

Е. Г. ПЕТРОВ, М. В. НОВОЖИЛОВА, І. В. ГРЕБЕННІК

# МЕТОДИ І ЗАСОБИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

у соціально-  
економічних  
системах



 «Техніка»

519-8(075)

П 30

Е. Г. ПЕТРОВ, М. В. НОВОЖИЛОВА, І. В. ГРЕБЕННІК

# МЕТОДИ І ЗАСОБИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

## у соціально- економічних системах

ЗА РЕДАКЦІЮ  
Д-РА ТЕХН. НАУК,  
ПРОФ. Е. Г. ПЕТРОВА



519.8(075) П 30 2004

Петров Е.Г. Методи і засоби прийняття рішен

Рекомендовано  
Ліністерством освіти  
науки України  
як навчальний посібник  
для студентів вищих  
навчальних закладів,  
що навчаються  
за спеціальностями  
"Економічна кібернетика",  
"Менеджмент організацій",  
"Фінанси"

Київ  
"Техніка"  
2004

ББК 65.30я7

ПЗ0

УДК 519.7:330.4(07)

Гриф надано Міністерством освіти і науки України,  
лист № 14/18. 2-636 від 27.03.02 р.

Розповсюдження та тиражування без офіційного дозволу видавництва заборонено

Рецензенти:

академік НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Л. Рвачев* (Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України);

д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. Г. Руткас* (Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна)

**Петров Е. Г., Новожилова М. В., Гребеннік І. В.**

ПЗ0 **Методи і засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах:**  
Навч. посібн. / За ред. Е. Г. Петрова – К.: Техніка, 2004. – 256 с.

ISBN 966-575-146-8

416574

Викладено єдині методологічні позиції основ теорії прийняття рішень, моделі, методи та алгоритми якої широко застосовуються в усіх галузях людської діяльності. Послідовно і комплексно на інженерному рівні висвітлено всі етапи підготовки і прийняття рішень – від формування функції цілі до визначення екстремального за якістю рішення. Теоретичний матеріал супроводжується розглядом прикладів застосування математичного апарата для аналізу і керування соціально-економічними і технічними системами.

Для студентів вищих навчальних закладів, що навчаються за спеціальностями “Економічна кібернетика”, “Менеджмент організацій”, “Фінанси”, а також “Інформаційні керуючі системи і технології”, “Інформаційні технології проектування”, “Системи керування та автоматизації” та ін. Може бути корисним для аспірантів і інженерів, що застосовують методи прийняття рішень.

**ББК 65.30я**

ISBN 966-575-146-8



© Е. Г. Петров, М. В. Новожилова,  
І. В. Гребеннік. 2004

Будь-яка цілеспрямована діяльність людини, від побутової до професійної, є безперервною послідовністю прийняття і реалізації рішень. Тому саме вміння приймати ефективні рішення відрізняє висококваліфікованих фахівців і життєво успішних людей. Ця обставина визначила давній і незгасаючий інтерес до розробки формальних методів, правил, алгоритмів, процедур, яким можна навчити і взяти за альтернативу суб'єктивного інтуїтивного мистецтва прийняття рішень. У процесі досліджень було встановлено, що прийняті рішення розрізняються за значущістю наслідків, особливістю ситуацій, в яких приймається рішення, ступенем повноти і точністю вихідної інформації, але з формальної точки зору мають загальну методологію та інструментарій реалізації. При цьому більшість формальних процедур прийняття рішень є інваріантними до предметної галузі.

Широке розповсюдження сучасної обчислювальної техніки, її інтенсивне використання в усіх сферах як засобу автоматизації інтелектуальної діяльності людини, надало додатковий імпульс вивченню і формалізації процесів прийняття рішень. У цілому все сказане визначає особливу важливість вивчення методів і засобів прийняття рішень при підготовці фахівців різних напрямків.

Проблема прийняття рішень є синтетичною, її теорія базується на таких наукових напрямках як системний аналіз, математичне моделювання, багатофакторне оцінювання, математичне програмування, дослідження операцій, теорія ігор, Загальна теорія прийняття рішень як самостійний науковий напрямок перебуває в стадії становлення. Багато в чому це визначило фрагментарність вивчення методів прийняття рішень, розпилення цілісної проблеми по численних навчальних курсах. У даному навчальному посібнику зроблена спроба системного, цілісного розгляду проблеми прийняття рішень, починаючи з формування цілі та закінчуючи методами вибору оптимального рішення.

Навчальний посібник складається з трьох частин. У першій викладено системологічний аналіз і питання структуризації проблеми прийняття

рішень. Центральне місце займає опис методів і процедур прийняття рішень в умовах багатокритеріальності на основі формування узагальненої скалярної багатофакторної оцінки – функції цілі.

Наступні частини присвячені методам, алгоритмам і обчислювальним процедурам розв'язування задач безумовної (частина II) і умовної (частина III) оптимізації. Така послідовність викладення навчального матеріалу обумовлена тим, що методи безумовної оптимізації в багатьох випадках є інструментальними засобами розв'язування задач умовної оптимізації.

У другій частині висвітлено основні найбільш поширені методи та алгоритми чисельного розв'язування задач пошуку екстремуму функцій однієї і багатьох змінних як з використанням перших (градієнтні методи) і других (методи Ньютона) похідних, так і без використання їх (методи нульового порядку).

У третій частині розглянуто постановки задач лінійного і нелінійного математичного програмування і методи їх розв'язування (симплекс-метод, методи умовного градієнта, квадратичне програмування, штрафних функцій, лінеаризації).

Виклад теоретичного навчального матеріалу супроводжується розглядом задач і прикладів їх розв'язування.

Навчальний посібник узагальнює багаторічний досвід викладання курсів системного аналізу, математичного моделювання, теорії прийняття рішень студентам різних спеціальностей. Наведений матеріал досить повно відображає зміст навчальних програм відповідних дисциплін для спеціальностей “Економічна кібернетика”, “Менеджмент організацій”, “Фінанси”, а також напрямків “Комп'ютерні науки” і “Комп'ютерна інженерія”: “Інформаційні керуючі системи і технології”, “Інформаційні технології проектування”, “Системи управління та автоматики” тощо.

Навчальний посібник, безперечно, буде корисний студентам і аспірантам вищих технічних і економічних навчальних закладів. Крім того, він може бути використаний при перепідготовці фахівців у післядипломній системі освіти.

**Розділ 1. СИСТЕМОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕДУРИ  
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ**

Вся діяльність – це послідовність актів прийняття рішень. Коли встати вранці, як одягтися, яким маршрутом їхати на роботу, поточні або унікальні професійні проблеми – все вимагає прийняття рішень. Вони відрізняються складністю, можливими наслідками, але з формальної точки зору можуть бути подані одною узагальненою моделлю, інваріантною конкретному змісту проблеми прийняття рішень. Аналіз дає змогу визначити такі основні задачі узагальненої процедури прийняття рішення: формування цілі, її аналіз і формалізацію; визначення множини можливих шляхів її досягнення (множини рішень); формування оцінки (міри), що дозволяє порівнювати (ранжирувати) можливі рішення між собою за якістю (*задача оцінювання*); вибір із можливої множини екстремального, тобто найкращого за якістю єдиного рішення (*задача оптимізації*).

У теорії прийняття рішень сукупність перерахованих задач утворює загальну проблему прийняття рішень. Теоретичною основою розв'язання трьох перших задач є системний аналіз, а четвертої – теорія математичного програмування. Прикладні методи розв'язання специфічних задач прийняття рішень у різних предметних галузях, зокрема в економіці, вивчаються такими науковими напрямками, як дослідження операцій і теорія ігор. У даному розділі проведено системологічний аналіз узагальненої процедури прийняття рішень.

**1.1. ВИЗНАЧЕННЯ АБСТРАКТНОЇ ЦІЛЕСПРЯМОВАНОЇ СИСТЕМИ**

Розглянемо узагальнену процедуру ухвалення рішення як синтез абстрактної системи, що забезпечує досягнення заданої цілі. За такої постановки питання виникає потреба у формальному визначенні абстрактної системи.

Розрізняють природні (нецілеспрямовані) і штучні, створені для досягнення деякої цілі (цілеспрямовані), системи. Надалі розглядатимемо тільки цілеспрямовані системи.

Залежно від цілей аналізу і рівня абстрагування відомі різні визначення системи. Найбільш загальним із них є теоретико-множинний опис [1]. У цьому разі *система* – це множина  $M$  однорідних або різнорідних елементів, на якій є реалізованою множина відношень (зв'язків)  $R$ , що упорядковують елементи в структуру. При цьому структура  $C$  має множину властивостей  $P$ , що дають змогу досягти заданої цілі. Отже, упорядкування множини елементів і відношень між ними утворюють деяку структуру вигляду

$$C = M \times R, \quad (1.1)$$

яка може бути інтерпретована як нецілеспрямована система. Це пояснюється тим, що кожна структура має деякі властивості, у тому числі системні, тобто такі, що не впливають безпосередньо з властивостей її елементів, а є наслідком упорядкування і взаємодії елементів на базі реалізованих відношень. Таким чином, будь-яка структура є *нецілеспрямованою системою*. Прикладом є сонячна система, елементи якої – це сонце, планети й інші космічні тіла, а відношення описуються законами Кеплера.

Якщо ціль системи задана, то відображення її на множину властивостей визначає деяку підмножину властивостей  $\wp \subset P$ . Саме ця підмножина  $\wp$  дає змогу досягти цілі. Тут розв'язується задача усвідомленого (цілеспрямованого) синтезу цілеспрямованої системи, тобто системи з властивостями, що забезпечують досягнення цілі. Тобто *цілеспрямована система* може бути визначена як упорядкована множина

$$S = \langle (M \times R) \times P \rangle, \quad (1.2)$$

причому первинним для її синтезу є задання множини властивостей.

Прикладом цілеспрямованої системи є будь-яка економічна система. Її елементами є суб'єкти економіки, множину відношень утворюють виробничі, фінансові, соціальні та інші відношення, які разом визначають структуру економіки. Залежно від конкретного набору елементів і відношень економічна структура має унікальні властивості, наприклад, є капіталістичною або соціалістичною. Ціллю економічної системи є задоволення потреб суспільства.

Конкретизація теоретико-множинного опису системи пов'язана з заданням множин  $M$ ,  $R$ ,  $P$ . При цьому вказані множини є скінченними і підлягають інформативному опису тільки тоді, коли визначений рівень деталізації множини елементів. Зокрема для користувача персональний комп'ютер

можна розглядати як систему, що складається з чотирьох елементів, – системного блока, монітора, принтера, системи управління (клавіатура і мишу); конструкторові потрібен більш докладний рівень елементного опису і так до атомно-молекулярного рівня, на якому створюється процесор. Кожному елементному рівню відповідає множина відношень. Вибір рівня опису визначається цілями і задачами, для розв’язування яких використовується опис.

Аналогічно залежно від цілей аналізу будь-яка економічна система може розглядатися на макро- і мікроекономічному рівнях, що вимагає відповідного рівня деталізації елементів і відношень економічної структури.

Будь-який опис системи являє собою абстрактну модель. Така модель тісно пов’язана з визначенням абстрактної мови.

*Абстрактною мовою* називається деякий алфавіт (скінченна множина понять), на якому задана граматики, тобто правила упорядкування і маніпулювання знаками алфавіту. Будь-яке висловлення, записане абстрактною мовою, називається *формулою*. Набір формул, що описують те або інше явище, процес тощо, є *абстрактною моделлю*. Залежно від мови моделі можуть бути вербальними (природно-мовними), графічними, математичними тощо. Отже, опис будь-якої системи пов’язаний із *синтезом моделі*. Загальні закономірності і методи синтезу, аналізу, оцінки адекватності моделей, організації експериментів з метою отримання нової інформації вивчається науковим напрямком, відомим як “моделювання систем”.

Незалежно від мови опису розрізняють два види моделей: імітаційні та оптимізаційні.

*Імітаційні* моделі описують на певному рівні абстракції та ступеню докладності взаємозв’язок елементів, відношень і властивостей, тобто встановлюють залежність вигляду  $P = F(M, R)$ , де  $F$  – оператор зв’язку, і орієнтовані на одержання відповідей на питання типу “що буде, якщо...”. Прикладом є Кеплерівська модель сонячної системи.

На відміну від цього *оптимізаційні* моделі є орієнтованими на одержання відповідей на питання типу “що потрібно, щоб ...”, тобто визначення таких елементів, відношень і властивостей, які забезпечать досягнення бажаної цілі, причому найкращим, найефективнішим способом. Це пов’язано з визначенням і приєднанням до імітаційної моделі оптимізаційного функціонала вигляду  $\Theta[P] \rightarrow \text{extr}_{M,R}$ , що називається *цільовою*

*функцією* або *функцією цілі*. Прикладом оптимізаційної моделі є модель виробничого підприємства, що дає змогу з урахуванням усіх внутрішніх



і зовнішніх обмежень визначити таку номенклатуру продукції, яка максимізує прибуток підприємства. У цьому разі прибуток є цільовою функцією.

Теорія прийняття рішень допускає, що імітаційна модель системи, яка оптимізується, задана (розроблення такої моделі є задачею фахівця конкретної предметної галузі). Проблема полягає в синтезі цільової функції і розв'язанні оптимізаційної задачі, тобто визначенні таких значень характеристик системи, які її екстремізують. Дослідження загальних методологічних, алгоритмічних і обчислювальних аспектів розв'язання зазначеної проблеми надають теорії прийняття рішень міждисциплінарний характер і складають її предмет.

Проблема синтезу системи містить такі задачі: визначення цілі; аналіз цілі і визначення властивостей, які повинна мати система для її досягнення; визначення множини структур, що мають необхідні властивості; вибір з них найкращого варіанта. Вони цілком збігаються з задачами узагальненої процедури прийняття рішень, наведеними на початку розділу. Це означає, що проблема прийняття рішень може бути інтерпретована як проблема синтезу абстрактної системи.

Проаналізуємо з позицій системного аналізу кожен з виділених задач.

## 1.2. АНАЛІЗ ОСНОВНИХ ЗАДАЧ СИНТЕЗУ СИСТЕМИ

**Формування цілі.** Ціль – це деякий бажаний стан, досягнення якого вимагає виконання цілеспрямованих дій. Стан системи описується значеннями її властивостей, що обмірюються у визначеній метриці, тобто за допомогою визначеної міри. Якщо фактичний і бажаний стани не збігаються, виникає проблемна ситуація, вирішення якої полягає в усуненні даної неузгодженості. У цьому випадку бажаний стан є ціллю, а спосіб її досягнення – розв'язком проблеми.

**Визначення властивостей.** На початковому етапі ціль найчастіше визначається узагальненими природно-мовними (вербальними) висловленнями. Подальший конструктивний цілеспрямований аналіз пов'язаний із виділенням і виміром потрібних для досягнення цілі функціональних якостей (властивостей). У загальному випадку, як правило, не вдається виділити єдину властивість, яка досить повно характеризує систему. Тому доводиться визначати деяку множину властивостей, кожна з яких характеризує частинну (локальну) функціональну якість, а разом вони досить повно

характеризують систему в цілому. Отже, система характеризується множиною властивостей

$$\wp = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}. \quad (1.3)$$

Частинні властивості за визначенням мають різний функціональний зміст, вимірність, інтервали можливих значень і вимірюються в різних шкалах.

Наявність того або іншого набору властивостей визначає належність до класу систем визначеної цільової спрямованості, наприклад, цифрові обчислювальні машини, виробничі підприємства тощо. Конкретні значення даних властивостей, які обмірюються в певних шкалах, характеризують ступінь досягнення цілі (функціональна досконалість системи в цілому).

Етап виділення необхідних властивостей системи є дуже важливим тому, що набір властивостей визначає як ступінь відповідності цілі, так і потенційну ефективність системи. Набір має бути обмеженим, тобто містити тільки найважливіші, визначальні властивості, а також досить повно характеризувати систему та її можливості. Досягнення такого компромісу в загальному випадку, особливо для складних, масштабних систем, є далеко нетривіальною задачею. При проектуванні систем його пошук починається на передпроектних етапах: техніко-економічного обґрунтування (ТЕО) і розроблення технічного завдання (ТЗ). Дані етапи визначаються державним стандартом, який регламентує процес проектування і передбачає передпроектне обстеження, виявлення і вивчення прототипів, аналіз наукової і патентної літератури, врахування результатів попередніх науково-дослідних (НДР) і дослідно-конструкторських (ДКР) робіт.

