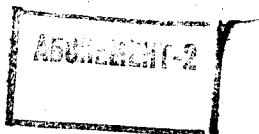




В.М. ПАСКОНОВ  
В.И. ПОЛЕЖАЕВ  
Л.А. ЧУДОВ

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА

*Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по специальностям:  
«Прикладная математика», «Физика» и «Механика»*



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1984

519

22.19

П 19 ✓

УДК 519.6

Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 288 с.

Книга содержит систематическое изложение основных математических моделей процессов тепло- и массообмена и методов их численной реализации. Приводятся примеры расчетов, иллюстрирующие возможности излагаемых методов.

Книга может служить учебным пособием по курсу «Численные методы механики сплошной среды», читаемому в вузах на факультетах прикладной математики.

Илл. 65. Табл. 12. Библ. 257 назв.

293117

П  $\frac{1702070000 - 024}{053(02)-84}$  80-83

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1984

НТБ РГПИ  
г. Винница

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
Введение . . . . .	9
<b>Глава 1. Начальные сведения о методе сеток. Случай одного независимого переменного</b> . . . . .	<b>16</b>
§ 1.1. Сеточное представление функций . . . . .	16
§ 1.2. Вычисление интегралов . . . . .	19
§ 1.3. Вычисление производных . . . . .	23
§ 1.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . .	26
<b>Глава 2. Начальные сведения о методе сеток. Случай нескольких независимых переменных</b> . . . . .	<b>30</b>
§ 2.1. Основные понятия . . . . .	30
§ 2.2. Примеры сеточных аппроксимаций . . . . .	35
§ 2.3. Сходимость и устойчивость . . . . .	40
§ 2.4. Исследование устойчивости . . . . .	43
§ 2.5. Эволюционные задачи с двумя пространственными переменными . . . . .	48
§ 2.6. Стационарные краевые задачи . . . . .	51
<b>Глава 3. Модельное уравнение конвективного переноса</b> . . . . .	<b>57</b>
§ 3.1. Уравнения; краевые задачи; свойства решений . . . . .	57
§ 3.2. Явные схемы . . . . .	62
§ 3.3. Неявные схемы . . . . .	66
§ 3.4. Качественные свойства схем первого порядка точности . . . . .	70
§ 3.5. Регуляризация схем второго порядка точности . . . . .	75
<b>Глава 4. Модельные уравнения диссипации, конвекции и кинетики</b> . . . . .	<b>81</b>
§ 4.1. Уравнения; краевые задачи; свойства решений . . . . .	81
§ 4.2. Основные аппроксимации . . . . .	85
§ 4.3. Малый параметр при старшей производной . . . . .	89
§ 4.4. Околоравновесная кинетика . . . . .	95
§ 4.5. Стабилизирующие свойства схем для уравнения теплопроводности . . . . .	100
<b>Глава 5. Течения в пограничных слоях, струях и каналах</b> . . . . .	<b>104</b>
§ 5.1. Математические модели . . . . .	104
§ 5.2. Разностная схема для системы уравнений стационарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости . . . . .	117
§ 5.3. Основная разностная схема для интегрирования систем уравнений типа уравнений пограничного слоя . . . . .	124

§ 5.4. Разностная схема для решения нестационарных уравнений пограничного слоя . . . . .	132
§ 5.5. Примеры расчетов . . . . .	138
<b>Глава 6. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена на основе уравнений Навье — Стокса . . . . .</b>	<b>165</b>
§ 6.1. Математические модели однородной изотермической вязкой жидкости . . . . .	165
§ 6.2. Разностные схемы для уравнений Навье — Стокса. Предварительное рассмотрение . . . . .	174
§ 6.3. Сеточные аппроксимации уравнения для вихря . . . . .	181
§ 6.4. Решение уравнения для функции тока . . . . .	185
§ 6.5. Аппроксимация граничных условий для вихря . . . . .	190
§ 6.6. Примеры расчетов. Течения изотермической жидкости . . . . .	194
§ 6.7. Математические и численные модели конвективного тепло- и массообмена . . . . .	204
§ 6.8. Примеры расчетов. Задачи конвективного тепло- и массообмена . . . . .	209
<b>Литература . . . . .</b>	<b>225</b>
<b>Дополнение 1. О методах решения уравнений пограничного слоя . . . . .</b>	<b>227</b>
Литература к дополнению 1 . . . . .	241
<b>Дополнение 2. О методах решения уравнений Навье — Стокса . . . . .</b>	<b>247</b>
Литература к дополнению 2 . . . . .	257
<b>Дополнение 3. Пакеты прикладных программ, принципы их построения и использования для решения задач . . . . .</b>	<b>265</b>
Литература к дополнению 3 . . . . .	284

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение процессов тепло- и массообмена всегда играло видную роль в развитии техники и естествознания. В конце прошлого и в начале нынешнего веков исследования в этой области стимулировались главным образом потребностями возникавшей в то время теплоэнергетики. В годы после второй мировой войны развитие авиации, атомной энергетики, ракетно-космической техники выдвинуло новые постановки задач тепло- и массообмена и вместе с тем — новые, более жесткие требования к полноте и надежности данных теории и эксперимента.

За последние десятилетия сфера интенсивного исследования и применения явлений тепло- и массообмена чрезвычайно расширилась. Она включает как ведущие направления техники (химическая технология, металлургия, строительное дело, нефтеразработка, машиностроение, агротехника и т. д.), так и основные естественные науки (биология, геология, физика атмосферы и океана и др.). Теоретическое исследование процессов тепло- и массообмена в настоящее время в значительной степени базируется на их численном моделировании с использованием ЭВМ. Это стало возможным благодаря значительному прогрессу в развитии вычислительных методов решения задач для уравнений в частных производных и увеличению мощности современных вычислительных машин. За последние 20 лет в Советском Союзе достигнуты значительные успехи в развитии численных методов теории тепло- и массообмена, накоплен большой опыт решения практически важных задач. В ведущих центрах прикладной и вычислительной математики разработаны алгоритмы и комплексы программ, позволяющие вести расчеты процессов тепло- и массопереноса в широком диапазоне условий (пограничные слои и струи, внешние и внутренние вязкие течения жидкостей и газов, термоконвективные течения, фильтрация в пористых средах и т. п.). Эти результаты в настоящее время освещены лишь в журнальных статьях и малотиражных изданиях.

Нужно особо отметить еще следующие обстоятельства. Численное моделирование процессов теплообмена в настоящее время приобретает все более значительную роль в связи с тем, что для современной науки и техники необходимы данные о таких процессах, экспериментальное изучение которых в лабораторных или натуральных условиях очень сложно и дорого, а в некоторых случаях просто невозможно. Численное моделирование процессов теплообмена все успешнее входит в практику работы различных научно-исследовательских, проектно-конструкторских и производственных учреждений. Большинство таких учреждений оснащено в настоящее время достаточно высокопроизводительной вычислительной техникой. В связи с этим особое значение имеет подготовка специалистов, способных на современном уровне ставить и решать на ЭВМ прикладные задачи тепло- и массообмена. Подготовка специалистов такого профиля в вузах страны требует создания соответствующих учебных пособий.

Предлагаемая книга должна служить этим целям. Она предназначена прежде всего студентам и аспирантам университетов и технических вузов, инженерно-техническим работникам в области авиационной, ракетной и космической техники, энергомашиностроения, химической технологии. Вместе с тем авторы полагают, что некоторые разделы книги могут представить интерес и для специалистов в области вычислительной и прикладной математики.

При подготовке книги использован опыт преподавания численных методов механики жидкостей и газов в Московском государственном университете и Московском физико-техническом институте.

Помимо общей физико-математической подготовки, соответствующей программам университетов, а также вузов по большинству технических специальностей, для чтения книги требуются минимальные сведения о простейших вычислительных методах и программировании для ЭВМ. Эти сведения в настоящее время также сообщаются студентам естественных факультетов университетов и большинства технических вузов.

Какое-либо предварительное знакомство с методом сеток, составляющим основной аппарат численного моделирования процессов тепло- и массообмена, не предполагается. Необходимые сведения о методе сеток, начиная с простейших применений метода сеток для функций одного переменного (интерполяция, численное интегрирование и

дифференцирование, численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений), даны в первых двух главах книги в объеме, достаточном для активного овладения большей частью методов, излагаемых в книге. Частичное исключение в этом отношении составляет последняя глава, где некоторые более сложные технические детали излагаются описательно, со ссылками на другие источники (иногда не предназначенные для предполагаемого круга читателей). Эти подробности могут быть восприняты читателем на «рецептурном» уровне.

Большое разнообразие численных методик, применяемых в настоящее время для исследования процессов тепло- и массообмена, обусловлено не только существом решаемых задач, но и значительными различиями в уровне математической подготовки разработчиков этих методик и доступных им технических средств, а также историческими традициями различных научных школ. По мнению авторов, в одном учебном пособии невозможно отразить даже основные направления этой интенсивно развивающейся отрасли прикладной математики. В данной книге главное внимание уделено тем методам, которые развивались при непосредственном участии авторов на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета и в Институте проблем механики АН СССР. Эти методы использовались в ряде прикладных научно-исследовательских организаций на протяжении длительного времени. Некоторые другие подходы к численному моделированию процессов тепло- и массообмена освещены в обзорном порядке в дополнениях к книге. Здесь же кратко описаны комплексы программ, созданных для численного моделирования процессов тепло- и массообмена на основе уравнений пограничного слоя и на основе уравнений Навье — Стокса.

Главы 1—4 написаны Л. А. Чудовым, глава 5 и дополнение 1 — В. М. Пасконовым, глава 6 и дополнение 2 — В. И. Полежаевым; дополнение 3 написано В. М. Пасконовым и В. И. Полежаевым совместно.

Работы по созданию описанных в этой книге численных методов для решения задач тепло- и массообмена были предприняты более 20 лет назад в МГУ по инициативе академика Г. И. Петрова, которому авторы глубоко благодарны за многочисленные ценные советы и, в особенности, за указание актуальных областей для приложения численных методов.



Весьма полезным для авторов было участие в семинарах и научных школах, руководимых академиками А. А. Самарским и Н. Н. Яненко. Академикам В. С. Авдеевскому, О. М. Белоцерковскому, А. Ю. Ишлинскому и А. Н. Тихонову авторы признательны за постоянное внимание и поддержку в их научно-исследовательской и педагогической работе.

Авторы глубоко благодарны своим сотрудникам и ученикам, принимавшим участие в разработке методов, изложенных в предлагаемой книге.

Авторы пользуются случаем также выразить свою признательность У. Т. Пирумову и Г. С. Рослякову, а также Т. Н. Галишниковой, чьи замечания в немалой степени способствовали улучшению этой книги.

*В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов*

## ВВЕДЕНИЕ

1. Математической моделью теплообмена и диффузии в случае неподвижной однородной среды является линейное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами. Относительная простота этой модели позволила получить большое количество аналитических решений, охватывающих широкий круг типовых задач. Этот этап развития теории тепло- и массообмена отражен в известных монографиях, а также в распространенных учебных пособиях.

С развитием вычислительной техники появилась возможность применять для решения задач о теплообмене и диффузии в неподвижных однородных средах не только аналитические, но и численные методы. Отметим в этой связи, что фактическое вычисление аналитических решений с помощью ЭВМ иногда требует составления весьма сложных программ, реализация которых на ЭВМ может вызывать определенные технические трудности (например, вычисление различных специальных функций). Поэтому «прямое» применение численных методов в некоторых случаях может быть более целесообразным, чем аналитический подход.

Методы численного решения задач теплопроводности и диффузии в неподвижных средах (включая и случай переменных свойств среды) в настоящее время хорошо разработаны и довольно широко применяются; они освещены в ряде учебных пособий. Эти методы рассмотрены ниже лишь на модельном уровне; вопросы, связанные с их применением в «реальных» задачах теплопроводности и диффузии, не затрагиваются. Эти же численные методы могут быть применены в тех часто встречающихся случаях, когда тепло- и массообмен не оказывает влияния на движение жидкой и газообразной сред, а само движение среды является известным.

2. В соответствии с отмеченными в Предисловии направлениями развития научно-технических применений процессов тепло- и массообмена основное внимание в этой книге уделено численным методам, позволяющим рассчитывать взаимодействующие процессы движения, теплопередачи и диффузии в жидкой или газообразной среде.

Теоретическое исследование таких явлений базируется на общепринятых моделях механики сплошных сред и, в частности, на уравнениях Навье — Стокса, установленных еще в прошлом веке и хорошо проверенных в многочисленных экспериментах.

До сравнительно недавнего времени казавшиеся непреодолимыми математические трудности препятствовали сколько-нибудь общему теоретическому исследованию явлений тепло- и массообмена на основе уравнений Навье — Стокса и заставляли ограничиваться важными, но все же весьма частными случаями автомоделных течений в пограничных слоях, каналах, трубах и струях. Существенные сдвиги в этой области связаны с появлением ЭВМ и развитием численных методов решения уравнений пограничного слоя (и близких к ним), а также уравнений Навье — Стокса.

3. Современные вычислительные методы и современные вычислительные машины позволяют уже сейчас выполнять детальные параметрические исследования математических моделей весьма сложных физических процессов, или, как часто говорят, проводить так называемый вычислительный эксперимент. Вычислительный эксперимент в его наиболее развитой форме складывается из следующих этапов: 1) выбор физической модели исследуемого явления; 2) выбор математической модели, в той или иной степени адекватной физической модели; 3) выбор или разработка численного метода, реализующего выбранную математическую модель; 4) создание соответствующей программы для ЭВМ; 5) проведение многовариантных расчетов и обработка их результатов; 6) сравнение результатов с данными «физического» (лабораторного или натурального) эксперимента и другими теоретическими исследованиями. В дальнейшем проводится уточнение физической (или математической) модели исследуемого процесса, усовершенствование численного метода и программы, и соответствующие этапы вычислительного эксперимента повторяются вновь. Здесь следует подчеркнуть, что общая концепция вычислительного эксперимента отнюдь не отвергает «физический» эксперимент, а только дополняет его.

4. Переход от математической модели того или иного процесса тепло- и массообмена к численному алгоритму, реализуемому с помощью ЭВМ, в настоящее время чаще всего совершается с помощью метода сеток. Сущность метода сеток вкратце может быть описана следующим образом. В области изменения независимых переменных вводится сетка — дискретная совокупность узловых точек. Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются сеточные функции, значения которых задаются в узловых точках сетки. Дифференциальные уравнения с соответствующими краевыми условиями заменяются приближенными сеточными уравнениями, связывающими значения искомых функций в узлах сетки. Так получается система алгебраических уравнений, которую уже можно тем или иным способом решить с помощью ЭВМ.

Для построения сеточных уравнений, приближающих исходную краевую задачу, развиты различные подходы. На регулярных сетках можно попросту заменить производные приближающими их конечно-разностными выражениями (метод конечных разностей).

В последние годы интенсивно развивается другой вариант метода сеток — так называемый метод конечных элементов. Метод конечных элементов удобно применять на нерегулярных сетках, но реализация метода конечных элементов на ЭВМ для задач тепло- и массообмена пока еще связана со значительными техническими трудностями.

Наряду с методом сеток для дискретизации задач тепло- и массообмена часто используется и так называемый метод функциональных представлений. Согласно этому методу искомые функции представляются в виде конечных разложений по заданным функциям с неизвестными числовыми коэффициентами. Алгебраические уравнения для этих числовых неизвестных получаются различными способами (метод Галеркина, метод Галеркина — Петрова, метод коллокации и др.).

В основном тексте этой книги рассматривается только метод сеток в его простейшей форме, т. е. метод конечных разностей.

5. Начальные сведения о методе сеток даны в первых двух главах книги. Сначала (глава 1) рассматриваются основные применения метода сеток для функций одного переменного: интерполирование, численное интегрирование и численное дифференцирование, численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Читателю, уже знакомому с этим материалом в любом другом изложении, мы все же рекомендуем не пропускать первую главу, так как она написана как своего рода введение в метод сеток и, кроме того, содержит некоторые сведения, часто используемые в дальнейшем.

Вторая глава кратко излагает элементы метода сеток для уравнений с частными производными. На простейших модельных примерах вводятся основные понятия метода сеток (аппроксимация, сходимости, устойчивость). Попутно развивается элементарная техника построения и исследования сеточных аппроксимаций, достаточная для перехода к более сложным, но все же модельным уравнениям глав 3, 4 и «реальным» уравнениям, которые рассматриваются в главах 5, 6.

6. Глава 3 содержит углубленный анализ качественных свойств разностных схем для уравнения, моделирующего конвективный перенос тепла или массы.

Сначала систематически рассматриваются основные схемы первого и второго порядков точности. Затем устанавливается соответствие фундаментальных качественных свойств дифференциального уравнения и схем первого порядка точности. Вводится важное понятие аппроксимационной вязкости, характеризующей сглаживающие свойства схем первого порядка точности.

Далее на простых примерах демонстрируются глубокие различия качественных свойств более точных схем второго порядка и исходного дифференциального уравнения. На гладких решениях схемы второго порядка точности позволяют существенно увеличить шаги сетки и тем самым сократить затраты машинного времени, однако при недостаточной гладкости решения могут получаться физически абсурдные результаты.

Глава заканчивается описанием различных приемов регуляризации, применяемых для подавления «патологических» свойств схем второго порядка точности.

7. В главе 4 вводятся и изучаются сеточные аппроксимации для модельного уравнения, описывающего совместный перенос тепла (массы) конвекцией и теплопроводностью (диффузией). Рассматриваются также эффекты, возникающие при моделировании быстро устанавливающихся (околоравновесных) химических реакций. Основное внимание здесь, как и в главе 3, уделено качественным свойствам схем. Эти свойства проявляются при резком пространственно-временном изменении решения. Важным примером подобных ситуаций служит рассмотренная в

этой главе модельная задача о стационарном тепловом пограничном слое. На этом примере сравниваются возможности различных схем, применяемых в дальнейшем в «реальных» задачах.

8. Глава 5 посвящена методам численного моделирования течений в пограничных слоях, струях и каналах. Теория пограничного слоя — один из важнейших разделов современной гидрогазодинамики. Она нашла широкое распространение и применение для расчета трения и теплопередачи на телах, движущихся в потоке жидкости и газа. Методы теории пограничного слоя используются также для анализа течений в следах за движущимися телами, течений в струях и течений в каналах. В главе 5 сначала формулируются основные математические задачи, которые моделируют указанные течения, затем на примере простейшей системы уравнений теории пограничного слоя — уравнений Прандтля — строится разностная схема и приводится алгоритм расчета. Далее этот метод обобщается и дается описание схемы (получившей название основной) для интегрирования систем уравнений типа пограничного слоя. Решение стационарных задач пограничного слоя разностными методами получило в настоящее время широкое распространение. Методы, описанные в этой главе, оказались легко применимыми к различным задачам этого класса и достаточно эффективными с точки зрения скорости счета и загрузки оперативной памяти ЭВМ, что позволяет применять их на машинах малой и средней мощности.

Основной разностный метод обобщается в этом разделе на нестационарные задачи пограничного слоя. Нестационарные течения в пограничном слое определяются либо нестационарными условиями на стенке (например, вдув, отсос, нагрев, охлаждение), либо изменением по времени условий во внешнем потоке (например, пульсации скорости и температуры).

9. Заключительная глава 6 посвящена вопросам численного моделирования на основе уравнений Навье — Стокса, которые представляют сегодняшний (и в значительной степени завтрашний) день вычислительной гидродинамики. За последние 20 лет интенсивного развития в этой области достигнуты определенные успехи; моделирование на основе уравнений Навье — Стокса стало самостоятельным направлением и завоевало прочное место в механике жидкости и газа. Увеличение быстродействия и памяти ЭВМ приведет, по-видимому, к еще большему прогрессу.

Вместе с тем методические аспекты численного моделирования на основе уравнений Навье — Стокса весьма сложны и мало разработаны. При изучении вопросов устойчивости течений, переходных и турбулентных режимов создаются ситуации, где разнообразные вычислительные факторы тесно переплетаются с «физическим» поведением конечномерных моделей, в связи с чем большую роль играет рассмотрение различных модельных примеров и тестов, тщательная апробация схем, включая в отдельных случаях прямое сопоставление с опытными данными. Методические трудности и разнообразие изучаемых режимов привели к созданию нескольких десятков различных типов разностных схем и их вариантов, в которых начинающему трудно ориентироваться.

При изложении этого раздела в данной книге вначале рассмотрены некоторые вопросы, относящиеся к математическим моделям, и простейшие подходы к построению разностных схем для уравнений Навье — Стокса. Далее избран путь детального описания лишь одного класса разностных схем, систематически применяющихся в вычислительной практике и сравнительно хорошо нами изученных. Этот класс схем, связанный с раздельным решением уравнений для вихря и функции тока, в последние годы существенно усовершенствован и является весьма удобным для определенной совокупности относительно «гладких» задач, хотя и никак не претендует на универсальность. Опыт показывает, что многие подходы к конструированию вычислительных алгоритмов оказываются конкурентоспособными при их надлежащей обработке.

10. В главах 5 и 6 значительное место занимают примеры расчетов. Они служат двум целям: с одной стороны, иллюстрировать качественно, а иногда и количественно, те или иные свойства разностных схем, а с другой стороны, дать читателю наглядное представление о конкретных «реальных» задачах, которые могут быть решены с помощью рассмотренных в книге методов. Некоторые примеры имеют в настоящее время исторический характер (они основаны на расчетах, выполненных на ЭВМ первого или второго поколений); другие подводят читателя к задачам, которые решаются на пределе возможностей современных ЭВМ.

11. Большое разнообразие методов и задач, решаемых на основе уравнений пограничного слоя и уравнений Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости, не могло быть охвачено в главах 5 и 6. В связи с этим авто-

ры сочли необходимым привести в дополнениях 1 и 2 обзоры работ по разностным методам решения уравнений типа пограничного слоя и уравнений Навье — Стокса.

В современной практике изучения процессов тепло- и массообмена наметился переход от решения отдельных частных задач к постановке численного моделирования целых классов задач в широком диапазоне определяющих параметров. Это повлекло за собой создание комплексов или пакетов прикладных программ. Основные принципы создания таких пакетов и применения их к задачам, изложенным в главах 5 и 6, даны в дополнении 3.



## НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДЕ СЕТОК. СЛУЧАЙ ОДНОГО НЕЗАВИСИМОГО ПЕРЕМЕННОГО

### § 1.1. Сеточное представление функций

**1.1.1. Предварительные замечания.** Для полного описания более или менее произвольной функции нужно задать бесконечный набор чисел (коэффициенты разложения в ряд Тейлора, коэффициенты разложения функции в ряд Фурье по синусам и косинусам, значения непрерывной функции во всех рациональных точках и т. п.). Однако при решении задач с помощью ЭВМ имеют дело только с конечными совокупностями чисел, поэтому возникает необходимость приближенно охарактеризовать функцию конечным набором чисел.

Согласно *методу сеток* функции описываются их значениями в конечном числе точек. Поставим в соответствие функции  $f(x)$ , определенной на отрезке  $[a, b]$ , совокупность ее значений в узлах сетки  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$f \sim (f_1, f_2, \dots, f_n); \quad f_k = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1.1)$$

Очевидно, что при отсутствии каких-либо дополнительных сведений о свойствах функции  $f(x)$  информация, заключенная в (1.1.1), никак не определяет поведения этой функции в промежутках между узлами сетки. Мы вскоре увидим, однако, что сеточное представление (1.1.1) становится достаточно информативным при соответствующих априорных предположениях о функции  $f(x)$ .

Функция, рассматриваемая на сетке, называется *сеточной функцией*. Указанным выше способом для всякой функции непрерывного аргумента можно построить соответствующую ей сеточную функцию — ее *сеточное представление*. *Восполнением* сеточной функции называется любая функция непрерывного аргумента, принимающая на сетке те же значения, что и данная сеточная функция.

**1.1.2. Полиномиальная интерполяция.** Один из наиболее употребительных способов для построения *восполнения* сеточных функций приводит к следующей задаче: построить полином  $P_{n-1}(x; f) = P_{n-1}(x; x_1, \dots, x_n; f_1, \dots, f_n)$

степени  $n - 1$ , принимающий в узлах  $x_1, x_2, \dots, x_n$  значения  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Докажем однозначную разрешимость этой задачи.

Рассмотрим сначала частную задачу о построении полинома  $\varphi^{(l)}(x)$  при условиях  $\varphi_k^{(l)} = \delta_{kl}$ , т. е.  $\varphi_l^{(l)} = 1, \varphi_k^{(l)} = 0$  при  $k \neq l$ . Ее решение находится очевидным образом:

$$\varphi^{(l)}(x) = a_l(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{l-1})(x - x_{l+1}) \dots (x - x_n),$$

где  $a_l$  — постоянная, значение которой определяется из условия  $\varphi^{(l)}(x_l) = 1$ . Следовательно,

$$\varphi^{(l)}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{l-1})(x - x_{l+1}) \dots (x - x_n)}{(x_l - x_1)(x_l - x_2) \dots (x_l - x_{l-1})(x_l - x_{l+1}) \dots (x_l - x_n)}.$$

Легко проверить, что решение общей задачи может быть записано в виде

$$P_{n-1}(x; f) = \sum_{l=1}^n \varphi^{(l)}(x) f(x_l) \quad (1.1.2)$$

(интерполяционный полином Лагранжа).

Докажем теперь единственность решения задачи полиномиальной интерполяции. Пусть  $P_{n-1}^{(1)}(x; f)$  и  $P_{n-1}^{(2)}(x; f)$  — какие-либо решения; тогда полином  $Q_{n-1} = P_{n-1}^{(1)} - P_{n-1}^{(2)}$  степени  $n - 1$  обращается в нуль в  $n$  точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; следовательно, он тождественно равен нулю.

Существуют различные представления решения задачи полиномиальной интерполяции. По доказанному выше все они тождественно совпадают, но в разных задачах оказывается удобнее использовать разные представления интерполяционного полинома.

### 1.1.3. Погрешность полиномиальной интерполяции.

Оценим разность  $f(x) - P_{n-1}(x; f)$ , считая функцию  $f(x)$  достаточно гладкой. Для этой цели введем вспомогательную функцию

$$u(x) = f(x) - P_{n-1}(x; f) - k(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad (1.1.3)$$

где  $k$  — постоянная. Выберем значение  $k$  так, чтобы в некоторой точке  $x = \bar{x}$ , не совпадающей ни с одним из узлов интерполяции  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , функция  $u(x)$  обратилась в нуль:  $u(\bar{x}) = 0$ .

Функция  $u(x)$  имеет на  $[a, b]$  по крайней мере  $n + 1$  корней; согласно теореме Ролля ее производная  $u'(x)$  имеет не менее  $n$  корней;  $u''(x)$  имеет не менее  $n - 1$  корней и т. д. Производная  $u^{(n)}(x)$  имеет на  $[a, b]$  корень:

$u^{(n)}(\xi) = 0$ . Дифференцируя  $n$  раз (1.1.3) и учитывая, что  $P_{n-1}$  — полином степени  $n-1$ , исчезающий после  $n$ -кратного дифференцирования, найдем

$$k = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \xi = \xi(\bar{x}).$$

Отсюда для  $x = \bar{x}$  имеем

$$0 = u(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_{n-1}(\bar{x}; f) - \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_n).$$

Так как  $\bar{x}$  — произвольная точка, отличная от узлов сетки, то  $\bar{x}$  можно заменить на  $x$  и записать окончательный результат в виде

$$f(x) - P_{n-1}(x; f) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (1.1.4)$$

Формула (1.1.4) позволяет оценить погрешность полиномиальной интерполяции, если известна оценка для производной  $f^{(n)}(x)$ :  $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ .

**1.1.4. Кусочная интерполяция.** Как видно из (1.1.4), целесообразный выбор порядка интерполяции (т. е. числа узлов  $n$ ) должен основываться на имеющихся сведениях о существовании производных интерполируемой функции и оценках этих производных. Если производные высших порядков не существуют или очень велики, то нельзя ожидать повышения точности от увеличения числа узлов сетки. Кроме того, можно показать, что при высоком порядке интерполяции результат весьма чувствителен к ошибкам данных, т. е.  $f_1, f_2, \dots, f_n$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а также к ошибкам округления. Поэтому в практической работе редко пользуются полиномиальной интерполяцией высокого порядка (обычно  $n \leq 5 \div 7$ ).

При недостаточной гладкости функции  $f(x)$  отрезок  $[a, b]$  разбивают на частичные интервалы и на каждом из них применяют интерполяцию невысокого порядка. Пусть, например, известно только, что  $f(x)$  имеет ограниченную вторую производную  $|f''(x)| \leq M_2$ . В этих условиях представляется целесообразным ограничиться линейной интерполяцией на частичных интервалах. На равномерной сетке с шагом  $h$  погрешность линейной интерполяции, согласно формуле (1.1.4), не превышает величины

$$\frac{1}{2!} M_2 \max_{x_i < x < x_{i+1}} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| = \frac{1}{8} M_2 h^2.$$

Таким образом, процесс кусочно-линейной интерполяции при  $h \rightarrow 0$  сходится со скоростью  $h^2$ , тогда как процесс интерполяции «в целом» может и расходиться.

В приложениях часто требуется, чтобы полиномы, построенные на частичных интервалах, стыковались не просто непрерывно, но и гладко (т. е. требуется непрерывность производных до некоторого порядка). При невысоких требованиях к гладкости стыковки подобные задачи обычно удается решить непосредственно, не обращаясь к аппарату соответствующей математической теории (теория сплайнов).

**1.1.5. Заключительные замечания.** Для приближенного восстановления функции по ее значениям на сетке используют не только полиномы, но и другие системы функций. Так, например, для представления периодических функций целесообразно применять тригонометрическую интерполяцию.

Рационально выбранная интерполяция позволяет во многих случаях существенно сократить объем информации, используемой для описания функций в таблицах или в запоминающих устройствах ЭВМ. Например, иногда достаточно хранить только те значения функций, по которым она может быть восстановлена в пределах требуемой точности с помощью кусочно-линейной или кусочно-квадратичной интерполяции. Для функций, вычисляемых с помощью сложных алгоритмов, применение интерполяции дает и выигрыш во времени.

В следующих параграфах будут рассмотрены другие, более глубокие применения сеточного представления функций. Они основаны на том, что при выполнении каких-либо действий, например дифференцирования или интегрирования, рассматриваемая функция заменяется тем или иным восполнением ее сеточного представления, например, интерполяционным полиномом. Близкие идеи используются также при решении функциональных уравнений, в частности, дифференциальных или интегральных.

## § 1.2. Вычисление интегралов

**1.2.1. Основная идея численного интегрирования.** При вычислении интеграла  $I(a, b; f)$  по интервалу  $(a, b)$  от функции  $f(x)$  пользуются, как правило, кусочно-полиномиальной интерполяцией. Интервал  $(a, b)$  разбивают на несколько частичных интервалов. Интеграл по каждому частичному интервалу вычисляют, заменяя  $f$  приближенно интерполяционным полиномом.

**1.2.2. Квадратурные формулы прямоугольников.** Пусть  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $x_{i+1/2} = x_i + 0,5h$  (см. рис. 1.1). Применим интерполяцию нулевого порядка, т. е. заменим  $f(x)$  на интервале  $(x_i, x_{i+1})$  постоянной. Принимая последовательно в качестве узла интерполяции  $x_i, x_{i+1}, x_{i+1/2}$ , получим три приближенные формулы:

а) формула прямоугольника с левой точкой:

$$I(x_i, x_{i+1}; f) \approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i); \quad (1.2.1)$$

б) формула прямоугольника с правой точкой:

$$I(x_i, x_{i+1}; f) \approx f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i); \quad (1.2.2)$$

в) формула прямоугольника с центральной точкой:

$$I(x_i, x_{i+1}; f) \approx f(x_{i+1/2})(x_{i+1} - x_i). \quad (1.2.3)$$

Оценим погрешность приближенной формулы (1.2.1), предполагая существование и ограниченность первой производной функции  $f(x)$ :  $|f'(x)| \leq M_1$ . Имеем, согласно формуле Лагранжа,

$$f(x) = f(x_i) + f'(\xi)(x - x_i), \quad \xi = \xi(x), \quad x_i < \xi < x,$$

следовательно,

$$|I(x_i, x_{i+1}; f) - f(x_i)(x_{i+1} - x_i)| \leq \frac{1}{2} M_1 h^2.$$

Точно таким же образом оценивается погрешность формулы прямоугольника с правой точкой.

Оценивая погрешность формулы прямоугольника с центральной точкой, будем предполагать, что функция  $f(x)$  имеет ограниченную вторую производную  $|f''(x)| \leq M_2$ . Пользуясь формулой Тейлора, найдем

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_{i+1/2}) + (x - x_{i+1/2}) f'(x_{i+1/2}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (x - x_{i+1/2})^2 f''(\xi), \\ \xi &= \xi(x), \quad x_i < \xi < x_{i+1}; \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} &|I(x_i, x_{i+1}; f) - f(x_{i+1/2})(x_{i+1} - x_i)| \leq \\ &\leq \left| f'(x_{i+1/2}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1/2}) dx \right| + \frac{1}{2} M_2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1/2})^2 dx. \end{aligned}$$

Первое слагаемое справа, очевидно, равно нулю. Вычислив

интеграл во втором слагаемом, найдем

$$|I(x_i, x_{i+1}; f) - f(x_{i+1/2})(x_{i+1} - x_i)| \leq \frac{1}{24} M_2 h^3.$$

Таким образом, формула (1.2.3) на порядок точнее формул (1.2.1), (1.2.2), не отличаясь от них по сложности.

**1.2.3. Квадратурная формула трапеции.** Воспользуемся интерполяцией первого порядка с узлами  $(x_i, x_{i+1})$ , т. е.

заменяем функцию  $f(x)$  на интервале  $(x_i, x_{i+1})$  линейной функцией. (Геометрически это означает замену криволинейной фигуры  $ABCD$  прямолинейной трапецией).  
Имеем

$$I(x_i, x_{i+1}; f) \approx \frac{1}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) (x_{i+1} - x_i). \quad (1.2.4)$$

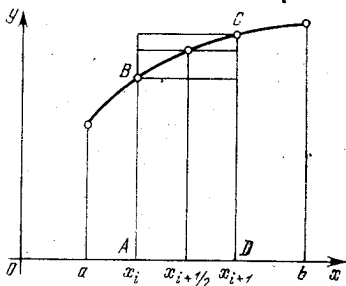


Рис. 1.1.

При оценке погрешности формулы (1.2.4) будем предполагать существование и ограниченность второй производной функции  $f(x)$ :  $|f''(x)| \leq M_2$ . Согласно (1.1.4) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x; f) dx \right| = \\ & = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2} f''(\xi(x)) (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} M_2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x_{i+1} - x) dx = \frac{1}{12} M_2 h^3. \end{aligned}$$

Порядок погрешности для формулы трапеции (1.2.4) такой же, как и для формулы прямоугольника с центральной точкой (1.2.3), однако коэффициент при  $M_2 h^3$  вдвое больше.

**1.2.4. Квадратурная формула Симпсона.** Пусть частичная область состоит из двух интервалов длины  $h$ :  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $x_{i+2} = x_i + 2h$ . На интервале  $(x_i, x_{i+2})$  заменим функцию  $f(x)$  квадратичной функцией — интерполяционным полиномом с узлами интерполяции  $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ . Легко видеть, что при этом получается следующая

формула:

$$I(x_i, x_{i+2}; f) \approx \frac{h}{3} [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]. \quad (1.2.5)$$

Можно показать, что для функций, имеющих ограниченную четвертую производную, погрешность формулы (1.2.5) есть величина порядка  $h^5$ ; при грубой оценке интеграла от остаточного члена квадратичной интерполяции получается величина порядка  $h^4$ .

**1.2.5. Погрешность в малом и погрешность в целом.** Пусть частичные интервалы имеют длину порядка  $h$  и погрешность вычисления интеграла для частичного интервала  $e = O(h^{k+1})$ , т. е. погрешность в малом имеет порядок  $k+1$ . Так как число частичных интервалов порядка  $1/h$ , то погрешность вычисления интеграла по всему интервалу  $E = O(h^k)$ , т. е. погрешность в целом имеет порядок  $k$ .

Для формул прямоугольника с левой и правой точками  $E = O(h)$  — точность первого порядка; для формул трапеции и прямоугольника с центральной точкой  $E = O(h^2)$  — точность второго порядка; для формулы Симпсона  $E = O(h^4)$  — точность четвертого порядка.

**1.2.6. Устойчивость методов численного интегрирования.** Суммируя выражения, соответствующие частичным интервалам, для каждого из рассмотренных выше методов получим формулу вида

$$I(a, b; f) \approx \bar{I}(a, b; f) = \sum_{i=1}^n c_i f_i,$$

$$c_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i = b - a.$$

Последнее равенство вытекает из того, что для  $f \equiv 1$  приближенные формулы (1.2.1) — (1.2.5) являются точными.

Численное интегрирование по формулам (1.2.1) — (1.2.5) устойчиво относительно возмущений функции  $f(x)$ . Пусть возмущение  $\delta f$  по абсолютной величине не превосходит  $\delta_0$ :  $|\delta f| \leq \delta_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} |\delta \bar{I}(a, b; f)| &= |\bar{I}(a, b; \delta f)| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n c_i (\delta f)_i \right| \leq \sum_{i=1}^n c_i \delta_0 = (b - a) \delta_0. \end{aligned}$$

Таким образом, малое возмущение интегрируемой функции вызывает малое возмущение результата численного интегрирования; соотношение между величинами  $\delta f$  и  $\delta I$  не ухудшается с ростом  $n$ .

## § 1.3. Вычисление производных

**1.3.1. Постановка задачи; основные способы ее решения.** Пусть известны значения функции  $f(x)$  в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , близких к точке  $x$  (точка  $x$  может совпадать с одной из точек  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Требуется найти приближенное значение производной  $f'(x)$ .

Один из способов решения этой задачи основан на замене функции  $f(x)$  ее интерполяционным полиномом:

$$\frac{d}{dx} f \approx \frac{d}{dx} P_{n-1}(x; f).$$

Таким же образом можно вычислять и производные высших порядков.

Способ неопределенных коэффициентов опирается на формулу Тейлора. Принимая в качестве исходной точку  $x$ , записывают для каждой точки  $x_k$  разложение

$$f_k = f(x_k) = f(x) + (x_k - x) f'(x) + \frac{1}{2!} (x_k - x)^2 f''(x) + \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее составляют линейную комбинацию

$$\bar{f}' = \sum_{k=1}^n a_k f_k.$$

Коэффициенты  $a_k$  подбирают таким образом, чтобы разность  $\bar{f}' - f'$  стремилась к нулю при стягивании к  $x$  узлов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**1.3.2. Простые аппроксимации первой производной.** Пусть  $x_2 = x_1 + h$ . Заменяя  $f(x)$  ее линейной интерполяцией, получим

$$f'_h(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1.3.1)$$

Для того чтобы оценить погрешность, применим формулу Тейлора

$$f(x_1) = f(x) + (x_1 - x) f'(x) + \frac{1}{2} (x_1 - x)^2 f''(x) + O(h^3),$$

$$f(x_2) = f(x) + (x_2 - x) f'(x) + \frac{1}{2} (x_2 - x)^2 f''(x) + O(h^3).$$

(Мы считаем при этом, что точка  $x$  удалена от точек  $x_1, x_2$



на расстояние порядка  $h$ .) Отсюда

$$\begin{aligned} f'_h(x) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \\ &= f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) \frac{(x_2 - x)^2 - (x_1 - x)^2}{x_2 - x_1} + O(h^2) = \\ &= f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) (x_1 + x_2 - 2x) + O(h^2). \end{aligned}$$

Следовательно, для  $x \neq 0,5 (x_1 + x_2)$  погрешность формулы (1.3.1) есть  $O(h)$ ; для центральной точки  $x = 0,5 (x_1 + x_2)$  имеем  $|f'(x) - f'_h(x)| = O(h^2)$ .

Несколько изменив обозначения, запишем три часто употребляемые формулы:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (1.3.2)$$

— односторонняя аппроксимация вперед;

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (1.3.3)$$

— односторонняя аппроксимация назад;

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (1.3.4)$$

— симметричная или центрально-разностная аппроксимация.

Пользуясь способом неопределенных коэффициентов, получим еще трехточечную одностороннюю аппроксимацию, имеющую второй порядок точности. Имеем

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + O(h^3), \\ f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + O(h^3). \end{aligned}$$

После вычитания из второй строки учетверенной первой найдем

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2). \quad (1.3.5)$$

**1.3.3. Симметричная аппроксимация второй производной.** Пусть  $x_1 = x - h$ ,  $x_2 = x$ ,  $x_3 = x + h$ . Имеем

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4),$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4).$$

Сложив эти равенства и выполнив другие очевидные преобразования, получим

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2). \quad (1.3.6)$$

**1.3.4. Неустойчивость формул численного дифференцирования.** Пусть сетка равномерная:  $x_k = kh$ ;  $f_k = f(x_k)$ . Предположим, что  $f_k = \varphi_k + \delta_k$ , где  $\varphi_k$  — «правильная часть», а  $\delta_k$  — «возмущение». Пользуясь односторонней аппроксимацией вперед и обозначая

$$\bar{\varphi}'_k = (\varphi_{k+1} - \varphi_k)/h, \quad \bar{\delta}'_k = (\delta_{k+1} - \delta_k)/h, \quad \bar{f}'_k = (f_{k+1} - f_k)/h,$$

получим

$$\bar{f}'_k = \bar{\varphi}'_k + \bar{\delta}'_k = \varphi'(x_k) + \frac{h}{2} \varphi''(x_k) + \bar{\delta}'_k + O(h^2).$$

Пусть, например,  $\delta_k = \delta_0(-1)^k$  (модель случайного возмущения, имеющего колебательный характер). Тогда

$$\bar{\delta}'_k = (-1)^k 2\delta_0/h. \quad (1.3.7)$$

Из (1.3.7) следует, что с уменьшением шага сетки  $h$  влияние «помехи» растет. При чрезмерно малом  $h$  эффект возмущения может стать определяющим.

С другой стороны, при недостаточно малом шаге сетки  $h$  может быть слишком велика ошибка аппроксимации для «правильной части», равная по порядку величины  $0,5M_2h$ , где  $M_2$  — оценка для  $|f''|$ . При оптимальном выборе  $h$  эффекты «помехи» и ошибка аппроксимации должны быть равны по порядку величины. Имеем

$$2\delta_0/h \sim 0,5M_2h, \quad h \sim 2 \sqrt{\delta_0/M_2}, \quad |\bar{\delta}'_k| \sim \sqrt{M_2} \sqrt{\delta_0}. \quad (1.3.8)$$

Последнее из соотношений (1.3.8) характеризует предельную точность, которой можно достичь рациональным выбором  $h$  при заданном уровне «помех».

**1.3.5. Сглаживание.** Для уменьшения действия возмущений при численном дифференцировании пользуются различными приемами регуляризации. В качестве простого примера рассмотрим трехточечное сглаживание

$$\bar{f} = R_\alpha f, \quad \bar{f}_n = (1 - 2\alpha)f_n + \alpha f_{n-1} + \alpha f_{n+1},$$

$$\alpha > 0.$$

Посмотрим, как действует оператор сглаживания  $R_\alpha$  на модельное возмущение  $\delta_n = \delta_0(-1)^n$ :

$$\bar{\delta} = R_\alpha \delta, \quad \bar{\delta}_n = (1 - 4\alpha)\delta_n.$$

Таким образом, сглаживание (при  $\alpha < 0,5$ ) уменьшает

амплитуду возмущения. С другой стороны, сглаживание влияет также на «правильную часть», т. е. на функцию  $\varphi(x)$ :

$$\psi \equiv R_\alpha \varphi,$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_n &= (1 - 2\alpha) \varphi_n + \alpha \varphi_{n-1} + \alpha \varphi_{n+1} = \\ &= \varphi_n + \alpha (\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}) \cong \varphi_n + \alpha h^2 \varphi_n'' \end{aligned}$$

Параметр сглаживания  $\alpha$  нужно выбрать так, чтобы не исказить существенно «правильную часть»  $\varphi(x)$  и вместе с тем подавить возмущение  $\delta(x)$ . В практике такие задачи обычно решаются с помощью опытных расчетов, в которых варьируются значения параметра регуляризации.

## § 1.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

**1.4.1. Предварительные замечания.** Из функциональных уравнений (т. е. уравнений, в которых искомая величина есть функция) в практике чаще всего встречаются обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши для уравнения первого порядка

$$y' - f(x, y) = 0 \quad (1.4.1)$$

заключается в отыскании решения уравнения (1.4.1), удовлетворяющего начальному условию

$$y(x_0) = y_0, \quad (1.4.2)$$

где  $x_0, y_0$  — заданные величины.

Согласно методу сеток уравнения (1.4.1) заменяют сеточным уравнением, связывающим значения искомой функции в узлах сетки, принадлежащей области определения искомой функции. При построении сеточных уравнений, приближающих (1.4.1), естественно пользоваться формулами численного дифференцирования. В дальнейшем, как правило, рассматривается равномерная сетка

$$x_n = x_0 + nh; \quad y(x_n) = y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.3)$$

Сеточное уравнение, приближающее обыкновенное дифференциальное уравнение, дополненное соответствующими граничными условиями, называется схемой.

Ошибкой аппроксимации схемы называют сеточную функцию, возникающую при подстановке в сеточное уравнение схемы и граничные условия точного решения соответствующей задачи для дифференциального уравнения.

**1.4.2. Простейшие схемы для задачи Коши (1.4.1), (1.4.2).** На сетке (1.4.3) заменим  $y'(x_n)$  согласно формуле (1.3.2). Значение  $f$  отнесем к точке  $(x_n, y_n)$ . Получим схему

$$\frac{y_{n+1}^{(h)} - y_n^{(h)}}{h} - f(x_n, y_n^{(h)}) = 0. \quad (1.4.4)$$

Верхний индекс указывает, что рассматриваются значения приближенного решения, отвечающего сетке с шагом  $h$ . Отнесем теперь  $f$  к  $x_{n+1}, y_{n+1}$ ; получим схему

$$\frac{y_{n+1}^{(h)} - y_n^{(h)}}{h} - f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(h)}) = 0. \quad (1.4.5)$$

Оценим ошибку аппроксимации для (1.4.4), пользуясь формулой Тейлора с начальной точкой  $x_n$  и учитывая исходное уравнение (1.4.1). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - f(x_n, y_n) &= y'(x_n) + \frac{h}{2} y''(x_n) + O(h^2) - \\ &- f(x_n, y_n) = \frac{h}{2} y''(x_n) + O(h^2) = O(h). \end{aligned}$$

Итак, ошибка аппроксимации схемы (1.4.4) имеет первый порядок относительно  $h$ ; такой же результат получаем для схемы (1.4.5). Следовательно, схемы (1.4.4) и (1.4.5) первого порядка точности.

Как было показано в п. 1.3.2, разностное отношение  $(y_{n+1} - y_n)/h$  аппроксимирует с погрешностью  $O(h^2)$  значение  $y'$  в точке  $x_{n+1/2} = x_n + 0,5h$ . Пользуясь линейной интерполяцией, вносящей ошибку второго порядка по  $h$ , отнесем к этой же точке  $f(x, y)$ . Получим схему второго порядка точности

$$\frac{y_{n+1}^{(h)} - y_n^{(h)}}{h} - 0,5 [f(x_n, y_n^{(h)}) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(h)})] = 0. \quad (1.4.6)$$

Реализация схемы (1.4.4) не вызывает каких-либо вопросов:  $y_{n+1}^{(h)}$  непосредственно вычисляется по  $y_n^{(h)}$  и  $f(x_n, y_n^{(h)})$ . Реализация схем (1.4.5), (1.4.6) сопряжена с некоторыми техническими трудностями, поскольку соотношения (1.4.5), (1.4.6) представляют в общем случае нелинейные уравнения относительно  $y_{n+1}^{(h)}$ ; эти уравнения решают с помощью того или иного приближенного метода (простые итерации, метод Ньютона и т. п.).

Приведем теперь пример схемы второго порядка точности, не требующей решения нелинейных (в общем случае)

уравнений. Переход от  $n$  к  $n + 1$  выполняется за два шага. Сначала по схеме типа (1.4.4) вычисляется промежуточное значение  $y_{n+1/2}^{(h)}$

$$\frac{y_{n+1/2}^{(h)} - y_n^{(h)}}{0,5h} - f(x_n, y_n^{(h)}) = 0. \quad (1.4.7)$$

Значение  $y_{n+1}^{(h)}$  находится по формуле

$$\frac{y_{n+1}^{(h)} - y_n^{(h)}}{h} - f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}^{(h)}) = 0. \quad (1.4.8)$$

Легко проверить, что ошибка аппроксимации для схемы (1.4.7), (1.4.8) есть  $O(h^2)$ .

**1.4.3. Двухточечные многошаговые схемы повышенной точности.** Схемы, в которых для вычисления приближенного значения  $y_{n+1}^{(h)}$  искомой функции в следующем узле используется только приближенное значение  $y_n^{(h)}$  в предыдущем узле, называются *двухточечными*. Если при этом для вычисления  $y_{n+1}^{(h)}$  находятся предварительно промежуточные значения, то схема называется *многошаговой*. Например, схема (1.4.7), (1.4.8) является двухшаговой. В качестве примера многошаговой схемы приведем еще схему Рунге — Кутты четвертого порядка точности (индекс  $h$  опущен)

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) = 0,$$

$$k_0 = f(x_n, y_n), \quad k_1 = f(x_n + 0,5h, y_n + 0,5hk_0), \quad (1.4.9)$$

$$k_2 = f(x_n + 0,5h, y_n + 0,5hk_1), \quad k_3 = f(x_{n+1}, y_n + hk_2).$$

Имеется обширный класс формул вида (1.4.9). Отметим, что методы Рунге — Кутты реализованы в стандартных подпрограммах и в настоящее время часто употребляются.

**1.4.4. Многоточечные формулы повышенной точности.** Повышение точности может быть достигнуто также привлечением большего числа узлов. Примером могут служить формулы метода Адамса:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \sum_{k=0}^r \alpha_k f(x_{n+1-k}, y_{n+1-k}) = 0; \quad (1.4.10)$$

здесь  $\alpha_k$  — некоторые постоянные.

По сравнению с методом Рунге — Кутта метод Адамса требует меньшего количества вычислительной работы (значения  $f(x, y)$  используются многократно!), чем и объяснялось широкое применение метода Адамса в «домашние» времена. Недостатком метода Адамса является нестандартность алгоритма для расчета первых «опорных» значений  $y_1, y_2, \dots, y_r$  и осложнения, возникающие при изменении шага сетки.

**1.4.5. Уравнения высших порядков. Системы уравнений.** Все вышеизложенное без каких-либо изменений переносится на случай системы уравнений первого порядка, разрешенной относительно производных (система уравнений записывается в виде (1.4.1), но теперь  $y(x), f(x, y)$  — векторные функции). Уравнения и системы уравнений с высшими производными приводятся к системам первого порядка. Имеются специальные методы для решения уравнений высших порядков, например уравнений второго порядка.

**\* 1.4.6\*). Погрешность на шаге и погрешность в целом.** Вернемся к задаче Коши для уравнения (1.4.1); при этом ограничимся двухточечными схемами. Пусть  $x_n$  — один из узлов сетки,  $y_n^{(h)}$  — соответствующее значение приближенного решения. Обозначим через  $y(x, x_n, y_n^{(h)})$  точное решение уравнения (1.4.1), принимающее при  $x = x_n$  значение  $y_n^{(h)}$ . Разность  $y(x_{n+1}, x_n, y_n^{(h)}) - y_{n+1}$  называется ошибкой на шаге. Легко проверить, что для схем (1.4.4) — (1.4.8) ошибка на шаге множителем  $h$  отличается от ошибки аппроксимации.

Для ошибки в целом, т. е. для разности точного и приближенного решений на всем интервале, можно доказать следующее порядковое соотношение:

$$|y - y^h| \sim \omega(h)/h,$$

где  $\omega(h)$  — характерная величина ошибки на шаге. \*

---

\*) Здесь и в дальнейшем звездочками \* выделен материал, который можно пропустить при первом чтении.

## НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДЕ СЕТОК. СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

### § 2.1. Основные понятия

**2.1.1. Модельные уравнения и краевые задачи.** В этой главе рассматриваются простейшие уравнения математической физики, в частности такие:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1.3)$$

Уравнения (2.1.1)–(2.1.3) математически моделируют соответственно конвективный одномерный перенос тепла, нестационарное одномерное распространение тепла и стационарное двумерное распределение тепла.

Уравнения (2.1.1), (2.1.2) являются *эволюционными*, уравнение (2.1.3) — *неэволюционным*. Для эволюционных уравнений характерно наличие выделенного независимого переменного, играющего роль времени, а также корректность задач с начальными условиями (существование и единственность решения, непрерывная зависимость от данных задачи). Всюду в дальнейшем в этой главе, кроме § 2.6, имеются в виду эволюционные уравнения.

В математической физике при рассмотрении уравнений с частными производными обычно требуется определить решение в какой-то области  $G$  по условиям, заданным на некоторых частях границы этой области (*краевая задача*). Простым примером является *задача Коши* для уравнения (2.1.1): найти решение  $u(t, x)$  в области  $\{-\infty < x < +\infty, t \geq 0\}$ , удовлетворяющее *начальному условию*  $u(0, x) = \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  — заданная функция. Другой пример — *первая краевая задача* для модельного уравнения теплопроводности (2.1.2). Здесь  $G$  есть прямоуголь-

ник  $\{0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T\}$ ; начальное условие задается в виде  $u(0, x) = \varphi(x)$ , граничные условия — в виде  $u(t, 0) = f_0(t)$ ,  $u(t, X) = f_1(t)$ , где  $\varphi(x)$ ,  $f_0(t)$ ,  $f_1(t)$  — известные функции.

**2.1.2. Сетка. Сеточные функции.** *Сеткой* называется дискретная совокупность точек на плоскости  $(t, x)$  — *узлов сетки*. Важным частным случаем является *равномерная прямоугольная сетка*  $(t^n, x_m)$ ,  $t^n = t_0 + n\Delta t$ ,  $x_m = x_0 + m\Delta x$ , где  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  — положительные числа, называемые *шагами сетки* по  $t$  и  $x$  соответственно;  $m, n$  — целые числа (рис. 2.1). Совокупность узлов, соответствующих какому-либо фиксированному значению  $n$ , называется *слоем*. Для краткости часто обозначают  $\Delta x = h$ ,  $\Delta t = \tau$ . Функция, заданная в узлах сетки, называется *сеточной функцией*. \* Сеточные функции часто рассматривают как элементы векторного пространства, которое может быть конечномерным или бесконечномерным. При этом пользуются понятием *нормы*.

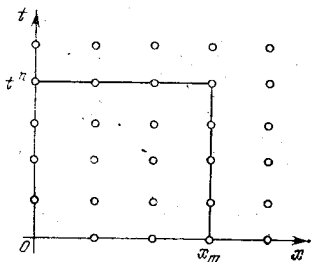


Рис. 2.1.

Простым примером нормы сеточной функции является верхняя грань ее модуля:  $\|u\| = \sup |u|$ . \*

**2.1.3. Идея метода сеток.** Согласно методу сеток дифференциальное уравнение и краевые условия заменяются сеточными уравнениями, связывающими значения искомой функции в узлах сетки (*сеточная краевая задача* или *схема*). Построим сеточное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (2.1.1). Воспользуемся равномерной прямоугольной сеткой  $t^n = n\tau$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $x_m = mh$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Заменяем производную  $du/dt$  в точке  $(n\tau, mh)$  разностным отношением «вперед»  $(u_m^{n+1} - u_m^n)/\tau$ , а производную  $du/dx$  в той же точке — разностным отношением «назад»  $(u_m^n - u_{m-1}^n)/h$ . Получим

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0. \quad (2.1.4)$$

Начальное условие  $u(0, x) = \varphi(x)$ , участвующее в задаче Коши для уравнения (2.1.1), порождает *сеточное начальное условие*

$$u_m^0 = \varphi(mh). \quad (2.1.5)$$



Совокупность узлов сетки, используемых при построении сеточного уравнения, называется *шаблоном*. Для уравнения (2.1.4) шаблон показан на рис. 2.2. Уравнения (2.1.4), (2.1.5) вместе с описанием сетки составляют схему, приближающую задачу Коши для уравнения (2.1.1). \* Приведем еще один, более сложный пример. Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(t, x) = 0 \quad (2.1.6)$$

рассматривается краевая задача с дополнительными условиями

$$0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1.7)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} + q_1(t) = 0, \quad (2.1.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=X} + q_2(t) = 0. \quad (2.1.10)$$

В области (2.1.7) введем сетку

$$x_m = mh, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad h = X/M; \quad (2.1.11)$$

$$t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad \tau = T/N. \quad (2.1.12)$$

Уравнение (2.1.6) заменим сеточным на четырехточечном

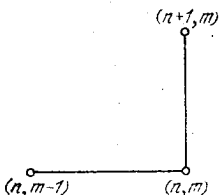


Рис. 2.2.

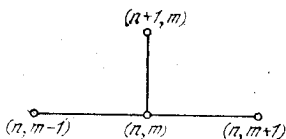


Рис. 2.3.

шаблоне  $(n\tau, (m-1)h)$ ,  $(n\tau, mh)$ ,  $(n\tau, (m+1)h)$ ,  $((n+1)\tau, mh)$  (рис. 2.3):

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - f_m^n = 0. \quad (2.1.13)$$

Начальное условие (2.1.8) заменяется очевидным образом:

$$u_m^0 = \varphi(mh). \quad (2.1.14)$$

Граничные условия (2.1.9), (2.1.10) интерпретируем так:

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{h} + q_1(n\tau) = 0, \quad (2.1.15)$$

$$\frac{u_M^n - u_{M-1}^n}{h} + q_2(n\tau) = 0. \quad (2.1.16)$$

В данном случае схему, соответствующую задаче (2.1.6)—(2.1.10), составляют сеточные соотношения (2.1.13)—(2.1.16). \*

**2.1.4. Ошибка аппроксимации схемы на решении.** Близость схемы и исходной краевой задачи проще всего оценивается по величине *невязки*, получающейся при подстановке точного решения в уравнения и граничные условия сеточной краевой задачи.

Обозначим

$$R(u) = 0 \quad (2.1.17)$$

всю совокупность уравнений, входящих в краевую задачу, т. е. основное дифференциальное уравнение и краевые (начальные и граничные) условия. Запишем аналогично сеточную краевую задачу

$$R_h(u_h) = 0. \quad (2.1.18)$$

Для сокращения записей мы предполагаем здесь и в дальнейшем, что  $\tau = \tau(h)$ ,  $\tau \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , так что сетка определяется одним параметром  $h$ .

*Ошибкой аппроксимации схемы* (2.1.18) на точном решении задачи (2.1.17) называется сеточная функция  $\alpha_h = R_h(u)$ . Схема называется *аппроксимирующей на точном решении*, если при  $h \rightarrow 0$  ошибка аппроксимации стремится к нулю:  $\alpha_h \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Если  $\alpha_h = O(h^p)$ , то говорят, что *порядок аппроксимации равен  $p$* .

Рассмотрим схему (2.1.4), (2.1.5). Предположим, что точное решение  $u = u(t, x)$  имеет непрерывные равномерно ограниченные производные второго порядка. Пусть, кроме того,  $\tau = kh$ ,  $k = \text{const}$ . Пользуясь формулой Тейлора, получим

$$(\alpha_h)_m^n = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_* - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)**$$

где \* и \*\* означают, что вторые производные соответствуют некоторым точкам, близким к точке  $(n\tau, mh)$ . Так как начальное условие переносится в схему без ошибки, то  $\alpha_h = O(h)$ , порядок аппроксимации первый.

\* Рассмотрим также схему (2.1.13)—(2.1.16). Подставляя точное решение в левую часть (2.1.13) и применяя формулу Тейлора с начальной точкой  $t = n\tau$ ,  $x = mh$ , получим невязку  $\frac{1}{2}\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{12}h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ . При  $\tau = rh^2$ ,  $r = \text{const}$ , невязка уравнения (2.1.13) есть  $O(h^2)$ . Невязка начального условия (2.1.14) равна нулю. Невязки граничных условий (2.1.15), (2.1.16), как легко видеть, являются величинами первого порядка относительно  $h$ . Таким образом, ошибка аппроксимации для (2.1.13)—(2.1.16) есть  $O(h)$ , т. е. имеем аппроксимацию первого порядка.

Заменяв приближенные граничные условия (2.1.15), (2.1.16) более точными (см. (1.3.5)), получим схему, имеющую второй порядок аппроксимации:

$$\frac{-u_2^n + 4u_1^n - 3u_0^n}{2h} + q_1(n\tau) = 0,$$

$$\frac{u_{M-2}^n - 4u_{M-1}^n + 3u_M^n}{2h} + q_2(n\tau) = 0. \quad *$$

**2.1.5. Ошибка аппроксимации на классе функций.** Понятие ошибки аппроксимации вводят и другим способом. Полагают  $\alpha'_h = R_h(u) - R(u)$ , где  $u$  — произвольная достаточно гладкая функция из некоторого функционального класса  $U$ . Легко видеть, что в этом смысле схема (2.1.4), (2.1.5) также имеет первый порядок аппроксимации. Покажем на примере того же уравнения (2.1.4), что порядок аппроксимации на точном решении может быть выше порядка аппроксимации для класса функций, обладающих той же гладкостью, что и точное решение. Пусть  $k=1$ , т. е.  $\tau = h$ . Применяя формулу Тейлора, получим

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} =$$

$$= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n + O(h^2).$$

Если  $u(t, x)$  есть точное решение уравнения (2.1.1), то, дифференцируя (2.1.1), легко выводим соотношение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.1.19)$$

В этом случае  $\alpha_h = R_h(u) = O(h^2)$ . Для произвольной

функции  $u(t, x)$  имеем  $\alpha_h = -R_h(u) - R(u) = O(h)$ , так как  $\partial^2 u / \partial t^2$  и  $\partial^2 u / \partial x^2$  могут принимать различные значения.

## § 2.2. Примеры сеточных аппроксимаций

**2.2.1. Способ конечных разностей.** При построении точного уравнения мы заменили частные производные  $\partial u / \partial t$ ,  $\partial u / \partial x$  разностными отношениями. Замена отдельных частных производных, входящих в уравнение, сеточными выражениями, аппроксимирующими эти производные, представляет наиболее простой и часто употребляемый путь построения аппроксимирующих схем — способ конечных разностей.

Приведем наиболее часто применяемые сеточные аппроксимации для производных  $\partial u / \partial t$ ,  $\partial u / \partial x$ :

$$\frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots, \quad (2.2.1)$$

$$\frac{u(t, x + h) - u(t, x)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \quad (2.2.2)$$

— разностные отношения «вперед»;

$$\frac{u(t, x) - u(t - \tau, x)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots, \quad (2.2.3)$$

$$\frac{u(t, x) - u(t, x - h)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \quad (2.2.4)$$

— разностные отношения «назад»;

$$\frac{u(t + \tau, x) - u(t - \tau, x)}{2\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots, \quad (2.2.5)$$

$$\frac{u(t, x + h) - u(t, x - h)}{2h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2.6)$$

— центрально-разностные отношения.

Для аппроксимации второй производной  $\partial^2 u / \partial x^2$  обычно применяется симметричное разностное отношение второго порядка

$$\frac{u(t, x + h) - 2u(t, x) + u(t, x - h)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (2.2.7)$$

Все эти формулы непосредственно получаются с помощью

соответствующих тейлоровских разложений; многоточиями обозначены члены высших порядков.

**2.2.2. Модельное уравнение переноса.** Заменяя в уравнении (2.1.1) производные  $du/dt$  и  $du/dx$  центрально-разностными отношениями, получим сеточное уравнение

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0, \quad (2.2.8)$$

для которого ошибка аппроксимации имеет второй порядок относительно  $\tau$  и  $h$  (схема «крест»; рис. 2.4).

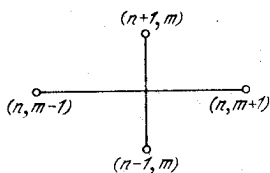


Рис. 2.4.

Уравнение (2.2.8) связывает значения искомой функции в узлах, относящихся к трем последовательным слоям с номерами  $n-1, n, n+1$ . Это — *трехслойное уравнение*. Уравнение (2.1.4) — *двухслойное*.

Интерполируя разностное отношение  $(u_{m+1} - u_{m-1})/(2h)$  по  $t$  на  $t^{n+1/2} = t^n + 0,5\tau$ , построим двухслойную схему, для которой ошибка аппроксимации, как и для предыдущей схемы, есть  $O(\tau^2) + O(h^2)$ :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + 0,5 \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + 0,5 \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0. \quad (2.2.9)$$

Шаблон схемы (2.2.9) показан на рис. 2.5; он содержит шесть узловых точек. Интерполируя по  $t$  и  $x$ , построим

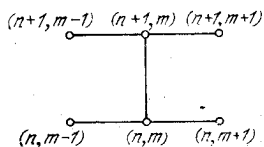


Рис. 2.5.

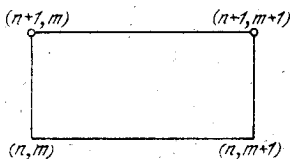


Рис. 2.6.

схему с ошибкой аппроксимации  $O(\tau^2) + O(h^2)$  на четырехточечном двухслойном шаблоне (рис. 2.6):

$$0,5 \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + 0,5 \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau} + 0,5 \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + 0,5 \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} = 0. \quad (2.2.10)$$

Если при каждом фиксированном  $m$  получается уравнение, содержащее значение искомой функции только в одном узле «верхнего» слоя (т. е. слоя с наибольшим номером  $n$ ), то сеточная аппроксимация называется *явной*, в противном случае — *неявной*. Аппроксимации (2.1.4), (2.2.8) — явные, (2.2.9), (2.2.10) — неявные. При употреблении неявных аппроксимаций для определения неизвестных на «верхнем» слое приходится решать некоторую систему алгебраических уравнений.

Построим теперь для уравнения (2.1.1) явную двухслойную схему с ошибкой аппроксимации  $O(\tau^2) + O(h^2)$ . Шаблон схемы изображен на рис. 2.3. Сначала, заменяя  $\partial u / \partial x$  центрально-разностным отношением, а  $\partial u / \partial t$  — односторонним разностным отношением «вперед», получим схему с ошибкой аппроксимации  $O(\tau) + O(h^2)$ :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0. \quad (2.2.11)$$

При  $\tau = O(h)$  главный член ошибки аппроксимации для этого уравнения есть  $0,5\tau \partial^2 u / \partial t^2$ . Пользуясь соотношением (2.1.19), справедливым для решения уравнения (2.1.1), введем в (2.2.11) слагаемое, компенсирующее эту ошибку:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{\tau}{2h^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) = 0. \quad (2.2.12)$$

Ошибка аппроксимации (2.2.12) есть  $O(\tau^2) + O(h^2)$ .

**2.2.3. Модельное уравнение теплопроводности.** Обратимся к уравнению (2.1.2). Применяя для аппроксимации производных формулы (2.2.1) и (2.2.7), запишем явную двухслойную схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0. \quad (2.2.13)$$

Главный член ошибки аппроксимации есть

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

Пользуясь интерполяцией по  $t$ , построим неявную схему с ошибкой аппроксимации  $O(\tau^2) + O(h^2)$ :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - 0,5 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - 0,5 \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0. \quad (2.2.14)$$

**2.2.4. Принцип расщепления.** Идею этого важного принципа, открывающего широкие возможности для конструирования эффективных сеточных аппроксимаций, мы изложим на примере уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v = \text{const}, \quad a = \text{const}. \quad (2.2.15)$$

Уравнение (2.2.15) описывает одномерное распространение тепла, обусловленное двумя процессами — теплопроводностью (первое слагаемое в правой части) и конвективным переносом тепла (второе слагаемое в правой части). Запишем уравнения для этих процессов отдельно:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.2.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.2.17)$$

Переход от  $t = t^n$  к  $t = t^{n+1} = t^n + \tau$  выполним за два «дробных» шага. На первом шаге в течение времени  $\tau$  действует уравнение (2.2.16), на втором шаге также в течение времени  $\tau$  действует уравнение (2.2.17). Естественно ожидать, что совокупный эффект двух таких шагов близок к эффекту перехода от  $t^n$  к  $t^{n+1}$  по уравнению (2.2.15).

Для нашего примера это предположение можно подтвердить с помощью решений специального вида:  $u = \exp(\mu t) \exp(i\omega x)$ . Для уравнения (2.2.15) имеем  $\mu = -v\omega^2 - ia\omega$ ; для (2.2.16)  $\mu = -v\omega^2$ ; для (2.2.17)  $\mu = -ia\omega$ . Изменение решения за время  $\tau$  для соответствующих уравнений описывается множителями  $\lambda = \exp(-v\omega^2\tau - ia\omega\tau)$ ,  $\lambda_1 = \exp(-v\omega^2\tau)$ ,  $\lambda_2 = \exp(-ia\omega\tau)$ . Очевидно, что  $\lambda = \lambda_1\lambda_2$ .

Согласно принципу расщепления отдельные члены (или комплексы), входящие в уравнение, можно реализовать порознь на различных промежуточных этапах. Это, естественно, упрощает построение и исследование аппроксимирующих схем.

Если уравнения «дробных» шагов описывают частные физические явления (как в нашем примере), то говорят о *расщеплении по физическим процессам*.

**2.2.5. Реализация неявных схем. Прогонки.** Как отмечалось в п. 2.2.2, применение неявных схем связано с необходимостью при расчете очередного временного слоя

решать систему уравнений, связывающих значения искомой функции в узлах шаблона, принадлежащих этому слою. Для решения подобных систем уравнений разработаны специальные методы.

Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения теплопроводности (2.1.2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$u(0, x) = \varphi(x)$$

с граничными условиями

$$\alpha_0(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_0(t) u = \gamma_0(t) \quad \text{при } x = 0, \quad (2.2.18)$$

$$\alpha_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1(t) u = \gamma_1(t) \quad \text{при } x = X, \quad (2.2.19)$$

$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  — заданные функции времени.

Введем сетку  $x_m = mh$ ,  $h = X/M$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ ;  $t^n = n\tau$ ,  $\tau = T/N$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . Уравнение (2.1.2) аппроксимируем согласно (2.2.14). Граничные условия приближенно заменим следующими:

$$\alpha_0^{n+1} \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} + \beta_0^{n+1} u_0^{n+1} = \gamma_0^{n+1}, \quad (2.2.20)$$

$$\alpha_1^{n+1} \frac{u_M^{n+1} - u_{M-1}^{n+1}}{h} + \beta_1^{n+1} u_M^{n+1} = \gamma_1^{n+1}. \quad (2.2.21)$$

Предположим, что на слое  $t^n = n\tau$  значения  $u_m^n$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ , уже вычислены. Опишем способ расчета значений  $u_m^{n+1}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ . Для упрощения записей обозначим  $u_m = u_m^{n+1}$  и перепишем систему уравнений (2.2.20), (2.2.14), (2.2.21) в виде

$$a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1} = d_m, \quad (2.2.22)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M; \quad a_0 = 0, \quad c_M = 0.$$

Здесь

$$a_m = -\tau/h^2, \quad b_m = 1 + 2\tau/h^2, \quad c_m = -\tau/h^2,$$

$$d_m = u_m^n, \quad m \neq 0, \quad m \neq M;$$

$$b_0 = \beta_0^{n+1} h - \alpha_0^{n+1}, \quad c_0 = \alpha_0^{n+1}, \quad d_0 = \gamma_0^{n+1} h;$$

$$a_M = -\alpha_1^{n+1}, \quad b_M = \beta_1^{n+1} h - \alpha_1^{n+1}, \quad d_M = \gamma_1^{n+1} h.$$

Для решения системы уравнений (2.2.22) применим метод последовательного исключения неизвестных. Пред-



положим, что  $b_0 \neq 0$ . Тогда из первого уравнения системы (2.2.22) найдем соотношение  $u_0 = k_{1/2}u_1 + l_{1/2}$ . Подставив это выражение для  $u_0$  в следующее уравнение, преобразуем его в соотношение  $u_1 = k_{3/2}u_2 + l_{3/2}$  и т. д. С помощью индукции легко устанавливаются следующие формулы:

$$u_i = k_{i+1/2}u_{i+1} + l_{i+1/2}, \quad (2.2.23)$$

$$k_{i+1/2} = -\frac{c_i}{a_i k_{i-1/2} + b_i}, \quad l_{i+1/2} = \frac{d_i - a_i l_{i-1/2}}{a_i k_{i-1/2} + b_i}, \quad (2.2.24)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Решение системы осуществляется в два этапа. Сначала по формулам (2.2.24) последовательно вычисляются прогоночные коэффициенты  $k_{i+1/2}$ ,  $l_{i+1/2}$  для  $i = 0, 1, 2, \dots, M$ . При  $i = M$  имеем  $c_M = 0$ ,  $k_{M+1/2} = 0$  и (2.2.23) даст непосредственно значение  $u_M$ . На втором этапе с помощью прогоночных соотношений (2.2.23) последовательно определяем  $u_i$  для  $i = M-1, M-2, \dots, 1, 0$ . Описанный процесс называют *прогонкой*, точнее, *трехточечной прогонкой*.

Прогонки для неявных схем вида (2.2.10), связывающих значения искомой функции в двух соседних узлах на верхнем слое, будут рассмотрены в гл. 3.

## § 2.3. Сходимость и устойчивость

**2.3.1. Сходимость.** Для приложений сеточных схем основным является вопрос о близости решения сеточной задачи к точному решению исходной задачи. Схема называется *сходящейся*, если при  $h \rightarrow 0$  сеточное решение стремится к точному:  $u_h \rightarrow u$ . Если  $u - u_h = O(h^p)$ , то говорят, что порядок сходимости равен  $p$ .

\* Докажем сходимость схемы (2.1.4), (2.1.5) при  $\tau/h = k = \text{const}$ ,  $k \leq 1$ . Сеточная функция  $v = u - u_h$  удовлетворяет нулевым начальным условиям и уравнению

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = \alpha_m^n, \quad (2.3.1)$$

где  $\alpha_m^n$  — ошибка аппроксимации на точном решении. Из (2.3.1) следует

$$v_m^{n+1} = (1 - k)v_m^n + kv_{m-1}^n + \tau\alpha_m^n. \quad (2.3.2)$$

Обозначим  $\|v^n\| = \sup_m |v_m^n|$ ,  $\|v\| = \sup_n \|v^n\|$ ,  $\|\alpha\| = \sup_{m,n} |\alpha_m^n|$ .

Учитывая (2.3.2), получаем

$$|v_m^{n+1}| \leq (1-k)|v_m^n| + k|v_{m-1}^n| + \tau|\alpha_m^n| \leq \|v^n\| + \tau\|\alpha\|,$$

следовательно,

$$\|v^{n+1}\| \leq \|v^n\| + \tau\|\alpha\|.$$

Полагая  $n = 0, 1, 2, \dots, l-1$ , находим  $\|v^l\| \leq l\tau\|\alpha\|$ . Так как  $l\tau \leq T$ , то  $\|v^l\| \leq T O(h)$ . Сходимость доказана, порядок сходимости равен 1. \*

**2.3.2. Пример аппроксимирующей, но не сходящейся схемы.** Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.1.1) с условиями  $u(0, x) = \varphi(x)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Левая часть уравнения (2.1.1) представляет собой полную производную по направлению с угловым коэффициентом  $dx/dt = 1$ :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Вследствие (2.1.1) имеем  $du/dt = 0$ , т. е. искомая функция сохраняет постоянное значение на каждой прямой  $x - t = \text{const}$ . Учитывая начальное условие, находим  $u = \varphi(x - t)$  (рис. 2.7).

Сеточную краевую задачу запишем в виде

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0, \quad (2.3.3)$$

$$u_m^0 = \varphi(mh). \quad (2.3.4)$$

Уравнение (2.3.3) отличается от (2.1.4) лишь характером аппроксимации производной  $du/dx$ : вместо разности «назад» взята разность «вперед».

Оказывается, что это различие весьма существенно. Для (2.1.4) мы только что доказали сходимость. Покажем, что для (2.3.3) сходимости, вообще говоря, нет.

Пусть  $\varphi(x) = 0$  при  $x \geq 0$ ;  $\varphi(x) > 0$  при  $x < 0$ . Тогда

$u(t, 0) = \varphi(-t) > 0$  при  $t > 0$ . С другой стороны, полагая в (2.3.3)  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots$ , легко видим, что  $u_0^n = 0$  при любых значениях  $n$  (см. рис. 2.7). Отсюда следует, что приближенное решение не сходится к точному.

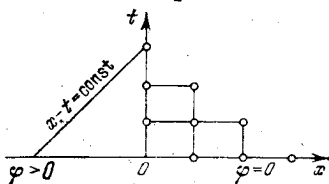


Рис. 2.7.

**2.3.3. Устойчивые схемы.** Как видно из приведенного примера, аппроксимирующая схема может не быть сходя-

щейся. Нужны некоторые дополнительные условия для того, чтобы из свойства аппроксимации следовала сходимость.

Пусть  $u$  есть решение исходной дифференциальной краевой задачи

$$R(u) = 0, \quad (2.3.5)$$

$u_h$  — решение аппроксимирующей сеточной краевой задачи

$$R_h(u_h) = 0. \quad (2.3.6)$$

Ошибка аппроксимации на точном решении определяется равенством

$$R_h(u) = \alpha_h. \quad (2.3.7)$$

Если схема (2.3.6) является аппроксимирующей, то  $\alpha_h \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Сопоставляя (2.3.6) и (2.3.7), мы можем рассматривать  $u - u_h$  как возмущение решения сеточной задачи, вызванное малым возмущением  $\alpha_h$  в правой части (2.3.6). Для того чтобы из свойства аппроксимации, т. е. из стремления к нулю  $\alpha_h$ , следовала сходимость, т. е. стремление к нулю  $u - u_h$ , достаточно дополнительно потребовать, чтобы схема была *устойчивой относительно малых возмущений*.

Существенно, чтобы устойчивость была равномерной при  $h \rightarrow 0$ , т. е. не ухудшалась при  $h \rightarrow 0$ . Вспомним, что запись (2.3.7) обозначает систему уравнений, коэффициенты которой зависят от  $h$ , а число уравнений неограниченно возрастает при  $h \rightarrow 0$ . Поэтому чувствительность системы к малым возмущениям может возрастать неограниченно при  $h \rightarrow 0$ , что и приводит к отсутствию сходимости.

**2.3.4. Оценка погрешности с помощью варьирования шагов сетки.** Для задач, рассматриваемых в практической расчетной работе, теоретические оценки погрешности  $u - u_h$  или не существуют, или, как правило, являются чрезмерно завышенными. На практике для оценки погрешности  $u - u_h$  обычно пользуются сравнением приближенных решений, полученных при различных шагах сетки (метод Рунге).

Часто имеются основания предполагать, что погрешность приближенного решения может быть записана в следующем виде:  $u - u_h = h^p w + \dots$ , где  $w$  — некоторая функция, не зависящая от  $h$ ; многоточие обозначает чле-

ны более высокого порядка малости; которые в дальнейшем опускаются. Заменяв  $h$  на  $ch$ , где  $c$  — некоторый положительный множитель, получим  $u - u_{ch} \approx c^p h^p w$ . Исключив неизвестную функцию  $w$ , найдем

$$u - u_h \approx \frac{u_h - u_{ch}}{c^p - 1}. \quad (2.3.8)$$

В частности, для схем второго порядка точности ( $p = 2$ ), полагая, например,  $c = 2$ , имеем  $u - u_h \approx (u_h - u_{2h})/3$ .

