний від одного параметра a, називається **інтегралом Ейлера другого роду** або **гамма-функцією.**

Бета- і гамма-функції не належать до елементарних функцій. Якщо в результаті інтегрування утворюється функція, то інтеграл містить змінні, які є параметрами в інтегралі. Теорія інтегралів, залежних від параметрів, має не лише теоретичне, але й практичне значення. Не маючи змоги викласти всю теорію інтегралів, що містять параметри, розглянемо лише інтегровність і диференційовність інтегралів, залежних від параметра, по цьому параметру.

Розглянемо інтеграл

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx = F(\alpha). \tag{10.3}$$

Теорема **(про диференційовність інтеграла, залежного від параметра, по цьому параметру).** *Нехай функція $f(x, \alpha)$, а також її похідна $f'_\alpha(x, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ неперервні в області $a \le x \le b$, $\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$.*

Тоді справедлива така формула диференціювання інтеграла по параметру:

$$\frac{dF}{d\alpha}=\left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx. \qquad (10.4)$$

Доведення. Знаходимо

$$\frac{dF}{d\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{F(x,\alpha+\Delta\alpha)-F(x,\alpha)}{\Delta\alpha}.$$

Оскільки

$$F(x,\alpha+\Delta\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx,\ F(x,\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx,$$

то

$$F(x,\alpha+\Delta\alpha)-F(x,\alpha)=\int_a^b [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx,$$

$$\frac{F(x,\alpha+\Delta\alpha)-F(x,\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx.$$

Застосувавши до різниці $f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)$ теорему Лагранжа про скінченний приріст у сегменті $[\alpha,\ \alpha+\Delta\alpha]$, дістанемо

$$f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)=f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\Delta\alpha)\,\Delta\alpha,\ 0<\theta<1,$$

звідки

$$f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\Delta\alpha)=\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}.$$

Знайдемо тепер границю

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{F(x,\alpha+\Delta\alpha)-F(x,\alpha)}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\Delta\alpha)\,dx=$$

$$=\int_a^b\lim_{\Delta\alpha\to 0}f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\Delta\alpha)\,dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx.$$

Теорему доведено.

Наведемо без доведення теорему про диференційовність невласних інтегралів, залежних від параметра. Проте перш за все введемо поняття рівномірної збіжності невласних інтегралів.

Нехай функція $f(x,\ \alpha)$ неперервна в області $a\le x<+\infty$, $\alpha_0\le\alpha\le\alpha_1$. Тоді невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)dx$$

називається рівномірно збіжним в (α_0, α_1), якщо для будь-якого $\varepsilon >$ > 0 знайдеться таке $B(\varepsilon)$, що для всіх $b > B(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon \text{ при всіх } \alpha \in (\alpha_0, \alpha_1).$$

Якщо $f(x, \alpha)$ і $f'_\alpha(x, \alpha)$ неперервні в області $a \le x < +\infty$, $\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$ і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ збігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$ рівномірно збігається при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$, то

$$\left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha = \int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx. \qquad (10.5)$$

Формули (10.4) і (10.5) називаються формулами Ейлера. Якщо замість інтеграла (10.3) розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} f(x,\alpha)dx = \Phi(\alpha),$$

то

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \left(\int\limits_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha = \int\limits_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx + \qquad (10.6)$$

$$+ f[\varphi_2(\alpha),\ \alpha]\frac{d\varphi_2(\alpha)}{d\alpha} - f[\varphi_1(\alpha),\ \alpha]\frac{d\varphi_1(\alpha)}{d\alpha}. \qquad (10.7)$$

При цьому функції $\varphi_1(\alpha)$ і $\varphi_2(\alpha)$ диференційовні у сегменті $[\alpha_0, \alpha_1]$.

Доведення формули (10.7) аналогічне доведенню формул (10.4) і (10.5), але з урахуванням того, що $\Phi(\alpha)$ є складною функцією: $\Phi(\alpha, \varphi_2(\alpha), \varphi_1(\alpha))$.