**Визначення множини допустимих рішень.** Як впливає із загального визначення системи, її властивості можуть бути реалізовані тільки на упорядкованій множині елементів і відношень, тобто структур (1.2). Задання конкретної підмножини властивостей  $\wp$ , якою має володіти система, шляхом їх відображення на універсуми (повні множини) елементів  $M$  і відношень  $R$ , визначає їх підмножини  $M$  і  $R$ , на яких реалізована система з заданими властивостями. У свою чергу упорядкована множина

$$C' = M \times R \quad (1.4)$$

утворює множину структур. Множина  $C'$  містить усі можливі варіанти побудови системи, що відрізняються якісно (наборами елементів та/або відношень) або кількісно, тобто значеннями параметрів (характеристик)

елементів та/або відношень при однаковому їхньому складі. Ця множина визначає *область існування* системи з заданими властивостями. Не всі розв'язки, що належать області існування  $C'$ , є можливими, допустимими або доцільними з технічних, технологічних, соціальних, економічних, екологічних, морально-етичних та інших міркувань. Урахування цих обмежень виділяє з множини  $C'$  підмножину  $X$ , що надалі називатиметься *допустимою множиною рішень*. Обмеження, які виділяють  $X$ , можуть бути задані в *явному вигляді*, що безпосередньо виключає з розгляду деякі елементи, відношення або структури (наприклад, обмеження на тривалість робочої зміни або вимога, щоб усі розрахунки здійснювалися в національній валюті), або в *неявному вигляді* (наприклад, обмеження на вартість системи в цілому, екологічні вимоги).

Формально обмеження в загальному випадку задаються комбінацією рівностей і нерівностей у вигляді лінійних або нелінійних співвідношень різної складності. Коректність обмежень визначається умовами

$$X \subset C' \text{ або } X \cap C' \neq \emptyset. \quad (1.5)$$

Перша з них означає, що множина допустимих рішень  $X$  має бути підмножиною області існування  $C'$ , а друга, що перетин цих множин повинен бути непорожнім.

У протилежному разі синтез системи з необхідними властивостями в принципі не є можливим.

Зауважимо, що відображення підмножини властивостей  $\wp$  на множини  $M$  і  $R$  та визначення підмножини структур  $C'$ , на яких вони є досяжними, може мати різний ступінь визначеності, що зумовлює складність задачі синтезу системи.

Якщо задання класу системи, її цілі й основних характеристик (властивостей) досить повно й однозначно визначає її складові частини (елементи) та їх взаємозв'язок (відношення), як, наприклад, при створенні стандартного персонального комп'ютера або виробничого підприємства – це задача *прикладного синтезу* (проектування) системи. У протилежному разі потрібно проведення спеціальних наукових досліджень зі встановлення елементів і відношень, на яких є досяжними задані властивості.

В останньому випадку можуть бути невідомі границі множин  $M$  і  $R$  (їх уточнюють у процесі прикладних досліджень), а також саме існування структури з необхідними властивостями  $\wp$ . Відповідь на це питання шукається в процесі фундаментальних наукових досліджень.

**Формування критеріїв оцінки допустимих рішень.** Кінцева мета задачі прийняття рішень полягає у виборі з множини допустимих рішень  $X$  єдиного кращого (ефективного) рішення  $x^0 \in X$ .

Досягнення зазначеної цілі пов'язане з формалізацією поняття “краще”, “ефективне” рішення, тобто формуванням деякої міри, що дає змогу об'єктивно порівнювати ефективність рішень між собою. Такою мірою виступають критерії оцінки ефективності рішень.

Очевидно, що поняття краще, ефективне рішення означає найбільш повне досягнення мети. При цьому не байдуже якою ціною (витрат фінансів, ресурсів, часу, інтелекту) мета досягається. Отже, критерій ефективності рішень має враховувати як позитивний ефект (ступінь досягнення цілі), так і витрати в широкому сенсі.

Як відзначалося, ціль системи характеризується частинними властивостями  $p_i$ , а рівень її досягнення – їх кількісними значеннями. Таким чином, порівняння рішень можна здійснювати за досягнутим рівнем частинних властивостей. Тому частинні властивості системи, зведені до вигляду, що припускає вимір у кількісних або якісних шкалах, називатимемо *частинними критеріями*. Ця група критеріїв оцінює корисні функціональні властивості, заради яких створювалася система. Позначимо їх

$$K_{\Phi} = \{k_{1\Phi}, \dots, k_{m\Phi}\}. \quad (1.6)$$

Як впливає з визначення системи, реалізація властивостей, а отже і  $K_{\Phi}$ , можлива тільки на деякій структурі (рішенні)  $x \in X$ . Реалізація кожної структури вимагає в загальному випадку фінансових, матеріальних, часових, екологічних витрат тощо, які в сукупності визначають “ціну”, яку потрібно “заплатити” за досягнення мети на деякому рівні. Рівень витрат кожного з ресурсів оцінюється частинними критеріями  $k_{lB}$ , які утворюють множини

$$K_B = \{k_{1B}, \dots, k_{lB}\}. \quad (1.7)$$

В окремому випадку множини  $K_{\Phi}$  і  $K_B$  можуть складатися з одного елемента, але в загальному випадку це множини різнорідних за змістом, а отже, вимірюваних у різних шкалах і інтервалах частинних критеріїв, що мають різну вимірність. Тому кожне рішення  $x \in X$  характеризується набором різнорідних частинних критеріїв

$$K = \{K_\Phi \cup K_B\} = \{k_i\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n = m + L. \quad (1.8)$$

Вибір системи частинних критеріїв – це неформалізована, евристична задача. Її розв'язання ускладнюється необхідністю задовольняти такі су-перечливі умови:

повноту – набір критеріїв повинен досить повно характеризувати рі-шення;

мінімальність – набір має містити якомога меншу кількість критеріїв;

ненадмірність – різні критерії не повинні враховувати однакові якості;

операціональність – кожен частинний критерій повинен мати зрозуміле формулювання, ясний і однозначний зміст, характеризувати визначені якості;

декомпозиційність – набір критеріїв має припускати можливість спро-щення вихідної задачі оцінювання альтернатив шляхом розбивання (деком-позиції) на окремі більш прості частини;

вимірність – критерій має припускати можливість оцінювання (кількіс-ної або якісної) інтенсивності якості, що характеризується. Це означає, що для будь-якого рішення  $x \in X$  задані відображення  $f: X \rightarrow K$  і, відповід-но, функціональна залежність  $k_i(x) = f_i(x)$ .

Перераховані вимоги суперечливі й не можуть бути задоволені одно-часно. Вимога мінімальності орієнтує на агрегування (об'єднання) крите-ріїв, що часто призводить до протиріччя з вимогами операціональності та вимірності. Агреговані критерії часто мають менш зрозумілий та однознач-ний зміст і складніше вимірюються. З іншого боку, вимоги повноти й опе-раціональності орієнтують на збільшення кількості критеріїв. Тому при фор-муванні набору критеріїв у реальних задачах доводиться йти на компроміси, основою для яких є цілі, аналіз й особливості конкретної системи.

**Вибір оптимального рішення.** Кінцевою метою розв'язання загаль-ної задачі прийняття рішень є вибір із допустимої множини рішень  $X$  єдиного найкращого, тобто екстремального за обраними частинними кри-теріями рішення

$$x^0 = \arg \operatorname{extr}_{x \in X} \{k_i(x)\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.9)$$

Якщо задача є однокритеріальною, тобто  $n = 1$ , то вона має єдине рі-шення. За умови  $n > 1$ , тобто коли задача багатокритеріальна, її однозначне рішення можна одержати тільки в окремих випадках, а в загальному випад-ку вона не має єдиного рішення. Це питання розглядатиметься у наступ-ному розділі.

### 1.3. СТРУКТУРА МНОЖИНИ ДОПУСТИМИХ РІШЕНЬ

У загальному випадку множина допустимих рішень  $X$  є композицією двох підмножин: погоджених рішень (області згоди)  $X^s$  і компромісних рішень (області компромісів)  $X^c$ .

Областю згоди  $X^s$  називається підмножина множини допустимих рішень  $X$ , в якій один або кілька частинних критеріїв можна поліпшити без погіршення якості інших частинних критеріїв.

Областю компромісів  $X^c$  називається підмножина  $X$ , в якій жодний частинний критерій  $k_i(x)$  неможливо поліпшити без погіршення значення хоча б одного іншого частинного критерію. Можливість існування такої підмножини довів італійський економіст Парето, тому її часто називають областю Парето або множиною Парето-оптимальних рішень.

Для підмножин  $X^s$  і  $X^c$  виконуються умови

$$X = X^s \cup X^c; \quad X^s \cap X^c = \emptyset, \quad (1.10)$$

які означають, що об'єднання підмножин утворює допустиму множину і будь-яке рішення  $x \in X$  належить тільки одній з підмножин.

Для випадку двох критеріїв  $k_1(x)$  і  $k_2(x)$ , кожний з яких максимізується, загальну структуру допустимої множини  $X$  показано на рис. 1.1. В окремих випадках множина  $X$  може складатися тільки з області згоди  $X^s$  ( $X^c = \emptyset$ ) (рис. 1.2) або компромісу  $X^c$  ( $X^s = \emptyset$ ) (рис. 1.3).

За визначенням область згоди  $X^s$  взагалі не може містити екстремальних рішень, тому що кожне  $x \in X^s$  можна поліпшити хоча б за одним

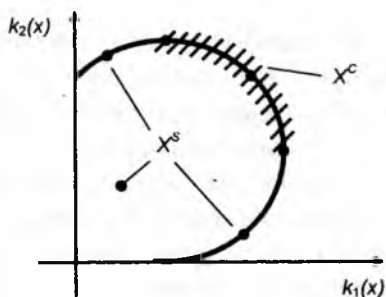


Рис. 1.1. Загальна структура множини  $X$

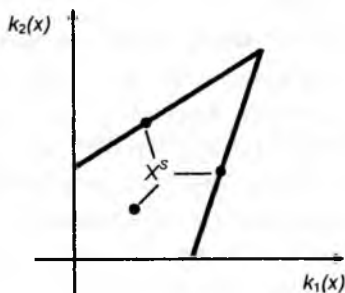


Рис. 1.2. Приклад множини  $X$ , що складається тільки з  $X^s$

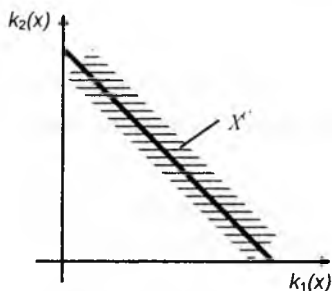


Рис. 1.3. Приклад множини  $X$ , яка складається тільки з  $X^c$

критерієм. Тому розв'язок задачі (1.9) збігається з областю компромісів  $X^c$ , і якщо вона не порожня, тобто  $X^c \neq \emptyset$ , то усі  $x \in X^c$  є розв'язками задачі. Отже, задача багатокритеріальної оптимізації (1.9) має єдиний розв'язок тільки тоді, коли  $X = X^s$  ( $X^c = \emptyset$ ). У протилежному випадку розв'язок не єдиний. Це означає, що задача є некоректно поставленою за Адамаром.

Коректними за Адамаром називаються задачі, для яких існує єдиний стійкий розв'язок, тобто в заданій метриці малим варіаціям вхідних змінних відповідають малі варіації вихідних змінних.

Невиконання хоча б однієї з перелічених умов робить задачу некоректною. Так, якщо множина  $X$  містить область компромісів  $X^c$ , задача (1.9) є некоректною за другою ознакою.

Як показав А. Тихонов, у загальному випадку некоректну задачу можна звести до коректної введенням деяких додаткових співвідношень, що називаються регуляризуючими правилами. При розв'язанні задачі багатокритеріальної оптимізації (1.9) за таке регуляризуюче правило виступає схема компромісу, що визначає правило вибору з множини  $X^c$  єдиного "компромісного" за значенням частинних критеріїв рішення. Саме ця обставина визначила назву множини  $X^c$ .

Існують два підходи до вибору єдиного рішення з області компромісів  $X^c$ , а саме: *конструктивний* (формальний) і *неконструктивний* (евристичний).

У першому випадку визначається формальне регуляризуюче правило – схема компромісів, що гарантує вибір рішення  $x \in X$  такого, що  $x \in X^c$ . У другому випадку вибір єдиного рішення здійснюється "особою, що приймає рішення" (ОПР) на основі інтуїтивних, евристичних (неформальних) міркувань. При цьому ОПР – це людина або група людей (колективний орган), які уповноважені приймати рішення. Як правило, підготовку рішень здійснює "експерт" – фахівець (фахівці), що аналізує рішення, може давати поради, але не має повноважень приймати рішення.

При реалізації неконструктивного підходу до вибору компромісного рішення обов'язковим етапом підготовки рішень експертом є виділення з

допустимої області рішень  $X$  області компромісів  $X^c \subset X$ , оскільки тільки в ній знаходяться ефективні рішення. Для формальних схем вибору компромісних рішень ця процедура не є обов'язковою, тому що більшість таких схем гарантує вибір рішень  $x \in X^c$ , але часто є бажаною з обчислювальних міркувань.

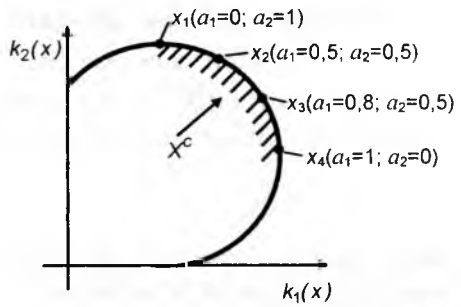


Рис. 1.4. Формування області  $X^c$

Розглянемо математичні моделі визначення області компромісів  $X^c$  на множині допустимих рішень  $X$ .

**Математична модель визначення точної області компромісів.** Існує декілька моделей визначення  $X^c$ , але найбільш відомою і строгою є модель, яку запропоновано Ю. Гермейером [2]

$$X^c = \bigcup_{a \in A} \arg \max_{x \in X} \sum_{i=1}^n a_i k_i(x), \quad (1.11)$$

де  $a = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  – безрозмірні вагові коефіцієнти частинних критеріїв  $k_i(x)$ , які є визначеними на множині

$$A = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a_i \leq 1, \\ \sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad \forall i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Задача зводиться до визначення екстремумів лінійного функціонала  $L(x) = \sum_{i=1}^n a_i k_i(x)$  при різних  $a \in A$ . Об'єднання цих екстремальних рішень (рис. 1.4) утворює область компромісів.

Розглянута модель має дві особливості: високу трудомісткість, що визначається дискретністю варіювання параметрів  $a_i$  і нелінійно збільшується при зростанні числа  $n$  частинних критеріїв; модель є правильною тільки тоді, коли множина  $X$  є опуклою. У протилежному разі слід використовувати інші, більш складні моделі.

Зазначені недоліки можна подолати, якщо визначати не точну, а наближену область компромісів.



**Визначення наближеної області компромісів.** Процедура побудови наближеної області компромісів  $X^P$  полягає у визначенні не всієї множини точок  $x \in X^c$ , а тільки рішень, які визначають межу області. Умовою коректності такої процедури є

$$X^c \subset X^P, \quad (1.13)$$

тобто повне включення точної області компромісів у наближену. Один із можливих методів розв'язування цієї задачі є таким.

На множині допустимих рішень  $X$  послідовно розв'язуються  $n$  однокритеріальних оптимізаційних задач за кожним частинним критерієм  $k_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,

$$x_i^0 = \arg \max_{x \in X} k_i(x). \quad (1.14)$$

Для цього в моделі (1.11) досить покласти  $a_i = 1$  і тоді відповідно до (1.12) всі інші коефіцієнти дорівнюватимуть нулеві. Для кожного рішення  $x_i^0$  обчислюються значення всіх інших частинних критеріїв, які позначимо  $k_j(x_i^0) = k_{ji}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Отримані результати заносяться в табл. 1.1.

