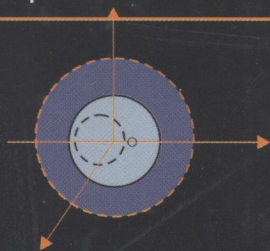


М. О. Перестюк, В. В. Маринець

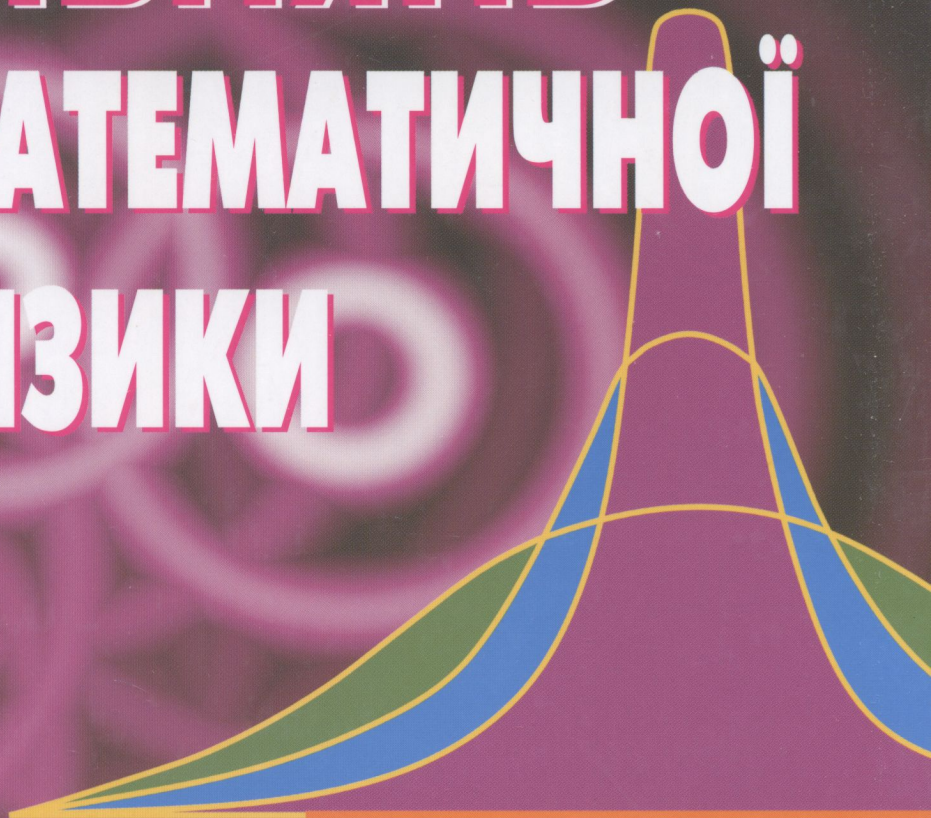
**ТЕОРІЯ**



**РІВНЯНЬ**

**МАТЕМАТИЧНОЇ**

**ФІЗИКИ**



ПІДРУЧНИК

3870-13

517.9(075)  
П27

М. О. Перестюк, В. В. Маринець

---

# ТЕОРІЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

*Затверджено Міністерством освіти і науки України*

Підручник для студентів  
фізико-математичних  
та інженерних спеціальностей  
університетів



Київ  
«Либідь»  
2006

Розповсюдження й тиражування  
без офіційного дозволу видавництва заборонено

Рецензенти:

акад. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. М. Самойленко*;  
акад. АПН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. І. Шкіль*;  
д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. М. Станжицький*

*Затверджено Міністерством освіти і науки України*  
(лист № 14/18.2—883 від 26.04.2004)

Редакція літератури  
з природничих і технічних наук  
Головний редактор *Т. В. Ковтуненко*  
Редактор *А. С. Мнишенко*

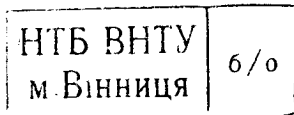
**Перестюк М. О., Маринець В. В.**  
П27 Теорія рівнянь математичної фізики: Підручник. — К.: Либідь, 2006. — 424 с.  
ISBN 966-06-0411-4.

Наведено основні поняття й означення теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП), викладено класифікацію та зведення до канонічного вигляду квазілінійних ДРЧП другого порядку. Висвітлено деякі питання теорії ДРЧП гіперболічного, параболічного та еліптичного типів. Розглянуто низку фізичних процесів, які приводять до рівнянь зазначених типів. Особливу увагу приділено строгому математичному обґрунтуванню методів побудови розв'язків розглядуваних задач та фізичній інтерпретації добутих результатів.

Для студентів фізико-математичних та інженерних спеціальностей університетів.

ББК 22.311я73

ISBN 966-06-0411-4



© М. О. Перестюк,  
В. В. Маринець, 2006

## ВСТУП

**М**атематично описуючи різні явища природи, часто приходять до математичних моделей у вигляді рівнянь, які містять незалежні змінні, невідому функцію та її похідні. Такі рівняння називають диференціальними. Цей термін уперше запропонував Г. В. Лейбніц у 1676 р. З виникненням і наступним розвитком теорії диференціальних рівнянь з'явився потужний засіб моделювання та дослідження різноманітних найскладніших задач науки й техніки. Математичний апарат диференціальних рівнянь дає змогу проникнути в мікросвіт детермінованих явищ і процесів, описати механізм їх розвитку й тим самим передбачити їхнє майбутнє.

Диференціальні рівняння, в яких невідома функція залежить від двох і більше незалежних змінних, називають диференціальними рівняннями з частинними похідними (ДРЧП).

Розділ математики, який вивчає ДРЧП, що описують різноманітні фізичні явища, називають математичною фізикою. До фізичних процесів належать явища, які вивчаються в гідродинаміці, теорії пружності, електродинаміці, теорії теплопровідності, квантовій механіці, атомній фізиці тощо.

Назва «математична фізика» пояснюється тим, що метод дослідження, який застосовується в цій галузі науки, є математичним по суті. Однак постановка задач у цій галузі, що тісно пов'язана з вивченням фізичних явищ, має специфічні особливості. Так, початкова й кінцева стадії процесу якісно різняться між собою, що вимагає застосування різних математичних методів.

Інтенсивна розробка методів математичної фізики почалася після опублікування 1687 р. «Математичних начал натуральної філософії» І. Ньютона й була зумовлена дослідженням проблем усесвітнього тяжіння й теорії світла. Найвищі досягнення в розвитку методів класичної математичної фізики пов'язані з іменами Ж. Л. Лагранжа, Л. Ейлера, Ж. Л. Д'Аламбера, П. С. Лапласа, Д. Бернуллі,

*Ж. Б. Ж. Фур'є, К. Ф. Гаусса, О. Л. Коші, Г. Ф. Б. Рімана,  
М. В. Остроградського, О. М. Ляпунова, В. А. Стеклова та  
багатьох інших учених.*

*Як самостійний науковий напрям математична фізика  
сформувалася в другій половині ХІХ ст., коли виникла потреба  
в розробці методів розв'язання лінійних ДРЧП другого порядку  
стосовно різних фізичних процесів.*

*Зазначимо, що математична фізика досліджує не лише  
конкретні методи інтегрування рівнянь, а й загальні питання —  
коректності постановки задач, існування та єдиності їх  
розв'язків тощо (якісна теорія ДРЧП).*

*Постійний розвиток математичної фізики зумовлений її  
тісним зв'язком із фундаментальними напрямками досліджень  
у суміжних областях природничих наук.*

## Основні позначення

У підручнику оперуємо з полем дійсних чисел і з дійсними функціями однієї або кількох дійсних змінних.

$E_n$  —  $n$ -вимірний евклідов простір

$E = E_1$  — множина всіх дійсних чисел

$N$  — множина всіх цілих додатних чисел

$M_1 \times M_2$  — декартів добуток множин

$M_1 \cup M_2$  — об'єднання множин

$M_1 \cap M_2$  — переріз (перетин) множин

$M_1 \setminus M_2$  — різниця множин

$B$  — область в  $E_n$

$\partial B$  — межа області  $B$

$\bar{B} = B \cup \partial B$  — замикання області  $B$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — точка в  $E_n$

$(x, y)$  — точка в  $E_2$

$\{x \mid \dots\}$  — множина елементів  $x$

$[a, b]$  — замкнений проміжок (відрізок)  
 $\{x \in E \mid a \leq x \leq b\}$

$(a, b)$  — відкритий проміжок (інтервал)  
 $\{x \in E \mid a < x < b\}$

$[a, b)$  — напіввідкритий інтервал  
 $\{x \in E \mid a \leq x < b\}$

$A \equiv B$  — конгруентність, тотожність, логічна рівносильність

$\Leftrightarrow$  — тоді й лише тоді (знак еквівалентності)

$\Rightarrow$  — впливає (знак імплікації)

$\sum$  — знак суми

$\xrightarrow[m, \dots, l]{E}$  — рівномірна збіжність

$\subset$  — знак включення для множин

$\supset$  — знак умісту для множин

$\in$  — знак належності

$\notin$  — знак неналежності

$\ni$  — знак умісту для елементів

$y^{(s)}(x) \equiv \frac{d^s y(x)}{dx^s}$  — похідна порядку  $s$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — мультиіндекс

$|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$  — довжина мультиіндексу  $\alpha$

$\frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv u_{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}} \equiv D^\alpha u(x)$  — частинна похідна порядку  $|\alpha|$

$\left. \begin{array}{l} C^{|\alpha|}(B) \\ C^\alpha(B) \\ C^\alpha(\bar{B}) \\ C^k(a, b) \end{array} \right\}$  — простори гладких функцій

$\{u_n(x)\}$  — послідовність функцій

$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  — якобіан

$A^T$  — транспонована матриця

$A^{-1}$  — обернена матриця

$|A| \equiv \det A$  — детермінант матриці  $A$

$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  — оператор Лапласа

$\equiv \Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  — оператор Лоренца

$\text{grad } U(x)$  — градієнт функції  $U(x)$

$S_R(x)$  — сфера радіусом  $R$  із центром у точці  $x$

$K_R(x)$  — куля радіусом  $R$  із центром у точці  $x$

$K_R(x, y)$  — круг радіусом  $R$  із центром у точці  $(x, y)$

$\vec{x}$  — вектор

$\text{const}$  — стала

$\text{Re } z$  — дійсна частина комплексного числа  $z$

$[AB]$  — відрізок

$\int_{\cup AB}$  — криволінійний інтеграл

$\iint_B$  — подвійний інтеграл

$\iiint_S$  — поверхневий інтеграл

$\iint \dots \int_B$  — кратні інтеграли

$\overline{1, n}$  — відрізок натурального ряду

$\cup M_1 M_2$  — дуга

$\forall$  — для кожного, для всіх (квантор загальності)

$\exists$  — існує (квантор існування)



# КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

## 1.1

### Основні поняття й означення теорії ДРЧП

- **Означення 1.1.** Співвідношення між незалежними змінними  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , невідомою функцією  $u(x_1, x_2, \dots, x_m)$  та її частинними похідними називають **диференціальним рівнянням із частинними похідними**.
- **Означення 1.2.** Диференціальне рівняння називають **рівнянням  $n$ -го порядку**, якщо воно містить хоча б одну частинну похідну  $n$ -го порядку й не містить похідних вищого порядку.

У загальному випадкові рівняння  $n$ -го порядку має вигляд

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}, \dots, u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}}) = 0, \quad (1.1)$$

де  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = n$  ( $\alpha_i$  — цілі невід'ємні числа);

$$u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}} = \frac{\hat{\partial}^n u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\hat{\partial} x_1^{\alpha_1} \hat{\partial} x_2^{\alpha_2} \dots \hat{\partial} x_m^{\alpha_m}}.$$

Введемо позначення:  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  — цілочисловий вектор (мультиіндекс) із невід'ємними координатами  $\alpha_i$ ;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ;

$|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$  — довжина мультиіндексу  $\alpha$ ;

$$D^\alpha u(x) = \frac{\hat{\partial}^{|\alpha|} u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\hat{\partial} x_1^{\alpha_1} \hat{\partial} x_2^{\alpha_2} \dots \hat{\partial} x_m^{\alpha_m}}.$$

Тоді рівняння (1.1) можна записати в такому вигляді:

$$F(x, u, \dots, D^\alpha u(x)) = 0.$$

- **Означення 1.3.** ДРЧП називають **лінійним**, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та всіх її частинних похідних.

Лінійне рівняння другого порядку має вигляд

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x). \quad (1.2)$$

- **Означення 1.4.** Якщо в рівнянні (1.2)  $f(x) = 0$ , то його називають **лінійним однорідним**. Якщо коефіцієнти  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  є сталими, то рівняння (1.2) називають **лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами**.
- **Означення 1.5.** ДРЧП називають **квазілінійним**, якщо воно лінійне відносно похідних найвищого порядку.

Згідно з означенням квазілінійне диференціальне рівняння другого порядку записується у вигляді

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m})u_{x_i x_j} = \Phi(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}).$$

- **Приклад 1.1.** З'ясуємо, чи є наведені нижче рівності диференціальними рівняннями з частинними похідними й ідентифікуємо їх.

1.  $\cos^2(u_{xx} + u_{yy}) + \sin^2(u_{xx} + u_{yy}) = 1.$

Ця тотожність не є ДРЧП.

2.  $xu_{x^2 y}(x, y) + [u_x(x, y)]^{10} = f(x, y).$

Це квазілінійне рівняння третього порядку з двома незалежними змінними.

3.  $yu_{x^2 y^2}(x, y) - xu_{x^4}(x, y) = xuy(x, y).$

Це лінійне однорідне рівняння четвертого порядку з двома незалежними змінними.

4.  $[u_{x^3 y^2}(x, y)]^3 - uy_x = 0.$

Це нелінійне ДРЧП п'ятого порядку з двома незалежними змінними.

- **Означення 1.6.** Усяку  $n$  разів неперервно диференційовну в області задання рівняння (1.1) функцію  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , підставлення якої в

рівняння замість невідомої функції та її частинних похідних перетворює його на тотожність за незалежними змінними, називають **регулярним розв'язком рівняння (1.1)**.

Надалі досліджуватимемо лише регулярні розв'язки.

■ **Приклад 1.2.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$\sum_{i=1}^n (u_{x_i}(x_1, \dots, x_n))^2 = 0.$$

Ця рівність виконується, якщо  $u_{x_i} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , тобто  $u = \text{const}$  є розв'язком даного рівняння.

Легко побачити, що сума довільних двічі неперервно диференційовних функцій  $\varphi_1(x + y)$  і  $\varphi_2(x - y)$  є розв'язком диференціального рівняння  $u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) = 0$ .

Очевидно, рівняння  $\sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2 + 1 = 0$  розв'язку не має.

Як видно з наведених прикладів, диференціальні рівняння з частинними похідними можуть мати нескінченну множину розв'язків. Тому, коли фізична задача зводиться до ДРЧП, для однозначного опису розглядуваного процесу необхідно до рівняння приєднати деякі додаткові умови, які впливають із постановки задачі.

## 1.2

### Класифікація ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними

Розглянемо квазілінійне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними

$$a_{11}(x, y) u_{xx} + 2a_{12}(x, y) u_{xy} + a_{22}(x, y) u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \quad (1.3)$$

Усі диференціальні рівняння вигляду (1.3) можна поділити на три основних типи: гіперболічні, параболічні та еліптичні. В кожному разі заміною незалежних змінних  $x, y$  рівняння (1.3) зводиться до найпростішого — канонічного — вигляду. Тому, вивчаючи рівняння з двома незалежними змінними, надалі обмежимося дослідженням їхніх канонічних форм.

Для зведення рівняння (1.3) до найпростішого вигляду введемо нові незалежні змінні:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (1.4)$$

де  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  — неперервні функції разом із частинними похідними до другого порядку включно, а

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Очевидно, що підстановкою (1.4) досягається взаємно однозначна відповідність між точками  $(x, y)$  і  $(\xi, \eta)$  відповідних областей, тобто з (1.4)  $x$  та  $y$  визначаються як однозначні функції незалежних змінних  $\xi$  і  $\eta$ :  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ .

Як же вибрати функції  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$ , щоб рівняння (1.3) звелось до простішого вигляду? Аби відповісти на це запитання, вводимо в рівняння (1.3) нові незалежні змінні (1.4). Маємо

$$u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = U(\xi, \eta),$$

$$u_x = U_x((\varphi(x, y), \psi(x, y))) = \varphi_x U_\xi + \psi_x U_\eta,$$

$$u_y = \varphi_y U_\xi + \psi_y U_\eta, \quad (1.5)$$

$$u_{xx} = \varphi_x^2 U_{\xi\xi} + 2\varphi_x \psi_x U_{\xi\eta} + \psi_x^2 U_{\eta\eta} + \varphi_{xx} U_\xi + \psi_{xx} U_\eta,$$

$$u_{yy} = \varphi_y^2 U_{\xi\xi} + 2\varphi_y \psi_y U_{\xi\eta} + \psi_y^2 U_{\eta\eta} + \varphi_{yy} U_\xi + \psi_{yy} U_\eta,$$

$$u_{xy} = \varphi_x \varphi_y U_{\xi\xi} + (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) U_{\xi\eta} + \psi_x \psi_y U_{\eta\eta} + \varphi_{xy} U_\xi + \psi_{xy} U_\eta.$$

Підставивши знайдені похідні (1.5) у рівняння (1.3), дістаємо

$$\alpha_{11} U_{\xi\xi} + 2\alpha_{12} U_{\xi\eta} + \alpha_{22} U_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta), \quad (1.6)$$

де

$$\alpha_{11} = a_{11} \varphi_x^2 + 2a_{12} \varphi_x \varphi_y + a_{22} \varphi_y^2,$$

$$\alpha_{12} = a_{11} \varphi_x \psi_x + a_{12} (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + a_{22} \varphi_y \psi_y, \quad (1.7)$$

$$\alpha_{22} = a_{11} \psi_x^2 + 2a_{12} \psi_x \psi_y + a_{22} \psi_y^2.$$

Зазначимо, що за умови лінійності (1.3) рівняння (1.6) також було б лінійним.

Розглянемо ДРЧП першого порядку

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0. \quad (1.8)$$

Нехай  $z = \varphi(x, y)$  — деякий частинний розв'язок цього рівняння. Тоді, поклавши  $\xi = \varphi(x, y)$ , із (1.7) матимемо, що  $\alpha_{11} \equiv 0$ . Отже, задача про вибір нових незалежних змінних зводиться до інтегрування рівняння (1.8).

Надалі вважатимемо, що коефіцієнти рівняння (1.3) є неперервними функціями разом із частинними похідними до другого порядку включно в розглядуваній області й не перетворюються одночасно в нуль. Тоді, якщо  $a_{11} \neq 0$ , то рівняння (1.8) можна подати у вигляді

$$[a_{11}z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_y][a_{11}z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_y] = 0$$

або при  $a_{22} \neq 0$

$$[a_{22}z_y + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_x][a_{22}z_y + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_x] = 0,$$

де  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ .

Кожне з наведених рівнянь розпадається на два:

$$a_{11}z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_y = 0, \quad (1.9)$$

$$a_{11}z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_y = 0$$

або

$$a_{22}z_y + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_x = 0, \quad (1.10)$$

$$a_{22}z_y + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_x = 0.$$

Отже, розв'язки кожного з рівнянь — (1.9) або (1.10) — будуть розв'язками рівняння (1.8).

Щоб зінтегрувати рівняння (1.9) або (1.10), складаємо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} - \sqrt{\Delta}}$$

або

$$\frac{dy}{a_{22}} = \frac{dx}{a_{12} + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dy}{a_{22}} = \frac{dx}{a_{12} - \sqrt{\Delta}},$$

звідки дістаємо

$$a_{11}dy - (a_{12} + \sqrt{\Delta})dx = 0, \quad a_{11}dy - (a_{12} - \sqrt{\Delta})dx = 0 \quad (1.11)$$

або

$$a_{22}dx - (a_{12} + \sqrt{\Delta})dy = 0, \quad a_{22}dx - (a_{12} - \sqrt{\Delta})dy = 0. \quad (1.12)$$

Рівняння (1.11) або (1.12) можна записати у вигляді одного рівняння

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}dx^2 = 0, \quad (1.13)$$

яке називається *характеристичним* для рівняння (1.3).

Із курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо: якщо  $c = \varphi(x, y)$  є загальним інтегралом одного з диференціальних рівнянь (1.11) або (1.12), тобто деяким загальним інтегралом (1.13), то  $z = \varphi(x, y)$  є розв'язком рівняння (1.9), і навпаки. Через накладені на  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  умови коефіцієнти рівнянь (1.11) або (1.12) мають неперервні похідні до другого порядку включно, а отже, існують загальні інтеграли рівняння (1.13), неперервні разом із похідними до другого порядку включно.

➔ **Означення 1.7.** *Розв'язки рівняння (1.13) називають характеристиками.*

Залежно від знака дискримінанта  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  диференціальні рівняння (1.3) в області  $D$  при  $(x, y) \in D$  класифікуються так:

- при  $\Delta > 0$  — *гіперболічного типу*;
- при  $\Delta = 0$  — *параболічного типу*;
- при  $\Delta < 0$  — *еліптичного типу*.

Із (1.13) випливає, що у випадку рівнянь гіперболічного типу є дві дійсні сім'ї характеристик, параболічного типу — одна дійсна, еліптичного типу — дві комплексно-спряжені сім'ї характеристик.

Безпосереднім підставленням легко переконатися в справедливості рівності

$$\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) \left[ \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right]^2. \quad (1.14)$$

Якщо  $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ , то з (1.14) випливає інваріантність типу рівнян-

ня за перетворення незалежних змінних (1.4).

Значимо, що одне й те саме рівняння в різних областях може належати до різних типів.

■ **Приклад 1.3.** Розглянемо рівняння

$$u_{xx} + xu_{yy} - 3u = 0.$$

При  $x > 0$ ,  $\Delta = -x < 0$  це рівняння належить до еліптичного типу, при  $x = 0$ ,  $\Delta = 0$  — до параболічного, при  $x < 0$ ,  $\Delta > 0$  — до гіперболічного типу.

### 1.3

#### Зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними

□ **Рівняння гіперболічного типу.** В цьому випадкові  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$  в розглядуваній області й відповідне характеристичне рівняння (1.13) має дві різні дійсні сім'ї характеристик  $C_1 = \varphi(x, y)$ ,  $C_2 = \psi(x, y)$ . Пока-

жемо, що вони є незалежними, тобто  $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \neq 0$ . Справді, загальні

інтеграли  $C_1 = \varphi(x, y)$ ,  $C_2 = \psi(x, y)$  є розв'язками рівнянь (1.11) або (1.12), тобто

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

або

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = -\frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{22}}, \quad \frac{\psi_y}{\psi_x} = -\frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{22}}.$$

Згідно з умовою  $\Delta > 0$ , а отже,

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq \frac{\psi_y}{\psi_x} \quad \text{або} \quad \frac{\varphi_y}{\varphi_x} \neq \frac{\psi_x}{\psi_y}.$$

Із останніх нерівностей маємо

$$\Phi_x \Psi_y - \Phi_y \Psi_x = \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ \Psi_x & \Psi_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

що й треба було показати.

Покладемо

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \quad (1.15)$$

Тоді  $\alpha_{11} \equiv 0$  і  $\alpha_{22} \equiv 0$ , а рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$$U_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{2\alpha_{12}}. \quad (1.16)$$

Це *перша канонічна форма рівнянь гіперболічного типу*.

Зауважимо: якщо  $a_{11}(x, y) = a_{22}(x, y) = 0$ , то рівняння (1.3) має вигляд (1.16).

Введемо нові незалежні змінні за формулами

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta. \quad (1.17)$$

Дістаємо

$$\begin{vmatrix} \alpha_\xi & \alpha_\eta \\ \beta_\xi & \beta_\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

а отже, після введення нових змінних  $\alpha, \beta$  тип рівняння не зміниться.

Поклавши

$$U\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = v(\alpha, \beta),$$

дістанемо

$$U_\xi = v_\alpha + v_\beta, \quad U_\eta = v_\alpha - v_\beta, \quad U_{\xi\eta} = v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (1.16), матимемо

$$v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, v, v_\alpha, v_\beta). \quad (1.18)$$

Це *друга канонічна форма рівнянь гіперболічного типу*.



■ **Приклад 1.4.** *Визначимо тип і зведемо до канонічного вигляду ДРЧП*

$$u_{xx} - u u_{yy} + u(x, y) = 0, \quad y > 0. \quad (1.19)$$

Рівняння (1.19) є лінійним однорідним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними. Для визначення його типу складаємо дискримінант

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y > 0.$$

Отже, (1.19) є рівнянням гіперболічного типу. З відповідного характеристичного рівняння

$$(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$$

знаходимо дві різні дійсні сім'ї характеристик (рис. 1.1):

$$C_1 = x - 2\sqrt{y}, \quad C_2 = x + 2\sqrt{y}.$$

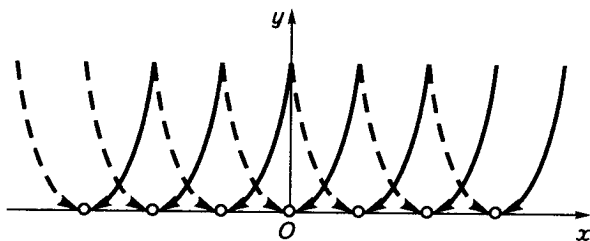


Рис. 1.1

Характеристиками є праві й ліві вітки сім'ї парабол  $y = \frac{1}{4}(x - C)^2$ . Вершини парабол, які лежать на осі  $Ox$ , не належать характеристикам ( $y > 0$ ).

Вводимо заміну незалежних змінних:

$$\xi = x - 2\sqrt{y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{y}.$$

Тоді

$$u_x = U_\xi + U_\eta, \quad u_y = \frac{1}{\sqrt{y}}(U_\eta - U_\xi),$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = \frac{1}{y}(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) - \frac{1}{2y^{3/2}}(U_\eta - U_\xi).$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (1.19), дістанемо

$$U_{\xi\eta} = \frac{0,5}{\eta - \xi} (U_{\xi} - U_{\eta}) - 0,25U.$$

Зведемо рівняння (1.19) до другої канонічної форми в розглядуваній області. Для цього використаємо підстановку (1.17). Матимемо

$$v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta} = -\frac{1}{\beta} v_{\beta} - 0,25v.$$

□ **Рівняння параболічного типу.** В цьому випадкові  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$  і відповідне характеристичне рівняння (1.13) має один загальний інтеграл  $C_1 = \varphi(x, y)$ . Покладемо в цьому разі

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \eta(x, y),$$

де  $\eta(x, y)$  — довільна двічі неперервно диференційовна функція, незалежна від  $\varphi(x, y)$ .

Оскільки  $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ , то

$$\alpha_{11} = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y)^2 = 0.$$

Але тоді

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= a_{11}\varphi_x\eta_x + a_{12}(\varphi_x\eta_y + \varphi_y\eta_x) + a_{22}\varphi_y\eta_y = \\ &= \underbrace{(\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y)}_{=0} (\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0. \end{aligned}$$

Отже, рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$$U_{\eta\eta}(\xi, \eta) = \frac{F(\xi, \eta, U, U_{\xi}, U_{\eta})}{\alpha_{22}}. \quad (1.20)$$

Це канонічна форма рівнянь параболічного типу.

■ **Приклад 1.5.** Визначимо тип і зведемо до канонічного вигляду ДРЧП

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x = 0. \quad (1.21)$$

Маємо  $\Delta = 1 - 1 = 0$ , отже, рівняння (1.21) — параболічного типу. З відповідного характеристичного рівняння знаходимо

$$dy + dx = 0 \Rightarrow C_1 = x + y.$$

Вводимо нові незалежні змінні

$$\xi = x + y, \quad \eta = y. \quad (1.22)$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то функції (1.22) незалежні:

$$\begin{aligned} u_x &= U_\xi, \quad u_y = U_\xi + U_\eta, \\ u_{xx} &= U_{\xi\xi}, \quad u_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (1.21) і звівши відповідні члени, дістанемо канонічну форму

$$U_{\eta\eta}(\xi, \eta) + 3U_\xi = 0.$$

Зазначимо, що як рівняння (1.21), так і його канонічна форма є лінійними однорідними ДРЧП зі сталими коефіцієнтами. Це справедливим є у загальному випадку: якщо вихідне рівняння є лінійним зі сталими коефіцієнтами, то і його канонічна форма буде лінійним ДРЧП зі сталими коефіцієнтами.

□ **Рівняння еліптичного типу.** В цьому випадкові  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$  і рівняння (1.9) або (1.10) мають комплексні коефіцієнти. Покажемо, що вони мають розв'язки. Для цього введемо нову функцію

$$z(x, y) = \zeta(x, y) + i\omega(x, y). \quad (1.23)$$

Дістаємо

$$\begin{aligned} a_{11}(\zeta_x + i\omega_x) + (a_{12} + \sqrt{-\Delta}i)(\zeta_y + i\omega_y) &= 0, \\ a_{11}(\zeta_x + i\omega_x) + (a_{12} - \sqrt{-\Delta}i)(\zeta_y + i\omega_y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

або

$$\begin{cases} a_{11}\zeta_x + a_{12}\zeta_y - \sqrt{-\Delta}\omega_y = 0, \\ a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y + \sqrt{-\Delta}\zeta_y = 0; \end{cases} \quad (1.24a)$$

$$\begin{cases} a_{11}\zeta_x + a_{12}\zeta_y + \sqrt{-\Delta}\omega_y = 0, \\ a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y - \sqrt{-\Delta}\zeta_y = 0. \end{cases} \quad (1.24б)$$

Системи (1.24а), (1.24б) є системами лінійних однорідних ДРЧП першого порядку з неперервно диференційовними коефіцієнтами. Такі системи мають розв'язки, причому, якщо розв'язком (1.24а) є функції  $\zeta = \zeta(x, y)$ ,  $\omega = \omega(x, y)$ , то розв'язком (1.24б) — функції  $\zeta = \zeta(x, y)$ ,  $\omega = -\omega(x, y)$ . Внаслідок (1.23) розв'язками рівнянь (1.9) будуть функції  $z(x, y) = \zeta(x, y) \pm i\omega(x, y)$ , а загальними інтегралами рівнянь (1.11) — вирази  $C_{1,2} = \zeta(x, y) \pm i\omega(x, y)$ .

Аналогічні міркування справедливі й для рівнянь (1.10). Якщо покласти

$$\xi = \zeta(x, y) + i\omega(x, y), \quad \eta = \zeta(x, y) - i\omega(x, y),$$

то

$$\alpha_{11} = 0 = a_{11}(\zeta_x + i\omega_x)^2 + 2a_{12}(\zeta_x + i\omega_x)(\zeta_y + i\omega_y) + a_{22}(\zeta_y + i\omega_y)^2,$$

а отже,

$$\begin{aligned} (a_{11}\zeta_x^2 + 2a_{12}\zeta_x\zeta_y + a_{22}\zeta_y^2) - (a_{11}\omega_x^2 + 2a_{12}\omega_x\omega_y + a_{22}\omega_y^2) &= 0, \\ a_{11}\zeta_x\omega_x + a_{12}(\zeta_x\omega_y + \omega_x\zeta_y) + a_{22}\zeta_y\omega_y &= 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Введемо нові незалежні змінні за формулами

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = \zeta(x, y), \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2i} = \omega(x, y). \quad (1.26)$$

Якобіан функцій (1.26) не дорівнює нулю (функції незалежні), а підставлення їх у рівняння (1.3) внаслідок (1.25) дає  $\tilde{\alpha}_{11} = \tilde{\alpha}_{22}$ ,  $\tilde{\alpha}_{12} = 0$ . Тоді з (1.6) дістаємо канонічну форму рівнянь еліптичного типу

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = \frac{F(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta)}{\alpha_{11}}. \quad (1.27)$$

■ **Приклад 1.6.** Розглянемо рівняння (1.19) в області  $y < 0$ .

У цій півплощині воно належить до еліптичного типу. Характеристичне рівняння  $(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$  дає дві комплексно-спряжені сім'ї характеристик:  $C_1 = x - 2\sqrt{-y}i$ ,  $C_2 = x + 2\sqrt{-y}i$ .

Покладемо згідно з (1.26)  $\alpha = x$ ,  $\beta = 2\sqrt{-y}i$ . Тоді

$$\begin{aligned} u_x &= U_\alpha, \quad u_{xx} = U_{\alpha\alpha}, \quad u_y = -(-y)^{-1/2}U_\beta, \\ u_{yy} &= (-y)^{-1}U_{\beta\beta} - 1/2(-y)^{-3/2}U_\beta. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні в (1.19), матимемо

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} - \frac{1}{\beta} U_{\beta} + U = 0.$$

□ **Канонічні форми лінійних ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними й сталими коефіцієнтами.** Розглянемо лінійне ДРЧП зі сталими коефіцієнтами

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + b_3u = f(x, y). \quad (1.28)$$

Згідно з доведеним вище, залежно від типу диференціального рівняння (1.28) воно зводиться до однієї з канонічних форм:

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi} + c_1 U_{\xi} + c_2 U_{\eta} + c_3 U &= F(\xi, \eta), \\ U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + c_1 U_{\xi} + c_2 U_{\eta} + c_3 U &= F(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (1.29)$$

— гіперболічний тип;

$$U_{\eta\eta} + c_1 U_{\xi} + c_2 U_{\eta} + c_3 U = F(\xi, \eta) \quad (1.30)$$

— параболічний тип;

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + c_1 U_{\xi} + c_2 U_{\eta} + c_3 U = F(\xi, \eta) \quad (1.31)$$

— еліптичний тип.

Тут  $c_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Для подальшого спрощення рівнянь (1.29)—(1.31) замість  $U(\xi, \eta)$  введемо нову функцію  $v(\xi, \eta)$ :

$$U = e^{\lambda\xi + \mu\eta} v(\xi, \eta), \quad (1.32)$$

де  $\lambda$  і  $\mu$  — довільні сталі. Тоді

$$U_{\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi} + \lambda v),$$

$$U_{\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta} + \mu v),$$

$$U_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_{\xi} + \lambda^2 v),$$

$$U_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta\eta} + 2\mu v_{\eta} + \mu^2 v),$$

$$U_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\eta} + \lambda v_{\eta} + \mu v_{\xi} + \lambda\mu v).$$

Підставивши знайдені похідні, наприклад, у рівняння (1.31), дістанемо

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (c_1 + 2\lambda)v_{\xi} + (c_2 + 2\mu)v_{\eta} + (\lambda^2 + \mu^2 + c_1\lambda + c_2\mu + c_3)v = e^{-\lambda\xi - \mu\eta} F(\xi, \eta).$$

Виберемо довільні сталі  $\lambda$  і  $\mu$  так, щоб в останньому рівнянні коефіцієнти при  $v_{\xi}$  і  $v_{\eta}$  дорівнювали нулю. Тоді матимемо

$$c_1 + 2\lambda = 0, \quad c_2 + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{c_1}{2}, \quad \mu = -\frac{c_2}{2},$$

а отже,

$$\lambda^2 + \mu^2 + c_1\lambda + c_2\mu + c_3 = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_2^2}{4} - \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} + c_3 = c_3 - \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_2^2}{4}.$$

Таким чином,

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (c_3 - \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_2^2}{4})v = e^{\frac{c_1}{2}\xi + \frac{c_2}{2}\eta} F(\xi, \eta).$$

Після аналогічних викладок стосовно рівнянь (1.29) та (1.30) дістанемо

$$v_{\xi\eta} + \alpha_v = F_1(\xi, \eta),$$

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \alpha_v = F_1(\xi, \eta)$$

— гіперболічний тип;

$$v_{\eta\eta} + c_1 v_{\xi} = F_1(\xi, \eta)$$

— параболічний тип.

■ **Приклад 1.7.** Зведемо до канонічного вигляду диференціальне рівняння

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_y - u_x = 0. \quad (1.33)$$

Визначимо його тип:

$$\Delta = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0.$$

Отже, задане рівняння — параболічного типу. Маємо

$$dy^2 + 4dx dy + 4dx^2 = 0 \Rightarrow dy + 2dx = 0 \Rightarrow c_1 = y + 2x.$$

Покладемо  $\xi = y + 2x$ ,  $\eta = x$ . Покажемо, що функції  $\xi(x, y)$  і  $\eta(x, y)$  є незалежними:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

$$u_x = 2U_\xi + U_\eta, \quad u_y = U_\xi,$$

$$u_{yy} = U_{\xi\xi}, \quad u_{xy} = 2U_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}, \quad u_{xx} = 4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.$$

Підставляємо знайдені похідні в рівняння (1.33):

$$\begin{aligned} 4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - 8U_{\xi\xi} - 4U_{\xi\eta} + 4U_{\xi\xi} + U_\xi - 2U_\xi + U_\eta &= 0, \\ U_{\eta\eta} - U_\xi + U_\eta &= 0. \end{aligned}$$

Вводимо нову невідому функцію  $v(\xi, \eta)$  за формулою (1.32). Матимемо

$$\begin{aligned} e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v - v_\xi - \lambda v + v_\eta + \mu v) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_{\eta\eta} + (2\mu + 1)v_\eta - v_\xi + (\mu^2 - \lambda + \mu)v &= 0. \end{aligned}$$

Виберемо довільні сталі  $\lambda$  і  $\mu$  так, щоб

$$\begin{cases} 2\mu + 1 = 0 \\ \mu^2 - \lambda + \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{1}{4}.$$

Тоді останнє рівняння запишеться у вигляді

$$v_{\eta\eta} - v_\xi = 0,$$

де

$$v(\xi, \eta) = e^{0,25\xi + 0,5\eta} U(\xi, \eta).$$

- ◇ **Зауваження 1.1.** У формулах (1.5) часто заміняють  $U(\xi, \eta)$  на  $u(\xi, \eta)$ . Однак при цьому  $u_\xi$  і  $u_\eta$  у правій частині (1.5) слід розуміти як похідні вздовж ліній  $\eta = \text{const}$  і  $\xi = \text{const}$  відповідно:

$$u_\xi = \frac{d}{d\xi}(u|_{\eta=\text{const}}), \quad u_\eta = \frac{d}{d\eta}(u|_{\xi=\text{const}}),$$

тобто як  $U_\xi$  і  $U_\eta$ , а не як частинні похідні по  $\xi$  або  $\eta$  від функції  $u(x, y)$ , оскільки вирази  $u_\xi$  та  $u_\eta$  не мають змісту, поки не вибрано іншу координату  $\xi$  або  $\eta$ .

## 1.4

### Класифікація та зведення до канонічного вигляду квазілінійних ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними

Розглянемо квазілінійне ДРЧП другого порядку

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = f(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}), \quad (1.34)$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Вважаємо  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Введемо нові незалежні змінні  $\xi_k$  за формулами

$$\xi_k = \varphi_k(x), \quad k = \overline{1, m}.$$

Вважаємо, що функції  $\varphi_k(x)$  є двічі неперервно диференційовними й незалежними в розглядуваній області. Маємо

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^m U_{\xi_k} \varphi_{k x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m U_{\xi_k \xi_l} \varphi_{k x_i} \varphi_{l x_j} + \sum_{k=1}^m U_{\xi_k} \varphi_{k x_i x_j}.$$

Позначимо  $\alpha_{ik} = \varphi_{k x_i}$ . Тоді, підставивши знайдені похідні в рівняння (1.34), дістанемо

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \bar{a}_{kl} U_{\xi_k \xi_l} = F(\xi, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_m}), \quad (1.35)$$

де

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}; \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m).$$

Розглянемо квадратичну форму

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^0 y_i y_j, \quad (1.36)$$

коефіцієнти якої збігаються з коефіцієнтами рівняння (1.34) в деякій точці  $M(x^0)$ ,  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ .

Введемо нові змінні  $\eta_1, \dots, \eta_m$  за допомогою неособливого лінійного перетворення



$$y_i = \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}^0 \eta_k. \quad (1.37)$$

Тоді для квадратичної форми дістанемо

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l,$$

де

$$\bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^0 \alpha_{ik}^0 \alpha_{jl}^0.$$

Отже, коефіцієнти головної частини рівняння (1.34) змінюються аналогічно коефіцієнтам квадратичної форми за лінійним перетворенням (1.37).

Відповідним вибором коефіцієнтів  $\alpha_{ik}^0$  в (1.37) квадратичну форму (1.36) можна звести до канонічного вигляду

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \eta_k^2,$$

де  $\lambda_k$  дорівнюють  $\pm 1$  або нулю, тобто

$$\bar{a}_{kl}^0 = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \lambda_k, & k = l. \end{cases}$$

Отже, якщо нові незалежні змінні  $\xi_k$  вибрати таким чином, щоб у точці  $M(x^0)$  коефіцієнти  $\alpha_{ik} = \alpha_{ik}^0$  (наприклад,  $\xi_k = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik}^0 x_i$ ), то рівняння (1.34) в точці  $M(x^0)$  зводиться до вигляду

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k U_{\xi_k \xi_k}(\xi) = F(\xi, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_m}). \quad (1.38)$$

Згідно із законом інерції для квадратичних форм число додатних, нульових і від'ємних коефіцієнтів  $\lambda_k$  інваріантне щодо неособливого лінійного перетворення, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду. У зв'язку з цим рівняння (1.34) в точці  $M(x^0)$  називають рівнянням:

- *еліптичного типу*, якщо в (1.38)  $\lambda_k = 1$  для всіх  $k = \overline{1, m}$ ;
- *параболічного типу*, якщо хоча б один із коефіцієнтів  $\lambda_k$  в (1.38) дорівнює нулю;

- *гіперболічного типу*, якщо всі коефіцієнти  $\lambda_k$  ненульові, але серед них є один коефіцієнт зі знаком, протилежним знакам інших коефіцієнтів рівняння (1.38);
- *ультрагіперболічного типу*, якщо в (1.38) усі коефіцієнти ненульові, але  $r > 1$  коефіцієнтів є додатними, а  $m - r$  — від'ємними.

Зауважимо, що при  $m \geq 3$  рівняння (1.34) можна звести до канонічного вигляду тільки в заданій точці. Справді, для зведення рівняння (1.34) до канонічного вигляду в деякій області необхідно функції  $\varphi_k(x)$  вибрати таким чином, щоб виконувались умови  $\bar{a}_{kl} = 0$  при  $k \neq l$ . Кількість цих умов дорівнює  $m(m-1)/2$ , що більше за число  $m$  функцій  $\varphi_k(x)$ , які вибираються. При  $m = 3$  недіагональні елементи можна перетворити в нуль, але тоді діагональні елементи могли б бути різними, а  $\bar{a}_{kk}$  мають дорівнювати  $\lambda_k$ .

- ◇ **Зауваження 1.2.** Якщо рівняння (1.34) є лінійним зі сталими коефіцієнтами, то воно зводиться до канонічної форми в усій області визначення й має вигляд

$$\sum_{k=1}^m (\lambda_k U_{\xi_k \xi_k} + b_k U_{\xi_k}) + cU = F_1(\xi). \quad (1.39)$$

Нехай усі  $\lambda_k \neq 0$ . Тоді, ввівши нову невідому функцію  $v(\xi)$  за формулою

$$U = v \exp \left( -0,5 \sum_{k=1}^m \lambda_k^{-1} b_k \xi_k \right),$$

рівняння (1.39) зведемо до вигляду

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k v_{\xi_k \xi_k} + c_1 v = F_1(\xi) \exp \left( 0,5 \sum_{k=1}^m \lambda_k^{-1} b_k \xi_k \right).$$

- **Приклад 1.8.** *Визначимо тип і зведемо до канонічного вигляду ДРЧП*

$$u_{x_1 x_1} (x_1, x_2, x_3) + 2u_{x_1 x_2} + 2u_{x_2 x_2} - 2u_{x_2 x_3} + 3u_{x_3} = 0. \quad (1.40)$$

Методом Лагранжа знаходимо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

невиродженого перетворення, яке зводить відповідну квадратичну форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3$$

до канонічного вигляду.

Тоді, поклавши  $\Xi = A^T X$ , де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix},$$

дістанемо

$$U_{\xi_1 \xi_1} + U_{\xi_2 \xi_2} - U_{\xi_3 \xi_3} + 3U_{\xi_3} = 0.$$

Підстановка

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \exp\left(\frac{2}{3}\xi_3\right)$$

остаточно дає

$$v_{\xi_1 \xi_1} + v_{\xi_2 \xi_2} - v_{\xi_3 \xi_3} + \frac{9}{4}v = 0.$$

Отже, (1.40) є рівнянням гіперболічного типу.

## 1.5

### Класифікація ДРЧП вищого порядку

Використовуючи позначення п. 1.1, розглянемо диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(x) D^{\alpha} u(x) = \\ = f(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}, \dots, D^s u(x)), \end{aligned} \quad (1.41)$$

де  $|s| < |\alpha|$ .

За умови неперервності коефіцієнтів  $a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(x)$  у розглядуваній області  $D$  важливу роль у теорії ДРЧП вигляду (1.41) відіграє форма порядку  $n$

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(x) \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_m^{\alpha_m} \quad (1.42)$$

відносно дійсних параметрів  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , яку називають *характеристичною формою*, що відповідає рівнянню (1.41).

За допомогою форми (1.42) вводиться така класифікація ДРЧП (1.41).

Рівняння (1.41) у точці  $x^0 \in D$  називається *рівнянням параболічного типу*, якщо неособливим афінним перетворенням параметрів  $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ ,  $i = \overline{1, m}$  характеристична форма (1.42) у точці  $x^0$  зводиться до форми, яка містить тільки  $l$ ,  $0 < l < m$  параметрів  $\mu_i$ . У цьому разі кажуть іще, що рівняння (1.42) у точці  $x^0 \in D$  *параболічно вироджується*.

За відсутності параболічного виродження рівняння (1.41) у точці  $x^0 \in D$  називається *еліптичним*, якщо характеристичне рівняння

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0 \quad (1.43)$$

не має дійсних коренів, крім  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Якщо ж після деякого неособливого афінного перетворення параметрів  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  характеристичної форми (1.42) в точці  $x^0 \in D$  для одного з них за довільних дійсних значень усіх інших дістають рівно  $n$  дійсних коренів (не обов'язково простих) перетвореного характеристичного рівняння (1.43), то рівняння (1.41) у точці  $x^0$  називається *гіперболічним*.

Рівняння (1.41) в області  $D$  називається *параболічним*, *еліптичним* або *гіперболічним*, якщо воно належить відповідно до одного й того самого типу в усіх її точках.

■ **Приклад 1.9.** Розглянемо рівняння малих прогинів поперечно навантаженої пластинки

$$Lu(x, y) \equiv \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1.44)$$

де  $q$  — інтенсивність рівномірно розподіленого по поверхні пластинки навантаження;  $D$  — жорсткість пластинки при згинанні.

Відповідна характеристична форма матиме вигляд

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^4 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2,$$

а отже, рівняння (1.44) є еліптичним у розглядуваній області.

У загальному випадкові рівняння

$$\sum_{i, k=1}^m \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_k^2} = f(x, u(x), \dots, D^s u(x_s)), \quad |s| \leq 3$$

має характеристичну форму

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \right)^2$$

і є еліптичним в області його задання.

Прикладом параболічного рівняння може бути рівняння поперечних коливань пластинки

$$Lu(t, x, y) = \frac{2h\rho}{D} \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial t^2}, \quad (1.45)$$

де  $h, \rho$  — сталі. Справді, відповідне характеристичне рівняння запишеться у вигляді  $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 = 0$ , і, отже, рівняння (1.45) є параболічним.

Диференціальне рівняння

$$Lu(t, x, y) - 3 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^2 \partial x^2} - 3 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^4} = f(t, x, y)$$

в області його задання є гіперболічним, оскільки його характеристична форма

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &\equiv \lambda_2^4 + \lambda_3^4 + \lambda_1^4 - 3\lambda_1^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 2\lambda_1^4 = \\ &= (\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1^2), \end{aligned}$$

очевидно, задовольняє всі відповідні умови.

Зазначимо, однак, що рівняння

$$Lu(t, x, y) - \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^4} = f(t, x, y) \quad (1.46)$$

не належить до жодного з наведених вище типів. Справді, відповідна характеристична форма записується у вигляді

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 - \lambda_1^4$$

й має тільки два дійсних корені відносно  $\lambda_1$  за фіксованих  $\lambda_2, \lambda_3$ . В такому разі казатимемо, що ДРЧП належить до проміжного типу.



### Задачі для самостійного розв'язування

1. З'ясувати, чи є наведені рівності ДРЧП та ідентифікувати їх:

а)  $\cos(u_x + u_y) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y = 0$ ;

б)  $x^2 u_{xy^2} - (u_x)^5 - 5u = 0$ ;

в)  $\frac{\partial}{\partial x} (\lambda u_{y^2x} - u_y) + 5uu_{x^2} = 0$ ;

г)  $\log|u_x u_y| - \log|u_x| - \log|u_y| + 5u - 6 = 0$ ;

д)  $\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tg} u - u_x \sec^2 u - 3u + 2 = 0$ ;

е)  $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u = 0$ ;

є)  $(u_x)^{-1} u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y} \ln|u_x| + 2u - 5 = 0$ ;

ж)  $\lambda u_{y^2x} - 5(u_{x^2})^2 + \lambda u = \ln|x|$ ;

з)  $u u_y e^{uu} - \frac{\partial}{\partial y} e^{uu} + 3 = 0$ ;

и)  $(\operatorname{sh} x) u_{xy} - \lambda u_{yy} + u_x + \ln(y^2 + 1) = 0$ .

2. Визначити тип ДРЧП і звести їх до канонічного вигляду:

а)  $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + u^2 = 0$ ;

б)  $u_{xx} - 2(\sin x) u_{xy} + (\sin^2 x) u_{yy} - (\operatorname{ctg} x) u_x = 0$ ;

в)  $e^y u_{xx} + e^x u_{yy} - 0,5e^y u_x - 0,5e^x u_y = 5xy$ ;

г)  $u_{xx} - 2e^{0,5x} u_{xy} - u_y + u_x \cos u = 0$ ;

д)  $u_{xx} + 2(\sin y) u_{xy} + (1 + \sin^2 y) u_{yy} - x \ln|y| = 0$ ;

е)  $y^2 u_{xx} - 4xy u_{xy} + 4x^2 u_{yy} + 3u_x = 0$ ;

є)  $(\operatorname{ctg}^2 x) u_{xx} - 2(\operatorname{ctg} x) u_x + u_{yy} + (\operatorname{cosec}^2 x) u_y = e^u$ ;

ж)  $u_{xx} - 2(\cos x) u_{xy} - (3 + \sin^2 x) u_{yy} - u u_y = 0$ ;

з)  $(1 + x^2) u_{xx} + (1 + y^2) u_{yy} + \lambda u_x + \mu u_y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ ;

и)  $(\operatorname{sh} x) u_{xy} - \lambda u_{yy} + u_x + \ln(y^2 + 1) = 0$ ;

і)  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$ ;

к)  $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 3u_y = 0$ ;

- л)  $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 4u$ ;  
м)  $u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_y + u_x - u = 0$ ;  
н)  $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 5u_y + u_x = 0$ ;  
о)  $u_{xy} + u_{yy} + 3u_y - 4u_x = 0$ ;  
п)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u_x + 5u_y = 0$ ;  
р)  $u_{xy} + 2u_{xx} - u_x + u_y + 2u = 0$ ;  
с)  $u_{xx} + 2u_{yy} - u_{xz} + u_x - u_z = 0$ ,  $u = u(x, y, z)$ ;  
т)  $u_{zz} + u_{xz} - u_{yz} + u_y - u_x = 0$ ;  
у)  $u_{yy} - 3u_{xy} + u_{yz} - u_z + u_y = 0$ ;  
ф)  $u_{xx} + 9u_{yy} - 3u_{yz} = 5u_x$ ;  
х)  $2u_{yy} - u_{yz} + u_{xy} - 5u_z = u$ ;  
ц)  $2u_{xy} + u_{yz} - 3u_y + u = 0$ ;  
ч)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yz} + 5u_x = 0$ .

# Глава

# 2

## РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

До рівнянь гіперболічного типу найчастіше приводять фізичні задачі, пов'язані з процесами коливання, наприклад задача про коливання струни, мембрани, газу, про електромагнітні коливання тощо. Характерною особливістю цих процесів є скінченна швидкість їх поширення.

### Тема 1

### ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

#### 2.1

#### Коливання струни

➔ **Означення 2.1.** Струною називають тверде тіло, довжина якого значно перевищує інші його розміри.

Процес коливання струни можна описати, задавши положення точок струни в різні моменти часу (рис. 2.1). Для визначення положення струни в момент часу  $t$  достатньо задати компоненти вектора зміщення

$$U(t, x) = \{u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)\}.$$

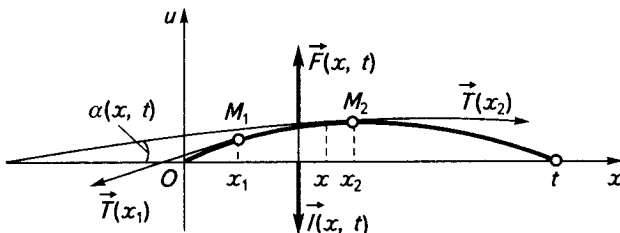


Рис. 2.1



Розглянемо простішу задачу. Нехай:

- 1) коливання відбуваються в одній площині  $xOy$  і вектор зміщення  $U(t, x)$  перпендикулярний до осі  $Ox$  у довільний момент часу  $t$ . Тоді процес коливання можна описати однією функцією  $u(t, x)$ , яка характеризує вертикальне зміщення струни;
- 2) струна абсолютно гнучка (сила натягу  $\bar{T}$  значно перевищує силу опору струни  $\bar{R}$ , і тому вважаємо, що  $|\bar{R}| \approx 0$ ) і пружна (підпорядковується закону Гука: сила натягу прямо пропорційна видовженню);
- 3) сили опору навколишнього середовища дорівнюють нулю й коливання струни малі, тобто  $\alpha^2(x, t) \approx 0$ , де  $\alpha(x, t)$  — гострий кут між дотичною до профілю струни в точці  $x$  у момент часу  $t$  і віссю  $Ox$ .

Тоді з розкладу

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

впливає, що  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Із рівності

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

маємо  $\cos \alpha = 1$ . Беручи до уваги, що  $\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha = (1 - \cos \alpha) \operatorname{tg} \alpha = 0$ , дістаємо

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

Таким чином,

$$\cup M_1 M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx = x_2 - x_1,$$

а отже, довжина струни в процесі коливання не змінюється. Внаслідок припущень 2) і 3) сила натягу  $\bar{T}$  не залежить від часу  $t$ . Покажемо, що вона не залежить і від  $x$ .

Нехай  $\bar{F}(x, t)$  — зовнішня сила, паралельна осі  $Oy$ , рівномірно розподілена вздовж струни й розрахована на одиницю довжини;  $\bar{I}(x, t)$  — сила інерції.

Розглянемо проміжок струни  $(x_1, x_2)$ . На підставі принципу Д'Алам-

бера сума проєкцій усіх сил, що діють на проміжок струни  $(x_1, x_2)$ , на відповідну вісь координат дорівнює нулю. Маємо

$$\text{Пр}_{Ox} \vec{F} = \text{Пр}_{Ox} \vec{T} = 0,$$

$$\text{Пр}_{Ox} \vec{T}(x_1) = -T(x_1) \cos \alpha(x_1, t) \approx -T(x_1),$$

$$\text{Пр}_{Ox} \vec{T}(x_2) = T(x_2) \cos \alpha(x_2, t) \approx T(x_2).$$

Отже,

$$T(x_2) - T(x_1) = 0 \Rightarrow T(x_2) = T(x_1).$$

Через довільність точок  $x_1$  і  $x_2$  з останньої рівності випливає, що  $T(x) = T = \text{const}$ .

Аби вивести рівняння, яке описує процес коливання струни, знайдемо суму проєкцій усіх сил, що діють на проміжку  $(x_1, x_2)$ , на вісь  $Ou$ . Маємо

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - T \sin \alpha(x_1) + T \sin \alpha(x_2) = 0,$$

де  $\rho(x)$  — лінійна густина струни. Оскільки

$$T[\sin \alpha(x_2) - \sin \alpha(x_1)] = T \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right] = T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

то

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ F(x, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] dx = 0.$$

З огляду на довільність меж інтегрування  $x_1$  і  $x_2$  з останньої рівності дістаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad (2.1)$$

де  $a^2 = \frac{T}{\rho}$ ;  $f(t, x) = \frac{F(t, x)}{\rho}$  — інтенсивність зовнішньої сили (щільність сили, віднесена до одиниці маси).

Якщо струна однорідна, то  $\rho$  є сталою, а отже,  $-a^2 = \text{const}$ .

Рівняння (2.1) називається *рівнянням коливання струни*.

Якщо зовнішньої сили немає ( $\vec{F}(t, x) \equiv 0$ ), то приходимо до рівняння вільних коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (2.2)$$

- ◆ **Зауваження 2.1.** Якщо проміжок струни  $M_1 M_2$  розташований, як на рис. 2.2, то сума проєкцій  $\vec{T}_1$  і  $\vec{T}_2$  на вісь  $Ox$  дорівнюватиме  $-T(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$ .

Але маємо  $-\sin \alpha_2 = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha_2) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2}$ , а отже,

$$-T(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) = T \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right).$$

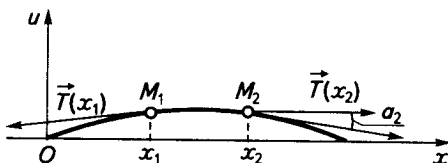


Рис. 2.2

- ◆ **Зауваження 2.2.** Якщо струна коливається в середовищі з опором, пропорційним швидкості, то її рівняння запишеться у вигляді

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - hu_t + f(x, t), \quad h = \text{const.}$$

## 2.2

### Хвильові процеси в дво- й тривимірному середовищах

#### □ Рівняння коливання мембрани.

- **Означення 2.2.** Мембраною називають пружну натягнуту плівку, яка вільно прогинається.

Нехай у стані спокою мембрана займає деяку область  $D$  у площині  $xOy$ , а після виведення якимось чином зі стану спокою починає коливатися так, що всі її точки рухаються перпендикулярно до площини  $xOy$  (поперечні коливання мембрани).

Позначивши через  $u(t, x, y)$  положення точки мембрани  $(x, y)$  у момент часу  $t$ , через  $F(x, y, t)$  — рівномірно розподілену зовнішню

силу, розраховану на одиницю площини, й розглядаючи надалі тільки малі коливання мембрани (квадратами  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_y$  та їх добутками нехтуємо), можна показати, що диференціальне рівняння таких поперечних коливань мембрани набере вигляду

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{F(x, y, t)}{\rho}. \quad (2.3)$$

Якщо мембрана однорідна ( $\rho = \text{const}$ ), то  $a = \text{const}$ .

У випадку вільних коливань ( $F(x, y, t) \equiv 0$ ) рівняння мембрани є однорідним:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}). \quad (2.4)$$

Вираз  $\square u = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{a^2} u_{tt}$  називається *оператором Лоренца*.

Використовуючи його, рівняння (2.4) запишемо у вигляді

$$\square u + \frac{F(x, y, t)}{a^2 \rho} = 0.$$

**□ Рівняння гідродинаміки й поширення звукових хвиль.** У гідродинаміці рідину або газ розглядають як суцільне середовище. Це означає, що довільний малий елемент об'єму рідини або газу вважається настільки великим, що містить дуже багато молекул. Якщо, наприклад, досліджується переміщення деякої частинки рідини, то при цьому йдеться про переміщення не окремої молекули, а цілого елемента об'єму, котрий містить багато молекул, але розглядається в гідродинаміці як точка.

Припустимо, що однорідна маса газу (або рідини) міститься всередині твердої посудини, яка рухається заданим чином у просторі. Нехай у початковий момент часу частинкам рідини надано такий деякий рух, що за подальшого руху рідкої маси проекції  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  швидкості кожної її точки на прямокутні осі координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  є частинними похідними за відповідними координатами деякої функції  $u(t, x, y, z)$ , тобто рідина дістає рух із потенціалом швидкостей  $u(t, x, y, z)$ .

У гідродинаміці виводиться так зване рівняння газу (або рідини), акустики:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad (2.5)$$

де  $a^2$  — деяка стала, що залежить від фізичних властивостей даного газу (рідини).

Зазначимо, що за відомого потенціалу швидкостей процес руху газу (рідини) повністю визначений. Справді, процес руху газу (рідини) вважається визначеним, якщо відомі вектор швидкості  $\vec{v}$  у кожній точці  $(x, y, z)$  у момент часу  $t$ , густина  $\rho(x, y, z, t)$  і тиск  $p(x, y, z, t)$ . Але

$$\vec{v} = -\text{grad } u, \quad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{a^2} u_t, \quad p = p_0 + \rho_0 + \rho_0 u_t,$$

де  $\rho_0$  і  $p_0$  — початкові густина й тиск відповідно.

□ **Задачі теорії світла, електрики й магнетизму.** Введемо позначення:  $c$  — швидкість світла;  $\epsilon$  — діелектрична стала;  $\lambda$  — коефіцієнт електропровідності;  $\mu$  — коефіцієнт електричної проникності.

Закон поширення електричних хвиль у заданому середовищі за теорією Герца—Максвелла характеризується вектором  $u(t, x, y, z)$  електричних сил, який має задовольняти таке ДРЧП:

$$c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = \epsilon \mu u_{tt} + 4\pi \lambda \mu u_t. \quad (2.6)$$

Поклавши  $\frac{c^2}{\epsilon \mu} = a^2$ ,  $\frac{4\pi \lambda}{\epsilon} = -b$ , дістанемо

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + b u_t. \quad (2.7)$$

Оскільки середовище, в якому відбувається процес, є вільним ефіром, то  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 0$ , і приходимо до рівняння (2.5).

Зазначимо, що величина  $4\pi \lambda \mu u_t$  характеризує втрату електричних сил із плином часу, або так звану абсорбцію.

Рівняння (2.1)—(2.6) називаються *хвильовими*. Застосувавши оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

хвильові рівняння можна записати у вигляді

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.8)$$

Введемо нові незалежні змінні

$$\tau = at, \quad x_i = x_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Підстановка (2.9) є неособливою, оскільки

$$\begin{vmatrix} a, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Маємо  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ , тому рівняння (2.8) запишеться у вигляді

$$u_{tt}(\tau, x) = \Delta u(\tau, x) + \frac{1}{a^2} \tilde{f}(\tau, x),$$

тобто хвильові рівняння належать до гіперболічного типу.

Із наведених прикладів випливає, що рівняння гіперболічного типу описують хвильові процеси, проте не всякі (скажімо, до винятків належить процес поперечних коливань стержня).

Оскільки взагалі ДРЧП мають нескінченну кількість розв'язків, то для однозначної характеристики того чи іншого хвильового процесу потрібно до рівняння приєднати деякі додаткові умови, які накладаються на невідому функцію та її похідні, тобто треба скласти математичну модель, яка однозначно описувала б відповідне явище природи.

## Тема 2

### ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

#### 2.3

#### Вільні коливання нескінченної струни.

#### Метод характеристик (метод поширення хвиль)

Нехай розміри розглядуваної області значно перевищують масштаби досліджуваного явища. Тоді кажуть, що відповідне явище відбувається в необмеженій області. Приклад такої ситуації — коливання деякого проміжку досить довгої струни, який знаходиться на достатньо великій відстані від її кінців, за невеликий інтервал часу. Очевидно, що в цьому разі умови на кінцях струни не впливають на перебіг хвильового процесу, й він залежить від початкового стану та початкових швидкостей.

Отже, приходимо до математичної задачі: в області  $B = \{(t, x) | t > 0, x \in E_n\}$  знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad (2.10)$$

який задовольняє умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in E_n, \quad (2.11)$$

де  $f(t, x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  — задані функції.

Умови (2.11) називаються *початковими*, а задача (2.10), (2.11) — *задачею Коші*.

Покажемо, що задача Коші (2.10), (2.11) є математичною моделлю хвильового процесу в необмеженій області. Для цього доведемо:

- існування та єдиність розв'язку задачі Коші;
- його неперервну залежність від вихідних даних (початкових умов  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  та правої частини  $f(t, x)$  рівняння (2.10)), тобто, якщо  $u_1(t, x)$ ,  $u_2(t, x)$  є розв'язками задач

$$\begin{cases} u_{1,tt}(t, x) = a^2 \Delta u_1(t, x) + f_1(t, x), & (t, x) \in B, \\ u_1(0, x) = \varphi_1(x), \quad u_{1,t}(0, x) = \psi_1(x), & x \in E_n; \\ u_{2,tt}(t, x) = a^2 \Delta u_2(t, x) + f_2(t, x), & (t, x) \in B, \\ u_2(0, x) = \varphi_2(x), \quad u_{2,t}(0, x) = \psi_2(x), & x \in E_n \end{cases}$$

відповідно, то  $\forall \varepsilon > 0$  і  $t_1 > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$  і цілочисловий вектор  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , що з умов

$$|D^k[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]| < \delta, \quad |D^k[\psi_1(x) - \psi_2(x)]| < \delta, \quad x \in E_n,$$

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_n), \quad k_i = \overline{0, \alpha_i}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$|f_1(t, x) - f_2(t, x)| < \delta, \quad (t, x) \in B_1 = \{(t, x) | 0 \leq t \leq t_1, x \in E_n\}$$

випливає справедливість в області  $B_1$  нерівності

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| < \varepsilon, \quad (t, x) \in B_1.$$

- ➔ **Означення 2.3.** Якщо задача Коші (2.10), (2.11) в області  $B$  має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від вихідних даних, то її називають *коректно поставленою*.

Розглянемо задачу: в області  $B = \{(t, x) \mid t \in (0, +\infty), x \in (-\infty, +\infty)\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (2.12)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (2.13)$$

де  $\varphi(x)$  — задана функція класу  $C^2(-\infty, +\infty)$ ;  $\psi(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ .

Для розв'язання задачі (2.12), (2.13) зведемо рівняння (2.12) до канонічного вигляду. Маємо

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \Leftrightarrow (dx - a dt)(dx + a dt) = 0,$$

тобто

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0.$$

Інтегруючи останні рівняння, дістаємо

$$C_1 = x - at, \quad C_2 = x + at.$$

Вводимо нові незалежні змінні:

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

$$u_x = U_\xi + U_\eta, \quad u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad (2.14)$$

$$u_t = aU_\xi - aU_\eta, \quad u_{tt} = a^2 U_{\xi\xi} - 2a^2 U_{\xi\eta} + a^2 U_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (2.12) і звівши подібні члени, матимемо

$$U_{\xi\eta} = 0. \quad (2.15)$$

Припустивши, що шуканий розв'язок існує, й підставивши його в рівняння (2.12), дістанемо тотожність. Але тоді й канонічна форма (2.15) буде тотожністю. Інтегруючи (2.15) за  $\xi$ , дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta),$$

де  $f(\eta)$  — довільна функція. Інтегруючи останню тотожність за  $\eta$ , матимемо

$$U(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$



Повертаючися до старих незалежних змінних, згідно з (2.14) дістанемо

$$U(t, x) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \quad (2.16)$$

де  $f_1(\xi)$  і  $f_2(\eta)$  — довільні функції.

Таким чином, якщо розв'язок рівняння (2.12) існує, то він має вигляд (2.16).

З іншого боку, якщо функції  $f_1(x + at)$ ,  $f_2(x - at)$  неперервні разом із похідними до другого порядку включно в розглядуваній області, то вони є розв'язками рівняння (2.12), а отже, формула (2.16) дає загальний розв'язок цього рівняння.

Загальний розв'язок рівняння вільних коливань струни вперше дістав Ж. Л. Д'Аламбер у 1747 р.

Визначимо функції  $f_1(x + at)$  і  $f_2(x - at)$  таким чином, щоб розв'язок (2.16) задовольняв початкові умови (2.13). Маємо

$$\begin{cases} u(0, x) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(0, x) = a[f_1'(x) - f_2'(x)] = \psi(x), \end{cases}$$

або, зінтегрувавши друге рівняння, дістанемо

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + C, \end{cases}$$

де  $x_0$  — фіксована точка, тобто

$$f_1(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2} C,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz - \frac{1}{2} C.$$

Підставивши знайдені функції в (2.16), приходимо до формули Д'Аламбера

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x - at}^{x + at} \psi(z) dz, \quad (2.17)$$

яку в 1748 р. дістав Л. Ейлер.

Покажемо: якщо  $\varphi(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ , то формула Д'Аламбера (2.17) є розв'язком задачі Коші (2.12), (2.13), і цим самим доведемо його існування.

Маємо

$$\begin{aligned}
 u_t &= \frac{a}{2} [\varphi_\xi(x+at) - \varphi_\eta(x-at)] + \frac{1}{2} [\psi(x+at) + \psi(x-at)], \\
 u_{tt} &= \frac{a^2}{2} [\varphi_{\xi\xi}(x+at) + \varphi_{\eta\eta}(x-at)] + \frac{a}{2} [\psi_\xi(x+at) - \psi_\eta(x-at)], \\
 u_x &= \frac{1}{2} [\varphi_\xi(x+at) + \varphi_\eta(x-at)] + \frac{1}{2a} [\psi(x+at) - \psi(x-at)], \\
 u_{xt} &= \frac{1}{2} [\varphi_{\xi\xi}(x+at) + \varphi_{\eta\eta}(x-at)] + \frac{1}{2a} [\psi_\xi(x+at) - \psi_\eta(x-at)].
 \end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (2.12), дістанемо

$$u_{tt} \equiv a^2 u_{xx},$$

а підставлення функції (2.17) у початкові умови (2.13) дає

$$\begin{aligned}
 u(0, x) &= \frac{1}{2} [\varphi(x) + \varphi(x)] + \frac{1}{2a} \int_x^x \psi(z) dz \equiv \varphi(x), \\
 u_t(0, x) &= \frac{a}{2} [\varphi'(x) - \varphi'(x)] + \frac{1}{2} [\psi(x) + \psi(x)] \equiv \psi(x),
 \end{aligned}$$

тобто (2.17) є розв'язком задачі Коші (2.12), (2.13). Із побудови розв'язку (2.17) випливає, що він єдиний.

### ТЕОРЕМА 2.1

**про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних**

Нехай  $u_1(t, x)$  і  $u_2(t, x)$  є розв'язками задач Коші:

$$\begin{aligned}
 u_{1t} &= a^2 u_{1xx}, \quad u_{2t} = a^2 u_{2xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\
 u_1(0, x) &= \varphi_1(x), \quad u_2(0, x) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x < +\infty, \\
 u_{1t}(0, x) &= \psi_1(x), \quad u_{2t}(0, x) = \psi_2(x),
 \end{aligned}$$

а  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\psi_1(x), \psi_2(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0$  і  $t_1 > 0 \exists \delta > 0$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon, t_1)$ , що як тільки  $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$ ,  $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$  при  $x \in (-\infty, +\infty)$ , то справедлива нерівність

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| < \varepsilon, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t \leq t_1.$$

Доведення

Використовуючи формулу Д'Аламбера (2.17) для розв'язків  $u_1(t, x)$  і  $u_2(t, x)$ , дістаємо

$$u_1(t, x) - u_2(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)] + \\ + \frac{1}{2} [\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} [\psi_1(z) - \psi_2(z)] dz.$$

Тоді

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \frac{1}{2} |\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)| + \\ + \frac{1}{2} |\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)| + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(z) - \psi_2(z)| dz < \\ < \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta dz \leq \delta(1 + t_1).$$

Якщо взяти  $\delta = \varepsilon/(1 + t_1)$ , то нерівність

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| < \varepsilon$$

виконуватиметься для всіх  $-\infty < x < +\infty$ ,  $t \leq t_1$ .

Теорему доведено.

На практиці початкові значення дістають із досліду внаслідок вимірювань, і, природно, що вони неточні. Доведена теорема стверджує, що невеликі похибки в початкових умовах задачі Коші зумовлюють незначні зміни в її розв'язку.

Доведена теорема вказує також на один із шляхів побудови розв'язку задачі Коші, коли початкові функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  не задовольняють умови  $\varphi \in C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ .

Справді, нехай потрібно знайти розв'язок задачі Коші (2.12), (2.13), де функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  ненульові тільки на скінченних відрізках, неперервні при  $x \in (-\infty, +\infty)$ , а функція  $\varphi(x)$  має похідну першого порядку. Ці функції можна рівномірно апроксимувати диференційовними функціями  $\varphi_n(x)$  і  $\psi_n(x)$  так, що

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} \varphi(x), \quad \psi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} \psi(x),$$

причому  $\varphi_n(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\psi_n(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ .

Якщо за початкові умови в задачі Коші взяти функції  $\varphi_n(x)$  і  $\psi_n(x)$ , то вони визначатимуть єдиний розв'язок  $u_n(t, x)$ , який дається формулою Д'Аламбера.

Оцінимо різницю розв'язків  $u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x)$ . Унаслідок рівномірної збіжності послідовностей  $\{\varphi_n(x)\}$  і  $\{\psi_n(x)\} \forall \varepsilon > 0 \text{ і } t_1 > 0 \exists N, \forall n > N \text{ і додатних } k \text{ виконуються нерівності}$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n+k}(x)| < \frac{\varepsilon}{1+t_1}, \quad |\psi_{n+k}(x) - \psi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{1+t_1}$$

для всіх  $-\infty < x < +\infty$ . Згідно з доведеною теоремою для всіх  $t \leq t_1$  і  $x \in (-\infty, +\infty)$  також виконуватимуться нерівності

$$|u_{n+k}(t, x) - u_n(t, x)| < \varepsilon$$

для довільних  $n > N$  і цілих додатних  $k$ . Але це означає, що послідовність розв'язків  $\{u_n(t, x)\}$  рівномірно збігається до деякої функції  $u(t, x)$  при  $t_1 \geq t$  і  $x \in (-\infty, +\infty)$ . Ця функція називається *узагальненим розв'язком задачі Коші (2.12), (2.13)*. При цьому

$$u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_n(x - at) + \varphi_n(x + at)] + \\ + \frac{1}{2a} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-at}^{x+at} \psi_n(z) dz = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

Очевидно, в цьому випадкові  $u(0, x) = \varphi(x)$ ,  $u_t(0, x) = \psi(x)$ , а отже, й узагальнений розв'язок задачі Коші дається формулою Д'Аламбера.

Зауважимо, що розглянуту задачу можна розв'язати й інакше, скориставшись узагальненими функціями та їх згортками. Але ми на цьому не зупинятимемося. Надалі для нас важливо буде не те, який із розв'язків дається формулою Д'Аламбера, а те, що малі відхилення в початкових умовах спричиняють малі відхилення добутого розв'язку від істинного.

Розглянемо фізичну інтерпретацію розв'язку задачі Коші. Спочатку дамо фізичну інтерпретацію загального розв'язку рівняння вільних коливань струни (рис. 2.3). Для

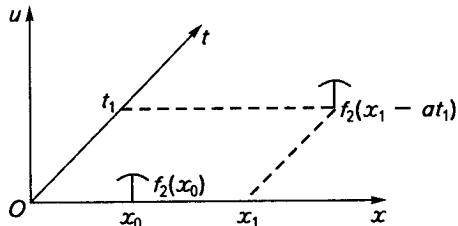


Рис. 2.3

цього розглянемо розв'язок рівняння (2.12) вигляду  $u = f_2(x - at)$ . Нехай  $x_0$  — деяка точка. Припустимо, що з цієї точки в додатному напрямі осі  $Ox$  у момент часу  $t = 0$  починає рухатися спостерігач зі швидкістю  $a$ . В момент часу  $t = t_1$  він перебуватиме в точці  $x_1 = x_0 + at_1$ . Відхилення, яке спостерігач зафіксує в точці  $x_1$  у момент часу  $t = t_1$ , становитиме  $u = f_2(x_1 - at_1) = f_2(x_0)$ .

Таким чином, спостерігач у довільний момент часу бачитиме в точці, де він знаходитиметься, одне й те саме відхилення, що дорівнює  $f_2(x_0)$ . Отже, початковий профіль  $u(x, 0) = f_2(x)$  рухатиметься зі швидкістю  $a$  в додатному напрямі осі  $Ox$  як жорстка система, не змінюючи форми. Внаслідок цього розв'язок  $u = f_2(x - at)$  називають *прямою біжучою хвилею*.

Аналогічно можна інтерпретувати розв'язок  $u = f_1(x + at)$ . Він називається *зворотною біжучою хвилею*. При цьому профіль струни рухається як жорстка система у від'ємному напрямі осі  $Ox$  зі швидкістю  $a$ .

Таким чином, загальний розв'язок (2.16) рівняння (2.12) представляється у вигляді суперпозиції (накладання) прямої та зворотної біжучих хвиль, а тому метод його відшукування іноді називають *методом поширення хвиль*.

Виводячи рівняння (2.12), ми поклали  $a = \sqrt{T/\rho}$ . Але  $a$  є швидкістю поширення хвиль по струні. Внаслідок цього можемо зробити висновок: швидкість поширення хвиль по струні обернено пропорційна квадратному кореню від густини й прямо пропорційна квадратному кореню від натягу струни.

Перейдемо до фізичної інтерпретації формули Д'Аламбера (2.17) й окремо розглянемо випадки, коли початкові відхилення дорівнюють нулю ( $\varphi(x) \equiv 0$ ) і коли початкові швидкості дорівнюють нулю ( $\psi(x) \equiv 0$ ). Загальний випадок буде суперпозицією обох випадків.

□ **Поширення хвиль відхилення.** Нехай початкові швидкості дорівнюють нулю. Тоді з (2.17) дістанемо

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}. \quad (2.18)$$

Функція  $\varphi(x)$  відома, а отже, можемо обчислити положення струни в довільний момент часу  $t$ .

Згідно зі сказаним вище коливання  $u(t, x)$  складаються з прямої  $\frac{1}{2}\varphi(x - at)$  і зворотної  $\frac{1}{2}\varphi(x + at)$  хвиль, які поширюються відповід-

но вправо й уліво зі швидкістю  $a$ , а в початковий момент часу  $t = 0$  профілі обох хвиль збігаються.

Припустимо, що початкові відхилення точок струни ненульові тільки на проміжку  $(-l, l)$ , а поза ним дорівнюють нулю. Для геометричної ілюстрації наступних міркувань вважатимемо, що в початковий момент часу струна мала вигляд

$$u(0, x) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -l, \\ h(1 + x/l) & \text{при } -l \leq x \leq 0, \\ h(1 - x/l) & \text{при } 0 < x < l, \\ 0 & \text{при } x \geq l. \end{cases}$$

Зобразимо графічно профілі струни в різні моменти часу (рис. 2.4, 2.5).

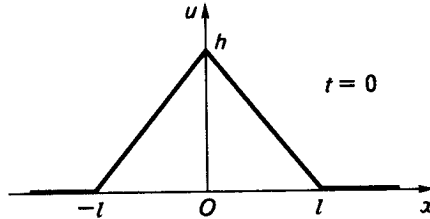


Рис. 2.4

Бачимо: якщо точка  $x$  струни знаходиться правіше проміжку  $(-l, l)$  ( $x > l$ ), то при  $t < \frac{x-l}{a}$  вона перебуває в стані спокою ( $u(t, x) = 0$ ),

тобто до точки  $x$  хвиля ще не дійшла. З моменту часу  $t_1 = \frac{x-l}{a}$  точка  $x$  струни почне коливатися (момент проходження переднього фронту прямої хвилі). Як тільки хвиля пройде через розглядувану точку,

починаючи з моменту  $t_2 = \frac{x+l}{a}$ , ця точка знову перебуватиме в стані спокою ( $t_2$  — момент проходження заднього фронту прямої хвилі). Таким чином, точка  $x$  бере участь у хвильовому процесі при

$$\frac{x-l}{a} < t < \frac{x+l}{a} \Rightarrow -l < x - at < l.$$

Аналогічні міркування приводять до висновку: якщо точка знаходиться лівіше проміжку  $(-l, l)$  ( $x < -l$ ), то вона коливається при  $-l < x + at < l$ .

Нехай  $0 < x < l$ . Тоді через точку проходять як пряма, так і зворотна хвилі. Передній фронт обох хвиль розташований перед точкою. Задній фронт зворотної хвилі пройде через точку в момент  $t_1 = \frac{l-x}{a}$ , а задній фронт прямої хвилі — в момент  $t_2 = \frac{l+x}{a}$ . При  $t > t_2$  точка струни перебуватиме в стані спокою, тобто лежатиме на осі  $Ox$ . Аналогічно, якщо  $0 > x > -l$ , то коливання закінчаться при  $t = \frac{l-x}{a}$ , тобто коли через точку пройде задній фронт зворотної хвилі.

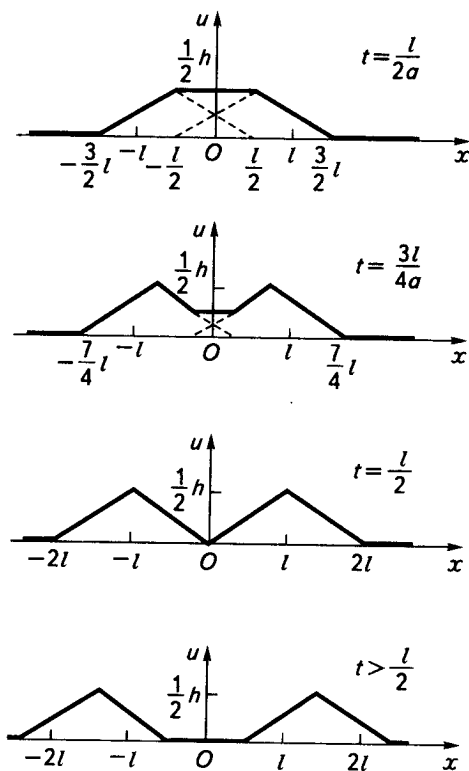


Рис. 2.5

Отже, в кожній точці струни після проходження обох хвиль настає спокій.

Наочне зображення описаного процесу можна дістати, ввівши фазову (від грец.  $\varphi\alpha\sigma\iota\zeta$  — поява — величина, що характеризує стан коливального процесу в якийсь момент) площину  $xOt$  (рис. 2.6). Кожна точка  $M(x, t)$  фазової площини (при  $t \geq 0$ ) відповідає точці струни з абсцисою  $x$  у момент часу  $t$ . В окремому випадкові точки осі абсцис ( $t = 0$ ) відповідають точкам струни в початковий момент часу. Точкам на прямій  $t = t_0$  відповідає положення точок струни у фіксований момент часу  $t = t_0$ , а точкам на прямій  $x = x_0$  — положення фіксованої точки  $x_0$  у різні моменти часу.

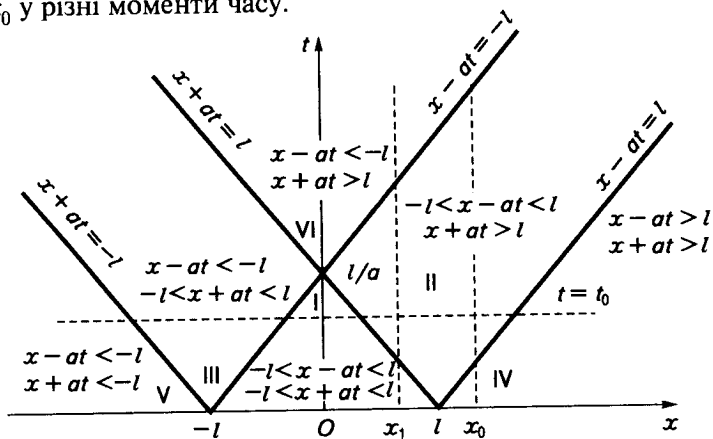


Рис. 2.6

Побудуємо на фазовій площині характеристики  $x - at = \pm l$ ,  $x + at = \pm l$  при  $t \geq 0$ . При цьому півплощина  $t \geq 0$  розбивається на шість частин. Коливання відбуваються тільки в тих точках і в ті моменти часу, які відповідають зонам I, II, III. В зоні II діє тільки пряма хвиля, в зоні III — тільки зворотна, а в зоні I — і пряма, й зворотна хвилі. В точках, які відповідають зонам IV і V, коливання ще не відбуваються, бо до них іще не дійшли передні фронти відповідно прямої та зворотної хвиль, а в точках, які відповідають зоні VI, коливань уже немає, бо через них уже пройшли задні фронти прямої та зворотної хвилі.

Зафіксувавши довільну точку  $x_0$  струни й піднімаючися вгору по прямій  $x = x_0$ , легко записати вирази для функції  $u(x_0, t)$  у довільний момент часу  $t$ .

Нехай  $x_0 > l$ . Тоді при  $0 < t < \frac{x_0 - l}{a}$  точка фазової площини зна-



ходить в зоні  $IV$  і  $u(x_0, t) = 0$ . Якщо  $\frac{x_0 - l}{a} < t < \frac{x_0 + l}{a}$ , то точка потрапляє в зону  $II$  (зону дії прямої хвилі) й

$$u(x_0, t) = \frac{1}{2} \varphi(x_0 - at).$$

Другий доданок  $\frac{1}{2} \varphi(x_0 + at)$  дорівнює нулю, оскільки аргумент  $x_0 + at > l$ , а  $\varphi(x) = 0$  при  $x > l$ . Нарешті, при  $t > \frac{x_0 + l}{a}$  точка належить зоні  $VI$  і знову  $u(x_0, t) = 0$ .

Легко перевірити: якщо точка  $x_1 \in (0, l)$ , то

$$u(x_1, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x_1 - at) + \varphi(x_1 + at)}{2} & \text{при } 0 < t < \frac{l - x_1}{a}, \\ \frac{1}{2} \varphi(x_1 - at) & \text{при } \frac{l - x_1}{a} \leq t \leq \frac{l + x_1}{a}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{l + x_1}{a}. \end{cases}$$

Зрозуміло, що за переходу від одного інтервалу часу  $t$  до іншого, функція  $u(x, t)$  залишається неперервною.

Аналогічно можна дістати вирази для функції  $u(x, t)$  за фіксованих значень  $t$ . При  $t < l/a$  точка фазової площини в разі руху зліва направо перетинає послідовно зони  $V$ ,  $III$ ,  $I$ ,  $II$  і  $IV$ , а при  $t > l/a$  замість зони  $I$  вона перетне зону  $VI$ .

У першому випадкові ( $t_0 < l/a$ ) дістанемо

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -at_0 - l, \\ \frac{1}{2} \varphi(x + at_0) & \text{при } -at_0 - l \leq x < at_0 - l, \\ \frac{1}{2} [\varphi(x + at_0) + \varphi(x - at_0)] & \text{при } at_0 - l \leq x < l - at_0, \\ \frac{1}{2} \varphi(x - at_0) & \text{при } l - at_0 \leq x < l + at_0, \\ 0 & \text{при } x \geq l + at_0. \end{cases}$$

Аналогічно можна записати вираз для  $u(x, t_1)$  при  $t_1 > l/a$ .

На підставі наведених вище міркувань запишемо вирази для відхилення  $u(x, t)$ , коли початкові відхилення  $\phi(x)$  задано на рис. 2.4.

У зв'язку з тим, що за переходу аргументів  $x + at$  і  $x - at$  через нуль вирази функцій змінюються, проведемо на фазовій площині додаткові прямі  $x \pm at = 0$ .

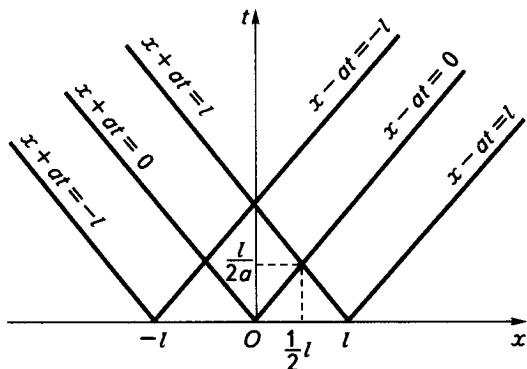


Рис. 2.7

Із рис. 2.7 видно, що точки струни, які лежать у проміжках  $(0, \frac{1}{2}l)$ ,  $(\frac{1}{2}l, l)$ ,  $(l, +\infty)$ , по-різному переходять із зони в зону (функція  $\phi(x)$  парна, й тому ми розглядаємо тільки додатні значення  $x$ ):

- $x \in (0, \frac{1}{2}l)$

$$u(x, t) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } 0 \leq t < \frac{x}{a}, \\ h\left(1 - \frac{at}{l}\right) & \text{при } \frac{x}{a} < t < \frac{l-x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{l-x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{при } \frac{l+x}{a} < t < +\infty; \end{cases}$$

•  $x \in \left(\frac{1}{2}l, l\right)$

$$u(x, t) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } 0 \leq t < \frac{l-x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{l-x}{a} < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{l+x}{a}; \end{cases}$$

•  $x > l$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \frac{x-l}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{x-l}{a} < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{l+x}{a}. \end{cases}$$

Щоб визначити форму хвилі у фіксований момент часу, треба виписати значення функції  $u(t, x)$  для трьох інтервалів часу:  $\left(0, \frac{l}{2a}\right)$ ,  $\left(\frac{l}{2a}, \frac{l}{a}\right)$ ,  $\left(\frac{l}{a}, +\infty\right)$  ( $x \geq 0$ ):

•  $t \in \left(0, \frac{l}{2a}\right)$

$$u(t, x) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{at}{l}\right) & \text{при } 0 \leq x < at, \\ h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } at < x < l - at, \\ \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } l - at < x < l + at, \\ 0 & \text{при } x > l + at; \end{cases}$$

$$\bullet \quad t \in \left( \frac{1}{2a}, \frac{1}{a} \right)$$

$$u(t, x) = \begin{cases} h \left( 1 - \frac{at}{l} \right) & \text{при } 0 \leq x < l - at, \\ \frac{h}{2} \left( 1 + \frac{x - at}{l} \right) & \text{при } l - at < x < at, \\ \frac{h}{2} \left( 1 - \frac{x - at}{l} \right) & \text{при } at < x < l + at, \\ 0 & \text{при } x > l + at; \end{cases}$$

$$\bullet \quad t > l/a$$

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < at - l, \\ \frac{h}{2} \left( 1 + \frac{x - at}{l} \right) & \text{при } at - l < x < at, \\ \frac{h}{2} \left( 1 - \frac{x - at}{l} \right) & \text{при } at < x < l + at, \\ 0 & \text{при } x > l + at. \end{cases}$$

У всіх випадках функція  $u(t, x)$  неперервна.

Зазначимо, що форми профілю струни, побудовані графічно й у вигляді останніх аналітичних виразів, збігаються.

□ **Поширення хвиль імпульсу.** Нехай початкові зміщення точок струни нульові й струна коливається за рахунок початкової швидкості. В цьому разі кажуть, що по струні поширюються хвилі імпульсу. Показавши в (2.17)  $\varphi(x) = 0$ , дістанемо

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz = \Phi(x+at) - \Phi(x-at), \quad (2.19)$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz.$$

Як бачимо, й у цьому випадкові розв'язок  $u(t, x)$  складається з прямої  $-\Phi(x-at)$  і зворотної  $\Phi(x+at)$  хвилі. У початковий момент часу маємо

$$u(0, x) = \Phi(x+a \cdot 0) - \Phi(x-a \cdot 0) = 0.$$

Для графічного зображення хвильового процесу покладемо

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -l, \\ v_0 & \text{при } -l < x < l, \\ 0 & \text{при } x > l. \end{cases}$$

Функція  $\Phi(x)$  набуватиме таких значень:

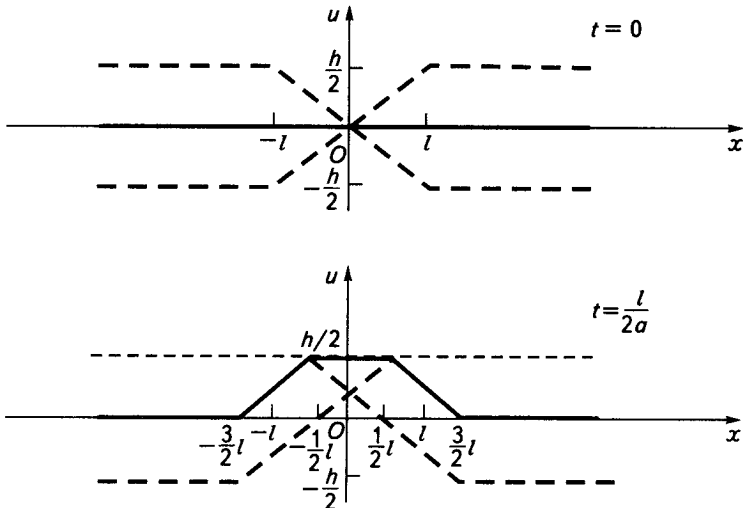
$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x v_0 dx = \frac{v_0 x}{2a}, \quad -l \leq x \leq l,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^l v_0 dx = \frac{v_0 l}{2a}, \quad x > l,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^{-l} v_0 dx = -\frac{v_0 l}{2a}, \quad x < -l.$$

Введемо позначення  $h = v_0 l / a$  і графічно зобразимо профіль струни в різні моменти часу (рис. 2.8).

Нехай деяка точка  $x$  струни знаходиться правіше проміжку  $(-l, l)$ , тобто  $x > l$ . У початковий момент часу  $t = 0$  проміжок інтегрування  $(x - at, x + at)$  вироджується в точку  $x$ , а з плином часу він розши-



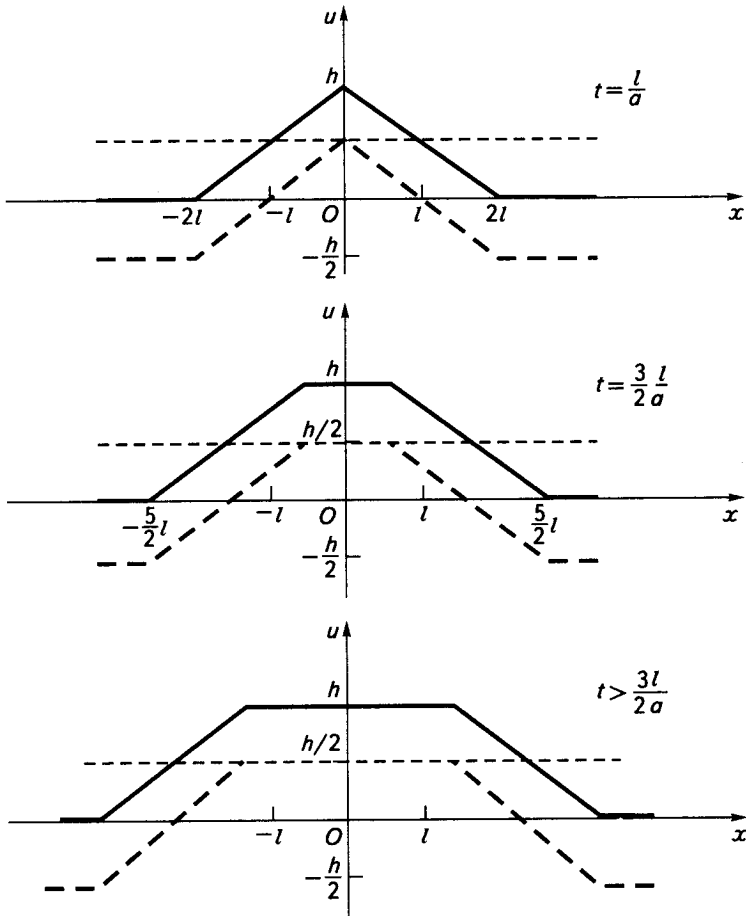


Рис. 2.8

рюється зі швидкістю  $a$ . При  $t < \frac{x-l}{a}$  він не матиме спільних точок із  $(-l, l)$ , функція  $\psi(x)$  у ньому дорівнює нулю й формула (2.19) дасть  $u(x, t) = 0$ , тобто точка  $x$  перебуває в стані спокою. Починаючи з моменту часу  $t = \frac{x-l}{a}$ , проміжок  $(x - at, x + at)$  налягатиме на  $(-l, l)$ , в якому функція  $\psi(x)$  ненульова ( $\psi = v_0$ ), і точка  $x$  почне коливатися.

При  $t > \frac{x+l}{a}$  проміжок  $(x-at, x+at)$  повністю покриватиме інтервал  $(-l, l)$  і інтегрування по  $(x-at, x+at)$  зводиться до інтегрування по  $(-l, l)$ , оскільки поза ним  $\psi(x) = 0$ . Тоді при  $t > \frac{x+l}{a}$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{-l}^l \psi(x) dx = \frac{lv_0}{a}.$$

Аналогічні міркування можна навести й для точок, які знаходяться зліва від проміжку  $(-l, l)$ , коли  $x \in (-l, l)$ .

Отже, з плином часу кожна точка струни під впливом початкових швидкостей, які належать проміжку  $(-l, l)$ , підніметься на максимальну висоту  $h$  (рис. 2.9) і далі весь час залишатиметься в цьому новому положенні. Це явище називається *дифузією хвиль*.

Представимо процес коливання внаслідок початкових швидкостей за допомогою фазової площини (рис. 2.9).

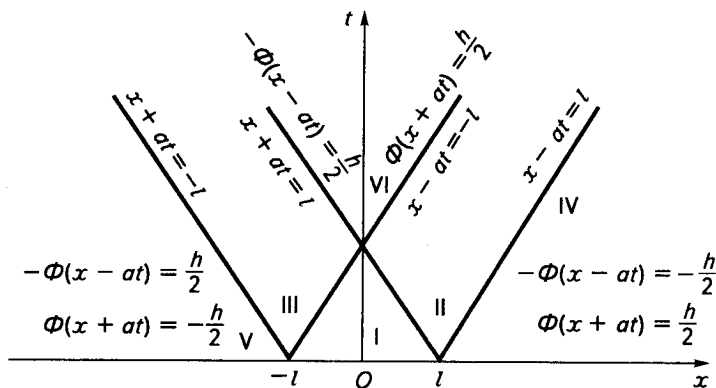


Рис. 2.9

Користуючися виразами для функції  $\Phi(x)$ , дістаємо, що в зонах II, IV і VI відхилення зворотної хвилі  $\Phi(x+at)$  дорівнює  $h/2$ , а в точках зон III, V, VI відхилення прямої хвилі  $-\Phi(x-at)$  таке саме. Тому зона VI є зоною кінцевого зміщення; в її точках функція  $u(t, x) = \Phi(x+at) - \Phi(x-at) = h$ . У зоні IV відхилення прямої хвилі  $-h/2$ ; таке саме відхилення в зоні V має зворотна хвиля. Тому це зони спокою точок струни. Коли точка фазової площини переходить із зони IV в зону VI, то в міру проходження нею зони II відхилення прямої хвилі змі-

нюється від  $-h/2$  до  $h/2$ . З огляду на ці міркування можна записати вирази для функції  $u(t, x)$ . Наприклад, для  $u(t, x_0)$ , де  $x_0 > l$ , маємо

$$u(t, x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \frac{x_0 - l}{a}, \\ \frac{h}{2} \left( 1 - \frac{x_0 - at}{l} \right) & \text{при } \frac{x_0 - l}{a} < t < \frac{x_0 + l}{a}, \\ h & \text{при } t > \frac{x_0 + l}{a}. \end{cases}$$

Із наведених вище міркувань випливає, що задача Коші (2.12), (2.13) є математичною моделлю процесу коливання нескінченної струни за тих обмежень, які ми наклали на цей процес, виводячи рівняння (2.12).

Зауважимо, що розглянутий метод характеристик може успішно використовуватися й для знаходження розв'язку задачі Коші для ДРЧП загальнішого, ніж рівняння коливання струни, вигляду.

#### ■ Приклад 2.1. Знайдемо розв'язок ДРЧП

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0, \quad xy \neq 0, \quad (2.20)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x, 1) = \varphi(x), \quad u_y(x, 1) = \psi(x). \quad (2.21)$$

1. Знаходимо загальний розв'язок рівняння (2.21). Для цього визначаємо його характеристики й вводим нові незалежні змінні:

$$\xi = yx^{-1}, \quad \eta = x\sqrt[3]{y}.$$

Тоді рівняння (2.20) зведеться до канонічного вигляду

$$U_{\xi\eta} - \frac{3}{4\eta} U_{\xi} = 0.$$

Маємо

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( U_{\eta} - \frac{3}{4\eta} U \right) = 0, \quad U_{\eta} - \frac{3}{4\eta} U = f(\eta).$$

Добуте рівняння є лінійним першого порядку. Інтегруючи його, знаходимо

$$U(\xi, \eta) = e^{\int \frac{3}{4\eta} d\eta} \left[ f_1(\xi) + \int e^{-\int \frac{3}{4\eta} d\eta} f(\eta) d\eta \right] = \eta^{3/4} [f_1(\xi) + f_2(\eta)].$$

Повертаючися до старих незалежних змінних, дістаємо загальний розв'язок рівняння (2.20):

$$u(x, y) = \sqrt[4]{x^3 y} [f_1(yx^{-1}) + f_2(xy^{1/3})]. \quad (2.22)$$



2. Довільні функції  $f_1$  і  $f_2$  вибираємо таким чином, щоб задовольнялися умови (2.21). Маємо

$$\begin{cases} u(x, 1) = x^{3/4} [f_1(x^{-1}) + f_2(x)] = \varphi(x), \\ u_y(x, 1) = \frac{1}{4} x^{-3/4} [f_1(x^{-1}) + f_2(x)] + \frac{3}{4} \left[ x^{-1} \frac{df_1(x^{-1})}{d(x^{-1})} + \frac{1}{3} x f_2'(x) \right] = \psi(x), \end{cases}$$

звідки знаходимо

$$f_2(\psi) = \frac{3}{4} x^{3/4} \varphi(x) + \frac{3}{4} \int_{x_0}^x z^{-7/4} \left[ \psi(z) - \frac{1}{4} \varphi(z) \right] dz + C,$$

$$f_1(x^{-1}) = \frac{1}{4} x^{-3/4} \varphi(x) - \frac{3}{4} \int_{x_0}^x z^{-7/4} \left[ \psi(z) - \frac{1}{4} \varphi(z) \right] dz - C.$$

Підставивши знайдені функції у (2.22), матимемо розв'язок задачі Коші (2.20), (2.21):

$$u(x, y) = \frac{3}{4} \varphi(xy^{1/3}) + \frac{1}{4} y \varphi(xy^{-1}) + \frac{3}{16} (x^3 y)^{1/4} \int_{xy^{1/3}}^{xy^{-1}} z^{-7/4} [\varphi(z) - 4\psi(z)] dz.$$

◆ **Вправа.** В області  $D$  зінтегрувати диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} a_0(x, y) u_{xy} + a_1(x, y) u_x + a_2(x, y) u_y + a_3(x, y) u &= f(x, y), \\ a_0(x, y) &\neq 0, \end{aligned}$$

якщо виконуються такі умови:

a)  $a_0(x, y), a_2(x, y) \in C^{(0, 1)}(D), a_1(x, y), a_3(x, y), f(x, y) \in C(D)$

і  $a_{0_y}(x, y) = a_1(x, y), a_{2_x}(x, y) = a_3(x, y);$

b)  $a_0(x, y), a_1(x, y) \in C^{(1, 0)}(D), a_2(x, y), a_3(x, y), f(x, y) \in C(D)$

і  $a_{0_x}(x, y) = a_2(x, y), a_{1_y}(x, y) = a_3(x, y);$

v)  $a_0(x, y), a_2(x, y) \in C^{(0, 1)}(D), a_1(x, y), a_3(x, y), f(x, y) \in C(D)$

і  $\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_{0_y} & a_{2_x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}$  (ввести нову функцію  $v(x, y)$ , поклавши

$$u(x, y) = \exp \left( - \int_{x_0}^x \frac{a_2(\xi, y)}{a_0(\xi, y)} d\xi \right) v(x, y), \quad (x_0, y_0) \in D);$$

г)  $a_0(x, y), a_1(x, y) \in C^{(1, 0)}(D), a_2(x, y), a_3(x, y), f(x, y) \in C(D)$

$$i \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{0x} & a_{1x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \quad (\text{ввести нову функцію } v(x, y), \text{ поклавши}$$

$$u(x, y) = \exp \left( - \int_{y_0}^y \frac{a_1(x, \eta)}{a_0(x, \eta)} d\eta \right) v(x, y), \quad (x_0, y_0) \in D.$$

## 2.4

### Вимушені коливання нескінченної струни

Розглянемо задачу: дослідити процес вимушених коливань одно-рідної нескінченної струни, на яку діє рівномірно розподілена зовнішня сила інтенсивністю  $f(t, x)$ , якщо початкове відхилення струни становить  $\varphi(x)$ , а її початкова швидкість —  $\psi(x)$ .

Математична модель задачі: в області  $B = \{(t, x) \mid t > 0, x \in (-\infty, +\infty)\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x), \quad (2.23)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (2.24)$$

Очевидно, що розв'язок задачі Коші (2.23), (2.24) має вигляд

$$u(t, x) = z(t, x) + w(t, x), \quad (2.25)$$

де  $z(t, x)$  — розв'язок однорідного рівняння коливання струни із заданими початковими умовами (2.24), а  $w(t, x)$  — розв'язок рівняння (2.23) з однорідними початковими умовами.

Згідно з доведеним

$$z(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (2.26)$$

Покажемо, що

$$w(t, x) = \int_0^t v(t - \tau, x) d\tau, \quad (2.27)$$

де функція  $v(t - \tau, x)$  є розв'язком задачі Коші:

$$v_{tt}(t - \tau, x) = a^2 v_{xx}(t - \tau, x), \quad t > \tau, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad (2.28)$$

$$v(0, x) = 0, \quad v_t(0, x) = f(\tau, x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (2.29)$$

Справді, здиференціювавши (2.27) і врахувавши умови (2.29), дістанемо

$$w_t(t, x) = v(0, x) + \int_0^t v_t(t - \tau, x) d\tau,$$

$$w_{tt}(t, x) = f(t, x) + \int_0^t v_{tt}(t - \tau, x) d\tau,$$

$$w_{xx}(t, x) = \int_0^t v_{xx}(t - \tau, x) d\tau.$$

Тоді, підставивши (2.27) у рівняння (2.23), матимемо

$$\begin{aligned} f(t, x) + \int_0^t v_{tt}(t - \tau, x) d\tau &= a^2 \int_0^t v_{xx}(t - \tau, x) d\tau + f(t, x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^t [v_{tt} - a^2 v_{xx}] d\tau \equiv 0, \end{aligned}$$

а

$$w(0, x) = 0, \quad w_t(0, x) = 0,$$

тобто функція (2.27) є розв'язком рівняння (2.23) і задовольняє однорідні початкові умови.

Згідно з формулою Д'Аламбера (2.17)

$$v(t - \tau, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, z) dz. \quad (2.30)$$

Підставивши (2.30) у (2.27), а потім (2.27) і (2.26) у (2.25), дістанемо розв'язок поставленої задачі Коші (2.23), (2.24):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, z) dz d\tau. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Функція (2.31) є розв'язком поставленої задачі Коші, якщо

$$\varphi(x) \in C^2(-\infty, +\infty); \quad \psi(x) \in C^1(-\infty, +\infty); \quad f(t, x) \in C^{(0, 1)}, \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Принцип побудови розв'язку задачі Коші (2.23), (2.24) називається *принципом Дюгамеля*. Він використовується також для побудови розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь у багатовимірному середовищі.

## 2.5

### Задача Коші для хвильового рівняння в просторі. Формула Кірхгофа

Позначимо

$$D_1 = \{t \mid t \in (0, +\infty)\}, \quad E_3 = \{(x, y, z) \mid -\infty < x, y, z < +\infty\}$$

і розглянемо задачу Коші: в класі функцій  $C^2(D)$ ,  $D = D_1 \times E_3$  знайти розв'язок хвильового рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad (2.32)$$

який задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3. \quad (2.33)$$

Надалі вважатимемо, що  $\varphi(x, y, z) \in C^3(E_3)$ , а  $\psi(x, y, z) \in C^2(E_3)$ .

Для побудови розв'язку задачі Коші (2.32), (2.33) зінтегруємо спочатку таку задачу: в області  $D$  знайти розв'язок рівняння (2.32), який задовольняє умови

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3. \quad (2.34)$$

Позначимо розв'язок задачі Коші (2.32), (2.33) через  $u_1(t, x, z)$  і покажемо, що він має вигляд

$$u_1(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t, \quad (2.35)$$

де  $S_t(x, y, z)$  — сфера радіусом  $t$  із центром у точці  $M(x, y, z)$ :

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = t^2,$$

$(\alpha, \beta, \gamma)$  — змінна точка на сфері.