Тоді

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{\partial\alpha}. \qquad (10.8)$$

Згідно з формулою $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)$ маємо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2} = f[\varphi_2(\alpha), \alpha];\ \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} = -f[\varphi_1(\alpha), \alpha], \qquad (10.9)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \int\limits_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_1(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx. \qquad (10.10)$$

Підставивши (10.9), (10.10) в (10.8), дістанемо (10.7).

Розглянемо тепер теорему про інтегрування інтеграла, залежного від параметра, по цьому параметру.

Теорема. *Нехай функція $f(x, \alpha)$ неперервна за обома змінними в області $a \le x < b$, $\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$, тоді*

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(\alpha)d\alpha = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)d\alpha. \qquad (10.11)$$

Доведення випливає із теореми про повторні інтеграли. Маємо

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha)d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\int_a^b f(x, \alpha)dx\right]d\alpha = \int_a^b dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha)d\alpha.$$

Ця теорема справедлива і для нескінченного проміжку $[a, +\infty)$ за умови, що $\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)dx$ рівномірно збігається для $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$.

Приклад. Обчислити $\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$.

Розв'язання. Маємо

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx; \quad \frac{dI}{d\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x dx. \qquad (10.12)$$

Далі знаходимо

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x dx = \begin{bmatrix} e^{-x} = u, & dv = \cos\alpha x dx, \\ du = -e^{-x}dx, & v = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-x}\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin\alpha x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{-x}, & dv = \sin\alpha x dx \\ du = -e^{-x}dx, & v = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha^2}\cos\alpha x\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x dx,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x dx = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x dx,$$

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x dx = \frac{1}{\alpha^2}; \quad \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x dx = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Таким чином,

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{1}{1+\alpha^2}, \quad dI = \frac{d\alpha}{1+\alpha^2},$$

тоді

$$I(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = \operatorname{arctg}\alpha + C; \quad I(0) = \operatorname{arctg} 0 + C, \; C = I(0).$$

Із формули (10.12) дістаємо

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin 0 \cdot x}{x} dx = \int_0^{+\infty} 0 \cdot dx = 0, \; C = I(0) = 0.$$

Отже,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \operatorname{arctg}\alpha.$$

ВПРАВИ. **1.** Обчислити інтеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{2}$, якщо $\alpha > 0$; 0, якщо $\alpha = 0$; $-\frac{\pi}{2}$, якщо $\alpha < 0$.

2. Обчислити інтеграл Ейлера $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

3. Обчислити інтеграл Лапласа $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2axdx$. *Відповідь.* $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}$.

4. Обчислити інтеграли Френеля $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ і $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$.

Відповідь. $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

§ 11. ПОХІДНА І ІНТЕГРАЛ ВІД ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО

Нехай маємо комплексне змінне $z = x + iy$ і функцію комплексного змінного

$$w = f(z) = f(x + iy), \text{ де } i = \sqrt{-1}.$$

Вважатимемо, що операції, які визначаються характеристикою f над комплексним числом $x + iy$, утворюють комплексне число. Якщо u і v — дійсні функції дійсних змінних x, y:

$$u = u(x, y), \; v = v(x, y),$$

то функцію $w = f(z)$ можна записати у вигляді

$$w = u(x, y) + iv(x, y).$$

Областю визначення цієї функції є частина або вся площина xOy. Аналогічно функції дійсного змінного для функцій комплексного змінного вводять поняття границі, неперервності і похідної функції w. Маємо

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Можна довести, що правила обчислення похідної для функцій дійсного змінного справедливі і для функцій комплексного змінного. Якщо $w = u + iv$, то є цікавим вираження $\frac{dw}{dz}$ через похідні від $u(x, y)$ і $v(x, y)$ у деякій точці, наприклад $z = z_0 = (x_0, y_0)$.

Сформулюємо це у вигляді теореми, що називається **умовами Коші — Рімана**[1].