#### 1.1. Результати розрахунків наближеної області компромісів $X^P$

$k_i(x)$ , $i = \overline{1, n}$	$k_1(x)$	$k_2(x)$	...	$k_n(x)$
$k_1(x)$	$k_{11}$	$k_{12}$	...	$k_{1n}$
$k_2(x)$	$k_{21}$	$k_{22}$	...	$k_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
$k_n(x)$	$k_{n1}$	$k_{n2}$	...	$k_{nn}$

Таблиця складається у такий спосіб: кожний рядок утворюють значення  $i$ -го частинного критерію у точках екстремуму за всіма частинними критеріями. Екстремальне значення критерію досягається на головній діагоналі. Наприклад, перший рядок містить значення критерію  $k_1(x)$  у точках  $k_{11} = k_1(x_1^0)$ ,  $k_{12} = k_1(x_2^0)$ , ...,  $k_{1n} = k_1(x_n^0)$ , де  $x_1^0$ ,  $x_2^0$ ,  $x_n^0$  – рішення, екстремальні відповідно за 1, 2, ...,  $n$ -м критеріями.

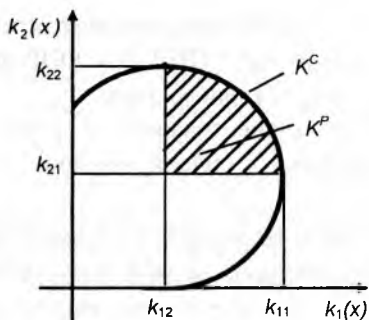


Рис. 1.5. Наближена область компромісів на опуклій множині  $X$

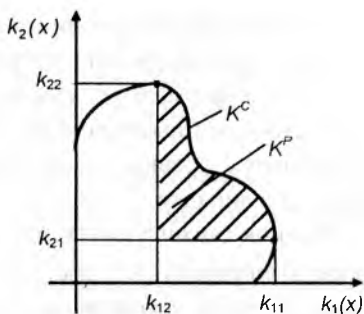


Рис. 1.6. Наближена область компромісів на неопуклій множині  $X$

У кожному рядку значення частинного критерію  $k_i(x)$  змінюються від екстремального  $k_{ii}(x)$  (найкращого) до найгіршого  $k_{i\text{нг}}$ . Множини цих значень за всіма  $i = \overline{1, n}$  є межами відображення наближеної області компромісів  $X^P$  на простір критеріїв  $K = \{k_i(x)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Наближена область компромісів  $X^P$  у просторі частинних критеріїв задається обмеженнями

$$x \in X, k_{i\text{нг}} \leq k_i(x) \leq k_{ii}, i = \overline{1, n}. \quad (1.15)$$

Вид відповідної обмеженням (1.15) наближеної області компромісів для опуклої і неопуклої множини  $X$  відповідно показано на рис. 1.5 і 1.6.

Область  $K^P$  містить у собі  $K^C$ , тому що вона утворена екстремальними значеннями всіх частинних критеріїв, що, як випливає з (1.11), є достатньою умовою. Водночас наближена область більша за область компромісів, оскільки містить у собі, як видно з рис. 1.5 і 1.6, частину області згоди.

#### 1.4. ПРИНЦИПИ РЕАЛІЗАЦІЇ КОНСТРУКТИВНОГО ПІДХОДУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

У розд. 1.3 показано, що задача багатокритеріальної оптимізації (1.9) є некоректною, тому що у загальному випадку не забезпечує визначення єдиного оптимального рішення з допустимої множини  $X$ . Цю некоректність можна усунути шляхом регуляризації задачі, тобто введенням деякої додаткової інформації, математичних співвідношень або правил, що дають

416574

змогу забезпечити вибір єдиного рішення. При реалізації неконструктивного підходу джерелом регуляризаційної інформації є ОПР. Але ОПР цю інформацію не формалізує, а використовує на інтуїтивному рівні.

На відміну від цього конструктивний підхід орієнтовано на визначення формальних правил вибору єдиного рішення з області компромісів. Можливі два випадки.

1. Рішення ранжуються за порядком спадання чи зростання якості на множині компромісу  $X^c$  або, у загальному випадку, на всій допустимій множині  $X$ , тобто визначається строгий  $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n$  або нестрогий  $x_1 \succ x_2 \sim x_3 \succ x_4 \succ \dots \succ x_n$  порядок, де  $\succ$  і  $\sim$  є знаками відповідно переваги й еквівалентності; потім знаходять екстремальний (крайній) елемент ряду.

2. Безпосередньо визначають екстремальне рішення  $x^0 \succ \forall x \in X$ .

Загальний підхід до розв'язання цієї проблеми полягає в трансформації багатокритеріальної задачі в однокритеріальну зі скалярним критерієм. Це обумовлено двома причинами. По-перше, значення скалярного кількісного критерію можна інтерпретувати як точку на числовій осі, і ранжування таких точок є очевидним, тому що відношення переваги й еквівалентності перетворюються відповідно у відношення нерівності ( $>$ ) і рівності ( $=$ ). По-друге, усі методи пошуку екстремуму орієнтовані на скалярну функцію.

Існує декілька способів трансформації багатокритеріальних оптимізаційних задач в однокритеріальні. Розглянемо основні з них.

**Принцип головного критерію** базується на виділенні головного критерію і переведенні всіх інших критеріїв у обмеження. Для цього проводиться аналіз конкретних особливостей багатокритеріальної задачі, із множини частинних критеріїв вибирається один – найважливіший, який береться за єдиний критерій оптимізації. Для кожного з інших частинних критеріїв призначається граничне значення, нижче якого він не може опустатися. Отже, всі частинні критерії, крім одного, перетворюються в обмеження, що додатково звужують множину допустимих рішень  $X$ . Тоді вихідна багатокритеріальна задача (1.9) перетворюється в однокритеріальну

$$x^0 = \arg \operatorname{extr}_{x \in X} k^*(x), \quad k_i(x) \geq (\leq) k_{i, \text{нг}}(x), \quad i \neq \overline{1, n-1}, \quad (1.16)$$

де  $k^*(x)$  – оптимізаційний скалярний критерій;  $k_{i, \text{нг}}(x)$  – найгірші допустимі значення частинних критеріїв-обмежень; знак “ $\geq$ ” використовується для критеріїв, що потрібно максимізувати, а знак “ $\leq$ ” – мінімізувати.

Вибір головного (оптимізаційного) критерію і рівнів обмежень  $k_{i\text{нг}}(x)$  для всіх інших критеріїв є суб'єктивною операцією, здійснюваною експертами або ОПР. Слід зазначити, що можна розглянути кілька різних варіантів і порівняти результати.

Реалізуючи розглянутий метод, потрібно звертати особливу увагу на те, щоб допустима множина рішень, яка задана частинними критеріями-обмеженнями, не виявилась порожньою.

**Функціонально-вартісний аналіз.** Вихідна множина частинних критеріїв  $K = \{k_i(x)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , що за визначенням досить повно характеризує ефективність допустимих рішень  $x \in X$  у цілому, розбивається на дві підмножини:  $K_\Phi = \{k_j(x)\}$ ,  $j = \overline{1, m}$  і  $K_B = \{k_l(x)\}$ ,  $l = \overline{1, L}$ ;  $m + L = n$ . Перша група критеріїв  $K_\Phi$  характеризує функціональну якість рішення, тобто ступінь досягнення цілі системи, що аналізується, а друга група  $K_B$  – витрати, потрібні для реалізації рішення  $x$ , тобто досягнення цілі (більш докладно це питання розглянуто в розд. 1.2, формули (1.6) і (1.7)). З кожної з зазначених підмножин виділяється один головний критерій; позначимо їх відповідно  $K_\Phi^*$  і  $K_B^*$ , а інші частинні критерії переводяться в обмеження. Одержуємо оптимізаційну задачу з двома скалярними критеріями. Отже, виникає потреба у зведенні побудованої задачі до однокритеріальної. У функціонально-вартісному аналізі використовуються такі оптимізаційні критерії.

1. Якщо обидва критерії  $K_\Phi^*$  і  $K_B^*$  мають однакову вимірність або їх можна звести до однакової вимірності, то використовується узагальнений оптимізаційний критерій

$$K_1(x) = K_\Phi^*(x) - K_B^*(x), \quad (1.17)$$

а оптимальне рішення визначається за схемою

$$x_1^0 = \max_{x \in X^*} [K_\Phi^*(x) - K_B^*(x)], \quad (1.18)$$

де  $X^*$  – звужена додатковими обмеженнями область допустимих рішень.

Критерій  $K_1(x)$  може бути інтерпретований як прибуток системи.

2. Якщо критерії  $K_\Phi^*$  і  $K_B^*$  мають різну вимірність, використовується критерій

$$K_2(x) = \frac{K_{\Phi}^*(x)}{K_B^*(x)}, \quad (1.19)$$

а оптимальне рішення має вигляд

$$x_2^0 = \max_{x \in X^*} \left[ \frac{K_{\Phi}^*(x)}{K_B^*(x)} \right]. \quad (1.20)$$

Критерій  $K_2(x)$  являє собою нормований на одиницю витрат ефект системи.

3. В окремому випадку для зведення двокритеріальної задачі до однокритеріальної у функціонально-вартісному аналізі використовується принцип головного критерію. Тоді один із двох розглянутих критеріїв  $K_{\Phi}^*$  або  $K_B^*$  перетворюється в додаткове обмеження, і оптимізаційні задачі мають відповідно вигляд

$$x_3^0 = \min_{\substack{x \in X^* \\ K_{\Phi}^* \geq K_{\Phi}^{\Pi}}} K_B^*(x); \quad (1.21)$$

$$x_4^0 = \max_{\substack{x \in X^* \\ K_B^* \leq K_B^{\Pi}}} K_{\Phi}^*(x), \quad (1.22)$$

де  $K_{\Phi}^{\Pi}$ ,  $K_B^{\Pi}$  – допустимі рівні відповідних критеріїв.

Функціонально-вартісний аналіз застосовується при дослідженні соціально-економічних і технічних систем. Це зумовлено тим, що для багатьох технічних, соціально-економічних систем характерна однакова якісна залежність ефекту  $K_{\Phi}^*$  від витрат  $K_B^*$ , що описується логістичною (іноді її називають S-подібною) кривою, наведеною на рис. 1.7.

При вдалому виборі головних критеріїв функціонально-вартісний аналіз таких систем є наочним і має гарну змістовну інтерпретацію. Зокрема в економіці логістичні криві використовуються для опису процесів із насиченням [3].

У загальному випадку ця залежність широко використовується для аналізу *життєвого циклу систем*, що починається в момент зародження ідеї (принципу) створення системи, містить у собі етапи реалізації, інтенсивного розвитку, морального старіння (насичення функціональної ефективності

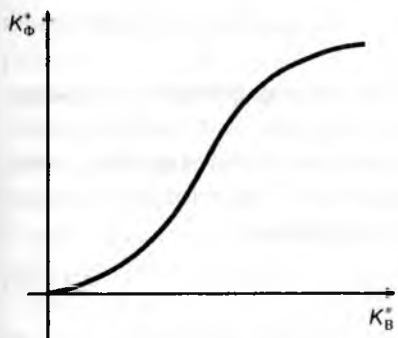


Рис. 1.7. Логістична (S-подібна) крива



Рис. 1.8. Схема життєвих циклів системи

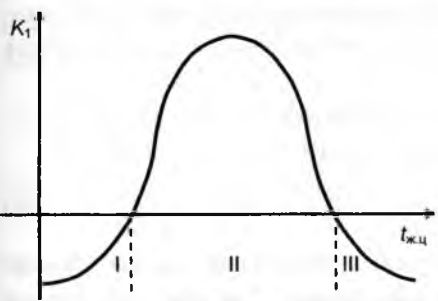


Рис. 1.9. Зміна критерію  $K_1$

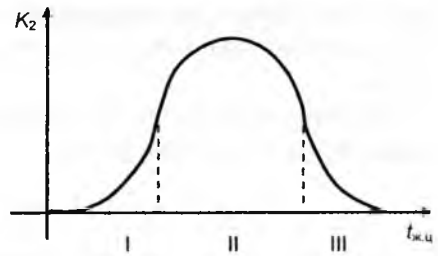


Рис. 1.10. Зміна критерію  $K_2$

пов'язане з вичерпанням можливостей базового принципу) і завершується заміною її новою, більш прогресивною системою. Соціально-економічний і технічний прогрес заснований на послідовній заміні систем, що морально старіють, новими, більш прогресивними й ефективними (рис. 1.8).

При цьому поряд із задачами оцінювання і порівнювання ефективності різних варіантів рішень на всіх етапах (розроблення, створення, модернізація, реінжиніринг) життєвого циклу виникають специфічні задачі стратегічного планування розвитку, тобто визначення моментів і розмірів витрат на нове розроблення, модернізацію існуючих систем, заміну їх новими тощо. Аналіз логістичної залежності в межах життєвого циклу ( $t_{жц}$ ) системи дає змогу побудувати графіки характерної зміни критеріїв ефективності (1.17) і (1.19) (рис. 1.9 і 1.10 відповідно). На цих рисунках I, II, III етапи відповідно проектування і створення; розвитку; морального старіння.

Аналіз цих залежностей дає інформацію для прийняття стратегічних рішень.

**Принцип послідовної оптимізації (лексикографічного упорядкування).** Ідея цього методу полягає в трансформації багатокритеріальної оптимізаційної задачі в упорядковану послідовність однокритеріальних. Для цього всі частинні критерії упорядковуються в послідовності спадання важливості, тобто встановлюється лінійний порядок

$$k_1 \succ k_2 \succ \dots \succ k_n, \quad (1.23)$$

де  $\succ$  – знак відношення переваги.

У цій послідовності розв'язуються однокритеріальні оптимізаційні задачі за кожним частинним критерієм. Метод послідовної оптимізації зводиться до правила упорядкування слів за алфавітом при створенні словників, тому його іноді називають методом лексикографічного упорядкування рішень.

Відповідно до принципу послідовної оптимізації з рішень  $u \in X$ ,  $v \in X$  перше більш переважно, тобто  $u \succ v$ , якщо виконуються умови [4]

$$k_j(u) = k_j(v), \quad k_i(u) > k_i(v), \quad j = \overline{0, i-1}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.24)$$

Звідси найкраще рішення визначається за наступною схемою. На першому кроці з вихідної множини допустимих рішень  $X$  виділяється підмножина  $x_1^0$  рішень, які є еквівалентними (рівноцінними) за першим (найважливішим) критерієм. Для цього розв'язується однокритеріальна оптимізаційна задача

$$x_1^0 = \arg \max_{x \in X} k_1(x). \quad (1.25)$$

Якщо множина  $x_1^0$  містить понад одне рішення, переходимо до наступного етапу, тобто розв'язуємо задачу вибору еквівалентних рішень за другим по важливості критерієм, але вже з множини  $x_1^0$ :

$$x_2^0 = \arg \max_{\substack{x \in X \\ x \in x_1^0}} k_2(x). \quad (1.26)$$

У загальному випадку

$$x_i^0 = \arg \max_{\substack{x \in X \\ x \in x_{i-1}^0}} k_i(x), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.27)$$

Оптимізація продовжується доти, поки на  $i$ -му кроці не дістанемо єдине рішення або не вичерпаються всі критерії. Якщо всі частинні критерії вичерпані, але єдине рішення не отримано, формуються додаткові критерії.

Отримане єдине рішення береться як найкраще (оптимальне). Якщо треба ранжувати всю множину рішень  $x \in X$ , то отримане найкраще рішення виключається з  $X$ , і на множині рішень, що залишилися, повторюється вищеописана процедура. Потім визначаємо друге за якістю рішення і так далі, поки не будуть упорядковані всі рішення.

Коли вже на перших кроках оптимізації знайдено єдине рішення, усі наступні частинні критерії втрачають сенс. Тут може бути застосована *схема поступки*. Відповідно до цієї схеми ОПР призначає допустимий рівень зниження  $\Delta k_i(x)$  частинного критерію, за яким отримано вищезазначене єдине рішення, у порівнянні з екстремальним значенням цього критерію

$$x_{i+1}^0 = \arg \max_{x \in X} [k_{i+1}(x)], \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (1.28)$$

за умови  $k_i(x) > k_i(x_i^0) - \Delta k_i(x)$ .

Реалізацію схеми поступки для випадку двокритеріальної задачі оптимізації  $k_1(x) > k_2(x)$  показано на рис. 1.11. Як бачимо, призначення поступки за критерієм  $k_1(x)$  істотно розширює область можливих рішень (показана штрихуванням) за критерієм  $k_2(x)$ . Вибір розміру поступки є евристичною операцією, яка здійснюється ОПР і залежить від особливостей задачі оптимізації. Залежність  $k_i(x_i^0) = f(\Delta k_{i-1}(x))$  має неявний характер і у більшості випадків не є апіорно передбаченою. Тому для вибору значення поступки  $\Delta k_i(x)$  часто використовуються людино-машинні процедури, коли ОПР призначає деякий ряд значень поступки і, аналізуючи результати оптимізації для кожного з них, приймає рішення про доцільний рівень поступки.