Покладемо у формулі (2.35)

$$\alpha = x + \xi t, \quad \beta = y + \eta t, \quad \gamma = z + \zeta t.$$

Очевидно, нові незалежні змінні  $(\xi, \eta, \zeta)$  є напрямними косинусами радіусів сфери  $S_t(x, y, z)$ . Маємо

$$(x + \xi t - x)^2 + (y + \eta t - y)^2 + (z + \zeta t - z)^2 = t^2 \Rightarrow \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

тобто в нових незалежних змінних сфера  $S_t(x, y, z)$  перейде в одиничну сферу з центром у початку координат. Оскільки  $d\sigma_t = t^2 d\sigma_1$ , то (2.35) запишеться у вигляді

$$u_1(t, x, y, z) = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x + \xi t, y + \eta t, z + \zeta t) d\sigma_1. \quad (2.36)$$

Із (2.36) одразу випливає, що  $u_1|_{t=0} = 0$ . Здиференціювавши (2.36) за  $t$ , дістанемо

$$\begin{aligned} u_{1t} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x + \xi t, y + \eta t, z + \zeta t) d\sigma_1 + \\ &+ \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} (\varphi_{\alpha\xi} + \varphi_{\beta\eta} + \varphi_{\gamma\zeta}) d\sigma_1. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Із (2.37) маємо

$$u_{1t}|_{t=0} = \frac{\varphi(x, y, z)}{4\pi} \iint_{S_1} d\sigma_1 = \varphi(x, y, z),$$

тобто функція (2.35) задовольняє початкові умови (2.34).

Покажемо, що функція (2.35) задовольняє й рівняння (2.32). Із (2.36) маємо

$$u_{1xx} = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi_{\alpha\alpha} d\sigma_1, \quad u_{1yy} = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi_{\beta\beta} d\sigma_1, \quad u_{1zz} = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi_{\gamma\gamma} d\sigma_1;$$

отже,

$$u_{1xx} + u_{1yy} + u_{1zz} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{1}{t} [\varphi_{\alpha\alpha} + \varphi_{\beta\beta} + \varphi_{\gamma\gamma}] d\sigma_t. \quad (2.38)$$

Обчислимо  $u_{1tt}(t, x, y, z)$ . Для цього в (2.37) перейдемо до сфери  $S_t(x, y, z)$  і застосуємо до другого поверхневого інтеграла відому формулу Гаусса—Остроградського

$$\iint_S (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz) dS = \iiint_V (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz,$$

де  $V$  — об'єм, обмежений поверхнею  $S$ .

Маємо

$$u_1 = \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t(x,y,z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t + \\ + \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t(x,y,z)} (\varphi_\alpha \xi + \varphi_\beta \eta + \varphi_\gamma \zeta) d\sigma_t = \frac{1}{t} u_1 + \frac{1}{4\pi t} I(t),$$

де

$$I(t) = \iiint_{K_t(x,y,z)} [\varphi_{\alpha\alpha} + \varphi_{\beta\beta} + \varphi_{\gamma\gamma}] d\alpha d\beta d\gamma;$$

$K_t(x, y, z)$  — куля  $(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 \leq t^2$ .

Здиференціювавши останню рівність за  $t$ , дістанемо

$$u_{1t} = -\frac{1}{t^2} u_1 + \frac{1}{t} u_{1t} - \frac{1}{4\pi t^2} I(t) + \frac{1}{4\pi t} I_t(t) = -\frac{1}{t^2} u_1 + \\ + \frac{1}{t} \left( \frac{1}{t} u_1 + \frac{1}{4\pi t} I(t) \right) - \frac{1}{4\pi t^2} I(t) + \frac{1}{4\pi t} I_t(t) = \frac{1}{4\pi t} I_t(t). \quad (2.39)$$

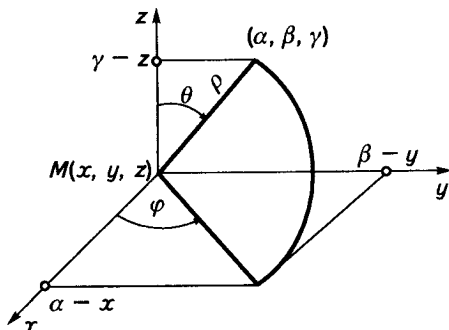


Рис. 2.10

Перейдемо в інтегралі  $I(t)$  до сферичних координат  $(\rho, \theta, \varphi)$  із центром у точці  $M(x, y, z)$  (рис. 2.10):

$$\begin{cases} \alpha - x = \rho \sin \theta \cos \varphi, & 0 \leq \rho \leq t, \\ \beta - y = \rho \sin \theta \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ \gamma - z = \rho \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

$$d\alpha \, d\beta \, d\gamma = \frac{D(\alpha, \beta, \gamma)}{D(\rho, \theta, \varphi)} d\rho \, d\theta \, d\varphi = \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\rho.$$

Маємо

$$I(t) = \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta\varphi \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\rho,$$

а отже,

$$I_t(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta\varphi t^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Із курсу математичного аналізу відомо: якщо  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  — рівняння поверхні  $S$  у криволінійних координатах  $(u, v) \in K$ , то

$$\iint_S f(x, y, z) \, dz = \iint_K f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

де

$$\sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = ds;$$

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2; \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2; \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.$$

У нашому випадкові

$$dS = d\sigma_t = t^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Отже,

$$I_t(t) = \iint_{S_t(x, y, z)} \Delta\varphi \, d\sigma_t.$$

Підставивши  $I_t(t)$  у (2.39), дістанемо

$$u_{1t} = \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t(x, y, z)} \Delta\varphi \, d\sigma_t.$$

Порівнявши знайдену похідну з формулою (2.38), бачимо, що функція  $u_1(t, x, y, z)$  є розв'язком рівняння (2.32), а отже, (2.35) є розв'язком задачі Коші (2.32), (2.33).

Нехай  $u_2(t, x, y, z)$  є розв'язком рівняння (2.32) з початковими умовами

$$u_2|_{t=0} = 0, \quad u_{2,t}|_{t=0} = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3,$$

тобто

$$u_2(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t. \quad (2.40)$$

Тоді функція

$$u(t, x, y, z) = u_1(t, x, y, z) + u_2(t, x, y, z) \quad (2.41)$$

є розв'язком поставленої задачі Коші (2.32), (2.33).

Справді,  $u_1(t, x, y, z)$  є розв'язком задачі (2.32), (2.34). Тоді функція  $u_1(t, x, y, z)$  є також розв'язком рівняння (2.32) і задовольняє початкові умови

$$u_{1,t}|_{t=0} = \varphi(x, y, z),$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} (u_{1,t}) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right|_{t=0} \equiv \frac{1}{4\pi t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta\varphi r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi|_{t=0} = 0.$$

Беручи до уваги останнє твердження й урахуваючи однорідність рівняння (2.32), дістаємо, що функція, визначена за формулою (2.41), справді є розв'язком поставленої задачі (2.32), (2.33). Підставивши (2.40), (2.35) у (2.41), маємо

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Формула (2.42) називається *формулою Кірхгофа*. З неї випливає, що розв'язок задачі Коші (2.32), (2.33) повністю визначається значеннями

$\varphi(x, y, z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$  ( $\nu$  — зовнішня нормаль до  $S_t(x, y, z)$ ) і  $\psi(x, y, z)$  на сфері  $S_t(x, y, z)$ . Цей факт у теорії звуку називається *принципом Гюйгенса*.



## 2.6

### Задача Коші для рівняння вільних коливань мембрани. Формула Пуассона

Розглянемо задачу Коші: знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad t > 0, \quad (x, y) \in E_2 = \{(x, y) \mid -\infty < x, y < +\infty\}, \quad (2.43)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad u_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in E_2. \quad (2.44)$$

Вважатимемо, що  $\varphi(x, y) \in C^3(E_2)$ , а  $\psi(x, y) \in C^2(E_2)$ .

Для побудови розв'язку задачі (2.43), (2.44) застосуємо так званий метод спуску. В п. 2.5 було показано, що формула Кірхгофа дає розв'язок задачі Коші (2.32), (2.33). Але з (2.42) випливає: якщо в початкових умовах (2.33) функції  $\varphi$  і  $\psi$  залежать тільки від  $(x, y)$ , то й  $u = u(t, x, y)$ , тобто формула Кірхгофа в цьому разі дає розв'язок задачі Коші (2.43), (2.44).

Маємо

$$u(t, x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{t} d\sigma_t + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\psi(\alpha, \beta)}{t} d\sigma_t. \quad (2.45)$$

В останній рівності перейдемо від поверхневих інтегралів до подвійних. Для цього використаємо відому з математичного аналізу формулу

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy,$$

де  $z = z(x, y)$  — рівняння поверхні  $S$ ;  $D$  — проекція поверхні  $S$  на площину  $xOy$ . Із рівняння сфери  $S_t(x, y, z)$  дістанемо

$$\gamma = z \pm \sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2},$$

$$\sqrt{1 + (\gamma_\alpha)^2 + (\gamma_\beta)^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}}.$$

Оскільки інтегрування по верхній і нижній півсферах приводить до одного й того самого подвійного інтеграла, з (2.45) маємо

$$\begin{aligned}
 u(t, x, y) = & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_t(x, y)} \frac{\varphi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \iint_{K_t(x, y)} \frac{\psi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}}, \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

де  $K_t(x, y)$  — круг радіусом  $t$  із центром у точці  $(x, y)$ :

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 \leq t^2.$$

Формула (2.46) називається *формулою Пуассона*. Із неї бачимо, що для визначення розв'язку  $u(t, x, y)$  у точці  $(t, x, y)$  не достатньо знати  $\varphi(x, y)$  і  $\psi(x, y)$  на колі  $(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = t^2$ ; потрібні ще початкові дані  $\varphi(x, y)$  і  $\psi(x, y)$  у всіх точках круга  $K_t(x, y)$ . Це означає, що у випадку рівняння коливання мембрани принцип Гюйгенса не справджується.

Аналогічно можна дістати й розв'язок задачі Коші для рівняння коливання струни.

♦ **Зауваження 2.3.** Якщо в рівняннях (2.32) і (2.43)  $a^2 \neq 1$ , то формули (2.42) і (2.46) запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}
 u(t, x, y, z) = & \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}(x, y, z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma) d\sigma_t}{at} + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}(x, y, z)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma) d\sigma_t}{at}, \\
 u(t, x, y) = & \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_{at}(x, y)} \frac{\varphi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} + \\
 & + \frac{1}{2\pi a} \iint_{K_{at}(x, y)} \frac{\psi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}}.
 \end{aligned}$$

Наведемо фізичну інтерпретацію формули Кірхгофа. Для цього вважатимемо, що початкові функції  $\varphi(x, y, z)$  і  $\psi(x, y, z)$  ненульові тільки в деякій скінченній області  $D \in E_3$ . Розглянемо деяку точку  $(x_0, y_0, z_0) \in E_3$ , яка лежить поза областю  $D$ . Стан досліджуваного фізичного процесу в момент часу  $t$  у точці  $(x_0, y_0, z_0)$  (тобто  $u(t, x_0, y_0, z_0)$ ) згідно з формулою (2.42) визначається початковими даними в точках, які належать сфері  $S_{at}(x_0, y_0, z_0)$ . Отже, функція  $u(t, x_0, y_0, z_0)$  ненульова тільки в тому разі, якщо сфера  $S_{at}(x_0, y_0, z_0)$  перетинає область початкових даних  $D$ . Таким чином,  $u(0, x_0, y_0, z_0) = 0$ , тобто в початковий момент часу точка  $(x_0, y_0, z_0)$  перебуває в стані спокою.

Позначимо через  $\delta_1$  і  $\delta_2$  відповідно найменшу та найбільшу відстані точки  $(x_0, y_0, z_0)$  до межі області  $D$ . Якщо час  $t_1$  досить малий, тобто  $t_1 < \delta_1/a$ , то сфера  $S_{at_1}(x_0, y_0, z_0)$  не перетинається з областю  $D$ . У цьому випадкові на  $S_{at_1}(x_0, y_0, z_0)$  початкові функції дорівнюють нулю, а отже,  $u(t_1, x_0, y_0, z_0) \equiv 0$ , тобто розглядувана точка в момент часу  $t_1 < \delta_1/a$  все ще перебуває в стані спокою.

Нехай тепер  $\delta_1/a \leq t_2 \leq \delta_2/a$ . У цьому разі сфера  $S_{at_2}(x_0, y_0, z_0)$  перетинає область  $D$ , а отже, поверхневі інтеграли у формулі Кірхгофа, взагалі кажучи, ненульові ( $u(t_2, x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ), тобто точка  $(x_0, y_0, z_0)$  перебуває у збуреному стані. Отже, момент часу  $t_2 = \delta_1/a$  можна розглядати як момент, коли збурення приходить у точку  $(x_0, y_0, z_0)$ . При  $t_3 > \delta_2/a$  область  $D$  знаходиться у внутрішній частині сфери  $S_{at_3}(x_0, y_0, z_0)$ , а отже, поверхневі інтеграли у формулі Кірхгофа знову дорівнюють нулю, тобто  $u(t_3, x_0, y_0, z_0) \equiv 0$ : збурення пройшло точку  $(x_0, y_0, z_0)$ , і вона повертається в стан спокою.

Тепер розглянемо миттєву просторову картину збурення  $u(t_0, x, y, z)$  у деякий момент часу  $t_0$ . Згідно з попередніми міркуваннями в збуреному стані в момент часу  $t_0$  перебуватимуть ті точки  $(x, y, z)$ , які знаходяться на сферах  $S_{at_0}(M)$ , де  $M$  — довільна точка області  $D$ . Геометричне місце точок  $(x, y, z) \in E_3$ , які перебувають у збуреному стані, позначимо через  $\sigma$ . Обвідні сім'ї сфер  $A_{at_0}(M)$  будуть межами області  $\sigma$ . Зовнішня обвідна називається *переднім фронтом хвилі*, внутрішня — *заднім (хвилею називають процес поширення збурення)*. Очевидно, хвилі поширюються зі швидкістю  $a$  в напрямі нормалі до межі області  $D$  початкового збурення. Отже, початкове збурення, локалізоване в просторі, спричиняє в кожній точці  $(x, y, z) \in E_3$  дію, локалізовану в часі.

У зв'язку з наведеними вище міркуваннями фізичне явище, яке описується формулою Кірхгофа, називається *процесом поширення хвилі*, а сам розв'язок — *хвилею*.

Аналогічно можна переконатися, що формула Пуассона (2.46) є такою хвилею, яка рухається зі швидкістю  $a$ , але, на відміну від тривимірного простору, вплив початкових збурень, локалізованих на площині, не локалізований у часі, тобто в цьому разі йдеться про явище післядії.

■ **Приклад 2.2.** *Визначимо, де  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  при  $t = 1, 2, 3, 4$ , якщо  $\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) \equiv 0$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 1$ .*

Із формули (2.42) випливає: якщо сфера  $S_{at}(x, y, z)$  не перетинається з областю  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq 1$ , то  $u(t, x, y, z) \equiv 0$ . Ця умова еквівалентна тому, що  $1 + at < r$  (рис. 2.11, а) або  $at > 1 + r$  (рис. 2.11, б).

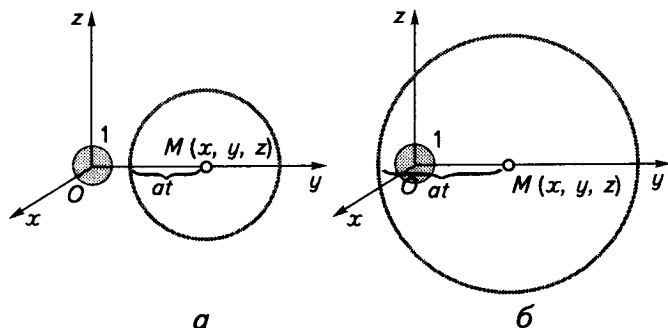


Рис. 2.11

Отже, маємо

$$\begin{aligned}
 t = 1 &\Rightarrow r > 1 + a, & t = 2 &\Rightarrow r > 2a + 1, & t = 3 &\Rightarrow r > 3a + 1, & t = 4 &\Rightarrow r > 4a + 1, \\
 t = 1 &\Rightarrow r < a - 1, & t = 2 &\Rightarrow r < 2a - 1, & t = 3 &\Rightarrow r < 3a - 1, \\
 t = 4 &\Rightarrow r < 4a - 1, & & & & & & a \geq 1.
 \end{aligned}$$

Із попередніх нерівностей та формули Кірхгофа випливає, що  $u(t, x, y, z)$  має вигляд сферичної хвилі, яка зосереджена в кульовому шарі завтовшки 2 (рис. 2.12,  $a = \varepsilon$  відповідно):

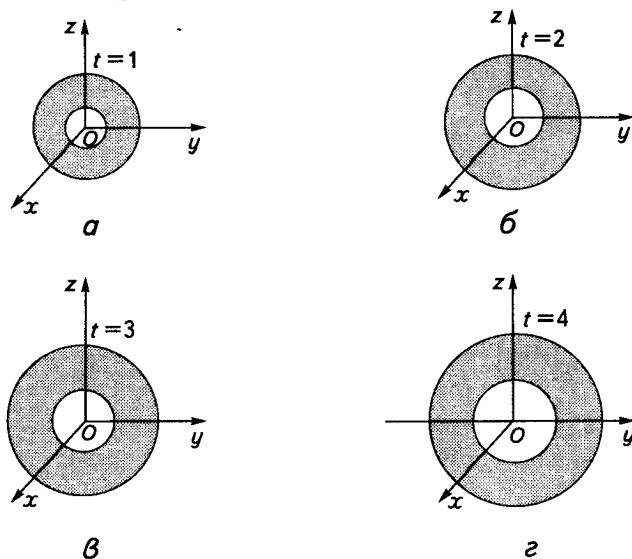


Рис. 2.12

$$t = 1 \Rightarrow a - 1 < r < a + 1, \quad t = 2 \Rightarrow 2a - 1 < r < 2a + 1,$$

$$t = 3 \Rightarrow 3a - 1 < r < 3a + 1, \quad t = 4 \Rightarrow 4a - 1 < r < 4a + 1.$$

Отже, робимо висновок:

- поза одержаними кульовими шарами  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  (зрозуміло, що  $u(t, x, y, z)$  може перетворюватися в нуль і всередині цих шарів);
  - сферичні хвилі мають два фронти — передній  $r = at + 1$  і задній  $r = at - 1$ , які поширюються зі швидкістю  $a$ .
- **Приклад 2.3.** Визначимо, де  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  при  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ , якщо  $\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) \equiv 0$  при  $r < 2$  або  $r > 4$ .

У даному випадкові  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  за трьох можливих положень (I, II, III) сфери  $S_{at}(x, y, z)$ , а саме, коли  $4 + at < r$ ,  $r + at < 2$ ,  $4 + r < at$  (рис. 2.13).

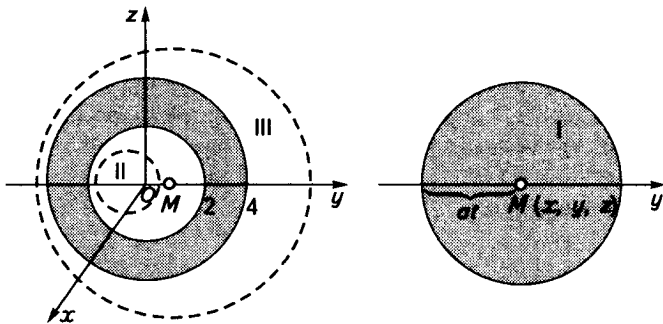


Рис. 2.13

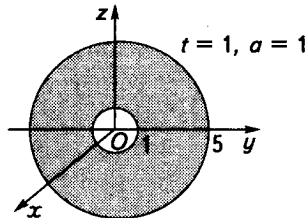


Рис. 2.14

При  $t = 1, a = 1$  сфера  $S_{at}(x, y, z)$  має радіус 1 і для неї можливі тільки випадки I і II. Тому функція  $u(1, x, y, z)$  буде зосереджена в кульовому шарі  $1 \leq r \leq 5$  (рис. 2.14).

При  $t = 2$  і  $a = 1$  радіус сфери інтегрування дорівнює 2, а отже, можливий тільки випадок *I*, тобто хвиля займає кулю  $r \leq 6$  (рис. 2.15, а).

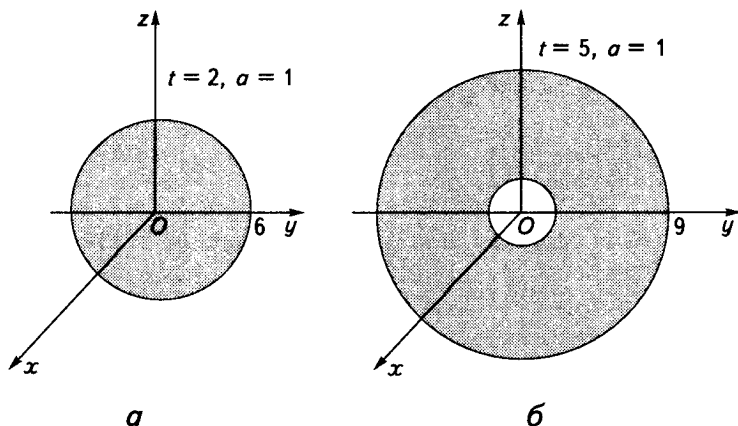


Рис. 2.15

Якщо  $t = 3, 4$  і  $a = 1$ , то також можливий тільки випадок *I*, тобто хвиля займає кулі радіусами  $r = 7$  і  $r = 8$  відповідно. При  $t = 5$  і  $a = 1$  можливі випадки *I* і *III*. Отже, функція  $u(5, x, y, z)$  зосереджена в шарі  $1 \leq r \leq 9$  (рис. 2.15, б).

Як бачимо,  $u(t, x, y, z)$  при  $t > 4$  є сферичною хвилею, яка займає кульовий шар завтовшки 8.

◆ **Вправа.** Дано:  $a = 1$  і  $\varphi(x, y) = \psi(x, y) \equiv 0$  при  $r^2 = x^2 + y^2 > 1$ . Знайти, де  $u(t, x, y) \equiv 0$  при  $t = 1, 2, 3, 4$ .

(Відповідь:  $t = 1 \Rightarrow r > 2$ ;  $t = 2 \Rightarrow r > 3$ ;  $t = 3 \Rightarrow r > 4$ ;  $t = 4 \Rightarrow r > 5$ .)

Повторюючи міркування, наведені в п. 2.4, легко показати, що розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(t, x, y, z), \quad t > 0,$$

$$(x, y, z) \in E_3,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3,$$

де функція  $f(t, x, y, z)$  неперервна разом із частинними похідними до другого порядку включно;  $\varphi(x, y, z) \in C^3(E_3)$ ;  $\psi(x, y, z) \in C^2(E_3)$ , задається формулою

$$\begin{aligned}
 u(t, x, y, z) = & \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}(x, y, z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{at} d\sigma_t + \\
 & + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}(x, y, z)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{at} d\sigma_t + \\
 & + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{K_{at}(x, y, z)} \frac{f(t - \rho/a, \alpha, \beta, \gamma)}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma, \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

$K_{at}(x, y, z)$  — куля радіусом  $at$  із центром у точці  $(x, y, z)$ ;

$$\rho = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}.$$

Значимо, що при інтегруванні в (2.47) функція  $f$  береться не в розглядуваний момент часу  $t$ , а в момент  $t - \rho/a$ , який передре моменту  $t$  на такий інтервал часу, який буде потрібний процесу, що поширюється зі швидкістю  $a$ , для проходження шляху від точки  $(\alpha, \beta, \gamma)$  до точки  $(x, y, z)$ . Тому вираз

$$\frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{K_{at}(x, y, z)} \frac{f(t - \rho/a, \alpha, \beta, \gamma)}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma$$

називається *загайним потенціалом*.

Аналогічно розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, z), \quad t > 0, \quad (x, y) \in E_2,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in E_2$$

дається формулою

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) = & \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_{at}(x, y)} \frac{\varphi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} + \\
 & + \frac{1}{2\pi a} \iint_{K_{at}(x, y)} \frac{\psi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} + \\
 & + \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \iint_{K_{a(t-\tau)}(x, y)} \frac{f(\tau, \alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 (t - \tau)^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} d\tau,
 \end{aligned}$$

де

$$\varphi \in C^3(E_2); \psi \in C^2(E_2); f(t, x, y) \in C^2, t > 0, (x, y) \in E_2.$$

На завершення наведемо один підхід побудови розв'язку задачі Коші для двовимірного, так званого телеграфного рівняння:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x, y) &= a^2 \Delta u(t, x, y) + k^2 u(t, x, y) + f(t, x, y), \\ u|_{t=0} &= \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y), \end{aligned} \quad (2.48)$$

де

$$\varphi(x, y) \in C^3(E_2); \psi(x, y) \in C^2(E_2); f(t, x, y) \in C^2((0, +\infty) \times E_2).$$

Розв'язок задачі Коші (2.48) будуємо *методом введення додаткової змінної*. Легко бачити: якщо  $u(t, x, y)$  є розв'язком задачі (2.48), то функція

$$v(t, x, y, z) = e^{\frac{k}{a}z} u(t, x, y)$$

має бути розв'язком задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння

$$\begin{aligned} v_{tt}(t, x, y, z) &= a^2 \Delta v(t, x, y, z) + f(t, x, y) e^{\frac{k}{a}z}, \\ v|_{t=0} &= \varphi(x, y) e^{\frac{k}{a}z}, \quad v_t|_{t=0} = \psi(x, y) e^{\frac{k}{a}z}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

На підставі формули (2.47) маємо

$$\begin{aligned} v(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi a} \frac{d}{dt} \iint_{S_{at}(x, y, z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta) e^{\frac{k}{a}j}}{at} d\sigma + \\ &+ \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}(x, y, t)} \frac{\psi(\alpha, \beta) e^{\frac{k}{a}\gamma}}{at} d\sigma + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{K_{at}(x, y, z)} \frac{f(t - \rho/a, \alpha, \beta)}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned}$$

Ввівши в попередню рівність нові незалежні змінні

$$\alpha = x + \xi, \quad \beta = y + \eta, \quad \gamma = z + \zeta$$



та розділивши результат на  $e^{\frac{k}{a}z}$ , дістанемо розв'язок задачі Коші (2.48)

$$\begin{aligned}
 u(t, x, y) = & \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}(0,0,0)} \frac{\varphi(x + \xi, y + \eta)}{at} e^{\frac{k}{a}\zeta} d\sigma + \\
 & + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}(0,0,0)} \frac{\psi(x + \xi, y + \eta)}{at} e^{\frac{k}{a}\zeta} d\sigma + \\
 & + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{K_{at}(0,0,0)} \frac{f(t - r/a, x + \xi, y + \eta)}{r} e^{\frac{k}{a}\zeta} d\xi d\eta d\zeta, \\
 & r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.
 \end{aligned}$$

◆ **Вправи**

1. Побудувати розв'язок задачі Коші для одновимірного телеграфного рівняння

$$\begin{aligned}
 u_{tt}(t, x) &= a^2 u_{xx} + k^2 u(t, x) + f(t, x), \\
 u(0, x) &= \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x),
 \end{aligned}$$

де  $\varphi(x) \in C^3(-\infty, +\infty)$ ;  $\psi(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ .

2. Показати, що функція

$$u(t, x) = \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_t, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

де

$$\begin{aligned}
 V_\varphi &= \frac{t}{4\pi^2} \times \\
 & \times \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \left\{ \iiint_{S_1(x)} \varphi(\bar{x}) d\tau_4 + \sqrt{\rho} \frac{at}{2} \iiint_{S_1(x)} \sum_{k=1}^4 \varphi_{x_k}(\bar{x})(x_k - \xi_k) d\tau_4 \right\} d\rho;
 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4); \quad \bar{x}_k = x_k + (-x_k + \xi_k)at\sqrt{\rho}; \quad (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

— координати точок сфери  $S_1(x)$ :  $(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 + (\xi_4 - x_4)^2 = 1$ ;  $d\tau_4$  — елемент площі цієї сфери,  $\epsilon$  розв'язком задачі Коші

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x),$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad \varphi(x) \in C^4(E_4), \quad \psi(x) \in C^3(E_4).$$

3. Застосовуючи принцип Дюгамеля, побудувати розв'язок задачі Коші

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x),$$

де  $\varphi(x) \in C^4(E_4)$ ;  $\psi(x) \in C^3(E_4)$ ;  $f(t, x) \in C^3((0, +\infty) \times E_4)$ .

(Відповідь:

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(x)} \varphi(\bar{x}) d\tau_4 \right] d\rho +$$

$$+ \frac{t}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(x)} \psi(\bar{x}) d\tau_4 \right] d\rho +$$

$$+ \int_0^t \left\{ \frac{\tau}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(x)} f(t-\tau, \bar{x}) d\tau_4 \right] d\rho \right\} d\tau.$$

4. Використовуючи метод введення додаткової змінної та результати попередніх вправ, знайти формулу, яка дає розв'язок задачі Коші для тривимірного телеграфного рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + k^2 u(t, x) + f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x),$$

де  $\varphi(x) \in C^4(E_3)$ ;  $\psi(x) \in C^3(E_3)$ ;  $f(t, x) \in C^3((0, +\infty) \times E_3)$ .

(Відповідь:

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(\bar{x})} \varphi(\bar{x}) e^{k(\xi_4 - x_4) t \sqrt{\rho}} d\tau_4 \right] d\rho +$$

$$+ \frac{t}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(\bar{x})} \psi(\bar{x}) e^{k(\xi_4 - x_4) t \sqrt{\rho}} d\tau_4 \right] d\rho +$$

$$+ \int_0^t \left\{ \frac{\tau}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(\bar{x})} f(t-\tau, x') e^{k(\xi_4 - x_4) t \sqrt{\rho}} d\tau_4 \right] d\rho \right\} d\tau,$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad x'_i = x_i + (-x_i + \xi_i) a \tau \sqrt{\rho}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$x' = (x'_1, x'_2, x'_3).$$

## 2.7

### Теорема про єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння

Розглянемо задачу Коші для рівняння вимушених коливань мембрани: в області  $B = \{(t, x, y) \mid t > 0, (x, y) \in E_2\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + f(t, x, y), \quad (2.50)$$

який задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in E_2, \quad (2.51)$$

де

$$\varphi \in C^3(E_2); \quad \psi \in C^2(E_2); \quad f(t, x, y) \in C^2(B).$$

#### ТЕОРЕМА 2.2

*Задача Коші (2.50), (2.51) у класі функцій  $C^2(B)$  має єдиний розв'язок.*

#### Доведення

Припустимо, що поставлена задача Коші має два розв'язки:  $u_1(t, x, y)$  і  $u_2(t, x, y)$ . Тоді через лінійність диференціального рівняння (2.50) функція  $u(t, x, y) = u_1(t, x, y) - u_2(t, x, y)$  буде розв'язком задачі Коші:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad (t, x, y) \in B, \quad (2.50a)$$

$$u(0, x, y) = 0, \quad u_t(0, x, y) = 0, \quad (x, y) \in E_2. \quad (2.52)$$

Покажемо, що  $u(t, x, y) \equiv 0$  для всіх  $(t, x, y) \in B$ .

У системі координат  $xuy$  візьмемо довільну точку  $M(t_0, x_0, y_0)$ , причому  $t_0 > 0$  (рис. 2.16). Із цієї точки як із вершини проведемо конус

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (t - t_0)^2$$

до перетину з площиною  $t = 0$ . Цей конус називатимемо *характеристичним*. Позначимо внутрішність конуса через  $D$ , його бічну поверхню — через  $S$ , основу — через  $K$ .

Покажемо, що  $u(t_0, x_0, y_0) = 0$ , і з огляду на довільність точки  $M(t_0, x_0, y_0)$  остання рівність означатиме, що  $u(t, x, y) \equiv 0$  для всіх  $(t, x, y) \in B$ .

Внаслідок того, що функція  $u(t, x, y)$  є розв'язком рівняння (2.50а),  $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$ , а отже,

$$I = \iiint_D u_t (u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) dt dx dy = 0.$$

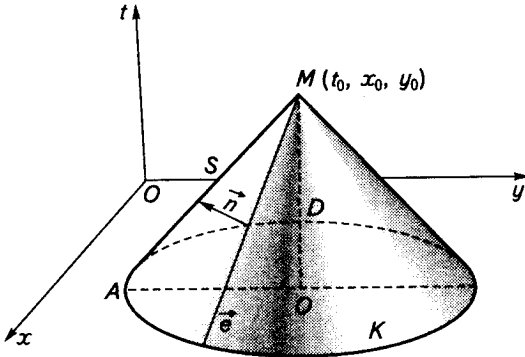


Рис. 2.16

Маємо

$$\begin{aligned} u_t u_{tt} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2, \\ u_t u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) - u_{tx} u_x = \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_x)^2, \\ u_t u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} (u_t u_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_y)^2. \end{aligned}$$

Тоді вираз для  $I$  запишеться у вигляді

$$\iiint_D \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [(u_t)^2 + (u_y)^2 + (u_x)^2] - \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) - \frac{\partial}{\partial y} (u_t u_y) \right\} dt dx dy = 0.$$

Застосовуючи формулу Гаусса—Остроградського, дістаємо

$$I = \frac{1}{2} \iint_{S+K} \{ [u_t^2 + u_x^2 + u_y^2] \cos \bar{n}t - 2u_t u_x \cos \bar{n}x - 2u_t u_y \cos \bar{n}y \} dS.$$

Але при  $t = 0$ , тобто при  $(x, y) \in K$ ,  $u_t = u_x = u_y = 0$ , а отже, наш поверхневий інтеграл по поверхні  $K$  дорівнює нулю. Таким чином, маємо

$$\frac{1}{2} \iint_S \{ |u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 | \cos \bar{n}t - 2u_t u_x \cos \bar{n}x - 2u_t u_y \cos \bar{n}y \} dS = 0. \quad (2.53)$$

Зазначимо, що  $MO = AO$ , тобто  $\angle OMA = 45^\circ$ . Але тоді  $\cos \bar{n}t = \sqrt{2}/2$  на  $S$ . Домножимо (2.53) на  $2 \cos \bar{n}t$ . Дістанемо

$$\begin{aligned} \iint_S \{ |u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 | \cos \bar{n}t - 2u_t u_x \cos \bar{n}x \cos \bar{n}t - \\ - 2u_t u_y \cos \bar{n}y \cos \bar{n}t \} dS = 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

На бічній поверхні конуса  $S$  справедлива рівність

$$(\text{Пр}_{O_t \bar{n}})^2 = (\text{Пр}_{x O_y \bar{n}})^2 = (\text{Пр}_{O_y \bar{n}})^2 + (\text{Пр}_{O_x \bar{n}})^2,$$

тобто на  $S$

$$\cos^2 \bar{n}t = \cos^2 \bar{n}x + \cos^2 \bar{n}y.$$

Маємо

$$(u_t^2 + u_x^2 + u_y^2) \cos^2 \bar{n}t = u_t^2 (\cos^2 \bar{n}x + \cos^2 \bar{n}y) + (u_x^2 + u_y^2) \cos^2 \bar{n}t.$$

Тоді рівність (2.54) запишеться у вигляді

$$\iint_S \{ (u_t \cos \bar{n}x - u_x \cos \bar{n}t)^2 + (u_t \cos \bar{n}y - u_y \cos \bar{n}t)^2 \} dS = 0.$$

Остання рівність можлива тоді й лише тоді, коли на поверхні  $S$

$$u_t \cos \bar{n}x - u_x \cos \bar{n}t = 0, \quad u_t \cos \bar{n}y - u_y \cos \bar{n}t = 0,$$

звідки

$$\frac{u_t}{\cos \bar{n}t} = \frac{u_x}{\cos \bar{n}x} = \frac{u_y}{\cos \bar{n}y} = v(t, x, y). \quad (2.55)$$

Позначимо через  $\bar{l}$  напрям якої-небудь твірної характеристичного конуса. Тоді, використавши рівності (2.55), маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = u_x \cos \bar{l}x + u_y \cos \bar{l}y + u_t \cos \bar{l}t = v [\cos \bar{n}x \cos \bar{l}x + \\ + \cos \bar{n}y \cos \bar{l}y + \cos \bar{n}t \cos \bar{l}t] = v \cos \bar{n}\bar{l} = 0, \end{aligned}$$

оскільки твірна конуса перпендикулярна до нормалі його поверхні.

Отже, вздовж твірної  $\bar{l}$  функція  $u(t, x, y) = \text{const}$ . У точці, де твірна перетинає площину  $t = 0$ , значення  $u(0, x, y) = 0$ . Тому  $u(t, x, y) = 0$

вздовж твірної конуса. В окремому випадкові ця умова виконується й у вершині конуса  $M(t_0, x_0, y_0)$ , що й потрібно було довести.

Зауважимо, що дане твердження справедливе й у випадку, коли однорідні початкові умови (2.52) виконуються не на всій площині  $xOy$ , а тільки на основі  $K$  конуса  $D$ . Звідси можна зробити висновок, що значення розв'язку хвильового рівняння (2.50) у точці  $M(t_0, x_0, y_0)$  залежить від значень початкових даних лише в тій частині площини  $t = 0$ , яка вирізається з площини  $t = 0$  характеристичним конусом із вершиною  $M(t_0, x_0, y_0)$ . У зв'язку з цим  $K$  називається *областю залежності для точки*  $M(t_0, x_0, y_0)$  ( $K \in$  кругом  $(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 \leq t_0^2$ ).

Аналогічно доводиться теорема єдиності й у випадку трьох просторових координат.

## 2.8

### Коректність постановки задачі Коші

Раніше було показано, що задачу Коші для рівняння коливання струни поставлено коректно. У випадку хвильового рівняння з трьома просторовими координатами задачу Коші також поставлено коректно. Справді, нехай  $u_1(t, x, y, z)$  і  $u_2(t, x, y, z)$  — розв'язки задач Коші:

$$\begin{cases} u_{1n}(t, x, y, z) = \Delta u_1(t, x, y, z) + f_1(t, x, y, z), \\ (t, x, y, z) \in B = \{(t, x, y, z) \mid t > 0, (x, y, z) \in E_3\}, \\ u_1|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z), \quad u_{1t}|_{t=0} = \psi_1(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3; \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\begin{cases} u_{2n}(t, x, y, z) = \Delta u_2(t, x, y, z) + f_2(t, x, y, z), \quad (t, x, y, z) \in B, \\ u_2|_{t=0} = \varphi_2(x, y, z), \quad u_{2t}|_{t=0} = \psi_2(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3. \end{cases} \quad (2.57)$$

Справедлива наступна теорема.

#### ТЕОРЕМА 2.3

Нехай  $\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z) \in C^3(E_3)$ ;  $\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z) \in C^2(E_3)$ ;  $f_1(t, x, y, z), f_2(t, x, y, z) \in C^2(B)$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0$  і  $t_1 < 0$   $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$ , що як тільки

$$\begin{aligned} &|\varphi_1(x, y, z) - \varphi_2(x, y, z)| < \delta, \\ &|\varphi_{1_x} - \varphi_{2_x}| < \delta, \quad |\varphi_{1_y} - \varphi_{2_y}| < \delta, \\ &|\varphi_{1_z} - \varphi_{2_z}| < \delta, \quad |\psi_1(x, y, z) - \psi_2(x, y, z)| < \delta, \\ &|f_1(t, x, y, z) - f_2(t, x, y, z)| < \delta \end{aligned}$$

при  $(t, x, y, z) \in B_1 = \{(t, x, y, z) \mid t \in [0, t_1], (x, y, z) \in E_3\}$ , то справедлива нерівність

$$|u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \varepsilon$$

для всіх  $(t, x, y, z) \in B_1$ .

### Доведення

Згідно з формулою (2.47) маємо

$$\begin{aligned} &|u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{|\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) - \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma)|}{t^2} d\sigma_t + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \left| \frac{(\varphi_{1_\alpha} - \varphi_{2_\alpha})\xi + (\varphi_{1_\beta} - \varphi_{2_\beta})\eta + (\varphi_{1_\gamma} - \varphi_{2_\gamma})\zeta}{t} \right| d\sigma_t + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \left| \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma) - \psi_2(\alpha, \beta, \gamma)}{t} \right| d\sigma_t + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_{K_t(x, y, z)} \left| \frac{f_1(t - \rho, \alpha, \beta, \gamma) - f_2(t - \rho, \alpha, \beta, \gamma)}{\rho} \right| d\alpha d\beta d\gamma < \\ &< \frac{\delta}{4\pi t^2} \iint_{S_t(x, y, z)} d\sigma_t + \frac{3\delta}{4\pi t} \iint_{S_t(x, y, z)} d\sigma_t + \frac{\delta}{4\pi t} \iint_{S_t(x, y, z)} d\sigma_t + \\ &+ \frac{\delta}{4\pi} \iiint_{K_t(x, y, z)} \frac{1}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma \leq \delta + 3\delta t_1 + \delta t_1 + \frac{t_1^2}{2} \delta = \delta \left( 1 + 4t_1 + \frac{t_1^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Якщо вибрати  $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + 4t_1 + 0,5t_1^2}$ , то дістанемо

$$|u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \varepsilon \quad \forall (t, x, y, z) \in B_1,$$

що й потрібно було довести.

Оскільки задача Коші для хвильового рівняння в просторі має єдиний розв'язок, то, виходячи з доведеної теореми, її поставлено коректно.

◆ **Вправа.** Довести неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних у випадку рівняння коливання мембрани.

## 2.9

### Загальна постановка задачі Коші

Як показано в п. 2.6, довільне квазілінійне рівняння гіперболічного типу

$$a_{11}(\xi, \eta)U_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2a_{12}(\xi, \eta)U_{\xi\eta}(\xi, \eta) + a_{22}(\xi, \eta)U_{\eta\eta}(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$$

може бути зведене до одного з рівнянь

$$u_{xt}(t, x) = f(x, t, u, u_t, v_x), \quad (2.58)$$

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t, u_x). \quad (2.59)$$

Коефіцієнти  $a_{ij}(\xi, \eta)$ ,  $i, j = 1, 2$ , і права частина  $f(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$  вважаються неперервно диференційовними функціями у відповідних областях.

При постановці задачі Коші для рівняння (2.59) ми вважали, що носієм початкових умов є пряма  $t = 0$ . На прикладі рівняння вільних коливань однорідної струни

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (2.60)$$

покажемо, що носієм початкових умов може бути крива  $L$ , яка відрізняється від прямої  $t = 0$ , причому з'ясуємо умови, які має задовольняти крива  $L$ , й вигляд самих початкових умов, аби одержана задача Коші була поставлена коректно.

Для цього позначимо через  $D$  область фазової площини  $xOt$  з кусково-гладкою жордановою межею  $S$ . Нехай  $u(t, x) \in C^2(D)$  — розв'язок рівняння (2.60), який має неперервні частинні похідні першого порядку в області  $\bar{D} = D \cup S$ .

Інтегруючи тотожність (2.60) по області  $D$  і використовуючи формулу Гріна



$$\iint_D (Q_x(x, t) - P_t(x, t)) dx dt = \int_S P dx + Q dt,$$

де криволінійний інтеграл у правій частині береться по контуру в напрямі проти годинникової стрілки, дістаємо

$$\iint_D (u_{xx} - u_{tt}) dx dt = \int_S u_x dt + u_t dx. \quad (2.61)$$

Нехай  $L$  — розімкнена крива Жордана з неперервною кривою, яка задовольняє такі умови:

- кожна пряма з двох сімей характеристик  $x + t = \text{const}$ ,  $x - t = \text{const}$  рівняння (2.60) перетинає криву  $L$  не більше, ніж в одній точці;
- напрям дотичної до кривої  $L$  у жодній точці не збігається з напрямом характеристик рівняння (2.60).

Іноді таку криву  $L$  називають «вільною».

Припустимо, що характеристики  $x - x_1 = t - t_1$  і  $x - x_1 = t_1 - t$ , які виходять із точки  $C$ , перетинаються з кривою  $L$  у точках  $A$  і  $B$  (рис. 2.17).

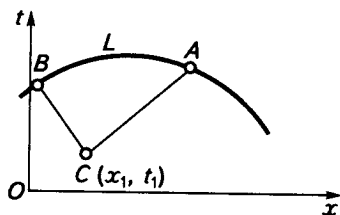


Рис. 2.17

Застосовуючи формулу (2.61) в області, яка обмежена дугою  $AB$  кривої  $L$  і відрізками характеристик  $[CA]$  і  $[CB]$ , дістаємо

$$\int_{\cup AB \cup [BC] \cup [CA]} u_x dt + u_t dx = 0. \quad (2.62)$$

Оскільки вздовж  $[BC]$  і  $[AC]$  маємо  $dx = -dt$ ,  $dx = dt$  відповідно, то (2.62) запишеться у вигляді

$$\int_{AB} u_x dt + u_t dx - 2u(C) + u(A) + u(B) = 0,$$

звідки знаходимо

$$u(C) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2} \int_{AB} u_x dt + u_t dx. \quad (2.63)$$

Якщо розв'язок рівняння (2.60) задовольняє умови

$$u|_L = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial l}|_L = \psi(x), \quad (2.64)$$

де  $\varphi$  і  $\psi$  — задані дійсні відповідно двічі й один раз неперервно диференційовні функції, а  $l$  — заданий на  $L$  достатньо гладкий вектор, що ніде не збігається з дотичною до кривої  $L$ , то, визначивши  $u_x$  і  $u_t$  із рівностей

$$u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad u_x \frac{dx}{dl} + u_t \frac{dt}{dl} = \psi,$$

де  $s$  — довжина дуги  $L$ , і підставивши відомі значення  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_t$  у праву частину (2.63), дістанемо розв'язок задачі Коші (2.60), (2.64).

З наведених міркувань випливає, що постановка задачі Коші (2.60), (2.64) є коректною, тобто в розглядуваній області задача має єдиний розв'язок, і він є стійким.

Аналогічно ставиться задача Коші й у випадку рівняння (2.59).

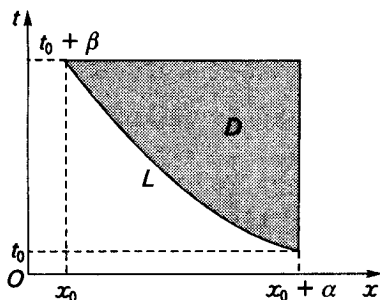


Рис. 2.18

Для рівняння (2.58) характеристиками будуть прямі, паралельні осям координат ( $x = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$ ) (рис. 2.18). Отже, в цьому разі всяка гладка крива  $L$ , яка перетинається не більше, ніж в одній точці з прямими, паралельними осям координат, буде «вільною». Нехай рівняння цієї кривої  $t = g(x)$  (або  $x = h(t)$ ). Вважаємо, що існують похідні  $g'(x)$ ,  $h'(t)$ , що не дорівнюють нулю. Тоді задачу Коші можна поставити так: в області

$$D = \{(t, x) \mid x_0 < x < x_0 + \alpha, g(x) < t < t_0 + \beta\}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (2.58), який на кривій  $L$  задовольняє умови

$$u|_{t=g(x)} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=g(x)} = \psi(x). \quad (2.65)$$

Дані Коші (2.65) дають змогу на кривій  $t = g(x)$  знайти значення похідної  $u_x$ .

Справді, диференціюючи за  $x$  першу з умов (2.65), дістаємо

$$u_x|_{t=g(x)} + u_t|_{t=g(x)}g'(x) = \varphi'(x),$$

або

$$u_x|_{t=g(x)} = \varphi'(x) - \psi(x)\varphi'(x).$$

У випадку хвильового рівняння в  $n$ -вимірному просторі

$$u_{tt}(t, x) = \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.66)$$

носієм початкових умов є «вільна» поверхня  $S$ , тобто гіперповерхня  $\Psi(x, t) = 0$ , яка задовольняє такі умови:

- у жодній її точці  $(x, t)$  не справджується рівність

$$\sum_{i=1}^n (\Psi_{x_i})^2 - (\Psi_t)^2 = 0,$$

тобто поверхня  $S$  не є характеристичною;

- при  $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^n (\Psi_{x_i})^2 - (\Psi_t)^2 < 0, \quad (2.67)$$

а задача Коші ставиться так: знайти двічі неперервно диференційовний розв'язок рівняння (2.66), який задовольняє умови

$$u(t, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial l} = \psi(x), \quad (x, t) \in S,$$

де  $l$  — заданий на  $S$  одиничний вектор, котрий у жодній точці не входить у дотичну до  $S$  площину, а  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  — задані на  $S$  досить гладкі функції.

Значимо, що умова «вільності» поверхні  $S$  є принциповою для коректної постановки задачі Коші. Справді, розглянемо хвильове рівняння

$$u_{tt}(t, x, y) = u_{xx}(t, x, y) + u_{yy}(t, x, y). \quad (2.68)$$

Площина  $y = 0$  не є ні «вільною» [не виконується умова (2.67)], ні характеристичною поверхнею. Функція

$$u_m(t, x, y) = \frac{1}{m^2} \operatorname{sh} my \sin \frac{m}{\sqrt{2}}(x + t),$$

де  $m$  — натуральне число, є розв'язком рівняння (2.68), який задовольняє умови

$$u_m(t, x, y)|_{y=0} = 0, \quad u_y(t, x, 0) = \frac{1}{m} \sin \frac{m}{\sqrt{2}}(x + t). \quad (2.69)$$

Але задачу Коші (2.68), (2.69) поставлено некоректно, оскільки

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m}{\sqrt{2}}(x + t) = 0,$$

а сам розв'язок  $u_m(t, x, y)$  при  $m \rightarrow \infty$  не є обмеженим.

## 2.10

### Постановка задачі Гурса

Зауважимо, що характеристики рівняння гіперболічного типу не можуть бути носіями початкових умов задачі Коші. В цьому легко переконатися на прикладі хвильового рівняння (2.60). Справді, нехай носієм початкових умов є характеристика  $x + t = C$ . Тоді, виходячи із загального розв'язку рівняння (2.60), мають виконуватись умови

$$\begin{cases} f_1(C) + f_2(2x - C) = \varphi(x), \\ [f_1'(C) + f_2'(2x - C)] \cos(lx) + [f_1'(C) - f_2'(2x - C)] \sin(lx) = \psi(x). \end{cases}$$

Очевидно, що в разі довільних, навіть як завгодно гладких функцій  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$ , останні тотожності одночасно виконуватися не можуть.

Однак для хвильових рівнянь коректно поставленою є так звана характеристична задача Коші, або задача Гурса: знайти розв'язок рівняння (2.66) у характеристичному конусі  $K$ :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i_0})^2 - (t - t_0)^2 < 0, \quad t > t_0,$$

який на його поверхні задовольняє умову

$$u(t, x) = \varphi, \quad (t, x) \in S, \quad (2.70)$$

$$S: \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i_0})^2 - (t - t_0)^2 = 0,$$

де  $\varphi$  — задана на  $S$  достатньо гладка функція.

У випадку  $n = 1$  конус  $K$  вироджується в область, обмежену характеристиками  $x + t = x_0 + t_0$ ,  $x - t = x_0 - t_0$  і прямою  $t = t_0$ , а умова (2.70) записується у вигляді

$$u(t, x)|_{x=x_0+t_0-t} = \mu_1(t), \quad u(t, x)|_{x=t-t_0+x_0} = \mu_2(t), \quad (2.71)$$

де  $\mu_1(t)$  і  $\mu_2(t)$  — відомі, двічі неперервно диференційовні функції, які задовольняють умову  $\mu_1(t_0) = \mu_2(t_0)$ .

Із загального розв'язку рівняння (2.60) легко дістати єдиний стійкий розв'язок задачі Гурса (2.60), (2.71):

$$u(t, x) = \mu_1\left(\frac{t - x + t_0 + x_0}{2}\right) + \mu_2\left(\frac{x + t - x_0 + t_0}{2}\right) - \mu_1(t_0).$$

Зазначимо, що задача Гурса є математичною моделлю низки важливих проблем практики. Як приклад розглянемо задачу про поглинання (сорбцію) газу.

Нехай крізь трубку, яка заповнена поглинальною речовиною (сорбентом), пропускається газоповітряна суміш. Рівняння балансу речовини за умови, що швидкість газу  $\gamma$  досить велика й процес дифузії не відіграє суттєвої ролі в перенесенні газу, є

$$u_{tx}(t, x) + \frac{\beta}{\gamma} u_t(t, x) + \beta \nu u_x(t, x) = 0, \quad (2.72)$$

де  $1/\nu$  — коефіцієнт Генрі;  $\beta$  — кінетичний коефіцієнт;  $u(t, x)$  — концентрація газу, який міститься в порах сорбенту в шарі  $x$ .

Потрібно знайти розв'язок рівняння (2.72), якщо відомі концентрації газу в порах сорбенту в початковий момент часу  $t = 0$

$$u(0, x) = u_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} x} \quad (2.73)$$

і на вході  $u_0$  в довільний момент часу  $t$

$$u(t, 0) = u_0. \quad (2.74)$$

До задач, подібних задачі Гурса (2.72)—(2.74), приводять і проблеми процесу сушіння повітряним потоком, прогрівання трубки потоком води тощо.

## 2.11

### Метод послідовних наближень для задачі Гурса

Розглянемо задачу Гурса (рис. 2.19): в області

$$B = \{(x, t) \mid x_0 < x < x_0 + \alpha, t_0 < t < t_0 + \beta\}, \quad \alpha, \beta = \text{const}$$

знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{xx}(t, x) = f(t, x, u, u_x) \equiv f[u(t, x)], \quad (2.75)$$

який на характеристиках  $x = x_0$ ,  $t = t_0$  задовольняє умови

$$u(t_0, x) = \varphi_1(x), \quad u(t, x_0) = \varphi_2(t), \quad \varphi_1(x_0) = \varphi_2(t_0). \quad (2.76)$$

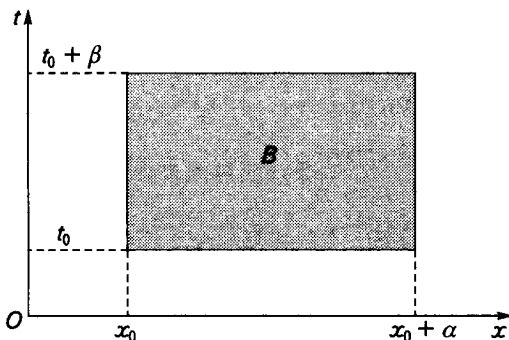


Рис. 2.19

Вважаємо, що задані функції  $\varphi_1(x)$  та  $\varphi_2(t)$  належать класам  $C^1[x_0, x_0 + \alpha]$ ,  $C^1[t_0, t_0 + \beta]$  відповідно, а  $f[u(t, x)] \in C_1(D)$ , де  $D$  — область, проекція якої на площину  $xOt$  дає  $B$ ;  $C_1(D)$  — клас неперервних функцій у  $D$ , які мають у цій області обмежені частинні похідні першого порядку за всіма своїми аргументами, починаючи з третього.

Представимо задачу (2.75), (2.76) в еквівалентній інтегральній формі. Для цього зінтегруємо рівняння (2.75) за  $x$  у межах від  $x_0$  до  $x$ , а за  $t$  — у межах від  $t_0$  до  $t$  і врахуємо умови (2.76). Дістанемо

$$u(t, x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(x_0) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x f[u(\eta, \xi)] d\xi d\eta. \quad (2.77)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (2.77) шукатимемо методом Пікара:

$$u_{n+1}(t, x) = \psi(t, x) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x f[u_n(\eta, \xi)] d\xi d\eta, \quad (2.78)$$

де  $\psi(t, x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(x_0)$ .

Значимо, що

$$\frac{\partial u_{n+1}(t, x)}{\partial x} = \psi_x(t, x) + \int_{t_0}^t f[u_n(\eta, x)] d\eta, \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial u_{n+1}(t, x)}{\partial t} = \psi_t(t, x) + \int_{x_0}^x f[u_n(t, \xi)] d\xi.$$

Доведемо, що послідовності функцій  $\{u_n(t, x)\}$ ,  $\left\{ \frac{\partial u_n(t, x)}{\partial t} \right\}$  і  $\left\{ \frac{\partial u_n(t, x)}{\partial x} \right\}$ , побудовані згідно з (2.78), (2.79), рівномірно збігаються в області  $B$ . Для цього позначимо  $z_n(t, x) = u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x)$ . Тоді, застосовуючи теорему Лагранжа про скінченні прирости, з (2.78) і (2.79) маємо

$$\begin{aligned} z_{n+1}(t, x) &= \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left\{ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u(\eta, \xi)} z_n(\eta, \xi) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_\eta(\eta, \xi)} \frac{\partial z_n(\eta, \xi)}{\partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_\xi(\eta, \xi)} \frac{\partial z_n(\eta, \xi)}{\partial \xi} \right\} d\xi d\eta \equiv \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x F[z_n(\eta, \xi)] d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial z_{n+1}(t, x)}{\partial x} = \int_{t_0}^t F[z_n(\eta, \xi)] d\eta,$$

$$\frac{\partial z_{n+1}(t, x)}{\partial t} = \int_{x_0}^x F[z_n(t, \xi)] d\xi,$$

де  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u(\eta, \xi)}$ ,  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_\eta(\eta, \xi)}$ ,  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_\xi(\eta, \xi)}$  — похідні в точці

$$\left( t, x, u_n + \theta_1 z_n, \frac{\partial u_n}{\partial \eta} + \theta_2 \frac{\partial z_n}{\partial \eta}, \frac{\partial u_n}{\partial \xi} + \theta_3 \frac{\partial z_n}{\partial \xi} \right) \in D,$$

$$0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Унаслідок умов, накладених на функції  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(t)$  і  $f[u(t, x)]$ , існують такі сталі  $M$  і  $H$ , що

$$M = \sup_D \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial u_x} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial u_t} \right| \right\},$$

$$H = \sup_B \{ |\psi(t, x)|, |\psi_x(t, x)|, |\psi_t(t, x)| \}.$$

Покладемо  $z_0(t, x) = \psi(t, x)$ . Тоді з (2.80) дістанемо

$$|z_1(t, x)| \leq 3MH(x - x_0)(t - t_0) < 3MHK(x - x_0 + t - t_0),$$

$$|z_{1_x}(t, x)| \leq 3MH(t - t_0) < 3MHK(x - x_0 + t - t_0),$$

$$|z_{1_t}(t, x)| \leq 3MH(x - x_0) < 3MHK(x - x_0 + t - t_0),$$

де  $K = \sup(1, \alpha + \beta)$ , а

$$\sup_B \{ |z_2(t, x)|, |z_{2_x}(t, x)|, |z_{2_t}(t, x)| \} < (3MK)^2 H \frac{(x - x_0 + t - t_0)^2}{2!}.$$

Припустимо, що справедливі оцінки

$$\begin{aligned} \sup_B \{ |z_n(t, x)|, |z_{n_x}(t, x)|, |z_{n_t}(t, x)| \} < \\ < (3MK)^n H \frac{(x - x_0 + t - t_0)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Тоді з (2.80) маємо

$$\begin{aligned} & |z_{n+1}(t, x)| \leq \\ & \leq (3MK)^n H 3M \left[ \frac{(x - x_0 + t - t_0)^{n+2}}{(n+2)!} - \frac{(x - x_0)^{n+2}}{(n+2)!} - \frac{(t - t_0)^{n+2}}{(n+2)!} \right] < \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} < (3MK)^{n+1} H \frac{(x - x_0 + t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{[3MK(\alpha + \beta)]^{n+1}}{(n+1)!} H, \\ \sup_B \{ |z_{n+1}(t, x)|, |z_{n+1_x}(t, x)| \} < \frac{[3MK(\alpha + \beta)]^{n+1}}{(n+1)!} H. \end{aligned}$$

Очевидно, що

$$u_n(t, x) = \sum_{i=0}^n z_i(t, x). \quad (2.82)$$

Згідно з ознакою Д'Аламбера ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[3MK(\alpha + \beta)]^{n+1}}{(n+1)!}$  збігається, а

отже, на підставі оцінок (2.81) ряди  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n(t, x)$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_{n_t}(t, x)$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_{n_x}(t, x)$  в області  $B$  збігаються абсолютно й рівномірно, тобто внаслідок (2.82) у  $B$  рівномірно збігаються послідовності функцій  $\{u_n(t, x)\}$ ,  $\{u_{n_t}(t, x)\}$ ,  $\{u_{n_x}(t, x)\}$ .

Позначимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x) = u(t, x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_t}(t, x) = v(t, x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_x}(t, x) = \omega(t, x).$$

Переходячи до границі в (2.78), (2.79), дістаємо

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \psi(t, x) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x f(\eta, \xi, u, v, \omega) d\xi d\eta, \\ v(t, x) &= \psi_t(t, x) + \int_{x_0}^x f(t, \xi, u, v, \omega) d\xi, \\ \omega(t, x) &= \psi_x(t, x) + \int_{t_0}^t f(\eta, x, u, v, \omega) d\eta. \end{aligned}$$

З останніх рівностей випливає, що  $v(t, x) = u_t(t, x)$ ,  $\omega(t, x) = u_x(t, x)$ , отже,

$$u(t, x) = \psi(t, x) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x f(\eta, \xi, u, u_\eta, u_\xi) d\xi d\eta. \quad (2.83)$$

Здиференціювавши (2.83) за  $t$  і  $x$ , матимемо

$$u_{tx}(t, x) \equiv f[u(t, x)],$$

тобто гранична функція  $u(t, x)$  є розв'язком поставленої задачі Гурса (2.75), (2.76).

Покажемо, що цей розв'язок єдиний в області  $B$ . Для цього припустимо, що існують два розв'язки задачі (2.75), (2.76):  $u_1(t, x)$  і  $u_2(t, x)$ .

Позначимо

$$w(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x).$$

Тоді дістанемо, що функція  $w(t, x)$  є розв'язком інтегрального рівняння

$$w(t, x) = \int_{x_0}^x \int_{t_0}^t F[w(\eta, \xi)] d\eta d\xi.$$

Позначивши

$$H_1 = \sup_{\bar{B}} \{|w(t, x)|, |w_t(t, x)|, |w_x(t, x)|\}$$

і повторюючи попередні міркування, легко дістати оцінку

$$|w(t, x)| < \frac{[3MK(\alpha + \beta)]^{n+1}}{(n+1)!} H_1$$

для довільного  $n \in N$ , а отже,  $w(t, x) \equiv 0$ , тобто  $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$  при  $(t, x) \in B$ , і єдиність доведено.

◆ **Зауваження 2.4.** Наведені вище міркування справедливі й у тому випадкові, коли  $f[u(t, x)] \in C(D)$  і функція  $f[u(t, x)]$  по  $u(t, x)$ ,  $u_t(t, x)$ ,  $u_x(t, x)$  задовольняє в області  $D$  умову Ліпшіца.

◆ **Вправа.** За допомогою методу послідовних наближень довести існування та єдиність в області  $D$  розв'язку задачі Коші (2.58), (2.65).

## 2.12 Метод Рімана

Побудуємо розв'язок такої задачі Коші (рис. 2.20): в області

$$D = \{(t, x) \mid x_0 < x < x_0 + \alpha, \quad g(x) < t < t_0 + \beta\}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

знайти розв'язок диференціального рівняння

$$Lu(t, x) \equiv u_{tx} + a(t, x)u_x + b(t, x)u_t + c(t, x)u = f(t, x), \quad (2.84)$$

який на «вільній» кривій  $t = g(x)$  ( $g'(x) > 0$ ) задовольняє умови

$$u(g(x), x) = \varphi(x), \quad u_t(g(x), x) = \psi(x). \quad (2.85)$$

Надалі вважатимемо, що коефіцієнти диференціального рівняння (2.84) і функції  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  неперервно диференційовні в області  $D$ , а  $f(t, x) \in C(D)$ .

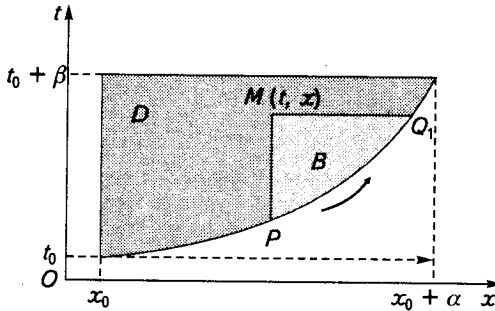


Рис. 2.20

Викладемо метод розв'язування задачі Коші (2.84), (2.85), ідея якого належить видатному німецькому математикові Г. Ф. Б. Ріману. Зазначимо, що саме ним було закладено початок сучасної теорії гіперболічних рівнянь із частинними похідними.

Розглянемо поряд із диференціальним оператором  $Lu(t, x)$  так званий *спряжений оператор*

$$L^*v(t, x) = v_{tx}(av)_x - (bv)_t + cv.$$

Легко перевірити, що в області  $D$  справедлива тотожність

$$v(t, x)Lu(t, x) - u(t, x)L^*v(t, x) = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (vu_t - uv_t + 2auv) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (vu_x - uv_x + 2buv) \quad (2.86)$$

для довільних функцій  $u(t, x)$  і  $v(t, x)$  із класу  $C^2(D)$ .

Візьмемо в області  $D$  довільну точку  $M(t, x)$  і розглянемо область  $B$ , обмежену дугою лінії  $t = g(x)$  і двома прямими, паралельними осям координат, які виходять із точки  $M(t, x)$ .

Інтегруючи тотожність (2.86) по області  $B$  та застосовуючи формулу Гріна, дістаємо

$$2 \iint_B (vLu - uL^*v) d\xi d\eta = \int_{\cup PQU[QM]U[MP]} K d\xi + H d\eta, \quad (2.87)$$

де

$$K(t, x) = uv_x - vu_x - 2buv; \quad H = vu_t - uv_t + 2auv.$$

Обчислимо криволінійний інтеграл у правій частині (2.87) по відрізках  $[QM]$  і  $[MP]$ . Уздовж  $[QM]$  значення  $\eta$  не змінюється (отже,  $d\eta = 0$ ), і маємо

$$\int_{[QM]} K d\xi + H d\eta = \int_{[QM]} K d\xi.$$

Але

$$K = uv_x - vu_x - 2buv = -(uv)_x + 2u(v_x - bv),$$

а отже,

$$\int_{[QM]} K d\xi = (uv)_Q - (uv)_M + \int_{[QM]} 2u(v_\xi - bv) d\xi.$$

Аналогічно міркуючи щодо криволінійного інтеграла по відрізьку  $[MP]$ , дістаємо

$$\int_{[MP]} K d\xi + H d\eta = \\ = \int_{[MP]} H d\eta = (uv)_P - (uv)_M + \int_{[MP]} 2u[av - v_\eta] d\eta.$$

Підставивши знайдені криволінійні інтеграли в (2.87), матимемо

$$u(M)v(M) = 0,5[(uv)_Q + (uv)_P + \int_{\cup PQ} K d\xi + H d\eta] + \\ + \int_{[QM]} u(v_\xi - bv) d\xi + \int_{[MP]} u[av - v_\eta] d\eta - \iint_B (vLu - uL^*v) d\xi d\eta. \quad (2.88)$$

Припустимо тепер, що функція  $u(t, x)$  є розв'язком задачі Коші (2.84), (2.85), а  $v(t, x, \eta, \xi)$  задовольняє диференціальне рівняння

$$L^*v(t, x, \eta, \xi) = 0 \quad (2.89)$$

і умови

$$v_\xi - bv = 0 \text{ на } [QM], \\ v_\eta - av = 0 \text{ на } [MP], \quad (2.90)$$

причому  $v(M) = 1$ .

Інтегруючи рівняння (2.90) і враховуючи умову в точці  $M$ , дістаємо

$$v(t, x, t, \xi) = e^{\int_t^\xi b(t, \lambda) d\lambda}, \\ v(t, x, \eta, x) = e^{\int_\eta^x a(t, \lambda) d\lambda}. \quad (2.91)$$

Задача (2.89), (2.91) є задачею Гурса й згідно з доведеним у п. 2.11 вона має єдиний розв'язок. Цей розв'язок називається *функцією Рімана*, яка не залежить ні від даних Коші, ні від вигляду кривої  $g(x)$ . Для функції Рімана точка  $(\eta, \xi)$  відіграє роль аргументу, а точка  $(t, x)$  — роль параметра.

Підставивши в (2.88) замість  $v$  функцію Рімана й урахувавши рівняння (2.84), матимемо

$$u(t, x) = 0,5[(uv)_Q + (uv)_P + \int_{\cup PQ} K d\xi + H d\eta] - \iint_B vf(\eta, \xi) d\eta d\xi. \quad (2.92)$$

Формула (2.92) називається *формулою Рімана* й представляє розв'язок диференціального рівняння (2.84) для довільних початкових умов, заданих на довільній «вільній» кривій  $l$ .

Із методу побудови формули Рімана (2.92) випливає, що розв'язок задачі Коші (2.84), (2.85) є єдиним у  $D$  і неперервно залежить від початкових умов.

■ **Приклад 2.4.** За допомогою методу Рімана знайдемо розв'язок задачі Коші

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad 1 < y < +\infty, \quad (2.93)$$

$$u(x, 1) = \varphi(x), \quad u_y(x, 1) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty. \quad (2.94)$$

Рівняння (2.93) в розглядуваній області належить до гіперболічного типу й має дві різні сім'ї характеристик:

$$C_1 = xy, \quad C_2 = x^{-1}y.$$

Ввівши нові незалежні змінні  $\xi = xy$ ,  $\eta = x^{-1}y$ , дістанемо канонічну форму рівняння (2.93):

$$U_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} U_{\eta} = 0. \quad (2.95)$$

Пряма  $y = 1$  у нових незалежних змінних матиме вигляд гіперболи:  $\xi\eta = 1$

Зі співвідношень  $x = \xi(\xi\eta)^{-0.5}$ ,  $y = (\xi\eta)^{0.5}$  і початкових умов (2.94) маємо

$$U_{\xi} |_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2} [(\xi\eta)^{-0.5} u_x + \xi^{-1} (\xi\eta)^{0.5} u_y] |_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2} [\varphi'(\xi) + \xi^{-1} \psi(\xi)], \quad (2.96)$$

$$U_{\eta} |_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2} [\xi (\xi\eta)^{-0.5} u_y - \xi^2 (\xi\eta)^{-1.5} u_x] |_{\xi\eta=1} = \frac{\xi}{2} [\psi(\xi) - \xi \varphi'(\xi)];$$

$$U |_{\xi\eta=1} = \varphi(\xi). \quad (2.97)$$

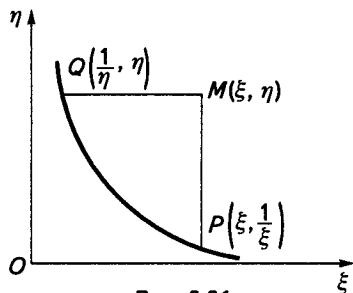


Рис. 2.21

До задачі Коші (2.95)–(2.97) застосуємо формулу Рімана (2.92) (рис. 2.21). У нашому випадкові  $a = 0$ ,  $f = 0$ ,  $b = -\frac{1}{2\xi}$ . Отже, згідно з (2.92)

$$U(\xi, \eta) = 0,5[(Uv)_Q + (Uv)_P + \int_{\cup QP} (vU_\lambda - Uv_\lambda - \lambda^{-1}Uv) d\lambda - (vU_\mu - Uv_\mu) d\mu]. \quad (2.98)$$

Знаходимо функцію Рімана  $v(\xi, \eta, \lambda, \mu)$ . Вона має бути розв'язком задачі Гурса [див. (2.89), (2.91)]

$$v_{\lambda\mu} + \frac{1}{2\lambda} v_\mu = 0; \quad (2.99)$$

$$v(\xi, \eta, \lambda, \eta) = e^{-\int \frac{1}{2\lambda} d\lambda} = \sqrt{\frac{\xi}{\lambda}} \quad \text{на } |MQ|, \\ v(\xi, \eta, \xi, \mu) = 1 \quad \text{на } |PM|. \quad (2.100)$$

Зінтегрувавши (2.99), дістанемо

$$v(\xi, \eta, \lambda, \mu) = \lambda^{-0,5} [f_1(\xi, \eta, \lambda) + f_2(\xi, \eta, \mu)],$$

де  $f_1(\xi, \eta, \lambda)$  і  $f_2(\xi, \eta, \lambda)$  — довільні неперервно диференційовні функції. Визначаємо їх таким чином, щоб функція Рімана задовольняла умови (2.100). Маємо

$$f_1(\xi, \eta, \lambda) + f_2(\xi, \eta, \mu) = \sqrt{\xi}.$$

Отже,

$$v(\xi, \eta, \lambda, \mu) = \sqrt{\xi/\lambda}.$$

Беручи до уваги, що

$$U(P) = \varphi(\xi), \quad U(Q) = \varphi(1/\eta),$$

$$v(P) = v(\xi, \eta, \xi, 1/\xi) = 1, \quad v(Q) = v(\xi, \eta, 1/\eta, \eta) = \sqrt{\xi\eta},$$

з (2.98) матимемо

$$U(\xi, \eta) = 0,5 \left[ \varphi(\xi) + \sqrt{\xi\eta} \varphi\left(\frac{1}{\eta}\right) + \sqrt{\xi} \int_{\xi}^{1/\eta} (0,5\varphi(\lambda) - \psi(\lambda)) \lambda^{-3/2} d\lambda \right].$$

Повертаючися до старих незалежних змінних  $x$  і  $y$ , знаходимо розв'язок поставленої задачі Коші (2.93), (2.94):

$$u(x, y) = 0,5 \left[ \varphi(xy) + y\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \sqrt{xy} \int_{xy}^{x/y} (0,5\varphi(\lambda) - \psi(\lambda)) \lambda^{-3/2} d\lambda \right].$$

■ **Приклад 2.5.** Побудуємо розв'язок задачі Коші (2.84), (2.85) за умови, що при

$$(t, x) \in D \quad a(t, x) = b(t, x) = 0, \quad c(t, x) = c = \text{const.}$$

Для розв'язання поставленої проблеми необхідно зінтегрувати задачу Гурса (2.89), (2.91), яка в нашому випадкові запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta}(t, x, \eta, \xi) + cv(t, x, \eta, \xi) &= 0, \\ v(t, x, t, \xi) = v(t, x, \eta, \xi) &= 1. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Шукаємо функцію Рімана  $v(t, x, \eta, \xi)$  у вигляді  $v(t, x, \eta, \xi) = q(z)$ , де  $z = 2\sqrt{c(\xi - x)(t - \eta)}$  при  $c > 0$  і  $z = 2\sqrt{-c(\xi - x)(t - \eta)}$  при  $c < 0$ . Маємо

$$v_{\xi} = q'(z)\sqrt{\pm c(t - \eta)(\xi - x)^{-1}}, \quad v_{\xi\eta} = \mp \frac{c}{z} q'(z) \mp cq''(z)$$

(верхній знак береться при  $c > 0$ , нижній — при  $c < 0$ ). Підставляючи знайдені похідні в задачу (2.101), дістанемо

$$z^2 q''(z) + zq'(z) \mp z^2 q(z) = 0, \quad q(0) = 1. \quad (2.102)$$

Рівняння (2.102) є рівнянням Бесселя. Оскільки в точці  $z = 0$  розв'язок цього рівняння має бути обмеженим і дорівнювати одиниці, то, як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь, у випадку  $c > 0$  маємо  $q(z) = I_0(z)$ , а при  $c < 0$  дістаємо  $q(z) = J_0(z)$ , де

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} (0,5z)^{2k} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{ch}(z \cos \theta) d\theta$$

— модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку, а

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} (0,5z)^{2k} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

— функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Отже,

$$\begin{aligned} v(t, x, \eta, \xi) &= \\ &= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c(\xi - x)(t - \eta)|^k}{(k!)^2} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{ch}(z \cos \theta) d\theta, & c > 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{|-c(\xi - x)(t - \eta)|^k}{(k!)^2} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \theta) d\theta, & c < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.103)$$



Звідси маємо

$$v_{\xi\eta} = \begin{cases} -\frac{c}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch}(z \cos \theta) d\theta, & c > 0, \\ -\frac{c}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \theta) d\theta, & c < 0, \end{cases}$$

а отже, підставляючи (2.103) та знайдені похідні в (2.101), переконуємося, що (2.103) справді є розв'язком задачі Гурса (2.101), причому в класі регулярних розв'язків він єдиний при  $(t, x) \in D$ .

У точках  $P$  і  $Q$  маємо

$$u(P) = \varphi(x), \quad u(Q) = \varphi(k(t)) \quad (t = g(x) \Rightarrow x = k(t)),$$

$$v|_P = v|_Q = 1.$$

На  $\cup PQ$

$$u = \varphi(\xi), \quad u_{\eta} = \psi(\xi), \quad u_{\xi} = \varphi'(\xi) - g'(\xi)\psi(\xi);$$

$$v = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch}(z_1 \cos \theta) d\theta, \quad z_1 = 2\sqrt{a(\xi - x)(t - g(\xi))}, \quad c > 0,$$

$$v = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z_1 \cos \theta) d\theta, \quad z_1 = 2\sqrt{-a(\xi - x)(t - g(\xi))}, \quad c < 0;$$

$$v_{\xi} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2c \sin^2 \theta (t - g(\xi)) \operatorname{ch}(z_1 \cos \theta) d\theta, & c > 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2c \sin^2 \theta (t - g(\xi)) \cos(z_1 \cos \theta) d\theta, & c < 0; \end{cases}$$

$$v_{\eta} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2c \sin^2 \theta (x - \xi) \operatorname{ch}(z_1 \cos \theta) d\theta, & c > 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2c (x - \xi) \sin^2 \theta \cos(z_1 \cos \theta) d\theta, & c < 0. \end{cases}$$

Підставляючи наведені значення  $u(t, x)$  та  $v(t, x, \eta, \xi)$  у точках  $P$  і  $Q$  та на  $\cup PQ$  у формулу Рімана (2.92), дістанемо шуканий розв'язок поставленої задачі:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = & \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_x^{k(t)} \{2c(t - g(\xi))\varphi(\xi) \sin^2 \theta + g'(\xi)\psi(\xi)\} \times \\
 & \times \operatorname{ch}(z_1 \cos \theta) d\xi d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_x^{k(t)} \int_{g(\xi)}^t f(\eta, \xi) \operatorname{ch}(z \cos \theta) d\eta d\xi d\theta, \\
 & c > 0,
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = & \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_x^{k(t)} \{2c(t - g(\xi))\varphi(\xi) \sin^2 \theta + g'(\xi)\psi(\xi)\} \times \\
 & \times \cos(z_1 \cos \theta) d\xi d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_x^{k(t)} \int_{g(\xi)}^t f(\eta, \xi) \cos(z \cos \theta) d\eta d\xi d\theta, \\
 & c < 0.
 \end{aligned}$$

◇ **Зауваження 2.5.** Якщо в рівнянні (2.84)  $a(t, x) \in C^{(0, 1)}(D)$ ,  $b(t, x) \in C^{(1, 0)}(D)$ ,  $c(x, y), f(x, y) \in C(D)$ , а

$$a_x(t, x) = b_t(t, x), \tag{2.105}$$

то підстановкою

$$u(t, x) = \exp(v(t, x))W(t, x),$$

де

$$v(t, x) = -\int_{t_0}^t a(\tau, x) d\tau - \int_{x_0}^x b(\tau, t_0) d\tau,$$

рівняння (2.84) зводиться до вигляду

$$W_{tx} + (c - ab - a_x)W = f(t, x) \exp(-v(t, x)).$$

У випадку, коли  $c - ab - a_x = \text{const}$ , за допомогою формул (2.104) можемо побудувати розв'язок задачі (2.84), (2.85), (2.105).

## 2.13

### Задачі Дарбу для рівняння коливання струни

Вище було показано, що задачу Коші й задачу Гурса для рівнянь гіперболічного типу поставлено коректно. Розглянемо ще дві досить поширені на практиці задачі для рівняння коливання струни.

□ **Перша задача Дарбу** (рис. 2.22): в області

$$D = \{(t, x) \mid -x < t < 0, \quad 0 < x < +\infty\}$$

знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt}(t, x) = u_{xx}(t, x), \quad (2.106)$$

який задовольняє умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u(-x, x) = \psi(x), \quad \varphi(0) = \psi(0), \quad x \geq 0, \quad (2.107)$$

де  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  — задані дійсні функції класу  $C^2(0, +\infty)$ .

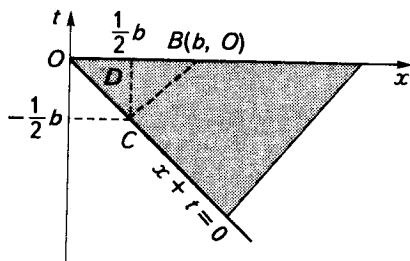


Рис. 2.22

Для відшукування розв'язку задачі (2.106), (2.107) скористаємося загальним розв'язком рівняння (2.106) [див. формулу (2.16)]:

$$u(t, x) = f_1(x+t) + f_2(x-t). \quad (2.108)$$

Підставивши (2.108) в умови (2.107), дістанемо

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ f_1(0) + f_2(2x) = \psi(x), \end{cases} \quad x \geq 0.$$

З останніх співвідношень маємо

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \psi(x/2) - f_1(0), \\ f_1(x) &= \varphi(x) - \psi(x/2) + f_1(0). \end{aligned}$$

Підставивши знайдені функції в (2.108), дістанемо розв'язок поставленої задачі Дарбу

$$u(t, x) = \varphi(x+t) - \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right). \quad (2.109)$$

Зазначимо: якщо в першій з умов (2.107) носієм даних є відрізок  $[OB]$  осі  $t = 0$ , то для однозначного визначення розв'язку задачі (2.106), (2.107) у трикутнику  $OBC$  у другій з умов (2.107) носієм даних має бути відрізок  $[OC]$ , де  $C$  — точка з координатами  $(b/2, -b/2)$ .

□ Друга задача Дарбу (рис. 2.23): в області

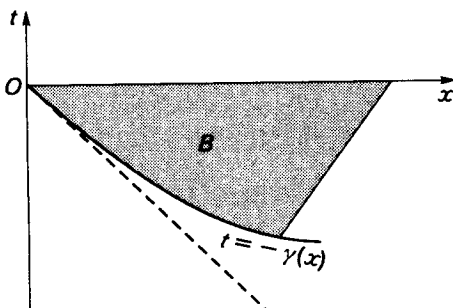
$$B = \{(t, x) \mid -\gamma(x) < t < 0, 0 < x < +\infty\}$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (2.106), якщо відоме його значення на півосі  $t = 0$ ,  $x \geq 0$  і кривій  $t = -\gamma(x)$ , тобто

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u(-\gamma(x), x) = \psi(x), \quad (2.110)$$

де крива  $t = -\gamma(x)$  із неперервною кривою задовольняє умови

$$\gamma(0) = 0, \quad 0 < \gamma'(x) < 1. \quad (2.111)$$



**Рис. 2.23**

Для побудови розв'язку задачі Дарбу (2.106), (2.110) підставимо (2.108) у (2.110). Маємо

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad x \geq 0. \quad (2.112)$$

$$f_1(x - \gamma(x)) + f_2(x + \gamma(x)) = \psi(x),$$

Оскільки  $\gamma(0) = 0$ , то за умови (2.111) із рівності  $x + \gamma(x) = \xi$  однозначно можемо визначити  $x$  як функцію від  $\xi$ . Нехай ця функція є  $x = \delta(\xi)$ . Тоді другу з умов (2.112) можна записати у вигляді

$$f_1(\delta(\xi) - \gamma(\delta(\xi))) + f_2(\xi) = \psi(\delta(\xi)).$$

Виключаючи з першої з умов (2.112) та добутої рівності  $f_2(\xi)$ , маємо

$$f_1(\xi) - f_1(\delta(\xi) - \gamma(\delta(\xi))) = \varphi(\xi) - \psi(\delta(\xi)). \quad (2.113)$$

Беручи до уваги, що

$$\frac{d}{d\xi} [\delta(\xi) - \gamma(\delta(\xi))] = \frac{1 - \gamma'(x)}{1 + \gamma'(x)},$$

а

$$0 < \frac{1 - \gamma'(x)}{1 + \gamma'(x)} < 1,$$

для визначення функції  $f_1(\xi)$  із рівняння (2.113) можна використати метод ітерацій. У результаті дістанемо

$$f_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(\lambda^k(\xi)) - \psi(\delta(\lambda^k(\xi)))], \quad (2.114)$$

де

$$\lambda^0(\xi) = \xi; \quad \lambda^1(\xi) = \lambda(\xi), \quad \dots; \quad \lambda^k(\xi) = \lambda^{k-1}(\lambda(\xi));$$

$$\lambda(\xi) = \delta(\xi) - \gamma(\delta(\xi)).$$

Тоді з першої з рівностей (2.112) маємо

$$f_2(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(\lambda^k(x)) - \psi(\delta(\lambda^k(x)))]. \quad (2.115)$$

Підставивши (2.114) і (2.115) в (2.108), дістанемо розв'язок другої задачі Дарбу

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(\lambda^k(x+t)) - \psi(\delta(\lambda^k(x+t)))] + \varphi(x-t) - \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(\lambda^k(x-t)) - \psi(\delta(\lambda^k(x-t)))].$$

Із побудови розв'язків першої і другої задач Дарбу випливає їх єдиність.

Зазначимо, що розглядаються й інші варіанти постановки задач Гурса та Дарбу.

**2.14****Задача Коші з даними на гіперплощині.  
Перетворення Лоренца**

Розглянемо один метод побудови розв'язку задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння в тому випадкові, коли початкові умови задані не при  $t = 0$ , а на деякій гіперплощині  $L$ , яка проходить через початок координат  $x = y = z = t = 0$  і нахилена до осі  $t$  під кутом, більшим за  $\arctg a$ . Не зменшуючи загальності міркувань, можемо вважати, що рівняння гіперплощини  $L$  має вигляд  $t = \frac{v}{a_2} x$ , де  $v$  — довільний параметр,  $v < a$ , оскільки цього завжди можна домогтися ортогональним перетворенням координат, за якого тривимірний оператор Лапласа переходить у тривимірний оператор Лапласа за новими незалежними змінними. Отже, розглянемо задачу Коші:

$$u_{tt}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z),$$

$$u \Big|_{t = \frac{v}{a_2} x} = \varphi(x, y, z), \quad u_t \Big|_{t = \frac{v}{a_2} x} = \psi(x, y, z), \quad (2.116)$$

де  $\varphi(x, y, z) \in C^3(E_3)$ ;  $\psi(x, y, z) \in C^2(E_3)$ .

Розв'язок задачі (2.116) побудуємо введенням нових незалежних змінних.

► **Означення 2.4.** *Будь-яке лінійне однорідне перетворення змінних  $t, x, y, z$  із дійсними коефіцієнтами, за якого квадратична форма  $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  залишається незмінною, називається **перетворенням Лоренца**.*

Можна показати, що всяке перетворення Лоренца є комбінацією ортогонального перетворення змінних  $x, y, z$ , яке залишає  $t$  незмінним, перетворення вигляду

$$x' = \frac{x - \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

де  $t', x', y', z'$  — нові змінні;  $\beta$  — число, за модулем менше від одиниці, і зміни знака в деяких змінних (відображення).

Введемо в (2.116) нові незалежні змінні за допомогою перетворення Лоренца

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x-vt), \quad y = y', \quad z = z', \\t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{v}{a^2}x\right), \quad \beta = \frac{v}{a}.\end{aligned}\tag{2.117}$$

Рівняння гіперплощини  $L: t = \frac{v}{a^2}x$  у нових незалежних змінних запишеться у вигляді  $t' = 0$ . Із (2.117) маємо

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{v}{a^2}x' + t'\right).$$

Позначимо

$$W(t', x', y', z') = u\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{v}{a^2}x' + t'\right), \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x' + vt'), y', z'\right).$$

Тоді

$$u_x = W_{x'} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{v}{a^2\sqrt{1-\beta^2}} W_{t'}, \quad u_t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} W_{t'} - \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} W_{x'},$$

$$u_{yy} = W_{y'y'}, \quad u_{zz} = W_{z'z'},$$

$$u_{xx} = \frac{1}{1-\beta^2} W_{x'x'} - 2W_{x't'} \frac{v}{(1-\beta^2)a^2} + \frac{v^2}{a^4(1-\beta^2)} W_{t't'},$$

$$u_{tt} = \frac{v^2}{1-\beta^2} W_{x'x'} - 2W_{x't'} \frac{v}{1-\beta^2} + \frac{1}{1-\beta^2} W_{t't'}.$$

Підставивши знайдені похідні в (2.116), дістанемо

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t, x, y, z) = W_{t't'} - a^2 \Delta W(t', x', y', z') = 0,$$

$$W|_{t'=0} = \varphi\left(\frac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, y', z'\right),\tag{2.118}$$

$$W_{t'}|_{t'=0} = \sqrt{1-\beta^2} \psi\left(\frac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, y', z'\right) + \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \varphi_x\left(\frac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, y', z'\right).$$

Таким чином, хвильове рівняння є інваріантом відносно перетворення Лоренца. Зауважимо, що всяке неособливе лінійне перетворення незалежних змінних  $t, x, y, z$  із дійсними коефіцієнтами, яке не змінює вигляду хвильового рівняння  $u_{tt} = a^2 \Delta u(t, x, y, z)$ , є комбінацією перетворення Лоренца, перенесення початку координат у просторі  $t, x, y, z$  і перетворення подібності в цьому просторі.

Згідно з формулою Кірхгофа розв'язок задачі Коші (2.118) запишеться у вигляді

$$W(t', x', y', z') = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t'} \iint_{S_{a t'}(x', y', z')} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi, \eta, \zeta\right)}{a t'} d\sigma_{t'} + \frac{1}{4\pi a} \times$$

$$\times \iint_{S_{a t'}(x', y', z')} \frac{\psi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi, \eta, \zeta\right) \sqrt{1-\beta^2} + \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \varphi_x\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi, \eta, \zeta\right)}{a t'} d\sigma_{t'}.$$

Повертаючися в останній нерівності до старих незалежних змінних згідно з (2.117), дістанемо шуканий розв'язок задачі Коші (2.116).

На завершення даної теми зазначимо також, що розв'язок задачі Коші

$$u_{tt}(t, x, y, z, \tau) + \frac{2}{\tau} u_t(t, x, y, z, \tau) = \Delta u(t, x, y, z, \tau), \quad (2.119)$$

$$u|_{\tau=1} = \varphi(t, x, y, z), \quad u_t|_{\tau=1} = 0, \quad (2.120)$$

де  $t$  — параметр,  $\varphi(t, x, y, z) \in C^2((0, +\infty) \times E_3)$ , дається формулою

$$u(t, x, y, z, \tau) = \frac{1}{4\pi \tau^2} \iint_{S_\tau(x, y, z)} \varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_\tau, \quad (2.121)$$

$$S_\tau(x, y, z): (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = \tau^2.$$

Рівняння (2.119) називається *рівнянням Дарбу*, а інтеграл у правій частині рівності (2.121) — *усередненим значенням функції*  $\varphi(t, x, y, z)$ .



Маємо

$$u(t, x, y, z, \tau) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \iint_{S_\tau(x, y, z)} \varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(x, y, z)} \varphi(t, x + (x - \xi)\tau, y + (y - \eta)\tau, z + (z - \zeta)\tau) d\sigma_1, \quad (2.122)$$

де  $(\xi, \eta, \zeta)$  — змінна точка сфери  $S_1(x, y, z)$ :  $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = 1$ .  
Із (2.122) випливає, що

$$u(t, x, y, z, 0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(x, y, z)} \varphi(t, x, y, z) d\sigma_1 = \varphi(t, x, y, z),$$

тобто перша з умов (2.120) виконується.

Здиференціювавши (2.122) за  $\tau$ , дістанемо

$$u_\tau(t, x, y, z, \tau) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(x, y, z)} [\varphi_\alpha(x - \xi) + \varphi_\beta(y - \eta) + \varphi_\gamma(z - \zeta)] d\sigma_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\tau^2} \iint_{S_\tau(x, y, z)} \left[ \varphi_\alpha \frac{\alpha - x}{\tau} + \varphi_\beta \frac{\beta - y}{\tau} + \varphi_\gamma \frac{\gamma - z}{\tau} \right] d\sigma_\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi\tau^2} \iiint_{K_\tau(x, y, z)} \Delta\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma; \quad (2.123)$$

$$K_\tau(x, y, z): (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 \leq \tau^2.$$

На підставі теореми про середнє значення з (2.123) маємо

$$u_\tau|_{\tau=0} = \frac{1}{4\pi\tau^2} \Delta\varphi(t, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) \iiint_{K_\tau(x, y, z)} d\alpha d\beta d\gamma|_{\tau=0} =$$

$$= \frac{\tau}{3} \Delta\varphi(t, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})|_{\tau=0} = 0,$$

$(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$  — деяка точка в  $K_\tau(x, y, z)$ .

Отже, функція (2.121) задовольняє початкові умови (2.120). Диференціюючи (2.123) за  $\tau$ , дістаємо

$$u_{\tau\tau}(t, x, y, z, \tau) = -\frac{2}{\tau}u_{\tau} + \frac{1}{4\pi\tau^2} \iint_{S_{\tau}(x, y, z)} \Delta\varphi d\sigma_{\tau},$$

або

$$u_{\tau\tau} + \frac{2}{\tau}u_{\tau} = \frac{1}{4\pi\tau^2} \iint_{S_{\tau}(x, y, z)} \Delta\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_{\tau}. \quad (2.124)$$

Оскільки

$$\Delta u(t, x, y, z, \tau) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \iint_{S_{\tau}(x, y, z)} \Delta\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_{\tau},$$

то, зіставивши добуту рівність із (2.124), переконуємося, що (2.121) справді є розв'язком задачі Коші (2.119), (2.120).

Припустимо тепер, що  $\varphi(t, x, y, z)$ , є розв'язком задачі Коші

$$\varphi_{tt}(t, x, y, z) = a^2\Delta\varphi(t, x, y, z), \quad (2.125)$$

$$\varphi|_{t=0} = \Phi(x, y, z), \quad \varphi_t|_{t=0} = \Psi(x, y, z). \quad (2.126)$$

Тоді  $\Delta u(t, x, y, z, \tau) = \frac{1}{a^2}u_{tt}$  і на підставі (2.119) усереднене значення розв'язку  $\varphi(t, x, y, z)$ , визначене за формулою (2.121), буде розв'язком рівняння

$$u_{\tau\tau} - \frac{1}{a^2}u_{tt} + \frac{2}{\tau}u_{\tau} = 0.$$

Домноживши останню рівність на  $\tau$ , дістанемо

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(\tau u) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tau u) = 0,$$

а отже,

$$\tau u(t, x, y, z, \tau) = f(at + \tau) + f_1(at - \tau),$$

де  $f(at + \tau)$  і  $f_1(at - \tau)$  — довільні двічі неперервно диференційовні функції своїх аргументів.

Поклавши в останній рівності  $\tau = 0$ , маємо

$$f(at) = -f_1(at),$$

тобто

$$u(t, x, y, z, \tau) = \frac{1}{\tau} [f(at + \tau) - f(at - \tau)]. \quad (2.127)$$

Переходячи в останній рівності до границі, коли  $\tau \rightarrow 0$ , і беручи до уваги першу з початкових умов (2.120), дістанемо

$$u(t, x, y, z) = 2f'(at). \quad (2.128)$$

Отже, для відшукування розв'язку задачі Коші (2.125), (2.126) залишилося визначити таку функцію  $f'(at)$ , щоб  $\varphi(t, x, y, z)$  задовольняла початкові умови (2.126).

Із (2.127) маємо

$$\frac{\partial(\tau u)}{\partial \tau} = f'(at + \tau) + f'(at - \tau),$$

$$\frac{\partial(\tau u)}{\partial t} = a[f'(at + \tau) - f'(at - \tau)],$$

тобто

$$2f'(at + \tau) = \frac{\partial(\tau u)}{\partial \tau} + \frac{1}{a} \frac{\partial(\tau u)}{\partial t}.$$

Поклавши в останній рівності  $t = 0$  й урахувавши (2.122), дістанемо

$$2f'(\tau) = \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{4\pi\tau} \iint_{S_\tau(x, y, z)} \varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_\tau + \frac{1}{a} \frac{1}{4\pi\tau} \iint_{S_\tau(x, y, z)} \varphi_t(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_\tau \right]_{t=0}.$$

На підставі початкових умов та (2.126) остаточно маємо

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{ar}(x, y, z)} \frac{\Phi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_{ar} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{ar}(x, y, z)} \frac{\Psi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_{ar}, \end{aligned}$$

і ми знову дістали формулу Кірхгофа.



### Задачі для самостійного розв'язування

#### 1. Зінтегрувати диференціальні рівняння:

а)  $u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$ ;

б)  $(x^2 + \cos y)u_{xy} - \sin y u_x + 2xu_y = 0$ ;

в)  $e^y u_{xy} + u_{yy} + e^{2y} u_x + (e^y - 1)u_y = 0$ ;

г)  $u_{xx} - 2xu_{xy} - (2x + 1)u_{yy} - \frac{1}{x+1}(u_x + u_y) = 0, \quad x \neq -1$ ;

д)  $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x$ ;

е)  $\frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ;

є)  $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)u_y = 0$ ;

ж)  $(x - y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$ ;

з)  $u_{xy} + yu_x + xu_y + xuy = 0$ ;

и)  $\operatorname{ch} x u_{xy} + (\operatorname{sh} x + y \operatorname{ch} x)u_y + \operatorname{ch} x u = 0$ .

#### 2. Знайти закон вільних коливань однорідної нескінченної струни (записати формули, які визначають профіль струни при $t \geq 0$ і закон руху точок струни з різними абсцисами) та графічно побудувати її профіль у різні моменти часу за таких умов:

а) струна збуджена локальним початковим відхиленням у формі параболи

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, -c), \\ h \left( 1 - \frac{x^2}{c^2} \right) & \text{при } x \in [-c, c], \\ 0 & \text{при } x \in (c, +\infty); \end{cases}$$

б) початкова швидкість задається рівностями

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geq h, \\ \frac{a}{100} & \text{при } x \in [0, h], \\ -\frac{a}{100} & \text{при } x \in (-h, 0), \end{cases}$$

а початкове відхилення дорівнює нулю;

- в) початкове відхилення не дорівнює нулю тільки на проміжках  $(-2c, -c)$ ,  $(c, 2c)$  і має форму ламаної з вершинами в точках  $-2c, -1,5c, -c, c, 1,5c, 2c$ , а початкова швидкість нульова;
- г) початкове відхилення точок струни дорівнює нулю, а

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < c, \\ \frac{h}{2c^2} x(2c - x) & \text{при } x \in [c, 2c], \\ 0 & \text{при } x > 2c; \end{cases}$$

- д) початкове відхилення ненульове тільки на проміжку  $(0, \pi)$ , де воно становить  $2\sin x$ , а початкова швидкість дорівнює нулю;
- е) початкове відхилення дорівнює нулю, а початкова швидкість має сталі значення  $\psi_0$  на проміжку струни  $(x_1, x_2)$  і нульова поза цим проміжком;
- є) початкове відхилення точок струни задається рівністю

$$u(x, 0) = h^2 \frac{\sin x}{x},$$

а початкова швидкість дорівнює нулю.

3. Дослідити процес вимушених коливань однорідної нескінченної струни, якщо початкове відхилення й швидкість дорівнюють нулю, а  $f(t, x) = 2tx$ .
4. Показати, що функція

$$u(t, x, y, z) = \varphi(m_1x + m_2y + m_3z + mt)$$

описує процес поширення хвиль, і знайти швидкість хвилі.

5. Показати, що функція

$$u(t, x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + b^2t^2$$

описує процес поширення хвиль, і знайти швидкість хвилі.

6. Дослідити процес вільних коливань однорідної нескінченної мембрани, якщо:
- а) початкове відхилення її точок становить  $x^2y^2$ , а швидкість дорівнює нулю;
- б) у початковий момент часу швидкість її точок дорівнює  $x$ , а  $u(0, x, y) = 0$ .

7. Дослідити процес поширення звуку, якщо  $u(0, x, y, z) = 1/x$ , а початкова швидкість дорівнює нулю ( $x \neq 0, x^2 \neq t^2$ ).
8. Методом Рімана знайти розв'язок задач Коші:
- а)  $u_{tt} = u_{xx} + f(t, x), u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$ ;
- б)  $xu_{xx} - u_{yy} + u_x = 0, x > 0, u(x, 0) = \varphi(x), u_y(x, 0) = \psi(x)$ .
9. Знайти розв'язок задач Коші:
- а)  $y^2 u_{yy} - x^2 u_{xx} = 0, u(x, 1) = \sin x, u_y(x, 1) = 0$ ;
- б)  $yu_{xx} + x(2y - 1)u_{xy} - 2x^2 u_{yy} - \frac{y}{x} u_x = 0, u(0, x) = x^2, u_y(0, x) = 1, x > 0$ ;
- в)  $u_{xx} + 2\cos xu_{xy} - \sin^2 xu_{yy} - \sin xu_y = 0, u(x, \sin x) = x + \cos x, u_y(x, \sin x) = \sin x$ ;
- г)  $2u_{xy} - u_{yy} = 0, u(x, -x) = 5x, u_y(x, -x) = e^{-x}$ ;
- д)  $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0, u(0, y) = 0, u_x(0, y) = 3y$ ;
- е)  $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0, u(0, y) = \varphi(y), u_x(0, y) = \psi(y)$ ;
- є)  $u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0, u(x, x/2) = 2 - x, u_y(x, x/2) = 0$ .

### Тема 3

#### ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В ОБМЕЖЕНИХ І НАПІВОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

### 2.15

#### Постановка мішаних задач

Як уже зазначалося, для повної характеристики хвильового процесу недостатньо лише диференціальних рівнянь: до них необхідно приєднати деякі додаткові умови. В розглянутому випадкові необмежених областей цими додатковими співвідношеннями були початкові умови (початковий стан досліджуваного процесу).

Якщо ж деяке явище природи досліджується в обмеженій або напівобмеженій області, то для однозначного його описання, крім задання початкових умов, необхідно також урахувати режим на межі області, в якій відбувається це явище (задати крайові умови). Справді,

якщо розглянути вільні коливання скінченної однорідної струни, закріпленої на кінцях, то внаслідок початкового відхилення й початкової швидкості вліво і вправо по струні побіжать хвилі. Досягнувши кінців струни, вони відіб'ються й підуть у зворотному напрямі, істотно впливаючи на хвильовий процес. Отже, якщо не враховувати режиму на кінцях струни, то тим самим не враховуватиметься вплив на процес коливання відбитих хвиль.

У випадку рівняння коливання скінченної струни залежно від режиму на її кінцях ( $x = 0$  і  $x = l$ ) розглядають три основних типи крайових умов:

- 1) кінці струни рухаються за заданими законами  $\mu_1(t)$  і  $\mu_2(t)$  відповідно, тобто

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad u(t, l) = \mu_2(t), \quad t \geq 0; \quad (2.129)$$

- 2) до кінців струни прикладені сили  $v_1(t)$  і  $v_2(t)$  відповідно, які діють у напрямі коливань, тобто

$$u_x(t, 0) = v_1(t), \quad u_x(t, l) = v_2(t), \quad t \geq 0; \quad (2.130)$$

- 3) до кінців струни прикріплені пружини, які діють уздовж осі  $Ox$ . Тоді сили натягу  $Eu_x$  на кінцях зрівноважуватимуться силами дії пружин, які дорівнюють  $\alpha u$  ( $\alpha$  – коефіцієнт жорсткості). Нехай пружини, своєю чергою, рухаються за законами  $\gamma_1(t)$  і  $\gamma_2(t)$  відповідно. Тоді режим на кінцях струни запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} u_x(t, 0) - h[u(t, 0) - \gamma_1(t)] &= 0, \\ u_x(t, l) + h[u(t, l) - \gamma_2(t)] &= 0, \end{aligned} \quad t \geq 0, \quad (2.131)$$

де  $h = \alpha/E$ .

Для дво- й тривимірних випадків розглянуті типи крайових умов запишуться у вигляді

$$u|_{M \in S} = \mu(t, M), \quad t \geq 0, \quad (2.132)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{M \in S} = v(t, M), \quad t \geq 0, \quad (2.133)$$

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} + hu \right] \Big|_{M \in S} = \gamma(t, M), \quad t \geq 0, \quad (2.134)$$

де  $S$  – поверхня, яка обмежує область  $D_1$  зміни точки  $M$ ;  $\frac{\partial u}{\partial n}$  – похідна по зовнішній нормалі до поверхні  $S$ .

Таким чином, досліджуючи хвильові процеси в обмежених областях, розглядають три основні мішані задачі:

- *перша задача* — в просторі функцій  $C^2(D)$ ,  $D = D_1 \times (0, T)$  знайти розв'язок хвильового рівняння

$$u_{tt}(t, M) = a^2 \Delta u(t, M) + f(t, M), \quad (2.135)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, M) = \varphi(M), \quad u_t(0, M) = \psi(M), \quad M \in D \cup S \quad (2.136)$$

і крайові (2.132);

- *друга й третя задачі* ставляться аналогічно із заміною крайових умов (2.132) на умови (2.133), (2.134) відповідно.

Зауважимо, що всі розглянуті типи крайових умов (2.132)–(2.134) можна записати одним співвідношенням

$$\left( \beta_1(M) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta_2(M) u \right) \Big|_{M \in S} = \gamma(t, M), \quad t \geq 0.$$

Якщо  $\beta_1(M) \equiv 0$ , то дістаємо крайову умову (2.132), при  $\beta_2(M) \equiv 0$  — умову (2.133), а при  $\beta_1(M) \neq 0$  і  $\beta_2(M) \neq 0$  — умову (2.134).

Крайові й початкові умови мають задовольняти умову узгодженості

$$\left[ \beta_1(M) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} + \beta_2(M) \varphi(M) \right] \Big|_{M \in S} = \gamma(0, M).$$

Зазначимо, що проблеми практики часто приводять до мішаних задач, коли на різних частинах краю  $S$  області  $D$  задаються різні крайові умови. Наприклад, якщо вивчається процес коливання струни завдовжки  $l$ , яка нерухомо закріплена на правому кінці й вільна на лівому, то крайові умови запишуться у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$$

- ➔ **Означення 2.5.** Струну називають *напівнескінченною*, якщо один її кінець розташований у початку координат  $x = 0$ , а інший знаходиться на такій відстані від початку координат, яка значно перевищує величину  $at$  ( $a$  — стала, яка фігурує в рівнянні коливання струни,  $t$  — час).



Математично описуючи процес коливання однорідної напівнескінченної струни (хвильовий процес в напівобмеженій області), ми також приходимо до мішаної задачі: в просторі функцій  $C^2(B = \{(t, x) \mid t > 0, x \in (0, +\infty)\})$  знайти розв'язок рівняння коливання струни

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x),$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, +\infty)$$

і одну з крайових (2.129)—(2.131) при  $x = 0$  (залежно від режиму на лівому кінці струни).

Покажемо, що сформульовані мішані задачі однозначно описують відповідні хвильові процеси в обмежених і напівобмежених областях. Для цього наведемо два методи побудови розв'язків мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу.

## 2.16

### Метод характеристик

□ **Побудова розв'язку мішаної задачі у випадку напівнескінченної струни.** Спочатку розглянемо таку задачу: дослідити процес вільних коливань однорідної напівнескінченної струни, якщо початкове відхилення точок струни та їхня початкова швидкість становлять  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  відповідно, а лівий кінець нерухомо закріплений.

Відповідна математична модель: в області

$$B = \{(t, x) \mid t \in (0, T], x \in (0, +\infty), T = \text{const}\} \quad (2.137)$$

знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{t^2}(t, x) = a^2 u_{x^2}(t, x), \quad (2.138)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, +\infty) \quad (2.139)$$

та крайову

$$u(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.140)$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (2.138)—(2.140) застосуємо метод характеристик.

Як було показано в темі 2, загальний розв'язок рівняння (2.138) має вигляд

$$u(t, x) = f_1(x - at) + f_2(x + at). \quad (2.141)$$

Тут  $f_1(z)$  і  $f_2(z)$ , де  $z = x \pm at$ , — довільні функції, визначені при  $z \in (-\infty, +\infty)$ . Оскільки в нашому випадкові функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  визначені тільки при  $x \geq 0$ , то згідно з початковими умовами при  $x - at > 0$  маємо

$$f_1(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 \psi(z) dz - C, \quad (2.142)$$

$$f_2(x + at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(z) dz + C, \quad (2.143)$$

тобто при  $x - at > 0$

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (2.144)$$

Знайдемо розв'язок мішаної задачі (2.138)—(2.140) при  $x - at < 0$ . Зауважимо, що функція  $f_2(x + at)$  визначена за формулою (2.143) для всіх  $x \geq 0$ ,  $t > 0$ .