11.1. Умови Коші — Рімана

Теорема. *Для того щоб функція $w = f(z)$ мала в точці $z = z_0$ похідну, необхідно і достатньо, щоб*

1) *функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ були диференційовними по x, y в точці $z = z_0$;*

2) *у точці $z = z_0$ виконувались умови Коші — Рімана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{11.1}$$

Доведення. *Необхідність.*

1) Нехай функція $w(z)$ має похідну в точці $z = z_0$:

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

де $z = z_0 + \Delta z$.

Оскільки похідна не залежить від способу наближення z до z_0, то позначимо

$$z - z_0 = \Delta z = \Delta x, \text{ або } z - z_0 = i\Delta y.$$

При цьому похідна має бути одна і та сама:

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta w}{i\Delta y}.$$

Знайдемо $\frac{dw}{dz}$ як границю $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

---

[1] Георг Фрідріх Бенхард Ріман (1826—1866) — німецький математик.

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x,\ y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x,\ y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right].$$

Згідно з умовою 1) теореми останню рівність можна записати у вигляді

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{11.2}$$

Знайдемо тепер

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0,\ y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + \right.$$

$$\left. + i \frac{v(x_0,\ y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right] = -\frac{\partial u}{\partial y} i + \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\partial u}{\partial y} i + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{11.3}$$

Порівнюючи (11.2) і (11.3), дістаємо рівність (11.1).

Достатність. Оскільки функції $u\ (x, y)$ і $v\ (x, y)$ диференційовні, то

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y +$$

$$+ i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + \alpha,$$

де

$$\lim_{\Delta z \to 0} \alpha = 0.$$

Скориставшись рівностями (11.1), знаходимо

$$\Delta w = \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \Delta y + i \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) + \alpha,$$

$$\Delta w = \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + \left(i^2 \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y + i \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) + \alpha,$$

$$\Delta w = \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + i(\Delta x + i\Delta y) \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha. \tag{11.4}$$

Поділивши рівність (11.4) на $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, дістанемо

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\alpha}{\Delta z}.$$

Переходячи до границі, маємо $\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$.

Оскільки вираз у правій частині останньої рівності існує, то існує і похідна $\frac{dw}{dz}$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теорему доведено.

Функція $w = f(z)$, що визначена в області D і має у кожній її точці похідну, називається **аналітичною.**

11.2. Визначення інтеграла від функції комплексного змінного

Нехай функція $w = f(z)$ в області D визначена і неперервна і нехай у цій області задано орієнтовну криву AB (рис. 6.46). Розіб'ємо AB на частини і утворимо суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = I_n,$$

тоді

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \int_{AB} f(z)dz, \ \lambda = \max |\Delta z_k|$$

називається **інтегралом від $f(z)$ вздовж кривої AB.**

***Теорема* (про обчислення інтеграла по комплексній змінній).** *Якщо крива AB кусково-гладка, а функція $f(z)$ кусково-неперервна і обмежена, то існує* $\int_{AB} f(z)dz$.

Доведення. Нехай

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

$$z_k = x_k + iy_k, \ z_{k-1} = x_{k-1} + iy_{k-1}.$$

Позначимо

$$z_k - z_{k-1} = \Delta z_k, \ x_k - x_{k-1} = \Delta x_k, \ y_k - y_{k-1} = \Delta y_k,$$

тоді

$$\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

Взявши точку

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k,$$

знайдемо

$$f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k) = u_k + iv_k,$$

$$f(\zeta_k)\Delta z_k = (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k),$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k).$$

Далі знаходимо

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} u_k\Delta x_k - \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v_k\Delta y_k +$$

$$+ i\left(\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v_k\Delta x_k + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} u_k\Delta y_k\right).$$

Оскільки функції $f(z)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ неперервні, то

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} udx - vdy + i\int_{AB} udy + vdx\,. \qquad (11.5)$$

Звідси маємо:

1°. *Обчислення інтеграла від функції комплексного змінного зводиться до обчислення криволінійного інтеграла другого роду.*

2°. *Властивості інтеграла від функції комплексного змінного вздовж кривої збігаються із властивостями криволінійних інтегралів другого роду від функцій дійсного змінного.*

11.3. Інтегральна теорема Коші

Нехай D — однозв'язна область на площині z, а AB — будь-яка замкнена спрямлювана крива, яка повністю лежить в області D. Тоді має місце така теорема.