Принцип послідовної оптимізації широко застосовується в ситуаціях, коли ОПР має у своєму розпорядженні тільки якісну інформацію про важливість частинних критеріїв.

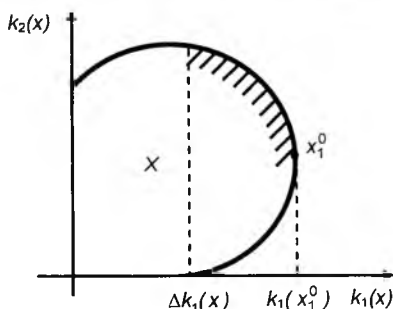


Рис. 1.11. Реалізація схеми поступки



**Формування узагальненого скалярного критерію, що враховує всі різні частинні критерії.** У цьому випадку єдиний скалярний критерій  $\bar{K}$  формується як функціонал частинних критеріїв

$$\bar{K} = F[k_i(x)], \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.29)$$

Це найбільш загальний і універсальний підхід до розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації, відомий як *проблема багатofакторного оцінювання*. Центральною задачею цієї проблеми є синтез (*ідентифікація*) моделі формування узагальненої оцінки (1.29). Розглянемо це питання у наступному розділі.

### **Запитання для самоперевірки**

1. Дайте вербальне і теоретико-множинне визначення абстрактної цілеспрямованої системи.
2. Дайте визначення абстрактної моделі. Чим відрізняються імітаційні та оптимізаційні моделі?
3. Що таке допустима множина рішень? Які умови коректності її задання?
4. Що таке локальні (частинні) критерії? Як вони формуються? Які вимоги мають задовольняти?
5. Дайте визначення областей компромісів і згоди. Якій з цих областей належить оптимальне рішення? Чому?
6. Наведіть ознаки коректно поставленої математичної задачі. Чому задача багатокритеріальної оптимізації є некоректною?
7. Назвіть основні підходи до розв'язування (регуляризації) задачі багатокритеріальної оптимізації. Дайте їх характеристику.

## Розділ 2. ФОРМУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ОЦІНОК І ОБҐРУНТУВАННЯ МОДЕЛЕЙ ВИБОРУ КОМПРОМІСНИХ РІШЕНЬ

### 2.1. СИНТЕЗ МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО КРИТЕРІЮ

Розв'язування задачі синтезу (ідентифікації) будь-якої математичної моделі в загальному випадку вимагає реалізації таких етапів:

висування гіпотези про характер залежності вхідних і вихідних змінних;

визначення виду (структури) математичної залежності, тобто розв'язання задачі *структурної ідентифікації* оператора  $F$  (1.29);

обчислення кількісних характеристик (параметрів) моделі – *задача параметричної ідентифікації*.

Теоретичною основою формування узагальнених багатокритеріальних скалярних оцінок є *теорія корисності*. Дана теорія заснована на гіпотезі, запропонованій Джоном фон Нейманом і О. Моргенштерном [5] про те, що кожна локальна характеристика рішення, оцінювана частинними критеріями, має для ОПР деяку цінність (корисність), яка може бути обміряна кількісно. Тому існує узагальнена кількісна оцінка переваги рішення. Іншими словами, якщо рішення  $x_1, x_2 \in X$  і  $x_1$  має перевагу перед  $x_2$ , то

$$x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow P(x_1) > P(x_2), \quad (2.1)$$

де  $\succ$  – знак відношення порядку (читається:  $x_1$  має перевагу перед  $x_2$ );  $P(x)$  – кількісна оцінка корисності рішення; знак  $\Leftrightarrow$  означає, що правильним є як пряме, так і обернене твердження.

Отже, узагальнена корисність є кількісною оцінкою переваги рішення. У межах цієї гіпотези слід обґрунтувати правило (метрику), за яким формується корисність рішення в просторі частинних критеріїв  $k_i(x)$ , тобто розв'язати задачу структурної та параметричної ідентифікації функції корисності

$$P(x) = G[k_i(x)], \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Важливим є те, що об'єктивної метрики не існує, а принцип ранжування рішень визначає переваги конкретної особи, що приймає рішення (ОПР). Отже, теорія корисності і вибір конкретного виду функцій корисності (оператора  $G$ ) носить аксіоматичний характер, причому аксіоматика відображає переваги конкретної ОПР. У зв'язку з цим може виникнути сумнів доцільності реалізації конструктивного підходу. Тому в основу теорії корисності покладено гіпотезу про існування "раціонального" поведіння, що припускає близькість і відтворюваність рішень різних ОПР в однакових умовах.

У межах цієї гіпотези формалізація процесу ранжування рішень, по-перше, допомагає ОПР усвідомити свої переваги (провести *інтроспективний аналіз*) або ідентифікувати їх за допомогою деяких методів, а по-друге, після вибору метрики оцінка всіх  $x \in X$  робиться в одному базисі і є кількісною, а не якісною. Процедура оцінки може реалізуватися без участі ОПР, у тому числі і за допомогою комп'ютера, її можна поширити на різні подібні ситуації вибору рішень. Таким чином, з'являється можливість автоматизації процесів прийняття рішень.

Розглянемо системологічні підстави вибору виду функції корисності.

*Структурна ідентифікація* будь-якої математичної моделі, у тому числі функції корисності, передбачає необхідність розв'язування двох взаємозалежних задач: виділення значущих чинників, які впливають на вихідні дані моделі; визначення структури, тобто виду оператора, що встановлює зв'язок між вхідними і вихідними даними моделі.

Розв'язування перерахованих задач пов'язане з висуванням деяких гіпотез. Одна з них заснована на припущенні, що узагальнена корисність будь-якого рішення  $x \in X$  визначається значеннями частинних критеріїв, що характеризують рішення, і в загальному випадку ці характеристики не рівнозначні, тобто мають різну "вагу" для ОПР. Це означає, що формула (2.2) може бути записана у вигляді

$$P(x) = G[\lambda_i, k_i(x)], \quad \overline{i = 1, n}, \quad (2.3)$$

де  $\lambda_i$  – коефіцієнт ізоморфізму, що зводить різномірні частинні критерії  $k_i(x)$  до єдиної метрики і враховує їх "вагу";  $G$  – оператор, який визначає вид залежності.

Наступний крок передбачає ідентифікацію виду оператора  $G$ .

Одним з найбільш відомих є дві форми функції корисності:  
*адитивна*

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i k_i(x) \quad (2.4)$$

*і мультиплікативна*

$$P(x) = \prod_{i=1}^n \lambda_i k_i(x). \quad (2.5)$$

Очевидно, найбільш інформативною є ситуація, коли  $\lambda_i$  задано числовими значеннями. Оскільки  $\lambda_i$  стала, то (2.5) набуде вигляду

$$P(x) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \prod_{i=1}^n k_i(x). \quad (2.6)$$

Звідси видно, що мультиплікативна форма не дає змоги врахувати інформацію про перевагу (важливість частинних критеріїв), тому що  $\prod_{i=1}^n \lambda_i$  є постійним масштабним множником, а отже, всі критерії стають рівнозначними, що не відповідає зазначеній гіпотезі.

Ще однією особливістю мультиплікативної форми є недопустимість повної компенсації одних критеріїв іншими. На відміну від адитивної функції, якщо хоча б один із частинних критеріїв дорівнює нулеві, вся мультиплікативна функція набуває нульового значення. В окремому випадку, коли всі частинні критерії мають однакову важливість і їх значення додатні та відмінні від нуля, адитивна і мультиплікативна оцінки реалізують однаковий лінійний порядок рішень на множині  $X$ , тобто є еквівалентними. Отже, адитивна функція корисності (2.4) є більш загальною й універсальною.

Залежно від конкретних умов формування як частинних оцінок  $k_i(x)$ , так і узагальнених функцій корисності може здійснюватися тим чи іншим способом, у тому числі на основі різних комбінацій адитивних і мультиплікативних функцій, наприклад:

$$P(x) = \prod_{j=1}^m k_j(x) \sum_{i=1}^n \lambda_i k_i(x); \quad (2.7)$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i k_i(x) + \lambda \prod_{j=1}^m k_j(x). \quad (2.8)$$

Відзначимо, що при функціонально-вартісному аналізі (розд. 1.4) критерій (1.17) є адитивним, а (1.19) – мультиплікативним.

Мультиплікативні критерії широко використовуються в економіці і техніці. Як приклади можна навести: критерій оцінки роботи, виконаної транспортною системою в тонно-кілометрах (добуток ваги вантажу і відстані, на яку його перевезено), витрат праці в людино-годинах (добуток числа працюючих на тривалість роботи) тощо.

Розглянемо адитивну форму (2.4) докладніше. Всі частинні критерії, як впливає з викладеного вище, описують різні властивості системи, її елементи і відношення, а, отже, мають різну вимірність, інтервали і шкали вимірювання, тобто не можуть бути порівняними між собою.

Таким чином, формула (2.4) коректна тільки тоді, коли  $\lambda_i$  враховують не тільки важливість частинних критеріїв, але і є коефіцієнтами ізоморфізму, тобто зводять різнорідні  $k_i(x)$  до єдиних розмірності й інтервалу виміру. Прикладом коефіцієнта ізоморфізму є ціна, що дає змогу звести до вартісного виразу деякий набір різнорідних товарів. Проте, у загальному випадку визначення значень таких коефіцієнтів ізоморфізму утруднено. Цю обставину можна подолати, якщо подати адитивну функцію у вигляді

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i k_i^H(x), \quad (2.9)$$

де  $k_i^H(x)$  – нормалізовані, тобто зведені до ізоморфного вигляду частинні критерії;  $a_i$  – безрозмірні вагові коефіцієнти відносної важливості частинних критеріїв, для яких виконуються обмеження

$$0 \leq a_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1. \quad (2.10)$$

Ізоморфізм частинних критеріїв означає, що вони мають однакову розмірність та інтервал можливих значень. Оскільки за визначенням  $a_i$  – безрозмірні коефіцієнти, то розмірності  $k_i^H(x)$  і  $P(x)$  мають збігатися, тобто  $k_i^H(x)$  характеризує локальну корисність  $i$ -ї характеристики рішень  $x$ :  $k_i^H(x) = p_i(x)$ . Відповідно до цього (2.9) набуває вигляду

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i p_i(x). \quad (2.11)$$

Модель оцінювання (2.11) є правильною тільки тоді, коли вагові коефіцієнти  $a_i$  частинних критеріїв  $p_i(x)$  задані точними кількісними значеннями. Носіями цієї інформації є ОПР, отже, потрібні деякі процедури її одержання, тобто розв'язування задачі параметричної ідентифікації моделі. З різних причин одержання точної кількісної інформації про  $a_i$  не завжди є можливим, тому в загальному випадку оцінювання виконують в умовах більшої або меншої невизначеності.

У цьому разі загальна модель визначення узагальненої корисності рішення  $x \in X$  має вигляд

$$P(x) = G[J(a_i), p_i(x)], \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.12)$$

де  $J(a_i)$  – інформація про взаємну важливість частинних критеріїв.

Полярними ситуаціями є випадки, коли  $a_i$  задані у вигляді точних кількісних значень та інформація про перевагу частинних критеріїв повністю відсутня. Між цими крайностями є множина ситуацій із різним ступенем невизначеності задання вагових коефіцієнтів. Отже, виникає проблема синтезу моделі оцінювання більш загальної, ніж адитивна функція корисності вигляду (2.11). Синтез такої моделі вимагає рішення таких задач:

*нормалізації*, тобто зведення до ізоморфного вигляду всіх частинних критеріїв  $k_i(x)$  і формування функцій локальної корисності  $p_i(x)$ ;

розроблення методів *параметричної ідентифікації* моделі, тобто методів одержання від ОПР інформації про коефіцієнти взаємної важливості частинних критеріїв  $a_i$ ;

визначення *структури моделі*, тобто ідентифікації вигляду оператора  $G$ , що зумовлює принцип формування функції корисності (2.12).

## 2.2. ВИМІРЮВАННЯ І ШКАЛЮВАННЯ ЧАСТИННИХ КРИТЕРІЇВ

За визначенням вихідною інформацією задачі прийняття рішень є задана допустима множина альтернатив (рішень)  $X$ . На цій множині потрібно встановити відношення порядку. У зв'язку з цим виникає потреба оцінки "якості" рішень  $x \in X$ .

Вважатимемо, що кожна конкретна альтернатива  $x \in X$  характеризується деяким набором частинних критеріїв, які досить повно описують її "якість". Вибір критеріїв залежить від предметної області, специфіки си-

туації прийняття рішень, цілей аналізу тощо. Тому методологія формування багатофакторної оцінки “якості” має бути інваріантною кількості та конкретному набору локальних критеріїв, що характеризують альтернативу.

Можливі два підходи до формування відношення порядку на множині допустимих альтернатив: відношення якісного порядку (ранжування альтернатив за перевагою, евристично реалізоване ОПР); відношення кількісного порядку, що передбачає зіставлення кожному конкретному наборові частинних критеріїв, який характеризує альтернативу, кількісної скалярної оцінки.

Другий підхід є більш загальним, крім порядку він дає змогу зазначити і “відстань” між альтернативами на числовій осі, кількісно оцінити силу переваги, тобто зазначити на скільки або у скільки разів одна альтернатива краща за іншу.

Головною умовою реалізації кількісного підходу є зведення всіх частинних критеріїв, незалежно від їх природи, до вигляду, що допускає кількісну скалярну оцінку  $\varphi: k_i \rightarrow R^1$ . Складність такої формалізації полягає у тому, що частинні критерії  $k_i$ , які характеризують альтернативу, можуть мати різну природу, отже, виникає проблема їх вимірювання.

*Вимірювання* – це порівняння характеристики, що вимірюється, з деяким еталоном. Система еталонів або еталонних значень утворює вимірвальну шкалу. Процес вимірювання частинного критерію  $k_i$  полягає у відображенні  $k: X \rightarrow B_k$ , що ставить у відповідність кожному рішенню  $x \in X$  його значення  $k(x)$ , яке належить множині значень  $B_k$ .

Усі шкали поділяють на два класи: якісні та кількісні. До *якісних* належать шкали класів (номінальна) та порядкова (рангова).

Еталонами *номінальної шкали* є деякі класи, кожному з яких надано унікальне ім’я (назва), а процес вимірювання полягає у віднесенні характеристики до одного з цих класів. Наприклад, шкали вимірювання статі (два класи: чоловіки, жінки).

Номінальна шкала дає змогу тільки класифікувати множину  $X$  на групи рішень з однаковими значеннями (іменами) ознаки (частинного критерію), що вимірюється. Вона не задає на них відношень переваги (домінування) або іншої інформації.

У багатьох випадках якісні еталони (класи) пов’язані природним упорядкуванням за ступенем прояви ознаки, що вимірюється. Наприклад, “дуже подобається”, “подобається”, “не подобається”, “дуже не подоба-

ється". Якщо ніякі інші співвідношення між еталонними значеннями ознаки не зафіксовані, то шкала називається *ранговою* або *порядковою*. Рангова шкала задає упорядковане за ступенем прояви ознаки, що вимірюється, угруповання рішень. Вона встановлює між ними відношення якісного порядку.

Градації ознаки характеризують різні стани досліджуваної системи, а їх упорядкування відображає послідовність допустимих переходів по сусідніх станах системи.

Варто розрізнати спрямовані й неспрямовані шкали порядку. У першому випадку перехід із стану в стан можливий тільки в одному напрямку. Наприклад, у разі вимірювання віку із застосуванням якісної шкали, заданої такими станами: діти ясельного, дошкільного, молодшого і старшого шкільних віків. У другому випадку можливий перехід у довільний сусідній стан, наприклад, якщо маємо шкалу вимірювання рівня прибутковості підприємства: дуже низький, низький, задовільний, середній, високий, дуже високий.

Якщо для значень ознаки визначена операція порівняння (на або у скільки разів одне значення більше від іншого), то вимірювальна шкала є кількісною. Інакше кажучи, множина значень кількісно обмірюваної ознаки наділена властивостями числової прямої.