Знайдемо функцію  $f_1(x - at)$  при  $x - at < 0$ . Для цього використаємо крайову умову (2.140). Маємо

$$f_1(-at) + f_2(at) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.145)$$

Покладемо  $-at = z$ . Тоді на підставі (2.145) дістаємо

$$f_1(z) = -f_2(-z), \quad z < 0, \quad (2.146)$$

а отже, внаслідок (2.143) визначаємо  $f_1(x - at)$  при  $x - at < 0$ :

$$f_1(x - at) = -f_2(-x + at) = -\frac{1}{2}\varphi(at - x) - \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(z) dz - C. \quad (2.147)$$

Підставляючи (2.147), (2.143) в (2.141), знаходимо розв'язок задачі (2.138)—(2.140) при  $x - at < 0$ :

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (2.148)$$

Отже, розв'язок мішаної задачі (2.138)—(2.140) дається формулою Д'Аламбера (2.144) при  $x - at > 0$  і формулою (2.148) при  $x - at < 0$ .

□ **Геометрична інтерпретація побудови розв'язку задачі (2.138)—(2.140).** Розв'язок мішаної задачі будується в два етапи.

- *Перший етап.* Загальний розв'язок (2.141) ДРЧП (2.138) підставляємо в початкові умови (2.139) і знаходимо функції  $f_1(x - at)$  та  $f_2(x + at)$  у точках осі  $Ox$ .

Тепер функція  $f_1(x - at)$  відома на всіх характеристиках  $x - at = \text{const} > 0$ , оскільки  $f_1(x - at)$  — стала вздовж таких характеристик (рис. 2.24).

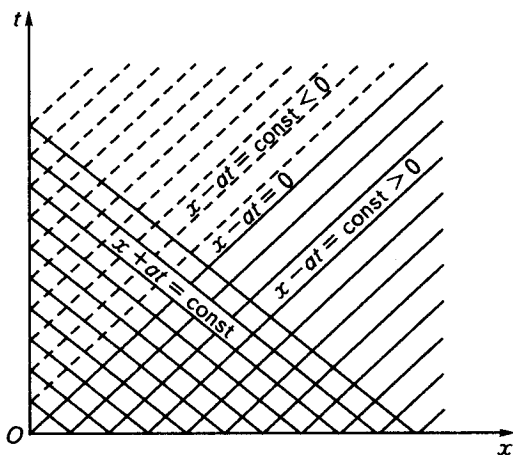


Рис. 2.24

Ці характеристики заповнюють усю область  $x - at > 0$ . З іншого боку, хвиля  $f_2(x + at)$  відома для всіх  $x > 0$  і  $t > 0$ . Справді, вона є сталою на характеристиках  $x + at = \text{const}$ , а такі характеристики, випущені з точок осі  $Ox$ , покривають усю область  $x > 0, t > 0$ .

Отже, початкові умови дають змогу визначити розв'язок мішаної задачі (2.138)—(2.140) у тій частині області  $x > 0, t > 0$ , де на рис. 2.24 проходять характеристики  $x - at = \text{const} > 0$  і  $x + at = \text{const}$  (тобто під головною характеристикою  $x - at = 0$ ).

Із рис. 2.24 бачимо, що над головною характеристикою  $x - at = 0$  хвиля  $f_1(x - at)$  невідома, але відома зворотна хвиля  $f_2(x + at)$ .

- *Другий етап.* Підставляємо загальний розв'язок (2.141) у крайову умову (2.140), яка задана в точках осі  $Ot$ . Хвиля  $f_2(x + at)$  у цих точках визначена з початкових умов. Таким чином, крайова умова (2.140) дає змогу встановити співвідношення між прямою та зворотною хвилями в точках осі  $Ot$ , звідки визначаємо  $f_1(x - at)$  у цих точках. Але тоді  $f_1(x - at)$  визначається й на характеристиках  $x - at = \text{const} < 0$  (штрихові лінії над головною характеристикою), тобто розв'язок мішаної задачі  $u(t, x)$  побудовано в усій області  $x < at$ .

➔ **Означення 2.6.** В області  $0 < x < at$  функцію  $f_2(x + at)$  називають *хвилею, що падає на лівий кінець струни*  $x = 0$ , а  $f_1(x - at)$  — *відображеною від цього кінця хвилею*.

У зв'язку з цим означенням розглянутий метод побудови розв'язку мішаних задач називають також *методом падаючої та відображеної хвиль*.

□ **Умова неперервності розв'язку мішаної задачі (2.138)—(2.140) уздовж головної характеристики.** Із вищевикладеного випливає, що розв'язок мішаної задачі (2.138)—(2.140) дається формулою Д'Аламбера (2.144) при  $x - at > 0$  і формулою (2.148) при  $x - at < 0$ . У зв'язку з цим уздовж головної характеристики цей розв'язок може бути розривним.

Знайдемо умову неперервності розв'язку мішаної задачі (2.138)—(2.140) уздовж лінії  $x - at = 0$ . Зазначимо, що розрив довільного розв'язку рівняння (2.138) уздовж головної характеристики є сталою величиною. Справді, хвиля  $f_2(x + at)$  неперервна при переході через головну характеристику, оскільки її лінії рівня  $x + at = \text{const}$  перетинають пряму  $x = at$ , а хвиля  $f_1(x - at)$  під і над головною характеристикою  $x - at = 0$  має границі, що дорівнюють  $f_1(0+)$  і  $f_1(0-)$  відповідно. Таким чином,

$$u|_{x-at=0+} - u|_{x-at=0-} = f_1(0+) - f_1(0-), \quad (2.149)$$

а отже, умова неперервності розв'язку мішаної задачі (2.138)—(2.140) на головній характеристиці має вигляд

$$f_1(0+) = f_1(0-), \quad (2.150)$$

або, беручи до уваги (2.142), (2.147), дістаємо

$$f_1(0+) = \frac{1}{2}\varphi(0) - C, \quad f_1(0-) = -\frac{1}{2}\varphi(0) - C,$$

тобто

$$\frac{1}{2}\varphi(0) = -\frac{1}{2}\varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(0) = 0. \quad (2.151)$$

Вираз (2.151) є умовою узгодженості початкових і крайової умов (умова неперервності граничних значень розв'язку  $u(t, x)$  у початку координат  $(0, 0)$ ).

Отже, робимо висновок: умова (2.151) узгодженості початкових і крайової умов мішаної задачі (2.138)–(2.140) є необхідною й достатньою умовою неперервності розв'язку на всій головній характеристиці  $x - at = 0$ .

Аналогічно будуються розв'язки мішаних задач для напівнескінченної струни й у випадку інших крайових умов. Наприклад, якщо кінець струни  $x = 0$  вільний, то крайова умова запишеться у вигляді

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (2.152)$$

Розв'яжемо мішану задачу (2.138), (2.139), (2.152).

Якщо  $x > at$ , то справедлива формула Д'Аламбера (2.148). Визначимо  $f_1(x - at)$  у випадку, коли  $x - at < 0$ . Для цього підставляємо загальний розв'язок (2.142), (2.143) в крайову умову (2.152):

$$f_1'(-at) + f_2'(at) = 0, \quad t > 0, \quad (2.153)$$

звідки, позначивши  $z = -at$ , дістаємо

$$f_1'(z) + f_2'(-z) = 0, \quad z < 0.$$

Інтегруючи останню рівність за  $z$ , маємо

$$f_1(z) - f_2(-z) = C_1 = \text{const}. \quad (2.154)$$

Взявши до уваги (2.143), із (2.154) дістаємо

$$\begin{aligned} f_1(x - at) &= f_2(at - x) + C_1 = \\ &= \frac{1}{2}\varphi(at - x) + \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(z) dz + C_1 + C, \end{aligned}$$

тобто при  $x - at < 0$

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[\varphi(at - x) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{at-x} \psi(z) dz + \int_0^{x+at} \psi(z) dz \right] + C_1 + 2C.$$

З умови неперервності розв'язку мішаної задачі на головній характеристиці  $x - at = 0$  маємо

$$f_1(0-) = \frac{1}{2}\varphi(0) + C_1 + C, \quad f_1(0+) = \frac{1}{2}\varphi(0) - C,$$

$$\frac{1}{2}\varphi(0) + C_1 + C = \frac{1}{2}\varphi(0) - C \Leftrightarrow C_1 + 2C = 0,$$

отже,

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, & x - at > 0, \\ \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{at-x} \psi(z) dz + \int_0^{x+at} \psi(z) dz \right], & x - at < 0. \end{cases}$$

◇ **Зауваження 2.6.** Для розглянутих задач ми будували тільки неперервні розв'язки, оскільки розривні розв'язки для мішаних задач у випадку рівняння коливання струни або стержня не мають фізичного змісту (розрив розв'язку означає розрив струни або стержня). Однак у теорії акустики чи в газовій динаміці розривні розв'язки мають фізичний зміст і називаються *ударними хвилями*.

□ **Геометричне зображення процесу вільних коливань напівнескінченної струни.** Для цього, крім загального методу, викладеного вище, іноді зручно застосувати також методи парного й непарного продовження. Розглянемо їх на прикладах.

**Метод непарного продовження.** Нехай потрібно геометрично зобразити розв'язок мішаної задачі (2.138)–(2.140) при  $t = 1, \dots, 5$ , якщо  $a = 1, \psi(x) = 0$ ,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 3) \cup [5, +\infty), \\ x - 3, & x \in [3, 4), \\ 5 - x, & x \in [4, 5). \end{cases} \quad (2.155)$$

Розглянемо розв'язок  $z(t, x)$  задачі Коші

$$z_{t^2}(t, x) = z_{x^2}(t, x), \quad t \in (0, +\infty), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

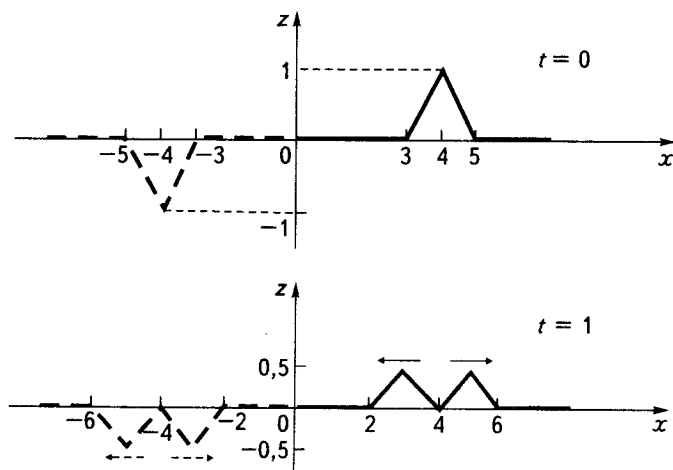
$$z(0, x) = \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad (2.156)$$

$$z_t(0, x) = 0.$$

Покладемо  $u(t, x) = z(t, x)|_{x \geq 0}$ .

Очевидно, функція  $u(t, x)$  задовольняє рівняння (2.142) і початкові умови (2.155). Надалі покажемо, що через непарність функції  $z(t, x)$  по  $x$  функція  $u(t, x)$  задовольняє також крайову умову.

Зобразимо графічно (рис. 2.25) розв'язок задачі Коші (2.156) для  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  (див. тему 2). Як бачимо з рисунка (стрілками показано напрями руху хвиль: прямої — вправо, зворотної — вліво), крайові



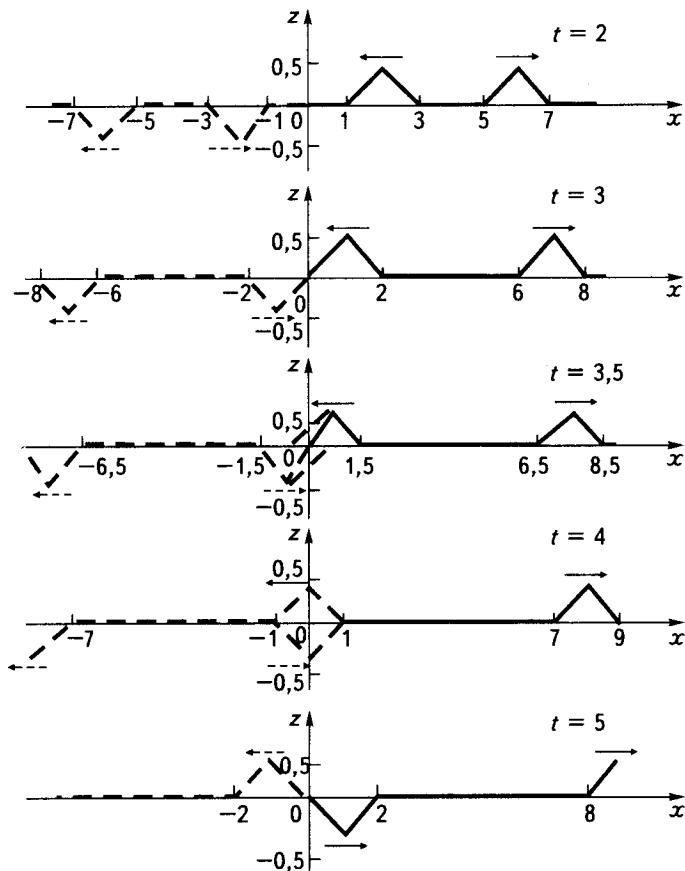


Рис. 2.25

ва умова (2.140) виконується для всіх  $t \geq 0$ , оскільки функція  $z(t, x)$  непарна по  $x$  (суцільною лінією зображено функцію  $u(t, x)$ ).

Область  $x < 0$  називатимемо *фіктивною*.

Аналогічно можна графічно зобразити процес вільних коливань напівнескінченної струни, які відбуваються лише за рахунок початкової швидкості (тобто в мішаній задачі (2.138)–(2.140)  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  $\psi(x) \neq 0$ ).

Як приклад розглянемо коливання напівнескінченної однорідної струни із закріпленим кінцем, що відбуваються внаслідок удару по ній



молоточком (коливання струни рояля). За такого процесу відшуковують розв'язок мішаної задачі (2.138)—(2.140), де  $\varphi(x) \equiv 0$ , а початкова швидкість має вигляд, як на рис. 2.26.

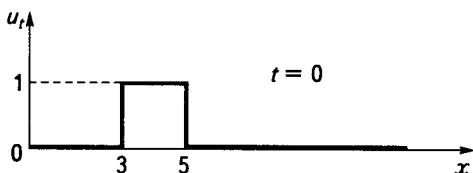


Рис. 2.26

Зобразимо профіль струни при  $t = 1, \dots, 6$ . Для цього в задачі Коші (2.156) покладемо (рис. 2.27)

$$z(x) \equiv 0,$$

$$z_t(0, x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(x), & x < 0. \end{cases}$$

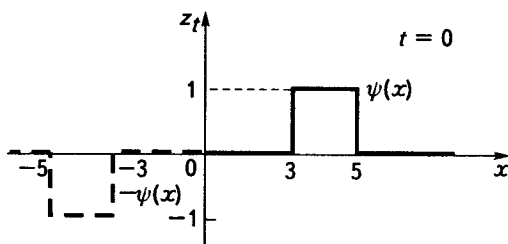


Рис. 2.27

У нашому випадкові (див. тему 2)

$$z(t, x) = \Phi(x+t) - \Phi(x-t),$$

$$\text{де } \Phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-x}^x z_t(0, \tau) d\tau.$$

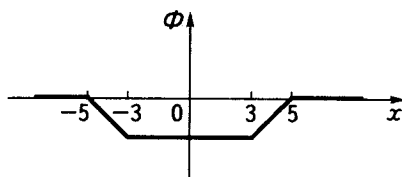


Рис. 2.28

Маємо (рис. 2.28)

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -5), \\ -0,5(x+5), & x \in [-5, -3), \\ -1, & x \in [-3, 3), \\ 0,5(x-5), & x \in [3, 5), \\ 0, & x \in [5, +\infty). \end{cases}$$

Покажемо, що й у цьому випадкові

$$u(t, x) \equiv z(t, x) \Big|_{x \geq 0}.$$

Справді, функція  $u(t, x)$  задовольняє рівняння (2.138) і початкові умови (2.139). Зобразимо профіль струни в різні моменти часу (рис. 2.29) і переконаємося, що крайова умова (2.140) також виконується.

Далі, зі зростанням часу  $t$  в області  $x \geq 0$  трапеція рухатиметься в напрямі осі  $Ox$ , а у фіктивній області — у зворотному напрямі. Крайова умова (2.140), очевидно, виконується для довільного  $t$ .

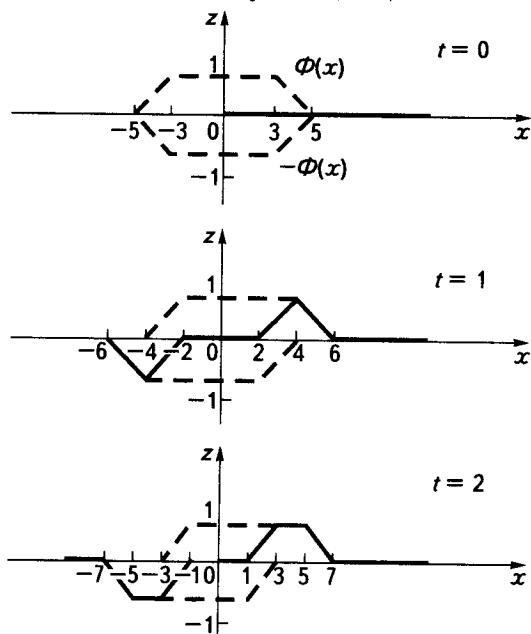


Рис. 2.29  
(початок)

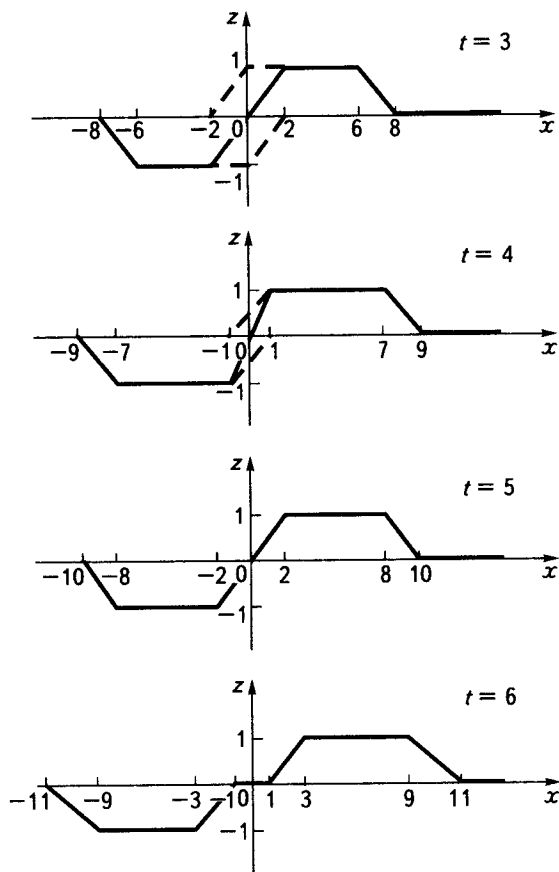


Рис. 2.29  
(закінчення)

**Метод парного продовження.** Для ілюстрації методу парного продовження зобразимо графічно розв'язок задачі (2.138), (2.139), (2.152) при  $t = 0, 1, 2, 3, 3,5, 4, 4,5, 5$ , якщо  $a = 1$ ,  $\psi(x) \equiv 0$ , а  $\varphi(x)$  визначається за формулою (2.155).

Розглянемо задачу Коші:

$$z_{tt} = z_{xx}, \quad t \in (0, +\infty), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$z(0, x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad z_t(0, x) = 0. \quad (2.156a)$$

Дістаємо рис. 2.30, з якого бачимо, що функція  $u(t, x) \equiv z(t, x)|_{x \geq 0}$  (на графіках — суцільна лінія) є розв'язком поставленої мішаної за-

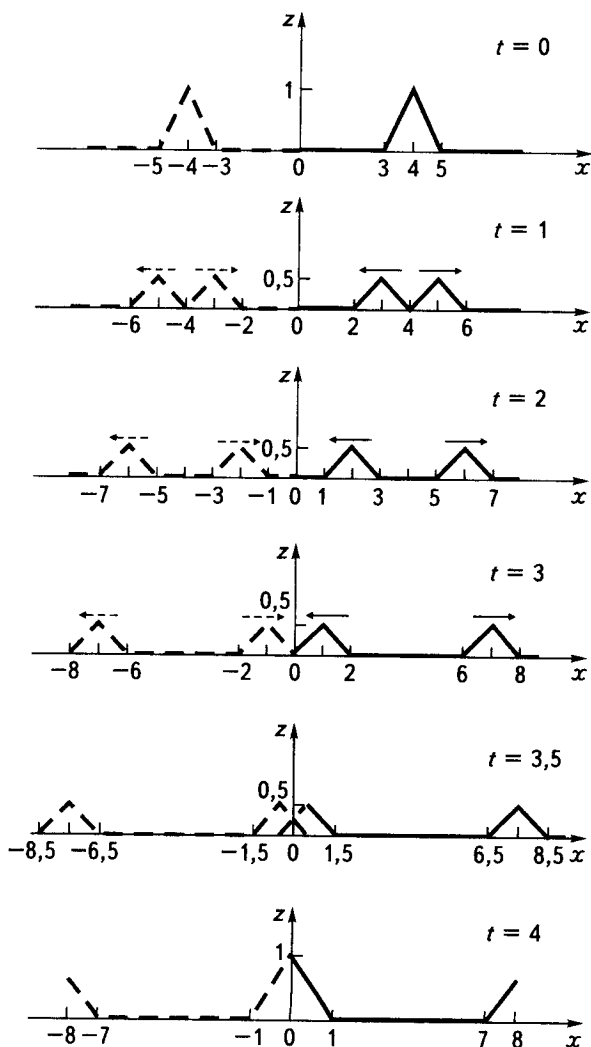


Рис. 2.30  
(початок)

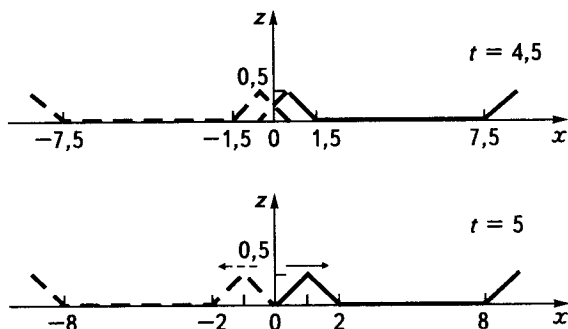


Рис. 2.30  
(закінчення)

дачі (2.138), (2.139), (2.152), де  $\psi(x) = 0$ , а  $\phi(x)$  визначається за формулою (2.155). Стрілками показано напрями руху хвиль.

□ **Випадок скінченної струни.** Процес вільних коливань однорідної струни завдовжки  $l$  із нерухомо закріпленими кінцями, які відбуваються за рахунок початкового відхилення  $\phi(x)$  та початкової швидкості  $\psi(x)$ , зводиться до мішаної задачі: в області  $B = \{(t, x) \mid t \in (0, +\infty), x \in (0, l)\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння (2.138), який задовольняє початкові умови (2.139) при  $x \in [0, l]$  та крайові

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad t \in [0, +\infty). \quad (2.157)$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (2.138), (2.139), (2.157) застосовуємо метод характеристик.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.142) представляється у вигляді (2.143). Оскільки початкові умови (2.139) у нашому випадкові задані в точках  $t = 0, x \in [0, l]$ , то на підставі (2.139) розв'язок мішаної задачі (2.138), (2.139), (2.157) при  $0 \leq x \pm at \leq l$  дається формулою Д'Аламбера (на рис. 2.31 — область I).

Підставляючи загальний розв'язок (2.143) в крайову умову  $u(t, 0) = 0$ , знаходимо відображену хвилю  $f_1(x - at)$  за відомою падаючою хвилею  $f_2(x + at)$  у точках відрізка  $OC$ . Це дає змогу побудувати розв'язок розглядуваної мішаної задачі в області II (трикутник  $OBC$ ).

Використовуючи другу крайову умову  $u(t, l) = 0$ , знаходимо відображену хвилю  $f_2(x + at)$  за відомою падаючою хвилею  $f_1(x - at)$  у точках відрізка  $AE$ . Це дає змогу знайти шуканий розв'язок в областях III і IV (трикутник  $ACE$ ).

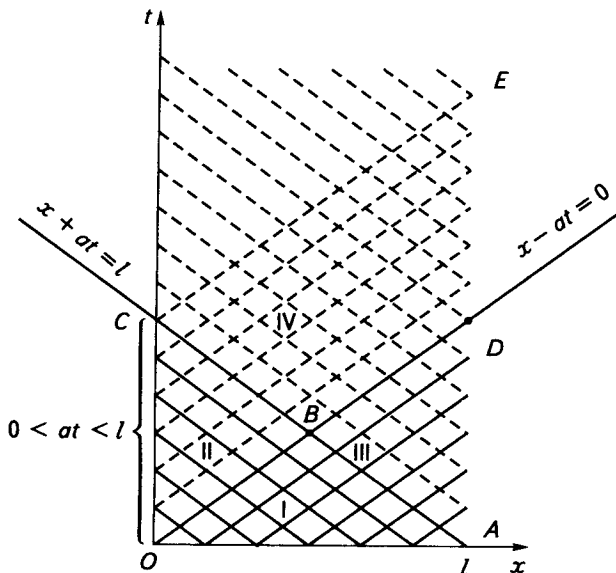


Рис. 2.31

Повторюючи вищенаведені міркування, можна побудувати розв'язок мішаної задачі (2.138), (2.139), (2.157) у всій області  $B$ .

Так само будуються розв'язки мішаних задач для рівняння вільних коливань струни у випадку складніших, ніж (2.157), крайових умов.

□ **Геометричне зображення процесу вільних коливань скінченної струни.** Розглянемо задачу: зобразити графічно профіль однорідної струни завдовжки  $l = 6$  із нерухомо закріпленими кінцями при  $t = \overline{1, 12}$ , якщо коливання струни відбуваються лише за рахунок початкового відхилення

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 3] \cup [5, 6], \\ x - 3, & x \in (3, 4], \\ 5 - x, & x \in (4, 5), \end{cases}$$

а  $a = 1$ . Визначити період  $T$  коливань струни.

Згідно з умовою задачі в області  $B = \{(t, x) \mid t \in (0, +\infty), x \in (0, 6)\}$  потрібно знайти розв'язок рівняння вільних коливань струни

$$u_{tt}(t, x) = u_{xx}(t, x), \quad (2.158)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = 0, \quad x \in [0, 6] \quad (2.159)$$

та крайові

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 6) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.160)$$

Для зображення розв'язку мішаної задачі (2.158)—(2.160) розглянемо задачу Коші (2.157), де  $\varphi_1(x) = \varphi(x)$  при  $x \in [0, 6]$ , а на проміжках  $(-\infty, 0)$  і  $(6, +\infty)$  будемо її так: продовжуємо функцію  $\varphi(x)$  на відрізок  $[6, 12]$  непарним чином відносно прямої  $x = 6$ , а потім добутий графік на відрізку  $[6, 12]$  непарним чином відносно прямої  $x = 12$  продовжуємо на відрізок  $[12, 18]$  і т. д. Аналогічно будується функція  $\varphi_1(x)$  на проміжку  $(-\infty, 0)$  (рис. 2.32).

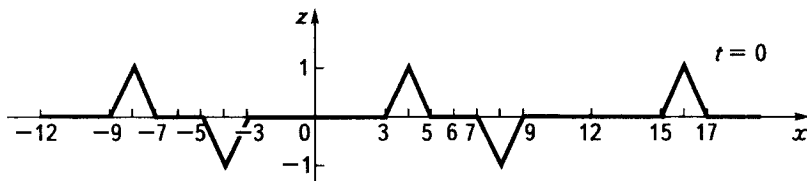


Рис. 2.32

Покажемо, що функція

$$u(t, x) = z(t, x) \Big|_{x \in [0, 6]} \quad (2.161)$$

є розв'язком мішаної задачі (2.158)—(2.160). Справді, функція  $u(t, x)$ , визначена за правилом (2.161), задовольняє рівняння (2.158) і початкові умови (2.159). Профіль струни при  $t = 1, 12$  графічно зображено на рис. 2.33.

Таким чином, за час  $t = 12$  цикл замкнувся, отже, період коливання струни  $T = 12 = 12/a$ . Із рис. 2.33 видно, що функція  $u(t, x)$ , визначена за правилом (2.161), задовольняє також крайові умови (2.160), тобто є розв'язком мішаної задачі (2.158)—(2.160).

Розглянутий метод побудови профілю струни називається *методом непарних відображень*. У випадку, коли кінці струни вільні, тобто крайові умови мають вигляд  $u_x(t, 0) = u_x(t, 6) = 0$ , для побудови профілю струни в довільний момент часу застосовують метод парних відображень (продовження графіків здійснюють парним чином).

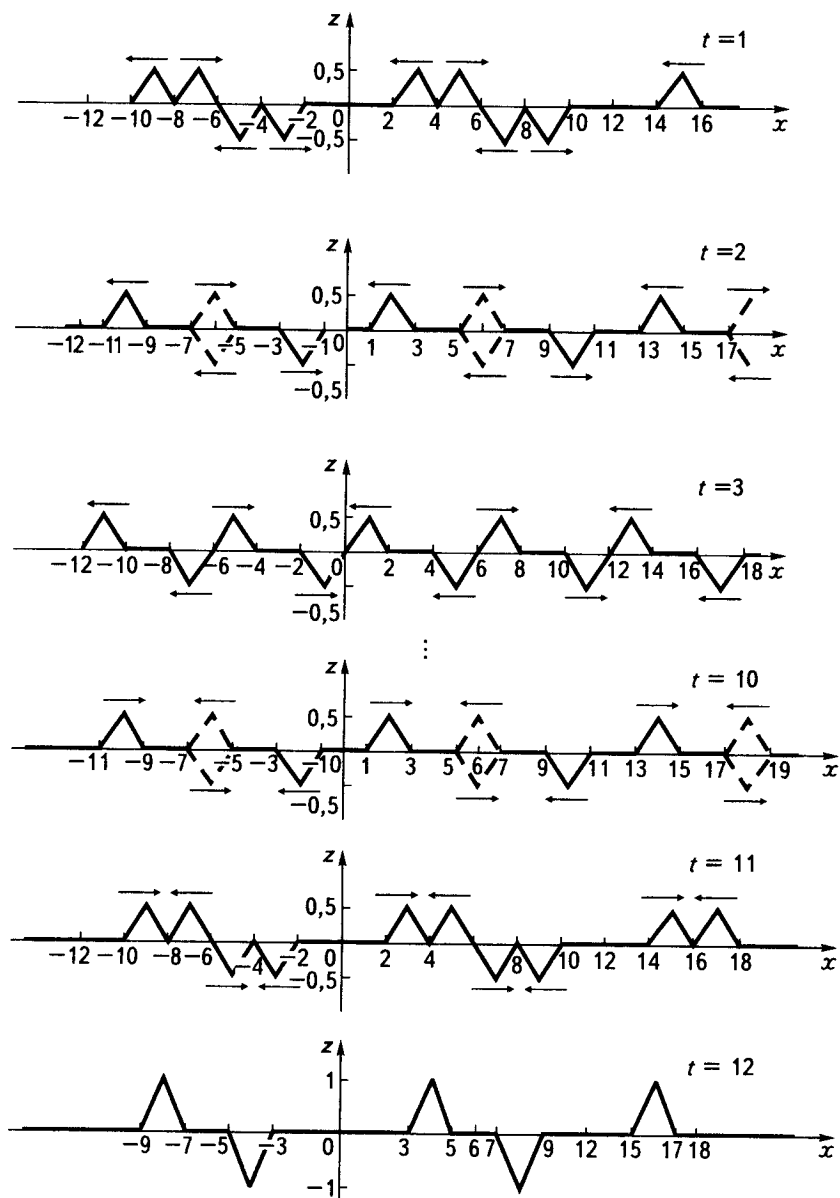


Рис. 2.33



## 2.17

### Вільні коливання скінченної струни. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є)

Розглянемо задачу: дослідити процес вільних коливань однорідної струни завдовжки  $l$ , нерухомо закріпленої на кінцях, якщо в початковий момент часу  $t = 0$  зміщення точок струни від їх прямолінійного положення дорівнює  $\varphi(x)$ , а їхня початкова швидкість становить  $\psi(x)$ .

Зі сформульованої задачі випливає, що необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (2.162)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.163)$$

та крайові

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.164)$$

Внаслідок умов узгодженості

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (2.165)$$

□ **Формальна схема методу побудови розв'язку мішаної задачі (2.162)—(2.164).** Шукаємо нетривіальні розв'язки рівняння (2.162), які задовольняють крайові умови (2.164), у вигляді

$$u(t, x) = T(t)X(x) \neq 0. \quad (2.166)$$

Підставивши (2.166) у рівняння (2.162) і розділивши змінні, дістанемо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Функція (2.166) буде розв'язком рівняння (2.162), якщо остання рівність виконується тотожно в області  $D = (0, l) \times (0, T)$ . Але ліва частина цієї рівності є функцією тільки від  $t$ , а права — тільки від  $x$ . Зафіксувавши аргумент  $t$  (або  $x$ ), у лівій (правій) частині рівності матимемо сталу, а отже, для всіх  $x$  (або  $t$ ) права (ліва) частина стала. Таким чином, остання рівність можлива тоді й лише тоді, коли

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \quad \lambda - \text{const},$$

звідки

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0, \quad (2.167)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0. \quad (2.168)$$

Підставивши (2.166) у крайові умови (2.164), дістанемо

$$T(t)X(0) = 0, \quad T(t)X(l) = 0.$$

Оскільки  $T(t) \neq 0$ , то з останніх рівностей маємо

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (2.169)$$

Таким чином, потрібно знайти ненульові розв'язки рівняння (2.167) і крайової задачі (2.168), (2.169). Задача (2.168), (2.169) не для всяких  $\lambda$  має нетривіальні розв'язки.

➔ **Означення 2.7.** Ті значення параметра  $\lambda$ , за яких задача (2.168), (2.169) має нетривіальні розв'язки, називають **власними значеннями**, а відповідні ненульові розв'язки цієї задачі — **власними функціями**.

Задача (2.168), (2.169) відшукування власних значень і власних функцій називається **задачею Штурма—Ліувілля**.

Дослідимо задачу Штурма—Ліувілля (2.168), (2.169). Для цього покажемо спочатку, що вона може мати тільки дійсні власні значення.

Припустимо супротивне: нехай  $\lambda = a + ib$  є власним значенням. Тоді відповідна власна функція також має бути комплексною. Нехай  $X(x) = u(x) + iv(x)$ . Але тоді  $\bar{\lambda} = a - ib$  теж буде власним значенням і відповідна власна функція  $X(x) = u(x) - iv(x)$ . Справді,

$$u'' + iv'' - (a + ib)(u + iv) \equiv 0 \Rightarrow u'' - au + bv \equiv 0,$$

$$v'' - av - bu \equiv 0.$$

Але тоді

$$u'' - iv'' - (a - ib)(u - iv) = u'' - au + bv - i[v'' - bu - av] \equiv 0.$$

Легко бачити, що

$$\int_0^l (X(x)\bar{X}''(x) - \bar{X}(x)X''(x)) dx = (X\bar{X}' - \bar{X}X') \Big|_0^l = 0.$$

Отже,

$$0 = \int_0^l [X(x)\bar{\lambda}\bar{X}(x) - \bar{X}(x)\lambda X(x)] dx = -2ib \int_0^l (u^2 + v^2) dx,$$

звідки  $b = 0$ , що й треба було довести.

Знайдемо власні значення та власні функції. Для цього розглянемо окремо випадки, коли  $\lambda$  додатні, нульові й від'ємні.

- Нехай  $\lambda > 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (2.168) має вигляд

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Підставивши знайдений розв'язок у крайові умови (2.169), дістанемо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0. \end{cases}$$

Визначник системи

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & e^{-\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l}$$

при  $\lambda > 0$  не дорівнює нулю, тому система має тільки нульовий розв'язок  $C_1 = C_2 = 0$ , тобто  $X(x) \equiv 0$ . Отже,  $\lambda > 0$  не є власним значенням.

- Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (2.168) має вигляд

$$X(x) = C_3 x + C_4.$$

Підставивши його в крайові умови (2.169), матимемо  $C_4 = 0$ ,  $C_3 l + C_4 = 0$ . Отже,

$$C_3 = C_4 = 0 \text{ і } X(x) \equiv 0.$$

- Нехай  $\lambda < 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (2.168) має вигляд

$$X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda}x.$$

Згідно з крайовими умовами дістанемо

$$C_5 = 0, \quad C_6 \sin \sqrt{-\lambda} l = 0.$$

Задача (2.168), (2.169) матиме нетривіальні розв'язки лише тоді, коли  $C_6 \neq 0$ , а  $\sin \sqrt{-\lambda} l = 0$ , тобто коли

$$\lambda = -(\pi n/l)^2, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Знайденим власним значенням відповідають власні функції

$X_n(x) = C_6 \sin \frac{\pi n}{l} x$ , які визначаються з точністю до сталого множника. У зв'язку з цим надалі вважатимемо, що  $n = 1, 2, 3, \dots$

Підставивши добуті власні значення в рівняння (2.167) і зінтегрувавши його, дістанемо

$$T_n(t) = C_7 \cos \frac{\pi n a}{l} t + C_8 \sin \frac{\pi n a}{l} t.$$

Згідно з (2.166) функції

$$u_n(t, x) = \left( a_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + b_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $a_n = C_6 C_7$ ,  $b_n = C_6 C_8$ , задовольняють рівняння (2.162) і крайові умови (2.164) за довільних  $a_n$  і  $b_n$ .

Розглянемо ряд

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + b_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.170)$$

Справедлива наступна лема.

### ЛЕМА 2.1

Якщо функції  $u_n(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  є частинними розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння

$$Lu \equiv \sum_{k_1=0}^{S_1} \sum_{k_2=0}^{S_2} \dots \sum_{k_r=0}^{S_r} a_{k_1 \dots k_r}(x_1, \dots, x_r) \times \\ \times \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_r} u(x_1, \dots, x_r)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}} = 0, \quad (2.171)$$

то функція

$$u(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x_1, x_2, \dots, x_r), \quad C_n = \text{const} \quad (2.172)$$

також буде розв'язком рівняння (2.171), якщо похідні від цієї функції, які входять у рівняння (2.171), можна обчислити почленно диференціюванням ряду (2.172).

### Доведення

Позначимо  $k = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ . Із курсу математичного аналізу відомо, що функціональний ряд (2.172) можна почленно диференціювати, якщо він збігається в розглядуваній області, а ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n D^k u_n(x_1, \dots, x_r)$  збігаються рівномірно в цій області. Внаслідок того, що рівномірно збіжні ряди можна почленно додавати, маємо

$$\begin{aligned} L \left( \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n \right) &= \sum_{k_1=0}^{S_1} \sum_{k_2=0}^{S_2} \dots \sum_{k_r=0}^{S_r} a_k D^k \left( \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n \right) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{S_1} \sum_{k_2=0}^{S_2} \dots \sum_{k_r=0}^{S_r} \sum_{n=1}^{\infty} a_k C_n D^k u_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n L u_n \equiv 0. \end{aligned}$$

Лему доведено.

Припустимо, що ряд (2.170) збігається і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і двічі за  $x$  в області  $D$ . Тоді внаслідок доведеної леми ряд (2.170) також буде розв'язком рівняння (2.162), який, очевидно, задовольняє і крайові умови (2.164).

Для побудови розв'язку мішаної задачі (2.162)—(2.164) залишилося в ряді (2.170) так вибрати коефіцієнти  $a_n$  і  $b_n$ , щоб він задовольняв і початкові умови (2.163). Для цього підставимо ряд (2.170) у початкові умови (2.163):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x = \psi(x). \quad (2.173)$$

Нехай функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  є кусково-диференційовними на проміжку  $[0, l]$ . Тоді їх можна розвинути в ряди Фур'є

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.174)$$

де

$$a'_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi; \quad b'_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi.$$

Порівнюючи ряди (2.173), (2.174), матимемо

$$a_n = a'_n, \quad b_n = \frac{l}{\pi n a} b'_n.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в (2.170), дістанемо розв'язок задачі (2.162)—(2.164):

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \cos \frac{\pi n a}{l} t + \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.175)$$

Наведену схему побудови розв'язку задачі (2.162)—(2.164) вперше запропонував французький математик Ж. Б. Ж. Фур'є і виклав її в опублікованій 1822 р. праці «Аналітична теорія тепла». Тому в літературі метод відокремлення змінних часто називають *методом Фур'є*.

□ **Обґрунтування методу Фур'є.** Для цього необхідно показати, що ряд (2.175) збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і  $x$ .

#### ТЕОРЕМА 2.4

Якщо  $\varphi(x)$  на відрізку  $[0, l]$  двічі неперервно диференційовна, має кусково-неперервну третю похідну й задовольняє умови

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \quad (2.176)$$

а  $\psi(x)$  неперервно диференційовна на  $[0, l]$ , має кусково-неперервну другу похідну й задовольняє умови узгодженості (2.165), то функція  $u(t, x)$ , визначена рядом (2.175), має неперервні похідні до другого порядку включно й задовольняє рівняння (2.162) і умови (2.163), (2.164). При цьому ряд (2.175) можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і  $x$ , і добуті ряди збігаються абсолютно й рівномірно при  $x \in [0, l]$ ,  $t \geq 0$ .

Доведення

Інтегруючи у виразах для  $a_n$  і  $b_n$  частинами й беручи до уваги (2.165), (2.176), маємо

$$a_n = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{b_n^{(3)}}{n^3}, \quad b_n = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{a_n^{(2)}}{n^3},$$

де

$$b_n^{(3)} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi'''(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi; \quad a_n^{(2)} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\psi''(\xi)}{a} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi.$$

Підставивши добуті результати в (2.175), дістанемо

$$u(t, x) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[ b_n^{(3)} \cos \frac{\pi n a}{l} t + a_n^{(2)} \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.177)$$

Ряд (2.177) мажоредується збіжним рядом

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (|b_n^{(3)}| + |a_n^{(2)}|),$$

а отже, на підставі ознаки Вейерштрасса ряд (2.177) збігається рівномірно й абсолютно в області  $\bar{D} = [0, l] \times [0, T]$ .

Здиференціюємо почленно ряд (2.177) двічі за  $t$  і  $x$ :

$$u_{tt}(t, x) = \frac{l a^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ b_n^{(3)} \cos \frac{\pi n a}{l} t + a_n^{(2)} \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.178)$$

$$u_{xx}(t, x) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ b_n^{(3)} \cos \frac{\pi n a}{l} t + a_n^{(2)} \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Ряди (2.178) мажоруються числовим рядом

$$\frac{lA}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|b_n^{(3)}| + |a_n^{(2)}|), \quad A = \sup(1, a^2). \quad (2.179)$$

Згідно з нерівністю Коші—Буняковського

$$\frac{|b_n^{(3)}|}{n} \leq \frac{1}{2} \left[ |b_n^{(3)}|^2 + \frac{1}{n^2} \right], \quad \frac{|a_n^{(2)}|}{n} \leq \frac{1}{2} \left[ |a_n^{(2)}|^2 + \frac{1}{n^2} \right]. \quad (2.180)$$

Із теорії рядів Фур'є відомо, що ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(3)}|^2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(2)}|^2$  збігаються, а тоді на підставі нерівностей (2.180) збігається й ряд (2.179). Збіжність ряду (2.179) забезпечує рівномірну збіжність в області  $\bar{D}$  рядів (2.178). Теорему доведено.

□ **Фізична інтерпретація розв'язку (2.175).** Введемо позначення:

$$a_n = A_n \sin \varphi_n, \quad b_n = A_n \cos \varphi_n.$$

Тоді розв'язок (2.175) запишеться у вигляді

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \left( \frac{\pi n a}{l} t + \varphi_n \right). \quad (2.181)$$

Кожен член ряду (2.181) є так званою *стоячою хвилею*

$$u_n(t, x) = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \left( \frac{\pi n a}{l} t + \varphi_n \right),$$

за якої точки струни здійснюють гармонічні коливальні рухи з одними й тими самими частотою  $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$  і фазою  $\varphi_n$ , а амплітуди коливання

$A_n \sin \frac{\pi n}{l} x$  залежать від абсциси  $x$  точки струни. За такого коливання

всі точки струни одночасно досягають свого максимального відхилення в той чи інший бік і одночасно проходять положення рівноваги.

Форму струни в момент часу  $t$  для випадків  $n = 1, 2, 3, 6$  показано на рис. 2.34. Як бачимо, точки  $x = \frac{ml}{n}$  ( $m = \overline{1, n-1}$ ), в яких  $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$ ,

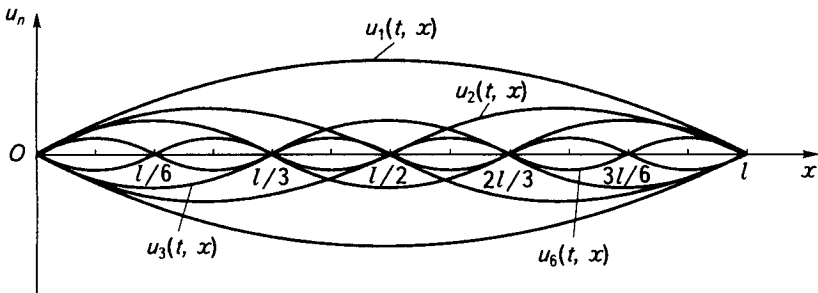


Рис. 2.34



протягом усього процесу залишаються нерухомими й називаються *вузлами стоячої хвилі*  $u_n(t, x)$ . Точки  $x = \frac{2m+1}{2n}l$  ( $m = \overline{0, n-1}$ ), в яких  $\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$ , здійснюють коливання з максимальною амплітудою й називаються *пучностями стоячої хвилі*.

У момент часу  $t$ , за якого  $\sin\left(\frac{\pi n a}{l} t + \varphi_n\right) = \pm 1$ , відхилення досягають максимальних значень, а швидкість руху дорівнює нулю. В момент часу  $t$ , за якого  $\sin\left(\frac{\pi n a}{l} t + \varphi_n\right) = 0$ , відхилення точок струни дорівнює нулю, а швидкість їх руху максимальна.

Розв'язок (2.181) складається з окремих стоячих хвиль  $u_n(t, x)$ , причому, враховуючи, що

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \left(\frac{l}{\pi n}\right)^3 \sqrt{(b_n^{(3)})^2 + (a_n^{(2)})^2},$$

маємо

$$u_n(t, x) = \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(t, x)} 0. \quad (2.182)$$

Звідси випливає, що основну роль у хвильовому процесі відіграють перші члени ряду (2.181).

Колівання струни сприймаються за її звучанням. Звуки можна поділити на музичні й немусичні. Перші називаються *нотами*, другі — *шумами*. Ноти розміщуються в певному порядку за їхньою висотою. Ті ноти, які орган слуху неспроможний розрізнити за висотою, називаються *тонами*.

Висота звучання залежить від частоти коливання  $\omega_n$  струни, а сила тону — від амплітуди. *Частота основного (найнижчого) тону* виражається формулою  $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ . Тони, які відповідають вищим за основну частотам (кратним  $\omega_1$ ), називаються *обертонами*. Обертони, частота яких кратна основній частоті, називаються *гармоніками* ( $u_n(t, x)$ ). Першою гармонікою вважаємо основний тон, другою гармонікою ( $u_2(t, x)$ ) — тон із частотою  $\omega_2 = 2\omega_1$  і т. д.

Розв'язок (2.181) складається з окремих гармонік і внаслідок (2.182) вплив їх на звучання струни зі зростанням  $n$  швидко спадає. Вся дія

вищих гармонік зводиться до створення *тембру звучання*. Тембр звучання різних музичних інструментів різний, що й пояснюється наявністю гармонік.

Розкладання (2.181) звучання струни на прості тони не є чисто математичною операцією. Прості тони можна виділити експериментально за допомогою резонаторів.

Колівальних систем із гармонічними обертонами небагато, але вони є основними для побудови майже всіх музичних інструментів, оскільки звук із гармонічними обертонами здається особливо милозвучним.

Із наведених міркувань випливає, що висота звучання струни буде тим вища, чим більша сила натягу струни й менші її довжина та густина.

Якщо колівну струну притиснути точно посередині, тобто в пучності її основного тону, то перетворяться в нуль амплітуди не лише цього тону, а й усіх інших, які мають пучності в цій точці, тобто непарних гармонік. Навпаки, на парні гармоніки, які мають вузол у цій точці, це не впливатиме. Таким чином, залишаються тільки парні

гармоніки найнижчої частоти  $\omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , і струна видаватиме не свій основний звук, а його октаву, тобто звук з удвічі більшим числом коливань за секунду.

Якщо притиснути струну в точці на відстані  $1/3$  її довжини від краю, то висота основного тону підвищується втричі, оскільки при цьому зберігаються лише гармоніки, які мають вузли в точці  $x = l/3$ .

Цей прийом зміни тону застосовується у грі майже на всіх струнних інструментах і називається *флажолетом*.

## 2.18

### Вимушені коливання скінченної струни

Розглянемо задачу: дослідити процес вимушених коливань однорідної струни завдовжки  $l$ , нерухомо закріпленої на кінцях, якщо на неї діє рівномірно розподілена зовнішня сила інтенсивністю  $f(t, x)$ , а в початковий момент струна має форму  $u(0, x) = \varphi(x)$  і швидкість  $u_t(0, x) = \psi(x)$ .

Для розв'язання поставленої задачі необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (0, l), \quad (2.183)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l] \quad (2.184)$$

і крайові

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.185)$$

Розв'язок мішаної задачі (2.183)—(2.185) шукатимемо у вигляді

$$u(t, x) = z(t, x) + v(t, x), \quad (2.186)$$

де  $z(t, x)$  — розв'язок однорідного рівняння коливання струни, який задовольняє умови (2.185), (2.186);  $v(t, x)$  — розв'язок рівняння (2.183) з однорідними початковими умовами й крайовими умовами (2.185).

Згідно з формулою (2.175)

$$\begin{aligned} z(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^l \left[ \frac{1}{l} \varphi(\xi) \cos \frac{\pi n a}{l} t + \frac{1}{\pi n a} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \times \\ & \times \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \quad (2.187)$$

Функцію  $v(t, x)$  шукаємо у вигляді

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (2.188)$$

де  $X_n(x)$  — власні функції відповідної задачі Штурма—Ліувілля. В нашому випадкові  $X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$  (за різних крайових умов дістанемо різні власні функції).

Надалі вважатимемо, що ряд (2.188) збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і  $x$ . Зазначимо, що ряд (2.188) задовольняє крайові умови. Залишилося функції  $T_n(t)$  вибрати таким чином, щоб ряд (2.188) задовольняв рівняння (2.183) та однорідні початкові умови.

Нехай функцію  $f(t, x)$  можна розвинути в ряд Фур'є за системою власних функцій  $\sin \frac{\pi n}{l} x$ . Тоді маємо

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \quad (2.189)$$

Підставивши (2.188) і (2.189) у рівняння (2.183), дістанемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_n''(t) + \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 T_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x = 0.$$

Остання рівність можлива тоді й лише тоді, коли

$$T_n''(t) + \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t). \quad (2.190)$$

Для того щоб функція  $v(t, x)$  задовольняла однорідні початкові умови, слід покласти

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0. \quad (2.191)$$

Інтегруючи задачу Коші (2.190), (2.191), дістаємо

$$T_n(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi n a}{l} (t - \tau) d\tau. \quad (2.192)$$

Підставивши (2.192) в (2.188), а потім добутий результат і (2.187) у (2.186), матимемо розв'язок поставленої мішаної задачі

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^l \left[ \frac{1}{l} \varphi(\xi) \cos \frac{\pi n a}{l} t + \frac{1}{\pi n a} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \times \\ & \times \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n a} \int_0^t \int_0^l f(\tau, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \times \\ & \times \sin \frac{\pi n a}{l} (t - \tau) d\tau \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}$$

Можна показати, що добутий ряд буде розв'язком поставленої задачі, якщо  $f(t, x)$  неперервна, має неперервні похідні за  $x$  до другого порядку включно й

$$f(t, 0) = f(t, l) = 0 \quad \text{при } t \geq 0.$$

◆ **Вправа.** Показати: якщо  $\Omega(t - \tau, x)$  є розв'язком мішаної задачі

$$\Omega_{tt}(t - \tau, x) = a^2 \Omega_{xx}(t - \tau, x), \quad t \in (\tau, +\infty), \quad x \in (0, l),$$

$$\Omega(0, x) = 0, \quad \Omega_t(0, x) = f(\tau, x), \quad x \in [0, l],$$

$$\Omega(t - \tau, 0) = \Omega(t - \tau, l) = 0, \quad t \in [\tau, +\infty),$$

то функція  $v(t, x)$ , визначена за формулою

$$v(t, x) = \int_0^t \Omega(t - \tau, x) d\tau,$$

є розв'язком задачі

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(t, x), \quad t \in (0, +\infty), \quad x \in (0, l),$$

$$v(0, x) = v_t(0, x) = 0, \quad x \in [0, l],$$

$$v(t, 0) = v(t, l) = 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

- ◇ **Зауваження 2.7.** Якщо в мішаній задачі крайові умови (2.185) неоднорідні, то інтегрування такої задачі завжди можна звести до інтегрування мішаної задачі з однорідними крайовими умовами. Справді, нехай потрібно знайти розв'язок рівняння (2.183), який задовольняє початкові умови (2.184) і крайові

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad u(t, l) = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \quad (2.193)$$

Тоді розв'язок поставленої задачі (2.183), (2.184), (2.193) шукаємо у вигляді

$$u(t, x) = \bar{\omega}(t, x) + \omega(t, x), \quad (2.194)$$

де  $\omega(t, x)$  — довільна з класу  $C^2(t \geq 0, 0 \leq x \leq l)$  функція, яка задовольняє крайові умови (2.193). Шукаємо її у вигляді

$$\omega(t, x) = a(t)x + b(t), \quad (2.195)$$

де  $a(t)$  і  $b(t) \in C^2(t \geq 0)$ . Підставивши (2.195) у (2.193), знаходимо  $b(t) = \mu_1(t)$ ,  $a(t) = (\mu_2(t) - \mu_1(t))/l$ , тобто

$$\omega(t, x) = \mu_1(t) + x(\mu_2(t) - \mu_1(t))/l.$$

Підставивши функції (2.194) в мішану задачу (2.183), (2.184), (2.193), дістанемо

$$\bar{\omega}_{tt} = a^2 \bar{\omega}_{xx} + f(t, x) - \omega_{tt}, \quad t > 0, \quad x \in (0, l),$$

$$\bar{\omega}(0, x) = \varphi(x) - \omega(0, x), \quad \bar{\omega}_t(0, x) = \psi(x) - \omega_t(0, x),$$

$$\bar{\omega}(t, 0) = 0, \quad \bar{\omega}(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0, l],$$

що й треба було показати.

- ◆ **Вправа.** Побудувати функцію  $\omega(t, x)$  за таких крайових умов:

а)  $u_x(t, 0) = v_1(t)$ ,  $u_x(t, l) = v_2(t)$ ,  $t \geq 0$ ;

б)  $u_x(t, 0) - hu(t, 0) = \gamma_1(t)$ ,  $u_x(t, l) + hu(t, l) = \gamma_2(t)$ ,  $t \geq 0$ ;

$$в) u(t, 0) = \mu_1(t), \quad u_x(t, l) = \nu_2(t), \quad t \geq 0;$$

$$г) u_x(t, 0) = \nu_1(t), \quad u(t, l) = \mu_2(t), \quad t \geq 0;$$

$$д) u(t, 0) = \mu_1(t), \quad u_x(t, l) + hu(t, l) = \gamma_2(t), \quad t \geq 0.$$

## 2.19

### Мішані задачі зі стаціонарними неоднорідностями

Розглянемо мішану задачу: знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad t > 0, \quad x \in (0, l), \quad (2.196)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l] \quad (2.197)$$

і крайові

$$u(t, 0) = u_1, \quad u(t, l) = u_2, \quad u_1, u_2 = \text{const}, \quad t \geq 0. \quad (2.198)$$

➔ **Означення 2.8.** Мішану задачу (2.196)—(2.198) називають *задачею зі стаціонарними неоднорідностями*, якщо права частина рівняння (2.196) і крайові умови (2.198) не залежать від часу.

У цьому випадкові розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(t, x) = z(x) - v(x, t), \quad (2.199)$$

де  $z(x)$  — стаціонарне положення струни (статичний прогин), яке визначається з крайової задачі

$$a^2 z_{xx} + f(x) = 0, \quad x \in (0, l), \quad z(0) = u_1, \quad z(l) = u_2, \quad (2.200)$$

а  $v(t, x)$  — відхилення від стаціонарного положення.

Зінтегрувавши крайову задачу (2.200), дістанемо

$$z(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (2.201)$$

де

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \xi(1 - x/l), & \xi \in [0, x), \\ x(1 - \xi/l), & \xi \in [x, l]. \end{cases}$$

Підставивши (2.199) у (2.196)—(2.198) та врахувавши (2.200), матимемо

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0, l), \\ v(0, x) &= \varphi(x) - z(x), \quad v_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \\ v(t, 0) &= 0, \quad v(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Згідно з формулою (2.175)

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \left[ (\varphi(\xi) - z(\xi)) \cos \frac{\pi n a}{l} t - \frac{l}{\pi n a} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \quad (2.202)$$

Підставивши (2.201) і (2.202) в (2.199), дістанемо розв'язок поставленої мішаної задачі (2.196)—(2.198).

◆ **Зауваження 2.8.** Якщо на кінці струни діють сталі сили, то замість крайових умов (2.198) матимемо

$$u_x(0, t) = u_1, \quad u_x(l, t) = u_2, \quad t \geq 0,$$

а крайова задача (2.200) запишеться у вигляді

$$a^2 z''(x) + f(x) = 0, \quad z'(0) = u_1, \quad z'(l) = u_2.$$

Остання крайова задача може мати безліч розв'язків або не мати жодного. В цьому випадкові викладену вище схему побудови розв'язку мішаних задач зі стаціонарними неоднорідностями застосувати не можна.

**2.20****Загальна схема  
методу відокремлення змінних**

Метод Фур'є побудови розв'язку мішаної задачі можна застосувати лише для певного класу лінійних ДРЧП другого порядку. У зв'язку з цим розглянемо диференціальне рівняння

$$a(t)u_{tt} + b(t)u_t + c(x)u_{xx} + d(x)u_x + [e(x) + f(t)]u = 0, \quad (2.203)$$

де коефіцієнти  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(x)$ ,  $d(x)$ ,  $e(x)$ ,  $f(x)$  — досить гладкі функції при  $t \geq 0$ ,  $x \in [0, l]$  і

$$a(t) > a_0 > 0, \quad c(x) < c_0 < 0, \quad a_0, c_0 = \text{const.}$$

На підставі останніх умов рівняння (2.203) належить до гіперболічного типу.

Нехай потрібно знайти розв'язок рівняння (2.203) при  $t > 0$ ,  $x \in (0, l)$ , який задовольняв би початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l] \quad (2.204)$$

і крайові

$$\begin{aligned} \alpha u(t, 0) + \beta u_x(t, 0) &= 0, \\ \gamma u(t, l) + \delta u_x(t, l) &= 0, \end{aligned} \quad t \geq 0, \quad (2.205)$$

де сталі  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  такі, що  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ,  $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ .

□ **Формальна схема методу відокремлення змінних.** Побудову розв'язку мішаної задачі (2.203)—(2.205) розіб'ємо на два етапи.

- *Перший етап.* Шукаємо нетривіальні розв'язки рівняння (2.203), які задовольняли б крайові умови (2.205), у вигляді

$$u(t, x) = T(t)X(x) \neq 0. \quad (2.206)$$

Підставивши (2.206) у рівняння (2.203), крайові умови (2.205) та розділивши змінні, дістанемо

$$a(t)T''(t) + b(t)T'(t) + [f(t) + \lambda]T(t) = 0, \quad (2.207)$$

$$c(x)X''(x) + d(x)X'(x) + [e(x) - \lambda]X(x) = 0, \quad (2.208)$$



$$\alpha X(0) + \beta X'(0) = 0, \quad \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0, \quad (2.209)$$

де  $\lambda$  — довільна стала.

Таким чином, ми прийшли до задачі Штурма—Ліувілля: дістати ті значення параметра  $\lambda$  (власні значення), за яких задача (2.208), (2.209) має нетривіальні розв'язки (власні функції), і знайти ці розв'язки.

Сукупність усіх власних значень задачі (2.208), (2.209) називається її *спектром*.

Припустимо, що задачу Штурма—Ліувілля (2.208), (2.209) розв'язано і  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) — її власні значення, а  $X_n(x)$  — відповідні власні функції.

Унаслідок однорідності рівняння (2.208) і крайових умов (2.209) власні функції визначаються з точністю до сталого множника. Але всякому власному значенню задачі (2.208), (2.209) відповідає тільки одна лінійно незалежна власна функція. (В цьому випадкові кажуть, що власні значення розглядуваної задачі Штурма—Ліувілля є простими.) Справді, якщо власному значенню  $\lambda_n$  відповідали б дві лінійно незалежні власні функції  $X_{n,1}(x)$  і  $X_{n,2}(x)$ , то функція

$$X_n(x) = C_1 X_{n,1}(x) + C_2 X_{n,2}(x)$$

була б загальним розв'язком рівняння (2.208) при  $\lambda = \lambda_n$ , який задовольняє крайові умови (2.209). Але це неможливо, бо завжди можна знайти розв'язок рівняння (2.208) за таких початкових умов  $X(0)$  і  $X'(0)$ , що він не задовольнятиме першу з крайових умов (2.209) (наприклад, поклавши  $X(0) = \alpha$ ,  $X'(0) = \beta$ ).

Покажемо, що рівняння (2.208) можна подати у вигляді

$$[p(x)X'(x)]' - g(x)X(x) + \lambda \rho(x)X(x) = 0, \quad (2.210)$$

де  $\rho(x) > 0$  — цілком визначена для заданого рівняння функція. Справді, домноживши (2.208) на  $\rho(x)$ , дістанемо

$$\rho(x)c(x)X''(x) + \rho(x)d(x)X'(x) + \rho(x)[e(x) - \lambda]X(x) = 0. \quad (2.210a)$$

Виберемо  $\rho(x)$  таким чином, щоб

$$(\rho(x)c(x))' = \rho(x)d(x). \quad (2.211)$$

Маємо

$$\rho(x) = e^{\int \frac{d(x) - c'(x)}{c(x)} dx} > 0.$$

Введемо позначення:  $-\rho(x)c(x) = p(x)$ ;  $e(x)\rho(x) = g(x)$ . Тоді внаслідок (2.211) рівняння (2.210a) запишеться у вигляді (2.210).

Оскільки власні функції визначаються з точністю до сталого множника, то виберемо його таким чином, щоб

$$\int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx = 1. \quad (2.212)$$

Власні функції, які задовольняють умову (2.212), називаються *нормованими*.

Всяка власна функція  $X_n(x)$ , помножена на число  $\left( \int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx \right)^{-1/2}$ , стає нормованою. Очевидно, що кожному власному значенню задачі Штурма—Ліувілля (2.208), (2.209) відповідає нормована власна функція, яка визначається з точністю до знака.

### ТЕОРЕМА 2.5

Якщо  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  — два різних власних значення задачі Штурма—Ліувілля (2.208), (2.209), то відповідні їм власні функції  $X_1(x)$  і  $X_2(x)$  ортогональні з вагою  $\rho(x)$  на відрізку  $[0, l]$ , тобто

$$\int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) dx = 0.$$

#### Доведення

Згідно з умовою теореми справедливі рівності

$$[p(x) X_1'(x)]' - g(x) X_1(x) + \lambda_1 \rho(x) X_1(x) = 0,$$

$$[p(x) X_2'(x)]' - g(x) X_2(x) + \lambda_2 \rho(x) X_2(x) = 0.$$

Помноживши першу з рівностей на  $X_2(x)$ , а другу — на  $X_1(x)$  і віднявши почленно, дістанемо

$$[p(x) X_1'(x)]' X_2(x) - [p(x) X_2'(x)]' X_1(x) + (\lambda_1 - \lambda_2) \rho(x) X_1(x) X_2(x) = 0.$$

Інтегруючи останню тотожність за  $x$  у межах від 0 до  $l$ , маємо

$$\begin{aligned} & (\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) dx = \\ & = p(l)[X_1'(l)X_2(l) - X_2'(l)X_1(l)] - p(0)[X_1'(0)X_2(0) - X_2'(0)X_1(0)]. \end{aligned}$$

Унаслідок умов (2.209) права частина останньої рівності дорівнює нулю. Оскільки  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то  $\int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) dx = 0$ .

Теорему доведено.

З умови ортогональності власних функцій випливає дійсність власних значень. Справді, якщо існує комплексне власне значення  $\lambda_n$ , якому відповідає комплексна власна функція  $X_n(x)$ , то на підставі того, що коефіцієнти рівняння (2.208) і крайових умов (2.209) є дійсними, комплексно-спряжене число  $\bar{\lambda}_n$  також буде власним значенням і йому відповідатиме комплексно-спряжена з  $X_n(x)$  власна функція  $\bar{X}_n(x)$ . З умови ортогональності маємо

$$\int_0^l \rho(x) X_n(x) \bar{X}_n(x) dx = \int_0^l \rho(x) |X_n(x)|^2 dx = 0,$$

тобто  $X_n(x) = 0$ , а це означає, що комплексне число  $\lambda_n$  не є власним значенням.

### ТЕОРЕМА 2.6

*Якщо існують власні значення задачі Штурма—Ліувілля (2.208), (2.209), де  $\alpha\beta \leq 0$ ,  $\gamma\delta \geq 0$ ,  $e(x) \geq 0$ , то вони додатні.*

#### Доведення

Нехай  $\lambda_n$  — власне значення, а  $X_n(x)$  — відповідна власна функція. Маємо

$$[p(x) X_n'(x)]' - g(x) X_n(x) + \lambda_n \rho(x) X_n(x) = 0.$$

Помножимо останню тотожність на  $X_n(x)$  і зінтегруємо результат за  $x$  у межах від 0 до  $l$ :

$$\lambda_n = \int_0^l [g(x) X_n^2(x) + p(x) X_n'^2(x)] dx - [p(x) X_n'(x) X_n(x)] \Big|_0^l.$$

Оскільки  $\alpha\beta \leq 0$ ,  $\gamma\delta \geq 0$ , то  $[p(x) X_n'(x) X_n(x)] \Big|_0^l \leq 0$ , а тому  $\lambda_n > 0$ . Теорему доведено.

Зазначимо, що власні функції  $X_n(x)$  задачі (2.208), (2.209) створюють повну систему, тобто не існує ненульової квадратно сумовної функції, яка була б ортогональною до всіх власних функцій.

Переходимо до інтегрування рівняння (2.207). Підставивши в нього власне значення  $\lambda_n$ , знаходимо два його частинних розв'язки  $T_{1,n}(t)$ ,  $T_{2,n}(t)$ , які задовольняли б умови

$$\begin{aligned} T_{1,n}(0) &= 1, & T'_{1,n}(0) &= 0; \\ T_{2,n}(0) &= 0, & T'_{2,n}(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.213)$$

Очевидно, розв'язки  $T_{1,n}(t)$  і  $T_{2,n}(t)$  є лінійно незалежними, а отже, загальний розв'язок рівняння (2.207) можна записати у вигляді

$$T_n(t) = A_n T_{1,n}(t) + B_n T_{2,n}(t),$$

де  $A_n$ ,  $B_n$  — довільні сталі.

Згідно з (2.206) маємо

$$u_n(t, x) = (A_n T_{1,n}(t) + B_n T_{2,n}(t)) X_n(x).$$

Функції  $u_n(t, x)$  за будь-яких  $n$  задовольняють рівняння (2.203) і крайові умови (2.205).

- *Другий етап.* За допомогою знайдених нетривіальних розв'язків  $u_n(t, x)$  будемо розв'язок поставленої мішаної задачі (2.203)—(2.205).

Розглянемо ряд

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n T_{1,n}(t) + B_n T_{2,n}(t)] X_n(x) \quad (2.214)$$

і припустимо, що при  $t \geq 0$ ,  $x \in [0, l]$  він збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і двічі за  $x$ . Тоді ряд (2.214) буде розв'язком рівняння (2.203) через його лінійність та однорідність і задовольнятиме крайові умови (2.205).

Підставивши (2.214) у початкові умови (2.204) і врахувавши (2.213), дістанемо

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi(x), \\ u_t(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

Помножимо добуті рівності на  $\rho_m X_m(x)$  і зінтегруємо їх за  $x$  у межах від 0 до  $l$ . Тоді, врахувавши ортонормованість власних функцій, матимемо

$$A_m = \int_0^l \varphi(\xi) \rho(\xi) X_m(\xi) d\xi,$$

$$B_m = \int_0^l \psi(\xi) \rho(\xi) X_m(\xi) d\xi.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти  $A_m, B_m$  у ряд (2.214), дістанемо розв'язок мішаної задачі (2.203)—(2.205):

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_0^l \varphi(\xi) \rho(\xi) X_m(\xi) d\xi T_{1. m}(t) + \int_0^l \psi(\xi) \rho(\xi) X_m(\xi) d\xi T_{2. m}(t) \right\} X_m(x). \quad (2.215)$$

□ **Обґрунтування методу відокремлення змінних.** Для цього необхідно показати:

- існування розв'язку задачі Штурма—Ліувілля (2.208), (2.209);
- можливість розвинення функцій  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  на відрізку  $[0, l]$  у ряди за системою власних функцій задачі Штурма—Ліувілля (2.208), (2.209);
- рівномірну збіжність ряду (2.215) при  $t \geq 0, x \in [0, l]$  і його почленну диференційовність двічі за  $t$  і двічі за  $x$ .

Для доведення існування розв'язку задачі Штурма—Ліувілля (2.208), (2.209) зведемо її до інтегрального рівняння. Для цього розглянемо функцію Гріна задачі (2.208), (2.209).

➤ **Означення 2.9.** *Функцією Гріна задачі (2.208), (2.209) називають функцію  $G(x, s)$ , визначену в квадраті  $x \in [0, l], s \in [0, l]$ , яка задовольняє такі умови:*

- 1)  $G(x, s)$  як функція  $x, s$  неперервна, а при  $x \neq s$  має неперервні похідні за  $x$  до другого порядку включно й задовольняє одностороннє рівняння

$$[p(x)G_x(x, s)]_x - g(x)G(x, s) = 0; \quad (2.216)$$

- 2)  $G(x, s)$  як функція  $x$  задовольняє крайові умови (2.209);

3) похідна першого порядку  $G'_x(x, s)$  при  $x = s$  зазнає розриву першого роду й має скачок, що дорівнює  $1/p(s)$ , тобто

$$G_x(s+0, s) - G_x(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}.$$

Для спрощення наступних викладок вважатимемо, що в крайових умовах (2.209)  $\alpha = \gamma = 1$ ,  $\beta = \delta = 0$ .

Будуємо функцію Гріна у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} E(s)X_1(x), & 0 \leq x \leq s, \\ F(s)X_2(x), & s \leq x \leq l, \end{cases} \quad (2.217)$$

де  $E(s)$ ,  $F(s)$  — довільні функції, визначені на  $[0, l]$ , а  $X_1(x)$ ,  $X_2(x)$  — два нетривіальних частинних розв'язки рівняння (2.216), які задовольняють умови

$$X_1(0) = 0, \quad X_2(l) = 0. \quad (2.218)$$

Розв'язки  $X_1(x)$ ,  $X_2(x)$  існують і є лінійно незалежними. Справді, якщо б  $X_1(x) \equiv cX_2(x)$ , то згідно з умовами (2.218) ми мали б

$$X_1(0) = X_1(l) = 0, \quad X_2(0) = X_2(l) = 0,$$

тобто  $\lambda = 0$  було б власним значенням задачі Штурма—Ліувілля (2.208), (2.209), а це суперечить доведеній теоремі 2.6 про додатність власних значень.

З умови неперервності функції Гріна в прямокутнику  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq s \leq l$  маємо

$$E(s)X_1(s) = F(s)X_2(s),$$

тобто

$$\frac{E(s)}{X_2(s)} = \frac{F(s)}{X_1(s)} = K(s).$$

Визначивши з цього відношення функції  $E(s)$  і  $F(s)$  та підставивши їх у (2.217), дістанемо функцію

$$G(x, s) = \begin{cases} K(s)X_2(s)X_1(x), & 0 \leq x \leq s, \\ K(s)X_1(s)X_2(x), & s \leq x \leq l, \end{cases}$$

яка задовольняє першу й другу умови означення функції Гріна. Згідно з третьою умовою маємо

$$K(s)[X_1(s)X_2'(s) - X_2(s)X_1'(s)] = [p(s)]^{-1},$$

тобто

$$K(s) = \{p(s)[X_1(s)X_2'(s) - X_2(s)X_1'(s)]\}^{-1}.$$

Вираз у квадратних дужках є детермінантом Вронського  $W[X_1(s), X_2(s)]$  лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.216) і згідно з відомою з курсу звичайних диференціальних рівнянь формулою Ліувілля

$$W[X_1(s), X_2(s)] = W_0 e^{-\int \frac{p'(s)}{p(s)} ds} = W_0 [p(s)]^{-1},$$

де  $W_0$  — стала величина.

Таким чином,  $K(s) = W_0^{-1}$  і шукана функція Гріна має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} W_0^{-1} X_2(s)X_1(x), & 0 \leq x \leq s, \\ W_0^{-1} X_1(s)X_2(x), & s \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2.219)$$

Із (2.219) випливає симетричність функції Гріна, тобто  $G(x, s) = G(s, x)$ .

### ТЕОРЕМА 2.7

*Задача Штурма—Ліувілля (2.210), (2.209) та інтегральне рівняння*

$$X(x) + \lambda \int_0^l G(x, s)\rho(s)X(s) ds = 0 \quad (2.220)$$

*еквівалентні.*

### Доведення

Безпосередньою підстановкою легко переконатися, що будь-який розв'язок рівняння (2.220) є також розв'язком задачі (2.210), (2.209).

Покажемо, що справедливе й обернене твердження. Для цього припустимо, що  $X(x)$  є деяким розв'язком задачі (2.210), (2.209). Помноживши рівняння (2.210) на  $G(x, s)$ , а рівняння (2.216) — на  $X(x)$  і віднявши одну рівність від іншої, дістанемо

$$\begin{aligned} & [p(x)X'(x)]G(x, s) - [p(x)G_x(x, s)]_x X(x) + \\ & + \lambda G(x, s)\rho(x)X(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.221)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \int_0^s [p(x)X'(x)]G(x, s) dx &= p(x)X'(s)G(s, s) - \\ - \int_0^s p(x)G_x(x, s)X'(x) dx &= p(s)X'(s)G(s, s) - \\ - p(s)G_x(s-0, s)X(s) + \int_0^s [p(x)G_x(x, s)]_x X(x) dx. \end{aligned}$$

Інтегруючи (2.221) за  $x$  у межах від 0 до  $s$  і беручи до уваги попередню рівність, маємо

$$\begin{aligned} p(s)X'(s)G(s, s) - p(s)G_x(s-0, s)X(s) + \\ + \lambda \int_0^s G(x, s)\rho(x)X(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Аналогічними міркуваннями на проміжку  $[s, l]$  дістанемо

$$\begin{aligned} -p(s)X'(s)G(s, s) + p(s)G_x(s+0, s)X(s) + \\ + \lambda \int_s^l G(x, s)\rho(x)X(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Додавши останні дві рівності й урахувавши третю умову означення функції Гріна та її симетричність, матимемо

$$X(x) + \lambda \int_0^l G(x, s)\rho(s)X(s) ds \equiv 0,$$

тобто  $X(x)$  є розв'язком рівняння (2.220).

Теорему доведено.

Введемо позначення:

$$Y(x) = \sqrt{\rho(x)}X(x), \quad K(x, s) = G(x, s)\sqrt{\rho(x)\rho(s)}.$$

Тоді, помноживши рівняння (2.220) на  $\sqrt{\rho(x)}$ , дістанемо

$$Y(x) + \lambda \int_0^l K(x, s)Y(s) ds = 0. \quad (2.222)$$



Отже, задача Штурма—Ліувілля (2.210), (2.209) еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду з дійсним симетричним ядром  $K(x, s)$ .

Для інтегрального рівняння (2.222) справедливі наступні теореми.

### ТЕОРЕМА 2.8 (ГІЛЬБЕРТА)

*Інтегральне рівняння (2.222) з дійсним симетричним ядром, яке не дорівнює тотожно нулю, має принаймні одне власне значення.*

### ТЕОРЕМА 2.9

*Усі власні значення рівняння (2.222) із симетричним ядром є дійсними числами.*

### ТЕОРЕМА 2.10

*Усі власні функції інтегрального рівняння з дійсним симетричним ядром є дійсними.*

Отже, на підставі еквівалентності інтегрального рівняння (2.222) і задачі Штурма—Ліувілля (2.210), (2.209) можемо стверджувати:

- 1) розв'язок задачі Штурма—Ліувілля (2.210), (2.209) існує;
- 2) власні значення є дійсними числами, а власні функції — дійсними функціями.

Наведемо достатні умови розвинення на проміжку  $[0, l]$  функцій  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  у рівномірно збіжні ряди за системою власних функцій задачі Штурма—Ліувілля (2.210), (2.209). Для цього доведемо наступну теорему.

### ТЕОРЕМА 2.11 (СТЕКЛОВА)

*Нехай  $\omega(x)$  — довільна з класу  $C^2[0, l]$  функція, яка задовольняє умови*

$$\omega(0) = \omega(l) = 0. \quad (2.223)$$

*Тоді  $\omega(x)$  на відрізку  $[0, l]$  розвивається в рівномірно й абсолютно збіжний ряд за системою власних функцій  $X_n(x)$  задачі Штурма—Ліувілля (2.210), (2.209).*

### Доведення

Нехай

$$[p(x)\omega'(x)]' - g(x)\omega(x) = f(x), \quad (2.224)$$

де  $f(x)$  — неперервна функція.

Згідно з доведеною теоремою 2.7 про еквівалентність задач (2.210), (2.209) та інтегральним рівнянням (2.220), із (2.224), (2.223) маємо

$$\omega(x) = \int_0^l G(x, s) f(s) ds. \quad (2.225)$$

Домножимо (2.225) на  $\sqrt{\rho(x)}$  і введемо позначення:

$$\sqrt{\rho(x)}\omega(x) = \Omega(x), \quad \frac{f(s)}{\sqrt{\rho(x)}} = h(s).$$

Тоді (2.225) запишеться у вигляді

$$\Omega(x) = \int_0^l K(x, s) h(s) ds, \quad (2.226)$$

де  $K(x, s)$  — симетричне ядро інтегрального рівняння (2.222).

Із теорії інтегральних рівнянь відома наступна теорема.

#### ТЕОРЕМА 2.12 (ГІЛЬБЕРТА—ШМІДТА)

*Всяка функція  $\Omega(x)$ , яку можна подати у вигляді (2.226), де  $K(x, s)$  — симетричне ядро рівняння (2.222), а  $h(x)$  —*

*довільна інтегровна з квадратом функція  $\left( \int_0^l h^2(x) dx < \infty \right)$ ,*

*розвивається на проміжку  $[0, l]$  в абсолютно й рівномірно збіжний ряд за системою власних функцій  $Y_n(x)$  інтегрального рівняння (2.222), тобто*

$$\Omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Y_n(x), \quad (2.227)$$

де

$$c_n = \int_0^l \Omega(x) Y_n(x) dx.$$

Ураховуючи введені позначення та рівномірну збіжність ряду (2.227), дістаємо

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x),$$

де

$$c_n = \int_0^l \rho(x) \omega(x) X_n(x) dx.$$

Теорему Стеклова доведено.

На підставі цієї теореми можемо стверджувати: якщо  $\varphi(x), \psi(x) \in C^2[0, l]$  і задовольняють умови узгодженості, то вони розвиваються в рівномірно збіжні ряди за системою власних функцій задачі (2.210), (2.209) на проміжку  $[0, l]$ .

Для завершення обґрунтування методу відокремлення змінних покажемо, що ряд (2.215) збігається рівномірно при  $t \geq 0, x \in [0, l]$  і що його можна почленно диференціювати двічі за  $x$  та двічі за  $t$ .

У подальших міркуваннях вважатимемо, що коефіцієнти рівняння (2.203) неперервні разом із похідними до третього порядку включно в розглядуваній області.

Введемо позначення

$$L(\omega(x)) = [p(x)\omega'(x)]' - g(x)\omega(x).$$

### ТЕОРЕМА 2.13

*Якщо функція  $\varphi(x) \in C^3[0, l]$  і задовольняє умови*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad L(\varphi(x)) \Big|_{x=0}^{x=l} = 0, \quad (2.228)$$

*а*

$$\psi(x) \in C^2[0, l], \quad \psi(0) = \psi(l) = 0, \quad (2.229)$$

*то ряд (2.215) збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі за  $x$  і двічі за  $t$  при  $t > 0, x \in (0, l)$ .*

### Доведення

Для спрощення наступних викладок покладемо

$$a(t) = 1, \quad b(t) = 0, \quad c'(x) = d(x), \quad f(t) = 0, \quad \beta = \delta = 0, \quad \alpha = \gamma = 1.$$

Тоді

$$\rho(x) = 1, \quad p(x) = -c, \quad g(x) = e(x);$$

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{B_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

і ряд (2.215) запишеться у вигляді

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \int_0^l \varphi(\xi) X_m(\xi) d\xi \cos \sqrt{\lambda_m} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \int_0^l \psi(\xi) X_m(\xi) d\xi \sin \sqrt{\lambda_m} t \right] X_m(x). \quad (2.230)$$

Для доведення рівномірної збіжності ряду (2.230) і рядів, які дістають унаслідок почленного його диференціювання двічі за  $x$  і двічі за  $t$  на проміжку  $[0, l]$ , достатньо довести рівномірну збіжність таких рядів:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ |A_m| \lambda_m + \sqrt{\lambda_m} |B_m| \right] |X_m(x)|, \quad (2.231)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ |A_m| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} |B_m| \right] |X'_m(x)|, \quad (2.231a)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ |A_m| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} |B_m| \right] |X''_m(x)|. \quad (2.231b)$$

Оскільки внаслідок (2.210)

$$X''_m(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)} X'_m(x) + \frac{g(x) - \lambda_m}{p(x)} X_m(x), \quad (2.232)$$

то з рівномірної збіжності рядів (2.231), (2.231a) випливає рівномірна збіжність ряду (2.231b).

Введемо позначення:

$$Hf = \int_0^l (p(x)f'^2(x) + g(x)f^2(x)) dx;$$

$$H(f, v) = \int_0^l [p(x)f'(x)v'(x) + g(x)f(x)v(x)] dx.$$

**ЛЕМА 2.2**

*Нехай функція  $f(x) \in C[0, l]$  задовольняє умови  $f(0) = f(l) = 0$  і має на проміжку  $[0, l]$  кусково-неперервну похідну, інтегровну з квадратом. Тоді справедлива нерівність*

$$\sum_{m=1}^x \lambda_m c_m^2 \leq Hf, \quad (2.233)$$

де

$$c_m = \int_0^l f(x) X_m(x) dx.$$

**Доведення**

Оскільки  $p(x) > 0$ ,  $g(x) \geq 0$ , то  $Hf \geq 0$ . Інтегруючи частинами, маємо

$$\begin{aligned} H(f, X_m) &= \int_0^l [p(x)f'(x)X_m'(x) + g(x)f(x)X_m(x)] dx = \\ &= - \int_0^l f(x) \{ [p(x)X_m'(x)]' - g(x)X_m(x) \} dx = \\ &= \lambda_m \int_0^l f(x) X_m(x) dx = \lambda_m c_m, \end{aligned}$$

$$H(X_m, X_m) = HX_m = \lambda_m \int_0^l X_m^2(x) dx = \lambda_m.$$

Використовуючи ці рівності, дістаємо

$$\begin{aligned} 0 \leq H \left( f - \sum_{m=1}^N c_m X_m(x) \right) &= \int_0^l \left[ p(x) \left( f'(x) - \sum_{m=1}^N c_m X_m'(x) \right)^2 + \right. \\ &+ g(x) \left. \left( f(x) - \sum_{m=1}^N c_m X_m(x) \right)^2 \right] dx = Hf - 2H \left( f, \sum_{m=1}^N c_m X_m(x) \right) + \\ &+ H \left( \sum_{m=1}^N c_m X_m(x) \right) = Hf - 2 \sum_{m=1}^N c_m H(f, X_m) + \sum_{m=1}^N c_m^2 HX_m = \\ &= Hf - \sum_{m=1}^N c_m^2 \lambda_m. \end{aligned}$$

Остання нерівність виконується для довільних  $N$ , а отже, й при  $N = \infty$ . Лему доведено.

Функція  $H(\varphi(x))$  задовольняє умови леми. Отже,

$$HL(\varphi(x)) \geq \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \lambda_m.$$

Оскільки

$$c_m = \int_0^l L(\varphi(x)) X_m(x) dx = -\lambda_m \int_0^l \varphi(x) X_m(x) dx = -A_m \lambda_m,$$

то

$$HL(\varphi(x)) \geq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^3 A_m^2. \quad (2.234)$$

Маємо

$$\begin{aligned} A_m &= \int_0^l \varphi(\xi) X_m(\xi) d\xi = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^l \varphi(\xi) L(X_m(\xi)) d\xi = \\ &= -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^l \varphi(\xi) [p(\xi) X_m'(\xi)]' d\xi + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^l \varphi(\xi) g(\xi) X_m(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\lambda_m} \int_0^l \varphi'(\xi) p(\xi) X_m'(\xi) d\xi + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^l \varphi(\xi) g(\xi) X_m(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\lambda_m} \left[ -\int_0^l [p(\xi) \varphi'(\xi)]' X_m(\xi) d\xi + \int_0^l \varphi(\xi) g(\xi) X_m(\xi) d\xi \right] = \\ &= -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^l L(\varphi(\xi)) X_m(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$B_m = \int_0^l \psi(\xi) X_m(\xi) d\xi = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^l L(\psi(\xi)) X_m(\xi) d\xi.$$

Відома нерівність Бесселя: для довільної нескінченної ортонормо-

ваної послідовності  $\{X_m(x)\}$  і довільної інтегрованої з квадратом функції  $f(x)$  на  $[0, l]$  виконується нерівність

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_0^l f(x) X_m(x) dx \right\}^2 \leq \int_0^l f^2(x) dx.$$

Беручи до уваги попередні рівності та нерівність Бесселя, дістаємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^l X_m(x) L(\psi(x)) dx \right)^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 B_m^2 \leq \int_0^l [L(\psi(x))]^2 dx. \quad (2.235)$$

Рівність (2.323) еквівалентна рівності

$$X_m(x) + \lambda_m \int_0^l G(x, s) X_m(s) ds = 0,$$

звідки

$$\frac{1}{\lambda_m} X_m(x) = - \int_0^l G(x, s) X_m(s) ds. \quad (2.236)$$

Таким чином,  $\frac{1}{\lambda_m} X_m(x)$  за фіксованого  $x \in m$ -м коефіцієнтом Фур'є функції  $G(x, s)$ , яка задовольняє як функція  $s \in [0, l]$  умови доведеної леми. Тому

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_m^2(x)}{\lambda_m} \leq HG \leq M_1 \quad \text{при } x \in [0, l]. \quad (2.237)$$

Диференціюючи (2.236) і застосовуючи нерівність Бесселя, дістаємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_m'^2(x)}{\lambda_m^2} \leq \int_0^l G_x^2(x, s) ds \leq M_2 \quad \text{при } x \in [0, l]. \quad (2.238)$$

Покажемо тепер, що ряд (2.231) рівномірно збіжний на  $[0, l]$ . Справді, застосовавши нерівність Коші—Буняковського, маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{m+n} (\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k|) |X_k(x)| &= \sum_{k=m}^{m+n} \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \lambda_k^{3/2} |A_k| + \\ &+ \sum_{k=m}^{m+n} \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \lambda_k |B_k| \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k}} \left( \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^3 |A_k|^2} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^2 |B_k|^2} \leq M_1^{1/2} \left( \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^3 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^2 B_k^2} \right).$$

Унаслідок нерівностей (2.234), (2.235) ряди  $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^3 A_m^2$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 B_m^2$

збіжні, а тоді з останньої нерівності випливає рівномірну збіжність ряду (2.231).

Беручи до уваги (2.238), дістаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=m}^{m+n} \frac{|X'_k(x)|}{\lambda_k} [\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k|] \leq \\ & \leq \sqrt{M_2} \left( \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^2 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k B_k^2} \right). \end{aligned} \quad (2.239)$$

Але

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^l X_m(x) L(\varphi(x)) dx \right)^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 A_m^2 \leq \int_0^l [L(\varphi(x))]^2 dx, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m B_m^2 &\leq H \Psi, \end{aligned}$$

і, отже, ряди  $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 A_m^2$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m B_m^2$  збіжні. Тоді з (2.239) випливає

рівномірну збіжність при  $x \in [0, l]$  ряду (2.231a).

Теорему доведено.

Основні результати з обґрунтування методу відокремлення змінних належать видатному російському математикові В. А. Стеклову.

◇ **Зауваження 2.9.** Якщо крайові умови (2.205) або рівняння (2.203) неоднорідні, то для побудови розв'язків мішаних задач (2.203)—(2.205) міркуємо аналогічно випадку вимушених коливань струни.



- **Приклад 2.6.** В області  $B = \{(t, x) \mid t > 0, x \in (0, 2)\}$  знайдемо розв'язок рівняння

$$2(t+1)U_{tt}(t, x) + 3U_t(t, x) - U_{xx}(t, x) - 2U_x(t, x) - U(t, x) + 2x = 0, \quad (2.240)$$

який задовольняє умови

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0, 2], \quad (2.241)$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, 2) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.242)$$

Мішана задача (2.240)–(2.242) є задачею зі стаціонарними неоднорідностями. У зв'язку з цим шукаємо її розв'язок у вигляді

$$U(t, x) = w(x) + z(t, x), \quad (2.243)$$

де  $w(x) \in C^2[0, 1]$  і є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} w''(x) + 2w'(x) + w(x) = 2x, \\ w(0) = 0, \quad w(2) = 0, \end{cases} \quad (2.244)$$

а  $z(t, x) \in C^2(B)$  і є розв'язком мішаної задачі

$$\begin{cases} 2(t+1)z_{tt} + 3z_t - z_{xx} - 2z_x - z = 0, \\ z(0, x) = -w(x), \quad z_t(0, x) = 0, \quad x \in [0, 2], \\ z(t, 0) = 0, \quad z(t, 2) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (2.245)$$

Зінтегрувавши крайову задачу (2.244), дістанемо

$$w(x) = 2(x-2)(1 - e^{-x}). \quad (2.246)$$

Розв'язок задачі (2.245) будемо за допомогою методу Фур'є. Маємо

$$z(t, x) = T(t)X(x) \neq 0; \quad (2.247)$$

$$2(t+1)T''(t) + 3T'(t) + (\lambda - 1)T(t) = 0; \quad (2.248)$$

$$\begin{cases} X''(x) + 2X'(x) + \lambda X(x) = 0, \end{cases} \quad (2.249)$$

$$\begin{cases} X(0) = X(2) = 0. \end{cases} \quad (2.250)$$

Як показано вище, задача Штурма—Ліувілля (2.249)–(2.250) має розв'язки й усі власні значення  $\lambda > 0$ . Легко також перекоонатися, що  $\lambda \in (0, 1]$  не є власними значеннями. Отже, загальний розв'язок рівняння (2.249) має вигляд

$$X(x) = e^{-x}(c_1 \cos \sqrt{\lambda - 1}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda - 1}x).$$

На підставі крайових умов (2.250) дістаємо

$$c_1 = 0, \quad c_2 e^{-2} \sin 2\sqrt{\lambda - 1} \cdot 2 = 0 \Rightarrow \lambda_k = 1 + (k\pi/2)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Таким чином,

$$X(x) = c_2 e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x. \quad (2.251)$$

Підставивши знайдені власні значення  $\lambda_k$  у рівняння (2.248), маємо

$$2(t+1)T''(t) + 3T'(t) + (k\pi/2)^2 T(t) = 0. \quad (2.252)$$

Поряд із рівнянням (2.252) розглянемо рівняння

$$2(t+1)\theta''(t) + \theta'(t) + (k\pi/2)^2 \theta(t) = 0. \quad (2.253)$$

Здиференціюємо (2.253):

$$2(t+1)\theta'''(t) + 3\theta''(t) + (k\pi/2)^2 \theta'(t) = 0.$$

Поклавши  $\theta'(t) = T(t)$ , дістанемо рівняння (2.252). Інтегруємо рівняння (2.253). Для цього покладемо

$$\tau = \sqrt{2(t+1)}; \quad \theta(t) = \theta(\tau^2/2 - 1) = \Omega(\tau); \quad \theta'(t) = \Omega'(\tau)[2(t+1)]^{-0.5};$$

$$\theta''(t) = [2(t+1)]^{-1} \Omega''(\tau) - [2(t+1)]^{-3/2} \Omega'(\tau).$$

Підставивши знайдені похідні в (2.253), дістанемо

$$\Omega''(\tau) + (k\pi/2)^2 \Omega(\tau) = 0,$$

звідки

$$\Omega(\tau) = \bar{c}_3 \cos \frac{k\pi}{2} \tau + c_4 \sin \frac{k\pi}{2} \tau,$$

або

$$\theta(t) = \bar{c}_3 \cos \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} + c_4 \sin \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)},$$

тобто

$$T_k(t) = \frac{k\pi}{2\sqrt{2(t+1)}} \left[ c_3 \sin \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} + c_4 \cos \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} \right],$$

де  $-\bar{c}_3 = c_3$ .

Отже, згідно з (2.247) маємо

$$z_k(t, x) = \frac{k\pi}{2\sqrt{2(t+1)}} \left[ A_k \sin \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} + B_k \cos \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} \right] e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x.$$

Розглянемо ряд

$$\begin{aligned} z(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{2\sqrt{2(t+1)}} & \left[ A_k \sin \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} + \right. \\ & \left. + B_k \cos \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} \right] e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x \end{aligned} \quad (2.254)$$

і припустимо, що він збігається рівномірно в області  $\bar{B}$  і його можна почленно диференціювати двічі за  $x$  і за  $t$ . Тоді він також буде розв'яз-

ком однорідного рівняння в задачі (2.245) і задовольнятиме крайові однорідні умови за довільних  $A_k$  та  $B_k$ .

Унаслідок початкових умов задачі (2.245) дістаємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{2\sqrt{2}} \left( A_k \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + B_k \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x = 2(2-x)(1-e^{-x}), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{4\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} - \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) A_k - \right. \\ \left. - \left( \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) B_k \right] e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x = 0, \end{array} \right.$$

звідки

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} - \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) A_k - \left( \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) B_k = 0, \\ A_k \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + B_k \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{k\pi} \int_0^2 (2-x)(e^x-1) \sin \frac{k\pi}{2} x \, dx = \\ = -\frac{16(4+(-1)^k(k\pi)^2 e^2)}{k\pi(4+(k\pi)^2)^2}. \end{array} \right.$$

Розв'язавши останню систему відносно невідомих  $A_k$  та  $B_k$  і підставивши їх у (2.207), дістанемо

$$\begin{aligned} z(t, x) = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8[4+(-1)^k(k\pi e)^2]}{k\pi\sqrt{2(t+1)[4+(k\pi)^2]^2} \left[ \left( k\pi \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{2} \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{2(t+1)} + \left( k\pi \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) \times \right. \\ & \left. \times \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{2(t+1)} \right] e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x. \end{aligned}$$

На підставі (2.243) остаточно маємо

$$\begin{aligned} U(t, x) = & 2(x-2)(1-e^{-x}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8[4+(-1)^k(k\pi e)^2]}{k\pi\sqrt{2(t+1)[4+(k\pi)^2]^2} \times \\ & \times \left[ \left( k\pi \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{2(t+1)} + \left( k\pi \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{2} \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{2(t+1)} \right] e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x. \end{aligned}$$

**2.21****Вільні коливання прямокутної мембрани.  
Метод відокремлення змінних**

Дослідимо коливання однорідної прямокутної мембрани зі сторонами  $b$  і  $c$ , які відбуваються внаслідок початкового відхилення й початкової швидкості, якщо край мембрани нерухомо закріплений.

Як було показано в п. 2.15, для визначення відхилення мембрани від положення рівноваги, тобто функції  $u(t, x, y)$ , необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad t > 0, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c, \quad (2.255)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad u_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c \quad (2.256)$$

і крайові

$$u(t, 0, y) = u(t, b, y) = 0, \quad (2.257)$$

$$u(t, x, 0) = u(t, x, c) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.258)$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (2.255)—(2.258) розв'яжемо спочатку допоміжну задачу: знайти нетривіальні розв'язки рівняння (2.255), які задовольняли б крайові умови (2.257), (2.258).

Шукатимемо ці розв'язки у вигляді

$$u(t, x, y) = T(t)V(x, y) \neq 0. \quad (2.259)$$

Підставивши (2.259) у рівняння (2.255) та крайові умови (2.257), (2.258) і відокремивши змінні, дістанемо

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0; \quad (2.260)$$

$$\begin{cases} V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, & \lambda = \text{const}, \\ V(0, y) = V(b, y) = 0, \\ V(x, 0) = V(x, c) = 0. \end{cases} \quad (2.261)$$

Перше з рівнянь системи (2.261) називається *рівнянням Гельмгольца*.

Задачу на власні значення (2.261) для диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку також розв'язуємо методом відокремлення змінних. Візьмемо

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0. \quad (2.262)$$

Відокремлюючи змінні в задачі (2.261), дістаємо

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, \\ X(0) = X(b) = 0; \end{cases} \quad (2.263)$$

$$\begin{cases} Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(c) = 0. \end{cases} \quad (2.264)$$

Повторюючи міркування, викладені в дослідженні задачі Штурма—Ліувілля (2.168), (2.169), матимемо

$$\mu = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \quad X_n(x) = C_1 \sin \frac{\pi n}{b} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lambda - \mu = \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2, \quad Y_m(y) = C_2 \sin \frac{\pi m}{c} y, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Отже, згідно з (2.262) власним значенням задачі (2.261)

$$\lambda_{n, m} = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2$$

відповідатимуть власні функції

$$V_{n, m}(x, y) = A_{n, m} \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{c} y, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $A_{n, m} = C_1 C_2$  — деякий сталий множник. Виберемо його таким чином, щоб норма власної функції  $V_{n, m}(x, y)$  із вагою 1 дорівнювала одиниці, тобто

$$\int_0^b \int_0^c V_{n, m}^2 dy dx = A_{n, m}^2 \int_0^b \int_0^c \sin^2 \frac{\pi n}{b} x \sin^2 \frac{\pi m}{c} y dy dx = 1.$$

З останньої рівності знаходимо  $A_{n, m} = 2(bc)^{-1/2}$ .

Ортогональність функцій  $\{V_{n, m}(x, y)\}$  у розглядуваному прямокутнику очевидна й не вимагає доведення.

Отже, система функцій

$$V_{n,m}(x, y) = 2(bc)^{-1/2} \sin \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{c} y \quad (2.265)$$

є ортонормованою системою власних функцій прямокутної мембрани.

Зазначимо, що серед знайдених власних значень  $\lambda_{n,m}$  можуть бути й кратні, тобто такі, яким відповідає не одна, а кілька лінійно незалежних власних функцій. Кількість лінійно незалежних власних функцій, які відповідають власному значенню  $\lambda_{n,m}$ , залежить від кількості цілочислових розв'язків  $n$  і  $m$  рівняння

$$\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 = \lambda_{n,m}.$$

Наприклад, якщо  $b = c = 1$ , то власному значенню  $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 5\pi^2$  відповідатимуть дві лінійно незалежні функції

$$V_{1,2}(x, y) = 2 \sin \pi x \sin 2\pi y, \quad V_{2,1}(x, y) = 2 \sin 2\pi x \sin \pi y,$$

тобто  $\lambda_{1,2}$  є двократним власним значенням.

□ Деякі додаткові поняття й означення. Нехай  $f(x, y)$  — довільна задана в прямокутнику  $[0, b; 0, c]$  дійсна інтегровна з квадратом функція

$$\left( R(f) = \int_0^b \int_0^c f^2(x, y) dy dx < +\infty \right).$$

Числа  $C_{n,m} = \int_0^b \int_0^c f(x, y) V_{n,m}(x, y) dy dx$ ,  $n, m = 1, 2, 3, \dots$  називаються коефіцієнтами Фур'є функції  $f(x, y)$  відносно ортонормованої системи (2.265).

Розглянемо вираз  $\sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l \alpha_{n,m} V_{n,m}(x, y)$ , де  $\alpha_{n,m}$  — деякі сталі.

Число

$$N = \int_0^b \int_0^c \left[ f(x, y) - \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l \alpha_{n,m} V_{n,m}(x, y) \right]^2 dy dx$$

називається середньою квадратичною похибкою. Маємо

$$N = R(f) + \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l (\alpha_{n,m} - C_{n,m})^2 - \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l C_{n,m}^2 \geq 0.$$

Таким чином, середня квадратична похибка за фіксованих  $r$  і  $l$  буде мінімальною при  $\alpha_{n,m} = C_{n,m}$ ,  $n = \overline{1, r}$ ,  $m = \overline{1, l}$ .

Якщо маємо вираз  $\sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l C_{n,m} V_{n,m}(x, y)$ , то з нерівності

$$\iint_{00}^{bc} \left[ f(x, y) - \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l C_{n,m} V_{n,m}(x, y) \right]^2 dy dx \geq 0$$

випливає, що  $\sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l C_{n,m}^2 \leq R(f)$  для довільних  $r$  і  $l$ .

Отже, ряд, складений із квадратів коефіцієнтів Фур'є функції  $f(x, y)$ , збігається:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m}^2 \leq R(f).$$

Добуте співвідношення називається *нерівністю Бесселя*.

➤ **Означення 2.10.** *Ортонормовану систему функцій  $V_{n,m}(x, y)$  у прямокутнику  $[0, b; 0, c]$  називають повною, якщо для всякої неперервної і інтегрованої з квадратом у цьому прямокутникові функції  $f(x, y)$  справедлива рівність Парсеваля—Стеклова*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m}^2 = R(f).$$

Легко довести, що система функцій (2.265) є повною.

Виконання умови повноти не означає, що функцію  $f(x, y)$  можна розвинути в рівномірно збіжний у прямокутнику  $[0, b; 0, c]$  ряд Фур'є за системою функцій  $V_{n,m}(x, y)$ .

Якщо  $f(x, y) \in C^2[0, b; 0, c]$ , то таке розвинення завжди можливе.

Покажемо, що система (2.265) містить усі власні функції задачі (2.261). Для цього доведемо таке твердження.

### ТВЕРДЖЕННЯ 2.1

*Власні функції  $V_k(x, y)$  і  $V_s(x, y)$ , які відповідають різним власним значенням  $\lambda_k, \lambda_s$  задачі (2.261), є ортогональними.*

## Доведення

Маємо

$$V_{k_{xx}} + V_{k_{yy}} + \lambda_k V_k = 0,$$

$$V_{s_{xx}} + V_{s_{yy}} + \lambda_s V_s = 0.$$

Помножимо першу з рівностей на  $V_s(x, y)$ , а другу — на  $V_k(x, y)$  і віднімемо їх:

$$(V_{k_{xx}} V_s - V_{s_{xx}} V_k) + (V_{k_{yy}} V_s - V_{s_{yy}} V_k) = (\lambda_s - \lambda_k) V_s V_k.$$

Зінтегруємо останню рівність за  $x$  від 0 до  $b$  і за  $y$  від 0 до  $c$ . Дістанемо

$$\begin{aligned} \int_0^c \int_0^b (V_{k_{xx}} V_s - V_{s_{xx}} V_k) dx dy + \int_0^c \int_0^b (V_{k_{yy}} V_s - V_{s_{yy}} V_k) dy dx = \\ = (\lambda_s - \lambda_k) \int_0^c \int_0^b V_s V_k dy dx. \end{aligned}$$

Взявши у лівій частині інтеграли частинами й урахувавши крайові умови, матимемо

$$(\lambda_s - \lambda_k) \int_0^c \int_0^b V_s V_k dy dx = 0.$$

Оскільки  $\lambda_s \neq \lambda_k$ , то функції  $V_s(x, y)$  та  $V_k(x, y)$  є ортогональними в розглядуваному прямокутнику.

Теорему доведено.

Припустимо тепер, що задача (2.261) має власну функцію  $V_s(x, y)$ , яка не належить системі (2.265). Згідно з доведеним твердженням вона є ортогональною до всіх функцій (2.265). Із теорії кратних рядів Фур'є відомо: якщо функція  $V_s(x, y) \in C^2(0 < x < b, 0 < y < c)$  і задовольняє крайові умови задачі (2.261), то її можна розвинути в абсолютно й рівномірно збіжний ряд за системою власних функцій (2.265). Унаслідок ортогональності  $V_s(x, y)$  і  $V_{n,m}(x, y)$  у розвиненні функції  $V_s(x, y)$  за системою (2.265) залишиться тільки скінченне число членів, які відповідають власному значенню  $\lambda_{n,m} = \lambda_s$ . Тому  $V_s(x, y)$  є лінійною комбінацією лише тих функцій (2.265), які відповідають власному значенню  $\lambda_{n,m} = \lambda_s$ . Отже, всі власні функції прямокутної мембрани даються формулою (2.265).



Підставивши знайдені власні значення  $\lambda_{n,m}$  у рівняння (2.260) і зінтегрувавши його, дістанемо

$$T_{n,m}(t) = B_{n,m} \cos a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + C_{n,m} \sin a\sqrt{\lambda_{n,m}}t,$$

де  $B_{n,m}, C_{n,m}$  — довільні сталі. Підставляючи (2.265) і  $T_{n,m}(t)$  у рівняння (2.259), маємо

$$\begin{aligned} u_{n,m}(t, x, y) &= \\ &= (B_{n,m} \cos a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + C_{n,m} \sin a\sqrt{\lambda_{n,m}}t)V_{n,m}(x, y). \end{aligned} \quad (2.266)$$

Ми дістали нескінченну множину частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння (2.255), які задовольняють крайові умови (2.257), (2.258).

Згідно з доведеною в п. 2.17 лемою 2.1 ряд

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(t, x, y) \quad (2.267)$$

також буде розв'язком рівняння (2.255) і задовольнятиме крайові умови (2.257), (2.258), якщо він збігається рівномірно і його можна по-членно диференціювати двічі за  $t, x, y$  у розглядуваній області

$$D = \{(t, x, y) \mid t > 0, 0 < x < b, 0 < y < c\}.$$

Визначаємо коефіцієнти  $B_{n,m}$  і  $C_{n,m}$  таким чином, щоб ряд (2.267) задовольняв і початкові умови (2.256). Для цього підставляємо (2.267) у (2.256):

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} V_{n,m}(x, y), \\ \psi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda_{n,m}} C_{n,m} V_{n,m}(x, y). \end{aligned} \quad (2.268)$$

Припустимо, що ряди (2.268) збігаються рівномірно в прямокутнику  $0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq c$ . Тоді, помноживши їх на функцію  $V_{k,s}(t, y)$  та зінтегрувавши добутий результат по прямокутнику, матимемо

$$B_{n,m} = \int_0^b \int_0^c \varphi(x, y) V_{n,m}(x, y) dy dx,$$

$$C_{n,m} = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_0^b \int_0^c \psi(x, y) V_{n,m}(x, y) dy dx.$$

Підставивши знайдені значення  $B_{n,m}$  і  $C_{n,m}$  у ряд (2.267), дістанемо розв'язок мішаної задачі (2.255)—(2.258).

### □ Обґрунтування методу відокремлення змінних.

#### ТЕОРЕМА 2.14

Якщо функції  $\varphi(x, y)$  та  $\psi(x, y)$  неперервні разом із похідними до четвертого порядку включно в прямокутнику  $[0, b; 0, c]$ , то ряд (2.267) збігається рівномірно в області  $D$  і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$ ,  $x$  і  $y$ .