Теорема. *Якщо функція $f(z)$ має неперервну похідну в області D, обмеженій замкненою гладкою кривою, то інтеграл по будь-якому замкненому контуру, що лежить в області D, дорівнює нулю:*

$$\int_{AB} f(z)dz = 0\,. \qquad (11.6)$$

Доведення. Якщо в інтегралі (11.5) крива AB замкнена, то для виконання рівності (11.6) треба, щоб інтеграл (11.5) не залежав від форми траєкторії, що сполучає A і B, тобто вирази $udx - vdy$ і $udy + vdx$ мають бути повними диференціалами. Останнє можливо за умови

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

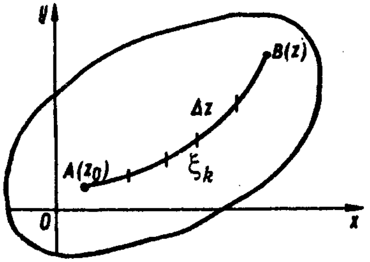


Рис. 6.46

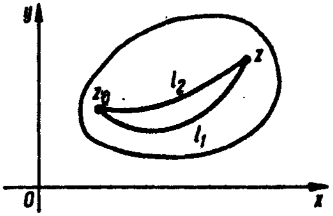


Рис. 6.47

які збігаються з умовами (11.1) і для функції $f(z)$ виконуються внаслідок її диференційовності.

Теорему доведено.

Нехай тепер в області D взято дві криві, що сполучають точки z_0 і z (рис. 6.47), де z_0 фіксоване. Тоді для будь-якої аналітичної в області D функції виконується рівність

$$\int_{l_1} f(z)dz = \int_{l_2} f(z)dz.$$

Розглянемо $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$. Цей інтеграл є функцією верхньої межі z, тобто

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

Можна довести, що $\frac{dF}{dz} = f(z)$, тобто $F(z)$ є первісною функції $f(z)$. Всі первісні, як і для функції однієї змінної, відрізняються на сталу.

Для інтеграла від функції комплексного змінного справедлива формула Ньютона—Лейбніца:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Приклад. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{z_1\gamma}^{z_2} \operatorname{Re} z dz = \int_{z_1\gamma}^{z_2} x dz, \tag{11.7}$$

де γ є відрізком прямої, що сполучає точки $z_1(x_1, y_1)$ і $z_2(x_2, y_2)$. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки z_1 і z_2, у параметричній формі:

$$x = mt + x_1,\ y = nt + y_1. \tag{11.8}$$

Нехай точці z_1 відповідає $t_1 = 0$, а z_2 відповідає t_2, тоді із системи (11.8)

$$t_2 = \frac{x_2 - x_1}{m}, \tag{11.9}$$

$$m = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}};\ n = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}. \tag{11.10}$$

Тепер для обчислення інтеграла (11.7) можна скористатися формулою (11.5). Тут $f(z) = \operatorname{Re} z = x$, $u = x$, $v = 0$, тоді

$$I = \int_{AB} \operatorname{Re} z dz = \int_{AB} x dx + i\int_{AB} x dy, \tag{11.11}$$

де AB є відрізком прямої з початком z_1 (A) і кінцем z_2 (B). Замінивши у рівності (11.11) значення x, dx, y, dy згідно з (11.8), знаходимо

$$I = \int_0^{t_2}(mt + x_1)m\,dt + i\int_0^{t_2}(mt + x_1)n\,dt =$$

$$= m^2\frac{t_2^2}{2} + mt_2x_1 + imn\frac{t_2^2}{2} + in\,x_1t_2\,;$$

$$I = m^2\frac{t_2^2}{2}(m + in) + t_2x_1(m + in) = t_2(m + in)\left(m\frac{t_2}{2} + x_1\right);$$

$$I = mt_2\left(1 + i\frac{n}{m}\right)\left(m\frac{t_2}{2} + x_1\right).$$

Використовуючи вирази (11.9) і (11.10) для t_2, m, n, дістанемо

$$I = (x_2 - x_1)\left(1 + i\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{x_2 - x_1}{2} + x_1\right)\times$$

$$\times[(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)]\frac{x_2 + x_1}{2}.$$