Типізація *кількісних* шкал і порівняння їх значень засновані на поданні ознаки сім'єю відображень (а не єдиним відображенням) множини рішень у множину дійсних чисел, тобто для довільного  $k: X \rightarrow B_f$  множина  $B_f$  є числовою. При цьому відношення між значеннями ознаки мають перейти у відповідні числові відношення. Наприклад, "*i* еквівалентне *j*" ( $i \sim j$ ) – у відношення рівності ( $i = j$ ); "*i* гірше *j*" ( $i < j$ ) – у відношення "менше" ( $i < j$ ) тощо. У цьому разі числові значення несуть інформацію не тільки про факт переваги, але дають змогу визначити кількісну характеристику переваги.

Ознака як відображення задається множиною своїх допустимих перетворень. Тобто фіксується множина  $\Phi$  числових перетворень, що не змінюють інформацію про перевагу значень ознаки. Отже, ознака задається не тільки відображенням  $k: X \rightarrow B_f$ , але і різними відображеннями вигляду  $\varphi(f)$ , де  $\varphi \in \Phi$ , тобто для будь-якого рішення  $x \in X$  значення  $\varphi k(x)$  визначається як результат послідовного застосування обох перетворень:  $\varphi k(x) = \varphi(k(x))$ .



Множина допустимих перетворень  $\Phi$  характеризує тип шкали ознаки. Серед кількісних шкал можна виділити три основних типи. Шкала називається *інтервальною*, якщо  $\Phi$  складається з різних додатних лінійних функцій  $\varphi(k) = ak + b$ ,  $a > 0$ ,  $b$  – довільне; *відносною* або *подоби*, якщо  $\Phi$  включає тільки перетворення вигляду  $\varphi(k) = ak$ ,  $a > 0$ ; *абсолютною*, якщо  $\Phi$  має єдине тотожне перетворення  $\varphi(k) = k$ .

В інтервальній шкалі конкретне лінійне перетворення  $\varphi(k) = ak + b$  ознаки  $k$  визначається вибором констант  $a$  і  $b$ . Одна з них,  $b = \varphi(0)$ , характеризує нове місце розташування нуля, тобто точку відліку, константа  $a$  – масштаб. Кожний числовий інтервал  $(x, y)$  перетвориться в  $a$  разів переважаючий його інтервал  $(\varphi(x), \varphi(y))$ ;  $\varphi(x) - \varphi(y) = a(y - x)$ . У шкалі інтервалів співвідношення інтервалів для будь-яких значень залишається незмінним при будь-якому допустимому перетворенні: кожен змінюється в одне і те ж число  $a$  разів. Приклад шкали інтервалів – шкала вимірювання часу.

У шкалі подоби початок відліку не змінюється:  $\varphi(k) = ak$ , тому  $b = 0$ . Ознака, вимірювана у цій шкалі, визначена з точністю до масштабу, як, наприклад “маса”, “довжина” тощо.

В абсолютній шкалі вимірюються кількості об’єктів.

Зустрічаються й інші типи кількісних шкал, наприклад, із функцією перетворення  $\varphi(k) = e^{ak}$ ,  $a > 0$ . Логарифмуванням ця шкала зводиться до шкали відношень. До кількісних шкал природно відносити такі, у яких допустимі перетворення визначаються скінченим числом кількісних параметрів.

Якісні шкали – номінальна (найменувань) і порядкова (рангова) – також можуть бути відображені на числову вісь. Принципова відмінність полягає в тому, що цифри, які позначають можливі стани, є тільки “іменами” і не несуть кількісної інформації. Наприклад, значення номінальної ознаки “стать” можна закодувати будь-якими двома нерівними числами 0 та 1 або 20 і 18 тощо. Але ці числа не несуть інформації про перевагу тієї або іншої статі. Важливий тільки факт розходження цих чисел, але не їх кількісне співвідношення – угруповання людей за статтю залишається незмінним. Таке відображення називається *взаємно однозначним перетворенням*. Взаємна однозначність потрібна, щоб нерівні значення залишалися нерівними.

Для порядкової шкали цифрові “імена” мають нести інформацію про порядок проходження можливих еталонних станів. Таке відображення на числову вісь називається *монотонно зростаючим*.

Властивості розглянутих типів шкал якісних і кількісних класів допустимих перетворень наведені в табл. 2.1.

## 2.1. Вимірювальні шкали та їх властивості

Тип	Відношення порядку ознаки	Інформація про домінування ознаки	Тип перетворення $\varphi$
<i>Якісний клас</i>			
Номінальна	Не задано	Відсутня	Взаємно однозначне
Порядкова: неспрямована спрямована	Задано	Відсутня	Монотонно зростаюче
<i>Кількісний клас</i>			
Абсолютна	Задано	Кількісна	$\varphi(f) = f$
Відносна (подоби)	Задано	Кількісна	$\varphi(f) = af,$ $a > 0$
Інтервальна	Задано	Кількісна	$\varphi(f) = af + b.$ $a > 0,$ $b$ – будь-яке

Особливістю характеристик, вимірюваних у якісних шкалах, є те, що вони не містять інформації про домінування значень показників і, отже, у вихідному виді не можуть бути використані для ранжування альтернатив. Якісні шкали застосовують лише тоді, коли є додаткова інформація про домінування значень ознаки, а не просто про угруповання об’єктів. Наприклад, під час прийому на роботу може бути надана перевага статі або віку кандидата тощо. Проте у цьому разі для кількісного ранжування альтернатив виникає потреба оцінки ступеня домінування, тобто перехід до кількісної шкали. Для цього застосовують методи, засновані на теорії розмитих множин (лінгвістичних змінних) [7], або експертні оцінки.

На відміну від кількісних оцінок, що відповідають, як правило, об’єктивним вимірам показників, зазначені методи засновані на суб’єктивних оцінках фахівців.

Розглянемо більш докладно метод експертного оцінювання. Експертні оцінки визначають найчастіше в балах по шкалі. Значення (градації) баль-

ної шкали являють собою обмежений дискретний ряд чисел, що знаходяться одне від одного на однаковій відстані. Зазвичай при експертних оцінках за значення шкали беруть початковий відрізок натурального ряду або частину ряду цілих чисел, симетричну відносно нуля ( $0; \pm 1; \pm 2; \dots, \pm m$ ).

Приклад бальної оцінки – загальновідомі шкільні оцінки по 5-бальній або 12-бальній шкалі з градаціями (оцінками 1, 2, 3, 4, 5) або (1, 2, 3, ..., 12).

Розрізняють два види бальних оцінок. Згідно з першим оцінка здійснюється за об'єктивним критерієм, тобто індивідуальні оцінки є деякими флуктуаціями реальних значень. Розглянуті об'єкти порівнюють із загальноприйнятими еталонами, які відповідають градаціям шкали. Чим точніше охарактеризовані й оцінені можливі відхилення від еталонів, тим менше флуктуацій в оцінках, тим більше довіра до них. Шкільні оцінки є прикладом оцінок за еталонами (і відхиленнями від них), відповідність яких знанням формується, звичайно, евристично, з огляду на особистий досвід педагога. Тому оцінки знань, що даються різними педагогами, можуть відрізнитися, у зв'язку з чим потрібне описання відповідності оцінок знанням. На практиці оцінки дані одним експертом характеризуються деякими відхиленнями.

Бальну оцінку другого виду застосовують, коли не тільки немає загальноприйнятих еталонів, але й сумнівна навіть наявність деякого єдиного об'єктивного критерію, суб'єктивними відбитками якого є оцінки. При цьому безглуздом є саме питання про кількісне співвідношення оцінок. Наприклад, порівняння гастрономічного смаку різних блюд. Часто для оцінки застосовують рангову (порядкову) бальну шкалу.

Вважають, що вимірювання виконане у ранговій бальній шкалі, якщо множина допустимих перетворень  $\Phi$  складається з усіх монотонно зростаючих функцій, тобто, якщо  $\varphi(z) > \varphi(y)$ , то  $z > y$ .

Рангові оцінки порівнюють тільки як “більше – менше”. Таке співвідношення зберігається при монотонних перетвореннях. Безглуздо порівнювати довжини інтервалів між оцінками.

Розглянемо унікальний клас ознак, множина значень кожного з яких складається усього з двох елементів. Такі ознаки називаються *дихотомічними, бульовими* або *бінарними*.

Множина всіх взаємно однозначних перетворень дихотомічних ознак збігається з множиною лінійних перетворень. Взаємно однозначна відпо-

відність значень  $x_1, x_2$  значенням  $y_1, y_2$  може бути задана як лінійна з параметрами  $a$  і  $b$ , що задовольняють співвідношенням  $y_i = ax_i + b$  ( $i = 1, 2$ ), які при  $x_1 \neq x_2$  однозначно розв'язуються відносно  $a$  і  $b$ , причому при  $a \neq 0$   $y_1 \neq y_2$ . Це означає, що номінальна дихотомічна ознака насправді є вимірюваною в неспрямованій інтервальній шкалі. Аналогічно доводиться, що рангова (за домінуванням) дихотомічна ознака визначається за спрямованою шкалою інтервалів. Отже, якісні дихотомічні ознаки одночасно є кількісними.

Числове твердження є осмисленим (у загальній теорії вимірювань використовується термін *адекватність*), якщо його істинність (хибність) не змінюється за будь-якого допустимого перетворення чисел, які входять до нього. Тут йдеться саме про осмисленість числових тверджень ("менше", "більше" і т. п.), а не числових операцій ("+" , "×" тощо).

Допустимість перетворення конкретної ознаки визначається тими теоретичними закономірностями, в яких вона бере участь. Перетворення є допустимим, якщо закономірності не порушуються. У відповідності з вищевказаним можна відзначити, що перетворення ознаки (або, більш загально, усієї сукупності даних) допустиме, якщо воно не змінює отриманих описів.

### 2.3. ФОРМУВАННЯ ФУНКЦІЇ КОРИСНОСТІ ЧАСТИННИХ КРИТЕРІЇВ

Для комплексного аналізу даних, наприклад, для встановлення відношень порядку (ранжування) множини альтернатив, потрібно виконати перехід до одного типу даних, числового або якісного. Нині не розроблено комплексний аналіз даних без такого переходу. Тому надалі вважатимемо, що всі характеристики альтернатив є вимірюваними в кількісних шкалах або зведеними шляхом експертних оцінок до числового вигляду. Такі кількісні оцінки параметрів альтернативи  $x \in X$  називатимемо частинними критеріями і позначатимемо  $k_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Ці критерії утворюють множину  $K = \{k_1(x), \dots, k_n(x)\}$  оцінок. При цьому її структура однакова для всіх  $x \in X$ , тобто передбачається, що задане відображення  $\varphi: X \rightarrow K$ . Отже, всі альтернативи  $x \in X$  порівнянні між собою.

Подання всіх характеристик у вигляді числових критеріїв не вичерпує всіх труднощів ранжування множини альтернатив, що належать множині Парето. На множині суперечливих альтернатив (області компромісів)

ранжування пов'язане з формуванням деякої узагальненої скалярної оцінки виду, що враховує всі частинні критерії (оцінки) і формалізує уявлення ОПР про перевагу альтернатив. Одна з труднощів конструктивної реалізації такого підходу полягає в тому, що в загальному випадку критерії  $k_i(x)$  мають різний зміст, розмірність, інтервал і шкали вимірювання, тобто не можуть бути порівнянними між собою. Тому спочатку критерії потрібно звести до деякого загального базису (ізоморфного вигляду). Ця процедура має бути однотипною для всіх критеріїв, не залежати від їх змісту і відбивати уявлення ОПР про перевагу різних значень оцінки. Така базова оцінка може бути інтерпретована як *функція корисності* частинних критеріїв  $p[k_i(x)]$ , де  $p: k_i(x) \rightarrow R^1$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Обґрунтуємо вибір вигляду функції  $p$ .

Функція корисності частинних критеріїв має бути універсальною і добре пристосованою до урахування особливостей конкретних систем, їх цілей і критеріїв, тобто відповідати таким вимогам: мати єдиний інтервал змінювання  $[0, 1]$ ; бути безвимірною; інваріантною до вигляду екстремуму частинного критерію (мінімум або максимум).

Останнє означає, що незалежно від вигляду екстремуму, його найкращому значенню на множині  $X$  має відповідати максимальне (дорівнює 1), а найгіршому – мінімальне (дорівнює 0) значення функції корисності. Крім того, ця функція має давати змогу реалізувати як лінійні, так і нелінійні неспадні опуклі догори або донизу залежності корисності від абсолютного значення чинника.

Задача вибору функції корисності, що відповідає вищезазначеним вимогам, відома в теорії багатокритеріального оцінювання та оптимізації як *задача нормалізації частинних критеріїв*. При її розв'язанні передбачається (за умовчужанням), що залежність функції корисності від абсолютного значення частинного критерію завжди лінійна. Тому вибір функції здійснюється з класу лінійних функцій. Найчастіше використовується кількісна інтервальна шкала, якій відповідає перетворення вигляду

$$p(k_i) = b_i k_i(x) + c_i, \quad (2.13)$$

де  $b_i > 0$ ,  $c_i$  – довільні числа.

Це можна пояснити тим, що задача нормалізації частинних критеріїв розглядається формально як задача вторинного шкалювання (вибір єдиної шкали для всіх частинних критеріїв), а не як задача формалізації інформації про ступінь домінування альтернатив або переваг ОПР. В останньому

випадку перераховані вище традиційні вимоги до функції корисності потрібно доповнити вимогою, яка давала б змогу поряд із лінійними реалізувати монотонні, опуклі догори і донизу нелінійні залежності. Зазначена вимога відбиває ту обставину, що в багатьох випадках корисність частинних критеріїв нелінійно залежить від їх абсолютних значень. Це можна аргументувати такими міркуваннями.

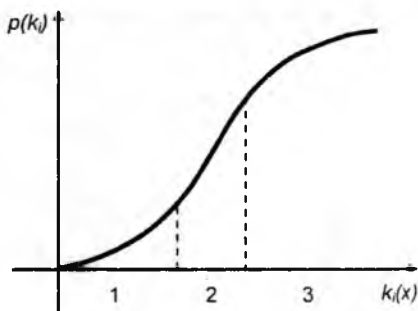


Рис. 2.1. Залежність корисності від абсолютного значення частинного критерію

Нагадаємо (розд. 1.4), що однією з фундаментальних властивостей систем є залежність ефективності будь-якої системи від ресурсів, що витрачаються на інтервалі життєвого циклу. Вона якісно описується  $S$ -подібною (логістичною) кривою (див. рис. 1.7).

Такий само характер має залежність, що описує корисність частинного критерію системи для ОПР при зміні її в досить великому діапазоні. Зазначений характер має, наприклад, корисність житлової площі для конкретної сім'ї, цінність швидкодії або обсягу оперативної пам'яті персонального комп'ютера для конкретного користувача тощо. Варто врахувати, що  $S$ -подібна залежність реалізується тільки при зміні аналізованого параметра на всій області існування системи.

У реальних умовах ОПР оперує на обмеженій множині можливих рішень  $X$ , що істотно обмежує інтервал можливої зміни параметра. Отже, задання кожної конкретної ситуації вибору "вирізує" із  $S$ -подібної кривої корисності більш-менш вузьку область (рис. 2.1).

Будь-яка альтернатива  $x \in X$  характеризується кількома частинними критеріями, кожний із яких має свій інтервал і "область" вимірювання. Тому конкретна система може описуватися нелінійностями різного типу. Це потрібно враховувати при виборі вигляду функцій корисності частинних критеріїв.

Усім перерахованим вимогам відповідає функція локальної корисності

$$p_i[k_i(x)] = \left( \frac{k_i(x) - k_{i\text{нг}}}{k_{i\text{нк}} - k_{i\text{нг}}} \right)^\alpha, \quad (2.14)$$

Залежно від виду екстремуму (напрямку домінування)

$$k_{i\text{нк}} = \begin{cases} \max_{x \in X} k_i(x) \text{ при } k_i(x) \rightarrow \max \\ \min_{x \in X} k_i(x), \text{ якщо } k_i(x) \rightarrow \min, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$k_{i\text{нг}} = \begin{cases} \min_{x \in X} k_i(x) \text{ при } k_i(x) \rightarrow \max \\ \max_{x \in X} k_i(x), \text{ якщо } k_i(x) \rightarrow \min. \end{cases} \quad (2.16)$$

Параметр  $\alpha_i$  визначає вид залежності: опукла догори ( $0 < \alpha_i < 1$ ), лінійна ( $\alpha_i = 1$ ), опукла донизу ( $\alpha_i > 1$ ). Характер залежності при різних  $\alpha_i$  показано на рис. 2.2.