#### Доведення

Унаслідок крайових умов

$$\varphi(0, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(b, y) = \varphi(x, c) = 0,$$

$$\psi(0, y) = \psi(x, 0) = \psi(b, y) = \psi(x, c) = 0.$$

Беручи це до уваги та інтегруючи частинами, дістаємо

$$\begin{aligned} B_{n,m} &= \left( \frac{bc}{nm\pi^2} \right)^2 \int_0^b \int_0^c \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} V_{n,m}(x, y) dx dy = \left( \frac{bc}{nm\pi^2} \right)^2 \alpha_{n,m}, \\ C_{n,m} &= \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \left( \frac{bc}{nm\pi^2} \right)^2 \int_0^b \int_0^c \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} V_{n,m}(x, y) dy dx = \quad (2.269) \\ &= \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \left( \frac{bc}{nm\pi^2} \right)^2 \beta_{n,m}. \end{aligned}$$

Очевидно, існує така стала  $K$ , що

$$\sup \left\{ |\alpha_{n,m}|, \frac{|\beta_{n,m}|}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \right\} \leq K.$$

Але тоді збіжний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4Kb^{3/2}c^{3/2}}{n^2 m^2 \pi^4}$  є мажорантним для ряду (2.267), а отже, останній збігається абсолютно й рівномірно в області  $\bar{D}$ .

Здиференціюємо почленно ряд (2.267) двічі за  $x$ ,  $y$  і  $t$ . Маємо

$$\begin{aligned}
 u_{xx}(t, x, y) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y), \\
 u_{yy}(t, x, y) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2 T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y), \\
 u_{tt}(t, x, y) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a^2 \lambda_{n,m} T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y).
 \end{aligned} \tag{2.270}$$

Унаслідок (2.269) мажорантними для рядів (2.270) будуть числові ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4Kc^{3/2}}{m^2 \pi^2 b^{1/2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4Kb^{3/2}}{n^2 \pi^2 c^{1/2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4Ka^2}{(bc)^{1/2} \pi^2} \left(\frac{c^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2}\right),$$

які є збіжними. Але тоді ряди (2.270) абсолютно й рівномірно збіжні в області  $D$ .

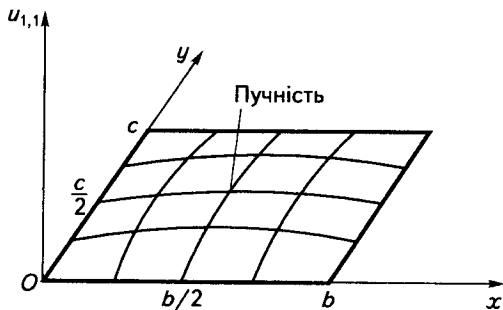
Теорему доведено.

Зазначимо, що твердження теореми є справедливим і тоді, коли

$$\varphi(x, y) \in C^4[0, b; 0, c], \quad \text{а} \quad \psi(x, y) \in C^3[0, b; 0, c].$$

□ **Фізична інтерпретація розв'язку (2.267).** Введемо позначення:

$$B_{n,m} = M_{n,m} \sin \varphi_{n,m}; \quad C_{n,m} = M_{n,m} \cos \varphi_{n,m}.$$



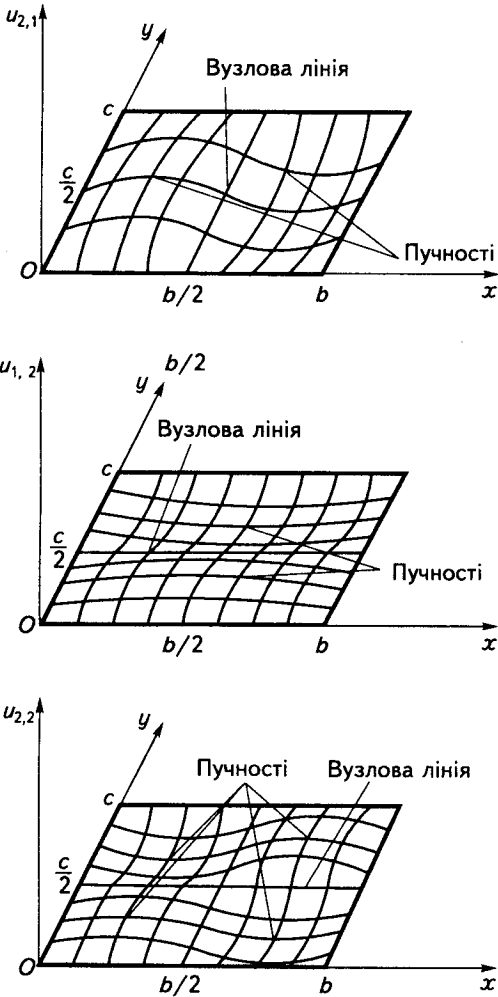


Рис. 2.35

Тоді (2.266) запишеться у вигляді

$$u_{n,m}(t, x, y) = V_{n,m}(x, y) M_{n,m} \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + \varphi_{n,m}). \quad (2.271)$$

Кожен член ряду (2.267) являє собою стоячу хвилю для прямокутної мембрани. З (2.271) бачимо, що кожна точка  $(x, y)$  мембрани

здійснює прості гармонічні коливання з частотою  $a\sqrt{\lambda_{n,m}}$ , періодом  $2bc(a\sqrt{n^2c^2 + m^2b^2})^{-1}$  і амплітудою  $2(bc)^{-1/2} M_{n,m} \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{c} y$ .

Усі точки мембрани проходять положення рівноваги в один і той самий момент часу  $a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + \varphi_{n,m} = k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , а при  $a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + \varphi_{n,m} = \frac{2k+1}{2}\pi$  вони одночасно досягають максимального відхилення в той чи інший бік. Найбільшу амплітуду коливань матимуть точки, для яких  $\sin \frac{\pi n}{b} x = \pm 1$  і  $\sin \frac{\pi m}{c} y = \pm 1$ , тобто з координатами  $\left(\frac{2k-1}{2n}b, \frac{2s-1}{2m}c\right)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Ці точки мембрани називаються *пучностями*.

Лінії, точки яких не коливаються, називаються *вузловими лініями*. Очевидно, що крім контура мембрани вузловими лініями будуть прямі

$$x = \frac{kb}{n}, \quad y = \frac{sc}{m}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad s = \overline{1, m-1}.$$

Ці лінії розділять мембрану на  $mn$  прямокутників, причому в двох сусідніх відхилення будуть напрямлені в різні боки. Центр кожного такого прямокутника буде пучністю.

Розглянемо стоячі хвилі  $u_{1,1}(t, x, y)$ ,  $u_{1,2}(t, x, y)$ ,  $u_{2,1}(t, x, y)$ ,  $u_{2,2}(t, x, y)$  і зобразимо мембрану в той момент часу, коли всі її точки досягають найбільшого відхилення (рис. 2.35). Наступні стоячі хвилі мають складніший вигляд.

У випадку кратних власних значень вузлові лінії можуть мати вигляд кривих досить складної форми. Ці криві іноді називають *фігурами Ліссажу*.

Як приклад розглянемо мембрану зі сторонами  $b = c = \pi$ . Тоді при  $n = 1, m = 2$  або  $n = 2, m = 1$  маємо дві хвилі (обертони):

$$u_{1,2}(t, x, y) = \frac{2}{\pi} M_{1,2} \sin(a\sqrt{5}t + \varphi_{1,2}) \sin x \sin 2y;$$

$$u_{2,1}(t, x, y) = \frac{2}{\pi} M_{2,1} \sin(a\sqrt{5}t + \varphi_{2,1}) \sin 2x \sin y$$

з однією й тією самою частотою  $a\sqrt{5}$ . Загальне коливання квадратної мембрани з частотою  $a\sqrt{5}$  представляється сумою стоячих хвиль

$$\frac{4}{\pi} [M_{1,2} \sin(a\sqrt{5}t + \varphi_{1,2}) \cos y + M_{2,1} \sin(a\sqrt{5}t + \varphi_{2,1}) \cos x] \times \\ \times \sin x \sin y = \frac{4}{\pi} [(C_{1,2} \cos y + C_{2,1} \cos x) \sin a\sqrt{5}t + \\ + (B_{1,2} \cos y + B_{2,1} \cos x) \cos a\sqrt{5}t] \sin x \sin y.$$

Вузлові лінії такого коливання, відмінні від сторін мембрани, наберуть вигляду

$$d_1 \cos y + d_2 \cos x = 0, \quad d_1, d_2 = \text{const.}$$

Якщо  $d_1 = 0$ , то вузловою лінією буде пряма  $x = \pi/2$  (рис. 2.36, а), а при  $d_2 = 0$  — відрізок прямої  $y = \pi/2$  (рис. 2.36, б). Якщо  $d_1 = -d_2$ , то  $y = x$  і вузловою лінією буде діагональ квадрата, а при  $d_1 = d_2$  маємо  $y = \pi - x$ , і дістаємо другу діагональ (рис. 2.36, в).

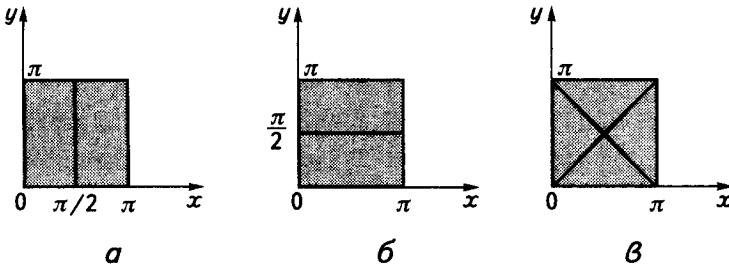


Рис. 2.36

За довільних  $d_1$  і  $d_2$  вузлова лінія має складну форму, але вона завжди проходить через центр квадрата.

Таким чином, процес коливання мембрани відрізняється від процесу коливання струни, тому що для останньої кожній частоті власних коливань відповідає тільки одна форма струни, а у випадку мембрани одній і тій самій частоті може відповідати кілька форм мембрани з різними положеннями вузлових ліній.

- ◇ **Зауваження 2.10.** Метод Фур'є може використовуватися й для побудови розв'язку мішаної задачі для рівняння коливання однорідної мембрани, обмеженої довільною кусково-гладкою жордановою кривою, а також у випадку мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу вигляду

$$u_{tt}(t, M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [a_{ij}(M) u_{x_j}(t, M)] - a(M) u(t, M) + b(t) u_t(t, M), \quad n \geq 3,$$

де

$$M = M(x_1, \dots, x_n); \quad a(M) \geq 0; \quad a_{ij} = a_{ji};$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \alpha > 0$$

у розглядуваній області (остання умова вказує на те, що задане диференціальне рівняння належить до гіперболічного типу).

⇒ **Вправа.** Дослідити вимушені коливання прямокутної мембрани.

## 2.22

### Єдиність розв'язку мішаних задач. Інтеграл енергії

Розглянемо мішану задачу: в просторі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ ,  $D = \{(t, x, y, z) \mid t > 0, (x, y, z) \in D_1\}$  знайти розв'язок хвильового рівняння

$$u_{tt}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z), \quad (2.272)$$

який задовольняє початкові умови

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), \\ (x, y, z) &\in \bar{D}_1 = D_1 \cup S, \end{aligned} \quad (2.273)$$

де  $S$  — поверхня, яка обмежує область  $D_1$ , та крайові умови

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{(x, y, z) \in S} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.274)$$

$n$  — зовнішня нормаль до поверхні  $S$ .

Надалі вважаємо, що  $\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z) \in C(S)$ ,  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$ ,  $S$  — кусково-гладка поверхня, а  $f(t, x, y, z) \in C(\bar{D})$ ,  $\varphi(x, y, z) \in C^1(\bar{D}_1)$ ,  $\psi(x, y, z) \in C(\bar{D}_1)$ , і виконується умова узгодженості

$$\left( \alpha \varphi(x, y, z) + \beta \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial n} \right) \Big|_{(x, y, z) \in S} = 0.$$

Для дослідження мішаних задач (2.272)—(2.274) ефективний так званий *метод інтегралів енергії*.

Нехай  $u(t, x, y, z)$  — розв'язок задачі (2.272)—(2.274). Тоді справедливе співвідношення

$$E^2(t) = E^2(0) + \frac{1}{a^2} \int_0^t \iiint_{D_1} f(\tau, x, y, z) \times \\ \times \frac{\partial u(\tau, x, y, z)}{\partial \tau} dx dy dz d\tau, \quad \tau \geq 0, \quad (2.275)$$

де

$$E^2(t) = \frac{1}{2} \iiint_{D_1} \left[ \frac{1}{a^2} u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \right] dx dy dz + \frac{1}{2} \iint_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} u^2 ds; \quad (2.276)$$

$$E^2(0) = \frac{1}{2} \iiint_{D_1} \left[ \frac{1}{a^2} \psi^2 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \right] dx dy dz + \frac{1}{2} \iint_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} \varphi^2 ds;$$

$S_0$  — та частина поверхні  $S$ , де  $\alpha > 0$  і  $\beta > 0$  одночасно.

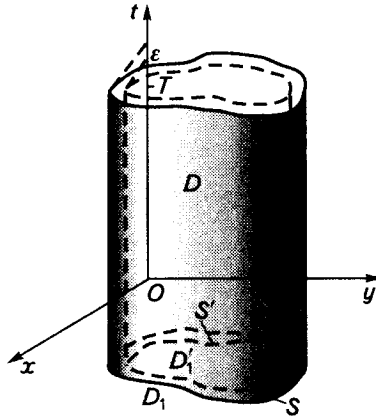


Рис. 2.37

Справді, нехай  $\epsilon > 0$  — довільне число, а  $D_1' \subset D_1$ , де  $D_1'$  — область, обмежена кусково-гладкою поверхнею  $S'$  (рис. 2.37). Помноживши рівняння (2.272) на  $u$ , і інтегруючи по області  $D' = D_1' \times (\epsilon, T)$ , дістанемо



$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{a^2} \int_{\epsilon}^T \iiint_{D_1'} f(t, x, y, z) \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz dt = \\
 = & \int_{\epsilon}^T \iiint_{D_1'} \frac{\partial u}{\partial t} \left[ \frac{1}{a^2} u_{tt} - \Delta u \right] dx dy dz dt = \iiint_{D_1'} \frac{1}{a^2} \int_{\epsilon}^T u_t u_{tt} dt dx dy dz - \\
 & - \int_{\epsilon}^T \iiint_{D_1'} u_t \Delta u dx dy dz dt = \frac{1}{2} \iiint_{D_1'} \frac{1}{a^2} (u_t)^2 \Big|_{\epsilon}^T dx dy dz - \\
 & - \int_{\epsilon}^T \iiint_{D_1'} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u_t u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (u_t u_z) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right\} dx dy dz dt.
 \end{aligned}$$

Користуючися формулою Гаусса—Остроградського, з попередньої рівності маємо

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{a^2} \int_{\epsilon}^T \iiint_{D_1'} f(t, x, y, z) u_t dx dy dz dt = \\
 = & \frac{1}{2} \iiint_{D_1'} \left[ \frac{1}{a^2} u_t^2 + (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right]_{\epsilon}^T dx dy dz - \int_{\epsilon}^T \iint_{S'} u_t \frac{\partial u}{\partial n} ds' dt.
 \end{aligned}$$

Переходячи в останній рівності до границі, коли  $\epsilon \rightarrow 0$  і  $D_1' \rightarrow D_1$ , та користуючися тим, що  $u \in C'(\bar{D})$  і  $f(t, x, y, z) \in C(\bar{D})$ , дістаємо рівність

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{a^2} \int_0^T \iiint_{D_1} f(t, x, y, z) u_t dx dy dz dt = \\
 = & \frac{1}{2} \iiint_{D_1} \left[ \frac{1}{a^2} u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \right]_0^T dx dy dz - \int_0^T \iint_S u_t \frac{\partial u}{\partial n} ds dt. \quad (2.277)
 \end{aligned}$$

Із крайової умови (2.274) випливає співвідношення на поверхні  $S$ :

$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} u$ , якщо  $\beta > 0$ ;  $u = 0$  при  $\beta = 0$ . У зв'язку з цим

$$- \int_0^T \iint_S u_t \frac{\partial u}{\partial n} ds dt = \int_0^T \iint_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} u_t u ds dt = \frac{1}{2} \iint_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} u^2 \Big|_0^T ds.$$

Підставивши добутий результат у (2.277) та замінивши  $T$  на  $t$ , дістанемо формулу (2.275).

Функція  $E^2(t)$  має простий фізичний зміст. Обмежуючися для спрощення міркувань одновимірним випадком, знайдемо вираз для енергії поперечних коливань струни  $E^2 = K + V$ , де  $K$ ,  $V$  — відповідно кінетична та потенціальна енергії. Кінетична енергія елемента струни  $dx$ , який рухається зі швидкістю  $V = u_t$ , становить  $0,5mv^2 = 0,5\rho(u_t)^2 dx$ , тобто кінетична енергія всієї струни

$$K = 0,5 \int_0^l \rho(x) [u_t(x, t)]^2 dx,$$

де  $\rho(x)$  — лінійна густина струни.

Потенціальна енергія поперечних коливань струни, яка в момент часу  $t = t_0$  має форму  $u(x, t) = u_0(x)$ , дорівнює роботі, яку потрібно здійснити, щоб струна перейшла з положення рівноваги в положення  $u_0(x)$ .

Нехай  $u(x, 0) = 0$ . Елемент  $dx$  під дією рівнодійної сили натягу  $Tu_x(x + dx, t) - Tu_x(x, t) = Tu_{xx} dx$  за час  $dt$  проходить шлях  $u_t(x, t) dt$ .

Робота, яка здійснюється всією струною за час  $dt$ ,

$$\begin{aligned} \left( \int_0^l Tu_{xx} u_t dx \right) dt &= dt \left( Tu_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l Tu_x u_{xt} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} dt \left( -\frac{d}{dt} \int_0^l T(u_x)^2 dx + T_0 u_x u_t \Big|_0^l \right). \end{aligned}$$

Інтегруючи добутий результат за  $t$  від 0 до  $t_0$ , маємо

$$-0,5 \int_0^l T(u_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} Tu_x u_t \Big|_0^l dt = -0,5 \int_0^l T[u_x(x, t_0)]^2 dx + \int_0^{t_0} Tu_x u_t \Big|_0^l dt.$$

Інтеграл  $\int_0^{t_0} Tu_x u_t \Big|_{x=0} dt$  представляє роботу, яку потрібно витратити

на зміщення кінця  $x = 0$ . Аналогічний зміст має доданок  $\int_0^{t_0} Tu_x u_t \Big|_{x=l} dt$ .

Якщо кінці струни нерухомо закріплені, то робота на кінцях струни

дорівнюватиме нулю  $\left( u \Big|_{x=0} = u_t \Big|_{x=0} = 0 \right)$ . Отже, в цьому разі робота, яка здійснюється струною, дорівнюватиме

$$-0,5 \int_0^l T [u'_0(x)]^2 dx$$

— потенціальній енергії струни в момент  $t = t_0$  з протилежним знаком. Отже, повна енергія струни

$$E^2(t) = 0,5 \int_0^l [Tu_x^2 + \rho u_t^2] dx = 0,5T \int_0^l \left[ u_x^2 + \frac{1}{a^2} u_t^2 \right] dx.$$

Таким чином, функція  $E^2(t)$ , визначена формулою (2.276), є повною енергією системи, яка перебуває в процесі коливання.

► **Означення 2.11.** Функцію  $E^2(t)$ , визначену згідно з формулою (2.276), називають **інтегралом енергії**.

Якщо в рівнянні (2.272)  $f(t, x, y, z) = 0$ , то рівність (2.275) набирає вигляду

$$E^2(t) = E^2(0), \quad t \geq 0,$$

тобто повна енергія системи, яка перебуває в коливальному процесі, за відсутності зовнішніх збурень не змінюється з часом (закон збереження енергії).

Використаємо рівність (2.275) для доведення єдиності розв'язку мішаних задач для хвильових рівнянь.

### ТЕОРЕМА 2.15

*Якщо в просторі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$  існує розв'язок мішаної задачі (2.272)—(2.274), то цей розв'язок єдиний.*

### Доведення

Припустимо, що в розглядуваній області  $D$  існують два розв'язки мішаної задачі (2.272)—(2.274):  $u_1(t, x, y, z)$  і  $u_2(t, x, y, z)$ . Тоді функція

$$u(t, x, y, z) = u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z) \quad (2.278)$$

буде розв'язком мішаної задачі

$$u_{tt}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z), \quad (t, x, y, z) \in D, \quad (2.279)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \bar{D}, \quad (2.280)$$

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{(x, y, z) \in S} = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.281)$$

Покажемо, що розв'язок задачі (2.279)—(2.281) тотожно дорівнює нулю. Справді, для розв'язків мішаної задачі (2.279)—(2.281) рівність (2.275) запишеться у вигляді

$$E^2(t) = 0. \quad (2.282)$$

Унаслідок невід'ємності підінтегральних виразів у (2.276) із (2.282) випливає

$$u_t = u_x = u_y = u_z = 0 \Rightarrow u(t, x, y, z) = \text{const}$$

для всіх  $(t, x, y, z) \in \bar{D}$ . На підставі (2.280)  $u|_{t=0} = 0$ , отже,  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  в області  $\bar{D}$ .

Теорему доведено.

◇ **Зауваження 2.11.** Теореми про єдиність розв'язку мішаних задач для хвильових рівнянь у випадках однієї та двох просторових незалежних змінних доводяться аналогічно, тільки потрібно використати інтеграли енергії для струни та мембрани відповідно.

◆ **Вправа.** Довести теореми про єдиність розв'язку мішаних задач для рівнянь коливання мембрани та струни.

## 2.23

### Неперервна залежність розв'язку мішаних задач від вихідних даних

#### ТЕОРЕМА 2.16

Нехай функції  $u_1(t, x, y, z)$  і  $u_2(t, x, y, z)$ , що належать класу

$$C^2(D) \cap C^1(\bar{D}), \quad \bar{D} = \{(t, x, y, z) | t \in [0, T], (x, y, z) \in \bar{D}_1\},$$

$T > 0$  — довільне, є розв'язками рівнянь

$$u_{1_{tt}}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u_1(t, x, y, z) + f_1(t, x, y, z), \quad (t, x, y, z) \in D,$$

$$u_{2_{tt}}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u_2(t, x, y, z) +$$

$$+ f_2(t, x, y, z), \quad (t, x, y, z) \in D \quad (2.283)$$

відповідно, які задовольняють одну й ту саму крайову умову

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{(x, y, z) \in S} = X(t, x, y, z), \quad t \geq 0, \quad (2.284)$$

а в початковий момент часу

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2) \Big|_{t=0} &= \varphi(x, y, z), \\ (u_{1,t} - u_{2,t}) \Big|_{t=0} &= \psi(x, y, z), \end{aligned} \quad (x, y, z) \in \bar{D}_1. \quad (2.285)$$

Тоді для всякого як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$  існує таке число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , що як тільки

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y, z)| < \delta, \quad |\varphi_x(x, y, z)| < \delta, \\ |\varphi_y(x, y, z)| < \delta, \quad |\varphi_z(x, y, z)| < \delta, \\ |\psi(x, y, z)| < \delta, \quad |f_1(t, x, y, z) - f_2(t, x, y, z)| < \delta, \\ (x, y, z) \in \bar{D}_1, \quad (t, x, y, z) \in \bar{D}, \end{aligned} \quad (2.286)$$

то  $|u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \varepsilon$  для всіх  $(t, x, y, z) \in \bar{D}$ .

#### Доведення

Функція  $u(t, x, y, z) = u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)$  буде розв'язком мішаної задачі

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x, y, z) &= a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z), \\ f(t, x, y, z) &= f_1(t, x, y, z) - f_2(t, x, y, z), \end{aligned} \quad (2.287)$$

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t \Big|_{t=0} = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{D}_1, \quad (2.288)$$

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{(x, y, z) \in S} = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.289)$$

Для розв'язку задачі (2.287)–(2.289) справедливе співвідношення (2.275). Здиференціювавши рівність (2.275) за  $t$ , дістанемо

$$2E(t)E'(t) = \frac{1}{a^2} \iiint_{D_1} f(t, x, y, z) u_t \, dx \, dy \, dz, \quad t \geq 0. \quad (2.290)$$

Застосувавши до правої частини (2.290) нерівність Коші—Буняковського, матимемо

$$2E(t)E'(t) \leq \frac{1}{a^2} \left( \iiint_{D_1} |f(t, x, y, z)|^2 dx dy dz \right)^{1/2} \times \\ \times \left( \iiint_{D_1} u_t^2 dx dy dz \right)^{1/2} = \frac{1}{a^2} \|f\| \|u_t\|. \quad (2.291)$$

Згідно з (2.276)  $\frac{1}{a^2} \|u_t\|^2 \leq 2E^2(t)$ , тобто

$$\frac{1}{a^2} \|u_t\| \leq \sqrt{2}E(t). \quad (2.292)$$

Аналогічно переконуємося в справедливості оцінок

$$\{\|u_x\|, \|u_y\|, \|u_z\|\} \leq \sqrt{2}E(t). \quad (2.293)$$

Підставляючи нерівність (2.292) в (2.291), дістаємо

$$E'(t) \leq \frac{1}{a\sqrt{2}} \|f\|, \quad t \geq 0.$$

Інтегруючи добуту нерівність у межах від 0 до  $t$ , маємо

$$E(t) \leq E(0) + \frac{1}{\sqrt{2}a} \int_0^t \|f\| d\tau. \quad (2.294)$$

Із нерівностей (2.292), (2.293) та (2.294) дістаємо оцінки

$$\|u_t\| \leq a\sqrt{2}E(0) + \int_0^t \|f\| d\tau, \quad t \geq 0, \quad (2.295)$$

$$\{\|u_x\|, \|u_y\|, \|u_z\|\} \leq \sqrt{2}E(0) + \frac{1}{a} \int_0^t \|f\| d\tau, \quad t \geq 0. \quad (2.296)$$

Знайдемо оцінку функції  $\|u\| = \left( \iiint_{D_1} u^2 dx dy dz \right)^{1/2}$ . Диференціюючи рівність

$$\|u\|^2 = \iiint_{D_1} u^2(t, x, y, z) dx dy dz$$

за  $t$  і користуючися нерівністю Коші—Буняковського, на підставі оцінки (2.295) дістанемо

$$\begin{aligned} 2 \| u \| \| u \|' &= 2 \iiint_{D_1} u u_t \, dx \, dy \, dz \leq 2 \| u \| \| u_t \| \leq \\ &\leq 2 \| u \| \left[ \sqrt{2a} E(0) + \int_0^t \| f \| \, d\tau \right], \end{aligned}$$

звідки після скорочення на  $2 \| u \|$  випливає нерівність

$$\| u \|' \leq \sqrt{2a} E(0) + \int_0^t \| f \| \, d\tau.$$

Інтегруючи одержану диференціальну нерівність у межах від 0 до  $t$ , маємо

$$\| u \| \leq \| u \|_0 + \sqrt{2a} E(0)t + \int_0^t \int_0^\xi \| f \| \, d\tau \, d\xi,$$

де  $\| u \|_0$  — значення функції  $\| u \|$  у точці  $t = 0$ , тобто

$$\| u \|_0^2 = \iiint_{D_1} u^2(x, y, z, 0) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D_1} \varphi^2(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \| \varphi \|^2.$$

Отже,

$$\| u \| \leq \| \varphi \| + \sqrt{2a} E(0)t + \int_0^t (t - \tau) \| f \| \, d\tau, \quad t \geq 0. \quad (2.297)$$

Унаслідок нерівностей (2.286) маємо

$$\begin{aligned} 2E^2(0) &\leq \iiint_{D_1} \left[ \frac{1}{a^2} + 3 \right] \delta^2 + \iint_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} \delta^2 \, ds \leq \\ &\leq \left[ \left( 3 + \frac{1}{a^2} \right) V + \sigma \max_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} \right] \delta^2 = c^2 \delta^2, \end{aligned}$$

де  $\sigma$  — площа поверхні  $S_0$ ;  $V$  — об'єм області  $D_1$ ;  $c^2 = \left( 3 + \frac{1}{a^2} \right) V + \sigma \max_{S_0} \frac{\alpha}{\beta}$ .

Таким чином,

$$\sqrt{2}E(0) \leq c\delta.$$

Але тоді з нерівностей (2.297) дістаємо

$$\|u\| < \delta\sqrt{V} + atc\delta + \delta\sqrt{V} \int_0^l (t - \tau) d\tau \leq \left( \sqrt{V} + aTc + \sqrt{V} \frac{T^2}{2} \right) \delta = c_1\delta,$$

де  $c_1 = (1 + 0,5T^2)\sqrt{V} + aTc$ .

Поклавши  $\delta = \epsilon/c_1$ , маємо  $|u(t, x, y, z)| = |u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \epsilon$ .  
Теоремою доведено.

У випадку мішаної задачі для рівняння коливання струни завдовжки  $l$  область  $D$  матиме вигляд, як на рис. 2.38.

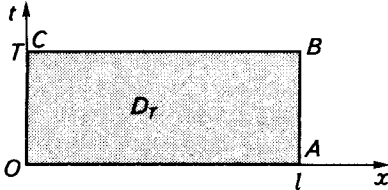


Рис. 2.38

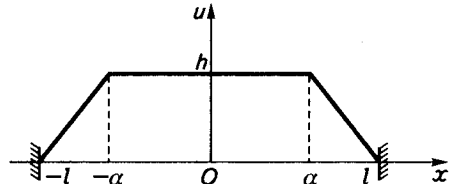


Рис. 2.39

◆ Вправа. Довести неперервну залежність розв'язку мішаних задач від вихідних даних для рівняння коливання струни.



### Задачі для самостійного розв'язування

1. Однорідну струну, кінці якої закріплені в точках  $x = 0$  і  $x = l$ , відтягнуто в початковий момент часу в точці  $x = c$  на величину  $h$  і відпущено без початкової швидкості. Визначити зміщення  $u(t, x)$  довільної точки струни й дати фізичну інтерпретацію добутого результату.
2. Знайти закон коливання однорідної струни, початкову форму зміщення якої зображено на рис. 2.39, а початкова швидкість усіх її точок дорівнює нулю. Дати фізичну інтерпретацію добутого результату.
3. Дослідити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях  $x = 0$  і  $x = l$ , якщо в початковому положенні вона перебу-



ває в спокої і її точкам на проміжку  $(\alpha, \beta)$  надано сталу початкову швидкість  $V_0$ .

4. Знайти закон коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях  $x = -l$ ,  $x = l$ , якщо в початковий момент часу вона мала форму параболи, симетричної відносно свого центра, причому максимальне початкове зміщення становить  $h$ , а початкова швидкість дорівнює нулю.
5. Дослідити вимушені поперечні коливання однорідної струни, закріпленої на кінці  $x = 0$ , яка зазнає на кінці  $x = l$  дії збудовальної гармонічної сили, що спричиняє зміщення  $A \sin \omega t$ . Початкова швидкість та початкове відхилення точок струни дорівнюють нулю.
6. Дослідити вимушені коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях  $x = 0$ ,  $x = l$ , на яку в момент часу  $t = 0$  починає діяти стала сила  $-pg$ . Початкова швидкість і початкове відхилення точок струни дорівнюють нулю.
7. Дослідити вимушені коливання однорідної струни без початкових зміщень і швидкостей, яка закріплена на кінцях  $x = 0$ ,  $x = l$ , якщо на неї діє рівномірно розподілена сила з густиною  $A\rho \sin \omega t$  ( $\rho$  — лінійна густина струни,  $\omega = \text{const}$ ).
8. Знайти закон вільних коливань однорідної струни завдовжки  $l$ , якщо в початковий момент їй було надано форму кривої  $\varphi(x) = \frac{l}{100} \sin \frac{\pi x}{2l}$ , а потім — відпущено без початкової швидкості. Струну закріплено в лівому кінці  $x = 0$ , а правий  $x = l$  — вільний.
9. Кінці однорідної струни завдовжки  $l$  утримуються за допомогою пружних сил на прямих, паралельних осі  $Ox$ . Дослідити вільні поперечні коливання струни, якщо початкове відхилення її точок становить  $\frac{x^2(x-l)^2}{4}$ , а їхня початкова швидкість дорівнює нулю.
10. Дослідити поздовжні коливання однорідного циліндричного стержня завдовжки  $l$ , один кінець якого нерухомо закріплений, а до другого — прикладена сила  $F = A \sin \omega t$ ,  $A, \omega = \text{const}$ , напрям якої збігається з віссю стержня.
11. Однорідна квадратна мембрана, яка в початковий момент часу  $t = 0$  має форму  $Axy(b-x)(b-y)$ ,  $A = \text{const}$ , почала коливатися без початкової швидкості. Дослідити вільні ко-

ливання мембрани, закріпленої по контуру ( $b$  — сторона мембрани).

12. Визначити поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , закріпленої по контуру, які спричинені початковою швидкістю  $u_t(x, y, 0) = Axy(a-x)(b-y)$ . Опором навколишнього середовища знехтувати.
13. Визначити поперечні коливання прямокутної мембрани  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  із закріпленим краєм, які спричинені неперервно розподіленою по мембрані й перпендикулярною до її поверхні силою з густиною

$$F(x, y, t) = \rho(x, y) \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad \omega = \text{const.}$$

Опором навколишнього середовища знехтувати.

14. Знайти закон вільних коливань однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$ , якщо краї  $x = 0$  і  $x = a$  нерухомо закріплені, а  $u(x, 0, t) = u(x, b, t) = h \sin \frac{\pi x}{a}$ . У початковий момент часу мембрана мала форму  $u(x, y, 0) = h \sin \frac{\pi x}{a}$ , а швидкість усіх її точок дорівнювала  $V_0 \sin \frac{\pi x}{a}$  ( $h, V_0 = \text{const}$ ).
15. Дати фізичну інтерпретацію та знайти розв'язок мішаних задач:

а)  $u_{tt} = u_{xx} - u + 2tx, \quad t > 0, \quad x \in (0, l),$   
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l),$   
 $u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0;$

б)  $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} - u + \sin x, \quad t > 0, \quad x \in (0, l),$   
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l],$   
 $u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0;$

в)  $u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in [0, 4],$   
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x, \quad x \in [0, 4],$   
 $u(0, t) = 0, \quad u_x(4, t) - hu(4, t) = 0, \quad t \geq 0;$

г)  $u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0, l),$   
 $u(x, 0) = Q/E, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l],$   
 $u_x(0, t) = 0, \quad u(l, t) = \frac{Q}{E}, \quad t \geq 0, \quad (Q, E = \text{const});$

- д)  $u_{tt} = u_{xx} - \frac{\pi}{3}u_t$ ,  $x \in (0, 3)$ ,  $t > 0$ ,  
 $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 2$ ,  $x \in [0, 3]$ ,  
 $u_x(0, t) = 0$ ,  $u(3, t) = 2t$ ,  $t \geq 0$ ;
- е)  $u_{tt} = u_{xx} - \frac{4}{x+1}u_x + \frac{2}{(x+1)^2}u$ ,  $t > 0$ ,  $x \in (0, 2)$ ,  
 $u(x, 0) = x(x-2)$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $x \in [0, 2]$ ,  
 $u(0, t) = 0$ ,  $u(2, t) = 0$ ,  $t \geq 0$   
(ввести заміну:  $u(x, t) = \frac{1}{(x+1)^2}z(x, t)$ );
- е)  $u_{tt} = u_{xx} + \pi n \left( \operatorname{th} \frac{\pi n}{2} x \right) u_x + \left( \operatorname{ch} \frac{\pi n}{2} x \right)^{-1}$ ,  $t > 0$ ,  $x \in (0, 2)$ ,  
 $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $x \in [0, 2]$ ,  
 $u_x(0, t) = 0$ ,  $u(2, t) = 0$   
(ввести заміну:  $u(x, t) = \left( \operatorname{ch} \frac{\pi n}{2} x \right)^{-1} z(x, t)$ );
- ж)  $u_{tt} = \frac{1}{4}(u_{xx} + u_{yy})$ ,  $t > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $y \in (0, 2)$ ,  
 $u(x, y, 0) = 0$ ,  $u_t(x, y, 0) = x(2-y)$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 2]$ ,  
 $u(0, y, t) = 0$ ,  $u_x(1, y, t) = 0$ ,  $y \in [0, 2]$ ,  $t \geq 0$ ,  
 $u_y(x, 0, t) = 0$ ,  $u(x, 2, t) = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $t \geq 0$ ;
- з)  $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + 2tx$ ,  $t > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $y \in (0, 1)$ ,  
 $u(x, y, 0) = 0$ ,  $u_t(x, y, 0) = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 1]$ ,  
 $u_x(0, y, t) = u_x(1, y, t) = 0$ ,  $y \in [0, 1]$ ,  $t \geq 0$ ,  
 $u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $t \geq 0$ .

## РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Нехай  $u = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Згідно з означенням канонічна форма лінійного рівняння параболічного типу має вигляд

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + c_0 u_t + \sum_{i=1}^n c_i u_{x_i} + \alpha u = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

де коефіцієнти  $c_0, c_i, \alpha, i = \overline{1, n}$  — функції незалежних змінних  $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Покажемо, що рівняння вигляду (3.1) описують процеси теплопровідності та дифузії.

### Тема 1

#### ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

#### 3.1

#### Рівняння теплопровідності

У тривимірному просторі розглянемо тверде ізотропне тіло  $G$ , температура якого в точці  $(x, y, z)$  у момент часу  $t$  визначається функцією  $u(t, x, y, z)$ . Якщо температура тіла не постійна, то в ньому виникають теплові потоки від більш нагрітих частин до менш нагрітих.

Дослідимо задачу розподілу теплоти в тілі  $G$ . Виділимо в ньому довільний об'єм  $V$ , обмежений гладкою поверхнею  $S$ , і розглянемо зміну кількості теплоти в цьому об'ємі за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ .

Згідно із законом Фур'є кількість теплоти  $q_1$ , яка пройде через поверхню  $S$  у напрямі зовнішньої до неї нормалі  $\vec{n}$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ , становить

$$q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iint_S K(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \right] dt, \quad (3.2)$$

де  $K(x, y, z) > 0$  — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності тіла в точці  $(x, y, z)$ , і внаслідок ізотропності тіла він не залежить від напрямку нормалі  $\vec{n}$  до поверхні  $S$  у розглядуваній точці  $(x, y, z)$ .

Позначимо через  $F(t, x, y, z)$  інтенсивність внутрішніх джерел теплоти, тобто кількість теплоти, яка виділяється або поглинається одиницею об'єму тіла за одиницю часу внаслідок дії теплових джерел. Тоді кількість теплоти  $q_2$ , яка виділяється або поглинається в об'ємі  $V$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ , становитиме

$$q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V F(t, x, y, z) dx dy dz \right] dt. \quad (3.3)$$

Отже, загальна кількість теплоти  $q_3$ , яку дістане об'єм  $V$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ , визначається рівністю

$$q_3 = q_2 - q_1. \quad (3.4)$$

Цю саму кількість теплоти можна визначити через зміну температури в об'ємі  $V$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ :

$$q_3 = \iiint_V C(x, y, z) \rho(x, y, z) \times \\ \times [u(t_2, x, y, z) - u(t_1, x, y, z)] dx dy dz, \quad (3.5)$$

де  $\rho(x, y, z)$  — густина;  $C(x, y, z)$  — теплоємність тіла в точці  $(x, y, z)$ .

Підставляючи (3.2), (3.3), (3.5) у рівняння теплового балансу (3.4), дістаємо

$$\iiint_V C\rho [u(t_2, x, y, z) - u(t_1, x, y, z)] dx dy dz = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V F(t, x, y, z) dx dy dz + \iint_S K \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \right] dt.$$

Надалі вважатимемо, що  $u \in C^{(1,2,2,2)}((0, +\infty) \times G)$ ,  $F \in C((0, +\infty) \times G)$ ,  $K \in C^{(1,1,1)}(G)$ ,  $C, \rho \in C(G)$ . Тоді останню рівність можна подати у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V \left( C\rho \frac{\partial u}{\partial t} - F(t, x, y, z) \right) dx dy dz \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iint_S K \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \right] dt.$$

Застосувавши до поверхневого інтеграла в правій частині формулу Гаусса—Остроградського, маємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V \left\{ C\rho \frac{\partial u}{\partial t} - F(t, x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz \right] dt = 0.$$

Унаслідок довільності інтервалу часу  $(t_1, t_2)$  і об'єму  $V$  остання рівність можлива тільки тоді, коли підінтегральний вираз дорівнює нулю, тобто

$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F(t, x, y, z). \quad (3.6)$$

Рівняння (3.6) називається *рівнянням теплопровідності неоднорідного ізотропного тіла*.

Якщо тіло однорідне, то  $C$ ,  $\rho$  і  $K$  є сталими й рівняння (3.6) запишеться у вигляді

$$u_t(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z), \quad (3.7)$$

де  $a^2 = \frac{K}{C\rho}$ ;  $f = \frac{F}{\rho}$ ;  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Якщо досліджується процес розподілу теплоти в дуже тонкій однорідній пластинці з теплоізолюваною поверхнею, то  $u = u(t, x, y)$ , і рівняння (3.7) матиме вигляд

$$u_t(t, x, y) = a^2 \Delta u(t, x, y) + f(t, x, y). \quad (3.8)$$

У випадку поширення теплоти в тілі лінійного розміру, наприклад в однорідному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею,  $u = u(t, x)$ , і рівняння (3.7) набере вигляду

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x). \quad (3.9)$$

Якщо через бічну поверхню стержня відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого дорівнює  $u_0(t, x)$ , то згідно із законом Ньютона кількість теплоти, яка пройде крізь бічну поверхню стержня, пропорційна різниці температур, а отже, рівняння теплопровідності матиме вигляд

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) - bu(t, x) + f_1(t, x), \quad (3.9a)$$

де

$$b = \frac{K_1 \sigma}{C \rho \bar{\omega}}; \quad f_1(t, x) = f(t, x) + bu_0(t, x);$$

$K_1$  — коефіцієнт зовнішньої теплопровідності;  $\sigma$ ,  $\bar{\omega}$  — відповідно периметр і площа поперечного перерізу стержня.

## 3.2 Рівняння дифузії

Припустимо, що деякий просторовий об'єм  $G$  нерівномірно заповнений газом або концентрація розчиненої речовини в  $G$  не постійна. В цьому разі відбуватиметься дифузія частинок газу або рідини з місць більшої концентрації в місця меншої, причому під концентрацією в момент часу  $t$  розуміємо функцію

$$u(t, x, y, z) = \frac{dQ}{d\tau},$$

де  $dQ$  — кількість речовини або газу в елементі об'єму  $d\tau$ , який заповнений розчином або газом.

Нехай

$$u(t, x, y, z) \in C^{(1, 2, 2, 2)}((0, +\infty) \times G);$$

$d(x, y, z) > 0$  — коефіцієнт дифузії,  $d \in C^{(1, 1, 1)}(G)$ ;  $c(x, y, z) > 0$  — коефіцієнт пористості середовища, який дорівнює відношенню об'єму пор до повного об'єму розглядуваної області,

$$c(x, y, z) \in C(G), \quad G_1 = (0, +\infty) \times G;$$

$F(t, x, y, z)$  — інтенсивність джерел речовини або газу,  $F \in C(G_1)$ .

Щоб вивести рівняння дифузії, виділимо в  $G$  довільний об'єм  $V$  із досить гладкою поверхнею  $S$  і обчислимо баланс речовини або газу в цьому об'ємі за довільний інтервал часу  $(t_1, t_2)$ .

Згідно з експериментальним законом Нернста кількість речовини або газу, яка дифундує в  $V$  крізь елемент поверхні  $ds$  у напрямі нормалі  $\vec{n}$  за одиницю часу, становить

$$dq_1 = -d(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds,$$

де  $d(x, y, z)$  — коефіцієнт дифузії.

Таким чином, кількість речовини або газу, що надходить в об'єм  $V$  крізь поверхню  $S$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ ,

$$q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iint_S d \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( d \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( d \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( d \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz \right] dt.$$

Від джерел (наприклад, якщо відбувається хімічна реакція з виділенням речовини) в об'єм  $V$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$  надійде кількість речовини або газу

$$q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V F(t, x, y, z) dx dy dz \right] dt.$$

Унаслідок приросту, який дістає функція  $u(t, x, y, z)$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ ,

$$u(t_2, x, y, z) - u(t_1, x, y, z) \approx u_t(t, x, y, z)(t_2 - t_1),$$

загальна кількість речовини або газу, яка йде на зміну концентрації в об'ємі  $V$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ , становитиме

$$q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V cu_t(t, x, y, z) dx dy dz \right] dt.$$

Отже,

$$q_1 + q_2 - q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( d \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( d \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( d \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F(t, x, y, z) - c \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dy dz \right\} dt = 0.$$

Унаслідок довільності об'єму  $V$  та інтервалу часу  $(t_1, t_2)$  з останньої рівності маємо

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( d \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( d \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( d \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F(t, x, y, z). \quad (3.10)$$



Рівняння (3.10) є *рівнянням дифузії в неоднорідному середовищі*. Якщо середовище однорідне, то  $d$  і  $c$  сталі, й рівняння (3.10) запишеться у вигляді

$$u_t(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z), \quad (3.11)$$

де  $a^2 = d/c$ ;  $f = F/c$ .

У процесі дифузії деяких газів (наприклад, еманції радію — виділення в навколишнє середовище радіоактивного газу радону) відбувається реакція розпаду молекул цих газів. Швидкість реакції розпаду зазвичай вважається пропорційною концентрації газу, й тому рівняння дифузії (3.11) у цьому разі матиме вигляд

$$u_t = a^2 \Delta u - \frac{\beta}{c} u + f(t, x, y, z), \quad (3.12)$$

де  $\beta > 0$  — коефіцієнт пропорційності.

Якщо вивчається процес дифузії, який супроводжується «ланцюговими» реакціями (частинки рідини або газу, що дифундує, вступають у реакцію з навколишнім середовищем і розмножуються), то в дифузійному наближенні (швидкість реакції пропорційна концентрації) цей процес також описується рівнянням (3.12), але  $\beta < 0$ .

Зазначимо, що рівняння (3.12) заміною

$$v(t, x, y, z) = u(t, x, y, z) e^{\frac{\beta t}{c}}$$

зводиться до (3.11).

Очевидно, що й рівняння теплопровідності, й рівняння дифузії належать до параболічного типу.

◇ **Зауваження 3.1.** Математично описуючи процес поперечних коливань стержня, на який діють рівномірно розподілене вздовж нього зовнішнє навантаження  $f(t, x)$  і повздовжня (напрявлена по осі) стискальна або розтягальна сила інтенсивністю  $P(t, x)$ , приходять до рівняння вигляду

$$\mu(x)u_{tt}(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(EJu_{xx}(t, x)) - \frac{\partial}{\partial x}(P(t, x)u_x(t, x)) = f(t, x), \quad (3.13)$$

де  $u(t, x)$  — відхилення точок стержня  $x$  від їхнього прямолінійного положення в момент часу  $t$ ;  $\mu(x)$  — маса одиниці довжини стержня ( $\text{кг} \cdot \text{с}^2/\text{см}^2$ );  $EJ$  — жорсткість на прогин ( $E$  — модуль пружності, Па,  $J$  — момент інерції площі поперечного перерізу стержня відносно нейтральної осі перерізу, перпендикулярної до площини коливань,  $\text{см}^4$ ).

Рівняння (3.13) виведено за таких умов.

- Пружна вісь (геометричне місце точок, прикладання зовнішніх сил до яких спричиняє прогин стержня без кручення) стержня прямо-лінійна й збігається з лінією центрів ваги поперечних перерізів стержня. Ця прямолінійна вісь береться за координатну вісь  $Ox$ , і від неї відлічуються відхилення елементів стержня за поперечних коливань, причому зміщення окремих точок осі стержня відбуваються перпендикулярно до прямолінійного недеформованого її напрямку (зміщеннями цих точок, паралельними осі, нехтують).
- Зміщення точок осі стержня за поперечних коливань відбуваються в одній площині й є малими відхиленнями.
- Довжина стержня значно перевищує решту його розмірів.

Якщо стержень однорідний зі сталою жорсткістю  $EJ$  і масою  $\mu$ , а  $P(t, x) = \text{const}$ , то рівняння (3.13) запишеться у вигляді

$$u_{tt}(t, x) + c^2 u_{xxxx}(t, x) - p u_{xx}(t, x) = F(t, x), \quad (3.14)$$

де  $c^2 = EJ/\mu$ ;  $p = P/\mu$ ;  $F(t, x) = f(t, x)/\mu$ .

Рівняння (3.14) є рівнянням четвертого порядку параболічного типу.

### 3.3

#### Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності

У площині  $t = 0$  розглянемо скінченну область  $D$ , обмежену кривою  $L$  (рис. 3.1). Побудуємо циліндричну поверхню з прямою  $L$  і твірною, паралельною осі  $Ot$ . Частина циліндричної поверхні між площинами  $t = 0$  і  $t = T$  ( $T$  — додатна стала) позначимо через  $V_T$ , а проєкцію області  $D$  на площину  $t = T$  — через  $D_T$ . Область з межею  $S = D \cup V_T \cup D_T$  позначимо через  $V_T$ , а  $\bar{V}_T = V_T \cup S$ .

#### ТЕОРЕМА 3.1

Нехай функція  $u(t, x, y)$  належить перерізу

$$C(\bar{V}_T) \cap C^{(1,2,2)}(V_T \cup D_T)$$

і задовольняє в  $V_T$  однорідне рівняння теплопровідності

$$u_t(t, x, y) = a^2(u_{xx}(t, x, y) + u_{yy}(t, x, y)). \quad (3.15)$$

Тоді функція  $u(t, x, y)$  своє найбільше та найменше значення в області  $\bar{V}_T$  набуває на  $D \cup B_T$ .

### Доведення

Зауважимо, що функція  $u(t, x, y) \equiv \text{const}$  задовольняє всі умови теореми, а її значення всюди в області  $\bar{V}_T$  є однаковим. Але це не суперечить твердженню теореми, оскільки найбільше та найменше значення функції  $u(t, x, y) \equiv \text{const}$  в області  $V_T \cup D_T$  не більше й не менше за значення цієї функції на  $D \cup B_T$  (вони збігаються).

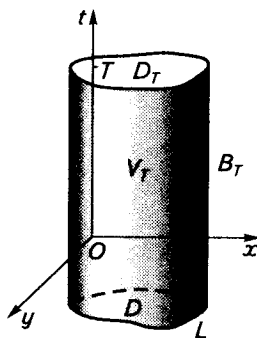


Рис. 3.1

Теорему достатньо довести для випадку найбільшого значення. Справді, якщо функція  $u(t, x, y)$  в деякій точці розглядуваної області досягає найбільшого значення, то в цій точці функція  $-u(t, x, y)$  досягає найменшого значення, а остання задовольняє всі умови сформульованої теореми.

Доводитимемо теорему від супротивного.

Нехай

$$M = \max_{(t, x, y) \in \bar{V}_T} u(t, x, y), \quad m = \max_{(t, x, y) \in D \cup B_T} u(t, x, y).$$

Очевидно, що  $m \leq M$ . Згідно з твердженням теореми  $m = M$ . Припустимо, що  $m < M$ . Тоді неперервна в  $\bar{V}_T$  функція  $u(t, x, y)$  досягає свого найбільшого значення в деякій точці  $(t_0, x_0, y_0) \in V_T \cup D_T$ :

$$u(t_0, x_0, y_0) = M.$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$v(t, x, y) = u(t, x, y) + \frac{M - m}{2T}(t_0 - t). \quad (3.16)$$

Якщо точка  $(t, x, y) \in D \cup B_T$ , то  $t_0 - t \leq t_0 \leq T$ , а отже,

$$v(t, x, y)|_{(t,x,y) \in D \cup B_T} \leq m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M.$$

З іншого боку,  $v(t_0, x_0, y_0) = u(t_0, x_0, y_0) = M$ . Тому в  $V_T \cup D_T$  існує точка, де  $v = M$ , а на  $D \cup B_T$  — де  $v < M$ . Звідси випливає, що свого найбільшого значення функція  $v(t, x, y)$  досягає або в  $V_T$ , або на  $D_T$ .

Позначимо через  $(t_1, x_1, y_1)$  точку, в якій функція  $v(t, x, y)$  набуває свого найбільшого значення, й припустимо спочатку, що  $(t_1, x_1, y_1) \in V_T$ . Тоді в цій точці мають виконуватися необхідні умови максимуму

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0.$$

Отже,

$$[v_t - a^2(v_{xx} + v_{yy})]|_{(t_1, x_1, y_1)} \geq 0.$$

З іншого боку, для всяких  $(t, x, y) \in V_T$

$$v_t - a^2(v_{xx} + v_{yy}) = \underbrace{u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy})}_{=0} - \frac{M - m}{2T} < 0,$$

і ми прийшли до суперечності.

Нехай тепер точка  $(t_1, x_1, y_1) \in D_T$ . Це означає, що  $t_1 = T$ , а  $(x_1, y_1) \in D$ , тобто  $t_1$  є граничною точкою проміжку  $(0, T)$ , а  $(x_1, y_1)$  — внутрішньою точкою області  $D$ . У цьому випадкові умови, за яких функція  $v(t, x, y)$  досягне найбільшого значення в точці  $(t_1, x_1, y_1)$ , матимуть вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0.$$

Отже,

$$[v_t - a^2(v_{xx} + v_{yy})]|_{(t_1, x_1, y_1)} \geq 0,$$

а вираз у квадратних дужках менший за нуль для всіх  $(t, x, y) \in D_T$ , і ми знову прийшли до суперечності. Таким чином, найбільшого значення функція набуває тільки в точках області  $D \cup B_T$ .

Із доведення принципу максимуму для рівняння теплопровідності випливає справедливність наступної теореми.

### ТЕОРЕМА 3.2

Нехай функція  $u(t, x, y)$  належить перерізу

$$C(\bar{V}_T) \cap C^{(1,2,2)}(V_T \cup D_T).$$

Якщо  $u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) \leq 0$  всюди в  $V_T$ , то функція  $u(t, x, y)$  досягає свого найбільшого значення на  $D \cup B_T$ . Якщо ж  $u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) \geq 0$  всюди в  $V_T$ , то на  $D \cup B_T$  функція  $u(t, x, y)$  досягає найменшого значення.

❏ **Наслідок.** Якщо два розв'язки однорідного рівняння теплопровідності  $u_1(t, x, y)$ ,  $u_2(t, x, y)$  задовольняють умову

$$v(t, x, y) \equiv u_1(t, x, y) - u_2(t, x, y) \leq 0 \text{ при } (t, x, y) \in D \cup B_T$$

і належать класу  $C(\bar{V}_T) \cap C^{(1,2,2)}(V_T \cup D_T)$ , то  $v(t, x, y) \leq 0$  для всіх  $(t, x, y) \in \bar{V}_T$ .

Зауважимо, що аналогічно доводиться справедливості принципу максимуму й у випадку багатовимірного простору.

Фізичний зміст теореми про найбільше значення розв'язку однорідного рівняння теплопровідності очевидний: якщо температура на межі тіла й у початковий момент часу  $t = 0$  не перевищує деякого значення  $m$ , то за відсутності внутрішніх джерел теплоти температура всередині тіла не може бути більшою за  $m$ .

Саме рівняння (3.7) не описує однозначно процесів поширення теплоти або дифузії. Тому для однозначного математичного описання того чи іншого фізичного процесу до рівняння (3.7) потрібно приєднати деякі додаткові умови. Як і в разі рівнянь гіперболічного типу, розглянемо два основних випадки, а саме: обмежених і необмежених областей.

## Тема 2

### ПРОЦЕСИ ДИFUZІЇ

#### ТА ПОШИРЕННЯ ТЕПЛОТИ В ОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

### 3.4

#### Постановка мішаних задач

У тривимірному просторі  $(x, y, z)$  розглянемо однорідне тіло  $V$  із початковою температурою  $\varphi(x, y, z)$ , в якому є внутрішні джерела теплоти інтенсивністю  $F(t, x, y, z)$ .

Нехай потрібно визначити температуру  $u(t, x, y, z)$  тіла  $V$  у довільний момент часу  $t > 0$ , якщо на його досить гладкій поверхні  $S$ :

- 1) задано температуру  $\psi(t, x, y, z)$ ;
- 2) задано тепловий потік  $\omega(t, x, y, z)$ ;
- 3) відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого  $\mu(t, x, y, z)$ .

Для розв'язання поставленої фізичної задачі складемо відповідну математичну модель.

Як було показано в п. 3.1 (див. рівняння (3.7)), шукана температура  $u(t, x, y, z)$  при  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in V$  має бути розв'язком диференціального рівняння

$$u_t(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z). \quad (3.17)$$

Згідно з умовою задачі в початковий момент часу

$$u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V \cup S = \bar{V}. \quad (3.18)$$

З умов на поверхні  $S$  тіла  $V$  маємо:

- 1)  $u|_{(x,y,z) \in S} = \psi(t, x, y, z), \quad t \geq 0, \quad (x, y, z) \in S;$  (3.19)
- 2) на підставі закону Фур'є

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{(x,y,z) \in S} = -K^{-1} \omega(t, x, y, z), \quad t \geq 0, \quad (x, y, z) \in S, \quad (3.20)$$

де  $K$  — коефіцієнт теплопровідності;  $\bar{n}$  — зовнішня нормаль до  $S$ ;

- 3) за законом Ньютона

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{(x,y,z) \in S} = -\lambda [u(t, x, y, z) - \mu(t, x, y, z)] \Big|_{(x,y,z) \in S}, \quad (3.21)$$

де  $\lambda$  — коефіцієнт теплообміну.

Таким чином, залежно від теплового режиму на поверхні тіла  $V$  приходимо до однієї із задач:

- 1) у класі функцій

$$C([0, +\infty) \times \bar{V} \equiv \bar{\Omega}) \cap C^{(1,2,2,2)}([0, +\infty) \times V \equiv \Omega)$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (3.17), який задовольняє початкову (3.18) і крайову (3.19) умови;

2) у класі функцій

$$C^{(0.1.1.1)}(\bar{\Omega}) \cap C^{(1.2.2.2)}(\Omega)$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (3.17), який задовольняє початкову (3.18) і крайову (3.20) умови;

3) у класі функцій

$$C^{(0.1.1.1)}(\bar{\Omega}) \cap C^{(1.2.2.2)}(\Omega)$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (3.17), який задовольняє початкову (3.18) і крайову (3.21) умови.

Задачі 1)–3) називаються відповідно *першою, другою й третьою основними мішаними задачами для рівнянь параболічного типу*. Зазначимо: ставлячи всі мішані задачі, вважають, що початкова й крайові умови не суперечливі, тобто вони задовольняють умову узгодженості. У випадку першої мішаної задачі умова узгодженості має вигляд

$$\varphi(x, y, z)|_{(x, y, z) \in S} = \psi(0, x, y, z). \quad (3.22)$$

До сформульованих задач приходять, досліджуючи також процеси дифузії в об'ємі  $V$ , тільки в цьому разі функція  $u(t, x, y, z)$  є концентрацією розчину або газу в точці  $(x, y, z) \in V$  у момент часу  $t$ .

Аналогічно ставляться мішані задачі й у випадках дво- та одно-мірного середовищ.

Зауважимо, що на практиці коло мішаних задач значно ширше. Наприклад, нехай  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , і потрібно знайти розв'язок рівняння (3.17), який задовольняє початкову умову (3.18), а на поверхні  $S$

$$\begin{aligned} u|_{(x, y, z) \in S_1} &= \psi(t, x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{(x, y, z) \in S_2} = \omega(t, x, y, z), \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{(x, y, z) \in S_3} &= -\lambda[u(t, x, y, z) - \mu(t, x, y, z)]|_{(x, y, z) \in S_3}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Можливі й складніші, ніж розглянуті вище, крайові умови на поверхні  $S$ . Але надалі розглядатимемо тільки першу, другу й третю мішані задачі.

### 3.5

## Єдиність розв'язку мішаних задач і його неперервна залежність від початкової та крайових умов

### ТЕОРЕМА 3.3

У класі функцій  $C(\bar{\Omega}) \cap C^{(1.2.2.2)}(\Omega)$  розв'язок першої основної мішаної задачі (3.17)—(3.19) єдиний і неперервно залежить від початкової та крайових умов.

### Доведення

Доведемо спочатку єдиність розв'язку першої мішаної задачі. Для цього припустимо, що існують два розв'язки:  $u_1(t, x, y, z)$  і  $u_2(t, x, y, z)$ .

Тоді функція  $u(t, x, y, z) = u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)$  буде розв'язком однорідного рівняння теплопровідності з однорідними початковою та крайовими умовами.

Оскільки  $u(0, x, y, z) = u|_{(x, y, z) \in S} = 0$ , то внаслідок принципу максимуму  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  в області  $\Omega$ , і єдиність доведено.

Для доведення неперервної залежності розв'язку від початкової та крайових умов припустимо, що  $u_1(t, x, y, z)$  і  $u_2(t, x, y, z)$  задовольняють одне й те саме рівняння (3.17), а

$$|u_1(0, x, y, z) - u_2(0, x, y, z)| < \varepsilon \quad \text{при } (x, y, z) \in \bar{V},$$

$$|u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \varepsilon \quad \text{при } t \geq 0, (x, y, z) \in S.$$

Функції  $u(t, x, y, z) = u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)$  і  $v(t, x, y, z) = \pm \varepsilon$  є розв'язками однорідного рівняння теплопровідності, а  $-\varepsilon < u(0, x, y, z) < \varepsilon$  і  $-\varepsilon < u(t, x, y, z) < \varepsilon$  при  $t \geq 0, (x, y, z) \in S$ .

Тоді на підставі наслідку принципу максимуму дістаємо, що

$$|u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \varepsilon \quad \forall (t, x, y, z) \in \Omega.$$

Теорему доведено.

### ТЕОРЕМА 3.4

У класі функцій  $C^{(0.1.1.1)}(\bar{\Omega}) \cap C^{(1.2.2.2)}(\Omega)$  розв'язки другої та третьої основних мішаних задач єдині.



### Доведення

Нехай мішані задачі (3.17), (3.18), (3.20) і (3.17), (3.18), (3.21) мають два розв'язки. Позначимо через  $u(t, x, y, z)$  їх різницю. Тоді, очевидно, функція  $u(t, x, y, z)$  буде розв'язком однорідного рівняння теплопровідності й задовольнятиме однорідні початкову та крайові умови

$$u(0, x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \bar{V}; \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{(x, y, z) \in S} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + \lambda u \right] \Big|_{(x, y, z) \in S} = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.25)$$

Розглянемо інтеграл

$$I = 0,5 \iiint_V u^2(x, y, z) dx dy dz \geq 0. \quad (3.26)$$

Маємо

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \iiint_V u \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz = a^2 \iiint_V u \Delta u dx dy dz.$$

Згідно з формулою Гаусса—Остроградського

$$\iint_S u \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} dS = \iiint_V u \Delta u dx dy dz + \iiint_V [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz.$$

Тоді

$$\frac{\partial I}{\partial t} = a^2 \iint_S u \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} dS - a^2 \iiint_V [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz.$$

Унаслідок умов (3.25) перший інтеграл дорівнює нулю у випадку другої мішаної задачі й недодатний у випадку третьої мішаної задачі.

Таким чином,  $\frac{\partial I}{\partial t} \leq 0$ . Але з початкової умови (3.24) маємо  $I|_{t=0} = 0$ .

Отже,  $I$  як функція часу  $t$  є невід'ємною, в розглядуваній області не зростає  $\left( \frac{\partial I}{\partial t} \leq 0 \right)$  і дорівнює нулю при  $t = 0$ . Але тоді  $I \equiv 0$  і з (3.26) дістаємо, що  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  в області  $\Omega$ .

Теорему доведено.

- ❖ **Вправа.** За аналогією довести теорему єдиності розв'язку мішаних задач для рівнянь параболічного типу у випадку двовимірного простору.

### 3.6

#### Інтегрування першої мішаної задачі для рівняння теплопровідності у випадку одновимірного простору. Метод Фур'є

Розв'яжемо таку фізичну задачу: дослідити процес розподілу теплоти в однорідному стержні завдовжки  $l$  із теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура дорівнює  $\varphi(x)$ , а на кінцях підтримується нульова температура.

Згідно з міркуваннями, наведеними в п. 3.4, потрібно в області  $\Omega = (0, +\infty) \times (0, l)$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (3.27)$$

який задовольняє початкову умову

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, l] \quad (3.28)$$

і крайові

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.29)$$

Вважаємо, що функція  $\varphi(x)$  задовольняє умови узгодженості

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0. \quad (3.30)$$

Як було показано в п. 3.5, мішана задача (3.27)—(3.29) у просторі функцій  $C(\bar{\Omega}) \cap C^{(1,2)}(\Omega)$  може мати лише єдиний розв'язок, і шукаємо його у вигляді

$$u(t, x) = T(t)X(x) \neq 0. \quad (3.31)$$

Підставивши (3.31) у рівняння (3.27) і крайові умови (3.29) та відокремивши змінні, дістанемо

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (3.32)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.33)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (3.34)$$

де  $\lambda$  — довільна стала.

Задачу Штурма—Ліувілля (3.33), (3.34) досліджено в гл. 2 [див. задачу (2.168), (2.169)], і, як показано, власними значеннями є  $\lambda_n = (\pi n/l)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а відповідні власні функції мають вигляд

$$X_n(x) = c_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad c_n = \text{const}. \quad (3.35)$$

Підставивши власні значення в рівняння (3.32) та зінтегрувавши його, дістанемо

$$T_n(t) = b_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \quad b_n = \text{const}. \quad (3.36)$$

Підставляючи (3.35) і (3.36) у (3.31), знаходимо

$$u_n(t, x) = a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $a_n$  — довільні сталі.

Отже, дістали нескінченну систему частинних розв'язків рівняння (3.27), які задовольняють крайові умови (3.29).

Згідно з доведеною в гл. 2 лемою 2.1 ряд

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (3.37)$$

також буде розв'язком рівняння (3.27), якщо він збігається і його можна почленно диференціювати один раз за  $t$  і двічі за  $x$ , причому цей ряд задовольняє і крайові умови (3.29).

Припустимо, що умови (3.29) виконуються. Тоді для відшукування єдиного розв'язку мішаної задачі (3.27)—(3.29) залишилося вибрати коефіцієнти  $a_n$  таким чином, щоб ряд (3.37) задовольняв і початкову умову, тобто щоб

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x). \quad (3.38)$$

Нехай функція  $\varphi(x) \in C_1([0, l])$ , де  $C_1([0, l])$  — клас неперервних функцій, які мають кусково-неперервну похідну при  $x \in [0, l]$  і задовольняють умови узгодженості (3.30). Тоді на відрізку  $[0, l]$  функція  $\varphi(x)$  розвивається в ряд Фур'є за системою власних функцій  $\sin \frac{\pi n}{l} x$ , і з рівності (3.38) маємо

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \quad (3.39)$$

Підставивши знайдені коефіцієнти (3.39) у ряд (3.37), дістанемо формальний розв'язок мішаної задачі (3.27)—(3.29).

Для обґрунтування добутого результату доведемо таке твердження.

### ТВЕРДЖЕННЯ 3.1

Якщо функція  $\varphi(x) \in C^1([0, l])$ , то ряд (3.37), де коефіцієнти  $a_n$  визначаються за формулою (3.39), в області  $\Omega$  можна почленно диференціювати довільну кількість разів як за  $x$ , так і за  $t$ , причому він визначає неперервну функцію в  $\bar{\Omega}$ .

### Доведення

За умовою твердження при  $t > 0$  маємо

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{k+s} u_n(t, x)}{\partial t^k \partial x^s} \right| = \\ & = \left| \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi (-1)^k \left( \frac{\pi}{l} \right)^{2k+s} \sin \left( \frac{\pi n}{l} x + \frac{s\pi}{2} \right) a^{2k} n^{2k+s} \times \right. \\ & \times \exp \left[ - \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \leq 2M \left( \frac{\pi n}{l} \right)^{2k+s} a^{2k} \exp \left[ - \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \equiv A_n, \quad (3.40) \end{aligned}$$

де  $M \geq |\varphi(x)|$  при  $x \in [0, l]$ .

Оскільки

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^{2k+s} \exp \left[ - \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2 (n^2 + 2n + 1)t \right]}{n^{2k+s} \exp \left[ - \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2 n^2 t \right]} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{2k+s} \exp \left[ - \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2 (2n + 1)t \right] = 0, \end{aligned}$$

то згідно з ознакою Д'Аламбера ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  збігається, а отже, на підставі (3.40) ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{k+s} u_n(t, x)}{\partial t^k \partial x^s}, \quad k, s = 0, 1, 2, \dots$$

збігаються рівномірно при  $t > 0$ .

При  $t = 0$  справедлива оцінка

$$|u_n(t, x)| \leq |a_n|, \quad (t, x) \in \bar{\Omega}.$$

Але якщо  $\varphi(x) \in C^1([0, l])$ , то з теорії рядів Фур'є відомо, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  збігається, а отже, ряд (3.37) в області  $\bar{\Omega}$  збігається рівномірно, й твердження доведено.

Підставивши (3.39) у (3.37), дістанемо

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \exp \left[ - \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

Оскільки ряд

$$G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \exp \left[ - \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \quad (3.41)$$

при  $t > 0$  збігається рівномірно, то порядок підсумовування й інтегрування в попередній рівності можна змінювати, а отже,

$$u(t, x) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi.$$

Функція (3.41) називається *функцією Гріна першої мішаної задачі* для рівняння теплопровідності (3.27).

◇ **Зауваження 3.2.** Якщо на кінцях стержня задано інші теплові режими, але крайові умови є однорідними, то для побудови розв'язку мішаних задач потрібно повторити вищенаведені міркування й у кожному конкретному випадкові дослідити відповідну задачу Штурма—Ліувілля.

Що ж до загальної мішаної задачі для рівняння теплопровідності й задачі зі стаціонарними неоднорідностями, а також мішаних задач у двовимірному просторі, то підхід до їх інтегрування залишається той самий, що й у випадку відповідних мішаних задач для хвильового рівняння.

Отже, ми показали, що розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності існує, він єдиний і неперервно залежить від початкової та крайових умов в області  $\bar{\Omega}$ , тобто мішану задачу в  $\bar{\Omega}$  поставлено коректно.

◆ **Вправа.** Показати, що мішану задачу (3.27)—(3.29) в області  $\Omega^* = (-\infty, 0] \times [0, 1]$  поставлено некоректно.

### Тема 3

#### ПРОЦЕСИ ДИФУЗІЇ ТА ПОШИРЕННЯ ТЕПЛОТИ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

#### 3.7

#### Постановка задачі Коші та єдиність її розв'язку

Нехай у тривимірному просторі  $E_3$  задано тіло  $G$  досить великих розмірів із поверхнею  $S$ . У центральній його частині розглянемо об'єм  $V$ , який знаходиться на значній відстані від поверхні  $S$ . Тоді очевидно, що протягом певного інтервалу часу процес розподілу теплоти в об'ємі  $V$  не залежатиме від температурного режиму на поверхні  $S$ , і враховувати розміри тіла  $G$  немає потреби.

У задачах такого типу зазвичай вважають, що тіло  $G$  необмежене, а отже, на процес розподілу теплоти впливають тільки його початкова температура. Таким чином, поставлена фізична проблема приводить до інтегрування задачі Коші: у фазовому просторі  $\Omega = (0, +\infty) \times E_3$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_t(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z), \quad (3.42)$$

який задовольняє початкову умову

$$u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3, \quad (3.43)$$

де  $\varphi(x, y, z)$  — відома неперервна й обмежена функція в просторі  $E_3$ .

Зазначимо, що заміною змінної  $\tau = a^2 t$  рівняння (3.42) зведеться до вигляду

$$u_\tau(\tau, x, y, z) = \Delta u(\tau, x, y, z) + f_1(\tau, x, y, z).$$

Тому надалі вважатимемо, що в (3.42)  $a^2 = 1$ .

### ТЕОРЕМА 3.5

*Якщо в класі обмежених у всьому фазовому просторі функцій існує розв'язок задачі Коші (3.42), (3.43), то він єдиний.*

#### Доведення

Припустимо супротивне: нехай  $u_1(t, x, y, z)$  і  $u_2(t, x, y, z)$  є розв'язками задачі Коші (3.42), (3.43). Тоді функція  $u(t, x, y, z) = u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)$  буде розв'язком однорідного рівняння теплопровідності й задовольнятиме однорідну початкову умову.

Згідно з умовою теореми існує така стала  $M$ , що для всіх  $(t, x, y, z) \in \Omega$   $|u_i(t, x, y, z)| \leq M$ ,  $i = 1, 2$ , а тому  $|u(t, x, y, z)| \leq 2M$ .

Розглянемо функцію

$$v(t, x, y, z) = 4Ml^{-2}(0,5r^2 + 3t),$$

де  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $l = \text{const}$ . Очевидно, функція  $v(t, x, y, z)$  також буде розв'язком однорідного рівняння теплопровідності, а при  $t = 0$  і  $r = l$  маємо

$$v(0, x, y, z) = 2Mr^2l^{-2} \geq 0 = u(0, x, y, z),$$

$$v(t, x, y, z)|_{r=l} = 2M + 12Mtl^{-2} \geq 2M \geq |u(t, x, y, z)|.$$

На підставі принципу максимуму останні нерівності справедливі всюди в області

$$\bar{\Omega}^* = \{(t, x, y, z) \mid t \geq 0, \quad r^2 \leq l^2\},$$

тобто

$$\begin{aligned} -4Ml^{-2}(0,5r^2 + 3t) &\leq u(t, x, y, z) \leq \\ &\leq 4Ml^{-2}(0,5r^2 + 3t), \quad (t, x, y, z) \in \bar{\Omega}^*. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Зафіксувавши в  $\Omega^*$  довільну точку  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$  і перейшовши в (3.44) до границі, коли  $l \rightarrow \infty$ , дістанемо

$$u(t_0, x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Унаслідок довільності точки  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$  остання рівність виконується тотожно в просторі  $\Omega$ , і теорему доведено.

### 3.8

#### Існування розв'язку задачі Коші

Розглянемо спочатку задачу Коші на нескінченній прямій: у фазовій площині

$$\Omega = \{(t, x) \mid 0 < t < +\infty, -\infty < x < +\infty\}$$

знайти обмежений розв'язок рівняння теплопровідності

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (3.45)$$

який задовольняє початкову умову

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.46)$$

де  $\varphi(x)$  — відома, неперервна й обмежена на всій осі функція. Вважаємо, що  $u(t, x)$  при  $t = 0$  неперервна, тобто

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(t, x) = \varphi(x_0).$$

Шукатимемо нетривіальні обмежені розв'язки рівняння (3.45) у вигляді

$$u(t, x) = T(t)X(x) \neq 0. \quad (3.47)$$

Підставляючи (3.47) у рівняння (3.45) та відокремлюючи змінні, дістанемо

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (3.48)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.49)$$

де  $\lambda$  — довільна стала. Рівняння (3.48), (3.49) мають обмежені розв'язки тільки тоді, коли  $\lambda \geq 0$ ; отже,

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

$$T(t) = C_3 e^{-\lambda a^2 t}.$$



Покладемо  $\lambda = k^2$ ,  $-\infty < k < +\infty$ . Тоді згідно з (3.47) маємо

$$u_k(t, x) = e^{-k^2 a^2 t} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx), \quad (3.50)$$

де  $A(k) = C_1 C_3$ ,  $B(k) = C_2 C_3$  — довільні сталі, які залежать від довільного параметра  $k$ .

Функція  $u_k(t, x)$ , визначена за формулою (3.50), є розв'язком рівняння (3.45) за довільних  $A(k)$  і  $B(k)$ . Тому функція

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) dk \quad (3.51)$$

також буде розв'язком рівняння (3.45), якщо інтеграл у правій частині (3.51) рівномірно збігається і його можна диференціювати під знаком інтеграла один раз за  $t$  і двічі за  $x$ . Нехай ці умови виконуються.

Згідно з початковою умовою (3.46) маємо

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) dk. \quad (3.52)$$

Представимо функцію  $\varphi(x)$  формулою Фур'є:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos k(\xi - x) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos k\xi d\xi + \sin kx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi dk. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Порівнюючи (3.52) і (3.53), дістаємо

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos k\xi d\xi, \quad B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi.$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти в (3.51), матимемо

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-a^2 k^2 t} \cos k(\xi - x) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-a^2 k^2 t} \cos k(\xi - x) d\xi. \end{aligned}$$

В останній рівності використано парність підінтегральної функції як функції від  $k$ . Змінюючи в цій рівності порядок інтегрування й користуючися формулою

$$\int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} \cos \beta k \, dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}, \quad c \neq 0$$

(виведення див. нижче), дістаємо

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-x}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} \frac{1}{\pi} \cos k(\xi - x) dk = \\ &= \int_{-x}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Формула (3.54) називається *формулою Пуассона*.

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що функція

$$G(t, x, \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \quad (3.55)$$

як функція  $(t, x) \in \Omega$  є також розв'язком рівняння (3.45), і її називають *фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності*.

Покажемо, що для довільної неперервної і обмеженої функції  $\varphi(x)$  формула Пуассона є розв'язком рівняння теплопровідності (3.45). Для цього потрібно довести, що інтеграл (3.54) і інтеграли, які одержуються з (3.54) диференціюванням під знаком інтеграла один раз за  $t$  і двічі за  $x$ , збігаються рівномірно при  $t > 0$ .

Здиференціюємо (3.54) один раз за  $t$  і двічі за  $x$ . Маємо

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-x}^{+\infty} \left[ \frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t^2} - \frac{1}{2t} \right] \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \\ u_x(t, x) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-x}^{+\infty} \frac{\xi-x}{2a^2 t} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \\ u_{xx}(t, x) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-x}^{+\infty} \left[ \frac{(\xi-x)^2}{4a^4 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \right] \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \end{aligned}$$

Як бачимо, вирази для похідних складаються із суми інтегралів вигляду

$$I = \frac{1}{t^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)(\xi - x)^m e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi, \quad (3.56)$$

де  $k$  і  $m$  — деякі невід'ємні сталі.

В (3.56) покладемо

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}, \quad t > 0. \quad (3.57)$$

Тоді (3.56) запишеться у вигляді

$$I = (2a)^{m+1} t^{\frac{m+1}{2} - k} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) \alpha^m e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Функція  $\varphi(x)$  обмежена, отже, існує така скінченна стала  $M$ , що для всіх  $x \in (-\infty, +\infty)$   $|\varphi(x)| \leq M$ . Тоді при  $t > 0$  підінтегральний вираз мажоруюється функцією  $M |\alpha|^m e^{-\alpha^2}$ , яка є інтегрованою в проміжку  $(-\infty, +\infty)$ . Отже, інтеграл (3.56) збігається рівномірно за довільних невід'ємних сталих  $k$  і  $m$ , а тому в (3.54) можна диференціювати під знаком інтеграла за  $t$  і двічі за  $x$ . Легко бачити, що в (3.54) можна диференціювати під знаком інтеграла за  $t$  і за  $x$  довільну кількість разів при  $t > 0$ .

Покажемо тепер, що функція (3.54) задовольняє й початкову умову (3.46), тобто

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \varphi(x) \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Для цього у формулі Пуассона замість  $\xi$  введемо нову змінну інтегрування  $\alpha$  за (3.57). Тоді дістанемо

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) e^{-\alpha^2} d\alpha. \quad (3.58)$$

У теорії невластних інтегралів відома рівність

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1. \quad (3.59)$$

Домножимо (3.59) на  $\varphi(x)$  і віднімемо з (3.58). Дістанемо

$$u(t, x) - \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)] e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

а отже,

$$|u(t, x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} |\varphi(x + 2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha. \quad (3.60)$$

Унаслідок обмеженості функції  $\varphi(x)$  для довільних  $x, t$  і  $\alpha$  маємо

$$|\varphi(x + 2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq 2M.$$

Ураховуючи останню нерівність, із (3.60) дістаємо

$$|u(t, x) - \varphi(x)| \leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{-N} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N |\varphi(x + 2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+x} e^{-\alpha^2} d\alpha, \quad (3.61)$$

де  $N$  — довільна стала. Через збіжність інтеграла (3.59) для всякого як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$  можна вибрати настільки велике число  $N$ , що

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{-N} e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+x} e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оскільки функція  $\varphi(x)$  неперервна, то для всіх  $t$ , досить близьких до нуля, й при  $|\alpha| \leq N$  маємо

$$|\varphi(x + 2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

а отже, з (3.61) дістаємо для  $t$ , досить близьких до нуля,

$$|u(t, x) - \varphi(x)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3} \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-\alpha^2} d\alpha \right) = \varepsilon.$$

З останньої нерівності внаслідок довільності  $\varepsilon$  випливає, що

$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, y) = \varphi(x)$ , тобто формула Пуассона задовольняє також початкову умову (3.46).

Ми довели наступну теорему.

### ТЕОРЕМА 3.6

Якщо функція  $\varphi(x)$  неперервна й обмежена на проміжку  $(-\infty, +\infty)$ , то єдиний у класі неперервних і обмежених у  $\Omega$  функцій розв'язок задачі Коші (3.45), (3.46) дається формулою Пуассона.

Зазначимо: якщо початкова функція  $\varphi(x)$  має скінченну кількість точок розриву першого роду, то інтеграл (3.54) є також єдиним у класі обмежених функцій розв'язком рівняння (3.45), який неперервний всюди, за винятком точок розриву функції  $\varphi(x)$ .

У випадку  $n$ -вимірного середовища фундаментальним розв'язком однорідного рівняння теплопровідності буде функція

$$G(t, P, Q) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{r^2}{4t}}, \quad a^2 = 1,$$

$$P = P(x_1, \dots, x_n), \quad Q = Q(\xi_1, \dots, \xi_n),$$

де  $r^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2$ , а розв'язок відповідної задачі Коші в класі обмежених функцій дається формулою Пуассона

$$u(t, P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Q) G(t, P, Q) dQ, \quad dQ = d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \quad (3.62)$$

Розв'язок задачі Коші

$$u_t(t, P) = \Delta u(t, P) + f(t, P), \quad (t, P) \in \Omega = (0, +\infty) \times E_n,$$

$$u(0, P) = \varphi(P), \quad P \in E_n, \quad (3.63)$$

де функції  $f(t, P)$  та  $\varphi(P)$  неперервні й обмежені, набуває вигляду

$$u(t, P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Q) G(t, P, Q) dQ +$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, Q) G(t - \tau, P, Q) dQ d\tau, \quad (3.64)$$

причому в класі обмежених функцій цей розв'язок єдиний.

◆ **Вправа.** Показати, що розв'язок задачі Коші (3.63) дається формулою (3.64) (застосувати принцип Дюгамеля).

Доведемо справедливості рівності

$$\int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} \cos \beta k dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}, \quad c \neq 0.$$

Для цього позначимо  $I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} \cos \beta k dk$ . Диференціюючи останню рівність за параметром  $\beta$ , дістаємо

$$\begin{aligned} \frac{dI(\beta)}{d\beta} &= - \int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} k \sin \beta k dk = \frac{1}{2c^2} \int_0^{+\infty} \sin \beta k d(e^{-c^2 k^2}) = \\ &= \frac{1}{2c^2} \sin \beta k e^{-c^2 k^2} \Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta}{2c^2} \int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} \cos \beta k dk = -\frac{\beta}{2c^2} I(\beta). \end{aligned}$$

Із диференціального рівняння

$$I'(\beta) + \frac{\beta}{2c^2} I(\beta) = 0$$

знаходимо

$$I(\beta) = C_1 e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}.$$

Оскільки

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} dk = \frac{1}{2c} \sqrt{\pi},$$

то  $C_1 = \frac{1}{2c} \sqrt{\pi}$ , а отже,

$$I(\beta) = \frac{1}{2c} \sqrt{\pi} e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}.$$

### 3.9

#### **Фізична інтерпретація фундаментального розв'язку (3.55) однорідного рівняння теплопровідності та формули Пуассона (3.54)**

Розглянемо достатньо малий елемент стержня  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  навколо точки  $x_0$  і вважатимемо, що в початковий момент часу температура стержня поза цим елементом нульова, а при  $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  вона є постійною й дорівнює  $u_0$ .

Такий початковий розподіл температури називають *фізичним тепловим імпульсом*.

Фізичний тепловий імпульс виникає, якщо в стержень, температура якого в кожній точці спочатку нульова, в момент  $t = 0$  на відрізку  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  раптово введено кількість теплоти  $q = 2\varepsilon c\rho u_0$ , яка спричинила підвищення температури цього проміжку стержня на  $u_0$ .

У наступні моменти часу розподіл температури в стержні визначається за формулою Пуассона (3.54)

$$u(t, x) = \int_{-x}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Застосовуючи теорему про середнє, дістаємо

$$u(t, x) = \frac{2u_0\varepsilon}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi_0-x)^2}{4a^2 t}},$$

де  $\xi_0$  — деяка точка, яка лежить у проміжку інтегрування  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . Оскільки  $u_0 = q(2\varepsilon c\rho)^{-1}$ , то

$$u(t, x) = \frac{q}{c\rho 2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}. \quad (3.65)$$

Ми дістали розв'язок у випадку фізичного теплового імпульсу. Тепер дослідимо точковий тепловий імпульс. Для цього в (3.65) перейдемо до границі, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Очевидно, що тоді  $\xi_0 \rightarrow x_0$  і з (3.65) маємо

$$u(t, x) = q(c\rho 2a\sqrt{\pi t})^{-1} e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2 t}}. \quad (3.66)$$

Таким чином, фундаментальний розв'язок (3.55) дає розподіл температури, який спричиняється миттєвим точковим джерелом теплоти інтенсивністю  $q = c\rho$ , розміщеним у початковий момент  $t = 0$  у точці стержня  $x = \xi$ .

Розглянемо тепер, як поширюється теплота в стержні після точкового імпульсу. Для цього побудуємо графіки фундаментального розв'язку (3.55) за фіксованим  $\xi$  для різних моментів часу  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  (рис. 3.2). Криві, зображені на рисунку, називаються *кривими Гаусса*.

Як бачимо, для всіх  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  графіки фундаментального розв'язку симетричні відносно прямої  $x = \xi$ . Максимум досягається при  $x = \xi$ , і він дорівнює  $(2a\sqrt{\pi t_i})^{-1}$  (максимальна температура — в точці прикладання імпульсу). Оскільки  $a^2 = K(c\rho)^{-1}$ , то в кожний фіксований момент часу максимальна температура обернено пропорційна коефіцієнту теплопровідності  $K$ .

Обчислимо інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1.$$

Це означає, що площа під кожною кривою дорівнює 1, тобто кількість теплоти  $q = \text{ср}$  у стержні залишається незмінною з плином часу.

З рис. 3.2 бачимо, що вся площа, обмежена кривою (3.55) і віссю абсцис, знаходиться над проміжком  $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ , де  $\varepsilon$  — як завгодно мале число, якщо тільки  $t > 0$  — досить мале. За модулем ця площа, помножена на  $-\rho$ , дорівнює кількості теплоти, яку було підведено в початковий момент часу  $t = 0$ . Таким чином, для малих значень  $t > 0$  майже вся теплота зосереджена в малому околі точки  $\xi$ . Із цих міркувань випливає, що в момент часу  $t = 0$  вся кількість теплоти зосереджена в точці  $x = \xi$ , тобто ми маємо миттєве точкове джерело теплоти.

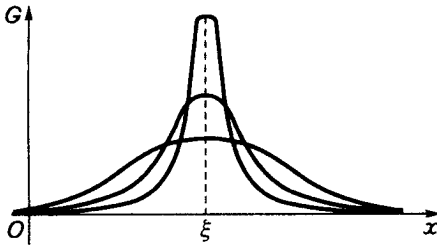


Рис. 3.2

Формула (3.66) показує, що в усякій точці стержня  $x$  температура, яка створюється миттєвим початковим джерелом теплоти, котра діє при  $t = 0$ , не дорівнює нулю для як завгодно малих  $t > 0$ .

Отже, хоч би яке мале було  $t$  і хоч би як далеко знаходилася точка  $x$  від  $x_0$ , теплота від точки  $x_0$  за інтервал часу  $t$  встигає дійти до точки  $x$ . Це означає, що теплота поширюється в стержні з нескінченною швидкістю. Однак це суперечить молекулярно-кінетичним уявленням про природу теплоти. Ця суперечність зумовлена тим, що під час виведення рівняння теплопровідності не враховувалась інерційність процесу руху молекул. Однак добутий фізично суперечливий висновок на практиці ускладнень не спричиняє. Якщо  $|x - x_0|$  велике, а  $t$  мале, то у формулі (3.66) від'ємний показник великий за модулем і температура  $u(t, x)$  є настільки малою, що нею можна нехтувати. Отже, практично з точністю до величин, якими можна нехтувати, швидкість поширення теплоти є скінченною.



Тепер на підставі вищенаведених міркувань легко дати фізичну інтерпретацію формули Пуассона. Розв'язок (3.54) можна розглядати як результат суперпозиції (накладання) температур, що виникають у точці  $x$  у момент часу  $t$  унаслідок неперервно розподілених у стержні теплових імпульсів інтенсивністю  $\varphi(\xi)$  у точці  $\xi$ , прикладених у початковий момент часу  $t = 0$ .

### 3.10

#### Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкової температури та інтенсивності внутрішніх джерел теплоти

Нехай функції  $u_1(t, P)$  і  $u_2(t, P)$ ,  $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$  є розв'язками задач Коші:

$$u_1(t, P) = \Delta u_1(t, P) + f_1(t, P), \quad (t, P) \in \Omega = (0, +\infty) \times E_n, \\ u_1(0, P) = \varphi_1(P), \quad P \in E_n, \quad (3.67)$$

$$u_2(t, P) = \Delta u_2(t, P) + f_2(t, P), \quad (t, P) \in \Omega, \\ u_2(0, P) = \varphi_2(P), \quad P \in E_n, \quad (3.68)$$

де  $f_i(t, P)$ ,  $\varphi_i(P)$ ,  $i = 1, 2$  — неперервні й обмежені функції в  $\Omega$  і  $E_n$  відповідно.

#### ТЕОРЕМА 3.7

*У класі обмежених функцій розв'язок задачі Коші неперервно залежить від початкової температури та інтенсивності внутрішніх джерел теплоти, тобто  $\forall \varepsilon > 0$  і  $t_1 > 0 \exists \delta > 0$ , що як тільки*

$$|f_1(t, P) - f_2(t, P)| < \delta, \quad (t, P) \in \Omega_1 = (0, t_1) \times E_n, \\ |\varphi_1(P) - \varphi_2(P)| < \delta, \quad P \in E_n, \quad (3.69)$$

*то  $|u_1(t, P) - u_2(t, P)| < \varepsilon$ .*

#### Доведення

Функції  $u_1(t, P)$  і  $u_2(t, P)$  є розв'язками задачі Коші (3.67), (3.68). Отже, беручи до уваги, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, P, Q) dQ = 1,$$

внаслідок (3.64) та нерівностей (3.69) маємо

$$\begin{aligned} |u_1(t, P) - u_2(t, P)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, P, Q) |\varphi_1(Q) - \varphi_2(Q)| dQ + \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau, P, Q) |f_1(\tau, Q) - f_2(\tau, Q)| dQ d\tau < \delta(1 + t_1). \end{aligned}$$

Якщо  $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_1}$ , то  $|u_1(t, P) - u_2(t, P)| < \varepsilon \quad \forall (t, P) \in \Omega_1$ .

Теорему доведено.

Таким чином, задача Коші для рівняння теплопровідності в класі неперервних і обмежених у фазовому просторі  $\Omega = (0, +\infty) \times E_n$  функцій має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від функції  $f(t, P)$  і початкової функції, тобто задачу Коші для рівняння теплопровідності поставлено коректно.

### 3.11

#### **Поширення теплоти в напівнескінченному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею**

Розглянемо один граничний випадок основних мішаних задач для рівняння теплопровідності.

Нехай дано досить довгий стержень із теплоізолюваною бічною поверхнею. Потрібно визначити розподіл температури в малій частині стержня, яка знаходиться біля одного з його кінців і значно віддалена від іншого. В цьому випадкові процес розподілу теплоти в розглядуваній частині залежатиме від початкової температури стержня та теплового режиму ближнього кінця. В задачах подібного типу вважають, що стержень напівнескінченний, і координата, яка відлічується від досліджуваного кінця, змінюється в межах  $0 \leq x < +\infty$ . Таким чином, приходимо до однієї із задач: в області  $\Omega = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x) \quad (3.70)$$

(стержень однорідний), який задовольняє початкову умову

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, +\infty) \quad (3.71)$$

та одну з крайових:

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad t \geq 0 \quad (3.72)$$

(задано температуру);

$$u_x(t, 0) = \mu_2(t), \quad t \geq 0 \quad (3.73)$$

(задано тепловий потік);

$$u_x(t, 0) = h[u(t, 0) - \theta(t)], \quad t \geq 0 \quad (3.74)$$

(задано теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого дорівнює  $\theta(t)$ ).

Надалі детально зупинимося на дослідженні задачі: в області  $\Omega$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (3.75)$$

який задовольняє початкову (3.71) і крайову (3.72) умови.

Для того щоб умови (3.71) і (3.72) однозначно визначали розв'язок поставленої задачі в просторі обмежених функцій, надалі вимагатимемо, щоб  $\varphi(x)$  була неперервна й обмежена при  $x \in [0, +\infty)$ , а  $\mu_1(t)$  — неперервно диференційовною при  $t \geq 0$ , причому

$$\varphi(0) = \mu_1(0) = 0.$$

Шукатимемо розв'язок задачі (3.75), (3.71), (3.72) у вигляді

$$u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x), \quad (3.76)$$

де  $u_1(t, x)$  і  $u_2(t, x)$  є розв'язком рівняння (3.75), а

$$u_1(0, x) = \varphi(x), \quad u_1(t, 0) = 0, \quad (3.77)$$

$$u_2(0, x) = 0, \quad u_2(t, 0) = \mu_1(t). \quad (3.78)$$

Очевидно, що сума (3.76) буде розв'язком поставленої задачі (3.75), (3.71), (3.72).

Знайдемо розв'язок задачі (3.75), (3.77). Для цього розглянемо функцію

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Функція  $\Psi(x)$  є обмеженою при  $x \in (-\infty, +\infty)$  і непарною. Покажемо, що функція

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} \Psi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \quad (3.79)$$

при  $x \geq 0$  є розв'язком задачі (3.75), (3.77). Справді,

$$u_1(t, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} \Psi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} d\xi = 0,$$

оскільки підінтегральна функція обмежена й непарна.

У п. 3.8 було показано, що з (3.79)  $\lim_{t \rightarrow 0} u_1(t, x) = \psi(x)$ , тобто при  $x > 0$   $\lim_{t \rightarrow 0} u_1(t, x) = \varphi(x)$ , а отже, (3.79) є розв'язком задачі (3.75), (3.77).

Перетворимо (3.79). Використовуючи непарність функції  $\varphi(x)$ , дістаємо

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-x}^0 \Psi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi + \int_0^{+x} \Psi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \right\} = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-x}^0 \varphi(-\xi') \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi')^2}{4a^2 t}} d\xi' + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} \varphi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \end{aligned}$$

У першому інтегралі покладемо  $\xi = -\xi'$ . Тоді

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+x} \varphi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+x} \varphi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+x} \varphi(\xi) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi. \quad (3.80) \end{aligned}$$

Покажемо, що розв'язок задачі (3.75), (3.78) представляється у вигляді

$$u_2(t, x) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_1(\tau) d\tau. \quad (3.81)$$

Введемо нову змінну інтегрування

$$z = \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}, \quad dz = \frac{x d\tau}{4a(t-\tau)^{3/2}}, \quad \tau = t - \frac{x^2}{(2az)^2}.$$

Тоді з (3.81)

$$u_2(t, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} e^{-z^2} \mu_1\left(t - \frac{x^2}{4a^2z^2}\right) dz. \quad (3.82)$$

Із (3.81) маємо  $u_2(0, x) = 0$ , а з (3.82) дістаємо

$$u_2(t, 0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} \mu_1(t) dz = \mu_1(t),$$

тобто умови (3.78) виконуються.

Беручи до уваги, що  $u_2(0, 0) = \mu_1(0)$ , з (3.82), диференціюючи один раз за  $t$  і двічі за  $x$ , матимемо

$$\begin{aligned} u_{2,t}(t, x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \mu_1'\left(t - \frac{x^2}{4a^2z^2}\right) e^{-z^2} dz, \\ u_{2,x}(t, x) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \mu_1'\left(t - \frac{x^2}{4a^2z^2}\right) \frac{x}{2a^2z^2} e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \mu_1'\left(t - \frac{x^2}{4a^2z^2}\right) \frac{1-2z^2}{x^2} e^{-z^2} dz, \\ u_{2,xx}(t, x) &= \frac{2}{a^2\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \mu_1'\left(t - \frac{x^2}{4a^2z^2}\right) e^{-z^2} dz - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \frac{\mu_1' \left( t - \frac{x^2}{4a^2 z^2} \right)}{2a^2 z^2} e^{-z^2} dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+x} \mu_1' \left( t - \frac{x^2}{4a^2 z^2} \right) \times \\
& \times \frac{1-2z^2}{x^2} e^{-z^2} dz = \frac{2}{a^2 \sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+x} \mu_1' \left( t - \frac{x^2}{4a^2 z^2} \right) e^{-z^2} dz.
\end{aligned}$$

Отже, функція (3.81) задовольняє й рівняння (3.75).

Підставивши (3.80) і (3.81) в (3.76), дістанемо розв'язок поставленої задачі (3.75), (3.71), (3.72):

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+x} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi + \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x\mu_1(\tau)}{a(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.
\end{aligned}$$

Якщо кінець  $x = 0$  є теплоізолюваним, тобто

$$u_x(t, 0) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.83)$$

то розв'язок задачі (3.75), (3.71), (3.83) дається формулою

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+x} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi. \quad (3.84)$$

Для побудови розв'язку (3.84) функцію  $\varphi(x)$  продовжуємо на проміжок  $(-\infty, 0)$  таким чином, щоб вона була парною.

Зауважимо, що в теорії диференціальних рівнянь досліджуються й задачі без початкових умов. Такі задачі трапляються в дослідженні процесів теплопровідності в момент, достатньо віддалений від початкового, а отже, початкова умова практично не впливає на розподіл теплоти в момент спостереження.



### Задачі для самостійного розв'язування

1. Однорідне ізотропне тіло  $G$  у початковий момент має температуру  $f(x, y, z)$ . Між цим тілом і навколишнім середовищем, температура якого в усіх точках дорівнює  $\psi(t)$ , відбувається теплообмін. Теплообмін у тілі вільний. Визначити рівняння й початкові та крайові умови, які задовольняє температура  $u(t, x, y, z)$  точок цього тіла.
2. В однорідному ізотропному тілі  $G$  відбувається вільний теплообмін. Тіло теплоізоване від навколишнього середовища. Визначити крайові умови, які має задовольняти температура  $u(t, x, y, z)$  точок цього тіла.
3. Не користуючися рівнянням теплопровідності для тривимірного тіла, вивести рівняння розподілу теплоти в тонкому однорідному ізотропному стержні постійного перерізу, якщо бічна поверхня цього стержня теплоізована. Теплообмін у стержні вільний.
4. Поставити мішану задачу про визначення температури однорідного ізотропного стержня завдовжки  $l$  із теплоізованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є довільною функцією  $x$ , за таких умов:
  - а) лівий кінець стержня теплоізований, а на правому — задано температуру  $v(t)$ ;
  - б) через правий кінець стержня відбувається теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого дорівнює  $\theta(t)$ , а лівий кінець підтримується за нульової температури;
  - в) на кінцях стержня задано теплові потоки  $\mu_1(t)$  і  $\mu_2(t)$  відповідно.
5. Скласти математичну модель процесу розподілу температури в однорідному ізотропному стержні завдовжки  $l$ , початкова температура якого становить  $\phi(x)$ , якщо через його бічну поверхню відбувається теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури, інтенсивність внутрішніх джерел теплоти стержня дорівнює  $f(t, x)$ , а його кінці теплоізовані.
6. Вивести рівняння дифузії в середовищі, яке рухається зі сталою швидкістю в напрямі осі  $Ox$ , якщо поверхнями рівної концентрації в кожен момент часу  $t$  є площини, перпендикулярні до осі  $Ox$ .

- ✓ **Вказівка.** Для описання процесу дифузії потрібно виділити елемент з постійною площею перерізу (рис. 3.3), паралельною осі  $Ox$ , і розглянути кількість речовини, яка проходить через перерізи  $x$  і  $x + \Delta x$  за рахунок дифузії і перенесення рухомою середовищем. Для визначення концентрації  $u(t, x)$  речовини, що дифундує, дістанемо рівняння

$$u_t(t, x) = du_{xx}(t, x) - \sigma u_x(t, x),$$

де  $d$  — коефіцієнт дифузії;  $\sigma$  — швидкість руху середовища.

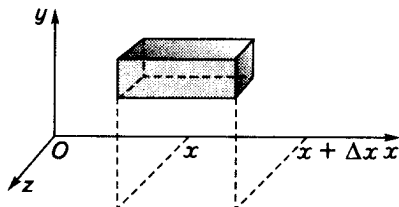


Рис. 3.3

7. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні завдовжки  $l$  з постійною початковою температурою  $u_0$ , якщо в лівому кінці стержня температура змінюється за законом  $u_0 \cos \omega t$  ( $\omega = \text{const}$ ), а в правому — підтримується температура  $u_0$ . Всередині стержня є джерела й поглиначі теплоти; їхня інтенсивність (у розрахунку на одиницю маси стержня) дорівнює  $-u_0 \omega \frac{l-x}{l} \sin \omega t$ . Бічна поверхня стержня теплоізолювана.
8. Дано тонкий однорідний ізотропний стержень завдовжки  $l$ , початкова температура якого дорівнює нулю. На кінці  $x = l$  підтримується нульова температура, а на кінці  $x = 0$  вона зростає пропорційно часу, що минає:  $u(t, 0) = At$ ,  $A = \text{const}$ . Бічна поверхня стержня теплоізолювана. Знайти закон зміни температури всередині стержня.
9. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні завдовжки  $l$  за вільного теплообміну, якщо його початкова температура задана рівністю  $u(0, x) = u_0(x/l)$ ,  $u_0 = \text{const}$ . Бічна поверхня та лівий кінець стержня теплоізолювані, а в правому кінці підтримується постійна температура  $u_0$ .
10. У скінченному стержні завдовжки  $l$  обидва кінці теплоізолювані, а його початкова температура постійна й дорівнює  $u_0$ . Визначити температуру стержня  $u(t, x)$  у будь-який момент часу, якщо стержень однорідний ізотропний і його бічна поверхня теплоізолювана.



11. Дано тонкий однорідний стержень завдовжки  $l$ , початкова температура якого дорівнює  $u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0)$ ,  $u_0, u_1 = \text{const}$ . Кінці стержня  $x = 0$  і  $x = l$  мають постійні температури  $u_0$  і  $u_1$  відповідно. Через бічну поверхню стержня відбувається теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю. Визначити температуру стержня в довільний момент часу  $t$ .
12. Дано тонкий однорідний стержень завдовжки  $l$ , початкова температура якого дорівнює  $u_0 = \text{const}$ . На кінці  $x = l$  підтримується постійна температура  $u_0$ , а на кінці  $x = 0$  і через бічну поверхню стержня відбувається теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю. Визначити температуру стержня в довільний момент часу  $t$ .
13. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні завдовжки  $l$  за вільного теплообміну, якщо початкова температура цього стержня дорівнює нулю, на лівому кінці вона змінюється за законом  $A(1 - e^{-\alpha x})$ ,  $A, \alpha = \text{const}$ , а через правий — відбувається теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого нульова. Бічна поверхня стержня теплоізолювана.
14. Дано тонкий однорідний ізотропний стержень завдовжки  $l$ , бічна поверхня якого теплоізолювана. Початкова температура стержня

$$u(0, x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq 0,5l, \\ l - x & \text{при } 0,5l \leq x \leq l. \end{cases}$$

На обох кінцях стержня відбувається теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого нульова. Визначити температуру стержня в момент часу  $t > 0$ .

15. Зінтегрувати мішані задачі й дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\begin{aligned} \text{а) } u_t &= u_{xx} - \alpha^2 u, \quad 0 < t \leq T, \quad x \in (0, l), \\ u(0, x) &= x(x - l), \quad x \in [0, l], \\ u_x(t, 0) &= 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad t \in [0, T]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } u_t &= a^2 u_{xx} + x \sin t, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, l), \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, l], \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T]; \end{aligned}$$

в)  $u_t = u_{xx} - u + 4x, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, l),$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l],$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T];$$

г)  $u_t = a^2 u_{xx}, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, 2),$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 2],$$

$$u(0, t) = \sin \omega t, \quad u(2, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad \omega = \text{const};$$

д)  $u_t = 0, 25u_{xx}, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, 1),$

$$u(x, 0) = 2x, \quad x \in [0, l],$$

$$u(0, t) = 0, \quad [u_x - hu] |_{x=1} = 0, \quad t \in [0, T], \quad h = \text{const}.$$

16. Розчинена речовина з початковою концентрацією  $c_0 = \text{const}$  дифундує з розчину, який замкнений між площинами  $x = 0, x = h$ , у розчинник, обмежений площинами  $x = h$  і  $x = l$ . Визначити процес вирівнювання концентрації, вважаючи, що краї  $x = 0, x = l$  непроникні для речовини.

✓ *Вказівка.* Задача зводиться до інтегрування рівняння

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, l)$$

за умов

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} c_0 & \text{при } x \in [0, h], \\ 0 & \text{при } x \in [h, l]. \end{cases}$$

17. Дано однорідну ізотропну кулю радіусом  $R$  із центром у початку координат. Відомо, що початкова температура довільної точки кулі залежить тільки від відстані  $\rho$  цієї точки від центра кулі. Зовнішня поверхня кулі має нульову температуру. Визначити температуру довільної точки кулі в момент часу  $t > 0$ .

✓ *Вказівка.* Якщо в початковий момент часу температура в кожній точці залежить тільки від її відстані  $\rho$  від центра кулі, то й для довільного  $t > 0$  температура  $u$  залежатиме тільки від  $\rho$  і часу  $t$ . Унаслідок радіальної симетрії рівняння теплопровідності у сферичних координатах запишеться у вигляді

$$u_t = a^2 \left( u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho} u_\rho \right).$$

Переходячи до нової невідомої функції  $v = \rho u(\rho, t)$ , дістаємо мішану задачу

$$v_t = a^2 v_{\rho\rho}, \quad \rho \in (0, R), \quad t \in (0, T],$$

$$v(\rho, 0) = \rho\varphi(\rho), \quad \rho \in [0, R],$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(R, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Перша крайова умова є наслідком обмеженості температури в центрі кулі

$$v(0^+, t) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho u(\rho, t) = 0.$$

18. Визначити розподіл температури в однорідній ізотропній кулі радіусом  $R$ . У кулі, починаючи з моменту часу  $t = 0$ , діють джерела теплоти зі сталою густиною  $Q$ , а поверхня кулі має нульову температуру. Початкова температура кулі також нульова.
19. Початкова температура однорідної ізотропної кулі  $0 \leq \rho \leq R$  становить  $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$ , а на поверхні кулі задано сталий тепловий потік густиною  $q$ . Знайти температуру кулі при  $t > 0$ .
20. Визначити розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному коловому циліндрі радіусом  $R$  за умови, що його початкова температура

$$u|_{t=0} = u_0(1 - \rho^2/R^2), \quad u_0 = \text{const},$$

а на бічній поверхні підтримується нульова температура.

21. Дослідити радіальний розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному коловому циліндрі радіусом  $R$ , бічна поверхня якого має постійну температуру  $u_0$ . Початкова температура в циліндрі дорівнює нулю.
22. Знайти закон розподілу температури в нескінченному однорідному ізотропному коловому циліндрі радіусом  $R$  із початковою температурою  $\psi(\rho, \varphi)$ , якщо на його бічній поверхні підтримується нульова температура.
23. Знайти температуру необмеженого однорідного ізотропного колового циліндра радіусом  $R$ , якщо його початкова температура

$$u|_{t=0} = f(\rho, \varphi), \quad \rho \in [0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

а на поверхні відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю.