## § 2.4. Исследование устойчивости

**2.4.1. Предварительные замечания.** Строгое обоснование устойчивости схем для тех уравнений, которые встречаются в современных прикладных исследованиях, как правило, провести не удастся. Объясняется это следующими причинами. Для большинства нелинейных уравнений механики сплошных сред, несмотря на многолетние усилия выдающихся математиков, пока еще не разработана достаточно полная математическая теория, в частности, не доказаны теоремы о существовании и единственности решения и непрерывной зависимости его от данных задачи. Сеточные же аппроксимации обычно не менее сложны для исследования, чем соответствующие дифференциальные уравнения. Более того, при переходе от дифференциальных уравнений к сеточным аппроксимациям могут утрачиваться или маскироваться фундаментальные свойства, лежащие в основе соответствующей математической теории, например свойство максимума для параболических и эллиптических уравнений. Последняя по счету, но не по важности причина — недостаток времени, побуждающий отказываться от строгого исследования устойчивости даже в тех случаях, когда оно представляется возможным.

Для исследования схем, аппроксимирующих эволюционные задачи, разработаны некоторые практические приемы, позволяющие относительно легко отсеивать неустойчивые схемы. Эти приемы проверены большим опытом практических расчетов и обоснованы теоретически для некоторых достаточно общих модельных задач.

**2.4.2. Гармонические возмущения (метод Фурье).** Обратимся снова к задаче Коши для уравнения (2.1.1). Эта задача имеет решения специального вида:

$$u(t, x) = \exp(\mu t) \exp(i\omega x); \quad (2.4.1)$$

здесь  $\omega$  — произвольное вещественное число. Подставляя (2.4.1) в рассматриваемое уравнение (2.1.1), находим  $\mu = -i\omega$ . Решения вида (2.4.1) имеются у всех линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Для уравнения теплопроводности (2.1.2) находим решение вида (2.4.1) при  $\mu = -\omega^2$ .

Решения вида (2.4.1) имеют также линейные однородные сеточные уравнения с постоянными коэффициентами. На сетке  $t^n = n\tau$ ,  $x_m = mh$  имеем

$$u_m^n = \lambda^n \exp(i\omega mh), \quad (2.4.2)$$

где  $\lambda = \exp(\mu\tau)$ . Подставим (2.4.2), например, в (2.1.4), получим

$$\frac{\lambda^{n+1} \exp(i\omega mh) - \lambda^n \exp(i\omega mh)}{\tau} + \frac{\lambda^n \exp(i\omega mh) - \lambda^n \exp[i\omega(m-1)h]}{h} = 0.$$

Отсюда после сокращения на  $\lambda^n \exp(i\omega mh)$  следует

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{1 - \exp(-i\omega h)}{h} = 0$$

и, наконец,

$$\lambda = (1 - k) + k \exp(-i\omega h), \quad k = \tau/h. \quad (2.4.3)$$

Решение вида (2.4.2) можно рассматривать как возмущение, вызванное соответствующим возмущением начальной функции. Ограниченность этих возмущений при  $h \rightarrow 0$  принимается в качестве главного практического критерия устойчивости схемы. Прежде чем применять этот критерий, схему подвергают некоторым преобразованиям. Сеточное уравнение, аппроксимирующее основное дифференциальное уравнение, линеаризуется. Для этого рассматриваются малые возмущения решения, вызванные малым возмущением начальных данных. Переменные коэффициенты линеаризованного уравнения «замораживаются», т. е. заменяются их значениями в произвольной точке области определения решения исходной задачи. Краевая задача заменяется соответствующей задачей Коши.

**2.4.3. Условие Неймана.** Необходимое и достаточное условие ограниченности гармонических возмущений (2.4.2) имеет следующий вид:

$$|\lambda| \leq 1 + c\tau, \quad c = \text{const}. \quad (2.4.4)$$

Действительно, пусть выполнено (2.4.4). Имеем при

$$t = n\tau \leq T:$$

$$|\lambda^n| \leq (1 + c\tau)^{T/\tau} \leq \exp(cT).$$

Достаточность условия (2.4.4) доказана. Докажем необходимость. Пусть при  $t = n\tau \leq T$  для некоторого  $L > 1$  имеем  $|\lambda^n| \leq L$ . Полагая  $n\tau = T$ , находим

$$|\lambda| \leq L^{1/n} = \exp(\tau \ln L/T).$$

Положим  $D = (\ln L)/T$ . Рассматривая график функции  $y = \exp(\tau D)$  на отрезке  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ , где  $\tau_0$  — произвольное фиксированное положительное число (рис. 2.8), убеждаемся в существовании постоянной  $c$  такой, что  $\exp(\tau D) \leq 1 + c\tau$ , т. е. условие (2.4.4) выполнено.

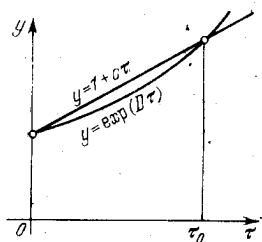


Рис. 2.8.

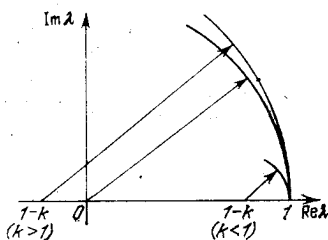


Рис. 2.9.

**2.4.4. Схемы для модельного уравнения переноса.** Исследуя устойчивость схем для уравнения (2.1.1), будем считать, что  $\tau = kh$ ,  $k = \text{const}$ .

1) «Явный левый угол»:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0. \quad (2.4.5)$$

Мы уже получили выражение для  $\lambda$  (см. (2.4.3)). На комплексной плоскости точка, соответствующая  $\lambda$ , пробегает при изменении  $\omega$  окружность радиуса  $k$  с центром в точке  $\lambda = 1 - k$  (рис. 2.9). Отсюда следует, что схема (2.4.5) устойчива при  $k \leq 1$  и неустойчива при  $k > 1$ .

2) «Явный правый угол»:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0. \quad (2.4.6)$$

Имеем

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{\exp(i\omega h) - 1}{h} = 0, \quad \lambda = 1 + k - k \exp(i\omega h).$$

Мы опять получили окружность радиуса  $k$ , но центр ее

находится в точке  $\lambda = 1 + k$ ; поэтому условие устойчивости не удовлетворяется ни при каком  $k$ . Напомним, что именно схема (2.4.5) послужила примером аппроксимации без сходимости.

3) Явная четырехточечная схема — «тренога»:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0.$$

Имеем  $\lambda = 1 - ik \sin \omega h$ ,  $|\lambda|^2 = 1 + k^2 \sin^2 \omega h$ . Условие устойчивости (2.4.4) не выполнено ни при каком постоянном значении  $k$ .

4) Схема Лакса:

$$\frac{u_m^{n+1} - 0,5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0. \quad (2.4.7)$$

Имеем  $\lambda = \cos \omega h - ik \sin \omega h$ ,  $|\lambda|^2 = \cos^2 \omega h + k^2 \sin^2 \omega h = 1 - (1 - k^2) \sin^2 \omega h$ . Условие устойчивости (2.4.4) выполнено при  $k \leq 1$  и не выполнено при  $k > 1$ .

5) Неявная четырехточечная схема — «прямоугольник»:

$$0,5 \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + 0,5 \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau} + 0,5 \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + 0,5 \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} = 0. \quad (2.4.8)$$

После несложных преобразований, переходя к тригонометрическим функциям половинного угла, находим

$$\lambda = \left(1 - ik \operatorname{tg} \frac{\omega h}{2}\right) \left(1 + ik \operatorname{tg} \frac{\omega h}{2}\right)^{-1}, \quad |\lambda| = 1.$$

Условие устойчивости выполнено для любых  $k$ .

**2.4.5. Схемы для модельного уравнения теплопроводности.** Исследуя устойчивость схем для (2.1.2), полагаем  $\tau = rh^2$ ,  $r = \text{const}$ .

1) Явная четырехточечная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0. \quad (2.4.9)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 + \frac{\tau}{h^2} (e^{i\omega h} - 2 + e^{-i\omega h}) = 1 + 2r(\cos \omega h - 1) = \\ &= 1 - 4r \sin^2 \frac{\omega h}{2}. \end{aligned}$$

Условие устойчивости выполнено при  $r \leq 1/2$  и не выполнено, если  $r > 1/2$ .

2) Неявная четырехточечная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0. \quad (2.4.10)$$

Имеем

$$\lambda = \left(1 + 4r \sin^2 \frac{\omega h}{2}\right)^{-1}. \quad (2.4.11)$$

Очевидно, что условие устойчивости выполнено при любом  $r$ .

3) Неявная шеститочечная схема второго порядка точности:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - 0,5 \left[ \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} \right] = 0. \quad (2.4.12)$$

Имеем

$$\lambda = \left(1 - 2r \sin^2 \frac{\omega h}{2}\right) \left(1 + 2r \sin^2 \frac{\omega h}{2}\right)^{-1}.$$

Схема (2.4.12) устойчива при любом значении  $r$ .

**2.4.6. Дополнительные замечания.** Для неустойчивых схем условие Неймана (2.4.4) обычно нарушается в области высоких частот ( $\omega \sim 1/h$ ). Покажем на примере схемы «явный правый угол» (2.4.6), каким образом в счете проявляется эта «высокочастотная неустойчивость». Полагая  $\omega h = \pi$ , получим  $\lambda = 1 + 2k$ . Пусть, например,  $k = 1/2$ ; тогда  $\lambda = 2$ . Соответствующее гармоническое возмущение имеет вид  $u_m^n = \varepsilon \cdot 2^n (-1)^m$ , где  $\varepsilon$  — начальная амплитуда. По пространственной переменной это возмущение имеет осциллирующий характер: при переходе от  $m$  к  $m + 1$  меняется знак. При переходе на следующий временной слой амплитуда возмущения увеличивается в два раза, т. е. за один шаг по времени возмущение переходит в следующий двоичный разряд. Если источником возмущения являются только ошибки округления, то через несколько десятков слоев порожденные ошибками округления высокочастотные осцилляции достигнут старших разрядов и неузнаваемо исказят решение.



§ 2.5. Эволюционные задачи  
с двумя пространственными переменными

\* 2.5.1. Модельная задача. Явная схема. Рассмотрим уравнение, которое описывает нестационарное распределение тепла в теплоизолированной плоской пластине (при соответствующем выборе независимых переменных):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(t, x, y). \quad (2.5.1)$$

Для уравнения (2.5.1) в области

$$0 \leq t < +\infty, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \quad (2.5.2)$$

поставим первую краевую задачу

$$u(0, x, y) = \varphi_0(x, y), \quad (2.5.3)$$

$$u(t, 0, y) = u(t, a, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, b) = 0. \quad (2.5.4)$$

Введем равномерную прямоугольную сетку

$$\begin{aligned} t^n &= n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ x_m &= mh_1, \quad h_1 = a/M, \quad m = 0, 1, \dots, M; \\ y_k &= kh_2, \quad h_2 = b/K, \quad k = 0, 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Обозначим

$$u_{m,k}^n = u(t^n, x_m, y_k), \quad f_{m,k}^n = f(t^n, x_m, y_k).$$

Уравнение (2.5.1) на сетке (2.5.5) аппроксимируем с помощью явной схемы, построенной по аналогии с одномерной явной схемой (2.2.13), следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{u_{m,k}^{n+1} - u_{m,k}^n}{\tau} &= \frac{u_{m+1,k}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m-1,k}^n}{h_1^2} + \\ &+ \frac{u_{m,k+1}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m,k-1}^n}{h_2^2} + f_{m,k}^n. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Легко видеть, что главная часть ошибки аппроксимации для (2.5.6) есть  $E = O(\tau) + O(h_1^2) + O(h_2^2)$ . Исследуя устойчивость, положим, как обычно,  $f = 0$  и рассмотрим, по аналогии с одномерным случаем, возмущения специального вида:

$$u_{m,k}^n = \lambda^n \exp(i\omega_1 mh_1) \exp(i\omega_2 kh_2), \quad (2.5.7)$$

где  $\omega_1, \omega_2$  — произвольные вещественные числа. Подставив

(2.5.7) в (2.5.6) при  $f \equiv 0$ , найдем

$$\lambda = 1 - 4 \frac{\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} - 4 \frac{\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2}. \quad (2.5.8)$$

Условие Неймана  $|\lambda| \leq 1 + \sigma\tau$  для устойчивости гармонических возмущений, полученное нами в п. 2.4.3, как легко видеть из проведенных там рассуждений, не зависит от числа пространственных переменных. Предполагая, что шаги сетки  $\tau$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  связаны соотношениями

$$\tau/h_1^2 = r_1 = \text{const}, \quad \tau/h_2^2 = r_2 = \text{const}, \quad (2.5.9)$$

из условия Неймана найдем

$$r_1 + r_2 \leq 1/2. \quad (2.5.10)$$

В частном случае квадратной сетки  $h_1 = h_2 = h$  имеем

$$\tau/h^2 \leq 1/4. \quad (2.5.11)$$

**2.5.2. Неявная схема второго порядка точности.** Условия (2.5.9), (2.5.10), обеспечивающие устойчивость схемы (2.5.6), ограничивают величину временного шага. Эти ограничения могут быть чрезмерно жесткими и не соответствовать темпу изменения решения во времени. В случае одного пространственного переменного мы имели схему (2.4.12) второго порядка точности относительно  $\tau$  и  $h$  и безусловно устойчивую. Двумерным аналогом ее является следующая схема:

$$\begin{aligned} \frac{u_{m,k}^{n+1} - u_{m,k}^n}{\tau} &= \frac{1}{2} \frac{u_{m+1,k}^{n+1} - 2u_{m,k}^{n+1} + u_{m-1,k}^{n+1}}{h_1^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{u_{m,k+1}^{n+1} - 2u_{m,k}^{n+1} + u_{m,k-1}^{n+1}}{h_2^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{m+1,k}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m-1,k}^n}{h_1^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{u_{m,k+1}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m,k-1}^n}{h_2^2} + f_{m,k}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Точность второго порядка очевидна из самой конструкции схемы. Это легко проверить непосредственно, пользуясь теилоровским разложением  $u(t, x, y)$  относительно точки  $(t^{n+1/2}, x_m, y_k)$ . Исследуя устойчивость, найдем

$$\lambda = \frac{1 - 2 \frac{\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} - 2 \frac{\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2}}{1 + 2 \frac{\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} + 2 \frac{\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2}}.$$

Очевидно, что  $|\lambda| \leq 1$  при любых значениях  $\tau$ . В случае одного пространственного переменного схему (2.4.12) можно было реализовать с помощью трехточечной прогонки, которая является достаточно эффективным алгоритмом. Реализация двумерной схемы (2.5.12) представляет значительные трудности, обусловленные тем, что на верхнем временном слое эта схема связывает значения искомой функции в пяти соседних узлах на двумерном шаблоне.

**2.5.3. Схема переменных направлений.** Указанные трудности реализации не возникают, если пользоваться следующей двухшаговой схемой:

$$\frac{u_{m,k}^{n+1/2} - u_{m,k}^n}{0,5\tau} = \frac{u_{m+1,k}^{n+1/2} - 2u_{m,k}^{n+1/2} + u_{m-1,k}^{n+1/2}}{h_1^2} + \frac{u_{m,k+1}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m,k-1}^n}{h_2^2} + f_{m,k}^n, \quad (2.5.13)$$

$$\frac{u_{m,k}^{n+1} - u_{m,k}^{n+1/2}}{0,5\tau} = \frac{u_{m+1,k}^{n+1/2} - 2u_{m,k}^{n+1/2} + u_{m-1,k}^{n+1/2}}{h_1^2} + \frac{u_{m,k+1}^{n+1} - 2u_{m,k}^{n+1} + u_{m,k-1}^{n+1}}{h_2^2} + f_{m,k}^{n+1/2}. \quad (2.5.14)$$

Согласно (2.5.13), (2.5.14) переход от  $n$  к  $n+1$  осуществляется за два полшага. На первом этапе уравнение (2.5.13) для каждого фиксированного  $k$  решается с помощью трехточечной прогонки по индексу  $m$ . Аналогично решается уравнение (2.5.14).

При исследовании устойчивости представим множитель перехода  $\lambda$  в виде  $\lambda = \lambda' \lambda''$ , где  $\lambda'$  соответствует первому полшагу, а  $\lambda''$  — второму. Имеем

$$\lambda' = \left( 1 - 2 \frac{\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2} \right) \left( 1 + 2 \frac{\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} \right)^{-1},$$

$$\lambda'' = \left( 1 - 2 \frac{\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} \right) \left( 1 + 2 \frac{\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2} \right)^{-1}.$$

Отсюда для  $\lambda$  после очевидного преобразования находим

$$\lambda = \frac{1 - 2 \frac{\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2}}{1 + 2 \frac{\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2}} \cdot \frac{1 - 2 \frac{\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2}}{1 + 2 \frac{\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2}}$$

и, следовательно,  $|\lambda| \leq 1$  при любом  $\tau$ , т. е. схема (2.5.13), (2.5.14) безусловно устойчива. Уравнения (2.5.13), (2.5.14) аппроксимируют (2.5.1) с погрешностями вида  $O(\tau) + O(h_1^2) + O(h_2^2)$ .

**2.5.4. Схема расщепления.** Переход от  $n$  к  $n+1$  реализуем с помощью двух «дробных» шагов, причем на первом шаге учтем в правой части (2.5.1) только производную по  $x$ , а на втором шаге — производную по  $y$ :

$$\frac{u_{m,k}^{n+1/2} - u_{m,k}^n}{\tau} = \frac{u_{m+1,k}^{n+1/2} - 2u_{m,k}^{n+1/2} + u_{m-1,k}^{n+1/2}}{h_1^2} + \frac{1}{2} f_{m,k}^n, \quad (2.5.15)$$

$$\frac{u_{m,k}^{n+1} - u_{m,k}^{n+1/2}}{\tau} = \frac{u_{m,k,h+1}^{n+1} - 2u_{m,k}^{n+1} + u_{m,k,h-1}^{n+1}}{h_2^2} + \frac{1}{2} f_{m,k}^n. \quad (2.5.16)$$

Уравнение (2.5.15) есть сеточная аппроксимация предельно анизотропного процесса теплопередачи, при котором распространение тепла происходит лишь в направлении оси  $x$ ; аналогичным образом можно истолковать (2.5.16). Можно предполагать, что попеременное распространение тепла по направлениям осей  $x$  и  $y$  будет приближать реальный (изотропный) процесс теплопроводности, описываемый уравнением (2.5.1) (расщепление по физическим процессам — см. п. 2.2.4).

Дробным шагам соответствуют следующие множители перехода:

$$\lambda' = \left(1 + 4 \frac{\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2}\right)^{-1}, \quad \lambda'' = \left(1 + 4 \frac{\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2}\right)^{-1}.$$

Отсюда следует, что  $|\lambda| = |\lambda'| |\lambda''| \leq 1$  при любом  $\tau$ , т. е. схема (2.5.15), (2.5.16) безусловно устойчива. Каждое из уравнений (2.5.15), (2.5.16) можно реализовать с помощью трехточечных прогонок по соответствующему направлению. \*

## § 2.6. Стационарные краевые задачи

\* **2.6.1. Модельная задача.** Запишем первую краевую задачу для уравнения Пуассона в области  $G$ , представляющей единичный квадрат  $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x, y) = 0, \quad (2.6.1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (2.6.2)$$

Здесь  $\Gamma$  — граница области  $G$ . Построим сеточную аппроксимацию задачи (2.6.1), (2.6.2). Введем сетку

$$x_m = mh, \quad y_k = kh, \quad h = 1/M,$$

$$m, k = 0, 1, 2, \dots, M;$$

$$u_{m,k} = u(x_m, y_k), \quad f_{m,k} = f(x_m, y_k).$$

Заменив вторые производные симметричными вторыми разностными отношениями, получим

$$\frac{u_{m+1,k} - 2u_{m,k} + u_{m-1,k}}{h^2} + \frac{u_{m,k+1} - 2u_{m,k} + u_{m,k-1}}{h^2} - f_{m,k} = 0, \quad (2.6.3)$$

$$m, k = 1, 2, \dots, M-1;$$

$$u_{0,k} = u_{M,k} = u_{m,0} = u_{m,M} = 0. \quad (2.6.4)$$

Система (2.6.3), (2.6.4) имеет обычно весьма высокий порядок. Так, при  $M \sim 10^2$  она содержит  $\sim 10^4$  неизвестных. Высокий порядок систем уравнений, возникающих при сеточной аппроксимации краевых задач для эллиптических уравнений, осложняет применение простых (конечных) методов решения линейных систем уравнений и побуждает использовать в этих целях итерационные методы. Некоторые из итерационных методов могут быть получены с помощью *принципа установления*: решение стационарной задачи находится как предел решения соответствующей нестационарной задачи при неограниченном возрастании времени.

Исходя из тепловой интерпретации задачи (2.6.1), (2.6.2), естественно рассмотреть первую краевую задачу для соответствующего нестационарного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x, y), \quad (2.6.5)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (2.6.6)$$

Существование предела при  $t \rightarrow \infty$  для решения соответствующей нестационарной задачи обычно усматривается из физических соображений, учитывающих наличие или отсутствие диссипативных явлений. При неудачном выборе нестационарного аналога предел при  $t \rightarrow \infty$  может не существовать. Так, например, если рассматривать уравнение (2.6.1) как уравнение равновесия мембраны, то не следует заменять его уравнением  $\partial^2 u / \partial t^2 = \Delta u - f$ ,

описывающим неуставливающийся процесс вынужденных колебаний мембраны. Добавление в левую часть волнового уравнения члена  $\alpha du/dt$ ,  $\alpha > 0$ , соответствующего трению, придает нестационарной задаче диссипативный характер и обеспечивает существование предела при  $t \rightarrow \infty$ .

**2.6.2. Явные методы.** Аппроксимируя (2.6.5) с помощью простейшей явной схемы (2.5.6), получим

$$\frac{u_{m,k}^{n+1} - u_{m,k}^n}{\tau} = \frac{u_{m+1,k}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m-1,k}^n}{h^2} + \frac{u_{m,k+1}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m,k-1}^n}{h^2}. \quad (2.6.7)$$

Из условия устойчивости (2.5.11) получаем  $\tau \sim h^2$ . Поскольку физический процесс перехода к стационарному распределению температуры совершается за конечное время  $T$ , можно ожидать, что  $N$  — число временных слоев, которые потребуются рассчитать, чтобы получить с заданной точностью стационарное решение, порядка  $h^{-2}$ , т. е. весьма резко зависит от  $h$ .

Рассмотрим более подробно этот вопрос для одномерного аналога задачи (2.6.3), (2.6.4):

$$u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1} = h^2 f_m, \quad m = 1, 2, \dots, M-1; \quad (2.6.8)$$

$$u_0 = 0, \quad u_M = 0, \quad (2.6.9)$$

которому соответствует нестационарная задача

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - f_m, \quad (2.6.10)$$

$$u_0^n = 0, \quad u_M^n = 0, \quad u_m^0 = \varphi_m.$$

Введем в качестве новой искомой функции  $v_m^n = u_m^n - u_m^0$ . Для  $v_m^n$  получаем однородное уравнение

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} = \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}. \quad (2.6.11)$$

Мы знаем, что (2.6.11) имеет специальные решения

$$v_m^n = \lambda^n \exp(i\omega m h), \quad \lambda = \lambda(\omega) = 1 - 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2}$$

при любом вещественном значении  $\omega$ . Эти решения,

однако, не удовлетворяют граничным условиям

$$v_0^n = 0, \quad v_M^n = 0. \quad (2.6.12)$$

Составим линейную комбинацию решений специального вида

$$\hat{v}_m^n = C_+ [\lambda(\omega)]^n \exp(i\omega mh) + C_- [\lambda(-\omega)]^n \exp(-i\omega mh).$$

Очевидно, что  $\hat{v}_m^n$  удовлетворяет уравнению (2.6.11). Полагая  $m=0$  и учитывая, что  $\lambda(\omega) = \lambda(-\omega)$ , находим  $C_+ + C_- = 0$ , т. е. с точностью до несущественного постоянного множителя можно искать  $\hat{v}_m^n$  в виде  $\hat{v}_m^n = [\lambda(\omega)]^n \sin(\omega mh)$ . Граничное условие для  $m=M$  выполняется, если  $\sin \omega = 0$ , т. е.  $\omega = \omega_p = p\pi$ , где  $p$  — целое число. Легко видеть, что достаточно рассмотреть значения  $p = 1, 2, \dots, M-1$  (для других целых  $p$  получаются те же решения  $\hat{v}_m^n$  с точностью до несущественных постоянных множителей).

Можно показать, что функции  $\hat{v}_m^0(p) = \sin(p\pi mh)$ ,  $p = 1, 2, \dots, M-1$ , на сетке  $x_m = mh$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , образуют полную и ортогональную систему функций в  $(p-1)$ -мерном пространстве сеточных функций, удовлетворяющих граничным условиям (2.6.12). Разлагая по этим функциям начальную функцию, получим представление

$$v_m^n = \sum_{p=1}^{M-1} a_p \lambda_p^n \sin(p\pi mh), \quad \lambda_p = 1 - 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi h}{2}, \quad a_p = \text{const.}$$

Для того чтобы  $v_m^n$  стремилось к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , нужно, чтобы выполнялось условие стабилизации  $|\lambda_p| < 1$ ,  $p = 1, 2, \dots, M-1$ .

При произвольной начальной ошибке  $v_m^0$  скорость стремления к нулю  $v_m^n$  определяется величиной  $\Lambda = \max |\lambda_p|$ ,  $v_m^n \sim \Lambda^n$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Естественно считать оптимальным такой выбор  $\tau$ , при котором число  $\Lambda$  имеет наименьшее значение. При таком выборе  $\tau$  отклонение от предельного (стационарного) решения быстрее всего стремится к нулю при возрастании  $n$ .

Обозначим

$$z = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi h}{2}, \quad z_{\min} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad z_{\max} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{(M-1)\pi h}{2}.$$

На интервале  $(z_{\min}, z_{\max})$  рассмотрим функцию  $\lambda(z) = 1 - \tau z$  с параметром  $\tau$ . Как видно из рис. 2.10, при оптимальном выборе  $\tau$  имеем  $1 - \tau z_{\min} = -(1 - \tau z_{\max})$ , следовательно,

$$\tau = \tau_{\text{опт}} = \frac{2}{z_{\min} + z_{\max}},$$

$$\Lambda_{\text{опт}} = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{z_{\max} + z_{\min}} = \frac{1 - q}{1 + q},$$

где  $q = z_{\min}/z_{\max}$ . При малых значениях  $h$  имеем

$$q \sim \sin^2 \frac{\pi h}{2} \sim \frac{\pi^2 h^2}{4}, \quad \Lambda_{\text{опт}} \sim 1 - \frac{\pi^2 h^2}{2}.$$

Оценим число итераций  $N$ , необходимых для уменьшения начальной ошибки в  $1/\varepsilon$  раз:

$$|\Lambda_{\text{опт}}|^N \sim \varepsilon, \quad N \sim \frac{|\ln \varepsilon|}{|\ln \Lambda_{\text{опт}}|} \sim \frac{|\ln \varepsilon|}{\pi^2 h^2 / 2} = \frac{2}{\pi^2} |\ln \varepsilon| h^{-2}. \quad (2.6.13)$$

Таким образом, требуемое число итераций действительно обратно пропорционально квадрату пространственного шага. Пусть, например,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $h = 0,01$ ; тогда  $N \sim 10000$ . Полученная оценка (2.6.13) без существенных изменений переносится на исходную двумерную задачу (2.6.3), (2.6.4), к которой мы теперь возвращаемся.

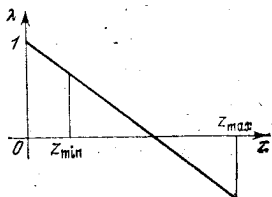


Рис. 2.10.

Укажем одну простую модификацию явной схемы, применение которой сокращает требуемые массивы памяти и в некоторых случаях несколько ускоряет сходимость (процесс Зайделя). Введем следующий порядок обхода узлов сетки: по столбцам ( $m = \text{const}$ ) слева направо, а в каждом столбце снизу вверх. При расчете очередного значения  $u_{m,h}^{n+1}$  используются уже вычисленные в соседних узлах значения решения, относящиеся к итерации с номером  $n + 1$ :

$$\frac{u_{m,h}^{n+1} - u_{m,h}^n}{\tau} = \frac{u_{m+1,h}^n - 2u_{m,h}^n + u_{m-1,h}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m,h+1}^n - 2u_{m,h}^n + u_{m,h-1}^{n+1}}{h^2}. \quad (2.6.14)$$



**2.6.3. Неявные методы.** Применяя схему переменных направлений (2.5.13), (2.5.14) или схему расщепления (2.5.15), (2.5.16), можно существенно ускорить процесс установления стационарного решения, так как обе эти схемы безусловно устойчивы. Хотя каждый временной шаг при применении неявных схем реализуется сложнее, чем для явных схем (прогонки), возможность выбирать временной шаг  $\tau$ , не считаясь с ограничительным условием устойчивости типа  $\tau \sim h^2$ , позволяет резко сократить число временных шагов и получить по сравнению с явными методами значительный выигрыш в затратах машинного времени.

Эти преимущества неявных методов особенно наглядно проявляются на «подробных» сетках. На «грубых» сетках ( $M \sim 20$ ) и при единичных расчетах явные методы, более простые в реализации, успешно конкурируют с неявными. \*

## МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА

### § 3.1. Уравнения; краевые задачи; свойства решений

#### 3.1.1. Модельное уравнение конвективного переноса.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x). \quad (3.1.1)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой полную производную по  $t$  от  $u(t, x)$  в направлении с угловым коэффициентом  $dx/dt = a(t, x)$ :

$$\frac{du}{dt} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Поэтому уравнение (3.1.1) может быть записано в *характеристической форме*

$$\frac{du}{dt} = f(t, x), \quad (3.1.2)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(t, x). \quad (3.1.3)$$

Уравнение (3.1.1) является математической моделью процесса одномерного переноса тепла (или вещества) средой, движущейся со скоростью  $a(t, x)$ , при пренебрежении кондуктивной теплопроводностью (или диффузией) и с учетом возможных источников или стоков, интенсивность которых задается функцией  $f(t, x)$ . Важную роль в исследовании уравнения (3.1.1) играют *характеристики* — интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения (3.1.3).

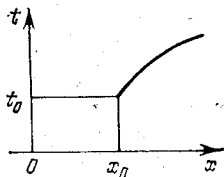


Рис. 3.1.

Характеристики являются линиями тока: характеристика  $x = x(t; t_0, x_0)$  изображает на плоскости  $(t, x)$  движение частицы несущей среды, имеющей в момент  $t = t_0$  координату  $x = x_0$  (рис. 3.1).

Уравнение (3.1.2), рассматриваемое на какой-то фиксированной характеристике, является обыкновенным дифференциальным уравнением с независимой переменной  $t$  и искомой функцией  $u$  (уравнение это не содержит искомой функции в правой части и поэтому решается непосредственно). Решение этого уравнения определяется начальным условием  $u = u_0$  при  $t = t_0$ . В частном случае «чистого переноса», когда  $f \equiv 0$ , имеем на характеристике  $u = \text{const}$ . При  $a = \text{const}$  уравнение (3.1.3) очевидным образом интегрируется:  $x - at = c = \text{const}$ . В этом случае характеристики образуют семейство параллельных прямых.

**3.1.2. Задача Коши.** Уравнение (3.1.1) при дополнительных условиях

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad (3.1.4)$$

где  $\varphi(x)$  — заданная функция, описывает конвективный перенос в неограниченной среде при заданном начальном распределении температуры (или концентрации).

Значение искомой функции в любой точке  $(t^*, x^*)$  определяется интегрированием уравнения (3.1.2) вдоль характеристики  $C^*$ , проходящей через точку  $(t^*, x^*)$ . Начальное условие задается в соответствии с (3.1.4):  $u = \varphi(x_0^*)$  при  $t = 0$ , где  $x_0^*$  — координата точки пересечения характеристики  $C^*$  с прямой  $t = 0$  (рис. 3.2).

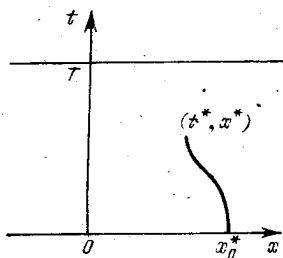


Рис. 3.2.

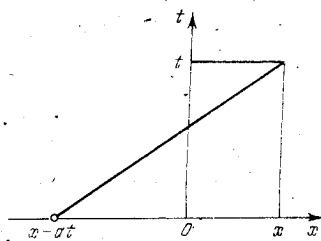


Рис. 3.3.

В простейшем частном случае при  $a = \text{const}$ ,  $f \equiv 0$  решение задачи Коши выписывается явно:  $u(t, x) = \varphi(x - at)$  (рис. 3.3). Отметим еще для этого случая решение специального вида:  $u = \exp i\omega(x - at)$ , где  $\omega$  — произвольное вещественное число. Это решение описывает монохроматическую волну, бегущую вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $a$ .

Пространственным профилем или пространственным распределением решения  $u(t, x)$  для  $t = t_1$  называется гра-

фик функции  $u(t_1, x)$  на плоскости  $(u, x)$ . В случае, когда  $a = \text{const}$ ,  $f = 0$ , пространственный профиль перемещается вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $a$ , не меняя свою форму.

**3.1.3. Краевые задачи для ограниченной области.** Пусть  $G$  есть прямоугольник  $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$ . При  $t = 0$  задается начальное условие  $u(0, x) = \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  — известная функция. В отличие от задачи Коши, теперь нужно также описать перенос тепла (массы) из внешней среды на отрезок  $[0, X]$ , т. е. указать температуру (концентрацию) для частиц несущей тепло среды при входе их в отрезок  $[0, X]$ . Это означает, что  $u(t, x)$  следует задавать в тех точках граничных линий  $x = 0$  и  $x = X$ , где характеристики входят в область  $G$  (положительное направление на характеристике соответствует возрастанию времени). Так, если  $a > 0$ , то  $u(t, x)$  задается слева, т. е. при  $x = 0$  (рис. 3.4).

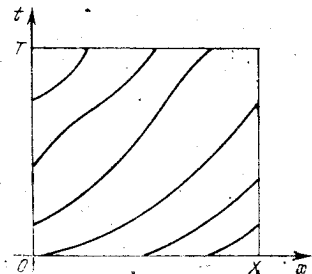


Рис. 3.4.

Нетрудно указать корректные постановки краевых задач для более сложных случаев расположения характеристик, представленных на рис. 3.5 и 3.6.

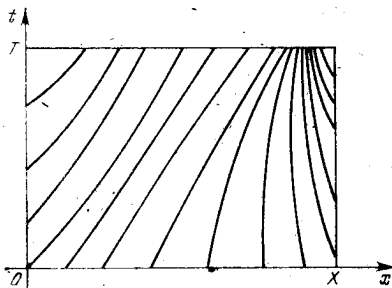


Рис. 3.5.

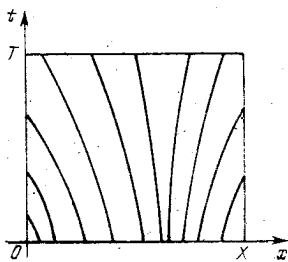


Рис. 3.6.

**3.1.4. Свойство позитивности.** Легко убедиться в справедливости следующего утверждения: если в точке  $(t_0, x_0)$ , принадлежащей характеристике  $C$ , имеем  $u(t_0, x_0) \geq 0$  и при  $t \geq t_0$  правая часть  $f$  уравнения (3.1.1) на  $C$  неотрицательна, то и для любой точки  $(t_1, x_1)$ , лежащей на  $C$ , при  $t_1 > t_0$  имеем  $u(t_1, x_1) \geq 0$ .

Действительно, так как вдоль характеристики  $C$  производная  $du/dt$  неотрицательна, то на  $C$  функция  $u = u(t)$  не убывает с ростом  $t$ . Если во всей области  $G$ , определенной неравенствами  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq X$ , правая часть уравнения (3.1.1) неотрицательна, а также начальные и граничные значения неотрицательны, то искомая функция не принимает отрицательных значений в области  $G$  (свойство позитивности).

**3.1.5. Свойство монотонности.** В этом пункте мы будем считать, что  $f \equiv 0$ . Кроме того, ради простоты ограничимся случаем задачи Коши. Изменение пространственного профиля при изменении  $t$  можно получить с помощью простого геометрического построения. Пусть при  $t = t_1$  некоторая частица несущей среды имеет координату  $x = x_1$  и  $u(t, x) = u_1$ . Будем следить за перемещением этой частицы. Если при  $t = t_2$  частица имеет координату  $x = x_2$ , то  $u(t_2, x_2) = u_1$ , так как  $f \equiv 0$ . Таким образом, точка  $(x_1, u_1)$  профиля для  $t = t_1$  преобразуется в точку  $(x_2, u_1)$  профиля для  $t = t_2$ , т. е. перемещается параллельно оси  $x$  посредством вектора смещения  $(x_2 - x_1, 0)$  (рис. 3.7). Очевидно, что при указанном преобразовании монотонный профиль переходит в монотонный (свойство монотонности).

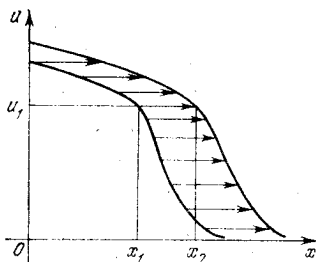


Рис. 3.7.

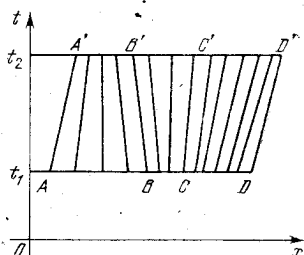


Рис. 3.8.

Если характеристики с ростом  $t$  сходятся (область  $AA'B'B$  на рис. 3.8), то пространственный профиль становится более крутым, так как точки на оси  $x$ , соответствующие различным значениям  $u$ , сближаются. При расхождении характеристик пространственный профиль становится более пологим (область  $CC'D'D$  на рис. 3.8).

**3.1.6. Образование и распространение особенностей.** Сначала рассмотрим простейший случай — задачу Коши при  $a = \text{const}$ ,  $f \equiv 0$ . Имеем  $u = \varphi(x - at)$ ,  $\partial u / \partial x = \varphi'(x - at)$ ,  $\partial u / \partial t = -a\varphi'(x - at)$  и т. д. Ясно, что раз-

рывы самой функции  $u(t, x)$  или каких-либо ее производных (особенности) возникают из особенностей начального распределения и распространяются по характеристикам.

Опираясь на основные положения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, высказанное выше утверждение можно доказать и для более общего случая — задачи Коши при  $a = a(t, x)$ ,  $f = f(t, x)$  в предположении бесконечной дифференцируемости этих функций. Особенности решения могут, очевидно, возникать и из особенностей функций  $a(t, x)$ ,  $f(t, x)$ .

В краевых задачах для ограниченных областей причинной возникновения особенностей решения (при бесконечно-гладких коэффициентах уравнения) могут быть особенности не только начальной, но также и граничных функций. Укажем еще один, менее очевидный источник особенностей — несогласованность начальных и граничных условий.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq x \leq +\infty, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u(t, 0) = \psi(t).$$

Если  $\varphi(0) \neq \psi(0)$ , то даже при непрерывных и сколь угодно гладких функциях  $\varphi(x)$ ,  $\psi(t)$  решение будет иметь разрыв, распространяющийся из точки  $t = 0, x = 0$  по характеристике  $x - at = 0$  (рис. 3.9).

**3.1.7. Численный метод характеристик.** Следующая простая процедура позволяет приближенно определить

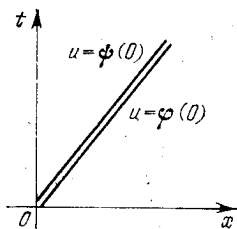


Рис. 3.9.

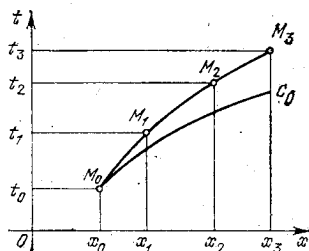


Рис. 3.10.

$u(t, x)$  вдоль характеристики, проходящей через точку  $M_0(t_0, x_0)$ , если известно значение  $u(t_0, x_0) = u_0$ .

Проведем через  $M_0$  прямую  $C_0$ , имеющую характеристическое направление  $dx/dt = a(t_0, x_0)$  (рис. 3.10). На  $C_0$  возьмем близкую к  $M_0$  точку  $M_1(t_1, x_1)$ . Неизвестное зна-

чение  $u_1 = u(t_1, x_1)$  получим из разностного аналога уравнения  $du/dt = f$ :

$$\frac{u_1 - u_0}{t_1 - t_0} = f(t_0, x_0).$$

Таким же образом находим значение  $u$  в следующей точке и т. д. Приближенные значения искомой функции будут определены в вершинах ломаной  $M_0, M_1, M_2, \dots$ , аппроксимирующей характеристику.

Так как уравнения (3.1.2), (3.1.3) заменены разностными с погрешностями первого порядка относительно шага по времени, то такова же и погрешность приближенного решения.

С помощью стандартного приема пересчета легко строится аппроксимация второго порядка. На первом этапе указанным выше способом вычисляются предварительные величины, которые обозначаются  $\bar{x}, \bar{u}_1$ . На втором этапе («корректор») характеристические уравнения аппроксимируются более точно:

$$\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = a \left( \frac{t_0 + t_1}{2}, \frac{x_0 + \bar{x}_1}{2} \right),$$

$$\frac{u_1 - u_0}{t_1 - t_0} = f \left( \frac{t_0 + t_1}{2}, \frac{x_0 + \bar{x}_1}{2} \right).$$

Если краевая задача поставлена правильно, т. е. каждая точка рассматриваемой области может быть соединена характеристикой с участком границы, несущим необходимую информацию, то численный метод характеристик позволяет приближенно определить решение по всей области  $G$ .

## § 3.2. Явные схемы

**3.2.1. «Ориентированный уголок».** В п. 2.4.4 для модельного уравнения (2.1.1) были исследованы на устойчивость схемы «явный левый уголок» (2.4.5) и «явный правый уголок» (2.4.6). Первая устойчива при  $k = \tau/h \leq 1$ , вторая неустойчива при любом  $k$ . Наоборот, для уравнения  $du/dt - du/dx = 0$  аналог первой схемы всегда неустойчив, а схема, аналогичная второй, устойчива при  $k \leq 1$ . Используя эти результаты, построим для уравнения (3.1.1) схему, допускающую изменение знака коэффици-

ента  $a(t, x)$ :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n, \text{ если } a_m^n \geq 0, \quad (3.2.1^+)$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n, \text{ если } a_m^n \leq 0. \quad (3.2.1^-)$$

Главная часть ошибки аппроксимации для схемы (3.2.1 $\pm$ ) такова:

$$E = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - |a| \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Из рассмотрений, проведенных для схемы (2.4.5), непосредственно следует, что схема (3.2.1 $\pm$ ) устойчива, если выполнено условие Куранта

$$k = |a|\tau/h \leq 1. \quad (3.2.2)$$

В дальнейшем  $k$  всегда обозначает величину  $|a|\tau/h$  — число Куранта.

Пусть для определенности  $a_m^n \geq 0$ . Согласно (3.2.1 $\pm$ ) имеем

$$u_m^{n+1} = (1 - k_m^n) u_m^n + k_m^n u_{m-1}^n + \tau f_m^n. \quad (3.2.3)$$

Формула (3.2.3) допускает наглядное истолкование, выявляющее связь схемы (3.2.1 $\pm$ ) с численными алгоритмами метода характеристик (рис. 3.11). Проведем через узел  $(t^{n+1}, x_m)$  прямую  $C$  с характеристическим угловым коэффициентом  $dx/dt = a_m^n$ , точку пересечения прямых  $C$  и  $t = t^n$  обозначим  $(t^n, \xi)$ . Вследствие условия Куранта (3.2.2) точка эта расположена между узлами  $(t^n, x_{m-1})$  и  $(t^n, x_m)$ . Обозначим  $u_\xi^n = (1 - k_m^n) u_m^n + k_m^n u_{m-1}^n$ . Легко видеть, что  $u_\xi^n$  есть результат линейной интерполяции между  $u_{m-1}^n$  и  $u_m^n$  для точки  $(t^n, \xi)$ .

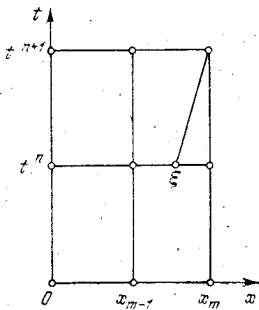


Рис. 3.11.

Представим (3.2.3) в виде  $(u_m^{n+1} - u_\xi^n)/\tau = f_m^n$ . Левая часть последнего равенства аппроксимирует полную производную по  $t$  вдоль характеристики  $C$ . Таким образом, схему (3.2.1 $\pm$ ) можно рассматривать как аппроксимацию характеристического уравнения на заранее заданной сетке. Это — пример *сеточно-характеристической схемы*.



**3.2.2. Схема Лакса.** По аналогии со схемой (2.4.7) запишем уравнение

$$\frac{u_m^{n+1} - 0,5(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n)}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n. \quad (3.2.4)$$

Исследуя устойчивость, снова придем к условию Куранта (3.2.2). Главная часть ошибки аппроксимации есть

$$E = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h^2}{2\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{ah^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (3.2.5)$$

Из (3.2.5) следует, что схема Лакса обладает свойством аппроксимации лишь при условии  $h^2/\tau \rightarrow 0$ , ограничивающем временной шаг снизу. Она является примером *условно аппроксимирующей* или *негибкой* схемы.

При переменном  $a$  второе слагаемое в (3.2.5) может оказаться значительным, если мал временной шаг, ограниченный сверху условием устойчивости  $\tau \leq h/\max |a|$ .

**3.2.3. «Крест».** По аналогии с (2.2.8) запишем трехслойную схему, имеющую аппроксимацию второго порядка относительно  $\tau$  и  $h$ :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n. \quad (3.2.6)$$

Исследуя, как обычно, устойчивость, получаем для определения  $\lambda$  квадратное уравнение

$$\lambda_2 + 2ik\lambda \sin \omega h - 1 = 0, \\ \lambda_{1,2} = -ik \sin \omega h \pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega h}.$$

При  $k > 1$ ,  $k = \text{const}$  схема (3.2.6) неустойчива, так как для некоторых значений  $\omega h$  один из корней  $\lambda_{1,2}$  по модулю больше единицы (например, при  $\omega h = \pi/2$  имеем  $|\lambda_2| = k + \sqrt{k^2 - 1} > k > 1$ ). При  $k \leq 1$  оба корня по модулю равны единице. Действительно,  $\lambda_1 = -\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 = -|\lambda_2|^2 = -1$ . Условия устойчивости для трехслойных схем касаются не только корней характеристического уравнения, но и способа задания значений искомой функции на первом временном слое  $u(\tau, x_m)$ . При определении этих значений с помощью большинства обычных (устойчивых) двухслойных схем для устойчивости достаточно усиленного условия Куранта:  $k < 1$ .

Удвоение (по сравнению с двухслойными схемами) требуемых массивов памяти является очевидным недостатком схемы типа «крест». Это обстоятельство может быть существенным при решении задач с большим числом не-

известных функций или с двумя и тремя пространственными переменными.

**3.2.4. «Чехарда».** Построим двухслойную двухшаговую схему, имеющую аппроксимацию второго порядка относительно  $\tau$  и  $h$ . Шаблон схемы состоит из четырех основных (целых) и двух вспомогательных (полуцелых) узлов (рис. 3.12).

На первом шаге используется аппроксимация типа схемы Лакса:

$$\frac{u_{m+1/2}^{n+1/2} - 0,5(u_m^n + u_{m+1}^n)}{0,5\tau} + a_{m+1/2}^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_{m+1/2}^n, \quad (3.2.7)$$

$$\frac{u_{m-1/2}^{n+1/2} - 0,5(u_{m-1}^n + u_m^n)}{0,5\tau} + a_{m-1/2}^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_{m-1/2}^n.$$

На втором шаге применяется схема типа «крест»:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1/2} \frac{u_{m+1/2}^{n+1/2} - u_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = f_m^{n+1/2}. \quad (3.2.8)$$

Исследуя на устойчивость схему (3.2.7), (3.2.8), положим, как обычно,  $f=0$ ,  $a=\text{const}$ . Исключив вспомогательные значения  $u_{m+1/2}^{n+1/2}$ ,  $u_{m-1/2}^{n+1/2}$ , найдем

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0,$$

$$\lambda = 1 - ik \sin \omega h - 2k^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2},$$

$$|\lambda|^2 = \left(1 - 2k^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2}\right)^2 + k^2 \sin^2 \omega h =$$

$$= 1 - 4k^2(1 - k^2) \sin^4 \frac{\omega h}{2}.$$

Схема устойчива при  $k \leq 1$ .

### 3.2.5. Дополнительные сеточные граничные условия.

Как указывалось в п. 3.1.2, значения искомой функции  $u(t, x)$  задаются на тех частях границы расчетной области  $G$ , где характеристики входят в область  $G$ . Это позволяет, интегрируя уравнение (3.1.2) по характеристикам, определить  $u(t, x)$  во всей области  $G$ . Характеристические схемы, в частности схема «ориентированный уголок», также передают ин-

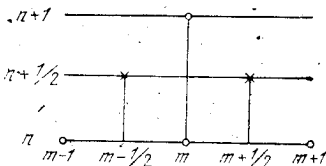


Рис. 3.12.

формации о состоянии системы на границе области  $G$ .

формацию вдоль характеристик от точек границы к внутренним точкам. Поэтому они позволяют рассчитать приближенное решение всюду, пользуясь только первоначально заданными граничными условиями.

Схемы с центрально-разностной аппроксимацией производной по  $x$  (схема Лакса, «крест», «чехарда») нуждаются, вообще говоря, в дополнительных граничных условиях, не входящих в краевую задачу.

Пусть, например,  $a > 0$ , область  $G$  — прямоугольник  $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$  и для аппроксимации уравнения (3.1.1) используется схема «чехарда». Предположим, что на слое  $t = t^n$  значения искомой функции известны во всех узлах  $x_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ ,  $M = 1/h$ . С помощью уравнений (3.2.7), (3.2.8) значения  $u_m^{n+1}$  непосредственно находятся для всех  $m$ , кроме  $m = 0$ ,  $m = M$ . Значение  $u_0^{n+1}$  определяется граничным условием при  $x = 0$ , которое включается в постановку краевой задачи, так как  $a > 0$ . Для  $x = X$  граничное условие не ставится, так как здесь характеристики выходят из области. Решение для  $m = M$  определяется с помощью той или иной сеточной аппроксимации уравнения (3.1.1) или его характеристической формы (3.1.2), (3.1.3). Так, например, мы можем записать уравнение (3.1.1) по схеме «уголок», используя точки  $(t^n, x_{M-1})$ ,  $(t^n, x_M)$ ,  $(t^{n+1}, x_M)$ , и найдем таким образом  $u_M^{n+1}$ . Дополнительные сеточные граничные условия являются следствием основного дифференциального уравнения.

### § 3.3. Неявные схемы

**3.3.1. «Прямоугольник».** Запишем аппроксимацию второго порядка точности на четырехточечном шаблоне, аналогичную схеме (2.2.10):

$$\left(0,5 \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + 0,5 \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau}\right) + a_{m+1/2}^{n+1/2} \left(0,5 \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} + 0,5 \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}\right) = f_{m+1/2}^{n+1/2}. \quad (3.3.1)$$

Как было показано в п. 2.4.4, схема (3.3.1) безусловно устойчива.

Рассмотрим краевую задачу для области  $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$ . Пусть  $h = X/M$ , где  $M$  — целое положительное

число. Система уравнений для значений неизвестной функции на верхнем временном слое, порождаемая схемой (3.3.1), может быть записана в следующей краткой форме:

$$(1 - k_{m+1/2})u_m + (1 + k_{m+1/2})u_{m+1} = g_{m+1/2}, \quad (3.3.2)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M-1.$$

Здесь  $k_{m+1/2} = a_{m+1/2}^{n+1/2} \tau/h$ ,  $g_{m+1/2}$  вычисляются по  $f_{m+1/2}^{n+1/2}$  и известным значениям  $u_m^n, u_{m+1}^n$ . Временные индексы в (3.3.2) опущены для упрощения записи. Пусть  $a > 0$ . Тогда, в соответствии с п. 3.1.3, граничное условие задается на левой границе, т. е. для  $m = 0$ ; поэтому  $u_0$  можно считать известным. Для  $m = 1, 2, \dots, M$  величины  $u_m$  могут быть последовательно найдены из уравнений (3.3.2):

$$u_{m+1} = q_{m+1/2} u_m + r_{m+1/2},$$

$$q_{m+1/2} = -\frac{1 - k_{m+1/2}}{1 + k_{m+1/2}}, \quad r_{m+1/2} = \frac{g_{m+1/2}}{1 + k_{m+1/2}}. \quad (3.3.3)$$

Процесс последовательного вычисления  $u_m$  по формулам (3.3.3) называется *прогонкой* (точнее говоря, *двухточечной прогонкой*, в отличие от трехточечной прогонки, описанной в п. 2.2.5).

Затронем коротко вопрос о вычислительной устойчивости этой прогонки. Из (3.3.3) следует, что ошибка  $\delta_m$  в значении  $u_m$  порождает в  $u_{m+1}$  ошибку  $q_{m+1/2} \delta_m$ . Так как  $a > 0, k > 0$ , то  $|q_{m+1/2}| \leq 1$ . Поэтому в ходе прогонки вычислительные погрешности в худшем случае суммируются и, следовательно, при возрастании  $m$  не происходит быстрого (например, экспоненциального) нарастания вычислительных погрешностей.

Если  $a < 0$ , то граничное условие ставится на правой границе; устойчива прогонка от  $m+1$  к  $m$ , т. е. справа налево. Таким образом, направление устойчивой прогонки согласовано с направлением характеристик и расположением узлов, несущих граничное условие. В следующих пунктах этого параграфа при отсутствии специальных оговорок всегда предполагается, что  $a > 0$ .

**3.3.2. «Неявный левый уголок».** С помощью трехточечного шаблона, показанного на рис. 3.13, построим схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} = f_m^n. \quad (3.3.4)$$

Ошибка аппроксимации для (3.3.4) есть  $O(\tau) + O(h)$ .

Исследуя устойчивость, находим

$$\lambda = [1 + k - k \exp(-i\omega h)]^{-1}.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, рассматривалось при исследовании схемы (2.4.6). Там было показано, что его модуль при любых  $k$  не меньше 1, поэто-

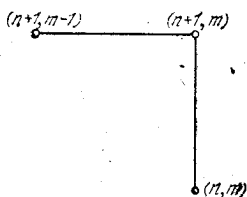


Рис. 3.13.

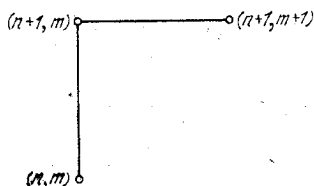


Рис. 3.14.

му  $|\lambda| \leq 1$ . Схема (3.3.4) безусловно устойчива. Устойчивая прогонка от  $m=0$  к  $m=M$  описывается формулами вида (3.3.3); при этом

$$q_{m-1/2} = k_m(1 + k_m)^{-1}, \quad |q_{m-1/2}| < 1.$$

**3.3.3. «Неявный правый уголок».** Шаблон схемы показан на рис. 3.14. Имеем

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} = f_m^n. \quad (3.3.5)$$

Ошибка аппроксимации есть  $O(\tau) + O(h)$ . Исследуя устойчивость, получаем

$$\lambda = [1 - k + k \exp(i\omega h)]^{-1}.$$

Пользуясь результатами п. 2.4.4, находим, что схема (3.3.5) устойчива при  $k \geq 1$  (обратите внимание на знак неравенства!). Прогночные формулы аналогичны (3.3.3); при этом

$$q_{m+1/2} = (k_{m+1/2} - 1)/k_{m+1/2}.$$

Следовательно, прогонка устойчива при  $k \geq 1$ . При  $a < 0$  схема (3.3.5) соответствует (3.3.4).

**3.3.4. Комбинированные аппроксимации.** В тех случаях, когда коэффициент  $a(t, x)$  по абсолютной величине изменяется в широких пределах или меняет знак, могут быть полезны комбинации из различных схем, например

такая:

- 1) если  $0 \leq a_m^n \tau / h \leq 1$ , то (3.2.1<sup>+</sup>);
- 2) если  $-1 \leq a_m^n \tau / h \leq 0$ , то (3.2.1<sup>-</sup>);
- 3) если  $1 \leq a_m^n \tau / h$ , то (3.3.4);
- 4) если  $a_m^n \tau / h \leq -1$ , то (3.3.5).

Реализация подобных комбинированных схем вызывает лишь несущественные технические трудности. На очередном временном слое расчетная область делится на подобласти, в каждой из которых действует одна какая-либо схема. Искомая функция сначала определяется там, где применяются явные схемы. После этого в тех подобластях, где используются неявные схемы, проводятся соответствующие знаку  $a$  прогонки; при этом в качестве начальных служат значения, полученные на границах подобластей, где применяются явные схемы.

**3.3.5. Схемы с центральными разностями.** Рассмотренные выше неявные схемы (3.3.1), (3.3.4), (3.3.5) учитывают расположение характеристик или в самой конструкции схемы, или в способе реализации ее. Приведем две схемы, не зависящие (по крайней мере формально) от направления характеристик:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^n, \quad (3.3.6)$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + 0,5a_m^n \left[ \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right] = f_m^{n+1/2}. \quad (3.3.7)$$

Ошибка аппроксимации для (3.3.6) есть  $O(\tau) + O(h^2)$ , для (3.3.7) —  $O(\tau^2) + O(h^2)$ . Легко проверить, что обе схемы безусловно устойчивы. Система уравнений на верхнем временном слое имеет трехдиагональную матрицу. Если граничные значения искомой функции известны и слева, и справа, то можно использовать трехточечную прогонку, описанную в п. 2.2.5. Если какое-либо из граничных значений не задано, то следует записать дополнительное сеточное граничное условие (см. п. 3.2.5), воспользовавшись неявной схемой, шаблон которой содержит два узла на верхнем слое.

**3.3.6. Сравнение явных и неявных схем.** Условие Куранта, обеспечивающее устойчивость явных схем, ограни-

чивает шаг по времени:  $\tau \sim h/a$ . Покажем, что это ограничение является естественным с точки зрения требований точности для истинно нестационарных решений, зависящих от  $t$  столь же сильно, как и от  $x$ .

Рассмотрим решение  $u = \varphi(x - at)$  для уравнения (3.1.1) при  $f \equiv 0$ ,  $a = \text{const}$ ,  $a > 0$ . Для схем «явный угол» и «неявный левый угол» главная часть ошибки аппроксимации есть сумма двух слагаемых  $E_h$  и  $E_\tau$ :  $E_h = \frac{ah}{2} \varphi''$ ,  $E_\tau = \frac{a^2 \tau}{2} \varphi''$ . При оптимальном соотношении шагов должно быть  $E_\tau \sim E_h$  (иначе один из шагов можно было бы увеличить), откуда следует  $k = a\tau/h \sim 1$ .

Для квазистационарных решений, слабо зависящих от времени, условие Куранта может быть чрезмерно жестким с точки зрения требований точности. Рассмотрим предельный случай стационарного решения  $u = u(x)$  для уравнения (3.1.1) при  $a = \text{const}$ ,  $f = f(x)$ . Ошибка аппроксимации связана только с пространственным шагом. Требования точности временной шаг никак не ограничивают, однако при применении явных схем приходится полагать  $\tau \sim h/a$  по требованиям устойчивости. При расчете квазистационарных решений целесообразно применять неявные схемы. На истинно нестационарных решениях возможность несколько увеличить шаг по времени обычно не окупает дополнительных издержек, связанных с реализацией неявных схем.

### § 3.4. Качественные свойства схем первого порядка точности

**3.4.1. Свойство позитивности.** Схемы первого порядка точности (3.2.1), (3.2.4), (3.3.4), (3.3.5), как и аппроксимируемое ими уравнение (3.1.1), обладают свойством позитивности: при неотрицательной правой части, неотрицательных граничных и начальных значениях искомая функция также неотрицательна (см. п. 3.1.4).

Докажем это утверждение для случая, когда область  $G$  есть прямоугольник  $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$ . Разрешим (3.2.1<sup>+</sup>) относительно  $u_m^{n+1}$ ; получим

$$u_m^{n+1} = (1 - k_m^n) u_m^n + k_m^n u_{m-1}^n + \tau f_m^n. \quad (3.4.1)$$

Согласно условию устойчивости  $k_m^n \leq 1$ . Из (3.4.1) непосредственно следует, что  $u_m^{n+1} \geq 0$  для  $m$  от 1 до  $M$ , если

$u_m^n \geq 0$  для всех  $m$ . Остается отметить, что  $u_0^{n+1} \geq 0$  по предположению.

Несколько сложнее проводится доказательство для неявных схем (3.3.4) и (3.3.5). Из (3.3.4) находим

$$u_m^{n+1} = \frac{k_m^n}{1+k_m^n} u_{m-1}^{n+1} + \frac{u_m^n}{1+k_m^n} + \frac{\tau f_m^n}{1+k_m^n}, \quad (3.4.2)$$

$$m = 1, 2, \dots, M.$$

Предполагая, что  $u_m^n \geq 0$  и пользуясь тем, что  $u_0^{n+1} \geq 0$ , из (3.4.2) находим последовательно  $u_1^{n+1} \geq 0$ ,  $u_2^{n+1} \geq 0$  и т. д. Для схемы (3.3.5) имеем

$$u_{m+1}^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{k_m^n}\right) u_{m+1}^{n+1} + \frac{1}{k_m^n} u_m^n + \frac{\tau}{k_m^n} f_m^n,$$

$$m = 1, 2, \dots, M,$$

и рассуждаем таким же образом. При этом учитываем, что  $k_m^n \geq 1$  согласно условию устойчивости схемы (3.3.5).

Обратимся к схеме Лакса (3.2.4). Находим

$$u_m^{n+1} = 0,5(1+k_m^n)u_{m-1}^n + 0,5(1-k_m^n)u_{m+1}^n + \tau f_m^n, \quad (3.4.3)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1.$$

Пусть  $k_m^n \leq 1$ . Предположим, что  $u_m^n \geq 0$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ . Из (3.4.3) следует, что  $u_m^{n+1} \geq 0$  для всех  $m$ , кроме  $m = 0$  и  $m = M$ . По предположению  $u_0^{n+1} \geq 0$ . Значение  $u_M^{n+1}$  следует определить с помощью дополнительного сеточного граничного условия (см. п. 3.2.5); если оно положительно (например, схема «уголок»), то  $u_M^{n+1} \geq 0$ .

Свойство позитивности является естественным и очевидным для дифференциального уравнения (3.1.1). Что касается сеточных аппроксимаций, то позитивными могут быть только схемы первого порядка точности (теорема Годунова). Примеры нарушения позитивности для некоторых схем второго порядка точности будут приведены в § 3.5.

**3.4.2. Свойство монотонности.** Свойством сохранения монотонности сеточного пространственного профиля при переходе от  $n$  к  $n+1$ , как и свойством позитивности, обладают только схемы первого порядка точности. Особенно просто свойство монотонности доказывается для схемы «явный уголок» (3.2.1). Как было отмечено в п. 3.2.1, при



переходе от  $n$  к  $n + 1$  эта схема реализует линейное интерполирование пространственного профиля, а также его сдвиг по пространственной переменной. Обе эти операции сохраняют монотонность.

Примеры, показывающие, что для схем второго порядка точности свойство монотонности может не выполняться, будут приведены в § 3.5.

**3.4.3. Диссипативные свойства.** Как отмечалось в п. 3.1.6, особенности, порождаемые начальными и граничными функциями, переносятся вдоль характеристик. В случае «чистого переноса», т. е. при  $f \equiv 0$ , изменение пространственного профиля решения вызывается только сближением или расхождением характеристик. Схемы (3.2.1), (3.2.4), (3.3.4), (3.3.5) обладают собственными сглаживающими (диссипативными) свойствами. Так, например, начальный разрыв превращается в размытую волну — переходную зону, ширина которой со временем растет (если этому не препятствует сближение характеристик).

На эвристическом уровне диссипативные свойства схем могут быть изучены при  $f \equiv 0$ ,  $a = \text{const}$ ,  $a > 0$  с помощью решений специального вида:

$$u = \exp(-ia\omega t) \exp(i\omega x).$$

Для дифференциального уравнения (3.1.1) множитель перехода, характеризующий изменение решения за один временной шаг, есть  $\lambda = \exp(-ia\omega\tau)$ . Для схемы «явный уголок» (3.2.1) множитель перехода есть  $\lambda_h = (1 - k) + k \exp(-i\alpha)$ ,  $\alpha = \omega h$ . Сравним  $|\lambda_h|$  и  $|\lambda| = 1$ . В табл. 3.1 приведены значения  $|\lambda_h|$  для двух значений  $k$  и нескольких значений  $\alpha$ .

Таблица 3.1

$\alpha \backslash h$	0,2π	0,4π	0,6π	0,8π	π
0,5	0,95	0,81	0,59	0,31	0
0,9	0,96	0,94	0,87	0,82	0,80

Из данных таблицы следует, что для схемы (3.2.1) амплитуды гармонических по  $x$  колебаний со временем уменьшаются; при этом высокочастотные колебания диссипируют быстрее низкочастотных, что и приводит к сглаживанию решения.

**3.4.4. Аппроксимационная вязкость.** Диссипативные свойства схем первого порядка точности можно характеризовать также с помощью модельных дифференциальных уравнений параболического типа.

Рассмотрим схему «явный уголок» (3.2.1). Положим ради простоты  $f \equiv 0$ ,  $a = \text{const}$ ,  $a > 0$ . Пусть  $k \leq 1$  в соответствии с условием устойчивости. Выпишем главную часть погрешности аппроксимации:

$$E = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{ah}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.4.4)$$

Выразив  $\partial^2 u / \partial t^2$  через  $\partial^2 u / \partial x^2$  с помощью уравнения (3.1.1) с учетом принятых упрощающих предположений, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Преобразуем (3.4.4) к виду

$$- \frac{ah}{2} \left( 1 - \frac{a\tau}{h} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Таким образом, схема (3.2.1), первоначально построенная для уравнения первого порядка (3.1.1), аппроксимирует также (и притом с большей точностью) следующее дифференциальное уравнение второго порядка с малым коэффициентом при старшей производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.4.5)$$

$$\nu = ah(1 - k)/2. \quad (3.4.6)$$

Уравнение (3.4.5) с коэффициентом  $\nu$ , определяемым по (3.4.6), называется *первым дифференциальным приближением* (ПДП) схемы (3.2.1).

Легко подсчитать, что для схемы «неявный левый уголок» (3.3.4) ПДП также имеет вид (3.4.5); при этом

$$\nu = ah(1 + k)/2. \quad (3.4.7)$$

Для схемы «неявный правый уголок» (3.3.5) получаем ПДП вида (3.4.5), где

$$\nu = ah(k - 1)/2. \quad (3.4.8)$$

Условие устойчивости схемы  $k \geq 1$  обеспечивает неотрицательность  $\nu$ .

Для схемы Лакса (3.2.4) находим ПДП вида (3.4.5) при

$$\nu = ah(1 - k^2)/(2k). \quad (3.4.9)$$

Для всех рассмотренных выше схем ПДП является параболическим уравнением. Его диссипативные свойства связаны с членом  $\nu \partial^2 u / \partial x^2$ ; это слагаемое называют *аппроксимационной* или *схемной вязкостью*. Мы будем также пользоваться термином *вязкость аппроксимации*.

Предполагая, что диссипативные свойства схемы моделируются первым дифференциальным приближением, можно высказывать предположительные суждения о свойствах схемы на основании свойств ее аппроксимационной вязкости.

Так, для схемы «явный уголок» из (3.4.6) следует, что диссипативные эффекты должны сильнее проявляться при малых значениях числа Куранта  $k$ . Сравнив (3.4.7) с (3.4.6) и (3.4.8), можно заключить, что при одном и том же значении  $k$  схема «неявный левый уголок» обладает более сильным диссипативным действием, чем «явный уголок» или «неявный правый уголок».

Из (3.4.9) выводим, что при умеренных и особенно при малых значениях числа Куранта схема Лакса должна весьма сильно сглаживать решение. Так, уже при  $k = 0,5$  коэффициент  $\nu$  для нее в три раза больше, чем для схемы «явный уголок».

Подобные суждения достаточно хорошо подтверждаются в численных экспериментах.

**3.4.5. Пример.** Для уравнения  $\partial u / \partial t + \partial u / \partial x = 0$  рассматривается краевая задача с условиями

$$0 \leq x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T; \quad u(0, x) = 0, \quad u(t, 0) = 1.$$

Для фиксированного  $t$  решение этой задачи есть кусочно-постоянная функция  $x$ :  $u = 0$ , если  $x > t$ ;  $u = 1$ , если  $x < t$ . Численно задача решалась с помощью схемы «явный уголок» и схемы Лакса на сетке с шагами  $h = 0,005$  и  $\tau = 0,0025$  ( $k = 0,5$ ). Результаты расчетов выборочно приведены в табл. 3.2 и 3.3 для  $t = 0,05$ . Во второй строке каждой таблицы указаны значения точного решения для соответствующего ПДП. Мы видим, что ПДП неплохо описывает численные решения. Видно также, что размытие разрыва для схемы Лакса заметно больше, чем для «явного уголка».

Схема «явный угол»

0,9999	0,9977	0,9682	0,8203	0,5000	0,1796	0,0317	0,0022
0,9998	0,9963	0,9631	0,8144	0,5000	0,1855	0,0368	0,0036

Таблица 3.3

Схема Лакса

0,9918	0,9617	0,8859	0,7433	0,5388	0,3167	0,1391	0,0400
0,9854	0,9439	0,8533	0,7006	0,5024	0,3042	0,1515	0,0609

### § 3.5. Регуляризация схем второго порядка точности

**3.5.1. Предварительные замечания.** Если решение обладает достаточной гладкостью, то схемы второго порядка точности обнаруживают несомненные преимущества по сравнению со схемами первого порядка. Они позволяют вести расчет с большими шагами сетки, что обычно окупает дополнительные затраты времени программиста и ЭВМ, вызванные усложнением алгоритма.

С другой стороны, точные схемы имеют и некоторые существенные недостатки. Они требуют большей гладкости решения, поскольку в ошибку аппроксимации входят производные высоких порядков. При недостаточной гладкости решения формальное повышение точности схемы может привести к увеличению фактической погрешности и искажению качественных черт приближенного решения.

Ниже на примерах будет показано, что схемы второго порядка точности не обладают основными свойствами дифференциального уравнения (3.1.1) — позитивностью, и монотонностью. Вследствие этого при расчете негладких и разрывных решений могут возникать различные патологические эффекты, осложняющие интерпретацию численных результатов. Для подавления этих искажений применяются различные приемы регуляризации.

**3.5.2. Примеры нерегулярного поведения схем.** Покажем, что для схемы «чехарда» (3.2.7), (3.2.8) не выполняется свойство позитивности. В уравнении (3.1.1) положим  $f \equiv 0$ ,  $a \equiv 1$  и рассмотрим задачу Коши с начальной

функцией, являющейся сеточным аналогом функции точечного источника:  $u_0^0 = 1$ ,  $u_m^0 = 0$  при  $m \neq 0$ .

На первом слое значения, отличные от нуля, получим в трех узлах:

$$u_{-1}^1 = -0,5k(1-k), \quad u_0^1 = 1-k^2, \quad u_1^1 = 0,5k(1+k).$$

Здесь, как обычно,  $k$  — число Куранта. При  $k < 1$  имеем  $u_{-1}^1 < 0$ , т. е. свойство позитивности нарушается. Легко видеть, что нарушение позитивности наиболее выражено при  $k = 0,5$ . Для  $k = 0,5$  имеем  $u_{-1}^1 = -0,125$ ,  $u_0^1 = 0,750$ ,  $u_1^1 = 0,375$ . Пользуясь схемой «явный уголок» (3.2.1), находим  $u_0^1 = 0,5$ ,  $u_1^1 = 0,5$ ; прочие значения на первом слое — нули.

В табл. 3.4 сопоставлены результаты расчетов по рассматриваемым схемам для  $n = 2$  (при  $k = 0,5$ ).

Таблица 3.4

$m$ \ Schema	-2	-1	0	1	2
«Чехарда»	0,015	-0,187	0,469	0,562	0,141
«Явный уголок»	0	0	0,250	0,500	0,250

Очевидно, что с качественной точки зрения схема «явный уголок» лучше воспроизводит точное решение ( $u = 1$  при  $x = t$ ,  $u = 0$  при  $x \neq t$ ).

Для того же уравнения рассмотрим краевую задачу с условиями  $0 \leq x < +\infty$ ,  $0 \leq t \leq T$ ;  $u(0, x) = 0$ ,  $u(t, 0) = 1$ . Решение этой задачи есть разрывная функция, равная 1 при  $x < t$  и 0 при  $x > t$ . Расчет по схеме «прямоугольник» (3.3.1) с  $h = 0,01$ ,  $\tau = 0,05$ , что соответствует  $k = 5$ , дал следующие результаты на десятом слое по времени (для  $m$  от 1 до 60), приведенные в табл. 3.5.

Таблица 3.5

1,01	0,95	1,08	1,01	0,92	0,94	1,03	1,10	1,08	1,01
0,92	0,88	0,90	0,96	1,04	1,10	1,14	1,13	1,06	1,01
0,94	0,87	0,83	0,82	0,84	0,88	0,95	1,02	1,10	1,16
1,21	1,25	1,26	1,26	1,23	1,18	1,13	1,06	0,98	0,89
0,81	0,72	0,65	0,56	0,49	0,42	0,36	0,31	0,26	0,22
0,18	0,15	0,13	0,10	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03

Имеются заметные нарушения монотонности. Осцилляции на верхнем уровне ( $u \approx 1$ ) достигают +26% и -18%.

**3.5.3. Явное сглаживание.** Простой пример регуляризации доставляет следующая процедура. Значения  $u_m^{n+1}$  на верхнем слое, полученные с помощью той или иной схемы, заменяются сглаженными  $\bar{u}_m^{n+1}$ :

$$\bar{u}_m^{n+1} = (1 - 2\alpha)u_m^{n+1} + \alpha u_{m-1}^{n+1} + \alpha u_{m+1}^{n+1}. \quad (3.5.1)$$

Здесь  $\alpha$  — некоторое положительное число (параметр сглаживания).

При  $\alpha \leq 0,5$  операция (3.5.1) реализует усреднение (взвешивание) значений в трех соседних узлах с неотрицательными весовыми коэффициентами. На решениях специального вида, гармонически зависящих от  $x$ , сглаживанию по формуле (3.5.1) соответствует дополнительный множитель

$$\lambda_{\text{сгл}} = 1 - 4\alpha \sin^2 \frac{\omega h}{2}. \quad (3.5.2)$$

При  $\alpha \leq 0,5$  имеем  $|\lambda_{\text{сгл}}| \leq 1$ , т. е. сглаживание не нарушает устойчивости основной схемы. При  $\alpha \leq 0,25$  с увеличением  $\omega$  от 0 до  $\pi/h$  модуль  $\lambda_{\text{сгл}}$  монотонно уменьшается, так что высокие гармоники подавляются сглаживанием сильнее. Влияние параметра сглаживания  $\alpha$  на  $\lambda_{\text{сгл}}$  количественно характеризуется данными табл. 3.6.

Т а б л и ц а 3.6

$\omega h \backslash \alpha$	0,2 $\pi$	0,4 $\pi$	0,6 $\pi$	0,8 $\pi$	$\pi$
0,01	0,996	0,986	0,974	0,964	0,960
0,05	0,981	0,931	0,869	0,819	0,800
0,10	0,962	0,862	0,738	0,638	0,600
0,25	0,905	0,655	0,345	0,095	0,000
0,50	0,809	0,309	-0,309	-0,809	-1,000

Ясно, что параметр сглаживания  $\alpha$  не следует выбирать слишком большим, чтобы не подавлять низкочастотные составляющие решения. С другой стороны, при слишком малом  $\alpha$  эффект регуляризации может оказаться недостаточным. Обычно параметр сглаживания  $\alpha$  подбирают опытным путем, сравнивая результаты расчетов при различных значениях  $\alpha$ . Выбор  $\alpha$  считают удовлетворительным, если при увеличении или уменьшении  $\alpha$ , ска-

жем в 1,5—2 раза, численное решение не меняется в пределах требуемой точности. Малое изменение решения свидетельствует, с одной стороны, о достаточно эффективном подавлении высокочастотных помех, которые при недостаточном сглаживании обнаружили бы себя для меньшего  $\alpha$ , и, с другой стороны, о малом искажающем влиянии сглаживания на решение (это влияние, будь оно сильным, обнаружилось бы через заметное «гладкое» различие двух графиков).

Применение сглаживания требует осторожности и некоторого глазомера, что приобретается опытом. Большой опасностью представляется завышение  $\alpha$ ; «красивые» гладкие кривые воспринимаются обычно менее критически, чем графики, испещренные осцилляциями.

**3.5.4. «Вязкость сглаживания».** Сглаживание по формуле (3.5.1) можно интерпретировать как аппроксимацию диссипативного эффекта, связанного с некоторым параболическим уравнением. Положим в формуле (3.5.1)  $\alpha = \varepsilon\tau/h^2$  и преобразуем ее к виду

$$\frac{\bar{u}_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \varepsilon \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}. \quad (3.5.3)$$

Мы получили схему, аппроксимирующую уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.5.4)$$

На основании принципа расщепления (см. п. 2.2.4) можно ожидать, что при последовательной реализации сеточных аналогов уравнений (3.1.1) и (3.5.4) аппроксимируется «составное» уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.5.5)$$

которое описывает конвективный перенос с диссипацией. Модельные примеры и численные эксперименты подтверждают это предположение.

Представление параметра сглаживания в виде  $\alpha = \varepsilon\tau/h^2$  облегчает выбор для него подходящих значений и выявляет его зависимость от шагов сетки  $\tau$ ,  $h$ . По аналогии с «вязкостью аппроксимации» слагаемое  $\varepsilon\partial^2 u/\partial x^2$  в уравнении (3.5.5) можно назвать «вязкостью сглаживания».

**3.5.5. Неявное сглаживание.** Аппроксимируя (3.5.4) с помощью неявной четырехточечной схемы (2.4.10), получаем формулу неявного сглаживания

$$\alpha \bar{u}_{m+1}^{n+1} - (1 + 2\alpha) \bar{u}_m^{n+1} + \alpha \bar{u}_{m-1}^{n+1} = -u_m^{n+1}, \quad \alpha = \varepsilon \tau / h^2. \quad (3.5.6)$$

Уравнение (3.5.6) решается с помощью трехточечной прогонки (см. п. 2.2.5). Легко убедиться в том, что неявное сглаживание устойчиво при любых положительных значениях  $\alpha$ . Поэтому оно применяется в тех случаях, когда нужна интенсивная регуляризация (например, при расчете разрывных решений).