У зв'язку з тим, що на обмеженій множині альтернатив  $X$  значення  $k_{i\text{нк}}$ ,  $k_{i\text{нг}}$  є сталими, функція корисності (2.14) може бути записана у вигляді

$$p_i[k_i(x)] = [b_i k_i(x) - c_i]^{\alpha_i}, \quad (2.17)$$

$$\text{де } b_i = \frac{1}{k_{i\text{нк}} - k_{i\text{нг}}}, \quad c_i = \frac{k_{i\text{нг}}}{k_{i\text{нк}} - k_{i\text{нг}}}.$$

Таким чином, обрана функція корисності частинних критеріїв є інтервальною нелінійною шкалою з параметрами  $b_i$ ,  $c_i$  і  $\alpha_i$ , що адаптуються до конкретної ситуації параметрами  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $\alpha_i$ . Причому при  $\alpha_i = 1$  вона перетворюється в лінійну інтервальну шкалу.

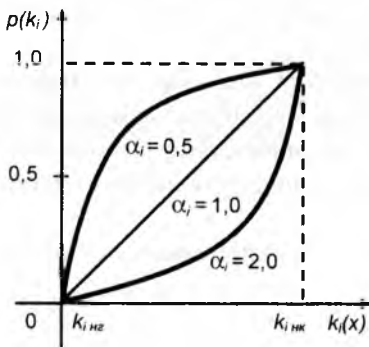


Рис. 2.2. Характер залежності локальної корисності від  $\alpha_i$  і  $k$

Всі частинні критерії, незалежно від того, яка шкала була спочатку застосована для їх вимірювання, мають бути перетворені в шкалу (2.17). Це не складно, якщо частинний критерій вимірюється у будь-якій з кількісних шкал: абсолютній, відносній або інтервальній. Ці шкали містять об'єктивну кількісну (з точністю до точності вимірювання) інформацію про значення критерію, інтервал його можливої зміни, максимальне і мінімальне значення, напрямком домінування. Ця інформація дає змогу обчис-

лити об'єктивні значення коефіцієнтів  $b_i$  і  $c_i$  за формулою (2.17). ОПР має встановити тільки силу переваги різних значень критерію, визначити характер залежності корисності від абсолютних значень критерію, тобто задати значення параметра  $\alpha_i$ .

Відзначимо, що можлива ситуація, коли на інтервалі можливої зміни критерію задано два напрямки домінування. Наприклад, оцінюють якість джерела електропостачання і як частинний критерій розглядають стабільність напруги. Очевидно, що найкращою ( $k_{iнк}$ )

буде номінальна напруга, а відхилення як у більшу, так і меншу сторону небажані. Тоді виникає ситуація, зображена на рис. 2.3, де стрілками позначено напрямки домінування. У загальному випадку лівий і правий інтервали можуть відрізнятися розмахом і характером зміни корисності. Наприклад, підвищення напруги може бути більш небезпечним, адже може призвести до руйнації системи. Тоді для кожного інтервалу будується окрема функція корисності, тобто задається індивідуальне значення параметра  $\alpha_i$ .

Картину зміни функції корисності в цьому випадку показано на рис. 2.4, де цифрами 1 і 2 позначено функції корисності відповідно при відхиленні в меншу і більшу сторону від номіналу.

Аналогічно може бути інтерпретована така економічна ситуація. Відомо, що одним із частинних критеріїв ефективності економіки є стабільність курсу національної валюти. Найкращим  $k_{iнк}$  цього критерію є стабільне значення. Відхилення, як підвищення, так і зниження курсу, небажані, але мають різні економічні наслідки (корисності), і також можуть бути описані моделлю, показаною на рис. 2.4.

Складніша ситуація виникає тоді, коли для первинного вимірювання чинників, що визначають якість системи, застосовано якісні шкали. За визначенням такі шкали в загальному випадку не містять інформації про домінування, кількісні значення чинника, що вимірюється, силу переваг різних значень. Без додаткової інформації, носієм якої є ОПР, ці шкали



Рис. 2.3. Двостороннє домінування

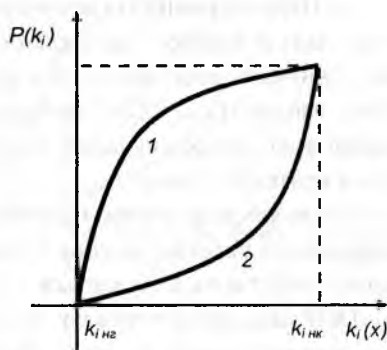


Рис. 2.4. Значення функції корисності при двосторонньому домінуванні



взагалі не можуть бути використані для оцінювання і ранжування альтернатив.

Розглянемо можливі ситуації перетворення якісної інформації в кількісну функцію корисності.

**А. Перетворення дихотомічного якісного чинника.** Нехай вирішується задача підбору претендента на деяку посаду. Як один з оцінювальних чинників розглядається стать претендента. Можливі такі ситуації. Стать кандидата для ОНР байдужа. Це означає, що переваги не визначені, інформація для ранжування відсутня і чинник потрібно вилучити з множини критеріїв оцінки.

Стать кандидата однозначно задана ОНР – у цьому разі чинник з оцінювального перетворюється в обмеження у вигляді рівності (рішення вже прийняте) і також вилучається з оцінювальних критеріїв.

ОНР визначила перевагу за статтю, наприклад, Ч > Ж (чоловік отримує перевагу перед жінкою). Як показано в розд. 2.2, значення, які вимірюються в номінальній шкалі, можна подати в числовому вигляді шляхом взаємно однозначного перетворення. Це означає, що кожному з класів може бути надане будь-яке числове (незбіжне) значення, яке не несе інформації про домінування. Аналіз формули (2.14) показує, що при будь-якій числовій індексації дихотомічних альтернатив, більш краща матиме корисність, яка дорівнює 1, а гірша – 0. Це обумовлено тим, що критерій оцінки набуватиме тільки двох значень, одне з яких завжди найкраще, інше – найгірше.

**В. Перетворення багатозначного якісного чинника.** Нехай чинник може набувати декілька якісних значень  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ . Наприклад, у якісній порядковій шкалі вимірюються знання. Для оцінки обрана п'ятипозиційна шкала: погано (пг), незадовільно (незадов), задовільно (задов), добре (добр), відмінно (відм). Дана шкала спрямована, тобто містить якісну інформацію про домінування станів

$$\text{відм} > \text{добр} > \text{задов} > \text{незадов} > \text{пг}, \quad (2.18)$$

але не містить інформації про кількісні значення і силу переваг. Ця інформація може бути отримана від ОНР. Для переходу до числової шкали можна застосувати монотонно зростаюче перетворення (див. розд. 2.2), тобто можливим станам надати зростаючі або спадні номери. Відома п'ятибальна оцінка знань є прикладом такого перетворення: (відм  $\rightarrow$  5), (добр  $\rightarrow$  4) тощо.

Зауважимо, що монотонно однозначне перетворення не додає кількісної інформації про перевагу, і отримані числові значення є тільки символами (номерами) вимірювальних значень. Так оцінки 2 і 5 не означають, що в другому випадку учень має в 2,5 рази знань більше, і між парами оцінок (2, 3) і (4, 5) однакова відстань (кількість знань). Однак таке попереднє перетворення дає змогу за допомогою формули (2.14) перейти в інформативну числову інтервальну шкалу. Для цього потрібно, щоб ОПР визначила значення параметра  $\alpha_i$ . Залежність корисності від значень  $\alpha_i$  в розглянутому випадку показано на рис. 2.5. Аналогічне перетворення можна виконати для будь-якої, в тому числі 12-бальної шкали.

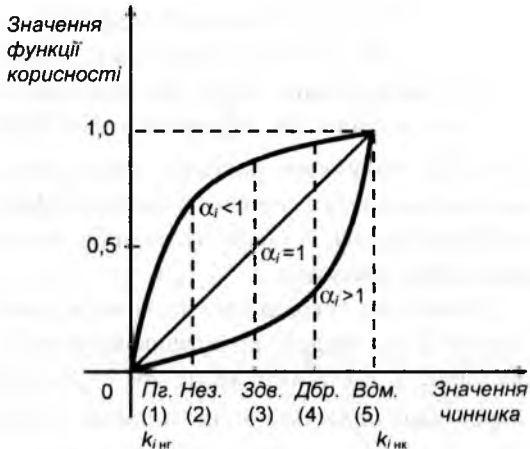


Рис. 2.5. Перетворення якісної шкали в кількісну

Опже, функція корисності (2.14) є універсальною і дає змогу сформулювати інформативні кількісні оцінки корисності значень частинного критерію та формалізувати уявлення ОПР про перевагу значень і її силу, тобто про відстань між різними значеннями критерію за корисністю. Як показано вище, таке перетворення може застосовуватися до критеріїв, що вимірюються як у кількісних, так і якісних шкалах, після відповідного перетворення останніх.

#### 2.4. ОБҐРУНТУВАННЯ ПРАВИЛ ВИБОРУ КОМПРОМІСНИХ РІШЕНЬ

Введення поняття функції корисності частинних критеріїв, застосування цієї функції для зведення різнорідних чинників до ізоморфного кількісного вигляду і синтез відповідної математичної моделі (2.14) дають змогу подати вихідну задачу формування багатofакторної оцінки альтернативи  $x \in X$  у вигляді

$$P(x) = G[J(a_i), p_i[k_i(x)]], \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.19)$$

Тут усі частинні критерії задані в ізоморфній нормалізованій формі, тому можливі ситуації прийняття рішень будуть відрізнятися тільки ступенем інформованості ОПР про відносну важливість частинних критеріїв і формою подання цієї інформації  $J(a_i)$ . Це покладено в основу типізації ситуацій прийняття рішення. Вважатимемо, що зазначену інформацію можна подати за ступенем зниження інформованості ОПР як детерміновану, ймовірнісну, а також як розмиту множину, задану на якісному рівні, або взагалі відсутню.

Внаслідок того, що всі частинні критерії за допомогою функцій корисності (2.14) зведені до ізоморфного вигляду, вимоги до інформації про важливість частинних критеріїв спрощуються. Надалі вважаємо, що ця інформація подається безрозмірними коефіцієнтами  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , де  $n$  – число частинних критеріїв, з обмеженим інтервалом змінювання

$$a_i \in [0, 1], \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad (2.20)$$

які враховують відносну важливість критеріїв, тобто

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1. \quad (2.21)$$

Крім того, вважаємо, що завжди виконується аксіома незалежності, тобто значення будь-якого  $a_i$  не залежить від коефіцієнтів важливості інших критеріїв.

В усіх випадках джерелом інформації про взаємну важливість частинних критеріїв є ОПР або експерти. Часто цю інформацію отримують при прямому експертному вимірюванні. Експерти можуть формувати оцінки в звичній для них шкалі з будь-яким інтервалом  $[b, c]$ , наприклад,  $[0, 5]$ ,  $[0, 10]$ ,  $[0, 100]$  тощо. Єдина умова, щоб всі оцінки вагових коефіцієнтів  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , були задані в одній шкалі. Очевидно, що перехід до стандартного інтервалу  $[0, 1]$  не викликає ускладнень. Вважатимемо, що усі  $a_i$  є вимірюваними в інтервалі  $[0, 1]$ , і забезпечується виконання умови (2.21).

З урахуванням викладеного розглянемо основні типові ситуації прийняття рішень залежно від ступеня визначеності подання вагових коефіцієнтів  $a_i$ .

Ситуація 1. Відомі точні кількісні значення вагових коефіцієнтів  $a_i$  частинних критеріїв  $k_i(x)$ , а, отже, їх функцій корисності  $p_i[k_i(x)]$ . Тоді

узагальнена корисність альтернативи  $x \in X$  визначається як адитивна функція вигляду

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i p_i[k_i(x)], \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad (2.22)$$

а принцип оптимальності

$$x^0 = \arg \max_{x \in X} \sum_{i=1}^n a_i p_i[k_i(x)], \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1. \quad (2.23)$$

Іноді з алгоритмічної точки зору зручніше розв'язувати задачу мінімізації. Тоді оптимізаційна функція, аналогічна (2.23), набуває вигляду

$$x^0 = \arg \min_{x \in X} \sum_{i=1}^n a_i \bar{p}_i[k_i(x)], \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.24)$$

де  $\bar{p}_i[k_i(x)]$  – функція втрати корисності

$$\bar{p}_i[k_i(x)] = 1 - p_i[k_i(x)]. \quad (2.25)$$

Як відзначалося раніше, вибір виду узагальненої оцінки є аксіоматичною процедурою. На користь застосування адитивної схеми говорять дані численних досліджень поведінки людини при розв'язуванні багатокритеріальних задач прийняття рішень.

Найчастіше досліджувалися такі задачі: виділення з множини альтернатив однієї або групи найкращих; оцінка окремо взятої альтернативи.

Відповідно до експериментальних даних, існують дві основні групи стратегій, використовуваних при розв'язуванні цих задач, а саме: *стратегії компенсації і вилучення*.

Перша група стратегій передбачає зіставлення узагальнених оцінок однієї альтернативи з оцінками іншої. У межах цієї стратегії виділяють два підходи: визначення узагальненої корисності кожної з альтернатив, а потім їх порівняння; порівняння корисностей оцінок альтернатив за кожним критерієм окремо і потім підсумовування цих різниць.

Перший підхід відомий під назвою *адитивної моделі*, а другий – під назвою моделі *адитивних різниць*.

Застосовуючи стратегії вилучення, видаляють альтернативи, що не задовольняють рівням вимог за одним або кількома критеріями. Існують дві

такі стратегії: вилучення за значеннями оцінок за кількома критеріями, що відповідає моделі вилучення за аспектами; послідовне вилучення за окремими критеріями. Ця група стратегій відома як метод лексикографічного упорядкування альтернатив (послідовно застосовуваних критеріїв), розглянутий у розд. 1.4.

З перерахованих стратегій перша дає змогу найбільш повно та адекватно врахувати кількісну інформацію про значення вагових коефіцієнтів частинних критеріїв  $a_i$ , причому адитивній моделі відповідають оцінки (2.22), (2.23), а моделі адитивних різниць – (2.24).

Підкреслимо, що в розглянутій ситуації не застосовують мультиплікативну модель оцінки узагальненої корисності альтернатив, оскільки вона не дозволяє врахувати значення  $a_i$ . На відміну від цього, адитивна схема дає змогу формалізувати інформацію про силу переваг, гарантує визначення рішення з області компромісів і на обмеженій допустимій області рішень не допускає повної взаємної компенсації значень оцінок критеріїв. Отже, адитивна функція узагальненої корисності (2.22) є більш інформативною порівняно з мультиплікативною.

Дослідження адитивної моделі багатокритеріального оцінювання показали, що вона забезпечує вибір рішення з області компромісів на строго опуклих множинах допустимих рішень  $X$ . Якщо множина  $X$  не є опуклою, то для визначення компромісного рішення, що належить області Парето, потрібно використовувати більш складні схеми компромісу, зокрема максимінну або мінімаксну:

$$x^0 = \arg \max_{x \in X} \min_i a_i p_i [k_i(x)]; \quad (2.26)$$

$$x^0 = \arg \min_{x \in X} \max_i \overline{a_i p_i} [k_i(x)].$$

Ситуація 2. Кількісні значення вагових коефіцієнтів невідомі, але ОПР має інформацію, що дає змогу ранжувати частинні критерії за важливістю

$$k_1(x) \succ k_2(x) \succ \dots \succ k_n(x). \quad (2.27)$$

Зазначена ситуація менш інформативна порівняно з випадком, коли є кількісна інформація про значення вагових коефіцієнтів  $a_i$ . Тут задання переваг частинних критеріїв  $k_1 \succ k_2 \succ \dots \succ k_n$  означає, що  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ , тобто відома тільки якісна інформація про співвідношення  $a_i$ , але не їх числові значення.

Дана інформація найбільш повно використовується при виборі компромісного рішення за схемою послідовної оптимізації (послідовно застосовуванім критеріям). Математична модель реалізації цієї схеми компромісу та її різних модифікацій описані в розд. 1.4.