24. Знайти розв'язок рівняння

$$u_{xx} = \frac{3}{2}(1 - x^2)u_t, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, 1),$$

який задовольняє умови

$$u(x, 0) = 1, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

25. Знайти розв'язок рівняння

$$u_t = a^2 u_{xx} - uu_x, \quad t > 0, \quad x \in (0, l),$$

який задовольняє умови

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, l],$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

✓ *Вказівка.* Нехай  $\theta(x, t)$  — розв'язок рівняння  $\theta_t = a^2 \theta_{xx}$ . Тоді

$u(x, t) = -2a^2 \frac{\theta_x}{\theta}$  є розв'язком рівняння  $u_t + uu_x = a^2 u_{xx}$ . Але

$$\theta(x, t) = c(t) e^{-\frac{1}{2a^2} \int_0^x u(\xi, t) d\xi},$$

отже,

$$\theta(x, 0) = c_0 e^{-\frac{1}{2a^2} \int_0^x u(\xi, 0) d\xi} = \theta_0(x).$$

Унаслідок крайових умов маємо

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

26. Знайти закон розподілу температури в нескінченному однорідному ізотропному стержні, якщо в початковий момент часу температура була розподілена так:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > h, \\ -T & \text{при } -h < x < 0, \\ T & \text{при } 0 < x < h. \end{cases}$$

Теплообмін вільний.

27. Початковий розподіл температури в нескінченному однорідному

ізотропному стержні задається формулою  $u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{x^2}{l^2}}$ , де  $u_0$  і  $l$  — задані сталі величини. Теплообмін вільний. Знайти закон розподілу температури в стержні при  $t > 0$ .

28. Визначити розподіл температури в напівнескінченному однорідному ізотропному стержні, який розміщений на проміжку прямої  $0 \leq x < +\infty$ , якщо лівий кінець має нульову температуру, а початковий розподіл температури в стержні задається

рівністю  $u(x, 0) = f(x)$ , де  $f(x)$  — функція, абсолютно інтегрована на проміжку  $(0, +\infty)$ . Теплообмін вільний. Розглянути випадок, коли  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$ .

29. Дано напівнескінченний однорідний ізотропний стержень із теплоізованими бічною поверхнею та лівим кінцем, початкова температура якого дорівнює  $\varphi(x)$ . Теплообмін вільний. Визначити розподіл температури в стержні при  $t > 0$ .
30. Знайти закон розподілу температури в напівнескінченному однорідному ізотропному стержні з теплоізованою бічною поверхнею, початкова температура якого дорівнює  $\varphi(x)$ . На кінці стержня відбувається теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури. Теплообмін вільний.

## Глава

# 4

## РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

---

На підставі введеної в гл. 1 класифікації ДРЧП квазілінійне рівняння

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) U_{\xi_i \xi_j}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \\ = F(\xi_1, \dots, \xi_n, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_n})$$

у  $D$  називається *рівнянням еліптичного типу*, якщо в кожній точці області  $D$  за допомогою невивродженого перетворення незалежних змінних  $x_\mu = x_\mu(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $i = \overline{1, n}$  його можна звести до вигляду

$$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}).$$

Покажемо, що до рівнянь еліптичного типу приводять дослідження стаціонарних процесів різної фізичної природи.

### Тема 1

#### ФІЗИЧНІ ПРОЦЕСИ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

### 4.1

#### Рівняння для потенціалу тяжіння

Нехай у точці  $(x, y, z)$  розташоване тіло з одиничною масою, а в точці  $(x_0, y_0, z_0)$  — тіло масою  $M$ . Згідно з установленим Ньютоном законом усесвітнього тяжіння між двома довільними тілами діє сила притягання  $F(x, y, z)$ , яка прямо пропорційна їхнім масам і обернено пропорційна квадрату відстані між ними.

Замість сили  $F(x, y, z)$  розглянемо її потенціал

$$u(x, y, z) = \gamma \frac{M}{r}, \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

де  $\gamma$  — деяка стала. Щоб обчислити компоненти  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  сили  $F(x, y, z)$ , потрібно покласти

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Поле потенціалу  $u(x, y, z)$  повністю визначає векторне поле  $\{F_x, F_y, F_z\}$ .

У випадку, коли в точках  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, n$  розташовані тіла, що притягуються, з масами  $M_i$  відповідно, силу можна обчислити за тими самими формулами, якщо за потенціал взяти функцію

$$u(x, y, z) = \gamma \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{r_i}, \quad r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2. \quad (4.1)$$

Вивчаючи тяжіння, П. С. Лаплас запропонував користуватися не потенціалом  $u(x, y, z)$ , а диференціальним рівнянням, яке задовольняє потенціал. Це рівняння можна дістати так.

Розглянемо спочатку в (4.1) лише один доданок

$$u_i(x, y, z) = M_i/r_i$$

і обчислимо частинні похідні першого та другого порядків. Маємо

$$\begin{aligned} u_{i_x} &= -\gamma M_i \frac{x - x_i}{r_i^3}, & u_{i_y} &= -\gamma M_i \frac{y - y_i}{r_i^3}, & u_{i_z} &= -\gamma M_i \frac{z - z_i}{r_i^3}, \\ u_{i_{xx}} &= \gamma M_i \left[ -r_i^{-3} + 3 \frac{(x - x_i)^2}{r_i^5} \right], \\ u_{i_{yy}} &= \gamma M_i \left[ -r_i^{-3} + 3 \frac{(y - y_i)^2}{r_i^5} \right], \\ u_{i_{zz}} &= \gamma M_i \left[ -r_i^{-3} + 3 \frac{(z - z_i)^2}{r_i^5} \right]. \end{aligned}$$

Додамо останні рівності:

$$\Delta u_i \equiv u_{i_{xx}} + u_{i_{yy}} + u_{i_{zz}} = 0.$$

Оскільки  $u = \sum_{i=1}^n u_i$ , то справедлива рівність

$$\Delta u(x, y, z) = 0, \quad (4.2)$$

яка називається *рівнянням Лапласа в тривимірному просторі*.

Таким чином, П. С. Лаплас запропонував відмовитися від явної формули для сил далекодії і замінити її диференціальним рівнянням для поля потенціалу  $u(x, y, z)$ . Можна вважати, що диференціальне рівняння описує взаємодію сусідніх елементів поля  $u(x, y, z)$ . Отже, Лапласу належить ідея введення рівнянь для описання цього поля  $u(x, y, z)$ , які справедливі всюди поза точками, в котрих зосереджені самі маси, що притягуються (в точках  $x = x_i, y = y_i, z = z_i$  не можна обчислити похідні за наведеними вище формулами).

Якщо поле тяжіння спричинене рівномірно розподіленою в деякому об'ємі масою, то потенціал  $u(x, y, z)$  задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta u(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z),$$

де  $\rho(x, y, z)$  — густина розподілу мас, і вона є неперервно диференціальною функцією.

## 4.2

### Потенціальний потік нестисливої рідини

У просторі  $x, y, z$  розглянемо довільний об'єм  $G$ , обмежений поверхнею  $S$ . Нехай у розглядуваному просторі рідина рухається зі швидкістю  $\vec{v}(t, x, y, z)$ . Зазначимо, що  $\vec{v}(t, x, y, z)$  — швидкість рідини в кожній даній точці  $(x, y, z)$  простору в момент часу  $t$ , тобто стосується певних точок простору, а не частинок рідини. Позначимо через  $\rho(t, x, y, z)$  густину рідини, а через  $f(t, x, y, z)$  — інтенсивність джерел, тобто кількість рідини, яка виділяється одиницею об'єму за одиницю часу.

Загальна кількість рідини, яка надходить в об'єм  $G$  за одиницю часу,

$$\begin{aligned} q &= - \iint_S \rho v_{\vec{n}} ds + \iiint_G f(t, x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_G [-\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + f] dx dy dz, \end{aligned}$$

де  $v_{\vec{n}}$  — проекція вектора  $\vec{v}(t, x, y, z)$  на зовнішню нормаль до поверхні  $S$ .

На підвищення густини рідини в елементі об'єму  $dx dy dz$  на величину  $d\rho$  за одиницю часу піде кількість рідини  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$ , а отже,



загальна кількість рідини, яка йде на підвищення густини в об'ємі  $G$  за одиницю часу, становитиме

$$\iiint_G \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

Прирівнюючи цю кількість рідини до величини  $q$  і беручи до уваги, що  $G$  — довільний об'єм, дістаємо так зване *рівняння нерозривності*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = f(t, x, y, z). \quad (4.3)$$

Розглянемо тепер усталений (стаціонарний) потік нестисливої рідини, тобто рідини з постійною густиною. Нехай рух рідини потенціальний, інакше кажучи, швидкість  $\vec{v}(t, x, y, z)$  є потенціальним вектором

$$\vec{v}(x, y, z) = -\operatorname{grad} u(x, y, z), \quad (4.4)$$

де  $u(x, y, z)$  — потенціальна функція потоку. Тоді, підставивши (4.4) в рівняння нерозривності (4.3), дістанемо

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \equiv \Delta u(x, y, z) = -\frac{f(x, y, z)}{\rho},$$

тобто знову прийшли до рівняння Пуассона.

### 4.3

#### **Стаціонарне теплове поле. Постановка крайових задач для рівнянь еліптичного типу**

Вивчаючи рівняння параболічного типу, ми показали, що процес розподілу температури в однорідному тілі описується диференціальним рівнянням

$$u_t = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z).$$

Якщо ж розглянути стаціонарний процес розподілу температури, то  $u = u(x, y, z)$ , і інтенсивність внутрішніх джерел теплоти також не залежатиме від часу, тобто дістанемо

$$\Delta u(x, y, z) = -\frac{1}{a^2} f(x, y, z). \quad (4.5)$$

Отже, всі розглянуті стаціонарні процеси описуються рівняннями еліптичного типу.

Найпростішим і найпоширенішим рівнянням еліптичного типу є  $n$ -вимірне рівняння Лапласа

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0. \quad (4.6)$$

Позначимо через  $D$  область, обмежену кусково-гладкою замкнутою поверхнею  $S$ , а через  $D^*$  — частину простору, що лежить поза  $D$ .

► **Означення 4.1.** Функцію  $u(x_1, \dots, x_n)$  називають **гармонічною в обмеженій області  $D$**  (рис. 4.1), якщо  $u \in C^2(D)$  і є розв'язком рівняння Лапласа (4.6).

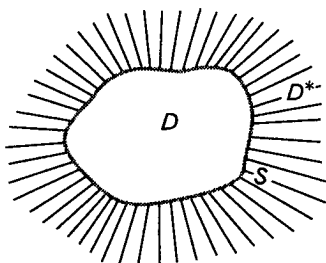


Рис. 4.1

Функцію  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  називають **гармонічною в необмеженій області  $D^*$** , якщо в кожній точці цієї області, яка знаходиться на скінченній відстані від початку координат, функція двічі неперервно диференційовна, задовольняє рівняння Лапласа й для досить великих

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \text{ справедлива нерівність}$$

$$|u(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq C/r^{n-2}, \quad (4.7)$$

де  $C$  — деяка стала.

Зауважимо: у випадку двовимірного простору умова (4.7) означає, що гармонічна функція в необмеженій області  $D^*$  має бути обмеженою.

Умову (4.7) іноді ще називають **умовою регулярності на нескінченності**.

Очевидно, що для однозначного описання досліджуваного стаціонарного фізичного процесу потрібно враховувати й режим на краю

розглядуваної області, тобто до рівняння еліптичного типу необхідно приєднати відповідні крайові умови.

Як приклад розглянемо стаціонарний процес розподілу температури в однорідному середовищі  $D$ , що обмежене кусково-гладкою поверхнею  $S$ , якщо інтенсивність внутрішніх джерел теплоти дорівнює  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а на поверхні  $S$  задано:

- а) або температуру  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;
- б) або тепловий потік  $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;
- в) або теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого  $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Щоб визначити температуру  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у довільній точці області  $D$ , потрібно в класі функцій  $C^2(D) \cap C(\bar{D})$  знайти розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.8)$$

який задовольняє одну з крайових умов:

$$u|_S = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (4.9)$$

$$\lim_{P \rightarrow P'} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (4.10)$$

$$\lim_{P \rightarrow P'} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + K_1 |u - \omega(x_1, \dots, x_n)| = 0 \quad (4.11)$$

на поверхні  $S$ , де точка  $P \in D$ , а  $P' \in S$ ;  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\omega(x_1, \dots, x_n)$  — відомі на  $S$  функції;  $\bar{n}$  — зовнішня нормаль до  $S$ ;  $K_1$  — коефіцієнт зовнішньої теплопровідності.

Задача (4.8), (4.9) називається *першою внутрішньою крайовою задачею Діріхле*, задача (4.8), (4.10) — *другою внутрішньою крайовою задачею Неймана*, а задача (4.8), (4.11) — *третьою внутрішньою крайовою задачею* для рівнянь еліптичного типу.

Аналогічно ставляться крайові задачі для рівнянь еліптичного типу й у випадку необмеженої області  $D^*$  (зовнішньої щодо поверхні  $S$ ), тільки додатково вимагається виконання умови регулярності на нескінченності (4.7). У цьому разі відповідні перша, друга й третя крайові задачі називаються *зовнішніми*.

Зауважимо: якщо розв'язок рівняння (4.8) шукається в класі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ , то крайові умови (4.10), (4.11) матимуть вигляд

$$\left. \frac{\hat{\partial}u}{\hat{\partial}\bar{n}} \right|_S = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\left[ \frac{\hat{\partial}u}{\hat{\partial}\bar{n}} + K_1(u - \omega(x_1, \dots, x_n)) \right] \Big|_S = 0.$$

Щодо умови (4.7), то її виконання вимагається для однозначності розв'язку відповідної зовнішньої крайової задачі для рівняння Лапласа.

Наприклад, якщо

$$D^* = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > R^2, R = \text{const}\},$$

то розв'язок зовнішньої задачі Діріхле

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in D^*, \\ u|_S &= A = \text{const}, \quad S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

у разі виконання умови регулярності на нескінченності буде

$$u(x, y, z) = AR/r.$$

Якщо ж виконання умови (4.7) не вимагається, то задача (4.12) матиме й розв'язок  $u(x, y, z) = A$ .

Сформульовані вище три крайові задачі є основними в теорії рівнянь еліптичного типу. Разом із цим зазначимо, що на практиці коло задач для рівнянь еліптичного типу набагато ширше.

Як узагальнення основних крайових задач можна розглянути задачу відшукування в  $D$  розв'язку рівняння (4.8), коли на одній частині поверхні  $S$  задано умову (4.9), на другій — умову (4.10), а на третій — умову (4.11).

## 4.4

### Оператор Лапласа у сферичних і циліндричних координатах

Розглянемо допоміжне питання про представлення рівняння Лапласа в різних системах координат. Ці представлення використаємо в подальших міркуваннях.

Сферичні координати  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  пов'язані з декартовими співвідношеннями (рис. 4.2)

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (4.13)$$

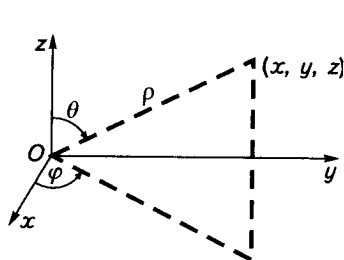


Рис. 4.2

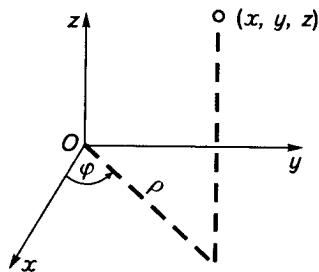


Рис. 4.3

Очевидно, що перетворення незалежних змінних (4.13) є невиврожденним. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\rho}, & \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\rho}, & \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \frac{z}{\rho}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\rho}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\rho}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sin \theta}{\rho}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\sin \varphi}{\rho \sin \theta}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \theta}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \\ \Delta \rho &= \frac{2}{\rho}, & \Delta \theta &= \frac{\cos \theta}{\rho^2 \sin \theta}, & \Delta \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні у вираз для оператора Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y, z) &= l(\rho, \rho)u_{\rho\rho} + l(\theta, \theta)u_{\theta\theta} + l(\varphi, \varphi)u_{\varphi\varphi} + 2l(\rho, \theta)u_{\rho\theta} + \\ &+ 2l(\theta, \varphi)u_{\theta\varphi} + 2l(\rho, \varphi)u_{\rho\varphi} + \Delta \rho u_{\rho} + \Delta \theta u_{\theta} + \Delta \varphi u_{\varphi}, \end{aligned}$$

де  $l(v, \omega) = v_x \omega_x + v_y \omega_y + v_z \omega_z$ , дістанемо

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.14)$$

У випадку циліндричних координат  $\rho$ ,  $\varphi$  і  $z$  (рис. 4.3) маємо:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ . Повторюючи попередні міркування, дістаємо вираз для рівняння Лапласа в циліндричних координатах

$$\Delta u \equiv u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0.$$

Якщо задано рівняння Лапласа в двовимірному просторі, тобто  $u = u(x, y)$ , то з останнього рівняння дістаємо його вираз у полярній системі координат

$$\Delta u \equiv u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

## Тема 2

### ВЛАСТИВОСТІ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

#### 4.5

### Принцип максимуму та його наслідки

На проміжку  $(a, b)$  розглянемо рівняння Лапласа в одновимірному просторі  $u''(x) = 0$ . Зінтегрувавши його, дістанемо сім'ю прямих  $u(x) = C_1 x + C_2$ . Очевидно, свого найбільшого та найменшого значень вони досягають на кінцях відрізка  $[a, b]$ . Виявляється, цю властивість мають гармонічні функції й у багатовимірному просторі.

Надалі для простоти викладок розглядатимемо переважно три- та двовимірний простори.

#### ТЕОРЕМА 4.1

*Гармонічна в обмеженій області  $D$  і неперервна в  $\bar{D} = D \cup S$  функція  $u(x, y, z)$  набуває свого найбільшого та найменшого значень на краю області  $S$ .*

#### Доведення

Позначимо через  $m$  найбільше значення гармонічної функції на краю  $S$  і припустимо, що в деякій точці  $(x_0, y_0, z_0) \in D$

$$u(x_0, y_0, z_0) = M > m.$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$v(x, y, z) = u(x, y, z) + \frac{M - m}{2d^2} r_0^2,$$

де  $d$  – діаметр області  $D$ ;  $r_0^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ .

Із нерівності  $r_0^2 \leq d^2$  випливає, що на поверхні  $S$

$$v(x, y, z) \leq m + \frac{M - m}{2d^2} d^2 = \frac{M + m}{2} < M,$$

а  $v(x_0, y_0, z_0) = M$ . Звідси дістаємо, що функція  $v(x, y, z)$  свого найбільшого значення досягає також у деякій внутрішній точці області  $D$ . Нехай ця точка буде  $(x_1, y_1, z_1)$ . Тоді в ній функція  $v(x_1, y_1, z_1)$  досягає максимуму, а отже, в точці  $(x_1, y_1, z_1)$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leq 0,$$

тобто  $\Delta v(x_1, y_1, z_1) \leq 0$ .

З іншого боку,

$$\Delta v(x, y, z) = \Delta u(x, y, z) + \frac{M - m}{2d^2} \Delta r_0^2 = 3 \frac{M - m}{d^2} > 0$$

для всіх  $(x, y, z) \in D$ , в тому числі й для  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Ця суперечність показує, що для всіх точок  $(x, y, z) \in D$

$$u(x, y, z) \leq \sup_S u(x, y, z).$$

Для доведення нерівності

$$u(x, y, z) \geq \inf_S u(x, y, z)$$

достатньо застосувати добутий результат до гармонічної функції  $-u(x, y, z)$ , і теорему доведено.

Із доведення теореми випливає, що гармонічна функція в області  $D$  не має екстремумів.

**Наслідок 1.** *Нехай функції  $u(x, y, z)$  і  $v(x, y, z)$  гармонічні в  $D$  і неперервні в  $\bar{D}$ . Якщо  $u(x, y, z) \leq v(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in S$ , то ця нерівність справедлива для всіх  $(x, y, z) \in D$ .*

Доведення

Функція  $\omega(x, y, z) = u(x, y, z) - v(x, y, z)$  гармонічна в  $D$  і неперервна в  $\bar{D}$ . Згідно з умовою наслідку  $\omega(x, y, z) \leq 0$  при  $(x, y, z) \in S$ . На підставі принципу максимуму  $\omega(x, y, z) \leq \sup_S \omega(x, y, z) \leq 0$  для всіх  $(x, y, z) \in D$ , і наслідок доведено.

- 1 **Наслідок 2.** Нехай функції  $u(x, y, z)$  і  $v(x, y, z)$  гармонічні в  $D$  і неперервні в  $\bar{D}$ . Якщо  $|u(x, y, z)| \leq v(x, y, z)$  на краю  $S$ , то ця нерівність виконується для всіх  $(x, y, z) \in D$ .

Доведення

На краю  $S$  області  $D$  маємо

$$-v(x, y, z) \leq u(x, y, z) \leq v(x, y, z).$$

Застосувавши двічі наслідок 1, дістанемо, що дана нерівність виконується всюди в  $D$ .

#### ТЕОРЕМА 4.2

Якщо послідовність  $\{u_i(x, y, z)\}$  гармонічних у  $D$  і неперервних у  $\bar{D}$  функцій збігається рівномірно на краю  $S$ , то вона збігається рівномірно й усюди в області  $D$ .

Доведення

Унаслідок рівномірної збіжності послідовності  $\{u_i(x, y, z)\}$  на краю  $S$  маємо, що для довільного  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке число  $N$ , що як тільки  $i_1, i_2 > N$ , то  $|u_{i_1}(x, y, z) - u_{i_2}(x, y, z)| < \varepsilon$  для всіх  $(x, y, z) \in S$ . Оскільки  $\varepsilon$  є гармонічною функцією, то згідно з наслідком 2 із принципу максимуму випливає, що остання нерівність справедлива всюди в області  $D$ , якщо вона справджується на краю  $S$ . Але тоді на підставі критерію Коші можемо стверджувати, що послідовність функцій  $\{u_i(x, y, z)\}$  рівномірно збігається в області  $D$ .

#### ТЕОРЕМА 4.3

Якщо внутрішня або зовнішня задача Діріхле має розв'язок, то цей розв'язок єдиний.

Доведення

Розглянемо внутрішню задачу Діріхле. Припустимо, що в області  $D$  існують два розв'язки  $u_1(x, y, z)$  і  $u_2(x, y, z)$  однієї й тієї самої задачі Діріхле

$$\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z), \quad (4.15)$$

$$u|_S = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S. \quad (4.16)$$

Тоді функція  $v(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$  буде гармонічною в  $D$ ,



а на краю  $S$   $v(x, y, z) \equiv 0$ . Звідси на підставі принципу максимуму  $v(x, y, z) \equiv 0$  всюди в  $D$ , оскільки в протилежному разі гармонічна функція  $v(x, y, z)$  досягла б найбільшого або найменшого значення в деякій внутрішній точці області  $D$ , що неможливо.

Розглянемо тепер задачу Діріхле (4.15), (4.16) в області  $D^*$  і також припустимо, що вона має два розв'язки:  $u_1(x, y, z)$  і  $u_2(x, y, z)$ . Тоді гармонічна в  $D^*$  функція  $v(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$  на  $S$  тотожно дорівнює нулю, і згідно з умовою регулярності на нескінченності вона прямує до нуля, коли точка  $M(x, y, z) \rightarrow \infty$ , тобто для всякого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $R$ , що як тільки відстань точки  $M$  від початку координат  $r \geq R$ , то  $|v(M)| < \varepsilon$ .

Нехай  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  — довільна точка області  $D^*$ . Проведемо сферу  $S_r$  із центром у початку координат і радіусом  $r \geq R$  настільки великим, щоб точка  $P_0$  і поверхня  $S$  знаходились усередині сфери. На  $S_r$  буде  $|v(M)| < \varepsilon$ , а на поверхні  $S - v(x, y, z) \equiv 0$ . Тоді, застосувавши наслідок 2 до області, обмеженої поверхнями  $S$  і  $S_r$ , дістанемо, що  $|v(P_0)| < \varepsilon$ . Унаслідок довільності  $\varepsilon > 0$  і точки  $P_0$  звідси випливає, що  $v(x, y, z) \equiv 0$  для всіх  $(x, y, z) \in D^*$ .

Зауважимо, що останні міркування справедливі тільки у випадку, коли вимірність розглядуваного простору  $n \geq 3$ .

Для доведення єдиності розв'язку зовнішньої задачі Діріхле у випадку площини здійснимо перетворення незалежних змінних за формулами

$$\xi = x/r^2, \quad \eta = y/r^2, \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (4.17)$$

Перетворення (4.17) називається *інверсією*. Внаслідок інверсії область  $D^*$  з краєм  $S$  переходить в обмежену область  $D'$  з краєм  $S'$ , а нескінченно віддалена точка відобразиться в точку  $(0, 0)$ . Не зменшуючи загальності міркувань, вважатимемо, що точка  $(0, 0) \in D'$ .

Розглянемо функцію  $\omega(\xi, \eta) = v(\xi/r_1^2, \eta/r_1^2)$ ,  $r_1^2 = \xi^2 + \eta^2$ . Якщо функція  $v(x, y)$  гармонічна в області  $D^*$ , то  $\omega(\xi, \eta)$  гармонічна в  $D'$ . Справді, беручи до уваги, що  $x = \xi/r_1^2$ ,  $y = \eta/r_1^2$ , маємо

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \frac{\eta^2 - \xi^2}{r_1^4} v_x - \frac{2\xi\eta}{r_1^4} v_y, & \omega_\eta &= -\frac{2\xi\eta}{r_1^4} v_x + \frac{\xi^2 - \eta^2}{r_1^4} v_y; \\ \omega_{\xi\xi} &= \left( \frac{\eta^2 - \xi^2}{r_1^4} \right)^2 v_{xx} - 4 \frac{\xi\eta(\eta^2 - \xi^2)}{r_1^8} v_{xy} + 4 \frac{\xi^2\eta^2}{r_1^8} v_{yy} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 2 \frac{\xi^3 - 3\xi\eta^2}{r_1^6} v_x - 2 \frac{\eta^3 - 3\xi^2\eta}{r_1^6} v_y, \\ \omega_{\eta\eta} = & 4 \frac{\xi^2\eta^2}{r_1^8} v_{xx} - 4 \frac{\xi\eta(\xi^2 - \eta^2)}{r_1^8} v_{xy} + \frac{(\xi^2 - \eta^2)^2}{r_1^8} v_{yy} - \\ & - 2 \frac{\xi^3 - 3\xi\eta^2}{r_1^6} v_x + 2 \frac{\eta^3 - 3\xi^2\eta}{r_1^6} v_y. \end{aligned}$$

Отже,

$$\Delta\omega(\xi, \eta) = r^4 \Delta v(x, y) \equiv 0, \quad (\xi, \eta) \in D'. \quad (4.18)$$

Оскільки

$$\omega(\xi, \eta)|_{S'} = v|_{S'} = 0, \quad (4.19)$$

то згідно з доведеним вище задача Діріхле (4.18), (4.19) у  $D'$  має тільки нульовий розв'язок, а отже, і  $v(x, y) = \omega(x/r^2, y/r^2) \equiv 0$  при  $(x, y) \in D^*$ .

#### ТЕОРЕМА 4.4

**про неперервну залежність розв'язку задачі Діріхле від крайової умови**

*Нехай  $u(x, y, z)$  — розв'язок задачі Діріхле (4.15), (4.16), а  $v(x, y, z)$  — розв'язок рівняння (4.15), який задовольняє крайову умову  $v|_S = \varphi_1(x, y, z)$ . Тоді, якщо  $|\varphi(x, y, z) - \varphi_1(x, y, z)| < \varepsilon$ , то  $|u(x, y, z) - v(x, y, z)| < \varepsilon$  всюди в області  $D$ .*

#### Доведення

Функція  $\omega(x, y, z) \equiv u(x, y, z) - v(x, y, z)$  є гармонічною в області  $D$ , а на поверхні  $S$   $|\omega(x, y, z)| < \varepsilon$ . Тоді згідно з наслідком 2  $|\omega(x, y, z)| < \varepsilon$  для всіх  $(x, y, z) \in \bar{D}$ , і теорему доведено.

□ **Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа.** В  $n$ -вимірному просторі розглянемо функцію

$$\Omega(P, M) = \begin{cases} \frac{r_{PM}^{2-n}}{n-2}, & n > 2, \\ -1/nr_{PM}, & n = 2, \end{cases} \quad (4.20)$$

де  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  і  $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  — довільні точки розглядуваного простору, а  $r_{PM} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}$  — відстань між ними. Покажемо, що

функція  $\Omega(P, M)$  є розв'язком рівняння Лапласа при  $P \neq M$  як за  $P$ , так і за  $M$ . Справді, при  $P \neq M$  із (4.20) дістанемо

$$\frac{\partial^2 \Omega(P, M)}{\partial x_j^2} = nr_{PM}^{-n-2} (x_i - \xi_i)^2 - r_{PM}^{-n}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння Лапласа, матимемо

$$\Delta \Omega(P, M) = \sum_{i=1}^n [nr_{PM}^{-n-2} (x_i - \xi_i)^2 - r_{PM}^{-n}] = nr_{PM}^{-n} - nr_{PM}^{-n} = 0,$$

тобто  $\Omega(P, M)$  як функція точки  $P$  при  $P \neq M$  і  $n > 2$  є розв'язком рівняння Лапласа. Оскільки  $\Omega(P, M)$  симетрична відносно точок  $P$  і  $M$ , то можемо стверджувати, що ця функція задовольняє рівняння Лапласа й за  $M$ , коли  $M \neq P$ .

Аналогічно можна показати, що при  $n = 2$  і  $P \neq M$  функція (4.20) також задовольняє рівняння Лапласа.

Визначена за формулою (4.20) функція  $\Omega(P, M)$  називається *елементарним*, або *фундаментальним*, розв'язком рівняння Лапласа.

◇ **Зауваження 4.1.** На практиці часто трапляється задача Діріхле з розривними крайовими умовами. В цьому разі неперервна функція в замкненій області не може бути розв'язком цієї задачі. У зв'язку з цим необхідно уточнити постановку першої крайової задачі у розглядуваному випадкові.

Нехай на поверхні  $S$ , яка обмежує область  $D$ , задано кусково-неперервну функцію  $\varphi(P')$ .

Постановка задачі Діріхле: в класі функцій  $C^2(D)$  знайти розв'язок рівняння Пуассона, який неперервно примикає до заданої на краю  $S$  функції  $\varphi(P')$  у точках її неперервності і є обмеженим у замкненій області  $\bar{D} = D \cup S$ .

Значимо, що додаткова вимога обмеженості розв'язку  $u(P)$  в  $\bar{D}$  фактично стосується околів точок розриву функції  $\varphi(P')$ .

#### ТЕОРЕМА 4.5

*Розв'язок задачі Діріхле з кусково-неперервними крайовими умовами єдиний.*

#### Доведення

Нехай  $u_1(P)$  і  $u_2(P)$  — два розв'язки поставленої задачі. Тоді різниця  $u(P) = u_1(P) - u_2(P)$  буде гармонічною функцією в області  $D$

(рис. 4.4), яка неперервно примикає до нульових крайових значень на  $S$ , за винятком точок розриву функції  $\varphi(P')$ , в яких вона може мати розрив, і є обмеженою в  $D$ , тобто існує така стала  $A$ , що для всіх  $P \in \bar{D} \mid u(P) \mid < A$ . Побудуємо гармонічну функцію

$$v(P) = \varepsilon \sum_{i=1}^m \frac{dr_i^{2-n}}{n-1} \quad \left( v(P) = \varepsilon \sum_{i=1}^m \ln \frac{d}{r_i}, \quad n = 2 \right),$$

де  $\varepsilon$  — довільне додатне число;  $d$  — діаметр області  $D$ ;  $r_i$  — відстань розглядуваної точки  $P$  до  $i$ -ї точки розриву  $P_i$ . Вважатимемо, що  $n = 3$ . Функція  $v(P)$  додатна, тому що всі доданки більші за нуль.

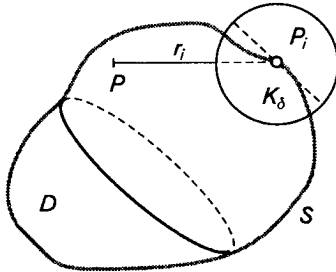


Рис. 4.4

Побудуємо в кожній точці розриву  $P_i$  кулю  $K_\delta(P_i)$  такого радіуса  $\delta < 1$ , щоб кожен доданок  $\varepsilon dr_i^{-1}$  на відповідній сфері  $S_\delta(P_i)$  був більший за  $A$ , тобто щоб  $\varepsilon d\delta^{-1} \geq A$ . Функція  $u(P)$  неперервна в замкненій області  $\bar{D} \setminus \sum_{i=1}^m K_\delta(P_i) = \bar{D}_1$  і  $|u(P)| \leq v(P)$  на краю цієї області.

Внаслідок принципу максимуму остання нерівність справедлива всюди в області  $\bar{D}_1$ .

Зафіксувавши довільну точку  $P \in D$  і спрямувавши  $\varepsilon \rightarrow 0$ , дістанемо  $\lim v(P) = 0$ . Оскільки  $u(P)$  не залежить від  $\varepsilon$ , то з нерівності  $|u(P)| \leq v(P)$  і добутої границі випливає справедливість твердження теореми, тобто  $u(P) = u_1(P) - u_2(P) = 0$ , коли  $P \in D$ .

### 4.6

#### Існування розв'язку задачі Діріхле для круга. Метод Фур'є

Метод відокремлення змінних Фур'є, який було розглянуто в гл. 2 і 3, застосовується й до інтегрування задачі Діріхле у випадку таких простих областей, як круг, кільце, прямокутник і т. д. Тут методом Фур'є розв'яжемо задачу Діріхле для круга.

**П о с т а н о в к а з а д а ч і:** в крузі радіусом  $R$  із центром у початку координат знайти гармонічну функцію  $u(\rho, \varphi)$ , яка на краю круга  $\rho = R$  дорівнює  $f(\varphi)$ , тобто в області  $K_R = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leq \rho < R, 0 < \varphi \leq 2\pi\}$  знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (4.21)$$

який задовольняє крайову умову

$$u(R, \varphi) = f(\varphi), \quad 0 < \varphi \leq 2\pi. \quad (4.22)$$

У зв'язку з тим, що задача Діріхле (4.21), (4.22) може мати єдиний розв'язок,  $f(\varphi)$  і розв'язок  $u(\rho, \varphi)$  мають бути періодичними з періодом  $2\pi$  функціями за  $\varphi$ .

Нетривіальні розв'язки рівняння (4.21) шукаємо у вигляді

$$u(\rho, \varphi) = X(\rho)Y(\varphi) \neq 0. \quad (4.23)$$

Підставивши (4.23) у рівнянні Лапласа (4.21) та відокремивши змінні, дістанемо

$$Y''(\varphi) + \lambda Y(\varphi) = 0; \quad (4.24)$$

$$\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho) - \lambda X(\rho) = 0, \quad (4.25)$$

де  $\lambda$  — довільна стала. Очевидно,  $Y(\varphi) = Y(\varphi + 2\pi)$ .

Отже, потрібно знайти ті значення параметра  $\lambda$ , за яких рівняння (4.24) має ненульові періодичні з періодом  $2\pi$  розв'язки (власні значення) й побудувати ці розв'язки (власні функції). Легко бачити, що розв'язки рівняння (4.24), які відповідають двом різним власним значенням, ортогональні на відрізку  $[0, 2\pi]$ . Покажемо, що всі власні значення  $\lambda$  дійсні. Для цього припустимо супротивне: нехай  $\lambda = \alpha + i\beta$  є власним значенням, а відповідна йому власна функція буде  $Y(\varphi) = u(\varphi) + i v(\varphi)$ . Тоді виконується тотожність

$$u''(\varphi) + iv''(\varphi) + (\alpha + i\beta)(u(\varphi) + iv(\varphi)) \equiv 0,$$

а отже,

$$\begin{aligned} u''(\varphi) + \alpha u(\varphi) - \beta v(\varphi) &\equiv 0, \\ i[v''(\varphi) + \alpha v(\varphi) + \beta u(\varphi)] &\equiv 0. \end{aligned}$$

Віднімаючи почленно ці тотожності, дістаємо

$$u''(\varphi) - iv''(\varphi) + (\alpha - i\beta)(u(\varphi) - iv(\varphi)) \equiv 0,$$

тобто  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  є власним значенням, а відповідна йому власна функція буде  $\bar{Y}(\varphi) = u(\varphi) - iv(\varphi)$ . Унаслідок ортогональності власних функцій має бути

$$\int_0^{2\pi} Y(\varphi)\bar{Y}(\varphi) d\varphi = 0.$$

Але

$$\int_0^{2\pi} Y(\varphi)\bar{Y}(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} [u^2(\varphi) + v^2(\varphi)] d\varphi \neq 0,$$

отже, власні значення не можуть бути комплексними.

Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді з (4.24) маємо  $Y(\varphi) = C_1\varphi + C_2$ . Для виконання умови періодичності потрібно покласти  $C_1 = 0$ , і ми дістанемо

$$Y(\varphi) = C_2. \quad (4.26)$$

При  $\lambda > 0$  ненульових періодичних розв'язків рівняння (4.24) не має.

Нехай  $\lambda < 0$ . Тоді, зінтегрувавши (4.24), дістанемо загальний розв'язок  $Y(\varphi) = C_3 \cos \sqrt{\lambda}\varphi + C_4 \sin \sqrt{\lambda}\varphi$ , який буде періодичним із періодом  $2\pi$ , якщо  $\sqrt{\lambda} = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Отже, ненульовими періодичними з періодом  $2\pi$  розв'язками рівняння (4.24) будуть функції

$$Y_n(\varphi) = C_3 \cos n\varphi + C_4 \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.27)$$

Підставивши добуті значення  $\lambda$  у рівняння (4.25), матимемо

$$\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho) - n^2 X(\rho) = 0. \quad (4.28)$$

Рівняння (4.28) — це рівняння Ейлера, й підстановкою  $\rho = e^t$  воно зводиться до вигляду

$$X''(t) - n^2 X(t) = 0,$$

звідки

$$X_n(t) = \begin{cases} C_5 e^{-nt} + C_6 e^{nt}, & n > 0, \\ C_7 t + C_8, & n = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

або

$$X_n(\rho) = \begin{cases} C_3 \rho^{-n} + C_6 \rho^n, & n > 0, \\ C_7 \ln \rho + C_8, & n = 0. \end{cases}$$

Для того щоб функція (4.29) у крузі  $0 \leq \rho < R$  була неперервною, треба покласти  $C_5 = C_7 = 0$ . Таким чином,

$$X_n(\rho) = C_6 \rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

Підставляючи (4.27) і (4.30) у (4.23), дістаємо

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $a_n = C_3 C_6$ ;  $b_n = C_4 C_6$ .

Унаслідок лінійності й однорідності рівняння Лапласа сума частинних розв'язків

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (4.31)$$

також буде розв'язком рівняння Лапласа, якщо ряд (4.31) збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі за  $\rho$  і  $\varphi$  в області  $K_R$ . Припустимо, що ці умови виконуються. Тоді для визначення розв'язку задачі Діріхле (4.21), (4.22) залишилося так вибрати коефіцієнти  $a_n$  і  $b_n$ , щоб ряд (4.31) задовольняв і крайову умову (4.22), на підставі якої

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Ми дістали представлення функції  $f(\varphi)$  на відрізку  $[0, 2\pi]$  рядом Фур'є. З математичного аналізу відомо: якщо функція  $f(\varphi)$  періодична, неперервна й кусково-диференційовна на відрізку  $[0, 2\pi]$ , то її ряд Фур'є в кожній точці  $\varphi \in [0, 2\pi]$  збігається й має суму, що дорівнює  $f(\varphi)$ , а коефіцієнти ряду визначаються за формулами

$$\alpha_n = a_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi \, d\psi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$\beta_n = b_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
(4.32)

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (4.31), дістанемо формальний розв'язок поставленої задачі Діріхле

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$
(4.33)

Для обґрунтування добутого розв'язку доведемо наступну теорему.

#### ТЕОРЕМА 4.6

Якщо функція  $f(\varphi)$  періодична з періодом  $2\pi$  і неперервна на відрізку  $[0, 2\pi]$ , то функція  $u(\rho, \varphi)$ , визначена рядом (4.33), є гармонічною в крузі  $K_R$  і неперервною в  $\bar{K}_R$ .

#### Доведення

Спочатку припустимо, що  $f(\varphi)$  є й кусково-диференційовною на відрізку  $[0, 2\pi]$ . Тоді, як відомо з теорії рядів Фур'є, ряд

$$\frac{|\alpha_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|)$$
(4.34)

збігається. Оскільки

$$\left| \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \alpha_n \cos n\varphi \right| \leq |\alpha_n|, \quad \left| \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \beta_n \sin n\varphi \right| \leq |\beta_n|,$$

то зі збіжності ряду (4.34) випливає рівномірна збіжність ряду (4.33) всюди в  $\bar{K}_R$ , а отже,  $u(\rho, \varphi)$  є неперервною в  $\bar{K}_R$ .

Покажемо, що ряд (4.33) можна почленно диференціювати довільну кількість разів і за  $\rho$ , і за  $\varphi$  при  $\rho < R$ .

Здиференціюємо почленно (4.33)  $k$  разів за  $\varphi$ . Маємо

$$\frac{\partial^k u(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n n^k \left[ \alpha_n \cos \left( n\varphi + k \frac{\pi}{2} \right) + \beta_n \sin \left( n\varphi + k \frac{\pi}{2} \right) \right].$$
(4.35)



Позначимо

$$M = \sup \{ |\alpha_n|, |\beta_n| \}, \quad t = \rho/R$$

і розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k. \quad (4.36)$$

Для довільного  $\rho_0 < R$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_0^{n+1} (n+1)^k}{t_0^n n^k} = t_0 = \frac{\rho_0}{R} < 1,$$

а отже, на підставі ознаки Д'Аламбера ряд (4.36) збігається при  $\rho < R$  (унаслідок довільності  $\rho_0$ ). Зі збіжності ряду (4.36) випливає рівномірна збіжність ряду (4.35), тобто ряд (4.33) можна почленно диференціювати довільну кількість разів за  $\varphi$  у крузі  $K_R$ . Аналогічно доводиться можливість почленного диференціювання ряду (4.33) за  $\rho$  у крузі  $K_R$ .

Таким чином, якщо функція  $f(\varphi)$  періодична з періодом  $2\pi$ , неперервна й кусково-диференційовна, то ряд (4.33) є розв'язком задачі Діріхле (4.21), (4.22).

Доведемо тепер, що розв'язок задачі Діріхле (4.21), (4.22) представляється у вигляді ряду (4.33) й у випадку довільної неперервної функції  $f(\varphi)$ . Для цього побудуємо послідовність неперервних і кусково-диференційованих функцій  $\{f_m(\varphi)\}$ , яка рівномірно збігається при  $\rho = R$  до функції  $f(\varphi)$ , і розглянемо задачу Діріхле

$$\begin{aligned} \Delta u_m &= (\rho, \varphi) = 0, \quad (\rho, \varphi) \in K_R, \\ u_m(R, \varphi) &= f_m(\varphi), \quad 0 < \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Згідно з доведеним вище розв'язок задачі (4.37) набирає вигляду

$$u_m(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0^{(m)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n (\alpha_n^{(m)} \cos n\varphi + \beta_n^{(m)} \sin n\varphi). \quad (4.38)$$

Оскільки послідовність функцій  $\{u_m(\rho, \varphi)\}$  рівномірно збігається при  $\rho = R$ , то вона рівномірно збігається всюди в  $\bar{K}_R$  до неперервної функції  $u(\rho, \varphi)$ , причому  $u(R, \varphi) = f(\varphi)$ . Покажемо, що функція  $u(\rho, \varphi)$  представляється рядом (4.33), який, згідно з доведеним, є гармонічною функцією при  $\rho < R$ .

Нехай  $\alpha_n$  і  $\beta_n$  — коефіцієнти ряду Фур'є функції  $f(\varphi)$ . Тоді внаслідок рівномірної збіжності послідовності функцій  $\{f_m(\varphi)\}$  для всякого  $\varepsilon > 0$  і досить великого  $m$  буде  $|f(\varphi) - f_m(\varphi)| < \varepsilon/2$ , тобто для всіх  $n$

$$|\alpha_n - \alpha_n^{(m)}| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varphi) - f_m(\varphi)| |\cos n\varphi| d\varphi < \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2} d\varphi = \varepsilon,$$

$$|\beta_n - \beta_n^{(m)}| < \varepsilon.$$

Беручи до уваги останні нерівності й (4.38), дістаємо

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) - u_m(\rho, \varphi) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} |\alpha_0 - \alpha_0^{(m)}| + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n (|\alpha_n - \alpha_n^{(m)}| + |\beta_n - \beta_n^{(m)}|) \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \leq 2\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n = 2\varepsilon \left( 1 - \frac{\rho}{R} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

а отже, гранична функція  $u(\rho, \varphi)$  при  $\rho < R$  набирає вигляду ряду (4.33).  
Теорему доведено.

◇ **Зауваження 4.2.** Якщо б ми шукали розв'язок зовнішньої задачі Діріхле, то для виконання умови регулярності на нескінченності в (4.29) потрібно було б покласти  $C_6 = C_7 = 0$ , і тоді ми дістали б розв'язок у вигляді

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{\rho} \right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (4.39)$$

де  $\alpha_n$  і  $\beta_n$  визначаються за (4.32).

Метод відокремлення змінних аналогічно використовується й для побудови розв'язку крайових задач для рівняння Лапласа у випадку областей вигляду кільця, кругового сектора, прямокутника тощо.

## 4.7

### Інтеграл Пуассона

Зведемо розв'язок (4.33) до простішого вигляду. Для цього підставимо коефіцієнти Фур'є (4.32) у ряд (4.33) і змінимо порядок підсумовування та інтегрування. Дістанемо

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \varphi) &= \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left\{ 0,5 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n (\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi) \right\} d\psi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \cos [n(\psi - \varphi)] \right\} d\psi. \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Позначимо  $\psi - \varphi = \omega$ . Беручи до уваги, що в крузі  $K_R$   $t = \rho/R < 1$ , а  $\cos n\omega = \operatorname{Re} e^{in\omega}$ , маємо

$$\begin{aligned}
 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\omega &= -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} t^n \operatorname{Re} e^{in\omega} = -1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (te^{i\omega})^n = \\
 &= -1 + 2 \operatorname{Re} \frac{1}{1 - te^{i\omega}} = -1 + 2 \operatorname{Re} \frac{1 - t \cos \omega + it \sin \omega}{(1 - t \cos \omega)^2 + t^2 \sin^2 \omega} = \\
 &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2 - 2t \cos \omega} = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\psi - \varphi)}.
 \end{aligned}$$

Підставляючи добутий результат у рівність (4.40), дістанемо

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\psi - \varphi)} d\psi. \quad (4.41)$$

Формула (4.41) називається *інтегралом Пуассона*, а підінтегральний вираз

$$K(\rho, \varphi, R, \psi) = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\psi - \varphi)}$$

— *ядром Пуассона*. Оскільки  $R > \rho$  і  $R^2 + \rho^2 > 2\rho R$ , то  $K(\rho, \varphi, R, \psi) > 0$ .

Інтеграл Пуассона (4.41) добуто з розв'язку (4.33) за умови, що  $\rho < R$ . Якщо  $R = \rho$ , то представлення (4.41) втрачає сенс. Однак покажемо, що інтеграл Пуассона задовольняє умову

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow R \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = f(\varphi_0). \quad (4.42)$$

Для цього спочатку доведемо справедливність рівності

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\rho, \varphi, R, \psi) d\psi = 1. \quad (4.43)$$

Вище було доведено, що при  $\rho < R$  виконується рівність

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\omega = \frac{1 - t^2}{1 + t^2 - 2t \cos \omega}.$$

Якщо  $t < 1$ , то ряд у лівій частині рівності збігається рівномірно й тому його можна почленно інтегрувати. Отже,

$$\int_0^{2\pi} d\omega + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \int_0^{2\pi} \cos n\omega d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{1 - t^2}{1 + t^2 - 2t \cos \omega} d\omega,$$

або

$$2\pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{\sin n\omega}{n} \Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{1 - t^2}{1 + t^2 - 2t \cos \omega} d\omega,$$

звідки випливає справедливність рівності (4.43).

На підставі (4.43) та інтеграла Пуассона (4.41) можемо стверджувати: якщо  $f(\varphi) = 1$ , то розв'язок задачі Діріхле (4.21), (4.22)  $u(\rho, \varphi) \equiv 1$ . (Цей результат випливає з теореми єдиності 4.5.)

Зауважимо: якщо функція  $F(x)$  неперервна й періодична з періодом  $2\pi$ , то для довільних  $\alpha$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(x) dx = \int_0^{2\pi} F(x) dx. \quad (4.44)$$

Справді,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(x) dx = \int_{\alpha}^0 F(x) dx + \int_0^{2\pi} F(x) dx + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} F(x) dx.$$

В останньому інтегралі введемо заміну  $x = t + 2\pi$ . Тоді

$$\int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} F(x) dx = \int_0^{\alpha} F(2\pi + t) dt = \int_0^{\alpha} F(t) dt = \int_0^{\alpha} F(x) dx,$$

а отже, з попередньої рівності дістаємо (4.44).

Покладемо в інтегралі Пуассона (4.41)  $\psi - \varphi = \omega$ ,  $d\psi = d\omega$ . Тоді, врахувавши періодичність функцій  $f(\psi)$  і  $\cos(\psi - \varphi)$ , на підставі (4.44), поклавши  $\alpha = -\pi$ , формулу (4.41) та рівність (4.43) запишемо у вигляді

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega + \varphi) K(\rho, \varphi, R, \psi) d\omega, \quad (4.45)$$

$$1 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} K(\rho, \varphi, R, \omega) d\omega. \quad (4.46)$$

Помножимо рівність (4.46) на  $f(\varphi_0)$  і віднімемо добутий результат від (4.45). Матимемо

$$u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\omega + \varphi) - f(\varphi_0)] K(\rho, \varphi, R, \psi) d\omega. \quad (4.47)$$

Унаслідок неперервності функції  $f(\varphi)$  для всякого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ , що як тільки  $|\omega| < \delta$  і  $|\varphi - \varphi_0| < \delta_1$ ,  $\delta_2 = \delta_1 + \delta$ , то  $|f(\omega + \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon/3$ .

У правій частині рівності (4.47) проміжок інтегрування  $(-\pi, \pi)$  розб'ємо на три частини:  $(-\pi, -\delta)$ ,  $(-\delta, \delta)$ ,  $(\delta, \pi)$ , а інтеграли по цих проміжках позначимо через  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  відповідно.

Якщо  $|\varphi - \varphi_0| < \delta_1$ , то, враховуючи викладене вище,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(\omega + \varphi) - f(\varphi_0)| K(\rho, \varphi, R, \psi) d\omega \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(\rho, \varphi, R, \psi) d\omega = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

На проміжку  $(-\pi, -\delta)$  буде  $\cos \omega \leq \cos \delta$ , а тому

$$\begin{aligned} R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \omega &\geq R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \delta = \\ &= (R - \rho)^2 + 2\rho R(1 - \cos \delta) \geq 4\rho R \sin^2 \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Унаслідок неперервності  $f(\varphi)$  маємо  $|f(\omega + \varphi) - f(\varphi_0)| \leq M$ . Отже,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(\omega + \varphi) - f(\varphi_0)| K(\rho, \varphi, R, \psi) d\omega \leq \\ &\leq \frac{M(R^2 - \rho^2)}{8\pi R\rho \sin^2(\delta/2)} (\pi - \delta). \end{aligned}$$

Для інтеграла  $I_3$  оцінка аналогічна, тому при  $\rho \rightarrow R$   $|I_1| \rightarrow 0$  і  $|I_3| \rightarrow 0$ , тобто  $|I_1| < \varepsilon/3$ ,  $|I_3| < \varepsilon/3$  при  $\rho$ , досить близьких до  $R$ .

Ураховавши добути оцінки для інтегралів  $I_1$ ,  $I_2$  та  $I_3$ , з (4.47) при  $\rho$  і  $\varphi$ , досить близьких до  $R$  і  $\varphi_0$  відповідно, маємо

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| = |I_1 + I_2 + I_3| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| < \varepsilon,$$

і виконання умови (4.42) доведено.

Отже, інтеграл Пуассона є розв'язком задачі Діріхле (4.21), (4.22). Повторюючи вищенаведені міркування, можна показати, що розв'язок зовнішньої задачі Діріхле для круга (4.39) зводиться до вигляду

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\psi - \varphi)} d\psi.$$

Таким чином, всяку гармонічну в крузі  $K_R$  і неперервну в  $\bar{K}_R$  функцію  $u(x, y)$  можна представити у вигляді інтеграла Пуассона.

## 4.8 Формули Гріна

У тривимірному просторі розглянемо область  $D$ , обмежену кусково-гладкою орієнтовною поверхнею  $S$ . Нехай функції  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  належать класу  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ . Інтегруючи наступні тотожності по області  $D$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uv_y) + \frac{\partial}{\partial z}(uv_z) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z + u\Delta v,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv_x - vu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uv_y - vu_y) + \frac{\partial}{\partial z}(uv_z - vu_z) = u\Delta v - v\Delta u$$

та застосовуючи до лівих частин добутих рівностей формулу Гаусса—Остроградського, матимемо

$$\iint_S u \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} ds = \iiint_D (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z + u\Delta v) dx dy dz, \quad (4.48)$$

$$\iint_S \left( u \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right) ds = \iiint_D (u\Delta v - v\Delta u) dx dy dz, \quad (4.49)$$

де  $\bar{n}$  — зовнішня до  $S$  нормаль.

Формули (4.48), (4.49) називаються відповідно *першою* та *другою формулами Гріна*. Зауважимо, що область  $D$  може бути обмежена кількома замкненими поверхнями  $S_i$ . Тоді у формулах Гріна  $S = \bigcup_i S_i$ .

Для функцій на площині справедливі аналогічні формули Гріна. Наприклад, друга формула Гріна (4.49) для плоскої області  $D$  із краєм  $\lambda$  має вигляд

$$\iint_D (u \Delta v(x, y) - v \Delta u(x, y)) dx dy = \oint_{\lambda} \left( u \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right) dl.$$

За допомогою формул Гріна доводиться низка теорем теорії гармонічних функцій.

#### ТЕОРЕМА 4.7

*Якщо гармонічна в обмеженій області  $D$  функція  $v(x, y, z) \in C^1(\bar{D})$ , то  $\iint_S \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} ds = 0$ .*

Для доведення теореми достатньо в першій формулі Гріна (4.48) покласти  $u(x, y, z) = 1$  і врахувати, що  $\Delta v \equiv 0$ .

Із теореми випливає, що у випадку задачі Неймана для рівняння Лапласа функція  $\psi(x, y, z)$ , яка входить у крайову умову (4.45), має задовольняти умову  $\iint_S \psi(x, y, z) ds = 0$ . Якщо розглядати стаціонарний процес розподілу температури в тілі  $D$ , то з фізичного погляду умова Пуассона  $\iint_S \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} ds = 0$  означає, що загальна кількість теплоти, яка проходить через замкнену поверхню  $S$  тіла  $D$ , дорівнює нулю. Тому цю умову називають *умовою стаціонарності теплового поля*.

Розглянемо внутрішню задачу Неймана: в класі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z), \tag{4.50}$$

який на поверхні  $S$  задовольняє умову

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_S = \psi(x, y, z). \tag{4.51}$$

#### ТЕОРЕМА 4.8

*Розв'язок внутрішньої задачі Неймана (4.50), (4.51) визначається з точністю до довільної сталої.*

## Доведення

Нехай  $u_1(x, y, z)$ ,  $u_2(x, y, z)$  — два розв'язки задачі Неймана (4.50), (4.51). Тоді функція

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$$

буде гармонічною в  $D$ , неперервно диференційовною в  $\bar{D}$  і  $\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_S = 0$ .

Поклавши у формулі Гріна (4.48)  $v = u$  і врахувавши останні зауваження, дістанемо

$$\iiint_D (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dx dy dz = 0,$$

тобто  $u_x = u_y = u_z = 0$ , звідки  $u(x, y, z) = \text{const}$ .

Теорему доведено.

## 4.9

Основна формула  
теорії гармонічних функцій

Доведемо спочатку таку теорему.

## ТЕОРЕМА 4.9

Якщо функція  $u(x, y, z)$  належить класу  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ , то справедлива формула

$$\begin{aligned} Bu(M_0) = & \iint_S \left[ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \bar{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] ds - \\ & - \iiint_D \frac{\Delta u(P)}{r_{PM_0}} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (4.52)$$

де  $M_0 = M_0(x, y, z)$ ;  $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ , а

$$B = \begin{cases} 0, & \text{якщо } M_0 \in E_3 \setminus \bar{D}, \quad E_3 \text{ — весь простір,} \\ 4\pi, & \text{якщо } M_0 \in D, \\ 2\pi, & \text{якщо } M_0 \in S. \end{cases}$$



Доведення

1. Нехай  $M_0 \in E_3 \setminus \bar{D}$ . Тоді функція  $1/r_{PM_0}$  є гармонічною в  $D$  і неперервною разом із частинними похідними першого порядку в  $\bar{D}$ . Поклавши в другій формулі Гріна  $v = 1/r_{PM_0}$ , дістанемо

$$\iiint_D \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \iint_S \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} - u \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) ds,$$

тобто  $B = 0$ , якщо  $M_0 \in E_3 \setminus \bar{D}$ .

2. Нехай  $M_0 \in D$  (рис. 4.5). Оскільки в нашому випадкові функція  $v = (r_{PM_0})^{-1}$  перетворюється в нескінченність при  $P = M_0$ , то безпосередньо застосувати другу формулу Гріна до функцій  $u(x, y, z)$  і  $v = (r_{PM_0})^{-1}$  в області  $D$  не можна. Вирижемо з області  $D$  кулю малого радіуса  $\varepsilon$  з центром у точці  $M_0$  і позначимо її через  $D_\varepsilon(M_0)$ , а відповідну сферу — через  $S_\varepsilon(M_0)$ . Вважаємо, що  $D_\varepsilon(M_0) \cup S_\varepsilon(M_0) = \bar{D}_\varepsilon(M) \subset D$ .

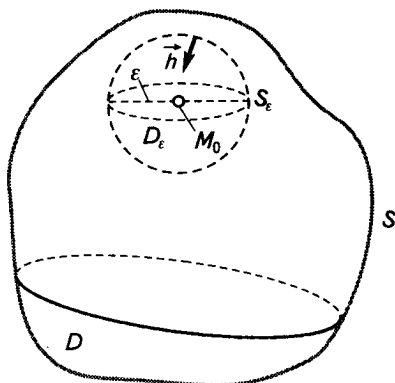


Рис. 4.5

Застосовуючи формулу Гріна (4.49) до функцій  $u$  і  $v = (r_{PM_0})^{-1}$  в області  $D \setminus D_\varepsilon(M_0)$ , дістаємо

$$\begin{aligned} \iiint_{D \setminus D_\varepsilon(M_0)} \Delta u v d\xi d\eta d\zeta &= \iint_S \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} - u \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) ds + \\ &+ \iint_{S_\varepsilon(M_0)} \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds - \iint_{S_\varepsilon(M_0)} u \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) ds. \end{aligned} \quad (4.53)$$

У правій частині рівності (4.53) тільки два останніх інтеграли залежать від  $\varepsilon$ . Якщо точка  $P \in S_\varepsilon(M_0)$ , то  $r_{PM_0} = \varepsilon$ . На поверхні  $S_\varepsilon(M_0)$  нормаль  $\vec{n}$  і радіус кулі мають протилежні напрями, отже,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right|_{S_\varepsilon(M_0)} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Таким чином, застосовуючи теорему про середнє значення, матимемо

$$\begin{aligned} \iint_{S_\varepsilon(M_0)} \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds &= \frac{1}{\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon(M_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = 4\pi\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right)_{\text{сєр}}, \\ \iint_{S_\varepsilon(M_0)} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) ds &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon(M_0)} u ds = 4\pi u_{\text{сєр}}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

де  $u_{\text{сєр}}$  і  $\left( \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right)_{\text{сєр}}$  — середні значення функції  $u(P)$  і  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$  відповідно на поверхні  $S_\varepsilon(M_0)$ .

Зауважимо, що внаслідок умови теореми функція  $u(P)$  та її нормальна похідна на  $S_\varepsilon(M_0)$  обмежені. Оскільки

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{D \setminus D_\varepsilon(M_0)} \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = \iiint_D \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

за означенням невласного інтеграла, а  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\text{сєр}} = u(M_0)$ , то підставивши (4.54) у (4.53) і перейшовши до границі, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ , дістанемо

$$4\pi u(M_0) = \iint_S \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) ds - \iiint_D \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

тобто  $B = 4\pi$ , коли  $M_0 \in D$ .

3. Припустимо, що точка  $M_0$  належить поверхні  $S$  і в цій точці поверхня  $S$  має дотичну площину з неперервними кутовими коефіцієнтами (рис. 4.6). Проведемо сферу досить малого радіуса  $\varepsilon$  з центром у точці  $M_0$ . Частина поверхні  $S$ , яка лежить у кулі  $D_\varepsilon(M_0)$ , позначимо через  $S'$ ,  $D'_\varepsilon = D \cap D_\varepsilon(M_0)$ , а через  $S'_\varepsilon$  — частину поверхні сфери  $S_\varepsilon(M_0)$ , яка лежить в області  $D$ .

Згідно з другою формулою Гріна маємо

$$\begin{aligned} \iiint_{D \setminus D'_\varepsilon} \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u \, d\xi \, d\eta \, d\zeta &= \iint_{S \setminus S'_\varepsilon} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} - u \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) ds + \\ &+ \iint_{S'_\varepsilon} \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds - \iint_{S'_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) ds. \end{aligned} \quad (4.55)$$

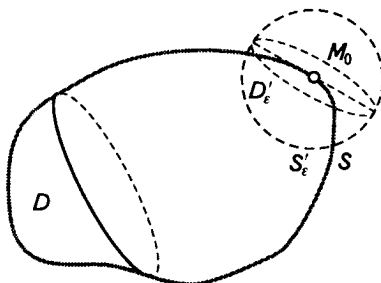


Рис. 4.6

Повторюючи міркування, наведені в п. 2, і беручи до уваги, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S'_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) ds = 2\pi u(M_0),$$

із (4.55) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  дістаємо

$$2\pi u(M_0) = \iint_S \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} - u \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) ds - \iiint_D \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

а отже, справедлива рівність (4.52).

Припустимо тепер, що функція  $u(x, y, z)$  гармонічна в  $D$  і належить класу  $C_1(\bar{D})$ . Тоді з (4.52) матимемо

$$Vu(M_0) = \iint_S \left[ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \bar{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] ds. \quad (4.56)$$

Співвідношення (4.56) називається *основною формулою теорії гармонічних функцій*.

Формула (4.56) справедлива й у випадку необмеженої області  $D^*$ .

**1 Наслідок.** *Будь-яка гармонічна функція в області гармонічності диференційовна необмежену кількість разів.*

Справедливість наслідку випливає з (4.56). Справді, точка  $P \in S$ , а  $M_0(x, y, z) \in D$ . Отже, функція  $(r_{PM_0})^{-1}$  є неперервною на  $S$  і має неперервні похідні довільного порядку за  $x, y, z$ , а функції  $u(P)$  і  $\frac{du(P)}{d\bar{n}}$  від точки  $M_0$  на  $S$  не залежать. Отже, інтеграл (4.56) можна диференціювати за  $x, y, z$ , як за параметрами, необмежену кількість разів.

Зауважимо: якщо функція  $u(x, y, z)$  гармонічна в  $D$ , але  $u \notin C^1(\bar{D})$ , то наслідок усе одно залишається справедливим. Для цього за поверхню  $S$  у (4.56) достатньо взяти поверхню, яка обмежує область  $D_1 \ni M_0$  і цілком міститься в  $D$ .

Із наслідку випливає справедливість такого твердження: якщо функція  $u(x, y, z)$  гармонічна в області  $D$ , то будь-яка її похідна вигляду

$$\frac{\partial^{n_1+n_2+n_3} u(x, y, z)}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \partial z^{n_3}}$$

також буде гармонічною в цій області.

#### ТЕОРЕМА 4.10

##### про середнє значення

Якщо функція  $u(x, y, z)$  гармонічна в  $D$ , а  $M_0$  — деяка внутрішня точка області  $D$ , то значення гармонічної функції в точці  $M_0$  дорівнює середньому значенню цієї функції на довільній сфері  $S_a(M_0)$  радіусом  $a$  із центром у  $M_0$ , якщо сфера  $S_a(M_0)$  не виходить за межі  $D$ , тобто

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_a(M_0)} u(P) ds. \quad (4.57)$$

##### Доведення

Застосовуємо формулу (4.56) до сфери  $S_a(M_0)$ . Маємо

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a(M_0)} \left[ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \bar{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] ds. \quad (4.58)$$

Беручи до уваги, що на сфері  $S_a(M_0)$

$$(r_{PM_0})^{-1} = a^{-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \Big|_{S_a(M_0)} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a^2},$$

$$\iint_{S_a(M_0)} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = 0,$$

з (4.58) одразу дістаємо формулу (4.57).  
Теорему доведено.

◆ **Зауваження 4.3.** У випадку двовимірного простору формула (4.52) має вигляд

$$Vu(M_0) = \int_C \left[ \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \bar{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] dl - \\ - \iint_S \Delta u(P) \ln \frac{1}{r_{PM_0}} dx dy,$$

де  $C$  — крива, що обмежує область  $S$ , а

$$B = \begin{cases} 2\pi, & \text{якщо } M_0 \in \text{внутрішньої точкою } S, \\ \pi, & \text{якщо } M_0 \in C, \\ 0, & \text{якщо } M_0 \in E_2 \setminus \bar{S}. \end{cases}$$

Основна формула теорії гармонічних функцій (4.56) запишеться у вигляді

$$Vu(M_0) = \int_C \left[ \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \bar{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] dl,$$

звідки випливає справедливість теореми 4.10 про середнє значення

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{C_a} u ds,$$

де  $C_a$  — коло радіусом  $a$  із центром у точці  $M_0$ .

## 4.10

### Теорема Гарнака про послідовності гармонічних функцій та теорема Ліувілля

Розглядатимемо двовимірний простір.

#### ТЕОРЕМА 4.11

(перша теорема Гарнака)

*Якщо послідовність функцій  $\{u_m(x, y)\}$ , гармонічних в обмеженій області  $D$  і неперервних у  $\bar{D} = D \cup S$ , збігається рівно-*

мірно на краю  $S$ , то вона рівномірно збігається всюди в  $D$ , і в цій області гранична функція буде гармонічною.

### Доведення

Рівномірну збіжність послідовності гармонічних функцій  $\{u_m(x, y)\}$  в області  $D$  доведено в п. 4.5.

Покажемо, що гранична функція буде гармонічною в  $D$ . Для цього в області  $D$  розглянемо довільну точку  $Q$  і побудуємо круг  $K_R(Q)$  із центром у точці  $Q$  такого радіуса  $R$ , щоб  $K_R(Q)$  цілком належав  $D$ .

У цьому крузі кожен з гармонічних функцій  $u_m(M)$  ( $M$  — змінна точка) представимо у вигляді інтеграла Пуассона

$$u_m(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_m(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\psi - \varphi)} d\varphi, \quad (4.59)$$

де  $f_m(\psi)$  — значення гармонічної функції  $u_m(M)$  на краю круга  $K_R(Q)$ .

Унаслідок рівномірної збіжності послідовностей  $\{u_m(M)\}$  і  $\{f_m(\psi)\}$  в області  $D$  у рівності (4.59) можна перейти до границі в обох частинах. Позначивши граничні функції через  $u(M)$  і  $f(\psi)$  відповідно, дістаємо

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi.$$

Права частина останньої рівності є гармонічною функцією, отже, і  $u(M)$  є гармонічною в  $K_R(Q)$ . Унаслідок довільності точки  $Q$  функція  $u(M)$  є гармонічною всюди в області  $D$ .

Теорему доведено.

### ТЕОРЕМА 4.12

#### (друга теорема Гарнака)

Якщо послідовність гармонічних в області  $D$  функцій  $\{u_m(M)\}$  збігається в деякій внутрішній точці  $A$  цієї області й для довільних  $n$  та точки  $M \in D$

$$u_{m+1}(M) \geq u_m(M),$$

то послідовність  $\{u_m(M)\}$  всюди в області  $D$  збігається до деякої гармонічної функції  $u(M)$ , причому в усякій замкненій області  $\bar{D}_1 \subset D$  ця збіжність буде рівномірною.

### Доведення

Спочатку покажемо, що наша послідовність збігається рівномірно в усякому крузі  $K_1$  радіусом  $R$  із центром у точці  $A$ , якщо він разом із краєм належить  $D$ .

Згідно з умовою теореми для довільного цілого  $p > 0$

$$v_{m,p}(M) = u_{m+p}(M) - u_m(M) \geq 0.$$

Розглянемо круг  $K_1^*$  із центром у точці  $A$  і радіусом  $R + \varepsilon$  (рис. 4.7), де  $\varepsilon > 0$  таке, що  $K_1^* \subset D$ . У крузі  $K_1^*$  гармонічні функції  $v_{m,p}(M)$  представимо у вигляді інтеграла Пуассона

$$v_{m,p}(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{m,p}(R + \varepsilon, \psi) \frac{[(R + \varepsilon)^2 - \rho^2] d\psi}{(R + \varepsilon)^2 + \rho^2 - 2(R + \varepsilon)\rho \cos(\psi - \varphi)}. \quad (4.60)$$

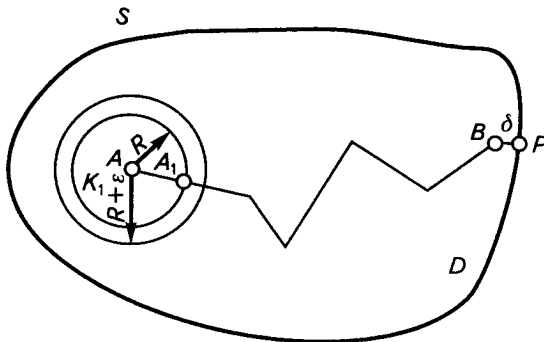


Рис. 4.7

Оскільки  $-1 \leq \cos(\psi - \varphi) \leq 1$ , то

$$\frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} \leq \frac{(R + \varepsilon)^2 - \rho^2}{(R + \varepsilon)^2 + \rho^2 - 2(R + \varepsilon)\rho \cos(\psi - \varphi)} \leq \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho},$$

а отже, з (4.60) маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} \int_0^{2\pi} v_{m,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi &\leq u_{m,p}(M) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho} \int_0^{2\pi} v_{m,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi. \end{aligned}$$

На підставі теореми про середнє значення

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{m,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi = v_{m,p}(0, \psi) = v_{m,p}(A).$$

Таким чином, попередня нерівність запишеться у вигляді

$$\frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} v_{m,p}(A) \leq v_{m,p}(M) \leq \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho} v_{m,p}(A). \quad (4.61)$$

Із нерівностей (4.61) випливає рівномірна збіжність послідовності  $\{u_m(M)\}$  у крузі  $\bar{K}_1$ , якщо вона збігається в точці  $A$ . Згідно з першою теоремою Гарнака гранична функція буде гармонічною в  $K_1$ .

Доведемо збіжність послідовності гармонічних функцій у довільній внутрішній точці  $B$  області  $D$ . Для цього сполучимо цю точку з точкою  $A$  ламаною  $l$ , яка складається зі скінченного числа відрізків і цілком лежить усередині області  $D$ . Ламана  $l$  разом із точками  $A$  і  $B$  є замкнутою множиною. Оскільки  $l$  не має спільних точок із краєм  $S$ , то через  $\delta$  позначимо відстань від краю  $S$  до ламаної  $l$ :

$$\delta = \inf_{M' \in l, P \in S} r_{M'P}$$

Очевидно,  $\delta$  є замкнутою множиною.

Візьмемо на перетині ламаної  $l$  із кругом  $K_1$  точку  $A_1$  і навколо неї, як із центра, опишемо круг  $K_2$  радіусом  $\delta/2$ . Згідно з нашими міркуваннями круг  $\bar{K}_2 \in D$ , а отже, послідовність  $\{u_m\}$  у крузі  $\bar{K}_2$  збігається рівномірно до гармонічної функції. Повторюючи міркування через скінченну кількість кроків, доведемо рівномірну збіжність послідовності гармонічних функцій  $\{u_m(M)\}$  у крузі радіусом  $\delta/2$  із центром у точці  $B$ . Унаслідок довільності точки  $B$  звідси випливає, що послідовність гармонічних функцій  $\{u_m(M)\}$  рівномірно збігається до гармонічної функції в довільному крузі  $K$ , який міститься разом із краєм в області  $D$ .

Згідно з теоремою Гейне—Бореля довільну замкнену область  $\bar{D}_1$ , яка разом зі своїм краєм знаходиться всередині області  $D$ , можемо покрити скінченим числом кругів, які цілком належатимуть  $D$ .

За доведеним, у всіх цих кругах розглядувана послідовність  $\{u_m(M)\}$  збігається рівномірно, а отже, вона збігається рівномірно й в області  $\bar{D}_1$ , причому гранична функція буде гармонічною в  $D$ .



**ТЕОРЕМА 4.13 (ЛІУВІЛЛЯ)**

*Гармонічна на всій площині функція  $u(x, y)$  не може бути обмеженою зверху або знизу, якщо вона не стала.*

**Доведення**

Нехай гармонічна функція на всій площині  $u(x, y) \geq A = \text{const}$ . Тоді функція  $v(x, y) = u(x, y) - A \geq 0$  також є гармонічною на всій площині.

Позначимо через  $Q(x, y)$  довільну точку площини й проведемо круг  $K$  із центром у початку координат такого радіуса  $R$ , щоб точка  $Q$  була внутрішньою для цього круга. Внаслідок гармонічності функції  $v(x, y)$  представимо її в крузі  $K$  за допомогою інтеграла Пуассона:

$$v(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(R, \psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi. \quad (4.62)$$

Згідно з (4.61) із (4.62) дістанемо

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} v(0, 0) \leq v(Q) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho} v(0, 0).$$

Перейшовши в останніх нерівностях до границі, коли  $R \rightarrow \infty$ , матимемо

$$v(0, 0) \leq v(Q) \leq v(0, 0),$$

тобто  $v(Q) = v(0, 0)$ . Унаслідок довільності точки  $Q$  звідси випливає, що  $u(Q) = v(Q) + A = v(0, 0) + A$  є сталою на всій площині.

Теорему доведено.

## 4.11

### Функція Гріна оператора Лапласа

Нехай у тривимірному просторі задано обмежену поверхнею  $S$  область  $D$ . Припустимо, що функція  $u(M_0)$ ,  $M_0 = M_0(x, y, z)$  гармонічна в  $D$  і належить класу  $C^1(\bar{D})$ . Тоді, як було показано в п. 4.9, справедлива основна формула теорії гармонічних функцій

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \bar{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] ds. \quad (4.63)$$

Нехай відома функція  $g(P, M_0)$ , яка має такі дві властивості:

- 1) як функція змінної точки  $P$  вона є гармонічною в області  $D$  і належить класу  $C^1(\bar{D})$ ;
- 2) на поверхні  $S$  вона набуває граничних значень  $-(4\pi r_{PM_0})^{-1}$ .

Застосовуючи другу формулу Гріна (4.49) до гармонічних функцій  $u(P)$  і  $g(P, M_0)$ , дістаємо

$$\iint_S \left[ u(P) \frac{\partial g(P, M_0)}{\partial \bar{n}} - g(P, M_0) \frac{\partial u(P)}{\partial \bar{n}} \right] ds = 0.$$

Беручи до уваги граничні значення для функції  $g(P, M_0)$ , з останньої рівності матимемо

$$\iint_S \left[ u(P) \frac{\partial g(P, M_0)}{\partial \bar{n}} + \frac{1}{4\pi r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \bar{n}} \right] ds = 0.$$

Віднявши дану рівність із (4.63), дістанемо

$$u(M_0) = - \iint_S u(P) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left[ \frac{1}{4\pi r_{PM_0}} + g(P, M_0) \right] ds. \quad (4.64)$$

Покладемо

$$G(P, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{PM_0}} + g(P, M_0). \quad (4.65)$$

► **Означення 4.2.** Функцію  $G(P, M_0)$  називають **функцією Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа**, якщо вона задовольняє такі умови:

- 1) як функція точки  $P$  є гармонічною в області  $D$ , за винятком точки  $M_0$ , де вона перетворюється в нескінченність;
- 2) задовольняє крайову умову

$$G(P, M_0)|_S = 0; \quad (4.66)$$

- 3) в області  $D$  допускає вигляд (4.65), де  $g(P, M_0)$  — гармонічна функція всюди в області  $D$ .

Побудова функції Гріна зводиться до відшукування її регулярної частини  $g(P, M_0)$ , яка визначається із задачі Діріхле

$$\Delta g(P, M_0) = 0, \quad g(P, M_0)|_S = -\frac{1}{4\pi r_{PM_0}}, \quad M_0 \in D. \quad (4.67)$$

Згідно з формулою (4.64) розв'язок внутрішньої задачі Діріхле

$$\Delta u(M_0) = 0, \quad u(P)|_S = f(P), \quad M_0 \in D, \quad P \in S, \quad (4.68)$$

якщо він існує, подається у вигляді

$$u(M_0) = - \iint_S f(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial \bar{n}} ds. \quad (4.69)$$

Якщо задано задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta u(M_0) &= \varphi(M_0), \quad M_0 \in D, \\ u(P)|_S &= f(P), \quad P \in S, \end{aligned} \quad (4.70)$$

причому  $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ , то, поклавши у (4.52) замість  $-(4\pi r_{PM_0})^{-1}$  функцію Гріна та врахувавши (4.66) і (4.70), дістанемо

$$u(M_0) = - \iint_S f(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial \bar{n}} ds - \iiint_D \varphi(P) G(P, M_0) dP. \quad (4.71)$$

Виводячи формули (4.69) і (4.71), ми вважали, що шукані розв'язки відповідних задач Діріхле (4.68) та (4.70) належать класу  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ .

О. М. Ляпунов показав, що формули (4.69) та (4.71) представляють розв'язки задач Діріхле (4.68), (4.70) відповідно і в класі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ , якщо поверхня  $S$  області  $D$  задовольняє такі умови:

- 1) в кожній точці поверхні  $S$  існує дотична площина;
- 2) існує таке число  $d > 0$ , одне й те саме для всіх точок поверхні, що якщо  $P$  — довільна точка  $S$ , то довільна сфера з центром у точці  $P$  і радіусом  $d$  або меншим ділить  $S$  на дві частини, одна з яких міститься всередині сфери, а інша — поза нею, й прями, паралельні нормалі до  $S$  у точці  $P$ , перетинають частину  $S$ , яка знаходиться у сфері, не більше, ніж в одній точці;
- 3) якщо  $\theta$  — гострий кут, утворений нормальними до поверхні  $S$  у двох її точках  $P_1$  і  $P_2$ , а  $r_{1,2}$  — відстань між цими точками, то існують два додатні числа  $a$  і  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ), незалежні від вибору точок  $P_1$  і  $P_2$  таких, що справедлива нерівність  $\theta \leq ar_{1,2}^\alpha$  за довільних положень  $P_1$  і  $P_2$  на  $S$ .

Поверхня, яка задовольняє наведені три умови, називається *поверхнею Ляпунова*.

Зазначимо, що умова 1) означення поверхні Ляпунова дає змогу в кожній точці  $P \in S$  побудувати місцеву прямокутну систему координат  $Px\eta z$ , тобто таку систему, в якій точка  $P$  є початком координат, дотична площина до поверхні  $S$  у точці  $P$  є площиною  $xPy$ , а нормаль до поверхні в точці  $P$  збігається з віссю  $Pz$ .

Умова 2) показує, що в цій місцевій системі координат рівняння частини поверхні  $S$ , яка міститься всередині сфери  $C_d(P)$  із центром у точці  $P$  і радіусом  $d$ , набирає вигляду  $\zeta = \omega(\xi, \eta)$ , де  $(\xi, \eta, \zeta)$  — змінна точка поверхні  $S$ .

Із умови 3) випливає, що частинні похідні  $\omega_\xi$  і  $\omega_\eta$ , існування яких забезпечується умовою 1), є неперервними функціями  $\xi$  і  $\eta$ .

Розглянемо деякі властивості функції Гріна.

### 1. Функція Гріна $G(P, M_0)$ невід'ємна в області $D$ .

Справді, згідно з означенням функція Гріна на краю  $S$  області  $D$  дорівнює нулю. Оскільки  $\lim_{P \rightarrow M_0} G(P, M_0) = +\infty$ , то на поверхні сфери

$C_\varepsilon(M_0)$  достатньо малого радіуса  $\varepsilon$  із центром у точці  $M_0$  функція Гріна  $G(P, M_0) > 0$ . Таким чином, на краю  $S \cup C_\varepsilon(M_0)$  функція  $G(P, M_0) \geq 0$ , отже, внаслідок принципу максимуму  $G(P, M_0) \geq 0$  всюди в області  $D \setminus K_\varepsilon(M_0)$ , де  $K_\varepsilon(M_0)$  — куля радіусом  $\varepsilon$  із центром  $M_0$ . Звідси можемо зробити висновок, що  $G(P, M_0) \geq 0$  всюди в  $\bar{D}$ .

Оскільки  $g(P, M_0)|_S = -(4\pi r_{PM_0})^{-1}$  і вона є гармонічною в  $D$ , то  $g(P, M_0) < 0$  всюди в  $\bar{D}$ . Отже, з (4.65) маємо

$$0 < G(P, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{PM_0}}, \quad P \in D. \quad (4.72)$$

### 2. Функція Гріна $G(P, M_0)$ симетрична відносно точок $P$ і $M_0$ , тобто

$$G(P, M_0) = G(M_0, P). \quad (4.73)$$

Для доведення цієї властивості розглянемо область  $D_\varepsilon = D \setminus K_\varepsilon(P) \cup K_\varepsilon(M_0)$ , де  $K_\varepsilon(M_0)$  і  $K_\varepsilon(P)$  — кулі досить малого радіуса  $\varepsilon$  із центрами в точках  $P$  і  $M_0$  відповідно (рис. 4.8). Функції  $G(Q, M_0)$  і  $G(Q, P)$  гармонічні в області  $D_\varepsilon$ . Застосувавши до них в цій області другу формулу Гріна (4.49) та врахувавши, що  $G(Q, M_0) = G(Q, P) = 0$  при  $Q \in S$ , матимемо

$$\iint_{C_\varepsilon(P)} \left[ G(Q, P) \frac{\partial G(Q, M_0)}{\partial \bar{n}} - G(Q, M_0) \frac{\partial G(Q, P)}{\partial \bar{n}} \right] ds +$$

$$+ \iint_{C_\varepsilon(M_0)} \left[ G(Q, P) \frac{\partial G(Q, M_0)}{\partial \bar{n}} - G(Q, M_0) \frac{\partial G(Q, P)}{\partial \bar{n}} \right] ds = 0, \quad (4.74)$$

де  $C_\varepsilon(P)$  і  $C_\varepsilon(M_0)$  — сфери радіусами  $\varepsilon$  із центрами в точках  $P$  і  $M_0$  відповідно.

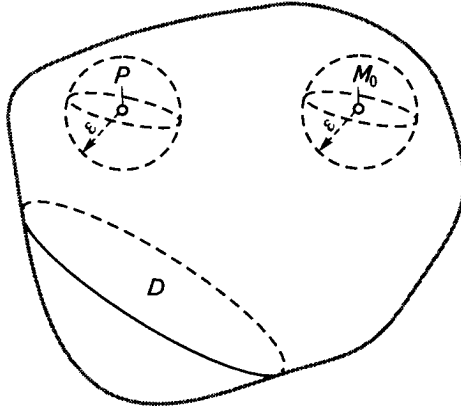


Рис. 4.8

Беручи до уваги, що

$$G(Q, P) = (4\pi r_{QP})^{-1} + g(Q, P), \quad G(Q, M_0) = (4\pi r_{QM_0})^{-1} + g(Q, M_0),$$

де  $g(Q, P)$  і  $g(Q, M_0)$  — гармонічні функції, з (4.74) дістанемо

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{C_\varepsilon(P)} \left[ \frac{1}{r_{QP}} \frac{\partial G(Q, M_0)}{\partial \bar{n}} - G(Q, M_0) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{QP}} \right) \right] ds +$$

$$+ \iint_{C_\varepsilon(P)} \left[ g(Q, P) \frac{\partial G(Q, M_0)}{\partial \bar{n}} - G(Q, M_0) \frac{\partial g(Q, P)}{\partial \bar{n}} \right] ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{C_\varepsilon(M_0)} \left[ \frac{1}{r_{QM_0}} \frac{\partial G(Q, P)}{\partial \bar{n}} - G(Q, P) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{QM_0}} \right) \right] ds +$$

$$+ \iint_{C_\varepsilon(M_0)} \left[ g(Q, M_0) \frac{\partial G(Q, P)}{\partial \bar{n}} - G(Q, P) \frac{\partial g(Q, M_0)}{\partial \bar{n}} \right] ds.$$

Застосувавши до перших поверхневих інтегралів у лівій і правій частинах останньої рівності основну формулу теорії гармонічних функцій (4.56), а до других інтегралів — другу формулу Гріна (4.49), матимемо

$$G(P, M_0) = G(M_0, P),$$

і симетричність доведено.

◇ **Зауваження 4.4.** У випадку площини функція Гріна має вигляд

$$G(P, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM_0}} + g(P, M_0), \quad M_0 = M_0(x, y).$$

## 4.12

### Інтегрування задачі Діріхле для кулі. Формула Пуассона

У тривимірному просторі розглянемо кулю  $K_R$  радіусом  $R$  із центром у початку координат і розв'яжемо таку задачу: знайти функцію  $u(x, y, z)$ , гармонічну в кулі  $K_R$  і неперервну в  $\bar{K}_R = K_R \cup S$ , якщо на поверхні  $S$  цієї кулі вона набуває наперед заданих неперервних значень  $f(\xi, \eta, \zeta)$ .

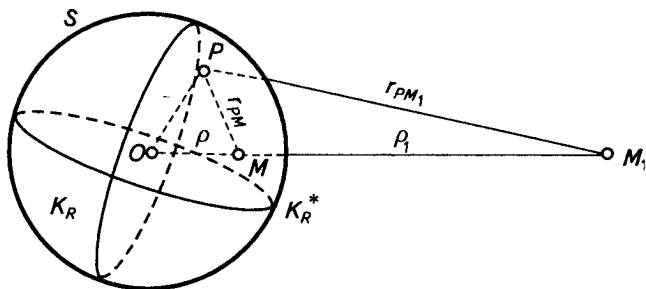


Рис. 4.9

Спочатку явно побудуємо функцію Гріна для нашої задачі, а тоді покажемо, що гармонічна функція  $u(x, y, z)$ , яка визначається формулою (4.69), задовольняє рівняння та крайову умову в (4.68) (рис. 4.9). Для цього в кулі  $K_R$  візьмемо довільну внутрішню точку  $M(x, y, z)$  і позначимо через  $\rho$  відстань цієї точки від початку координат  $O$ . Через центр кулі  $O$  і точку  $M$  у напрямі  $M$  проведемо пряму й на ній відкладемо такий відрізок  $OM_1$ , щоб

$$\rho \rho_1 = R^2, \quad \rho_1 = |OM_1|. \quad (4.75)$$

Перетворення (4.75), яке ставить у відповідність точці  $M$  цілком певну точку  $M_1$ , називається *перетворенням обернених радіусів* (перетворенням інверсії відносно сфери  $S$ ), а сама точка  $M_1$  називається *спряженою* з точкою  $M$ .

Візьмемо тепер деяку точку  $P(\xi, \eta, \zeta)$  і позначимо через  $r_{PM}$  і  $r_{PM_1}$  відстані цієї точки до точок  $M$  і  $M_1$  відповідно. Знайдемо співвідношення між  $r_{PM}$  і  $r_{PM_1}$ , коли точка  $P$  знаходиться на поверхні сфери  $S$ . Для цього розглянемо трикутники  $OPM$  і  $OPM_1$ . Вони подібні, оскільки кут при вершині  $O$  є спільним, а сторони, які утворюють цей кут, пропорційні внаслідок (4.75):

$$\frac{\rho_1}{R} = \frac{R}{\rho}.$$

Із подібності трикутників випливає, що  $\frac{r_{PM}}{r_{PM_1}} = \frac{\rho}{R}$ , або

$$\frac{1}{r_{PM}} = \frac{R}{\rho r_{PM_1}}. \quad (4.76)$$

Отже, (4.76) є шуканим співвідношенням між  $r_{PM}$  і  $r_{PM_1}$ .

Покажемо тепер, що функція Гріна для кулі має вигляд

$$G(P, M) = \frac{1}{4\pi r_{PM}} - \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\rho r_{PM_1}}. \quad (4.77)$$

Справді, функція  $G(P, M)$  як функція точки  $P$  є гармонічною в кулі  $K_R$ , за винятком точки  $M$ , де вона перетворюється в нескінченність. На поверхні сфери  $S$  внаслідок (4.76) вона перетворюється в нуль.

Таким чином, побудована функція (4.77) задовольняє всі умови означення функції Гріна задачі Діріхле. Підставивши (4.77) у формулу (4.69), дістанемо

$$u(M) = - \iint_S \frac{1}{4\pi} f(P) \frac{\partial \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{R}{\rho r_{PM_1}} \right)}{\partial \bar{n}} ds. \quad (4.78)$$

Обчислимо похідну  $4\pi \frac{\partial G(P, M)}{\partial \bar{n}}$ , де  $\bar{n}$  — зовнішня нормаль до сфери  $S$ . Маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM}} \right) &= \frac{\partial (r_{PM})^{-1}}{\partial \xi} \cos(\bar{n}, \xi) + \frac{\partial (r_{PM})^{-1}}{\partial \eta} \cos(\bar{n}, \eta) + \frac{\partial (r_{PM})^{-1}}{\partial \zeta} \cos(\bar{n}, \zeta) = \\ &= -\frac{1}{r_{PM}^2} \left[ \frac{\xi - x}{r_{PM}} \cos(\bar{n}, \xi) + \frac{\eta - y}{r_{PM}} \cos(\bar{n}, \eta) + \frac{\zeta - z}{r_{PM}} \cos(\bar{n}, \zeta) \right] = \\ &= -\frac{1}{r_{PM}^2} [\cos(r_{PM}, \xi) \cos(\bar{n}, \xi) + \cos(r_{PM}, \eta) \cos(\bar{n}, \eta) + \\ &\quad + \cos(r_{PM}, \zeta) \cos(\bar{n}, \zeta)] = -\frac{1}{r_{PM}^2} \cos(r_{PM}, \bar{n}). \end{aligned}$$

Аналогічно  $\frac{\partial}{\partial \bar{n}} (r_{PM_1})^{-1} = -(r_{PM_1})^{-2} \cos(r_{PM_1}, \bar{n})$ . Отже,

$$4\pi \frac{\partial G(P, M)}{\partial \bar{n}} = -\frac{1}{r_{PM}^2} \cos(r_{PM}, \bar{n}) + \frac{R}{\rho r_{PM_1}^2} \cos(r_{PM_1}, \bar{n}), \quad P \in S. \quad (4.79)$$

Із трикутників  $OPM$  і  $OPM_1$ , коли  $P \in S$ , дістаємо

$$\rho^2 = R^2 + r_{PM}^2 - 2Rr_{PM} \cos(r_{PM}, \bar{n}),$$

$$\rho_1^2 = R^2 + r_{PM_1}^2 - 2Rr_{PM_1} \cos(r_{PM_1}, \bar{n}).$$

Визначивши звідси  $\cos(r_{PM}, \bar{n})$  та  $\cos(r_{PM_1}, \bar{n})$  і підставивши їх у (4.79), матимемо

$$4\pi \frac{\partial G(P, M)}{\partial \bar{n}} = \frac{\rho^2 - R^2 - r_{PM}^2}{2Rr_{PM}^3} + \frac{R^2 + r_{PM_1}^2 - \rho_1^2}{2\rho_1 r_{PM_1}^3}.$$

На підставі (4.75) і (4.76)  $r_{PM_1} = \rho^{-1} r_{PM} R$ ,  $\rho_1 = \rho^{-1} R^2$ , а отже,

$$\begin{aligned} 4\pi \frac{\partial G(P, M)}{\partial \bar{n}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{R}{\rho r_{PM_1}} \right) = \frac{\rho^2 - R^2}{2Rr_{PM}^3} - \frac{1}{2Rr_{PM}} + \\ &+ \frac{R^2 + \rho^{-2}(r_{PM}^2 R^2 - R^4)}{2\rho \rho^{-3} r_{PM}^3 R^3} = \frac{\rho^2 - R^2}{Rr_{PM}^3}, \quad P \in S. \end{aligned}$$

Підставивши добутий результат у (4.78), остаточно маємо

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} f(P) ds. \quad (4.80)$$

Формула (4.80) називається *формулою Пуассона*.



Переконаємося тепер: якщо функція  $f(P)$  неперервна, то формула Пуассона (4.80) дає розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для кулі. Для цього потрібно показати, що функція  $u(M)$ , визначена формулою (4.80), є гармонічною в  $K_R$ , неперервною в замкненій кулі  $\bar{K}_R$  і набуває заданих неперервних значень  $f(P)$  на поверхні сфери  $S$ , тобто

$$\lim_{M \rightarrow P} u(M) = f(P), \quad P \in S.$$

При цьому  $u(M)$  стає неперервною функцією в  $\bar{K}_R$ , якщо її відповідним чином визначити на поверхні  $S$ .

Маємо

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= \frac{1}{4\pi R} \iint_S \Delta \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} f(P) ds = \\ &= \frac{1}{4\pi R} \iint_S \left\{ \Delta \frac{R^2 + r_{PM}^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} - \Delta \frac{1}{r_{PM}} \right\} f(P) ds = \\ &= \frac{1}{4\pi R} \iint_S \left( -2R\Delta \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \frac{1}{r_{PM}} \right) f(P) ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \Delta \frac{1}{r_{PM}} \right) f(P) ds \equiv 0, \end{aligned}$$

отже, при  $\rho < R$  функція (4.80) є гармонічною.

Візьмемо на поверхні сфери  $S$  довільну точку  $N$  і доведемо, що  $\lim_{M \rightarrow N} u(M) = f(N)$ .

Значимо, що формула (4.80) справедлива при  $f(P) \equiv 1$ . Унаслідок єдиності розв'язку задачі Діріхле  $\Delta u = 0$ ,  $u|_S = 1$  дістаємо

$$1 = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds.$$

Домножимо останню рівність на  $f(N)$  і результат віднімемо з формули (4.80). Маємо

$$u(M) - f(N) = \iint_S \frac{1}{4\pi R} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds. \quad (4.81)$$

Побудуємо сферу з центром у точці  $N$  і радіусом  $2\delta$ , де  $\delta$  вибираємо таким малим, щоб у всіх точках поверхні  $S$ , які потрапляють усередині-

ну цієї сфери, внаслідок неперервності функції  $f(P)$  справджувалася нерівність

$$|f(P) - f(N)| < \varepsilon/2, \quad (4.82)$$

де  $\varepsilon < 0$  — довільно задане мале число.

Позначимо через  $S_1$  частину поверхні  $S$ , яка знаходиться всередині сфери радіусом  $2\delta$  із центром у точці  $N$  (рис. 4.10). Тоді (4.81) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} u(M) - f(N) &= \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_1} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds + \\ &+ \frac{1}{4\pi R} \iint_{S \setminus S_1} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds. \end{aligned} \quad (4.83)$$

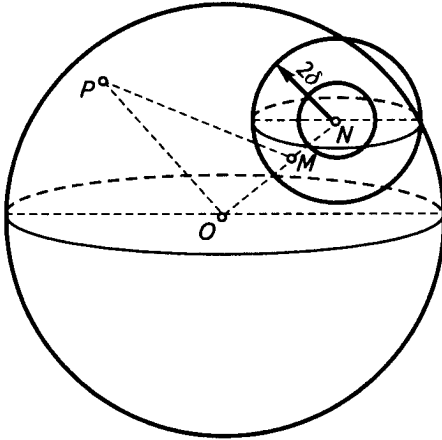


Рис. 4.10

Дамо оцінку кожного доданка в правій частині рівності (4.83). Враховуючи (4.82), дістаємо

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_1} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds \right| &< \frac{\varepsilon}{8\pi R} \iint_{S_1} \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{8\pi R} \iint_S \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Ця нерівність справедлива для довільного положення точки  $M$  у кулі  $K_R$ .

Дамо оцінку другого доданка в (4.83). Для цього побудуємо сферу радіусом  $\delta$  із центром у точці  $N$  і припустимо, що, наближаючися до точки  $N$ , точка  $M$  знаходиться всередині цієї сфери. Тоді  $r_{PM} > \delta$  при  $P \in S \setminus S_1$ .

Унаслідок неперервності функції  $f(P)$  на сфері  $S$  існує така скінченна стала  $K$ , що  $|f(P)| \leq K$ .

Отже,

$$\left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{S \setminus S_1} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds \right| \leq \frac{2K(R^2 - \rho^2)R}{\delta^3}.$$

Коли  $M \rightarrow N$ , то  $\rho \rightarrow R$ , і з останньої нерівності маємо

$$\left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{S \setminus S_1} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.85)$$

Із рівності (4.83), враховуючи (4.84) і (4.85), дістаємо

$$|u(M) - f(N)| < \varepsilon,$$

звідки внаслідок довільності  $\varepsilon > 0$  випливає, що  $\lim_{M \rightarrow P} u(M) = f(P)$ ,  $P \in S$ . Отже, формула Пуассона (4.80) є розв'язком внутрішньої задачі Діріхле для кулі, якщо функція  $f(P)$  неперервна на її краю  $S$ .

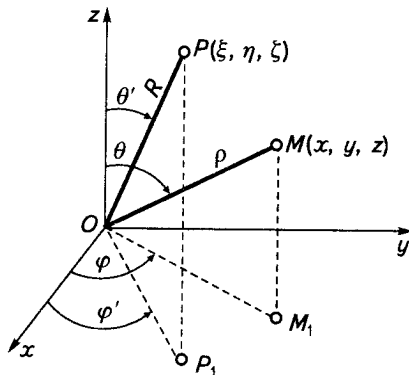


Рис. 4.11

Запишемо формулу Пуассона (4.80) у сферичній системі координат. Маємо (рис. 4.11)

$$\begin{aligned}\xi &= R \sin \theta' \cos \varphi', \quad \eta = R \sin \theta' \sin \varphi', \quad \zeta = R \cos \theta'; \\ x &= \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.\end{aligned}$$

Позначимо через  $\gamma$  кут між векторами  $\overline{OP}$  і  $\overline{OM}$ . Тоді

$$\begin{aligned}R\rho \cos \gamma &= R\rho(\sin \theta' \cos \varphi' \sin \theta \cos \varphi + \\ &+ \sin \theta' \sin \varphi' \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta' \cos \theta),\end{aligned}$$

або

$$\cos \gamma = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi' - \varphi). \quad (4.86)$$

Із курсу математичного аналізу відомо, що

$$ds = \sqrt{EG - F^2} d\theta' d\varphi',$$

де

$$\begin{aligned}E &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta'}\right)^2, \\ G &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi'}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial \xi}{\partial \theta'} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi'} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta'} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi'} + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta'} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi'}.\end{aligned}$$

Отже,

$$ds = R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (4.87)$$

Беручи до уваги, що  $r_{PM} = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma}$ , і підставляючи (4.87) у (4.80), дістаємо

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta', \varphi') \frac{(R^2 - \rho^2) \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{3/2}}, \quad (4.88)$$

де  $\cos \gamma$  визначається за формулою (4.86), а

$$f(\theta', \varphi') = f(R \sin \theta' \cos \varphi', R \sin \theta' \sin \varphi', R \cos \theta').$$

Розглянемо тепер зовнішню задачу Діріхле для сфери: в області  $K_R^* = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > R\}$  знайти гармонічну функцію  $u(x, y, z)$ , неперервну в  $\bar{K}_R^* = K_R^* \cup S$ , яка на сфері  $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  набуває наперед заданих неперервних значень  $f(P)$ .

Покажемо, що розв'язок поставленої задачі дається формулою Пуассона (див. рис. 4.9)

$$u(M_1) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S f(P) \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} ds. \quad (4.89)$$

Справді, як і для внутрішньої задачі Діріхле, легко показати, що функція  $u(M_1)$ , визначена за формулою (4.89), задовольняє рівняння Лапласа.

Потрібно ще довести, що  $u(M_1)$  прямує до нуля рівномірно, коли  $M_1 \rightarrow \infty$ . Очевидно,  $r_{PM_1} > \rho_1 - R$ .

Візьмемо тепер точку  $M_1$ , настільки віддалену від початку координат  $O$ , щоб  $\rho_1 > 2R$ , тобто  $R < 0,5\rho_1$ , а тоді  $r_{PM_1} > 0,5\rho_1$ . Звідси

$$\frac{1}{r_{PM_1}^3} < \frac{8}{\rho_1^3} \quad \text{і} \quad \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} < \frac{8(\rho_1^2 - R^2)}{\rho_1^3} < \frac{8}{\rho_1}.$$

Отже,

$$|u(M_1)| \leq \frac{1}{\rho_1} \frac{2}{\pi R} \iint_S |f(P)| ds = \frac{C}{\rho_1},$$

де

$$C = \frac{2}{\pi R} \iint_S |f(P)| ds.$$

З останньої оцінки бачимо, що  $u(M_1) \xrightarrow{\rho_1 \rightarrow \infty} 0$ .

Аби довести, що  $u(M_1) \xrightarrow{M_1 \rightarrow N} f(N)$ , запишемо інтеграл Пуассона (4.89) у сферичній системі координат:

$$u(\rho_1, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta', \varphi') \frac{(\rho_1^2 - R^2) \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(R^2 - 2R\rho_1 \cos \gamma + \rho_1^2)^{3/2}}, \quad (4.90)$$

де  $(\rho_1, \theta, \varphi)$  — сферичні координати точки  $M_1$ ;  $\gamma = \angle M_1OP$ .

Піддамо точку  $M_1(\rho_1, \theta, \varphi)$  перетворенню інверсії (4.75) відносно сфери  $S$ . Перетворена точка  $M_1(\rho_1, \theta, \varphi)$  лежатиме на прямій  $OM_1$  усередині кулі на відстані  $\rho$  від центра, причому  $\rho_1 = R^2 \rho^{-1}$ . Тоді (4.90) можна записати у вигляді

$$u(\rho_1, \theta, \varphi) = \frac{\rho}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta', \varphi') \frac{(R^2 - \rho^2) \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2)^{3/2}}, \quad (4.91)$$

при цьому  $\rho < R$ . Якщо точка  $M_1(\rho_1, \theta, \varphi)$  прямуватиме до довільної точки  $N(R, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$  на сфері  $S$ , то точка  $M(\rho, \theta, \varphi)$  із внутрішньої частини кулі  $K_R$  прямуватиме до тієї самої точки  $N(R, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ . Для внутрішньої задачі Діріхле було показано, що

$$\frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta', \varphi') \frac{(R^2 - \rho^2) \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{3/2}} \rightarrow f(N),$$

коли  $M \rightarrow N$ . Але тоді права частина (4.91) також прямує до  $f(N)$ , оскільки  $\rho \rightarrow R$  при  $M \rightarrow N$ .

Отже, формула Пуассона (4.91) є розв'язком зовнішньої задачі Діріхле для сфери.

### 4.13

#### Деякі наслідки формул Пуассона

- Розглянемо невід'ємну в області  $D$  гармонічну функцію  $u(M)$ .

Опишемо з деякої внутрішньої точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  сферу  $S_R(M_0)$  радіусом  $R$ , яка цілком міститься всередині області  $D$ . Позначимо через  $M(x, y, z)$  довільну внутрішню точку кулі  $K_R(M_0)$ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < R^2.$$

Оскільки для довільної точки  $M \in K_R(M_0)$  (рис. 4.12)

$$\frac{1}{4\pi R} \frac{R - \rho}{(R + \rho)^2} \leq \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} \leq \frac{1}{4\pi R} \frac{R + \rho}{(R - \rho)^2}, \quad \rho = |M_0M|,$$

то з формули Пуассона (8.80) маємо

$$\frac{R(R - \rho)}{(R + \rho)^2} \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R(M_0)} u(P) ds \leq u(M) \leq \frac{R(R + \rho)}{(R - \rho)^2} \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R(M_0)} u(P) ds.$$

Застосовуючи теорему 4.10 про середнє значення, дістаємо нерівність Гарнака для невід'ємних гармонічних функцій

$$\frac{R(R - \rho)}{(R + \rho)^2} u(M_0) \leq u(M) \leq \frac{R(R + \rho)}{(R - \rho)^2} u(M_0). \quad (4.92)$$

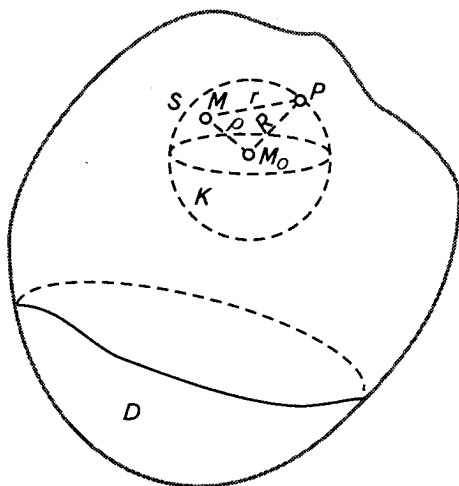


Рис. 4.12

**ТЕОРЕМА 4.14**

Функція, гармонічна в усьому просторі, тотожно дорівнює нулю.

**Доведення**

Нехай  $u(M)$  — гармонічна функція в усьому просторі. Побудуємо сферу  $S_R(0)$  довільного радіуса  $R$  із центром у початку координат. Тоді на підставі формули Пуассона (4.80) маємо

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} u(P) \frac{R^2 - \rho^2}{r_{MP}^3} ds. \quad (4.93)$$

Оскільки  $u(M) \rightarrow 0$ , то виберемо радіус  $R$  таким великим, щоб на поверхні сфери  $S_R(0)$   $|u(P)| < \epsilon$ , де  $\epsilon > 0$  — довільне як завгодно мале число. Тоді з (4.93) дістанемо

$$|u(M)| \leq \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} |u(P)| \frac{R^2 - \rho^2}{r_{MP}^3} ds < \frac{\epsilon}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} \frac{R^2 - \rho^2}{r_{MP}^3} ds = \epsilon.$$

Унаслідок довільності  $\epsilon$  звідси випливає, що  $u(M) = 0$ . Але точка  $M$  також довільна, отже,  $u(M) \equiv 0$  в усьому просторі. Теорему доведено.

- Нехай у тривимірному просторі задано область  $D$ , обмежену поверхнею  $\Sigma$ . Через  $D^*$  позначимо необмежену область, зовнішню щодо  $D$ . Вважаємо, що початок координат належить області  $D$ .

Доведемо: якщо функція  $u(M_1)$  гармонічна в  $D^*$ , то для достатньо віддалених від початку координат точок області  $D^*$  справедливі нерівності

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \frac{A}{\rho_1^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \frac{A}{\rho_1^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| < \frac{A}{\rho_1^2}, \quad (4.94)$$

де  $A$  — деяка стала;  $\rho_1$  — відстань точки  $M_1$  від початку координат.

Для доведення нерівностей (4.94) опишемо сферу  $S_R(0)$  із центром у початку координат і такого радіуса  $R$ , щоб поверхня  $\Sigma$  лежала всередині нашої сфери.

Функція  $u(M_1)$  гармонічна в  $D^*$ , отже, вона буде гармонічною і в області  $\bar{K}^*$ :  $x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$ . Тоді в  $\bar{K}^*$  функцію  $u(M_1)$  можна представити за допомогою формули Пуассона (4.89)

$$u(M_1) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} u(P) \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} ds, \quad (4.95)$$

де  $\rho_1 = |OM_1| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Диференціюючи (4.95), наприклад, за  $x$ , дістаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} u(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} \right) ds, \quad (4.96)$$

де

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} \right) = \frac{2x}{r_{PM_1}^3} - \frac{3(\rho_1^2 - R^2)x - \xi}{r_{PM_1}^4}.$$

Нехай точка  $M_1$  настільки віддалена від початку координат, що  $\rho_1 > 2R$ . Тоді з нерівності трикутника  $r_{PM_1} > \rho_1 - R > \frac{1}{2}\rho_1$ , тобто  $\frac{1}{r_{PM_1}} < \frac{2}{\rho_1}$ . Оскільки  $|x| \leq \rho_1$ ,  $\frac{|x - \xi|}{r_{PM_1}} \leq 1$ , то

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} \right) \leq \frac{16}{\rho_1^2} + \frac{48}{\rho_1^2} = \frac{64}{\rho_1^2},$$



а отже, з (4.96) маємо

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} |u(P)| \frac{64}{\rho_1^2} ds = \frac{A}{\rho_1^2},$$

де  $A = \frac{16}{\pi R} \iint_{S_R(0)} |u(P)| ds.$

Аналогічно доводяться й решта оцінок у (4.94).