**3.5.6. «Искусственная вязкость».** В качестве исходного пункта принимается уравнение (3.5.5). Добавление к уравнению переноса «искусственной вязкости»  $\varepsilon \partial^2 u / \partial x^2$  делает решение непрерывным и гладким; разрывы заменяются переходными зонами, ширина которых зависит от  $\varepsilon$ . Уравнение (3.5.5) аппроксимируется с помощью той или иной схемы второго порядка точности. В методе «искусственной вязкости» отрицательные свойства схемы как бы компенсируются улучшением свойств уравнения.

Так как профиль решения на последующем слое несколько смещен относительно профиля на предыдущем слое, то целесообразно сглаживающую добавку записывать на верхнем слое. При обособлении этапа сглаживания это делается автоматически.

**3.5.7. Повышение промежуточного слоя.** Способы регуляризации, описанные выше, непосредственно вводят «вязкость», содержащую вторую производную по пространственной переменной. Для регуляризации можно также использовать «временные вязкости», содержащие дифференцирование по временной переменной. При анализе диссипативных свойств «временных вязкостей» дифференцирование по  $t$  можно заменить дифференцированием по  $x$  с помощью уравнения (3.1.1) (см. п. 3.4.4).

Так, для схемы «чехарда» в уравнениях (3.2.7), определяющих значения на промежуточном слое, вместо  $0,5\tau$  пишут  $(0,5 + \mu)\tau$ , где  $\mu$  — положительное число (параметр повышения промежуточного слоя). При этом в  $u^{n+1/2}$  появляется добавка, главная часть которой, как легко видеть, есть  $\mu\tau \frac{\partial u}{\partial t}$ . Это порождает в значениях  $u^{n+1}$ , вычисляемых по (3.2.8), добавку, главная часть которой равна

$$-\tau\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu\tau \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \tau\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu\tau\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

(для простоты мы положили  $f = 0$ ).



Повышение промежуточного слоя моделируется добавлением в правую часть (3.1.1) слагаемого  $\varepsilon a \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  при  $\varepsilon = \mu t$ , что указывает на диссипативный характер получаемого эффекта.

Для неявных схем (3.3.1), (3.3.7) коэффициенты 0,5 при выражениях, аппроксимирующих  $a \frac{\partial u}{\partial x}$  на верхнем и нижнем слоях, заменяются соответственно на  $0,5 + \mu$  и  $0,5 - \mu$ , где  $\mu$  — положительное число. Легко видеть, что при этом в составе погрешности аппроксимации появляется слагаемое  $\mu t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . При  $f = 0$  и  $a = \text{const}$  оно преобразуется к виду  $\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\varepsilon = \mu t a^2$ .

«Временные вязкости» обладают несколько большей «мобильностью» по сравнению с «пространственными», поскольку они быстрее реагируют на резкие изменения искомой функции во времени.

## МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИССИПАЦИИ, КОНВЕКЦИИ И КИНЕТИКИ

### § 4.1. Уравнения; краевые задачи; свойства решений

**4.1.1. Модельные уравнения.** Перенос тепла (вещества) теплопроводностью (диффузией) и конвекцией описывают с помощью дифференциальных уравнений параболического типа. Общее модельное уравнение диссипации, конвекции и кинетики запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x). \quad (4.1.1)$$

Здесь  $\nu$ ,  $a$ ,  $b$  — постоянные коэффициенты,  $\nu > 0$ . Первое слагаемое в правой части уравнения (4.1.1) соответствует переносу тепла теплопроводностью (или вещества диффузией), второе — конвективному переносу, третье — источнику, пропорциональному температуре или концентрации («кинетический член»), четвертое — внешнему источнику. Для определенности будем рассматривать тепловую интерпретацию (4.1.1).

Мы будем рассматривать также следующие частные случаи уравнения (4.1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.1.4)$$

**4.1.2. Краевые задачи.** Задача Коши для уравнения (4.1.1) содержит дополнительные условия

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0, x) = \varphi(x). \quad (4.1.5)$$

Здесь  $\varphi(x)$  — известная (начальная) функция. Задача Коши (4.1.1), (4.1.5) описывает одномерное распространение тепла в неограниченной однородной среде.

Первая краевая задача для уравнения (4.1.1), соответствующая одномерному распространению тепла в ограниченной среде при заданных значениях температур на границах, формулируется следующим образом:

$$0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0, x) = \varphi(x); \quad (4.1.6)$$

$$u(t, 0) = f_0(t), \quad u(t, X) = f_1(t). \quad (4.1.7)$$

Здесь  $f_0, f_1$  — известные (граничные) функции.

Вторая краевая задача соответствует заданию на границах тепловых потоков; условия (4.1.6) сохраняются, а условия (4.1.7) заменяются следующими:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varphi_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=X} = \varphi_1(t). \quad (4.1.8)$$

Наиболее общие режимы теплообмена через границы описываются с помощью граничных условий третьей краевой задачи

$$\alpha_0(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_0(t) u = \gamma_0(t) \quad \text{при } x = 0, \quad (4.1.9)$$

$$\alpha_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1(t) u = \gamma_1(t) \quad \text{при } x = X.$$

**4.1.3. Свойство позитивности.** Рассмотрим первую краевую задачу (4.1.1), (4.1.6), (4.1.7). Пусть  $\varphi(x) \geq 0$ ,  $f_0(t) \geq 0$ ,  $f_1(t) \geq 0$  и  $f(t, x) \geq 0$ . Тогда  $u(t, x) \geq 0$ . Это утверждение нетрудно доказать математически строго, но мы ограничимся физически очевидными соображениями. При  $b = 0$  имеем кондуктивный и конвективный перенос тепла с неотрицательным источником при неотрицательных начальных и граничных значениях температуры. Физически очевидно, что во внутренних точках температура не может принимать отрицательные значения. При  $b \neq 0$  замена искомой функции  $u = v \exp(bt)$  возвращает нас к случаю  $b = 0$ .

**4.1.4. Принцип максимума.** Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (4.1.3). Обозначим

$$M(t_1) = \max \{ \max \varphi(x); \max f_0(t), 0 \leq t \leq t_1; \max f_1(t), 0 \leq t \leq t_1 \},$$

$$m(t_1) = \min \{ \min \varphi(x); \min f_0(t), 0 \leq t \leq t_1; \min f_1(t), 0 \leq t \leq t_1 \}.$$

Тогда  $m(t_1) \leq u(t, x) \leq M(t_1)$ . Таким образом, искомая функция может принимать наибольшее и наименьшее значения только при  $t = 0$ , при  $x = 0$  и при  $x = X$ . В слу-

чае неоднородного уравнения максимум  $u(t, x)$  можно оценить через  $M(t_1)$  и  $\max f(t, x)$ ,  $t \leq t_1$ . Имеется аналогичная оценка минимума  $u(t, x)$ .

**4.1.5. Свойство стабилизации.** Рассмотрим третью краевую задачу (4.1.1), (4.1.6), (4.1.9) в случае  $T = \infty$ . Пусть  $f(t, x) \rightarrow f(x)$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  стабилизируются, т. е. стремятся к некоторым предельным значениям. Тогда при дополнительных ограничениях относительно условий (4.1.9) и коэффициента  $b$  решение  $u(t, x)$  также стабилизируется; точнее говоря,  $u(t, x)$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к решению предельной стационарной краевой задачи. Упомянутые дополнительные ограничения выполнены, в частности, для первой краевой задачи при  $b \leq 0$ .

**4.1.6. Внутренняя гладкость решения.** Можно доказать, что гладкость решения в любой внутренней подобласти определяется гладкостью функции  $f(t, x)$  и никак не зависит от гладкости начальной и граничных функций. В частности, если  $f(t, x)$  бесконечно дифференцируема, то  $u(t, x)$  также бесконечно дифференцируема во внутренних точках. Распространение особенностей краевых значений внутрь области, характерное для конвективного переноса, не происходит при диссипативных процессах.

**4.1.7. Решения специального вида.** Однородное уравнение (4.1.2) имеет решения вида  $u(t, x) = \exp(\mu t) \times \exp(i\omega x)$ . Подставив это выражение в (4.1.2), найдем  $\mu = -v\omega^2 - i\omega a + b$ , поэтому

$$u(t, x) = \exp[-(v\omega^2 - b)t] \exp[i\omega(x - at)]. \quad (4.1.10)$$

Пространственный профиль специального решения (4.1.10) представляет монохроматическую волну. Волна смещается в направлении оси  $x$  со скоростью  $a$ . Изменение амплитуды волны со временем определяется первым множителем правой части (4.1.10). Если  $b \leq 0$ , то амплитуда экспоненциально убывает при любом  $\omega \neq 0$ . Если же  $b > 0$ , то для частот, ограниченных неравенством  $\omega^2 < b/v$ , имеет место возрастание амплитуды. Для более высоких частот амплитуда убывает; при этом скорость затухания очень резко растет с увеличением частоты. Быстрое затухание высокочастотных составляющих обеспечивает гладкость решения для  $t > 0$  при любой начальной функции.

**4.1.8. Распад начального разрыва.** Для уравнения (4.1.4) рассмотрим задачу Коши с разрывной (кусочно-постоянной) начальной функцией:  $\varphi(x) = 1$  при  $x \leq 0$ ,

$\varphi(x) = 0$  при  $x > 0$ . Применяя формулу Пуассона, находим

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi vt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4vt}\right] \varphi(x') dx' = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi vt}} \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4vt}\right] dx' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{vt}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{vt}}} e^{-z^2} dz \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{vt}}\right). \quad (4.1.11)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\Phi$  — функция, называемая интегралом ошибок; для нее имеются подробные таблицы. Так как  $\Phi$  зависит только от комбинации  $x/(2\sqrt{vt})$ , то зависимость от  $t$  пространственного распределения сводится к изменению масштаба по  $x$  (рис. 4.1).

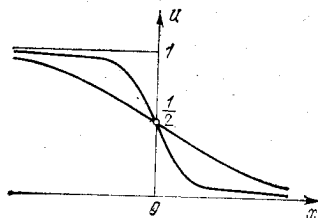


Рис. 4.1.

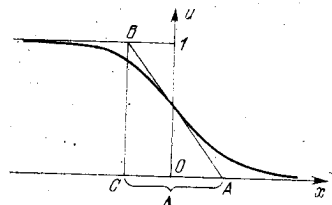


Рис. 4.2.

Легко убедиться в том, что функция  $u(t, x)$  при  $t > 0$  имеет производные всех порядков. Условную ширину переходной зоны  $\Delta = AC$  можно определить с помощью построения, указанного на рис. 4.2;  $AB$  — касательная в точке перегиба. Имеем  $\Delta = 1/\Gamma$ ,  $\Gamma = \max |du/\partial x| = 1/2\sqrt{v\pi t}$ , т. е. условная ширина переходной зоны пропорциональна  $\sqrt{vt}$ .

Изучим теперь задачу Коши с той же разрывной начальной функцией для уравнения (4.1.3), которое описывает процесс теплопроводности в потоке, движущемся с постоянной скоростью  $a$ . Перейдем к системе координат, связанной с потоком, т. е. введем новую пространственную переменную  $x_1$  по формуле  $x_1 = x - at$ . Легко видеть, что уравнение (4.1.3) обратится в уравнение (4.1.4). Таким

образом, решение имеет вид (4.1.11) с заменой  $x$  на  $x - at$ . Геометрически это означает, что пространственные профили отличаются от рассмотренных выше ( $a = 0$ ) сдвигом на  $at$ .

## § 4.2. Основные аппроксимации

**4.2.1. Явная четырехточечная схема.** Аппроксимируя пространственные производные центральными разностными отношениями, а производную по  $t$  — односторонним разностным отношением «вперед», получим для уравнения (4.1.1) явную схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n. \quad (4.2.1)$$

Ошибка аппроксимации для (4.2.1) есть  $E = O(\tau) + O(h^2)$ . При исследовании устойчивости находим

$$\lambda = 1 - 4 \frac{\nu\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2} - i \frac{a\tau}{h} \sin \omega h + b\tau.$$

Для условия Неймана (2.4.4) члены порядка  $\tau$  несущественны, поэтому при обычном (формальном) исследовании устойчивости слагаемое  $b\tau$  можно опустить, что мы сейчас и сделаем.

Удобно ввести следующие обозначения:

$$z = \sin^2 \frac{\omega h}{2}, \quad k_{\Pi} = \frac{2\nu\tau}{h^2}, \quad k_{\Gamma} = \frac{|a|\tau}{h}. \quad (4.2.2)$$

Будем называть  $k_{\Pi}$  и  $k_{\Gamma}$  соответственно параболическим и гиперболическим числами Куранта. Условие  $|\lambda| \leq 1$ , достаточное для устойчивости, запишем в виде  $1 - |\lambda|^2 \geq 0$ . Последнее неравенство после простых преобразований приводится к виду

$$4k_{\Pi}z - 4k_{\Pi}^2z^2 - 4k_{\Gamma}^2z(1-z) \geq 0,$$

откуда

$$k_{\Pi} - k_{\Pi}^2z - k_{\Gamma}^2(1-z) \geq 0.$$

Левая часть последнего неравенства является линейной функцией  $z$ , поэтому достаточно проверить неравенство в крайних точках интервала изменения  $z$ , т. е. при  $z = 0$  и  $z = 1$ . Полагая  $z = 1$ , получим  $k_{\Pi} \geq k_{\Pi}^2$ , т. е.

$$k_{\Pi} \leq 1, \quad \tau \leq h^2/(2\nu). \quad (4.2.3)$$

При  $z = 0$  имеем  $k_{\Pi} \geq k_{\Gamma}^2$  или  $k_{\Gamma}^2 \leq k_{\Gamma}$ , откуда

$$\tau \leq 2\nu/a^2. \quad (4.2.4)$$

Очевидно, что с формальной точки зрения условие (4.2.4) не является ограничительным, так как  $\tau \rightarrow 0$ . Однако в практических расчетах, выполняемых при конечных значениях временного шага, нарушение условия (4.2.4) приводит к ощутимым неприятностям (*практическая неустойчивость*).

Такую же оговорку следует сделать относительно возможного влияния опущенного нами по формальным соображениям члена  $bv$ . Если коэффициент  $b$  велик, то роль этого члена в устойчивости схемы может быть определяющей (см. ниже § 4.4).

**4.2.2. Неявная четырехточечная схема.** Перенесем сеточные аналоги производных по  $x$  и член  $bv$  на верхний слой:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + bu_m^{n+1} + f_m^n. \quad (4.2.5)$$

Погрешность аппроксимации есть  $O(\tau) + O(h^2)$ . Исследуя устойчивость, находим

$$\lambda = 1 \left| \left( 1 + 4 \frac{\nu\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2} + i \frac{a\tau}{h} \sin \omega h - b\tau \right) \right|.$$

При  $b = 0$  имеем  $|\lambda| \leq 1$ , поэтому формальная устойчивость ( $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ ) имеет место при любых  $k_{\Pi}$  и  $k_{\Gamma}$ . Схема (4.2.5) реализуется с помощью трехточечной прогонки, описанной в п. 2.2.5.

**4.2.3. Неявная шеститочечная симметричная схема.** По аналогии со схемами (2.2.9) и (2.2.14) построим для уравнения (4.1.1) неявную аппроксимацию, имеющую второй порядок точности относительно  $\tau$  и  $h$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = & \\ = \frac{\nu}{2} \left[ \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right] - & \\ - \frac{a}{2} \left[ \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right] + \frac{b}{2} (u_m^{n+1} + u_m^n) + f_m^{n+1/2}. & \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Полагая, как и выше,  $b = 0$ , находим

$$\lambda = \left( 1 - 2 \frac{\nu\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2} - \frac{i}{2} \frac{a\tau}{h} \sin \omega h \right) \times \\ \times \left( 1 + 2 \frac{\nu\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2} + \frac{i}{2} \frac{a\tau}{h} \sin \omega h \right)^{-1}. \quad (4.2.7)$$

Очевидно, что  $|\lambda| \leq 1$  для любых  $\tau$ ,  $h$ , следовательно, схема (4.2.6) безусловно устойчива. Ошибка аппроксимации схемы (4.2.6) есть  $O(\tau^2) + O(h^2)$ , поэтому на гладких решениях схема (4.2.6) позволяет вести расчет с большими шагами по времени по сравнению с явной схемой (4.2.1). При этом дополнительные затраты машинного времени, связанные с реализацией схемы (4.2.6), как правило, окупаются.

**4.2.4. Явная трехслойная схема «ромб».** Ограничиваясь модельным уравнением (4.1.4), запишем трехслойную явную схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2}. \quad (4.2.8)$$

(В зарубежной литературе (4.2.8) называют схемой Дюфорта — Франкела). Можно показать, что схема (4.2.8) безусловно устойчива. Сочетание безусловной устойчивости и явности делает эту схему весьма привлекательной — но только на первый взгляд. Ошибка аппроксимации для этой схемы есть

$$E = \nu \left( \frac{\tau}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2) + O(h^2),$$

поэтому для аппроксимации необходимо, чтобы  $\tau/h \rightarrow 0$ . Пусть, например,  $2\nu\tau/h^2 = k_\pi = \text{const}$ ; тогда главный член имеет вид  $\frac{k_\pi}{2} \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . Следовательно, при условии  $k_\pi = \text{const}$  схема (4.2.8) дает аппроксимацию первого порядка относительно  $\tau$ . Главный член ошибки при больших значениях параболического числа Куранта может быть сравним по величине с членами уравнения (4.1.4).

**4.2.5. Комбинированные схемы.** При построении схем для уравнения (4.1.1) можно сочетать различные аппроксимации (явные, неявные, симметричные, односторонние) для отдельных членов уравнения. Так, например, в



схеме

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{\nu}{2} \left( \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) - a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + bu_m^{n+1} + f_m^n$$

комбинируются неявная симметричная аппроксимация диссипативного члена, явная односторонняя аппроксимация конвективного члена и неявная запись кинетического члена. Выбор тех или иных приближений основывается на имеющейся априорной информации о качественных свойствах решения и роли отдельных слагаемых в уравнении.

**4.2.6. Расщепление по физическим процессам.** Качественные свойства решения особенно удобно учитывать с помощью принципа расщепления (см. п. 2.2.4). Если на каждом дробном шаге рассматривается уравнение, описывающее один из рассматриваемых процессов (диссипация, конвекция, кинетика), то говорят о расщеплении по физическим процессам. Сеточная аппроксимация для каждого дробного шага выбирается в соответствии с характером рассматриваемого процесса (так, например, если процесс квазистационарный, то могут быть применены неявные схемы).

**4.2.7. Замечания о качественных свойствах схем.** Основные качественные свойства уравнения диссипативно-конвективных процессов (позитивность, принцип максимума) присущи только некоторым специальным схемам, имеющим первый порядок точности. Схемы второго порядка точности этими свойствами не обладают, поэтому при расчете негладких решений они могут порождать различные патологические эффекты, как и схемы для уравнения конвективного переноса тепла (см. п. 3.5.2).

Можно показать, что для уравнения (4.1.3) при  $a > 0$  обладают свойством позитивности и обеспечивают выполнение принципа максимума следующие две схемы первого порядка точности:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}, \quad (4.2.9)$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h}.$$

(4.2.10)

(Для явной схемы (4.2.9) необходимо ограничить временной шаг  $\tau$  в соответствии с условием устойчивости).

Приведем пример, показывающий, что шеститочечная симметричная схема (4.2.6) не обладает свойством позитивности. Положим  $f \equiv 0$ ,  $a \doteq 0$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1$  и рассмотрим первую краевую задачу с дополнительными условиями  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $u(t, -1) = 0$ ,  $u(t, 1) = 0$ ,  $u(0, x) = \varphi(x)$ . Примем  $h = 0,01$ ,  $\tau = 0,001$ , что соответствует  $k_{\Pi} = 20$ . В качестве начальной функции возьмем сеточную функцию точечного источника:  $u_m^0 = \delta_m^0$ , т. е.  $u_0^0 = 1$ ,  $u_m^0 = 0$  при  $m \neq 0$ . На первом слое для  $m = 0, \pm 1$  получим следующие значения:  $u_{-1}^1 = 0,227$ ,  $u_0^1 = -0,687$ ,  $u_1^1 = 0,227$ .

### § 4.3. Малый параметр при старшей производной

**4.3.1. Предварительные замечания.** В прикладных задачах часто приходится рассматривать дифференциальные уравнения второго порядка с малыми множителями при старших производных. При этом, как правило, возникают *пограничные слои* — узкие области, где решение весьма быстро изменяется. В практических расчетах толщина пограничного слоя иногда может быть порядка шага сетки. В этих условиях обычные сеточные аппроксимации, не учитывающие особый характер изменения решения, могут давать большие погрешности, порождающие не только количественные неточности, но и качественные искажения. Ниже это будет показано на примерах. При этом выяснится, что некоторые специальные схемы могут неплохо воспроизводить решение при сравнительно небольшом числе узлов в пограничном слое.

**4.3.2. Модельная нестационарная задача.** Рассмотрим первую краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a < 0, \quad (4.3.1)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (4.3.2)$$

$$u(0, x) = 0, \quad (4.3.3)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad (4.3.4)$$

$$u(t, 1) = 1. \quad (4.3.5)$$

Приведем тепловую интерпретацию задачи (4.3.1) — (4.3.5): в теплоизолированной трубке, левый конец кото-

рой соответствует точке  $x=0$ , а правый  $x=1$ , течет с постоянной скоростью справа налево жидкий теплоноситель; на концах трубки поддерживаются постоянные значения температуры; в начальный момент температура жидкости в трубке всюду равна нулю.

Представим себе качественную картину явления при малых значениях  $\nu$ . Рассмотрим сначала вырожденную задачу, соответствующую  $\nu=0$ . Вырожденное уравнение таково:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.3.6)$$

Начальное условие (4.3.3) остается неизменным. Так как жидкость втекает в трубку справа, то присоединим к (4.3.6) граничное условие на правом конце, т. е. (4.3.5). Левое граничное условие (4.3.4) для уравнения (4.3.6) является излишним, так как  $a < 0$ ; поэтому опустим его.

Решение вырожденной задачи (4.3.2), (4.3.3), (4.3.5), (4.3.6) легко найти. При  $|a|t < 1$  имеем кусочно-постоянную функцию:  $u=1$ , если  $x > 1+at$ ;  $u=0$ , если  $x < 1+at$  (рис. 4.3 — сплошные жирные линии). При  $|a|t \geq 1$  имеем  $u=1$ . Представление решения на плоскости  $(t, x)$  дано на рис. 4.4.

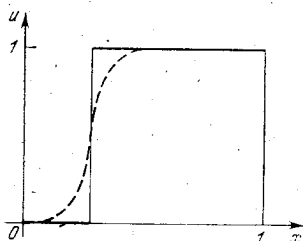


Рис. 4.3.

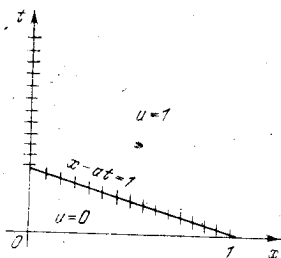


Рис. 4.4.

При малой теплопроводности вместо разрыва, изображенного на рис. 4.4, появится узкая переходная зона (ср. п. 4.1.8) — подвижный внутренний переходный слой. При  $|a|t > 1$  решение вырожденной задачи вблизи точки  $x=0$  должно заметно отличаться от решения исходной задачи, так как первое равно 1 при  $x=0$ , а второе, согласно условию (4.3.4), обращается в нуль. Можно ожидать, что вблизи точки  $x=0$  при  $|a|t > 1$  образуется переходная область — неподвижный пограничный слой

(рис. 4.5). Внутренний переходный слой и пограничный слой на рис. 4.4 отмечены штриховкой.

**4.3.3. Модельная стационарная задача.** Рассмотрим более подробно стационарный аналог задачи (4.3.1) — (4.3.5):

$$vu'' - au' = 0, \quad a < 0, \quad (4.3.7)$$

$$u(0) = 0, \quad (4.3.8)$$

$$u(1) = 1. \quad (4.3.9)$$

Решение этой задачи легко найти в явном виде. Общее решение уравнения (4.3.7) таково:

$$u = C_1 + C_2 \exp(-x/\varepsilon), \quad (4.3.10)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные;  $\varepsilon = v/|a|$ . Подставляя (4.3.10) в (4.3.8) и (4.3.9), имеем

$$C_1 + C_2 = 0; \quad C_1 + C_2 \exp(-1/\varepsilon) = 1.$$

Отсюда

$$C_1 = (1 - \exp(-1/\varepsilon))^{-1}, \quad C_2 = -(1 - \exp(-1/\varepsilon))^{-1}. \quad (4.3.11)$$

Решение (4.3.10), (4.3.11) при малых  $\varepsilon$  с большой точностью можно записать в виде

$$u = u_0 + \tilde{u}_0, \quad u_0 = 1, \quad \tilde{u}_0 = -\exp(-x/\varepsilon). \quad (4.3.12)$$

Здесь  $u_0$  — решение соответствующей вырожденной задачи

$$-au'_0 = 0, \quad u_0(1) = 1. \quad (4.3.13)$$

Функция  $\tilde{u}_0$  — погранслоиная поправка, назначение которой состоит в том, чтобы обеспечить выполнение левого граничного условия (4.3.13), не входящего в постановку вырожденной задачи. Погранслоиная поправка  $\tilde{u}_0$  быстро убывает с удалением от точки  $x=0$ . В качестве условной толщины пограничного слоя можно принять  $\varepsilon$ , т. е. длину релаксации для  $\tilde{u}_0$ . Функция  $\tilde{u}_0$  может быть определена как решение уравнения (4.3.7), стремящееся к 0 при  $x \rightarrow \infty$  и удовлетворяющее условию  $u_0 + \tilde{u}_0 = 0$  при  $x=0$ .

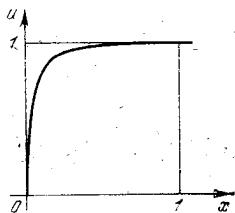


Рис. 4.5.

В дальнейшем мы будем интересоваться величиной

$$Q = vu'(0) = v/\varepsilon = -a, \quad (4.3.14)$$

характеризующей кондуктивный поток тепла через границу  $x=0$ . Для упрощения записей впредь будем считать, что  $a=-1$  и вместо  $\nu$  будем писать  $\varepsilon$ . При этом  $Q=1$ .

**4.3.4. Схема с центрально-разностной аппроксимацией конвективного члена.** Рассмотрим следующий сеточный аналог краевой задачи (4.3.7)–(4.3.9):

$$\varepsilon \frac{u_{n+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} + \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} = 0, \quad (4.3.15)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$u_0 = 0, \quad (4.3.16)$$

$$u_M = 1. \quad (4.3.17)$$

Согласно методу Эйлера частное решение обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищется в виде  $u = \exp(\mu x)$ , где  $\mu$  — неизвестный параметр. Метод Эйлера можно применять и к решению линейных однородных сеточных уравнений. На сетке  $x_m = mh$  имеем  $u_m = \exp(\mu mh) = q^m$ ,  $q = \exp(\mu h)$ . Подставляя это выражение для  $u_m$  в (4.3.15), получаем характеристическое уравнение для определения  $q$ :

$$\varepsilon \frac{q^2 - 2q + 1}{h^2} + \frac{q^2 - 1}{2h} = 0.$$

Отсюда находим

$$q_1 = 1,$$

$$q_2 = \left(1 - \frac{h}{2\varepsilon}\right) \left(1 + \frac{h}{2\varepsilon}\right)^{-1}. \quad (4.3.18)$$

Общее решение уравнения (4.3.15) представляется в виде

$$u_m = C_1 + C_2 q_2^m.$$

Частное решение, удовлетворяющее граничным условиям (4.3.16), (4.3.17), представим (приближенно) аналогично (4.3.12):

$$u_m = 1 - q_2^m. \quad (4.3.19)$$

Если  $q_2 \geq 0$ , то сеточная функция (4.3.19) с ростом  $m$  монотонно изменяется от 0 до 1; при  $q_2 < 0$  изменение немонотонное (рис. 4.6).

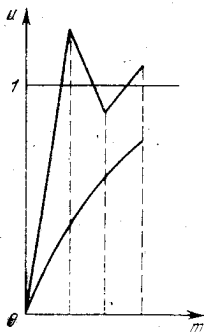


Рис. 4.6.

Условие монотонности ограничивает сверху шаг  $h$ :  $h < 2\varepsilon$ . Таким образом, монотонный сеточный пограничный слой может быть получен только в том случае, если шаг сетки меньше удвоенной условной толщины пограничного слоя для исходной задачи. В противном случае возникают осцилляции, искажающие решение.

**4.3.5. Схема с односторонней аппроксимацией конвективного члена.** Изучим теперь таким же образом схему, в которой конвективный член аппроксимируется односторонним разностным отношением

$$\varepsilon \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} + \frac{u_{m+1} - u_m}{h} = 0. \quad (4.3.20)$$

Имеем

$$\varepsilon \frac{(q-1)^2}{h^2} + \frac{q^2 - q}{h} = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = \frac{1}{1 + h/\varepsilon}, \quad (4.3.21)$$

$$u_m = 1 - q_2^m. \quad (4.3.22)$$

Функция (4.3.22) всегда монотонная. При изменении  $\varepsilon$  эта функция качественно ведет себя так же, как и решение (4.3.12): чем меньше  $\varepsilon$ , тем быстрее затухает погранслоная поправка.

**4.3.6. Схема Самарского.** Схема (4.3.20) имеет первый порядок точности. Главный член ошибки аппроксимации есть  $0,5 h^2 u / \partial x^2$ ; он имеет диссипативный характер. Для того чтобы компенсировать дополнительную «вязкость», можно было бы соответственно уменьшить  $\varepsilon$ , т. е. заменить  $\varepsilon$  на  $\varepsilon - h/2$ . Легко видеть, что это приводит к схеме (4.3.15) с центрально-разностной аппроксимацией конвективного члена.

А. А. Самарский предложил другой способ уменьшения аппроксимационной вязкости:  $\varepsilon$  заменяется на  $\varepsilon'$ , где

$$\varepsilon' = \varepsilon(1 + 0,5h/\varepsilon)^{-1}. \quad (4.3.23)$$

Схема с односторонней аппроксимацией конвективного члена при указанной компенсации имеет формально второй порядок точности, так как при  $h \rightarrow 0$  и конечном  $\varepsilon$  имеем

$$\varepsilon(1 + 0,5h/\varepsilon)^{-1} = \varepsilon(1 - 0,5h/\varepsilon) + O(h^2) = \varepsilon - h/2 + O(h^2).$$

Поскольку схема Самарского отличается от (4.3.20) только заменой  $\varepsilon$  на  $\varepsilon'$ , все качественные суждения, высказанные в предыдущем пункте, сохраняют силу: пограничный слой всегда монотонный; с уменьшением  $\varepsilon$  скорость затухания погранслоной поправки увеличивается.

4.3.7. Сравнение схем по величине «потока». При определении введенного в п. 4.3.3 «потока»  $Q$  по численным решениям, заданным только в узлах сетки, возникает следующее затруднение. На функциях, имеющих характер пограничного слоя, погрешность формул численного дифференцирования может быть весьма большой, поэтому при сопоставлении различных схем следует стандартизовать метод вычисления  $Q$ . Для всех трех рассмотренных выше схем решение имеет вид  $u_m = 1 - q_2^m$ . Производная первого слагаемого равна нулю. Заменяя второе слагаемое экспонентой, имеющей в узлах сетки те же значения, будем иметь

$$q_2^m \sim \exp\left(\frac{x}{h} \ln q_2\right).$$

При определении производной в точке  $x = 0$  обычным образом продифференцируем экспоненту. Получим

$$Q = \frac{\varepsilon}{h} \ln q_2.$$

Введем еще в качестве характеристики густоты сетки отношение  $r = \varepsilon/h$ . Для различных значений  $r$  в табл. 4.1 приведены значения  $Q$ , вычисленные указанным выше стандартным способом с помощью трех рассмотренных в предыдущих пунктах схем.

Таблица 4.1

$r = \varepsilon/h$	Схема (4.3.20)	Схема (4.3.15)	Схема Самарского
0,5	0,55	—	0,80
1	0,69	1,10	0,92
2	0,81	1,02	0,98
3	0,86	1,01	0,99

Обе схемы второго порядка точности выходят на относительные погрешности порядка процента при 2—3 интервалах на условной толщине пограничного слоя. При такой разрешающей способности сетки различия между схемой Самарского и схемой с центрально-разностной аппроксимацией конвективного члена незначительны. Это относится также к  $r \sim 1$ , когда для обеих схем погрешность порядка 10%. При дальнейшем уменьшении  $r$ , т. е. при увеличении шага сетки, положение меняется. При  $r = 0,5$  центрально-разностная аппроксимация перестает служить (напомним, что  $r = 0,5$  есть граница моно-

тонности для этой аппроксимации). Схема Самарского для  $r = 0,5$  дает значение  $Q$  с погрешностью 20%.

Как видно из второго столбца таблицы, схема первого порядка точности с односторонней аппроксимацией конвективного члена порождает заметные погрешности в  $Q$  (14% при  $r = 3$  и 45% при  $r = 0,5$ ).

#### § 4.4. Околоравновесная кинетика

\* 4.4.1. Предварительные замечания. Расчет быстропротекающих химико-физических превращений часто вызывает значительные вычислительные трудности. При общем рассмотрении этого вопроса целесообразно выделить истинно нестационарные и квазистационарные режимы.

В первом случае интересующие нас величины (концентрации компонент, температура) существенно изменяются за характерные промежутки времени; при этом обычно требуется детально проследить их эволюцию. Последнее требование, как правило, вызывает необходимость вести расчет с достаточно малым временным шагом.

Во втором случае за характерные времена рассматриваемые величины меняются мало; детальное представление их хода обычно не требуется. В этих условиях хотелось бы вести расчет с большими временными шагами. Оказывается, однако, что для схем, не обладающих некоторыми специальными свойствами, на квазистационарных режимах действуют суровые ограничения временного шага, не соответствующие требованиям точности. Это обусловлено присутствием больших параметров в правых частях кинетических уравнений (или, что то же самое, малых параметров при производных по  $t$ ).

Рассмотрим модельное уравнение околоравновесной кинетики в характеристической форме

$$\frac{du}{dt} = -Cu + 1, \quad C = \text{const}, \quad C > 0. \quad (4.4.1)$$

Решение этого уравнения, принимающее при  $t = 0$  значение  $u^0$ , может быть записано в виде

$$u = u^\infty + (u^0 - u^\infty) \exp(-Ct). \quad (4.4.2)$$

При  $t \rightarrow \infty$  решение весьма быстро стремится к предельному («равновесному») значению  $u^\infty$  (рис. 4.7).

Цифрами I и II на рис. 4.7 обозначены соответственно стадии существенно нестационарного и квазистационарного изменений величины  $u$ . (Разделение режимов до некоторой степени условно; оно определяется кон-



критерием критерием малости изменения  $u$ , например, в пределах 10 или 20% от  $u^\infty$ . Однако, как видно из

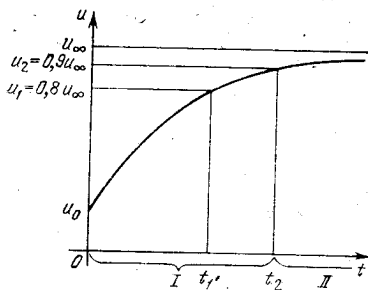


Рис. 4.7.

рис. 4.7, положение границы при больших  $C$  слабо зависит от выбора критерия разделения режимов).

Введем в качестве новой искомой функции  $v = u - u^\infty$ , т. е. отклонение  $u$  от предельного значения  $u^\infty$ . Для  $v$  имеем однородное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = -Cv. \quad (4.4.3)$$

**4.4.2. Явная схема.** Рассмотрим следующую простую схему для (4.4.3):

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = Cv^n, \quad v^{n+1} = (1 - C\tau)v^n. \quad (4.4.4)$$

Очевидно, что  $v^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  только тогда, когда выполнено условие стабилизации

$$|1 - C\tau| < 1, \quad C\tau < 2. \quad (4.4.5)$$

Отметим, что если  $1 < C\tau < 2$ , то стремление  $v^n$  к нулю имеет немонотонный, колебательный характер. Условие монотонной стабилизации  $C\tau < 1$ , как и условие стабилизации (4.4.5), означает, что допустимый временной шаг должен по порядку не превышать время релаксации  $\tau_{\text{рел}} = 1/C$ . На квазистационарных режимах (при больших  $C$ ) подобные ограничения могут быть чрезмерно стеснительными.

**4.4.3. Неявная симметричная схема.** Желая снять ограничение вида (4.4.5), обратимся к неявным схемам. Начнем с симметричной аппроксимации, имеющей второй порядок точности:

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = -(0,5Cv^{n+1} + 0,5Cv^n), \quad v^{n+1} = sv^n, \quad (4.4.6)$$

$$s = (1 - 0,5C\tau)(1 + 0,5C\tau)^{-1}.$$

Очевидно, что схема (4.4.6) является стабилизирующей, т. е.  $v^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для всякого  $C\tau > 0$ . Однако, если  $C\tau > 2$ , то стабилизация немонотонная. Для больших  $C\tau$  множитель перехода близок к  $-1$ , поэтому  $v^n$  стремится к нулю очень медленно и колебательным образом.

В практических расчетах при наличии внешних возмущений такие колебательные свойства схемы могут привести к серьезным последствиям (явления типа резонанса). Покажем это на примере уравнения

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -0,5C(u^{n+1} + u^n) + 1 + \varepsilon(-1)^n. \quad (4.4.7)$$

Здесь свободный член («внешний источник») возмущен колебаниями с относительной амплитудой  $\varepsilon$ . Частное решение будем искать в виде  $u^n = A(-1)^n + u^\infty$ ,  $u^\infty = 1/C$ ;  $A$  — неизвестный постоянный коэффициент. Подставив это выражение в (4.4.7), найдем  $A = 0,5\varepsilon\tau$ . Общее решение (4.4.7) имеет вид

$$u^n = 1/C + 0,5\varepsilon\tau(-1)^n + Bv^n, \quad (4.4.8)$$

где  $B$  — произвольная постоянная, значение которой определяется начальными условиями; для больших  $n$  последнее слагаемое несущественно. Мы видим, что решение колеблется около  $u^\infty$ , причем относительная амплитуда колебаний равна  $0,5C\varepsilon\tau$ , т. е. в  $0,5C\varepsilon\tau$  раз больше, чем для «источника». (При  $C\varepsilon\tau = 20$  имеем 10-кратное увеличение относительной амплитуды колебаний.)

**4.4.4. Неявная несимметричная схема.** При больших значениях  $C\varepsilon\tau$  гораздо лучшими качественными свойствами обладает неявная схема первого порядка точности

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = -Cv^{n+1}, \quad v^{n+1} = sv^n, \quad s = \frac{1}{1+C\tau}. \quad (4.4.9)$$

Схема стабилизирует при любых  $C\varepsilon\tau$  и притом монотонным образом. С ростом  $C\varepsilon\tau$  сходимость ускоряется, что находится в качественном согласии с поведением решения дифференциального уравнения (4.4.3) (для него  $s = \exp(-C\varepsilon\tau)$ ).

**4.4.5. Неявная схема с «весами».** В условиях «истинной нестационарности», когда необходимо аккуратно воспроизвести временной ход решения, применение схемы первого порядка точности может повлечь нежелательное уменьшение временного шага. Поэтому в практических расчетах часто применяют схему с «упреждением промежуточного значения»:

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = -(\alpha C v^{n+1} + \beta C v^n),$$

$$v^{n+1} = sv^n, \quad s = \frac{1 - \beta C\tau}{1 + \alpha C\tau}. \quad (4.4.10)$$

Здесь  $\alpha, \beta$  — весовые коэффициенты, связанные соотношениями  $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha \geq \beta$ . На «этапах нестационарности» полагают, в интересах точности,  $\alpha \sim 0,5$ . На «этапах квазистационарности» для улучшения стабилизирующих свойств принимают  $\alpha \sim 1$ . Для больших значений  $C\tau$  имеем  $s = -\beta/\alpha$ ; с увеличением  $\alpha$  стабилизирующие качества схемы улучшаются.

**4.4.6. Нехарактеристическая форма модельного уравнения.** До сих пор в этом параграфе рассматривались только обыкновенные дифференциальные уравнения, соответствующие характеристической форме модельного уравнения переноса с кинетикой. Имея в виду общие (нехарактеристические) сеточные аппроксимации, рассмотрим модельное неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = -Cu + 1, \quad C > 0, \quad a = \text{const}, \quad a > 0,$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = -Cv. \quad (4.4.11)$$

Аппроксимируем (4.4.11) по схеме «явный уголок» (3.2.1); получим

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = -Cv_m^n. \quad (4.4.12)$$

Множитель перехода для (4.4.12) равен

$$\lambda = 1 - \frac{a\tau}{h} [1 - \exp(-i\omega h)] - C\tau.$$

Неравенство Куранта  $k \leq 1$  обеспечивает формальную устойчивость схемы при  $\tau \rightarrow 0$ , поскольку при  $k \leq 1$  условие Неймана будет выполнено. Подчеркнем, однако, что условие Неймана, как и само понятие устойчивости, предполагает, что  $\tau \rightarrow 0$ . В конкретных расчетах  $\tau$  имеет конечное значение; при этом  $C\tau$  может быть большим. С помощью элементарных геометрических соображений (ср. п. 2.4.4) можно показать, что для схемы (4.4.12) условие стабилизации определяется неравенством

$$C\tau < 2(1 - k),$$

т. е. зависит от  $k$  и при  $k = 1$  вообще не может выполняться. Если в правой части (4.4.12) вместо  $v_m^n$  написать

$v_{m-1}^n$ , то получим

$$\lambda = (1 - k) + (k - C\tau) \exp(-i\omega h).$$

При  $k \leq 1$  условие стабилизации имеет вид  $C\tau < 2k$ , т. е. реализуемо, но для малых  $k$  является стеснительным. Для  $k = 1$  оно совпадает с (4.4.5).

Запишем теперь правую часть в виде  $Cv_m^{n+1}$ , тогда

$$\lambda = (1 - k + k \exp(-i\omega h))(1 + C\tau)^{-1}. \quad (4.4.13)$$

Неравенство Куранта  $k \leq 1$  обеспечивает выполнение условия стабилизации при любом  $C\tau > 0$ . Из приведенных примеров видно, что при расчете квазистационарных режимов может оказаться необходимым сочетать явную запись старших членов уравнения (т. е. производных) с неявной записью младшего члена  $f = f(t, x, u)$ .

**4.4.7. Двухшаговая схема второго порядка точности с хорошими стабилизирующими свойствами.** Применение «управляемых» схем, подобных (4.4.10), требует постоянного анализа результатов в ходе расчета. Нужен также определенный опыт, приобретаемый ценой ошибок и неудач. Поэтому представляют интерес «неуправляемые» схемы, сочетающие правильное качественное поведение на квазистационарных режимах и точность второго порядка в истинно нестационарных условиях.

Рассмотрим кратко одну такую схему на примере модельного уравнения (4.4.3). Расчет  $v^{n+1}$  распадается на три этапа. Сначала находится предварительное значение  $\bar{v}^{n+1}$  по неявной схеме (4.4.9) первого порядка точности:

$$\frac{\bar{v}^{n+1} - v^n}{\tau} = -C\bar{v}^{n+1}. \quad (4.4.14)$$

Затем по той же схеме, но двумя шагами, вычисляется второе предварительное значение  $\bar{\bar{v}}^{n+1}$ :

$$\frac{\bar{\bar{v}}^{n+1/2} - v^n}{0,5\tau} = -C\bar{\bar{v}}^{n+1/2}, \quad \frac{\bar{\bar{v}}^{n+1} - \bar{\bar{v}}^{n+1/2}}{0,5\tau} = -C\bar{\bar{v}}^{n+1}. \quad (4.4.15)$$

На заключительном этапе определяется окончательное значение с помощью «взвешивания», исключаящую главную часть погрешности:

$$v^{n+1} = 2\bar{\bar{v}}^{n+1} - \bar{v}^{n+1}. \quad (4.4.16)$$

Множитель перехода, соответствующий процедуре

(4.4.14)–(4.4.16), имеет такой вид:

$$s = 2/(1 + 0,5C\tau)^2 - 1/(1 + C\tau). \quad (4.4.17)$$

Элементарное исследование  $s$  как функции  $z = C\tau$ , определяемой формулой (4.4.17), приводит к следующим результатам. Для  $0 < z < \infty$  имеем  $|s(z)| < 1$ , т. е. схема (4.4.14)–(4.4.16) является безусловно стабилизирующей. В интервале  $0 < z < 2 + 2\sqrt{2}$  имеет место монотонная стабилизация. Для  $z > 2 + 2\sqrt{2}$  стабилизация немонотонная, но отрицательные последствия немонотонности подавляются высокой скоростью стабилизации (в этой области имеем  $|s| \leq 0,036$ ).

**4.4.8. Трехточечная схема.** Аппроксимируя  $(dv/dt)^{n+1}$  по  $v^{n-1}$ ,  $v^n$ ,  $v^{n+1}$  со вторым порядком и относя правую часть к  $t^{n+1}$ , получим для уравнения (4.4.3) неявную схему

$$\frac{3}{2} \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{v^n - v^{n-1}}{\tau} = -Cv^{n+1}. \quad (4.4.18)$$

Множитель перехода  $s$  определяется из квадратного уравнения

$$(1,5 + C\tau)s^2 - 2s + 0,5 = 0.$$

При  $C\tau > 0,5$  корни уравнения комплексные (и, очевидно, комплексно сопряженные), поэтому

$$|s|^2 = 0,5(1,5 + C\tau)^{-1}, \quad |s| = (3 + 2C\tau)^{-1/2}. \quad (4.4.19)$$

Сравнивая (4.4.19) с (4.4.17), убеждаемся в том, что схема (4.4.18) обладает худшими стабилизирующими свойствами по сравнению с двухшаговой двухточечной схемой, так как при  $C\tau \rightarrow \infty$   $|s|$  медленнее стремится к нулю. \*

## § 4.5. Стабилизирующие свойства схем для уравнения теплопроводности

\* **4.5.1. Предварительные замечания.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.5.1)$$

Будем искать для него решение специального вида:  $u = v(t) \exp(i\omega x)$ . Для амплитудного множителя  $v(t)$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = -C(\omega)v, \quad C(\omega) = \nu\omega^2. \quad (4.5.2)$$

Уравнение (4.5.2) совпадает с модельным однородным уравнением околоравновесной кинетики (4.4.3). Отметим резкую зависимость скорости релаксации от частоты  $\omega$ .

Таким образом, можно ожидать, что для высокочастотной составляющей решения должны быть существенны стабилизирующие свойства применяемой схемы. Поведение схемы в области высоких частот имеет особенно важное значение при расчете разрывных и негладких решений, поскольку в этих случаях велик удельный вес высокочастотных гармоник в решении.

**4.5.2. Явная четырехточечная схема.** Применив к уравнению (4.5.1) для схемы (4.2.1) имеем

$$\lambda = 1 - 2k_{\pi}z, \quad k_{\pi} = 2 \frac{\nu\tau}{h^2}, \quad z = \sin^2 \frac{\omega h}{2}. \quad (4.5.3)$$

Мы видим, что стабилизирующие свойства схемы зависят от значения параболического числа Куранта  $k_{\pi}$  (рис. 4.8). Предельное по устойчивости значение  $k_{\pi}$  есть 1. При  $k_{\pi} = 1$  для высшей частоты  $\omega h = \pi$  имеем  $\lambda = -1$ , т. е. стабилизация для этой гармоники отсутствует. Наиболее быстрая стабилизация в области высших частот имеет место при  $k_{\pi} = 0,5$ .

**4.5.3. Неявная четырехточечная схема.** Для схемы

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

$$(4.5.4)$$

находим  $\lambda = (1 + 2k_{\pi}z)^{-1}$ ,  $z = \sin^2(\omega h/2)$ . Очевидно, что схема (4.5.4) является стабилизирующей при любых значениях  $k_{\pi}$ , причем с ростом  $k_{\pi}$  (т. е. с увеличением  $\tau$ ) стабилизирующие свойства усиливаются. (При этом, однако, возрастает погрешность аппроксимации.)

**4.5.4. Неявная шеститочечная симметричная схема.** Для схемы

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

$$(4.5.5)$$

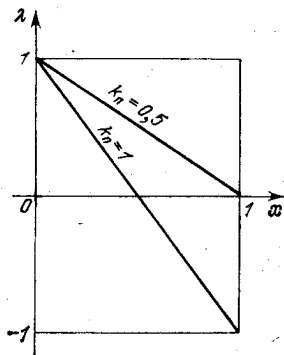


Рис. 4.8.

имеем

$$\lambda = (1 - k_{\Pi}z)(1 + k_{\Pi}z)^{-1}, \quad z = \sin^2(\omega h/2).$$

При больших значениях  $k_{\Pi}$  в области высших частот  $\lambda \sim -1$ , т. е. стабилизация слабая и немонотонная, что создает возможность для нежелательных резонансных явлений (ср. п. 4.4.3).

**4.5.5. Шеститочечная неявная схема с «весами».** Рассмотрим схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \left[ \alpha \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \beta \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right],$$

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

Имеем

$$\lambda = (1 - 2\beta k_{\Pi}z)(1 + 2\alpha k_{\Pi}z)^{-1}, \quad z = \sin^2(\omega h/2).$$

При больших  $k_{\Pi}$  в области высоких частот  $\lambda \sim -\beta/\alpha$ . Если  $\beta < \alpha$ , то имеет место стабилизация. Для усиления стабилизирующих свойств увеличивают «вес» верхнего слоя  $\alpha$ . При этом соответственно увеличивается слагаемое  $0,5(\alpha - \beta)\tau \partial^2 u / \partial t^2$ , входящее в погрешность аппроксимации.

**4.5.6. Двухшаговая двухслойная схема второго порядка точности с хорошими стабилизирующими свойствами.** С помощью неявной четырехточечной схемы находятся предварительные значения  $\bar{u}^{n+1}$ ,  $\bar{u}^{n+1}$ :

$$\frac{\bar{u}_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_{m-1}^{n+1}}{h^2}, \quad (4.5.6)$$

$$\frac{\bar{u}_m^{n+1/2} - u_m^n}{0,5\tau} = \nu \frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1/2} - 2\bar{u}_m^{n+1/2} + \bar{u}_{m-1}^{n+1/2}}{h^2}, \quad (4.5.7)$$

$$\frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^{n+1/2}}{0,5\tau} = \nu \frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_{m-1}^{n+1}}{h^2}. \quad (4.5.8)$$

Уточненные значения  $u_m^{n+1}$  находятся по формуле

$$u_m^{n+1} = 2\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^{n+1}. \quad (4.5.9)$$

Множитель перехода для схемы (4.5.6)–(4.5.9) таков:

$$\lambda = \frac{2}{(1 + k_{\Pi}z)^2} - \frac{1}{1 + 2k_{\Pi}z}, \quad z = \sin^2 \frac{\omega h}{2}.$$

Это выражение (при несколько иных обозначениях) рассматривалось в п. 4.4.7. Стабилизация имеет место для любых значений  $y = k_{\pi}z$ , причем скорость стабилизации быстро возрастает с увеличением  $z$ , т. е. с увеличением частоты  $\omega$ , что качественно соответствует стабилизирующим свойствам уравнения (4.5.1).

**4.5.7. Пример.** Рассмотрим модельную задачу о нагреве полубесконечного стержня:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 \leq t < +\infty;$$

$$u(0, x) = 0, \quad u(t, 0) = 1.$$

Точное решение этой задачи представляется формулой

$$u = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \quad (4.5.10)$$

Ниже для  $t = 0,001$  и  $x = 0,05$  (первая строка),  $x = 0,1$  (вторая строка) приведены значения, найденные по формуле (4.5.10), — первый столбец; по симметричной шеститочечной неявной схеме (4.5.5) — второй столбец; по четырехточечной неявной схеме (4.5.4) — третий столбец; по двухшаговой схеме (4.5.6) — (4.5.9) — четвертый столбец.

0,263	0,109	0,207	0,248
0,025	0,012	0,043	0,032

Для всех схем расчеты проведены при  $\tau = 0,001$ , т. е. в таблице представлен первый расчетный слой. Пространственный шаг  $h = 0,01$ , что соответствует  $k_{\pi} = 20$ .

На принятой сетке на первом временном шаге имеет место резкое пространственно-временное изменение решения. В этих условиях схема второго порядка точности (4.5.5) существенно хуже воспроизводит решение, чем схема первого порядка точности (4.5.4). Наиболее близкие к точному решению результаты дает двухшаговая хорошо стабилизирующая схема (4.5.6) — (4.5.9).

**4.5.8. Трехслойная схема.** По аналогии со схемой (4.4.18) запишем

$$\frac{3}{2} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}. \quad (4.5.11)$$

Схема (4.5.11) безусловно устойчивая и безусловно стабилизирующая (см., например, [16]). Она несколько проще схемы (4.5.6) — (4.5.9) в идейном плане, но уступает ей в эффективности стабилизации. \*



## ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ, СТРУЯХ И КАНАЛАХ

### § 5.1. Математические модели

**5.1.1. Уравнения Прандтля.** Одним из важнейших разделов современной аэрогидромеханики является теория пограничного слоя, основанная в 1904 г. Л. Прандтлем и получившая широкое распространение и применение для расчета трения и теплопередачи на телах, движущихся в потоке жидкости и газа. Методы теории пограничного слоя нашли также применение для анализа течений в аэродинамических следах за телами, для исследований течений в струях и каналах. При определенных физических предположениях указанные течения описываются системами нелинейных уравнений параболического типа (имеющими много общего), которые в дальнейшем мы будем называть *уравнениями типа пограничного слоя*.

Теории пограничного слоя посвящено много книг, из которых отметим [17], [18]. Все современные учебники по аэрогидродинамике содержат изложение теории пограничного слоя (см., например, [19]—[21]).

Основное предположение теории пограничного слоя, сделанное Прандтлем, заключается в том, что при движении тела с достаточно большой скоростью в жидкости (или газе) весь поток может быть приближенно разделен на две области: 1) область малой толщины вблизи тела, называемой пограничным слоем, где влияние сил вязкости соизмеримо с влиянием инерционных сил, и 2) область так называемого «внешнего» (по отношению к пограничному слою) потока, где влияние сил вязкости пренебрежимо мало, а преобладают инерционные силы (рис. 5.1).

Уравнения пограничного слоя обычно получают из основных уравнений, описывающих движение вязких жидкостей. В случае плоского движения несжимаемой вязкой жидкости с постоянными свойствами и при отсутствии внешних сил основная система уравнений состоит

из двух уравнений количества движения (уравнения Навье — Стокса) и уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Систему уравнений (5.1.1), в которую входит и уравнение неразрывности, часто называют системой уравнений Навье — Стокса. Соотношения в (5.1.1) записаны в неподвижной системе координат, относительно которой движется жидкость (эйлерова система координат). В приведенной системе уравнений использованы следующие

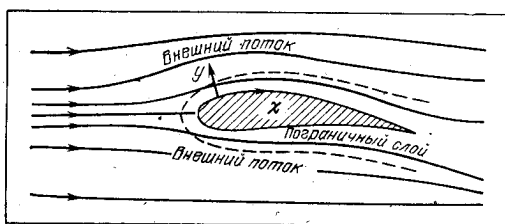


Рис. 5.1.

обозначения:  $t$  — время;  $x$  и  $y$  — независимые ортогональные пространственные переменные;  $u$ ,  $v$ ,  $p$  — неизвестные функции:  $u$  и  $v$  — составляющие скорости по  $x$  и  $y$  соответственно,  $p$  — давление; плотность  $\rho$  и кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  — характеристики свойств жидкости.

Предположим, что ось  $x$  направлена вдоль обтекаемой поверхности (продольная координата), ось  $y$  ортогональна к ней (поперечная координата). Для того чтобы вблизи поверхности (в пограничном слое) сравнить по порядку величины члены, входящие в уравнения (5.1.1), введем безразмерные величины, основанные на характерном продольном линейном размере  $L$ , масштабе поперечной координаты  $Y$  и масштабах продольных и поперечных составляющих скорости  $U$  и  $V$ :

$$\begin{aligned} t &= Lt'/U, \quad x = Lx', \quad y = Yy', \\ u &= Uu', \quad v = Vv', \quad P = \rho U p'. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Штрихом отмечены соответствующие безразмерные величины.

Введем безразмерное число Рейнольдса

$$\text{Re} = LU/\nu, \quad (5.1.3)$$

характеризующее отношение сил инерции к вязким силам, и выберем масштабы поперечных длин и скоростей:

$$Y = L/\sqrt{\text{Re}}, \quad V = V/\sqrt{\text{Re}}. \quad (5.1.4)$$

Тогда система уравнений (5.1.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \\ \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}, \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Если течение таково, что число  $\text{Re}$  достаточно велико, то величину  $\varepsilon = 1/\sqrt{\text{Re}}$  можно считать малой. Представляя искомые функции  $u'$ ,  $v'$ ,  $p'$  в виде разложения по степеням этого параметра  $\varepsilon$ :

$$u' = u'_0 + \varepsilon u'_1 + \dots, \quad v' = v'_0 + \varepsilon v'_1 + \dots, \quad p' = p'_0 + \varepsilon p'_1 + \dots \quad (5.1.6)$$

и подставляя (5.1.6) в уравнения системы (5.1.5), для нулевого приближения получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_0}{\partial t'} + u'_0 \frac{\partial u'_0}{\partial x'} + v'_0 \frac{\partial u'_0}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'_0}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'_0}{\partial y'^2}, \\ \frac{\partial p'_0}{\partial y'} &= 0, \\ \frac{\partial u'_0}{\partial x'} + \frac{\partial v'_0}{\partial y'} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Если вновь перейти к размерным переменным и опустить индекс «0», то получим систему уравнений плоского движения вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое, носящую имя Л. Прандтля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Второе уравнение в (5.1.8) показывает, что давление поперек пограничного слоя в каждом поперечном сечении постоянно и является функцией координаты  $x$  и времени. Распределение давления на внешней границе пограничного слоя совпадает с тем, которое было бы на поверхности тела, если бы отсутствовал пограничный слой. Таким образом, предполагается, что распределение давления берется из решения соответствующей задачи об обтекании тела потоком идеальной жидкости непосредственно на его поверхности. Если обозначить через  $U = U(x, y)$  величину продольной составляющей скорости при обтекании тела идеальной жидкостью и учесть условие непротекания через поверхность ( $v = 0$ ), то  $U$  и  $p$  на поверхности тела должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.1.9)$$

Таким образом, градиент давления  $\partial p / \partial x$  на внешней границе пограничного слоя может быть получен из уравнения (5.1.9), если известно распределение скорости  $U$  вдоль поверхности при ее обтекании идеальной жидкостью.

Граничные условия для системы (5.1.8) обычно записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \text{ при } y = 0, \\ u \rightarrow U & \text{ при } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Первое из этих условий принято называть «условием прилипания», а второе отражает асимптотическое стремление продольной составляющей скорости к скорости на внешней границе пограничного слоя.

Кроме граничных условий для системы (5.1.8) должны быть заданы начальные условия при некотором значении  $x = x_0$ :

$$u = \bar{u}(t, x_0, y), \quad v = \bar{v}(t, x_0, y), \quad (5.1.11)$$

а также начальные условия при  $t = 0$ :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad \text{для } x \geq x_0,$$

согласованные при  $x = x_0$  с (5.1.11).

Стационарные течения в пограничном слое характеризуются тем, что искомые функции — продольная и поперечная составляющие скорости, а также давление во внешнем потоке — не зависят от времени. Таким обра-

зом, стационарные течения в пограничном слое описываются уравнениями Прандтля (5.1.8), в которых  $\partial u/\partial t = 0$ , с граничными условиями (5.1.10), где скорость внешнего потока  $U = U(x)$  также не зависит от времени, и с начальными условиями при некотором значении  $x = x_0$ :

$$u = \bar{u}(x_0, y), \quad v = \bar{v}(x_0, y). \quad (5.1.12)$$

**5.1.2. Стационарное ламинарное течение в пограничном слое на пластине. Решение Блазиуса.** Пусть ось  $x$  направлена вдоль обтекаемой полубесконечной пластины, ось  $y$  перпендикулярна к ней, а начало координат совпадает с передней кромкой пластины. При продольном обтекании плоской пластины стационарным равномерным идеальным потоком скорость во всем потоке не меняется,  $U = \text{const}$ . Таким образом, по отношению к пограничному слою во внешнем потоке скорость и, следовательно, давление (см. (5.1.9)) не меняются по  $x$ . Уравнения Прандтля (5.1.8) в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

а граничные условия останутся прежними:

$$\begin{aligned} u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u \rightarrow U \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Если перейти к безразмерным переменным (5.1.2) — (5.1.4), то уравнения (5.1.13) и граничные условия (5.1.14) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

$$\begin{aligned} u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Блазиус показал, что решение задачи (5.1.13), (5.1.14) может быть сведено к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Если решение задачи для уравнений в частных производных может быть получено путем ее сведения к решению соответ-

ствующей задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, то такое решение обычно называют *автомодельным*. Для получения автомодельного решения задачи (5.1.13), (5.1.14) введем функцию тока  $\psi$  с помощью соотношений

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.1.17)$$

Тогда уравнения (5.1.13) сведутся к следующему уравнению:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3},$$

а граничные условия (5.1.14) запишутся так:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } x > 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U_\infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Будем искать  $\psi$  в виде

$$\psi = \sqrt{\nu U x} \varphi(\eta),$$

где  $\varphi(\eta)$  — функция, зависящая от автомодельной переменной

$$\eta = y \sqrt{U/(\nu x)}. \quad (5.1.18)$$

Тогда задача (5.1.13), (5.1.14) сведется к следующей задаче:

$$2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0, \quad (5.1.19)$$

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad (5.1.20)$$

$$\varphi' \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $\eta$ .

Блазиус нашел решение задачи (5.1.19), (5.1.20) с помощью рядов. Впоследствии эта задача была численно решена многими авторами. В таблице 5.1 даны значения функции  $\varphi(\eta)$  и первых двух ее производных. Такие же таблицы можно найти во многих учебниках по гидродинамике (см., например, [17], [18], [20]). Используя приведенную таблицу, можно рассчитать значения составляющих скорости поперек слоя по формулам

$$u = U_\infty \varphi'(\eta), \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} [\eta \varphi'(\eta) - \varphi(\eta)]$$

$\eta$	$\varphi$	$\varphi' = u/U_{\infty}$	$\varphi''$	$\eta$	$\varphi$	$\varphi' = u/U_{\infty}$	$\varphi''$	$\eta$	$\varphi$	$\varphi' = u/U_{\infty}$	$\varphi''$	$\eta$	$\varphi$	$\varphi' = u/U_{\infty}$	$\varphi''$
0	0	0	0,33206	3,0	1,39682	0,84605	0,16136	6,0	4,27964	0,99898	0,00240				
0,2	0,00664	0,06641	0,33199	3,2	1,56911	0,87609	0,13913	6,2	4,47948	0,99937	0,00155				
0,4	0,02656	0,13277	0,33147	3,4	1,74696	0,90477	0,11788	6,4	4,67938	0,99961	0,00098				
0,6	0,05974	0,19894	0,33008	3,6	1,92254	0,92333	0,09809	6,6	4,87934	0,99977	0,00061				
0,8	0,10611	0,26471	0,32739	3,8	2,11605	0,94112	0,08013	6,8	5,07928	0,99987	0,00037				
1,0	0,16557	0,32979	0,32301	4,0	2,30576	0,95552	0,06424	7,0	5,27926	0,99992	0,00022				
1,2	0,23795	0,39978	0,31659	4,2	2,49806	0,96696	0,05052	7,2	5,47925	0,99996	0,00013				
1,4	0,32298	0,45627	0,30787	4,4	2,69238	0,97587	0,03897	7,4	5,67924	0,99998	0,00007				
1,6	0,42032	0,51676	0,29667	4,6	2,88826	0,98269	0,02948	7,6	5,87924	0,99999	0,00004				
1,8	0,52952	0,57477	0,28293	4,8	3,08534	0,98779	0,02187	7,8	6,07923	1,00000	0,00002				
2,0	0,65003	0,62977	0,26675	5,0	3,28329	0,99155	0,01591	8,0	6,27923	1,00000	0,00001				
2,2	0,78120	0,68132	0,24835	5,2	3,48189	0,99425	0,01134	8,2	6,47923	1,00000	0,00001				
2,4	0,92230	0,72899	0,22809	5,4	3,68094	0,99616	0,00793	8,4	6,67923	1,00000	0,00000				
2,6	1,07252	0,77246	0,20646	5,6	3,88031	0,99748	0,00543	8,6	6,87923	1,00000	0,00000				
2,8	1,23099	0,81152	0,18401	5,8	4,07990	0,99838	0,00365	8,8	7,07923	1,00000	0,00000				

и найти местное напряжение трения на поверхности пластины  $\tau_w$ , используя соотношения

$$\begin{aligned} \tau_w &= \mu \left( \sqrt{\frac{\partial u}{\partial y}} \right)_{y=0} = U_\infty \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty}{x}} \cdot \varphi''(0) = \\ &= U_\infty \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty}{x}} \cdot 0,332. \end{aligned}$$

На рис. 5.2 представлен график безразмерной продольной составляющей скорости в зависимости от автомодельной переменной  $\eta$ .

### 5.1.3. Струя вязкой несжимаемой жидкости. Основные

**уравнения и граничные условия.** Задача об истечении плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости из узкой щели в безграничное полупространство, заполненное той же неподвижной жидкостью (рис. 5.3), или задача об истечении струи в затопленное пространство могут быть сформулированы в рамках теории пограничного

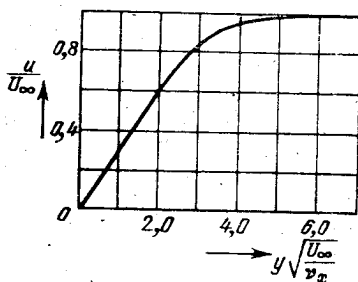


Рис. 5.2.

слоя. При наличии вязкости истекающая из щели струя, взаимодействуя с окружающей жидкостью, увлекает ее в движение. Чем меньше вязкость или, точнее, чем больше число Рейнольдса, тем тоньше слой движущейся жидкости. При достаточно больших числах Рейнольдса

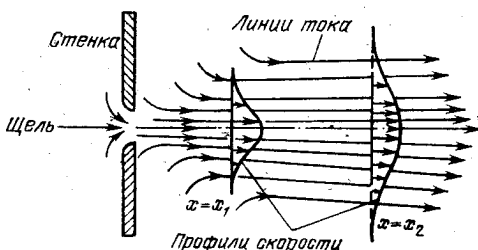


Рис. 5.3.

по обе стороны от плоскости симметрии образуется тонкий пограничный слой, который иногда называют «затопленной струей». Во «внешнем потоке», которым в этом случае является неподвижная жидкость, давление



повсюду одинаково. Из опытов известно, что давление поперек струи меняется незначительно. Это позволяет сделать предположение, что при установившемся движении давление внутри струи постоянно.

Пусть плоскость симметрии совпадает с осью  $x$ . Тогда дифференциальные уравнения, описывающие перемещение плоской струи несжимаемой жидкости с окружающей неподвижной жидкостью, могут быть приведены к виду

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5.1.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Граничные условия для системы (5.1.21) запишутся следующим образом:

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (5.1.22)$$

$$u = 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Шлихтингом было показано (см. [20], [22]), что решение задачи (5.1.21), (5.1.22) может быть получено путем ее сведения к краевой задаче для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения. При этом показано, что ширина струи возрастает пропорционально  $x^{2/3}$ , а максимальная скорость на оси симметрии убывает обратно пропорционально  $x^{1/3}$ .

Для осесимметричного случая аналогичная задача формулируется так:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (5.1.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0,$$

граничные условия имеют вид

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0, \quad (5.1.24)$$

$$u = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Известно, что задача (5.1.23), (5.1.24) также имеет автомодельное решение (см. [20], [22]).

**5.1.4. Течение несжимаемой вязкой жидкости в канале.** При изучении ламинарного движения вязкой жидкости в плоском канале встречаются случаи, когда реше-

ние полной системы уравнений Навье — Стокса можно заменить решением приближенных уравнений типа уравнений пограничного слоя. В основе этого упрощения, как и в теории пограничного слоя, лежит предположение о малости скорости в поперечном направлении по сравнению со скоростью в продольном направлении и предположение о малости вторых производных в продольном направлении по сравнению с производными в поперечном направлении.

При этих предположениях упрощенная система уравнений может быть записана в виде

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Решение системы (5.1.25) ищется в полуполосе  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y \leq h$  с граничными условиями

$$\begin{aligned} u &= U \quad \text{при } x = 0, \\ u = 0, \quad v &= 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и } y = h. \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

В отличие от задач пограничного слоя для внешнего обтекания, при движении в каналах заданной величиной является не давление, а расход жидкости через поперечное сечение, давление же определяется в процессе решения. Для введения безразмерных величин примем в качестве характерного линейного размера ширину канала  $h$  и в качестве характерной скорости  $U$ :

$$\begin{aligned} u' &= \frac{u}{U}, \quad v' = \frac{v}{U}, \quad x' = \frac{x}{h}, \quad y' = \frac{y}{h}, \\ p' &= \frac{p \cdot \text{Re}}{\rho U^2} \left( \text{Re} = \frac{Uh}{\nu} \right). \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

Тогда система уравнений (5.1.25) примет вид

$$\begin{aligned} \text{Re} \left( u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0, \\ p' &= p'(x) \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

и граничные условия (5.1.26) запишутся так:

$$\begin{aligned} u' = 1 & \text{ при } x' = 0, \\ u' = 0, \quad v' = 0 & \text{ при } y' = 0 \text{ и } y' = 1. \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

Условие, определяющее расход жидкости через поперечное сечение канала, представим в форме

$$\int_0^1 u \, dy = 1, \quad (5.1.30)$$

где значение правой части определяется условием при  $x' = 0$ .

**5.1.5. Ламинарные течения сжимаемого теплопроводного газа в пограничном слое.** В этом случае основные уравнения получаются из уравнений Навье — Стокса для сжимаемого теплопроводного газа, аналогично тому, как это было сделано для случая несжимаемой жидкости (см. п. 5.1.1). Выпишем уравнения в безразмерной форме, предварительно введя безразмерные величины следующим образом:

$$\begin{aligned} x' = x/L, \quad y' = y \sqrt{\text{Re}_\infty}/L, \quad u' = u'/U_\infty, \\ v' = v \sqrt{\text{Re}_\infty}/U, \quad \rho' = \rho/\rho_\infty, \quad p' = p/(\rho_\infty U_\infty^2), \\ h' = h/h_\infty, \quad \mu' = \mu/\mu_\infty. \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

Здесь введены обозначения:  $\rho$  — плотность,  $h$  — энтальпия (если  $c_p = \text{const}$ , то  $h = c_p T$ , где  $c_p$  — коэффициент теплоемкости газа при постоянном давлении,  $T$  — абсолютная температура),  $\mu$  — коэффициент вязкости; остальные обозначения аналогичны (5.1.2). Значок « $\infty$ » показывает, что соответствующие величины берутся в какой-нибудь фиксированной точке набегающего потока и число Рейнольдса введено так:

$$\text{Re} = U_\infty L \rho_\infty / \mu_\infty.$$

Уравнения в безразмерной форме для плоского течения будут иметь вид (штрих у безразмерных величин опустим)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (5.1.32)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (5.1.33)$$

$$\rho h \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} =$$

$$= (k - 1) M_\infty^2 \left[ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad (5.1.34)$$

$$p = \rho h / (k M_\infty^2), \quad \mu = f(h). \quad (5.1.35)$$

По сравнению с системой пограничного слоя для несжимаемой жидкости в этом случае к уравнениям движения (5.1.32) и неразрывности (5.1.33) добавляется еще уравнение энергии (5.1.34) и уравнение состояния (5.1.35), а также задается зависимость коэффициента вязкости  $\mu$  от энтальпии (температуры). В уравнениях (5.1.32) — (5.1.34) введены следующие обозначения:  $k = c_p/c_v$  — отношение коэффициентов теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме;  $M_\infty = U_\infty/a_\infty$  — число Маха, характеризующее отношение скорости набегающего потока  $U_\infty$  к скорости звука в нем  $a_\infty$ ;  $\text{Pr} = \mu c_p/\lambda$  — число Прандтля ( $\lambda$  — коэффициент теплопроводности).

Граничные условия для системы (5.1.32) — (5.1.35) могут быть, например, такие:

$$u = v = 0, \quad h = h_w \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (5.1.36)$$

$$u \rightarrow U_\infty, \quad h \rightarrow H_\infty \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (5.1.37)$$

В случае отсутствия теплопередачи с поверхности условие (5.1.36) заменяется на условие

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (5.1.36')$$

**5.1.6. Течение смеси реагирующих газов в пограничном слое.** Учет неоднородности химического состава, находящегося в пограничном слое, необходим в тех случаях, когда течение газа сопровождается различными физико-химическими процессами, которые в свою очередь могут оказывать влияние на энергетические и переносные свойства течения. Примерами таких течений являются течения высокотемпературного воздуха вблизи поверхности обтекаемого тела, входящего в атмосферу Земли с большой скоростью, или течения смеси реагирующих газов в различных агрегатах, используемых в химико-технологических процессах.

Для смеси газов уравнение неразрывности и уравнение движения остаются такими же, как и для случая совершенного однородного газа, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5.1.38)$$

где  $\rho$ ,  $\mu$  — соответственно плотность и коэффициент вязкости смеси.

Пусть смесь газов состоит из  $\nu$  компонент. Массовую (весовую) концентрацию  $i$ -й компоненты обозначим через  $c_i$ :

$$c_i = \rho_i / \rho,$$

где  $\rho_i$  — плотность  $i$ -й компоненты,  $\rho$  — плотность смеси. Введем обозначения для чисел Прандтля, Шмидта и Льюиса:

$$\begin{aligned} \overline{\text{Pr}} &= \frac{\bar{\mu} c_p}{\lambda}, \quad \text{Sc}_i = \frac{\mu}{\rho D_i}, \quad \overline{\text{Le}}_i = \frac{\rho c_p D_i}{\lambda} \\ (\text{Sc}_i \cdot \overline{\text{Le}}_i &= \overline{\text{Pr}}), \end{aligned} \quad (5.1.39)$$

где  $\bar{c}_p$  — условный коэффициент теплоемкости при постоянном давлении:

$$\bar{c}_p = \sum_{i=1}^{\nu} c_i c_{pi},$$

а  $c_{pi}$  — коэффициент теплоемкости при постоянном давлении  $i$ -й компоненты. Тогда уравнение неразрывности для  $i$ -й компоненты ( $i = 1, 2, \dots$ ) и уравнение энергии могут быть записаны в виде

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{\text{Sc}_i} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_i^T \frac{\rho c_i}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + m_i, \quad (5.1.40)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{\overline{\text{Pr}}} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\overline{\text{Pr}}} \right) \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sum_{i=1}^{\nu} \rho D_i \left( 1 - \frac{1}{\overline{\text{Le}}_i} \right) (h_i - h_i^*) \frac{\partial c_i}{\partial y} + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^{\nu} D_i^T \frac{\rho c_i}{T} (h_i - h_i^*) \frac{\partial T}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (5.1.41)$$

Здесь  $\bar{h}_0 = \bar{h} + \frac{u^2}{2}$ ,  $\bar{h} = \sum_{i=1}^{\nu} c_i (h_i - h_i^*)$ ,  $h_i$  — энтальпия

$i$ -й компоненты,  $m_i$  — массовая скорость образования  $i$ -й компоненты,  $h_i^*$  — постоянная, характеризующая для  $i$ -й компоненты смеси «скрытую» теплоту образования этой

компоненты (секундное количество выделяемого тепла равно  $m_i h_i^*$ ),  $T$  — абсолютная температура,  $D_i$  — коэффициент массодиффузии (или просто диффузии),  $D_i^T$  — коэффициент термодиффузии (в силу того, что давление поперек пограничного слоя постоянно, бародиффузией пренебрегается).

Граничные условия для систем (5.1.38), (5.1.40), (5.1.41) на поверхности тела могут, например, быть заданы условиями прилипания, уравнениями баланса химических компонент и уравнением баланса энергии, в которых могут присутствовать члены, характеризующие источники массы и энергии, определяемые конкретными условиями задачи. На внешней границе пограничного слоя должны быть заданы условия, определяемые из решения соответствующей задачи невязкого обтекания.

## § 5.2. Разностная схема для системы уравнений стационарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости

Решение задач пограничного слоя разностными методами получило в настоящее время широкое распространение. Разработанные методы оказались легко применимыми к решению различных задач этого класса и достаточно эффективными с точки зрения скорости расчета и загрузки оперативной памяти ЭВМ, что позволяет применять их и на машинах малой и средней мощности.

Описание наиболее распространенной и простой разностной схемы, которую в дальнейшем будем называть *основной разностной схемой*, приведем сначала для стационарной системы уравнений Прандтля в безразмерной форме:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

с граничными условиями

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$u \rightarrow \bar{U} \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty$$

и начальными условиями

$$u = \tilde{u}(x_0, y), \quad v = \tilde{v}(x_0, y).$$

Уравнение движения этой системы будем аппроксимировать с помощью двухслойной неявной шеститочечной схемы. Заметим, что применение явных схем для решения задач пограничного слоя крайне нерационально в связи с существенным ограничением на соотношение шагов сетки по  $x$  и  $y$  в силу условной устойчивости таких схем.

**5.2.1. Конечно-разностная аппроксимация уравнения движения.** Для аппроксимации системы уравнений, приведенной в начале этого параграфа, на плоскости  $(x, y)$  введем основную прямоугольную сетку

$$x = x_0 + n\Delta x, \quad y = m\Delta y, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.2.1)$$

и вспомогательную «полуцелую» сетку

$$\begin{aligned} x &= x_0 + n\Delta x, \quad y = (m + 1/2)\Delta y, \\ x &= x_0 + (n + 1/2)\Delta x, \quad y = m\Delta y. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Конечно-разностную аппроксимацию уравнения движения запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1/2} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta x} + v_m^{n+1/2} \frac{s(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) + (1-s)(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)}{2\Delta y} = \\ = \frac{1}{\Delta y^2} [s(u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}) + (1-s)(u_{m-1}^n - 2u_m^n + \\ + u_{m+1}^n)] - \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta x}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.2.3) \end{aligned}$$

Здесь  $s$  — параметр усреднения,  $p^{n+1}$  и  $p^n$  — значения давления на  $(n+1)$ -м и  $n$ -м слоях (поперек слоя  $p$  постоянно, поэтому в разностной записи отсутствует нижний индекс).

Если заморозить коэффициенты разностного уравнения (5.2.3), т. е. считать  $u_m^{n+1/2}$  и  $v_m^{n+1/2}$  постоянными величинами, равными некоторым их средним значениям, то исследование схемы (5.2.3) на устойчивость методом Фурье (см. § 2.4) показывает, что эта схема абсолютно устойчива при  $1/2 \leq s \leq 1$ . При  $s = 1/2$  можно показать аналогично п. 2.1.5, что разностная схема (5.2.3) имеет второй порядок точности относительно шагов сетки  $\Delta x$  и  $\Delta y$  ( $O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$ ).