Остаточно

$$I = [(x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1)]\frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{(z_2 - z_1)(x_2 + x_1)}{2}.$$

§ 12. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ

12.1. Геометричні застосування

Геометричне застосування інтегралів полягає в обчисленні довжини дуги кривої, площі, об'єму. Формули для обчислення довжини дуги кривої розглянуто у попередніх прикладах. Для обчислення площі плоскої фігури можна застосувати як прості визначені інтеграли, так і подвійні, і криволінійні. Для обчислення об'ємів тіл можна застосовувати подвійні або потрійні інтеграли:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz\,, \tag{12.1}$$

$$V = \iiint\limits_V \rho d\rho d\varphi dz\,, \tag{12.2}$$

$$V = \iiint\limits_V r^2|\sin\theta|\,drd\varphi d\theta\,. \tag{12.3}$$

12.2. Фізичні застосування

За допомогою інтегралів обчислюють масу тіла, координати центра ваги, мас, моменти, роботу.

Виведемо формулу для визначення координат центра мас. Нехай тіло масою m із змінною густиною $\gamma(x, y, z)$ розбито на n частин з масами Δm_i. Якщо в об'ємі масою Δm_i вибрати довільно точку $p_i(x_i, y_i, z_i)$, то послідовним застосуванням теореми про поділ відрізка у заданому відношенні знайдемо наближені формули для координат x_{nc}, y_{nc}, z_{nc} центра мас (див. п. 2.18 з гл. 1):

$$x_{nc} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}, \quad y_{nc} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}, \quad z_{nc} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}. \qquad (12.4)$$

Якщо взяти густину $\gamma(p_i)$ в точці p_i за густину всієї маси Δm_i, її об'єм позначити через ΔV_i, то

$$\Delta m_i = \gamma(p_i)\,\Delta V_i.$$

Підставивши це значення у формули (12.4), дістанемо, наприклад,

$$x_{nc} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \gamma(p_i) \Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(p_i) \Delta V_i}. \qquad (12.5)$$

У чисельнику і знаменнику маємо тут інтегральні суми. Якщо перейти до границі за умови, що ранг для Δv_i прямує до нуля, то дістанемо $x_{nc} \to x_c$, а всі суми в границі перейдуть у потрійні інтеграли. Отже,

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dv}, \qquad (12.6)$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dv}, \qquad (12.7)$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dv}. \qquad (12.8)$$

Якщо в формулах (12.6)—(12.8) $\gamma(x, y, z) = \text{const}$, то ця функція у формули не входить.

Тоді формули (12.6) — (12.8) називають **формулами для обчислення координат центра мас об'єму.** Якщо чисельник і знаменник у цих формулах помножити на прискорення вільного падіння, то за цими формулами можна обчислити координати центра ваги.

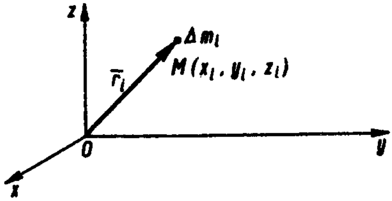


Рис. 6.48

Якщо замість тіла маємо плоску фігуру, то формули (12.6) —(12.8) залишаються справедливими, але при цьому інтеграли будуть подвійними і інтегрування здійснюється по площі

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\gamma(x,y)ds}{\iint\limits_D \gamma(x,y)ds}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\gamma(x,y)ds}{\iint\limits_D \gamma(x,y)ds}. \qquad (12.9)$$

Формули (12.6) — (12.8) справедливі і для матеріальних кривих L, але при цьому дістаємо криволінійні інтеграли першого роду:

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\gamma(x,y,z)dl}{L}, \quad y_c = \frac{\int\limits_L y\gamma(x,y,z)dl}{L},$$

$$z_c = \frac{\int\limits_L z\gamma(x,y,z)dl}{L}. \qquad (12.10)$$

Вирази, що містяться у чисельнику формул (12.6)— (12.8), називаються **статичними моментами** для просторового випадку відносно площини, а для плоского — відносно осі. Наприклад, вираз $\iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)dv = S_{yz}$ є статичним моментом маси відносно площини yOz, а $S_{xy} = \int\limits_L z\gamma(x,y,z)dl$ є статичним моментом матеріальної кривої відносно площини xOy. Разом з тим вираз $S_y = \iint\limits_D x\gamma(x,y)ds$ є статичним моментом відносно осі.

Статичні моменти широко застосовуються в опорі матеріалів та в інших науках.

Моментом інерції матеріальної точки відносно полюса називається добуток маси точки на квадрат її відстані від полюса. Якщо квадрат відстані точки до будь-якої координатної площини або осі помножити на масу точки, то дістанемо момент інерції відносно площини або осі.

Згідно з рис. 6.48, маємо

$$
\begin{gathered}
I_{i0} = \Delta m_i \overrightarrow{r_i^2}, \\
I_{ixy} = \Delta m_i z_i^2,\ I_{ixx} = \Delta m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right), \\
I_{ixz} = \Delta m_i y_i^2,\ I_{iyy} = \Delta m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right), \\
I_{iyz} = \Delta m_i x_i^2,\ \ I_{izz} = \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right).
\end{gathered}
\tag{12.11}
$$

Якщо замість однієї матеріальної точки маємо систему матеріальних точок, то моменти інерції дістаємо підсумовуванням рівностей (12.11). Наприклад,

$$
I_{n0} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i^2} \Delta m_i . \tag{12.12}
$$

Якщо ж замість системи точок маємо тіло змінної густини $\gamma(x, y, z)$, то моменти інерції виражаються інтегралами

$$
\begin{gathered}
I_0 = \iiint\limits_V \overrightarrow{r^2}\, \gamma(x, y, z)\, dv, \\
I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \gamma(x, y, z)\, dv,\ I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \gamma(x, y, z)\, dv, \\
I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 \gamma(x, y, z)\, dv,\ I_{xx} = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)\, dv, \\
I_{yy} = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)\, dv,\ I_{zz} = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x, y, z)\, dv,
\end{gathered}
$$

де I_0, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} — моменти інерції (фізичні моменти) тіла відносно полюса O, координатних площин xy, yz, xz і координатних осей x, y, z.

Якщо фігура плоска, то

$$
I_0 = \iint\limits_D \overrightarrow{r^2}\, ds,\ I_x = \iint\limits_D y^2\, ds,\ I_y = \iint\limits_D x^2\, ds,
$$

де I_0, I_x, I_y — моменти інерції (геометричні моменти) плоскої фігури відносно полюса O і осей x, y.

Слід зазначити, що $\overrightarrow{r^2} = x^2 + y^2 + z^2$, а тому

$$
I_0 = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)\, dv = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy}.
$$

Приклади. **1.** Обчислити момент інерції куба відносно його ребра завдовжки a (рис. 6.49), якщо густина $\gamma = 1$.

Розв'язання. Маємо

$$I_{0z} = I_{zz} = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)\gamma\,(x, y, z)\,dv\,.$$

Оскільки $\gamma = 1$, то

$$I_{zz} = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)dxdydz = \int\limits_0^a dz \iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right)dxdy\,,$$

$$I_{zz} = a\iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right)dxdy = a\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a \left(x^2 + y^2\right)dy\,,$$

$$I_{zz} = a\int\limits_0^a \left(x^2 a + \frac{a^3}{3}\right)dx = a^2\int\limits_0^a \left(x^2 + \frac{a^2}{3}\right)dx\,,$$

$$I_{zz} = a^2\left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2}{3}a^5\,.$$

2. Обчислити момент інерції площі круга радіуса R відносно центра круга (рис. 6.50)

Розв'язання. Маємо

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy\,,$$

$$I_0 = \iint\limits_D \rho^2\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R \rho^3 d\rho\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\frac{R^4}{4}\,d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}\,.$$

12.3. Загальна схема застосування інтегралів

Існує дві загальні схеми застосування інтегралів. За першою схемою знаходять вираз диференціала невідомої функції, що дає відповідь задачі. Цю невідому функцію знаходять інтегруванням. Друга схема використовується в усіх застосуваннях, які були розглянуті раніше.