### 4.14

#### Друга крайова задача для рівнянь еліптичного типу

У п. 4.8 було показано, що розв'язок внутрішньої задачі Неймана (4.50), (4.51) визначається з точністю до довільної сталої. Стосовно зовнішньої задачі Неймана доведемо таку теорему.

#### ТЕОРЕМА 4.15

*У класі функцій  $C^2(D^*) \cap C^1(\bar{D}^*)$  розв'язок зовнішньої задачі Неймана єдиний.*

#### Доведення

Припустимо, що зовнішня задача Неймана має два розв'язки  $u_1(M)$  і  $u_2(M)$ . Тоді їх різниця  $u(M) = u_1(M) - u_2(M)$  є гармонічною функцією в  $D^*$ , і для неї виконуються умови

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\Sigma} = 0, \quad |u(M)| < \frac{A}{\rho}. \quad (4.97)$$

Побудуємо сферу  $S_R(0)$  із центром у початку координат і такого радіуса  $R$ , щоб поверхня  $\Sigma$  належала внутрішній частині сфери  $S_R(0)$ . Позначимо через  $D_1$  область, обмежену поверхнями  $\Sigma$  і  $S_R(0)$ . Застосувавши першу формулу Гріна (4.48) для гармонічної функції  $u(M)$  до області  $D_1$  і поклавши  $v(M) = u(M)$ , дістанемо

$$\iint_{S_R(0)} u \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds + \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = \iiint_{D_1} [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz,$$

або внаслідок (4.97)

$$\iint_{S_R(0)} u \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = \iiint_{D_1} [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz. \quad (4.98)$$

Оскільки  $u(M)$  є гармонічною в  $D^*$ , то для неї справедливі оцінки (4.94), а отже,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\bar{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\bar{n}, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\bar{n}, z) \right| < \frac{3A}{R^2}$$

при  $M \in S_R(0)$ .

Таким чином,

$$\left| \iint_{S_R(0)} u \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds \right| < \frac{3A^2}{R^3} \iint_{S_R(0)} ds = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

Але тоді з (4.98) за досить великих  $R$  маємо

$$\iiint_{D_1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dx dy dz < \varepsilon$$

для довільних як завгодно малих  $\varepsilon > 0$ , а це можливо тільки за умови, що  $u_x = u_y = u_z = 0$ , тобто  $u(M) = \text{const}$ . Унаслідок умови регулярності на нескінченності  $u(M) \equiv 0$ , а отже,  $u_1(M) \equiv u_2(M)$ .

Теорему доведено.

У площині  $xOy$  розглянемо внутрішню задачу Неймана: в класі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ ,  $\bar{D} = D \cup S$  знайти розв'язок крайової задачі

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_S = f(x, y), \quad (x, y) \in S, \quad (4.99)$$

де  $\bar{n}$  — зовнішня нормаль до краю  $S$ .

Вважаємо, що крива  $S$  має в кожній точці скінченну кривину.

Покажемо, що задачу (4.99) можна звести до внутрішньої задачі Діріхле. Справді, побудуємо в  $\bar{D}$  функцію  $v(x, y)$  так, щоб в області  $D$  задовольнялись умови Д'Аламбера—Ейлера:

$$v_x(x, y) = u_y(x, y), \quad v_y(x, y) = -u_x(x, y). \quad (4.100)$$

Очевидно, якщо  $u(x, y)$  — гармонічна функція, то й  $v(x, y)$  є гармонічною, причому вона визначається з рівнянь (4.100) з точністю до сталого доданка.

Нехай напрям  $\vec{n}$  утворюється поворотом проти годинникової стрілки деякого напрямку  $\vec{l}$  на кут  $\pi/2$ . Тоді, беручи до уваги (4.100), дістаємо (рис. 4.13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\vec{n}, y) = -\frac{\partial v}{\partial y} \cos(\vec{n}, x) + \\ &+ \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\vec{n}, y) = \frac{\partial v}{\partial y} \cos(\vec{l}, y) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\vec{l}, x) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial \vec{l}}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

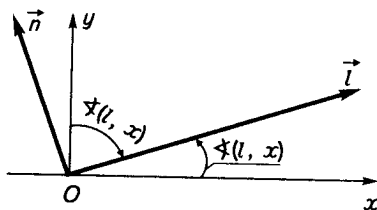


Рис. 4.13

На краю  $S$  області  $D$  зафіксуємо деяку точку  $A$ . Позначивши через  $\vec{n}$  нормаль до  $S$  у довільній точці  $B \in S$ , а через  $\vec{l}$  — дотичну в цій точці, внаслідок рівності (4.101) матимемо

$$\begin{aligned} \int_{AB} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds &= \int_{AB} \frac{\partial v}{\partial \vec{l}} ds = \int_{AB} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\vec{l}, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(\vec{l}, y) \right] ds = \\ &= \int_{AB} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_{AB} du = v(B) - v(A). \end{aligned}$$

Таким чином, на підставі крайової умови в (4.99) дістаємо

$$v(B) = v(A) + \int_{AB} f(x, y) ds. \quad (4.102)$$

Оскільки  $\int_S f(x, y) ds = 0$ , то рівність (4.102) визначає функцію  $v(x, y)$  на краю  $S$  області  $D$  як всюди неперервну й однозначну. За відомого значення гармонічної функції  $v(x, y)$  на краю  $S$  однозначно визначимо її в області  $D$ . Але тоді з рівнянь (4.100) з точністю до сталого доданка визначається розв'язок внутрішньої задачі Неймана (4.99).

У випадку тривимірного простору аналогічні побудови неможливі.

**4.15****Розв'язки внутрішньої та зовнішньої задач Неймана для кулі**

Позначимо через  $K_R$  кулю радіусом  $R$  із центром у початку координат, тобто  $K_R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ , а через  $K_R^*$  — область  $K_R^* = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > R^2\}$ .

Спочатку побудуємо розв'язок внутрішньої задачі Неймана для кулі: в класі функцій  $C^2(K_R) \cap C^1(\bar{K}_R)$  знайти розв'язок другої крайової задачі

$$\Delta u(M) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\rho=R} = \varphi(P), \quad M = M(\rho, \theta, \varphi), \quad P = P(\rho, \theta, \varphi), \quad (4.103)$$

де  $\rho, \theta, \varphi$  — сферичні координати точки  $M$ .

Для розв'язання задачі (4.103) доведемо таку властивість гармонічних функцій у тривимірному просторі: якщо функція  $u(M)$  є гармонічною в деякій області, яка містить початок координат, і  $u(0) = 0$ , то гармонічною буде й функція

$$v(M) = \int_0^\rho u(\rho_0, \theta, \varphi) \frac{d\rho_0}{\rho_0}. \quad (4.104)$$

Справді, використавши вираз оператора Лапласа у сферичних координатах (4.14), дістанемо

$$\Delta v(M) = \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u(M)] + \int_0^\rho \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] \frac{d\rho_0}{\rho_0} \right\}.$$

Оскільки  $\left. \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u] \right|_{\rho=0} = 0$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u(M)] &= \int_0^\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho_0^2} (\rho_0 u) d\rho_0 = \int_0^\rho \left( \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_0^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \right) d\rho_0 = \\ &= \int_0^\rho \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left( \rho_0^2 \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \right) \frac{d\rho_0}{\rho_0}. \end{aligned}$$

Беручи до уваги останню рівність, маємо

$$\Delta v(M) = \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} \rho_0 \left[ \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left( \rho_0^2 \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \right) + \frac{1}{\rho_0^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho_0^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] d\rho_0 = 0,$$

тобто функція  $v(M)$ , визначена формулою (4.104), є гармонічною.

Покажемо тепер, що розв'язок внутрішньої задачі Неймана для кулі (4.103) можна записати у вигляді

$$u(\rho, \theta, \varphi) = R \int_0^{\rho} \left\{ \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} \varphi(P) \frac{(R^2 - \rho_0^2) ds}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} \right\} \frac{d\rho_0}{\rho_0}, \quad (4.105)$$

де  $S_R(0): \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$ .

Справді, внаслідок необхідної умови розв'язності другої крайової задачі  $\iint_{S_R(0)} \varphi(P) ds = 0$ , отже, інтеграл Пуассона у фігурних дужках

формули (4.105) у початку координат дорівнює нулю, а тому на підставі доведеної властивості функція (4.105) буде гармонічною в кулі  $K_R$ .

Очевидно, що ця функція є неперервною в  $\bar{K}_R$ , а на сфері  $S_R(0)$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\rho=R} = \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} \varphi(P) \frac{(R^2 - \rho^2) ds}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{3/2}} \Big|_{\rho=R} = \varphi(P).$$

Таким чином, функція  $u(\rho, \theta, \varphi)$ , визначена формулою (4.105), є розв'язком внутрішньої задачі Неймана.

Аналогічно, враховуючи поведінку гармонічної функції на нескінченності, дістаємо розв'язок зовнішньої задачі Неймана для області  $K_R^*$  за крайової функції  $\varphi(P)$  у вигляді

$$u(\rho_1, \theta, \varphi) = -R \int_{\rho_1}^{\rho} \left\{ \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} \varphi(P) \frac{(\rho_0^2 - R^2) ds}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} \right\} \frac{d\rho_0}{\rho_0}, \quad (4.106)$$

де точка  $M_1(\rho_1, \theta, \varphi) \in K_R^*$ .

Формули (4.105) і (4.106) можна представити у простішому вигляді.

Так, у випадку внутрішньої крайової задачі  $\iint_{S_R(0)} \varphi(P) ds = 0$ , і формула (4.105) запишеться так:

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta, \varphi) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\rho} \left\{ \iint_{S_R(0)} \varphi(P) \left[ \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} - \frac{1}{R} \right] ds \right\} \frac{d\rho_0}{\rho_0} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R(0)} \varphi(P) \left\{ \int_0^{\rho} \left[ \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} - \frac{1}{R} \right] \frac{d\rho_0}{\rho_0} \right\} ds. \quad (4.107) \end{aligned}$$

Нехай  $F(\rho_1) = (R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{1/2}$ . Тоді маємо

$$2\rho_0 \frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0} = 2\rho_0 \frac{\rho_0 - R \cos \gamma}{F(\rho_0)} = F(\rho_0) - \frac{R^2 - \rho_0^2}{F(\rho_0)},$$

тобто

$$\begin{aligned} \frac{R^2 - \rho_0^2}{[F(\rho_0^2)]^3} &= \frac{1}{F(\rho_0)} - 2\rho_0 \frac{1}{[F(\rho_0)]^2} \frac{\partial F(\rho_0)}{\partial \rho_0} = \\ &= \frac{1}{F(\rho_0)} + 2\rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left( \frac{1}{F(\rho_0)} \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\rho} \left[ \frac{R^2 - \rho_0^2}{[F(\rho_0)]^3} - \frac{1}{R} \right] \frac{d\rho_0}{\rho_0} = \int_0^{\rho} \left[ \frac{1}{F(\rho_0)} + 2\rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left( \frac{1}{F(\rho_0)} \right) - \frac{1}{R} \right] \frac{d\rho_0}{\rho_0} = \\ &= \int_0^{\rho} \left( \frac{1}{F(\rho_0)} - \frac{1}{R} \right) \frac{d\rho_0}{\rho_0} + 2 \left( \frac{1}{F(\rho)} - \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\left( \frac{1}{F(\rho_0)} - \frac{1}{R} \right) \frac{d\rho_0}{\rho_0} = \left( \frac{1}{\rho_0 \left( 1 + \left( \frac{R}{\rho_0} \right)^2 - 2 \frac{R}{\rho_0} \cos \gamma \right)^{1/2}} - \frac{1}{R} \right) \frac{d\rho_0}{\rho_0} =$$

$$= - \left( \frac{1}{(1+x^2-2x \cos \gamma)^{1/2}} - \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{R},$$

де  $x = R/\rho_0$ , а

$$\int \frac{dx}{(1+x^2-2x \cos \gamma)^{1/2}} = \ln \left| x - \cos \gamma + \sqrt{1+x^2-2x \cos \gamma} \right| + \text{const},$$

то

$$J = 2 \left( \frac{1}{F(\rho)} - \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \ln(R - \rho \cos \gamma + F(\rho)) + \frac{\ln 2R}{R}.$$

Підставляючи знайдений інтеграл у (4.107) і враховуючи, що

$$\iint_{S_R(0)} \varphi(P) ds = 0, \text{ дістаємо розв'язок внутрішньої задачі Неймана у}$$

вигляді

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R(0)} \varphi(P) [2(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{1/2} - \frac{1}{R} \ln(R - \rho \cos \gamma + (R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{1/2})] ds. \quad (4.108)$$

Аналогічно, змінюючи порядок інтегрування у формулі (4.106), розв'язок зовнішньої задачі Неймана для сфери запишемо так:

$$u(\rho_1, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R(0)} [2(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1 \cos \gamma)^{-1/2} - \frac{1}{R} \ln\{R - \rho_1 \cos \gamma + (R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1 \cos \gamma)^{1/2}\} \rho_1^{-1} (1 - \cos \gamma)^{-1}] \varphi(P) ds.$$

## Тема 3

## ТЕОРІЯ ПОТЕНЦІАЛУ

4.16Потенціал об'єму простого й подвійного шарів.  
Основні означення

Одним із важливих розділів математичної фізики є теорія потенціалу, яка дістала розвиток історично досить рано. Вона має важливе значення з погляду фізичних застосувань та розвитку методів розв'язання крайових задач теорії рівнянь еліптичного типу.

Важливу роль у розвитку теорії потенціалу й дослідженні крайових задач для рівняння Лапласа відіграла праця О. М. Ляпунова «Про деякі питання, пов'язані із задачею Діріхле» (1898). У даній темі буде використано низку результатів цієї роботи.

Нехай у деякій точці  $A(a, b, c)$  тривимірного простору міститься електричний (або магнітний) заряд  $q$ . Тоді на підставі закону Кулона цей заряд створює електростатичне поле, напруга якого  $\vec{E}$  в довільній точці  $M(x, y, z)$ , відмінній від  $A(a, b, c)$ , становить

$$\vec{E} = kq \frac{\vec{r}}{r^3}$$

або в проекціях

$$E_x = kq \frac{x-a}{r^3}, \quad E_y = kq \frac{y-b}{r^3}, \quad E_z = kq \frac{z-c}{r^3}, \quad (4.109)$$

де  $\vec{r} = \overline{AM}$ ;  $r = |\overline{AM}|$ ;  $k$  — коефіцієнт пропорційності, що залежить від вибраної системи одиниць. Для простоти вважатимемо, що  $k = 1$ .

Неважко бачити, що праві частини формули (4.109) дорівнюють із протилежним знаком частинним похідним від функції

$$u(M) = \frac{q}{r} + C_1, \quad C_1 = \text{const} \quad (4.110)$$

за  $x, y$  і  $z$  відповідно. Ця функція називається *потенціалом електростатичного поля*. Вважається, що в (4.110)  $C_1 = 0$ , щоб  $u(M) \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow \infty$ .

Таким чином, точковий заряд  $q$  створює потенціал

$$u(M) = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}. \quad (4.111)$$



Оскільки за кількох точкових зарядів потенціали, створені ними, додаються, то потенціали, створені неперервно розподіленими зарядами, обчислюються у вигляді границі суми, тобто у вигляді інтеграла.

Нехай заряд розподілений в об'ємі  $T$  з об'ємною густиною  $f(M)$ . Тоді потенціал, створений цим зарядом,

$$v(M) = \iiint_T \frac{f(N)}{r} d\tau, \quad r = |\overline{MN}|, \quad N = N(\xi, \eta, \zeta). \quad (4.112)$$

Права частина формули (4.112) називається *об'ємним потенціалом*.

Якщо заряд розподілений по поверхні  $S$  із поверхневою густиною  $\psi(N)$ , то потенціал, створений цим зарядом,

$$u(M) = \iint_S \frac{\psi(N)}{r} ds, \quad (4.113)$$

де  $r$  — відстань від точки  $M$  до змінної точки  $N$  на поверхні  $S$ .

Права частина (4.113) називається *потенціалом простого шару*.

Припустимо тепер, що два точкових заряди  $q$  і  $-q$  (рис. 4.14), які знаходяться на осі  $l$  на відстані  $h$ , прямують до точки  $A$ , причому на-

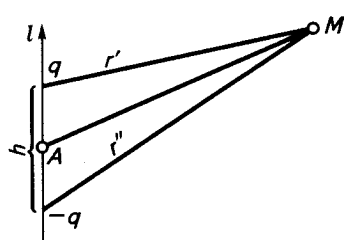


Рис. 4.14

прям від  $-q$  до  $q$  весь час збігається з додатним напрямом осі  $l$ . Тоді потенціал у довільній точці, крім  $A$ , є різницею двох величин, які намагаються стати рівними одна одній; тому цей потенціал прямує до нуля.

Якщо ж у процесі руху  $q$  змінюється таким чином, що  $qh = p = \text{const}$ , то границя потенціалу становить

$$\begin{aligned} \omega(M) &= \lim_{h \rightarrow 0} q \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} p \frac{1/r' - 1/r''}{h} = \\ &= p \frac{\partial}{\partial \bar{l}} \left( \frac{1}{r} \right) = p \frac{\cos(\overline{AM}, \bar{l})}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Граничне розміщення зарядів у фізиці називають диполем, величину  $p$  — моментом, а вісь  $\bar{l}$  — віссю цього диполя. За допомогою точкових зарядів диполь може бути реалізований тільки наближено (два великих заряди на малій відстані один від одного).

Нехай тепер дано орієнтовну поверхню  $S$ , тобто таку, на якій вказано зовнішні й внутрішні сторони. Нехай на  $S$  розподілений диполь із

густиною  $\mu(N)$ , причому в кожній точці  $N$  напрям осі диполя збігається з напрямом внутрішньої нормалі до  $S$  у точці  $N$ . Тоді потенціал, створений диполем,

$$\omega(M) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\overline{NM}, \bar{n}_i)}{r^2} ds, \quad (4.115)$$

де вектор  $\bar{r}$  напрямлений від  $N$  до  $M$ ;  $\bar{n}_i$  — внутрішня нормаль до  $S$ .

Цей інтеграл називається *потенціалом подвійного шару*, оскільки розглядуваний розподіл диполя може бути наближено реалізований як два накладених на поверхню  $S$  розподіли зарядів із густиною  $h^{-1}\mu(M)$  і  $-h^{-1}\mu(N)$  на відстані  $h$  (по нормалі до  $S$ ) один від одного, якщо тільки  $h$  досить мале.

Надалі вважатимемо, що вектор  $\bar{r}$  напрямлений від точки  $M$  до  $N$  і нормаль до  $S$  братимемо зовнішню. Тоді (4.115) можемо записати у вигляді

$$\omega(M) = -\iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \iint_S \mu(N) \frac{\cos \varphi}{r^2} ds, \quad (4.116)$$

де  $\varphi = (\bar{r}, \bar{n})$  — кут між зовнішньою нормаллю й вектором  $\bar{r} = \overline{MN}$ .

## 4.17

### Об'ємний потенціал

Розглянемо потенціал об'єму

$$v(M) = \iiint_T \frac{f(N)}{r} d\tau, \quad r = |\overline{MN}|, \quad (4.117)$$

де  $T$  — скінченна область, обмежена поверхнею  $S$ ;  $\bar{T} = T \cup S$ . Вважаємо, що функція  $f(N)$  — обмежена й інтегровна в  $T$ . Інтеграл (4.117) є власним інтегралом, якщо точка  $M$  лежить поза  $T$  ( $r \neq 0$ ). У цьому випадкові функція  $v(M)$  неперервна й має частинні похідні всіх порядків. Ці похідні можна дістати диференціюванням під знаком інтеграла, й  $v(M)$  задовольняє рівняння Лапласа  $\Delta v(M) = 0$  поза  $T$ . Покажемо, що при  $M \rightarrow \infty$  у довільному напрямі функція прямує до нуля, так що

$$|v(M)| < A/\rho_1, \quad A = \text{const},$$

де  $\rho_1$  — відстань точки  $M$  від початку координат.

Розташуємо початок координат усередині області  $T$  (рис. 4.15). Тоді  $MN \geq OM - ON$ , або  $r \geq \rho_1 - ON$ . Позначимо через  $d$  діаметр області  $T$ . Тоді  $r \geq \rho_1 - d$ . Вважатимемо, що точка  $M$  настільки віддалена від початку координат, що  $\rho_1 > 2d$ , тобто  $d < \rho_1/2$ . Але тоді  $r < 0,5\rho_1$ , або  $r^{-1} < 2\rho_1^{-1}$ . Ураховуючи дану нерівність, маємо

$$|v(M)| \leq \iiint_T |f(N)| \frac{d\tau}{r} < \frac{2}{\rho_1} \iiint_T |f(N)| d\tau = \frac{A}{\rho_1},$$

де  $A = 2 \iiint_T |f(N)| d\tau$ .

Таким чином, потенціал об'єму є гармонічною функцією поза областю  $T$ .

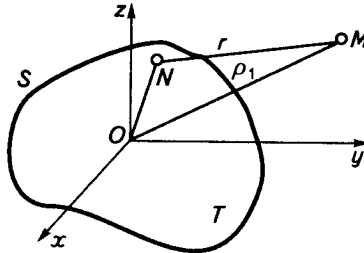


Рис. 4.15

Нехай тепер точка  $M \in T$ . Тоді інтеграл (4.117) буде невласним. Унаслідок обмеженості  $f(N)$  інтеграл (4.117) збігається, оскільки  $|f(N)| r^{-1} < Cr^{-1}$ . Покажемо, що він є неперервною функцією.

Справді, нехай  $M_0$  — довільна внутрішня точка області  $T$ . Візьмемо в області  $T$  область  $T_\delta$ , яка містить точку  $M_0$ , і обчислимо модуль інтеграла

$$|v_\delta(M)| = \left| \iiint_{T_\delta} \frac{f(N)}{r} d\tau \right| < C \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} d\tau,$$

де  $K_\delta(M_0)$  — куля радіусом  $\delta$  із центром у точці  $M_0$ , яка містить область  $T_\delta$ ,  $T_\delta \subset K_\delta(M_0)$ . Для обчислення останнього інтеграла введемо сферичну систему координат із центром у точці  $M$ . Очевидно, що

$$C \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} d\tau < C \iiint_{K_{2\delta}(M)} r^{-1} d\tau = C \int_0^{2\delta} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin \theta d\varphi d\theta dr = 8C\pi\delta^2,$$

де  $K_{2\delta}(M)$  — куля радіусом  $2\delta$  із центром у точці  $M$ . Отже,  $|v_\delta(M)| <$

$< 8\pi C\delta^2$  і при  $\delta \rightarrow 0$   $|v_\delta(M)| \rightarrow 0$  незалежно від точки  $M_0$ , тобто, якщо задано  $\varepsilon > 0$ , то, вибираючи  $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{8\pi C}\right)^{1/2}$ , переконуємося в рівномірній збіжності інтеграла (4.117) у довільній точці  $M_0$  області  $T$ . Оскільки рівномірну збіжність інтеграла (4.117) доведено за умови обмеженості густини  $f(N)$ , то цей інтеграл неперервний також і в точках розриву першого роду функції  $f(N)$ .

Справедлива наступна теорема.

#### ТЕОРЕМА 4.16

*Якщо  $f(N)$  обмежена й інтегровна в області  $T$ , то потенціал  $v(M)$  і його частинні похідні першого порядку неперервні в усьому просторі, і ці похідні можна дістати диференціюванням під знаком інтеграла.*

#### Доведення

Для доведення теореми залишилося показати, що частинні похідні першого порядку  $v_x(M)$ ,  $v_y(M)$ ,  $v_z(M)$  в області  $T$  є неперервними і їх можна дістати диференціюванням під знаком інтеграла (4.117).

Для цього розглянемо інтеграли

$$\begin{aligned} X(M) &= -\iiint_T f(N) \frac{x-\xi}{r^3} d\tau, \\ Y(M) &= -\iiint_T f(N) \frac{y-\eta}{r^3} d\tau, \\ Z(M) &= -\iiint_T f(N) \frac{z-\zeta}{r^3} d\tau, \end{aligned} \quad (4.118)$$

які дістаються диференціюванням (4.117) відповідно за  $x$ ,  $y$  і  $z$  під знаком інтеграла.

Повторюючи вищенаведені міркування для інтегралів (4.118), маємо

$$\begin{aligned} |X(M)| &< C \iiint_{T_\delta} \frac{|x-\xi|}{r^3} d\tau < C \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-2} d\tau < C \iiint_{K_{2\delta}(M_0)} r^{-2} d\tau = 8\pi C\delta < \varepsilon, \\ |Y(M)| &< \varepsilon, \quad |Z(M)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

якщо  $\delta < \varepsilon(8\pi C)^{-1}$ . Звідси впливає рівномірність збіжності інтегралів (4.118) та їх неперервність також і в точках розриву функції  $f(N)$ . Точ-

ки краю  $S$  області  $T$  можна розглядати як точки розриву густини  $f(N)$ , яка дорівнює нулю за межами  $T$ . Отже, потенціал  $v(M)$  та інтеграли (4.118) неперервні в усьому просторі.

Покажемо, що  $X(M) = v_x$  для довільних точок  $M(x, y, z) \in T$ . Для цього доведемо:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , що як тільки  $|\Delta t| < \delta$ , то

$$\left| \frac{v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x} - X(M) \right| < \varepsilon.$$

Розглянемо кулю  $K_{\delta'}(M)$  досить малого радіуса  $\delta'$  із центром у точці  $M$ , яка належить області  $T$ . Вважаємо, що точка  $M_1(x + \Delta x, y, z) \in K_{\delta'}(M)$ . Розділимо  $v(M)$  на два доданки:

$$v(M) = v_1(M) + v_2(M),$$

де

$$v_1(M) = \iiint_{K_{\delta'}(M)} r^{-1} f(N) d\tau; \quad v_2(M) = \iiint_{T \setminus K_{\delta'}(M)} r^{-1} f(N) d\tau.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x} &= \frac{v_1(x + \Delta x, y, z) - v_1(x, y, z)}{\Delta x} + \\ &+ \frac{v_2(x + \Delta x, y, z) - v_2(x, y, z)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Для довільних фіксованих розмірів кулі  $K_{\delta'}(M)$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v_2(x + \Delta x, y, z) - v_2(x, y, z)}{\Delta x} &= X_2(M) = \\ &= \iiint_{T \setminus K_{\delta'}(M)} f(N) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau, \end{aligned}$$

тому що точка  $M$  лежить за межами області  $T \setminus K_{\delta'}(M)$ .

Поклавши  $X(M) = X_1(M) + X_2(M)$ , оцінимо

$$\begin{aligned} &\left| X(M) - \frac{v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x} \right| \leq \\ &\leq \left| X_2(M) - \frac{v_2(x + \Delta x, y, z) - v_2(x, y, z)}{\Delta x} \right| + \\ &+ \left| X_1(M) \right| + \left| \frac{v_1(x + \Delta x, y, z) - v_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| \end{aligned}$$

і покажемо, що кожний доданок можна зробити меншим за  $\varepsilon/3$ . Справді, оскільки  $|f(N)| < C$  і  $|r^{-1}(x - \xi)| < 1$ , то

$$|X_1(M)| = \left| \iiint_{K_{\delta'}(M)} f(N) \frac{x - \xi}{r^3} d\tau \right| < C \int_0^{\delta'} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr}{r^2} = 4\pi C\delta'.$$

Розглянемо останній доданок

$$\begin{aligned} |d| &= \left| \frac{v_1(x + \Delta x, y, z) - v_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \iiint_{K_{\delta'}(M)} f(N)(r_1^{-1} - r^{-1}) d\tau \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \iiint_{K_{\delta'}(M)} f(N) \frac{r - r_1}{r_1 r} d\tau \right|, \end{aligned}$$

де  $r_1 = \sqrt{[(x + \Delta x) - \xi]^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ . Сторони трикутника  $MNM_1$  дорівнюють  $r$ ,  $r_1$ ,  $\Delta x$ , отже,  $|r - r_1| \leq |\Delta x|$ . Унаслідок нерівності  $2ab \leq a^2 + b^2$  маємо

$$|d| \leq C \iiint_{K_{\delta'}(M)} (r_1)^{-1} d\tau \leq \frac{C}{2} \left[ \iiint_{K_{\delta'}(M)} r_1^{-2} d\tau + \iiint_{K_{\delta'}(M)} r^{-2} d\tau \right].$$

Переходячи до сферичних координат, дістаємо

$$\iiint_{K_{\delta'}(M)} r^{-2} d\tau = 4\pi\delta', \quad \iiint_{K_{\delta'}(M)} r_1^{-2} d\tau \leq \iiint_{K_{2\delta'}(M)} r_1^{-2} d\tau = 8\pi\delta'.$$

Нехай  $\delta' = \varepsilon(18\pi C)^{-1}$ . Тоді справедливі оцінки

$$|X_1(M)| < \varepsilon/3, \quad |d| < \varepsilon/3. \quad (4.119)$$

Фіксуємо кулю  $K_{\delta'}(M)$ . Тоді фіксованою буде й область  $T \setminus K_{\delta'}(M)$ . Рівність (4.118) відносно вибраної області  $T \setminus K_{\delta'}(M)$  означає, що для довільного  $\varepsilon > 0$  можна вказати таке  $\delta''$ , що як тільки  $|\Delta x| < \delta''$ , то

$$\left| \frac{v_2(x + \Delta x, y, z) - v_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2(M) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Покладемо  $\delta = \min(\delta', \delta'')$ . Тоді, враховуючи (4.119), дістанемо

$$\left| \frac{v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x} - X(M) \right| < \varepsilon,$$

якщо тільки  $|\Delta x| < \delta$ , що й потрібно було показати.

Аналогічно доводиться справедливність формул  $Y(M) = v_y$  і  $Z(M) = v_z$ .

#### ТЕОРЕМА 4.17

*Якщо густина  $f(N) \in C(T) \cap C^1(T)$ , то потенціал об'єму (4.117) має неперервні похідні другого порядку в області  $T$  і задовольняє в цій області рівняння Пуассона*

$$\Delta v(M) = -4\pi f(M). \quad (4.120)$$

#### Доведення

Нехай  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  — довільна точка області  $T$ . Позначимо через  $K_\delta(M_0)$  кулю радіусом  $\delta$  із центром у точці  $M_0$ , яка цілком міститься всередині області  $T$ , а через  $T_1$  — область  $T_1 = T \setminus K_\delta(M_0)$ . Як і в теоремі 4.16, розділимо потенціал об'єму (4.117) на два доданки:

$$v(M) = \iiint_{T_1} r^{-1} f(N) d\tau + \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} f(N) d\tau = v_1(M) + v_2(M). \quad (4.121)$$

На підставі доведеної теореми маємо

$$v_x(M) = \iiint_{T_1} f(N) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau + \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} f(N) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau. \quad (4.122)$$

Але

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right), \quad r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2},$$

отже,

$$v_x(M) = \iiint_{T_1} f(N) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau - \iiint_{K_\delta(M_0)} f(N) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau.$$

Перетворимо другий інтеграл:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2(M)}{\partial x} &= - \iiint_{K_\delta(M_0)} f(N) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau = - \iiint_{K_\delta(M_0)} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( f(N) \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] d\tau = \\ &= - \iiint_{K_\delta(M_0)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( f(N) \frac{1}{r} \right) d\tau + \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} \frac{\partial f}{\partial \xi} d\tau. \end{aligned}$$

Застосуємо до першого інтеграла формулу Гаусса—Остроградського. Тоді

$$\frac{\partial v_2(M)}{\partial x} = - \iint_{S_\delta(M_0)} f(N) \frac{\cos(\vec{n}, \xi)}{r} ds + \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} \frac{\partial f}{\partial \xi} d\tau,$$

де  $S_\delta(M_0)$  — сфера радіусом  $\delta$  із центром у точці  $M_0$ ;  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до  $S_\delta(M_0)$  у точці  $N$ .

Підставивши знайдену похідну в (4.122), дістанемо

$$\begin{aligned} v_x(M) = & \iiint_{T_1} f(N) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau + \iiint_{K_\delta(M_0)} \frac{1}{r} \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} d\tau - \\ & - \iint_{S_\delta(M_0)} f(N) \frac{\cos(\vec{n}, \xi)}{r} ds. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Перший доданок у правій частині (4.123) є власним інтегралом для точок  $M$ , які лежать у кулі  $K_\delta(M_0)$ , і він має в  $K_\delta(M_0)$  похідні всіх порядків. Те саме можна стверджувати стосовно третього доданка, тому що точка  $N \in S_\delta(M_0)$ , а точка  $M \in K_\delta(M_0)$ .

Другий доданок є потенціалом об'єму з неперервною густиною  $\frac{\partial f(N)}{\partial \xi}$  і на підставі теореми 4.16 він має неперервні похідні першого порядку в усьому просторі.

Таким чином, можна стверджувати, що  $v_x(M)$  має неперервні похідні першого порядку в кулі  $K_\delta(M_0)$ . Унаслідок довільності вибору точки  $M_0 \in T$  звідси випливає існування неперервних похідних першого порядку від функції  $v_x(M)$  всюди в області  $T$ . Застосовуючи аналогічні міркування до функцій  $v_y(M)$  і  $v_z(M)$ , дістаємо, що величина  $v(M)$  має в області  $T$  неперервні похідні до другого порядку включно.

Покажемо тепер, що об'ємний потенціал  $v(M)$  задовольняє в області  $T$  рівняння Пуассона. Звернемося до формул (4.121), (4.123). Потенціал  $v_1(M)$  по області  $T_1$  є гармонічною функцією в кулі  $K_\delta(M_0)$ , тому що  $K_\delta(M_0)$  лежить поза  $T_1$ , тобто  $\Delta v_1(M) = 0$  у кулі  $K_\delta(M_0)$ , а отже,  $\Delta v(M) = \Delta v_2(M)$  у кулі  $K_\delta(M_0)$ . Таким чином, для обчислення  $\Delta v(M)$  достатньо здиференціювати за  $x$  під знаком інтеграла ті члени в (4.123), в яких інтегрування здійснюється по  $K_\delta(M_0)$  і  $S_\delta(M_0)$ , скласти аналогічні вирази для похідних другого порядку за  $y$  і  $z$  і додати всі три похідні. Обчисливши таким чином  $\Delta v(M)$  у кулі  $K_\delta(M_0)$ , візьмемо всі його значення в точці  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Дістанемо



$$\begin{aligned} \Delta v(M_0) = & \\ = & \iiint_{K_\delta(M_0)} \left[ \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \frac{\xi - x_0}{r_0^3} + \frac{\partial f(N)}{\partial \eta} \frac{\eta - y_0}{r_0^3} + \frac{\partial f(N)}{\partial \zeta} \frac{\zeta - z_0}{r_0^3} \right] d\tau - \\ & - \iint_{S_\delta(M_0)} f(N) \left[ \frac{\xi - x_0}{r_0^3} \cos(\bar{n}, \xi) + \frac{\eta - y_0}{r_0^3} \cos(\bar{n}, \eta) + \right. \\ & \left. + \frac{\zeta - z_0}{r_0^3} \cos(\bar{n}, \zeta) \right] ds, \end{aligned} \quad (4.124)$$

де  $r_0 = \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2}$ .

Формула (4.124) справедлива для всякого  $\delta$ , якщо  $K_\delta(M_0) \subset T$ , а величина  $\Delta v(M_0)$  не залежить, очевидно, від вибору  $\delta$ . Доведемо, що при  $\delta \rightarrow 0$  потрійний інтеграл прямує до нуля. Справді, нехай

$m = \max \left| \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \right|$  у деякій фіксованій досить малій кулі  $K_{\delta_0}(M_0)$ .

Тоді при  $\delta \leq \delta_0$ , беручи до уваги, що  $|(\xi - x_0)r_0^{-1}| = |\cos(\bar{n}, \xi)| \leq 1$ , дістаємо

$$\left| \iiint_{K_\delta(M_0)} \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \frac{\xi - x_0}{r_0^3} d\tau \right| \leq m \iiint_{K_\delta(M_0)} r_0^{-2} d\tau.$$

Ввівши сферичні координати з центром у точці  $M_0$ , матимемо

$$\left| \iiint_{K_\delta(M_0)} \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \frac{\xi - x_0}{r_0^3} d\tau \right| \leq m \int_0^\delta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = 4\pi m \delta.$$

Аналогічно оцінюються решта доданків у потрійному інтегралі. Отже, потрійний інтеграл у формулі (4.124) прямує до нуля при  $\delta \rightarrow 0$ .

Дослідимо тепер в (4.124) інтеграл по сфері  $S_\delta(M_0)$ . Оскільки зовнішня нормаль до сфери  $S_\delta(M_0)$  напрямлена вздовж її радіуса, то

$$\begin{aligned} (\xi - x_0)r_0^{-3} \cos(\bar{n}, \xi) + (\eta - y_0)r_0^{-3} \cos(\bar{n}, \eta) + (\zeta - z_0)r_0^{-3} \cos(\bar{n}, \zeta) = \\ = r_0^{-2} [\cos^2(\bar{n}, \xi) + \cos^2(\bar{n}, \eta) + \cos^2(\bar{n}, \zeta)] = \frac{1}{r_0^2}, \end{aligned}$$

а отже, інтеграл по  $S_\delta(M_0)$  можна записати у вигляді

$$\frac{1}{\delta^2} \iint_{S_\delta(M_0)} f(N) ds.$$

Застосовуючи до поверхневого інтеграла теорему 4.10 про середнє значення, дістаємо

$$\frac{1}{\delta^2} \iint_{S_\delta(M_0)} f(N) ds = 4\pi f(N_\delta),$$

де  $N_\delta$  — деяка точка на  $S_\delta(M_0)$ . Коли  $\delta \rightarrow \infty$ , точка  $N_\delta \rightarrow M_0$  і інтеграл по  $S_\delta(M_0)$  прямує до  $4\pi f(M_0)$ . Отже, формула (4.124) при  $\delta \rightarrow 0$  дає

$$\Delta v(M_0) = -4\pi f(M_0),$$

що й потрібно було довести.

◇ **Зауваження 4.5.** Якщо  $f(M) \in C(\bar{T}) \cap C^1(T)$ , то рівняння  $v(M) = -f(M)$  має частинний розв'язок

$$v(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{f(N)}{r} d\tau, \quad r = |MN|.$$

## 4.18

### Потенціал подвійного шару

Розглянемо потенціал подвійного шару неперервної густини  $\mu(N)$ , розподіленої на поверхні Ляпунова  $S$ :

$$\omega(M) = - \iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2} ds, \quad (4.125)$$

де похідна береться за напрямом зовнішньої нормалі  $\bar{n}$  до поверхні  $S$  у точці  $N(\xi, \eta, \zeta)$ ; вектор  $\bar{r}$  напрямлений від точки  $M(x, y, z)$  до точки  $N(\xi, \eta, \zeta)$ .

Потенціал подвійного шару поза  $S$  всюди має похідні всіх порядків і задовольняє рівняння Лапласа.

Покажемо, що потенціал подвійного шару прямує до нуля на нескінченності.

Візьмемо початок координат усередині області  $T$ , обмеженої поверхнею  $S$  (рис. 4.16). Тоді  $MN \geq OM - ON$ , або  $r \geq \rho_1 - ON$ . Позначимо

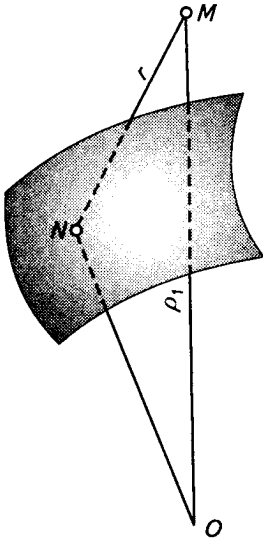


Рис. 4.16

через  $L$  найбільшу відстань точок поверхні від початку координат. Тоді  $r \geq \rho_1 - L$ . Вважатимемо, що точка  $M$  настільки віддалена від початку координат, що  $\rho_1 > 2L$ , тобто  $L < 0,5\rho_1$ ; отже,  $r > 0,5\rho_1$ , або  $r^{-1} < 2\rho_1^{-1}$ .

Ураховуючи останню нерівність, маємо

$$\begin{aligned} |\omega(M)| &\leq \iint_S |\mu(N)| \frac{|\cos(r, \vec{n})|}{r^2} ds \leq \\ &\leq \frac{4}{\rho_1^2} \iint_S |\mu(N)| ds = A\rho_1^{-2}, \end{aligned}$$

де  $A = 4 \iint_S |\mu(N)| ds$ .

Отже, потенціал подвійного шару прямує до нуля на нескінченності як  $\rho_1^{-2}$ .

Нехай тепер точка  $M$  збігається з деякою точкою  $N_0$ , що лежить на поверхні  $S$ . Тоді

$$r_0 = |\vec{N}_0\vec{N}| \text{ перетворюється в нуль у разі збігу}$$

точок  $N$  і  $N_0$ , і інтеграл (4.125) у цьому разі є невластим. Покажемо, що він збіжний. Для цього достатньо дослідити підінтегральну функцію на деякій частині  $\sigma_0$  поверхні  $S$  поблизу точки  $N_0$ . По частині поверхні  $S \setminus \sigma_0$  інтеграл має скінченне значення, тому що  $N_0 \notin S \setminus \sigma_0$ .

Поверхня  $\sigma_0$  є поверхнею Ляпунова. Отже, в точці  $N_0$  можна побудувати місцеву систему координат, і рівняння частини  $\sigma_0$  поверхні  $S$  представляється в цій системі у вигляді  $\zeta = f(\xi, \eta)$ .

У місцевій системі координат точка  $N_0$  має координати  $(0, 0, 0)$ , а точка  $N$  — координати  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Тоді  $r_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ .

Знайдемо вираз для  $\cos(\vec{r}_0, \vec{n})$ , де  $\vec{r}_0$  — напрям  $\vec{N}_0\vec{N}$ . Маємо

$$\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \cos(\vec{r}_0, \xi) \cos(\vec{n}, \xi) + \cos(\vec{r}_0, \eta) \cos(\vec{n}, \eta) + \cos(\vec{r}_0, \zeta) \cos(\vec{n}, \zeta).$$

Але

$$\cos(\vec{r}_0, \xi) = \xi r_0^{-1}, \quad \cos(\vec{r}_0, \eta) = \eta r_0^{-1}, \quad \cos(\vec{r}_0, \zeta) = \zeta r_0^{-1},$$

отже,

$$\cos(\vec{r}_0, \vec{n}) = \frac{1}{r_0} [\xi \cos(\vec{n}, \xi) + \eta \cos(\vec{n}, \eta) + \zeta \cos(\vec{n}, \zeta)].$$

Напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні  $\sigma_0$  виражаються формулами

$$\cos(\vec{n}, \xi) = \frac{f_\xi}{\sqrt{1 + f_\xi^2 + f_\eta^2}}, \quad \cos(\vec{n}, \eta) = \frac{f_\eta}{\sqrt{1 + f_\xi^2 + f_\eta^2}},$$

$$\cos(\vec{n}, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_\xi^2 + f_\eta^2}}.$$

У місцевій системі координат  $f_\xi(N_0) = f_\eta(N_0) = 0$ . Надалі вважаємо поверхню  $\sigma_0$  настільки малою, що

$$ad^\alpha \leq 1 \quad (4.126)$$

(див. означення поверхні Ляпунова в п. 4.11). Тоді кут  $\theta_0 = (\vec{n}, \zeta)$  між нормальми в точках  $N_0$  і  $N$  до поверхні  $\sigma_0$  менший за  $0,5\pi$ . Отже, на підставі третьої умови означення поверхні Ляпунова маємо

$$\cos \theta_0 \geq 1 - \frac{1}{2} \theta_0^2 \geq 1 - \frac{1}{2} a^2 r_0^{2\alpha}, \quad (4.127)$$

звідки

$$\frac{1}{\cos \theta_0} = \sqrt{1 + f_\xi^2 + f_\eta^2} \leq \frac{2}{2 - a^2 r_0^{2\alpha}} \leq 1 + a^2 r_0^{2\alpha} \leq 2.$$

Унаслідок (4.126)

$$f_\xi^2 + f_\eta^2 \leq 2a^2 r_0^{2\alpha} + a^4 r_0^{4\alpha} \leq 3a^2 r_0^{2\alpha} \quad (4.128)$$

і

$$|f_\xi| \leq \sqrt{3} a r_0^\alpha, \quad |f_\eta| \leq \sqrt{3} a r_0^\alpha. \quad (4.129)$$

Введемо полярні координати:

$$\xi = \rho_0 \cos \theta, \quad \eta = \rho_0 \sin \theta, \quad \rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Тоді

$$\zeta_{\rho_0}^2 = (f_\xi \cos \theta + f_\eta \sin \theta)^2 \leq f_\xi^2 + f_\eta^2.$$

Звідси, беручи до уваги (4.128), дістаємо

$$|\zeta_{\rho_0}| \leq \sqrt{3} a r_0^\alpha \leq \sqrt{3}, \quad a r_0^\alpha \leq 1, \quad (4.130)$$

або

$$|\zeta| \leq \sqrt{3} \rho_0, \quad (4.131)$$

але тоді

$$r_0 = \sqrt{\rho_0^2 + \zeta^2} \leq 2\rho_0. \quad (4.132)$$

Із нерівностей (4.130), (4.132) маємо

$$|\zeta_{\rho_0}| \leq \sqrt{3}a2^\alpha \rho_0^\alpha,$$

звідки

$$|\zeta| \leq \frac{2^\alpha \rho_0^{\alpha+1}}{1+\alpha} \sqrt{3}a.$$

При  $\alpha \leq 1$  буде  $2^\alpha \leq 1 + \alpha$ , отже, попередню нерівність можна представити у вигляді  $|\zeta| \leq 2a\rho_0^{\alpha+1}$ .

Із (4.127) і (4.132) дістаємо

$$1 - \cos \theta_0 \leq \frac{1}{2}a^2 r_0^{2\alpha} \leq 2^{2\alpha-1} a^2 \rho_0^{2\alpha}.$$

Дамо оцінку напрямних косинусів одиничного вектора  $\bar{n}$  зовнішньої нормалі до поверхні  $S$  у точці  $N$ . На підставі (4.129) і (4.132) маємо

$$|\cos(\bar{n}, \zeta)| < |f_\xi| \leq \sqrt{3}a r_0^\alpha \leq \sqrt{3}a2^\alpha \rho_0^\alpha,$$

$$|\cos(\bar{n}, \eta)| < |f_\eta| \leq \sqrt{3}a2^\alpha \rho_0^\alpha.$$

Оскільки  $\cos(\bar{n}, \zeta) = \cos \theta_0$ , то  $|\cos(\bar{n}, \zeta)| \geq 0,5$ .

Позначимо  $C = \sup\{2a, \sqrt{3}a2^\alpha, 2^{2\alpha-1}a^2\}$ . Тоді з попередніх оцінок дістанемо

$$\begin{aligned} |\zeta| &\leq C\rho_0^{\alpha+1}, \quad |\cos(\bar{n}, \xi)| \leq C\rho_0^\alpha, \quad |\cos(\bar{n}, \eta)| \leq C\rho_0^\alpha, \\ 1 - \cos(\bar{n}, \zeta) &\leq C\rho_0^{2\alpha}, \quad |\cos(\bar{n}, \zeta)| \geq 0,5. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Беручи до уваги оцінки (4.133) та враховуючи очевидні нерівності

$|\xi| \leq \rho_0$ ,  $|\eta| \leq \rho_0$ ,  $\rho_0 \leq r_0$ , де  $\rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ , маємо

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cos(\bar{r}_0, \bar{n})}{r_0^2} \right| &\leq \frac{|\cos(\bar{n}, \xi)|}{r_0^2} + \frac{|\cos(\bar{n}, \eta)|}{r_0^2} + \frac{|\zeta|}{r_0^3} \leq \\ &\leq 3C\rho_0^{\alpha-2} = \frac{b}{\rho_0^{2-\alpha}}, \quad b = 3C. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Функція  $\mu(N)$  неперервна на поверхні  $S$ , отже,

$$|\mu(N)| \leq \max_S |\mu(N)| = A. \quad (4.135)$$

Замінюючи інтеграл по  $\sigma_0$  інтегралом по проєкції  $\sigma'_0$  частини поверхні  $\sigma_0$  на площину  $\xi O\eta$  місцевої системи координат, дістаємо

$$\iint_{\sigma_0} \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} ds = \iint_{\sigma'_0} \mu(\xi, \eta) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} \frac{d\xi d\eta}{\cos \theta_0}.$$

На підставі (4.133)—(4.135) легко переконатися в справедливості оцінки

$$\left| \mu(\xi, \eta) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} \frac{1}{\cos \theta_0} \right| \leq \frac{2Ab}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

звідки випливає збіжність інтеграла (4.125), якщо точка  $M$  належить поверхні  $S$ . Таким чином, потенціал подвійного шару (4.125) визначений у всьому просторі.

Якщо точка  $M \in S$ , наприклад, збігається з точкою  $N_0$  поверхні  $S$ , то значення інтеграла (4.125) у цій точці називається *прямим значенням потенціалу подвійного шару*.

Нехай точка  $M(x, y, z)$  знаходиться поза поверхнею  $S$  і наближається до точки  $N_0 \in S$ . Якщо при цьому наближенні виявиться, що потенціал подвійного шару  $\omega(M)$  прямує до деякої скінченної границі, то казатимемо, що *потенціал подвійного шару набуває в точці  $N_0$  граничного значення*.

Надалі покажемо, що граничні значення потенціалу подвійного шару  $\omega(M)$ , взагалі кажучи, різні залежно від того, ззовні чи зсередини прямує точка  $M$  до  $S$ , і ці граничні значення не збігаються з прямими значеннями, тобто покажемо, що потенціал подвійного шару (4.125) зазнає розриву, коли точка  $M$  переходить через поверхню  $S$ .

Розглянемо спочатку потенціал (4.125), коли  $\mu(N) \equiv 1$ . Тоді

$$\omega_1(M) = - \iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \iint_S \frac{\cos \varphi}{r^2} ds.$$

Нехай точка  $M$  знаходиться поза замкненою поверхнею  $S$ . При цьому  $r^{-1}$  є гармонічною функцією всередині  $S$  із неперервними похідними всіх порядків аж до  $S$ . Тоді, згідно з властивостями гармонічних функцій,

$$\omega_1(M) = - \iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = 0 \quad (M \text{ — поза } S).$$

Нехай точка  $M$  знаходиться всередині  $S$ . Побудуємо кулю  $K_\delta(M)$  із центром у точці  $M$  і такого малого радіуса  $\delta$ , щоб  $K_\delta(M)$  цілком містилася всередині області  $T$ , яка обмежена поверхнею  $S$ . Тоді в області  $T \setminus K_\delta(M)$  функція  $r^{-1}$  гармонічна й маємо

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds + \iint_{C_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = 0,$$

де  $C_\delta(M)$  — сфера радіусом  $\delta$  із центром у точці  $M$ .

У точках сфери  $C_\delta(M)$  зовнішня щодо області  $T \setminus K_\delta(M)$  нормаль має напрям, протилежний напрямку радіуса сфери, а отже,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{C_\delta(M)} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{C_\delta(M)} = \frac{1}{\delta^2}.$$

Таким чином, попередня рівність запишеться у вигляді

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds + \frac{1}{\delta^2} \iint_{C_\delta(M)} ds = 0,$$

або

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds + 4\pi = 0,$$

звідки

$$\omega_1(M) = - \iint_S \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = 4\pi \quad (M \text{ — всередині } S).$$

Припустимо, що точка  $M$  знаходиться на поверхні  $S$ . Знайдемо пряме значення потенціалу

$$\omega_1(M) = - \iint_S \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds.$$

Проведемо малу сферу  $C_\delta(M)$  із центром у точці  $M$  і радіусом  $\delta \leq d$  ( $d$  — стала, яка фігурує в означенні поверхні Ляпунова). Ця сфера вирізає частину  $\sigma$  поверхні  $S$ . Згідно з означенням невласного інтеграла маємо

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{S \setminus \sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \iint_S \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds.$$

Нехай  $C'_\delta(M)$  — частина поверхні  $C_\delta(M)$ , яка знаходиться всередині поверхні  $S$  ( $C'_\delta(M) \subset T$ ). Розглянемо область, обмежену поверхнями  $S \setminus \sigma$  та  $C'_\delta(M)$ . Оскільки точка  $M$  знаходиться поза цією областю, то в цій області функція  $r^{-1}$  є гармонічною, і

$$\iint_{S \setminus \sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds + \iint_{C'_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = 0,$$

або з урахуванням попередньої рівності

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{C'_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds. \quad (4.136)$$

Введемо сферичні координати з центром у точці  $M$ . Як і раніше, маємо

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{C'_\delta(M)} = \frac{1}{\delta^2}, \quad ds = \delta^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \iint_{C'_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds &= \int_0^{2\pi} \int_{\theta(\varphi)}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} [1 + \cos \theta(\varphi)] d\varphi = \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} \cos \theta(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Покажемо, що

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \cos \theta(\varphi) d\varphi = 0.$$

Для цього введемо місцеву систему координат із початком у точці  $M$ , спрямувавши вісь  $M\zeta$  по нормалі до  $S$  у точці  $M$ , а за площину  $xMy$  візьмемо площину, дотичну до поверхні  $S$  у точці  $M$ . Тоді  $\cos \theta(\varphi) = \zeta/\delta$ .

Зазначимо, що точки  $(\delta, \varphi, \theta(\varphi))$  лежать на лінії перетину сфери  $C_\delta(M)$  із поверхнею Ляпунова  $S$ , тому для координат  $\zeta$  точок цієї лінії справедлива оцінка  $|\zeta| \leq C\delta^{1+\alpha}$  [див. оцінки (4.133)].



Отже,  $|\cos \theta(\varphi)| \leq C\delta^\alpha$ , а звідси випливає, що  $\cos \theta(\varphi) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$  рівномірно, тобто незалежно від точки  $M$ , і

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta(\varphi) d\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Таким чином, із (4.137) маємо

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{C_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = 2\pi$$

і остаточно з рівності (4.136) дістаємо

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = -2\pi, \quad M \in S.$$

Об'єднаємо добуті результати:

$$\omega_1(M) = -\iint_S \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \begin{cases} 0 & (M \text{ — поза } S) \\ 2\pi & (M \in S) \\ 4\pi & (M \text{ — усередині } S). \end{cases} \quad (4.138)$$

Інтеграл  $\omega_1(M)$  називається *інтегралом Гаусса*, який є розривною функцією.

Надалі вважатимемо поверхню  $S$  такою, що за довільного положення точки  $M$  виконується нерівність

$$\iint_S \frac{|\cos \varphi|}{r^2} ds \leq C, \quad (4.139)$$

де  $C$  — цілком певне додатне число. Припустимо, наприклад, що існує таке ціле додатне число  $K$ , що за довільного положення  $M$  можна розділити  $S$  на окремі частини, кількість яких не перевищує  $K$ , так, що пряма, яка проходить через  $M$ , перетинає кожну частину не більше, ніж в одній точці, причому на кожній із частин  $\cos \varphi$  зберігає знак. За цією умовою нерівність (4.139) виконується, якщо взяти  $C = 4\pi K$ .

Формули (4.138) показують, що при  $\mu(N) \equiv 1$  потенціал подвійного шару (4.125) зазнає розриву неперервності, коли  $M$  перетинає поверхню  $S$ . Покажемо, що дане твердження справедливе для довільної неперервної густини  $\mu(N)$ .

**ТЕОРЕМА 4.18**

*Потенціал подвійного шару  $\omega(M)$  має границі, коли точка  $M$  прямує до точки  $N_0 \in S$  ззовні або зсередини. Якщо границю значень  $\omega(M)$  ззовні позначити через  $\omega_e(N_0)$ , а границю зсередини — через  $\omega_i(N_0)$ , то справедливі формули*

$$\begin{aligned} \omega_e(N_0) &= \iint_S \mu(N) \frac{\cos \varphi_0}{r_0^2} ds - 2\pi\mu(N_0) = \\ &= \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0), \end{aligned} \quad (4.140)$$

$$\begin{aligned} \omega_i(N_0) &= \iint_S \mu(N) \frac{\cos \varphi_0}{r_0^2} ds + 2\pi\mu(N_0) = \\ &= \omega(N_0) + 2\pi\mu(N_0), \end{aligned}$$

де  $\varphi_0$  — кут, утворений напрямом  $\vec{r}_0 = \overline{N_0N}$  із зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$  до поверхні  $S$  у змінній точці  $N$ .

**Доведення**

Нехай  $N_0$  — фіксована точка поверхні  $S$ . Складемо потенціал подвійного шару

$$\omega_0(M) = \iint_S [\mu(N) - \mu(N_0)] \frac{\cos \varphi}{r^2} ds \quad (4.141)$$

і покажемо, що він зберігає неперервність, коли  $M$  перетинає поверхню  $S$  у точці  $N_0$ . Нехай  $\varepsilon$  — задане додатне число. Виділимо таку частину  $\sigma$  поверхні  $S$ , усередині якої міститься точка  $N_0$  і на якій внаслідок неперервності виконується нерівність

$$|\mu(N) - \mu(N_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4C}, \quad N \in \sigma, \quad (4.142)$$

де  $C$  — стала, що входить в умову (4.139).

Розділивши поверхню  $S$  на дві частини  $\sigma$  і  $S \setminus \sigma$ , матимемо

$$\begin{aligned} \omega_0(M) &= \iint_{\sigma} [\mu(N) - \mu(N_0)] \frac{\cos \varphi}{r^2} ds + \\ &+ \iint_{S \setminus \sigma} [\mu(N) - \mu(N_0)] \frac{\cos \varphi}{r^2} ds = \omega_0^{(1)}(M) + \omega_0^{(2)}(M). \end{aligned} \quad (4.143)$$

У разі довільного положення точки  $M$  справедлива нерівність

$$|\omega_0^{(1)}(M)| \leq \iint_{\sigma} |\mu(N) - \mu(N_0)| \frac{|\cos \varphi|}{r^2} ds,$$

звідки на підставі (4.139), (4.143) дістаємо

$$|\omega_0^{(1)}(M)| \leq \varepsilon/4. \quad (4.144)$$

Із (4.143) випливає

$$\omega_0(M) - \omega_0(N_0) = \omega_0^{(1)}(M) - \omega_0^{(1)}(N_0) + [\omega_0^{(2)}(M) - \omega_0^{(2)}(N_0)],$$

отже,

$$|\omega_0(M) - \omega_0(N_0)| \leq |\omega_0^{(1)}(M)| + |\omega_0^{(1)}(N_0)| + |\omega_0^{(2)}(M) - \omega_0^{(2)}(N_0)|,$$

або внаслідок (4.144)

$$|\omega_0(M) - \omega_0(N_0)| \leq \varepsilon/2 + |\omega_0^{(2)}(M) - \omega_0^{(2)}(N_0)|. \quad (4.145)$$

У потенціалі подвійного шару  $\omega_0^{(2)}(M)$  інтегрування здійснюється по поверхні  $S \setminus \sigma$ , а точка  $N_0$  знаходиться всередині  $\sigma$ , тому функція  $\omega_0^{(2)}(M)$  у точці  $N_0$  та її деякому околі неперервна й має похідні всіх порядків.

Таким чином, за всіх  $M$ , досить близьких до  $N_0$ , маємо

$$|\omega_0^{(2)}(M) - \omega_0^{(2)}(N_0)| \leq \varepsilon/2,$$

і внаслідок (4.145)

$$|\omega_0(M) - \omega_0(N_0)| \leq \varepsilon,$$

звідки з огляду на довільність  $\varepsilon > 0$  впливає неперервність функції  $\omega_0(M)$  у точці  $N_0$ .

Нехай точка  $M \in S$ . Позначимо її через  $N$ . З урахуванням (4.138) маємо

$$\begin{aligned} \omega_0(N) &= \iint_S \mu(N) \frac{\cos \varphi}{r^2} ds - \mu(N_0) \iint_S \frac{\cos \varphi}{r^2} ds = \omega(N) - 2\pi\mu(N_0), \\ \omega_0(N_0) &= \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0), \end{aligned} \quad (4.146)$$

де  $\omega(N_0)$  — значення інтеграла (4.125) у точці  $N_0$ .

Нехай  $N \rightarrow N_0$  ( $N \in S$ ). Унаслідок доведеної неперервності  $\omega_0(M)$

$$\omega_0(N) \rightarrow \omega_0(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0).$$

Звідси та з формул (4.146) бачимо, що  $\omega(N)$  має при цьому границю  $\omega(N_0)$ , тобто функція  $\omega(M)$ , визначена формулою (4.125), є неперервною на поверхні  $S$ .

Припустимо тепер, що точка  $M$  знаходиться всередині  $S$ . На підставі (4.138) маємо

$$\omega_0(M) = \omega(M) - 4\pi\mu(N_0). \quad (4.147)$$

Нехай точка  $M$  прямує до  $N_0$ . Унаслідок доведеної неперервності  $\omega_0(M)$

$$\omega_0(M) \rightarrow \omega_0(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0). \quad (4.148)$$

Але тоді з (4.147) випливає, що й  $\omega(M)$  має границю, коли точка  $M$  прямує до  $N_0$  зсередини  $S$ , причому на підставі (4.148)

$$\omega_i(N_0) - 4\pi\mu(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0),$$

тобто

$$\omega_i(N_0) = \omega(N_0) + 2\pi\mu(N_0). \quad (4.149)$$

Із (4.149) бачимо, що границя  $\omega_i(N_0)$  і значення функції  $\omega(M)$  у точці  $N_0$  різні, якщо тільки  $\mu(N_0) \neq 0$ .

Нехай точка  $M$  знаходиться поза поверхнею  $S$ . Тоді згідно з (4.138)  $\omega_0(M) = \omega(M)$ . Повторюючи вищенаведені міркування, маємо

$$\omega_e(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0). \quad (4.150)$$

Із формул (4.149), (4.150) безпосередньо дістаємо значення стрибка потенціалу подвійного шару в довільній точці  $N_0 \in S$ :

$$\omega_i(N_0) - \omega_e(N_0) = 4\pi\mu(N_0).$$

Зазначимо, що функція  $\omega(M)$ , визначена формулою (4.125), є неперервною всередині  $S$  і аж до  $S$ . Це випливає із формул (4.140) і неперервності функції  $\omega(N_0)$  на поверхні  $S$ . Аналогічно можна стверджувати, що вона є неперервною поза  $S$  і аж до  $S$ .

## 4.19

### Потенціал простого шару

Розглянемо потенціал простого шару з неперервною густиною  $\psi(N)$ , яка розподілена по поверхні Ляпунова:

$$u(M) = \iint_S \frac{\psi(N)}{r} ds, \quad r = |\overline{MN}|. \quad (4.151)$$

У всіх точках  $M(x, y, z)$  простору, які не належать поверхні  $S$ , потенціал простого шару має похідні всіх порядків і задовольняє рівняння Лапласа. Як і в п. 4.18, можна показати, що потенціал простого шару прямує до нуля на нескінченності як  $B^{-1}$ , де  $B = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

#### ТЕОРЕМА 4.19

*Потенціал простого шару (4.151) із неперервною густиною є функцією, неперервною в усьому просторі.*

#### Доведення

Якщо точка  $M \in S$ , то потенціал простого шару (4.151) є невластим інтегралом. Покажемо, що в точках поверхні  $S$  він збігається рівномірно, й  $u(M)$  є функцією, неперервною на  $S$ .

Нехай  $N_0$  — довільна точка поверхні  $S$ . В точці  $N_0$  побудуємо місцеву систему координат ( $S$  — поверхня Ляпунова). Нехай  $\varepsilon > 0$  — задане число й  $\sigma_1$  — частина поверхні  $S$ , визначена умовою  $\xi^2 + \eta^2 \leq d_1^2$  ( $d_1 \leq 0,25d$ ;  $d$  — стала, яка фігурує в означенні поверхні Ляпунова).

Покажемо, що можна вибрати  $d_1$  настільки малим, що для довільного положення  $M$  у деякому околі точки  $N_0$  виконувється нерівність

$$\left| \iint_{\sigma_1} \frac{\psi(N)}{r} ds \right| \leq \varepsilon. \quad (4.152)$$

Унаслідок неперервності функції  $\psi(N)$  на  $S$  існує така стала  $A$ , що  $|\psi(N)| \leq A$  для всіх  $N \in S$ . Маємо

$$\left| \iint_{\sigma_1} \frac{\psi(N)}{r} ds \right| \leq 2A \iint_{\sigma_{d_1}(N_0)} \frac{d\xi d\eta}{\rho_1}, \quad (4.153)$$

де  $\sigma_{d_1}(N_0)$  — круг радіусом  $d_1$  із центром у  $N_0$ ;  $\rho_1$  — довжина проєкції  $M_1N_1$  відрізка  $MN$  на дотичну до  $S$  площину в точці  $N_0$ . Припустимо, що точка  $M$  знаходиться всередині кулі радіусом  $d_1$  із центром у точці  $N_0$ . Тоді точка  $M_1 \in \sigma_{d_1}(N_0)$ , і якщо на площині  $(\xi, \eta)$  візьмемо круг  $\sigma_{2d_1}(M_1)$ , то він міститиме весь круг  $\sigma_{d_1}(N_0)$ , а отже, враховуючи (4.153), дістаємо

$$\left| \iint_{\sigma_1} \frac{\psi(N)}{r} ds \right| \leq 2A \iint_{\rho_1 \leq 2d_1} \frac{d\xi d\eta}{\rho_1} = 2A \int_0^{2\pi} \int_0^{2d_1} \frac{\rho_1 d\rho_1 d\varphi}{\rho_1} = 8\pi A d_1.$$

Остання оцінка справедлива за довільного положення точки  $N_0$  на поверхні  $S$ . Аби дістати оцінку (4.152), достатньо вибрати  $d_1$  таким чином, щоб  $8\pi A d_1 < \varepsilon$ . Оцінка (4.152) справедлива за довільного положення точки  $M$  у кулі радіусом  $d_1$  із центром у точці  $N_0$ , отже, інтеграл (4.151) збігається рівномірно на поверхні  $S$  і функція  $u(M)$  є непервною в точці  $N_0 \in S$ , що й потрібно було довести.

## 4.20

### Нормальна похідна потенціалу простого шару

Нехай  $\vec{n}_0$  — напрям зовнішньої нормалі до поверхні  $S$  у точці  $N_0$  (рис. 4.17). Вважаючи, що  $M \notin S$ , візьмемо похідну від функції (4.151) за напрямом  $\vec{n}_0$ . Від точки  $M$  залежить тільки множник  $r^{-1}$ , і ми можемо диференціювати його під знаком інтеграла:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0} = \iint_S \psi(N) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0)}{r^2} ds. \quad (4.154)$$

Наголосимо на різниці між останнім інтегралом і потенціалом подвійного шару (4.125). В інтегралі (4.125) береться кут між напрямом  $\vec{r} = \overline{MN}$  і зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$  до поверхні  $S$  у змінній точці інтегрування  $N$ , а в інтегралі (4.154) розглядається кут між  $\vec{r}$  і зовнішньою нормаллю до  $S$  у фіксованій точці  $N_0$  (рис. 4.17).

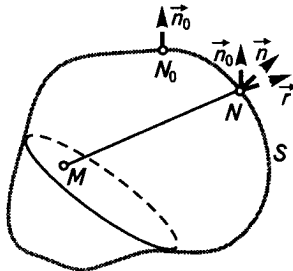


Рис. 4.17

Покажемо, що інтеграл (4.154) існує й у тому випадкові, коли  $M$  збігається з точкою  $N_0$ . Тоді матимемо

$$\frac{\partial u(N_0)}{\partial \bar{n}_0} = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\bar{r}_0, \bar{n}_0)}{r_0^2} ds, \quad (4.155)$$

де  $r_0$  — відстань  $|N_0N|$ . Для доведення існування інтеграла (4.155) достатньо розглянути його на частині  $\sigma_0$  поверхні  $S$ , яка містить точку  $N_0$ , тобто  $N_0 \in \sigma_0$ . У точці  $N_0$  побудуємо місцеву систему координат. Як і раніше, через  $(x, y, z)$  позначимо координати точки  $M$ , а через  $(\xi, \eta, \zeta)$  — координати точки  $N$  у місцевій системі координат. Тоді інтеграл (4.154) запишемо у вигляді

$$\iint_{\sigma_0} \psi(N) \frac{\zeta - z}{r^3} ds.$$

Якщо  $M$  збігається з  $N_0$ , то  $z = 0$ , і інтеграл набирає вигляду

$$\iint_{\sigma_0} \psi(N) \frac{\zeta}{r_0^3} ds = \iint_{\sigma_0} \psi(\xi, \eta) \frac{\zeta(\xi, \eta)}{r_0^3 \cos(\bar{n}, z)} d\xi d\eta,$$

де  $\sigma'_0$  — проекція  $\sigma_0$  на дотичну площину до поверхні  $S$  у точці  $N_0$ , а  $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$  — рівняння частини  $\sigma_0$  поверхні  $S$  у місцевій системі координат.

Беручи до уваги (4.133) та нерівності  $r_0 \geq \rho_0$ ,  $|\psi(N)| \leq A$ , дістаємо таку оцінку підінтегральної функції:

$$\left| \psi(\xi, \eta) \frac{\zeta(\xi, \eta)}{r_0^3 \cos(\bar{n}, z)} \right| \leq \frac{2CA}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

звідки й випливає збіжність інтеграла (4.154), коли точка  $M$  збігається з точкою  $N_0 \in S$ .

З'ясуємо тепер поведінку нормальної похідної потенціалу простого шару (4.154) в разі наближення  $M$  до  $N_0$  по нормалі зсередини та ззовні

поверхні  $S$ . Для цього позначимо через  $\left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \bar{n}_0} \right)_i$  границю  $\frac{\partial u(M)}{\partial \bar{n}_0}$ ,

коли  $M \rightarrow N$  зсередини поверхні  $S$ , а через  $\left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \bar{n}_0} \right)_e$  — поза  $S$ .

Покажемо, що нормальна похідна потенціалу простого шару (4.154) має цілком певні границі й для них справедливі такі формули:

$$\left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0} \right)_i = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2} ds + 2\pi\psi(N_0),$$

$$\left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0} \right)_e = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2} ds - 2\pi\psi(N_0). \quad (4.156)$$

Для доведення справедливості формул (4.156) візьмемо різницю інтеграла (4.154) й потенціалу подвійного шару з тією самою густиною  $\psi(N)$ :

$$F(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0} - \omega(M) = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds. \quad (4.157)$$

Цей інтеграл має сенс, якщо точка  $M$  знаходиться за межами поверхні  $S$  ( $M \notin S$ ) або збігається з точкою  $N_0 \in S$ .

Доведемо, що різниця (4.157) залишається неперервною, коли  $M$  перетинає поверхню  $S$  у точці  $N_0$ . Для цього покажемо, що  $F(M) \rightarrow F(N_0)$ , коли точка  $M \rightarrow N_0$  по нормалі  $\vec{n}_0$ . У точці  $N_0$  побудуємо місцеву систему координат. Нехай  $\sigma_1$  — частина поверхні  $S$ , яка визначається умо-

вою  $\xi^2 + \eta^2 \leq d_1^2$ ,  $d_1 \leq \frac{1}{2}d$ ,  $N_0 \in S$ . Точка  $M$  знаходиться на нормалі до  $S$  у точці  $N_0$ . Тоді в місцевій системі координат  $x = y = 0$ , а отже,

$$\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \frac{\xi}{r} \cos(\vec{n}, \xi) + \frac{\eta}{r} \cos(\vec{n}, \eta) + \frac{\zeta - z}{r} \cos(\vec{n}, \zeta),$$

$$\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) = \frac{\zeta - z}{r}.$$

Таким чином,

$$\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} =$$

$$= -\frac{\xi}{r^3} \cos(\vec{n}, \xi) - \frac{\eta}{r^3} \cos(\vec{n}, \eta) - \frac{\zeta - z}{r^3} |\cos(\vec{n}, \zeta) - 1|.$$

Беручи до уваги (4.133) та нерівності  $|\xi| \leq \rho_0$ ,  $|\eta| \leq \rho_0$ ,  $r \geq \rho_0$ ,  $|\zeta - z| \leq r$ , де  $\rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  — довжина проєкції  $\overline{MN}$  на дотичну до  $S$  площину в точці  $N_0$ , дістаємо

$$\left| \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} \right| \leq \frac{b_1}{\rho_0^{2-\alpha}},$$



де  $b_1$  — стала. Внаслідок неперервності густини  $\psi(N)$  на  $S$  буде  $|\psi(N)| \leq A$ , а отже,

$$\left| \iint_{\sigma_1} \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds \right| \leq \iint_{\rho_0 \leq d_1} \frac{2Ab_1}{\rho_0^{2-\alpha}} d\xi d\eta =$$

$$= 2Ab_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{d_1} \frac{d\rho_0}{\rho_0^{1-\alpha}} d\varphi = b_2 d_1^\alpha,$$

де  $b_2$  — стала.

Добута оцінка справедлива за довільного положення точки  $M$  на нормалі до  $S$  у точці  $N_0$ , причому  $M$  може збігатися з точкою  $N_0$ . Звідси випливає: якщо  $\varepsilon > 0$ , то, вибираючи  $d_1$  таким чином, щоб  $b_2 d_1^\alpha < 0,25\varepsilon$ , матимемо

$$\left| \iint_{\sigma_1} \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds \right| \leq 0,25\varepsilon. \quad (4.158)$$

Запишемо (4.157) у вигляді

$$F(M) = \iint_{\sigma_1} \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds +$$

$$+ \iint_{S \setminus \sigma_1} \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds = F_1(M) + F_2(M).$$

Тоді

$$F(M) - F(N_0) = F_1(M) - F_1(N_0) + F_2(M) - F_2(N_0),$$

звідки

$$|F(M) - F(N_0)| \leq |F_1(M)| + |F_1(N_0)| + |F_2(M) - F_2(N_0)|,$$

або внаслідок (4.158)

$$|F(M) - F(N_0)| \leq \varepsilon/2 + |F_2(M) - F_2(N_0)|, \quad (4.159)$$

якщо вважати, що точка  $M$  знаходиться на нормалі до  $S$  у точці  $N_0$ . В інтегралі  $F_2(M)$  інтегрування здійснюється по поверхні  $S \setminus \sigma_1$ , а точка

$N_0 \in \sigma_1$ . Тому функція  $F_2(M)$  у точці  $N_0$  та деякому її околі є неперервною, отже, для всіх  $M$ , досить близьких до  $N_0$ ,

$$|F_2(M) - F_2(N_0)| < 0,5\varepsilon.$$

Таким чином, із (4.159) дістаємо

$$|F(M) - F(N_0)| < \varepsilon,$$

звідки внаслідок довільності  $\varepsilon > 0$  випливає, що

$$\lim_{M \rightarrow N_0} F(M) = F(N_0), \quad (4.160)$$

причому  $M \rightarrow N_0$  по нормалі до  $S$  у точці  $N_0$  зсередини або ззовні поверхні  $S$ . Раніше було показано, що потенціал подвійного шару  $\omega(M)$  має границю, коли  $M$  прямує до  $N_0$  по нормалі зсередини або ззовні поверхні  $S$ . Тоді з (4.157) на підставі (4.160) випливає, що нормальна похідна потенціалу простого шару (4.154) має границі, коли  $M \rightarrow N_0$  по нормалі зсередини або ззовні поверхні  $S$ . Використовуючи (4.160), дістаємо

$$\left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \bar{n}_0} \right)_i - \omega_i(N_0) = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\bar{r}_0, \bar{n}_0)}{r_0^2} ds - \omega(N_0),$$

$$\left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \bar{n}_0} \right)_e - \omega_e(N_0) = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\bar{r}_0, \bar{n}_0)}{r_0^2} ds - \omega(N_0).$$

Беручи до уваги (4.140), переконуємося в справедливості формул (4.156), з яких безпосередньо випливає значення стрибка нормальної похідної потенціалу простого шару

$$\left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \bar{n}_0} \right)_i - \left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \bar{n}_0} \right)_e = 4\pi\psi(N_0).$$

Зазначимо, що нормальна похідна потенціалу простого шару пря-

мує до своїх граничних значень  $\left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \bar{n}_0} \right)_i$  і  $\left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \bar{n}_0} \right)_e$  рівномірно для всієї поверхні  $S$  у разі прямування  $M$  до  $N_0$  по нормалі.

Казатимемо, що гармонічна всередині чи поза  $S$  функція  $u(M)$  має правильну нормальну похідну, якщо в разі прямування  $M$  до  $N_0$  по

нормалі до  $S$  її нормальна похідна  $\frac{\partial u(M)}{\partial \bar{n}_0}$  прямує до своїх граничних значень рівномірно відносно точки  $N_0 \in S$ .

Отже, справедлива наступна теорема.

#### ТЕОРЕМА 4.20

*Потенціал простого шару з неперервною густиною має правильні нормальні похідні як зсередини, так і ззовні поверхні  $S$ .*

### 4.21

#### Логарифмічний потенціал

У випадку площини логарифмічні потенціали простого й подвійного шарів мають відповідно такий вигляд:

$$u(M) = \int_l \psi(N) \ln \frac{1}{r} ds, \quad M = M(x, y), \quad (4.161)$$

$$N = N(\xi, \eta), \quad r = |\overline{MN}|;$$

$$\omega(M) = - \int_l \mu(N) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \ln \frac{1}{r} \right) ds = \int_l \mu(N) \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r} ds, \quad (4.162)$$

де  $l$  — деяка замкнена крива на площині  $xOy$ ;  $\psi(N)$  — лінійна густина простого шару;  $\mu(N)$  — густина моменту лінійного подвійного шару.

Вираз  $r^{-1} \cos(\bar{r}, \bar{n}) ds$  дає кут, під яким бачимо елемент кривої  $ds$  із точки  $M$ , причому цей кут буде додатним, якщо  $\cos \varphi > 0$ , і від'ємним — при  $\cos \varphi < 0$ .

Надалі вважатимемо, що функції  $\psi(N)$  і  $\mu(N)$  є неперервними, а  $l$  — крива Ляпунова (означення кривої Ляпунова аналогічне означенню поверхні Ляпунова).

У випадку двох незалежних змінних формула (4.138) набере вигляду

$$\omega(M) = \int_l \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r} ds = \begin{cases} 0 & (M \text{ — поза } l), \\ \pi & (M \in l), \\ 2\pi & (M \text{ — всередині } l). \end{cases} \quad (4.163)$$

Покажемо: якщо  $l$  має неперервну кривину, то потенціал подвійного шару в точках кривої  $l$  існує. Для цього розглянемо криву на площині  $xOy$  і виберемо початок координат у точці  $N$ , вісь  $Ox$  спрямуємо по дотичній, а вісь  $Oy$  — по нормалі в цій точці (рис. 4.18). Рівняння кривої в деякому околі точки  $N$  запишеться у вигляді  $y = y(x)$ . За припущенням крива має неперервну кривину, тобто  $y(x)$  має неперервні похідні до другого порядку включно.

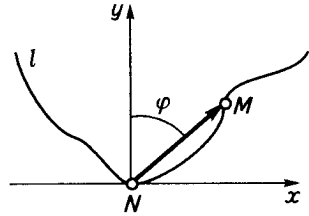


Рис. 4.18

Застосовуючи формулу Тейлора, дістаємо

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(\theta x), \quad 0 < \theta < 1,$$

звідки внаслідок вибору системи координат

$$y(x) = \frac{x^2}{2} y''(\theta x).$$

Ураховуючи цю рівність, маємо

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4} [y''(\theta x)]^2} = x \sqrt{1 + x^2 [0,5 y''(\theta x)]^2},$$

$$\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \cos \varphi = \frac{y}{r} = \frac{xy''(\theta x)}{2\sqrt{1 + x^2 [0,5 y''(\theta x)]^2}},$$

$$\frac{\cos \varphi}{r} = \frac{y''(\theta x)}{2(1 + x^2 [0,5 y''(\theta x)]^2)}.$$

Із виразу кривини  $K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$  випливає  $y''(0) = K(N)$ . У зв'язку з цим

$$\lim_{MN \rightarrow 0} \frac{\cos \varphi}{r} = 0,5K(N).$$

Таким чином, функція  $r^{-1} \cos \varphi$  є неперервною вздовж кривої  $l$ , а отже, можемо стверджувати, що потенціал подвійного шару існує й є неперервною функцією, якщо  $M \in l$ . У тривимірному просторі функція  $r^{-2} \cos \varphi$  мала, взагалі кажучи, полярність за збігу точок  $M$  і  $N$ .

Для потенціалу подвійного шару (4.162) можна довести справедливність таких формул:

$$\begin{aligned}\omega_i(N_0) &= \int_l \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0} ds + \pi\mu(N_0) = \omega(N_0) + \pi\mu(N_0), \\ \omega_e(N_0) &= \int_l \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0} ds - \pi\mu(N_0) = \omega(N_0) - \pi\mu(N_0),\end{aligned}\tag{4.164}$$

де  $r_0 = |N_0N|$  і  $(\vec{r}_0, \vec{n})$  — кут, утворений напрямом  $\overline{N_0N}$  із напрямом зовнішньої нормалі  $\vec{n}$  до кривої  $l$  у точці  $N$ ;  $N_0$  — фіксована точка на  $l$ .  
Формули (4.164) є аналогом формул (4.140).

Із (4.164) випливає, що

$$\omega_i(N_0) - \omega_e(N_0) = 2\pi\mu(N_0).$$

Потенціал простого шару (4.161) визначений у всіх точках площини й неперервний на всій площині.

Нехай точка  $N_0 \in l$  і  $\vec{n}_0$  — напрям нормалі в цій точці. Якщо  $M \in l$ , то

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0} = \int_l \psi(N) \frac{\partial \ln(r^{-1})}{\partial \vec{n}_0} ds = \int_l \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0)}{r} ds.\tag{4.165}$$

У разі наближення  $M$  до  $N_0$  по нормалі зсередини і ззовні  $l$  похідна (4.165) має границі, які визначаються за формулами [див. формули (4.156)]

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i &= \int_l \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0)}{r_0} ds + \pi\psi(N_0), \\ \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e &= \int_l \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0)}{r_0} ds - \pi\psi(N_0),\end{aligned}\tag{4.166}$$

з яких випливає

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e = 2\pi\psi(N_0).$$

Як і вище, можна показати, що вираз  $r_0^{-1} \cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)$  є неперервною функцією. Значимо, що потенціал простого шару (4.161) не перетворюється в нуль на нескінченності.

**4.22****Зведення крайових задач для рівнянь еліптичного типу до інтегральних рівнянь**

Метод відокремлення змінних та метод функції Гріна, розглянуті в попередній темі, дають змогу дістати явний вираз для розв'язків крайових задач. Але їх можна застосувати тільки у випадку областей найпростішого вигляду.

Тут покажемо, що у випадку досить широкого класу областей задач Діріхле та Неймана (внутрішні чи зовнішні) для рівнянь Лапласа й Пуассона за допомогою поверхневих потенціалів можуть бути зведені до інтегральних рівнянь. Цей спосіб часто буває досить ефективним в якісному дослідженні крайових задач (теоретичне дослідження питання існування та єдиності розв'язку крайових задач, його стійкості тощо) та в разі їх наближеного інтегрування.

Розглянемо внутрішню задачу Діріхле: в класі  $C^2(D) \cap C(D \cup S)$  знайти гармонічну функцію  $u(x, y, z)$ , яка задовольняє крайову умову

$$u(M)|_S = \varphi(N), \quad M = M(x, y, z), \quad N \in S. \quad (4.167)$$

Розв'язок поставленої задачі шукатимемо у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u(M) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds, \quad r = |MN|. \quad (4.168)$$

У разі довільного вибору густини  $\mu(N)$  функція (4.168) задовольняє в області  $D$  рівняння Лапласа. Виберемо  $\mu(N)$  таким чином, щоб функція (4.168) задовольняла крайову умову (4.167).

Згідно з другою з формул (4.140) маємо

$$\varphi(N_0) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} ds + 2\pi\mu(N_0), \quad r_0 = |N_0N|.$$

Позначимо  $K(N_0; N) = -\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{2\pi r_0}$ . Тоді попереднє рівняння запишеться у вигляді

$$\mu(N_0) = \frac{1}{2\pi} \varphi(N_0) + \iint_S \mu(N) K(N_0; N) ds. \quad (4.169)$$

Знайшовши розв'язок інтегрального рівняння (4.169) та підставивши його в (4.168), дістанемо розв'язок внутрішньої задачі Діріхле.

Зазначимо, що ядро  $K(N_0; N)$  несиметричне, оскільки нормаль береться в точці  $N$  і  $r_0$  має напрям  $\overline{N_0 N}$ .

У випадку площини внутрішня задача Діріхле для рівняння Лапласа зводиться до інтегрального рівняння вигляду

$$\mu(N_0) = \frac{1}{\pi} \varphi(N_0) + \int_I \mu(N) K_1(N_0; N) ds, \quad (4.170)$$

де  $K_1(N_0; N) = -\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{\pi r_0}$ .

Для зведення зовнішньої задачі Діріхле до інтегрального рівняння користуємося першою із формул (4.140). Матимемо

$$\mu(N_0) = -\frac{1}{2\pi} \varphi(N_0) - \iint_S \mu(N) K(N_0; N) ds. \quad (4.169a)$$

Розглянемо тепер внутрішню задачу Неймана: в просторі функцій  $C^2(D) \cap C(D \cup S)$  знайти розв'язок рівняння Лапласа, який задовольняє крайову умову

$$\lim_{M \rightarrow N} \frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}} = \Phi(N), \quad M \in D, N \in S. \quad (4.171)$$

Шукаємо розв'язок поставленої задачі Неймана у вигляді потенціалу простого шару:

$$u(M) = \iint_S \frac{\psi(N)}{r} ds. \quad (4.172)$$

Згідно з доведеними теоремами 4.19, 4.20, якщо  $\psi(N) \in C(S)$ , то функція (4.172) є неперервною в усьому просторі й в області  $D$  задовольняє рівняння Лапласа. Виберемо густину  $\psi(N)$  таким чином, щоб задовольнялась і крайова умова (4.171). Для цього використаємо першу з формул (4.156). Маємо

$$\Phi(N_0) = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2} ds + 2\pi\psi(N_0),$$

або

$$\psi(N_0) = \frac{1}{2\pi} \Phi(N_0) - \iint_S \psi(N) K_2(N_0; N) ds, \quad (4.173)$$

$$\text{де } K_2(N_0; N) = -\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2}.$$

Для зовнішньої задачі Неймана користуємося другою з формул (4.156).

Дістаємо

$$\psi(N_0) = -\frac{1}{2\pi} \Phi(N_0) - \iint_S \psi(N) K_2(N_0; N) ds. \quad (4.173a)$$

У випадку двовимірного простору внутрішня та зовнішня задачі Неймана зведуться відповідно до таких інтегральних рівнянь:

$$\psi(N_0) = \frac{1}{\pi} \Phi(N_0) + \int_l \psi(N) K_3(N_0; N) ds, \quad (4.174)$$

$$\psi(N_0) = -\frac{1}{\pi} \Phi(N_0) - \int_l \psi(N) K_3(N_0; N) ds, \quad (4.174a)$$

$$\text{де } K_3(N_0; N) = -\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{\pi r_0}.$$

Можна показати: якщо  $S$  (або  $l$ ) є поверхнею (кривою) Ляпунова і в її означенні  $\alpha = 1$ , то для рівнянь (4.169), (4.170), (4.169a), (4.173)—(4.174a) справедливі основні теореми теорії інтегральних рівнянь, які розглядаються в курсі функціонального аналізу.

◆ **Вправа.** За допомогою потенціалу подвійного шару знайти розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа у випадку круга радіусом  $R$  із центром у початку координат.





### Задачі для самостійного розв'язування

1. Вивести рівняння стаціонарного процесу дифузії в однорідному ізотропному середовищі, яке:
- перебуває в стані спокою;
  - рухається із заданою швидкістю  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , причому  $\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$ , вздовж осі  $Ox$ .

(Відповідь:

- $\Delta u(x, y, z) = 0$ , де  $u(x, y, z)$  — концентрація;
  - $k \Delta u - v_x \frac{\partial u}{\partial x} - v_y \frac{\partial u}{\partial y} - v_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ , де  $k$  — коефіцієнт дифузії;  $v_x, v_y, v_z$  — проєкції швидкості  $\bar{\mathbf{v}}$  на координатні осі. Якщо  $v_x = v, v_y = v_z = 0$ , то рівняння набирає вигляду  $k \Delta u - v u_x = 0$ . Останнє рівняння називають ще *рівнянням газової атаки*.)
- ✓ **Вказівка.** Для виведення рівнянь стаціонарного процесу дифузії потрібно використати закон збереження речовини для довільного об'єму  $V$ , обмеженого поверхнею  $S$ , і застосувати формулу Остроградського. Закон збереження речовини для нерухомої поверхні  $S$  записується так:

$$\iint_S \left( -k \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + v_n u \right) ds = 0,$$

або

$$\iiint_V [\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(\bar{\mathbf{v}}u)] dx dy dz = 0,$$

звідки внаслідок довільності об'єму  $V$ , а також умови  $\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$  і впливає рівняння дифузії.

2. Виходячи з рівнянь Максвелла, показати, що потенціал електростатичного поля задовольняє рівняння Пуассона з правою частиною, яка пропорційна об'ємній густині зарядів  $\rho(x, y, z)$ .

- ✓ **Вказівка.** Рівняння Максвелла мають вигляд

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{J}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \bar{\mathbf{E}}), \quad \bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}};$$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \bar{\mathbf{H}});$$

$$\operatorname{div}(\epsilon \bar{\mathbf{E}}) = 4\pi \rho, \quad \operatorname{div}(\mu \bar{\mathbf{H}}) = 0,$$

де  $\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{H}}$  — вектори відповідно електричного й магнітного

полів;  $\epsilon$  — діелектрична стала;  $\mu$  — магнітна проникність;  $\sigma$  — провідність середовища;  $c$  — швидкість світла в порожнечі;  $\vec{J}$  — густина струму провідності.

Рівняння, які задовольняє поле стаціонарно розподілених зарядів, дістають із рівнянь Максвелла, якщо всі похідні за часом покласти такими, що дорівнюють нулю. Для електростатичного поля в середовищі, яке не є провідником,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \operatorname{div}(\epsilon \vec{E}) = 4\pi\rho.$$

Із першого з рівнянь випливає, що  $\vec{E}$  — потенціальний вектор, тобто існує така скалярна функція  $u(x, y, z)$ , що  $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$ . Функцію  $u(x, y, z)$  називають *потенціалом поля*. Із другого з рівнянь маємо

$$\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho(x, y, z).$$

Якщо  $\epsilon = \operatorname{const}$ , то для  $u(x, y, z)$  дістаємо

$$\Delta u(x, y, z) = -\frac{1}{\epsilon} 4\pi\rho(x, y, z).$$

В порожнечі  $\epsilon = 1$ .

3. Показати, що потенціал стаціонарного магнітного поля задовольняє рівняння Лапласа.
- ✓ *Вказівка.* Якщо магнітне поле є стаціонарним, то воно має визначитися рівняннями

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \operatorname{div}(\mu \vec{H}) = 0.$$

Із першого з рівнянь випливає потенціальність вектора  $\vec{H}$ :  $\vec{H} = -\operatorname{grad} u$ . Підставивши цей вираз у друге з рівнянь і врахувавши однорідність та ізотропність середовища ( $\mu = \operatorname{const}$ ), дістанемо рівняння Лапласа.

4. Скласти математичну модель стаціонарного процесу розподілу температури в неоднорідному ізотропному тілі  $V$  із краєм  $S$ , якщо в тілі є джерела теплоти інтенсивністю  $f(x, y, z)$ , а поверхню  $S$  теплоізолювана. Коефіцієнт теплопровідності  $K(x, y, z)$ .
5. Визначити форму рівноваги прямокутної мембрани зі сторонами  $2a$  і  $2b$ , на яку діє рівномірно розподілене навантаження  $q$  (початок координат вибрати в центрі мембрани). Сторони нерухомо закріплені. Обчислити прогин центра мембрани, вважаючи, що  $b/a = 2$ .
6. Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині нескінченного колового циліндра радіусом  $l$ , якщо на його по-

верхні підтримується температура  $u(l, \varphi) = u_0 \sin \varphi$  ( $u_0 = \text{const}$ ). Розв'язок дістати у формі ряду й у формі інтеграла Пуассона.

7. Дано прямокутну мембрану  $OACB$  (рис. 4.19). Через сторону  $OA$  тепло рівномірно підводиться, через  $OB$  — рівномірно відводиться, а дві сторони  $AC$  і  $BC$  теплоізолювані. Визначити стаціонарну температуру внутрішніх точок мембрани.

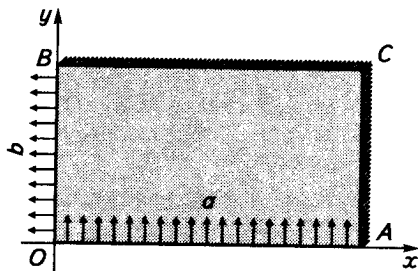


Рис. 4.19

8. Знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму півкруга радіусом  $a$ , якщо на неї діє рівномірно розподілене навантаження  $q$ . Краї мембрани нерухомо закріплені.
9. Дві сторони  $AC$  і  $BC$  прямокутної однорідної мембрани  $OACB$  (рис. 4.20) теплоізолювані, а на двох інших — підтримується нульова температура. Знайти закон стаціонарного розподілу температури за умови, що в мембрані виділяється теплота з густиною  $Q = \text{const}$ .

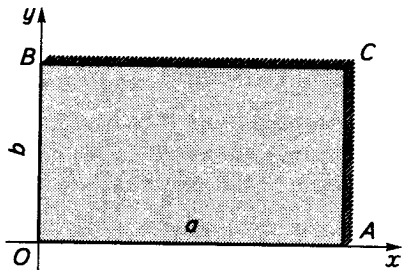


Рис. 4.20

10. Дослідити стаціонарний розподіл температури однорідної мембрани, що має форму криволінійного прямокутника, дві сторони якого утворені дугами концентричних кіл, а дві інші — відрізками радіусів (рис. 4.21). Одна з граней ( $\rho = b$ )

має температуру  $T_0 = \text{const}$ , інші — підтримуються за нульової температури.

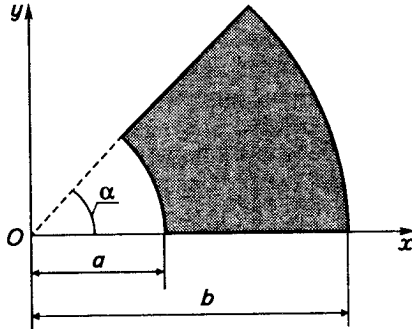


Рис. 4.21

11. Тонку плівку натягнуто на дротяний каркас, який проектується на площину  $xOy$  в прямокутник зі сторонами  $x = 0$ ,  $x = l$ ,  $y = 0$ ,  $y = t$ ; відхилення точок контура від площини  $xOy$  задається рівностями  $u(0, y) = 0$ ,  $u(l, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, t) = h \sin \frac{\pi x}{l}$  ( $h = \text{const}$ ). Визначити форму поверхні, на якій розміститься плівка.
12. Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині нескінченного колового циліндра радіусом  $l$ , якщо на поверхні циліндра підтримується стала температура:  $0^\circ$  — у тих точках, де  $\alpha < \varphi < 2\pi$ ;  $2\pi u_0 \alpha^{-1}$  — у тих точках, де  $0 < \varphi < \alpha$  ( $u_0$ ,  $\alpha = \text{const}$ ). Розглянути випадок, коли  $\alpha$  досить мале.
13. Знайти закон стаціонарного розподілу температури в прямокутній мембрані, дві протилежні сторони  $y = 0$  і  $y = b$  якої мають відповідно нульову температуру й  $T_0 = \text{const}$ , а дві інші ( $x = \pm a$ ) — випромінюють тепло за законом Ньютона в навколишнє середовище, температура якого дорівнює нулю.
14. Тонку плівку натягнуто на дротяний каркас, який проектується на площину  $xOy$  в круговий сектор  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $0 \leq \rho \leq R$ . На плівку діє рівномірно розподілене навантаження  $q$ . Сторони  $\varphi = 0$  і  $\varphi = \alpha$  нерухомо закріплені, а край  $\rho = R$  вільний. Визначити форму поверхні, на якій розміститься плівка.
15. Визначити форму прогину однорідної прямокутної мембрани зі сторонами  $a$  і  $b$ , якщо три сторони  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$  вільні, а на четвертій — задано відхилення  $u(0, y) = y(y - b)$ .

16. Напівкругла мембрана радіусом  $a$  нерухомо закріплена на півколі й вільна на прямолінійному краю. Знайти форму прогину мембрани під рівномірним навантаженням  $q$ .

17. Усередині нескінченного колового циліндра радіусом  $l$  відбувається рух нестисливої рідини. Вважаючи рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним, знайти закон руху, якщо проекція швидкості  $\vec{v}$  на зовнішню нормаль циліндра в кожній точці на поверхні циліндра задається формулами:

а)  $\text{Pr}_{\vec{n}} \vec{v} = v_0 \sin \varphi, \quad v_0 = \text{const};$

б)  $\text{Pr}_{\vec{n}} \vec{v} = \begin{cases} -v_0 & \text{при } \varphi \in (0, \pi), \\ v_0 & \text{при } \varphi \in (-\pi, 0). \end{cases}$

18. Знайти закон стаціонарного розподілу температури в однорідній прямокутній мембрані, яка підігрівається джерелом теплоти, що виділяє в одиниці площі теплоту  $Q = \text{const}$ , якщо крізь сторони мембрани тепловіддача в навколишнє середовище нульової температури відбувається за законом Ньютона.

19. Зінтегрувати крайові задачі й дати їх фізичну інтерпретацію:

а)  $\Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad 2 < \rho < 4, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi,$

$$u(2, \varphi) = A\varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=4} = 0, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi, \quad A = \text{const};$$

б)  $\Delta u(x, y) = 2x, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b),$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad y \in [0, b],$$

$$u_y|_{y=0} = u_y|_{y=b} = 0, \quad x \in [0, a];$$

в)  $u(\rho, \varphi) = \varphi, \quad 0 < \rho < 2, \quad 0 < \varphi < \pi/4,$

$$u(\rho, 0) = u(\rho, \pi/4) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 2;$$

$$u(2, \varphi) = A \sin 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4, \quad A = \text{const};$$

г)  $\Delta u(x, y) = \sin x \sin y, \quad 0 < x, \quad y < \pi,$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad y \in [0, \pi],$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u(x, \pi) = \sin x, \quad x \in [0, \pi];$$

д)  $\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in [0, +\infty), \quad y \in [0, b],$

$$u|_{x=0} = Ay, \quad u(+\infty, y) = 0, \quad y \in [0, b], \quad A = \text{const},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} + u(x, b) = 0, \quad x \in [0, +\infty);$$

е)  $\Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi, \quad \rho \in (a, b),$

$$\frac{\partial u(a, \varphi)}{\partial \rho} = a \cos \varphi, \quad u(l, \varphi) = B \sin 2\varphi + Q, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

$A, B, Q = \text{const.}$

20. Побудувати функцію Гріна для рівняння Лапласа у випадку внутрішньої задачі Діріхле, якщо область має вигляд: а) півкруга; б) кільця; в) шару  $z \in [0, l]$ .

(В і д п о в і д ь (рис. 4.22):

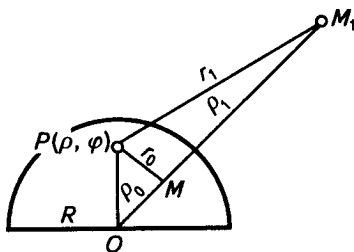


Рис. 4.22

а)  $G(P, M) = G_1(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) - G_1(\rho, \varphi, \rho_0, 2\pi - \varphi_0),$

$$G_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r_1}{R r_0},$$

$r_0 = |PM|, \quad r_1 = |PM_1|, \quad \rho_0 = |OM|, \quad \rho_1 = |OM_1|,$

$M(\rho_0, \varphi_0), \quad M_1(\rho_1, \varphi_1);$

б)  $G(P, M) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{e_n r'_n}{r_n e'_n},$

де  $r_n = |PM_n|; \quad r'_n = |PM'_n|;$

$M_n = P(\rho_n, \varphi_0); \quad M'_n = P(\rho'_n, \varphi_0);$

$$e_n = \begin{cases} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^k, & \text{коли } n = 2k, \\ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^{k+1}, & \text{коли } n = 2k + 1; \end{cases}$$

$$e'_n = \begin{cases} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k \frac{R_1}{\rho_0}, & \text{коли } n = 2k, \\ \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \frac{R_2}{\rho_0}, & \text{коли } n = 2k + 1; \end{cases}$$

$$\rho_n = \begin{cases} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^k \rho_0, & \text{коли } n = 2k, \\ \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)^{k+1} \rho, & \text{коли } n = 2k + 1; \end{cases}$$

$$\rho'_n = \begin{cases} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^k \frac{R_1^2}{\rho_0}, & \text{коли } n = 2k, \\ \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)^k \frac{R_2^2}{\rho_0}, & \text{коли } n = 2k + 1, \end{cases}$$

$R_1, R_2$  — радіуси;

$$в) G(P, M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n} \right),$$

$$\text{де } r_n = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl + \xi)]^2};$$

$$r'_n = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl - \xi)]^2}.$$

21. Знайти об'ємний потенціал  $V$  кулі за сталої густини  $f(N) = \rho_0$ :  
а) поставивши крайову задачу для  $V$  і розв'язавши її;  
б) прямим обчисленням об'ємного інтеграла.

(Відповідь:

$$V = u(r) = \begin{cases} 2\pi\rho_0(R^2 - r^2/3), & \text{коли } r < R, \\ \frac{M}{r}, & \text{коли } r > R, \end{cases}$$

де  $R$  — радіус кулі;  $M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$  — її маса.)

22. Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка з густиною  $\psi(M) = x$ .

(Відповідь:

$$u(x, y) = \frac{a^2 - x^2 + y^2}{2} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} + ax - \\ - xy \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}, \quad x \in [-a, a].)$$

23. Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка зі сталою густиною заряду.

(Відповідь:

$$u(x, y) = \rho_0 \left\{ 2a - y \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} - \frac{a-x}{2} \ln[y^2 + (a-x)^2] - \right. \\ \left. - \frac{a+x}{2} \ln[y^2 + (a+x)^2] \right\},$$

де  $\rho_0$  — густина.)



## НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

---

Одним із актуальних напрямків сучасної математичної фізики є вивчення нелінійних математичних моделей різних явищ та процесів природи. Поява таких моделей зумовлена використанням у сучасній фізиці й техніці впливів на речовину електричних полів великої інтенсивності, пучків частинок високої енергії, потужного лазерного когерентного (від лат. *cohaerens* — взаємозв'язаний; когерентні хвилі — такі, що в них не змінюється в часі різниця фаз) випромінювання ударних хвиль високої інтенсивності, потужних теплових потоків.

Лінійні математичні моделі є лише певними наближеннями при описанні різних процесів. Їх можна використовувати тільки в тих випадках, коли досліджувані фізичні величини в розглядуваному процесі змінюються не в дуже широкому діапазоні значень.

Нелінійні моделі дають змогу описати явища чи процеси в ширшому діапазоні змін параметрів. При цьому нелінійності змінюють не тільки кількісні характеристики процесів, а й якісну картину їх перебігу. В основі нелінійних моделей лежать нелінійні ДРЧП, завершеної теорії і загальних методів розв'язання задач для яких на сьогодні ще не розроблено. Однак для низки нелінійних задач математичної фізики вдається знайти точні аналітичні розв'язки, аналіз властивостей яких дає змогу виявити якісно нові нелінійні ефекти в досліджуваних процесах.

У теорії нелінійних ДРЧП одним із центральних питань є вивчення впливу характеру нелінійності на розв'язність класичних лінійних задач для розглядуваного нелінійного рівняння. При цьому особливий інтерес становлять рівняння й задачі, які не задовольняють відомі стандартні умови існування й єдиності розв'язку. До них в окремому випадкові належать низка нелінійних рівнянь гідромеханіки, теорії гравітаційного поля, теорії поверхонь та ін.

У даній главі пропонується простий метод встановлення структурних і якісних властивостей розв'язків деяких важливих класів нелінійних ДРЧП, а також досліджується низка нелінійних математичних моделей.

## Тема 1

### СТРУКТУРНІ ТА ЯКІСНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

#### 5.1

#### Структурні властивості розв'язків деяких класів нелінійних ДРЧП

Розглянемо нелінійне рівняння другого порядку вигляду

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) |u_{x_i x_j} - b(u(x)) u_{x_i} u_{x_j}| + \sum_{i=1}^n c_i(x) u_{x_i} + f(x, u) = 0. \quad (5.1)$$

Введемо нові невідомі функції  $\varphi(v)$  і  $v(x)$ , пов'язані з шуканою функцією  $u(x)$  співвідношеннями

$$u(x) = \varphi(v(x)). \quad (5.2)$$

Тоді рівняння (5.1) можемо записати так:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) [\varphi''(v) - b(\varphi)\varphi'^2(v)] v_{x_i} v_{x_j} + \\ & + \varphi'(v) \left( \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x) v_{x_i} \right) + f(x, \varphi) = 0. \end{aligned}$$

З останнього рівняння випливає: якщо функції  $\varphi(v)$  і  $v(x)$  є розв'язками рівнянь

$$\varphi''(v) - b(\varphi)\varphi'^2(v) = 0, \quad (5.3)$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x) v_{x_i} + \frac{1}{\varphi'(v)} f(x, \varphi) = 0 \quad (5.4)$$

відповідно, то функція  $u(x)$ , визначена згідно з (5.2), буде розв'язком рівняння (5.1).

Рівняння (5.3) є звичайним нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку, загальний розв'язок якого в неявному вигляді можна записати так:

$$v(x) = C_1 \int_0^u \exp \left( - \int_0^\tau b(t) dt \right) d\tau + C_2, \quad (5.5)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  — довільні сталі.

Коли з рівності (5.5) можна визначити  $u(x)$  як функцію  $v(x)$ :  $u(x) = \varphi(v(x))$ , то за умови, що  $\varphi'(v) \neq 0$ , для визначення функції  $v(x)$  дістанемо рівняння з частинними похідними (5.4), лінійне відносно перших і других похідних. В окремому випадкові, коли

$$\frac{1}{\varphi'(x)} f(x, \varphi) = f_1(x)v(x) + f_2(x),$$

рівняння (5.4) є лінійним:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x)v_{x_i} + f_1(x)v + f_2(x) = 0. \quad (5.6)$$

Таким чином, якщо  $v(x)$  — загальний розв'язок рівняння (5.6), то формула (5.2) дає загальний розв'язок рівняння (5.1), а отже, в цьому разі вплив характеру нелінійності рівняння (5.1) на структурні властивості його розв'язків повністю описується співвідношенням (5.5) між  $u(x)$  і  $v(x)$ . Отже, задачі (крайові, Коші, Гурса, мішані й т. д., залежно від типу рівняння), поставлені для рівняння (5.1), породжують відповідні задачі для рівняння (5.6), причому коректність постановки задачі для вихідного рівняння (5.1) зумовлюється коректністю одержаної для відповідної задачі у випадку рівняння (5.6) і можливістю визначення з рівності (5.5)  $u(x)$  як функції  $v(x)$ ; при цьому наявність або відсутність біфуркації (від лат. *bifurcus* — роздвоєний) розв'язків рівняння (5.1) істотно залежить від структури ріманової поверхні функціонального співвідношення (5.5) між  $u(x)$  і  $v(x)$ .

У випадку системи нелінійних рівнянь вигляду

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \left[ u_{k_{x_i x_j}} - \sum_{l,s=1}^m b_{k,s,l}(u_1, \dots, u_m) u_{s_{x_i}} u_{l_{x_j}} \right] = 0, \quad k = \overline{1, m} \quad (5.7)$$

шукатимемо її розв'язки  $u_1, \dots, u_m$  за формулами

$$u_k(x) = \varphi_k(v(x)), \quad k = \overline{1, m}, \quad (5.8)$$

де  $\varphi_1(v), \dots, \varphi_m(v)$  — розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$\varphi_k''(u) - \sum_{s,l=1}^m b_{k,s,l}(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \varphi_s'(v) \varphi_l'(v) = 0 \quad k = \overline{1, m}. \quad (5.9)$$

Для визначення функції  $v(x)$  дістаємо лінійне рівняння з частинними похідними

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) v_{x_i x_j} = 0, \quad \varphi_k'(v) \neq 0. \quad (5.10)$$

Якщо можна знайти розв'язки системи (5.9)  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  та загальний розв'язок  $v(x)$  лінійного однорідного рівняння (5.10), то формула (5.8), очевидно, дає клас частинних розв'язків системи (5.7).