**5.2.2. Прогонка.** Заметим, что соотношение (5.2.3) может быть приведено к виду

$$\alpha_m u_{m-1}^{n+1} + \beta_m u_m^{n+1} + \gamma_m u_{m+1}^{n+1} = \delta_m, \quad (5.2.4)$$

где

$$\alpha_m = -s(v_m^{n+1/2} + 2/\Delta y)/(2\Delta y),$$

$$\beta_m = u_m^{n+1/2}/\Delta x + 2s/\Delta y^2,$$

$$\gamma_m = s(v_m^{n+1/2} - 2/\Delta y)/(2\Delta y),$$

$$\delta_m = \frac{1-s}{2\Delta y} (v_m^{n+1/2} + 2/\Delta y) u_{m-1}^n + (u_m^{n+1/2}/\Delta x - \\ - (1-s) \cdot 2/\Delta y^2) u_m^n - \frac{1-s}{2\Delta y} (v_m^{n+1/2} - 2/\Delta y) u_{m+1}^n - \\ - (p^{n+1} - p^n)/\Delta x.$$

Система уравнений (5.2.4) совместно с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} &= 0 \text{ при } y = 0, \\ u_m^{n+1} &= 1 \text{ при } y_M = M\Delta y \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

( $y_M$  — значение  $y$ , при котором уже выполняется с определенной точностью верхнее граничное асимптотическое условие при  $y \rightarrow \infty$ ) является системой алгебраических уравнений относительно искомых  $u_m^{n+1}$  — значений скорости  $u$  на  $(n+1)$ -м слое ( $m = 0, 1, 2, \dots, M$ ). При этом мы пока предполагаем, что значения коэффициентов  $u_m^{n+1/2}$ ,  $v_m^{n+1/2}$  известны во всех необходимых точках. Так как эти коэффициенты выражаются через искомые функции, то они должны также вычисляться в процессе расчета. К описанию процедуры их вычисления мы вернемся ниже.

Система алгебраических уравнений (5.2.4), (5.2.5) имеет трехдиагональную матрицу, поэтому может быть решена с помощью прогонки (см. п. 2.2.5). Для нахождения  $u$  на  $(n+1)$ -м слое сначала вычисляются прогоночные коэффициенты в рекуррентном соотношении

$$u_m^{n+1} = A_m u_{m+1}^{n+1} + B_m \quad (5.2.6)$$

по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_m &= -\frac{\gamma_m}{\alpha_m A_{m-1} + \beta_m}, \\ B_m &= \frac{\delta_m - \alpha_m B_{m-1}}{\alpha_m A_{m-1} + \beta_m}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Значения  $A_0$  и  $B_0$  находятся из первого условия (5.2.5):

$$A_0 = B_0 = 0.$$



Процесс нахождения прогночных коэффициентов иногда называют *прямой прогонкой*.

Зная прогночные коэффициенты  $A_m$  и  $B_m$  для  $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$  и используя граничное условие  $u_M^{n+1} = 1$  на внешней границе пограничного слоя, можно найти значения  $u_m^{n+1}$  для  $m = M-1, M-2, \dots, 2, 1$  по рекуррентному соотношению (5.2.6).

**5.2.3. Реализация асимптотического верхнего граничного условия.** Второе граничное условие в (5.1.10) отражает тот факт, что толщина пограничного слоя около обтекаемой поверхности может изменяться. Критерием выполнения верхнего асимптотического условия с заданной точностью  $\varepsilon$  будем считать удовлетворение неравенства

$$|u_M^{n+1} - u_{M-1}^{n+1}| < \varepsilon. \quad (5.2.8)$$

Условие (5.2.8) будем называть *условием гладкого сопряжения*. Если толщина слоя уменьшается, то в случае, когда условие (5.2.8) выполнялось на  $n$ -м слое, оно будет выполняться и на  $(n+1)$ -м слое при том же значении  $u_m$ . Если толщина слоя увеличивается, то условие гладкого сопряжения (5.2.8) может быть не выполнено при переходе с  $n$ -го на  $(n+1)$ -й слой. Поэтому, прежде чем вычислять значения  $u$  во всех точках сетки на  $(n+1)$ -м слое, необходимо вычислить значение  $u_{M-1}^{n+1}$  по формуле (5.2.6), положив  $u_M^{n+1} = 1$ , и затем проверить условие гладкого сопряжения (5.2.8). В случае, когда условие (5.2.8) выполнено, значения продольной составляющей скорости  $u_m^{n+1}$ ,  $m = M-2, M-3, \dots, 2, 1$ , могут быть найдены обратной прогонкой. В случае невыполнения условия (5.2.8) на  $(n+1)$ -м слое добавляется точка с шагом  $\Delta y$  (п номером  $M+1$ ) и находятся прогночные коэффициенты  $A_M, B_M$ . При вычислении этих коэффициентов значения составляющих скорости в недостающей точке  $M+1$  на  $n$ -м слое берутся равными значениям в точке  $M$  на  $n$ -м слое. Положив  $u_{M+1}^{n+1} = 1$  и зная  $A_M$  и  $B_M$ , можно снова проверить выполнение условия гладкого сопряжения и, если необходимо, добавить еще одну точку на  $(n+1)$ -м слое. Таким образом, на  $(n+1)$ -м слое может прибавляться пужное количество точек, пока для двух последних точек  $(n+1)$ -го слоя не будет выполнено условие гладкого сопряжения. Прибавление большого числа точек на  $(n+1)$ -м слое обычно говорит о том, что шаг  $\Delta x$  велик. После того как будет выполнено условие (5.2.8), значения  $u_m^{n+1}$  находятся по формуле (5.2.6).

**5.2.4. Нахождение поперечной составляющей скорости  $v$  из уравнения неразрывности.** Уравнение неразрывности аппроксимируется разностным уравнением

$$\frac{1}{2} [(u_m^{n+1} - u_m^n)/\Delta x + (u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n)/\Delta x] = (v_{m+1}^{n+1/2} - v_m^{n+1/2})/\Delta y, \quad (5.2.9)$$

которое служит для нахождения значений  $v_m^{n+1/2}$  — поперечной компоненты скорости  $v$  на полуцелом слое  $n + 1/2$  после того, как были найдены значения  $u_m^{n+1}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Уравнение (5.2.9) разрешается относительно  $v_{m+1}^{n+1/2}$ , значение  $v_0^{n+1/2}$  находится из нижнего граничного условия ( $v_0^{n+1/2} = 0$ ).

**5.2.5. Итерации «по нелинейности».** Как уже отмечалось, коэффициенты  $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \delta_m$  в формуле (5.2.4) выражаются через искомые функции в точках сетки на полуцелом слое, т. е. через  $v_m^{n+1/2}, u_m^{n+1/2}$ . Если значения поперечной составляющей скорости  $v_m^{n+1/2}$  вычисляются по формуле (5.2.9) на полуцелом слое, то значения продольной составляющей скорости  $u$  вычисляются прогонкой в целых узлах сетки и в точках полуцелой сетки могут быть найдены только с помощью интерполяции:

$$u_m^{n+1/2} = (u_m^n + u_m^{n+1})/2. \quad (5.2.10)$$

Таким образом, при решении системы (5.2.4) для нахождения значений  $u$  в точках целой сетки на  $(n + 1)$ -м слое коэффициенты  $\beta_m, \delta_m$  зависят от искомой функции на том же  $(n + 1)$ -м слое. Для решения такой задачи, как обычно, применяются итерации. В первом приближении в качестве значений на  $(n + 1)$ -м слое берутся значения искомой функции на  $n$ -м слое, т. е. в формуле (5.2.10) значения  $u_m^{n+1}$  полагаются равными значениям  $u_m^n$ .

В целом итерационный процесс строится следующим образом. На первой итерации при получении прогоночных коэффициентов в прямой прогонке значения  $u_m^{n+1/2}$  и  $v_m^{n+1/2}$ , необходимые для вычисления  $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \delta_m$ , в формуле (5.2.4) полагаются равными значениям  $u_m^n$  и  $v_m^{n-1/2}$  соответственно. На первой же итерации находится значение поперечной координаты (толщины слоя), при котором выполнено условие гладкого сопряжения, и только тогда вычисляются значения  $u_m^{n+1}$  в обратной прогонке. Закачивается первая итерация (как и все последующие).

щие) вычислением  $v_m^{n+1/2}$ . Вторая и все последующие итерации начинаются с получения прогоночных коэффициентов, при вычислении которых используются значения  $u_m^{n+1}$  и  $v_m^{n+1/2}$ , полученные в предыдущей итерации. Толщина слоя, найденная в первой итерации, в последующих итерациях не изменяется и, следовательно, не проверяется условие гладкого сопряжения. После нахождения прогоночных коэффициентов находятся новые значения  $u_m^{n+1}$  и одновременно вычисляется максимум модуля разности значений  $u_m^{n+1}$  на данной и предыдущей итерациях:

$$\Delta u^* = \max_{m=1,2,\dots} |\Delta u_m|,$$

характеризующий сходимость итераций для  $u$ . Затем из уравнения (5.2.9) вычисляются  $v_m^{n+1/2}$  по явной формуле во всех точках промежуточного слоя  $m = 1, 2, \dots$ . Итерации заканчиваются, тогда  $\Delta u^*$  становится меньше заданного малого положительного числа  $\epsilon^*$ .

**5.2.6. Выбор начального профиля.** Для решения системы уравнений Прандтля (5.1.8) наряду с граничными условиями на стенке и во внешнем потоке (5.1.10) необходимо задавать профили искомых функций  $u$  и  $v$  для некоторого  $x = x_0$ . При исследовании неавтомодельных решений системы уравнений пограничного слоя на пластине (например, при вдуве газа с поверхности пластины) начальные профили для  $u$  и  $v$  при  $x = x_0$  могут быть взяты из автомодельного решения Блазиуса. Начальные профили могут подбираться из некоторых физических соображений, но обязательно удовлетворяющими граничным условиям при  $y = 0$  и  $y \rightarrow \infty$ . В связи с этим в начале расчета пограничного слоя может существовать такой интервал  $x_0 < x < x_0 + n\Delta x$ , где происходит резкая перестройка решения. Величина этого интервала во многом зависит от стабилизирующих свойств разностной схемы. Результаты экспериментальных исследований, выполняемых с помощью основной разностной схемы на примере решения Блазиуса, свидетельствуют о том, что величина интервала перестройки решения существенно зависит и от вида начального профиля скорости. Так, для разрывного профиля скорости ( $u|_{y=0} = 0$ ,  $u|_{y>0} = 1$ ) она наибольшая. Для кусочно-линейных профилей, удовлетворяющих граничным условиям при  $y = 0$  и  $y \rightarrow \infty$ , этот интервал заметно меньше.

При расчете конкретных физических задач в тех случаях, когда начальный профиль неизвестен, можно получить его путем последовательных итераций для фиксированного  $x_0$ . Эти итерации можно организовать таким же образом, как и при расчете с изменением  $x$ : после того как сошлись с заданной точностью итерации, проводящиеся в силу нелинейности системы, полученные профили берутся в качестве начальных. Параметр усреднения  $s$  в разностной схеме (5.2.3) при этом следует выбирать равным 1.

**5.2.7. Преобразование расчетной области к прямоугольной форме.** Применение численных методов для решения системы уравнений Прандтля (5.1.8) с граничными условиями (5.1.10) требует конкретизации понятия «внешняя граница пограничного слоя» и построения соответствующего алгоритма для выбора линии  $y = \delta(x)$ , на которой ставятся граничные условия, соответствующие внешнему потоку. Выше в п. 5.2.3 был описан алгоритм для реализации асимптотического верхнего граничного условия, который заключался в следующем: на каждом расчетном слое ( $x = \text{const}$ ) прибавляется необходимое количество точек по  $y$ , пока для последних точек не будет выполнено условие гладкого сопряжения. При этом число узлов поперек слоя возрастает, что приводит к некоторым трудностям использования оперативной памяти машины и вызывает увеличение необходимого для расчета машинного времени. Чтобы проводить расчеты в области прямоугольной формы при постоянном числе узлов сетки поперек слоя, можно ввести новые переменные

$$\xi = x, \quad \eta = y/\delta(x), \quad (5.2.11)$$

где  $\delta(x)$  — функция, которая строится при решении задачи. На каждом слое  $\xi = \text{const}$  функция  $\delta(x)$  выбирается в процессе общих итераций. Наиболее простым способом нахождения значения  $\delta(x)$  на каждом слое  $\xi = \text{const}$  является увеличение  $\delta(x)$  от итерации к итерации на величину  $\eta_M - \eta_{M-1}$  ( $M$  — номер последней точки на слое  $\xi = \text{const}$ ) до тех пор, пока не будет выполнено условие гладкого сопряжения.

Заметим, что  $\delta(\xi)$  является вспомогательной функцией. Поэтому строить ее можно достаточно произвольным образом. В тех случаях, когда решение имеет большие градиенты в продольном направлении, функция  $\delta(\xi)$  может меняться достаточно интенсивно. Это может привести к понижению точности расчета. Положение можно исправить

в этом случае либо уменьшением шага в продольном направлении, либо применением какой-либо операции «сглаживания» при построении функции  $\delta(\xi)$ .

### § 5.3. Основная разностная схема для интегрирования систем уравнений типа уравнений пограничного слоя

Широкий класс двумерных задач теории пограничного слоя, теории струй и дальних следов за телами может быть описан нелинейной системой уравнений в частных производных, состоящей из нескольких уравнений 2-го порядка и одного уравнения 1-го порядка (уравнения неразрывности).

**5.3.1. Постановка задачи.** В случае, когда все искомые функции зависят от двух пространственных координат  $x, y$ , системы уравнений для таких задач могут быть приведены к следующему общему виду:

$$a_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( c_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) + d_i + e_i f_i, \quad (5.3.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (5.3.2)$$

Система (5.3.1), (5.3.2) служит для определения  $k + 1$  неизвестных  $v$  и  $f_i, i = 1, 2, \dots, k$ . Заметим, что одна из функций  $f_i$  должна совпадать с  $u$ , так как уравнение движения всегда может быть приведено к виду (5.3.1). Запись системы уравнений типа пограничного слоя в виде (5.3.1), (5.3.2) предполагает, что для каждой искомой функции, кроме поперечной компоненты скорости  $v$ , выделяется свое «определяющее» уравнение второго порядка. Для поперечной компоненты скорости таким является уравнение неразрывности. Коэффициенты уравнения (5.3.1)  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$  могут зависеть от искомых функций, а также от производных тех функций, для которых данное уравнение не является «определяющим». К такому виду могут быть приведены уравнения Прандтля и уравнения стационарных течений газа в пограничных слоях, уже рассмотренные выше. Различные преобразования уравнений пограничного слоя, такие, например, как преобразование Дородницына [20], придающее уравнениям для сжимаемого газа форму, близкую к форме уравнений для несжимаемой жидкости, или преобразование Степанова — Манглера [20], приводящее осесимметричные уравнения пограничного слоя к уравнениям плоского слоя, не

меняют формально вид системы (5.3.1), (5.3.2). Преобразование уравнений типа пограничного слоя, проводящееся с целью приведения расчетной области к прямоугольной форме (см. п. 5.2.7) или с целью сгущения точек разностной сетки к поверхности тела в физической плоскости  $(x, y)$ , также не меняет общий вид системы уравнений (см. п. 5.5.1). Заметим только, что уравнение неразрывности при некоторых преобразованиях может изменить свой вид, но при этом всегда может быть записано так:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \tilde{F} \left( f_1, \dots, f_k, \frac{\partial f_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial y} \right). \quad (5.3.3)$$

Здесь  $\tilde{F}$  — некоторая функция указанных аргументов, вид которой может быть легко выписан в каждом конкретном случае.

Мы будем искать решение системы (5.3.1), (5.3.2) при следующих граничных условиях:

$$v = V(x), f_i = F_{i,1} \left( x, f_1, \dots, f_k, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial y} \right) \quad \text{при } y = 0, \quad (5.3.4)$$

$$f_i \rightarrow F_{i,2}(x, f_1, \dots, f_k) \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad (5.3.5)$$

где  $V(x)$ ,  $F_{i,1}$ ,  $F_{i,2}$  — известные функции своих аргументов. Условие (5.3.5) означает, что искомые функции асимптотически стремятся к соответствующим функциям  $F_{i,2}$  на внешней границе пограничного слоя. Кроме граничных условий необходимо задать начальные условия — значения искомых функций  $f_i$  поперек слоя в некотором начальном сечении  $x = x_0$ .

**5.3.2. Конечно-разностная аппроксимация уравнений второго порядка.** Уравнения (5.3.1) аппроксимируются с помощью двухслойной неявной шеститочечной схемы на прямоугольной сетке, состоящей из целых и полуцелых узлов (см. пп. 5.2.1 и 5.2.2):

$$\begin{aligned} & a_{i,m}^{n+1/2} \frac{f_{i,m}^{n+1} - f_{i,m}^n}{\Delta x} + \\ & + b_{i,m}^{n+1/2} \frac{s_i (f_{i,m+1}^{n+1} - f_{i,m-1}^{n+1}) + (1 - s_i) (f_{i,m+1}^n - f_{i,m-1}^n)}{2\Delta y} = \\ & = \frac{1}{\Delta y^2} \{ [(1 - s_i) (f_{i,m+1}^n - f_{i,m}^n) + s_i (f_{i,m+1}^{n+1} - f_{i,m}^{n+1})] c_{i,m+1/2}^{n+1/2} - \\ & - [(1 - s_i) (f_{i,m}^n - f_{i,m-1}^n) + s_i (f_{i,m}^{n+1} - f_{i,m-1}^{n+1})] c_{i,m-1/2}^{n+1/2} \} + \\ & + d_{i,m}^{n+1/2} + e_{i,m}^{n+1/2} [(1 - s_i) f_{i,m}^n + s_i f_{i,m}^{n+1}], \quad (5.3.6) \end{aligned}$$

где параметр усреднения  $s_i$  может быть выбран различным для каждого уравнения из условия  $1/2 \leq s_i \leq 1$ . Для этих значений разностная схема (5.3.6) при замороженных коэффициентах  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$  абсолютно устойчива и при  $s_i = 1/2$  имеет второй порядок точности относительно шагов сетки  $\Delta x$  и  $\Delta y$  ( $O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$ ).

Уравнение (5.3.6) может быть приведено к виду

$$\alpha_{i,m} f_{i,m-1}^{n+1} + \beta_{i,m} f_{i,m}^{n+1} + \gamma_{i,m} f_{i,m+1}^{n+1} = \delta_{i,m}, \quad (5.3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{i,m} &= -\frac{1}{2\Delta y} s_i \left[ b_{i,m}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta y} (c_{i,m-1}^{n+1/2} + c_{i,m}^{n+1/2}) \right], \\ \beta_{i,m} &= \frac{1}{\Delta x} a_{i,m}^{n+1/2} + \\ &\quad + s_i \left[ \frac{1}{2\Delta y^2} (c_{i,m+1}^{n+1/2} + 2c_{i,m}^{n+1/2} + c_{i,m-1}^{n+1/2}) - e_{i,m}^{n+1/2} \right], \\ \gamma_{i,m} &= \frac{1}{2\Delta y} s_i \left[ b_{i,m}^{n+1/2} - \frac{1}{\Delta y} (c_{i,m+1}^{n+1/2} + c_{i,m}^{n+1/2}) \right], \\ \delta_{i,m} &= \frac{1}{2\Delta y} (1 - s_i) \left[ b_{i,m}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta y} (c_{i,m}^{n+1/2} + c_{i,m-1}^{n+1/2}) \right] f_{i,m-1}^n + \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{\Delta x} a_{i,m}^{n+1/2} - (1 - s_i) \left[ \frac{1}{2\Delta y^2} (c_{i,m+1}^{n+1/2} + 2c_{i,m}^{n+1/2} + c_{i,m-1}^{n+1/2}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e_{i,m}^{n+1/2} \right] \right\} f_{i,m}^n - \frac{1}{2\Delta y} (1 - s_i) \left[ b_{i,m}^{n+1/2} - \frac{1}{\Delta y} (c_{i,m+1}^{n+1/2} + c_{i,m}^{n+1/2}) \right] \times \\ &\quad \times f_{i,m+1}^n + d_{i,m}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Система (5.3.7) для каждого  $i, i = 1, 2, \dots, k$ , совместно с конечно-разностной аппроксимацией граничных условий определяет значения  $f_i$  на слое с номером  $n+1$ , если известны значения  $f_i$  на предыдущем слое и значения  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$  в соответствующих точках сетки.

**5.3.3. Прогонка. Реализация верхних граничных условий.** Система (5.3.7) решается методом прогонки. Для нахождения  $f_i$  на  $(n+1)$ -м слое сначала вычисляются прогоночные коэффициенты в рекуррентном соотношении

$$f_{i,m}^{n+1} = A_{i,m} f_{i,m+1} + B_{i,m} \quad (5.3.9)$$

по следующим формулам:

$$A_{i,m} = \frac{\gamma_{i,m}}{\alpha_{i,m} A_{i,m-1} + \beta_{i,m}}, \quad B_{i,m} = \frac{\delta_{i,m} - \alpha_{i,m} B_{i,m-1}}{\alpha_{i,m} A_{i,m-1} + \beta_{i,m}}. \quad (5.3.10)$$

Значения  $A_{i,0}, B_{i,0}$  находятся из конечно-разностной ап-

проксимации граничных условий при  $y = 0$ . Зная прогоночные коэффициенты  $A_{i,m}, B_{i,m}$  ( $i = 1, 2, \dots, k; m = 0, 1, \dots, M-1$ , где  $M+1$  — число точек на  $n$ -м слое) на  $(n+1)$ -м слое, используя граничные условия на внешней границе пограничного слоя (при  $m = M$ ), можно найти  $f_i$  на  $(n+1)$ -м слое. Однако, учитывая тот факт, что с ростом  $x$  может увеличиваться толщина пограничного слоя, прежде чем находить по соотношению (5.3.9)  $f_i$  во всех точках сетки, следует вычислить лишь  $f_{i,M-1}$  и проверить условие гладкого сопряжения

$$|f_{i,M}^{n+1} - f_{i,M-1}^{n+1}| < \varepsilon_i, \quad (5.3.11)$$

где  $\varepsilon_i$  — малые положительные числа, которые могут быть выбраны различными для каждого из  $k$  уравнений второго порядка (5.3.6). В случае невыполнения условия (5.3.11) хотя бы для одного из  $i$  на  $(n+1)$ -м слое добавляется точка с шагом  $\Delta y = y_M - y_{M-1}$  и находятся прогоночные коэффициенты  $A_{i,m}, B_{i,m}$ , при вычислении которых в недостающих точках на  $n$ -м слое используются предельные значения функций  $f_i$ . Таким образом, на  $(n+1)$ -м слое может прибавляться нужное количество точек, пока для двух последних точек  $(n+1)$ -го слоя не будут выполнены условия гладкого сопряжения (5.3.11).

**5.3.4. Нахождение поперечной составляющей скорости  $v$  из уравнения неразрывности.** Уравнение (5.3.2) аппроксимируется по четырехточечной схеме так же, как и в п. 5.2.2.:

$$\frac{1}{2\Delta x} [(\rho u)_m^{n+1} - (\rho u)_m^n] + \frac{1}{2\Delta x} [(\rho u)_{m+1}^{n+1} - (\rho u)_{m+1}^n] + \frac{1}{\Delta y} [(\rho v)_{m+1}^{n+1/2} - (\rho v)_m^{n+1/2}] = 0. \quad (5.3.12)$$

Если функции  $f_i, \rho$  известны во всех точках сетки на  $(n+1)$ -м слое и  $v_0^{n+1/2}$  может быть найдено из нижнего граничного условия для поперечной составляющей скорости, то уравнение (5.3.12) дает возможность найти  $v_m^{n+1/2}$  для  $m = 1, 2, \dots, M'$ , где  $M'$  — число интервалов на  $(n+1)$ -м слое ( $M' \geq M$ , а  $M$  — число интервалов на предыдущем  $n$ -м слое).

В случае, когда уравнение неразрывности имеет вид (5.3.3), для его аппроксимации также применяется четырехточечная схема

$$\frac{v_{m+1}^{n+1/2} - v_m^{n+1/2}}{\Delta y} = \tilde{F}_{m+1/2}^{n+1/2},$$



где  $\bar{F}_{m+1/2}^{n+1/2}$  есть значение функции  $F$ , вычисленное на полуделом слое  $n + 1/2$  по значениям искомым функций  $f_i$ , в четырех точках:  $(n, m)$ ,  $(n, m + 1)$ ,  $(n + 1, m)$ ,  $(n + 1, m + 1)$ .

**5.3.5. Итерации.** Коэффициенты  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$  в системе (5.3.1), (5.3.2), как было указано выше, могут зависеть от  $v, f_i$  и различных комбинаций их производных. Они находятся в точках вспомогательной сетки с помощью линейной интерполяции по значениям  $v$  и  $f_i$  в узлах основной сетки. Таким образом, необходимо вычислять коэффициенты  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$  на  $(n + 1)$ -м слое как функции от неизвестных функций. Для этого, как обычно, применяются итерации. В первом приближении в качестве значений функций на  $(n + 1)$ -м слое берутся значения функций на  $n$ -м слое в соответствующих точках.

**5.3.6. Применение основной разностной схемы для расчета стационарных течений однородного сжимаемого газа в пограничном слое.** Описание применения основной разностной схемы для расчета стационарных течений сжимаемого однородного совершенного газа проведем для системы уравнений в случае плоского стационарного течения, записанной в безразмерной форме (см. п. 5.1.5):

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{dp}{dx}, \quad (5.3.13)$$

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial h}{\partial y} \right) + (k - 1) M^2 \left[ u \frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (5.3.14)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (5.3.15)$$

$$p = \frac{1}{kM_\infty^2} \rho h, \quad \mu = \mu(h). \quad (5.3.16)$$

Граничные условия для этой системы выберем следующие:

$$u = v = 0, \quad h = h_w \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (5.3.17)$$

$$u \rightarrow U_\infty(x), \quad h \rightarrow h_\infty(x) \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (5.3.18)$$

Использование основного разностного метода предполагает, что для каждой неизвестной функции  $u, h, v$  выделяется свое определяющее уравнение: для  $u$  — уравнение движения (5.3.13), для  $h$  — уравнение энергии (5.3.14) и для  $v$  — уравнение неразрывности (5.3.15).

Уравнения (5.3.13), (5.3.14) могут быть записаны в виде (5.3.1), если обозначить

$$a_1 = a_2 = \rho u, \quad b_1 = b_2 = \rho v, \quad c_1 = c_2 = \mu, \quad e_1 = e_2 = 0, \\ d_1 = -\frac{dp}{dx}, \quad d_2 = (k-1) M_\infty^2 \left[ u \frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (5.3.19)$$

Конечно-разностную аппроксимацию уравнений движения и энергии в соответствии с формулой (5.3.6) запишем в следующем виде:

$$(\rho u)_m^{n+1/2} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta x} + \\ + (\rho v)_m^{n+1/2} \frac{s(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) + (1-s)(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)}{2\Delta y} = \\ = \frac{1}{\Delta y^2} \{ [(1-s)(u_{m+1}^n - u_m^n) + s(u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1})] \mu_{m+1/2}^{n+1/2} - \\ - [(1-s)(u_m^n - u_{m-1}^n) + s(u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1})] \mu_{m-1/2}^{n+1/2} \} - \\ - \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta x}, \quad (5.3.20)$$

$$(\rho u)_m^{n+1/2} \frac{h_m^{n+1} - h_m^n}{\Delta x} + \\ + (\rho v)_m^{n+1/2} \frac{s(h_{m+1}^{n+1} - h_{m-1}^{n+1}) + (1-s)(h_{m+1}^n - h_{m-1}^n)}{2\Delta y} = \\ = \frac{1}{Pr \cdot \Delta y^2} \{ [(1-s)(h_{m+1}^n - h_m^n) + s(h_{m+1}^{n+1} - h_m^{n+1})] \mu_{m+1/2}^{n+1/2} - \\ - [(1-s)(h_m^n - h_{m-1}^n) + s(h_m^{n+1} - h_{m-1}^{n+1})] \mu_{m-1/2}^{n+1/2} \} + \\ + (k-1) M_\infty^2 \left[ u_m^{n+1/2} \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta x} + \mu_m^{n+1/2} \left( \frac{u_{m+1}^{n+1/2} - u_{m-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} \right)^2 \right]. \quad (5.3.21)$$

В (5.3.20) и (5.3.21) все выражения, взятые на полуделом слое, зависят от искоемых функций на  $(n+1)$ -м слое, так как

$$(\rho u)_m^{n+1/2} = \frac{1}{2} [(\rho u)_m^{n+1} + (\rho u)_m^n],$$

$$(\rho v)_m^{n+1/2} = \frac{1}{2} [(\rho v)_m^{n+1} + (\rho v)_m^n],$$

$$\mu_{m+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{4} (\mu_m^n + \mu_{m+1}^n + \mu_m^{n+1} + \mu_{m+1}^{n+1}),$$

$$\mu_{m-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{4} (\mu_{m-1}^n + \mu_m^n + \mu_{m-1}^{n+1} + \mu_m^{n+1}), \quad (5.3.22)$$

$$\mu_m^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_m^{n+1} + u_m^n), \quad \mu_m^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\mu_m^{n+1} + \mu_m^n),$$

$$\mu_{m+1}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{m+1}^{n+1} + u_{m+1}^n), \quad \mu_{m-1}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{m-1}^{n+1} + u_{m-1}^n).$$

Значения начальных прогоночных коэффициентов находятся из внешнего граничного условия при  $y=0$  на стенке:

$$A_{1,0} = A_{2,0} = 0, \quad B_{1,0} = 0, \quad B_{2,0} = h_w.$$

Толщина температурного слоя может быть больше толщины динамического пограничного слоя. Поэтому после того, как будут вычислены прогоночные коэффициенты  $A_{h,m}$  и  $B_{h,m}$  для всех точек динамического слоя (т. е. во всех  $M$  точках, где было уже вычислено  $h$ ), необходимо проверить условие гладкого сопряжения для  $h$ :

$$|h_M^{n+1} - h_{M-1}^{n+1}| < \varepsilon_h.$$

В случае невыполнения этого условия прибавляются точки на  $(n+1)$ -м слое до тех пор, пока оно не будет выполнено. При вычислении прогоночных коэффициентов в новых добавляемых точках, используются предельные значения  $U_\infty$  и  $h_\infty$  для  $(n+1)$ -го слоя. Вычисление значений  $u$ ,  $h$  на  $(n+1)$ -м слое проводится обратной прогонкой.

Уравнение неразрывности (5.3.15) аппроксимируется по формуле (5.3.12) и из него находятся значения поперечной составляющей скорости  $v_i^{n+1/2}$ . Для этого уравнение (5.3.12) разрешается относительно  $v_{m+1}^{n+1/2}$ , из нижнего граничного условия находятся  $v_0^{n+1/2} = 0$ , а затем находятся значения  $v$  во всех целых точках на полуцелом слое.

В силу того, что коэффициенты уравнений (5.3.22) выражаются через искомые функции  $u$ ,  $v$ ,  $h$  на  $(n+1)$ -м слое, для нахождения окончательных значений этих функций необходимо применить итерации. В первой итерации в формулах (5.3.22) значения искомых функций на  $(n+1)$ -м слое полагаются равными значениям соответствующих функций в соответствующих по номеру на слое точках. Итерации заканчиваются, когда выполняются условия сходимости итераций с заданной точностью для функций  $u$  и  $h$ :

$$\Delta u^* = \max_m |\Delta u_m| < \varepsilon_{1u},$$

$$\Delta h^* = \max_m |\Delta h_m| < \varepsilon_{1h}.$$

Только после этого можно перейти к расчету следующего по  $x$  слоя.

Для решения системы уравнений (5.3.13) — (5.3.16), помимо граничных условий (5.3.17), (5.3.18), необходимо также задавать профили искомых функций  $u$ ,  $v$ ,  $h$  для некоторого  $x = x_0$ .

**5.3.7. Разностная схема, обладающая свойством сильной стабилизации высокочастотных возмущений.** Симметричная шеститочечная схема, использованная в основном методе, плохо «гасит» высокочастотные возмущения. В областях, где велики градиенты искомых функций или нарушается гладкость начальных либо граничных условий, появляются медленно затухающие колебания. Разностная схема, описанная в настоящем пункте, совсем не требует итераций, обладает точностью второго порядка и при этом хорошо «гасит» высокочастотные возмущения. Заметим сразу, что поперечная составляющая скорости  $v$  находится из уравнения неразрывности так же, как в п. 5.3.4. Искомые функции, для которых определяющими являются уравнения второго порядка, находятся следующим образом. Сначала находятся предварительные значения  $\bar{f}_i^{n+1}$  на  $(n+1)$ -м слое, так же как и в основной разностной схеме, из (5.3.6) при  $s_i = 1$ , с той лишь разницей, что коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  вычисляются на  $n$ -м слое:

$$a_{i,m}^n \frac{\bar{f}_{i,m}^{n+1} - f_{i,m}^n}{\Delta x} + b_{i,m}^n \frac{\bar{f}_{i,m+1}^{n+1} - \bar{f}_{i,m-1}^{n+1}}{2\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{\Delta y^2} \{ [\bar{f}_{i,m+1}^{n+1} - \bar{f}_{i,m}^{n+1}] c_{i,m+1/2}^n - [\bar{f}_{i,m}^{n+1} - \bar{f}_{i,m-1}^{n+1}] c_{i,m-1/2}^n \} +$$

$$+ d_{i,m}^n + e_{i,m}^n \bar{f}_{i,m}^{n+1}.$$

После этого из уравнения неразрывности определяется  $v^{n+1/2}$ . Вторые предварительные значения  $\bar{f}_i^{n+1}$  на  $(n+1)$ -м слое находятся в два этапа. Сначала находятся значения  $\bar{f}_i^{n+1/2}$  на полупролом слое  $(n+1/2)$  с шагом  $\Delta x/2$  из уравнений

$$a_{i,m}^n \frac{\bar{f}_{i,m}^{n+1/2} - f_{i,m}^n}{\Delta x/2} + b_{i,m}^n \frac{\bar{f}_{i,m+1}^{n+1/2} - \bar{f}_{i,m-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{\Delta y^2} \{ [\bar{f}_{i,m+1}^{n+1/2} - \bar{f}_{i,m}^{n+1/2}] c_{i,m+1/2}^n - [\bar{f}_{i,m}^{n+1/2} - \bar{f}_{i,m-1}^{n+1/2}] c_{i,m-1/2}^n \} +$$

$$+ d_{i,m}^n + e_{i,m}^n \bar{f}_{i,m}^{n+1/2},$$

а затем вычисляются  $\bar{f}_i^{n+1}$  из соотношений

$$a_{i,m}^{n+1/2} \frac{\bar{f}_{i,m}^{n+1} - \bar{f}_{i,m}^{n+1/2}}{\Delta x/2} + b_{i,m}^{n+1/2} \frac{\bar{f}_{i,m+1}^{n+1} - \bar{f}_{i,m-1}^{n+1}}{2\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{\Delta y^2} \{ [\bar{f}_{i,m+1}^{n+1} - \bar{f}_{i,m}^{n+1}] c_{i,m+1/2}^{n+1/2} - [\bar{f}_{i,m}^{n+1} - \bar{f}_{i,m-1}^{n+1}] c_{i,m-1/2}^{n+1/2} \} +$$

$$+ a_{i,m}^{n+1/2} + c_{i,m}^{n+1/2} \bar{f}_{i,m}^{n+1}.$$

Окончательные значения  $f_i^{n+1}$  получим в виде линейной комбинации двух предварительных значений:  $f_i^{n+1} = 2\bar{f}_i^{n+1} - \bar{f}_i^{n+1/2}$ , используя которые, пересчитываются значения  $v^{n+1/2}$ . Таким образом, нахождение всех искомым функций на  $(n+1)$ -м слое заканчивается и можно переходить к расчету следующего слоя. Легко убедиться в том, что по требуемому объему памяти описанная в этом разделе схема не хуже основной разностной схемы, а по числу операций на слое равноценна трем итерациям по основной схеме.

#### § 5.4. Разностная схема для решения нестационарных уравнений пограничного слоя

Нестационарные течения в пограничном слое возникают потому, что либо время с начала эксперимента мало, либо условия на стенке меняются во времени (нестационарный вдув, непостоянная температура тела), либо изменяются условия во внешнем потоке, например скорость и температура. Впервые задача о нестационарном пограничном слое для несжимаемой жидкости сформулирована основоположником теории пограничного слоя Л. Прандтлем в 1904 г. Первые результаты были получены через четыре года Блазиуеом, который исследовал задачу о внезапном приведении покоящегося тела в равномерное движение. Система уравнений, описывающая нестационарное течение сжимаемого газа в пограничном слое, в плоском случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (5.4.1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (5.4.2)$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial h}{\partial y} \right) +$$

$$+ (k-1) M_0^2 \left[ u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial y}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (5.4.3)$$

$$\rho = k(k-1)^{-1} p h^{-1}.$$

Эта система записана для безразмерных величин, которые введены следующим образом:

$$x = \frac{\bar{x}}{l}, \quad y = \frac{\bar{y} \sqrt{\text{Re}}}{l}, \quad u = \frac{\bar{u}}{u_0}, \quad h = \frac{\bar{h}_0}{h_0}, \quad t = \frac{\bar{t} u_0}{l},$$

$$\mu = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0}, \quad \rho = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}, \quad v = \frac{\bar{v}}{u_0}. \quad (5.4.4)$$

Здесь  $\bar{h}$  — энтальпия,  $\bar{t}$  — время,  $l$  — характерная длина,  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости,  $\text{Re} = u_0 l \rho / \mu$  — число Рейнольдса,  $\rho$  — плотность,  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  — составляющие скорости соответственно по  $x$  и  $y$ ; величины с чертой — размерные, с индексом «0» — соответствующие величины во внешнем потоке в начальный момент времени. В уравнении (5.4.3)  $\text{Pr} = \mu_0 c_{p0} / \lambda_0$  — число Прандтля,  $M_0$  — число Маха в набегающем потоке,  $k = c_p / c_v$  — показатель адиабаты.

Граничные условия для системы (5.4.1) — (5.4.3) в общем случае можно записать так:

$$u = 0, \quad v = \bar{v}(t, x), \quad h = \bar{h}(t, x) \quad \text{при } y = 0, \quad (5.4.5)$$

$$u = \bar{u}_0(t, x), \quad h = \bar{h}_0(t, x) \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad (5.4.6)$$

где  $\bar{v}(t, x)$ ,  $\bar{h}(t, x)$ ,  $\bar{u}_0(t, x)$ ,  $\bar{h}_0(t, x)$  — некоторые заданные функции.

Решение системы (5.4.1) — (5.4.3) с граничными условиями (5.4.5), (5.4.6) мы ищем для  $0 < t \leq T$  и  $x_0 \leq x \leq X$ , предполагая, что функции  $v$ ,  $u$ ,  $h$  известны в начальный момент времени  $t = 0$  и при  $x = x_0$  для всех  $t \in [0, T]$ .

При  $t = 0$  функции  $v$ ,  $u$ ,  $h$  могут быть заданы из различных соображений. Если предположить, например, что при  $t = 0$  тело обтекается установившимся потоком газа, то  $v$ ,  $u$ ,  $h$  можно задать из решения соответствующей стационарной задачи.

Задание  $v$ ,  $u$ ,  $h$  при  $x = x_0$  для  $0 \leq t \leq T$  зависит от характера задачи. Если рассматривается нестационарное обтекание затупленного тела, то  $v$ ,  $u$ ,  $h$  могут быть получены при  $x_0 = 0$  из решения системы уравнений, описывающей нестационарное течение в пограничном слое в критической точке.

Нестационарные эффекты в пограничном слое обуславливаются не только заданием условий при  $x = x_0$ , но и заданием граничных условий на теле и на внешней границе пограничного слоя, зависящих от времени. Именно эти условия в основном и определяют нестационарность тече-

ния в пограничном слое. Рассмотрение задач с граничными условиями, нестационарными на стенке и не зависящими от времени на внешней границе пограничного слоя, нам представляется более простым. Задание таких граничных условий, на наш взгляд, не должно вызывать особых трудностей.

Выясним, каким уравнениям должны удовлетворять нестационарные граничные условия на внешней границе пограничного слоя. Оставаясь в рамках прандтлевской постановки задачи о пограничном слое, следует предположить, что на внешней границе решение системы (5.4.1) — (5.4.3) должно асимптотически стремиться к решению соответствующей задачи для идеального газа, взятому на поверхности тела. Это означает, что решение системы (5.4.1) — (5.4.3) на внешней границе должно удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (5.4.7)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.4.8)$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho u \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} + (k-1) M_0^2 u \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.4.9)$$

$$\rho = k(k-1)^{-1} p h^{-1}, \quad (5.4.10)$$

так как вязкими членами в этом случае можно пренебречь, а  $du/dy \rightarrow 0$  и  $dh/dy \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ . Отметим, что система координат здесь такая же, как и в пограничном слое, т. е. ось  $x$  направлена вдоль поверхности тела, а ось  $y$  перпендикулярна к ней. В случае обтекания пластины в уравнении (5.4.7)  $\partial \rho v / \partial y = 0$ . Таким образом, при решении системы уравнений нестационарного пограничного слоя для сжимаемого газа следует находить значения  $u$ ,  $h$  и  $p$  на внешней границе пограничного слоя из решения системы (5.4.7) — (5.4.10) при  $y = 0$ .

Система уравнений нестационарного сжимаемого пограничного слоя формально может быть приведена к следующему виду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (5.4.11)$$

$$\rho_i \frac{\partial f_i}{\partial t} + a_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( c_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) + d_i + e_i f_i. \quad (5.4.12)$$

Уравнение (5.4.11) — обычное уравнение неразрывности. Обозначения общепринятые:  $t$  — время,  $x$  — продольная

координата, направленная вдоль тела,  $y$  — поперечная координата,  $u$  и  $v$  — соответствующие составляющие скорости,  $\rho$  — плотность. Предполагается, что коэффициенты  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, p_i$  в уравнении (5.4.12) могут зависеть от искомого функций  $f_i, v$  и их пространственных производных. Одна из искомого функций  $f_i$  должна совпадать с  $u$ .

Уравнение (5.4.12) запишем таким образом:

$$p_i \frac{\partial f_i}{\partial t} = A_i, \quad (5.4.13)$$

где

$$A_i = \frac{\partial}{\partial y} \left( c_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) + d_i + e_i f_i - \left( a_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right).$$

Введем в пространстве  $(x, y, t)$  основную прямоугольную сетку, состоящую из точек  $x = x_0 + n\Delta x$ ,  $y = m\Delta y$ ,  $t = k\Delta t$ , и вспомогательную сетку

$$x = x_0 + (n + 1/2)\Delta x, \quad y = m\Delta y, \quad t = k\Delta t,$$

$$x = x_0 + (n + 1/2)\Delta x, \quad y = m\Delta y, \quad t = (k + 1/2)\Delta t.$$

В точках основной сетки вычисляем искомого функции  $f_i$ , в точках вспомогательной сетки — значения коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, p_i$  и скорости  $v$ . Обозначим  $f_{i,m,n}^k = f_i(x_0 + n\Delta x, m\Delta y, k\Delta t)$ . Будем аппроксимировать (5.4.13) следующим образом:

$$p_{i,m,n+1/2}^{k+1/2} \frac{f_{i,m,n+1/2}^{k+1} - f_{i,m,n+1/2}^k}{\Delta t} = s A_{i,m,n+1/2}^{k+1} - (1-s) A_{i,m,n+1/2}^k, \quad (5.4.14)$$

где  $A_{i,m,n+1/2}^k$  и  $A_{i,m,n+1/2}^{k+1}$  — разностные аппроксимации оператора  $A_i$  в плоскостях  $t = k\Delta t$ ,  $t = (k+1)\Delta t$ , соответствующие двухслойной неявной шеститочечной схеме, подробно описанной в § 5.3.

Используя метод Фурье в сочетании с обычным приемом «замораживания» коэффициентов, можно показать, что предложенная схема абсолютно устойчива при  $1/2 \leq s \leq 1$ . Таким образом, если известны все функции  $f_i$  и  $v$  в момент времени  $t = k\Delta t$  и на  $n$ -м слое в момент времени  $t = (k+1)\Delta t$ , то уравнения (5.4.14) совместно с граничными условиями для функций  $f_i$  при  $y = 0$  и на внешней границе пограничного слоя ( $y \rightarrow \infty$ ) образуют систему алгебраических уравнений относительно функций  $f_{i,m,n+1}^{k+1}$  (так как  $f_{i,m,n+1/2}^{k+1} = (f_{i,m,n}^{k+1} + f_{i,m,n+1}^{k+1})/2$ ), которая может



быть решена известным методом прогонки. Зная все функции  $f_{i,m,n+1}^{k+1}$  и предполагая, что плотность  $\rho$  есть известная функция  $f_i$  (обычно  $\rho = \rho(p, T)$ , где  $p$  — давление,  $T$  — температура), можно найти  $v_{m,n+1/2}^{k+1}$ , аппроксимируя уравнение (5.4.11) по четырехточечной схеме, описанной в § 5.3. Так как коэффициенты  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, p_i$  уравнения (5.4.12) могут зависеть от искомых функций, то для нахождения функций  $f_{i,m,n+1}^{k+1}$  следует применять итерации. Описанная схема позволяет искать решение системы (5.4.11), (5.4.12) в области  $x \geq x_0, y \geq 0, t \geq 0$ , если известны значения функций  $f_i$  и  $v$  в плоскости  $t = 0$  и в плоскости  $x = x_0$ . Решение можно получать последовательно на каждом временном слое  $t = \text{const}$  или на каждой плоскости  $x = x_0 + n\Delta x$  для различных  $t$ . Возможно и сочетание этих двух алгоритмов.

В § 5.3 описан стандартный алгоритм для решения систем вида

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (5.4.15)$$

$$a_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( c_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) + d_i + e_i f_i. \quad (5.4.16)$$

С его помощью предложенная разностная схема может быть реализована на электронной вычислительной машине. Действительно, уравнение (5.4.11) отличается от уравнения (5.4.15) только членом  $\partial \rho / \partial t$ , т. е. некоторой известной правой частью, которая может быть вычислена в соответствующей подпрограмме. Уравнение (5.4.14) можно свести к разностному аналогу уравнения (5.4.16), если все члены, зависящие от искомых функций на  $k$ -м временном слое, отнести к коэффициенту  $d_i$ .

При использовании описанного алгоритма для решения нестационарных двумерных задач, в которых толщина пограничного слоя увеличивается с ростом  $x$ , естественно увеличивается число точек по  $y$  при переходе от слоя к слою. Это приводит к тому, что в силу ограниченности оперативной памяти машины при достижении максимально возможного числа точек на слое приходится делать переход на другую сетку. Если для стационарных задач с этими трудностями справиться сравнительно легко, то для нестационарных задач переход на новую сетку требует составления достаточно громоздких программ интерполяции всех искомых функций сразу на двух временных слоях.

Желание вести счет с одинаковым числом точек на каждом расчетном слое естественно приводит к введению новой переменной  $\eta = y/\delta(t, x)$  (аналогично тому, как это было сделано в п. 5.2.7), где  $\delta(t, x)$  есть «толщина» пограничного слоя, которая определяется из условия гладкого сопряжения решения уравнений пограничного слоя с внешним потоком. При переходе от одного расчетного слоя к следующему  $\delta(t, x)$  является неизвестной функцией. При переходе к новым переменным

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = y/\delta(\tau, \xi) \quad (5.4.17)$$

система уравнений (5.4.1)–(5.4.3) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\eta}{\delta(\tau, \xi)} \delta'_\tau(\tau, \xi) \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} - \frac{\eta}{\delta(\tau, \xi)} \delta'_\xi(\tau, \xi) \frac{\partial(\rho u)}{\partial \eta} + \frac{1}{\delta(\tau, \xi)} \cdot \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = 0, \quad (5.4.18)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\eta}{\delta(\tau, \xi)} \delta'_\tau(\tau, \xi) \frac{\partial u}{\partial \eta} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\eta}{\delta(\tau, \xi)} \delta'_\xi(\tau, \xi) \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \frac{1}{\delta(\tau, \xi)} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] = - \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu}{\delta^2(\tau, \xi)} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad (5.4.19)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial h}{\partial \tau} - \frac{\eta}{\delta(\tau, \xi)} \delta'_\tau(\tau, \xi) \frac{\partial h}{\partial \eta} + u \frac{\partial h}{\partial \xi} - u \frac{\eta}{\delta(\tau, \xi)} \delta'_\xi(\tau, \xi) \frac{\partial h}{\partial \eta} + v \frac{1}{\delta(\tau, \xi)} \cdot \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] = \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu}{\delta^2(\tau, \xi)} \cdot \text{Pr} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + (k-1) M_0^2 \left[ u \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\mu}{\delta^2(\tau, \xi)} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right]. \quad (5.4.20)$$

Для нахождения неизвестной функции  $\delta(\tau, \xi)$  можно использовать алгоритм, описанный в п. 5.2.7. В качестве начального приближения для  $\delta(\tau, \xi)$  в случае нестационарных задач естественно брать соответствующее значение  $\delta$  с предыдущего временного слоя. Численные эксперименты показали, что при некоторых ситуациях (интенсивные возмущения во внешнем потоке или на стенке) функция  $\delta(\tau, \xi)$ , построенная таким образом, оказывается немонотонной, пилообразной функцией от  $\xi$ . Уменьшение шагов по направлению  $\xi$ , вообще говоря, может это исправить. Однако локальное уменьшение шага по  $\xi$  при расчете таких задач вызывает большое увеличение объема работ и приводит к увеличению информации, которую необходимо хранить в памяти машины.

Поскольку  $\delta(\tau, \xi)$  — вспомогательная функция, которую можно выбирать достаточно произвольно, применяется некоторая простая операция «сглаживания». Эта операция заключается в следующем. Пусть известны значения  $\delta(\tau^*, \xi^*)$ ,  $\delta(\tau^*, \xi^* + \Delta\xi)$  и  $\delta(\tau^* + \Delta\tau, \xi^*)$ , где  $\xi^*$ ,  $\tau^*$  — некоторые фиксированные значения  $\xi$ ,  $\tau$ , а  $\Delta\xi$  и  $\Delta\tau$  — соответственно шаги по  $\xi$  и  $\tau$ . При расчете значений  $u$  и  $h$  на слое  $(\tau^* + \Delta\tau, \xi^* + \Delta\xi)$  по описанному в п. 5.2.7 алгоритму выработается некоторое значение  $\bar{\delta}(\tau^* + \Delta\tau, \xi^* + \Delta\xi)$ . Искомое значение  $\delta(\tau^* + \Delta\tau, \xi^* + \Delta\xi)$  находится по формуле

$$\delta(\tau^* + \Delta\tau, \xi^* + \Delta\xi) = \delta(\tau^* + \Delta\tau, \xi^*) + \kappa\Delta\xi, \quad (5.4.21)$$

где

$$\tilde{\kappa} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta(\tau^*, \xi^* + \Delta\xi) - \delta(\tau^*, \xi^*)}{\Delta\xi} + \frac{\bar{\delta}(\tau^* + \Delta\tau, \xi^* + \Delta\xi) - \delta(\tau^* + \Delta\tau, \xi^*)}{\Delta\xi} \right]. \quad (5.4.22)$$

Операция «сглаживания» приводит к построению более гладкой функции  $\delta(\tau, \xi)$ .

## § 5.5. Примеры расчетов

Разностные методы решения уравнений типа пограничного слоя, изложенные в предыдущих параграфах этой главы, могут быть применены к широкому кругу задач. В настоящем параграфе будут даны примеры расчетов, иллюстрирующие возможности описанных методов для решения различных задач аэродинамики.

**5.5.1. Тестирование программ на задачах.** Обычно тестирование (проверку) программ, испытание возможностей разностных схем, первоначальный подбор сеток пытаются провести на известных решениях. Таким «пробным камнем» для разностных методов в задачах пограничного слоя может служить решение Блазиуса для задачи Прандтля о стационарном течении в пограничном слое на пластине (см. п. 5.1.2). Наиболее просто проверить алгоритм программы в том случае, когда на каждом последующем слое нет необходимости прибавления точек. Для этого предварительно к системе Прандтля (5.1.15) применим преобразование Блазиуса  $\xi = x$ ,  $\eta = y/\sqrt{x}$ . Заметим также, что искомые функции в задачах пограничного слоя имеют наибольшие градиенты вблизи поверхности тела. В связи с этим рационально использовать такие сетки, узлы кото-

рых сгущались бы к поверхности тела. Сгущение узлов сетки в физической плоскости  $(x, y)$  можно осуществить путем введения неравномерных шагов сетки по  $y$  или путем применения соответствующего преобразования координат. Используем пока второй путь и вслед за преобразованием Блазиуса к системе Прандтля применим логарифмическое преобразование вида

$$\xi_1 = \xi, \quad \eta_1 = \ln(1 + \eta/a),$$

где  $a$  — параметр, изменяя который, можно сгущать расчетные точки вблизи стенки. При таких двух преобразованиях число арифметических операций для вычисления решения в каждой точке естественно увеличивается, но при этом представляется возможным вести расчет в переменных  $(\xi_1, \eta_1)$  с постоянным шагом разностной сетки поперек пограничного слоя и постоянным числом узлов на каждом разностном слое  $\xi_1 = \text{const}$ .

В переменных  $(\xi_1, \eta_1)$  система Прандтля для задачи течения в пограничном слое около пластины имеет вид

$$\xi_1 a^2 e^{2\eta_1} u \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \left\{ a e^{\eta_1} \left[ v \sqrt{\xi} - \frac{1}{2} u (e^{\eta_1} - 1) a \right] + 1 \right\} \frac{\partial u}{\partial \eta_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}, \quad (5.5.1)$$

$$v \sqrt{\xi_1} a e^{\eta_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} - \frac{1}{2 \sqrt{\xi_1}} (e^{\eta_1} - 1) a \frac{\partial u}{\partial \eta_1} + \frac{\partial v}{\partial \eta_1} = 0.$$

Граничные условия для этой системы запишем в форме

$$\begin{aligned} u = v = 0 \quad \text{при} \quad \eta_1 = 0, \\ u \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \eta_1 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Как уже отмечалось в п. 5.2.6 настоящей главы, для задачи (5.5.1), (5.5.2) необходимо задавать профили искомых функций  $u$  и  $v$  для некоторого  $\xi = \xi_{10}$  ( $x = x_0$ ).

Приведем некоторые результаты численных экспериментов, характеризующие возможности основной разностной схемы. Расчеты проводились от профиля Блазиуса и от разрывного профиля ( $u = 0$  при  $\eta_1 = 0$ ,  $u = 1$  для  $\eta_1 > 0$ ) при  $\xi_{10} = 0,01$  на интервале по  $\eta$  от 0 до 8,8 и  $v(\xi_{10}) = 0$  для  $\eta_1 > 0$ . При этом варьировались число точек поперек слоя  $M$  и параметр  $a$ . Итерации по «нелинейности» проводились с точностью до  $\varepsilon = 0,0001$  для значений  $u$  во всех точках сетки. Качество результатов оценивалось по значению  $(\partial u / \partial \eta)_{\eta=0}$ , которое для автоматического решения Блазиуса равно 0,332.

Значения  $c_0 = (du/d\eta)_{\eta=0}$  и число итераций  $j$ , полученные по основной разностной схеме ( $a = 1$ )

$\xi_1$	От профиля Блазиуса						От разрывного профиля					
	$M=10$		$M=20$		$M=40$		$M=10$		$M=20$		$M=40$	
	$c_0$	$j$	$c_0$	$j$	$c_0$	$j$	$c_0$	$j$	$c_0$	$j$	$c_0$	$j$
0,02	0,3220	4	0,3296	5	0,3315	7	0,9084	8	0,8526	9	0,8303	9
0,03	0,3218	2	0,3295	2	0,3314	2	0,4262	9	0,4185	9	0,4146	9
0,04	0,3225	2	0,3297	2	0,3315	2	0,3623	8	0,3628	8	0,3618	8
0,05	0,3224	2	0,3300	2	0,3316	2	0,3423	7	0,3454	7	0,3454	7
0,06	0,3242	2	0,3302	2	0,3316	2	0,3340	6	0,3381	6	0,3387	6
0,07	0,3248	2	0,3303	2	0,3316	2	0,3301	5	0,3347	5	0,3355	5
0,08	0,3252	2	0,3304	2	0,3317	2	0,3261	4	0,3329	4	0,3338	4
0,09	0,3255	2	0,3305	2	0,3317	2	0,3271	4	0,3319	3	0,3329	3
0,10	0,3256	2	0,3306	2	0,3317	2	0,3266	3	0,3313	3	0,3324	3
0,11	0,3257	2	0,3306	2	0,3317	2	0,3262	2	0,3310	2	0,3321	2
0,16	0,3258	2	0,3306	2	0,3317	2	0,3259	2	0,3306	2	0,3317	2
	0,3257		0,3306		0,3318		0,3257		0,3306		0,3318	

Значения  $c_0 = (\partial u / \partial \eta)_{\eta=0}$  и число итераций  $j$ , полученные по основной разностной схеме ( $M = 20$ )

$\xi_1$	От профиля Блазиуса												От разр. пр.	
	$a=0,1$		$a=0,5$		$a=1$		$a=2$		$a=3$		$a=3$		$c_0$	$j$
	$c_0$	$j$	$c_0$	$j$	$c_0$	$j$	$c_0$	$j$	$c_0$	$j$	$c_0$	$j$		
0,02	0,3208	7	0,3280	7	0,3296	5	0,3307	7	0,3311	7	0,8730	8		
0,03	0,3204	4	0,3279	3	0,3295	2	0,3308	3	0,3312	3	0,4284	9		
0,04	0,3207	3	0,3281	2	0,3297	2	0,3309	2	0,3314	2	0,3678	8		
0,05	0,3211	2	0,3283	2	0,3300	2	0,3311	2	0,3316	2	0,3488	7		
0,06	0,3214	2	0,3286	2	0,3302	2	0,3313	2	0,3317	2	0,3407	6		
0,07	0,3218	2	0,3288	2	0,3303	2	0,3314	2	0,3318	2	0,3368	5		
0,08	0,3220	2	0,3289	2	0,3304	2	0,3315	2	0,3318	2	0,3347	4		
0,09	0,3221	2	0,3290	2	0,3305	2	0,3315	2	0,3319	2	0,3336	4		
0,10	0,3224	2	0,3290	2	0,3306	2	0,3316	2	0,3320	2	0,3329	3		
0,11	0,3224	2	0,3291	2	0,3306	2	0,3316	2	0,3320	2	0,3325	3		
	0,3256		0,3295		0,3306		0,3314		0,3317		0,3317			

Результаты расчетов собраны в таблицах 5.2, 5.3. В этих таблицах приведены значения  $(\partial u/\partial \eta)_{\eta=0}$ , вычисленные со вторым порядком точности относительно  $\Delta \eta$ , и число итераций по «нелинейности»  $j$  для различного числа точек  $M$  поперек слоя. В последней строке каждой таблицы даны значения  $(\partial u/\partial \eta)_{\eta=0}$  для профиля Блазиуса, проинтерполированного на соответствующую сетку. В таблице 5.2 приведены результаты для  $a=1$ , а в таблице 5.3 — для  $M=20$  и различных  $a$ . Следует отметить, что даже при расчетах от начального профиля Блазиуса происходит некоторая перестройка решений и для получения установившегося профиля необходимо 9—10 шагов по  $\xi_1$  ( $\Delta \xi_1$  в расчетах было равно 0,01). Обратим внимание также на то, что на первом слое по  $\xi_1$  при расчетах от профиля Блазиуса наибольшее число итераций по «нелинейности». При расчетах от разрывного профиля установившееся решение получается на 15—16 слоях, число итераций на первых 5—6 слоях колеблется в пределах от 5 до 9. В п. 5.3.7 был изложен разностный метод для расчета течений в пограничном слое, обладающий свойством сильной стабилизации высокочастотных возмущений. Приведем некоторые результаты контрольных расчетов по этой схеме, приведенных для той же задачи (5.5.1), (5.5.2). Начальное условие задавалось при  $\xi_1 = 0,01$ . По переменной  $\eta_1$  была взята равномерная сетка с числом интервалов 40. Шаг по  $\xi_1$  равнялся 0,0025. Параметр  $a$  логарифмического преобразования принимался равным 1 и 10. Оценка погрешности приближенного решения проводилась по величине нормированного коэффициента трения  $w = \tau_{тр} \sqrt{x}$ , которая в рассматриваемом случае должна быть постоянной. Погрешность в  $w$  при  $a=1$  не превышала 0,16%; при  $a=10$  она не превосходила 0,03%.

Для выяснения стабилизирующих свойств схемы проводились расчеты обтекания плоской пластины при различных начальных профилях. Пусть  $\Delta$  — «толщина» пограничного слоя в автомодельном переменном  $\eta$ . В случае решения Блазиуса, поскольку  $\Delta = \text{const}$ , полагалось  $\Delta = 8,0$ . В качестве начального профиля  $u$  была взята кусочно-линейная функция, которая обращается в 0 на пластине и принимает постоянное значение  $u_\infty = 1$  на расстоянии  $\Delta_1$  от пластины. В случае 1)  $\Delta_1 = 0,5\Delta$ ; в случае 2)  $\Delta_1 = 2/3\Delta$ . Кроме того, мы рассмотрели предельный случай 3), когда начальный профиль задан разрывной функцией  $u_0(0) = 0$ ,  $u_0(\eta_1) = 1$ ,  $\eta_1 > 0$ . В расчетах варьировались число интервалов  $M$  по поперечной координате

$\eta$ , ( $M = 10; 20; 40$ ) и параметр  $a$  логарифмического преобразования ( $a = 1; 10$ ). Во всех случаях, включая разрывный начальный профиль, происходил плавный выход на решение Блазиуса.

На рис. 5.4 изображена зависимость  $w$  от  $x$  при  $M = 40$ ,  $a = 10$ ,  $\Delta\xi_1 = 0,0025$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют описанным выше трем случаям выбора начальной функции. Отметим, что функция  $w(x)$  — гладкая. При проведении аналогичных расчетов по симметричной шеститочечной схеме  $w(x)$  осциллирует. Скорость выхода на предельное решение характеризуется следующими данными. Отклонение  $w(x)$  от предельного значения при  $M = 40$ ,  $a = 10$ ,  $\Delta\xi_1 = 0,0025$  составляет для профилей 1) и 2) соответственно 0,06 и 0,07% при  $x = 0,26$ . Для разрывного профиля 3) при  $x = 0,485$  возмущение  $w(x)$  составляет 7%. Как и следовало ожидать, с уменьшением  $M$  до 20 (при тех же значениях  $a$  и  $\Delta\xi_1$ ) скорость стабилизации увеличивается. Так, при  $x = 0,26$  возмущение  $w(x)$  для начального профиля 1) составляет 0,03%; для начального профиля 2) оно равно 0,026%. При дальнейшем увеличении

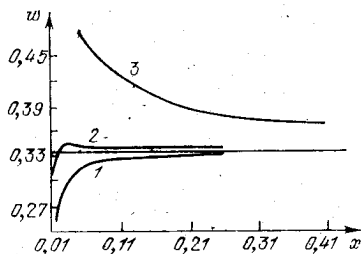


Рис. 5.4.

поперечного шага сетки начинает сказываться ошибка аппроксимации; при  $M = 10$  она достигает 1,2%. Варьирование параметра  $a$  в пределах от 1 до 10 несущественно влияет на скорость стабилизации и точность решения.

В п. 5.3.6 описано применение основной разностной схемы для исследования стационарных течений однородного сжимаемого газа в пограничном слое. Приведем некоторые результаты расчетов с помощью основной схемы такого течения для плоской пластины. В этом случае интегрировалась система уравнений (5.3.13) — (5.3.16) при  $dp/dx = 0$  с граничными условиями (5.3.17), (5.3.18). Для такой задачи, так же как и в случае течения несжимаемой жидкости, имеется автомодельное решение. Проводя сравнение разностного решения с автомодельным, можно судить о качестве алгоритма и правильности работы программы. Применялся алгоритм, описанный в п. 5.2.7 и позволяющий проводить расчет с постоянным числом шагов по поперечной координате. Это достигалось введением новой поперечной координаты  $\eta = y/\delta(x)$ . Функция  $\delta(x)$ , за-



дающая верхнюю границу области, находилась из условия гладкого сопряжения профилей продольной составляющей скорости  $u$  и энтальпии  $h$  так, чтобы при  $y = \delta(x)$  выполнялись условия

$$|\partial u / \partial y| < \epsilon_1, \quad |\partial h / \partial y| < \epsilon_2.$$

С помощью переменной  $\eta$  область  $x \geq x_0, 0 \leq y \leq \delta(x)$ , в которой ищется решение в физической плоскости, переводилась в полуокружность  $x = x_0, 0 \leq \eta \leq 1$ , использование в которой прямоугольной сетки обеспечивало при возрастании толщины пограничного слоя автоматическое увеличение шага сетки по координате  $y$  в физической плоскости. Расчеты велись на неравномерной по координате  $\eta$  сетке, имеющей 33 узловые точки (включая точку при  $\eta = 0$ ). Минимальное значение шага  $\Delta \eta_0 = 3,125 \cdot 10^{-3}$  (у стенки). Удвоение шага производилось при  $m = 4; 10; 14; 22; 28$ . Чтобы сохранить рекуррентное соотношение (5.3.9) в точках перехода от шага  $\Delta \eta$  к шагу  $2\Delta \eta$ , прогоночные коэффициенты вычислялись по несколько иным формулам, чем формулы (5.3.10). Если шаг между  $(m-2)$ -й и  $(m-1)$ -й точками, между  $(m-1)$ -й и  $m$ -й точками равен  $\Delta \eta$ , а между  $m$ -й и  $(m+1)$ -й точками  $2\Delta \eta$ , то аппроксимация производных по  $y$  для уравнений второго порядка для  $m$ -й точки проводилась по  $(m-2)$ -й,  $m$ -й и  $(m+1)$ -й точкам, а прогоночные коэффициенты вычислялись по формулам

$$A_{i,m} = - \frac{\bar{\gamma}_{i,m}}{A_{i,m-1} A_{i,m-2} \bar{\alpha}_{i,m} + \bar{\beta}_{i,m}},$$

$$B_{i,m} = \frac{\bar{\delta}_{i,m} - \bar{\alpha}_{i,m} (B_{i,m} A_{i,m-2} + B_{i,m-2})}{A_{i,m-1} A_{i,m-2} \bar{\alpha}_{i,m} + \bar{\beta}_{i,m}},$$

где  $\bar{\alpha}_{i,m}, \bar{\beta}_{i,m}, \bar{\gamma}_{i,m}, \bar{\delta}_{i,m}$  определялись по формулам (5.3.8), если заменить в них индекс  $m-1$  на  $m-2$  и  $\Delta y$  на  $2\Delta y$ . Счет велся от  $x = 0,01$  до  $x = 0,296$ . Начальный шаг по  $x$  брался равным  $0,001$ , а затем постепенно увеличивался, достигая к концу счета  $0,03$ .

Параметры усреднения  $s_i$  полагались равными  $0,7$ . Постоянная  $\epsilon_1$  в условиях гладкости сопряжения бралась равной  $10^{-4}$ . Постоянная  $\epsilon_2$  в условиях сходимости итераций — равной  $10^{-3}$ .

Результаты методических расчетов показали, что при выбранных значениях параметров разностная схема достаточно хорошо удерживает автомодельное решение. Об этом можно судить, например, по величине  $c_f Re_x^{1/2}$ , которая

по ходу счета колеблется около автомодельного значения 0,664 с амплитудой, не превышающей 0,7%. С учетом полученных результатов указанные параметры разностной схемы и значения постоянных были использованы при проведении систематических расчетов пограничного слоя.

При выбранных параметрах сетки уточнение условий гладкости сопряжения и сходимости итераций по нелинейности не привело к существенному повышению точности решения. Расчет, проведенный при  $\epsilon_1 = 10^{-5}$  и  $\epsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ , дал отклонение значения  $c_f \text{ Re} \cdot x^{1/2}$  от автомодельного порядка 0,6%.

### 5.5.2. Пограничный слой на слабоволнистой стенке.

При постановке задач о течении в пограничном слое иногда необходимо учитывать волнистость обтекаемой поверхности. Наличие даже слабой волнистости приводит к периодическому колебанию давления. Это сильно сказывается на течении в пограничном слое, может привести к отрыву пограничного слоя и к переходу ламинарного течения в турбулентное.

Решение задачи о потенциальном течении на волнистой стенке, контур которой задан в виде синусоиды  $y = a_0 \sin(2\pi x/\lambda)$ , приведено в [19] (см. литературу к дополнению 1) ( $x, y$  — декартовы координаты с осью  $x$ , взятой в направлении набегающего потока). Если амплитуда волны  $a_0$  мала по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , то выражение для продольной составляющей скорости течения несжимаемого газа может быть записано в виде

$$u = V_\infty + 2\pi a V_\infty \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \exp\left(-\frac{2\pi y}{\lambda}\right), \quad (5.5.3)$$

а выражение для давления на стенке —

$$p = p_\infty - 2\pi a \rho_\infty V_\infty^2 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (5.5.4)$$

где  $a = a_0/\lambda$  — безразмерная амплитуда;  $p_\infty, \rho_\infty, V_\infty$  — давление, плотность и скорость на бесконечности.

Задача о течении в пограничном слое на слабоволнистой стенке решалась (см. дополнение 1) в линейной постановке относительно  $a$  путем разложения функции тока в ряд по степеням  $x$  с коэффициентами, которые являются функциями переменной подобия  $\eta = y\sqrt{V_\infty/\nu}$  ( $\nu = \mu/\rho$  — кинематическая вязкость,  $\mu$  — коэффициент вязкости,  $\rho$  — плотность). Было установлено, что в зависимости от величины амплитуды отрыв пограничного слоя может произойти на первой, второй и т. д. волнах. Для каждой волны существует такое значение амплитуды  $a = a_*$ , что для

всех  $a < a_*$  отрыва пограничного слоя не происходит, а для  $a \geq a_*$  наблюдается отрыв пограничного слоя уже на этой волне. С целью нахождения разностным методом значений  $a_*$ , при которых имеет место отрыв на первой и второй волнах, рассмотрим течение несжимаемого газа в пограничном слое на волнистой стенке с осью  $x$ , взятой вдоль волнистой стенки, и осью  $y$  по нормали к ней. В качестве распределения давления в принятой системе координат можно взять распределение давления (5.5.4). В переменных  $x, y$ , связанных с волнистой стенкой, задача сводится к решению уравнений

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{V_\infty^2}{\lambda} (2\pi)^2 a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5.5.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Здесь  $u, v$  — составляющие вектора скорости вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Систему (5.5.5) следует интегрировать с нулевыми граничными условиями при  $y = 0$  ( $u = 0, v = 0$ ), а на внешней границе пограничного слоя положить  $u$  равной величине продольной составляющей скорости потенциального течения при  $y = 0$ :

$$u = V_\infty + V_\infty 2\pi a \sin \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Вводя безразмерные величины

$$x' = \frac{x}{\lambda}, \quad y' = \frac{y \sqrt{\text{Re}}}{\lambda}, \quad u' = \frac{u}{V_\infty}, \quad v' = \frac{v \sqrt{\text{Re}}}{V_\infty},$$

$$p' = \frac{p}{\rho V_\infty^2} \quad \left( \text{Re} = \frac{\rho V_\infty \lambda}{\mu} \right)$$

и опуская штрихи в обозначении безразмерных величин, получим систему уравнений

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = (2\pi)^2 a \cos 2\pi x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5.5.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

с граничными условиями  $u = 0, v = 0$  при  $y = 0$ ,

$$u = 1 + 2\pi a \sin 2\pi x \quad (5.5.7)$$

на внешней границе пограничного слоя.

Для определения значения  $a_*$  на первой, второй и т. д. волнах система (5.5.6), (5.5.7) интегрировалась при различных значениях  $a$ . В качестве начального профиля скоростей были взяты  $u, v$  при  $x = 0,01$  из решения Блазиуса для плоской пластины.

Исследование влияния шагов  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и числа итераций на точность определения точки отрыва было проведено для случая  $a = 0,01$ . Число точек на начальном профиле было равно 21,  $\Delta y = 0,04$ . Сначала были проведены вычисления с постоянным шагом  $\Delta x = 0,01$  и с шестью итерациями. Было установлено, что точка отрыва расположена между  $x = 0,53$  и  $x = 0,54$ . При подходе к точке отрыва наблюдалось резкое увеличение числа точек на слое при переходе от слоя к слою, что свидетельствовало о плохом выборе шага  $\Delta x$ . Поэтому был проведен счет с шагом  $\Delta x = 0,005$ , начиная с  $x = 0,41$ , для которого был взят профиль, полученный при счете с  $\Delta x = 0,01$ , но с  $\Delta y = 0,08$ . Число итераций было прежним. Вплоть до  $x = 0,46$  результаты счета с шагами  $\Delta x = 0,01$  и  $\Delta x = 0,005$  были довольно близкими, затем расхождение стало увеличиваться. Место отрыва при  $\Delta x = 0,005$  находилось между  $x = 0,480$  и  $x = 0,485$ . Начиная с тех же профилей компонент скорости, для  $x = 0,41$  был проведен счет с шагом  $\Delta x = 0,001$ . Число итераций было увеличено вдвое по сравнению с предыдущим. В результате было отмечено хорошее совпадение профилей компонент скорости с прежними также вплоть до  $x = 0,46$ . Место отрыва снова передвинулось:  $0,479 < x_{\text{отр}} < 0,480$ .

Сходимость итераций исследовалась для  $x = 0,416$  и в области, близкой к отрыву, для  $x = 0,476$ . Было установлено, что за сходимостью итераций имеет смысл следить в точках, близких к  $y = 0$ , так как с ростом  $y$  сходимость итераций значительно улучшается. Отмечалось также резкое ухудшение сходимости итераций при приближении к точке отрыва. Так, если рассматривать величину относительной сходимости итераций  $\delta u_i = |u_{i+1} - u_i|/u_{i+1}$  ( $i$  — номер итерации) в точках  $y = 0,08$  при  $x = 0,416$  и  $x = 0,476$ , то для того, чтобы было  $\delta u_i < \varepsilon = 0,0003$  при  $x = 0,416$ , необходимо сделать 6 итераций, а при  $x = 0,476$  — 12 итераций.

Основываясь на полученных численных результатах, при счете всех остальных вариантов с различными  $a$  шаг  $\Delta x$  уменьшался в два раза, если число точек на слое увеличивалось больше чем на 20 в результате невыполнения условия  $\delta u_i < \varepsilon$ . Это условие ( $\varepsilon = 0,0003$ ) проверялось в точках  $y = \Delta y_1$ . Сетка по  $y$  была выбрана неравномерной: первые 11 точек по  $y$  с  $\Delta y_1 = 0,04$ , остальные — с  $\Delta y_2 = 0,08$ . Начальный шаг  $\Delta x = 0,01$ . При приближении к точке отрыва шаг  $\Delta x$  уменьшался до тех пор, пока не становился меньше 0,01. Таким образом, место

расположения точки отрыва определялось с точностью до 0,001.

Просчитаны варианты для  $a = 0,01; 0,008; 0,0065; 0,006; 0,005; 0,003; 0,002; 0,001$ . Результаты расчетов показывают, что величина амплитуды  $a_*$ , при которой впервые имеет место отрыв на первой волне, лежит в интервале  $0,006 < a_* < 0,0065$ , а на второй волне — в интервале  $0,002 < a_* < 0,003$ . Положение точки отрыва для различных амплитуд  $a$  следующее:

$a$	0,01	0,008	0,0065	0,006	0,003
$x_{отр}$	0,4775	0,5125	0,6925	1,45	1,54
	на первой волне			на второй волне	

Для амплитуд  $a$ , при которых имеет место отрыв на первой волне, профили скоростей  $u$  с ростом  $x$  становятся все менее наполненными при приближении к точке отрыва. На рис. 5.5 приведены профили скорости  $u$  для амплитуды  $a = 0,008$  (отрыв на первой волне). Как уже отмечалось, резкое увеличение числа итераций наблюдалось при приближении к точке отрыва. Интересен тот факт, что, хотя для  $a = 0,005$  и  $a = 0,006$  на первой волне отрыва не было, наблюдалось увеличение числа итераций (до 6 — 9) для  $0,58 < x < 0,7$ . Заметим, что в этой области при  $a = 0,0065$  произошел отрыв пограничного слоя.

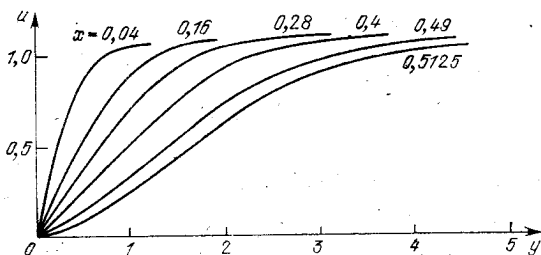


Рис. 5.5.

Аналогичные результаты были получены при решении этой задачи с помощью разностной схемы, обладающей свойством сильной стабилизации высокочастотных возмущений (см. п. 5.3.7). Применение этой схемы, не требующей итераций на каждом слое по  $x$ , более эффективно по сравнению с основной разностной схемой при расчете течения вблизи точки отрыва.

### 5.5.3. Течение несжимаемой вязкой жидкости в канале.

Основные уравнения, описывающие течения в канале при упрощающих предположениях, даны в п. 5.1.4. Задача в целом определяется системой уравнений и граничных условий (5.1.28) — (5.1.30). В отличие от предыдущей рассмотренной задачи здесь необходимо определить градиент давления  $\partial p'/\partial x'$  в процессе решения задачи. Это возможно, так как система уравнений состоит из трех уравнений (5.1.28), (5.1.30) относительно трех неизвестных:  $u'$ ,  $v'$ ,  $\partial p'/\partial x'$ . Далее для простоты записи формул штрихи опустим. Для аппроксимации уравнения движения используем неявную разностную схему с  $s=1$ ; для вычисления интеграла (5.1.30) — формулу трапеций; для уравнения неразрывности — простейшую четырехточечную схему. Тогда получим следующую систему разностных уравнений:

$$\operatorname{Re} \left( u_m^n \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta x} + v_m^n \frac{u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{n+1} + \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{\Delta y^2},$$

$$v_{m+1}^{n+1} = v_m^{n+1} - \frac{\Delta y}{2\Delta x} [u_{m+1}^{n+1} + u_m^{n+1} - (u_{m+1}^n + u_m^n)], \quad (5.5.8)$$

$$\left( \frac{1}{2} u_0^{n+1} + u_1^{n+1} + \dots + u_{M-1}^{n+1} + \frac{1}{2} u_M^{n+1} \right) \Delta y = 1,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Первое уравнение этой системы (5.5.8) можно представить в виде

$$a_m u_{m-1}^{n+1} + b_m u_m^{n+1} + c_m u_{m+1}^{n+1} = g_m + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{n+1}. \quad (5.5.9)$$

Использование других неявных разностных схем приводит к другим выражениям для коэффициентов  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$ ,  $g_m$ . Ищем решение (5.5.9) в виде

$$u_m^{n+1} = \alpha_m^{n+1} + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{n+1} \beta_m^{n+1}, \quad (5.5.10)$$

причем величины  $\alpha_m^{n+1}$  и  $\beta_m^{n+1}$  удовлетворяют разностным уравнениям

$$a_m \alpha_{m+1}^{n+1} + b_m \alpha_m^{n+1} + c_m \alpha_{m-1}^{n+1} = g_m, \quad (5.5.11)$$

$$a_m \beta_{m-1}^{n+1} + b_m \beta_m^{n+1} + c_m \beta_{m+1}^{n+1} = 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (5.5.12)$$

Системы (5.5.11) и (5.5.12) решаются методом прогонки. После того как найдены величины  $\alpha_m^{n+1}$  и  $\beta_m^{n+1}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ , подставляем их значения в третье уравнение системы (5.5.8), что дает

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{n+1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\alpha_0^{n+1} + \alpha_1^{n+1} + \dots + \alpha_{M-1}^{n+1} + \frac{1}{2}\alpha_M^{n+1}\right)\Delta y}{\left(\frac{1}{2}\beta_0^{n+1} + \beta_1^{n+1} + \dots + \beta_{M-1}^{n+1} + \frac{1}{2}\beta_M^{n+1}\right)\Delta y}.$$

Далее, из (5.5.10) находим значения  $u_m^{n+1}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , а из второго уравнения системы (5.5.8) — значения величин  $v_m^n$ . При этом выполнение условий прилипания для величин  $u_m^{n+1}$  обеспечивается заданием граничных условий для величин  $\alpha_m^{n+1}$  и  $\beta_m^{n+1}$ . Для величин  $v_m^{n+1}$  условие прилипания при  $m = 0$  задается, а при  $m = M$  выполняется автоматически, так как градиент давления  $(\partial p/\partial x)^{n+1}$  определяется из условия постоянства расхода, полученного интегрированием уравнения неразрывности. Как показали эксперименты на ЭВМ, описанная схема численного решения задачи в некоторых случаях для получения приемлемой точности требует счета с весьма мелким шагом  $\Delta x$ .