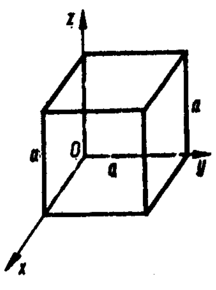


Рис. 6.49

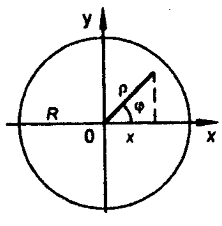


Рис. 6.50

Що ж спільного мають всі ці застосування? З'ясовуються невідома величина і область її визначення. Області визначення розбиваються на елементарні частини і для кожної такої частини вибирається міра, а також точка, в якій визначається середнє значення невідомої величини. Будується інтегральна сума за мірою, а потім відшукується границя цієї суми, яка і дає відповідь задачі.

§ 13. НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Якщо функція $f(x)$ задана графічно або таблично, або якщо первісна аналітично заданої функції $f(x)$ не виражається в елементарних функціях, то для обчислення визначеного інтеграла

$$\int_a^b f(x)dx \tag{13.1}$$

застосовуються наближені методи, що виражають цей інтеграл через інтегральну суму. Оскільки всі інші типи інтегралів зводяться до обчислення простих визначених інтегралів виду (13.1), то далі розглядаються наближені методи тільки для інтегралів цього типу.

13.1. Формула прямокутників

Нехай треба обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ — неперервна у сегменті $[a, b]$ функція. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., $x_n = b$ на n рівних частин завдовжки Δx. Тоді

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Позначимо через y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n значення функції $f(x)$ у точках x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n, тобто

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ ...,\ y_n = f(x_n).$$

Утворимо суми

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + ... + y_{n-1}\Delta x,$$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + ... + y_{n-1}\Delta x + y_n\Delta x,$$

Кожна із цих сум є окремим видом інтегральної суми для функції $f(x)$ на сегменті $[a, b]$, якщо за точку береться початок або кінець окремого інтервалу. Ця сума дорівнює наближено інтегралу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}), \tag{13.2}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n). \tag{13.3}$$

Формули (13.2) і (13.3) називаються **формулами прямокутників.**

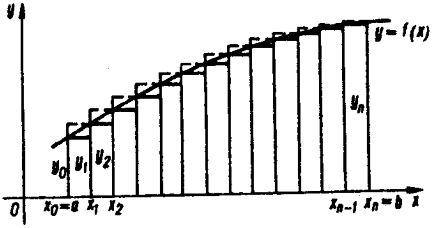


Рис. 6.51

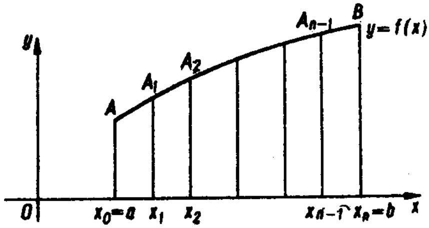


Рис. 6.52

Якщо функція $f(x) \geq 0$ є зростаючою, то формула (13.2) виражає площу ступінчастої фігури, що складається із «вхідних» прямокутників, а формула (13.3) — із «вихідних» прямокутників (рис. 6.51). Оцінка похибки у формулах (13.2) і (13.3) визначається нерівністю

$$R \leq \frac{M_1}{2n}(b-a)^2, \text{ де } M_1 = \max_{[a,b]}\left|f'(x)\right|.$$

13.2. Формула трапецій

Точніше значення визначеного інтеграла дістанемо, якщо графік функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ замінимо не ступінчастою лінією, як для формули прямокутників, а вписаною ламаною (рис. 6.52).