## 5.2

### Деякі прості приклади

□ **Рівняння Ріда—Барта.** Як один із прикладів розглянемо рівняння Ріда—Барта:

$$\begin{aligned} & x u_{xy} - y^2 u_{yy} - 2x u_x + 2u y_y + c(x, y, u) - \\ & - \gamma u^{-1} [x u_x u_y - y^2 (u_y)^2] = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

де при  $\gamma = 1$

$$c = -2u \ln |u| \quad (5.12)$$

і при  $\gamma = \text{const} \neq 1$

$$c = \frac{-2}{1-\gamma} u(x, y). \quad (5.13)$$

Рівняння (5.11) гіперболічного типу при  $x \neq 0, y \neq 0$  параболічно вироджується вздовж прямих  $x = 0$  і  $y = 0$ , причому вздовж прямої  $y = 0$  має місце також виродження його порядку. На підставі формули (5.5) дістаємо

$$u(x, y) = e^{v(x, y)} \quad \text{при } \gamma = 1, \quad (5.14)$$

$$u(x, y) = [v(x, y)]^{(1-\gamma)^{-1}} \quad \text{при } \gamma \neq 1. \quad (5.15)$$

Унаслідок (5.4) в обох розглянутих випадках (5.12), (5.13) функція  $v(x, y)$  має задовольняти лінійне рівняння

$$xuv_{xy} - y^2v_{yy} - 2yv_{yx} + 2yv_y - 2v = 0. \quad (5.16)$$

Оскільки при  $x \neq 0$  неособливою заміною незалежних змінних

$$\xi = x, \quad \eta = xy, \quad v = \xi^{-1}\eta^2z(\xi, \eta)$$

рівняння (5.16) зводиться до такого:

$$z_{\xi\eta} = 0,$$

то загальний розв'язок рівняння (5.16) запишеться у вигляді

$$v(x, y) = y^2f_1(x) + yf_2(xy), \quad (5.17)$$

де  $f_1$  і  $f_2$  — довільні двічі неперервно диференційовні функції своїх аргументів. Використовуючи цей факт, унаслідок (5.14) і (5.15) дістаємо розв'язки рівняння (5.11)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \exp[y^2f_1(x) + yf_2(xy)] \quad \text{при } \gamma = 1, \\ u(x, y) &= [y^2f_1(x) + yf_2(xy)]^{(1-\gamma)^{-1}} \quad \text{при } \gamma \neq 1. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Із формули (5.17) випливає, що пряма  $x = 0$  не може бути носієм даних для рівняння (5.16). В області  $D$ , обмеженій, наприклад, прямими  $y = 0$  і  $y = 1$ , для рівняння (5.16) однозначно розв'язується крайова задача

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \varphi(x), \quad v(x, 1) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\psi'(0) = \frac{1}{2}\varphi'(0),$$

а сам розв'язок має вигляд

$$v(x, y) = \frac{1}{2}y^2\varphi(x) + y\left[\psi(xy) - \frac{1}{2}\varphi(xy)\right].$$

На підставі цього внаслідок формули (5.18) робимо висновок, що в області  $D$  однозначно будується знакосталий (додатний) розв'язок крайової задачі

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \varphi(x), \quad u(x, 1) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

і для рівняння (5.11) у випадку (5.12).

□ **Рівняння еліптичного типу. Задачі Діріхле та Неймана.** Нехай  $D$  — обмежена область простору  $E_n$  змінних  $x_1, \dots, x_n$  з ляпуновською межею  $S$  розмірності  $n - 1$ . Покажемо, яку роль може відіграти формула (5.5) в дослідженні задач Діріхле

$$u(x) = f(x), \quad x \in S \quad (5.19)$$

і Неймана

$$\frac{d}{d\bar{n}}(u(x)) = f(x), \quad x \in S \quad (5.20)$$

для рівняння

$$\Delta u(x) - (\nabla u(x))^2 = 0. \quad (5.21)$$

Унаслідок формули (5.5) маємо

$$v(x) = e^{-u(x)}, \quad (5.22)$$

де  $v(x)$  — довільна гармонічна функція. Отже, якщо  $u(x)$  — розв'язок рівняння (5.21) із простору функцій  $C^2(D) \cap C(\bar{D})$ , який задовольняє крайову умову (5.19), то функція  $v(x)$  буде гармонічною, належатиме тому самому простору функцій і задовольнятиме крайову умову

$$v(x) = e^{-f(x)}, \quad x \in S.$$

Звідси приходимо до висновку, що задача (5.19), (5.21) завжди має розв'язок, причому єдиний, який унаслідок формули (5.22) можна подати у вигляді

$$u(x) = -\ln v(x).$$

Задача Неймана (5.20), (5.21) згідно з формулою (5.22) зводиться до відшукування гармонічної в  $D$  функції  $v(x)$ , яка задовольняє крайову умову

$$\frac{dv(x)}{d\bar{n}} + f(x)v(x) = 0, \quad x \in S. \quad (5.23)$$

Якщо функція  $v(x)$  — додатний розв'язок задачі (5.23), то функція

$$u = -\ln v(x) + C$$

за довільної сталої  $C$  буде розв'язком задачі (5.20), (5.21).

Щоб переконатися в складності встановлення умов, які накладаються на функцію  $f(x)$  і гарантують існування дійсних розв'язків задачі (5.20), (5.21), розглянемо випадок одновимірного простору

$$u''(x) - u'^2(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (5.24)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=-1} = A, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = B. \quad (5.25)$$

Використовуючи (5.22), маємо

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \equiv \Delta u(x) - (\nabla u(x))^2 = 0 \Rightarrow v(x) = ax + b,$$

де  $a$  і  $b$  — довільні сталі. Внаслідок (5.25) та (5.22)

$$\begin{cases} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=-1} = -\frac{1}{v} v_x \Big|_{x=-1} = A \Rightarrow (1-A)a + Ab = 0, \\ \left. -\frac{1}{v} v_x \right|_{x=1} = B \Rightarrow (1+B)a + Bb = 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

Якщо  $\begin{vmatrix} 1-A & A \\ 1+B & B \end{vmatrix} = B - A - 2AB = 0$ , то система (5.26) має нетривіальний розв'язок  $a = \lambda b$ ,  $b = -\lambda(B+1)$ . Оскільки

$$u(x) = -\ln(\lambda Bx - \lambda(B+1)) + C = C - \ln \bar{\lambda} - \ln(-(x-1)B+1), \\ 0 < \bar{\lambda} = -\lambda,$$

то існування дійсних розв'язків задачі (5.24), (5.25) забезпечуватиметься, якщо  $(-x+1)B+1 > 0$  при  $x \in (-1, 1)$ , тобто якщо  $B > -0,5$ .

Випадок рівняння

$$\Delta u(x) - \frac{1}{u(x)} (\nabla u(x))^2 = 0$$

розглянуто в [1. С. 392—395].

### 5.3

#### Рівняння мішаного типу

Розглянемо нелінійне ДРЧП мішаного типу з виродженням уздовж прямої  $y = 0$ :

$$y^{2m} u_{xx} + y u_{yy} - \frac{2m-1}{2} u_y - u^\delta [y^{2m} (u_x)^2 + y(u_y)^2] = 0, \quad (5.27)$$

де  $m$  — натуральне число, більше за одиницю, а  $\delta$  набуває значення  $-1$  або  $0$ .

Позначимо через  $D_1$  скінченну область площини  $xOy$ , обмежену дугою  $\sigma_1$ :

$$x^2 + \left( \frac{2}{2m+1} \right)^2 y^{2m+1} = 1, \quad y \geq 0,$$

з кінцями в точках  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$  і характеристиками  $A_1 F_1$ :

$$x - \frac{2}{2m+1} (-y)^{\frac{2m+1}{2}} = -1, \quad y \leq 0$$

і  $B_1 F_1$ :

$$x + \frac{2}{2m+1} (-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1, \quad y \leq 0$$

рівняння (5.27), які виходять із точки

$$F_1 \left[ 0, - \left( \frac{2m+1}{2} \right)^{\frac{2}{2m+1}} \right].$$

Під задачею *Трікомі* для рівняння (5.27) розуміємо задачу відшукування в просторі функцій  $C^2(D_1) \cap C^{0,h}(\bar{D}_1)$  розв'язку  $u(x, y)$  цього рівняння, коли значення  $u(x, y)$  наперед задані на  $\sigma_1$  і  $A_1 F_1$ , причому

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{0.5-m} u_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{0.5-m} u_y, \quad -1 < y < 1. \quad (5.28)$$

Через  $C^{0,h}(\bar{D}_1)$  позначено клас неперервних у  $D_1$  функцій за Гольдером із показником  $0 < h < 1$ .



Оскільки внаслідок заміни змінних

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{2}{2m+1} |y|^{\frac{2m+1}{2}} \operatorname{sgn} y,$$

$$u_1(\xi, \eta) = u_1 \left( x, \frac{2}{2m+1} |y|^{\frac{m+1}{2}} \operatorname{sgn} y \right) = u(x, y)$$

рівняння (5.27) і умова (5.28) набирають вигляду

$$u_{1\xi\xi} + u_{1\eta\eta} \operatorname{sgn} \eta - u_1^\delta [u_{1\xi}^2 + u_{1\eta}^2 \operatorname{sgn} \eta] = 0, \tag{5.29}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} u_{1\eta} = \lim_{\eta \rightarrow -0} u_{1\eta}$$

відповідно, то достатньо розглянути таку задачу: в скінченній області  $D$  площини  $\xi, \eta$ , обмеженої півколом  $\sigma: \xi^2 + \eta^2 = 1, \eta \leq 0$  і відрізками  $AF$  і  $BF$  характеристик

$$\xi + \eta + 1 = 0, \quad \xi - \eta - 1 = 0, \quad \eta \leq 0$$

рівняння (5.29), знайти функцію  $u_1(\xi, \eta)$  із простору

$$C^2(D, \eta \neq 0) \cap C^1(D) \cap C^{0,h}(\bar{D}),$$

яка задовольняє в  $D$  при  $\eta \neq 0$  рівняння (5.29) і крайові умови

$$\begin{cases} u_1(\xi, \eta) = f(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in \sigma, \\ u_1(\xi, -\xi - 1) = \psi(\xi), & -1 \leq \xi \leq 0, \end{cases} \tag{5.30}$$

де  $f$  і  $\psi$  — задані дійсні функції класів  $C^{0,h}(\sigma)$  і  $C^2(-1 \leq \xi \leq 0)$  відповідно, причому  $f(A) = \psi(A)$ .

Розглянемо два випадки.

1. Нехай у рівнянні (5.29)  $\delta = -1$ . Тоді його загальний розв'язок можна подати у вигляді (5.14), де  $v(\xi, \eta)$  — загальний розв'язок рівняння

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} \operatorname{sgn} \eta = 0. \tag{5.31}$$

Отже, в цьому випадкові внаслідок (5.14) і (5.31) для розв'язків рівняння (5.29) при  $\eta < 0$  маємо представлення

$$u_1(\xi, \eta) = f_1(\xi + \eta) f_2(\xi - \eta), \tag{5.32}$$

де  $f_1$  і  $f_2$  — довільні функції класу  $C^2(D)$ .

На підставі формули (5.32) робимо висновок, що в характеристичному прямокутнику  $d$  із вершинами в точках

$$M\left(\frac{x_0 - 1}{2}, -\frac{x_0 + 1}{2}\right), F(0, -1), N\left(\frac{x_0 + 1}{2}, \frac{x_0 - 1}{2}\right), \\ E(x_0, 0), \quad |x_0| < 1$$

знакосталий (без обмеження загальності можна вважати додатним) у  $d$  розв'язок  $u_1(\xi, \eta)$  рівняння (5.29) із простору  $C^2(D)$ , який задовольняє умови

$$u_1(\xi, \xi - x_0) = \Psi(\xi), \quad x_0 - 1 \leq 2\xi \leq 2x_0, \\ u_1(\xi, x_0 - \xi) = \Phi(\xi), \quad 2x_0 \leq 2\xi \leq x_0 + 1, \\ \Psi(x_0) = \Phi(x_0), \quad (5.33)$$

де  $\Psi$  і  $\Phi$  — задані функції класу  $C^2$ , визначається однозначно й має вигляд

$$u_1(\xi, \eta) = \frac{1}{\Phi(x_0)} \Psi\left(\frac{\xi + \eta + x_0}{2}\right) \Phi\left(\frac{\xi - \eta + x_0}{2}\right). \quad (5.34)$$

Якщо ж  $u_1(x_0, 0) = 0$ , то розв'язок задачі (5.29), (5.33) може існувати тільки тоді, коли принаймні одна з функцій  $\Psi(\xi)$ ,  $\Phi(\xi)$  тотожно дорівнює нулю, причому в цих випадках існують нескінченні множини розв'язків

$$u_1(\xi, \eta) = \begin{cases} \Psi_1\left(\frac{\xi + \eta + x_0}{2}\right) \Phi\left(\frac{\xi - \eta + x_0}{2}\right), \\ \Psi(\xi) \equiv 0, \quad \Phi(x_0) = 0, \quad \Psi_1(x_0) = 1, \\ \Psi\left(\frac{\xi + \eta + x_0}{2}\right) \Phi_1\left(\frac{\xi - \eta + x_0}{2}\right), \\ \Phi(\xi) \equiv 0, \quad \Psi(x_0), \quad \Phi_1(x_0) = 1, \\ \Psi_1\left(\frac{\xi + \eta + x_0}{2}\right) \Phi_1\left(\frac{\xi - \eta + x_0}{2}\right), \\ \Phi(\xi) \equiv \Psi(\xi) \equiv 0, \quad \Phi_1(x_0) = \Psi_1(x_0) = 0, \end{cases}$$

де  $\Psi_1$  і  $\Phi_1$  — довільні з простору  $C^2$  функції.

Перетворення в нуль розв'язку  $u_1(\xi, \eta)$  задачі (5.29), (5.33) в деякій точці  $(\xi_1, \eta_1) \in d$  рівносильне тому, що виконується принаймі одна з умов

$$\Psi\left(\frac{\xi_1 + \eta_1 + x_0}{2}\right) = 0, \quad \Phi\left(\frac{\xi_1 - \eta_1 + x_0}{2}\right) = 0,$$

а отже, в цьому випадковій одиниць розв'язку порушуватиметься.

В окремому випадковій, коли  $u_1(x_0, 0) = 0$  і

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\xi_1 - \eta_1 + x_0}{2}\right) &= \Phi'\left(\frac{\xi_1 - \eta_1 + x_0}{2}\right) = \Phi''\left(\frac{\xi_1 - \eta_1 + x_0}{2}\right) = \\ &= \Psi\left(\frac{\xi_1 + \eta_1 + x_0}{2}\right) = \Psi'\left(\frac{\xi_1 + \eta_1 + x_0}{2}\right) = \Psi''\left(\frac{\xi_1 + \eta_1 + x_0}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

поряд із функцією  $u_1(\xi, \eta)$ , визначеною за формулою (5.34), розв'язком задачі (5.29), (5.33) у  $d$  є й функція  $u_0(\xi, \eta)$ , яка збігається з  $u_1(\xi, \eta)$  над прямими  $\xi - \eta = \xi_1 - \eta_1$  і  $\xi + \eta = \xi_1 + \eta_1$ , а під цими прямими

$$u_0(\xi, \eta) = (\xi + \eta - \xi_1 - \eta_1)^3 (\xi - \eta - \xi_1 + \eta_1)^3 \Psi_2(\xi + \eta) \Phi_2(\xi - \eta),$$

де  $\Psi_2$  і  $\Phi_2$  — довільні з простору  $C^2$  функції.

Знакосталі в трикутнику  $ABF$  розв'язки рівняння (5.29), які задовольняють умови

$$\begin{cases} u_1(\xi, 0) = \tau(\xi), & -1 \leq \xi \leq 1, \\ u_1(\xi, -\xi - 1) = \psi(\xi), & -1 \leq \xi \leq 0, \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\tau(-1) = \psi(-1),$$

$$\begin{cases} u_{1_n}(\xi, 0) = v(\xi), & -1 < \xi < 1, \\ u_1(\xi, -\xi - 1) = \psi(\xi), & -1 \leq \xi \leq 0, \\ u_1(\xi, 0) = \tau(\xi), & -1 \leq \xi \leq 1, \\ u_{1_n}(\xi, 0) = v(\xi), & -1 < \xi < 1, \end{cases} \quad (5.36)$$

даються формулами

$$u_1(\xi, \eta) = \frac{\tau(\xi + \eta)\psi\left(\frac{\xi - \eta - 1}{2}\right)}{\psi\left(\frac{\xi + \eta - 1}{2}\right)},$$

$$u_1(\xi, \eta) = \psi\left(\frac{\xi + \eta - 1}{2}\right)\psi\left(\frac{\xi - \eta - 1}{2}\right)\left[\frac{1}{\psi(-1)} + \int_{-1}^{\xi + \eta} \frac{v(t)dt}{\psi^2\left(\frac{t-1}{2}\right)}\right], \quad (5.37)$$

$$u_1(\xi, \eta) = \sqrt{\tau(\xi + \eta)\tau(\xi - \eta)} \exp\left(0,5 \int_{\xi - \eta}^{\xi + \eta} \frac{v(t)}{\tau(t)} dt\right)$$

відповідно, причому в усіх трьох випадках розв'язки єдині.

Знайдемо розв'язки задачі (5.29), (5.36), коли  $\psi(\xi) = 0$ . Згідно з (5.32) маємо

$$u_{1,\eta}(\xi, \eta) = f_1'(\xi + \eta)f_2(\xi - \eta) - f_1(\xi + \eta)f_2'(\xi - \eta),$$

а отже, на підставі перших із умов (5.36)

$$\begin{cases} f_1'(\xi)f_2(\xi) - f_1(\xi)f_2'(\xi) = v(\xi), & \xi \in (-1, 1), \\ f_1(-1)f_2(2\xi + 1) = 0, & \xi \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Із другої умови  $f_1(-1) = 0$  і вважаємо, що  $f_2(\xi) \neq 0$  при  $\xi \in [-1, 1]$ . Тоді з першої рівності

$$f_2^2(\xi) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{f_1(\xi)}{f_2(\xi)} \right) = v(\xi) \Rightarrow f_1(\xi) = f_2(\xi) \int_{-1}^{\xi} \frac{v(t)}{f_2^2(t)} dt + C.$$

Оскільки  $f_1(-1) = 0$ , то  $C = 0$ . Таким чином дістаємо нескінченну кількість розв'язків

$$u_1(\xi, \eta) = f_2(\xi + \eta)f_2(\xi - \eta) \int_{-1}^{\xi + \eta} \frac{v(t)}{f_2^2(t)} dt,$$

де  $f_2(\xi)$  — довільна з простору  $C^2([-1, 1])$  функція, яка ніде при  $\xi \in [-1, 1]$  не перетворюється в нуль.

Унаслідок формул (5.14) та (5.37) побудова знакосталого розв'язку

задачі (5.29), (5.30) у півкрузі  $D^+ = D \cap \{\eta > 0\}$  зводиться до відшукування гармонічної функції  $v(\xi, \eta)$ , яка задовольняє крайові умови

$$v(\xi, \eta) = \ln f(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \sigma,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\psi' \left( \frac{\xi-1}{2} \right)}{\psi \left( \frac{\xi-1}{2} \right)}, \quad -1 < \xi < 1.$$

Як відомо, при  $(\xi, \eta) \in D^+$

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) = & \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma} \sqrt{\frac{1-z^2}{1-t^2}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-tz} \right) \ln f(t) dt + \\ & + \operatorname{Re} \frac{2}{\pi(1+i)} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-z^2}{1-t^2}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-tz} \right) \ln \psi \left( \frac{t-1}{2} \right) dt. \end{aligned} \quad (5.38)$$

При  $(\xi, \eta) \in D^- = D \cap \{\eta < 0\}$  маємо

$$v(\xi, \eta) = v(\xi + \eta, 0) - \ln \psi \left( \frac{\xi + \eta - 1}{2} \right) + \ln \psi \left( \frac{\xi - \eta - 1}{2} \right). \quad (5.39)$$

Підставивши вирази (5.38), (5.39) у праву частину формули (5.14), дістанемо єдиний розв'язок задачі (5.29), (5.30) при  $\delta = -1$ .

Зауважимо, що вимога знакосталості розв'язку  $u_1(\xi, \eta)$  задачі (5.29), (5.30) (а отже, й знакосталості  $f$  і  $\psi$ ) є суттєвою. Справді, наприклад, при  $f \equiv \psi \equiv 1$  задача (5.29), (5.30) має багатопараметричну сім'ю розв'язків

$$u_1(\xi, \eta) = \prod_{k=1}^n u_{k,1}(\xi, \eta) u_{k,1}^*(\xi, \eta), \quad (5.40)$$

де

$$u_{k,1}(\xi, \eta) = \begin{cases} \left| \frac{z - \alpha_k}{1 + \alpha_k} \right|^{2m_k}, & \eta \geq 0, \quad z = \xi + i\eta, \quad \alpha_k = a_k + ib_k, \quad b_k > 0, \\ \exp m_k \left[ \ln \left| \frac{(\xi - \alpha_k)^2 - \eta^2}{(1 + \alpha_k)^2} \right| - \operatorname{arctg} \frac{\xi + \eta - a_k}{b_k} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{\xi - \eta - a_k}{b_k} \right], & \eta < 0, \end{cases}$$

$$u_{k,1}^*(\xi, \eta) = \exp v_k(\xi, \eta),$$

$n, m_k$  — довільні натуральні числа, причому  $v_k(\xi, \eta)$  визначаються згідно з (5.38), (5.39), в яких  $\ln f(t)$  потрібно замінити на

$$-\ln \left| \frac{t - \alpha_k}{1 + \alpha_k} \right|^{2m_k}$$

і  $\ln \psi \left( \frac{t-1}{2} \right)$  — на

$$-\ln \left| \frac{t - \alpha_k}{1 + \alpha_k} \right|^{2m_k} + m_k \operatorname{arctg} \frac{1 + a_k}{-b_k} - m_k \operatorname{arctg} \frac{t - a_k}{b_k},$$

$\alpha_k$  — довільні комплексні числа з  $D^+$ , і вони є нулями функції  $u_1(\xi, \eta)$ , визначеної згідно з (5.40).

У випадку, коли  $\psi(\xi) \equiv 0$ ,  $f(A) = 0$ , задача (5.29), (5.30) має нескінченну множину розв'язків. При  $\eta \geq 0$  вони набирають вигляду (5.14),

причому  $v(\xi, \eta)$  визначається за формулою (5.38), в якій  $\psi \left( \frac{t-1}{2} \right)$

замінено довільною функцією  $-\psi_1(t)$  із простору  $C^2$ , котра ніде не перетворюється в нуль, а при  $\eta \leq 0$

$$u_1(\xi, \eta) = u_1(\xi + \eta, 0) \frac{\psi_1(\xi + \eta)}{\psi_1(\xi - \eta)}.$$

Якщо  $f(t)$  знакозмінна й функція  $\ln |f(t)|$  інтегровна, то дійсних розв'язків задача (5.29), (5.30) не має, всі її розв'язки комплексні. Їх знову дістають за формулою (5.14), в якій  $v(\xi, \eta)$  дається рівністю (5.38), де  $f(t)$  потрібно замінити на  $|f(t)|$  і під знаками  $\operatorname{Re}$  додати вирази

$$2k \int_{CE} \sqrt{\frac{1-z^2}{1-t^2}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-tz} \right) dt,$$

$$(2l+1) \int_E \sqrt{\frac{1-z^2}{1-t^2}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-tz} \right) dt,$$

$$k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

де  $\bar{E}$  — множина точок півкола  $\sigma$ , на якому  $f < 0$ , а  $CE$  — доповнення  $\bar{E}$  до  $\sigma$ .

2. Нехай у рівнянні (5.29)  $\delta = 0$ . Тоді зв'язок між функціями  $u_1(\xi, \eta)$  і  $v(\xi, \eta)$  дається формулою (5.22), де  $v(\xi, \eta)$  — розв'язок рівняння (5.31). Тому крайовими умовами (5.30) породжуються умови

$$\begin{cases} v(\xi, \eta) = \exp[-f(\xi, \eta)], & (\xi, \eta) \in \sigma, \\ v(\xi, -\xi - 1) = \exp[-\psi(\xi)], & -1 \leq \xi \leq 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

Унаслідок другої з умов (5.41)

$$\frac{\partial v(\xi, 0)}{\partial \xi} - \frac{\partial v(\xi, 0)}{\partial \eta} = -\psi' \left( \frac{\xi - 1}{2} \right) \exp \left[ -\psi \left( \frac{\xi - 1}{2} \right) \right], \quad -1 < \xi < 1. \quad (5.42)$$

Гармонічна в  $D^+$  функція  $v(\xi, \eta)$ , яка задовольняє першу з умов (5.41) і умову (5.42), очевидно, дається формулою (5.38), в якій  $\ln |f(t)|$  і  $\ln \psi \left( \frac{t-1}{2} \right)$  потрібно замінити на  $\exp[-f(t)]$  і  $\exp \left[ -\psi \left( \frac{t-1}{2} \right) \right]$  відповідно.

В області  $D^-$  маємо

$$v(\xi, \eta) = v(\xi + \eta, 0) + \exp \left[ -\psi \left( \frac{\xi - \eta - 1}{2} \right) \right] - \exp \left[ -\psi \left( \frac{\xi + \eta - 1}{2} \right) \right]. \quad (5.43)$$

На підставі формул (5.42), (5.43) робимо висновок, що виконання умови

$$\psi'(\xi) \leq 0, \quad -1 < \xi < 0$$

гарантує існування єдиного дійсного розв'язку задачі (5.29), (5.30) у розглядуваному випадкові.

## Тема 2

### НЕЛІНІЙНІ МОДЕЛІ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

#### 5.4

#### Теорія нелінійної теплопровідності

Досліджуючи високотемпературні теплові процеси з урахуванням дії таких механізмів перенесення енергії, як електронна або променева теплопровідність, необхідно враховувати залежність густини  $\rho$ , питомої теплоємності  $C$  і коефіцієнта теплопровідності середовища  $K$  від температури  $u$ .

Потужність теплових джерел, розподілених в об'ємі середовища, також може залежати від температури, якщо враховувати процеси дисоціації та йонізації молекул, фазові переходи, випромінювання, горіння, хімічні реакції та інші екзо- та ендотермічні процеси, які відбуваються в нагрітому середовищі.

Рівняння теплопровідності, що враховує залежність властивостей середовища від температури й нелінійну залежність від температури потужності розподілених в об'ємі теплових джерел, є квазілінійним параболічним рівнянням вигляду

$$\rho(u)C(u)u_t = \operatorname{div}(K(u) \operatorname{grad} u) + F(u, x, y, z, t),$$

$$u = u(t, x, y, z). \quad (5.44)$$

Нелінійність задачі теплопровідності може бути спричинена також нелінійністю крайової умови. Такі задачі, на відміну від задач із внутрішньою нелінійністю, зумовленою нелінійністю рівняння, часто називають *задачами із зовнішньою нелінійністю*.

Нелінійна крайова умова на поверхні  $S$  тіла може мати вигляд

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_S = \varphi(u, p, t), \quad p \in S, \quad (5.45)$$

де задана функція  $\varphi$  нелінійно залежить від температури.

До таких умов приходять, наприклад, коли через поверхню  $S$  тіла відбувається випромінювання енергії. Тоді згідно із законом Стефана—Больцмана

$$-K \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \varepsilon_0 \sigma_0 u^4(t, p), \quad p \in S, \quad t > 0,$$

де  $K$  — коефіцієнт теплопровідності;  $\varepsilon_0$  — ступінь чорноти матеріалу, яка в загальному випадкові залежить від температури  $u(t, p)$ ;  $\sigma_0$  — стала Стефана—Больцмана.

Якщо ж на поверхні  $S$  задана умова конвекційного теплообміну, то згідно із законом Ньютона

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + hu(p, t) = hf(p, t), \quad p \in S, \quad t > 0.$$

Тут  $f(p, t)$  — температура зовнішнього середовища;  $h = \alpha_T/K$ , де  $\alpha_T$  — коефіцієнт теплообміну, який залежить від температури поверхні тіла.

Задача теплопровідності стає нелінійною, якщо враховувати фазові переходи в середовищі, такі як плавлення, випаровування, конденсація, кристалізація, що відбуваються за певної температури й супроводжуються виділенням або поглинанням теплоти.



У середовищі з фазовим переходом з'являється поверхня  $S_1$  розділення фаз, яку називають *фронтом фазового переходу*. Ця поверхня рухається зі скінченною швидкістю. Баланс теплової енергії на фронті фазового переходу з температурою  $f(t, p)$  дає змогу записати на рухомій поверхні  $S_1$  фронту, крім умови

$$u_1(t, p) = u_2(t, p) = f(t, p), \quad p \in S_1, \quad (5.46)$$

другу крайову умову

$$\left( K_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{n}} - K_2 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_{p \in S_1} = q\rho v, \quad (5.47)$$

де  $K_1, K_2, u_1, u_2$  — відповідно коефіцієнти теплопровідності й температури двох стичних фаз;  $q$  — питома масова теплота фазового переходу;  $v$  — миттєва швидкість руху фронту фазового переходу в напрямі нормалі  $\bar{n}$  до поверхні  $S_1$ .

Оскільки швидкість руху фронту  $v$  заздалегідь не відома й має бути знайдена в процесі розв'язування задачі теплопровідності, то крайова умова (5.47), яка називається *умовою Стефана*, робить задачу нелінійною.

Нелінійності змінюють не лише кількісні характеристики теплових процесів, а й якісну картину їх перебігу. Вони ускладнюють математичні моделі теплових процесів, причому в багатьох випадках ці складності пов'язані з неможливістю застосування для нелінійних задач принципу суперпозиції розв'язків. Кількість знайдених точних аналітичних розв'язків таких нелінійних задач теплопровідності вкрай обмежена, але саме аналіз цих розв'язків уможлиблює виявлення якісно нових нелінійних ефектів за розподілу теплоти. Деякі такі розв'язки нелінійних задач теплопровідності розглянемо в наступних параграфах.

Квазілінійні параболічні рівняння другого порядку лежать в основі математичних моделей різноманітних явищ і процесів у механіці, фізиці, біології, екології, технології та інших галузях знань. В окремому випадковій рівняння нелінійної теплопровідності (5.44) за певних умов описує фільтрацію рідин і газів у пористих матеріалах, дифузію нейтронів, нелінійний скін-ефект (проходження змінного електричного струму високої частоти не через весь переріз провідника, а лише переважно в поверхневому шарі) при проникненні магнітного поля в провідні середовища. Це рівняння може бути застосоване при математичному описанні процесів горіння й детонації, хімічної кінетики, процесів росту й міграції біологічних популяцій, поширення забруднень у

довкіллі. Такий широкий діапазон застосовувань рівняння (5.44) зумовлений тим, що воно ґрунтується на фундаментальних законах збереження енергії, маси або кількості частинок.

## 5.5

### Задача Стефана про фазовий перехід

Знайдемо аналітичний розв'язок задачі теорії теплопровідності для одновимірного середовища, яку називають *задачею Стефана* на честь Й. Стефана, який поставив і розв'язав у 1889 р. задачу про фазовий перехід.

Фазовий перехід може бути пов'язаний із кристалізацією рідини під час її охолодження. В цьому випадкові задачу зазвичай називають *задачею про промерзання*, маючи на увазі, що замерзання води під час її охолодження належить до процесів такого класу.

Нехай рідке середовище займає півпростір  $x > 0$  і при  $t < 0$  температура всіх шарів рідини однакова й становить  $u_0 > u^*$ , де  $u^*$  — температура тверднення рідини. Без обмеження загальності вважатимемо, що  $u^* = 0$ .

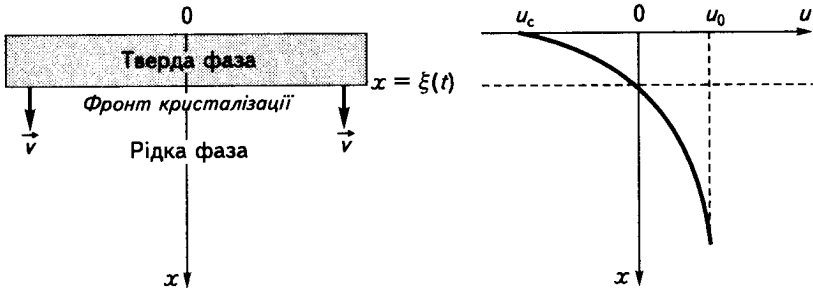


Рис. 5.1

З моменту часу  $t = 0$  на межі  $x = 0$  підтримується стала температура  $u_c < 0$ , яка менша за температуру кристалізації  $u^*$ . В цьому випадкові при  $t > 0$  поблизу межевої поверхні виникає шар твердої фази, товщина якого з плином часу збільшується (рис. 5.1). Фронт кристалізації  $x = \xi(t)$  у довільний момент часу відокремлює тверду фазу від рідкої, рухаючися з деякою швидкістю  $V = d\xi/dt$  у напрямі рідкої фази. У постановці задачі  $\xi(0) = 0$ .

Теплота фазового переходу, яка виділяється під час кристалізації рідини, відводиться внаслідок теплопровідності твердої фази через граничну поверхню  $x = 0$ .

Виділяючи явно рухомий фронт кристалізації, позначимо індексами 1 і 2 величини, які належать відповідно до твердої і рідкої фаз. Тоді, вважаючи, що властивості середовища під час фазового переходу змінюються стрибком, запишемо рівняння теплопровідності для обох фаз:

$$\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \xi(t), \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad \xi(t) < x < \infty, \quad (5.49)$$

де  $a_1^2$ ,  $a_2^2$  — коефіцієнти температуропровідності відповідно твердої та рідкої фаз.

Ураховуючи, що в початковий момент часу існує тільки рідка фаза, початкову умову для задачі запишемо у вигляді

$$u_2(0, x) = u_0 = \text{const}, \quad x > 0. \quad (5.50)$$

Крайові умови задачі сформулюємо так:

а) на краях області

$$\begin{aligned} u_1(t, 0) &= u_c = \text{const} > 0, \\ u_2(t, x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} u_0 = \text{const} > 0; \end{aligned} \quad (5.51)$$

б) на фронті фазового переходу

$$u_1|_{x=\xi-0} = u_2|_{x=\xi+0} = 0; \quad (5.52)$$

$$K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0} - K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} = \rho_1 q^* \frac{d\xi}{dt}, \quad (5.53)$$

де  $q^*$  — захована теплота кристалізації, віднесена до одиниці маси твердої фази.

За допомогою перетворення Больцмана

$$\eta = x/\sqrt{t}$$

зведемо рівняння (5.48), (5.49) до звичайних диференціальних рівнянь для функцій  $z_1(\eta)$  і  $z_2(\eta)$ :

$$0,5\eta z_i'(\eta) + a_i^2 z_i''(\eta) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.54)$$

Позначивши  $z_i'(\eta) = w_i(\eta)$ , запишемо рівняння (5.54) у вигляді

$$0,5\eta w_i(\eta) + a_i^2 w_i'(\eta) = 0 \Rightarrow \frac{dw_i(\eta)}{w_i(\eta)} = -\frac{\eta}{2a_i^2} d\eta.$$

Зінтегрувавши останню рівність, дістанемо

$$z_i'(\eta) = w_i(\eta) = \bar{B}_i \exp\left(-\frac{\eta^2}{4a_i^2}\right),$$

де  $\bar{B}_i$  — довільні сталі.

Зінтегрувавши ще раз, знаходимо загальний розв'язок рівняння (5.54) для  $i = 1, 2$ :

$$z_i(\eta) = A_i + \bar{B}_i \int_0^\eta \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a_i^2}\right) d\xi = A_i + B_i \Phi\left(\frac{\eta}{2a_i}\right),$$

де  $\Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{-\xi^2} d\xi$ ;  $A_i, B_i$  — довільні сталі.

Функцію  $\Phi(\zeta) \equiv \operatorname{erf} \zeta$  називають *інтегралом*, або *функцією*, *похибок*. Вона часто трапляється в задачах математичної фізики й тому затабульована, як і її похідні та інтеграл від неї. Зокрема  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(\infty) = 1$ . Для малих  $\zeta$  справедливе розвинення

$$\Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \zeta - \frac{\zeta^3}{1! \cdot 3} + \frac{\zeta^5}{2! \cdot 5} - \dots \right),$$

а для великих  $\zeta$  — асимптотична формула

$$\Phi(\zeta) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta} \left( 1 - \frac{1}{2\zeta^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2\zeta^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2\zeta^2)^3} + \dots \right).$$

Повертаючися до старих незалежних змінних, знайдемо загальний розв'язок рівнянь (5.48), (5.49):

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad t > 0, \quad 0 < x < \xi(t), \\ u_2(t, x) &= A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), \quad t > 0, \quad \xi(t) < x < \infty. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Згідно з крайовими умовами (5.51) маємо

$$A_1 = u_c, \quad A_2 + B_2 = u_0. \quad (5.56)$$

Зауважимо, що при цьому початкова умова (5.50) виконується.

Згідно з умовами (5.52) на фронті фазового переходу, тобто при  $x = \xi(t)$ , дістаємо

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi(t)}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0, \quad A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\xi(t)}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0. \quad (5.57)$$

Кожна з цих умов може виконуватися для довільного  $t > 0$  тільки в тому разі, якщо аргументи функції  $\Phi(\zeta)$  у (5.57) не залежать від часу. Але це можливо при

$$\xi(t)/\sqrt{t} = \alpha = \text{const.}$$

Таким чином, із точністю до деякої сталої  $\alpha$  визначено закон руху фронту фазового переходу

$$\xi(t) = \alpha\sqrt{t} \quad (5.58)$$

та його швидкість

$$v = \frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{t}}, \quad (5.59)$$

яка зменшується з плином часу, тобто зі збільшенням товщини шару твердої фази.

Підставляючи (5.58) у співвідношення (5.57), дістаємо

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right) = 0, \quad A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right) = 0. \quad (5.60)$$

Тепер із рівностей (5.56) і (5.60) знаходимо всі чотири сталі:

$$A_1 = u_c, \quad B_1 = -\frac{u_c}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \quad A_2 = \frac{u_0 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right) - 1}, \quad B_2 = \frac{u_0}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \quad (5.61)$$

Щоб визначити  $\alpha$ , потрібно використати умову Стефана (5.53) на фронті фазового переходу. Оскільки

$$\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta^2},$$

то з урахуванням формул (5.55), (5.59), (5.61) умова (5.53) приводить до рівняння

$$\frac{K_1 u_c e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} - \frac{K_2 u_0 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2 \left[\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right) - 1\right]} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha \rho_1 q^*. \quad (5.62)$$

Аналіз трансцендентного рівняння (5.62) показує, що для нього існує єдиний додатний розв'язок  $\alpha$ . Наближене значення кореня цього рівняння можна знайти чисельними методами.

У випадку, коли початкова температура всіх шарів рідини дорівнює температурі фазового переходу, тобто  $u_0 = 0$ , із рівностей (5.61) випливає, що

$$A_1 = u_c, \quad B_1 = -\frac{u_c}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \quad A_2 = B_2 = 0,$$

і трансцендентне рівняння (5.62) набуває простішого вигляду

$$\beta \Phi(\beta) \exp(\beta^2) = N, \quad (5.63)$$

$$\text{де } \beta = \frac{\alpha}{2a_1}, \quad N = |u_c| \frac{C_1}{\sqrt{\pi} q^*}, \quad C_1 = \frac{K_1}{a_1^2 \rho_1}.$$

У загальному випадкові наближений розв'язок рівняння (5.63) можна знайти графічним способом або із застосуванням чисельних методів розв'язування трансцендентних рівнянь. Якщо ж параметри задачі відповідають малим значенням  $N$ , то, скориставшись асимптотичними формулами  $\Phi(\beta) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta$ ,  $\exp(\beta^2) \simeq 1$ , які справедливі для малих значень  $\beta$ , із рівняння (5.63) дістанемо

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^2 = N, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2 |u_c| C_1 a_1^2}{q^*}}.$$

Значимо, що нелінійні задачі теплопровідності з фазовими переходами широко використовуються для моделювання технологічних

процесів зонної плавки, спрямованої кристалізації, вирощування монокристалів і одержання заданих структур напівпровідникових матеріалів. За допомогою математичних моделей може бути здійснена оптимізація таких процесів за різними параметрами.

## 5.6

### Поширення теплових збурень у нелінійних середовищах

Аналіз властивостей точних аналітичних розв'язків деяких задач нелінійної теплопровідності дає змогу виявити низку важливих нелінійних ефектів при поширенні теплових збурень у середовищах, коефіцієнт теплопровідності яких залежить від температури.

Розглянемо середовище, коефіцієнт теплопровідності  $K$  якого змінюється залежно від температури  $u$  за степеневим законом

$$K = k_0 u^\sigma, \quad (5.64)$$

де  $\sigma = \text{const} > 0$  — параметр нелінійності середовища. Густину середовища  $\rho$  та її теплоємність вважатимемо сталими, які не залежать від температури. Таке середовище, на відміну від середовища зі сталим коефіцієнтом теплопровідності ( $\sigma = 0$ ), називатимемо нелінійним, оскільки процес теплопровідності в такому середовищі за відсутності об'ємних теплових джерел описується нелінійним, точніше, квазілінійним параболічним рівнянням

$$u_t(t, p) = a^2 \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u), \quad (5.65)$$

де  $a^2 = \frac{k_0}{C\rho}$  — характерний коефіцієнт температуропровідності.

Моделюючи теплові процеси в нелінійному середовищі, необхідно використовувати такі розв'язки рівняння (5.65), які задовольняють умови неперервності температури й теплового потоку. Але оскільки густина теплового потоку  $\bar{q} = -k_0 u^\sigma \operatorname{grad} u$  в такому середовищі залежить не тільки від градієнта температури, а й від значення самої температури, то розв'язки рівняння нелінійної теплопровідності (5.65) слід шукати в класі узагальнених функцій, які допускають розриви похідних за просторовими змінними там, де функція  $u(t, p)$  перетворюється в нуль і рівняння (5.65) вироджується.

Розглянемо задачу про вплив миттєвого зосередженого теплового джерела. Нехай у нелінійному середовищі в початковий момент часу  $t = 0$  в площині  $x = 0$  миттєво виділяється на одиницю площі кількість теплоти  $Q_0$ . Від такого миттєвого зосередженого джерела теплові збурення почнуть поширюватися симетрично по обидва боки від площини  $x = 0$ . Математична модель такого процесу запишеться у вигляді задачі Коші для квазілінійного параметричного рівняння:

$$\begin{cases} u_t(t, x) = a^2 \frac{\hat{c}}{\hat{c}x} (u^\sigma, u_x), & t > 0, \quad x \in E_1, \\ u(0, x) = Q\delta(x). \end{cases} \quad (5.66)$$

Тут  $Q = \frac{Q_0}{\rho C}$ , а дельта-функція  $\delta(x)$  характеризує температурний вплив

плоского зосередженого джерела  $\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \right)$ .

Збіжність розв'язку  $u(t, x)$  задачі (5.66) при  $t \rightarrow 0$  до початкового розподілу слід розуміти як слабку, тобто для довільної неперервної функції  $f(x)$  має виконуватися рівність

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) u(t, x) dx = Q f(0).$$

Фізична постановка задачі дає змогу стверджувати, що на нескінченності теплові збурення будуть настільки малими в довільний момент часу, що ними можна знехтувати, тобто

$$u(t, x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad \text{і} \quad u^\sigma u_x(t, x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0.$$

Інтегруючи рівняння в (5.66) за незалежною змінною  $x$  у межах від  $-\infty$  до  $+\infty$ , дістаємо

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = a^2 \{ u^\sigma u_x |_{x=+\infty} - u^\sigma u_x |_{x=-\infty} \} = 0.$$

Звідси з урахуванням початкової умови випливає, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = Q = \text{const} \quad \forall t \geq 0. \quad (5.67)$$



Співвідношення (5.67) відображує фізичний закон збереження теплової (внутрішньої) енергії середовища в довільний момент часу.

Покажемо, що розв'язком задачі Коші (5.66) є функція

$$u(t, x) = \begin{cases} U(t) \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{1/\sigma}, & |x| < x_0(t), \\ 0, & |x| \geq x_0(t), \end{cases} \quad (5.68)$$

де

$$U(t) = \eta_0^{\frac{2}{\sigma}} Q^{\frac{2}{\sigma+2}} \left[ \frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{1-\sigma} (a^2 t)^{-\frac{1}{\sigma+2}};$$

$$x_0(t) = \eta_0 Q^{\frac{\sigma}{\sigma+2}} (a^2 t)^{\frac{1}{\sigma+2}};$$

(5.69)

$$\eta_0 = \left\{ 2I(\sigma) \left[ \frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{1-\sigma} \right\}^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}};$$

$$I(\sigma) = \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{1}{\sigma}} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sigma}\right)};$$

$\Gamma(z)$  — гама-функція Ейлера  $\left( \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re} z > 0 \right)$ .

Справді,

$$u_x(t, x) = U(t) \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}-1} \left( -\frac{2x}{x_0^2(t)} \right) \sigma,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma u_x) =$$

$$= U^{\sigma+1}(t) \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{4x^2}{\sigma x_0^4(t)} \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} - \frac{2}{x_0^2(t)} \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}} \right\},$$

$$u_i(t, x) = U'(t) \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{2x^2}{\sigma x_0^3(t)} U(t) x_0'(t) \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}},$$

$$U'(t) = \eta_0^{\frac{2}{\sigma}} Q^{\frac{2}{\sigma+2}} \left[ \frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \left( -\frac{a^2}{\sigma+2} \right) (a^2 t)^{-\frac{1}{\sigma+2}-1},$$

$$x_0'(t) = \frac{a^2 \eta_0}{\sigma+2} Q^{\frac{\sigma}{\sigma+2}} (a^2 t)^{\frac{1}{\sigma+2}-1}.$$

Підставляючи знайдені похідні в рівняння задачі (5.66), дістанемо

$$u_i(t, x) - a^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma u_x) \equiv 0, \quad t > 0, \quad x \in E_1,$$

тобто функція, визначена за формулою (5.68), є розв'язком рівняння задачі (5.66).

◆ **Вправа.** Показати, що функція, визначена формулою (3.68), задовольняє початкову умову задачі Коші (5.66).

Розв'язок (3.68) має вигляд фронтового розв'язку, який описує поширення *теплової хвилі* від миттєвого зосередженого теплового джерела, розташованого в площині  $x = 0$ . Зобразимо графічно температурний профіль такої теплової хвилі в різні моменти часу ( $t_3 > t_2 > t_1 > 0$ ) (рис. 5.2).

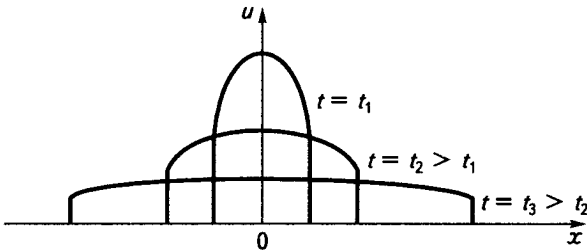


Рис. 5.2

Фронти теплової хвилі, положення яких у довільний момент часу визначаються рівностями  $x = \pm x_0(t)$ , відокремлюють у просторі область збурень, де  $u > 0$ , від незбуреної області  $|x| > x_0(t)$ , куди теплові збурення від джерела ще не дійшли й де  $u(t, x) = 0$ . Фронти теплової хвилі рухаються зі скінченною швидкістю

$$v(t) = \frac{dx_0(t)}{dt} = \frac{a^2 \eta_0}{\sigma + 2} Q^{\frac{2}{\sigma+2}} (a^2 t)^{-\frac{\sigma+1}{\sigma+2}} \sim t^{-\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}.$$

Швидкість руху фронтів зменшується з плином часу, однак теплові збурення проникають у нелінійне середовище необмежено далеко, оскільки  $x_0(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Зауважимо: якщо  $\sigma > 1$ , то фронти теплової хвилі є крутими, оскільки в цьому випадкові  $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \pm x_0, \mp 0$ . Однак, незважаючи на необмежене зростання градієнта температури на крутому фронті теплової хвилі, густина теплового потоку  $q = -k_0 u^\sigma u_x(t, x)$  при наближенні до фронту з області збурень прямує до нуля, забезпечуючи виконання на фронті фізичної умови неперервності теплового потоку за довільних значень параметра нелінійності  $\sigma > 0$ . При цьому формулу (5.68) слід розглядати як узагальнений розв'язок задачі (5.66). Формули (5.68) і (5.69) допускають граничний перехід при  $\sigma \rightarrow 0$ , який відповідає переходу до середовища зі сталим коефіцієнтом теплопровідності, що дорівнює  $k_0$ . У цьому випадкові  $\eta_0 \rightarrow \infty$ , і з розв'язку (5.68) при  $\sigma \rightarrow 0$  можна дістати розподіл температури

$$u(t, x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left( 1 - \sigma \frac{x^2}{4a^2 t} \right)^{1/\sigma} = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

який збігається з нестационарним температурним полем у задачі про вплив миттєвого зосередженого джерела в лінійній теорії теплопровідності [(див. формулу (3.66)].

Таким чином, *теплові збурення в нелінійному середовищі з коефіцієнтом теплопровідності, який змінюється залежно від температури середовища за степеневим законом, поширюються по нульовому незбуреному фону зі скінченною швидкістю, на відміну від середовища зі сталим коефіцієнтом теплопровідності, де швидкість поширення теплових збурень нескінченна.*

Цей висновок підтверджується ще одним точним розв'язком задачі нелінійної теплопровідності. Нехай спочатку ненагріте нелінійне середовище займає півпростір  $x > 0$  і з моменту  $t = 0$  температура на межі  $x = 0$  починає збільшуватися за степеневим законом із показником степеня, пов'язаним із параметром нелінійності середовища  $\sigma$ . Процес розігрівання середовища в цьому випадкові описується такою нелінійною задачею:

$$\begin{cases} u_t(t, x) = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma u_x), & t > 0, \quad x > 0, \\ u(0, x) = 0, \quad u(t, 0) = u_0 t^{1/\sigma}. \end{cases} \quad (5.70)$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що задача (5.70) має фронтний розв'язок

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0 t^{1/\sigma} \left(1 - \frac{x}{x_0(t)}\right)^{1/\sigma}, & 0 \leq x < x_0(t), \\ 0, & x \geq x_0(t). \end{cases} \quad (5.71)$$

Тут  $x_0(t) = v_0 t$ ,  $v_0 = (a^2 u_0^\sigma / \sigma)^{0.5}$ .

Аналіз розв'язку (5.71) показує, що від нагрітої межі всередину середовища по незбуреному нульовому фону поширюється теплова (температурна) хвиля, фронт якої рухається зі сталою швидкістю, котра дорівнює  $v_0$ . Швидкість  $v_0$  залежить від «амплітуди»  $u_0$  теплового збурення на стінці.

Якісний вигляд температурних полів у теплових хвилях (5.71) для різних значень параметра нелінійності  $\sigma$  зображено на рис. 5.3.

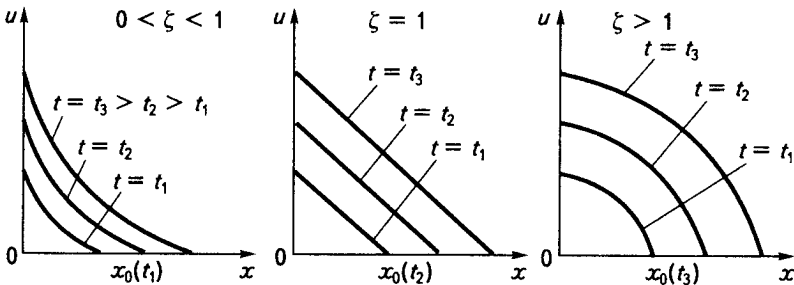


Рис. 5.3

Як і в попередній задачі, при  $\sigma > 1$  фронт теплової хвилі (5.71) виявляється крутим, оскільки при цьому  $|u_x(t, x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0 - 0} \infty$ .

Однак можна перевірити, що тепловий потік неперервний у всіх точках простору й перетворюється в нуль при наближенні до фронтної точки  $x_0(t)$  з області збурень. Справді, обчислюючи густину теплового потоку

$$q(t, x) = -k_0 u^\sigma u_x = \frac{k_0 u_0^{\sigma+1}}{\sigma v_0} \left( t - \frac{x}{v_0} \right)^{1/\sigma}$$

і підставляючи сюди  $x = v_0 t$ , дістаємо, що  $q(t, x_0(t)) = 0$  для довільного  $\sigma > 0$ .

Таким чином, скінченна швидкість поширення теплових збурень вказує на появу в нелінійних середовищах своєрідних властивостей «інерції» теплових процесів, яка якісно змінює характер перебігу теплових процесів у нелінійних середовищах порівняно з аналогічними процесами в середовищах зі сталим коефіцієнтом теплопровідності, де теплові збурення поширюються миттєво.

## 5.7

### Просторова локалізація теплових збурень

Іще один цікавий нелінійний процес можна виявити, досліджуючи процес поширення теплових збурень у нелінійних середовищах з об'ємним поглинанням теплоти.

Розглянемо задачу про вплив миттєвого плоского зосередженого теплового джерела в нелінійному середовищі з коефіцієнтом теплопровідності, який змінюється залежно від температури за степеневим законом, якщо в нагрітому середовищі відбувається об'ємне поглинання теплоти; питома потужність джерела в кожній точці середовища пропорційна значенню температури в даний момент часу. Математична модель такого процесу відповідає задачі Коші для квазілінійного рівняння теплопровідності з молодшим членом

$$\begin{cases} u_t(t, x) = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma u_x) - p u(t, x), & t > 0, \quad x \in E_1, \\ u(0, x) = Q \delta(x). \end{cases} \quad (5.72)$$

Тут  $p = \text{const} \geq 0$  — коефіцієнт поглинання. При  $p = 0$  задача (5.72) перетворюється в розглянуту вище задачу (5.66).

Поглинання енергії в об'ємі нелінійного середовища спричиняє зменшення інтегральної (внутрішньої) теплової енергії середовища. Тому, інтегруючи (5.72) за просторовою змінною  $x$  у межах від  $-\infty$  до  $+\infty$ , знаходимо

$$\frac{dI(t)}{dt} = -pI(t), \quad (5.73)$$

де  $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx$ . Оскільки

$$I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, x) dx = Q \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = Q,$$

то, інтегруючи рівняння (5.73), матимемо

$$I(t) = Qe^{-pt}.$$

Для інтегрування задачі (5.72) введемо нову невідому функцію

$$v(t, x) = u(t, x)e^{pt}. \quad (5.74)$$

Тоді рівняння для  $v(t, x)$  набирає вигляду

$$e^{p\sigma t} v_t(t, x) = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (v^\sigma v_x), \quad t > 0, \quad x \in E_1.$$

Ввівши нову незалежну змінну

$$\tau = \frac{1 - e^{-p\sigma t}}{p\sigma}, \quad \tau \in \left[ 0, \frac{1}{p\sigma} \right), \quad (5.75)$$

дістаємо задачу

$$\begin{cases} z_\tau(\tau, x) = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (z^\sigma z_x), & \tau \in \left( 0, \frac{1}{p\sigma} \right), \quad x \in E_1, \\ z(0, x) = Q\delta(x), \end{cases} \quad (5.76)$$

$$\text{де } z(\tau, x) = z\left(\frac{1 - e^{-p\sigma t}}{p\sigma}, x\right) = v(t, x).$$

З точністю до позначень задача (5.76) відповідає задачі (5.66) про вплив миттєвого зосередженого теплового джерела в нелінійному середовищі без об'ємного поглинання. Єдина відмінність полягає в тому, що задача (5.76) сформульована на скінченному «часовому» інтервалі. Тому, використавши співвідношення (5.68) та повертаючися до старих незалежних змінних, на підставі (5.74) маємо

$$u(t, x) = v(t, x)e^{-pt} = z\left(\frac{1 - e^{-p\sigma t}}{p\sigma}, x\right)e^{-pt}, \quad (5.77)$$

де

$$z(\tau, x) = \begin{cases} U(\tau) \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(\tau)} \right)^2 \right]^{1/\sigma}, & |x| < x_0(\tau), \\ 0, & |x| \geq x_0(\tau). \end{cases} \quad (5.78)$$

Вирази  $U(\tau)$  та  $x_0(\tau)$  у (5.78) визначені за формулами (5.69), в яких час  $t$  потрібно замінити на  $\tau$ , розуміючи під  $\tau$  перетворення (5.75). При цьому слід зазначити, що перетворення (5.75) відображує напівнескінченний проміжок  $[0, +\infty)$  за змінною  $t$  в обмежений напівпроміжок  $\left[0, \frac{1}{p\sigma}\right)$  за змінною  $\tau$ .

Остаточний розв'язок (5.77) задачі (5.72) являє собою фронтовий розв'язок, який описує поширення теплової хвилі від миттєвого зосередженого джерела зі скінченною швидкістю руху фронтів  $x = \pm x_0(\tau)$ . Але головну особливість цього розв'язку можна виявити, проаналізувавши закони руху фронтів теплової хвилі. З цього аналізу випливає, що функція  $u(t, x)$  у довільний момент часу  $t > 0$  дорівнює нулю за межами області  $|x| < L(t)$ , де

$$L(t) = L_m (1 - e^{-tp\sigma})^{\frac{1}{\sigma+2}}; \quad (5.79)$$

$$L_m = \eta_0 \left( Q^\sigma a^2 \frac{1}{p\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma+2}}. \quad (5.80)$$

Оскільки  $L(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} L_m < \infty$ , то теплові збурення від джерела проникають у нелінійне середовище з об'ємним поглинанням лише на скінченну глибину навіть за нескінченний інтервал часу. Теплові збурення виявляються локалізованими в обмеженій просторовій області. Як бачимо з рис. 5.4, на фазовій площині  $(x, t)$  заштрихована область збурень, де  $u(t, x) > 0$ , міститься в півсмузі, ширина якої  $2L_m$ . При цьому величина  $L_m$ , яка визначає розмір області локалізації теплових збурень, залежить від визначальних параметрів задачі відповідно до

виразу (5.80). Зокрема, розмір області просторової локалізації збільшується зі зростанням потужності теплового джерела  $Q$  і зменшується зі збільшенням коефіцієнта поглинання  $p$ .

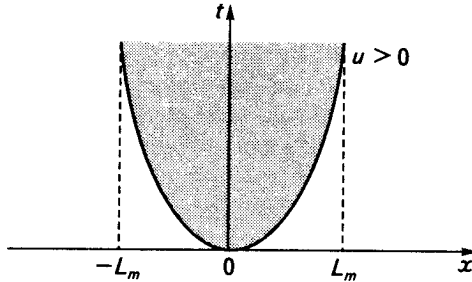


Рис. 5.4

Ефект просторової локалізації теплових збурень у розглянутій задачі зумовлений об'ємним поглинанням теплової енергії. Справді, якщо  $p \rightarrow 0$ , то  $\frac{1}{p\sigma} \rightarrow \infty$  і, як випливає з виразу (5.80),  $L_m \rightarrow \infty$ , тобто в середовище без об'ємного поглинання теплові збурення проникають необмежено далеко. Можливість створення умов, коли нагріте середовище можна втримати в обмеженій області простору за рахунок внутрішніх механізмів нелінійного процесу теплопровідності, є принципово новим висновком, який випливає з аналізу математичної моделі (5.72) нелінійного процесу теплопровідності. Реалізація таких умов є, зокрема, однією з практично важливих задач у проблемі керованого термоядерного синтезу.

Зазначимо, що своєрідний режим метастабільної локалізації теплових збурень може спостерігатися й за відсутності в середовищі об'ємних поглинань теплоти. В цьому режимі локалізації фронт теплової хвилі залишається нерухомим протягом деякого скінченного інтервалу часу. Така локалізація теплових збурень спостерігається в разі нагрівання нелінійного середовища в режимі із «загостренням», коли температура граничної (межової) поверхні зростає необмежено за скінченний інтервал часу. Цю локалізацію теплової дії в режимі із загостренням ілюструє така крайова задача нелінійної теплопровідності в півпросторі:

$$\begin{aligned}
 u_t(t, x) &= a^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma u_x), \quad 0 < t < T, \quad x > 0, \\
 u(0, x) &= A_0 T^{-\frac{1}{\sigma}} (1 - x/x_0)^{2/\sigma}, \quad x > 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.81}$$



$$u(t, 0) = A_0(T - t)^{-1/\sigma}, \quad 0 < t < T.$$

Тут  $A_0 = \text{const} > 0$ ;  $x_0 = \left[ \frac{2A_0^\sigma a^2 (\sigma + 2)}{\sigma} \right]^{1/2}$ .

Параметр  $T$  у задачі (5.81) назвемо *часом загострення процесу нагрівання нелінійного середовища*, враховуючи, що  $u(t, 0) \xrightarrow{t \rightarrow T} \infty$ .  
Задача (5.81) має простий за формою розв'язок:

$$u(t, x) = \begin{cases} A_0(T - t)^{-\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma}, & 0 \leq x < x_0, \quad 0 \leq t < T, \\ 0, & x \geq x_0, \quad 0 \leq t < T. \end{cases} \quad (5.82)$$

Оскільки  $u(t, x) = 0$  для всіх  $t \in [0, T)$  і для довільних  $x \geq x_0$ , то фронт теплового збурення  $x = x_0$ , на якому дорівнюють нулю температура й тепловий потік, відокремлює нагріте середовище від холодного. Фронт нерухомий, незважаючи на необмежене зростання температури в області теплових збурень при  $t \rightarrow T$ . Протягом інтервалу часу  $[0, T)$  теплові збурення від нагрітої стінки локалізовані в просторовій області  $0 < x < x_0$  скінченних розмірів.

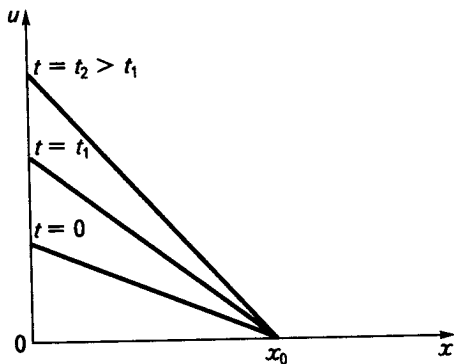


Рис. 5.5

Розв'язок (5.82) можна назвати *тепловою хвилею*, яка зупинилася на скінченний час. Якісний вигляд локалізованих температурних профілів такої теплової структури в різні моменти інтервалу часу  $[0, T)$  для середовища з показником нелінійності  $\sigma = 2$  подано на рис. 5.5.

**5.8****Задача нелінійної теплопровідності  
з об'ємним поглинанням**

Розглянемо ще одну задачу нелінійної теплопровідності, яка має точний аналітичний розв'язок. Нехай у нелінійному середовищі відбуваються ендотермічні (з поглинанням теплоти) процеси, питома потужність яких залежить від температури за степеневим законом. Нестационарний процес теплопровідності в такому середовищі з об'ємним поглинанням теплоти описується квазілінійним рівнянням

$$u_t(t, M) = a^2 \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) - pu^\nu(t, M), \quad t > 0, \quad M \in E_n. \quad (5.83)$$

Тут  $u(t, M)$  — температура середовища в точці  $M$  у момент часу  $t$ ;  $p = \operatorname{const} > 0$  — параметр поглинання;  $n = 1, 2, 3$  — вимірність простору, в якому відбувається досліджуваний процес.

Запишемо модель задачі про вплив миттєвого зосередженого теплового джерела в середовищі з поглинанням, якщо  $\sigma < 1$ , а показник степеня  $\nu = 1 - \sigma$ . Ураховуючи симетрію такої задачі (плоску для  $n = 1$ , осьову для  $n = 2$  і центральну для  $n = 3$ ), сформулюємо відповідну задачу Коші для квазілінійного рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} u_t(t, r) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{n-1} u^\sigma u_r(t, r)) - pu^{1-\sigma}, & t > 0, \quad r \geq 0, \\ u(0, r) = Q\delta_n(M), \end{cases} \quad (5.84)$$

де радіальна просторова координата  $r \geq 0$  для випадків  $n = 2$  і  $n = 3$ , а  $r = |x|$  при  $n = 1$ .

Параметр  $a^2$  у рівнянні (5.83) ми поклали рівним одиниці, що завжди можна зробити відповідним вибором масштабів часу або просторових змінних.

З урахуванням скінченної швидкості поширення теплових збурень у нелінійному середовищі розв'язок задачі (5.84) шукатимемо у вигляді фронтového розв'язку

$$u(t, r) = \begin{cases} A(t)[l(t) - r^2]^{1/\sigma}, & r^2 < l(t), \\ 0, & r^2 \geq l(t), \end{cases} \quad (5.85)$$

де  $A(t)$  і  $l(t)$  — функції, які потрібно визначити.

Підставивши (5.85) у рівняння (5.84), дістанемо

$$\left( \frac{dA(t)}{dt} + 2n\sigma^{-1}A^{1+\sigma} \right) [l(t) - r^2]^{1/\sigma} + \left( \sigma^{-1}A \frac{dl(t)}{dt} + pA^{1-\sigma} - 4\sigma^{-2}A^{1+\sigma}r^2 \right) [l(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}-1} = 0. \quad (5.86)$$

Вважаючи, що

$$\sigma^{-1}A \frac{dl(t)}{dt} + pA^{1-\sigma} - 4\sigma^{-2}A^{1+\sigma}r^2 = 4\sigma^{-2}A^{1+\sigma}\{l(t) - r^2\},$$

тобто

$$\sigma^{-1}A \frac{dl(t)}{dt} + pA^{1-\sigma} = 4\sigma^{-2}A^{1+\sigma}l(t), \quad (5.87)$$

співвідношення (5.86) можна подати у вигляді

$$S(t)[l(t) - r^2]^{1/\sigma} = 0, \quad (5.88)$$

де

$$S(t) = \frac{dA(t)}{dt} + 2\sigma^{-2}(n\sigma + 2)A^{1+\sigma}. \quad (5.89)$$

Оскільки умова (5.88) має виконуватися для довільних  $t$  і  $r$ , то це можливо лише при  $S(t) = 0$ . З урахуванням формули (5.89) ця умова приводить до диференціального рівняння для визначення функції  $A(t)$ :

$$\frac{dA(t)}{dt} + 2\sigma^{-2}(n\sigma + 2)A^{1+\sigma} = 0. \quad (5.90)$$

Для забезпечення слабкої збіжності розв'язку (5.85) при  $t \rightarrow 0$  до початкового розподілу температури  $Q\delta_n(M)$  необхідно, щоб  $l(t) \rightarrow 0$ , а  $A(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow 0$ .

Відокремлюючи змінні в рівнянні (5.90) та інтегруючи, дістаємо (вважаючи сталу інтегрування нульовою)

$$A(t) = \left[ \frac{\sigma}{2(n\sigma + 2)} \right]^{1/\sigma} t^{-\frac{1}{\sigma}}. \quad (5.91)$$

Бачимо, що  $A(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \infty$ .

Тепер, використовуючи співвідношення (5.87) для функції  $l(t)$ , приходимо до такого диференціального рівняння:

$$\frac{dl(t)}{dt} - 2(n\sigma + 2)^{-1} t^{-1} l(t) = -2p(n\sigma + 2)t. \quad (5.92)$$

Зінтегрувавши його, маємо:

$$l(t) = Ct^{\frac{2}{n\sigma+2}} - \frac{(n\sigma+2)^2}{n\sigma+1} pt^2, \quad C - \text{const.} \quad (5.93)$$

Таким чином, з урахуванням рівнянь (5.85), (5.91) і (5.93) розв'язок вихідної задачі (5.84) можна записати у вигляді фронтового розв'язку

$$u(t, r) = \begin{cases} U(t) \left[ 1 - \left( \frac{r}{\bar{r}(t)} \right)^2 \right]^{1/\sigma}, & 0 \leq r \leq \bar{r}(t), \\ 0, & r \geq \bar{r}(t), \end{cases} \quad (5.94)$$

де

$$U(t) = \left[ \frac{\sigma}{2(n\sigma+2)t} \right]^{1/\sigma} \bar{r}^{\frac{2}{\sigma}}(t); \quad (5.95)$$

$$\bar{r}^2(t) = Ct^{\frac{2}{n\sigma+2}} - \frac{(n\sigma+2)^2}{n\sigma+1} pt^2. \quad (5.96)$$

Значення сталої  $C$  у формулі (5.96) можна знайти зі співвідношення

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\bar{r}(t)} u(t, r) K(n) r^{n-1} dr = Q, \\ K(n) = \begin{cases} 2, & \text{при } n = 1, \\ 2\pi, & \text{при } n = 2, \\ 4\pi, & \text{при } n = 3, \end{cases} \end{cases} \quad (5.97)$$

яке є наслідком початкової умови задачі Коші (5.84). З урахуванням (5.94)–(5.96) співвідношення (5.97) запишеться у вигляді

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\frac{1}{\sigma} \frac{n\sigma+2}{\sigma}} \left[ \frac{\sigma}{2(n\sigma+2)} \right]^{1/\sigma} K(n) \int_0^1 (1-\xi^2)^{1/\sigma} \xi^{n-1} d\xi = Q. \quad (5.98)$$

Ураховуючи, що

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\frac{1}{\sigma}} \bar{r}^{\frac{n\sigma+2}{\sigma}}(t) = C^{-\frac{n\sigma+2}{2\sigma}},$$

а значення інтеграла

$$\int_0^1 (1 - \xi^2)^{1/\sigma} \xi^{n-1} d\xi = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{\sigma+1}{\sigma}\right)$$

виражається через бета-функцію

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

із виразу (5.98) знаходимо значення сталої

$$C = Q^{\frac{2\sigma}{n\sigma+2}} \left\{ \left[ \frac{\sigma}{2(n\sigma+2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \frac{K(n)}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{\sigma+1}{\sigma}\right) \right\}^{-\frac{2\sigma}{n\sigma+2}}. \quad (5.99)$$

Таким чином, точний розв'язок задачі (5.84) має вигляд (5.94), де  $u(t)$  і  $\bar{r}(t)$  визначені співвідношеннями (5.95) і (5.96) зі сталою  $C$ , яка обчислюється за формулою (5.99). Знайдений розв'язок допускає граничний перехід при  $p \rightarrow 0$ . Поклавши в рівнянні (5.96)  $p = 0$ , дістаємо розв'язок задачі про вплив миттєвого зосередженого теплового джерела в нелінійному середовищі без об'ємного поглинання. Для  $n = 1$  цей розв'язок було побудовано в п. 5.6 [див. формули (5.65), (5.66)].

Дамо фізичну інтерпретацію розв'язку (5.94). Він описує еволюцію теплової структури скінченних просторових розмірів, яку ми називатимемо тепловим імпульсом. У довільний момент часу  $t > 0$  існує фронт теплового імпульсу  $r = \bar{r}(t)$ , який відокремлює область теплових збурень від незбуреної області, куди теплові збурення ще не дійшли й де  $u(t, r) = 0$ .

Проаналізуємо характер руху фронту теплового імпульсу. Для цього запишемо рівняння (5.96) у вигляді

$$\bar{r}(t) = \sqrt{C} t^{\frac{1}{n\sigma+2}} \left[ 1 - [t/t_m]^\delta \right]^{1/2}, \quad t \in [0, t_m], \quad (5.100)$$

де  $\delta = \frac{2n\sigma+1}{n\sigma+2}$ ,  $t_m = \left[ \frac{C\delta}{2p(n\sigma+2)} \right]^{1/\delta}$ . Залежність (5.100) ілюструє рис. 5.6.

На початковій стадії еволюції теплового імпульсу механізм теплової дифузії є визначальним, і просторовий розмір теплового імпульсу збільшується з плином часу. В середовищі поширюється хвиля розіг-

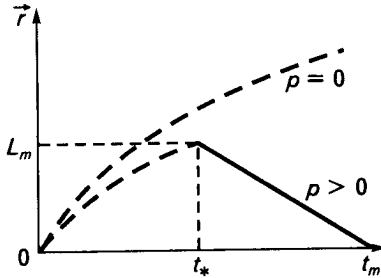


Рис. 5.6

риву. Потім швидкість руху фронту теплового імпульсу зменшується, й при  $t = t_*$ , де

$$t_* = \left[ \frac{C\delta}{2p(n\sigma + 2)^2} \right]^{1/\delta} = \frac{t_m}{(n\sigma + 2)^{1/\delta}},$$

фронт зупиняється, проникнувши в нелінійне середовище з об'ємним поглинанням лише на скінченну глибину.

При  $t > t_*$  об'ємне поглинання теплової енергії стає домінуючим фактором у балансі енергії, і хвиля розігріву змінюється хвилею охолодження, коли ширина теплового імпульсу зменшується. Фронт теплового імпульсу змінює напрям руху, й у момент часу  $t = t_m$  тепловий імпульс стягується в точку, припинивши своє існування. Тепловий імпульс у середовищі з об'ємним поглинанням теплової енергії існує протягом скінченного часу, тобто для  $t > t_m$  у довільній точці простору  $u = 0$ . Тому локалізацію теплових збурень зі скінченим часом їх існування в нелінійному середовищі з поглинанням природно назвати просторово-часовою.

При  $p = 0$ , тобто за відсутності об'ємного поглинання теплоти, з рівняння (5.96) випливає монотонний степеневий ріст ширини теплового імпульсу (штрихова лінія на рис. 5.6). Теплові збурення в цьому разі проникають у середовище необмежено далеко.

Добуте співвідношення можна розглянути й при  $p < 0$ , коли в об'ємі середовища відбуваються екзотермічні (з виділенням теплоти) процеси, які приводять до виділення теплової енергії. В такому нелінійному середовищі з об'ємними тепловими джерелами фронт тепло-

вого імпульсу поширюється зі скінченною швидкістю, однак ширина теплового імпульсу відповідно до співвідношення (5.96) при  $p > 0$  збільшується.

## 5.9

### Рівняння типу «реакція—дифузія»

Моделювання низки процесів у фізичних, хімічних та біологічних системах приводять до розв'язання крайових задач для систем квазілінійних рівнянь вигляду

$$u_i(t, M) = \operatorname{div} \left( \sum_{j=1}^n d_{ij} \operatorname{grad} u_j(t, M) \right) + f_i(t, M, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad t > 0, \quad M \in E_m, \quad (5.101)$$

де  $i = \overline{1, n}$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

Рівняння такого типу описують нестационарні дифузійно-кінетичні процеси в багатокомпонентних розподільних системах, тобто еволюцію широкого класу нелінійних активних систем із дифузією. Математичні моделі, в основі яких лежить рівняння вигляду (5.101), широко використовуються в біології, екології, економіці. Такими рівняннями описують поширення нервових імпульсів, хвиль епідемій, популяцій рослин і тварин, а також інші еволюційні процеси.

Найширше системи рівнянь вигляду (5.101) використовують у хімічній кінетиці для описання процесів типу «реакція—дифузія». Тому коефіцієнти  $d_{ij}$  у рівняннях (5.101) називають *коефіцієнтами власної* ( $i = j$ ) та *взаємної* ( $i \neq j$ ) *дифузії*. Молодші члени рівнянь при цьому описують кінетичні процеси в системі, тобто взаємодію (реакції) всіх  $n$  компонентів такої системи зі швидкістю, яка залежить від концентрації компонентів. Найпростішим прикладом функцій  $f_i$ , які описують кінетику процесів, є функції вигляду

$$f_i = k_i u_1^{\alpha_{i1}} u_2^{\alpha_{i2}} \dots u_n^{\alpha_{in}}, \quad \alpha_{ij} = \operatorname{const} > 0.$$

Саме таким чином виражаються швидкості хімічних реакцій через концентрації речовин, що реагують, з урахуванням закону діючих мас. При цьому коефіцієнти  $k_i$  є константами швидкостей реакцій, а  $\alpha_{ij}$  — стехіометричними коефіцієнтами. (Стехіометрія — галузь хімії, пов'я-

зана з вивченням вагових та об'ємних співвідношень між речовинами, що реагують, і продуктами реакції, з визначенням хімічних формул і рівнянь хімічних реакцій.)

Точні розв'язки задач для рівняння вигляду (5.101) у загальному випадкові знайти не вдається через нелінійності, зумовлені молодшими членами рівнянь. Однак в окремому випадкові двокомпонентної системи речовин, що реагують ( $n = 2$ ), коли  $d_1 = d_2 = d > 0$ ,  $k_1 = -k_2 = k > 0$  і  $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 1$ , тобто для нелінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} u_{1,t}(t, x) = du_{1,xx}(t, x) + ku_1 \cdot u_2, \\ u_{2,t}(t, x) = du_{2,xx}(t, x) + ku_1 \cdot u_2, \end{cases} \quad (5.102)$$

можна знайти точний аналітичний розв'язок в області  $D = \{(t, x) \mid t > 0, x \in (-\infty, +\infty)\}$ . Цей розв'язок відповідає хвилям концентрацій зі стаціонарними профілями, які поширюються з однаковою швидкістю.

Справді, шукатимемо розв'язок системи (5.102) у вигляді  $u_1 = u_1(\xi)$ ,  $u_2 = u_2(\xi)$ , де  $\xi = x + vt$ , а  $v = \text{const} > 0$ . Тоді система (5.102) набирає вигляду

$$\begin{cases} v \frac{du_1(\xi)}{d\xi} - d \frac{d^2 u_1(\xi)}{d\xi^2} = ku_1 \cdot u_2, \\ v \frac{du_2(\xi)}{d\xi} - d \frac{d^2 u_2(\xi)}{d\xi^2} = -ku_1 \cdot u_2. \end{cases} \quad (5.103)$$

В області  $-\infty < \xi < +\infty$  розглянемо функцію

$$\gamma(\xi) = \left( \frac{e^{\alpha\xi}}{1 + e^{\alpha\xi}} \right)^2 \equiv \left( \frac{1 + \text{th}(\alpha\xi/2)}{2} \right)^2,$$

яка залежить від параметра  $\alpha = \text{const} > 0$ . Диференціюючи цю функцію, знаходимо, що

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = -2\alpha\gamma(\gamma^{1/2} - 1)$$

і

$$\frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2\gamma \left( \gamma^{1/2} - 1 \right) \left( \gamma^{1/2} - \frac{2}{3} \right).$$



Таким чином,

$$v \frac{d\gamma}{d\xi} - d \frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2 d \gamma \left(1 - \gamma^2\right) \left(A + \gamma^2\right),$$

де  $A = \frac{v}{3\alpha d} - \frac{2}{3}$ .

Якщо тепер параметр, який визначає швидкість хвилі, становить  $v = 5\alpha d$ , то дістанемо  $A = 1$  і

$$v \frac{d\gamma}{d\xi} - d \frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2 d \gamma (1 - \gamma).$$

З останнього співвідношення випливає: якщо параметр  $\alpha$  вибрати з умови  $6\alpha^2 d = k$ , тобто вважати, що  $\alpha = \sqrt{k/(6d)}$  і  $v = 5\sqrt{kd/6}$ , то система (5.103) має розв'язок  $u_1(\xi) = \gamma(\xi)$  і  $u_2 = 1 - \gamma(\xi)$ .

Повертаючися до змінних  $t$  і  $x$ , запишемо знайдений розв'язок системи рівнянь «реакція—дифузія» (5.102) у вигляді

$$u_1(t, x) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \operatorname{th} \sqrt{\frac{k}{24d}} \left( x + 5\sqrt{\frac{kd}{6}} t \right) \right]^2, \quad u_2(t, x) = 1 - u_1(t, x). \quad (5.104)$$

Цей розв'язок описує стаціонарні хвилі концентрацій компонентів,

які поширюються зі сталою швидкістю  $v = 5\sqrt{\frac{1}{6}kd}$ . При цьому просторова область, занята першою речовиною, збільшується, а область, занята другою речовиною, зменшується. Це узгоджується з фізичною моделлю процесу (5.102), оскільки кінетика процесу така, що відбувається нарощення першої компоненти й знищується друга за їх взаємодії.

Зауважимо, що математично описуючи процес еволюції біологічного виду в рамках запропонованої Р. Фішером теорії генотипів (задача витіснення одного біологічного виду іншим домінантним видом на деякій території), приходять до інтегрування параболічного рівняння з нелінійним молодшим членом

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + ku(1 - u), \quad t > 0, \quad x \in E_1. \quad (5.105)$$

Тут  $u(t, x) = \frac{N(t, x)}{Nm}$  — безрозмірна концентрація (густота) особин популяції, причому  $0 \leq u \leq 1$ ,  $k = \text{const} > 0$  — деякий параметр задачі, який у біологічній моделі є мальтузіанським параметром популяції.

Рівняння (5.105) називають *рівнянням Колмогорова—Петровського—Піскунова (КПП)*. Воно є окремим випадком квазілінійного рівняння вигляду

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + F(u(t, x)). \quad (5.106)$$

У рівнянні (5.106) функція  $F(u)$  описує об'ємні процеси генерації ( $F > 0$ ) і поглинання ( $F < 0$ ) в розглядуваній системі. Якщо  $F(u) > 0$  при  $0 < u < 1$ ,  $F(0) = F(1) = 0$ ,  $F'(0) > 0$ , а  $F'(1) < 0$ , то рівняння (5.106) називають рівнянням типу КПП, оскільки окремим випадком такої залежності, коли  $F'(0) = k > 0$ , є логістичний закон генерації  $F(u) = ku(1 - u)$ , який відповідає (5.105).

У біологічній моделі логістичний закон можна пояснити так. У простій моделі Мальтуса вважалося, що темп росту чисельності популяції пропорційний кількості особин у популяції в деякий момент часу, тобто

$$\frac{dN}{dt} = bN(t), \quad b = \text{const} > 0.$$

Такий закон приводить до необмеженого експоненціального зростання чисельності:

$$N(t) = N_0 \exp(bt).$$

У звичайних умовах обмеженість природних ресурсів (їжі, води) призводить до того, що існує деяке критичне значення чисельності  $N_m$ , яке може забезпечити довкілля. Наявність такого механізму регуляції, який залежить від густоти, можна врахувати, вважаючи

$$\frac{dN(t)}{dt} = b \left( 1 - \frac{N}{N_m} \right) N.$$

У цьому випадкові при наближенні до критичного значення настає насиченість, і ріст чисельності популяції призупиняється. В безрозмірній формі для  $u = N/N_m$  такий закон відповідає логістичному закону генерації в рівнянні (5.105). Дифузійний доданок у рівнянні (5.105) ураховує можливість міграції біологічних особин у просторі.

Напівлінійне рівняння (5.106) називають *рівнянням Зельдовича*, якщо  $F(u) > 0$  при  $0 < u < 1$ ,  $F(0) = F(1) = 0$ ,  $F'(1) < 0$ , але  $F'(0) = 0$ . Окремим випадком такого рівняння є рівняння вигляду

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + u^2(1 - u).$$

Якщо ж функція  $F(u)$  має три нулі на відрізку  $[0, 1]$ , тобто  $F(0) = F(\alpha) = F(1) = 0$ , де  $\alpha \in (0, 1)$ , причому  $F'(0) < 0$ ,  $F'(\alpha) > 0$ , а  $F'(1) < 0$ , то рівняння (5.106) називають *рівнянням Семенова*. Таке рівняння широко використовується в математичних моделях для описання автокаталітичних ланцюгових реакцій.

На завершення наведемо деякі квазілінійні рівняння, які мають прикладний характер:

- *рівняння мінімальних поверхонь*

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y);$$

- *рівняння поверхні із заданою середньою кривиною  $k(x, y)$*

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 2k(x, y)(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2};$$

- *рівняння великих поперечних коливань струни*

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2}(1 + u_x^2)^{3/2}u_{tt} = -\frac{1}{\mu}f(t, x)(1 + u_x^2)^{3/2}, \quad u = u(t, x);$$

- *рівняння великих прогинів мембрани*

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = -\frac{1}{\mu}f(x, y)(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2},$$

$$u = u(x, y);$$

- *рівняння для потенціалу швидкості усталеного двовимірного безвихрового й ізентропічного потоку політропічного газу*

$$\left( \bar{a}_0^2 - \frac{\gamma+1}{2}\varphi_x^2 - \frac{\gamma-1}{2}\varphi_y^2 \right) \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} +$$

$$+ \left( \bar{a}_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}\varphi_x^2 - \frac{\gamma+1}{2}\varphi_y^2 \right) \varphi_{yy} = 0, \quad \gamma = \text{const}, \quad \varphi = \varphi(x, y);$$

- *рівняння для потенціалу швидкості одновимірного безвихрового ізентропічного потоку політропічного газу*

$$\left( a_0^2 - (\gamma-1)\varphi_t - \frac{\gamma+1}{2}\varphi_x^2 \right) \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_{xt} - \varphi_{tt} = 0, \quad \varphi = \varphi(t, x);$$

- *рівняння вертикального поширення теплових хвиль в океанічній водній товщі*

$$\beta u_{xx} - u_x^2 u_t = 0, \quad u = u(t, x);$$

- *рівняння поширення плоских електромагнітних хвиль у феромагнітному середовищі*

$$u_{xx} - f(u)u_t = 0, \quad u = u(t, x);$$

- *рівняння вигляду*

$$\lambda u_{xx} - u_t = f(t, x, u, u_x), \quad u = u(t, x),$$

де  $f = 0,5u_x^2 - d(t, x)$  у випадку математичної моделі процесу горіння газу в соплах ракет і  $f = uu_x$  у випадку математичної моделі для описання одновимірного турбулентного потоку рідини;

- *рівняння поширення теплових хвиль за променевої теплопровідності*

$$a(u''u_x)_x - u_t = 0, \quad u = u(t, x);$$

- *рівняння осесиметричного потоку нестисливої в'язкої рідини*

$$\frac{1}{x}(u_y u_{xy} - u_x u_{yy}) - \left(\frac{1}{x}u_y\right)^2 = \nu u_{yyy}, \quad u = u(x, y),$$

де  $\nu$  — кінематична в'язкість,  $\nu = \mu/\rho$  ( $\mu$  — в'язкість,  $\rho$  — густина);

- *рівняння Кортевега—де Фріза*

$$u_t(t, x) + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad \beta - \text{const},$$

яке є універсальним для моделювання хвильових процесів різної фізичної природи з урахуванням дисперсії та слабкої нелінійності;

- *рівняння синус-Гордона*

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) + \sin u(t, x) = 0,$$

яке описує протікання струму Джозефсона через проміжок між двома надпровідниками, поширення хвиль намагнічення у феромагнетиках;

- *рівняння Бюргера*

$$u_t(t, x) + uu_x = \nu u_{xx}(t, x), \quad \nu - \text{const},$$

яке описує ударні хвилі, що поширюються в суцільному середовищі, з урахуванням в'язкості середовища.

- ♦ **Вправа.** Показати, що підстановкою  $u(t, x) = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} (\ln \varphi(t, x))$  рівняння Бюргера зводиться до лінійного рівняння теплопровідності  $\varphi_t = \nu \varphi_{xx}$ .

**Тема 3**  
**ДЕЯКІ НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ**  
**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ**

**5.10**

**Метод Роте (метод прямих)**

Розглянемо мішану задачу: в області  $\Omega = \{(t, x) \mid t \geq 0, x \in [0, l]\}$  знайти розв'язок системи  $m$  квазілінійних рівнянь для одновимірного простору

$$u_i(t, x) = d_i u_{i,x}(t, x) + f_i(t, x, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (5.107)$$

який задовольняє початкові умови

$$u_i(0, x) = U_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = \overline{1, m} \quad (5.108)$$

і крайові

$$u_{i,x}(t, 0) = u_{i,x}(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.109)$$

Задачу (5.107)—(5.109) можна інтерпретувати як таку, що моделює нестационарний процес у хімічному реакторі з непроникними стінками. Її наближений розв'язок знайдемо, дискретизуючи рівняння (5.107) за змінною  $t$ . Такий метод із переходом до скінченних різниць у рівнянні лише за однією змінною називають *методом Роте*, або *методом прямих*. Збіжність цього методу доведено в різних просторах гладких і узагальнених розв'язків для широкого класу нелінійностей у рівняннях системи (5.107).

Пропускаючи доведення збіжності й оцінки похибки методу, викладемо саму схему побудови досить простого алгоритму наближеного аналітичного розв'язання задачі (5.107)—(5.109). Основна ідея методу Роте полягає в тому, що оператор диференціювання за змінною  $t$  замінюють різницеvim відношенням, вважаючи

$$u_i(t, x)|_{t=t_k} = \frac{u_i(t_k, x) - u_i(t_{k-1}, x)}{h} + O(h), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.110)$$

Підставляючи (5.110) у систему (5.107) і нехтуючи членами вищого порядку малості, дістаємо напівдискретний аналог задачі (5.107)—(5.109) у вигляді диференціально-різницевих рівнянь для  $i = \overline{1, m}$ :

$$d_i \frac{d^2 u_i^{(k)}(x)}{dx^2} - h^{-1} u_i^{(k)}(x) = -h^{-1} u_i^{(k-1)}(x) - F_i^{(k)}(x) \quad (5.111)$$

із крайовими умовами

$$\left. \frac{du_i^{(k)}(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du_i^{(k)}(x)}{dx} \right|_{x=l} = 0, \quad u_i^{(k)}(x) = u_i(t_k, x). \quad (5.112)$$

При цьому на кожному часовому шарі в молодших членах  $f_i$  рівняння (5.107) значення функцій  $u_1, u_2, \dots, u_m$  взято з попереднього часового шару, тобто

$$F_i^{(k)}(x) = f_i(t_k, x, u_1^{(k-1)}(x), u_2^{(k-1)}(x), \dots, u_m^{(k-1)}(x)).$$

Таким чином, за допомогою рівнянь (5.111) з урахуванням умов (5.112) можна послідовно знаходити функції  $u_i^{(k)}(x)$  для  $k = 1, 2, \dots$ , які є наближеннями шуканих розв'язків  $u_i(t, x)$  задачі (5.107)—(5.109) на часових шарах  $t = t_k$ . При цьому для кожного значення індексу  $i$  задачу (5.111), (5.112) можна розв'язувати незалежно. На першому кроці, обчислюючи  $F_i^{(1)}(x)$ , як  $u_i^{(0)}(x)$  потрібно взяти початкові розподіли  $U_i(x)$ .

Для кожного значення  $i$  розв'язок диференціального рівняння (5.111), який задовольняє крайові умови (5.112), шукатимемо у вигляді розвинення в тригонометричний ряд Фур'є за системою ортогональних на проміжку  $(0, l)$  функцій

$$z_n(x) = \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Записавши це розвинення у вигляді

$$u_i^{(k)}(x) = \frac{a_{i_0}^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,n}^{(k)} \cos \frac{\pi n}{l} x, \quad (5.113)$$

викладемо спосіб відшукування коефіцієнтів  $a_{i,n}^{(k)}$ .

Для цього функцію  $F_i^{(k)}(x)$ , яка фігурує в рівнянні (5.111), розвинемо в тригонометричний ряд Фур'є (вважаємо, що таке розвинення можливе)

$$F_i^{(k)}(x) = \frac{\Phi_{i_0}^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{i,n}^{(k)} \cos \frac{\pi n x}{l} \quad (5.114)$$

з коефіцієнтами, що визначаються за формулою Ейлера—Фур'є

$$\varphi_{i,n}^{(k)} = \frac{2}{l} \int_0^l F_i^{(k)}(x) \cos \frac{\pi n}{l} x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Підставивши розвинення (5.114) і (5.113) у рівняння (5.111) та прирівнявши відповідні коефіцієнти, дістанемо

$$d_i \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 a_{i,n}^{(k)} + \frac{1}{h} a_{i,n}^{(k)} = \frac{1}{h} a_{i,n}^{(k-1)} + \varphi_{i,n}^{(k)},$$

звідки знайдемо шукані коефіцієнти:

$$a_{i,n}^{(k)} = \frac{a_{i,n}^{(k-1)}}{hd_i(\pi n/l)^2 + 1} + \frac{h\varphi_{i,n}^{(k)}}{hd_i(\pi n/l)^2 + 1}. \quad (5.115)$$

Таким чином, наближений розв'язок задачі (5.107)—(5.109) на часових шарах  $t = t_k = kh$ ,  $k = 1, 2, \dots$  знайдено у формі розвинення функції  $u_i^{(k)}(x) \simeq u_i(t_k, x)$  у тригонометричні ряди Фур'є (5.113) із коефіцієнтами  $a_{i,n}^{(k)}$ , які визначаються згідно з (5.115).

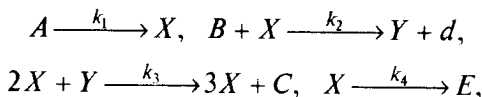
Реалізація алгоритму (5.113)—(5.115) пов'язана з відшукуванням коефіцієнтів Фур'є функцій  $F_i^{(k)}(x)$ , які обчислюються на кожному кроці по  $k$ .

За допомогою запропонованого алгоритму здійснимо розрахунок і проаналізуємо деякі властивості розв'язку задачі (5.107)—(5.109) для  $m = 2$ , якщо

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(u_1, u_2) = A - (B + 1)u_1 + u_1^2 u_2, \\ f_2 &= f_2(u_1, u_2) = Bu_1 - u_1^2 u_2, \end{aligned} \quad (5.116)$$

де  $A$  і  $B$  — деякі додатні сталі.

Така дифузійно-кінетична модель описує перетворення двох компонентів  $X$  і  $Y$  у деякому хімічному реакторі з непроникними стінками, якщо народження й знищення компонентів у реакторі відбувається за такою схемою:



де значення констант швидкостей реакцій вказано над стрілками процесів. При цьому вважається, що концентрації речовин  $A$  і  $B$  у реак-

торі підтримуються сталими, а речовини  $d$ ,  $C$  і  $E$  якимось чином виводяться. Крім того, припускаємо, що швидкості зворотних реакцій значно менші за швидкості прямих. За таких припущень кінетичні процеси в системі описуються рівняннями (5.116), де  $u_1$  і  $u_2$  — концентрації речовин  $X$  і  $Y$  відповідно.

Наведемо деякі результати розрахунків нестационарних процесів із використанням зазначеної моделі. Якщо значення сталої  $B$ , пропорційне концентрації цієї речовини, не дуже велике, то після деякого часу встановлена система виходить на просторово однорідні, тобто незалежні від просторової координати, стаціонарні розв'язки  $u_1 = \bar{u}_1 = A$  і  $u_2 = \bar{u}_2 = B/A$ , для яких  $f_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = f_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$ . Але, починаючи з деякого критичного значення  $B = B_k$ , просторово однорідні розв'язки  $\bar{u}_1$  і  $\bar{u}_2$  стають нестійкими. Тому при  $B > B_k$  після певного часу релаксації система виходить на немонотонні просторово-періодичні стаціонарні структури, які називаються *дисипативними*.

Приклад дисипативних структур наведено на рис. 5.7, де представлено результати розрахунків за алгоритмом (5.113)—(5.115) за таких значень визначальних параметрів:  $d_1 = 4,4 \cdot 10^{-3}$ ;  $d_2 = 2,2 \cdot 10^{-3}$ ;  $l = 1$ ;  $A = 2,1$ ;  $B = 5,2$ .

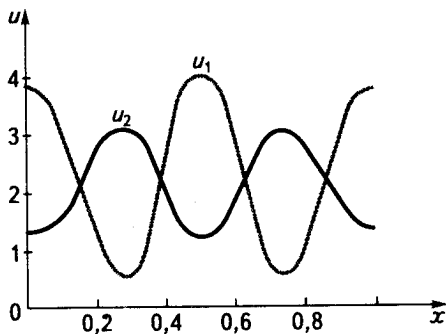


Рис. 5.7

За початкові розподіли було вибрано просторові однорідні розв'язки  $u_1 = 2$  і  $u_2 = 2,3$ . У розрахунках брався до уваги 21 член ряду (5.113).

Для часового кроку  $h = 0,1$  вихід на стаціонарний розв'язок у вигляді дисипативних структур спостерігався при  $k > 120$ .

Другою цікавою особливістю моделі (5.107)—(5.109) є можливість виникнення періодичних коливань концентрацій речовин. Такі автоколивання в хімічних системах спостерігаються й експериментально. Зокрема, одну з перших описаних у літературі автоколивальних хі-



мічних реакцій називають реакцією Белоусова—Жаботинського, які пояснили періодичну зміну забарвлення розчину хімічною реакцією в ньому.

Таким чином, дослідження математичних моделей дифузійно-кінетичних процесів показують, що через нелінійність у багатокомпонентних системах речовин, які реагують, можуть з'явитися впорядковані, структурно організовані стани, а також стани, які змінюються з певною закономірністю й періодичністю. Ці стани є нерівновагомими й лежать поза термодинамічною віткою, для якої характерні лише стаціонарні безструктурні стани «теплової смерті», що відповідають максимуму ентропії системи. Утворення дисипативних структур належить до процесів упорядкованості й самоорганізації в нерівноважних відкритих фізико-хімічних системах, які становлять предмет вивчення теорії самоорганізації, або синергетики.

## 5.11

### Двосторонній метод наближеного інтегрування мішаних задач

У 1919 р. С. О. Чаплигін запропонував двосторонній метод наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, який істотно відрізнявся від раніше відомих. Суть його полягає в апроксимації шуканого розв'язку  $u$  диференціального рівняння парою функцій  $z$  і  $v$ , які задовольняють нерівність  $v \leq U \leq z$ . За знайденою парою функцій  $[v, z]$  будуються наступні пари функцій  $[v_j, z_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , які тісніше охоплюють розв'язок диференціального рівняння, причому кожна наступна пара  $[v_n, z_n]$  має міститися в попередній  $[v_{n-1}, z_{n-1}]$ .

Основна перевага двостороннього методу над іншими полягає в тому, що різниця  $z_n - v_n$  строго визначає оцінку похибки побудованого наближеного розв'язку на  $n$ -му кроці, а питання оцінки похибки є одним із центральних у теорії наближених методів. Метод Чаплигіна для випадку функціональних рівнянь визнано аналогом найефективнішого методу розв'язування алгебричних рівнянь — методу Ньютона.

Для ілюстрації двостороннього методу розглянемо мішану задачу з нелокальною крайовою умовою Нахушева: в області  $B_0 = \{(x, y) \mid x \in (0, a), y \in (0, b)\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$D^{(2,1)}u(x, y) = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}) \equiv f[u(x, y)], \quad (5.117)$$

який задовольняє умови

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= T(x), \quad x \in [0, a], \quad u_x(a, y) = \psi(y), \\ \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^a u(\xi, y) d\xi &= \omega(y), \quad y \in [a, b], \quad 0 \leq x_0 \leq x \leq a, \end{aligned} \quad (5.118)$$

де

$$D^{(k_1, k_2)} u: B_0 \rightarrow B_{(k_1, k_2)}, \quad k_1 = 0, 1, 2; \quad k_2 = 0, 1; \quad |k| \leq 2,$$

$$f: D \rightarrow E_1, \quad D = B_0 \times B_{(1,0)} \times B_{(0,1)} \times B_{(1,1)} \times B_{(2,0)} \subset E_7,$$

а задані функції  $T(x)$ ,  $\psi(y)$ ,  $\omega(y)$  задовольняють умови:  $T(x) \in C^2[0, a]$ ,  $\psi(y) \in C^1[0, b]$ ,  $\omega(y) \in C[0, b]$ , причому

$$T'(a) = \psi(0). \quad (5.119)$$

До мішаних задач вигляду (5.117)—(5.119) приводять процеси фільтрації рідини в середовищах із подвійною пористістю, теплопередачі в гетерогенному середовищі, перенесення вологи в ґрунтах тощо.

Надалі вважатимемо, що  $f[u(x, y)] \in C_1(\bar{D})$ , де  $C_1(\bar{D})$  — простір неперервних у  $\bar{D}$  функцій, які мають обмежені частинні похідні першого порядку за всіма своїми аргументами, починаючи з третього.

Розв'язок задачі (5.117)—(5.119) шукатимемо в просторі функцій  $C^{(2,1)}(B_0) \cap C^{(1,1)}(\bar{B}_0) = C_1(\bar{B}_0)$  і називатимемо його регулярним.

Подамо мішану задачу (5.117)—(5.119) в еквівалентній інтегральній формі. Для цього зінтегруємо рівняння (5.117) двічі за  $x$  від  $x_0$  до  $a$  й за  $y$  від нуля до  $u$  та врахуємо умови (5.118), (5.119). Матимемо

$$u(x, y) = s(x, y) + T_1 f[u(t, \eta)] - T_2 f[u(t, \eta)], \quad (x, y) \in \bar{B}_0, \quad (5.120)$$

де

$$s(x, y) = T(x) + \frac{1}{a - x_0} \int_0^y \omega(\eta) d\eta + \left( \frac{a - x_0}{2} - a + x \right) (\psi(y) - \psi(0));$$

$$T_1 f[u(t, \eta)] = \int_0^y \int_{x_0}^a (t - x) f[u(t, \eta)] dt d\eta;$$

$$T_2 f[u(t, \eta)] = \frac{1}{a - x_0} \int_0^y \int_{x_0}^a \int_{x_0}^a (t - \xi) f[u(t, \eta)] dt d\xi d\eta.$$

Оскільки  $f[u(x, y)] \in C_1(\bar{D})$ , то праву частину рівняння (5.117) завжди можна подати у вигляді

$$f[u(x, y)] \equiv f(x, y, u^+, u_x^+, u_y^+, u_{xx}^+, u_{xy}^+; u^-, u_x^-, u_y^-, u_{xx}^-, u_{xy}^-) \equiv f[u^+; u^-],$$

$$f: \bar{D}_1 \rightarrow E_1, \quad \bar{D} \subset \bar{D}_1 \subset E_{12},$$

де

$$\frac{\partial f}{\partial D^k u^+(x, y)} \equiv a_k^+(x, y) \geq (\leq) 0, \quad k = (k_1, k_2), \quad (5.121)$$

$$k_1 = 0, 2 \ (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1, \quad \frac{\partial f}{\partial D^k u^-(x, y)} \equiv a_k^-(x, y) \leq (\geq) 0.$$

Значимо, що підстановкою  $u^*(x, y) = u(x, y) - s(x, y)$  умови (5.118), (5.119) зводяться до однорідних. У зв'язку з цим, не зменшуючи загальності подальших міркувань, вважатимемо, що  $T(x) = \psi(y) = \omega(y) = 0$ .

Введемо позначення:

$$f^p(x, y) = f[z_p(x, y); v_p(x, y)],$$

$$f_p(x, y) = f[v_p(x, y); z_p(x, y)],$$

$$\alpha_p(x, y) = D^{(2,1)} z_p(x, y) - f^p(x, y), \quad (5.122)$$

$$\beta_p(x, y) = D^{(2,1)} v_p(x, y) - f_p(x, y);$$

$$\sigma_p(x, y) = z_p(x, y) - T_1 f^p(t, \eta) + T_2 f_p(t, \eta),$$

$$\omega_p(x, y) = v_p(x, y) - T_1 f_p(t, \eta) + T_2 f^p(t, \eta). \quad (5.123)$$

► **Означення 5.1.** Дві довільні з простору  $C_1(\bar{B}_0)$  функції  $z_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ , які в області  $D$  задовольняють нерівності

$$D^k \sigma_0(x, y) \geq (\leq) 0, \quad D^k \omega_0(x, y) \leq (\geq) 0,$$

$$D^k W_0(x, y) \equiv D^k [z_0(x, y) - v_0(x, y)] \geq (\leq) 0, \quad (5.124)$$

$$k_1 = 0, 2 \ (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1,$$

називають функціями порівняння мішаної задачі (5.117)–(5.119).

Легко переконатись: якщо функції

$$\begin{aligned} z_0(x, y) &= 0,5y \left[ M(a-x)^2 - m \frac{(a-x_0)^2}{3} \right], \\ v_0(x, y) &= 0,5y \left[ m(a-x)^2 - M \frac{(a-x_0)^2}{3} \right], \end{aligned} \quad (5.125)$$

де  $M = \sup_{\bar{D}_1} f[u^+(x, y); u^-(x, y)]$ ,  $m = \inf_{\bar{D}_1} f[u^+(x, y); u^-(x, y)]$ , належать області  $\bar{D}_1$ , то вони є функціями порівняння задачі (5.117)—(5.119).

Побудуємо послідовності функцій  $\{z_p(x, y)\}$  і  $\{v_p(x, y)\}$  за формулами

$$\begin{aligned} z_{p+1}(x, y) &= T_1 f^p(t, \eta) - T_2 f_p(t, \eta), \\ v_{p+1}(x, y) &= T_1 f_p(t, \eta) - T_2 f^p(t, \eta), \end{aligned} \quad (5.126)$$

де за нульове наближення беремо функції порівняння мішаної задачі (5.117)—(5.119).

Із формул (5.122), (5.123), (5.126) дістаємо

$$W_{p+1}(x, y) = (T_1 + T_2)(f^p(t, \eta) - f_p(t, \eta)), \quad (5.127)$$

$$z_p(x, y) - z_{p+1}(x, y) = \sigma_p(x, y), \quad (5.128)$$

$$v_p(x, y) - v_{p+1}(x, y) = \omega_p(x, y),$$

$$\sigma_{p+1}(x, y) = T_1 \alpha_{p+1}(t, \eta) - T_2 \beta_{p+1}(t, \eta), \quad (5.129)$$

$$\omega_{p+1}(x, y) = T_1 \beta_{p+1}(t, \eta) - T_2 \alpha_{p+1}(t, \eta),$$

$$\begin{aligned} \alpha_{p+1}(x, y) &= f^p(x, y) - f^{p+1}(x, y), \\ \beta_{p+1}(x, y) &= f_p(x, y) - f_{p+1}(x, y). \end{aligned} \quad (5.130)$$

Зауважимо: якщо  $z_0(x, y)$  і  $v_0(x, y)$  є функціями порівняння задачі (5.117)—(5.119), то

$$f^0(x, y) - f_0(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in \bar{B}_0,$$

а отже, враховуючи (5.124), із (5.127), (5.128) при  $p \equiv 0$  і  $(x, y) \in B_0$  маємо

$$D^k W_1(x, y) \geq (\leq) 0, \quad D^k (z_0(x, y) - z_1(x, y)) \geq (\leq) 0,$$

$$D^k (v_0(x, y) - v_1(x, y)) \leq (\geq) 0,$$

а отже, в області  $\bar{D}_1$  справедливі нерівності

$$D^k v_0(x, y) \leq (\geq) D^k v_1(x, y) \leq (\geq) D^k z_1(x, y) \leq D^k z_0(x, y),$$

$$k_1 = 0, \quad 2(k_1 = 1), \quad k_2 = 0, \quad 1,$$

тобто функції  $z_1(x, y)$  і  $v_1(x, y)$  також належать області  $\bar{D}_1$ , причому  $f^0 - f^1 \geq 0$ ,  $f_0 - f_1 \leq 0$ . Але тоді з (5.129), (5.130) при  $p = 0$  дістаємо

$$\alpha_1(x, y) \geq 0, \quad \beta_1(x, y) \leq 0, \quad D^k \sigma_1(x, y) \geq (\leq) 0, \quad D^k \omega_1(x, y) \leq (\geq) 0,$$

$$k_1 = 0, \quad 2(k_1 = 1), \quad k_2 = 0, \quad 1.$$

Беручи функції  $z_1(x, y)$  та  $v_1(x, y)$  за вихідні й повторюючи попередні міркування, методом математичної індукції переконуємося в справедливості в області  $\bar{D}_1$  нерівностей

$$D^k v_p(x, y) \leq (\geq) D^k v_{p+1}(x, y) \leq (\geq)$$

$$\leq (\geq) D^k z_{p+1}(x, y) \leq (\geq) D^k z_p(x, y),$$

(5.131)

$$D^k \sigma_p(x, y) \geq (\leq) 0, \quad D^k \omega_p(x, y) \leq (\geq) 0,$$

$$\alpha_p(x, y) \geq 0, \quad \beta_p(x, y) \leq 0, \quad k_1 = 0, \quad 2(k_1 = 1), \quad k_2 = 0, \quad 1$$

для довільних  $p \in N$ .