Описанная методика применялась для решения задачи о развитии профиля скорости в плоской трубе. На входе в плоскую трубу задавался равномерный профиль скорости ( $u = U_0$ ,  $v = 0$ ). Если принять за длину начального участка расстояние  $h$  от входа, на котором значения продольной скорости отличаются от значений скорости в развитом течении Пуазейля более чем на 2%, то численные расчеты дают для этой длины величину  $h = 0,03h \cdot \text{Re}$ . Этот результат близок к значениям, полученным другими методами. Сравнение с результатами решения аналогичной задачи для полных уравнений Навье — Стокса показывает, что использование системы (5.1.28) — (5.1.30) для задачи о развитии профиля скорости в плоской трубе дает удовлетворительную точность для  $\text{Re} \geq 100$ .

Аналогично решалась задача о развитии течения в прямой осесимметричной трубе. Упрощенная система уравнений имеет при этом вид

$$\begin{aligned} v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial (rv_z)}{\partial r} + \frac{\partial (rv_z)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

В системе (5.5.13)  $z$  и  $r$  — осевая и радиальная координаты, а  $v_z$  и  $v_r$  — соответственно осевая и радиальная составляющие скорости.

В безразмерных переменных система (5.5.13) примет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) &= \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial (u\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial (v\eta)}{\partial \eta} &= 0, \\ P &= P(\xi). \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

Граничные условия ставятся следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= 1 \text{ при } \xi = 0, \\ u = v &= 0 \text{ при } \eta = 1, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, v = 0 \text{ при } \eta = 0. \end{aligned}$$

В системе (5.5.14) использованы обозначения  $P = \frac{P \cdot \operatorname{Re}}{\rho U^2}$ ,  $\operatorname{Re} = UR/\nu$ , где  $R$  — радиус трубы,  $U$  —

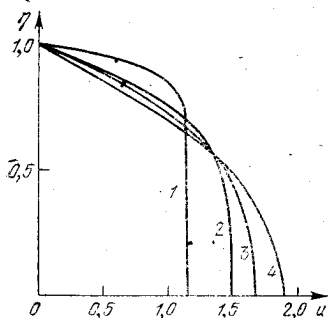


Рис. 5.6. 1 —  $\xi/\operatorname{Re} = 0,002$ ; 2 —  $\xi/\operatorname{Re} = 0,03$ ; 3 —  $\xi/\operatorname{Re} = 0,06$ ; 4 —  $\xi/\operatorname{Re} = 0,15$ .

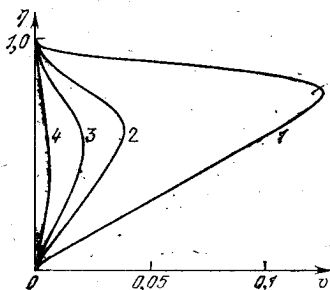


Рис. 5.7. 1 —  $\xi/\operatorname{Re} = 0,002$ ; 2 —  $\xi/\operatorname{Re} = 0,01$ ; 3 —  $\xi/\operatorname{Re} = 0,02$ ; 4 —  $\xi/\operatorname{Re} = 0,06$ .

заданная на входе в трубу постоянная скорость,  $u = v_z/U$ ,  $v = v_r/U$ ,  $\xi = z/R$ ,  $\eta = r/R$ . Условие постоянства расхода для осесимметричной трубы имеет вид

$$\int_0^1 u\eta \, d\eta = 0,5.$$



На рис. 5.6 показано формирование профиля осевой составляющей скорости, а на рис. 5.7 показаны профили радиальной составляющей скорости в различных сечениях. Максимум радиальной составляющей скорости вблизи входного сечения достигается у стенки трубы, а при удалении от входного сечения он уменьшается и приближается к оси трубы.

#### 5.5.4. Стационарные течения вязкого сжимаемого газа.

В рамках теории пограничного слоя могут быть рассмотрены разнообразные задачи о течениях вязкого сжимаемого теплопроводного газа. С помощью разностных методов были изучены двумерные течения сжимаемого газа в пограничном слое около кругового цилиндра, на эллипсоидах вращения, на сферически затупленных конусах и клиньях, с учетом вдува и отсоса на обтекаемой поверхности, с учетом переменной температуры стенки. Изучались также течения в пограничном слое с учетом различных физических и физико-химических свойств обтекаемого газа. Ссылки на работы, в которых излагаются результаты таких исследований, можно найти в дополнении 1.

Для расчета течений вязкого газа получили широкое применение так называемые упрощенные или «параболизированные» уравнения Навье — Стокса. Эти уравнения обычно получают из полной системы уравнений Навье — Стокса с помощью априорной оценки вязких членов уравнений по параметру  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$ .

Для примера рассмотрим задачу о течении в дальнем следе за затупленным телом, обтекаемым сверхзвуковым потоком вязкого совершенного теплопроводного газа. Как известно из экспериментальных и теоретических исследований, картина такого течения достаточно сложна. На рис. 5.8 изображена схема течения около затупленного осесимметричного конуса, обтекаемого равномерным сверхзвуковым потоком под нулевым углом атаки при умеренных числах Рейнольдса. На этой схеме в меридиональной плоскости течения характерные области отмечены номерами, а образующиеся ударные волны изображены в виде утолщенных зон с точками.

Возмущенную телом область от невозмущенного потока отделяет отошедшая головная ударная волна (1), которая, утолщаясь, простирается вниз по течению. К лобовой и боковой поверхностям примыкает пограничный слой (3) с ярко выраженными вязкими свойствами, а между ударной волной и пограничным слоем расположена область не-

вязкого или слабвязкого неизэнтропического течения (2). Пограничный слой срывается с задней кромки конуса, образуя вязкий слой смешения или свободный пограничный слой (7), который разделяет образующуюся у кормы замкнутую область возвратно-циркуляционного течения (5) и область (2). У задней кромки тела поток разворачивается в сторону оси течения, что на рис. 5.8 схематически изображено в виде веера волн разрежения (4).

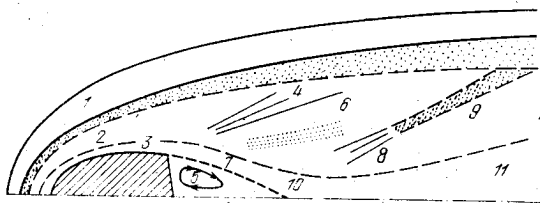


Рис. 5.8.

Ниже веера волн разрежения располагается висячий кормовой скачок уплотнения (6). Оторвавшийся вязкий слой на некотором расстоянии от дна тела сливается в единый поток (область «горла следа»), образуя при взаимодействии со сверхзвуковым потоком серию волн сжатия (8), переходящую в хвостовой скачок (9). Разделяющая линия тока (10) отделяет поток, который имеет полное давление, достаточное для прохождения через течение сжатия, от потока, полное давление которого недостаточно для прохождения через течение сжатия и который вынужден повернуть в обратном направлении. Эта линия тока уходит от тела в точке отрыва и приходит в заднюю критическую точку. За областью сжатия находится дальняя часть следа (11), которая характеризуется тем, что в ней продольные градиенты параметров потока малы по сравнению с поперечными.

Следы за тупыми телами иногда называют «горячими». Это связано с тем, что газ, образующий след, разогревается, проходя через головную ударную волну и сжатый ударный слой перед носовым затуплением.

Остывает след довольно медленно, и все характеристики следа еще отличаются от соответствующих характеристик внешнего потока на достаточно больших расстояниях от кормы тела. Так, например, след за метеором может достигать 28 км на высоте 185 км. При скорости метеора 12 км/с температура в следе может достигать 6500 К на расстоянии 50—100 диаметров за телом.

Используя тот факт, что в области дальнего следа продольные градиенты всех искомых функций малы по сравнению с поперечными, систему уравнений Навье — Стокса можно упростить, отбросив члены со вторыми производными в продольном направлении и смешанные производные. Таким образом, упрощенные стационарные уравнения Навье — Стокса в цилиндрической системе координат  $x, r$  ( $x$  — продольная,  $r$  — поперечная координаты,  $j = 0$  — плоское течение,  $j = 1$  — осесимметричное течение) будут иметь следующий вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \left( v - \frac{j\mu}{\text{Re}_{\infty}\rho r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}_{\infty}\rho} \frac{\partial}{\partial r} \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\gamma M_{\infty}^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \quad (5.5.15)$$

— уравнение количества движения в проекции на ось  $x$ ;

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2j}{\text{Re}_{\infty}\rho} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{v}{r} \right) \right] = \\ = \frac{1}{\text{Re}_{\infty}\rho} \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r} \mu \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{\gamma M_{\infty}^2} \left( \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \quad (5.5.16)$$

— уравнение количества движения в проекции на ось  $r$ ;

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + j \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (5.5.17)$$

— уравнение неразрывности;

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + \left( v - \frac{\gamma j \lambda}{\text{Pr} \cdot \text{Re}_{\infty}\rho r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\gamma}{\text{Re}_{\infty}\rho \cdot \text{Pr}} \frac{\partial}{\partial r} \lambda \frac{\partial T}{\partial r} - \\ - (\gamma - 1) T \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + j \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{\text{Re}_{\infty}\rho} \gamma (\gamma - 1) M_{\infty} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (5.5.18)$$

— уравнение энергии.

Граничными условиями для этой системы уравнений являются условия симметрии на оси  $x$  для всех искомых функций:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

и условия набегающего потока на достаточно удаленной от оси  $x$  прямой  $r = r^*$ , выбранной так, чтобы полуплоска, в которой производится расчет, включала в себя всю об-

ласть, возмущенную движущимся телом. В качестве начальных условий выбираются профили искомых функций при  $x = x_0$ , полученные из расчета предыдущих областей по полным уравнениям Навье — Стокса.

Аналогично ставится задача о расчете дальнего участка сверхзвуковой струи. В этом случае в качестве начальных условий при  $x = x_0$  выбираются профили искомых функций из соответствующего расчета. Для того чтобы сгустить узлы разностной сетки вблизи оси  $x$ , делается замена переменных

$$x_1 = x, \quad r_1 = \ln(1 + \beta_1 r), \quad \beta_1 \geq 1.$$

Расчет течения в дальнем следе проводится в областях большого удлинения.

На рис. 5.9 в качестве примера приводится положение головной размытой ударной волны и распределение давления и температуры вдоль оси следа за затупленным цилиндром при  $M_\infty = 20$ ,  $Re_\infty = 300$  [31]. За характерный линейный размер выбран радиус цилиндра. Расчет по упрощенным уравнениям велся от  $x = 8$  в области полностью сверхзвукового течения. Проведенное сравнение решения,

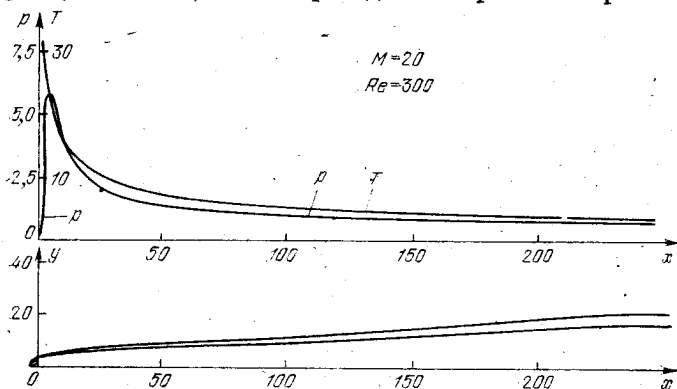


Рис. 5.9.

полученного по полным уравнениям Навье — Стокса, и решения упрощенных уравнений показало правомерность использования упрощенных уравнений в полностью сверхзвуковой части следа, где поток уже повернулся в направлении оси течения. Расчеты показали, что давление в следе быстрее приближается к значению в невозмущенном потоке, чем температура. Так, например, при  $x = 400$  имеем  $p/p_\infty = 1$ , в то время как  $T/T_\infty = 3$ . В заключение этого

пункта еще раз подчеркнем, что только использование упрощенных уравнений Навье — Стокса позволяет рассчитывать течение в следе, длина которого во много раз превосходит размеры тела.

### 5.5.5. Нестационарные течения в пограничном слое.

Как было отмечено в § 5.4, нестационарный характер течения в пограничном слое определяется, как правило, нестационарными граничными условиями на обтекаемой поверхности и во внешнем потоке. В настоящем пункте будут рассмотрены два примера расчета двумерного нестационарного течения в пограничном слое.

Первый пример связан с расчетом течения сжимаемого газа в пограничном слое около плоской пластины, температура которой есть линейная функция времени. Предположим также, что скорость и температура внешнего потока остаются постоянными во времени (давление  $p$  постоянно), а в начальный момент времени в пограничном слое осуществляется установившееся течение, соответствующее начальной температуре стенки. При решении задачи не учитывается влияние диссоциации и ионизации воздуха в пограничном слое и поэтому рассматривается система из трех уравнений: неразрывности, движения и энергии. Система уравнений нестационарного пограничного слоя (5.4.1) — (5.4.3) на пластине в этом случае запишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (5.5.19)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (5.5.20)$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial h}{\partial y} \right) + (\gamma - 1) M_0^2 \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (5.5.21)$$

Граничные условия для системы (5.5.19) — (5.5.21) выберем следующие:

$$u = v = 0, \quad h = h_w(t) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (5.5.22)$$

$$u \rightarrow 1, \quad h \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \quad (5.5.23)$$

где  $h_w(t)$  — линейная функция времени. Рассмотрим случай, когда за некоторый промежуток времени энтальпия пластины меняется от  $h_w = 0,075$  до  $h_w = 0,75$ . Предположим, что динамический коэффициент вязкости  $\mu$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda$  и плотность  $\rho$  являются только

функциями энтальпии  $h$ , причём

$$\mu = h, \quad \lambda = h, \quad \rho = 1/h. \quad (5.5.24)$$

В этом случае число Прандтля постоянно и равно 1. Тогда имеется возможность легко сравнить решение системы (5.5.19)—(5.5.21) при граничных условиях (5.5.22), (5.5.23) с известным решением стационарной задачи при соответствующей энтальпии стенки (см. [18]).

Систему (5.5.19)—(5.5.21) аппроксимируем с помощью описанной в § 5.4 разностной схемы, полагая  $s = 1$ . Для расчета нестационарной задачи необходимо знать начальные условия при  $t = 0$  и, вообще говоря, решение системы (5.5.19)—(5.5.21) с граничными условиями (5.5.22), (5.5.23) в плоскости  $x = x_0$ . Начальные условия при  $t = 0$  можно получить, решая соответствующую стационарную задачу. В случае пластины не представляется возможным найти точное решение для малых значений  $x$ , поэтому в плоскости  $x = x_0$  в качестве начальных профилей для скоростей и температуры брались профили из известного решения на продольно обтекаемой пластине [18], пересчитывая их в каждый момент времени для соответствующей температуры стенки.

Чтобы выяснить характер установления решения по  $x$  и эффекты, связанные с нестационарностью, численно решалась также соответствующая система стационарных уравнений при различных значениях энтальпии стенки  $h_w$ . Расчеты нестационарной и стационарной задач проводились для  $0,01 \leq x \leq 0,31$ , полагая  $\gamma = 1,4$  и  $M_0 = 0,384$ . На этом интервале изменения  $x$  заведомо успевали затухнуть возмущения, внесенные в начальные профили скоростей и энтальпии при  $x_0 = 0,01$ . Об этом можно судить по изменению теплового потока на стенке при расчете стационарных задач. Известно (см., например, [18]), что если зависимость вязкости от энтальпии линейна,  $h_w = \text{const}$ ,  $h/y \rightarrow \infty = \text{const}$ ,  $\text{Pr} = 1$  и теплоемкость при постоянном давлении  $c_p = 1$ , то тепловой поток к стенке можно вычислить по формуле

$$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_0} = \frac{T_0 - T_w}{2} u'_\xi(0) \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (5.5.25)$$

где  $T_0$  — температура торможения,  $T_w$  — температура стенки,  $u'_\xi(0)$  — производная скорости на стенке по переменной  $\xi = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^y \rho dy$ . Тепловые потоки, полученные по

формуле (5.5.25) и вычисленные по температурным профилям для различных  $x$  при численном решении стационарной системы, приводятся в таблице 5.4 ( $h_w = T_w = 0,48$ ).

Из таблицы видно, что с ростом  $x$  совпадение значений тепловых потоков, вычисленных по различным формулам, для полученного численного решения значительно улучшается и для  $x \geq 0,16$  имеется совпадение с точностью до единицы третьего знака после запятой. Поэтому сравнение решений стационарной и нестационарной задач проведено для  $x \geq 0,16$ . Число итераций было равно четырем, что обеспечивало сходимость итераций до пяти значащих цифр для всех искомых функций.

Т а б л и ц а 5.4

$x$	$\frac{T_0 - T_w}{2} u'_\xi(0) \frac{1}{\sqrt{\xi}}$	$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$ (по температурным профилям)
0,06	0,803636	0,798925
0,11	0,627950	0,613929
0,16	0,531473	0,530194
0,21	0,468894	0,468009
0,26	0,424211	0,423538
0,31	0,390262	0,389728

Известно, что эффекты, связанные с нестационарностью, будут проявляться тем сильнее, чем больше будет величина отношения характерной длины к произведению характерных скорости и времени (число Струхала). В связи с этим были просчитаны два варианта задачи с различными числами Струхала (0,01 и 10). Полученные результаты сравнивались с решением системы уравнений стационарного пограничного слоя при  $h_w = 0,21; 0,345; 0,48; 0,615; 0,75$ . Анализ результатов расчета при числе Струхала, равном 0,1 (шаг по времени  $\Delta t = 0,01$ ), показал, что отличие от решений соответствующих стационарных задач не превышает 1% по тепловому потоку, вычисленному на стенке.

Особенно интересны результаты расчета при числе Струхала, равном 10 (шаг по времени  $\Delta t = 0,005$ ). Сами величины и характер их изменения резко отличаются от соответствующих решений стационарных задач. Так, например, на рис. 5.10 приводятся профили энтальпии в моменты времени  $t = 0,02; 0,06; 0,10$  и соответствующие им

профили из стационарного решения. Обратим внимание на тот факт, что при  $t \geq 0,01$  внутри пограничного слоя существует область, где температура меньше температуры стенки. Это приводит к существенному различию тепловых потоков на стенке по сравнению со стационарными решениями (рис. 5.11). Следует отметить, что тепловые потоки в нестационарном решении не только отличаются по величине от тепловых потоков в стационарном случае, но и различны по знаку уже для  $t \geq 0,01$  и  $x \geq 0,275$ . Таким образом, применение в подобных случаях квазистационарного подхода может привести к совершенно неправильным результатам.

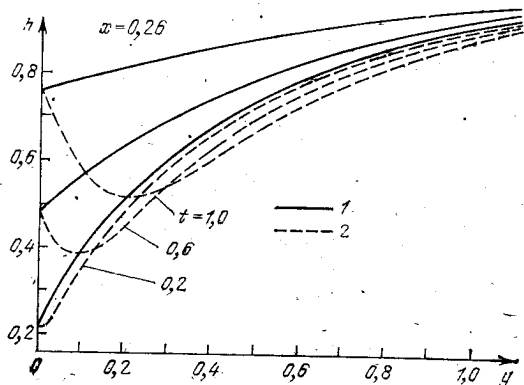


Рис. 5.10. 1 — стационарное решение, 2 — нестационарное решение.

Второй пример связан с расчетом течения в пограничном слое, нестационарный характер которого определяется нестационарностью изэнтропического и сверхзвукового внешнего потока. Синусоидальные колебания скорости и скорости звука генерируются на входе канала таким образом, что число Маха остается постоянным. При решении задачи одновременно интегрируются две системы: система одномерного нестационарного движения идеальной жидкости и система нестационарных уравнений пограничного слоя. Первая из этих систем записывается относительно скорости внешнего потока  $\tilde{u}$  и скорости звука  $a = \gamma p / \rho$ :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{2}{\gamma - 1} a \frac{\partial a}{\partial x} = 0, \quad (5.5.26)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma - 1}{2} a \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0. \quad (5.5.27)$$



Эти уравнения записаны в безразмерной форме. За характерную длину  $l$  выбрана длина канала, скорость звука отнесена к  $\bar{u}_0$  — скорости внешнего потока при  $t=0$ , а давление — к произведению  $\rho_0 \bar{u}_0^2$ . Безразмерные величины для второй системы (5.4.1)–(5.4.3), определяющей

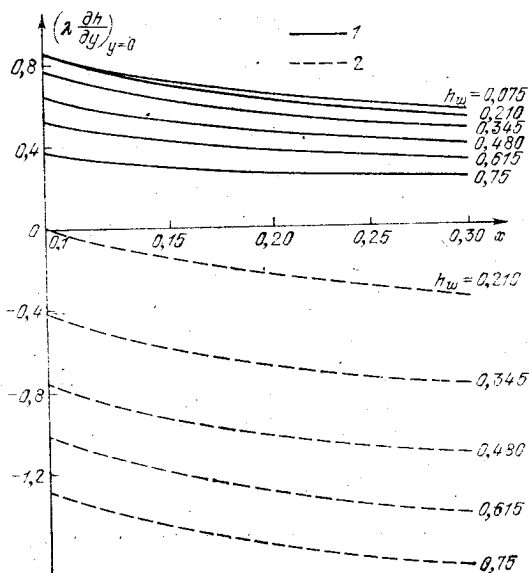


Рис. 5.11.

течение внутри пограничного слоя, введены по формулам (5.4.4), где величины с индексом «0» — соответствующие значения величин в ядре потока при  $t=0$ . Предполагается также, что в начальный момент времени ( $t=0$ ) осуществляется установившееся равномерное течение по всей длине канала в ядре потока, а параметры течения внутри пограничного слоя могут быть соответственно найдены из известного автомодельного решения [18]. Нестационарный характер течения определяется синусоидальными колебаниями скорости и скорости звука при  $x=x_0$  ( $x_0$  при расчетах принималось равным 0,01). Предполагается, что при  $x=x_0$  параметры потока внутри пограничного слоя изменяются мгновенно при изменении параметров внешнего потока и поэтому могут быть найдены из автомодельного решения для сжимаемого газа на пластине [18].

Все эти предположения позволяют сформулировать математическую постановку задачи следующим образом. Для получения интересующего решения нужно совместно проинтегрировать две системы уравнений. Первая система — уравнения (5.5.26), (5.5.27) с начальными условиями

$$\tilde{u}(0, x) = 1, \quad a(0, x) = 1/M_0 \quad (5.5.28)$$

и с граничными условиями

$$\tilde{u}(t, x_0) = 1 + b_1 \sin(c_1 t), \quad (5.5.29)$$

$$a(t, x_0) = 1/M_0 + b_2 \sin(c_2 t). \quad (5.5.30)$$

Здесь  $M_0$  — число Маха при  $t=0$  в ядре потока;  $b_1, b_2, c_1, c_2$  — соответственно амплитуды и частоты колебаний скорости и скорости звука. Вторая система — система уравнений пограничного слоя, преобразованная посредством (5.4.17) к виду (5.4.18)–(5.4.20), с граничными условиями

$$v = u = 0, \quad h = h_w \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad (5.5.31)$$

$$u(\tau, \xi) \rightarrow \tilde{u}(\tau, \xi), \quad h(\tau, \xi) \rightarrow \tilde{h}(\tau, \xi) \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (5.5.32)$$

где  $\tilde{u}$  и  $\tilde{h}$  находятся из решения системы (5.5.26), (5.5.27) с условиями (5.5.28)–(5.5.30). Энтальпия и давление во внешнем потоке определяются по формулам

$$\bar{h} = a^2 M_0, \quad p = \frac{1}{\gamma} a^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} M_0^{\frac{2}{\gamma-1}}.$$

Зависимость плотности и вязкости при расчетах принималась следующей:

$$\rho = (M_0 a)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{1}{h}, \quad \mu = h.$$

Начальные условия при  $t=0$  для системы (5.4.18)–(5.4.20) находились из автомодельного решения [18].

Для решения системы (5.4.18)–(5.4.20) с соответствующими граничными и начальными условиями применялся разностный метод, описанный в § 5.4. Для решения системы (5.5.26), (5.5.27) с начальными и граничными условиями (5.5.28)–(5.5.30) использовалась явная разностная схема, описанная в п. 3.2.4. При интегрировании системы (5.5.26), (5.5.27), используя явную схему, осуществлялся последовательно переход от одного временного слоя к другому. Заметим, что в начале счета во внешнем потоке рассчитывались только те точки, которые попадали в область влияния условий (5.5.29), (5.5.30). Когда возмущения, создаваемые на входе канала, дости-

гали его конца, для расчета последней точки на каждом временном слое использовалась схема первого порядка, в которой производные по  $x$  и  $t$  записывались односторонним образом. Так как эта явная схема налагает ограничения на шаг по времени  $\Delta t < \Delta x |\bar{u} \pm a|$ , то в программе была предусмотрена возможность делать необходимое число  $Q$  шагов по времени при решении системы (5.5.26), (5.5.27), после чего проводилось решение системы (5.4.18)–(5.4.20) на одном следующем временном шаге.

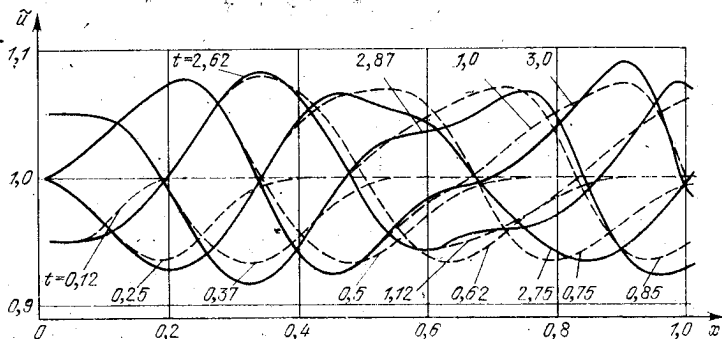


Рис. 5.12.

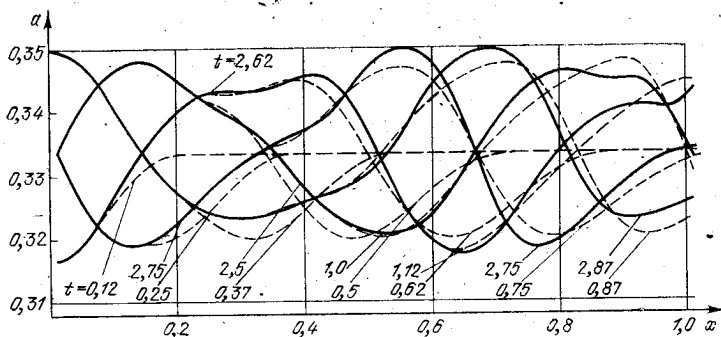


Рис. 5.13.

Приведем некоторые результаты расчетов при  $M_0 = 3$ ,  $h_w = 0,75$ ,  $b_1 = -0,05$ ,  $b_2 = -0,016(6)$ ,  $c_1 = c_2 = 4\pi$  и числе Струхала  $St = 2$ . На рис. 5.12 и 5.13 даны графики изменения скорости и скорости звука в ядре потока в зависимости от  $x$  для различных значений времени. Эти графики иллюстрируют процесс установления периодического

режима течения. Интересно отметить, что величина отклонения скорости  $\bar{u}$  от своего среднего значения в ядре потока внутри канала может превышать более чем в полтора раза величину колебаний скорости на входе канала. Соответственно, величина отклонения скорости звука  $a$  от своего среднего значения становится меньше величины отклонения скорости звука на входе канала.

Результаты расчетов показывают, что внутри пограничного слоя также возникает периодическое течение. Правда, следует отметить, что установление периодического режима течения в пограничном слое происходит позже, чем в ядре потока. По значениям  $(\partial u / \partial y)_{y=0}$  и  $(\partial h / \partial y)_{y=0}$  вычисляются коэффициент сопротивления  $c_f$  и

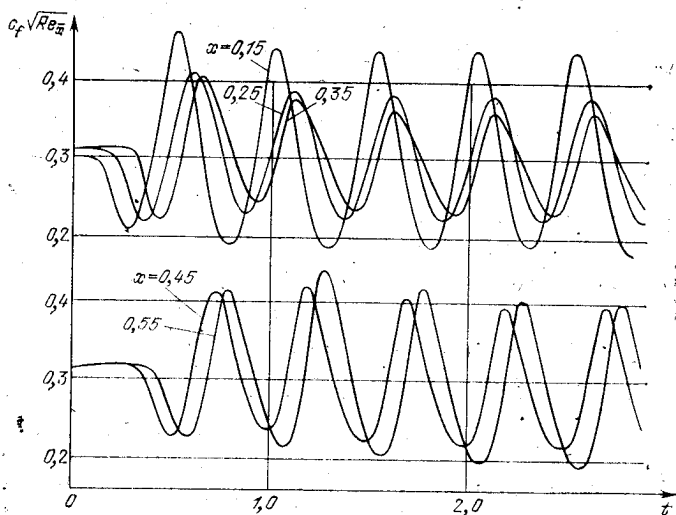


Рис. 5.14.

число Нуссельта  $Nu$ , характеризующее теплопередачу к стенке канала, согласно формулам

$$c_f = \frac{\mu_w \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w}{\rho_0 u_0^2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{R_x}} \mu_w \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w,$$

$$Nu = \frac{\bar{x} \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right)_w}{h_0 - h_w} = \sqrt{R_x} \sqrt{x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_w \frac{1}{1 - h_w},$$

где  $R_x = u_0 x \rho / \mu_0$ .

На рис. 5.14 и 5.15 приводятся графики функций  $c_f/\sqrt{Re_x}$  и  $Nu/\sqrt{Re_x}$  в зависимости от времени для значений  $x = 0,15; 0,25; 0,35; 0,45; 0,55$ . Из этих графиков видно, что коэффициент сопротивления и тепловой поток

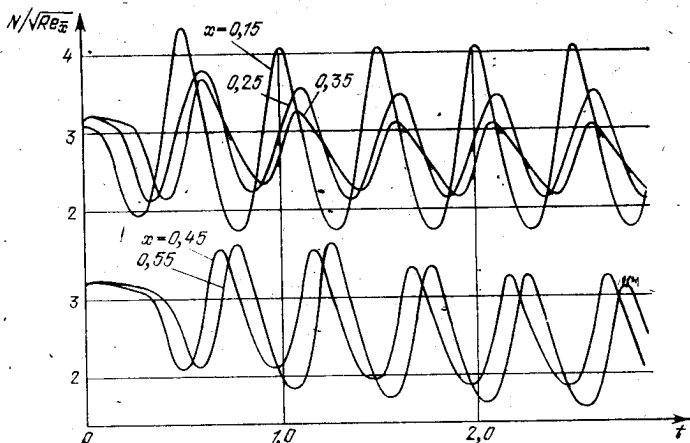


Рис. 5.15.

колеблются по времени для фиксированных  $x$ . Наибольшая амплитуда этих колебаний достигается не в самом начале канала.

Из приведенных результатов видно, что характер течения существенно нестационарный и все параметры, определяющие течение, значительно отличаются от параметров при  $t = 0$ , соответствующих равномерному стационарному течению.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

### § 6.1. Математические модели однородной изотермической вязкой жидкости

6.1.1. Исходные уравнения в переменных скорость, давление. Начальные и граничные условия. Течение вязкой жидкости с ньютоновским законом трения без упрощающих предположений, которые при малой вязкости связаны с упоминавшимися выше в гл. 5 приближениями пограничного слоя, а при большой вязкости — с приближением Стокса, описывается уравнениями Навье — Стокса. Вывод уравнений Навье — Стокса может быть сделан либо феноменологическим путем на основе известных постулатов Стокса (см., например, [19], [24], [25]), либо на основе молекулярно-кинетической теории [26]. Для однородной несжимаемой вязкой жидкости система уравнений Навье — Стокса имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\nabla \nabla) \mathbf{V} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}, \quad (6.1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0.$$

В этой системе уравнений искомыми функциями являются вектор скорости  $\mathbf{V}$ , давление  $p$ , которые зависят от пространственных координат и времени  $t$ . Параметрами будут плотность  $\rho$ , коэффициент кинематической вязкости  $\nu = \mu/\rho$  ( $\mu$  — коэффициент динамической вязкости);  $\mathbf{f}$  — силовая функция,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор.

Первое из уравнений в системе (6.1.1), представляющее систему трех уравнений для проекций вектора скорости  $\mathbf{V}(u, v, \omega)$ , называется *уравнением количества движения* и представляет баланс между силами инерции, силами давления, трения и массовыми силами\*). Второе из уравнений системы (6.1.1) называется *уравнением не-*

\*) В литературе именно эти уравнения часто называют уравнениями Навье — Стокса. Мы будем всюду в дальнейшем называть так всю систему уравнений (6.1.1).

**разрывности (сплошности).** Оно является следствием более общего уравнения неразрывности для сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0 \quad (6.1.2)$$

в предположении постоянства плотности  $\rho = \operatorname{const}$  (последнее играет роль уравнения состояния для несжимаемой жидкости). В связи с этим второе уравнение в системе (6.1.1) называют также *уравнением несжимаемости* \*).

Предположение о несжимаемости жидкости в этой форме приводит к существенным особенностям системы (6.1.1). В частности, давление из этой системы определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной  $p_0$ .

Система (6.1.1) позволяет при заданных в некоторый момент времени  $t_0$  значениях полей искомых функций  $\mathbf{V}$ ,  $p$  и соответствующих граничных условиях определить значение полей этих функций в некоторый момент времени  $t_0 + \tau$ , где  $\tau > 0$ . Движение жидкости, описываемое этой системой, осуществляется либо благодаря действию массовых сил, либо действию внешних сил, создающих перепад давления  $\Delta p$ . Последнее формально проявляется при постановке соответствующих граничных условий.

Обсудим более подробно вопрос о граничных условиях. При этом мы будем рассматривать класс двумерных движений в декартовой системе координат  $x$ ,  $y$ , являющийся одним из частных случаев (6.1.1) и задаваемый уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x, \quad (6.1.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y, \quad (6.1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6.1.5)$$

Здесь  $u$ ,  $v$  — компоненты вектора скорости.

В зависимости от конкретной физической ситуации различаются следующие виды граничных условий:

1) Граничные условия на непроницаемой твердой поверхности  $S$ , называемые обычно условиями «прилипа-

\*) Из (6.1.2) следует также другое, более общее уравнение несжимаемости  $d\rho/dt = 0$ .

ния». Обозначим скорость движения поверхности  $V_c$ . Тогда граничное условие на этой поверхности имеет вид

$$V|_s = V_c. \quad (6.1.6)$$

Наиболее часто в различных приложениях встречается обтекание неподвижной твердой стенки, когда  $V_c = 0$ .

2) Граничное условие вдали от обтекаемого тела, имеющее асимптотический характер:

$$V \rightarrow V_\infty \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (6.1.7)$$

где  $r$  — расстояние от поверхности обтекаемого тела. Несмотря на сравнительно простой вид условия (6.1.7), его достаточно точная численная реализация, осуществляемая обычно в области конечных размеров, связана со многими трудностями.

3) Периодические граничные условия, представляющие специальный тип граничных условий, которые обычно ставятся при обтекании бесконечной последовательности повторяющихся тел. При этом параметры потока перед телом равны параметрам потока в следе за телом:

$$V_1 = V_2. \quad (6.1.8)$$

В ряде теоретических исследований эти граничные условия используются как способ ограничения рассматриваемой области течения. С физической точки зрения этот тип граничных условий имеет для задач обтекания искусственный характер.

4) Условия симметрии, так же как периодические условия, представляющие специальный тип граничных условий, возникающих вследствие определенных предположений о свойствах симметрии течения. Например, при обтекании симметричного профиля равномерным потоком под нулевым углом атаки естественным граничным условием являются следующие условия на оси симметрии:

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (6.1.9)$$

где  $v$  — составляющая скорости по нормали к оси симметрии,  $n$  — направление, нормальное к оси симметрии. В определенном диапазоне режимных параметров (в первую очередь при малых значениях числа Рейнольдса) эти условия могут соответствовать реально наблюдаемым течениям, однако во многих случаях их постановка существенно сужает класс возможных движений и взаимодействий так же, как и постановка условий (6.1.8).



5) Граничные условия на поверхности раздела двух сред в случае, когда эта поверхность фиксирована и трением в одной из сред можно пренебречь (например, поверхность жидкость — газ), имеющие вид

$$v_n = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (6.1.10)$$

что аналогично условиям симметрии (6.1.9). Условие (6.1.10), в отличие от условий прилипания (6.1.6), допускает движение жидкости вдоль поверхности и позволяет совместно с решением системы (6.1.3)—(6.1.5) определить скорость этого движения.

Отметим, что в точной математической постановке задачи при записи исходных уравнений в форме (6.1.3)—(6.1.5) в рассмотренных выше случаях не требуется задания граничных условий для давления.

Уравнения (6.1.3)—(6.1.5) вместе с начальными условиями  $u^0 = u(x, y, 0)$ ,  $v^0 = v(x, y, 0)$ ,  $p^0 = p(x, y, 0)$  для полей скорости и давления и соответствующими граничными условиями представляют замкнутую систему, позволяющую определить поля скорости и давления однородной несжимаемой вязкой жидкости и их изменение во времени. Однако система уравнений (6.1.3)—(6.1.5) с уравнением неразрывности в форме (6.1.5) неудобна для проведения вычислений и может быть заменена эквивалентной системой. Для этого, например, можно продифференцировать уравнение (6.1.3) по  $x$ , уравнение (6.1.4) — по  $y$  и сложить результаты, используя при последующих преобразованиях уравнение (6.1.5). Тогда получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}. \quad (6.1.11)$$

Система уравнений (6.1.3), (6.1.4), (6.1.11) представляет одну из разновидностей уравнений Навье — Стокса в переменных скорость, давление, используемую в вычислительной практике (см. также дополнение 2). В этом случае граничные условия для давления, необходимые для проведения расчетов, могут быть получены из уравнений количества движения (6.1.3), (6.1.4) при использовании рассмотренных выше граничных условий для поля скорости. Например, на твердой неподвижной стенке

$y = 0$  граничное условие для давления имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho f_x. \quad (6.1.12)$$

Ниже в п. 6.1.2 мы рассмотрим и другие формы записи исходных уравнений.

При выполнении вычислений обычно используется безразмерная форма записи исходных уравнений, начальных и граничных условий. Введем безразмерную величину в виде  $\varphi = \varphi/\varphi_1$ , где  $\varphi_1$  — некоторый масштаб. Безразмерная запись может быть получена подстановкой в уравнения, начальные и граничные условия вместо размерной величины  $\varphi$  ее выражения в виде  $\varphi\varphi_1$ . Выбор масштабов зависит от конкретной постановки задачи. Пусть, например, условиями задачи заданы характерная скорость  $V_1$  и размер области  $L$ . Течения с заданной характерной скоростью (расходом) или перепадом давления называются *вынужденной конвекцией*. Выбирая в качестве масштабов скорости и длины соответственно  $V_1$ ,  $L$ , а для параметров  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $f_1$  — их значения, заданные условиями задачи, можно получить, выполняя указанные выше операции, следующую безразмерную запись исходной системы:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + (\bar{V}\nabla)\bar{V} = -\text{grad } \bar{p} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{V} + F \cdot n, \quad (6.1.13)$$

$$\text{div } \bar{V} = 0. \quad (6.1.14)$$

В этой системе имеются два безразмерных параметра, построенные по величинам, выбранным в качестве масштабов:  $\text{Re} = V_1 L/\nu$  — число Рейнольдса, представляющее отношение сил инерции к силам вязкости и определяющее интенсивность вынужденной конвекции;  $F = F_0 \bar{f}$ ,  $F_0 = f_1 L/V_1^2$  — критерий подобия, представляющий отношение массовых сил к силам инерции,  $F_0 = (\text{Fr})^{-1/2}$ , где  $\text{Fr} = V_1/\sqrt{f_1 L}$  — число Фруда. Заметим, что для времени  $\bar{t}$  и давления  $\bar{p}$  в системе (6.1.13), (6.1.14) использованы масштабы в виде  $L/V_1$  и  $\rho V_1^2$  соответственно. Использование безразмерной системы преследует две цели: приведение значений вычисляемых величин к соответствующей шкале, а также расчет и обработка результатов в общей критериальной форме, содержащей минимальное число параметров. Эти цели могут достигаться соответствующим выбором масштабов.

**6.1.2. Переменные функция тока и вихрь.** Уравнения (6.1.3)—(6.1.5) могут быть записаны в иной форме, не содержащей давления и в ряде случаев более удобной для численной реализации. В декартовых координатах эта система записывается в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \tilde{F}, \quad (6.1.15)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega. \quad (6.1.16)$$

Здесь  $\tilde{F} = \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}$ , где  $F_x = \frac{f_x L}{V_1^2}$ ,  $F_y = \frac{f_y L}{V_1^2}$ .

Функция тока  $\psi$  и вихрь  $\omega$  заданы соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6.1.17)$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6.1.18)$$

При этом уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно. Связь вихря  $\omega$  с функцией тока  $\psi$  в виде (6.1.16) следует из определения вихря (6.1.18). Уравнение для вихря (6.1.15) можно получить из уравнений (6.1.3) и (6.1.4), дифференцируя первое по  $y$ , второе — по  $x$ , вычитая результаты и используя определение вихря в виде (6.1.18).

Функция тока  $\psi$  имеет ясный физический смысл, а именно: касательная к линии  $\psi = \text{const}$  определяет направление вектора скорости, а разность  $\psi_2 - \psi_1$  между постоянными, соответствующими двум линиям  $\psi_1, \psi_2$ , расположенным на некотором расстоянии  $\Delta l = l_2 - l_1$ , определяет расход жидкости через это сечение.

Граничные условия для системы (6.1.15), (6.1.16) следуют из их аналогов (6.1.6)—(6.1.10) для системы (6.1.1). В частности, на неподвижной твердой стенке имеем, учитывая (6.1.17),

$$\psi = \text{const}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad (6.1.19)$$

Так как значение функции тока находится из (6.1.15), (6.1.16) с точностью до постоянной, то для замкнутой односвязной области можно положить

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (6.1.20)$$

Для незамкнутой (многосвязной) области (например, течение в трубе, обтекание потоком тела в трубе) значение постоянной будет различным на отдельных участках границы.

Особенность постановки граничных условий (6.1.20) для системы (6.1.15), (6.1.16) состоит в том, что они заданы лишь для функции тока и формально не заданы для вихря непосредственно на границе области. Последнее оказывается существенным при численной реализации (подробнее см. ниже § 6.5).

Решение системы (6.1.15), (6.1.16) определяет изменение во времени полей вихря  $\omega(x, y, t)$  и функции тока  $\psi(x, y, t)$ , с помощью которых можно в соответствии с (6.1.17) восстановить поле скорости и затем при необходимости определить поле давления, используя уравнение (6.1.11).

Для построения вычислительных схем в некоторых случаях используется также уравнение четвертого порядка относительно функции тока, получающееся при подстановке (6.1.17), (6.1.16) в (6.1.15) и имеющее вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial y^2} \right) + \tilde{F}. \quad (6.1.21)$$

Начальные и граничные условия для этого уравнения являются следствием тех, которые ставятся для системы (6.1.15), (6.1.16).

Частному случаю стационарного «ползущего» движения при  $\text{Re} \ll 1$  соответствует бигармоническое уравнение

$$-\Delta \Delta \psi + \tilde{f} = 0, \quad (6.1.22)$$

где  $\tilde{f} = F \cdot \text{Re}$ . Это уравнение с граничными условиями на твердой стенке (6.1.20) является одной из простейших математических моделей при построении численных методов решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой вязкой жидкости.

**6.1.3. Некоторые особенности уравнений Навье — Стокса и их решений.** Требования к вычислительным методам. Уравнения Навье — Стокса обладают рядом специфических особенностей, которые проявляются в численной реализации независимо от формы их записи. Одной из существенных особенностей является пространственно-эллиптический характер уравнений, обусловленный влиянием вязкости во всем поле течения. В связи с этим для решения уравнений Навье — Стокса необходимо использовать типичные для эллиптических уравнений методы

решения. В отличие от уравнений пограничного слоя, при этом требуется постановка граничных условий на всех границах рассматриваемой области, которая в реальных условиях часто бывает бесконечна, но при численной реализации должна быть конечной. Это приводит в ряде задач внешнего обтекания к так называемой «проблеме замыкания», что требует разработки приближенных асимптотических решений.

В системе уравнений Навье — Стокса имеется малый параметр при старшей производной  $\epsilon = 1/Re$ , изменению которого соответствует существенное изменение гладкости решения. Это связано с появлением у стенок при росте числа  $Re$  пограничного слоя, толщина которого обычно пропорциональна величине  $(Re)^{-0.5}$ . Хорошую иллюстрацию этих эффектов (и соответственно вычислительных трудностей) дает линейное одномерное модельное уравнение переноса с диссипацией, которое рассмотрено в гл. 4.

Наконец, система уравнений Навье — Стокса нелинейна. Эта нелинейность, типичная для систем гидродинамического типа (подробнее см. [27]), обусловлена в случае несжимаемой жидкости инерционными составляющими в уравнениях количества движения. В сочетании с двумя упоминавшимися выше особенностями нелинейность уравнений Навье — Стокса приводит при достаточно больших числах Рейнольдса к образованию весьма сложных пространственно-временных структур.

В большинстве случаев для каждого типа течения в некотором диапазоне чисел  $Re$  существует единственное устойчивое стационарное решение уравнений Навье — Стокса, для получения которого можно использовать либо стационарные уравнения, либо нестационарные, рассматривая искомое решение как предел при  $t \rightarrow \infty$  (метод установления). При увеличении числа Рейнольдса стационарное решение перестает быть единственным и начинает зависеть от начальных данных. При дальнейшем увеличении числа  $Re$  реализуются только нестационарные режимы. Решение при этом имеет не только нерегулярный характер во времени, но существенно усложняется и его пространственная структура, в частности, теряет устойчивость и дробится пограничный слой, в ядре появляются вторичные течения и т. д. Для описания режимов такого типа стационарные уравнения Навье — Стокса недостаточны.

В экспериментах при больших числах  $Re$  наблюдается неупорядоченное, хаотическое движение жидкости, назы-

ваемое турбулентным движением, для которого представляет интерес описание средних пространственно-временных характеристик. Переход из ламинарного режима течения в турбулентный в круглой трубе происходит при числе  $Re \sim 2 \cdot 10^3$  (масштаб скорости — средняя во времени скорость на оси трубы, масштаб длины — радиус трубы). В технических приложениях и явлениях природы значения числа Рейнольдса достигают значительно больших величин  $10^6 \div 10^9$ , поэтому турбулентные режимы имеют широкое распространение. Информация об этих режимах, по-видимому, содержится в нестационарных уравнениях Навье — Стокса. До недавнего времени численные исследования при больших  $Re$  были связаны лишь с изучением поведения бесконечно малых возмущений на основе линеаризованных гидродинамических уравнений (теория гидродинамической устойчивости; см. [17], [27]). В последнее время для отдельных классов течений делаются попытки прямого численного моделирования переходных и турбулентных режимов на основе нестационарных уравнений Навье — Стокса (см. ниже п. 6.8.3).

Из сказанного следует, что требования к вычислительным методам для решения уравнений Навье — Стокса должны различаться в зависимости от рассматриваемого диапазона чисел Рейнольдса и тех целей, которые ставятся при численном моделировании.

Общие требования к вычислительным методам можно сформулировать следующим образом:

- 1) Вычислительная устойчивость.
- 2) Точность расчета основных характеристик, приемлемая для соответствующих приложений.
- 3) Экономичность; минимальный объем оперативной памяти; простота реализации.

Первое требование заключается в том, чтобы весь вычислительный процесс в целом был устойчив. Оно относится как к самой разностной схеме, так и к методу решения соответствующей системы алгебраических уравнений. Основные определения были даны выше в гл. 2—4. Для разностных схем, аппроксимирующих уравнения Навье — Стокса, причин неустойчивости, однако, больше, чем для простых модельных уравнений, рассмотренных в упомянутых главах, причем в ряде случаев явления вычислительной неустойчивости трудно отличить от возможного сложного поведения решений.

Второе требование означает необходимость высокой пространственно-временной разрешимости, которой можно

в принципе достигнуть, либо применяя схемы не слишком высокого порядка точности, реализуемые на подробных пространственно-временных сетках, либо существенно повышая порядок точности схем. Для уравнений Навье — Стокса особенно важным является построение разностных схем, аппроксимирующих общие нестационарные уравнения (и позволяющих в частном случае определять стационарные решения, если таковые существуют). При этом практика показывает, что для расчета весьма широкого класса течений достаточно использования схем первого порядка точности по времени. В отличие от течений вязкой жидкости, при этом характерны более высокие требования к пространственной аппроксимации решения (пограничные слои, основные и вторичные течения и т. д.). Наиболее удобными являются разностные схемы второго порядка точности по пространственной координате на неравномерной сетке, сгущающейся в зоне больших градиентов.

Третье требование на самом деле может состоять из двух (или даже трех) требований: минимального числа операций на временном слое, минимального объема оперативной памяти ЭВМ и минимальных затрат труда программиста на реализацию программы.

Перечисленные требования в известной мере условны, так как значение каждого из них зависит от ряда дополнительных факторов, таких, например, как режим течения по числу Рейнольдса, тип ЭВМ, квалификация исполнителя, ограничения на время для получения результата, серийность расчетов и т. д. Эти требования, кроме того, противоречивы, так как одновременное и полное их выполнение практически невозможно, что требует компромиссных решений.

## § 6.2. Разностные схемы для уравнений Навье — Стокса. Предварительное рассмотрение

**6.2.1. Простейшая разностная схема для двумерных уравнений.** Для того чтобы скорее подвести читателя к вопросу о конструировании конечно-разностных схем для уравнений Навье — Стокса, рассмотрим сначала одну из простейших схем численного интегрирования. Будем в качестве исходной использовать систему двумерных уравнений Навье — Стокса для однородной изотермической жидкости в переменных вихрь, функция тока, со-

стоящую из нестационарного уравнения вихря и стационарного уравнения Пуассона для функции тока:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \text{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \tilde{F}, \quad (6.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega. \quad (6.2.2)$$

Рассматривается течение в замкнутой квадратной области при граничных условиях на твердой границе

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (6.2.3)$$

Начальные условия заданы в виде

$$\psi(x, y, 0) = \psi^0(x, y), \quad \omega(x, y, 0) = \omega^0(x, y).$$

Для аппроксимации дифференциальных уравнений разностными введем пространственно-временную сетку с координатами

$$x_i = ih, \quad y_j = jl, \quad \tau_n = n\tau,$$

где  $h, l$  — шаги сетки по координатам  $x, y$  соответственно;  $\tau$  — шаг по времени;  $i = 0, 1, \dots, M-1$ ;  $j = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $n = 0, 1, \dots, K$ .

Введем следующее обозначение:  $\varphi(ih, jl, n\tau) = \varphi_{i,j}^n$ . Производные по пространственным переменным будем аппроксимировать центральными разностями, например,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sim \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2h}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sim \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \sim \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2l}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \sim \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{l^2}.$$

Производную по времени заменим разностным отношением «вперед» в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \sim \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\tau}.$$

Запишем, используя указанные аппроксимации, следующую явную схему для уравнения вихря (6.2.1):

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\tau} + u_{i,j}^n \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} + v_{ij}^n \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2l} = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{h^2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{l^2} \right) + \tilde{F}^n, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$



Здесь

$$u_{i,j}^n = \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2l}, \quad v_{i,j}^n = -\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2h}.$$

По этой схеме по известным в момент времени  $t_n$  значениям полей функции тока (скорости) и вихря  $\psi_{i,j}^n, \omega_{i,j}^n$  внутри расчетной области  $\Omega$ , включая ее границу, можно определить значения вихря в области  $\Omega$ , исключая ее границу, в следующий момент времени  $t_{n+1} = t_n + \tau$ . Связи, определяемые схемой, имеют локальный характер, так как для определения величины  $\omega_{i,j}^{n+1}$  требуется знать значения вихря на слое  $n$  в пяти точках:  $\omega_{i,j}^n, \omega_{i+1,j}^n, \omega_{i-1,j}^n, \omega_{i,j+1}^n, \omega_{i,j-1}^n$ .

При определении вихря с помощью уравнения (6.2.4) требуется использовать те или иные условия для вихря на границе. Заметим, что условиями задачи вихрь на границе не задан, а заданы граничные условия для функции тока (которые, вообще говоря, относятся ко всей системе (6.2.1), (6.2.2)).

Граничные условия для вихря можно получить, например, из уравнения для функции тока, считая его справедливым вплоть до границы; тогда получим, например, для границы  $y = \text{const}$ :

$$\omega_0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Запишем вторую производную от функции тока в приграничном узле следующим образом:

$$\frac{\psi_{i,0} - 2\psi_{i,1} + \psi_{i,2}}{h^2} = \frac{2\psi_1}{h^2} + \frac{\psi_{i,0} + \psi_{i,2}}{h^2}.$$

Рассмотрим разностную запись граничного условия  $\partial\psi/\partial n = 0$  в виде

$$\frac{3\psi_{i,0} - 4\psi_{i,1} + \psi_{i,2}}{2h} = 0.$$

Подставляя выражение  $\psi_{i,2}$  из последней формулы в предыдущую, получим, используя второе граничное условие  $\psi_{i,0} = 0$ , выражение для вихря на границе в виде

$$\omega_0^{n+1} = 2\psi_1^n/h^2. \quad (6.2.5)$$

Значения поля вихря во всей области  $\Omega$  в соответствии со схемой (6.2.4) и граничным условием (6.2.5) могут определяться различными способами: вдоль линий  $i =$

$= \text{const}$ , вдоль линий  $j = \text{const}$  или последовательно по отдельным участкам, начиная от той или иной границы области, что представляет определенные преимущества при реализации алгоритма в виде программы для ЭВМ.

Перейдем теперь к решению уравнения Пуассона для функции тока (6.2.2). В отличие от уравнения для вихря, это уравнение стационарно. Это значит, что для получения решения системы (6.2.1), (6.2.2) на одном временном слое нужно решить стационарное уравнение (6.2.2), где правая часть — вихрь  $\omega_{i,j}^{n+1}$  — определена ранее. Для этого мы применим простейший явный итерационный метод (см. § 2.5). Его можно сформулировать по аналогии с решением нестационарного уравнения, если ввести фиктивное время  $\sigma$  следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \Delta \psi - \omega.$$

Обозначая через  $s$  индекс внутреннего итерационного цикла, запишем схему для решения этого уравнения на временном слое  $n+1$  в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\psi_{i,j}^{n+1,s+1} - \psi_{i,j}^{n,s}}{\sigma} = \\ & = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1,s} - 2\psi_{i,j}^{n+1,s} + \psi_{i-1,j}^{n+1,s+1}}{h^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1,s} - 2\psi_{i,j}^{n+1,s} + \psi_{i,j-1}^{n+1,s+1}}{h^2} - \omega_{i,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Аппроксимация оператора Лапласа здесь строится таким образом, чтобы искомое значение  $\psi_{i,j}^{n+1,s+1}$  можно было определить, не прибегая к решению системы алгебраических уравнений.

После преобразований (6.2.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{n+1,s+1} = \psi_{i,j}^{n+1,s} + \alpha_0 \left[ \frac{1}{4} (\psi_{i+1,j}^{n+1,s} - \psi_{i-1,j}^{n+1,s+1} + \right. \\ \left. + \psi_{i,j+1}^{n+1,s} + \psi_{i,j-1}^{n+1,s+1} + h^2 \omega_{i,j}^{n+1,s}) - \psi_{i,j}^{n+1,s} \right], \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

где  $\alpha_0$  — итерационный параметр, определяемый через сеточные параметры  $\sigma$ ,  $h$  ( $\alpha_0 = 4\sigma/h^2$ ).

Граничным условием при расчете по формуле (6.2.7) является условие  $\psi = 0$ , задаваемое на границе области (другое из граничных условий  $\partial \psi / \partial n = 0$  уже было использовано при получении граничного условия для вихря (6.2.5)).

Расчет поля функции тока по формуле (6.2.7) проводится до получения стационарного решения. Это значит, что внутренний итерационный цикл с параметром  $\varepsilon$  должен заканчиваться при определенном условии, которое характеризует достижение стационарного режима. При плавном изменении  $\psi_{i,j}$  в процессе итераций можно использовать самое простое из этих условий, состоящее в том, что разность значений функции тока в двух соседних итерациях  $s$  и  $s + 1$  не превосходит некоторой заданной величины

$$\max |\psi_{i,j}^{s+1} - \psi_{i,j}^s| < \varepsilon. \quad (6.2.8)$$

При выполнении условия (6.2.8) расчет уравнения Пуассона по формуле (6.2.7) прекращается, и мы имеем поле вихря и поле функции тока, удовлетворяющие разностным аналогам уравнений (6.2.1), (6.2.2) на временном слое  $n + 1$ . Для получения решения в следующий момент рассмотренная выше процедура повторяется, с той лишь разницей, что в качестве начальных значений теперь используются найденные величины полей  $\psi_{i,j}^{n+1}$ ,  $\omega_{i,j}^{n+1}$ .

Повторим в краткой форме еще раз всю последовательность расчета полей вихря и функции тока при переходе от слоя к слою.

1) Значения  $\omega_{i,j}^n$ ,  $\psi_{i,j}^n$  предполагаются известными внутри расчетной области  $\Omega$ .

2) Значения вихря на границе расчетной области  $\Omega$  определяются по формуле (6.2.5).

3) Определяется поле вихря внутри области  $\Omega$  на слое  $n + 1$  по формуле (6.2.4) при граничных условиях (6.2.5).

4) Определяется поле функции тока при граничном условии  $\psi_0 = 0$  и при использовании найденных значений вихря  $\omega_{i,j}^{n+1}$  путем итераций по формуле (6.2.7) до тех пор, пока не будет выполнено условие (6.2.8).

Элементарный анализ устойчивости (гл. 1), подтверждающийся практикой вычисления, свидетельствует о том, что рассмотренная явная схема устойчива при условии  $\tau \leq ch^2/4$ . В общем случае  $c$  зависит от числа Рейнольдса и убывает от 1 до 0,1 при увеличении этого числа от 0 до 400 ÷ 500. Ограничения на величину  $\tau$ , налагаемые этим условием, являются существенными при малом значении пространственного шага  $h$  и могут быть уменьшены при переходе к схемам с неявной аппроксимацией уравнений вихря и функции тока (см. ниже §§ 6.3—6.5).

**6.2.2. Подходы к построению разностных схем для уравнений Навье — Стокса.** Переходя от общих требований и элементарных примеров к описанию разностных схем, применяемых в настоящее время в практике вычислений, укажем некоторые основные признаки, которыми могут отличаться конкретные схемы.

1) Исходная запись (зависимые переменные  $V$ ,  $p$  или  $\omega$ ,  $\psi$  и т. д.).

2) Схемы для стационарных или нестационарных уравнений.

3) Общая структура схемы: явная, неявная.

4) Аппроксимация основного оператора, в частности, аппроксимация конвективных составляющих (односторонние разности, симметричная и т. д.).

5) Метод решения систем разностных уравнений (для неявных схем).

6) Способ аппроксимации граничных условий (уравнения в переменных  $(\omega, \psi)$ ).

7) Способ решения уравнения Пуассона и критерии точности его решения.

8) Расположение пространственных узлов (равномерная или неравномерная сетка, использование специальных преобразований независимых переменных и т. д.).

В настоящее время существует и используется несколько десятков разновидностей разностных схем. Поиски наилучших из них имеют, как правило, эвристический характер и в значительной мере опираются на опыт и прямое сопоставление различных вариантов схем. Важность тех или иных из перечисленных выше признаков зависит в значительной степени от порядка чисел Рейнольдса ( $Re \sim 1$ ,  $Re \sim 100$ ,  $Re \sim 10^3$ ).

Для получения численных решений в первом диапазоне выбор указанных признаков не является существенным. В частности, удовлетворительное решение может быть получено и с помощью явной схемы, рассмотренной выше в п. 6.2.1 (схема для стационарных уравнений на равномерных сетках и т. д.).

Во втором диапазоне перечисленные признаки существенны, хотя не имеют решающего значения. Получение же удовлетворительных решений при  $Re \sim 10^3$  практически невозможно без дальнейшего усовершенствования разностных схем, связанного с использованием неявных схем, аппроксимирующих нестационарные уравнения, без неравномерных сеток, специальных способов аппроксимации граничных условий и т. д. Рассмотрению одной та-

кой схемы будут посвящены следующие три параграфа этой главы.

При дальнейшем изложении мы будем рассматривать двумерные нестационарные уравнения Навье — Стокса, записанные в переменных вихрь, функция тока (6.2.1), (6.2.2). Переход от одного временного слоя к другому для получения решения этих уравнений по неявной схеме может быть записан в следующем виде:

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\tau} = \frac{\partial(\omega^{n+1}, \psi^{n+1})}{\partial(x, y)} + \nu \Delta \omega^{n+1} + \tilde{F}, \quad (6.2.9)$$

$$\Delta \psi^{n+1} = \omega_{i,j}^{n+1}. \quad (6.2.10)$$

Под дифференциальными операторами  $\partial/\partial(x, y)$  и  $\Delta$  здесь условно понимаются их некоторые разностные аналоги, что не имеет значения для рассмотрения существа вопроса.

При численном решении системы (6.2.9), (6.2.10) для определения полей величин  $\omega_{i,j}^{n+1}$ ,  $\psi_{i,j}^{n+1}$  при известных их значениях в момент времени  $n$  имеются следующие возможности:

1) Раздельное решение уравнений (6.2.9), (6.2.10), т. е. определение поля вихря из разностного аналога уравнения (6.2.9), используя известное на предыдущем временном слое поле функции тока. Затем решение стационарного уравнения (6.2.10) при известной правой части (поле вихря  $\omega_{i,j}^{n+1}$ ) для определения поля функции тока в момент времени  $n+1$ . Такой способ, являющийся естественным и экономичным, связан, однако, с «рассогласованием» полей вихря и функции тока, что, как упоминалось выше, приводит в итоге к ограничениям на величину временного шага  $\tau$ .

2) Совместное решение уравнений (6.2.9) и (6.2.10), связанное с отысканием на каждом временном слое вектора  $\Phi = (\omega, \psi)$ . При этом внутренний итерационный цикл включает на каждом временном слое для получения полей  $\omega_{i,j}^{n+1}$ ,  $\psi_{i,j}^{n+1}$  совместное решение систем (6.2.9) и (6.2.10), в отличие от решения одного уравнения (6.2.10) в рассмотренном выше случае, что увеличивает объем вычислений на временном слое. Однако появляется возможность существенно уменьшить ограничения на величину временного шага, присущие методам первого типа. Реальное использование этой возможности определяется характером задачи, в частности ограничениями на максимальную величину временного шага, возникающими из физических соображений. В настоящее время наиболее

широко применяются разностные схемы первого типа, значительно усовершенствованные в последние годы (см. также дополнение 2).

Ниже в §§ 6.3—6.5 мы остановимся более детально на одной из схем первого типа (будем далее называть ее *основной схемой*), рассмотрим конкретные вопросы, возникающие при ее конструировании и усовершенствовании.

### § 6.3. Сеточные аппроксимации уравнения для вихря

При изложении элементов основной схемы, структура которой намечена выше, существенными являются вопросы аппроксимации одномерных и двумерных дифференциальных операторов, в особенности конвективных составляющих, способа решения двумерных разностных уравнений, аппроксимации граничных условий, оптимизации решения уравнения Пуассона на временном слое.

В этом параграфе рассматривается схема решения уравнения вихря. При этом будет предполагаться, что на границе области задано распределение вихря  $\omega_{\Gamma}(t)$ , изменяющееся в общем случае по пространственной и временной координатам. Вопросы аппроксимации граничных условий для вихря будут рассмотрены ниже в § 6.5.

**6.3.1. Одномерные аппроксимации.** Область непрерывного изменения аргумента заменим разностной сеткой с координатами  $x_i, t_n$ . Введем обозначения  $f(x_i, t_n) = f_i^n$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots, K$ . Узлы пространственной разностной сетки в общем случае будут располагаться произвольно. Локальный пространственный шаг сетки будет при этом определяться разностью между координатами двух соседних узлов:  $h_i = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ . Временная разностная сетка вводится в общем виде следующим образом:  $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ ; при этом  $t_K = \sum_{n=0}^K \tau_n$ . На равномерной временной сетке с постоянным шагом  $\tau$  имеем  $t_K = K\tau$ .

Обозначим

$$\delta_x^+ f_i^n = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{h_i}, \quad \bar{\delta}_x f_i^n = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{h_{i-1}}, \quad \delta_t f_i^n = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\tau_i}. \quad (6.3.1)$$

С помощью этих формул дифференциальные операторы  $\partial f / \partial x, \partial f / \partial t$  аппроксимируются с погрешностью соответственно  $O(h), O(\tau)$ ,

Структуру разностной схемы для уравнения вихря рассмотрим вначале для модельного одномерного уравнения переноса с диссипацией

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u(x) \frac{\partial \omega}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \quad (6.3.2)$$

Решение ищется в области  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq T$  при следующих начальных и граничных условиях:

$$\omega(x, 0) = \omega^0(x), \quad \omega(0, t) = \omega_0(t), \quad \omega(1, t) = \omega_1(t).$$

Известной проблемой, возникающей при построении разностной схемы для уравнения (6.3.2), является аппроксимация нелинейного конвективного члена  $u \partial \omega / \partial x$ . Использование для этой цели разностных выражений типа (2.2.6), называемых центральными разностями, приводит при малых значениях  $\varepsilon$  к нарушению монотонности (см. гл. 4). Использование монотонной аппроксимации вида (4.3.20) позволяет получить системы алгебраических уравнений, коэффициенты которых удовлетворяют достаточным условиям устойчивости прогонок (п. 2.2.5). Однако такая аппроксимация имеет первый порядок точности и ее использование приводит к появлению значительной схемной вязкости, имеющей порядок  $\nu_h \sim uh/2$ .

Некоторым компромиссом является использование монотонной аппроксимации Самарского (см. п. 4.3.6), имеющей формально, т. е. при  $uh \ll 1$ , второй порядок точности. Специфика ее заключается в том, что нарушение последнего условия в отдельных точках (например, зонах максимума скорости) не приводит к существенной интегральной погрешности, в связи с чем эта аппроксимация находит широкое применение. Использование этой аппроксимации и формул (6.3.1) для уравнений (6.3.2) приводит к следующей схеме:

$$\frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\tau} + 0,5u^n (\delta^+ \omega_i^{n+1} + \delta^- \omega_i^{n+1}) - 0,5|u^n| \times \\ \times (\delta^+ \omega_i^{n+1} + \delta^- \omega_i^{n+1}) \xi_1 = \varepsilon \left[ \eta_u (\delta^+ \omega_i^{n+1} - \delta^- \omega_i^{n+1}) \frac{2}{h_i + h_{i-1}} \right]. \quad (6.3.3)$$

Здесь  $\eta_u = (1 + |u^n| h_i \xi_2)^{-1}$ .

Такая запись обобщает все три указанные выше аппроксимации, поскольку при  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  имеет место симметричная аппроксимация конвективных членов, при  $\xi_1 = 1$ ,  $\xi_2 = 0$  — односторонняя аппроксимация первого по-

рядка точности и при  $\xi_1 = 1$ ,  $\xi_2 = 1/(2\epsilon)$  — аппроксимация Самарского. Особенностью этой схемы является также временная «линеаризация» нелинейных конвективных членов, пригодная, вообще говоря, при малых временных шагах  $\tau$ . Усреднение аппроксимации конвективных членов относительно  $u^n$  и  $|u^n|$  применяется для того, чтобы сделать схему не зависящей от знака скорости.

Схема (6.3.3) приводится к каноническому трехдиагональному виду

$$-A_i \omega_{i+1}^{n+1} + B_i \omega_i^{n+1} - C_i \omega_{i-1}^{n+1} = f_i, \quad (6.3.4)$$

допускающему применение формул прогонки (см. п. 2.2.5). Коэффициенты в уравнении (6.3.4) имеют вид

$$A_i = \frac{\tau}{4h_i} \left( \frac{4\epsilon\eta_u}{h_i + h_{i-1}} + |u^n| + u^n \right), \quad (6.3.5)$$

$$C_i = \frac{\tau}{4h_i} \left( \frac{4\epsilon\eta_u}{h_i + h_{i-1}} + |u^n| - u^n \right), \quad (6.3.6)$$

$$B_i = A_i + C_i + 1, \quad f_i = \omega_i^n. \quad (6.3.7)$$

**6.3.2. Двумерное уравнение вихря.** Последовательное применение разностной аппроксимации, аналогичной (6.3.3), к двумерному уравнению вихря приводит к системе алгебраических уравнений, решение которой возможно лишь итерационным путем. Экономичным является упоминавшийся выше метод переменных направлений, позволяющий свести решение двумерных уравнений к последовательности одномерных уравнений с трехдиагональными матрицами. Существует ряд методов, использующих эту общую идею и отличающихся некоторыми деталями (метод переменных направлений, метод расщепления, метод дробных шагов, локально одномерный метод [29], [14] и т. д.). Мы используем упоминавшийся выше метод переменных направлений (или метод продольно-поперечных прогонок), общую структуру которого поясним на двумерном операторном уравнении вида

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = (L_1 + L_2) \omega + \tilde{F}, \quad (6.3.8)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  — одномерные операторы, действующие по разным направлениям.

Решение уравнения (6.3.8) методом переменных направлений осуществляется в два этапа, которым соответ-



ствуют временные индексы  $n + 1/2$ ,  $n + 1$ , а именно:

$$\frac{\omega^{n+1/2} - \omega^n}{\tau/2} = \tilde{L}_1 \omega^{n+1/2} + \tilde{L}_2 \omega^n + \tilde{F}^n, \quad (6.3.9)$$

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^{n+1/2}}{\tau/2} = \tilde{L}_1 \omega^{n+1/2} + \tilde{L}_2 \omega^{n+1} + \tilde{F}^{n+1}. \quad (6.3.10)$$

Здесь  $\tilde{L}_1$ ,  $\tilde{L}_2$  — разностные одномерные операторы (см., например, (6.3.3)). На первом этапе прогонками в одном из направлений находится решение  $\omega^{n+1/2}$  на полуцелом временном слое; затем, используя это решение, осуществляются прогонки по второму направлению для получения искомого решения  $\omega^{n+1}$  на целом временном слое. Такая схема аппроксимирует двумерное нестационарное уравнение вихря с первым порядком точности. На установившемся режиме решение не зависит от временного шага  $\tau$ , поэтому эта схема может использоваться и для решения стационарных задач «на установление».

Запишем с учетом (6.3.3), (6.3.9), (6.3.10) схему для решения двумерного нестационарного уравнения вихря:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^n}{\tau/2} + 0,5(u - |u|)(\delta_x^+ \omega_{i,j}^{n+1/2} + \delta_x^- \omega_{i,j}^{n+1/2}) + \\ & + 0,5v(\delta_y^+ \omega_{i,j}^n + \delta_y^- \omega_{i,j}^n) = \varepsilon [\eta_u (\delta_x^+ \omega_{i,j}^{n+1/2} - \delta_x^- \omega_{i,j}^{n+1/2}) \times \\ & \times \frac{2}{h_i + h_{i-1}} + (\delta_y^+ \omega_{i,j}^n - \delta_y^- \omega_{i,j}^n) \frac{2}{l_j + l_{j-1}}] + \tilde{F}^n, \quad (6.3.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1/2}}{\tau/2} + 0,5(v - |v|)(\delta_y^+ \omega_{i,j}^{n+1} - \delta_y^- \omega_{i,j}^{n+1}) + \\ & + 0,5u(\delta_x^+ \omega_{i,j}^{n+1/2} + \delta_x^- \omega_{i,j}^{n+1/2}) = \\ & = \varepsilon [\eta_v (\delta_y^+ \omega_{i,j}^{n+1} + \delta_y^- \omega_{i,j}^{n+1}) \frac{2}{l_j + l_{j-1}} + \\ & + (\delta_x^+ \omega_{i,j}^{n+1/2} - \delta_x^- \omega_{i,j}^{n+1/2}) \frac{2}{h_i + h_{i-1}}] + \tilde{F}^{n+1}. \quad (6.3.12) \end{aligned}$$

Здесь, в отличие от (6.3.3), для аппроксимации одномерных операторов используется только аппроксимация Самарского. Коэффициенты  $\eta_u$  и  $\eta_v$  имеют вид

$$\eta_u = (1 + |u|h_i/(2\varepsilon))^{-1}, \quad \eta_v = (1 + |v|l_j/(2\varepsilon))^{-1}.$$

Здесь, так же как и в одномерном случае (6.3.3), используется аппроксимация конвективных членов, усредненная относительно  $u^n$  и  $|u^n|$  (или  $v^n$  и  $|v^n|$ ) для того, чтобы схема не зависела от знака скорости. Одномерные операторы на нижнем временном слое аппроксимируются сим-

метричными разностями. Оба разностных уравнения (6.3.9), (6.3.10) приводятся к стандартному трехдиагональному типу.

Одним из наиболее важных вопросов, возникающих при решении уравнения вихря, является вопрос о величине временного шага  $\tau$  (который при расчете стационарных задач «на установление» является итерационным параметром). Преимуществом неявных схем (6.3.11), (6.3.12), в отличие от явных схем, рассмотренных в § 6.2, является отсутствие ограничения на величину  $\tau$  из условий устойчивости. Это преимущество остается в силе, если рассматривать уравнения (6.3.11), (6.3.12) как модельные, вне связи с уравнением для функции тока и граничными условиями. При использовании же упомянутых схем в системе уравнений Навье — Стокса возникает ряд существенных ограничений на величину  $\tau$ , зависящих в общем случае от способа решения уравнения для функции тока, способа аппроксимации граничного условия для вихря и других факторов. Конкретные сведения будут даны в примерах, изложенных в §§ 6.6, 6.8 после завершения описания основной схемы.

## § 6.4. Решение уравнения для функции тока

Уравнение Пуассона для функции тока

$$\Delta\psi = \omega \quad (6.4.1)$$

в основной схеме решается отдельно от уравнения вихря. Усовершенствование этого элемента основной схемы играет важную роль в связи с необходимостью многократно, на каждом временном слое решать стационарное эллиптическое уравнение. Выше в § 6.2 рассматривался простейший явный итерационный метод решения. Здесь рассматриваются два более совершенных метода, нашедшие широкое практическое применение и использующие итерационное решение разностных уравнений неявным методом переменных направлений и прямое решение методом разделения переменных с применением быстрого преобразования Фурье. Первый метод более универсален, но и более трудоемок, в особенности при необходимости достижения малой величины невязки. Второй метод дает возможность получить решение разностных уравнений с «машинной» точностью, но налагает существенные ограничения на геометрию расчетной области, конструкцию сеток и т. д.

**6.4.1. Итерационный метод переменных направлений.**  
 Заменяя уравнение (6.4.1) нестационарным уравнением

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \Delta \psi - \omega, \quad (6.4.2)$$

где  $\sigma$  — итерационный параметр, аналогичный времени, запишем схему переменных направлений для уравнения (6.4.2) по аналогии со схемой (6.3.11), (6.3.12) в виде

$$\frac{\psi_{i,j}^{s+1/2} - \psi_{i,j}^s}{\sigma_{s,x}} = (\delta_x^+ \psi_{i,j}^{s+1/2} - \delta_x^- \psi_{i,j}^{s+1/2}) \frac{2}{h_i + h_{i-1}} + (\delta_y^+ \psi_{i,j}^s - \delta_y^- \psi_{i,j}^s) \frac{2}{l_j + l_{j-1}} - \omega_{i,j}, \quad (6.4.3)$$

$$\frac{\psi_{i,j}^{s+1} - \psi_{i,j}^{s+1/2}}{\sigma_{s,y}} = (\delta_x^+ \psi_{i,j}^{s+1/2} - \delta_x^- \psi_{i,j}^{s+1/2}) \frac{2}{h_i + h_{i-1}} + (\delta_y^+ \psi_{i,j}^{s+1} - \delta_y^- \psi_{i,j}^{s+1}) \frac{2}{l_j + l_{j-1}} - \omega_{i,j}. \quad (6.4.4)$$

Здесь  $s$  — итерационный индекс;  $\sigma_{s,x}$ ,  $\sigma_{s,y}$  — итерационные параметры, в общем случае различные по различным направлениям и изменяющиеся от итерации к итерации. Разностные уравнения (6.4.3) и (6.4.4) сводятся к стандартному трехдиагональному виду и решаются методом прогонки.

При использовании схемы (6.4.3), (6.4.4) в общей системе возникают следующие вопросы, важность которых возрастает при росте числа Рейнольдса: выбор требуемой точности решения уравнения (6.4.2), критерий точности решения этого уравнения и оптимизация итерационного процесса, т. е. выбор итерационных параметров  $\sigma_{s,x}$ ,  $\sigma_{s,y}$ , приводящих к наименьшему числу итераций при заданной точности. Возможны (и испытывались на практике) два подхода к решению уравнения (6.4.2) в основной схеме. В первом из них, строго применимом только для решения стационарной задачи, осуществляется по одной итерации уравнения вихря и уравнения функции тока. При малых значениях числа Рейнольдса такой способ достаточно эффективен. Это связано с тем, что невязка в решении уравнения (6.4.1) относительно мало влияет на точность решения системы в целом. Однако при решении нестационарных задач при больших числах Рейнольдса такой способ оказывается малоэффективным. Практика последних лет свидетельствует о том, что в этом случае следует возможно точнее решать уравнение (6.4.1). Выше в § 6.2

использовался простейший критерий точности решения уравнения Пуассона

$$\max |\psi_{i,j}^{s+1} - \psi_{i,j}^s| < \varepsilon.$$

В ряде работ используется также относительный критерий

$$\max \left| \frac{\psi_{i,j}^{s+1} - \psi_{i,j}^s}{\psi_{i,j}^s} \right| < \varepsilon_1. \quad (6.4.5)$$

Указанные критерии хотя и довольно просты, однако не обеспечивают оценку реальной величины погрешности при решении уравнения Пуассона, что становится ощутимым при больших числах Рейнольдса.