Тоді площу криволінійної трапеції $aABb$ замінюють сумою площ прямолінійних трапецій, обмежених зверху хордами. Площа i-ї трапеції дорівнює $\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x$, тому

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \tag{13.4}$$

Ця формула називається **формулою трапеції.** Оцінка похибки R у формулі трапеції визначається формулою

$$R \leq \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3, \text{ де } M_2 = \max_{[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

13.3. Формула парабол (формула Сімпсона [1])

Розіб'ємо проміжок $[a, b]$ на парне число рівних частин $n = 2m$ (рис. 6.53). Площу криволінійної трапеції $aM_0M_2x_2$ замінимо площею такої криволінійної трапеції, яка зверху обмежена параболою $y = Ax^2 + Bx + C$, що проходить через точки M_0, M_1, M_2. Коефіцієнти A, B, C визначаються за умови проходження параболи через точки M_0, M_1, M_2. Аналогічні параболи будуємо і для інших пар відрізків.

[1] Томас Сімпсон (1710—1761) — англійський математик.

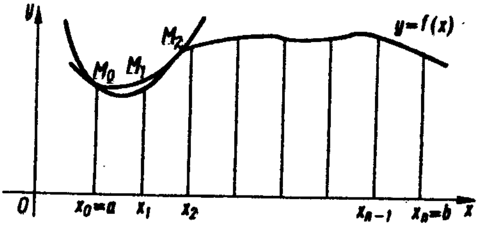


Рис. 6.53

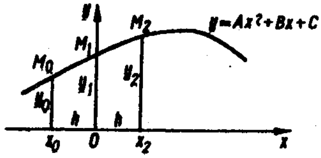


Рис. 6.54

Обчислимо площу однієї криволінійної трапеції.

Лема. Якщо криволінійна трапеція обмежена параболою $y = Ax^2 + Bx + C$, віссю Ox і двома ординатами цієї параболи, відстань між якими дорівнює $2h$, то її площа

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

де y_1 — ордината кривої в середині відрізка (рис. 6.54).

Доведення. Розмістимо допоміжну систему координат так, як показано на рис. 6.54. Визначимо A, B, C із умов:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } x_0 = -h, \text{ то } y_0 = Ah^2 - Bh + C, \\ &\text{якщо } x_1 = 0, \text{ то } y_1 = C, \\ &\text{якщо } x_2 = h, \text{ то } y_2 = Ah^2 + Bh + C. \end{aligned} \tag{13.5}$$

Площа параболічної трапеції

$$S = \int_{-h}^{h}\left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]\Big|_{-h}^{+h} =$$

$$= \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right).$$

Із умов (13.5) маємо

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Отже,

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Лему доведено.

Користуючись лемою, можна записати загальну формулу для обчислення площі криволінійної трапеції — **формулу Сімпсона**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}\right) + \right.$$

$$\left. + 4\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\right].$$

Ця формула часто використовується у практиці наближеного обчислення визначених інтегралів.

Предметний покажчик

ЗМІСТ

Навчальне видання

Овчинников Петро Пилипович
Яремчук Федір Петрович
Михайленко Віктор Мефодійович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

У двох частинах

Частина 1

Лінійна і векторна алгебра
Аналітична геометрія
Вступ до математичного аналізу
Диференціальне і інтегральне числення

3-тє видання, виправлене

Редактор *Л. В. Магда*
Оформлення художника *В. О. Гурлєва*
Художній редактор *С. В. Аннєнков*
Коректори *О. В. Боброва, І. В. Іванюсь, Н. М. Мірошниченко*

Підписано до друку 30.09.02. Формат 60×84 1/16.
Папір офсетний. Гарнітура Antiqua. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 34,88. Обл.-вид. арк. 35,0.
Тираж 10 000 прим. Зам. № 3-265.

Видавництво "Техніка". 04053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру України суб'єктів видавничої справи № 357 від 12.03.2001.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці
09117 м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4