Ситуація 3. ОПР не має кількісної та якісної інформації про коефіцієнти  $a_i$ . Отже, немає підстав віддавати перевагу якомусь критерію і є логічним використовувати схеми рівності або квазірівності важливості критеріїв. Тоді припускають, що усі  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , дорівнюють один одному, тобто  $a_i = \frac{1}{n}$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ . Отже, відповідно до (2.22) узагальнена корисність альтернативи  $x \in X$  набуває вигляду

$$P(x) = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i[k_i(x)] \right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.28)$$

а принцип оптимальності відповідно

$$x^0 = \arg \max_{x \in X} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i[k_i(x)] \right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.29)$$

або

$$x^0 = \arg \min_{x \in X} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \overline{p}_i[k_i(x)] \right\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.30)$$

Відзначимо, що масштабний множник  $\frac{1}{n}$  у формулах (2.28)–(2.30)

можна не враховувати, оскільки він не впливає на положення екстремуму або результат ранжування.

Схеми (2.29) і (2.30) правильні тільки тоді, коли дійсні значення вагових коефіцієнтів критеріїв  $a_i$  дорівнюють один одному. В розглянутій ситуації реальні значення  $a_i$  невідомі й в конкретному випадку можуть набувати будь-яких значень. Тоді рішення, що має рівні значення функцій корисності за усіма частинними критеріями, мінімізує можливі втрати між рішенням, прийнятим в умовах невизначеності, і найбільш ефективним для конкретних значень  $a_i$

$$p_1[k_1(x)] = p_2[k_2(x)] = \dots = p_n[k_n(x)]; \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.31)$$

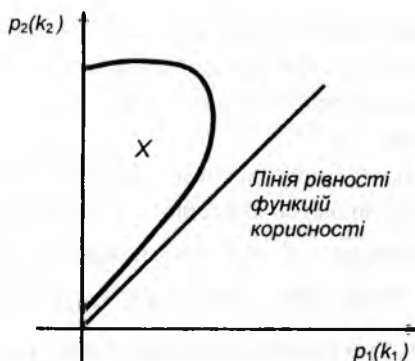


Рис. 2.6. Рішення, яке задовольняє умову (2.31), є відсутнім

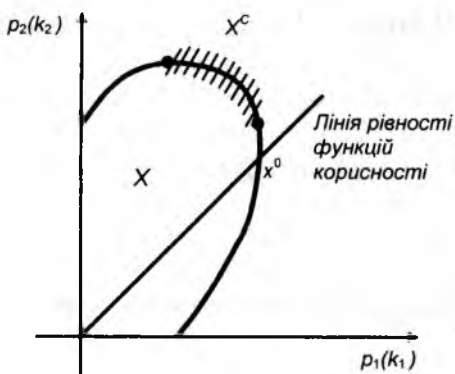


Рис. 2.7. Рішення, яке задовольняє умову (2.31), не належить області компромісів  $X^c$

Схеми (2.29), (2.30) у загальному випадку не гарантують визначення рішення, яке відповідає умові (2.31), оскільки відбувається зсув у бік більш "сильних" критеріїв аж до повної компенсації одних критеріїв іншими. Це одна з властивостей адитивної схеми компромісу. Тому схеми (2.29), (2.30) не можуть бути використані в розглянутій ситуації. З іншого боку, схема рівності функцій корисності частинних критеріїв (2.31) не гарантує існування рішення, як показано на рис. 2.6, або належності його області компромісів (рис. 2.7)

Отже, коли вагові коефіцієнти  $a_i$  невідомі, потрібно використовувати схеми мінімакса або максиміна (2.26), що гарантують вибір рішення, яке належить області компромісів, і забезпечує вирівнювання значень функцій корисності.

Розглянуті три ситуації є основними. Незважаючи на численність модифікацій, що враховують конкретні особливості ситуації ухвалення рішення, у будь-якому випадку схема оцінювання зводиться або до однієї з них, або їх комбінації.

В інженерній практиці часто зустрічаються ситуації прийняття багатокритеріальних рішень в умовах, коли переваги частинних критеріїв (вагові коефіцієнти  $a_i$ ) задані інтервалами можливих значень  $[a_{i \min}, a_{i \max}]$ ,  $\forall_i = \overline{1, n}$ . При цьому можливі такі випадки: задання числових значень  $a_i$  у вигляді інтервалів, без зазначення переваг усередині інтервалу; задання відносної важливості критеріїв  $a_i$  на інтервалі можливих значень імовір-

ностями характеристик; задання значень  $a_i$  за допомогою лінгвістичних змінних типу “приблизно дорівнює  $b$ ”, “знаходиться приблизно в інтервалі від  $b$  до  $c$ ” тощо.

Загальною умовою коректності задання інтервалів можливих значень  $a_i$  є одночасне виконання умов

$$\sum_{i=0}^n a_{i \max} > 1; \sum_{i=1}^n a_{i \min} < 1. \quad (2.32)$$

Це обумовлено наступним. Якщо  $\sum_{i=1}^n a_{i \max} = 1$  або  $\sum_{i=1}^n a_{i \min} = 1$ , то дані випадки зводяться до розглянутої вище ситуації 1, коли значення  $a_i$  задані точними значеннями, які дорівнюють відповідно  $a_{i \max}$  або  $a_{i \min}$ . У випадках, якщо  $\sum_{i=1}^n a_{i \max} < 1$ ;  $\sum_{i=1}^n a_{i \min} > 1$ , неможливо виконати умови  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ .

Ситуація 4. Розглянемо випадок, коли коефіцієнти  $a_i$  задані кількісно, але не точно, а інтервалами  $[a_{i \min}, a_{i \max}]$  можливих значень, причому переваги значень всередині інтервалу невідомі. У цій ситуації пропонується використовувати дворівневу процедуру вибору компромісного рішення.

На першому етапі визначається підобласть допустимих рішень  $X_u^p$  у просторі частинних критеріїв  $K = \{k_i(x)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , обмежена значеннями  $k_i(x)$ , які відповідають варіаціям  $\Delta a_i = a_{i \max} - a_{i \min}$  за умови, що  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ .

Ця підмножина рішень  $X_u^p$  (рис. 2.8) є частиною наближеної області компромісів. Для її знаходження скористаємося алгоритмом визначення наближеної області компромісів, описаним у розд. 1.3.

Відмінність полягає тільки в тому, що в зазначеному розділі розглянуто випадок, коли  $a_i \in [0, 1]$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ , а у даному разі  $a_i \in [a_{i \min}, a_{i \max}]$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ . З урахуванням цього (1.14) набуває вигляду

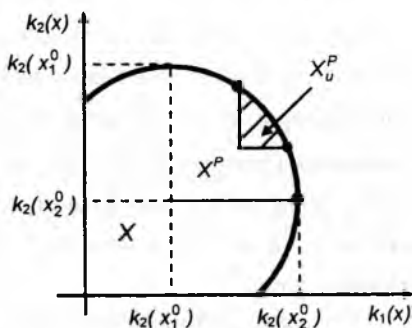


Рис. 2.8. Підмножина наближеної області компромісів  $X_u^p$ , що відповідає  $a_i \in [a_{i \min}, a_{i \max}]$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$



$$x_i^0 = \arg \max_{x \in X} \left\{ a_i p_i [k_i(x)] + \sum_{j=1}^n a_j p_j [k_j(x)] \right\} \quad (2.33)$$

при обмеженнях  $\sum_{j=1}^n a_j = 1 - a_i$ ;  $a_j \in [a_{j \min}, a_{j \max}]$ ;  $j = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j \neq i$ .

Вагові коефіцієнти визначимо в такий спосіб:

1) якщо  $\left( 1 - \sum_{i=1}^n a_{j \min} \right) = a_{i \max}$ , то  $a_i = a_{i \max}$ ,  $a_j = a_{j \min}$ ,  $\forall j = \overline{1, n}$ ,  $j \neq i$ ;

2) при  $a_{i \min} < 1 - \sum_{i=1}^n a_{i \min} < a_{i \max}$  маємо

$$a_j = a_{j \min}, \quad \forall j = \overline{1, n}; \quad a_i = 1 - \sum_{j=1}^n a_{j \min}, \quad i \neq j;$$

3) якщо  $1 - \sum_{j=1}^n a_{j \min} > a_{i \max}$ , то  $a_i = a_{i \max}$ ;  $a_j = a_{j \min} \left( 1 + \frac{\Delta A_i}{\sum_{j=1}^n a_{j \max}} \right)$ , де

$$\Delta A_i = 1 - a_{i \max} - \sum_{j=1}^n a_{j \min}, \quad j \neq i.$$

Розрахунки за формулою (2.33) повторюються  $n$  разів для кожного  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , і за результатами складається таблиця, аналогічна табл. 1.1. Максимальне і мінімальне значення критеріїв у кожному рядку визначають межі підобласті  $X_u^P$  наближеної області компромісів  $X''$ .

Другий етап полягає у виборі компромісного рішення з  $X_u^P$ . Оскільки переваги всередині інтервалів можливих значень  $a_i$  не задані, вибір єдиного компромісного рішення з  $X_u^P$  визначають за мінімаксною або максимінною схемою (2.26). Для цього на підобласті  $X_u^P$ , відповідно до (2.14), формуються нові функції корисності частинних критеріїв, у яких за найкращі та найгірші значення приймаються границі  $X_u^P$ , визначені на першому етапі.

Отже, рішення приймається на основі послідовного використання адитивної та мінімаксної схем компромісу.

Ситуація 5. Вагові коефіцієнти  $a_i$  задані інтервалами  $[a_{i \min}, a_{i \max}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ . При цьому передбачається, що  $a_i$  – це випадкові величини, які

всередині інтервалу розподілені за деяким законом, тобто відома функція щільності розподілу ймовірності та її параметри, зокрема математичне сподівання. У загальному випадку величини всіх інтервалів  $\Delta a_i = a_{i\max} - a_{i\min}$  різні і, крім того,

$$\sum_{i=1}^n a_{i\min} \neq 1, \quad \sum_{i=1}^n a_{i\max} \neq 1, \quad \sum_{i=1}^n Ma_i \neq 1, \quad (2.34)$$

де  $Ma_i$  – оцінка математичного сподівання випадкової величини  $a_i$ .

Задача полягає у виборі значень  $a_i^0$ , для яких виконуються такі умови:

$$a_i^0 \in [a_{i\min}, a_{i\max}], \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n a_i^0 = 1, \\ a_i^0 = \arg \min_{a_i} \sum_{i=1}^n (a_i - Ma_i)^2. \quad (2.35)$$

Останнє означає, що при виборі конкретного значення  $a_i$  ми прагнемо мінімізувати для кожного з них відхилення від його математичного сподівання.

Для розв'язання задачі зробимо такі припущення.

1. Надійні ймовірності  $p_{a_i}$  ( $a_{i\min} \leq a_i \leq a_{i\max}$ ) для усіх  $a_i$  рівні. Це припущення добре відображає психологію ОПР, і є причиною розходження інтервалів можливих значень  $a_i$ .

2. Закони розподілу усіх  $a_i$  є симетричними щодо математичного сподівання  $Ma_i$ .

При виборі значень  $a_i^0 \in [a_{i\min}, a_{i\max}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , що задовольняють умови (2.35), візьмемо до уваги такі міркування. Як відомо, ймовірність потрапляння випадкової величини в деякий інтервал  $Ma_i \pm \Delta a_i$  пропорційна дисперсії  $Da_i$ , що є мірою розсіювання. Як показано в [6], надійну ймовірність потрапляння випадкової величини в будь-який інтервал можна записати у вигляді

$$p_a = t_a \cdot \sigma, \quad (2.36)$$

де  $t_a$  – коефіцієнт, що залежить у загальному випадку від закону розподілу випадкової величини і прийнятого рівня  $p_a$ ;  $\sigma$  – середньоквадратичне відхилення ( $\sigma = \sqrt{Da_i}$ ).

Так, наприклад, імовірність потрапляння випадкової величини в інтервал  $M_a \pm 3\sigma$  для нормального закону розподілу дорівнює  $p_a = 0,997$ , а для рівномірного закону розподілу  $p_a = 1$  для інтервалу  $M_a \pm 2\sqrt{3}\sigma$ . З урахуванням цього і припущення 1 впливає, що середньоквадратичне відхилення випадкової величини  $a_i$  пропорційне величині інтервалу

$$\Delta a_i = a_{i\max} - a_{i\min}. \quad (2.37)$$

Звідси можна зробити висновок, що умови (2.35) виконуються, якщо  $a_i^0$  визначати за формулою

$$a_i^0 = Ma_i - \frac{\sum_{i=1}^n Ma_i - 1}{\sum_{i=1}^n \Delta a_i} \Delta a_i, \quad (2.38)$$

за умов  $a_i \in [a_{i\min}, a_{i\max}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ . При цьому не потрібна інформація про конкретні значення  $P_a$ ,  $t_a$  і  $\sigma$ . Неважко переконатися, що формулу (2.38) застосовують і для умов, коли частину  $a_i$  задано точними значеннями ( $\Delta a_i = 0$ ), а частину – інтервалами. Крім того, із припущення 2 впливає

$$Ma_i = \frac{a_{i\min} + a_{i\max}}{2}. \quad (2.39)$$

Формула (2.38) отримана за умови, що відомі математичні сподівання  $Ma_i$  й усі  $a_i$  розподілені за тим самим законом. У противному разі (2.38) має бути уточнена. З цією метою розглянемо конкретні випадки.

5.1. Вихідна інформація про  $a_i$  задана у вигляді

$$a_i \in [a_{i\min}, a_{i\max}], \quad (2.40)$$

і переваги всередині інтервалу невідомі.

У цьому разі логічно припустити, що випадкові величини  $a_i$  розподілені за рівномірним законом в інтервалі  $[a_{i\min}, a_{i\max}]$ . Математичне сподівання визначається за формулою (2.39), значення  $a_i^0$  – за формулою (2.38).

5.2. Вихідну інформацію про  $a_i$  задано у вигляді

$$a_i \in [A_i \pm b_i]. \quad (2.41)$$

Припускаємо, що  $a_i$  розподілені за нормальним законом з математичним сподіванням  $Ma_i = A_i$ . Такий самий результат одержимо, якщо скористаємося (2.39). Для цього випадку виконується формула 2.38.

5.3. Вагові коефіцієнти  $a_i$  задано у вигляді комбінації умов (2.40), (2.41), тобто частина з них розподілена за рівномірним законом, а частина – за нормальним. Оскільки надійну ймовірність  $p_a = 0,997$  для нормального закону забезпечує інтервал  $6\sigma_n$ , а для рівномірного закону –  $4\sqrt{3}\sigma_p$  [6], то коефіцієнт перерахування інтервалів дорівнює

$$6\sigma_n = 4\sqrt{3}\sigma_p \Leftrightarrow \sigma_p = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_n. \quad (2.42)$$

З урахуванням цього формула (2.38) набуває вигляду

$$a_i^0 = Ma_i - \frac{\sum_{i=1}^n Ma_i - 1}{\sum_{i=1}^m \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta a_i + \sum_{j=m+1}^n \Delta a_j} R_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad m < n; \quad (2.43)$$

$$R_i = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta a_i & \text{при } i = \overline{1, m}, \\ \Delta a_i & \text{при } i = \overline{m+1, n}, \end{cases}$$

де  $a_j$  – вагові коефіцієнти, розподілені за рівномірним законом.

Ситуація 6. Нехай коефіцієнти  $a_i$  задано лінгвістичними змінними типу “ $a_i$  знаходиться приблизно в інтервалі від  $b$  до  $c$ ”. Зокрема при  $b = c$  маємо наближену точкову експертну оцінку типу “ $a_i$ , що приблизно дорівнює  $b$ ”.

Проблема побудови багатофакторних оцінок у цій ситуації зводиться до послідовного розв’язування двох задач: формалізації лінгвістичних змінних; вибору конкретних значень  $a_j$ .

Для розв’язування першої задачі скористаємося теорією розмитих (нечітких) множин, запропонованою Р. Беллманом і Л. Заде [7]. Згідно з цією теорією, для будь-якої розмитої множини, визначеної лінгвістичною змінною, можна знайти функцію належності, що є аналогом характеристичної функції в класичній теорії множин. Проте на відміну від останньої, яка

може набувати тільки двох дискретних значень 0 і 1, функція належності є неперервною з множиною значень  $[0, 1]$ . Її значення тим ближче до 1, чим більше впевненість у тому, що значення деякої змінної відповідає твердженню лінгвістичної змінної. Наприклад, для розмитої множини, заданої твердженням “ $a_i$  приблизно дорівнює 0,7”, при  $a_i = 0,7$  функція належності  $\mu(0,7) = 1$  і  $0 \leq \mu(0,7) < 1$  для будь-яких  $a_i \neq 0,7$ .