Более объективным критерием точности является относительная величина невязки решения уравнения (6.4.1):

$$\delta_{\Delta\psi} = \left| \frac{\Delta\psi_{i,j} - \omega_{i,j}}{\bar{\omega}} \right|, \quad (6.4.6)$$

где  $\bar{\omega}$  — некоторое характерное (например, среднее) значение вихря. При этом критерием точности будет условие

$$\max_{ij} \delta_{\Delta\psi} < \varepsilon. \quad (6.4.7)$$

Очевидным недостатком такого критерия по сравнению с рассмотренными выше является большая трудоемкость.

В том случае, если проводить ограниченное число итераций по схеме (6.4.3), (6.4.4) при некотором значении  $\sigma$ , не добиваясь точного решения уравнения (6.4.1), то разностное решение нестационарной задачи будет, как упоминалось выше в § 6.2, зависеть от трех сеточных параметров:  $\tau$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ . Возможно (экспериментальные расчеты подтверждают это), что при не слишком больших числах Рейнольдса существует близкий к оптимальному набор этих параметров, позволяющий получить приближенное решение с наименьшим числом временных шагов, т. е. с наименьшими затратами машинного времени \*). Однако аналитическое решение задачи о выборе таких параметров отсутствует.

Наиболее эффективной является оптимизация на каждом временном слое итерационного цикла решения уравнения Пуассона. Для этого существует соответствующая теория (см. [14]), согласно которой можно найти опти-

\*) По-видимому, это возможно в тех случаях, когда влияние на решение величин  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  невелико.

мальную серию итерационных параметров (различных по направлениям и изменяющихся от итерации к итерации)  $\sigma_{x,1}, \sigma_{x,2}, \dots, \sigma_{y,1}, \sigma_{y,2}, \dots$ , при использовании которых невязка  $\epsilon$  уменьшается за минимальное число итераций. При расчете такой оптимальной серии требуется знать границы спектров разностных операторов уравнения Пуассона, которые в свою очередь зависят от сеточных параметров (пространственного шага сетки, расположения узлов и т. д.), геометрии области (плоская, цилиндрическая и т. д.) и величины геометрического фактора (отношения сторон области и т. д.). Методика расчета такого оптимального набора параметров (см., например, [14]) разработана лишь для областей простейшего вида (плоские, цилиндрические).

Практически обычно задается фиксированное число итераций  $N$ , для которого определяют набор параметров, позволяющий получить максимальное уменьшение невязки. Например, в плоской области при четырех итерациях величина невязки может быть уменьшена в 5—100 раз, при восьми итерациях — в  $10^3$ — $5 \cdot 10^3$  раз и т. д. При использовании основной схемы в области больших чисел Рейнольдса ( $Re \sim 10^3$  и более) лишь такой путь является эффективным для обеспечения вычислительной устойчивости схемы. При этом уменьшение невязки решения уравнения Пуассона позволяет существенно увеличить величину временного шага  $\tau$ .

**6.4.2. Метод разделения переменных с использованием быстрого преобразования Фурье.** Стремление уменьшить невязку решения уравнения Пуассона и избавиться в общей схеме от влияния сеточных параметров  $\sigma$ ,  $\epsilon$  побуждает обратиться к так называемым точным методам. Развитие вычислительной математики в последние годы привело к усовершенствованию ряда классических методов, казавшихся ранее малоприменимыми для численной реализации (например, метод потенциала, метод Фурье и др.). Мы кратко рассмотрим вариант метода Фурье (метод разделения переменных), приспособленный для расчетов на ЭВМ. Использование этого метода (см., например, [14]) связано с представлением искомого решения в виде конечного ряда Фурье. Запишем выражения для функции тока и вихря в некотором узле сетки в виде

$$\psi_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} a_{k,j} \sin \frac{\pi k i}{N_x}, \quad \omega_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} b_{k,j} \sin \frac{\pi k i}{N_x}, \quad (6.4.8)$$

где

$$a_{k,j} = \frac{2}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x-1} \psi_{i,j} \sin \frac{\pi k i}{N_x}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1. \quad (6.4.9)$$

Аналогичные выражения можно записать для  $b_{k,j}$ . Здесь использовано разложение сеточной функции в ряд только в одном направлении. Будем предполагать разностную сетку в этом направлении равномерной.

Разностная аппроксимация уравнения Пуассона (являющаяся частным случаем аппроксимации (6.4.3) или (6.4.4)) будет иметь вид

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2}{l_j + l_{j-1}} \left( \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{l_j} - \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{l_{j-1}} \right) = \omega_{i,j}. \quad (6.4.10)$$

Для дальнейшего схему (6.4.10) удобнее переписать следующим образом:

$$\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \alpha_j \psi_{i,j} + \beta_j \psi_{i,j+1} + \gamma_j \psi_{i,j-1} = p \omega_{i,j}, \quad (6.4.11)$$

где

$$\alpha_j = -2 + h^2(R_j + R_{j-1}), \quad \beta_j = h^2 R_j, \quad \gamma_j = h^2 R_{j-1}, \\ R_j = 2l_j^{-1}(l_j + l_{j-1})^{-1}, \quad p = h^2.$$

Подставив (6.4.8), (6.4.9) в (6.4.11), получим

$$\sum_{k=1}^{N_x-1} \left[ a_{k,j} \left( \sin \frac{\pi k(i+1)}{N_x} + \sin \frac{\pi k(i-1)}{N_x} \right) + \alpha_j a_{k,j} \sin \frac{\pi k i}{N_x} + \right. \\ \left. + \beta_j a_{k,j+1} \sin \frac{\pi k i}{N_x} + \gamma_j a_{k,j-1} \sin \frac{\pi k i}{N_x} \right] = p \sum_{k=1}^{N_x-1} b_{k,j} \sin \frac{\pi k i}{N_x}. \quad (6.4.12)$$

Далее, приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках в уравнении (6.4.12), придем к соотношению

$$\beta_j a_{k,j+1} + \lambda_{k,j} a_{k,j} + \gamma_{k,j} a_{k,j-1} = p b_{k,j}, \quad (6.4.13)$$

где  $\lambda_{k,j} = \alpha_j + 2 \cos \frac{\pi k}{N_x}$ ,  $1 \leq j \leq N_y - 1$ . Система (6.4.13)

для определения величин  $a_{k,j}$  при каждом  $k$  решается методом прогонки. Затем функция тока  $\psi_{i,j}$  отыскивается с помощью обратного преобразования (6.4.8).

Использование такой методики ранее ограничивалось большим числом операций ( $N^2$ ), необходимых для определения коэффициентов дискретного преобразования Фурье. Развитие техники быстрого преобразования Фурье (см., например, [19], [28] из списка литературы к дополнению 2) позволило сократить количество арифметических операций до величины порядка  $N \log_2 N$ , что делает этот метод весьма перспективным. Результаты конкретных расчетов показывают, что решение уравнений Пуассона на сетке с числом узлов около 4000 изложенным выше методом занимает примерно столько же времени, сколько четыре итерации по методу переменных направлений (схема (6.4.3), (6.4.4)); при этом невязка уменьшается до величины, соответствующей «машинной точности». Применение этого метода, как упоминалось выше, ограничивается геометрией области, конструкцией сетки (равномерная по  $x$  сетка), характером граничных условий.

## § 6.5. Аппроксимация граничных условий для вихря

Особенностью постановки задачи для системы уравнений Навье — Стокса в переменных вихрь, функция тока (6.1.15), (6.1.16) являются граничные условия, которые в случае твердой неподвижной поверхности имеют вид

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (6.5.1)$$

Оба граничных условия (6.5.1), относящиеся к системе (6.1.15), (6.1.16), заданы лишь для функции тока и не заданы для вихря. Поэтому при численном решении разностных уравнений для вихря (6.3.11), (6.3.12) возникает проблема определения недостающих граничных условий. Для решения этой проблемы имеется несколько путей; мы остановимся ниже на двух из них.

Всюду ниже для расчета уравнений вихря и функции тока будет предполагаться использование разностных схем на неравномерных сетках, рассмотренных в §§ 6.3, 6.4. Однако формулы для производных вблизи границы при этом будут аппроксимироваться на равномерной сетке, что связано с необходимостью сохранения точности в непосредственной близости к границе и удобством написания формул. Для первых и вторых производных, аппроксимируемых внутрь области, используются

следующие формулы:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{-3\psi_0 + 4\psi_1 - \psi_2}{2h} + O(h^2), \quad (6.5.2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} = \frac{-7\psi_0 + 8\psi_1 - \psi_2}{2h^2} - \frac{3}{h} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \Big|_0 + O(h^2). \quad (6.5.3)$$

**6.5.1. Разложение функции тока в ряд вблизи границы.** Этот способ, применявшийся еще в работах Тома [28], состоит в том, что функция тока вблизи границы представляется в виде ряда Тейлора, например,

$$\psi_{i,1} = \psi_{i,0} + h \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{i,0} + \frac{h^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \right)_{i,0} + \dots, \quad (6.5.4)$$

Если в разложении (6.5.4) отбросить члены выше второго порядка по  $h$ , то можно получить выражение для вихря на границе в виде

$$\omega_{i,0} = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \right)_{i,0} = \frac{2(\psi_{i,1} - \psi_{i,0})}{h^2} - \frac{2}{h} \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{i,0} + O(h). \quad (6.5.5)$$

При практическом использовании этой формулы предполагается, что граничные условия (6.5.1) выполняются. Это приводит к простому соотношению, связывающему вихрь на границе с функцией тока в ближайшем к границе узле сетки:

$$\omega_{i,0} = 2\psi_{i,1}/h^2. \quad (6.5.6)$$

Связь между вихрем и функцией тока на границе может быть найдена и непосредственно из уравнения для функции тока, считая его справедливым и на границе области, как это было сделано выше в § 6.2. При этом можно получить формулы и более высокого порядка, аппроксимируя вторую производную функции тока по формулам типа (6.5.3). Например, полагая в формуле (6.5.3) справедливыми условия (6.5.1), получим формулу второго порядка, связывающую значение вихря на границе и функцию тока в двух узлах сетки, примыкающих к границе:

$$\omega_{0,i} = \frac{8\psi_{i,1} - \psi_{i,2}}{2h^2} + O(h^2). \quad (6.5.7)$$

При использовании формул (6.5.6) или (6.5.7) граничное условие «прилипания» (6.5.1) выполняется косвенно; на-



пример, для (6.5.7) на решении имеет место соотношение

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = O(h^3), \quad (6.5.8)$$

откуда следует, что  $(\partial \psi / \partial n)|_{\Gamma} \neq 0$ , т. е. на твердой стенке имеется некоторая скорость скольжения; соответствующая порядку точности аппроксимации производной функции тока. При этом вихрь на границе в соответствии с формулой (6.5.7) аппроксимируется с точностью  $O(h^2)$ .

Приближенные граничные условия (6.5.6) или (6.5.7) замыкают систему разностных уравнений основной схемы. Полная последовательность расчета по этой схеме может быть, например, следующей:

1) По известным значениям поля вихря  $\omega_{i,j}^n$  и поля функции тока  $\psi_{i,j}^n$  определяется поле функции тока  $\psi_{i,j}^{n+1}$  путем итерационного решения уравнений (6.4.3), (6.4.4) при заданном условии на границе области. Возможно также использование прямого метода, рассмотренного выше в п. 6.4.2.

2) По формуле (6.5.7) определяется значение вихря на границе области  $\omega_{\Gamma}^{n+1}$ .

3) По формулам (6.3.11), (6.3.12) определяется поле вихря  $\omega_{i,j}^{n+1}$  при найденном граничном условии  $\omega_{\Gamma}^{n+1}$  и заданном значении  $\omega_{i,j}^n$ . Далее, весь цикл повторяется. Результаты практически не зависят от того, начинается ли расчет с поля функции тока или с поля вихря.

Использование рассмотренных выше приближенных граничных условий приводит обычно к существенному снижению устойчивости основной схемы. Одним из способов повышения устойчивости является так называемая релаксация (усреднение), согласно которой значения вихря на границе представляются в виде

$$\omega_{\Gamma}^{n+1} = \alpha f(\psi^{n+1}) + (1 - \alpha) \omega_{\Gamma}^n, \quad (6.5.9)$$

где  $\alpha$  — параметр релаксации, изменяющийся в пределах  $0 \leq \alpha \leq 1$ ;  $f(\psi^{n+1})$  — зависимость между вихрем на границе и функцией тока вида (6.5.6) или (6.5.7).

Введение релаксации рассмотренного типа, строго говоря, возможно лишь для стационарных задач, где на решении имеет место  $\omega_{\Gamma}^{n+1} = \omega_{\Gamma}^n$ , т. е. выполняется соотношение вида (6.5.6) или (6.5.7), аппроксимирующее с соответствующей точностью условие «прилипания». Для нестационарного режима использование релаксации приводит к дополнительной по сравнению с (6.5.8) невязке

в выполнении граничных условий «прилипания», которая пропорциональна разности  $\omega_{\Gamma}^{n+1} - \omega_{\Gamma}^n$ . Для устранения этой невязки необходимо введение внутреннего итерационного цикла, в котором на каждом временном слое  $n$  вместе с решением уравнения для вихря и уравнения для функции тока осуществляется релаксация граничных условий вихря

$$\omega_{\Gamma}^{n,s+1} = \alpha f(\psi^{n,s+1}) + (1 - \alpha) \omega_{\Gamma}^{n,s}, \quad (6.5.10)$$

где  $s$  — индекс итерационного цикла. Внутренние итерации осуществляются до выполнения условия

$$|\omega_{\Gamma}^{n,s+1} - \omega_{\Gamma}^{n,s}| < \varepsilon.$$

**6.5.2. Непосредственное удовлетворение граничным условиям.** Идея этого подхода состоит в том, чтобы обеспечить выполнение разностного аналога граничного условия «прилипания»  $(\partial\psi/\partial n)_{\Gamma} = 0$  на каждом временном слое непосредственно, что достигается подправлением поля функции тока вблизи границы.

Пусть решение системы (6.1.15), (6.1.16) ищется в некоторой области  $\Omega_0$ . Рассмотрим внутри области  $\Omega_0$  вспомогательную область  $\Omega_1$ , границы которой располагаются от границы основной области  $\Omega_0$  на расстоянии одного шага сетки. Уравнение для вихря при этом решается в области  $\Omega_1$ , а уравнение для функции тока — в области  $\Omega_0$ . Последовательность расчета такова:

1) Граничные условия для вихря  $\omega_{\Omega_1}$  на границе области  $\Omega_1$  определяются, исходя из уравнения для функции тока. Для этого используется, например, следующая аппроксимация этого уравнения:

$$\omega_{\Omega_1} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{l^2}. \quad (6.5.11)$$

2) Поле вихря в момент времени  $n+1$  внутри области  $\Omega_1$  определяется при известном поле вихря  $\omega_{i,j}^n$  и значении вихря на границе  $\omega_{\Omega_1}$ .

3) Поле функции тока внутри основной области  $\Omega_0$  при найденном значении вихря  $\omega_{i,j}^{n+1}$  определяется путем решения уравнения для функции тока с граничным условием  $\psi_{\Gamma} = 0$ , заданным на границе основной области  $\Omega_0$ . Для этого может использоваться любая из методов, рассмотренных в § 6.4.

4) Значение функции тока на границе области  $\Omega_1$  подправляется с помощью разностного аналога условия  $(\partial\psi/\partial n)_\Gamma = 0$ . Использование односторонней четырехточечной аппроксимации производной  $(\partial\psi/\partial n)_\Gamma$  внутрь области приводит к соотношению

$$\psi_1^{n+1} = \frac{1}{2} \psi_2^{n+1} - \frac{1}{9} \psi_3^{n+1}, \quad (6.5.12)$$

которое может применяться непосредственно для замыкания прогонок при определении поля функции тока внутри области  $\Omega_0$ . Далее, весь цикл 1)–3) повторяется.

При решении стационарной задачи этот метод позволяет, таким образом, непосредственно удовлетворить граничным условиям «прилипания» с той точностью, которая соответствует формуле, использованной для подправления.

При распространении данного метода на класс нестационарных задач следует учитывать то обстоятельство, что разностное уравнение для вихря в приграничных узлах и уравнение для функции тока в узлах, отстоящих на два шага от границы, вообще говоря, не выполняются. Аналогичное обстоятельство имеет место и в методе, рассмотренном выше в п. 6.5.1, с той лишь разницей, что в упомянутом случае невязка имеется не в приграничных узлах, а в узлах, расположенных на самой границе. Способ устранения невязки в данном случае состоит в организации внутреннего итерационного цикла, цель которого заключается в подправлении вихря в приграничных узлах непосредственно из разностного уравнения вихря (см. [28], [34] из списка литературы к дополнению 2).

## § 6.6. Примеры расчетов.

### Течения изотермической жидкости

**6.6.1 Течение жидкости в выемке с движущейся крышкой.** Эта задача — одно из первых применений численных методов для решения уравнений Навье — Стокса. Рассматривается течение жидкости в замкнутой квадратной области размером  $L$ , вызываемое движением одной из ее границ с некоторой скоростью  $V$ ; остальные границы области неподвижны (см. рис. 6.1, а). При безразмерной записи  $2L$  и  $V$  используются в качестве масштабов длины и скорости. Граничные условия имеют вид

$$y = 0,5, \quad 0 < x < 0,5, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 1, \quad \psi = 0$$

(верхняя граница — крышка);

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq 0,5, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

(левая граница); (6.6.1)

$$x = 0,5, \quad 0 \leq y \leq 0,5, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \psi = 0$$

(правая граница);

$$y = 0, \quad 0 \leq x \leq 0,5, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

(нижняя граница).

Искомые поля функции тока и вихря являются здесь функциями числа Рейнольдса  $Re = 2VL/\nu$ . В случае, если область является не квадратом, а прямоугольником со сторонами  $H$ ,  $L$ , то решение будет зависеть также и от отношения сторон  $H/L$ .

В качестве начального можно использовать, например, такой режим: при  $t = 0$  жидкость во всем поле неподвижна, а верхняя крышка внезапно приводится в движение:

$$y = 0,5, \quad 0 < x < 0,5, \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial y} = 1, \quad \psi^0 = 0, \quad (6.6.2)$$

где  $\psi^0 = \psi(x, y, 0)$ . При решении стационарной задачи при данном числе  $Re$  возможно (и практически наиболее эффективно) в качестве начальных использовать значения функции тока, полученные при другом (меньшем) числе  $Re$ . Ниже представлены результаты, полученные с помощью одного из вариантов основной схемы (см. работу [6] из списка литературы к дополнению 2).

На рис. 6.1, *a* показаны линии  $\psi = \text{const}$  стационарного поля течения в квадратной выемке при  $Re = 300$ , полученные при решении нестационарной задачи методом установления. Начальные данные имели вид (6.6.2), использована равномерная разностная сетка с числом узлов  $n = 20$ ,  $m = 17$ . Из рис. 6.1, *a* видно, что течение имеет циркуляционный характер; его интенсивность, определяемая по плотности расположения линий тока, наибольшая в верхней части области, где жидкость вовлекается в движение движущейся крышкой за счет сил трения. В связи с увлечением жидкости крышкой движение несимметрично: центр вихря, в котором значение функции тока максимально, смещен по направлению движения, т. е. в сторону

верхнего правого угла. В правом нижнем углу заметно вторичное движение в виде небольшого вихря. Координаты центра и величина  $\psi_{\max}$  являются важными характеристиками этого течения. При численном моделировании

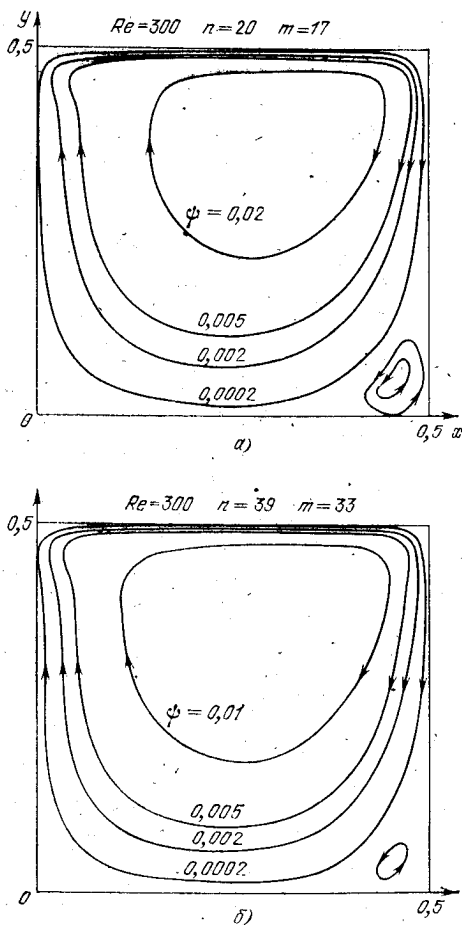


Рис. 6.1. Стационарное течение в выемке с движущейся крышкой. Изолинии функции тока.

важно не только определить поле течения и его характеристики, но и установить, как влияют на него конечные шаги разностной сетки. Это влияние оказывается весьма различным для разных чисел Рейнольдса и различных вычислительных схем. Так как стационарное решение

для основной схемы не зависит от временного шага, то погрешность сеточного решения определяется числом узлов сетки по пространству. На рис. 6.1, б приведен результат расчета при том же самом числе  $Re$ , но при уве-

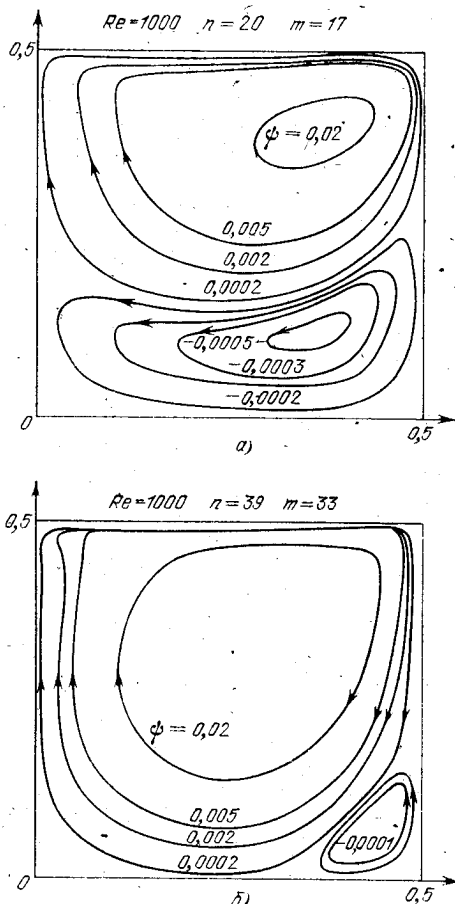


Рис. 6.2. а) Изолинии функции тока в выемке. Дробление основного вихря обусловлено схемными эффектами. б) Изолинии функции тока в выемке на более подробной сетке. Дробление основного вихря отсутствует.

личном вдвое количестве узлов сетки по обоим пространственным координатам ( $n = 39, m = 33$ ); видно, что картина линий тока мало изменяется. Существенно иная ситуация при  $Re = 1000$  (рис. 6.2, а, б). На прежней,

более грубой сетке реализуется стационарная картина линий тока, в которой в данной области образуется вторичное движение (рис. 6.2, *a*), интенсивность которого, однако, более чем на порядок ниже основного. На более подробной сетке (рис. 6.2 *б*) картина линий тока отличается: она больше напоминает ту, которая была показана на рис. 6.1, *б*. Различие состоит в большем смещении вихря вправо и вверх и в увеличении интенсивности вторичного движения в правом нижнем углу. В приводи-

Т а б л и ц а 6.1

Re \ Сетка	300	1000
$n = 20$ $m = 17$	$x_m = 0,342$ $y_m = 0,375$ $\psi_m = 0,043$	$x_m = 0,368$ $y_m = 0,406$ $\psi_m = 0,023$
$n = 39$ $m = 33$	$x_m = 0,316$ $y_m = 0,359$ $\psi_m = 0,051$	$x_m = 0,276$ $y_m = 0,312$ $\psi_m = 0,047$

мой ниже таблице 6.1 даны некоторые сравнительные результаты расчета величины  $\psi_{\max}$  и ее координат при различных числах Re на двух упомянутых сетках ( $\psi_m = \psi_{\max}$ ).

Картина течения дополняется также приведенными на рис. 6.3, *a*, 6.3, *б* профилями горизонтальной  $u(y)$  и вертикальной  $v(y)$  составляющих скорости при  $Re = 1000$ . Значения  $x$ , которым соответствуют кривые, можно получить, умножая величину  $h$  на номер кривой. Здесь особенно отчетливо видно, что это течение в целом не может быть описано в рамках только уравнений пограничного слоя. Однако непосредственно у движущейся крышки выделяется узкая зона, имеющая характер пограничного слоя (но при довольно сложном течении на его внешней границе). Характерным для достаточно больших чисел Re является линейное распределение скорости  $u(y)$  в ядре.

В соответствии с уравнением неразрывности должны выполняться следующие интегральные соотношения

(нулевой расход жидкости):

$$\int_0^{0,5} u dy = 0, \quad \int_0^{0,5} v dx = 0. \quad (6.6.3)$$

В соответствии с первым из них площадки, соответствующие положительному ( $\Delta u_+$ ) и отрицательному ( $\Delta u_-$ ) направлениям составляющей скорости  $u(y)$  на рис. 6.3, а, должны быть одинаковы, что может использоваться для

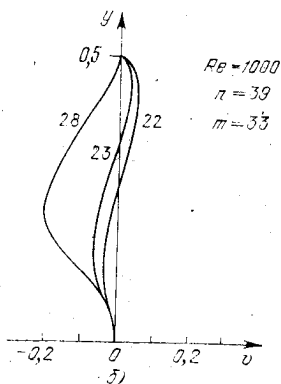
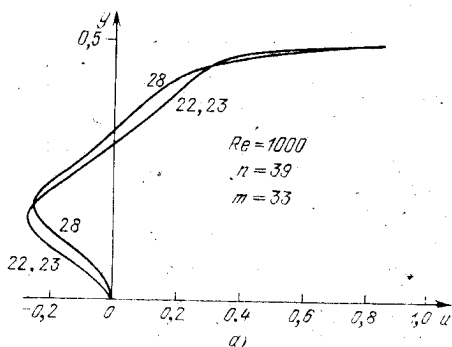


Рис. 6.3. а) Профили горизонтальной составляющей скорости в различных вертикальных сечениях выемки. б) Профили вертикальной составляющей скорости в различных вертикальных сечениях выемки.

интегральной проверки разностного решения. Рассмотренная картина течения в общих чертах согласуется с данными экспериментального наблюдения.

Недостатком математической формулировки этой задачи является наличие разрывов скорости в угловых точках.



$x = 0$ ,  $y = 0,5$  и  $x = 1$ ,  $y = 0,5$ ; реальной физической задаче более соответствовало бы обтекание выемки внешним потоком с заданной скоростью при  $y \rightarrow \infty$ , что требует существенного увеличения числа узлов конечно-разностной сетки. В дополнении 2 даны ссылки на более поздние работы ряда авторов, использовавших эту задачу для тестов (см., например, [76] из списка литературы к дополнению 2).

### 6.6.2. Течение на начальном участке плоского канала.

Данный пример иллюстрирует типичную для течений вязкой жидкости проблему постановки граничных условий на «входе» в канал и «выходе» из канала. Задача ставится следующим образом. В плоский канал длиной  $L$  и шириной  $2R$  втекает жидкость, имеющая на входе заданную скорость. Будем считать течение на входе безвихревым. Это значит, что горизонтальная составляющая скорости на входе постоянна ( $u = \text{const}$ ), производная вертикальной компоненты скорости вдоль потока равна нулю. На стенках канала предполагаются заданными условия «прилипания».

Для постановки граничных условий на выходе из канала могут быть использованы различные способы; один из простейших состоит в задании на достаточно большом удалении от входа распределения скорости, соответствующего развитому плоскопараллельному течению, которое реализуется в бесконечно протяженном канале (течение Пуазейля). В этом случае следствием уравнений Навье — Стокса (6.1.1) при  $v = 0$ ,  $u = u(y)$  является одно уравнение

$$\frac{dp}{dx} = -\mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (6.6.4)$$

Отсюда можно получить искомое распределение горизонтальной составляющей скорости в виде

$$u = \frac{2}{\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - y^2). \quad (6.6.5)$$

Основной интегральной характеристикой течения является средняя скорость или расход жидкости, который одинаков для различных поперечных сечений канала. Расход жидкости определяется в виде

$$Q = \frac{1}{R} \int_0^R u(y) dy.$$

Подставляя в это выражение приведенное выше распреде-

ление скорости, можно получить связь между расходом жидкости и градиентом давления в канале в виде

$$Q = \frac{4}{3} \frac{R^2}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (6.6.6)$$

Считая величину расхода  $Q$  заданной и принимая  $Q$  за масштаб скорости, а полуширину канала  $R/2$  — за масштаб длины, и исключая градиент давления из (6.6.5), (6.6.6), получим выражение для профиля скорости в бесконечном плоском канале в виде

$$u = \frac{3}{2} (1 - 4y^2). \quad (6.6.7)$$

Выражение для скорости в виде (6.6.7) может быть использовано в качестве граничного условия на выходе из канала в случае, когда изучается течение с заданным расходом.

В стационарных режимах течение обычно симметрично относительно оси  $y=R$ , на которой при  $0 \leq x \leq L$  могут быть поставлены условия симметрии  $du/dy = 0$ ,  $v = 0$  или  $\psi = 0$ ,  $\partial\psi/\partial y = 0$ . Граничные условия типа (6.6.7) ставятся при этом на некотором расстоянии  $L$ , достаточно большом для того, чтобы такое течение могло установиться. Результаты решения уравнений пограничного слоя, а также результаты численного решения уравнений Навье — Стокса дают для этой величины, называемой длиной участка гидродинамической стабилизации, следующее выражение:

$$L_c/(2R) \sim c \cdot Re, \quad (6.6.8)$$

где в качестве масштаба длины взята ширина канала  $R$ , а в качестве масштаба скорости — заданная скорость на входе в канал.

Один из возможных вариантов граничных условий имеет следующий вид.

Условия на входе в канал:  $x = 0$ ,  $0 < y < 0,5$ ;

$$u = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Условия на выходе из канала:  $x = L$ ,  $0 < y < 0,5$ ;

$$u = \frac{3}{2} (1 - 4y^2), \quad v = 0. \quad (6.6.9)$$

Твердая стенка канала:  $y = 0,5$ ,  $0 \leq x \leq L$ ;

$$u = v = 0.$$

Оси симметрии:  $y = 0, 0 < x < L$ ;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0.$$

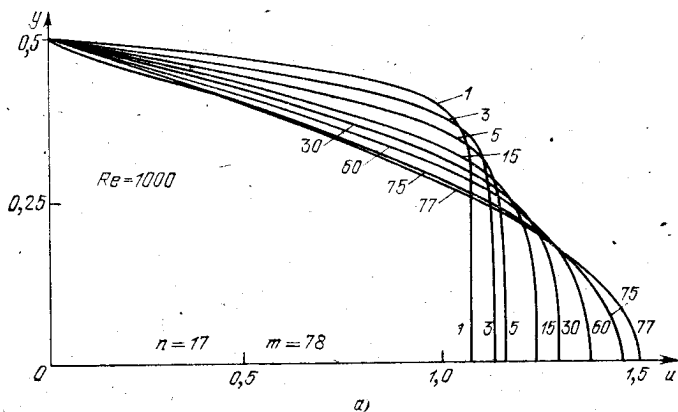
Соответствующие граничные условия в переменных вихрь, функция тока имеют вид

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 0 < y < 0,5; \quad \psi = y, \quad \omega = 0, \\ x = L, \quad 0 < y < 0,5; \quad \psi = 3y/2 - 2y^2, \quad \omega = 12y, \\ y = 0,5, \quad 0 \leq x \leq L; \quad \psi = 0,5, \quad \partial\psi/\partial y = 0, \\ y = 0, \quad 0 \leq x \leq L; \quad \psi = 0, \quad \omega = 0. \end{aligned} \tag{6.6.10}$$

Критерием выхода течения на участок гидродинамической стабилизации, а значит, и правомочности постановки соответствующих граничных условий на выходе из канала является условие  $(u - u_c)/u_c < \epsilon$ , где  $u$  — местная скорость,  $u_c$  — скорость, соответствующая установившемуся течению (6.6.7). При этом для величины  $\epsilon = 2\%$  значение  $s$  в формуле (6.6.8) составляет 0,04.

На рис. 6.4, а, б приведен один из результатов расчета поля скорости в канале при числе  $Re = 1000$ . Равномерная расчетная сетка содержала  $17 \times 78$  узлов соответственно по осям координат  $x, y$ . Значения итерационных параметров  $\sigma = \tau = 0,5$ . Профили горизонтальной скорости  $u(y)$  и вертикальной  $v(y)$ , приведенные на рис. 6.4, а, б, соответствуют различным расстояниям от входа в канал; координату  $x$  для каждого профиля можно получить, умножив величину шага  $h = 0,5$  на номер, соответствующий кривой. Непосредственно вблизи входа в канал (кривые 1—5) в поле течения различаются пограничный слой и ядро с постоянным значением горизонтальной скорости. На выходе из расчетного участка профиль горизонтальной скорости соответствует развитому плоско-параллельному течению в канале (6.6.7), которое реализуется в результате объединения пограничных слоев, развивающихся на стенках канала. В отличие от приближения пограничного слоя (гл. 5), в данном случае возможно описание всего поля течения, включая начальный участок и взаимодействие пограничного слоя и основного течения. Последнее в данном случае невелико, поэтому длина участка стабилизации  $L_c/R$  определяется достаточно точно и в рамках приближения пограничного слоя. Заметим,

что для постановки граничных условий на выходе из канала при  $x < L/R$  можно ставить и другие, так называемые «мягкие» граничные условия, которые должны быть уравнениями более низкого порядка. Например, для этой цели можно использовать уравнения пограничного слоя (см. гл. 5). Такой прием позволяет в ряде случаев (при



$Re=1000$

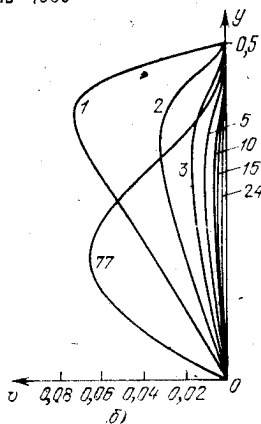


Рис. 6.4. а) Профили горизонтальной составляющей скорости в различных поперечных сечениях плоского канала. б) Профили вертикальной составляющей скорости.

условии, что течение на выходе относится к классу течений пограничного слоя) существенно сократить величину расчетной области при решении уравнений Навье — Стокса.

## § 6.7. Математические и численные модели конвективного тепло- и массообмена

Основная схема может применяться не только для решения задач о вынужденном течении однородной несжимаемой жидкости, постановка которых обсуждалась выше. Нашей следующей целью является иллюстрация одного из возможных распространений схемы на случай течения неоднородной несжимаемой жидкости при наличии переноса тепла и массы.

**6.7.1. Модель неоднородной жидкости в приближении Буссинеска.** Плотность и физические свойства неоднородной жидкости изменяются по пространственной переменной. Причиной неоднородности жидкости может быть изменение ее состава или температуры, что приводит к ряду новых физических эффектов, которые отсутствуют в однородной изотермической жидкости (конвекция, тепло- и массоперенос).

Будем рассматривать бинарную смесь, уравнение состояния которой задано в виде

$$\rho = f(C, T). \quad (6.7.1)$$

Здесь  $T$  — температура,  $C$  — концентрация примеси.

Как и ранее, предполагается, что плотность не зависит от давления. Будем предполагать, что

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (6.7.2)$$

где  $p_0, \rho_0$  удовлетворяют уравнениям статики

$$-\text{grad } p_0 = \rho_0 g \cdot n, \quad (6.7.3)$$

$g$  — ускорение, создаваемое массовыми силами. Пусть для отклонений  $p', \rho'$  имеют место соотношения

$$p' \ll p_0, \quad \rho' \ll \rho_0; \quad (6.7.4)$$

тогда будут справедливыми следующие представления:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial y} \rho' = \\ &= -g + \beta_T g T' + \beta_C g C' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y}, \end{aligned} \quad (6.7.5)$$

где

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,C}, \quad \beta_C = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{p,T}, \quad (6.7.6)$$

$T' = T - T_0, \quad C' = C - C_0; \quad T_0, \quad C_0$  — соответственно некоторые постоянные величины, от которых отсчитываются

температура и концентрация жидкости, причем  $T' \ll T_0$ ,  $C' \ll C_0$ . За исключением величины подъемной силы, в уравнениях количества движения плотность всюду при выводе исходной системы считается постоянной. Предполагаются постоянными и другие свойства жидкости: коэффициенты вязкости, теплопроводности, удельной теплоемкости, диффузии. При написании уравнений притока тепла и диффузии будем пренебрегать выделением тепла за счет вязкой диссипации и работы сил сжатия, термо- и бародиффузионными эффектами (см., например, [25], [26]). При этих предположениях уравнения движения, переноса тепла и массы неоднородной жидкости будут иметь вид (мы запишем исходную двумерную систему в декартовых координатах при расположении массовой силы под углом  $\varphi$  к вертикали; рис. 6.5)

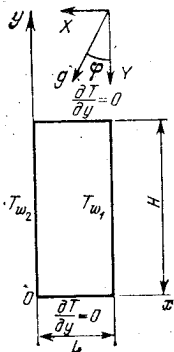


Рис. 6.5. Расчетная схема гравитационной конвекции в замкнутой плоской области.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega - g\beta_T \left( \frac{\partial T'}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial T'}{\partial x} \cos \varphi \right) - g\beta_C \left( \frac{\partial C'}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial C'}{\partial x} \cos \varphi \right), \quad (6.7.7)$$

$$\Delta \psi = \omega, \quad (6.7.8)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} \right) = \lambda \Delta T', \quad (6.7.9)$$

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + u \frac{\partial C'}{\partial x} + v \frac{\partial C'}{\partial y} = D \Delta C'. \quad (6.7.10)$$

Система (6.7.7)–(6.7.10) отличается от системы (6.1.15), (6.1.16) данной главы наличием в уравнении вихря величин, зависящих от температуры и концентрации (подъемные силы), и двух дополнительных уравнений, относящихся к типу «уравнение переноса с диссипацией» (см. гл. 4). Диссипативными коэффициентами здесь являются  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $D$  — коэффициент диффузии. Коэффициент  $c_p$  в (6.7.9) — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Граничные условия для этой системы включают граничные условия для поля скорости, рассматривавшиеся выше в § 6.1, и граничные условия для температуры и поля концентрации. Последние могут быть трех основных типов:

1) Задана температура  $T_w$  (концентрация примеси  $C_w$ ) на границе.

2) Задан поток тепла  $q_w = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$  (диффузионный поток  $j_w = -D \frac{\partial C}{\partial n}$ ).

3) Задан закон теплообмена в виде  $q_w = \alpha(T_w - T_l)$ , где  $\alpha$  — коэффициент теплообмена,  $T_w$  — температура стенки,  $T_l$  — температура среды (соответственно закон массообмена в виде  $j_w = \alpha_c(C_w - C_l)$ , где  $\alpha_c$  — коэффициент массообмена). Кроме того, в начальный момент времени должны быть заданы значения всех искомых функций  $\omega^0, \psi^0, T^0, C^0$ .

Вводя масштабы для искомых величин и независимых переменных, можно привести систему (6.7.7)–(6.7.10) к безразмерному виду

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \varphi \right) - \frac{\text{Gr}_D}{\text{Re}^2} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial C}{\partial x} \cos \varphi \right), \quad (6.7.11)$$

$$\Delta \psi = \omega, \quad (6.7.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \Delta \theta, \quad (6.7.13)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Sc}} \Delta C. \quad (6.7.14)$$

В отличие от системы (6.1.15), (6.1.16), в системе (6.7.11)–(6.7.14) кроме числа Рейнольдса содержатся другие безразмерные параметры, определенные по величинам, заданным условиями задачи:  $\text{Gr} = g\beta L^3 \Delta T / \nu^2$  — число Грасгофа,  $\text{Gr}_D = g\beta_c L^3 \Delta C / \nu^2$  — диффузионное число Грасгофа,  $\text{Pr} = \nu / a$  — число Прандтля,  $\text{Sc} = \text{Pr}_D = \nu / D$  — диффузионное число Прандтля или число Шмидта, где  $a = \lambda / (\rho c_p)$  — коэффициент температуропроводности. Соответственно этому система (6.7.11)–(6.7.14) содержит описание более широкого круга процессов.

Рассмотрим кратко классификацию этих процессов, отмечая наиболее важные предельные режимы и частные случаи.

Наиболее простыми являются режимы переноса тепла (массы) молекулярными процессами теплопроводности (диффузии), реализующиеся в неподвижной жидкости ( $u \equiv v \equiv 0$ ). Эти режимы являются асимптотическими для системы (6.7.11)–(6.7.14) при  $\text{Re} \rightarrow 0$ ,  $\text{Gr} \rightarrow 0$ ,  $\text{Gr}_D \rightarrow 0$ .

При  $Gr = Gr_D = 0$ ,  $Re \neq 0$  уравнения (6.7.11), (6.7.12) представляют рассмотренные в § 6.1 уравнения Навье — Стокса для однородной несжимаемой жидкости. Два других уравнения (6.7.13), (6.7.14) при этом описывают перенос тепла и массы движущейся жидкостью в предположении, что процессы тепло- и массообмена не оказывают влияния на движение.

Одним из наиболее важных режимов, описываемых системой (6.7.11)—(6.7.14), является режим *естественной гравитационной конвекции*, которая представляет один из видов движения, возникающих в поле силы тяжести (или другой массовой силы) при наличии градиентов температуры (концентрации). В системе (6.7.11)—(6.7.14) содержится описание двух разновидностей естественной конвекции: *тепловой* и *концентрационной*.

Интенсивность тепловой конвекции определяется числом Грасгофа. Существенное значение при этом имеет число Прандтля, представляющее отношение толщин динамического и теплового пограничных слоев. В ряде случаев важную роль играет число Рэлея  $Ra = Gr \cdot Pr$ .

Интенсивность концентрационной конвекции определяется диффузионным числом Грасгофа, которое является аналогом числа Грасгофа. Важную роль при этом играет диффузионное число Прандтля (число Шмидта), представляющее отношение толщин динамического и диффузионного пограничных слоев. Аналогом числа Рэлея в режиме концентрационной конвекции является диффузионное число Рэлея  $Ra_D = Gr_D \cdot Sc$ .

При численной реализации существенно, что в процессах естественной конвекции нет характерной скорости, заданной условиями задачи. В качестве масштаба скорости  $V_1$  в системе (6.7.11)—(6.7.14) может быть взята, например, величина  $v/L$ , имеющая размерность скорости. При этом число Рейнольдса, играющее в системе (6.7.11), (6.7.12) роль масштабного фактора, следует положить равным единице. Безразмерная скорость в системе (6.7.11)—(6.7.14) будет равна  $uL/v$ , т. е. будет являться числом Рейнольдса, отнесенным к местной скорости, а безразмерное время равно  $vt/L^2$ .

Наиболее общим режимом, определяемым системой (6.7.11)—(6.7.14), является режим совместного действия естественной и вынужденной конвекций, для описания которого используются все упомянутые выше критерии подобия.



Сказанное выше в некоторой степени характеризует многообразие режимов течения переноса тепла и массы, описываемое системой (6.7.11)—(6.7.14).

**6.7.2. Модификация основной схемы для задач конвективного тепло- и массообмена.** Применение основной схемы к рассмотренному классу задач конвективного тепло- и массообмена связано с решением вопросов об аппроксимации составляющих массовых сил в уравнении для вихря, аппроксимации уравнений переноса (6.7.13), (6.7.14), способе ведения итераций всей системы в целом.

Основная схема может быть следующим образом применена для решения указанных задач:

1) В схеме переменных направлений (6.4.11), (6.4.12) для решения уравнения вихря правая часть  $\bar{F}$  аппроксимируется по известным в моменты времени  $n$ ,  $n + 1/2$  значениям полей температуры и концентрации:

$$\bar{F}^{n+1/2} = -\frac{Cr}{Re^2} \left( \frac{\theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j-1}^n}{2l} \sin \varphi - \frac{\theta_{i+1,j}^n - \theta_{i-1,j}^n}{2h} \cos \varphi \right) -$$

$$-\frac{Cr_D}{Re^2} \left( \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n}{2l} \sin \varphi - \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2h} \cos \varphi \right),$$

$$\bar{F}^{n+1} = \frac{Cr}{-Re^2} \left( \frac{\theta_{i,j+1}^{n+1/2} - \theta_{i,j-1}^{n+1/2}}{2l} \sin \varphi - \frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - \theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h} \cos \varphi \right) -$$

$$-\frac{Cr_D}{Re^2} \left( \frac{C_{i,j+1}^{n+1/2} - C_{i,j-1}^{n+1/2}}{2l} \sin \varphi - \frac{C_{i+1,j}^{n+1/2} - C_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h} \cos \varphi \right).$$

2) Для решения уравнений переноса (6.7.13) и (6.7.14) используется разностная схема метода переменных направлений, которая строится по аналогии со схемой для решения уравнения вихря (§ 6.3). Ввиду полной идентичности записи схемы для данного случая мы не будем приводить здесь соответствующих разностных формул. Аппроксимация граничных условий для полей температуры и концентрации производится в соответствии с формулами, приведенными выше (см. § 6.5).

3) При решении общей системы уравнений (6.7.11)—(6.7.14) по изложенной выше схеме могут применяться в зависимости от конкретной ситуации различные способы ведения итераций. Наиболее простой способ состоит в последовательном решении всей системы (6.7.11)—(6.7.14) с одним и тем же временным шагом  $\tau$ , который при решении стационарных задач является итерационным параметром. Однако можно использовать то обстоятельство,

что уравнения переноса тепла (6.7.13) и массы (6.7.14) могут решаться отдельно от первых двух уравнений со значительно большим временным шагом, что связано с отсутствием ограничений по устойчивости для уравнений (6.7.13), (6.7.14), возникающих при аппроксимации граничных условий для вихря. Поэтому бывает целесообразным разделить всю систему на блоки, один из которых составляет система уравнений вихрь, функция тока и другой — уравнения переноса тепла и массы.

При решении стационарных задач методом установления весьма важным является выбор начального приближения, для которого в общей системе имеются различные возможности в зависимости от того или иного конкретного режима по величине определяющих критериев.

Можно сформулировать ряд общих рецептов, существенно ускоряющих сходимость.

1) Практически во всех стационарных задачах в качестве начального приближения целесообразно использовать решение стационарных уравнений теплопроводности и диффузии без учета движения среды.

2) При решении стационарной задачи в области больших чисел  $Re$  ( $Ra$ ) весьма целесообразно использовать в качестве начальных данных решения стационарных задач при меньших значениях чисел  $Re$  ( $Ra$ ), т. е. осуществлять расчет методом последовательных стационарных состояний. При расчете сложного режима, представляющего взаимодействие различных видов движения (например, естественной конвекции и вынужденного движения), в качестве начального приближения целесообразно использование стационарного решения, соответствующего одному из этих движений, и т. д.

Отметим, что эта методика расчета может распространяться также на случаи, когда уравнения (6.7.11) — (6.7.14) решаются совместно с уравнениями, уточняющими действие массовых сил (магнитное поле, вращение и т. д.).

## § 6.8. Примеры расчетов. Задачи конвективного тепло- и массообмена

### 6.8.1. Тепловая конвекция в замкнутой плоской области. Тесты разностных схем.

Для изучения процессов конвективного тепло- и массообмена простейшей является задача о тепловой конвекции в замкнутой прямоугольной области, занимающая здесь такое же место, как и

рассмотренная выше в п. 6.6.1 задача о течении изотермической жидкости в выемке с движущейся границей. Задача ставится следующим образом. Жидкость (газ) находится в замкнутой области с твердыми стенками, имеющей высоту  $H$  и ширину  $L$ , при наличии некоторого распределения температур на границе области. Сила тяжести направлена под некоторым углом к вертикальной оси  $y$  (см. рис. 6.5).

Течение и перенос тепла в этом случае определяются системой трех уравнений (6.7.11)—(6.7.13) и зависят от чисел Грасгофа, Прандтля, геометрического фактора — отношения сторон области  $H/L$  и угла наклона силы тяжести  $\varphi$ . В систему определяющих параметров входит, кроме того, температурный режим на границе области, в зависимости от которого возникающие в области движения существенно различаются.

Для определения характера движения важным является понятие механического (гидростатического) равновесия. Будем в дальнейшем для определенности предполагать, что на двух боковых поверхностях области поддерживаются постоянные по высоте, но различные температуры  $T_2$  и  $T_1$ , а верхнее и нижнее основания области теплоизолированы, как показано на рис. 6.5. Тогда в случаях  $\varphi = -\pi/2$  и  $\varphi = \pi/2$  механическое равновесие, условием которого является  $\partial p / \partial y = 0$ , возможно, так как начальное поле температур (а значит, и поле давления) постоянно вдоль направления, нормального к направлению массовой силы. При этом первому случаю  $\varphi = -\pi/2$  соответствует абсолютно устойчивое равновесие (более теплая и, значит, более легкая жидкость расположена над более холодной, т. е. тяжелой жидкостью). Во втором случае механическое равновесие возможно, но в общем случае неустойчиво, так как тяжелая жидкость расположена над легкой. Критерием потери устойчивости равновесия и начала движения жидкости является число Рэлея, являющееся произведением чисел Грасгофа и Прандтля. При всех остальных расположениях массовой силы механическое равновесие невозможно и движение жидкости в области будет иметь место при любых значениях числа Грасгофа, отличных от нуля.

Мы рассмотрим некоторые результаты численного решения уравнений тепловой конвекции для одного из режимов, относящихся к последнему классу, соответствующему случаю  $\varphi = 0$  (подогрев области сбоку), в случае, когда высота и ширина области одинаковы,  $H/L = 1$ .

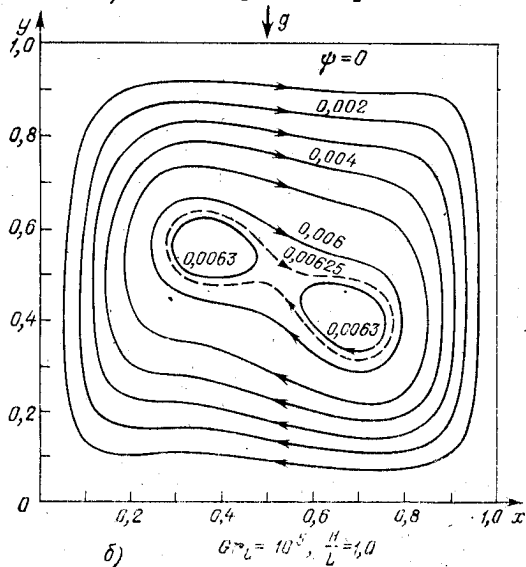
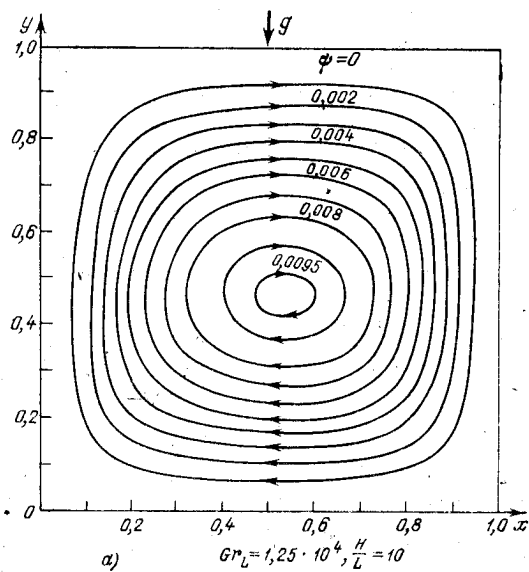


Рис. 6.6. а) Изолинии функции тока тепловой гравитационной конвекции в квадратной области. б) Изолинии функции тока тепловой гравитационной конвекции в квадратной области. Появление вторичных течений.

Граничные условия для системы (6.7.11)–(6.7.13) имеют следующий вид:

$$y = 0, \quad y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0;$$

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \theta = 1;$$

$$x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \theta = 0.$$

Здесь безразмерная температура  $\theta$  определена в виде  $\theta = (T - T_1)(T_2 - T_1)^{-1}$ .

На рис. 6.6, а, б показаны картины линий тока стационарной тепловой конвекции при значениях  $Gr = 1,25 \cdot 10^4$ ,  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0,71$ . Расчет выполнен на равномерной сетке с числом узлов  $21 \times 21$  \*).

Под действием силы тяжести неравномерно нагретая жидкость поднимается слева вдоль нагретой стенки и опускается вдоль правой холодной, совершая циркуляцию на стационарном режиме. Влияние движения жидкости на поле температуры для этого случая показано на рис. 6.7, где приведены профили температуры в различных вертикальных сечениях  $y = \text{const}$  (эти профили построены в местной температурной шкале, смещающейся вместе с номером слоя). При их изучении следует иметь в виду, что при отсутствии движения ( $Gr = 0$ ) стационарные профили температуры между значениями

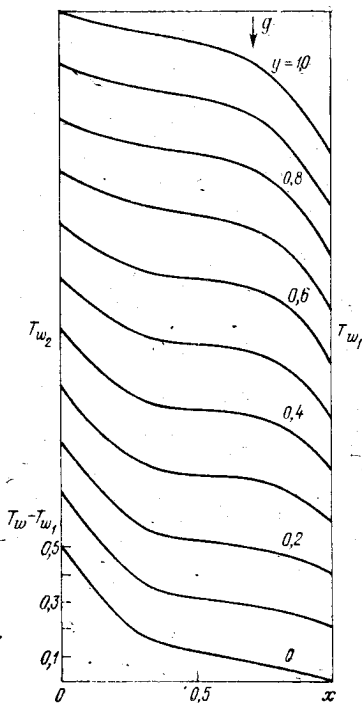


Рис. 6.7. Поле температуры тепловой гравитационной конвекции (профили температуры в различных горизонтальных сечениях области),  $Gr = 1,25 \cdot 10^4$ ,  $Pr = 0,71$ .

\*) Результаты, представленные на рис. 6.6–6.8, в отличие от всех остальных получены из уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа, записанных в переменных скорости, давление для предельного случая слабой сжимаемости (см. [58] из списка литературы к дополнению 2).

$T_2$  и  $T_1$  прямолинейны. Из рис. 6.7 видно, что конвекция выравнивает температуру жидкости по горизонтали в ядре, за исключением концов ( $y \sim 0$  и  $y \sim 1$ ). Качественно это течение при достаточно большом числе Грасгофа можно представить в виде двух пограничных слоев, один из которых поднимается вверх по нагретой стенке, а другой опускается вниз по холодной стенке. Поэтому в верхней части области температура жидкости выше, чем в нижней. Более наглядно этот эффект, называемый температурным расслоением, представлен на рис. 6.8, где показаны профили безразмерной температуры  $\theta$  вдоль центральной вертикальной оси области

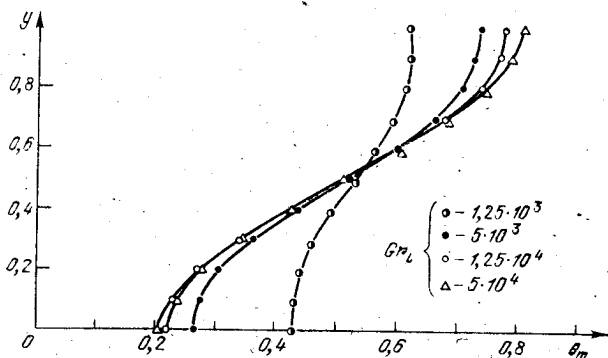


Рис. 6.8. Профили температуры по вертикали в центральном сечении квадратной области ( $x = 0,5$ ) при различных числах Грасгофа.

( $x = 0,5$ ). При отсутствии движения жидкости температура постоянна по высоте и вертикальный профиль представляет прямую, параллельную оси  $y$ . При развитой конвекции в ядре наблюдается близкое к линейному вертикальное распределение температуры; при этом вертикальные профили при различных числах Грасгофа лишь несколько различаются у верхнего и нижнего оснований области. Особенностью конвекции является существенная взаимная связь между полем течения и полем температуры; при увеличении числа Грасгофа это приводит к появлению внутренних вторичных течений в ядре, как показано на рис. 6.6, б, и в дальнейшем к неустойчивости. Особенности конвекции при больших числах Грасгофа, включая переход к турбулентному режиму течения, мы рассмотрим ниже в п. 6.8.3, а теперь обратимся к методи-

ческим вопросам, связанным с тестами некоторых вариантов разностных схем, обсуждавшихся выше в §§ 6.3—6.5. При сравнении схем будет использоваться основная интегральная характеристика конвективного теплообмена — число Нуссельта

$$Nu = \frac{\bar{q}H}{\lambda(T_2 - T_1)},$$

где  $\bar{q}$  — средний поток тепла, вычисляемый следующим

образом:  $\bar{q} = \frac{1}{H} \int_0^H q dy$ ;  $q$  — местный поток тепла, опреде-

ляемый формулой  $q = -\lambda \partial T / \partial x$ . Число Нуссельта представляет отношение среднего потока тепла при наличии конвекции к потоку тепла  $q_0 = \lambda(T_2 - T_1)/L$ , переносимому путем теплопроводности. На стационарном режиме средние потоки тепла на нагретой и холодной стенках должны быть одинаковы, что является дополнительной

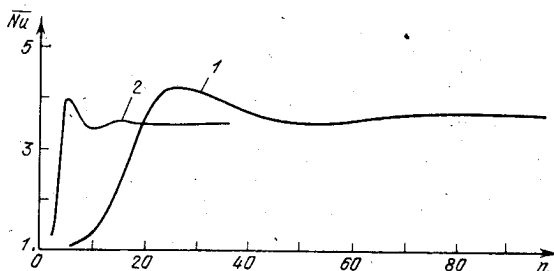


Рис. 6.9. Среднее число Нуссельта в процессе установления стационарного режима при различных способах расчета граничных условий для вихря в задаче о тепловой конвекции в замкнутой квадратной области,  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 1$ : 1 — формула (6.5.7), 2 — формулы (6.5.11), (6.5.12).

интегральной проверкой решения. В частности, в рассмотренном нами примере (см. рис. 6.6—6.8) невязка интегрального баланса тепла  $\delta_q = \overline{Nu}_2 - \overline{Nu}_1 / \overline{Nu}$  не превосходит 1%, невязка баланса расхода (подобно тому, как это определено в п. 6.6.1) составляет около 1%.

На рис. 6.9 дано сопоставление изменения числа Нуссельта по числу итераций при расчете на установление для рассмотренной выше задачи о конвекции в квадратной области, подогреваемой сбоку при различных способах аппроксимации граничных условий для  $Gr = 4 \cdot 10^4$ ,  $Pr = 1$ . Здесь использована основная схема, рассмотрен-

ная в §§ 6.3—6.5 (вариант схемы с итерационным методом решения уравнения Пуассона для функции тока при постоянном итерационном параметре  $\sigma = 0,25$ ). Кривая 1 соответствует аппроксимации граничных условий для вихря по формуле второго порядка точности (6.5.7), полученной путем разложения функции тока вблизи границы

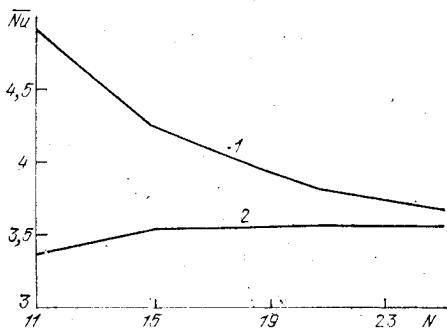


Рис. 6.10. Среднее число Нуссельта на стационарном режиме в зависимости от числа узлов разностной сетки при различных способах расчета граничного условия для вихря (задача о тепловой гравитационной конвекции в замкнутой квадратной области),  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 1$ : 1 — формула (6.5.7), 2 — формулы (6.5.11), (6.5.12).

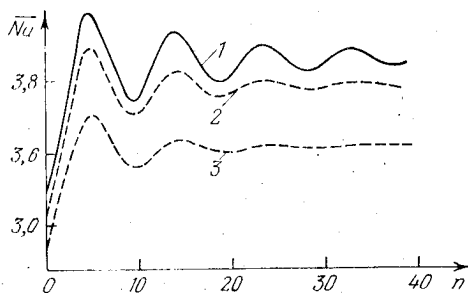


Рис. 6.11. Изменение среднего числа Нуссельта в переходном режиме развития тепловой конвекции в квадратной области ( $Gr = 4 \cdot 10^4$ ,  $Pr = 1$ ) при различных способах аппроксимации конвективных членов: 1 — центральные разности, 2 — монотонная аппроксимация Самарского, 3 — односторонние разности.

в ряд Тейлора при шаге по времени  $\tau = 0,001$ , который в этом случае является предельным по условию устойчивости. Кривая 2 соответствует формулам (6.5.11), (6.5.12) при  $\tau = 0,005$ . Видно, что аппроксимация граничных ус-



ловий типа (6.5.11), (6.5.12) дает значительно более быструю сходимость к стационарному решению. Релаксационная процедура (6.5.9) позволяет ускорить сходимость обоих из этих случаев. Следует отметить, что обе эти формулы дают различные приближения к точному решению. Это видно на рис. 6.10, где дано изменение числа Нуссельта на стационарном режиме в зависимости от числа узлов разностной сетки для формулы (6.5.7) (кривая 1) и формул (6.5.11), (6.5.12) (кривая 2). Видно, что формула первого типа дает приближение к точному решению сверху, а второго — снизу, причем различие результатов расчета числа  $\overline{Nu}$  существенно уменьшается при измельчении сетки, что является одним из практических доказательств сходимости. Наконец, на рис. 6.11,

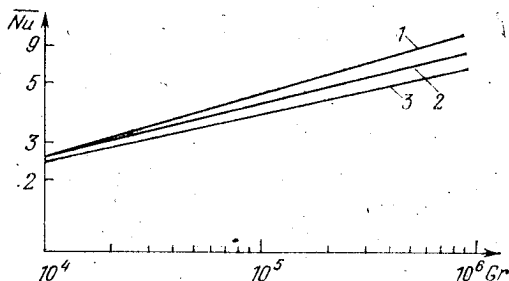
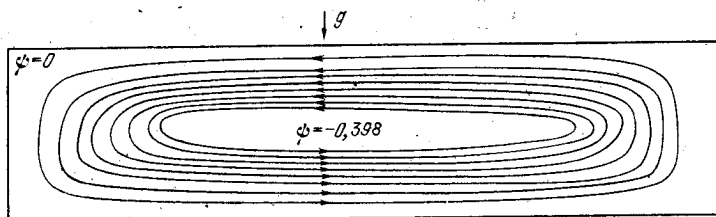


Рис. 6.12. Влияние способа аппроксимации конвективных членов на зависимость среднего числа Нуссельта от числа Грасгофа для задачи о тепловой конвекции в квадратной области. 1 — центральные разности, 2 — монотонная аппроксимация Самарского, 3 — односторонние разности.

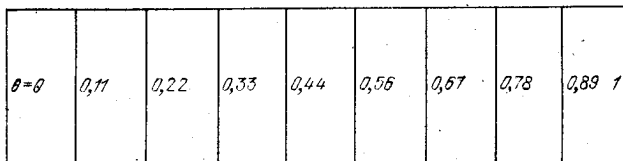
6.12 даны сопоставления расчета числа  $\overline{Nu}$  для различных способов аппроксимации конвективных членов в уравнениях вихря и переноса тела, рассматривавшихся в § 6.3, откуда видно, что монотонная аппроксимация Самарского дает значения числа  $\overline{Nu}$ , находящиеся между значениями, полученными с помощью симметричной схемы второго порядка с центральными разностями и односторонней схемы первого порядка точности, обладающей наибольшей «схемной вязкостью» (подробнее см. [20], [21], [27] из списка литературы к дополнению 2).

**6.8.2. Конвекция и распределение примеси в бинарных смесях.** В этом примере рассматриваются численные решения системы уравнений (6.7.11)–(6.7.14) для случая совместного переноса тепла и массы в замкнутой области. Задача ставится следующим образом. В замкнутую плос-

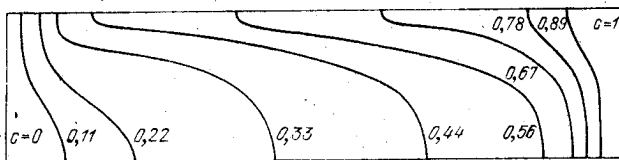
кую ампулу (рис. 6.13, *a*) помещена бинарная смесь; при некоторых предположениях можно считать, что она представляет собой расплав (раствор); концентрация более легкой компоненты при этом обозначается через  $C$ . Вдоль границ ампулы задан постоянный градиент температур, сила тяжести направлена вертикально. Концентрации компоненты  $C$  на боковых поверхностях различны, начальное



*a)*



*б)*



*в)*

Рис. 6.13. Изолинии функции тока (*a*), изотермы (*б*) и линии равной концентрации (*в*) при наличии тепловой конвекции в замкнутой плоской области, содержащей бинарную смесь;  $Gr = 100$ ;  $Pr = 0,16$ ;  $Gr_D = 0$ ;  $L/H = 4$ ;  $Pr_D = 10$ .

распределение концентрации линейно вдоль ампулы и одинаково поперек нее. Требуется определить изменение в распределении примеси при наличии конвекции в ампуле. К числу определяющих параметров задачи, рассмотренной выше, здесь добавляются еще два: диффузионное число Грасгофа  $Gr_D$  и диффузионное число Прандтля  $Pr_D$  или число Шмидта. На рис. 6.13, *a* — *в* приведены картины линий тока, а также изотермы поля температур и ли-

нии равной концентрации для стационарного режима конвекции при следующих параметрах:

$$Gr = 100, \quad Pr = 0,016, \quad Gr_D = 0, L/H = 4, \quad Pr_D = 10.$$

Эти параметры имеют место, в частности, в условиях пониженной гравитации при конвективном тепло- и массообмене в расплаве полупроводникового материала германия с примесью кремния, полностью заполняющего ампулу. Концентрационной конвекцией здесь пренебрегается, движение в ампуле обусловлено только тепловой конвекцией при малых  $g/g_0$  ( $g_0$  — ускорение силы тяжести Земли,  $g$  — ускорение в системе координат, связанной с ампулой). Начальное поле соответствует стационарному диффузионно-тепловому распределению примеси при  $Ra = Ra_D = 0$ , т. е. линейным профилям температуры и концентрации, нулевому полю скорости. В рассматриваемых ниже расчетах использована равномерная сетка  $21 \times 21$ . Как следует из рис. 6.13, а, в ампуле устанавливается сравнительно слабое одновихревое циркуляционное движение, интенсивность которого соответствует числу Рейнольдса  $Re \sim 0,6$ . Ввиду того, что коэффициент температуропроводности расплава велик ( $Pr \ll 1$ ), перенос в расплаве при этих условиях, в отличие от случая  $Pr = 1$ , рассмотренного выше в п. 6.8.1, осуществляется преимущественно путем молекулярной теплопроводности. Это следует из прямолинейного характера изотерм, показанных на рис. 6.13, б. Конвекция в этих условиях оказывает существенное влияние на распределение примеси: вместо первоначально однородного поперек ампулы распределения примеси происходит заметное ее расслоение. Такой эффект имеет важное значение, так как при последующей кристаллизации из данного расплава возможно неравномерное распределение примеси (макроликвация) поперек слитка. Отметим, что любые способы физического моделирования этого процесса в жидкостях с малым числом Прандтля (которыми являются практически лишь жидкие металлы) связаны с большими трудностями, поэтому метод математического моделирования имеет весьма важные преимущества в этом классе задач. Более полное параметрическое исследование распределения примеси позволило установить, что разность концентраций поперек ампулы достигает максимального значения в определенном диапазоне числа  $Ra$ , а также чисел  $Pr$  и  $Pr_D$  (подробнее см. [96] из списка литературы к дополнению 2).

**6.8.3. Численное моделирование переходных и турбулентных режимов конвекции.** В этом пункте мы вновь вернемся к задаче, рассмотренной в п. 6.8.1, но будем изучать ее при больших числах Грасгофа, в турбулентном режиме конвекции. При изучении турбулентных движений традиционным является представление мгновенного значения скорости (или скалярной компоненты — температуры, концентрации) в виде ее среднего значения и некоторого отклонения от среднего (пульсации). Использование такого представления в исходных нестационарных уравнениях гидродинамики, записанных относительно мгновенных значений (с учетом ряда дополнительных соотношений, известных под названием постулатов Рейнольдса) приводит к уравнениям относительно средних значений, в которых в выражение для тензора напряжений включены различные соотношения, связывающие пульсации скорости (дисперсии, корреляции скорости и т. д.) (см., например, [20], [25]). При этом осредненные уравнения оказываются незамкнутыми и одной из проблем расчета турбулентных течений является проблема замыкания — нахождения недостающих связей между характеристиками осредненного и пульсационного движений. Основным недостаток такого рода методов состоит в необходимости использования большого объема эмпирической информации, что уменьшает ценность теоретического исследования. Одним из путей для преодоления этих противоречий в разработке теории и методов расчета турбулентных течений является попытка вернуться к численному решению исходных нестационарных уравнений Навье — Стокса.

Исходными являются безразмерные уравнения Навье — Стокса для неизотермической жидкости в поле силы тяжести (приближение Буссинеска) в переменных вихрь, функция тока, температура (6.7.11) — (6.7.13). Ставится задача изучения режимов, при которых наблюдаемое в эксперименте течение турбулентно. При этом данная система не имеет стационарного решения, поэтому ищутся мгновенные значения скорости и температуры и (при последующей обработке) средние и пульсационные характеристики. Метод численного моделирования, систематически применяемый для осуществления такого подхода, включает следующие основные этапы:

1) Расчет методом сеток мгновенных значений искомых полей  $\psi(x, y, t)$ ,  $\theta(x, y, t)$ . Применяется основная разностная схема, рассмотренная в §§ 6.3—6.5, на нерав-

померной сетке, сгущающейся в пристеночной зоне с большими градиентами скорости. Предпринимаются специальные меры для оптимизации итерационного решения уравнений Пуассона, что осуществляется с помощью метода переменных направлений с выбором оптимального набора итерационных параметров или метода разделения переменных с использованием быстрого преобразования Фурье.

2) На основе предварительного анализа результатов расчета нестационарной «реализации» находится момент времени  $t_1$ , начиная с которого средние значения практически не зависят от начальных данных, и осуществляется статистическая обработка для нахождения средних характеристик на «участке осреднения»

$$\bar{u}(x, y) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(x, y, t) dt,$$

а также пульсационных характеристик

$$u' = u - \bar{u}, \sqrt{(\overline{u'})^2}, \sqrt{(\overline{v'})^2}, \overline{u'v'}, \overline{u'\theta'} \text{ и т. д.}$$

3) Осуществляется анализ эволюции крупномасштабной и тонкой структур полей течения и температуры. Значения средних полей температуры и скорости и визуальные картины течения сопоставляются с опытными данными.

Результаты конкретных расчетов иллюстрируются здесь на примере эволюции тепловой конвекции в замкнутом вертикальном слое жидкости, подогреваемом сбоку, при числе Рэлея, отнесенном к высоте слоя,  $Ra_H = Gr_H \cdot Pr = 5,25 \cdot 10^{11}$ , числе Прандтля  $Pr = 15$  и отношении сторон слоя  $H/L = 11,2$ . При этих параметрах течение, согласно опытным данным, имеет турбулентный характер, но является сравнительно медленным и низкочастотным (число Рейнольдса  $Re = u_{\max} L/\nu$  имеет порядок  $10^3$ , диапазон частот 0—10 Гц). Важную роль играет отсутствие внешних возмущений, имеющих случайный характер.

В качестве начальных условий заданы нулевые значения скорости ( $\omega^0 = \psi^0 = 0$ ) и линейный профиль температуры. Граничные условия не отличаются от тех, которые приведены для конвекции в замкнутой области на стр. 212.

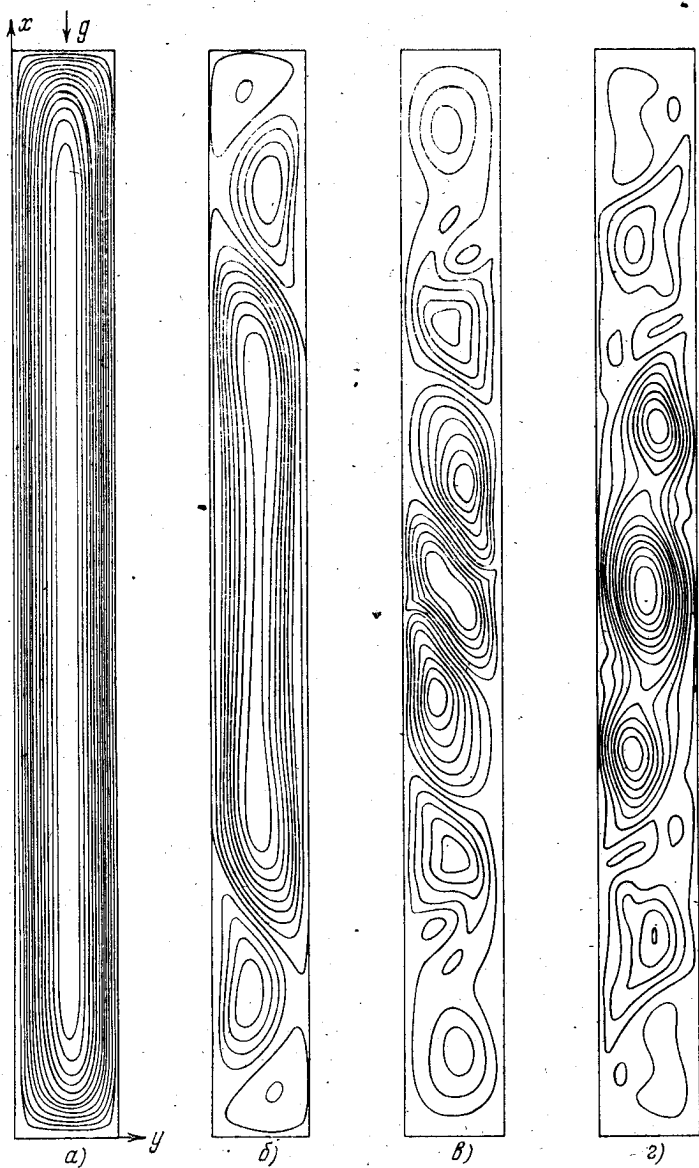


Рис. 6.14. Эволюция крупномасштабной структуры тепловой гравитационной конвекции в вертикальном слое, подогреваемом снизу, при  $Ra_H = 5,25 \cdot 10^{11}$ ;  $Pr = 15$ ;  $H/L = 11,2$ .



Рис. 6.15. Эволюция крупномасштабной структуры тепловой гравитационной конвекции (продолжение).

Расчеты выполнены на сетке  $129 \times 39$  с сильным сгущением у твердых боковых поверхностей (минимальное расстояние между узлами составляет 0,005).

На рис. 6.14 показаны мгновенные изолинии функции тока, иллюстрирующие следующие этапы развития тепловой гравитационной конвекции в вертикальном слое: а) развитие ламинарного подъемно-опускного движения

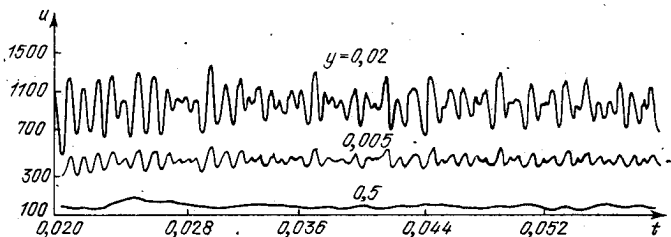


Рис. 6.16. Изменение во времени вертикальной составляющей скорости на различных расстояниях от стенки в турбулентном режиме конвекции.

при  $t = 4 \cdot 10^{-4}$ ; б, в) потеря устойчивости подъемно-опускного движения и образование регулярных вторичных структур при  $t = 1,6 \cdot 10^{-3} - 2,8 \cdot 10^{-3}$ ; г) неустойчивость и распад крупномасштабного движения в ядре при  $t = 4,4 \cdot 10^{-3}$ . Этапам а) — в) на рис. 6.15 соответствует переход к турбулентному режиму конвекции, неустойчивость

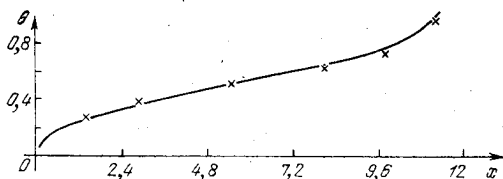


Рис. 6.17. Распределение осредненной по времени температуры в центральном сечении при  $y = 0,5$  по высоте слоя.

и распад крупномасштабного движения в ядре, возникновение неустойчивости в пристеночном пограничном слое при  $t = 8 \cdot 10^{-3} - 1,55 \cdot 10^{-2}$ ; этапу г) — турбулентный режим тепловой конвекции при  $t = 3,6 \cdot 10^{-2}$ . Возникшее в начальные моменты времени одновихревое подъемно-опускное движение с течением времени переходит в многовихревое, соответствующее ламинарному движению в слое при  $Ra = 10^7 - 10^8$ . Далее происходит дробление конвективно-



го течения в ядре и формирование пристеночных турбулентных пограничных слоев. В турбулентном режиме при  $t > t_1 = 4,4 \cdot 10^{-2}$  течение в пристеночной зоне состоит из вязкого подслоя и ряда мелких вихрей, поднимающихся вдоль одной стенки и опускающихся вдоль другой. Движение вихрей сопровождается пульсациями скорости и температуры. Изменения во времени мгновенных значений скорости в трех точках на различных расстояниях от боковой стенки в сечении  $x/L = 5,6$  даны на рис. 6.16.

Сопоставление с экспериментальными данными (см. [103] из списка литературы к дополнению 2) осредненного вертикального распределения средней температуры вдоль оси слоя  $y = L/2$  дано на рис. 6.17 (здесь сплошная линия соответствует экспериментальным значениям, а знаком  $\times$  отмечены результаты расчета). Зависимость местного числа Нуссельта  $Nu_x$  от местного числа Рэлея удовлетворительно согласуется с экспериментальной зависимостью  $Nu_x = 0,108 Ra_x^{1/3}$ . Анализ результатов и сопоставление с экспериментальными данными по основным характеристикам полей течения и температуры позволяют сделать вывод о том, что существенные черты механизма генерации пристеночной турбулентности в рассматриваемом диапазоне чисел Рэлея удовлетворительно описываются в рамках двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса. Распространение такого подхода на более широкий диапазон чисел Рэлея (Рейнольдса) и более широкие классы течений жидкости требует развития трехмерных моделей течения и преодоления связанных с этим технических и методических трудностей (см. [27], [28] из списка литературы к дополнению 2).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука, 1966. Т. 1—3.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Наука, 1972. Т. 1 и 2.
3. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1970.
4. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными.— М.: Физматгиз, 1961.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.
6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений.— М.: Физматгиз, 1959, 1960. Т. 1 и 2.
7. Самарский А. А. Введение в численные методы.— М.: Наука, 1983.
8. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1977.
9. Бахвалов Н. С. Численные методы.— М.: Наука, 1973.
10. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики.— М.: Наука, 1966.
11. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа.— М.: Наука, 1970.
12. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики.— М.: Наука, 1972.
13. Калиткин Н. Н. Численные методы.— М.: Наука, 1978.
14. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.
15. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы.— М.: Наука, 1973.
16. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.
17. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Физматгиз, 1969.
18. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1962.
19. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе И. В. Теоретическая гидромеханика.— М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
20. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Физматгиз, 1970.
21. Краснов И. Ф. Аэродинамика.— М.: Высшая школа, 1980.
22. Бай Шини. Теория струй.— М.: Физматгиз, 1960.
23. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Гостехтеориздат, 1950.

24. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкостей.— М.: ИЛ, 1962.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ОГИЗ, Гостехиздат, ГИТТЛ, 1953.
26. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов.— М.: ИЛ, 1960.
27. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики несжимаемой вязкой жидкости.— М.: Физматгиз, 1970.
28. Том А., Эйплт К. Числовые расчеты полей в технике и физике.— М.: Энергия, 1964.
29. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.— Новосибирск: Наука, 1967.
30. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене.— М.: ИЛ, 1958.
31. Кокшинская Н. С., Павлов Б. М., Пасконов В. М. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом.— М.: Изд. МГУ, 1980.

## О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В обзоре рассматриваются статьи, в которых разностные методы применяются для численного решения основных уравнений теории пограничного слоя. Эти методы получили широкое распространение в последние годы. Они были с успехом применены для расчета двумерных стационарных задач пограничного слоя и распространены впоследствии на двумерные нестационарные и трехмерные задачи. Основное внимание в обзоре уделено вопросам методики. Результаты расчетов, как правило, проводятся без обсуждения. Работы расположены с учетом общности методики и, по возможности, хронологической последовательности. Обозначения, общепринятые в теории пограничного слоя, не поясняются. В обзор не включены работы, в которых численно исследуются так называемые подобные течения и течения в окрестности точки торможения.

Разностные методы для решения уравнений пограничного слоя стали применять еще в начале 50-х годов. Первоначально некоторые авторы использовали в своих работах уравнения пограничного слоя, записанные в переменных Крокко. В этом случае в качестве независимых переменных рассматриваются  $x$  и  $u$ , а в качестве зависимых переменных — напряжение трения  $\tau$  и температура  $T$  (или энтальпия  $i$ ). В этих переменных уравнения, описывающие течение в пограничном слое для сжимаемого газа, могут быть приведены к виду

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho \mu}{\tau} \right) + \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} - \frac{dp_e}{dx} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\mu}{\tau} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1 - \text{Pr}}{\text{Pr}} \frac{\partial i}{\partial u} \tau + \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 i}{\partial u^2} + \text{Pr} \right) \tau^2 - u \rho \mu \frac{\partial i}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial i}{\partial u} + u \right) \frac{dp_e}{dx} = 0.$$

Выбор переменных Крокко оправдывался тем обстоятельством, что в этом случае область интегрирования имеет известную границу,  $u = u_e(x)$  ( $u_e(x)$  — распределение скорости во внешнем потоке).

Впервые конечно-разностный метод для решения этой системы уравнений применил Гэдд [1] (см. также [2]), который исследовал положение точки отрыва на охлажденной стенке. Нам не удалось выяснить, какая разностная схема применена в этой работе.

На начальном этапе применения разностных методов для решения задач пограничного слоя численно интегрировались

уравнения несжимаемого пограничного слоя в форме Мизеса:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{u^2 - z^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}.$$

Это уравнение записано в безразмерной форме, а  $z = u_e^2 - u^2$ ,  $\psi$  — функция тока. Однако в дальнейшем преобразования Крокко и Мизеса не нашли широкого применения при решении уравнений пограничного слоя разностными методами.

Использованию явных разностных схем для интегрирования уравнений пограничного слоя посвящены работы [3]—[9]. На этих работах не будем подробно останавливаться в связи с тем, что условия устойчивости явных схем, записанных для уравнений в физических переменных и переменных Крокко, являются весьма ограниченными. Это объясняется тем, что коэффициент при производной по  $x$  обращается в нуль на поверхности тела и в граничных узлах принимает малые значения. Явные схемы, записанные для уравнения в форме Мизеса, свободны от этого недостатка. Однако условия устойчивости остаются достаточно стеснительными и, кроме того, решение уравнения Мизеса имеет особенность на поверхности тела, что ухудшает аппроксимацию.

Из работ, в которых использовались явные разностные схемы, обратим внимание лишь на работы [10] и [58].

В работе Зайберга и Блейха [10] рассматривается течение воздуха в области, расположенной вниз по потоку от горла следа, в предположении, что в этой области можно использовать уравнения пограничного слоя. Предполагается, что воздух состоит из восьми компонент ( $O_2$ ,  $O$ ,  $N_2$ ,  $N$ ,  $NO$ ,  $NO^+$ ,  $O_2^-$ ,  $e^-$ ). При расчетах учитывались 10 различных химических реакций. Хотя ко времени появления этой работы уже нашли широкое применение неявные схемы, авторы отдали предпочтение простейшей явной схеме в связи с тем, что, как они утверждают, величина шага, необходимая для точного расчета наиболее быстрых химических реакций, например, вблизи равновесия, намного меньше, чем необходимо для устойчивости явной схемы.

Явная трехслойная схема использована также в более поздней работе [58] для расчетов неравновесного диссоциирующего воздуха в плоском ламинарном многокомпонентном пограничном слое с учетом 22-х реакций между девятью компонентами.

Указанные недостатки явных разностных схем послужили причиной создания неявных схем, свободных от ограничений устойчивости и допускающих применение различных зависимых и независимых переменных.

## § 1. Применение неявных разностных схем для расчета двумерных течений в пограничном слое

Неявную разностную схему для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое, по-видимому, впервые применил Лейх [11]. Он рассмотрел аппроксимацию уравнения движения, предложенную Хартри и Вумерсли. Если обозначить индексами 1 и 2 значения функций в сечениях  $x_1$  и  $x_2$ , то урав-

цепи движения можно аппроксимировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u_2 + u_1) \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2}(u_2' + u_1') \int_0^y \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} dy = \\ = \frac{1}{2} \left[ \left( u_e \frac{du_e}{dx} \right)_2 + \left( u_e \frac{du_e}{dx} \right)_1 \right] + \frac{1}{2}(u_2'' + u_1''). \end{aligned}$$

Штрихи здесь обозначают дифференцирование по  $y$ . Для нахождения значений скорости в сечении  $x_2$  предлагается следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} \omega_{m+1}'' - \frac{\omega_m}{x_2 - x_1} \omega_{m+1} + \frac{\omega_m'}{x_2 - x_1} \int_0^y \omega_{m+1} dy = \\ = 2p - \frac{1}{(x_2 - x_1)} \left[ 2u_1 \omega_m - \int_0^y 2u_1 dy \omega_m' \right], \end{aligned}$$

где  $\omega = u_2 + u_1$ ,  $2p = \left[ \left( u_e \frac{du_e}{dx} \right)_2 + \left( u_e \frac{du_e}{dx} \right)_1 \right]$ , а  $m$  — итерационный индекс. Заменяя производные по  $y$  центральными конечно-разностными отношениями, интеграл — по формуле трапеций (или по формуле Симпсона), используя граничные условия, можно получить систему алгебраических уравнений для определения значений  $\omega$ . Эта система решалась методом Холецкого. Предложенный итерационный процесс оказался сходящимся. Используя описанную разностную схему, автор провел расчеты вблизи точки отрыва для  $u_e = 1 - x$ .

Рулан и Остерле [12] использовали простейшую неявную схему для расчета пограничного слоя в несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} u_{j,k} \frac{u_{j+1,k} - u_{j,k}}{\Delta x} + v_{j,k} \frac{u_{j+1,k+1} - u_{j+1,k-1}}{2\Delta y} = \\ = \frac{u_{j+1,k+1} - 2u_{j+1,k} + u_{j+1,k-1}}{\Delta y^2}, \\ \frac{u_{j+1,k} - u_{j,k}}{\Delta x} + \frac{v_{j+1,k+1} - v_{j+1,k}}{\Delta y} = 0. \end{aligned}$$

Значения продольной скорости  $u$  на слое  $j+1$  находились с помощью итераций по явной формуле

$$\begin{aligned} u_{j+1,k} = \frac{1}{\frac{2}{\Delta y^2} + \frac{u_{j,k}}{\Delta x}} \left[ \left( \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{v_{j,k}}{2\Delta y} \right) u_{j+1,k-1} + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\Delta y^2} - \frac{v_{j,k}}{2\Delta y} \right) u_{j+1,k+1} + \frac{u_{j,k}^2}{\Delta x} \right], \end{aligned}$$

а значения поперечной скорости  $v$  — из разностного аналога урав-

нения неразрывности. В статье приводятся результаты расчета пограничного слоя на пористой пластине с отсосом и течения в следе за пластиной в несжимаемой жидкости.

В работе Крамера и Либерштейна [13] уравнения пограничного слоя для сжимаемого газа подвергаются сначала преобразованию Крокко, а затем преобразованию Степанова — Манглера, что приводит к системе

$$A_1 \frac{\partial^2 \tau'}{\partial u'^2} + B_1 \frac{\partial \tau'}{\partial s} + C_1 \frac{\partial i'}{\partial s} + D_1 \frac{\partial \tau'}{\partial u'} + E_1 \frac{\partial i'}{\partial u'} + F_1 = 0,$$

$$A_2 \frac{\partial^2 i'}{\partial u'^2} + B_2 \frac{\partial \tau'}{\partial s} + C_2 \frac{\partial i'}{\partial s} + D_2 \frac{\partial \tau'}{\partial u'} + E_2 \frac{\partial i'}{\partial u'} + F_2 +$$

$$+ G_2 \left( \frac{\partial \tau'}{\partial u'} \right) \left( \frac{\partial i'}{\partial u'} \right) = 0$$

относительно функций  $\tau' = \bar{\tau} (2s)^{1/2} / (r \rho_e \mu_e u_e^2)$  и  $i' = (i - i_0) / (i_e - i_0)$ . Здесь

$$s = \int_0^x r^2 \rho_e \mu_e u_e dx, \quad u' = \frac{u}{u_e}, \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

а  $r$  — радиус поперечной кривизны тела вращения. В работе применена шеститочечная двухслойная разностная схема с симметричной аппроксимацией первых и вторых производных по  $u'$ .

Произведение  $\left( \frac{\partial \tau'}{\partial u'} \right) \left( \frac{\partial i'}{\partial u'} \right)$  аппроксимировалось со вторым порядком точности на шеститочечном шаблоне следующим образом:

$$\left( \frac{\partial \tau'}{\partial u'} \right) \left( \frac{\partial i'}{\partial u'} \right) = \frac{1}{8 (\Delta u')^2} [(i'_d - i'_c) (\tau'_d - \tau'_f) + (i'_d - i'_f) (\tau'_a - \tau'_c)].$$

Полученная система алгебраических уравнений на каждом слое решалась прогонкой. В качестве примера приводятся результаты численных расчетов для двух газов, отличающихся физическими свойствами.

Ряд работ по созданию разностных методов решения уравнений пограничного слоя выполнен в Вычислительном центре Московского университета. Исследования в этом направлении ведутся с 1959 г. (см., например, [14] — [16], [26]).

Для того чтобы характеризовать возможности применения основной разностной схемы, рассмотрим некоторые работы, в которых она была использована.

В работе В. М. Пасконова и Ю. В. Полежаева [20] численно исследуется процесс неустановившегося разрушения вязкого стеклообразного материала в окрестности точки торможения. Задача описывается системой одномерных нестационарных уравнений.

В работе Т. С. Варжанской, Е. И. Обросковой и Е. Н. Старовой [21] рассматривается сжимаемый пограничный слой в окрестности плоской критической точки на пористой стенке, сквозь которую подается водород. Описанная методика применяется в этой работе для решения задачи методом установления.

Работа Т. Ф. Булатской [22] посвящена расчету многокомпонентного пограничного слоя на боковой поверхности тела. Предполагается, что воздух состоит из пяти компонент, скорости химических реакций внутри пограничного слоя пренебрежимо малы, а на поверхности тела и внешней границе слоя бесконечно большие. Задача сводится к интегрированию системы, состоящей из шести уравнений второго порядка и уравнения неразрывности. В работе предложена методика вычисления скоростей диффузии в каждой точке расчетной сетки с помощью соотношений Стефана — Максвелла, вытекающих из точной кинетической теории.

В работе В. М. Пасконова и А. Е. Якубенко [23] численно строится решение уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя на электропроводящей стенке плоского канала. В этой работе уравнения пограничного слоя записываются относительно безразмерных скорости  $u$ , температуры  $\theta$  и функции тока  $\psi$  в переменных Дородницина, которые позволили в данной ситуации значительно замедлить рост числа точек на расчетном слое. Л. Ф. Лобанова, используя такую же методику, получила решение задачи о пограничном слое на непроводящей поверхности магнитогидродинамического канала [24].

Работа Т. С. Варжанской [25] посвящена расчету течения в следе за пластинкой в потоке вязкого газа. Задача рассматривается в приближении теории пограничного слоя. В работе исследуются вопросы, касающиеся влияния задней кромки пластины и скорости выхода на асимптотическое решение.

В работе В. И. Барсукова и др. [26] рассмотрен ламинарный пограничный слой около плоской пластины, обтекаемой высокотемпературным потоком воздуха под нулевым углом атаки. При этом предполагается, что воздух находится в состоянии термодинамического и химического равновесия. Проведенные расчеты охватывают изменение температуры внешнего потока от 1000 до 15 000° К при давлении во внешнем потоке от 1 до 100 атм.

В работе В. Д. Вилецкого, В. М. Пасконова, В. И. Тараторина [17] в приближении пограничного слоя рассмотрен радиационно-конвективный теплообмен между плоской пластиной и потоком низкотемпературной воздушной плазмы. Исследование проведено в предположении, что воздух — это термодинамически и химически равновесная смесь. Излучение рассматривалось в приближении локального термодинамического равновесия. Для описания радиационного переноса тепла использовалось одномерное приближение. Это дало возможность учесть охлаждение газа в результате высвечивания только в направлении, перпендикулярном поверхности пластины. Этот алгоритм проверялся на известных автомодельных решениях для несжимаемой жидкости и сжимаемого газа.

В работе Флюгге-Лотц и Блотнера [28] описана неявная шеститочечная двухслойная схема для уравнений движения и энергии. Уравнение неразрывности аппроксимируется по четырехточечной схеме и используется для нахождения поперечной составляющей скорости  $v$  после того, как найдены продольная составляющая скорости и энтальпия на слое. При расчетах использовались уравнения пограничного слоя, записанные как в физических переменных, так и в переменных Хоурта — Дородницина. Верхняя граница пограничного слоя при расчетах в физической плоскости находилась из условия гладкого сопряжения с применением асимптотики прогоночных коэффициентов при  $y \rightarrow \infty$ . Ис-



пользуя неявные схемы, авторы провели расчеты течения сжимаемого газа в пограничном слое около плоской пластины с различными граничными условиями на стенке (постоянная температура, теплоизолированная стенка) и различными законами зависимости вязкости от температуры (линейная зависимость и формула Сатерленда). Проводилось сравнение результатов расчетов вблизи передней кромки пластины в физических и в переменных Хоуарта — Дородницына. Неявные схемы применялись авторами для расчета пограничного слоя с учетом взаимодействия с внешним потоком через толщину вытеснения.

Фаннелёп и Флюгге-Лотц применили неявную разностную схему, описанную в [28], для численного исследования течения сжимаемого газа в пограничном слое около волнообразной стенки [29].

В работе Блоттнера [30] изучается задача о течении неравновесно диссоциирующего двухатомного газа в ламинарном пограничном слое; решение, найденное методом локального подобия, сравнивается с решением, полученным численным методом с помощью неявной разностной схемы. Автор приходит к выводу, что разностным методом решение можно получить с меньшей затратой труда. В другой работе Блоттнера [31] рассматривается неравновесный пограничный слой бинарной смеси атомов и молекул при ограниченных скоростях диссоциации и рекомбинации. Конечно-разностный метод, примененный для решения системы уравнений, подобен методу, описанному в работе Флюгге-Лотц и Блоттнера [28]. Прежде чем переходить к конечным разностям, автор преобразует систему уравнений пограничного слоя по методу Манглера и Хоурта — Дородницына. Это делается для того, чтобы получить более плавное изменение параметров по толщине пограничного слоя и представить уравнение в форме, соответствующей подобным решениям. Применяемое преобразование позволяет также использовать больший шаг вдоль поверхности тела. Рассматривались следующие граничные условия на поверхности тела: условия прилипания для скоростей; поверхность с заданной температурой и теплоизолированная поверхность; каталитическая и некаталитическая стенки. Расчеты проводились для конуса и цилиндра с полусферическим носком для различных высот. Начальные профили получались из решения обыкновенных дифференциальных уравнений для критической точки. В своей следующей работе [32] Блоттнер применяет такую же разностную схему для расчета неравновесного течения ионизированного воздуха в ламинарном пограничном слое на остром конусе с полууглом при вершине  $10^\circ$ . Используется модель многокомпонентного газа, содержащего пять компонент ( $N$ ,  $O$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $NO$ ,  $NO^+$ ). При исследовании течения учитывались 11 различных химических реакций.

В работе Блоттнера [54] разностная схема Кранка — Никольсона применяется для расчета пограничного слоя на заостренном конусе и гиперболюиде. В качестве модели газа взята модель воздуха с неравновесными химическими реакциями. В этой же работе дан также достаточно большой обзор работ, в основном иностранных авторов, по разностным методам и их приложениям к решению задач пограничного слоя. В работе того же автора [55] разработана разностная схема типа Кранка — Никольсона на неравномерной сетке для решения уравнений несжимаемого пограничного слоя. В предложенной схеме для задания неоднородной сетки используется преобразование растяжения координат. Здесь

также показано, что эта разностная схема более экономична, чем схема Келлера (см. [68, 69]). Блоттнером в [56] также проведено сравнение нескольких конечно-разностных схем для решения задачи Блазиуса о ламинарном пограничном слое на пластине в несжимаемой жидкости.

В работе Лю Шень-цюаня [33] для решения уравнений пограничного слоя в несжимаемой жидкости применяется неявная несимметричная разностная схема, использующая три точки сетки на последующем слое и одну на предыдущем слое. Поперечная скорость находится из уравнения неразрывности по явной схеме. Предварительно уравнения преобразуются к параболическим координатам. В работе численно исследуется задача о течении несжимаемой жидкости в пограничном слое при наличии отсоса и вдува и при заданной скорости внешнего потока.

В работе Фибига [34] для системы уравнений несжимаемого пограничного слоя в физических переменных  $x, y$  предлагается следующая разностная схема: уравнение движения аппроксимируется по шеститочечной двухслойной схеме с различными весовыми коэффициентами для всех производных, входящих в уравнение, а уравнение неразрывности — по четырехточечной схеме первого порядка точности, причем  $v$  берется на последующем слое по  $x$ . Выписаны условия устойчивости разностной схемы для различных значений весовых коэффициентов.

Две трехслойные неявные разностные схемы рассмотрены в работе В. Г. Громова [35]. Первая схема имеет второй порядок точности относительно шагов сетки как в продольном, так и в поперечном направлениях. Все производные аппроксимируются центральными разностями. В поперечном направлении используется аппроксимация по трем точкам. Вторая схема имеет второй порядок точности относительно шага по  $x$  и четвертый порядок точности относительно шага по  $y$ . При аппроксимации производных по  $y$  используются пять точек. Коэффициенты уравнений в этих двух схемах вычисляются на среднем слое. Значения поперечной скорости  $v$  находятся также на среднем слое из уравнения неразрывности. По этим двум схемам проводились контрольные просчеты: интегрировалась система уравнений пограничного слоя для сжимаемого газа на теплоизолированной пластине. Результаты расчетов сравнивались с известным автомоделным решением.

Вторая схема была применена для расчета пограничного слоя на пористой пластине, сквозь которую вдувается водород. При применении этих трехслойных схем коэффициенты переноса и диффузионные потоки вычисляются на среднем слое один раз и не пересчитываются при последующих итерациях. Это позволяет уменьшить объем вычислений.

В другой работе В. Г. Громова [36] применена 9-точечная разностная симметричная трехслойная схема, исследованная в [35]. Система нелинейных алгебраических уравнений решалась методом Ньютона. В качестве нулевого приближения в методе Ньютона использовался результат экстраполяции по двум предыдущим слоям. При таком выборе начального приближения достаточно проводить лишь одну итерацию. С помощью этого метода были рассчитаны параметры ламинарного пограничного слоя на осесимметричном затупленном теле в смеси  $N, O, NO, O_2$  и  $N_2$  с учетом шести реакций в газовой фазе. Коэффициенты переноса и массовые диффузионные потоки рассчитывались по формулам Гирш-

фельдера. Предложенный метод применяется без изменения параметров сетки во всем диапазоне от равновесного до замороженного режимов течения. В более поздней работе того же автора [57] схема, предложенная в [36], рассматривается для случая произвольной термодимической активности пограничного слоя. Методика была применена к расчету неравновесного пограничного слоя на затупленных телах в различных газовых смесях с различными условиями на поверхности тела и в набегающем потоке.

Результаты численных расчетов неравновесных пограничных слоев в случае, когда электронная температура существенно отличается от температуры атомов и ионов, приведены в работе [59].

Денисон и Баум [37] рассмотрели в приближении теории пограничного слоя течение в донной области в следе за плохо обтекаемым телом. Использовались переменные Крокко. Для численного решения задачи была применена неявная шеститочечная симметричная разностная схема. Число узлов поперек слоя достигало 160.

В работе Шёнауэра [38] проводится решение уравнений ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости в переменных Крокко. Применяется неявная разностная схема, описание которой в статье не дается. Приводятся результаты расчетов течения Тани с распределением скорости внешнего потока  $U = 1 - x^4$  и течения в пограничном слое около кругового цилиндра при скорости внешнего потока  $U = 2 \sin \varphi$ . Точка отрыва определена при  $\varphi = 104,1^\circ$ .

В более поздней работе Шёнауэра [39] описан разностный метод решения уравнений пограничного слоя для несжимаемой жидкости. Уравнение преобразуется путем введения новых переменных  $\xi = u(x, y)/U(x)$  и  $x/L$  ( $L$  — характерная длина) к одному уравнению относительно искомой функции:

$$H \left( \xi, \frac{x}{L} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta(x)}{U(x)} \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2,$$

где

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{vA(x)}{U(x)}}, \quad A(x) = 2 \int_0^x \frac{U(x_1)}{U(x)} dx_1.$$

Для полученного нелинейного уравнения второго порядка строится неявная симметричная разностная схема и показывается ее устойчивость. В работе приводятся результаты расчетов для трех законов задания  $u(x)$ :

- 1)  $\frac{U(x)}{U_\infty} = \frac{x}{L}$  для  $0 \leq \frac{x}{L} \leq 1$  и  $\frac{U(x)}{U_\infty} = 1$  для  $1 < \frac{x}{L}$ ;
- 2)  $\frac{U(x)}{U_\infty} = 2 \sin \frac{x}{R}$  (обтекание сферы радиуса  $R$ );
- 3)  $\frac{U(x)}{U_\infty} = 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^m$  ( $0,05 \leq m \leq 100$ ).

В двух последних случаях исследуется зависимость положения точки отрыва от шагов сетки. Предположения, в которых получены уравнения пограничного слоя, как известно, нарушаются вблизи точки отрыва. Тем не менее в ряде работ делаются попыт-

ки построения методов расчета пограничных слоев с локальными зонами отрыва в рамках уравнений пограничного слоя. Так, Картер и Уорном [60] предложили метод сквозного счета для ламинарного несжимаемого пограничного слоя с отрывом конечной протяженности, используя уравнения для переноса вихря и для функции тока. В работе [61] Л. М. Симуни и Л. А. Чудовым также приведены расчеты локальных отрывных течений вязкой несжимаемой жидкости на волнистой поверхности в рамках теории пограничного слоя методом, описанным в п. 5.5.3.

В работе [62] коллективом авторов проведено численное исследование пограничного слоя в сжимаемом газе на волнистой поверхности при сверхзвуковом внешнем потоке. Предполагалось, что для рассматриваемой задачи правомерны уравнения пограничного слоя. Для исследования был применен метод установления в сочетании с неявной схемой переменных направлений.

Вопросы поведения решения уравнений сжимаемого ламинарного пограничного слоя вблизи отрыва анализируются Дэвисом и Уолкером [63] на примере расчета пограничного слоя на пластине с внешним потоком, тормозящимся по линейному закону, и для кругового цилиндра — с числом Маха внешнего потока, меньшим 0,4.

Конечно-разностная схема для уравнений несжимаемого ламинарного пограничного слоя строится в работе Смита и Клаттера [40]. Вводя безразмерную функцию тока, авторы рассматривают уравнение третьего порядка. Производная по  $x$  в этом уравнении заменяется конечно-разностным отношением по трем точкам. Краевая задача для полученного обыкновенного дифференциального уравнения по поперечному направлению разрешалась методом «пристрелки». Авторы численно исследовали поведение решения вблизи точки отрыва для замедляющегося течения Хоурта ( $u_c = 1 - x/8$ ). При измельчении шага  $\Delta x$  удавалось подойти достаточно близко к точке отрыва. Был рассчитан также пограничный слой на сфере. Положение точки отрыва было найдено с помощью экстраполяции ( $\varphi = 105.7^\circ$ ). Проводились также расчеты при наличии отсоса. В работе исследовалось поведение пограничного слоя при изменении местных граничных условий (изменение градиента скорости на внешней границе пограничного слоя). Авторы установили, что наиболее быстро профили перестраиваются у стенки и относительно медленно приближаются к предельным значениям на внешней границе пограничного слоя. Делается вывод, что пограничный слой медленно приспосабливается к изменению местных условий.

В следующей работе [41] Смит и Клаттер применили свой конечно-разностный метод для расчета сжимаемого пограничного слоя. Вводя переменные Хоурта — Дороницына и функцию тока, авторы получали систему двух уравнений: одно уравнение третьего порядка, другое — второго. Производные по  $x$  аппроксимируются по трем точкам. Авторы проводили эксперименты с записью производной по  $x$  по четырем точкам, но не получили при этом существенного повышения точности. Полученные после замены производных по  $x$  обыкновенные уравнения поперек слоя решались методом «пристрелки». На каждом слое по  $x$  проводился следующий процесс итераций: сначала решалось уравнение движения, далее — уравнение энергии, затем пересчитывались коэффициенты, зависящие от температуры, и снова интегрировалось уравнение энергии; после этого проводилось решение уравнения

движения и опять дважды решалось уравнение энергии. Проведено решение трех частных задач: обтекание затупленного 45-градусного клина потоком несжимаемой жидкости, обтекание пластины сжимаемой жидкостью при переменной температуре поверхности и расчет течения в пограничном слое на затупленном теле при наличии диссоциации.

Такой же метод был применен Смитом и Джаффом для расчета пограничного слоя в неравновесно реагирующем газе [42]. Расчеты проводились для воздуха, который рассматривался как бинарная атомно-молекулярная смесь.

В работе В. П. Замураева [43] рассматривается пограничный слой в сжимаемом газе около пластины. Предполагается, что теплопередача осуществляется не только обычной теплопроводностью, но и излучением. Относительно излучения делается ряд упрощающих предположений. Разностный метод, примененный при расчетах, сходен в основном с методами, развитыми в гл. 5.

Две разностные схемы, существенно отличающиеся от упомянутых выше, рассмотрены И. В. Петуховым. В [44] предложена неявная четырехточечная двухслойная по  $x$  схема, имеющая четвертый порядок точности относительно шага в поперечном направлении. Для уравнений второго и третьего порядков схема строится следующим образом. Вначале уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения средних арифметических значений искомой функции на двух соседних слоях по  $x$ . Затем полученное уравнение аппроксимируется схемой четвертого порядка относительно  $\Delta y$ ; при этом используются соотношения, вытекающие из дифференциального уравнения. Для нахождения значений искомой функции на полуделом слое необходимо вычислить и хранить значения ее первой и второй производных по  $y$  во всех узлах сетки. Значения функции на следующем целом слое находятся с помощью найденных значений на полуделом слое. Такая разностная схема применяется для решения уравнений сжимаемого пограничного слоя, которые сначала преобразуются путем введения функции тока и преобразования Дордоницына — Стюартсона к системе двух уравнений, одно из которых третьего порядка, а другое — второго. Расчеты проводились в обобщенных параболических координатах. В статье приводятся результаты расчетов по этой схеме двумерных течений сжимаемого газа в пограничном слое около кругового цилиндра и сферы. Схема, предложенная в [44], использовалась в расчетах [45]—[47].

В работе А. Л. Ангудинова [45] приводятся результаты расчета пограничного слоя на сферически затупленных конусах в сверхзвуковом потоке сжимаемого газа при нулевом угле атаки и постоянной температуре стенки. Отметим, что шаг сетки в поперечном направлении был неравномерный, а в области разрыва кривизны поверхности шаг сетки в продольном направлении значительно уменьшался.

С. Н. Селиверстов [46] провел расчет сжимаемого ламинарного пограничного слоя на сфере, обтекаемой азотом, с подводом гелия в качестве охладителя. Коэффициенты переноса рассчитывались по формулам Уилке.

Ламинарный пограничный слой на эллипсоидах вращения изучен в работе В. А. Башкина и Н. П. Колпина [47]. В работе выяснено влияние формы тела на теплопередачу. Применение схемы, описанной в работе [44], приводило к неправильному поведению

решения в области его резкого изменения по  $x$ . Объясняется это явление хорошо известным недостатком симметричных разностных схем, состоящим в том, что они плохо «гасят» высокочастотные возмущения.

Введение весовых множителей делает схему более устойчивой по отношению к высокочастотным возмущениям, однако из-за снижения порядка точности приходится уменьшать шаг в продольном направлении.

И. В. Петухов в работе [48] построил двухслойную схему второго порядка точности относительно  $\Delta x$ , обладающую хорошими стабилизирующими свойствами. Схема реализуется с помощью итераций. Построенная таким образом схема позволила получить гладкое решение в области больших продольных градиентов, не прибегая к измельчению шага. Приводятся результаты расчетов пограничного слоя на сферически притупленном конусе.

В работе В. В. Щенникова [49] для расчета ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе строится разностная схема, основанная на законах сохранения. Система уравнений двумерного ламинарного пограничного слоя записывается в дивергентной форме:

$$\operatorname{div} \psi_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

В плоскости  $(x, y)$  вводятся неподвижная  $(x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y)$  и полуподвижная  $(x_i' = (i + \nu)\Delta x, y_j' = (j + 1/2)\Delta y)$  сетки. Использование формулы Гаусса для элементарной площадки дает

$$\operatorname{div} \psi_k = \frac{\oint_L \psi_{kx} dy}{\Delta x \Delta y} + \frac{\oint_L \psi_{ky} dx}{\Delta x \Delta y} + \varepsilon = 0.$$

Здесь  $L$  — контур элементарной площадки;  $\psi_{kx}, \psi_{ky}$  — проекции вектора  $\psi_k$  на оси  $x$  и  $y$ . Интегралы в последнем соотношении заменяются по формуле трапеций, а производные по  $y$  — центральными разностями в точках смешанной сетки  $(x_i, y_j')$ . Построенная схема устойчива для  $1/2 \leq \nu \leq 1$  и при  $\nu = 1/2$  имеет аппроксимацию второго порядка. Эта разностная схема использовалась для интегрирования системы четырех уравнений, описывающих течение в ламинарном пограничном слое у сублимирующей сферы, состоящей из твердой углекислоты. Коротко излагается также метод получения разностной схемы с более высокой точностью аппроксимации, использующий идеи метода интегральных соотношений.

В работе Фусселя и Хеллмуса [50] уравнения пограничного слоя в сжимаемом газе с помощью преобразования Гертлера приводятся к системе двух уравнений, одно из которых третьего порядка, а другое — второго. В случае несжимаемого газа получается одно уравнение третьего порядка. Для таких уравнений построена двухслойная симметричная разностная схема. На каждом расчетном слое методом прогонки решается система алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей.

В работе Марешала и Рона [51] система уравнений сжимаемого двумерного пограничного слоя путем введения новой пере-

менной  $\eta = \sqrt{\frac{u_e}{\rho_\infty \mu_\infty u_e x}} \int_0^y \rho(y) dy$  и функции тока  $\psi$  преобра-

зается к системе двух нелинейных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $Y = f' - 1$  и  $Z = g - 1$  (где  $f =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho_{\infty} \mu_{\infty} u_{\infty} x}} \psi, \quad g = \frac{H}{H_e}, \quad H = i + \frac{u^2}{2}$$

и штрих означает производную по  $\eta$ ) с граничными условиями

$$\eta = 0, \quad Y = -1, \quad Z = \frac{i_w}{H_e} - 1,$$

$$\eta = \infty, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Заменяя производные по  $x$  разностным отношением по двум точкам, авторы получают рекуррентную систему двух обыкновенных уравнений по  $\eta$ , метод решения которой не обсуждается. Вопросы удовлетворения граничных условий на бесконечности не затрагиваются, хотя приводятся результаты расчетов вплоть до точки отрыва для обтекания цилиндра сжимаемой и несжимаемой жидкостями.

Н. В. Кривцова [52] использовала разностную схему, предложенную в работах [15, 18], для численного исследования «универсальных» функций, введенных в рассмотрение Л. Г. Лойцинским. В работе исследуется ламинарный пограничный слой в равновесно-диссоциированном газе.

В работе Виппермана [53] строится трехслойная по  $x$  разностная схема четвертого порядка точности относительно шага в поперечном направлении для уравнений сжимаемого пограничного слоя, к которым предварительно применяются преобразования Стюартсона и Крокко. Исследовано поведение решения в зависимости от числа точек на слое.

Двухслойная неявная шеститочечная разностная схема четвертого порядка точности относительно шага в поперечном направлении и второго порядка точности относительно шага в продольном направлении построена в работе А. В. Гордеева и В. М. Пасконова [64]. В отличие от схемы работы [44], для реализации данной схемы необходимо хранить в памяти только значения самой искомой функции. Метод четвертого порядка точности относительно шага в поперечном направлении построен в работе [65]. Для этого используется интерполяционный полином четвертого порядка, аппроксимирующий искомую функцию по ее значениям в трех соседних точках. Разработанный метод применен для расчета пограничного слоя с учетом тепло- и массообмена и химических превращений.

Неявный многоточечный метод высокого порядка точности для расчета двумерного ламинарного сжимаемого пограничного слоя построен в работе Грудманна [66]. Метод применен для расчета коэффициента трения вдоль лопаток радиального осевого компрессора.

В работе С. В. Русакова [67] дан обобщенный подход к построению целого класса схем повышенного порядка точности, базирующихся на сплайн-интерполяции. Расчеты проведены на модельной задаче для линейного уравнения Бюргерса.

Келлером и Цебес в работах [68], [69] предложен метод для решения задач ламинарного и турбулентного пограничных слоев. В этом методе исходные уравнения для несжимаемого погранич-

ного слоя сводятся к системе уравнений первого порядка. Полученная система аппроксимируется на четырехточечном шаблоне центральными разностями. Разностная сетка поперек слоя может выбираться существенно неравномерной. Для решения нелинейной системы разностных уравнений используются итерации, а линейные системы уравнений решаются с помощью блочного метода.

## § 2. Применение разностных схем для расчета двумерных нестационарных течений в пограничном слое

Число работ по применению разностных методов для расчета нестационарных двумерных течений в пограничном слое сравнительно невелико. Методика и результаты расчетов работ [70], [71] были изложены в § 5.4 и п. 5.5.5.

В работе Фарна и Арпачи [72] строится явная двухслойная по времени разностная схема для системы уравнений нестационарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Производная по времени аппроксимируется по двум точкам, а пространственные производные — симметричным образом по трем точкам на предыдущем временном слое. Уравнение неразрывности служит для нахождения поперечной составляющей скорости и аппроксимируется обычным образом по четырехточечной схеме. В работе приводится условие устойчивости схемы. В качестве примера рассматривается течение, нестационарный характер которого вызывается колебаниями внешнего потока  $U_0 = 1 + \Delta U_0 \sin \omega t$ , где  $\omega = \omega \mu / U^2$ , а  $\omega$  — безразмерная частота,  $\Delta U_0$  — безразмерная амплитуда скорости во внешнем потоке. Численно исследованы различные режимы колебаний.

В работе О. А. Олейник [73] предложены две схемы для численного решения нестационарных уравнений пограничного слоя в несжимаемой жидкости (явная и неявная). С помощью преобразования Крокко система уравнений сводится к одному уравнению второго порядка относительно  $w = \partial u / \partial y$ . Для полученного уравнения строится явная двухслойная по времени схема, в которой пространственные производные поперек слоя аппроксимируются на предыдущем временном слое центральными разностями, а производные по продольному направлению — разностями «вперед». Неявная схема использует для аппроксимации производных аналогичный шаблон точек на следующем временном слое. Доказана сходимость схем в предположении существования гладкого решения системы уравнений нестационарного слоя (существование такого решения доказано в других работах О. А. Олейник). Расчеты по этим схемам не проводились. В работе Цebesи [74] с помощью неявной разностной схемы получены результаты расчетов плоского нестационарного ламинарного и турбулентного пограничных слоев несжимаемой жидкости на пластине при пульсациях скорости внешнего потока. В работе [75] разностная схема применена для численного исследования нестационарного ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе на стенке ударной трубы, когда скорость внешнего потока и температура стенки зависят от времени.



### § 3. Применение разностных схем для расчета трехмерных течений в пограничном слое

Разностный метод для расчета трехмерных течений в пограничном слое, по-видимому, впервые применили Дер и Раецц [76]. Общие уравнения пространственного пограничного слоя авторы приводят к системе трех уравнений относительно температуры, коэффициента местного трения и поперечной составляющей скорости. Уравнения аппроксимируются с помощью трехслойной симметричной явной разностной схемы. Профили в окрестности критической линии находились из соответствующих уравнений с помощью итераций. В работе приводятся результаты численного расчета ламинарного пограничного слоя на стреловидном крыле и трехосном эллипсоиде при заданном законе отсасывания.

Решению трехмерных задач пограничного слоя посвящены две работы Н. Д. Введенской [77], [78]. В первой из этих работ проведен расчет пограничного слоя на бесконечном круговом конусе, обтекаемом под углом атаки. Как известно, в этом случае число независимых переменных может быть понижено до двух. Для расчетов была применена конечно-разностная схема, близкая к схеме, описанной в [48]. При малых углах атаки получено гладкое решение задачи во всей области, вплоть до линии стекания на подветренной стороне конуса. При углах атаки  $\alpha \geq 2^\circ 30'$ , при угле полураствора конуса  $\beta = 10^\circ$  и для  $\alpha \geq 5^\circ$  при  $\beta = 20^\circ$  автору не удалось получить гладкого решения в окрестности линии стекания. В статье указывается характер особенности, возникающий у решения на подветренной стороне конуса. Другая работа Н. В. Введенской [78] посвящена расчету ламинарного пограничного слоя, возникающего при стационарном обтекании под углом атаки затупленного конуса. Решение в критической точке находилось путем интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Затем рассчитывались параметры пограничного слоя на сферической части поверхности. После этого приводился расчет пограничного слоя на конической поверхности с использованием трехмерных уравнений. Трехмерные уравнения аппроксимировались неявной разностной схемой, сходной со схемой, описанной в [54]. При построении разностной схемы учитывалось также направление линий тока внешнего течения. В рассчитанных примерах угол атаки был не слишком велик и отрыв пограничного слоя не наблюдался. В работе показано, что гладкое решение задачи существует лишь в окрестности затупленной сферической части тела, а вдали от нее на подветренной стороне имеется особенность решения такого же характера, как и в [77].

Численному расчету пространственного пограничного слоя посвящены работы Ю. Д. Шевелева [79] и [80]. В работе [79] дан разностный метод расчета пространственного пограничного слоя в несжимаемой жидкости около произвольного тела двоякой кривизны. Уравнения пространственного пограничного слоя, записанные в произвольной криволинейной системе координат, нормально связанной с поверхностью, с помощью переменных, напоминающих автомодельные, сводятся к виду, который позволяет рассчитать течение в пограничном слое вплоть до «линии отрыва». Решение, полученное в критической точке, служит начальными данными для расчета параметров на линии растекания. Пользуясь данными на линии растекания и в критической точке, можно последовательно построить решение во всей области. При этом

в процессе расчета шаги сетки выбираются с учетом поведения линий тока внутри пограничного слоя. В качестве примеров рассмотрены течения в пограничном слое на эллипсоидах вращения под углом атаки и трехосных эллипсоидах. Позднее автором получены результаты для произвольных эллипсоидов под углом атаки и найдены «линии отрыва» при широком изменении диапазона соотношения сторон и углов атаки ( $\alpha = 0^\circ - 90^\circ$ ).

В работе [80] система уравнений пространственного пограничного слоя в сжимаемом газе, записанная в системе координат, нормально связанной с поверхностью, с помощью преобразования Дордницына приведена к виду, напоминающему случай несжимаемой жидкости. По схеме работы [79] найдены величины сопротивления трения и потока тепла для эллипсоидов вращения с соотношением полуосей 1 : 1, 5 : 1,5 под углом атаки ( $\alpha = 10^\circ, 15^\circ$ ).

В монографии Ю. Д. Шевелова [81] приведены неявные разностные схемы для расчета пространственного пограничного слоя для несжимаемой жидкости и сжимаемого газа и обобщены результаты многочисленных расчетов. Отметим также результаты расчетов пространственных пограничных слоев на затупленных телах, полученные разностными методами в работах [82], [83].

Неявный разностный метод для расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя предложен в работе [84]. При аппроксимации производных по координате ортогональной поверхности используются центральные разности, а при аппроксимации трансверсальных производных учитывается направление вторичных течений в пограничном слое. Метод применен для расчета пограничного слоя на вращающемся конусе в сверхзвуковом потоке под углом атаки. Харрисом и Моррисом использована неявная разностная схема для расчета пространственного ламинарного и турбулентного пограничных слоев на круговом конусе в сверхзвуковом потоке под углом атаки [85].

В работе Крауса [86] строится неявная разностная схема с многоточечной аппроксимацией в направлении, нормальном к стенке. Для расчетов рекомендуется схема четвертого порядка относительно шага сетки в этом направлении.

## Литература к дополнению 1

1. Gadd G. E. The numerical integration of the laminar boundary layer equations with reference to the position of separation when the wall is cooled.—Aeronautical Research Council Papers, 1952, p. 312.
2. Morduchow M. Review of theoretical investigations on effect of heat transfer on laminar separation.—AIAA Journ., 1965, 3, № 8. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1965, 3, № 8.]
3. Флюгге-Лотц И. Разностный метод расчета ламинарного сжимаемого пограничного слоя.—В кн.: Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи.—М.—Л.: Госэнергоиздат, 1960.
4. Baxter D. C., Flügge-Lotz I. The solution of compressible laminar boundary layer problems by a finite difference method, Part II. Further discussion of the method and computation of examples.—Tech. Rep. № 110, Division of Eng. Mech., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1957.

5. Baxter D. C., Flügge-Lotz I. Compressible laminar boundary layer behavior studied by a finite difference method.—ZAMP, 1958, 9B, № 5—6.
6. Moran I. P., Scott P. B. A mass-transfer finite-difference formulation employing Crocco variables I.—Aero/Space Sci., 1961, 28, № 9.
7. Mitchell A. R., Thomson I. V. Finite difference methods of solution of the von Mises boundary layer equation with special reference to conditions near a singularity.—ZAMP, 1958, 9, № 4. [Русский перевод: Механика, 1959, № 4.]
8. Дышко А. Л. Решение уравнения Мизеса теории пограничного слоя.—Вычислительная математика, 1961, № 7.
9. Wu I. C. On the finite difference solution of laminar boundary layer problems.—Proc. 1961, Heat. Transfer and Fluid Mech. Inst., Stanford, Calif., 1961.
10. Zeiberg S. L., Bleich G. D. Finite-difference calculation of hypersonic waves.—AIAA Journ., 1964, 2, № 8 [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1964, 2, № 8.]
11. Leigh D. C. F. The laminar Boundary-layer equation method of solution by means of an automatic computer.—Proc. of the Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 2.
12. Roulean W. T., Osterle J. F. The application of finite difference methods to boundary layer type flows.—JAS, 1955, 22, № 4.
13. Kramer R. F., Liberstein H. M. Numerical Solution of boundary layer equations without similarity assumptions.—JAS, 1959, 26, № 8.
14. Петров Г. И. Пограничный слой и теплообмен при больших скоростях.—В кн.: Труды Всес. съезда по теор. и прикл. механ., 1960.—М.—Л.: Изд. АН СССР, 1962.
15. Пасконов В. М., Чудов Л. А. Разностный метод решения задач пограничного слоя.—В кн.: 2-й Всес. съезд по теор. и прикл. механ.—М., 1964.
16. Пасконов В. М., Чудов Л. А. Работы по численному решению задач пограничного слоя, выполненные в ВЦ МГУ.—Изв. СО АН СССР. Сер. Техн. наук. 1967, вып. 3.
17. Виленский В. Д., Пасконов В. М., Тараторин В. И. Радиационно-конвективный теплообмен между плоской пластиной и потоком низкотемпературной воздушной плазмы.—В кн.: Вычисл. методы и программир., вып. XXIII.—М.: Изд. МГУ, 1974.
18. Пасконов В. М. Стандартная программа для решения уравнений пограничного слоя.—В кн.: Численные методы в газовой динамике, вып. II.—М.: Изд. МГУ, 1963.
19. Пасконов В. М., Сопруненко И. П. Пограничный слой на слабоволнистой стенке.—В кн.: Численные методы в газовой динамике, вып. II.—М.: Изд. МГУ, 1963.
20. Пасконов В. М., Полежаев Ю. В. Нестационарное плавление вязкого материала в окрестности точки торможения.—В кн.: Численные методы в газовой динамике, вып. II.—М.: Изд. МГУ, 1963.
21. Варжанская Т. С., Оброскова Е. И., Старова Е. Н. Пограничный слой в окрестности критической точки.—В кн.: Численные методы в газовой динамике, вып. II.—М.: Изд. МГУ, 1963.

22. Булатская Т. Ф. Ламинарный пограничный слой в многокомпонентной смеси газов на боковой поверхности тела.— В кн.: Численные методы в газовой динамике, вып. IV.— М.: Изд. МГУ, 1965.
23. Пасконов В. М., Якубенко А. Е. Расчет пограничного слоя на электропроводящей стенке плоского канала.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1966, № 3.
24. Лобанова Л. Ф. Численное решение задачи о пограничном слое на проводящей поверхности магнитогидродинамического канала.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1967, № 2.
25. Варжанская Т. С. Пограничный слой на продольно обтекаемой пластине и ламинарный след за пластиной.— В кн.: Вычисл. методы и программир., вып. VII.— М.: Изд. МГУ, 1967.
26. Барсуков В. И., Виленский В. Д., Пасконов В. М., Тараторин В. П. Ламинарный пограничный слой в равновесной воздушной плазме.— В кн.: Вычисл. методы и программир., вып. XIX.— М.: Изд. МГУ, 1972.
27. Пасконов В. М. Обо одном алгоритме для решения задач пограничного слоя.— В кн.: Вычисл. методы и программир., вып. VII.— М.: Изд. МГУ, 1967.
28. Flügge-Lotz I., Blottner F. G. Computation of the compressible laminar boundary layer flow including displacement thickness interaction using finite difference methods.— Stanford University Tech. Rept., 1962, № 131.
29. Fannelöp T., Flügge-Lotz I. The laminar compressible boundary layer along a wave-shaped wall.— Ingr.-Arch., 1963, 33, № 1.
30. Blottner F. G. Similar and nonsimilar solution of the nonequilibrium laminar boundary layer.— AIAA Journ., 1963, 1, № 9. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1963, 1, № 9.]
31. Blottner F. G. Chemical nonequilibrium boundary layer.— AIAA Journ., 1964, 2, № 2. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1964, 2, № 2.]
32. Blottner F. G. Nonequilibrium laminar boundary-layer flow of ionized air.— AIAA Journ., 1964, 2, № 11. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1964, 2, № 2.]
33. Лю Шень-цюань. Расчет ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости при наличии отсоса и вдува.— ЖВМ и МФ, 1962, 2, № 4.
34. Fibig M. Über ein stabiles schnellarbeitends implizides Differenzenverfahren zur Berechnung laminar Grenzschichten.— ZAMM, 1962, 42, Sonderheft.
35. Громов В. Г. Применение трехслойной разностной схемы для решения уравнений пограничного слоя.— Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение, 1963, № 5.
36. Громов В. Г. Химически неравновесный ламинарный пограничный слой в диссоциированном воздухе.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1966, № 2.
37. Denison M. R., Baum E. Compressible free shear layer with finite initial thickness.— AIAA Journ., 1963, 1, № 2.
38. Schönauer W. Ein Differenzenverfahren zur Lösung der croccschen Grenzschichtgleichung für laminar incompressible Strömung.— ZAMM, 1962, 2, Sonderheft.

39. Schönauer W. Ein Differenzenverfahren zur Lösung der Grenzschichtgleichung für Stationäre laminar incompressible Strömung.— Ingr.— Arch., 1964, 33, № 3.
40. Smith A. M. O., Clutter D. W. Solution of the incompressible laminar boundary-layer equations.— AIAA Journ., 1963, 1, № 9. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1963, 1, № 9.]
41. Smith A. M. O., Clutter D. W. Solution of the incompressible laminar boundary-layer equations.— AIAA Journ., 1965, 3, № 4. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1965, 3, № 4.]
42. Smith A. M. O., Jáffe N. A. General method for solving the laminar nonequilibrium boundary-layer equations of a dissociating gas.— AIAA Journ., 1966, 4, № 4. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1966, 4, № 4.]
43. Замураев В. П. Ламинарный пограничный слой в излучающе-поглощающем газе около плоской пластины.— Журн. прикл. механ. и техн. физ., 1964, № 3.
44. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое.— В кн.: Численные методы решения дифф. и интерп. уравнений и квадратурные формулы. Дополнение к ЖВМ и МФ, 1964, 4.
45. Анкудинов А. Л. Результаты расчета пограничного слоя на затупленных конусах в сверхзвуковом потоке.— ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 5.
46. Селиверстов С. Н. Расчет ламинарного пограничного слоя на сфере с подводом гелия в качестве охладителя.— Ишж. журн., 1965, 5, № 4.
47. Башкин В. А., Колина Н. П. Ламинарный пограничный слой на эллипсоидах вращения.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1966, № 6.
48. Петухов И. В. Об одной схеме разностной аппроксимации для численного решения уравнений параболического типа.— ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 6.
49. Щенников В. В. Расчет ламинарного пограничного слоя вдоль образующей сублимирующего тела вращения.— ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 1.
50. Fussell D. D., Hellums I. D. The numerical solution of boundary-layer problems.— A. I. Ch. E. Journ., 1965, 11, № 4.
51. Le Maréchal Tanguy, Ronat Jean. Une methode de resolution numerique des equations de la couche limite laminaire compressible bidimensionnelle.— C. r. Acad. Sci., 1966, AB262, № 9, A512 — A515.
52. Кривцова Н. В. Ламинарный пограничный слой в равновесно-диссоциированном газе при произвольном распределении внешней скорости.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1966, № 5.
53. Wippermann H. W. Ein Differenzenverfahren zur Lösung der Stewartson-Crocco-Gleichungen für kompressible laminar Grenzschichten.— ZAMM, 1966, 46, Sonderheft.
54. Blottner F. G. Finite difference methods of solution of boundary layer equations.— AIAA Journ., 1970, 8, № 2. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1970, 8, № 2.]
55. Блоттнер Ф. Дж. Разностная схема с неравномерной сеткой для расчета турбулентных пограничных слоев.— В кн.:

- Механика. Новое в зарубежной науке, № 14. Численное решение задач гидромеханики.— М.: Мир, 1977.
56. Blottner F. G. Investigation of some finite-difference techniques for solving the boundary layer equations.— *Comput. Meth. Appl. and Eng.*, 1975, 6, № 1.
  57. Громов В. Г. Расчет ламинарного пограничного слоя при наличии неравновесных химических реакций.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. I. Течения в пограничном слое.— М.: Изд. МГУ, 1971.
  58. Oyegbesan A. O., Algermissen J. Nonequilibrium laminar boundary-layer flow of dissociating air.— *Acta astronaut.*, 1976, 3, № 5—6.
  59. Нонме Hiroaki, Комиго Hiroaki. A numerical approach the ionized nonequilibrium boundary layers.— *AIAA Journ.*, 1976, 14, № 7. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика. 1976, 14, № 7.]
  60. Carter J. E., Wornom S. F. Forward marching procedure for separated boundary-layer flows.— *AIAA Journ.*, 1975, 13, № 8. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1975, 13, № 7.]
  61. Симуни Л. М., Чудов Л. А. Численное исследование вязкой жидкости в удлиненных областях.— В кн.: Численные методы и их реализация на ЭВМ.— Иваново: Изд. ИВГУ, 1978.
  62. Polak A., Werle M. J., Vasta V. N., Bertke S. D. Numerical study of separated laminar boundary layer over multiple sine-wave protuberances.— *J. Spacecraft and Rockets*, 1976, 13, № 3.
  63. Davies T., Walker G. On solution of the compressible laminar boundary-layer equations and their behaviour near separation.— *J. Fluid. Mech.*, 1977, 80, № 2.
  64. Гордеев А. В., Пасконов В. М. Разностная схема повышенного порядка точности для интегрирования уравнений пограничного слоя.— В кн.: Вычисл. методы и программир., вып. XV.— М.: Изд. МГУ, 1970.
  65. Peters N. Boundary layer calculation by a Hermitian finite difference method.— *Lect. Notes Phys.*, 1975, № 35.
  66. Grudmann R. Two-dimensional laminar compressible boundary-layer calculations in turbomachines.— *AIAA Journ.*, 1977, 15, № 7. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1977, 15, № 7.]
  67. Русаков С. В. О некотором классе схем повышенного порядка точности по пространственным переменным.— В кн.: Численные методы в аэродинамике.— М.: Изд. МГУ, 1980.
  68. Keller H. B., Cebeci T. Accurate numerical methods for boundary-layer flow, I: Two-dimensional laminar flows.— *Lect. Notes Phys.*, 1971, № 8.
  69. Keller H. B., Cebeci T. Accurate numerical methods for boundary layer flow, II: Two-dimensional turbulent flow.— *AIAA Journ.*, 1972, 10, № 9.
  70. Пасконов В. М. Нестационарные задачи двумерного пограничного слоя.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. I. Течения в пограничном слое.— М.: Изд. МГУ, 1971.
  71. Пасконов В. М. Численное решение нестационарных уравнений пограничного слоя.— В кн.: Вычисл. методы и программир., вып. XI.— М.: Изд. МГУ, 1968.

72. Farn C. L., Agrasi V. S. On the numerical of unsteady, laminar boundary layers.—AIAA Journ., 1976, 4, № 4. [Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1966, 4, № 4.]
73. Олейник О. А. О решении системы уравнений Прандтля методом конечных разностей.—Прикл. матем. и механ., 1967, 31, вып. 1.
74. Sebeci T. Calculation of unsteady two-dimensional laminar and turbulent boundary-layers with fluctuations in external velocity—Proc. Roy. Soc. London, 1977, A355, № 1681.
75. Zeitoun D., Imbert M. Méthode numérique de détermination de la limite instationnaire associée à un écoulement extérieur non uniforme: application au tube à choc.—J. mécs., 1977, 16, № 1.
76. Der I., Raetz G. S. Solution of general three-dimensional laminar boundary-layer problems by an exact numerical method.—IAS Paper, 1962, № 70.
77. Введенская Н. Д. Расчет пограничного слоя, возникающего при обтекании конуса под углом атаки.—ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 2.
78. Введенская Н. Д. О трехмерном ламинарном пограничном слое на затупленном теле.—Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1966, № 5.
79. Шевелев Ю. Д. Численный расчет пространственного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.—Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1966, № 5.
80. Шевелев Ю. Д. Численное исследование пространственного пограничного слоя в сжимаемом газе.—Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1967, № 4.
81. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя.—М.: Наука, 1977.
82. Blottner F. G., Ellis A. Finite-difference solution of the incompressible three-dimensional boundary layer equation for a blunt body.—Comput. and Fluids, 1973, 1, № 2.
83. Андреев Г. Н., Бурдельный А. К., Миносцев В. Б., Савинов К. Г. Исследование пространственного обтекания затупленных тел с учетом вязкости в рамках теории пограничного слоя.—В кн.: Научные труды Института механики МГУ, 1975, № 41.
84. Dwyer H. A., Sanders B. R. A physically optimum difference scheme for three-dimensional boundary-layers.—Lect. Notes Phys., 1975, 35.
85. Harris J. E., Morris D. J. Solution of the three-dimensional compressible, laminar, and turbulent boundary-layer equations with comparisons to experimental data.—Lect. Notes Phys., 1975, 35.
86. Krause E. Recent developments of finite-difference approximations for boundary-layer equations.—Lect. Notes Phys., 1975, 41.

**О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА**

В гл. 6 подробно рассмотрена лишь одна разностная схема для двумерных уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости и приведены некоторые примеры ее применения. Ниже приводятся дополнительные замечания, поясняющие историю и современное состояние развития разностных схем для этого класса задач и их приложений.

Первые численные решения стационарных уравнений Навье — Стокса при малых числах Рейнольдса были получены еще в довоенные годы в работах Тома, использовавшего при ручном счете простейшие явные аппроксимации стационарных уравнений и метод релаксации [1], [2]. Одними из первых работ, выполненных на электронно-вычислительных машинах в послевоенные годы, были работы [3], [4], в которых использовались явные схемы при числах Рейнольдса около 100. Конструкции этих схем нашли отражение при предварительном рассмотрении разностных схем в § 6.2 (см. (6.2.4) — (6.2.6)).

Содержание приводимого ниже обзора составляют последующие работы, ориентированные на расчеты при больших числах Рейнольдса (Рэлея). Обзор не претендует на полный охват всех работ. Дополнением к нему могут служить также опубликованные ранее обзоры различных авторов [5] — [10].

**§ 1. Основная схема**

Простейший вариант основной схемы, рассматривавшийся в §§ 6.3—6.5, применялся для решения задач о течении однородной несжимаемой жидкости в работах Т. В. Кусковой [6]. Использовались симметричная аппроксимация на равномерной сетке и граничные условия типа (6.5.6), (6.5.7). В специальных методических расчетах получено, что основной причиной неустойчивости этой схемы являются приближенные граничные условия для вихря. Этот вариант схемы применялся в работе [6] для решения внутренних и внешних стационарных задач однородной изотермической жидкости (и отчасти задач конвекции в [10]). В дальнейшем близкий вариант этой схемы широко использовался в работах [11] — [13] для решения нестационарных задач конвекции. Успех расчетов по схемам этого типа в значительной степени определяется правильным выбором сеточных параметров, которые зависят также и от конкретной задачи (класса задач), и от значений критериев подобия. Наиболее полно методические эксперименты на этом этапе выполнены в работах [6], [11]. Отметим также ряд



других работ, в которых исследовались варианты схемы, близкие к этой схеме. Это работа [14], где для улучшения сходимости применялась релаксация граничных условий, а также работы [15], [16]. Численные эксперименты с различными типами разностных схем, включая варианты основной схемы для задач конвекции, выполнены также в работах [10], [17], однако в этих работах еще не нашли отражение усовершенствования расчета граничных условий для вихря. Усовершенствования заключались в применении монотонной аппроксимации второго порядка, использовании варианта расчета граничных условий (6.5.11), (6.5.12) и т. д. Близкие варианты схемы применялись в работах [22]—[26], в ряде из которых [22], [23] выполнены сопоставления с другими схемами.

Основная схема, изложенная в §§ 6.3—6.5, сформировалась в результате еще одного цикла методических работ, предпринятого в связи с численной реализацией переходных и турбулентных режимов конвекции [27], [28]. Использовались неравномерные сетки, оптимизация решения уравнения Пуассона. Распространение этой схемы на случай неоднородной жидкости (уравнения Буссинеска в бинарной смеси) наряду с изложением комплекса программ дано в [29].

Различные типы приближенных граничных условий для вихря исследованы Е. Л. Таруниным [30], [31]. Им реализована также схема расчета уравнений Навье—Стокса на последовательности сеток [32]. Вариант аппроксимации граничных условий для вихря, близкий к рассмотренному в п. 6.5.2 для стационарного режима, использовался независимо в работе [33]. Аппроксимация граничных условий для нестационарного случая предложена и апробирована в работах [28], [34]. Результаты тестов разностных схем с учетом модификаций граничных условий для вихря даны в [35]. Отметим, что применение основной схемы оказалось эффективным также для модели фильтрации неизотермической жидкости в пористой среде [36].

## § 2. Другие схемы для уравнений в переменных вихрь, функция тока

**2.1. Аппроксимации граничных условий для вихря.** Кроме рассмотренных в § 6.5, рядом авторов испытывались и другие аппроксимации граничных условий для вихря. В работе А. А. Дородницына и Н. А. Меллер [37] предложен итерационный способ, в котором значение вихря на границе связано с производной от функции тока по нормали:

$$\frac{\partial \omega_{\Gamma}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad (1)$$

или

$$\omega_{\Gamma}^{n+1} = \omega_{\Gamma}^n + \sigma \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{\Gamma}. \quad (2)$$

Эта формула может рассматриваться как применение метода последовательных приближений для решения функционального уравнения для вихря  $F(\omega_{\Gamma}) = (\partial \psi / \partial n)_{\Gamma} = 0$ . Граничный итерацион-

ный параметр в общем случае является оператором произвольного вида, выбор которого связан с обеспечением наилучшей сходимости (в работе [37] используется несколько другая интерпретация граничного условия (1), основанная на введении малого параметра в граничные условия). Очевидно, что на этапе установления формулы (1), (2) допускают «рассогласование» вихря и функции тока в связи с тем, что условие «прилипания»  $\partial\psi/\partial n = 0$  не выполняется. Поэтому успех в применении этого метода зависит от правильного выбора итерационного параметра  $\sigma$ . Близкий по форме итерационный процесс предложен в работе [38], где оптимальное значение найдено в результате анализа модельного уравнения (см. также [30], [31]). Модификация метода, более подробный анализ сходимости и определение  $\sigma$  в ряде задач выполнены Э. Н. Сарминим [39]. В недавней работе [40] предложена двухпараметрическая формула для аппроксимации граничного условия вихря и показана эквивалентность итерационных процедур [31], [37], [40].

В работах К. И. Бабенко и Н. Д. Введенской [41] предложен подход к решению уравнений Навье — Стокса в переменных вихрь, функция тока, при котором решение «линеаризованной» разностной схемы для основной задачи (6.1.15), (6.1.16) сводится к решению задачи Дирихле с некоторым интегральным граничным условием. В работе [31] указана связь этого метода с другими методами расчета граничных условий при наличии внутренних итераций.

**2.2. Неявные схемы для уравнений в переменных вихрь, функция тока.** Способ аппроксимации граничных условий для вихря имеет существенное значение лишь для схем, в которых уравнения вихря и функции тока решаются раздельно. Возникающие при этом ограничения на устойчивость могут приводить к снижению эффективности рассмотренных выше схем при расчете медленно изменяющихся во времени процессов. Поэтому поиски абсолютно устойчивых схем (аналогичных неявным схемам для уравнения теплопроводности или диффузии) актуальны. Однако в реализации таких схем имеются трудности, связанные с увеличением объема оперативной памяти, увеличением числа операций на слое и др.

Одна из первых попыток использования неявных схем для уравнения четвертого порядка (6.1.21) предпринята в [42]. Построена неявная схема, для решения которой использовался метод матричной прогонки; при этом необходимо обращать матрицы с числом элементов, соответствующим числу узлов разностной сетки, так как коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в формулах, аналогичных формулам (6.3.5)—(6.3.7), являются матрицами. Реализация такого подхода в работе [42] для задачи о течении несжимаемой жидкости в канале под действием магнитного поля не дала преимуществ в сравнении со схемами на основе метода переменных направлений со скалярными прогонками. Более перспективной представляется неявная конструкция схемы (6.2.9), (6.2.10), в которой ищется вектор  $\Phi = (\omega, \varphi)$ . Это приводит для случая однородной изотермической жидкости к векторным прогонкам с матрицами второго порядка. Такая схема в сочетании с методом переменных направлений применена в работе [16] для решения стационарной задачи о течении на начальном участке плоского канала. Полученный результат не был обнадеживающим, несмотря на абсолютную устойчивость схемы; для решения стационарной задачи

(сетка  $21 \times 21$ ) требовалось довольно большое число (около 120) итераций системы уравнений вихрь, функция тока, что не давало преимуществ по сравнению со схемами, в которых осуществляются отдельные итерации уравнений для вихря и функции тока. Возможно, что это связано с трудностями выбора итерационных параметров (заметим, что теория оптимизации итерационных параметров для решения методом переменных направлений подобной нелинейной векторной системы не разработана).

В работе О. С. Мажоровой и Ю. П. Попова [43] предпринята новая попытка реализовать идею матричного алгоритма для уравнений несжимаемой жидкости в переменных вихрь, функция тока. В отличие от [16], для решения системы матричных двумерных уравнений применялся не метод переменных направлений, а другой итерационный метод, предложенный в [44] и, по-видимому, более эффективный для систем такого типа. Разностная схема [43] отличалась от [16] и [42] также рядом других особенностей, в частности, использовались специальный сеточный шаблон и метод Ньютона для решения линейризованных уравнений на слое. Авторам удалось не только получить абсолютно устойчивую схему, но и существенно сократить число итераций на слое. Однако для применения этого метода требуется использование ЭВМ с большой оперативной памятью для хранения промежуточной информации. Недостатком является также большое число арифметических операций на слое. Тем не менее этот класс схем представляет интерес в связи с перспективами использования многопроцессорных ЭВМ с большой оперативной памятью.

**2.3. Явные схемы и схемы повышенной точности. Консервативные схемы.** Благодаря простоте реализации, минимальным затратам оперативной памяти и минимальному числу операций на слое явные схемы, как указывалось выше, были исторически первым классом схем, которые применялись для решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости [1] — [4]. Более подробный обзор использования явных схем дан в [5], [10]. Мы остановимся на некоторых схемах, применявшихся в последние годы.

Явные схемы первого порядка точности для стационарных уравнений, построенные на законах сохранения, изложены в книге [7]. Опыт их использования показал, что при больших числах Рейнольдса (Рэлея) точность недостаточна: существенную роль приобретают эффекты схемной вязкости. С другой стороны, существенны ограничения, связанные с предположением о стационарности процесса. Явные схемы второго порядка точности применялись в ряде работ Е. Л. Тарунина [10], [35] для задач конвекции при не слишком больших числах Рэлея, включая нестационарные задачи. Эффективность этих схем существенно повышена автоматическим выбором временного шага в соответствии с условием устойчивости схемы. Следует заметить, что по временным затратам явные схемы упомянутого класса на сетках  $h \sim 0,05$  соответствуют схемам на основе метода переменных направлений при использовании приближенных граничных условий для вихря типа (6.5.6), (6.5.7). Усовершенствование расчета граничных условий для вихря, использование подробных и неравномерных сеток, оптимизация решения уравнения Пуассона привели к вытеснению явных схем. Анализ явных и неявных схем, проводившийся в работе [20], показал, что явные схемы по затратам времени ЭВМ приближаются к неявным схемам того же порядка точности лишь

в тех случаях, когда разностное число Рейнольдса велико ( $Re_h \gg 1$ ), т. е. когда качество описания вязкости низкое.

Последнее не означает, однако, что использование явных схем вообще бесперспективно для задач механики вязкой жидкости. Наиболее эффективно явные схемы могут применяться, по-видимому, в сочетании с аппроксимациями высокого порядка, реализация которых с помощью неявных схем представляет большие трудности. В последнее время вновь возродился интерес к явным схемам также в связи с использованием многопроцессорных ЭВМ. В работе [46] реализована явная разностная схема четвертого порядка точности, построенная на минимальном сеточном шаблоне и обладающая свойством консервативности и монотонности. Реализация ее осуществляется итерационным методом Зейделя при наличии нескольких релаксационных параметров. Тесты стационарных задач конвекции, выполненные в [46], показывают значительные возможности этих схем в случаях, когда известны оптимальные параметры релаксации. Ограничением является предположение о стационарности задачи. Явные разностные схемы высокого порядка точности успешно использовались также в работах [47], [48]. Для явных схем вопрос об аппроксимации граничных условий для вихря не является столь актуальным, как для основной схемы. В работе [49] схемы повышенной точности применяются в сочетании с методом переменных направлений.

Среди явных схем отметим также [97], где используется специальная монотонная аппроксимация конвективных членов, в соответствии с которой в области больших значений разностного числа Рейнольдса физической вязкостью пренебрегается.

В последние годы для двумерных уравнений в переменных вихрь, функция тока разработаны так называемые «энергетически нейтральные» схемы, в которых аппроксимация нелинейных членов не дает вклада в баланс энергии, а также схемы, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям [98]. Схемы, в которых выполнены различные балансные соотношения, рассматривались также в работах [99], [100]. Достоинством их являются возможности получения численного решения на сравнительно грубых сетках при больших разностных числах Рейнольдса, а также при расчетах длительных нестационарных процессов.

**2.4. Трехмерные уравнения в переменных вектор-вихрь, потенциальный вектор.** Для решения трехмерных задач в принципе могут применяться те же общие подходы, что и для рассматривавшихся выше двумерных уравнений. До недавнего времени считалось, что наиболее эффективным путем решения трехмерных задач является использование исходной системы в переменных скорость, давление (6.1.1) (см. также ниже, п. 3 этого дополнения). Однако в работах [50], [51], [66] для решения трехмерных задач использованы уравнения в переменных вектор-вихрь, потенциальный вектор. Рассматриваются стационарные задачи конвекции в замкнутых объемах. Применяются схемы на основе метода расщепления. Таким образом, в переменных вектор-вихрь, потенциальный вектор возможно обобщение основной схемы и на случай трехмерных уравнений. Явная схема использована в работе [67].

### § 3. Схемы для уравнений в переменных скорость, давление

Схемы в переменных  $V, p$  (скорость, давление), как и схемы в переменных  $\omega, \psi$  (вихрь, функция тока), широко применяются на практике. Исследования последних лет показывают, что трудности решения уравнений Навье — Стокса, связанные с малым параметром при старшей производной, в некотором смысле «инвариантны» относительно записи исходных уравнений. Имеется, однако, ряд различий, заставляющих авторов в тех или иных случаях прибегать к записи исходных уравнений в переменных  $V, p$ . Основным преимуществом является простота и естественность реализации граничных условий для поля скорости, в особенности в случае многосвязных областей, где функция тока известна лишь с точностью до постоянной, а также при изучении течений со свободными поверхностями и пространственных течений.

Существенной трудностью в построении разностных схем для уравнений в переменных скорость, давление является аппроксимация уравнения неразрывности в форме (6.1.5). Уравнения в переменных вихрь, функция тока (6.2.1), (6.2.2) обладают в этом смысле очевидным преимуществом, в связи с чем существующие разностные схемы для этих уравнений, по крайней мере в двумерном случае, более эффективны, чем для  $u, v, p$ . Можно выделить три подхода к конструированию разностных схем для уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости в переменных скорость, давление, которые мы кратко рассмотрим.

**3.1. Использование уравнения Пуассона для давления.** При этом способе уравнения количества движения (6.1.3), (6.1.4) решаются совместно с уравнением для давления (6.1.11). Граничные условия для последнего, как указывалось в п. 6.1.1, определяются из уравнений количества движения с учетом граничных условий для поля скорости. В таком виде подход использовался в работе [52] для решения задач со свободной поверхностью, а также в работе [53] для решения трехмерной задачи. При реализации такого подхода требуется получить решение уравнения для давления (6.1.11) с высокой точностью, что представляет трудности, особенно если учесть сложный характер граничных условий (6.1.12). Для этой цели, по-видимому, целесообразно использование прямого метода, как это сделано в работе [53].

**3.2. Введение слабой сжимаемости.** Уравнение неразрывности записывается в этом случае в виде

$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (3)$$

где  $p$  — давление,  $\varepsilon$  — малый параметр. Смысл такой записи заключается в том, чтобы получить уравнение, разрешенное относительно первых производных. Решение этого уравнения совместно с уравнениями количества движения (6.1.3), (6.1.4) вплоть до установления ( $\partial p / \partial t = 0$ ) позволяет получить стационарное решение исходной системы. В таком виде метод использовался во многих работах (см. [54]—[57], а также [8]). В одной из первых работ [54] вместо величины  $p$  в уравнении (3) использовалась более сложная конструкция  $\tilde{p} = p + (u^2 + v^2)/2$ . Возможно также использование уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа при параметрах, соответствующих слабой сжимаемости, что для задачи конвекции реализовано, например, в работе [58].

**3.3. Разностные схемы с проектированием.** Идея этого подхода состоит в том, чтобы получить на первом этапе приближенное значение вектора скорости без учета уравнения неразрывности, а затем его скорректировать, используя его проекцию на подпространство соленоидальных функций. При реализации этого метода обычно используется метод расщепления «по физическим процессам», в связи с чем в ряде работ встречается соответствующая терминология. Методы этого типа использованы в работах [59]—[63]. Оригинальный вариант этого метода предложен Г. И. Тимухиным [60], [62]. Отметим, что практически все схемы для  $V$ -,  $p$ -систем требуют большой предварительной работы по выбору сеточных и итерационных параметров.

**3.4. Трехмерные уравнения в переменных скорость, давление.** Уравнения в переменных скорость, давление кажутся наиболее привлекательными для трехмерных задач, в связи с чем такая запись используется чаще, чем в переменных вектор-вихрь, потенциалный вектор. К настоящему времени в трехмерном случае реализованы все из упоминавшихся подходов (3.1—3.3). Методы первой группы применены в работах [53], [68], [69] для расчета трехмерных задач конвекции Рэлея — Бенара. Приближенные слабой сжимаемости (методы второй группы) применено в работе [55] для задач конвекции. В работе [64] одна из схем, приведенных в [56], использована для течения в подшипнике. Расчеты трехмерной задачи о конвекции Рэлея — Бенара выполнены в работе [65]. Методы третьей группы применялись в работах [59]; [63] для решения задач обтекания препятствий. Консервативная энергетически нейтральная схема для трехмерных уравнений в переменных скорость, давление построена в работе [101].

## § 4. Другие подходы к численному решению уравнений Навье — Стокса несжимаемой жидкости

С помощью метода конечных разностей исследования ведутся широким фронтом, и накопленный опыт позволяет увидеть их достоинства и недостатки. Достоинствами являются универсальность, экономичность, сравнительная простота реализации. Недостатками являются не слишком высокая точность (а также трудности построения и реализации схем высокой точности и оценки точности), трудности при аппроксимации областей с границами сложной формы. Поэтому ведутся поиски других методов. Мы лишь упомянем здесь некоторые основные подходы, разделив их на три группы.

К первой группе относятся попытки применения прямых методов. Наиболее разработаны к настоящему времени для уравнений Навье — Стокса методы Галеркина и некоторые их модификации [70], [71]. Эти методы обладают многими преимуществами, к числу которых относятся точность, возможность сокращения объема информации и экономичность. Однако сходимость этих методов в значительной степени зависит от выбора пробных функций, поэтому успешная реализация их достигнута лишь в ряде специальных случаев, например в задачах конвекции при наличии свободных и периодических границ, где известно аналитическое решение линейной задачи.

Ко второй группе следует отнести методы более общего характера, связанные с представлением решения в виде рядов или ин-

терполяционных многочленов [72]—[74]. Применительно к численному моделированию задач гидродинамической устойчивости важное значение имеют так называемые алгоритмы «без насыщения» [72].

К третьей группе относится метод конечных элементов, имеющий много общих свойств с методом сеток, но отличающийся специальным выбором аппроксимаций с учетом тех или иных вариационных принципов. Современные варианты метода конечных элементов в применении к уравнениям Навье — Стокса (см., например, [75], [76]) позволяют расширить класс геометрических объектов, но в настоящее время существенно проигрывают в экономичности расчета. Стремление к использованию лучших свойств из конечно-разностных и упоминавшихся здесь методов, приспособленных к проведению параллельных вычислений на многопроцессорных ЭВМ, приводит в последнее время к появлению новых методов численного решения уравнений Навье — Стокса (см., например, так называемый обобщенный интерполяционный метод [102]), детальная практическая проверка которых, однако, является делом будущего. Более подробное обсуждение различных направлений развития численных методов для уравнений Навье — Стокса выходит за рамки данного обзора.

## § 5. Краткий обзор прикладных проблем

Решение уравнений Навье — Стокса дает возможность изучать сложные гидродинамические течения в замкнутых областях и зонах отрыва пограничного слоя, следах, течения при малых числах Рейнольдса, где нет явно выраженных пограничных слоев, и при больших числах Рейнольдса, когда пограничный слой и основное течение неустойчивы и содержат вторичные вихри, и т. д. Ранее для расчета таких случаев приходилось строить некоторую приближенную гидродинамическую схему, разделяя течение на зоны, установление связей между которыми представляет самостоятельную проблему. Однако сегодня еще не все характерные типы течений, встречающиеся в приложениях, можно рассчитывать с помощью численных методов на основе уравнений Навье — Стокса.

Из приведенных результатов следует, что с помощью численных методов практически освоен диапазон чисел Рейнольдса до  $10^3$  (в отдельных случаях и выше), но при больших  $Re$  результаты требуют специального подхода и обработки\*). Это число  $Re$  не слишком велико, если учесть, что многие течения в природе и технике, как упоминалось выше в § 6.1, характеризуются значениями  $Re = 10^7 - 10^9$  ( $Ra \sim 10^{14} - 10^{15}$ ), т. е. осуществляются в развитых турбулентных режимах. Тем не менее результаты для освоенного практически диапазона чисел  $Re$  ( $Ra$ ) находят широкое прямые и косвенные применения. Наиболее важными являются случаи, когда реальный диапазон чисел  $Re$  ( $Ra$ ), встречающийся на практике, может быть воспроизведен данным вычислительным методом на ЭВМ. Эти случаи соответствуют следующим физическим характеристикам течения и внешних полей: малые скорости  $V$ , малый характерный размер  $l$ , большая вязкость, низ-

\*) В литературе иногда встречаются результаты и при больших числах  $Re$ , вплоть до  $10^5$ , но к ним следует относиться с осторожностью ввиду влияния «схемной вязкости».

кая плотность, слабое силовое поле и т. д. Построение в таких случаях математической модели, адекватной реальным условиям, имеет важнейшее значение для практики, так как позволяет значительно сократить материальные затраты по отработке и экспериментальному моделированию (часто в полной мере неосуществимому). Укажем некоторые из научно-технических направлений, являющихся перспективными в этом отношении.