Покажемо, що послідовності функцій  $\{z_p(x, y)\}$  та  $\{v_p(x, y)\}$ , побудовані згідно із законом (5.126), (5.124), рівномірно в області  $\bar{B}_0$  збігаються до єдиного регулярного розв'язку задачі (5.117)—(5.119).

Нехай

$$\sum_{k_1, k_2} \sup_{\bar{B}_0} |D^k W_0(x, y)| \leq d, \quad \max_k \left( \sup_{\bar{D}_1} |a_k^+(x, y) - a_k^-(x, y)| \right) \leq P,$$

$$R = \sup \left\{ a, b, \frac{2}{3} a^2, ab, \frac{2}{3} a^2 b \right\}.$$

Тоді з (5.127), використовуючи теорему Лагранжа про скінченні прирости, методом математичної індукції легко дістати оцінки

$$|D^k W_p(x, y)| \leq (PR)^p d, \quad k_1 = 0, 1, 2; \quad k_2 = 0, 1, \quad |k| \leq 2. \quad (5.132)$$

Із нерівностей (5.131) і оцінок (5.132) випливає: якщо  $PR < 1$ , то послідовності функцій  $\{z_p(x, y)\}$ ,  $\{v_p(x, y)\}$  рівномірно збігаються до єдиного регулярного розв'язку задачі (5.117)—(5.119) (для цього достатньо в (5.126) перейти до границі, коли  $p \rightarrow \infty$ ).

Отже, справедлива така теорема.

### ТЕОРЕМА

Нехай права частина рівняння (5.117)  $f[u(x, y)] \in C_1(\bar{D})$ , а функції  $z_0(x, y)$  та  $v_0(x, y)$  є функціями порівняння мішаної задачі (5.117)—(5.119). Тоді послідовності  $\{z_p(x, y)\}$ ,  $\{v_p(x, y)\}$ , побудовані за формулами (5.126), при  $PR < 1$  збігаються абсолютно й рівномірно в області  $\bar{B}_0$  до єдиного регулярного розв'язку задачі (5.117)—(5.119), а в області  $\bar{D}$  справедливі нерівності

$$D^k v_p(x, y) \leq (\geq) D^k u(x, y) \leq (\geq) D^k z_p(x, y), \quad (5.133)$$

$$k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1$$

для всіх  $p \in N$ .

Справедливість нерівностей (5.133) доводиться методом від супротивного.

♦ **Зауваження.** Функції  $z_0(x, y)$  та  $v_0(x, y)$  задовольняють перші дві з умов (5.118), а

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^a z_p(\xi, y) d\xi = \int_{x_0}^a \int_{\xi}^a (t - \xi)(f^{p-1}(t, y) - f_{p-1}(t, y)) dt d\xi,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^a v_p(\xi, y) d\xi = - \int_{x_0}^a \int_{\xi}^a (t - \xi)(f^{p-1}(t, y) - f_{p-1}(t, y)) dt d\xi,$$

тобто функція  $u_p(x, y) = \frac{1}{2}(z_p(x, y) + v_p(x, y))$  задовольняє всі умови (5.118) і її беремо за  $p$ -те наближення.

Із наведеної теореми легко дістати достатні умови існування знакосталих розв'язків мішаної задачі (5.117)—(5.119).

1 **Наслідок.** Нехай в області  $\bar{D}$  права частина рівняння (5.117)  $f[u(x, y)] \in C_1(\bar{D})$ , і в просторі  $C^{(2,1)}(\bar{B}_0)$  існує така функція  $v_0(x, y)$  ( $z_0(x, y)$ ), що

$$D^k (T_2 f[v_0(t, \eta); 0] - T_1 f[0; v_0(t, \eta)]) \geq (\leq) 0,$$

$$D^k v_0(x, y) \leq (\geq) 0,$$

$$D^k (v_0(x, y) - T_1[v_0(t, \eta); 0] + T_2 f[0; v_0(t, \eta)]) \leq (\geq) 0,$$

$$k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1$$

$$\left( \begin{array}{l} D^k (z_0(x, y) - T_1[z_0(t, \eta); 0] + T_2 f[0; z_0(t, \eta)]) \geq (\leq) 0, \\ D^k z_0(x, y) \geq (\leq) 0, \\ D^k (T_2 f[z_0(t, \eta); 0] - T_1 f[0; z_0(t, \eta)]) \leq (\geq) 0, \\ k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1. \end{array} \right)$$

Тоді розв'язок рівняння (5.117) з однорідними умовами (5.118) задовольняє в області  $\bar{B}_0$  нерівності

$$D^k u(x, y) \leq (\geq) 0 \quad (D^k u(x, y) \geq (\leq) 0), \quad k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1.$$

Зазначимо, що двосторонній метод є досить універсальним і його можна застосувати до широкого класу задач теорії ДРЧП. Більше того, його можна назвати й конструктивним, оскільки, крім алгоритму побудови наближеного розв'язку розглядуваної задачі, він дає змогу відповісти й на низку питань якісної теорії ДРЧП (існування та єдиність розв'язку досліджуваної задачі, його якісна оцінка тощо).

## 5.12

### Асимптотичні методи дослідження нелінійних ДРЧП

Асимптотичні методи успішно застосовуються для побудови наближених розв'язків нелінійних рівнянь із частинними похідними, які близькі до лінійних. Це дає змогу розв'язати багато задач про коливання в системах із розподіленими параметрами (коливання

стержнів, балок, пластин, валів тощо) та інших задач теорії теплопровідності.

Тут викладено асимптотичний метод Крилова—Боголюбова—Митропольського (КБМ) на прикладі відомого класу рівнянь, які описують процеси коливання обмежених об'ємів,

$$\operatorname{div}[k(t, \bar{r}) \operatorname{grad} u(t, \bar{r})] - q(t, \bar{r})u(t, \bar{r}) = \rho(t, \bar{r}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.134)$$

У випадку змінних коефіцієнтів  $k$ ,  $q$ ,  $\rho$ , які залежать від просторових координат  $\bar{r}$  і часу  $t$ , така система описує процеси коливань у неоднорідних середовищах.

Перш ніж викладати метод КБМ, введемо деякі допоміжні поняття. Нехай сім'я операторів  $L_\varepsilon$  визначає деяку задачу

$$L_\varepsilon u = h, \quad (5.135)$$

розв'язок якої необхідно дослідити при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При  $\varepsilon = 0$  гранична задача

$$L_0 v = h \quad (5.136)$$

коректна в тому чи іншому розумінні.

Під дослідженням задачі (5.135) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  зазвичай розуміють подання розв'язку у вигляді ряду за степенями  $\varepsilon$ :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (5.137)$$

► **Означення 5.2.** Частинну суму ряду (5.137)  $u_{\varepsilon n} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots + \varepsilon^n u_n$  називають **формальним асимптотичним розв'язком задачі (5.135)**, якщо вона задовольняє такі дві умови:

- 1)  $u_{\varepsilon n} \in D(L_\varepsilon) \forall n = 0, 1, 2, \dots$  ( $u_{\varepsilon n}$  належить області визначення оператора  $L_\varepsilon$ );
- 2)  $L_\varepsilon u_{\varepsilon n} = h + O(\varepsilon^{n+1} \alpha)$ ,  
де  $\alpha$  — деяка характеристика зростання або спадання коефіцієнтів  $u_i$ .

Наприклад, якщо в деякій задачі всі  $u_i$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  мають вигляд  $u_i = \varphi(x) \exp(x/\varepsilon)$ , де функції  $\varphi(x)$  обмежені на досліджуваній множині, скажімо, на відріжку  $[0, 1]$ , то зрозуміло, що  $\alpha = \exp(x/\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \infty \forall x \in (0, 1]$ , тобто в даному випадкові  $\varphi_i(x) \exp(x/\varepsilon) = O(e^{x/\varepsilon})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ .



Якщо, крім умов 1) і 2) означення 5.2, для досить малих значень  $\epsilon$  виконується нерівність

$$\|u - u_{\epsilon n}\| \leq (c_0 + c_1 \alpha) \epsilon^{n+1}, \quad (5.138)$$

де  $u$  — точний розв'язок задачі (5.135),  $c_k$  ( $k = 0, 1$ ) не залежить від  $\epsilon$ ,  $\alpha$  — деяка характеристика коефіцієнтів  $u_i$ , то функцію  $u_{\epsilon n}$  називають *асимптотичним розв'язком порядку  $n$  задачі* (5.135).

Якщо нерівність (5.138) виконується  $\forall n = 0, 1, 2, \dots$  то кажуть, що ряд (5.137) збігається асимптотично до розв'язку  $u$  задачі (5.135) у деякому просторі  $U$ , де визначена норма, що фігурує в нерівності (5.138).

➔ **Означення 5.3.** *Функцію  $u_{\epsilon 0} = u_0$ , яка задовольняє умови 1), 2) означення 5.2, (5.138) (при  $n = 0$ ), називають головним членом асимптотики, або нульовим наближенням.*

Повертаючися до викладу методу КБМ, розглянемо окремих випадок рівняння типу (5.134), а саме: вивчимо поширення нелінійних хвиль у системах зі слабкими неоднорідностями геометричного й часового типу для випадку одновимірного середовища, тобто досліджуватимемо таке нелінійне рівняння з повільно змінними коефіцієнтами:

$$u_{tt}(t, x) - \alpha^2(\xi, \tau) u_{xx} + \beta^2(\xi, \tau) u(t, x) = \epsilon f(\xi, \tau, u, u_t, u_x), \quad (5.139)$$

де  $0 < \epsilon \ll 1$  — малий параметр;  $\xi = \epsilon x$ ;  $\tau = \epsilon t$ ;  $f(\xi, \tau, u, u_t, u_x)$  — досить гладка функція, яка задовольняє всі необхідні умови для побудови асимптотичного розв'язку.

При  $\epsilon = 0$  і  $\xi, \tau$ , що розглядаються як параметри, рівняння (5.139) є відомим класичним рівнянням Клейна—Гордона

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u(t, x) = 0, \quad (5.140)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  — сталі величини.

Рівняння (5.140) надалі розглядатимемо як незбурене рівняння, яке відповідає збуреному рівнянню (5.139).

Як відомо, рівняння (5.140) має розв'язок

$$u(a, \psi) = a \cos \psi, \quad (5.141)$$

де  $\psi = kx - \omega t + \phi$ ;  $a$  і  $\phi$  — сталі;  $\psi_x = k$ ;  $\psi_t = -\omega$ ;

$$\omega^2 = \alpha^2 k^2 + \beta^2 \quad (5.142)$$

— дисперсійне співвідношення.

При  $\varepsilon \neq 0$ ,  $\xi = \varepsilon x$ ,  $\delta = \varepsilon t$  асимптотичний наближений розв'язок рівняння (5.139) шукатимемо у вигляді ряду

$$u(\xi, \tau, a, \psi) = u_0(a, \psi) + \varepsilon u_1(\xi, \tau, a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \tau, a, \psi) + \dots, \quad (5.143)$$

в якому  $u_0(a, \psi) = a \cos \psi$ ; шукані функції  $u_i(\xi, \tau, a, \psi)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  є періодичними за  $t$  із періодом  $2\pi$ ;  $\psi = kx - \omega t + \varphi$ ;  $\varepsilon \neq 0$ ;  $\xi = \varepsilon x$ ;  $\tau = \varepsilon t$ ;  $a$  і  $\varphi$  як функції часу  $t$  і просторової координати  $x$  мають визначитися з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} = \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a) + \varepsilon^3 A_3(\tau, a) + \dots, \\ \frac{\partial a}{\partial x} = \varepsilon B_1(\xi, a) + \varepsilon^2 B_2(\xi, a) + \varepsilon^3 B_3(\xi, a) + \dots, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon C_1(\tau, a) + \varepsilon^2 C_2(\tau, a) + \varepsilon^3 C_3(\tau, a) + \dots, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varepsilon D_1(\xi, a) + \varepsilon^2 D_2(\xi, a) + \varepsilon^3 D_3(\xi, a) + \dots, \end{cases} \quad (5.144)$$

де  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  — функції, які надалі потрібно визначити.

Очевидно, що останні два рівняння системи (5.144) можна записати (враховуючи, що  $\psi = kx - \omega t + \varphi$ ) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\omega + \varepsilon C_1(\tau, a) + \varepsilon^2 C_2(\tau, a) + \varepsilon^3 C_3(\tau, a) + \dots, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= k + \varepsilon D_1(\xi, a) + \varepsilon^2 D_2(\xi, a) + \varepsilon^3 D_3(\xi, a) + \dots \end{aligned} \quad (5.145)$$

Підставимо праву частину ряду (5.143) в рівняння (5.139). Диференціюючи доданки ряду (5.143) за  $t$  і  $x$ , ураховуємо рівняння (5.144), а також те, що  $k$  і  $\omega$  мають бути повільно змінними функціями  $x$  і  $t$  [ $k_x = \varepsilon k_\xi$ ,  $\omega_t = \varepsilon \omega_\tau$ , оскільки у виразі (5.142)  $\beta^2 = \beta^2(\xi; \tau)$ ].

Після низки викладок, розмішуючи результат за зростаючими степенями малого параметра  $\varepsilon$ , для лівої частини рівняння (5.139) дістаємо такий вираз:

$$\begin{aligned}
 & u_{tt} - \alpha^2(\xi, \tau)u_{,xx} + \beta^2(\xi, \tau)u(t, x) = \\
 & = -a\omega^2 \cos \psi + \alpha^2(\xi, \tau)ak^2 \cos \psi + \beta^2(\xi, \tau)a \cos \psi + \\
 & + \varepsilon\{[2(A_1(\tau, a)\omega + B_1(\xi, a)\alpha^2(\xi, \tau)k) + a\omega_\tau + \alpha^2(\xi, \tau)k_\xi a] \sin \psi + \\
 & + 2(C_1(\tau, a)\omega + D_1(\xi, a)\alpha^2(\xi, \tau)k)a \cos \psi + \omega^2 u_{1_{\psi\psi}} - \\
 & - \alpha^2(\xi, \tau)k^2 u_{1_{\psi\psi}} + \beta^2(\xi, \tau)u_1\} + \varepsilon^2\{[2(A_2(\tau, a)\omega + \\
 & + B_2(\xi, a)\alpha^2(\xi, \tau)k) - (c_{1_a}(\tau, a)A_1(\tau, a) + c_{1_\tau}(\tau, a))a - \\
 & - 2A_1(\tau, a)c_1(\tau, a) - \alpha^2(\xi, \tau)(D_{1_a}(\xi, a)B_1(\xi, a) + D_{1_\xi}(\xi, a))a - \\
 & - 2B_1(\xi, a)D_1(\xi, a)\alpha^2(\xi, \tau)] \sin \psi + \\
 & + [2(c_2(\tau, a)\omega + D_2(\xi, a)\alpha^2(\xi, \tau)k)a + (A_{1_a}(\tau, a)A_1(\tau, a) + \\
 & + A_{1_\tau}(\tau, a)) - c_1^2(\tau, a)a + \alpha^2(\xi, \tau)(B_{1_a}(\xi, a)B_1(\xi, a) + B_{1_\xi}(\xi, a))] - \\
 & - \alpha^2(\xi, \tau)D_1^2(\xi, a)a] \cos \psi - 2[u_{1_{a\psi}} \omega A_1(\tau, a) + \\
 & + u_{1_{\psi\psi}} \omega c_1(\tau, a) + u_{1_{\psi\psi}} \omega] - u_{1_\psi} \omega_\tau - 2\alpha^2(\xi, \tau)[u_{1_{\psi a}} kB_1(\xi, a) + \\
 & + u_{1_{\psi\psi}} kD_1(\xi, a) + u_{1_{\psi\xi}} k] - u_{1_\psi} \alpha^2(\xi, \tau)k_\xi + \\
 & + \omega^2 u_{2_{\psi\psi}} - \alpha^2(\xi, \tau)k^2 u_{2_{\psi\psi}} + \beta^2(\xi, \tau)u_2\} + \varepsilon^3 \dots \quad (5.146)
 \end{aligned}$$

Праву частину рівняння (5.139) після підстановки значень  $u$ ,  $u_t$ ,  $u_x$ , знайдених диференціюванням ряду (5.143) за  $t$  і за  $x$  з урахуванням системи рівнянь (5.144), розвинемо в ряд Тейлора за зростаючими степенями малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon f(\xi, \tau, u, u_t, u_x) = \varepsilon f_0(\xi, \tau, a, \psi) + \varepsilon^2\{f'_u(\xi, \tau, a, \psi)u_1 + \\
 & + f'_{u_t}(\xi, \tau, a, \psi)[A_1(\tau, a)\cos \psi - c_1(\tau, a)a \sin \psi - \omega u_{1_\psi}] + \\
 & + f'_{u_x}(\xi, \tau, a, \psi)[B_1(\xi, a)\cos \psi - D_1(\xi, a)a \sin \psi + ku_{1_\psi}]\} + \varepsilon^2 \dots, \quad (5.147)
 \end{aligned}$$

де введено такі позначення:

$$\begin{aligned} f(\xi, \tau, a \cos \psi, a\omega \sin \psi, -ak \sin t) &= f_0(\xi, \tau, a, \psi); \\ f'_u(\xi, \tau, a \cos \psi, a\omega \sin \psi, -ak \sin t) &= f'_u(\xi, \tau, a, \psi); \\ f'_{u_t}(\xi, \tau, a \cos \psi, a\omega \sin \psi, -ak \sin t) &= f'_{u_t}(\xi, \tau, a, \psi); \\ f'_{u_x}(\xi, \tau, a \cos \psi, a\omega \sin \psi, -ak \sin t) &= f'_{u_x}(\xi, \tau, a, \psi). \end{aligned} \quad (5.148)$$

Припускаючи тепер, що за повільної зміни параметрів дисперсійне співвідношення

$$\omega^2 = \alpha^2(\xi, \tau)k^2 + \beta^2(\xi, \tau) \quad (5.149)$$

зберігається й прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $\epsilon$  у правих частинах виразів (5.146), (5.147), дістаємо

$$[-\omega^2 + \alpha^2(\xi, \tau)k^2 + \beta^2(\xi, \tau)]a \cos \psi = 0, \quad (5.150)$$

$$\begin{aligned} \beta^2(\xi, \tau) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 \right) &= \\ = -\{2[A_1(\tau, a)\omega + \alpha^2(\xi, \tau)B_1(\xi, a)k] + (\omega_\tau + \alpha^2(\xi, \tau)k_\xi)a\} \sin \psi - \\ - 2[c_1(\tau, a)\omega + \alpha^2(\xi, \tau)D_1(\xi, a)k]a \cos \psi + f_0(\xi, \tau, a, \psi), \end{aligned} \quad (5.151)$$

$$\begin{aligned} \beta^2(\xi, \tau) \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + u_2 \right) &= -\{2[A_2(\tau, a)\omega + \alpha^2(\xi, \tau)B_2(\xi, a)k] - \\ &- [c_{1a}(\tau, a)A_1(\tau, a) + c_{1\tau}(\tau, a)]a + \\ &+ \alpha^2(\xi, \tau)[D_{1a}(\xi, a)B_1(\xi, a) + D_{1\xi}(\xi, a)]a - \\ &- 2[A_1(\tau, a)C_1(\tau, a) - \alpha^2(\xi, \tau)B_1(\xi, a)D_1(\xi, a)]\} \sin \psi - \\ &- \{2[c_2(\tau, a)\omega + D_2(\xi, a)\alpha^2(\xi, \tau)k]a + [A_{1a}(\tau, a)A_1(\tau, a) + \\ &+ A_{1\tau}(\tau, a)] - \alpha^2(\xi, \tau)[B_{1a}(\xi, a)B_1(\xi, a) + B_{1\xi}(\xi, a)] - \\ &- c^2(\tau, a)a + \alpha^2(\xi, \tau)D_1^2(\xi, a)a\} \cos \psi + f_1(\xi, \tau, a, \psi), \end{aligned} \quad (5.152)$$

де

$$\begin{aligned}
 f_1(\xi, \tau, a, \psi) = & f'_u(\xi, \tau, a, \psi)u_1 + f'_{u'}(\xi, \tau, a, \psi)[A_1(\tau, a) \cos \psi - \\
 & - c_1(\tau, a)a \sin \psi - \omega u_{1\psi}] + f'_{u''}(\xi, \tau, a, \psi)[B_1(\xi, a) \cos \psi - \\
 & - D_1(\xi, a)a \sin \psi + k u_{1\psi}] + 2[u_{1\psi} \omega A_1(\tau, a) + u_{1\psi\psi} \omega c_1(\tau, a) + \\
 & + u_{1\tau\psi} \omega] + \alpha^2(\xi, \tau)2[u_{1\psi a} k B_1(\xi, a) + u_{1\psi\psi} k D_1(\xi, a) + k u_{1\psi\xi}] + \\
 & + u_{1\psi} \omega_\tau + \alpha^2(\xi, \tau)u_{1\psi} k_\xi.
 \end{aligned} \tag{5.153}$$

Рівняння (5.150)—(5.152) дають змогу (за деяких обмежень, що накладаються на досліджувану систему) побудувати асимптотичні розв'язки в нульовому, першому й другому наближенні.

Для визначення нульового й першого наближень розвиваємо періодичну за  $\psi$  функцію  $f_0(\xi, \tau, a, \psi)$  у ряд Фур'є:

$$\begin{aligned}
 f_0(\xi, \tau, a, \psi) = & f_{00}^{-1}(\xi, \tau, a) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} [f_{0n}^{(1)}(\xi, \tau, a) \cos n\psi + f_{0n}^{(2)}(\xi, \tau, a) \sin n\psi],
 \end{aligned} \tag{5.154}$$

де

$$\begin{aligned}
 f_{0n}^{(1)}(\xi, \tau, a) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\xi, \tau, a, \psi) \cos n\psi \, d\psi, \\
 f_{0n}^{(2)}(\xi, \tau, a) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\xi, \tau, a, \psi) \sin n\psi \, d\psi,
 \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5.155}$$

Після цього підставляємо (5.154) у співвідношення (5.151) і шукаємо вираз для функції  $u_1(\xi, \tau, a, \psi)$  також у вигляді ряду Фур'є. При цьому одночасне накладання умови відсутності знаменників, які перетворюються в нуль, дає змогу дістати рівняння, яке виражає амплітуду  $a$  і фазу  $\phi$ . Після елементарних викладок знаходимо

$$\begin{aligned}
 u_1(\xi, \tau, a, \psi) = & \frac{f_{00}(\xi, \tau, a)}{\beta^2(\xi, \tau)} - \\
 - \frac{1}{\beta^2(\xi, \tau)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2} [f_{0n}^{(1)}(\xi, \tau, a) \cos n\psi + f_{0n}^{(2)}(\xi, \tau, a) \sin n\psi].
 \end{aligned} \tag{5.156}$$

а також такі рівняння для визначення  $A_1(\tau, a)$ ,  $B_1(\xi, a)$ ,  $C_1(\tau, a)$  і

$D_1(\xi, a)$ , які забезпечують відсутність секулярних членів у функції  $u_1(\xi, \tau, a, \psi)$  (5.156):

$$\begin{aligned} [2A_1(\tau, a)\omega + \alpha^2(\xi, \tau)B_1(\xi, a)k] + (\omega_\tau + \alpha^2(\xi, \tau)k_\xi)a = \\ = f_{01}^{(2)}(\xi, \tau, a), \end{aligned} \quad (5.157)$$

$$2[c_1(\tau, a)\omega + \alpha^2(\xi, \tau)D_1(\xi, a)k]a = f_{01}^{(1)}(\xi, \tau, a). \quad (5.158)$$

Таким чином, у нульовому наближенні розв'язок рівняння (5.139) має вигляд

$$u(\xi, \tau, a, \psi) = u_0(a, \psi) = a \cos \psi, \quad \psi = kx - \omega t + \phi, \quad (5.159)$$

де  $a$  і  $\phi$  визначаються як функції  $x$  і  $t$  із такої системи:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \omega' \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2\omega} [f_{01}^{(2)}(\xi, \tau, a) - (\omega_\tau + \alpha^2(\xi, \tau)k_x)a], \quad (5.160)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \omega' \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2a\omega} f_{01}^{(1)}(\xi, \tau, a), \quad (5.161)$$

де  $\omega' = \frac{\alpha^2(\xi, \tau)k}{\omega}$  — групова швидкість.

При розгляді нульового наближення (рівнянь (5.159)–(5.161)) має виконуватися дисперсійне відношення

$$\bar{\omega}^2 - \alpha^2(\xi, \tau)\bar{k}^2 - \beta^2(\xi, \tau) = 0 \quad (5.162)$$

та умови сумісності

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} = 0, \quad (5.163)$$

де  $\bar{\omega} = \omega - \phi_t$ ,  $\bar{k} = k + \phi_x$ , взяті в нульовому наближенні.

У першому наближенні асимптотичний розв'язок рівняння (5.139) записується у вигляді

$$u(\xi, \tau, a, \psi) = a \cos \psi + \varepsilon u_1(\xi, \tau, a, \psi), \quad (5.164)$$

де  $u_1(\xi, \tau, a, \psi)$  визначається згідно з формулою (5.156), а  $a$  і  $\phi$  мають задовольняти рівняння (5.160), (5.161).

Побудуємо асимптотичний розв'язок у другому наближенні. Для цього, як і в попередньому випадкові, насамперед розвинемо в ряд

Фур'є функцію  $f_1(\xi, \tau, a, \psi)$ , задану рівністю (5.153), яка після визначення  $u_1(\xi, \tau, a, \psi)$  згідно з формулою (5.156) і функцій  $A_1(\tau, a)$ ,  $B_1(\xi, a)$ ,  $C_1(\tau, a)$ ,  $D_1(\xi, a)$  із рівнянь (5.157), (5.158) є періодичною за  $\psi$  із періодом  $2\pi$ :

$$f_1(\xi, \tau, a, \psi) = f_{10}^{(1)}(\xi, \tau, a) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_{1n}^{(1)}(\xi, \tau, a) \cos n\psi + f_{1n}^{(2)}(\xi, \tau, a) \sin n\psi], \quad (5.165)$$

де  $f_{1n}^{(1)}(\xi, \tau, a)$  і  $f_{1n}^{(2)}(\xi, \tau, a)$  — коефіцієнти Фур'є.

Функцію  $u_2(\xi, \tau, a, \psi)$  шукаємо у вигляді ряду Фур'є, коефіцієнти якого визначаємо з рівняння (5.152). В результаті дістаємо

$$u_2(\xi, \tau, a, \psi) = \frac{f_{10}^{(1)}(\xi, \tau, a)}{\beta^2(\xi, \tau)} - \frac{1}{\beta^2(\xi, \tau)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} [f_{1n}^{(1)}(\xi, \tau, a) \cos n\psi + f_{1n}^{(2)}(\xi, \tau, a) \sin n\psi], \quad (5.166)$$

а також такі рівняння для визначення  $A_2(\tau, a)$ ,  $B_2(\xi, a)$ ,  $C_2(\tau, a)$ ,  $D_2(\xi, a)$ , які забезпечують відсутність секулярних членів у функції  $u_2(\xi, \tau, a, \psi)$ , заданої рівністю (5.166):

$$\begin{aligned} & 2[A_2(\tau, a)\omega + \alpha^2(\xi, \tau)B_2(\xi, a)k] = \\ & = f_{11}^{(2)}(\xi, \tau, a) - [C_{1_a}(\tau, a)A_1(\tau, a) + C_{1_\tau}(\tau, a)]a + \\ & \quad + \alpha^2(\xi, \tau)[D_{1_a}(\xi, a)B_1(\xi, a) + D_{1_\xi}(\xi, a)]a - \\ & \quad - 2[A_1(\tau, a)C_1(\tau, a) - \alpha^2(\xi, \tau)B_1(\xi, a)D_1(\xi, a)], \quad (5.167) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2[C_2(\tau, a)a\omega + \alpha^2(\xi, \tau)D_2(\xi, a)ak] = \\ & = f_{11}^{(1)}(\xi, \tau, a) - [A_{1_a}(\tau, a)A_1(\tau, a) + A_{1_\tau}(\tau, a)] + \\ & \quad + \alpha^2(\xi, \tau)[B_{1_a}(\xi, a)B_1(\xi, a) + B_{1_\xi}(\xi, a)] - \\ & \quad - [C_1^2(\tau, a) - \alpha^2(\xi, \tau)D_1^2(\xi, a)]a. \quad (5.168) \end{aligned}$$

Отже, в другому наближенні маємо

$$u(\xi, \tau, a, \psi) = a \cos \psi + \varepsilon u_1(\xi, \tau, a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \tau, a, \psi), \quad (5.169)$$

де  $a$  і  $\varphi$  мають задовольняти таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + \omega' \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{2\omega} [f_{01}^{(2)}(\xi, \tau, a) - (\omega_t + \alpha^2(\xi, \tau)k_x)a] + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2\omega} \{f_{11}^{(2)}(\xi, \tau, a) - [C_{1_a}(\tau, a)A_1(\tau, a) + C_{1_t}(\tau, a)a] + \\ &+ \alpha^2(\xi, \tau)[D_{1_\omega}(\xi, a)B_1(\xi, a) + D_{1_\xi}(\xi, a)]a - \\ &- 2[A_1(\tau, a)C_1(\tau, a) - \alpha^2(\xi, \tau)B_1(\xi, a)D_1(\xi, a)]\}, \end{aligned} \quad (5.170)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega' \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{2a\omega} f_{01}^{(1)}(\xi, \tau, a) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2a\omega} \{f_{11}^{(1)}(\xi, \tau, a) - [A_{1_a}(\tau, a)A_1(\tau, a) + A_{1_t}(\tau, a)] + \\ &+ \alpha^2(\xi, \tau)[B_{1_\omega}(\xi, a)B_1(\xi, a) + B_{1_\xi}(\xi, a)] + \\ &+ [C_1^2(\tau, a) - \alpha^2(\xi, \tau)D_1^2(\xi, a)]a\}. \end{aligned} \quad (5.171)$$

- **Приклад.** Для ілюстрації викладеного вище методу розглянемо рівняння Клейна—Гордона у випадку неоднорідного середовища, записане в самоспряженому вигляді

$$u_{tt}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha^2(x, t)u_x(x, t)) + \beta^2(x, t)u(x, t) = 0. \quad (5.172)$$

Вважаючи, що  $t$  і  $x$  уже нормовані на характерні довжину хвилі й період, покладемо

$$\alpha = \tilde{\alpha}(\varepsilon x, \varepsilon t), \quad \beta = \tilde{\beta}(\varepsilon x, \varepsilon t). \quad (5.173)$$

Тоді замість рівняння (5.172) розглядатимемо рівняння з повільно змінними коефіцієнтами

$$u_{tt}(x, \psi) - \tilde{\alpha}^2(\xi, \tau)u_{xx} + \tilde{\beta}^2(\xi, \tau)u(x, t) = 2\varepsilon\tilde{\alpha}(\xi, \tau)\tilde{\alpha}'_\xi(\xi, \tau)u_x(x, t), \quad (5.174)$$

в якому  $\xi = \varepsilon x$ ,  $\tau = \varepsilon t$ .

При  $\varepsilon = 0$ ,  $\xi = \text{const}$ ,  $\tau = \text{const}$ , а отже,  $\tilde{\alpha}(\xi, \tau) = \alpha = \text{const}$ ,  $\tilde{\beta}(\xi, \tau) = \beta = \text{const}$ , приходимо до рівняння (5.140), яке має розв'язок (5.141). Диференціюючи (5.142) за  $k$ , дістанемо так звану групову швидкість



$$\omega'_k = \frac{\alpha^2 k}{\omega}.$$

Перейдемо тепер до побудови асимптотичного розв'язку рівняння (5.174) в нульовому наближенні при  $\varepsilon \neq 0$ . В цьому разі шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(a, \psi) = a \cos \psi, \quad \psi = kx - \omega t + \varphi,$$

де  $a$  і  $\varphi$  мають визначитися з рівнянь (5.160), (5.161), в яких слід покласти

$$\varepsilon f_{01}^{(2)}(\xi, \tau, a) = -2\varepsilon\alpha(\xi, \tau)\alpha_\xi(\xi, \tau)ak, \quad \varepsilon f_{01}^{(1)}(\xi, \tau, a) = 0,$$

після чого для  $a$  і  $\varphi$  дістаємо такі рівняння:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial a}{\partial t} \omega + 2\alpha^2 \frac{\partial a}{\partial x} k + (\omega_t + \alpha^2 k_x - 2\alpha\alpha_x k) a = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \omega + \alpha^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} k = 0, \\ \omega^2 + \alpha^2 k^2 - \beta^2 = 0, \\ \bar{k}_t + \bar{\omega}_x = (k + \varphi_x)_t + (\omega - \varphi_t)_x = \\ = k_t + \omega_x + \varepsilon^2 [D_{1_a}(\xi, a)A_1(\tau, a) - C_{1_a}(\xi, a)B_1(\xi, a)] = 0. \end{array} \right.$$

Зауважимо, що майже для кожної задачі, яка є математичною моделлю деякого фізичного процесу, потрібні оригінальний підхід і модифікація існуючих методів. Щоб працювати над такими задачами, необхідно мати загальне уявлення про теоретичні основи й застосування відомих методів. Це уявлення ми й намагалися дати в цій темі.

Д. 1

КОЛИВАННЯ КРУГЛОЇ МЕМБРАНИ.  
МЕТОД ФУР'Є

У п. 2.21 методом відокремлення змінних було розв'язано задачу про коливання прямокутної мембрани. Покажемо, що цим самим методом можна розв'язати й задачу про коливання круглої мембрани. Для цього розглянемо задачу: дослідити процес вільних коливань круглої однорідної мембрани радіусом  $R$ , якщо в початковий момент часу положення та швидкість її точок становили відповідно  $\omega_1(x, y)$  і  $\psi_1(x, y)$ , а край мембрани нерухомо закріплений.

Взявши центр мембрани за початок координат і перейшовши в рівнянні коливання мембрани до полярних координат, прийдемо до такої задачі: в області  $B = \{(t, \rho, \varphi) \mid t > 0, 0 \leq \rho < R, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt}(t, \rho, \varphi) = a^2(u_{\rho\rho} + \rho^{-1}u_{\rho} + \rho^{-2}u_{\varphi\varphi}), \quad (\text{Д.1})$$

який задовольняє початкові умови

$$\begin{aligned} u(0, \rho, \varphi) = \omega(\rho, \varphi), \quad u_t(0, \rho, \varphi) = \psi(\rho, \varphi), \\ 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (\text{Д.2})$$

та крайову

$$u(t, R, \varphi) = 0, \quad t \geq 0. \quad (\text{Д.3})$$

Очевидно,  $u(t, \rho, \varphi) = u(t, \rho, \varphi + 2\pi)$ .

Як і у випадку прямокутної мембрани, шукаємо спочатку нетривіальні розв'язки рівняння (Д.1), які задовольняють умову (Д.3), у вигляді

$$u(t, \rho, \varphi) = T(t)v(\rho, \varphi) \neq 0. \quad (\text{Д.4})$$

Підставивши (Д.4) в (Д.1) та відокремивши змінні, дістанемо

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0; \quad (\text{Д.5})$$

$$\nu_{\rho\rho} + \rho^{-1}\nu_{\rho} + \rho^{-2}\nu_{\varphi\varphi} + \lambda\nu = 0. \quad (\text{Д.6})$$

З огляду на крайову умову (Д.3) й ураховуючи періодичність функції  $v(\rho, \varphi)$  за  $\varphi$  та її обмеженість у центрі круга, маємо

$$v(R, \varphi) = 0, \quad v(\rho, \varphi) = v(\rho, \varphi + 2\pi), \quad |v(0, \varphi)| < \infty. \quad (\text{Д.7})$$

Задачу Штурма—Ліувілля (Д.6), (Д.7) також розв'язуємо методом відокремлення змінних. Покладемо

$$v(\rho, \varphi) = z(\rho)\Phi(\varphi) \neq 0. \quad (\text{Д.8})$$

Тоді з (Д.6), (Д.7) дістанемо

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi); \quad (\text{Д.9})$$

$$z''(\rho) + \rho^{-1}z'(\rho) + (\lambda - \mu^2\rho^{-2})z(\rho) = 0, \quad (\text{Д.10})$$

$$z(R) = 0, \quad |z(0)| < \infty.$$

Нетривіальний розв'язок задачі (Д.9) існує тільки при  $\mu^2 = n^2$ , де  $n$  — ціле число (див. п. 4.6). Отже,

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad A_n, B_n = \text{const}. \quad (\text{Д.11})$$

Для розв'язання задачі (Д.10) введемо нову незалежну змінну  $\xi = \rho\sqrt{\lambda}$  і позначимо  $z(\rho) = z(\xi/\sqrt{\lambda}) = w(\xi)$ . Тоді маємо

$$w''(\xi) + \xi^{-1}w'(\xi) + (1 - n^2\xi^{-2})w(\xi) = 0, \quad (\text{Д.12})$$

$$w(R\sqrt{\lambda}) = 0, \quad |w(0)| < \infty. \quad (\text{Д.13})$$

Рівняння (Д.12) є рівнянням Бесселя порядку  $n$ . Розв'язуючи його методом степеневих рядів, переконуємося, що будь-який його розв'язок  $w_n(\xi)$  можна подати у вигляді

$$w_n(\xi) = c_1 J_n(\xi) + c_2 N_n(\xi), \quad (\text{Д.14})$$

де

$$J_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k+n)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k+n};$$

$$N_n(\xi) = \frac{2}{\pi} J_n(\xi) \left(\ln \frac{\xi}{2} + c\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-n+2s} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \left(\frac{\xi}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k+n} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} + \dots + 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \dots + 1\right) \right];$$

$c = 0,577215\dots$  — ейлерова стала.

Функція  $J_n(\xi)$  називається *функцією Бесселя першого роду  $n$ -го порядку*, а  $N_n(\xi)$  — *функцією Неймана*. При  $\xi \rightarrow 0$  функція  $N_n(\xi)$  перетворюється в нескінченність, а отже, внаслідок другої з умов (Д.13) впливає, що  $c_2 = 0$ . Перша ж з умов (Д.13) дає

$$J_n(R\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (\text{Д.15})$$

Таким чином, задача відшукування власних функцій задачі (Д.6), (Д.7) звелася до знаходження нулів функції Бесселя. Щодо коренів трансцендентного рівняння справедливі такі **т в е р д ж е н н я**:

- 1) *всі корені рівняння (Д.15) є простими;*
- 2) *трансцендентне рівняння (Д.15) має нескінченну множину коренів, і всі вони дійсні.*

Для доведення першого твердження припустимо супротивне: нехай  $R\sqrt{\lambda_1} = v_1$  є нулем рівняння (Д.15) кратності  $p \geq 2$ . Тоді  $J_n(v_1) = J'_n(v_1) = 0$ , тобто

$$w_n(v_1) = w'_n(v_1) = 0. \quad (\text{Д.16})$$

На підставі теореми про єдиність розв'язку задачі Коші (Д.12), (Д.16) маємо  $w_n(\xi) \equiv 0$ , що суперечить умові. Нехай корені рівняння (Д.15) знайдено; позначимо їх через  $v_k = R\sqrt{\lambda_k}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Тоді їм відповідатимуть власні функції

$$w_k(\xi) = z_k(\rho) = c_1 J_n\left(\frac{v_k}{R} \rho\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Д.17})$$

крайової задачі (Д.10).

### ТЕОРЕМА

*Власні функції крайової задачі (Д.10), які відповідають різним власним значенням  $\lambda_k$ , ортогональні з вагою  $\rho$  на відрізку  $[0, R]$ , тобто*

$$\int_0^R \rho J_n\left(\frac{v_k}{R} \rho\right) J_n\left(\frac{v_m}{R} \rho\right) d\rho = 0, \quad k \neq m. \quad (\text{Д.18})$$

### Доведення

Із (Д.10) маємо

$$\rho \frac{d}{d\rho} (\rho z'_k(\rho)) = \left[ n^2 - \left( \frac{v_k}{R} \right)^2 \rho^2 \right] z_k(\rho),$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} (\rho z'_m(\rho)) = \left[ n^2 - \left( \frac{v_m}{R} \right)^2 \rho^2 \right] z_m(\rho).$$

Домножимо першу рівність на  $z_m(\rho)$ , а другу — на  $z_k(\rho)$ , а потім віднімемо почленно одну від одної і результат зінтегруємо в межах від 0 до  $R$ . Дістанемо

$$\int_0^R \left[ z_m(\rho) \frac{d}{d\rho} (\rho z'_k(\rho)) - z_k(\rho) \frac{d}{d\rho} (\rho z'_m(\rho)) \right] d\rho = \\ = \frac{1}{R^2} (v_m^2 - v_k^2) \int_0^R \rho z_m(\rho) z_k(\rho) d\rho,$$

або, взявши інтеграл зліва частинами й урахувавши, що  $z_k(R) = z_m(R) = 0$ , матимемо

$$\frac{1}{R^2} (v_m^2 - v_k^2) \int_0^R \rho z_m(\rho) z_k(\rho) d\rho = \\ = \rho [z_m(\rho) z'_k(\rho) - z_k(\rho) z'_m(\rho)]_0^R = 0,$$

що й потрібно було довести.

Підставивши (Д.17), (Д.9) у (Д.8), дістанемо

$$v_{n,k}(\rho, \varphi) = (a_{n,k} \cos n\varphi + b_{n,k} \sin n\varphi) J_n \left( \frac{v_k}{R} \rho \right), \quad (\text{Д.19})$$

де  $a_{n,k} = c_1 A_n$ ;  $b_{n,k} = c_2 B_n$ .

Очевидно, власні функції (Д.19) задачі (Д.6), (Д.7) є ортогональними з вагою  $\rho$ . Підставивши знайдені власні значення в рівняння (Д.5) і зінтегрувавши його, маємо

$$T_{n,k}(t) = c_3 \cos \frac{av_k t}{R} + c_4 \sin \frac{av_k t}{R},$$

а отже, згідно з (Д.4) дістаємо

$$u_{n,k}(t, \rho, \varphi) = \left( \bar{a}_{n,k} \cos \frac{av_k t}{R} + \bar{b}_{n,k} \sin \frac{av_k t}{R} \right) J_n \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) \cos n\varphi + \\ + \left( \bar{\bar{a}}_{n,k} \cos \frac{av_k t}{R} + \bar{\bar{b}}_{n,k} \sin \frac{av_k t}{R} \right) J_n \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) \sin n\varphi,$$

де  $\bar{a}_{n,k} = c_3 a_{n,k}$ ;  $\bar{b}_{n,k} = c_4 a_{n,k}$ ;  $\bar{\bar{a}}_{n,k} = c_3 b_{n,k}$ ;  $\bar{\bar{b}}_{n,k} = c_4 b_{n,k}$ .

Розглянемо ряд

$$u(t, \rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \bar{a}_{n,k} \cos \frac{av_k t}{R} + \bar{b}_{n,k} \sin \frac{av_k t}{R} \right) J_n \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) \cos n\varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \bar{\bar{a}}_{n,k} \cos \frac{av_k t}{R} + \bar{\bar{b}}_{n,k} \sin \frac{av_k t}{R} \right) J_n \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) \sin n\varphi \quad (\text{Д.20})$$

і припустимо, що в області  $\bar{B}$  він збігається рівномірно й в області  $B$  його можна почленно диференціювати двічі за  $t$ ,  $\rho$  і  $\varphi$ . Тоді він буде розв'язком рівняння (Д.1) і задовольнятиме крайову умову (Д.3). Виберемо коефіцієнти ряду (Д.20) таким чином, щоб його сума задовольняла й початкову умову (Д.2). Маємо

$$\omega(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{a}_{n,k} \cos n\varphi + \bar{a}_{n,k} \sin n\varphi] J_n \left( \frac{v_k}{R} \rho \right), \quad (Д.21)$$

$$\psi(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{b}_{n,k} \cos n\varphi + \bar{b}_{n,k} \sin n\varphi] \frac{av_k}{R} J_n \left( \frac{v_k}{R} \rho \right).$$

Як відомо, довільну функцію  $\Omega(\rho, \varphi)$ , неперервну разом із похідними до другого порядку включно, що задовольняє крайову умову (Д.7), можна розвинути в рівномірно збіжний ряд вигляду

$$\Omega(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_{n,k} \cos n\varphi + \beta_{n,k} \sin n\varphi] J_n \left( \frac{v_k}{R} \rho \right), \quad (Д.22)$$

де

$$\alpha_{n,k} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \Omega(\rho, \varphi) \rho J_n \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) \cos n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^R \rho J_n^2 \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) \cos^2 n\varphi \, d\rho \, d\varphi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\beta_{n,k} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \Omega(\rho, \varphi) \rho J_n \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) \sin n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{\pi \int_0^R \rho J_n^2 \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) \, d\rho}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отже, якщо  $\omega(\rho, \varphi)$  і  $\psi(\rho, \varphi)$  належать простору  $C^2$  ( $0 \leq \rho \leq R$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ), то, порівнюючи ряди (Д.21) та (Д.22), матимемо

$$\bar{a}_{n,k} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \omega(\rho, \varphi) \rho J_n \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) \cos n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^R \rho J_n^2 \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) \cos^2 n\varphi \, d\rho \, d\varphi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\bar{a}_{n,k} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \omega(\rho, \varphi) \rho J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \sin n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{\pi \int_0^R \rho J_n^2 \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \, d\rho}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\bar{b}_{n,k} = \frac{R \int_0^{2\pi} \int_0^R \psi(\rho, \varphi) \rho J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \cos n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{a\nu_k \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho J_n^2 \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \cos^2 n\varphi \, d\rho \, d\varphi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\bar{b}_{n,k} = \frac{R \int_0^{2\pi} \int_0^R \psi(\rho, \varphi) \rho J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \sin n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{a\nu_k \pi \int_0^R \rho J_n^2 \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \, d\rho}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (Д.20), дістанемо шуканий розв'язок задачі (Д.1)—(Д.3).

## Д. 2

### ПОШИРЕННЯ ТЕПЛОТИ

#### В НЕСКІНЧЕННОМУ ОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРІ

Дослідимо процес розподілу теплоти в нескінченному однорідному циліндрі радіусом  $R$ , якщо в початковий момент часу температура в кожній його точці залежить тільки від її відстані  $\rho$  до осі циліндра, а температура на його бічній поверхні є сталою й дорівнює  $u_0$ .

Оскільки в початковий момент часу й на краю температура циліндра не залежить від  $z$  (вісь  $Oz$  напрямлена вздовж осі циліндра), то очевидно, що й надалі температура  $u$  залежатиме тільки від часу  $t$  і  $\rho$ , тобто  $u = u(t, \rho)$ . Тоді, перейшовши в рівнянні теплопровідності до циліндричних координат і врахувавши, що функція не залежить від  $\varphi$  і  $z$ , дістанемо

$$u_i(t, \rho) = a^2 (u_{pp} + \rho^{-1} u_\rho), \quad t > 0, \quad 0 \leq \rho < R. \quad (\text{Д. 23})$$

Рівняння (Д.23) є рівнянням радіального розподілу теплоти в циліндрі. Початкова умова запишеться у вигляді

$$u(0, \rho) = \varphi(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad (\text{Д. 24})$$

де  $\varphi(\rho)$  — задана функція, а згідно з умовою на поверхні циліндра маємо

$$u(t, R) = u_0, \quad t \geq 0. \quad (\text{Д.25})$$

Після введення нової функції  $v(t, \rho) = u(t, \rho) - u_0$  мішана задача (Д.23)–(Д.25) зводиться до задачі з однорідною крайовою умовою; тому, не зменшуючи загальності подальших міркувань, вважатимемо, що  $u_0 = 0$ .

Для побудови розв'язку задачі (Д.23)–(Д.25) застосуємо метод Фур'є. Поклавши  $u(t, \rho) = T(t)v(\rho)$  і розділивши змінні в рівнянні (Д.23) та крайовій умові (Д.25), дістанемо

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0; \quad (\text{Д.26})$$

$$\begin{cases} v''(\rho) + \rho^{-1} v'(\rho) + \lambda v(\rho) = 0, & (\text{Д.27}) \\ v(R) = 0, \quad |v(0)| < \infty. & (\text{Д.28}) \end{cases}$$

Рівняння (Д.27) є окремим випадком рівняння (Д.12). Отже, враховуючи вимогу обмеженості розв'язку рівняння (Д.27), будь-який його розв'язок можна подати у вигляді

$$v(\rho) = c_1 J_0(\rho \sqrt{\lambda}), \quad (\text{Д.29})$$

де  $c_1$  — довільна стала, а

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

— функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Унаслідок крайової умови (Д.28) маємо

$$J_0(R\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (\text{Д.30})$$

Таким чином, власними значеннями задачі (Д.27), (Д.28) є  $\lambda_k = (v_k/R)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , де  $v_k$  — нулі функції Бесселя нульового порядку. Підставивши знайдені власні значення в рівняння (Д.26) і зінтегрувавши його, дістанемо

$$T(t) = c_2 e^{-\left(\frac{v_k a}{R}\right)^2 t}.$$

Отже, кожному власному значенню  $\lambda_k$  відповідає нетривіальний розв'язок рівняння (Д.23), який задовольняє крайову умову (Д.25),

$$u_k(t, \rho) = A_k e^{-\left(\frac{v_k a}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{v_k}{R} \rho\right), \quad A_k = c_1 c_2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Розглянемо ряд

$$u(t, \rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{v_k a}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{v_k}{R} \rho\right) \quad (\text{Д.31})$$



й припустимо, що він збігається рівномірно в області  $\bar{B} = \{(t, \rho) \mid t \geq 0, 0 \leq \rho \leq R\}$  і його можна почленно диференціювати один раз за  $t$  і двічі за  $\rho$  у  $B$ .

Виберемо довільні сталі  $A_k$  так, щоб ряд (Д.31) задовольняв і початкову умову (Д.24). Маємо

$$\varphi(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0 \left( \frac{v_k}{R} \rho \right).$$

Беручи до уваги ортогональність функцій  $J_0 \left( \frac{v_k}{R} \rho \right)$  на відрізку  $[0, R]$ , із попередньої рівності знаходимо

$$A_k = \frac{\int_0^R \rho \varphi(\rho) J_0 \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) d\rho}{\int_0^R \rho J_0^2 \left( \frac{v_k}{R} \rho \right) d\rho}. \quad (\text{Д.32})$$

Підставивши (Д.32) у ряд (Д.31), дістанемо за наших припущень розв'язок задачі (Д.23)—(Д.25).

◆ **Вправа.** Розв'язати сформульовану задачу за умови, що бічна поверхня циліндра теплоізолювана.

### Д. 3

#### ПОШИРЕННЯ ТЕПЛОТИ В ОДНОРІДНІЙ КУЛІ

Ще одним прикладом просторової задачі для рівняння теплопровідності може бути дослідження процесу розподілу теплоти в однорідній кулі. Вважатимемо, що початкова температура точок кулі залежить тільки від їх відстані  $\rho$  від центра кулі, а її бічна поверхня теплоізолювана. Очевидно, що в цьому випадкові температура кулі в довільний момент часу в довільній її точці залежатиме тільки від часу  $t$  і відстані  $\rho$ . Тому, переходячи в однорідному рівнянні теплопровідності до сферичних координат із початком у центрі кулі, дістанемо

$$u_t(t, \rho) = a^2(u_{\rho\rho} + 2\rho^{-1}u_{\rho}), \quad t > 0, \quad 0 < \rho < R. \quad (\text{Д.33})$$

Початкова та крайова умови запишуться відповідно так:

$$u(0, R) = \varphi(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad (\text{Д.34})$$

$$u_{\rho}(t, R) = 0, \quad |u(t, 0)| < \infty, \quad t \geq 0. \quad (\text{Д.35})$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (Д.33)—(Д.35) вводимо нову невідому функцію

$$v(t, \rho) = \rho u(t, \rho). \quad (\text{Д.36})$$

Маємо

$$v_t = \rho u_t, \quad v_\rho = u(t, \rho) + \rho u_\rho(t, \rho), \quad v_{\rho\rho} = \rho u_{\rho\rho} + 2u_\rho.$$

Підставивши знайдені похідні в (Д.33)—(Д.35), дістанемо

$$v_t(t, \rho) = a^2 v_{\rho\rho}(t, \rho), \quad t > 0, \quad 0 < \rho < R, \quad (\text{Д.37})$$

$$v(0, \rho) = \rho \varphi(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad (\text{Д.38})$$

$$v(t, 0) = 0, \quad v_\rho(t, R) - \frac{1}{R} v(t, R) = 0, \quad t \geq 0. \quad (\text{Д.39})$$

Задача (Д.37)—(Д.39) є задачею про розподіл теплоти в однорідному стержні завдовжки  $R$  із теплоізолюваною бічною поверхнею. Застосувавши до неї метод Фур'є, матимемо

$$v(t, \rho) = a_0 \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t} \sin \frac{\mu_n}{R} \rho, \quad (\text{Д.40})$$

де  $\mu_n$  — корені трансцендентного рівняння

$$\mu_n = \text{tg } \mu_n. \quad (\text{Д.41})$$

Якщо ряд (Д.40) рівномірно збіжний і його можна почленно диференціювати один раз за  $t$  і двічі за  $\rho$  у розглядуваній області, то згідно з доведеною в п. 2.17 лемою 2.1 сума його також буде розв'язком рівняння (Д.37) і задовольнятиме крайові умови (Д.39).

Виходячи з початкової умови (Д.38), маємо

$$\rho \varphi(\rho) = a_0 \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\mu_n}{R} \rho. \quad (\text{Д.42})$$

Із (Д.42), беручи до уваги ортогональність унаслідок (Д.41) системи функцій  $\rho \sin \frac{\mu_n}{R} \rho$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , на відрізку  $[0, R]$  дістаємо

$$a_0 = \frac{3}{R^3} \int_0^R \rho^2 \varphi(\rho) d\rho, \quad a_n = \frac{4\mu_n}{R(2\mu_n - \sin 2\mu_n)} \int_0^R \rho \varphi(\rho) \sin \frac{\mu_n}{R} \rho d\rho.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (Д.40) і врахувавши підстановку (Д.36), остаточно матимемо

$$u(t, \rho) = \frac{3}{R^3} \int_0^R \rho^2 \varphi(\rho) d\rho + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\mu_n \rho^{-1}}{R(2\mu_n - \sin 2\mu_n)} \int_0^R \rho \varphi(\rho) \sin \frac{\mu_n}{R} \rho d\rho e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t} \sin \frac{\mu_n}{R} \rho.$$

## Д. 4

## ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ КАМЕРТОНА

Раніше було розглянуто низку методів побудови розв'язків різних задач для диференціальних рівнянь другого порядку. Покажемо, що метод відокремлення змінних можна успішно використовувати й для дослідження фізичних процесів, які приводять до рівнянь четвертого порядку. Як приклад розглянемо вільні поперечні коливання тонкого однорідного прямокутного стержня завдовжки  $l$ , нерухомо закріпленого на одному кінці й вільного на іншому, якщо в початковий момент часу відхилення й швидкість точок стержня становили  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  відповідно.

Як уже зазначалося, рівняння вільних поперечних коливань стержня має вигляд

$$u_{tt}(t, x) + a^2 u_{xxxx}(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0, l). \quad (\text{Д.43})$$

У початковий момент часу

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (\text{Д.44})$$

Вважатимемо, що лівий кінець стержня нерухомо закріплений. Це означає, що відхилення лівого кінця й дотична до профілю стержня в точці  $x = 0$  дорівнюють нулю, тобто

$$u(t, 0) = 0, \quad u_x(t, 0) = 0, \quad t \geq 0. \quad (\text{Д.45})$$

На вільному кінці нульовими будуть повний згинальний момент  $M$  і тангенціальна сила  $F(t, x)$ , тобто

$$M = -EY u_{xx}(t, l) = 0, \quad F(t, l) = -EY u_{xxx}(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \quad (\text{Д.46})$$

де  $E$  — модуль пружності матеріалу стержня;  $Y = bh^3/12$ ,  $b$ ,  $h$  — відповідно ширина й висота стержня.

Зауважимо, що сформульована задача про коливання тонкого прямокутного стержня еквівалентна задачі про вільні коливання камертона.

Розв'язуємо мішану задачу (Д.43)—(Д.46) методом Фур'є, поклавши

$$u(t, x) = T(t)X(x) \neq 0. \quad (\text{Д.47})$$

Відокремивши змінні в рівнянні (Д.49) та крайових умовах (Д.45), (Д.46), дістанемо

$$X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X'(0) = 0, \quad X''(l) = X'''(l) = 0; \quad (\text{Д.48})$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (\text{Д.49})$$

Як і у випадку задачі Штурма—Ліувілля для рівняння коливання струни (див. п. 2.17), легко переконатися, що власні значення задачі (Д.48) є дійсними додатними числами, а власні функції, які відповідають різним

власним значенням, є ортогональними на відрізку  $[0, l]$ . Отже, загальний розв'язок рівняння задачі (Д.48) запишеться у вигляді

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt[4]{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt[4]{\lambda}x + c_3 \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}x + c_4 \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}x.$$

На підставі крайових умов тієї самої задачі маємо

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0, \\ c_2 + c_4 = 0, \\ c_1 \cos \sqrt[4]{\lambda}l + c_2 \sin \sqrt[4]{\lambda}l - c_3 \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}l - c_4 \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}l = 0, \\ c_1 \sin \sqrt[4]{\lambda}l - c_2 \cos \sqrt[4]{\lambda}l + c_3 \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}l + c_4 \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}l = 0. \end{cases} \quad (\text{Д.50})$$

Добута система лінійних однорідних алгебричних рівнянь відносно невідомих  $c_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) має ненульові розв'язки, якщо її детермінант дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos \mu & \sin \mu & -\operatorname{ch} \mu & -\operatorname{sh} \mu \\ \sin \mu & -\cos \mu & \operatorname{sh} \mu & \operatorname{ch} \mu \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{sh}^2 \mu - \sin^2 \mu - \operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \mu - 2 \operatorname{ch} \mu \cos \mu = 0, \quad \mu = \sqrt[4]{\lambda}l.$$

Оскільки  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ , то попереднє рівняння запишеться у вигляді

$$\operatorname{ch} \mu \cos \mu = -1. \quad (\text{Д.51})$$

Отже, власними значеннями задачі (Д.48) будуть  $\lambda_n = l^{-4} \mu_n^4$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , де  $\mu_n$  — розв'язки трансцендентного рівняння (Д.51). Із системи (Д.50) дістаємо

$$c_1 = -c_3, \quad c_2 = -c_4, \quad c_2 = \frac{\sin \mu_n - \operatorname{sh} \mu_n}{\cos \mu_n + \operatorname{ch} \mu_n} c_1.$$

Таким чином, відповідні власні функції мають вигляд

$$X_n(x) = c_1 \left[ \cos \frac{\mu_n}{l} x - \operatorname{ch} \frac{\mu_n}{l} x + \frac{\sin \mu_n - \operatorname{sh} \mu_n}{\cos \mu_n + \operatorname{ch} \mu_n} \left( \sin \frac{\mu_n}{l} x - \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{l} x \right) \right]. \quad (\text{Д.52})$$

Із рівняння (Д.49) дістаємо

$$T_n(t) = c_5 \cos \frac{\mu_n^2 a}{l^2} t + c_6 \sin \frac{\mu_n^2}{l^2} t. \quad (\text{Д.53})$$

Підставивши (Д.52), (Д.53) у (Д.49) та підсумувавши всі добуті ненульові розв'язки рівняння (Д.43), матимемо

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\mu_n^2 a}{l^2} t + b_n \sin \frac{\mu_n^2 a}{l^2} t \right) \bar{X}_n(x), \quad (\text{Д.54})$$

де  $a_n = c_1 c_5$ ;  $b_n = c_1 c_6$ ;  $X_n(x) = c_1 \bar{X}_n(x)$ .

Унаслідок початкових умов

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{X}_n(x), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \mu_n^2 a}{l} \bar{X}_n(x),$$

звідки на підставі ортогональності власних функцій (Д.52) знаходимо коефіцієнти  $a_n$  і  $b_n$ :

$$a_n = \frac{\int_0^l \varphi(\xi) \bar{X}_n(\xi) d\xi}{\int_0^l \bar{X}_n^2(\xi) d\xi}, \quad b_n = \frac{l \int_0^l \psi(\xi) \bar{X}_n(\xi) d\xi}{a \mu_n^2 \int_0^l \bar{X}_n^2(\xi) d\xi}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (Д.54), дістанемо шуканий розв'язок мішаної задачі (Д.43)–(Д.46). Неважко показати: якщо функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  досить гладкі й задовольняють умови узгодженості з крайовими умовами (Д.45), (Д.46), то добутий ряд збігатиметься рівномірно при  $t \geq 0$  і  $x \in [0, l]$ , причому його можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і чотири рази за  $x$ .

Зазначимо одну характерну властивість для процесу вільних коливань камертона. З ряду (Д.54) випливає, що власні частоти камертона становлять

$$\omega_n = \frac{\mu_n^2 a}{l^2} = \frac{\mu_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EY}{\rho S}},$$

де  $S$  — площа поперечного перерізу, а отже,

$$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \frac{\mu_{n+1}^2}{\mu_n^2}.$$

Графічним методом легко знайти корені рівняння (Д.51):

$$\mu_1 = 1,875, \quad \mu_2 = 4,694, \quad \mu_3 = 7,854, \quad \mu_4 = 10,997.$$

Отже,

$$\omega_2/\omega_1 = 6,267, \quad \omega_3/\omega_1 = 17,548, \quad \omega_4/\omega_1 \approx 34.$$

Бачимо, що другий власний тон вищий за основний більше, ніж на дві з половиною октави, тобто вищий від шостої гармоніки струни за однакового основного тону, а третій власний тон вищий за основний більше, ніж на чотири октави й т. д. Якщо, наприклад, камертон має основну частоту 440 коливань за секунду (нота «ля» першої октави), то його наступ-

на власна частота становитиме 2757,5 коливань за секунду (ноти «мі» та «фа» четвертої октави мають частоти відповідно 2637,3 і 2794 коливань за секунду); третя ж власна частота дорівнює 7721,1 коливань за секунду і виходить за межі шкали музичних звуків. Усім цим і пояснюється той факт, що з часом після збурення камертона ударом він видає чистий звук основного тону, оскільки вищі гармоніки швидко загасають.

## Д. 5

## МАЛІ ПРОГИНИ

## ПОПЕРЕЧНО НАВАНТАЖЕНОЇ ПЛАСТИНКИ

Для ілюстрації застосування методу відокремлення змінних до побудови розв'язків крайових задач у випадку рівнянь еліптичного типу вищого порядку дослідимо малі прогини однорідної прямокутної мембрани зі сторонами  $b$  і  $c$ , на яку діє нормальне до її поверхні навантаження інтенсивністю  $q = \text{const}$ . Вважатимемо, що на краях пластинка вільно оперта.

Малий порівняно з товщиною пластинки прогин  $u(x, y)$ , як відомо, має бути розв'язком крайової задачі

$$\Delta \Delta u \equiv u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = q/D, \quad x \in (0, b), \quad y \in (0, c); \quad (\text{Д.55})$$

$$u(0, y) = u(b, y) = u_{xx}(0, y) = u_{xx}(b, y) = 0, \quad y \in [0, c], \quad (\text{Д.56})$$

$$u(x, 0) = u(x, c) = u_{yy}(x, 0) = u_{yy}(x, c) = 0, \quad x \in [0, b], \quad (\text{Д.57})$$

де  $D$  — жорсткість пластинки при згині.

Шукаємо розв'язок крайової задачі (Д.55)–(Д.57) у вигляді

$$u(x, y) = z(x, y) + v(y), \quad (\text{Д.58})$$

де  $v(y)$  — деякий частинний розв'язок рівняння (Д.55), який задовольняє крайові умови (Д.57).

За  $v(y)$  візьмемо поліном четвертого степеня

$$v(y) = c_0 y^4 + c_1 y^3 + c_2 y^2 + c_3 y + c_4, \quad (\text{Д.59})$$

де коефіцієнти  $c_i$  ( $i = \overline{0, 4}$ ) вибираємо таким чином, щоб функція (Д.59) задовольняла вказані вище умови. Маємо

$$\begin{cases} 24c_0 = q/D, \\ c_4 = 0, \quad c_0 c^4 + c_1 c^3 + c_2 c^2 + c_3 c + c_4 = 0, \\ 2c_2 = 0, \quad 12c_0 c^2 + 6c_1 c + 2c_2 = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо

$$c_0 = \frac{q}{24D}, \quad c_2 = c_4 = 0, \quad c_1 = -\frac{qc}{12D}, \quad c_3 = \frac{qc^3}{24D},$$

тобто

$$v(y) = \frac{q}{24D}(y^4 - 2cy^3 + c^3y). \quad (\text{Д.60})$$

Підставивши (Д.58) у крайову задачу (Д.55)—(Д.57), дістанемо

$$\Delta \Delta z(x, y) = 0; \quad (\text{Д.61})$$

$$z(0, y) = z(b, y) = -v(y), \quad z_{xx}(0, y) = z_{xx}(b, y) = 0, \quad y \in [0, c]; \quad (\text{Д.62})$$

$$z(x, 0) = z(x, c) = z_{yy}(x, 0) = z_{yy}(x, c) = 0, \quad x \in [0, b]. \quad (\text{Д.63})$$

Позначимо

$$\Delta z(x, y) = w(x, y). \quad (\text{Д.64})$$

Тоді на підставі (Д.61)—(Д.63) для визначення функції  $w(x, y)$  потрібно розв'язати таку задачу:

$$\Delta w(x, y) = 0, \quad x \in (0, b), \quad y \in (0, c); \quad (\text{Д.65})$$

$$w(x, 0) = w(x, c) = 0, \quad w(0, y) = w(b, y) = -v^*(y). \quad (\text{Д.66})$$

Застосувавши до задачі (Д.65), (Д.66) метод Фур'є, дістанемо

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{c} x + b_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{c} x \right] \sin \frac{\pi n}{c} y,$$

де коефіцієнти  $a_n$  і  $b_n$  визначаються за формулами

$$a_n = \frac{2}{c} \left( \frac{\pi n}{c} \right)^2 \int_0^c v(y) \sin \frac{\pi n}{c} y \, dy = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{4q}{cD} \left( \frac{c}{\pi n} \right)^3, & n = 2k - 1, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1 - \operatorname{ch} \frac{\pi n}{c} b}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{c} b} a_n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а отже,

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4q}{cD} \left( \frac{c}{\pi(2k-1)} \right)^3 \times \left[ \operatorname{ch} \frac{\pi(2k-1)}{c} x + \frac{1 - \operatorname{ch} \frac{\pi(2k-1)}{c} b}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2k-1)}{c} b} \operatorname{sh} \frac{\pi(2k-1)}{c} x \right] \sin \frac{\pi(2k-1)}{c} y.$$

Позначимо:  $\alpha_k = \frac{\pi(2k-1)}{c}$ ;  $\beta_k = \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b}$ ;  $\omega_k = \frac{4qc^2}{D\pi^3(2k-1)^3}$ .

Тоді попередня рівність запишеться у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k [\operatorname{ch} \alpha_k x + \beta_k \operatorname{sh} \alpha_k x] \sin \alpha_k y. \quad (\text{Д.67})$$

Підставивши (Д.67) у (Д.64) і інтегрувавши добуте рівняння за умов

$$z(0, y) = z(b, y) = -v(y), \quad z(x, 0) = z(x, c) = 0,$$

матимемо

$$z(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{2\alpha_k^2} \left\{ (2 - \alpha_k \beta_k x) \operatorname{ch} \alpha_k x + \left[ \operatorname{th} \frac{\alpha_k b}{2} \left( \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - 2 \right) - \alpha_k x \right] \operatorname{sh} \alpha_k x \right\} \sin \alpha_k y.$$

Функції  $z(x, y)$  та  $v(y)$  визначені, а отже, на підставі (Д.58) дістаємо розв'язок поставленої крайової задачі (Д.55)—(Д.57).

Зазначимо, що з методу побудови розв'язку крайової задачі (Д.55)—(Д.57) впливає його єдиність.

♦ **Зауваження.** У випадку, коли край пластинки нерухомо закріплений, тобто коли виконуються умови

$$u \Big|_{x=b}^{x=0} = u \Big|_{y=c}^{y=0} = u_x \Big|_{x=b}^{x=0} = u_y \Big|_{y=c}^{y=0} = 0, \quad (\text{Д.68})$$

застосувати наведений метод до побудови розв'язку крайової задачі (Д.55), (Д.68) не можна.

## Д. 6 ПЛОСКІ ХВИЛІ. ДИСПЕРСІЯ ХВИЛЬ

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами гіперболічного типу

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + cu(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (\text{Д.69})$$

1. Припустимо, що  $c = 0$ . Розв'язки рівняння (Д.69) шукатимемо у вигляді

$$u(t, x) = f(bt + \langle \xi, x \rangle), \quad (\text{Д.70})$$

де  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $\langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ .



Оскільки:

а) за фіксованого  $t = t_0$  поверхні рівня  $u(t_0, x) = \text{const}$  є площинами  $bt_0 + \langle \xi, x \rangle = \text{const}$ , перпендикулярними до вектора  $\bar{\xi}$ ;

б) за різних значень  $t = t_0, t_1$  функція  $u(t_1, x)$  відрізняється від  $u(t_0, x)$  зсувом на вектор  $-\langle \bar{\xi} |^{-2} \bar{\xi} b(t_1 - t_0)$ ,

$$\begin{aligned} (u(t_0, x + \bar{\xi} | \bar{\xi} |^{-2} b(t_1 - t_0))) &= f(bt_0 + \langle \xi, x + \bar{\xi} | \bar{\xi} |^{-2} b(t_1 - t_0) \rangle) = \\ &= f(bt_0 + \langle \xi, x \rangle + \langle \xi, \bar{\xi} | \bar{\xi} |^{-2} b(t_1 - t_0) \rangle) = f(bt_1 + \langle \xi, x \rangle) = u(t_1, x), \end{aligned}$$

то функція (Д.70) називається *плоскою хвилею*, яка рухається вздовж напрямку вектора  $-\bar{\xi}$  зі швидкістю  $v = |\bar{\xi} |^{-1} b$ .

Вираз  $bt + \langle \xi, x \rangle$  називається *фазою хвилі* (Д.70), а  $f$  — *формою хвилі*. Якщо  $b = 0$ , то хвиля (Д.70) називається *стоячою*.

Знайдемо умови, які мають задовольняти  $b$  і вектор  $\bar{\xi}$ , щоб функція (Д.70) була розв'язком рівняння (Д.69) при  $c = 0$ . Для цього підставимо (Д.70) у (Д.69). Дістанемо

$$f''(bt + \langle \xi, x \rangle) b^2 = a^2 f''(bt + \langle \xi, x \rangle) \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Вважаючи, що  $f''(Q) \neq 0$ , маємо

$$b^2 = a^2 |\bar{\xi} |^2. \quad (\text{Д.71})$$

Розв'язками цього рівняння є вектори  $\bar{N} = (\xi, b) \in E_{n+1}$ , які лежать на конусі  $K$  в  $E_{n+1}$ , основою якого є сфера  $|\bar{\xi} | = ba^{-1}$ .

► **Означення.** Вектор  $\bar{N} = (\xi, b) \in E_{n+1}$ ,  $\bar{N} \neq 0$ , який задовольняє рівняння (Д.71), називають *характеристичною нормаллю хвильового рівняння* (Д.69).

Гіперплощина  $N^\perp = \{(t, x) \in E_{n+1} \mid bt + \langle \xi, x \rangle = \text{const}\}$ , перпендикулярна до деякої характеристичної нормалі  $\bar{N}$ , називається *характеристичною гіперплощиною хвильового рівняння* (Д.69).

Гіперповерхня в  $E_{n+1}$  називається *характеристичною*, якщо в кожній точці її дотична гіперплощина є характеристичною.

На підставі характеристичного рівняння (Д.71) швидкість поширення всіх плоских хвиль, які задовольняють рівняння (Д.69), дорівнює  $a$ :

$$v^2 = b^2 / |\bar{\xi} |^2 = a^2. \quad (\text{Д.72})$$

Справедливе й обернене твердження. Для довільного  $\bar{N} \in E_{n+1}$ , який задовольняє (Д.71), плоска хвиля (Д.70) є розв'язком рівняння (Д.69) за довільної функції  $f(bt + \langle \xi, x \rangle)$ . В окремому випадковій  $f(bt + \langle \xi, x \rangle)$  може бути й розривною (або швидкозмінною) в деякій точці, наприклад при  $bt + \langle \xi, x \rangle = 2$ . Тоді розв'язок (Д.70) матиме той самий розрив уздовж всієї гіперплощини в  $E_{n+1} (\xi \neq 0)$ :

$$bt + < \xi, x > = 2. \quad (Д.73)$$

За фіксованого  $t$  цей розрив належить площині в  $E_n$  із рівнянням (Д.73). Ця площина рухається зі зростанням  $t$  у напрямі перпендикулярного до неї вектора  $-\bar{\xi}$  зі швидкістю  $v = a = b |\bar{\xi}|^{-1}$ .

Звідси можна зробити такі висновки:

1) довільна характеристична гіперплощина може бути поверхнею розриву розв'язку рівняння (Д.69) при  $c = 0$ ;

2) усі плоскі хвилі й розриви цих хвиль, які задовольняють рівняння (Д.69) при  $c = 0$ , поширюються зі швидкістю  $a$  в напрямі вектора  $-\bar{\xi}$  без спотворення (хвиля без дисперсії).

Значимо, що з формулою (Д.72) пов'язане відкриття електромагнітної природи світла й спеціальної теорії відносності. Так, із рівнянь електродинаміки Дж. К. Максвелл вивів, що потенціали електромагнітного поля задовольняють хвильове рівняння

$$u_n(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z),$$

де  $a^2 = (\epsilon\mu)^{-1}$ ,  $\epsilon$  і  $\mu$  — відповідно діелектрична й магнітна проникності вакууму (їх знаходять експериментально електромагнітними вимірюваннями). Після обчислення Дж. К. Максвеллом швидкості поширення електромагнітних хвиль виявилось, що вона з великою точністю збігається зі швидкістю світла:  $a = (\epsilon\mu)^{-1/2} \approx 299\,976$  км/с. Звідси Максвелл зробив висновок, що світло має електромагнітну природу.

Другим відкриттям, пов'язаним із формулою (Д.72), є спеціальна теорія відносності.

Виникає природне запитання: якщо  $(\epsilon\mu)^{-1/2}$  — швидкість світла, то в якій системі відліку? Відомо, що закони механіки справедливі в будь-якій інерціальній системі відліку. Тому можна припустити, що й закони електродинаміки справедливі в будь-якій інерціальній системі. Але тоді швидкість світла також має бути однакою в усіх цих системах. Проте така властивість швидкості суперечить механіці Ньютона. Отже, або рівняння Максвелла справедливі тільки в деякій вибраній системі відліку, пов'язаній із так званим «нерухомим ефіром», або закони механіки Ньютона неточні. Саме для з'ясування цього питання Майкельсон і Морлі поставили свій знаменитий експеримент і підтвердили тотожність швидкості світла в різних інерціальних системах відліку, а отже, відсутність «нерухомого ефіру» й неточність ньютонівської механіки (за великих швидкостей). Необхідне уточнення законів механіки згодом дав А. Ейнштейн.

2. Розглянемо диференціальне рівняння (Д.69), коли  $c \neq 0$ . Якщо  $u(t, x) = f(bt + < \xi, x >)$  — плоска хвиля для рівняння (Д.69), то для заданих  $\xi$  і  $b$  відразу дістаємо рівняння

$$f''(bt + < \xi, x >)(a^2 |\bar{\xi}|^2 - b^2) + f(bt + < \xi, x >)c = 0. \quad (Д.74)$$

Отже, в цьому випадкові функція  $f(bt + \langle \xi, x \rangle)$  не може бути довільною — вона має бути розв'язком рівняння (Д.74). Очевидно, що для швидкості  $v = a$ , тобто для  $a^2 |\bar{\xi}|^2 = b^2$ , уже не існує біжучої плоскої хвилі. Але для інших швидкостей і для довільного напрямку можливі форми хвиль визначаються з рівняння (Д.74) і є показниковими функціями. У зв'язку з цим напрям руху хвилі та її швидкість, яка відповідає рівнянню (Д.69), можуть задаватися довільно (за винятком  $v = a$ ), але при цьому можливі тільки спеціальні форми плоских хвиль. Із фізичних міркувань виключаються з розгляду розв'язки, які не є рівномірно обмеженими функціями в просторі. На підставі інтеграла Фур'є та враховуючи, що

$$\begin{aligned} f(bt - \langle \xi, x \rangle) &= f(v|\bar{\xi}|t - \langle e, x \rangle|\bar{\xi}|) = \\ &= f((vt - \langle e, x \rangle)|\bar{\xi}|) = g(vt - \langle e, x \rangle), \end{aligned}$$

де  $g(Q) = f(Q)|\bar{\xi}|$ ;  $\bar{e} = -\bar{\xi}|\bar{\xi}|^{-1}$ ,  $|\bar{e}| = 1$ ;  $Q = vT - \langle e, x \rangle$ , маємо

$$g(vt - \langle e, x \rangle) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{ik\tau} d\tau \right) e^{-ki(vt - \langle e, x \rangle)} dk,$$

тобто хвиля довільної форми може бути зображена як суперпозиція гармонічних хвиль вигляду

$$u_k(t, x) = e^{-ik(vt - \langle e, x \rangle)}, \quad (\text{Д.75})$$

де  $\beta = kv$  — частота.

Функції (Д.75) мають бути розв'язками рівняння (Д.69), отже,

$$-\beta^2 = -a^2 k^2 + c,$$

тобто

$$k = \pm \frac{1}{a} \sqrt{c + \beta^2},$$

і гармонічні коливання (Д.75) матимуть фазову швидкість, яка залежатиме від частоти  $\beta$ , що становить

$$v = \frac{\beta}{k} = \frac{a\beta}{\sqrt{c + \beta^2}}.$$

Отже,

$$u_k(t, x) = e^{-\frac{i}{a} \sqrt{c + \beta^2} \left( \frac{a\beta}{\sqrt{c + \beta^2}} t - \langle e, x \rangle \right)}. \quad (\text{Д.76})$$

Оскільки розв'язок рівняння (Д.69) — це суперпозиція хвиль вигляду (Д.76), які поширюються в одному й тому самому напрямі, причому всі ці хвилі мають форму, яка задовольняє рівняння (Д.75), то різні компоненти

поширюються з різними швидкостями; отже, форма складової хвилі  $u(t, x)$  змінюватиметься з часом  $t$ , і хвильовий процес, поширюючися, буде спотворюватися (хвилі з дисперсією). Кажуть: якщо фазова швидкість гармонічних хвиль залежить від частоти, то рівняння (Д.69) описує явище дисперсії.

Очевидно, якщо рівняння (Д.69) не допускає розв'язків у вигляді хвиль довільної форми, то відбувається дисперсія хвиль. Доданок  $cu(t, x)$  у рівнянні (Д.69) іноді називають *дисперсійним членом*.

Як приклад розглянемо телеграфне рівняння, яке описує електричні коливання в провідниках:

$$u_{xx}(t, x) - LCu_{tt} - (RC + LG)u_t(t, x) - RGu(t, x) = 0, \quad (\text{Д.77})$$

де  $C$  — ємність;  $R$  — омичний опір;  $L$  — індуктивність;  $G$  — втрата ізоляції. Всі ці величини розраховані на одиницю довжини провідника. Позначимо  $b = RC + LG$ ,  $d = RG$ ,  $a^2 = (LG)^{-1}$  і введемо нову невідому функцію

$$v(t, x) = u(t, x) e^{0.5a^2bt}. \quad (\text{Д.78})$$

Тоді рівняння (Д.77) запишеться у вигляді

$$a^2 v_{xx}(t, x) - v_{xx}(t, x) + cv(t, x) = 0, \quad (\text{Д.79})$$

$$\text{де } c = \frac{a^2}{4}(a^2b^2 - 4d) = \frac{a^4}{4}\left(b^2 - 4\frac{d}{a^2}\right) = \frac{a^4}{4}(RC - LG)^2.$$

Отже, на підставі попередніх міркувань у разі виконання умови

$$RC = LG \Rightarrow c = 0 \quad (\text{Д.80})$$

рівняння (Д.79) матиме хвилі без дисперсії і внаслідок (Д.78) рівняння (Д.77) має хвилі без дисперсії із загасанням вигляду

$$u(t, x) = e^{-Kt} f(x - at), \quad u(t, x) = e^{-Kt} f(-x - at),$$

де  $K = 0,5(R/L + G/C)$ .

Коли коефіцієнти рівняння (Д.77), які характеризують провідник, задовольняють умову (Д.80), то в провіднику хвилі довільної форми поширюються без спотворення й можуть лише загасати. Але це загасання в приймачі хвиль-сигналів завжди можна компенсувати за рахунок їх підсилення, тим самим можна точно відновити сигнали, які передаються провідником. Це має дуже важливе значення в галузі телефонного зв'язку й при передаванні сигналів кабелями на великі відстані.

Зауважимо нарешті, що рівняння (Д.69) при  $c = 0$  можуть мати, крім плоских хвиль, хвилі інших форм. Наприклад, якщо  $n = 3$ , то характеристиками для рівняння (Д.69) будуть також поверхні

$$r - at = \text{const}, \quad -r - a = \text{const},$$

де  $r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x_{i,0})^2}$ ,  $(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$  — фіксована точка, а функції  $u = \frac{1}{4\pi r} f(r - at)$ ,  $u = \frac{1}{4\pi r} f(-r - at)$  — хвилі без дисперсії із загасанням для рівняння (Д.69) при  $n = 3$  і  $c = 0$ . Ці хвилі називаються *сферичними*.

## Д. 7

### КОРОТКИЙ ІСТОРИЧНИЙ ОГЛЯД

Наприкінці XVII ст. потреби практики, пов'язані з розвитком суспільних відносин і зумовлені технічним прогресом у всіх галузях людської діяльності, поставили перед вченими-математиками низку нових задач, розв'язання яких вимагало розробки принципово нових методів.

За таких історичних умов приблизно з 1700 р. починається бурхливий розвиток диференціального та інтегрального числення (праці видатних англійця І. Ньютона (1643—1727) та німця Г. В. Лейбніца (1646—1716)).

Дослідження проблем динаміки твердого тіла, а також деяких геометричних задач методами диференціального й інтегрального числення привели до виділення найпростіших класів ДРЧП другого порядку.

Однією з таких проблем була задача про коливання струни. Нею зацікавився ще Г. Галілей (1564—1642), але перші кроки до її математичного розв'язання зробив англійський математик Б. Тейлор (1685—1731) у 1715 р. Якщо передати в символах диференціального числення встановлений ним закон оберненої пропорційності прискорення точки струни за малих поперечних коливань і радіуса кривини струни в тій самій точці, то можна вважати, що він прийшов до знаменитого рівняння

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0, \quad a = \text{const.}$$

Припускаючи, що струна коливається як одне ціле, Б. Тейлор звів задачу до двох звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами й для закріпленої на кінцях струни показав, що в довільний момент часу вона має форму синусоїди.

Французький математик Ж. Л. Д'Аламбер (1717—1783), записавши рівняння струни у вигляді

$$u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

знайшов (1749) його загальний розв'язок у формі

$$u(t, x) = f_1(x - t) + f_2(x + t),$$

де  $f_1$  і  $f_2$  — довільні функції своїх аргументів.

Аналіз, здійснений Д'Аламбером, не був повним, оскільки ним не були з'ясовані умови, які мають міститися в самому формулюванні проблеми, й він урахував лише так звані крайові умови.

Л. Ейлер (1707—1783) у 1750 р. показав, що коливання струни буде цілком визначене, якщо поряд із крайовими умовами задати положення й швидкість руху точок струни в початковий момент часу. Отже, Л. Ейлер завершив аналітичну розробку методу характеристик Д'Аламбера (метод поширення хвиль), хоча геометрична картина явища коливання струни не була розглянута обома вченими.

У цей самий час (1753) новий підхід до розв'язання зазначеної проблеми запропонував швейцарський математик Д. Бернуллі (1700—1782) (в 1725—1733 рр. працював у Петербурзькій АН). Спираючися на чисто фізичні міркування й на підставі того, що звучання струни створюється основним тоном і безліччю обертонів, він дійшов висновку, що коливання струни складаються ніби з нескінченної множини коливань різних її частин, сплучених між собою у вузлах. Тому форма струни утворюється накладанням синусоїд, що відповідають різним обертонам, періоди яких зменшуються обернено пропорційно натуральним числам, а розв'язок задачі має вигляд

$$y = c_1 \sin \frac{\pi x}{a} + c_2 \sin \frac{2\pi x}{a} + c_3 \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots, \quad c_i - \text{const.}$$

Отже, Д. Бернуллі прийшов до відкриття в математичній фізиці фундаментального принципу накладання лінійних коливань і методу розв'язання рівнянь із частинними похідними, відомого тепер під назвою методу Фур'є (на честь французького математика Ж. Б. Ж. Фур'є (1768—1830)), або методу відокремлення змінних.

Незадовго до Д. Бернуллі Л. Ейлер також знайшов розв'язок рівняння струни для одного окремого випадку у вигляді тригонометричного ряду.

Праці Л. Ейлера і Д. Бернуллі про представлення розв'язку рівняння коливання струни у вигляді тригонометричного ряду мали важливе значення для подальшого розвитку рівнянь математичної фізики й математики взагалі: перед математиками XVIII ст. постало принципове питання про природу інтегралів рівнянь із частинними похідними й про подання довільних функцій у вигляді тригонометричних рядів. Із цього приводу між Л. Ейлером і Д. Бернуллі розгорнулася дискусія, до якої долучилися видатні французькі вчені Ж. Л. Лагранж (1736—1813), П. С. Лаплас (1749—1827) і Ж. Л. Д'Аламбер.

У 1787 р. Петербурзька академія наук оголосила конкурс з дискусійної проблеми й у 1793 р. присудила премію французькому математикові Л. Ф. А. Арбогасту (1759—1803) за його працю «Мемуари про природу довільних функцій, які входять в інтеграли рівнянь в частинних диференціалах» (1791).

До ДРЧП вищих порядків приводили й інші задачі природознавства: гідродинамічні дослідження Ж. Л. Д'Аламбера та Л. Ейлера, дослідження П. С. Лапласом гравітаційного поля (1782), в результаті чого він вивів

рівняння вигляду  $\Delta u = 0$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ , назване його ім'ям,

дослідження Л. Ейлером проблеми коливання мембрани й т. д. Але математики XVIII ст. не досліджували загальних питань теорії таких рівнянь. У цьому напрямі суттєвими були дослідження Л. Ейлера (1770) зі зведення лінійних рівнянь другого порядку до деяких канонічних форм за допомогою заміни змінних. Так, рівняння  $z_{yy} = a^2 z_{xx}$  підстановкою  $\xi = x + ay$ ,  $\eta = x - ay$  він звів до рівняння  $z_{\xi\eta} = 0$ , звідки відразу дістав загальний інтеграл у вигляді

$$z = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x + ay) + f_2(x - ay).$$

Розглядаючи коливання круглої мембрани, Л. Ейлер у 1766 р. дістав рівняння

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \right) u = 0, \quad \alpha, \beta = \text{const},$$

яке згодом було названо рівнянням циліндричних функцій, а розв'язок його зобразив у вигляді нескінченного ряду, який тільки на сталий множник відрізняється від циліндричної функції  $J_\beta(\alpha r)$ . Окремий випадок цієї функції відомий ще з 1738 р., коли Д. Бернуллі досліджував коливання важких ланцюгів.

Перші спроби побудови методів інтегрування широкого класу ДРЧП зробив П. С. Лаплас (1777, 1782). Так, для рівняння  $z_{xy} + a z_x + b z_y + cz = 0$ , де  $a, b, c$  — задані функції незалежних змінних, він запропонував так званий метод каскадів, який у деяких випадках дає змогу дістати загальний інтеграл за допомогою квадратур.

З погляду застосувань і впливу на подальший розвиток рівнянь математичної фізики надзвичайно важливими були дослідження Л. Ейлером згинання призматичних стержнів: визначення критичної сили, під впливом якої стискуваний з обох кінців стержень втрачає стійкість і миттєво вигинається. Нагальність цієї задачі (для практики) збагнули пізніше — в другій половині XIX ст., коли ставались аварії під час будівництва мостів та інших споруд.

П. С. Лаплас першим розв'язував задачі для рівнянь, залежних від параметрів, причому значення цього параметра (критичної сили) є шуканою величиною. Власне кажучи, він поставив винятково важливу математичну задачу, яка набагато пізніше ввійшла в літературу під назвою задачі Штурма—Ліувілля. Вона й нині привертає пильну увагу сучасних математиків і фізиків, особливо в задачах квантової механіки.

Взагалі XVIII ст. позначилося багатьма блискучими результатами в різних розділах математики та сферах її застосувань. Дедалі нові цікаві за-

дачі змушували математиків розширювати поле своєї діяльності, яку можна схарактеризувати словами Ж. Л. Д'Аламбера: «Ідіть уперед, упевненість прийде до Вас пізніше». І ця впевненість справді прийшла, але вже в XIX ст.

Перша четверть XIX ст. була переломним періодом у розвитку всієї математики. Насамперед докорінно перебудувався сам фундамент математичного аналізу: дано сучасне означення границі, нескінченно малої, неперервності функції, диференціала, визначеного інтеграла тощо. Поняття функції набуло сучасного характеру. Великий внесок у розвиток математичного аналізу в той час зробили О. Л. Коші (1789—1857), К. Ф. Гаусс (1777—1855), Б. Больцано (1781—1848), П. Г. Л. Діріхле (1805—1859), М. І. Лобачевський (1792—1856), Г. Ф. Б. Ріман (1826—1866), К. Т. В. Вейерштрасс (1815—1897), М. В. Остроградський (1801—1862) та ін.

Зазначена реформа математичного аналізу й революційні відкриття у фізиці та інших галузях внесли нові ідеї і в теорію рівнянь математичної фізики.

У 1821 р. французький математик Л. М. А. Нав'є (1785—1836) виводить диференціальні рівняння руху нестисливої рідини (рівняння Нав'є—Стокса), а також рівняння пружності для тривимірного простору.

У 1822 р. Ж. Б. Ж. Фур'є вперше розв'язав рівняння теплопровідності

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

за різних крайових умов у вигляді тригонометричного ряду. При цьому він заново вивів знайдені ще Л. Ейлером у 1798 р. формули коефіцієнтів таких рядів і показав, що функції досить широкого класу, в тому числі визначені на різних проміжках різними аналітичними виразами (за Ейлером — «розривні»), можуть бути представлені на довільному скінченному проміжку тригонометричним рядом, тобто аналітично. Цим самим показано хибність ейлерового розуміння «неперервності» функції дійсного аргументу й значною мірою підтверджено точку зору Д. Бернуллі. Перші достатні умови розвинення функції в тригонометричні ряди були строго дані німецьким математиком П. Г. Л. Діріхле в 1829 р. і російським математиком М. І. Лобачевським у 1834 р.

Вагомий внесок у розвиток рівнянь математичної фізики зробив французький математик С. Д. Пуассон (1781—1840) — почесний член Петербурзької АН (з 1826 р.). Його праці стосувалися майже всіх розділів математичної фізики: так, у «Зауваженнях про рівняння теорії притягання» (1813) він вивів відоме рівняння

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 4\pi\rho$$

(рівняння Пуассона). Учений розв'язав багато задач електро- й магнетостатики. В 1829 р. він поклав початок теорії девіації. Здійснював дослідження із зовнішньої балістики й гідромеханіки, теорії пружності й т. д.

Одним із центральних розділів математичної фізики XIX ст. була так звана теорія потенціалу. Перші результати з цієї теорії містяться в праці



англійського математика й фізика Дж. Гріна (1793—1841) «Досвід застосування математичного аналізу до теорії електрики й магнетизму», опублікованій у 1828 р. У цій маловідомій до перевидання (1845) книзі вперше розглядається окремий випадок функції, пов'язаної з аналітичним зображенням розв'язків крайових задач математичної фізики (функція Гріна).

Того ж 1828 р. російський математик М. В. Остроградський опублікував працю «Замітки про теорію теплоти», в якій довів відому формулу, що пов'язує інтеграл по об'єму з інтегралом по поверхні (формула Остроградського—Гаусса). Ця формула широко використовується в різних розділах ДРЧП. Зазначимо, що М. В. Остроградському належать вагомі результати щодо знаходження розв'язку задачі Коші та мішаних задач для рівняння теплопровідності; він запропонував метод відшукування інтегралів рівнянь звукових коливань газу, рівнянь коливань пружних пластинок тощо.

Теорія потенціалу дістала розвиток у праці німецького математика К. Ф. Гаусса «Загальні теореми, що стосуються сил притягання та відштовхування, які діють обернено пропорційно квадратам відстані» (1840).

Зазначимо, що в XIX ст. у теорії ДРЧП набули важливого значення питання існування та єдиності розв'язку відповідних задач. Ініціатива в їх розв'язанні належала французькому математикові О. Л. Коші, який у своїх лекціях (1820—1830) дав доведення існування й єдиності розв'язку звичайного диференціального рівняння  $y' = f(x, y)$  за початкових умов  $y(x_0) = y_0$ .

У 1874 р. російський математик С. В. Ковалевська (1850—1891) довела теорему про існування аналітичних розв'язків задачі Коші для систем ДРЧП. Вона навела й несподіваний для її сучасників приклад рівняння, яке не задовольняло умови теореми й не мало аналітичного розв'язку. Ця теорема розкриває глибокі внутрішні закономірності, властиві розв'язкам систем ДРЧП: вона дала ключ для класифікації систем ДРЧП та розкриття поняття характеристики.

Теореми існування мали важливе значення для побудови наближеного розв'язку ДРЧП і були покладені в основу різних методів їх інтегрування, які розроблялися в XIX ст.

Вагомі результати з розв'язання задачі Коші для конкретних типів рівнянь математичної фізики дістали Г. Ф. Б. Ріман, В. Вольтерра (1860—1940), Г. Р. Кірхгоф (1824—1887), Ж. Адамар (1865—1963) та ін.

Дослідження математиків XIX ст. з теорії ДРЧП, зокрема здобутки М. В. Остроградського, були базою для серії праць російських учених кінця XIX—початку XX ст. Особливе значення мали результати О. М. Ляпунова (1857—1918) з теорії потенціалу та його учня — В. А. Стеклова (1864—1926) з електростатики та гідродинаміки, а також з теорії теплопровідності, де він застосував метод замкненості, названий його ім'ям. В. А. Стеклов досяг значних успіхів і в розв'язанні проблеми Штурма—Ліувілля про власні значення й власні функції.

Важливою подією в історії розвитку диференціальних рівнянь у розглядуваній період було створення якісної теорії, основи якої заклали французький математик і фізик А. Пуанкаре (1854—1912) і О. М. Ляпунов. Їхні праці зі стійкості мали величезне значення для всього подальшого розвитку теорії диференціальних рівнянь і її застосувань до вивчення коливань різних фізичних і механічних систем.

Загальна якісна теорія так званих динамічних систем розроблялася багатьма вченими, наприклад, з 1912 р. — американським математиком Дж. Д. Бірґгофом (1884—1944).

Існування й аналітичність розв'язків широкого класу ДРЧП так званого еліптичного типу з 1904 р. досліджував вітчизняний математик С. Н. Бернштейн (1880—1968).

Глибокими й важливими за своїми наслідками є дослідження російських учених М. В. Келдиша (1911—1978) і М. О. Лаврентьєва (1900—1980) про стійкість розв'язку задачі Діріхле, з теорії коливань, аеродинаміки, теорії хвиль на поверхні важкої рідини тощо, С. Л. Соболева (1908—1989) і І. Г. Петровського (1901—1973) про залежність розв'язку мішаних задач від початкових і крайових умов. С. Л. Соболев розробив новий метод інтегрування ДРЧП як лінійних, так і нелінійних, ввів низку нових понять: узагальнена функція, узагальнена похідна, узагальнений розв'язок ДРЧП, узагальнений диференціальний оператор та ін.

А. М. Тихонов (1906—1993) пов'язав теорію рівнянь теплопровідності з актуальними питаннями фізики та геофізики. Частина його праць присвячена доведенню теорем існування для різних типів ДРЧП за допомогою топологічного принципу нерухомої точки.

Новий метод (метод функціонально інваріантних розв'язків) інтегрування деяких задач теорії поширення хвиль у пружних середовищах з плоскими межами розробили В. І. Смирнов (1887—1974) та С. Л. Соболев.

Праці М. Є. Жуковського (1847—1921) і С. О. Чаплигіна (1869—1942) з аеродинаміки та авіації, гідрографії і гідравліки (тиск повітряної течії на крило літака) сприяли створенню теорії граничних задач аналітичних функцій і сингулярних інтегральних рівнянь.

Важливі результати в цьому напрямі дістали математики І. І. Привалов (1891—1941), М. І. Мухелішвілі (1891—1976), М. В. Келдиш, Л. І. Седов (1907—1999), Ф. Д. Гахов (1906—1980), І. Н. Векуа (1907—1977). Значимим, що в розробці граничних задач теорії аналітичних функцій і сингулярних рівнянь від самого початку брали участь Д. Гільберт (1862—1943), А. Пуанкаре, А. Е. Нетер (1882—1935) та ін.

У 1923 р. італійський математик Ф. Дж. Трікомі (1897—1978) сформулював і частково дослідив зовсім нову крайову задачу для так званого рівняння Трікомі  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ . Згодом з'ясувалося, що ця задача відіграє важливу роль у газовій динаміці. Значних успіхів у розв'язанні цієї задачі досягли М. О. Лаврентьєв, А. В. Біцадзе (1916—1994), К. І. Бабенко (1919—1987) та ін.

Більшість задач теорії ДРЧП в замкненому вигляді зінтегрувати неможливо, тому подальша розробка наближених методів їх розв'язання залишається актуальною проблемою.

Не зупиняючися на характеристиці численних наближених методів теорії ДРЧП та аналізі наукових результатів, добутих у цьому напрямі, назвемо лише імена деяких учених: І. Г. Бубнов (1872—1919), Б. Г. Гальоркін (1871—1945) (метод Бубнова—Гальоркіна), М. В. Келдиш, І. Г. Петров (1912—1986), О. М. Крилов (1863—1945), Л. В. Канторович (1912—1986), І. Г. Петровський (1901—1973), Л. А. Люстерник (1899—1981), О. О. Ладиженська (1922—2004), А. М. Тихонов (1906—1993), М. М. Боголюбов (1909—1992), О. А. Самарський (1919), Ю. О. Митропольський (1917).

Постійний розвиток математичної фізики зумовлений її тісним зв'язком із фундаментальними напрямками досліджень у суміжних областях природничих наук.

Наведений короткий історичний огляд теорії ДРЧП, зрозуміло, не дає повного уявлення про зміст праць вітчизняних і зарубіжних математиків у різних сферах рівнянь математичної фізики. Але він показує всю ширину розмаху їх наукової творчості в цій області, оригінальність проблематики й значення їхніх відкриттів як для науки, так і для її практичних застосувань.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
2. *Вірченко Н. О.* Основні методи розв'язання задач математичної фізики. — К.: КПІ, 1997. — 370 с.
3. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979. — 392 с.
4. *Гончаренко В. М.* Основы теории рівнянь з частинними похідними. — К.: Вища шк., 1995. — 352 с.
5. *Кошляков С. Н., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высш. шк., 1970. — 710 с.
6. *Мартинсон Л. К., Магов Ю. И.* Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. — 368 с.
7. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высш. шк., 1977. — 432 с.
8. *Окунев Л. Я.* Вища алгебра. — К.: Наук. думка, 1950. — 250 с.
9. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961. — 300 с.
10. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. — М.: Высш. шк., 1964. — 560 с.
11. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння в задачах. — К.: Либідь, 2003. — 504 с.
12. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. — К.: Либідь, 2003. — 600 с.
13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 4 т. — М.: Наука, 1981. — Т. 1. — 656 с.; Т. 4. — 550 с.
14. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1975. — 128 с.
15. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 444 с.
16. *Стеглов В. А.* Основные задачи математической физики. — М.: Наука, 1983. — 432 с.
17. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 468 с.
18. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 724 с.

## З М І С Т

Вступ .....	3
Основні позначення .....	5

### Г л а в а 1

#### КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

1.1. Основні поняття й означення теорії ДРЧП .....	8
1.2. Класифікація ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними .....	10
1.3. Зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними .....	14
1.4. Класифікація та зведення до канонічного вигляду квазілінійних ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними .....	23
1.5. Класифікація ДРЧП вищого порядку .....	26

### Г л а в а 2

#### РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

##### Т е м а 1

##### *Задачі, які приводять до рівнянь гіперболічного типу*

2.1. Коливання струни .....	31
2.2. Хвильові процеси в дво- та тривимірному середовищах .....	34

##### Т е м а 2

##### *Хвильові процеси в необмежених областях*

2.3. Вільні коливання нескінченної струни. Метод характеристик (метод поширення хвиль) .....	37
2.4. Вимушені коливання нескінченної струни .....	57
2.5. Задача Коші для хвильового рівняння в просторі. Формула Кірхгофа .....	59
2.6. Задача Коші для рівняння вільних коливань мембрани. Формула Пуассона .....	64
2.7. Теорема про єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння .....	74

2.8. Коректність постановки задачі Коші .....	77
2.9. Загальна постановка задачі Коші .....	79
2.10. Постановка задачі Гурса .....	83
2.11. Метод послідовних наближень для задачі Гурса .....	85
2.12. Метод Рімана .....	90
2.13. Задача Дарбу для рівняння коливання струни .....	97
2.14. Задача Коші з даними на гіперплощині. Перетворення Лоренца .....	101

### **Тема 3**

#### ***Хвильові процеси в обмежених і напівобмежених областях***

2.15. Постановка мішаних задач .....	109
2.16. Метод характеристик .....	112
2.17. Вільні коливання скінченної струни. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є) .....	128
2.18. Вимушені коливання скінченної струни .....	137
2.19. Мішані задачі зі стаціонарними неоднорідностями .....	141
2.20. Загальна схема методу відокремлення змінних .....	143
2.21. Вільні коливання прямокутної мембрани. Метод відокремлення змінних .....	163
2.22. Єдиність розв'язку мішаних задач. Інтеграл енергії .....	174
2.23. Неперервна залежність розв'язку мішаних задач від вихідних даних .....	179

### **Глава 3**

#### **РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ**

##### **Тема 1**

##### ***Задачі, які приводять до рівнянь параболічного типу***

3.1. Рівняння теплопровідності .....	187
3.2. Рівняння дифузії .....	190
3.3. Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності .....	193

##### **Тема 2**

##### ***Процеси дифузії та поширення теплоти в обмежених областях***

3.4. Постановка мішаних задач .....	196
3.5. Єдиність розв'язку мішаних задач і його неперервна залежність від початкової та крайових умов .....	199
3.6. Інтегрування першої мішаної задачі для рівняння теплопровідності у випадку одновимірного простору. Метод Фур'є .....	201

### Тема 3

#### Процеси дифузії та поширення теплоти в необмежених областях

3.7. Постановка задачі Коші та єдиність її розв'язку.....	205
3.8. Існування розв'язку задачі Коші .....	207
3.9. Фізична інтерпретація фундаментального розв'язку (3.55) однорідного рівняння теплопровідності та формули Пуассона (3.54).....	213
3.10. Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкової температури та інтенсивності внутрішніх джерел теплоти .....	216
3.11. Поширення теплоти в напівскінченному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею .....	217

### Глава 4

#### РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

### Тема 1

#### Фізичні процеси, які приводять до рівнянь еліптичного типу.

#### Постановка задач

4.1. Рівняння для потенціалу тяжіння.....	229
4.2. Потенціальний потік нестисливої рідини .....	231
4.3. Стационарне теплове поле. Постановка крайових задач для рівнянь еліптичного типу .....	232
4.4. Оператор Лапласа у сферичних і циліндричних координатах .....	235

### Тема 2

#### Властивості гармонічних функцій

4.5. Принцип максимуму та його наслідки .....	237
4.6. Існування розв'язку задачі Діріхле для круга. Метод Фур'є.....	244
4.7. Інтеграл Пуассона .....	249
4.8. Формули Гріна .....	253
4.9. Основна формула теорії гармонічних функцій .....	255
4.10. Теорема Гарнака про послідовності гармонічних функцій та теорема Ліувілля .....	260
4.11. Функція Гріна оператора Лапласа .....	264
4.12. Інтегрування задачі Діріхле для кулі. Формула Пуассона .....	269
4.13. Деякі наслідки формул Пуассона .....	277
4.14. Друга крайова задача для рівнянь еліптичного типу .....	280
4.15. Розв'язки внутрішньої та зовнішньої задач Неймана для кулі.....	283

### Тема 3

#### Теорія потенціалу

4.16. Потенціал об'єму простого й подвійного шарів. Основні означення.....	287
4.17. Об'ємний потенціал .....	289
4.18. Потенціал подвійного шару .....	297

4.19. Потенціал простого шару .....	307
4.20. Нормальна похідна потенціалу простого шару .....	309
4.21. Логарифмічний потенціал .....	314
4.22. Зведення крайових задач для рівнянь еліптичного типу до інтегральних рівнянь .....	317

## Глава 5

### НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

#### Тема 1

##### *Структурні та якісні властивості нелінійних рівнянь другого порядку*

5.1. Структурні властивості розв'язків деяких класів нелінійних ДРЧП .....	329
5.2. Деякі прості приклади .....	331
5.3. Рівняння мішаного типу .....	335

#### Тема 2

##### *Нелінійні моделі дифузійних процесів*

5.4. Теорія нелінійної теплопровідності .....	342
5.5. Задача Стефана про фазовий перехід .....	345
5.6. Поширення теплових збурень у нелінійних середовищах .....	350
5.7. Просторова локалізація теплових збурень .....	356
5.8. Задача нелінійної теплопровідності з об'ємним поглинанням .....	361
5.9. Рівняння типу «реакція—дифузія» .....	366

#### Тема 3

##### *Деякі наближені методи розв'язування задач для квазілінійних рівнянь*

5.10. Метод Роте (метод прямих) .....	372
5.11. Двосторонній метод наближеного інтегрування мішаних задач .....	376
5.12. Асимптотичні методи дослідження нелінійних ДРЧП .....	382

#### ДОДАТКИ

Д. 1. Коливання круглої мембрани. Метод Фур'є .....	393
Д. 2. Поширення теплоти в нескінченному однорідному циліндрі .....	398
Д. 3. Поширення теплоти в однорідній кулі .....	400
Д. 4. Вільні коливання камертона .....	402
Д. 5. Малі прогини поперечно навантаженої пластинки .....	405
Д. 6. Плоскі хвилі. Дисперсія хвиль .....	407
Д. 7. Короткий історичний огляд .....	412
Список рекомендованої літератури .....	419



Навчальне видання

**Перестюк Микола Олексійович**  
**Маринець Василь Васильович**

---

---

**ТЕОРІЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ**

---

---

Художній редактор *Т. О. Шур*  
Технічний редактор *Л. І. Швець*  
Коректори *А. В. Бородавко, А. І. Бараз, Л. Ф. Іванова*  
Комп'ютерна верстка *М. Б. Гутмана*

Піш. до друку 26.01.2006. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір офс. № 1. Гарнітура Таймс.  
Офсетний друк. Умов.-друк. арк. 24,65. Обл.-вид. арк. 21. Тираж 1400 пр.  
Вид. № 4188. Зам. № 6-55.

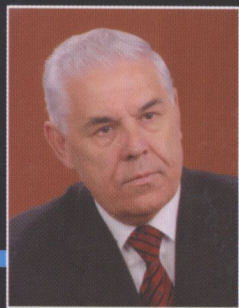
Видавництво «Либіль»  
01004 Київ, вул. Пушкінська, 32

Свідоцтво про державну реєстрацію № 404 від 06.04.2001

Віддруковано на ВАТ „Білоцерківська книжкова фабрика”,  
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.



**Перестюк Микола Олексійович** — доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України, заслужений діяч науки і техніки України, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Сфера наукових інтересів: широке коло складних та актуальних задач теорії диференціальних рівнянь і нелінійної механіки. Автор понад 200 наукових і науково-методичних праць, серед яких 3 монографії, 20 підручників і навчальних посібників для вищих і середніх навчальних закладів.



**Маринець Василь Васильович** — доктор фізико-математичних наук, професор, заслужений працівник народної освіти України, завідувач кафедри диференціальних рівнянь і математичної фізики Ужгородського національного університету. Сфера наукових інтересів — конструктивні наближені методи в теорії диференціальних рівнянь. Автор майже 100 наукових і науково-методичних праць, серед яких 2 монографії та 7 навчальних посібників і підручників.