1) Тепло- и массообмен при осуществлении технических и технологических процессов в невесомости. Осуществление ряда проектов космической техники связано с проблемой поддержания теплового режима низкокипящих жидкостей в условиях невесомости, характеризующихся слабыми полями силы тяжести и числами Рэлея до  $10^9$  [79]—[81]. В последнее время интенсивно разрабатывается новое научно-техническое направление — космическая технология, целью которой является изучение физических процессов, получение веществ и материалов в условиях невесомости при характерных значениях  $Ra$  до  $10^5$ . В настоящее время в этой области успешно применяются численные методы и разработаны специальные программы для численного моделирования [79], [80].

2) В недавнее время стали разрабатываться математические модели процессов гидромеханики и тепломассообмена при выращивании монокристаллов, относящиеся, в частности, к методам Чохральского (вытягивание из расплава в вращении) и бестигельной плавке на основе уравнений Навье — Стокса (см., например, [82]); в которых интенсивность движения жидкой (газовой) среды сравнительно невелика.

3) Ряд интересных постановок задач для механики вязкой жидкости возникает в процессах химической технологии. При этом в ряде случаев удается локализовать рассматриваемый объект (твердая частица, пузырек) с малым характерным размером. Примеры расчетов этого класса задач, где учтены вторичные течения, деформация поверхности раздела, термокапиллярные явления, приведены в [83].

4) Численное моделирование, основанное на уравнениях Навье — Стокса, в настоящее время значительно продвинуто в различных физических приложениях (см., например, [84]), ядерной технике [85], во внешних и внутренних задачах гидрогазодинамики турбомашин [86], [87], а также в задачах внешнего обтекания [88], где, однако, проблема описания реального диапазона режимных параметров еще далека от решения.

5) В последние годы методы математического моделирования начинают применяться также в бидмеханике [89], [90].

6) Примерами постановок задач, относящихся к явлениям природы, происходящим при не слишком больших числах Рейнольдса, являются течения космической плазмы и течение в верхней атмосфере [91]. В этих случаях, однако, следует, с одной стороны, считаться с условиями применимости модели сплошной среды, а с другой — учитывать сжимаемость газа. К другим примерам аналогичного типа относятся конвективные течения в верхней мантии, характеризующиеся большими числами Прандтля и весьма малыми числами Рейнольдса ( $Re \ll 1$ ). Для отдельных постановок задач такого рода уже выполнены расчеты на основе уравнений Навье — Стокса [92].

Вернемся в заключение к более широкому классу переходных и турбулентных течений жидкости. Лишь для некоторых из них в настоящее время представляется возможным прямое численное



моделирование на основе нестационарных уравнений Навье — Стокса. Рассмотренные выше численные схемы в этом случае могут применяться как аппарат для реализации приближенных полумпирических моделей. До недавнего времени значительная часть из них рассматривалась в рамках уравнений пограничного слоя, однако в настоящее время имеется ряд работ, в которых используется численное решение уравнений Навье — Стокса. Обзор подобных моделей дан, в частности, в [93]; [94]. В качестве наиболее простой модели используется модель с постоянным коэффициентом турбулентной вязкости, формально по записи исходных уравнений не отличающаяся от системы (6.1.1). Следует упомянуть в этой связи о численных моделях атмосферных и океанических течений, многие из которых основаны на уравнениях Буссинеска при соответствующей аппроксимации коэффициентов турбулентной вязкости (см., например, [95]).

Значительное число задач, которые в настоящее время решаются на основе уравнений Навье — Стокса, не являются, однако, полностью адекватными реальным объектам. Такое положение будет, по-видимому, сохраняться вплоть до освоения методов расчета нестационарных пространственных задач для уравнений Навье — Стокса. Эта задача механики жидкости и газа сейчас, после примерно двадцатилетней истории интенсивного развития численных методов решения уравнений Навье — Стокса, является основной. Для ее решения, как видно из сказанного выше, сделано уже довольно много, и это значительно приближает то время, когда свойства математических моделей жидкости будут использоваться в наиболее полной форме.

### Примечание

В период подготовки данной книги в печать появилось много новых публикаций, относящихся к методам численного моделирования процессов гидродинамики, тепло- и массообмена на основе уравнений Навье — Стокса. Мы сделаем лишь некоторые добавления, ближе всего относящиеся к рассматриваемым здесь вопросам.

Дальнейшей разработке консервативных разностных схем в переменных вихрь, функция тока на треугольных пергулярных сетках посвящена работа [104]. В работе [105] для решения стационарных задач для уравнения четвертого порядка относительно функции тока применяется попеременно-треугольный метод.

Ряд работ [106—109] посвящен разработке и применению к решению уравнений Навье — Стокса или его приближений так называемых многосеточных итерационных методов, в основе которых лежит метод Федоренко [110].

Метод конечных элементов применяется к решению двумерных и трехмерных нестационарных уравнений Навье — Стокса несжимаемой жидкости в работе [111]. В работе [112] методом конечных элементов изучается классическая задача о конвекции в квадратной области, подогреваемой сбоку.

Спектральные и псевдоспектральные методы применяются к решению задач о течении в выемке и сравниваются с конечно-разностными методами в работе [113] и применительно к задачам конвекции в работе [114].

В последние годы появляются новые работы, посвященные численному изучению турбулентных режимов конвекции на основе прямого решения нестационарных уравнений Навье — Стокса,

о которых говорилось в п. 6.8.5. Отметим в этой связи работы [115, 116], где методом конечных разностей решается задача о конвекции в горизонтальном слое, подогреваемом снизу (задача Рэлея — Бенара).

В работе [117] обсуждаются вопросы применения многопроцессорных ЭВМ к расчету турбулентных режимов течения.

Завершая этот небольшой дополнительный список работ, отметим, что за последние 2—3 года число публикаций по численному моделированию задач гидродинамики, тепло- и массообмена на основе уравнений Навье — Стокса резко возросло. Помимо традиционных специализированных журналов *Journal of Computational Physics*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *Computers and Fluids* появились также журналы *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *Numerical Heat Transfer*, в которых читатель может найти дополнительную информацию. На русском языке основная текущая периодика сосредоточена в «Журнале вычислительной математики и математической физики» и в журнале «Численные методы механики сплошной среды».

### Литература к дополнению 2

1. Thom A. An investigation of fluid flow in two dimensions.— *Aer. Res. C. R. M.*, 1928, № 1194.
2. Том А., Эйплт К. Числовые расчеты полей в технике и физике.— М.: Энергия, 1964.
3. Kawaguti M. Two-dimensional cavity flow of a laminar viscous fluid.— *J. Phys. Soc., Japan*, 1960, 16, № 12.
4. Симуни Л. М. Численное решение некоторых задач вязкой жидкости.— *Инж. журнал*, 1964, 4, вып. 3.
5. Чудов Л. А. Некоторые применения разностных методов в механике жидкостей и газа. Автореф. дис. ... доктора физ.-мат. наук.— М.: Институт проблем механики АН СССР, 1967.
6. Кускова Т. В. Численное исследование двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, вып. III.— М.: Изд. МГУ, 1971.
7. Госмен А. Д. и др. Численные методы исследования течений вязкой жидкости.— М.: Мир, 1972.
8. Роч П. Вычислительная гидродинамика.— М.: Мир, 1980.
9. Берковский Б. М., Ноготов Е. Ф. Разностные методы исследований задач теплообмена.— *Наука и техника*, Минск, 1976.
10. Гаруни Е. Л. Численное исследование свободной конвекции.— В кн.: Гидродинамика. Ученые записки.— Пермь, 1968, вып. 1, № 184.
11. Полежаев В. И., Вальциферов Ю. В. Численное исследование нестационарной тепловой конвекции в цилиндрическом сосуде при боковом подводе тепла.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, вып. III.— М.: Изд. МГУ, 1971.
12. Кускова Т. В., Полежаев В. И. Численное исследование конвекции неизотермической вязкой жидкости, содержащей пузырь, в условиях пониженной гравитации.— В кн.: Вычисл. методы и программир., вып. XXIII.— М.: Изд. МГУ, 1974.
13. Вальциферов Ю. В., Полежаев В. И. Конвективный теплообмен и температурное расслоение в сфере, полностью

- заполненной жидкостью, при заданном потоке тепла.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1975, № 5.
14. Pearson C. A computational method for viscous flow problem.— J. Fluid Mech., 1965, 21, pt. 4.
  15. Громов Б. Ф., Петрищев В. С. О решении двумерных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости.— Новосибирск: Наука, 1969.
  16. Булеев Н. И., Тимухин Г. И. О численном решении уравнений гидродинамики для плоского потока вязкой несжимаемой жидкости.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. наук, 1969, вып. 1, № 3.
  17. Torrance K. Comparison of finite-difference computations on natural convection.— J. Res. of NBS, 1968, 72, № 4.
  18. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.
  19. Хокни Р. Методы расчета потенциала и их приложения.— В кн.: Вычисл. методы в физике плазмы.— М.: Мир, 1974.
  20. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Исследование некоторых разностных схем и аппроксимации граничных условий для численного решения уравнений тепловой конвекции.— М., 1974. (Препринт/Институт проблем механики АН СССР: № 40).
  21. Полежаев В. И., Грязнов В. Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье — Стокса в перемешанных вихрь, функция тока.— ДАН СССР, 1974, 219, № 2.
  22. Отрощенко И. В., Федоренко Р. П. О приближенном решении уравнений Навье — Стокса.— М., 1976. (Препринт/Институт прикладной математики АН СССР: № 6).
  23. Дайковский А. Г., Чудов Л. А. Влияние схемных факторов при расчете следа за плохо обтекаемым телом.— Числ. методы механ. сплошной среды, 1975, 6, № 5.
  24. Варжанская Т. С., Кускова Т. В., Полежаев В. И. Расчет естественной и термокапиллярной конвекции в сферическом сосуде, содержащем газовый пузырь, при больших числах Рейля и Марангони.— В кн.: Вычисл. методы и программ-мир., вып. XXVII.— М.: Изд. МГУ, 1977.
  25. Вальциферов Ю. В., Полежаев В. И. К расчету конвективного теплообмена и температурного расслоения в цилиндрическом сосуде при заданном потоке тепла.— Числ. методы механ. сплошной среды, 1981, 12, № 1.
  26. Ноготов Е. Ф., Сеницын А. К. О численном исследовании нестационарных задач конвекции.— Инженерно-физический журнал, 1976, XXXI, № 6.
  27. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Численное решение нестационарных уравнений Навье — Стокса для турбулентного режима естественной конвекции.— М., 1977. (Препринт/Институт проблем механики АН СССР: № 81).
  28. Дайковский А. Г., Полежаев В. И., Федосеев А. И. Численное моделирование переходного и турбулентного режимов конвекции на основе нестационарных уравнений Навье — Стокса.— М., 1978. (Препринт/Институт проблем механики АН СССР: № 101).
  29. Бунэ А. В., Грязнов В. Л., Дубовик К. Г., Полежаев В. И. Методика и комплекс программ численного моделирования гидродинамических процессов на основе неста-

- ционарных уравнений Навье — Стокса. — М., 1981. (Препринт/Институт проблем механики АН СССР: № 173).
30. Тарунин Е. Л. Оптимизация неявных схем для уравнений Навье — Стокса в переменных функции тока и вихря скорости. — В кн.: Труды V Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости, ч. 1. — Новосибирск, 1975.
  31. Тарунин Е. Л. О выборе аппроксимационной формулы для вихря скорости на твердой границе при решении задач динамики вязкой жидкости. — Числ. методы механ. сплошной среды, 1978, 9, № 7.
  32. Тарунин Е. Л. Метод последовательности сеток для задач свободной конвекции. — ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 2.
  33. Shultz D. H. Numerical solution for the flow of a fluid in a heated closed cavity. — Quart Journ. Mech. Appl. Math., 1973, XXVI, pt. 2.
  34. Дайковский А. Г., Полежаев В. И., Федосеев А. И. О расчете граничных условий для нестационарных уравнений Навье — Стокса в переменных вихрь, функция тока. — Числ. методы механ. сплошной среды, 1979, 10, № 2.
  35. Тарунин Е. Л., Шайдуров В. Г., Шарифулин А. И. Экспериментальное и численное исследование устойчивости замкнутого конвективного пограничного слоя. — В кн.: Конвективные течения и гидродинамическая устойчивость. — Свердловск, 1979.
  36. Клейн И. С., Полежаев В. И. Конвективный теплообмен в проницаемых пористых средах. — М., 1978. (Препринт/Институт проблем механики АН СССР: № 111).
  37. Дородницын А. А., Меллер Н. А. О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье — Стокса. — ЖВМ и МФ, 1968, 8, № 2.
  38. Israeli M. A fast implicit numerical method for time dependent viscous flows. — Studies in Appl. Math., 1970, XLIX, № 4.
  39. Сармин Э. М. Модификация метода расщепления граничных условий для решения бигармонического уравнения. — ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 5.
  40. Захаренков М. Н. Аппроксимация граничного условия для завихренности на поверхности твердого тела при решении уравнений Навье — Стокса в переменных функции тока и завихренности. — Числ. методы механ. сплошной среды, 1980, 11, № 7.
  41. Бабенко К. И., Введенская Н. Д. О численном решении краевой задачи для уравнений Навье — Стокса. — ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 5.
  42. Калис Х. Э., Цинобер А. Б. Плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости под влиянием поперечного магнитного поля. — Изв. СО АН СССР. Сер. Техн. наук, 1967, вып. 2, № 8.
  43. Мажорова О. С., Попов Ю. П. Об одном алгоритме численного решения двумерных уравнений Навье — Стокса. — М., 1979. (Препринт/Институт прикладной математики АН СССР: № 37).
  44. Волчинская М. И., Четверушкин Б. Н. Об одном итерационном методе решения двумерных уравнений диффузии излучения. — ЖВМ и МФ, 1977, 17, № 2.

45. Краузе Г. Матричный модуль для ЕС 1055 и области его применения.— В кн.: Вычисл. техника социалистических стран. Финансы и статистика.— М., 1981.
46. Полевиков В. К. Приложение схем повышенной точности для расчета стационарных задач высокоинтенсивной свободной конвекции.— В кн.: Математические модели течений вязкой жидкости.— Новосибирск, 1978.
47. Fromm J. E. Numerical study of buoyancy driven flows in room enclosures.— J. IBM Res., 1971, 15, № 3.
48. Oza wa S. Numerical studies flow in a two-dimensional square cavity of high Reynodls numbers.— J. Phys. Soc. Japan, 1975, 38, № 3.
49. Bontoux P., Forestier B., Roux B. Analysis of higher order methods for the numerical simulation of confined flows.— In: Proc. VI Intern. Conf. Numerical Meth. Fluid Dyn.— Tbilisi, 1978, 1, June 20—25.
50. Aziz K., Hellums J. Numerical solution of the three dimensional equations of motion for laminar natural convection.— Phys. Fluids, 1967, 10, № 2.
51. Mallison G. D., De Wahl Davis G. Three-dimensional natural convection in a box: a numerical study.— J. Fluid Mech., 1977, 83, pt. 1.
52. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface.— Phys. Fluid, 1966, 8, № 12.
53. Williams G. P. Numerical integration of the three-dimensional Navier-Stokes equations for incompressible flow.— J. Fluid Mech., 1969, 37, № 4.
54. Владимирова Н. Н., Кузнецов Б. Г., Яненко Н. Н. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Некоторые вопросы прикл. и вычисл. матем.— Новосибирск, 1966.
55. Chorin A. I. Numerical solution for the Navier-Stokes equations.— Math. of Comput., 1969, 22, № 104.
56. Ладыженская О. А., Ривкинд В. Я. Вопросы теории разностных схем для уравнений Навье — Стокса и некоторые результаты их численного решения.— В кн.: Труды IV Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости.— Новосибирск, 1973.
57. Темам Р. Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ.— М.: Мир, 1981.
58. Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1967, № 2.
59. Harlow F. H., Hirt C. W. Recent extension to eulerian methods for numerical fluid dynamics.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 3.
60. Тимухин Г. И. О построении некоторых схем приближенного решения уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости.— Числ. методы механ. сплошной среды, 1972, 3, № 2.
61. Ривкинд В. Я., Эпштейн Б. С. Сеточные схемы для уравнений Навье — Стокса, связанные с проектированием.— ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 4.
62. Булеев Н. И., Зинина Г. А., Тимухин Г. И., Тимухина М. М. Результаты испытаний схем с проектированием

- для решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Математические модели течений жидкости (Труды VI Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости).— Новосибирск, 1978.
63. Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Щенников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости.— ЖВМ и МФ, 15, № 1, 1975.
  64. Горювая Е. Н. О решении пространственных задач для уравнений Навье — Стокса по устойчивым разностным схемам на ЭВМ.— В кн.: Труды IV Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости.— Новосибирск, 1973.
  65. Veltishcev N. F., Zelnin A. A. Numerical simulation of cellular convection in an air.— J. Fluid Mech., 1975, 68, pt. 2.
  66. Ozoe H., Yamamoto K., Churchill S. W., Sayama H. Three-dimensional numerical analysis of laminar natural convection in a confined fluid heated from below.— Trans. ASME, 1976, 98, № 2.
  67. Гарунин Е. Л., Толкачева Л. В. Надкритические режимы конвекции в кубической полости при подогреве снизу.— В кн.: Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости.— Новосибирск, 1981.
  68. Somerville R. C. J., Lipps F. B. A numerical study in three space dimension of Bénard convection in a rotating fluid.— J. Atm. Sci., 1973, 30, № 590.
  69. Lipps F. B. Numerical simulation of three-dimensional Bénard convection in air.— J. Fluid Mech., 1976, 75, pt. 1.
  70. Герценштейн С. Я., Шмидт В. М. Нелинейное взаимодействие конвективных движений и возникновение турбулентности во вращающемся горизонтальном слое.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1977, № 2.
  71. Рождественский Б. Л., Левитан Ю. Л., Моисеенко Б. Д., Приймак В. Г., Сидорова В. К. О методах численного моделирования турбулентных течений несжимаемой вязкой жидкости.— М., 1979. (Препринт/Институт прикладной математики АН СССР: № 14).
  72. Бабенко К. И., Афондинов А. Л., Юрьев С. Б. Об устойчивости и бифуркации течения Куэтта между вращающимися цилиндрами.— М., 1981. (Препринт/Институт прикладной математики АН СССР: № 99).
  73. Orsag S. A., Israeli M. Numerical simulation of viscous incompressible flows.— Ann. Rev. Fluid Mech., 1976, 6. p. 291—318.
  74. Иванов Ю. Б., Подливаев И. Ф., Простомолотов А. И. Применение метода коллокации для расчета гидродинамики бестигельной зонной плавки.— В кн.: Математическое моделирование физических установок.— М.: Энергоиздат, 1981.
  75. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости.— Ленинград: Судостроение, 1979.
  76. Полежаев В. И., Федосеев А. И. Метод конечных элементов в задачах гидромеханики, тепло- и массообмена.— М., 1980. (Препринт/Институт проблем механики АН СССР: № 160).

77. Вальдиферов Ю. В., Полежаев В. И. Конвективный теплообмен в замкнутом осесимметричном сосуде с криволинейной образующей при наличии раздела фаз и фазовых переходов.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1975, № 6.
78. Полежаев В. И. Конвективное взаимодействие в цилиндрическом сосуде, частично заполненном жидкостью, при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям и дну.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1974, № 2.
79. Никитин С. А., Полежаев В. И. Конвекция и перенос тепла в сферическом сосуде, частично заполненном жидкостью, в условиях пониженной гравитации.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1976, № 2.
80. Полежаев В. И., Грязнов В. Д., Дубовик К. Г. и др. Применение методов численного моделирования в космической технологии.— В кн.: Космическая технология и материаловедение.— М.: Наука, 1982.
81. Дубовик К. Г., Никитин С. А., Полежаев В. И. и др. Конвективные процессы в невесомости и их значение в задачах космической технологии.— В кн.: Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости/Под ред. В. С. Авдуевского и В. И. Полежаева.— М.: Наука, 1982.
82. Полежаев В. И., Простомолотов А. И. Исследование процессов гидродинамики и тепломассообмена при выращивании кристаллов методом Чохральского.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1981, № 1.
83. Ривкин Д. В., Сиговцев Т. С. Задача о движении капли в неоднородном температурном поле.— В кн.: Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости/Под ред. В. С. Авдуевского и В. И. Полежаева.— М.: Наука, 1982.
84. Поттер Д. Вычислительные методы в физике.— М.: Мир, 1975.
85. Субботин В. И. и др. Решение задач реакторной теплофизики на ЭВМ.— М.: Атомиздат, 1979.
86. Дорфман Л. А. Численные методы в газодинамике турбомашин.— М.: Энергия, 1974.
87. Брайловская В. А., Коган В. Р., Лейзерович А. Ш., Полежаев В. И. О влиянии свободной конвекции во внутренней полости на прогрев сварных роторов мощных паровых турбин при пусках.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1980, № 5.
88. Белоцерковский О. М. Вычислительный эксперимент: прямое численное моделирование сложных течений газовой динамики на основе уравнений Эйлера, Навье—Стокса и Больцмана.— В кн.: Численные методы в динамике жидкостей.— М.: Мир, 1981.
89. Мюллер Т. Дж. Применение численных методов к исследованию физиологических течений.— В кн.: Численные методы в динамике жидкостей.— М.: Мир, 1981.
90. Захаренков М. К., Осминин П. К., Швец Н. И. Современное состояние исследований по механике полета насекомых. Биомеханика.— В кн.: Труды I Всесоюзной конференции по инженерной и медицинской биомеханике.— Рига, 1975.
91. Изаков М. Н., Морозов С. К., Шноль Э. Э. Теоретическая модель суточных вариаций температуры, плотности и ветров в экваториальной термосфере Земли в период равно-

- действия.— М., 1972. (Препринт/Институт космических исследований АН СССР: № 115).
92. McKenzie D. P., Roberts J. M., Weiss N. O. Convection in the earth's mantle: towards a numerical evaluation.— *J. Fluid Mech.* 1974, 62, pt. 3.
  93. Reynolds W. C. Computation of turbulent flows.— *Ann. Rev. Fluid Mech. Palo-Alto Calif.*, 1976, 1, p. 183—208.
  94. Меллор, Херриг. Обзор моделей для замыкания уравнений осредненного турбулентного течения.— *Ракетная техника и космонавтика*, 1973, 11, № 5.
  95. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды.— Л.: Гидрометиздат, 1967.
  96. Полежаев В. И., Федюшкин А. И. Гидродинамические эффекты концентрационного расслоения в замкнутых объемах.— *Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа*, 1980, № 3.
  97. Купцова В. С. Исследование процессов тепловой и концентрационной конвекции с использованием модифицированной явной конечно-разностной схемы.— В кн.: *Вопросы теплопередачи. Материалы научного семинара.*— М., 1976.
  98. Фрязинов И. В. Консервативные разностные схемы для уравнений несжимаемой вязкой жидкости в криволинейных координатах в переменных вихрь — функция тока — момент вращения.— М., 1980. (Препринт/Институт прикладной математики АН СССР: № 120).
  99. Aikawa A. Computational design for long-term numerical integration for the equation of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow, Part I.— *J. Comput. Phys.*, 1966, № 1, p. 119—143.
  100. Самарский А. А., Попов Ю. В. Разностные схемы газовой динамики.— М.: Наука, 1981.
  101. Фрязинов И. В. Консервативные разностные схемы для трехмерных уравнений Навье — Стокса в криволинейных ортогональных координатах для несжимаемой жидкости.— М., 1982. (Препринт/Институт прикладной математики АН СССР: № 9).
  102. Спрэдли Л. У., Столкнер Д. Ф., Ратлиф А. В. Решение трехмерных уравнений Навье — Стокса на ЭВМ с векторными процессорами.— *Ракетная техника и космонавтика*, 1981, 19, № 11.
  103. Кирдяшкин А. Г. Структура тепловой гравитационной конвекции вблизи поверхности теплообмена. Автореф. дис. ... доктора физ.-мат. наук.— Новосибирск: Институт теплофизики СО АН СССР, 1975.
  104. Фрязинов И. В. Консервативные разностные схемы для уравнений Навье — Стокса в переменных вихрь — функция тока — момент вращения на нерегулярных треугольных сетках.— *Дифференциальные уравнения*, 1983, XIX, № 7.
  105. Вабищевич П. Н., Вабищевич Т. Н. Численные решения стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости.— *Дифференциальные уравнения*, 1983, 19, № 5.
  106. Отрощенко И. В., Федоренко Р. П. Редукционный метод решения разностного бигармонического уравнения.— *ЖВМ и МФ*, 1983, 23, № 4.
  107. Chia V., Chia H. V., Shin C. T. High-Re solution for incompressible flow\* using the Navier — Stokes equations and a multigrid method.— *J. of Comput. Physics*, 1982, 48, p. 387—411.



108. Gary J. On higher order Multigrid methods with geothermal reservoir model.— Intern. J. for Numerical Methods in Fluids 1982, 2, № 1.
109. Multigrid Methods. Lect. Notes Math. Proc. Köln — Porz, 1981.— Trottenberg: Ed. Hackbursch, 1982.
110. Федоренко Р. П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений.— УМН, 1973, XXVIII, вып. 2 (170).
111. Gresho P. M., Lee R. L., Sani R. On the time-dependent solution of incompressible Navier—Stokes equations in two and three dimensions.— Recent Adv. Numer. Meth. Fluid, Swansea, 1980, 1, p. 27—79.
112. Stevens W. N. Finite element stream function-vorticity solution on Steady laminar natural convection.— Internal. Journal for Numerical Meth. in Fluids, 1982, 2, № 4.
113. Hirsh R. S., Taylor T. D., Nadworny M. M., Kerr J. C. Techniques for efficient implementation of pseudo-spectral methods and comparisons with finite difference solutions of the Navier—Stokes equations.— Proc. 8th Int. Conf. Numer. Meth. Fluid Dyn. Rheinisch-Westfälische Tech. Hochsch. Aachen, 1982, p. 245—251.
114. Bontoux P., Bondet B., Roux B. Spectral methods for natural convection problems.— Proc. Int. Conf. Numer. Meth. Coupl. problems. Pinergic Press, 1981.
115. Grotzbach G. Direct numerical simulation of laminar and turbulent Bénard convection.— J. Fluid Mech., 119, 1982, p. 27—53.
116. Grötzbach G. Spatial resolution requirement for direct numerical simulation of the Rayleigh-Bernard convection.— J. Comput. Phys., 49, p. 241—264.
117. Leca P., Roy Ph. Simulation numerique de la turbulence sur un système multiprocessor.— Bull. Dir. étud. et rech., 1983, № 1, p. 95—101.

## **ПАКЕТЫ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ, ПРИНЦИПЫ ИХ ПОСТРОЕНИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

В настоящее время получили широкое распространение различные объединения программ, которые часто называют пакетами или комплексами программ. Существуют самые различные по своему назначению, содержанию и структуре пакеты и комплексы программ. В стандартном математическом обеспечении ЭВМ, как правило, имеются наборы программ для решения часто используемых математических задач анализа, алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений и т. п., которые также иногда именуется пакетами программ. В настоящем дополнении речь пойдет о пакетах прикладных программ, способствующих решению конкретных прикладных задач физики, в частности гидроаэромеханики. Пока еще не сложилась устойчивая терминология в этой области и различные авторы понимают под термином «Пакет прикладных программ» (ППП) самые различные по оформлению и структуре конгломераты программ. Но, как правило, все понимают под этим термином некоторую систему программ, которая может содействовать проведению вычислительного эксперимента (см. введение).

Оказание существенной помощи исследователю на всех этапах вычислительного эксперимента — основная цель, которая должна преследоваться при создании Пакета прикладных программ, предназначенного для научных исследований.

Обсудим основные свойства Пакета прикладных программ, соответствующие требованиям, предъявляемым проведением вычислительного эксперимента.

### **§ 1. Модульный принцип составления программ задач**

В основу создания программ для решения задач (кратко: программ задач) в Пакете должен быть положен модульный принцип. Под этим обычно понимают, что программа задачи составляется из подпрограмм-модулей, подобно тому, как монтируется сложный объект из стандартных деталей. Модульный анализ определенного класса прикладных задач дает возможность выделить базисные задачи для данного класса, на основе решения которых можно получать решения других задач из этого класса. С точки зрения численного решения задач на ЭВМ разбиение класса задач на базисные модули, из которых могут быть сформированы программы для решения задач данного класса, должно также существенно зависеть и от методов их решения. Поэтому естественно говорить о выделении базиса модулей для данного класса задач в рамках определенного класса численных методов их решения. Например, в гидроаэромеханике принцип разбиения сложных задач на более

простые существует давно и многие задачи являются, как правило, элементами более сложных проблем.

В § 5.5 было приведено решение задачи о нестационарном течении в пограничном слое на стенке канала при нестационарном режиме течения в ядре потока. Решение задачи было основано на совместном численном интегрировании двух систем уравнений: нестационарных одномерных уравнений для течения идеального газа и нестационарных уравнений двумерного пограничного слоя. Программа для решения общей задачи состояла из двух основных программ, в которых были реализованы разностные методы интегрирования соответствующих систем уравнений. Таким образом, каждая из этих двух программ, с одной стороны, является самостоятельной программой для расчета некоторой физической задачи, а с другой стороны, при расчете течения во всей области эти программы являются двумя основными частями (модулями) программы более сложной задачи. Обратим внимание также на то, что модуль расчета одномерного нестационарного течения идеального газа должен выработать распределение давления вдоль стенки в каждый рассчитываемый момент времени и передать эти данные программе расчета течения в пограничном слое. Эту передачу данных от одного основного модуля к другому должна осуществлять вспомогательная программа, которая может быть также объявлена самостоятельным модулем. Хотя такой вспомогательный модуль не рассчитывает какой-то самостоятельной физической задачи, его присутствие в программе общей задачи необходимо, как и наличие двух основных модулей. Отметим также, что каждый из двух основных модулей в нашем примере может быть сформирован с помощью более мелких модулей (см. ниже § 11 настоящего дополнения, где проведен модульный анализ задач пограничного слоя).

На этом простейшем примере видно, что, оформив программы отдельных задач, представляющих самостоятельный физический интерес, в виде модулей Пакета, мы можем получить возможность компоновки из них программ более сложных задач. Таким образом, хотя функции модулей, на базе которых составляются программы конкретных задач (которые в свою очередь могут быть оформлены в виде модулей), существенно различаются, все они составляют общий базис модулей для создания программ конкретных задач. Поэтому по своему назначению можно разделить модули на три вида: модули задач (МЗ), базисные (БМ) и сервисные (СМ). Сервисные модули предназначены в основном для обработки результатов расчетов.

Хранение модулей осуществляется в библиотеке. Библиотека содержит:

- 1) тексты базисных и сервисных модулей (в том числе и модулей конкретных задач), записанные на языке программирования (ФОРТРАН или АЛГОЛ), и, возможно, программы модулей на языке загрузки;

- 2) тексты описания программ модулей на русском языке, которые содержат краткую информацию о методике, лежащей в основе данной программы, и полную инструкцию по использованию данного модуля;

- 3) каталог библиотеки модулей по разделам.

## § 2. Уровень автоматизации составления программы задач

Конечным программным продуктом работы Пакета является программа конкретной задачи, которая составляется на основе (или с использованием) библиотеки модулей Пакета. Уровень автоматизации составления программы задачи является вторым основным свойством Пакета прикладных программ.

Наиболее простой уровень составления программы задачи на основе текстов модулей, предоставляемых пользователю из библиотеки Пакета, основан на ручной сборке. В этом случае системная часть Пакета, называемая Монитором Пакета, не принимает участие в составлении программы задачи и не приводит диагностику ошибок, допущенных пользователем при сборке программы. Естественно такой уровень составления программы задачи называть ручным.

Программную часть Монитора, которая осуществляет составление программы задачи, будем называть Планировщиком. Простейший уровень автоматического составления программы задачи основывается на каталоге задач. Названия задач, программы которых могут быть созданы на основе программ модулей, собираются в каталоге. Программы задач, данные в каталоге, составлены в виде цепочки обращений к модулям, которые хранятся в библиотеке. Роль Планировщика в этом случае примитивная: выборка соответствующей запросу пользователя цепочки задачи, генерация рабочей программы и передача ее той части Монитора, которая проводит счет задач. Цепочки программ задач могут храниться в виде последовательностей обращений к модулям, оформленным в виде программ или процедур. Хранение таких фиксированных цепочек задач (программ задач) рационально в том случае, если число допустимых по смыслу комбинаций обращений к модулям (число цепочек задач) невелико.

В случае, если число допустимых цепочек велико, программа Планировщик должна осуществлять автоматическое составление программ задач (цепочек задач) по информации, задаваемой пользователем. Такой уровень автоматического составления программ задач будем называть информационным. Наличие такого автоматического Планировщика оправдано только тогда, когда информация о всевозможных допустимых цепочках занимает значительно больше памяти ЭВМ, чем программа автоматического Планировщика совместно с необходимой информацией о модулях для автоматического их объединения.

Если не предполагать расширения стандартных языков ФОРТРАН и АЛГОЛ-60 и тем более создания новых языков, то в качестве языка, на котором возможно составление цепочки обращений к имеющимся модулям (программы задачи), может использоваться один из указанных языков. Таким образом, пользователь задает цепочку обращений к модулям, имеющимся в библиотеке Пакета, и либо предусматривает передачу данных от модуля к модулю самостоятельно (ручной интерфейс), либо поручает эти функции Планировщику (автоматический интерфейс). В функции Планировщика входит проверка смысловой и программной корректности цепочки и диагностика ошибок, допущенных пользователем, и в случае допустимости данных сочетаний в цепочке составление программы расчета и передача ее на счет. Проверка смысловой и программной корректности цепочки модулей может

проводиться Планировщиком на основе таблицы совместимости модулей, которая должна корректироваться при включении нового модуля в Пакет. Если таблица совместимости модулей существенно меньше занимает памяти ЭВМ, чем возможные цепочки на базе этих модулей, тогда только оправдано применение подобного Планировщика.

### **§ 3. Информационное обслуживание пользователей пакета прикладных программ**

Пакет прикладных программ должен содержать достаточно большое количество модулей, описания и инструкции для их использования, иметь банк данных — иными словами, содержать большое количество информации, фрагменты которой могут понадобиться пользователю во время работы с Пакетом. Поэтому третьим основным свойством Пакета должно являться наличие информационно-поисковой системы Пакета.

Информационно-поисковая программа, являющаяся частью Монитора, служит для обеспечения пользователей информацией о содержании Пакета и правилах работы с Пакетом, а также для поиска программ задач или модулей для ее составления. Работа информационно-поисковой программы должна быть, очевидно, основана на обработке информационных директив, которая производится по единому правилу: каждому запросу, сформулированному в директиве, соответствует определенный ответ. Наличие информационно-поисковой системы позволяет свести к разумному минимуму документацию Пакета, с которой необходимо ознакомиться пользователю.

### **§ 4. Обеспечение пользователей проведением расчетов по сгенерированным программам**

Расчет больших задач математической физики требует, как правило, значительных затрат машинного времени. Проверка исходной информации для расчета варианта задачи, прерывание и возобновления счета задач, организация проведения расчетов задач нескольких пользователей — основные функции той части Монитора, которая управляет счетом задач. При дальнейшем изложении будем называть эту часть Монитора программой Счет. Повышение эффективности численного эксперимента требует обеспечения пользователей проведением расчетов по сгенерированным программам задач, что и является также одним из основных свойств Пакета.

### **§ 5. Обеспечение пользователей данными, хранящимися в Банке Данных**

Программы больших задач математической физики часто используют для своей работы большие поля начальных данных, многие программы используются одни и те же таблицы некоторых физических величин или обрабатывают данные физических экспериментов, проводят сравнения физических и вычислительных экс-

периментов. Все эти данные естественно хранить на внешних запоминающих устройствах и организовать структуру этого хранилища данных или, как принято называть, Банка Данных (БД) таким образом, чтобы программы задач и пользователи Пакета имели простой и удобный доступ к данным. Наличие Банка Данных в Пакете может существенно расширить его возможности. Поэтому следует считать обеспечение пользователей данными, хранящимися в Банке Данных, одним из свойств Пакета.

Общая структура Банка Данных должна содержать в себе хранение результатов численных расчетов и физических экспериментов, хранение библиографических справок, каталог этой информации и программы (или генератор программ) для выдачи информации по требованию пользователя.

Информационно-поисковая программа Монитора осуществляет только обработку информационных директив по содержанию Банка Данных. Инструкции для получения информации из БД даются пользователю также по соответствующим информационным директивам. Фрагменты информации из Банка Данных выдаются пользователю с помощью соответствующей программы Монитора, которую удобно называть программой Банк. Эта программа, обрабатывая запросы пользователей, должна сформировать программу выдачи на печать (дисплей, графопостроитель, телетайп) данных, необходимых пользователю.

## **§ 6. Обеспечение возможности редактирования Пакета**

Это свойство дает возможность модифицировать Пакет в процессе работы, позволяет расширять его возможности. В первую очередь это относится к наполнению Пакета. Для этого должна быть предусмотрена возможность записи новых модулей в библиотеку модулей. Запись нового модуля в библиотеку влечет за собой изменение каталога, таблицы совместимости модулей для анализа правильности составления цепочек обращений к модулям при создании программы задачи, а также, возможно, и изменение состояния Банка Данных. Аналогичные изменения состояния Пакета происходят при исключении модуля из библиотеки. Наполнение Банка Данных новыми расчетными и экспериментальными данными, а также и библиографическими справками, влечет за собой не только изменение состояния самого БД, но и изменения каталога БД и хранения программ для обработки вновь поступивших данных в Банк Данных.

Эксплуатация Пакета может предъявить и новые требования к системной части Пакета. Поэтому структура системной части должна допускать ее наполнение новыми компонентами. Возможность редактирования всех частей Пакета поможет также созданию различных версий Пакета, приспособленных для эксплуатации его в различных организациях.

## **§ 7. Обеспечение сотрудников, сопровождающих Пакет, необходимой административной информацией**

Эксплуатация Пакета, включающего в себя большую библиотеку модулей и Банк Данных, требует определенной организации. Поэтому для сопровождения работы Пакета должны быть выде-

лены сотрудники, которые, используя определенные административные директивы, могли бы следить за ходом эксплуатации Пакета и выполнением пользователями правил работы с Пакетом. Часть Монитора, осуществляющую эти функции, естественно называть программой Администратор. Директивы этой программы должны быть доступны только сопровождаителям Пакета. С помощью этих директив может быть получена, например, информация о числе пользователей и выдан их список, информация о задачах, находящихся в данное время на счете, и о прохождении на машине определенной задачи, информация о работе определенного пользователя и пр. С помощью этой программы можно включить в список (или исключить из списка) пользователей определенного сотрудника.

Директивы, по которым происходит включение в Пакет новой информации, требуют введения следом за ними этой информации или указания, откуда и в каком виде ее можно считать (с перфокарт или с МЛ, с дисплея или других носителей информации и устройств). Директивы включения и исключения информации по библиотеке и Банку Данных требуют, как правило, большой работы по редактированию различных компонент Пакета. Программа Администратор должна ее выполнить или выдать диагностику в случае невозможности включения новой информации из-за отсутствия ресурсов.

## § 8. Основные свойства Пакета прикладных программ

Запишем все свойства Пакета, подробно описанные выше, в компактной форме:

1. Модульный принцип составления программ. Пакет должен создавать программы задач на модульном принципе в соответствии с модульным анализом классов задач в классах определенных численных методов их решения. Пакет допускает генерацию программ на основе следующих, хранящихся в библиотеке программных модулей:

1.1. программ для решения конкретных задач;

1.2. программ, составляющих базис программ, обеспечивающих генерацию программ задач данного класса в классе определенных численных методов их решения (базисные модули);

1.3. программ, обеспечивающих обработку результатов расчетов (сервисные модули).

2. Уровень автоматизации составления программ задач:

2.1. ручной — составление программы задач проводится пользователем на основе предоставляемых Пакетом текстов модулей;

2.2. автоматический — который в свою очередь подразделяется на

2.2.1. каталоговый — автоматически составляются программы задач, имеющиеся в каталоге Пакета;

2.2.2. информационный — автоматически составляется программа задачи на основании информации, задаваемой пользователем.

3. Наличие информационно-поисковой системы Пакета, обеспечивающей пользователей:

3.1. информацией о содержании Пакета;

3.2. информацией о правилах работы с Пакетом;

3.3. поиском программы задачи или модулей для ее составления.

4. Обеспечение пользователей проведением расчетов задач по сгенерированным программам:

4.1. без возможности прерывания расчетов (односеансные расчеты);

4.2. с возможностью прерывания и возобновления расчетов (многосеансовые расчеты).

5. Обеспечение пользователей данными, хранящимися в Банке Данных:

5.1. результатами численных расчетов, записанных в БД;

5.2. результатами физических экспериментов, записанных в БД;

5.3. библиографическими справками, записанными в БД.

6. Обеспечение сотрудников, сопровождающих работу Пакета, необходимой административной информацией, а также обеспечение контроля за соблюдением правил работы пользователей с Пакетом.

7. Обеспечение возможности редактирования Пакета с целью модификации и пополнения:

7.1. новыми модулями;

7.2. новыми экспериментальными и расчетными данными;

7.3. новыми библиографическими справками;

7.4. новыми компонентами системной части.

## § 9. Классификация Пакетов прикладных программ

Классификация Пакетов может быть введена в соответствии с основными свойствами Пакета. Нумерация классов, например, может соответствовать введенной нумерации основных свойств Пакета. Например:

Пакет класса 1.— Набор программ для решения конкретных задач и некоторых базисных и сервисных модулей.

Пакет класса 1.1.— Набор программ для решения некоторых конкретных задач.

Пакет класса 1.2—2.2.2.— Пакет модулей с автоматическим составлением программ задач на базе этих модулей по информации, задаваемой пользователем.

Пакет класса 1.2—2.2.2.—3.— Пакет такой же, как и в предыдущем примере, с обеспечением пользователей всеми средствами информационно-поисковой системы.

Пакет класса 7.— Пакет, обладающий всеми семью основными свойствами.

Такая классификация может употребляться для достаточно точного определения класса Пакета.

В соответствии с основными свойствами Пакета может употребляться более грубая словесная классификация Пакетов, использующая термины, введенные для определения основных свойств. Например:

1. Модульный Пакет, с автоматическим каталоговым составлением программ задач и с информационно-поисковой системой (соответствует Пакету класса 1.—2.2.1.—3.).

2. Модульный Пакет с автоматическим составлением программ и проведением расчетов по ним (соответствует Пакету класса 1.—2.—4., но в этом примере не уточняются свойства Пакета 1., 2., 4.).

В зависимости от целей, которые ставит организация или коллектив пользователей при работе с Пакетом прикладных программ,



могут использоваться Пакеты разных классов. Так, например, в организации, ведущей счет многих вариантов одних и тех же задач, может быть сформирован Пакет, у которого в библиотеке модулей находятся только программы конкретных задач (1.1.), имеется информационно-поисковая система (3.) и программа, обеспечивающая пользователей проведением расчетов задач (4.). Пакет такого класса (1.1—3.—4.) будет удовлетворять всем требованиям проведения расчетов в данной организации. Наверное, нет необходимости перечислять возможные варианты использования Пакетов различных классов. Хотелось бы лишь подчеркнуть, что Пакеты различных классов могут найти применение при проведении численного эксперимента.

## § 10. Общая структура Пакета ГАММА

10.1. Пакет ГАММА (аббревиатура: ГидроАэроМеханические Модули и Алгоритмы) предназначен для проведения вычислительных экспериментов в научных исследованиях в области аэрогидродинамики и может быть использован в любой отраслевой организации.

Общение с Пакетом производится на языке директив, основанном на системе запросов и ответов. Полнота директив Пакета ГАММА позволяет выполнять в автоматическом режиме все необходимые действия как пользователю, так и сотруднику-администратору. За правильное использование Пакета в данной организации отвечает руководитель эксплуатации Пакета. Абонент может стать пользователем Пакета только после занесения его фамилии в список пользователей сотрудником-администратором. Все пользователи Пакета, включая и разработчиков, имеют определенный приоритет в зависимости от целей, стоящих перед ними при обращении к Пакету. Приоритет № 1 имеют пользователи, обращающиеся к услугам Пакета только для проведения расчетов по программам, имеющимся в Пакете. Приоритет № 2 присваивается пользователям достаточно высокой квалификации в области аэрогидродинамики и численных методов, которые могут пополнить содержательную часть Пакета (библиотеку программ задач и модулей). Пользователи с приоритетом № 3 — это лица, сопровождающие работу Пакета в какой-то организации. Разработчики Пакета имеют высший приоритет. Чем выше приоритет пользователя, тем большее количество директив ему доступно. Эффективность работы с Пакетом существенно зависит от знаний пользователя в области прикладных вопросов аэрогидродинамики, численных методов решения, используемых в этой области, знания алгоритмических языков ФОРТРАН и АЛГОЛ-60. Для расчета только тех задач, которые имеются в каталоге, принципиально можно не владеть программированием.

10.2. Обращаясь к работе с Пакетом, пользователь ставит перед собой цель численного исследования той или иной прикладной задачи. По каталогам библиотеки программ Банка Данных пользователь имеет возможность найти необходимую ему задачу, получить ее описание и инструкцию для проведения расчетов. Из Банка Данных пользователь может получить библиографическую справку по интересующей его проблеме, узнать параметры вариантов, уже посчитанных для данной задачи, и получить результаты предшествующих расчетов или данные физических экспе-

риментов. В случае необходимости расчета новых вариантов задачи пользователь готовит начальные данные варианта согласно инструкции. Монитор анализирует правильность задания начальных данных и в случае ошибок пользователя выдает их диагностику. Если начальные данные соответствуют указанным интервалам изменения, им присваивается имя. Монитор выделяет необходимые для прерывания и продолжения счета ресурсы МЛ и начинает расчет задачи.

Если пользователь ставит своей целью составление новой программы задачи на базе имеющихся в Пакете модулей или задач, то он задает на языках ФОРТРАН или АЛГОЛ-60 цепочку обращений к модулям и предусматривает передачу данных от модуля к модулю самостоятельно или поручает эти функции Планировщику. Составленная таким образом программа задачи записывается во временную библиотеку программ задач и запускается на счет уже описанным образом. Эту программу руководитель эксплуатации Пакета с согласия автора задачи может записать в библиотеку программ в качестве новой задачи.

10.3. Все программы Пакета можно разделить на две различные части: системную и содержательную (функциональную).

10.3.1. Системная часть Пакета (Монитор) представляет собой программу, состоящую из следующих блоков: Поиск, Планировщик, Счет, Банк, Администратор. Каждый из этих блоков при обработке соответствующей директивы является резидентом Монитора в памяти машины. Все блоки написаны на языке ФОРТРАН. Исключения составляют программы обмена информацией с внешними носителями, написанные на автокоде Мадлен.

Информационно-поисковая программа Поиск позволяет исследователю получить сведения о возможностях Пакета и правилах работы с ним. По информационным директивам можно получить каталоги библиотеки задач, Банка Данных, описание программ задач и модулей, библиографические справки по задачам. Сотрудник-администратор по информационным директивам может получать данные, позволяющие ему следить за работой Пакета.

Часть Монитора, которая составляет программу для счета задачи, называется Планировщиком. В основу организации Планировщика положен модульный принцип построения рабочих программ для решения научных задач. Планировщик состоит из генераторов программ для каждого класса задач Пакета. Как правило, такие генераторы создаются на базе определенного класса численных методов и могут пополнять состав генераторов Планировщика. По запросу пользователя Планировщик формирует программу задачи либо из числа модулей, содержащихся в каталоге, либо по информации, заданной самим пользователем. Тело программы, созданное Планировщиком, передается блоку Счет, который проводит расчет по этой программе.

Программа Счет является резидентом Монитора в памяти ЭВМ при поступлении в приемник директив запроса пользователя на расчет задачи. Расчет большой задачи математической физики требует, как правило, значительных затрат машинного времени и поэтому предполагает многосеансовый режим обращения к Пакету. Прерывание и возобновление счета задач, проверка исходной информации — основные функции этой части Монитора.

Результаты расчетов отдельных задач, данные физических экспериментов и текстовые данные (библиографические справки) хранятся в Банке Данных. Цель организации Банка Данных — со-

хранение результатов расчетов задач, интересующих широкий круг пользователей с точки зрения как конечного результата, так и исходных данных для других задач. Часть Монитора, которая дает возможность использовать информацию, содержащуюся в Банке Данных, называется программой Банк. В соответствии с библиотекой задач Банк Данных разбит на разделы, параграфы и варианты. Язык общения пользователей с программой Банк предусматривает возможность обработки информации Банка Данных с помощью сервисных программ.

Важной частью Монитора Пакета является административно-служебный блок Администратор. Назначение этого блока — обеспечение возможности автоматизации сопровождения и модификации пакета ГАММА. В связи с этим функции Администратора делятся на две основные части: контроль за эксплуатацией Пакета и редактирование его содержания. Директивы блока Администратор доступны только разработчикам Пакета и лицам, сопровождающим его работу.

10.3.2. Содержательная часть Пакета (функциональное наполнение Пакета) состоит из программ задач и модулей, структура которых имеет определенный вид и существенно зависит от архитектуры Пакета. Анализ структуры прикладных программ в области аэродинамики, связанных с применением конечно-разностных методов и метода характеристик, показал, что существуют два типа задач. Первый тип — это задачи, использующие при решении метод установления, когда поля искомым функций сохраняются во время счета, и обработка результатов расчета проводится в самом конце решения задачи. Второй тип — это задачи с послойным счетом, когда обработка результатов должна вестись в процессе проведения расчета, так как результаты на каждом слое забиваются результатами последующего слоя. К таким задачам относятся, например, задачи газовой динамики, использующие метод характеристик, задачи пограничного слоя, нестационарные задачи.

В пакете ГАММА принята определенная схема прикладной задачи. Связь программы задачи с Монитором осуществляется через стандартные врезки, которые вводятся в тело программы перед записью ее в Пакет. Врезки устроены таким образом, что они не меняют алгоритма программы задачи. По своему назначению модули Пакета делятся на три вида: модули задач (МЗ), базисные модули (БМ) и сервисные модули (СМ). Программа прикладной задачи, включенная в Пакет, оформляется в виде модуля задачи. Модуль задачи может быть монолитным или составным. Монолитный модуль не содержит внутри себя других модулей. Составной модуль задачи может состоять из двух и более модулей и может включать в себя не только БМ и СМ, но и модули других задач. СМ предназначены для обработки результатов расчетов. Модули, выполняющие все прочие функции в модулях задач, относятся к базисным. К БМ также относятся и модули, осуществляющие передачу данных от одного модуля к другому.

Библиотека модулей задач, базисных и сервисных модулей состоит из трех частей: 1) текстов программ МЗ, БМ, СМ; 2) текстов описаний модулей; 3) каталога библиотеки.

Библиотека задач разбита на разделы, разделы — на параграфы. Библиотека базисных и сервисных модулей подразделяется только на разделы.

Программы задач и модулей написаны на языках программирования ФОРТРАН или АЛГОЛ-60 и оформлены в виде

SUBROUTINE или PROCEDURE соответственно. Их текст в оттранслированном виде находится в личной библиотеке Пакета на МЛ. Тексты программ, записанные на языке программирования при помощи Редактора текстов, также хранятся на МЛ. Тексты описаний задач и модулей написаны на русском языке и содержат краткую информацию о методике, лежащей в основе данной программы, полную инструкцию по подготовке исходных данных и перечень выводимых на печать результатов. Каталог библиотеки состоит из каталога разделов и каталога задач, БМ, СМ, в которых даны имена и названия включенных в Пакет задач, БМ и СМ.

## § 11. Модульный анализ и генерация программ решения задач пограничного слоя

Как было отмечено в предыдущем параграфе, часть Монитора Пакета, ответственная за создание программ задач — Планировщик — состоит из генераторов программ для каждого класса задач.

Модульный анализ разностных методов решения задач пограничного слоя (см. гл. 5) позволяет выделить основные функциональные группы модулей. В одну группу объединяются модули, имеющие одинаковое назначение. Модули, входящие в эти группы, назовем базисными модулями первого уровня. В программе решения любой задачи должен присутствовать хотя бы один БМ из каждой функциональной группы. Кроме модулей первого уровня в программе могут участвовать и модули второго уровня, не входящие в состав функциональных групп.

Базисными модулями группы DATA осуществляется ввод исходных данных (число уравнений второго порядка, количество узлов, точность и т. п.), строится сетка, а также вводятся данные для расчета распределения температуры, градиента давления и т. д., если это необходимо.

Для решения системы уравнений пограничного слоя наряду с граничными условиями на стенке и во внешнем потоке необходимо задавать профили искомых функций для некоторого  $x = x_0$ . Группой модулей INPRO задаются эти начальные профили, а группой GRAN задаются граничные условия задачи.

Начальные условия, необходимые при решении нестационарных задач, ставятся в группе модулей INCO.

Вычисление коэффициентов уравнений в представлениях (5.3.1), (5.3.2) осуществляется в группе COEF. Функциональное назначение группы модулей SCHEM состоит в задании разностной схемы расчета; в этих модулях вычисляются коэффициенты разностных уравнений.

В группе CALC представлены методы решения этих разностных уравнений. Модулями группы VELV вычисляется составляющая скорости  $v$ . Обычно поперечная компонента скорости  $v$  находится из уравнения неразрывности.

Группой модулей EXIT осуществляется вывод результатов. Блок INITIAL, состоящий из модулей групп INPRO, GRAN, INCO, COEF, полностью определяет математическую постановку задачи. Из него информация передается в блок STEP (счет шага), в который входят модули из групп SCHEM, CALC, VELV. Этот блок определяет метод решения задачи, а модули группы DATA определяют тот вариант, который будет просчитан.

Построением программы конкретной задачи руководит генератор, который и собирает модули-«кирпичики» в «здание» программы.

Модули каждой функциональной группы имеют одинаковое название, совпадающее с названием группы, но отличаются символом (это может быть цифра или буква), который добавляется к концу имени.

В качестве примера приведем возможный состав функциональных групп. DATA1 осуществляет ввод исходных данных и построение сетки для стационарных задач, DATA2 — для нестационарных. В обоих случаях сетка равномерная. Неравномерная сетка для этих задач строится соответственно модулями DATA3 и DATA4.

Модули групп INPRO задают начальные профили: INPRO1 — профиль Блазиуса, INPRO2 — линейный, INPRO3 — кусочно-линейный, INPRO4 — «ударный». Модуль GRAN1 задает граничные условия для расчета течения несжимаемой жидкости:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$u \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty.$$

Модуль GRAN2 задает условие для расчета течения сжимаемого однородного газа:

$$u = v = 0, \quad h = h_w(t) \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$u \rightarrow 1, \quad h \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty.$$

Модуль GRAN3 задает граничные условия для задачи со вдувом:

$$u = 0, \quad h = h_u, \quad v = \begin{cases} 0, & x_0 \leq x \leq d_1, \\ v_w, & d_1 < x < d_2, \\ 0, & d_2 < x. \end{cases} \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$u \rightarrow 1, \quad h \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty.$$

Модулем INCO1 задаются начальные условия:  $u = U(x)$ ,  $v = 0$  при  $t = 0$ . Модуль INCO2 — программа задачи для расчета стационарного пограничного слоя в сжимаемом газе, которая вырабатывает начальные условия при  $t = 0$  для нестационарной задачи.

Модулями COEF1 задается система уравнений, описывающая течение несжимаемой жидкости в пограничном слое на пластине (система уравнений Прандтля); COEF2 — система уравнений, описывающая течение сжимаемого газа; COEF3 — система уравнений, описывающая нестационарное течение сжимаемого газа (плоский случай).

Модули SCHEM задают разностные аппроксимации. Так, в модуле SCHEM1 вычисляются коэффициенты разностных уравнений в основном разностном методе; в модуле SCHEM2 — в методе, обладающем свойством сильной стабилизации высокочастотных возмущений (см. п. 5.3.7).

Модулями группы CALC решаются разностные уравнения. Модулем CALC1 это делается методом скалярной прогонки, CALC2 — векторной, CALC3 — итерационным методом. Модулем VELV1 осуществляется вычисление составляющей скорости  $v$  в основном разностном методе; модуль EXIT1 производит выдачу на

печать (запись на магнитную ленту) результатов расчета стационарной задачи, EXIT2 — нестационарной.

Генератор имеет в своем распоряжении несколько «скелетов» программы. Под скелетом понимаем программу, в которой отражена схема решения задачи. В определенных местах программы предусматривается вызов соответствующих подпрограмм-модулей. Но имена этих подпрограмм не названы, а только известна функциональная группа, в которую они входят. Благодаря действию динамического загрузчика в роли переключателя имена модулей можно варьировать и получать в зависимости от этого различные «тела» программ.

У генератора можно выделить три функции и в соответствии с этим три этапа работы, которые осуществляются в один сеанс на ЭВМ.

Первый этап: генератор-процессор входного языка. Он получает описание математической модели задачи на входном языке Пакета — языке директив. В основном от пользователя требуется назвать конкретные модули соответствующих функциональных групп, перечислить константы и параметры задачи. При этом пользователь Пакета не обязан знать структуру будущей программы, порядок следования модулей; его не волнуют вопросы интерфейса модулей по данным.

Второй этап: планирование вычислений. По информации, полученной и обработанной на первом этапе, и по информации, заложенной в Пакете, планировщик выбирает «скелет». Определяет конкретные имена модулей, которыми нужно его заполнить, планирует интерфейс по данным. Результатом работы второго этапа является таблица макроопределений, которая будет использована на третьем этапе.

Третий этап: макропроцессор. По информации, заложенной в «скелетах» и модулях, и по таблицам макроопределений средствами нестандартного сервиса из «скелета» получается рабочая программа, производится настройка текстов используемых в ней модулей. Полученная программа может быть оттранслирована, записана в библиотеку Пакета. Далее, тело программы, созданное генератором, передается программе Счет, которая проводит расчет по этой программе.

## • § 12. Комплекс программ для численного решения уравнений Навье — Стокса

Этот комплекс, разработанный группой сотрудников Института проблем механики, представляет программную реализацию математической модели конвективного тепло- и массообмена, рассмотренную в §§ 6.1 и 6.6. Первый вариант комплекса был реализован на языке АЛГОЛ применительно к ЭВМ БЭСМ-4М [16], [17], [21]. Вариант комплекса на языке ФОРТРАН применительно к ЭВМ серии ЕС реализован в [18]—[20]. Данный параграф написан по материалам препринта [18] (см. также [23]).

12.1. Входные и выходные данные. Исходная информация физического характера, необходимая для осуществления численного моделирования с помощью данного комплекса, следует из характера начальных и граничных условий и определения критериев подобия, рассмотренных в §§ 6.1 и 6.6. Требуется знать:

- 1) Геометрию (плоская  $k = 0$ , осесимметричная  $k = 1$ ).
- 2) Основные размеры расчетной области.
- 3) Начальные состояния системы (поля величины  $u^0, v^0, T^0, C^0$ ).
- 4) Граничные условия для полей скорости, температуры и концентрации. В частности, требуется знать характер тепло- и массообмена на границе и пространственно-временные изменения граничных условий (например, кривые нагрева или охлаждения, растворимости, градиенты температур и концентраций).
- 5) Характер массовых сил (пространственно-временное распределение).

6) Состав и физические свойства рабочего вещества:  $c$  — концентрацию примесей,  $\nu = \mu/\rho_0$  — коэффициент кинематической вязкости смеси,  $a$  — коэффициент температуропроводности,  $\rho_0$  — плотность,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $c_p$  — удельную теплоемкость при постоянном давлении,  $D$  — коэффициент диффузии,  $\beta_T$  — коэффициент температурного расширения,  $\beta_c$  — коэффициент «концентрационного расширения».

При рассмотрении процессов на свободной поверхности жидкости требуются дополнительные данные.

Численное моделирование с использованием комплекса начинается с определения физических параметров моделируемого объекта. Искусство целесообразного использования комплекса заключается также в расчленении сложной задачи на этапы и в определении эффективных (характерных) геометрических размеров и граничных условий. Далее должна быть проведена полная безразмерная формализация задачи и выполнены оценки необходимых сеточных параметров для ее решения. Следующие этапы — непосредственное использование вычислительного Пакета, программ обработки и графической визуализации и, наконец, определение искомого физического результата из полученных формализованных значений, его оценка, практическое использование, т. е. сопоставление с опытным или ожидаемым результатом.

Непосредственной выходной информацией счетной части комплекса являются числовые значения величин  $u, v, T, C$  в узлах разностной сетки в различные моменты времени. Объем информации существенно зависит от характера задачи и составляет по опыту решенных задач  $10^3$ — $10^4$  чисел для стационарных задач,  $10^4$ — $10^6$  чисел для нестационарных ламинарных режимов и  $10^6$ — $10^8$  числе для переходных и турбулентных режимов.

**12.2. Структура комплекса.** Для больших программных комплексов в настоящее время используется ряд общих принципов и понятий [1]—[10] (модульная структура, функциональное наполнение, системное наполнение и т. д.), кокретное содержание которых, а также соотношение между ними и вопросы программной реализации в значительной степени зависят от их специфики.

На этапе разработки программного комплекса для уравнений Навье — Стокса основное внимание уделялось вопросам функционального наполнения. При последующей эксплуатации комплекса приобретает большое значение усовершенствование взаимодействия Пользователь — Комплекс.

Все программы данного комплекса делятся по назначению на четыре основные группы: группа вычислительных программ, группы программ статистической и графической обработки, группа вспомогательных программ. Группы объединены общим форматом обрабатываемых данных, однако в ряде случаев могут быть использованы автономно. Каждая группа состоит из отдельных мо-

дулей, причем комплекс допускает включение в группы новых модулей, замену отдельных модулей при условии сохранения вида обращения к модулю и формата обрабатываемых данных. Рассмотрим каждую из упомянутых групп подробнее.

12.3. Группа вычислительных программ. Эта группа является реализацией описанной в §§ 6.3—6.6 методики решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса. Назначение, название и длина каждого из модулей этой группы даны в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

Группа вычислительных программ комплекса

№№ п/п.	Назначение модуля	Название модуля	Длина п/к
1	Управление решением системы уравнений переноса и уравнения Пуассона на временном слое	COMPLD	34
2	Решение уравнения Пуассона	PUASD	102
3	Решение уравнения переноса	SPND	101
4	Расчет граничных условий для вихря и функции тока	BOUND	44
5	Вычисление правой части уравнения переноса	PCHD	20
6	Контроль точности решения уравнения Пуассона	CNTRD	26
7	Расчет по формулам обратной прогонки	RTN	16
8	Одномерное быстрое преобразование Фурье (БПФ)	RPA	39
9	Вычисление матрицы коэффициентов для БПФ	SETFT	28
10	Расчет оптимального набора итерационных параметров для решения уравнений Пуассона	OPTIMJ	32

Одной из важнейших характеристик программы для решения двумерных гидродинамических задач является время счета, использовавшееся в качестве основного параметра при ее создании. Помимо основных расчетных массивов введены дополнительные массивы скоростей ( $u$ ,  $v$ ) в правой части ( $F$ ), что позволяет сократить машинное время за счет увеличения используемой оперативной памяти. С тем чтобы уменьшить временные затраты, модули расчета в декартовой и цилиндрической системах координат выполнены независимо. При написании каждого из модулей проводился анализ организации счета отдельных элементов программы, оптимизации и т. п.

На основе опыта эксплуатации можно сделать вывод, что зависимость времени счета одного временного шага от количества узлов неравномерной сетки при решении уравнений Навье — Стокса (приближение Буссинеска) в декартовой системе координат практически линейна:  $t_{\text{сек}} = 0,004 N$  для  $N \geq 400$  и ЭВМ ЕС-1040. (Для БЭСМ-4М тот же показатель для  $400 \leq N \leq 4000$  будет  $t_{\text{сек}} = 0,025 N$ .)



**12.4. Группы программ обработки информации.** В комплексе предусмотрены различные программы и виды обработки получаемой при счете информации:

— статистические — для определения моментов физических полей, корреляционных и спектральных функций;

— функциональные — для определения некоторых, часто используемых характеристик, таких, как поток тепла, компонент уравнений баланса энергии;

— графические — для вывода распределений значений полей вдоль выбранного направления либо во времени, для изображения структуры течений;

— вспомогательные — для организации обмена данными с внешними устройствами, реорганизации структуры наборов данных и др.

Отметим, что создание в рамках комплекса разветвленной системы обработки результатов (значительно превышающей по объему счетную часть) является одной из специфических особенностей комплекса и следствием широкого круга задач, решаемых с его помощью. Это связано также с тем, что характер решения (режим течения) зачастую заранее неизвестен.

**12.4.1. Группа программ статистической обработки.** Так как решения нестационарных уравнений Навье — Стокса с ростом числа Рейнольдса приобретают неупорядоченный стохастический характер, а при дальнейшем росте числа Рейнольдса перестают зависеть от начальных данных, имеет смысл описывать их только в терминах средних величин. Для анализа таких режимов, а также для их обоснованного выделения применяется статистическая обработка. Статистической обработке подвергается реализация (значения полей  $u^n, v^n, T^n, C^n$  в моменты времени  $t_n$ ) на интервале  $t_0, t_N$ , называемом *участком обработки*. Участок обработки должен иметь длину, достаточную для получения достоверных статистических характеристик. Он выделяется из всей численной реализации по установлению средних значений с помощью диаграмм максимальных и минимальных значений среднего, вычисленного в разных местах реализации по разному числу точек.

Статистическая обработка выполняется в два этапа. На первом этапе определяются средние величины, а также градиенты средних величин. На втором этапе вычисляются пульсационные составляющие ( $u' = u - \bar{u}, v' = v - \bar{v}$  и т. д.) и средние произведения пульсаций  $\overline{u'v'}, \overline{v'T'}$ , турбулентная вязкость  $\nu_T = \overline{u'v'}/(\partial\bar{u}/\partial y)$  и турбулентная теплопроводность  $a_T = \overline{v'T'}/(\partial\bar{T}/\partial y)$ , турбулентное число Прандтля  $Pr_T = \nu_T/a_T$ , а также локальные числа Нуссельта, Рэлея и другие характеристики.

Перечислим основные характеристики, которые определяют в ходе вычислительного эксперимента:

— начало стационарного участка, пригодного для статистической обработки;

— средние, дисперсии всех физических величин ( $u, v, T, C$ ), а также их градиентов в каждой точке двумерного поля;

— средние от произведений пульсаций физических величин ( $\overline{u'v'}$  и т. д.);

— коэффициенты турбулентного переноса;

— локальные и интегральные числа Нуссельта и Рэлея;

— корреляционные функции (точнее, двухточечные моментные функции);

- макро- и микромасштабы длины и времени корреляционных функций;
- спектры (точнее, оценки спектральной плотности энергии);
- составляющие баланса турбулентной энергии.

Назначение, наименование и длина отдельных модулей этой группы приведены в таблице 2.

Т а б л и ц а 2

Программы статистической обработки

№№ п/п.	Назначение модуля	Название модуля	Длина п/к
1	Расчет средних, дисперсий и др. по полям функции тока и температуры	STTSTK	155
2	Расчет средних, дисперсий, средних градиентов и др. для произвольного числового поля	ARSTTT	90
3	Расчет локальных чисел Нуссельта и Рэлея	NURA	3
4	Расчет траекторий «частиц»	TREK	44
5	Расчет статистических характеристик турбулентных режимов течения в разных сечениях	TURBD	111
6	Расчет составляющих баланса турбулентной энергии	POWTUR	130
7	Проверка на стационарность	SERTST	91
8	Устранение тренда, расчет пульсаций и др.	TREND	74
9	Расчет серии одномерных спектров	SPCTR 1	33
10	Расчет спектрального окна	WINDOW	18

Модули статистической обработки делятся на две группы: а) модули для работы с исходными массивами информации, которые могут использоваться как для статистической обработки полей параллельно с процессом расчета, так и полей, записанных во внешней памяти в том же виде, в котором они хранятся в оперативной памяти, и б) модули для работы с преобразованными массивами информации. В последнем случае обработка производится над упорядоченными во времени наборами величин, которые могут быть получены либо непосредственной выборкой значений в отдельных точках во время счета, либо специальными программами преобразования информации независимо от процесса счета. Такая возможность обработки «произвольной» статистической информации имеет важное значение для единообразного подхода к численному и экспериментальному материалам.

**12.4.2. Группа программ графической обработки.** Эта группа предназначена для визуального представления информации, полученной во время расчета либо являющейся выходной для группы программ статистической обработки. Она включает программы изображения одномерных массивов, а также двумерных скалярных и векторных полей и траекторий движения частиц. Основные принципы, положенные в основу работы этой группы, — простота обращения к отдельным модулям, возможность обработки информации

без специальных преобразований ее, оптимизация работы графопостроителя сокращением или полной ликвидацией «холостых» пробогов пишущего узла и т. п. Здесь не ставилась задача создания универсального графического пакета (наподобие, например, комплекса ГРАФОР [22]), а сделана попытка максимально облегчить использование графопостроителя для наиболее распространенных случаев. С этой целью широко использовалось введение стандартных параметров, приемлемых в наиболее распространенных ситуациях; количество обращений к программам и количество параметров сведено к минимуму; полностью исключены обращения к базовой системе элементарных программ.

Использование графической обработки в комплексе программ позволяет:

- строить линии равного уровня любого физического поля;
- маркировать локальные экстремумы физических полей;
- строить аксонометрические изображения полей;
- строить (с автоматическим выбором масштабов и размещением на планшете) одномерные графики распределения скорости, температуры, потоков тепла, статистических и других характеристик вдоль одной из координатных осей при фиксированном значении второй координаты;
- строить зависимость различных характеристик как функцию времени в заданной точке;
- строить траектории движения одной или нескольких «частиц», исходя из их начального «положения», за определенный интервал времени;
- изучать структуру фазового пространства.

Назначение, наименование и длина отдельных модулей этой группы приведены в таблице 3.

Графические программы

Таблица 3

№№ пп.	Назначение модуля	Название модуля	Длина п/к
1	Одномерные графики, их расположение, выбор масштабов и др.	GRAF 1	160
2	Черчение осей координат, их разметка и надпись названия осей	AXIS 1	98
3	Выбор масштабов	SCALE 1	50
4	Построение линий равного уровня	IZEXTR	252
5	Построение аксонометрических проекций	AXONOM	166
6	Построение векторного поля	VECTOR	49
7	Поиск и вывод на график локальных экстремумов	SUPIN	62
8	Вывод на график траекторий «частиц»	GRTREK	70
9	Построение линий равного уровня на АЦПУ	IZLIN	148

12.4.3. Группа вспомогательных программ. В эту группу включены программы, связанные с вводом, выводом, преобразованием и обменом информацией между носителями. Программа начального

ввода данных осуществляет подготовку массивов и COMMON-блоков для последующей работы группы вычислительных программ. Она осуществляет либо присвоение некоторых стандартных данных, либо восстановление информации, записанной ранее на внешний носитель (контрольная точка). Назначение, наименование и длины отдельных модулей этой группы даны в таблице 4.

Т а б л и ц а 4

Вспомогательные программы

№№ пп.	Назначение модуля	Название модуля	Длина п/к
1	Перепаковка из $N$ массивов размером $M$ в $M$ массивов размером $N$	MEMORY	342
2	Унифицированный обмен данными между различными программами и ВЗУ	READ 1	17
3, 4	Создание контрольной точки и восстановление счета (только для вычислительных модулей)	VV Ø VV 2	116 36
5	Анализ и распечатка «оглавления» файла последовательного доступа	TFILE	29
6	Интерполяция значений полей на другую разностную сетку	INTERP	37
7	Оперативная обработка и печать информации в процессе счета	PDAT	38
8	Расчет шагов неравномерной сетки	GRID	48

**12.5. Вопросы управления модулями.** Связь между отдельными модулями осуществляется через иерархическую структуру, в вершине которой находится основная программа — единственная изменяемая от задачи к задаче часть комплекса. Основная программа обычно содержит следующие четыре элемента: 1) описание многомерных массивов и COMMON-блоков; 2) вызов модуля задания начальных условий (или чтения с ВЗУ контрольной точки); 3) вызов модуля, управляющего счетной частью; 4) вызов модуля обработки (записи на ВЗУ) результатов. При обработке результатов сделанного ранее расчета 3-й элемент может отсутствовать. Основная программа может также содержать любые другие элементы, необходимые для расчета, анализа и обработки численных реализаций. Объем ее обычно составляет несколько десятков перфокарт.

Нижние уровни структуры составляют так называемые базовые модули, которые несут основную функциональную нагрузку. Каждый базовый модуль является конкретной реализацией алгоритма вычислений или обработки и содержит, как правило, логически простую линейную запись операторов. Логические функции объединения базовых модулей, создания некоторых стандартных режимов работы и фактически взаимодействия с пользователем несет третья и последняя группа модулей — «управляющие». Степень развития этой группы, правильность выбора стандартных режимов, соотношение информации, задаваемой пользователем и выбираемой по умолчанию, в основном определяют удобство работы с описываемым комплексом.

Для вызова отдельных частей библиотеки используются различные возможности, заложенные в программе Редактор ОС ЕС ЭВМ: аппарат автоматического разрешения внешних ссылок, управляющие параметры INCLUDE и REPLACE. При написании программ использованы различные методы оптимизации, которые трудно было бы реализовать при более мелком функциональном делении модулей.

### Литература к дополнению 3

1. Комплексы программ математической физики. Сб. научных трудов.— Новосибирск, 1972.
2. Труды III Всесоюзного семинара по комплексам программ математической физики. Сб. научн. трудов/Под ред. Н. Н. Яненко.— Новосибирск, 1973.
3. Труды IV Всесоюзного семинара по комплексам программ математической физики. Сб. научных трудов/Под ред. Н. Н. Яненко.— Новосибирск, 1976.
4. Комплексы программ математической физики (материалы V Всесоюзного семинара по комплексам программ математической физики)/Под ред. Н. Н. Яненко.— Новосибирск, 1978.
5. Комплексы программ математической физики (материалы VI Всесоюзного семинара по комплексам программ математической физики)/Под ред. Н. Н. Яненко.— Новосибирск, 1980.
6. Горбунов-Посадов М. М., Карпов В. Я., Корягин Д. А., Красотченко В. В., Мартынюк В. В. Пакет прикладных программ САФРА. Системное наполнение.— М., 1977. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: № 85).
7. Гайфуллин С. А., Карпов В. Я., Мищенко Т. В. САФРА. Функциональное наполнение. Система OLYMPUS.— М., 1980. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: № 27).
8. Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. ТЕКОН-пакет программ для решения тепловых задач.— М., 1978. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: № 65).
9. Карпов В. Я., Корягин Д. А., Самарский А. А. Принципы разработки пакетов прикладных программ для задач математической физики.— ЖВМ и МФ, 1978, 18, № 2.
10. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Некоторые проблемы развития пакетов программ для решения задач аэродинамики.— Числ. методы механ. сплошной среды, 1979, 10, № 3.
11. Пасконов В. М., Росляков Г. С. Архитектура пакета прикладных программ для решения задач аэродинамики.— В кн.: Вычисл. методы и программир., вып. 30.— М.: Изд. МГУ, 1979.
12. Пакет прикладных программ по аэрогидродинамике ГАММА. Системная часть.— Сб. работ/Под ред. В. М. Пасконова, Г. С. Рослякова.— М.: Изд. МГУ, 1980.
13. Пакет прикладных программ по аэрогидродинамике ГАММА. Наполнение пакета.— Сб. работ/Под ред. В. М. Пасконова, Г. С. Рослякова.— М.: Изд. МГУ, 1981.
14. Шолохович Е. Ф. Модульный анализ и генерация программ решения задач теории пограничного слоя.— В кн.: Численные методы в аэродинамике.— М.: Изд. МГУ, 1980.
15. Бежапов М. М. Проектные спецификации пакетов прикладных программ.— Новосибирск, 1980. (Препринт/ВЦ СО АН СССР: № 225).

16. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Исследование некоторых разностных схем и аппроксимаций граничных условий для численного решения уравнений тепловой конвекции.— М., 1974. (Препринт/Институт проблем механики АН СССР: № 40).
17. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Численное моделирование турбулентного режима конвекции в вертикальном слое.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1977, № 5.
18. Бунэ А. В., Грязнов В. Л., Дубовик К. Г., Полежаев В. И. Методика и Комплекс программ численного моделирования гидродинамических процессов на основе нестационарных уравнений Навье — Стокса.— М., 1981. (Препринт/Институт проблем механики АН СССР: № 173).
19. Бунэ А. В., Грязнов В. Л. Обработка научной информации с помощью графообразователя.— М., 1979. (Препринт/Институт проблем механики АН СССР: № 135).
20. Грязнов В. Л., Дубовик К. Г., Полежаев В. И. Методика и комплекс программ для численного моделирования технологических процессов в условиях невесомости.— В кн.: Научные чтения по авиации и космонавтике.— М.: Наука, 1980.
21. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Численное решение нестационарных уравнений Навье — Стокса для турбулентного режима естественной конвекции.— М., 1977 (Препринт/Институт проблем механики АН СССР: № 81).
22. Баяковский Ю. М., Михайлова Т. Н., Мишакова С. Т. Графор: Комплекс графических программ на ФОРТРАНе.— М., 1972. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: вып. 1, № 41).
23. Бунэ А. В., Грязнов В. Л., Дубовик К. Г., Полежаев В. И. Комплекс прикладных программ для моделирования процессов гидродинамики, тепло- и массообмена на основе нестационарных уравнений Навье — Стокса.— В кн.: Пакеты прикладных программ. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1983.

*Вилён Михайлович Пасконов,  
Вадим Иванович Полежаев,  
Лев Алексеевич Чудов*

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА**

Редактор *Т. Н. Галишикова*  
Техн. редактор *Е. В. Морозова*  
Корректоры *Г. В. Подвольская, А. Л. Ипатова*

ИБ № 11744

Сдано в набор 20.05.83. Подписано к печати 04.01.84. Т-01605.  
Формат 84×108<sup>1/32</sup>. Бумага тип. № 2. Обыкновенная гарнитура.  
Высокая печать. Условн. печ. л. 15,12. Условн. кр.-отт. 15,12.  
Уч.-изд. л. 16,22. Тираж 9000 экз. Заказ № 634. Цена 85 коп.

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»  
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

117071, Москва, В-74, Ленинский проспект, 15

**ВЫШЕЛ ИЗ ПЕЧАТИ**

**Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ.— 5-е изд., стереотип.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы.**

Справочник завоевал прочную популярность среди научных работников самого различного профиля, а также среди инженеров. В нем содержится изложение на современном уровне всех разделов математики, применяемых в работе инженеров и научных работников естественнонаучных специальностей. Значительно отличается от справочников И. Н. Бронштейна, К. А. Семендяева и подбором материала, и способом изложения.

*Предварительные заказы на эту книгу принимаются без ограничений магазинами Книготорга и Академкниги.*



**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

**ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ**

Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. **Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учебное пособие.** — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы.

Сборник содержит задачи по всем основным разделам курса функционального анализа, читаемого в вузах. Он ориентирован на учебное пособие В. А. Треногина «Функциональный анализ», вышедшее в 1980 г. Рамки задачника несколько шире требований программы. В задачник вошли такие разделы, как: «Нелинейные операторные уравнения в банаховых пространствах», «Дискретные приближения решений операторных уравнений», «Монотонные операторы», «Элементы теории экстремумов и выпуклого анализа» и др.

Для студентов по специальности «Прикладная математика», для инженерно-физических специальностей, а также для студентов по специальности «Математика».

*Предварительные заказы на эту книгу принимаются без ограничений магазинами Книготорга и Академкниги.*