Очевидно, що вибір конкретного виду функції належності  $\mu(b)$  є евристичною операцією, а сама функція відображає переваги ОПР або експертів.

Розглянемо особливості побудови функцій належності для наближених точкових, наприклад, “ $u$  приблизно дорівнює 10” (рис. 2.9. а) та інтервальних оцінок вигляду “ $u$  знаходиться приблизно в інтервалі від 8 до 11” (рис. 2.9, б).

Функцію, зображену на рис. 2.9, б, побудуємо таким чином:

якщо  $b \leq u \leq c$ , то  $\mu_{(b,c)}(u) = 1$ ;

за умови  $u < b$  маємо  $\mu_{(b,c)}(u) = \mu_b(u)$ ;

якщо  $u > c$ , то  $\mu_{(b,c)}(u) = \mu_c(u)$ ,

де  $\mu_{(b,c)}(u)$  – функція належності нечіткому інтервалу  $(b, c)$ ;  $\mu_b(u)$  і  $\mu_c(u)$  – функції належності нечітким множинам чисел, які приблизно дорівнюють відповідно  $b$  і  $c$ .

Функції  $\mu_b(u)$  і  $\mu_c(u)$  будуються аналогічно функції, графік якої наведено на рис. 2.9, а.

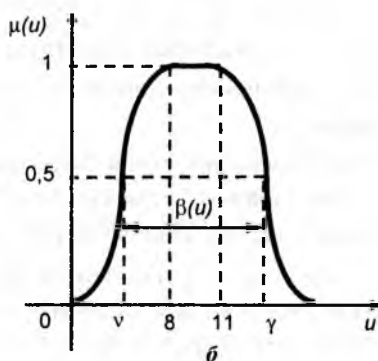
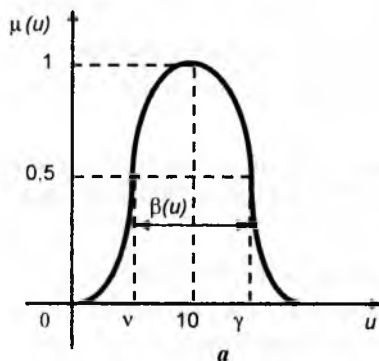


Рис. 2.9. Функції належності нечітких множин, що відповідають:  
а – наближеній точковій оцінці; б – інтервальній оцінці

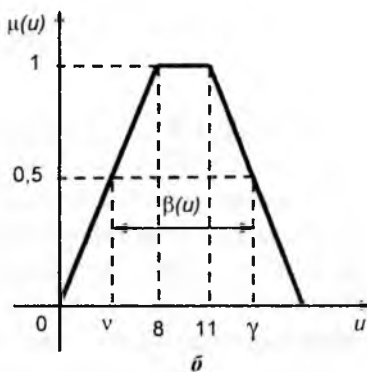
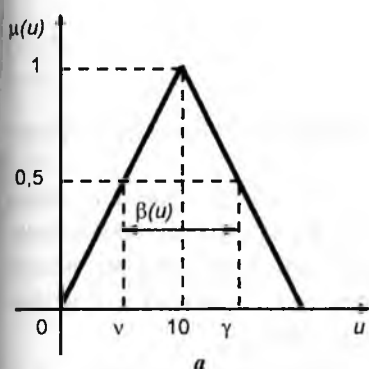


Рис. 2.10. Кусково-лінійні функції належності нечітких множин, які відповідають: *a* – наближеній точковій оцінці; *б* – інтервальній оцінці

Існують численні спроби синтезу аналітичних залежностей для побудови функцій належності вигляду, наведеного на рис. 2.9, які засновані на статистичному опрацюванні думок багатьох експертів. Проте цінність і точність таких аналітичних залежностей незначна, оскільки оцінки істотно залежать від інтервалу значень, їх абсолютних значень і, головне, від змістовної постановки задачі. Тому рекомендується використовувати лінійну апроксимацію функцій належності  $\mu(u)$ . У цьому разі функції, зображені на рис. 2.9, стануть кусково-лінійними (рис. 2.10).

Для лінійних функцій належності залишається проблема експертного визначення значень змінних, для яких ця функція дорівнює нулеві.

З урахуванням зазначених функцій, розглянемо правила вибору конкретних значень  $a_i$  за різних ситуацій.

1. Усі  $a_i$  задані лінгвістичною змінною типу “ $a_i$  приблизно дорівнює  $b_i$ ” і при цьому

$$\sum_{i=1}^n b_i \neq 1. \quad (2.44)$$

Випадок, коли  $\sum_{i=1}^n b_i = 1$  є тривіальним, оскільки  $a_i = b_i$  і сума функцій належності  $\sum_{i=1}^n \mu_{b_i}(a_i) = n$ . Очевидно, що для (2.44) потрібно вибрати такі значення  $a_i$ , які максимізують функції належності всіх змінних, тобто розв’язати оптимізаційну задачу вигляду

$$a_i^0 = \arg \max_{a_i} \prod_{i=1}^n \mu_b(a_i), \quad (2.45)$$

при обмеженні  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ . Аналіз показує, що задача (2.45) належить до класу задач умовної оптимізації, розв'язування яких є досить трудомістким. Крім того, в умовах, коли інформацію застосовують у вигляді експертних оцінок, що за визначенням є досить грубими, навряд чи доцільно витратити великі обчислювальні ресурси на пошук точного розв'язку. У зв'язку з цим розглянемо процедуру знаходження наближених значень  $a_i$ .

Аналіз показує, що основним параметром, який визначає вигляд  $\mu_b(u_i)$ , зокрема крутість, є відстань між точками перегину  $\beta(u_i)$  (див. рис. 2.9, 2.10). Значення  $\beta(u_i)$  залежить від абсолютного значення лінгвістичної змінної  $u_i$ , тобто від  $b_i$ . Отже, за аналогією із ситуацією 5, отримаємо наближене значення

$$a_i = b_i - \frac{\sum_{i=1}^n b_i - 1}{\sum_{i=1}^n \beta(b_i)} \beta(b_i). \quad (2.46)$$

Ще більш простий вигляд має наближена формула

$$a_i = b_i - \frac{\sum_{i=1}^n b_i - 1}{\sum_{i=1}^n b_i} b_i. \quad (2.47)$$

Лінгвістичні змінні  $a_i$ , визначені різними способами за формулами (2.45)–(2.47), наведено в табл. 2.2.

## 2.2. Вагові коефіцієнти $a_i$

Значення лінгвістичної змінної $a_i$	$a_i$ , обчислені за формулами		
	(2.45)	(2.46)	(2.47)
0,2	0,1294	0,1388	0,1667
0,1	0,0823	0,0833	0,0792
0,55	0,4717	0,4750	0,4583
0,35	0,3165	0,3076	0,2917

2. Всі вагові коефіцієнти  $a_i$  задано лінгвістичними змінними типу “ $a_i$  приблизно знаходиться в інтервалі від  $b_i$  до  $c_i$ ”.

Випадок 2а. Нехай сума мінімальних значень  $b_i$  в інтервалі  $[b_i, c_i]$  менша за одиницю, а сума максимальних значень  $c_i$  більша за одиницю, тобто

$$\sum_{i=1}^n b_i < 1, \quad \sum_{i=1}^n c_i > 1. \quad (2.48)$$

Це означає, що існує множина коефіцієнтів  $a_i$ , для яких виконуються умови

$$a_i \in [b_i, c_i], \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1. \quad (2.49)$$

Як видно з (2.45) усі значення  $a_i$ , що задовольняють (2.49), цілком рівноцінні, оскільки для кожного з них функція належності  $\mu(a_i) = 1$ . Тому для вибору конкретних значень можна скористатися формулою, аналогічною (2.38). З урахуванням прийнятих позначень вона набуває вигляду

$$a_i = a_{i\text{cp}} - \frac{\sum_{i=1}^n a_{i\text{cp}} - 1}{\sum_{i=1}^n \Delta a_i} \Delta a_i, \quad (2.50)$$

де  $\Delta a_i = c_i - b_i$ ,  $a_{i\text{cp}} = \frac{c_i + b_i}{2}$ .

Випадок 2б. Нехай сума мінімальних значень  $b_i$  більша за одиницю

$$\sum_{i=1}^n b_i > 1. \quad (2.51)$$

Це означає, що вибір конкретних значень  $a_i$  має здійснюватися за межами  $[b_i, c_i]$  ліворуч від  $b_i$ . Тобто вагові коефіцієнти обчислюють за формулами (2.46) або (2.47).

Випадок 2в. Сума максимальних значень  $c_i$  в інтервалі  $[b_i, c_i]$  менша від одиниці



$$\sum_{i=1}^n c_i < 1. \quad (2.52)$$

Ця ситуація аналогічна 2б. Коефіцієнти  $a_i$  визначають в околі  $c_i$  за формулами (2.46) або (2.47), приймаючи  $b_i = c_i$ .

3. Частину вагових коефіцієнтів  $a_i$  задано лінгвістичними змінними типу “ $a_i$  приблизно дорівнює  $d_i$ ”,  $i = \overline{1, m}$ , а частину  $a_i$  – змінними типу “ $a_j$  приблизно знаходиться в інтервалі від  $b_j$  до  $c_j$ ”,  $j = \overline{m+1, n}$ .

Випадок 3а. Нехай

$$\sum_{j=m+1}^n b_j \leq 1 - \sum_{i=1}^m d_i; \quad \sum_{j=m+1}^n c_j \geq 1 - \sum_{i=1}^m d_i. \quad (2.53)$$

За умови  $a_i = d_i$  вагові коефіцієнти  $a_j$  визначають за формулою

$$a_j = a_{j\text{cp}} - \frac{\sum_{j=m+1}^n a_{j\text{cp}} + \sum_{i=1}^m d_i - 1}{\sum_{j=m+1}^n \Delta a_j} \Delta a_j, \quad (2.54)$$

де  $\Delta a_j = c_j - b_j$ ,  $a_{j\text{cp}} = \frac{c_j + b_j}{2}$ .

Випадок 3б. Нехай

$$\sum_{j=m+1}^n b_j > 1 - \sum_{i=1}^m d_i. \quad (2.55)$$

Приймемо  $a_i = d_i$ , тоді

$$a_j = b_j - \frac{\sum_{j=m+1}^n b_j + \sum_{i=1}^m d_i - 1}{\sum_{j=m+1}^n \beta(b_j)} \beta(b_j). \quad (2.56)$$

Випадок 3в. Нехай

$$\sum_{j=m+1}^n c_j < 1 - \sum_{i=1}^m d_i. \quad (2.57)$$

За умови  $a_i = d_i$  вагові коефіцієнти  $a_j$  знаходимо за формулою (2.56), враховуючи, що  $b_j = c_j$ .

Проблемно-орієнтовані математичні моделі, розроблені для ситуацій 5 і 6, дають змогу з більшою або меншою точністю визначити конкретні числові значення  $a_j$ . Це означає, що для формування багатокритеріальних оцінок або відповідної оптимізаційної функції мають бути використані моделі ситуації 1. Отже, ситуації 5 і 6 зводяться до ситуації 1.

## **2.5. СИНТЕЗ УНІВЕРСАЛЬНОЇ АДАПТИВНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ**

Всі різноманітні ситуації прийняття рішень залежно від інформованості ОПР про значення і форму подання вагових коефіцієнтів важливості частинних критеріїв  $a_i$  зводяться до трьох основних проблемно-орієнтованих математичних моделей багатокритеріального оцінювання та оптимізації: адитивної, послідовного аналізу, мінімаксної та максимінної, а також їх комбінацій.

Крім того, варто врахувати, що процес синтезу будь-якої системи є багатостадійним. На перших етапах розглядається якомога ширша множина альтернативних рішень. Вона послідовно звужується на наступних етапах синтезу, аж до вибору єдиного варіанта і визначення його оптимальних параметрів. Наприклад, при синтезі (проекуванні) технічних систем державний стандарт визначає такі основні етапи: техніко-економічне обґрунтування (ТЕО), розроблення технічного завдання (ТЗ), ескізне, технічне і робоче проектування. Під час виконання кожного із зазначених етапів, як і у процесі синтезу будь-якої системи, потрібно багаторазово реалізовувати процедури ухвалення рішення згідно з багатокритеріальним оцінюванням та оптимізацією можливих рішень в умовах послідовного уточнення вихідної інформації про склад частинних критеріїв, їх взаємної важливості, форми подання інформації тощо. Основна тенденція полягає в тому, що в процесі синтезу будь-якої системи підвищується інформованість ОПР, тобто відбувається еволюція від інформаційної ситуації 3 до ситуації 1. Джерелом додаткової інформації є поглиблене обстеження об'єкта, вивчення прототипів, проведення наукових досліджень і дослідно-конструкторських робіт, результати математичного моделювання, натурні експерименти, дослідна експлуатація тощо.

Оскільки кожній інформаційній ситуації, як показано в розд. 2.4, відповідає своя специфічна проблемно-орієнтована модель багатокритеріального оцінювання та оптимізації, доцільно синтезувати єдину універсальну, адаптивну модель оцінювання й оптимізації, що може легко адаптуватися до конкретної інформаційної ситуації і залежно від цього реалізувати частинні схеми оптимізації, розглянуті вище.

Така адаптивна модель набуває вигляду

$$x^0 = \arg \max_{x \in X} \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i p_i[k_i(x)]]^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}; \quad (2.58)$$

$$x^0 = \arg \min_{x \in X} \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i \bar{p}_i[k_i(x)]]^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \quad (2.59)$$

де  $\beta$  – адаптаційний параметр,  $\bar{p}_i$  – функція втрати корисності (2.25).

Покажемо, що запропонована модель дає змогу реалізувати основні проблемно-орієнтовані багатокритеріальні оцінки.

А. Реалізація адитивної оцінки. Така необхідність виникає, якщо вагові коефіцієнти  $a_i$  задані у вигляді числових значень, а для параметрів нелінійності  $\alpha_i$  функцій корисності частинних критеріїв виконується умова

$$\alpha_i \geq 1 \text{ або } \alpha_i \leq 1, \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (2.60)$$

Умови (2.60) означають, що адитивна функція узагальненої корисності є опуклою. Для реалізації адитивної багатокритеріальної оцінки досить в моделях (2.58), (2.59) вважати  $\beta = 1$

$$x^0 = \arg \max_{x \in X} \sum_{i=1}^n a_i p_i[k_i(x)]; \quad (2.61)$$

$$x^0 = \arg \min_{x \in X} \sum_{i=1}^n a_i \bar{p}_i[k_i(x)]. \quad (2.62)$$

Б. Реалізація схеми послідовної оптимізації. Вихідну інформацію подано у вигляді упорядкованої за важливістю множини частинних критеріїв (ситуація 2)  $k_1(x) \succ k_2(x) \succ \dots \succ k_n(x)$ .

Аналіз здійснюють послідовно за кожним критерієм шляхом розв'язування однокритеріальних оптимізаційних задач (1.25–1.27). Для реалізації

цієї схеми за допомогою універсальної моделі (2.58–2.59) вважаємо  $\beta = 1$ .  
 Перехід до однокритеріальних задач здійснюють за допомогою відповідних значень вагових коефіцієнтів  $a_i$  і необхідних додаткових обмежень.  
 Покажемо це на прикладі.

Крок 1. Нехай  $\beta = 1$ ,  $a_1 = 1$ . За умови  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$  це означає, що всі вагові коефіцієнти  $a_i = 0$ ,  $i = \overline{2, n}$ . Отже, із (2.58) одержуємо модель вигляду

$$x_1^0 = \arg \max_{x \in X} p_1[k_1(x)]. \quad (2.63)$$

Крок 2. Нехай  $\beta = 1$ ,  $a_2 = 1$  і виконується додаткове обмеження  $x \in X^0$ .  
 Іноді, залежно від особливостей задачі, зокрема, якщо множина  $X$  незчисленна, зазначене обмеження зручніше подати у вигляді  $k_1(x) \geq k_1(x_1^0) \sim k_1^{\max}$ , тоді

$$x_1^0 = \arg \max_{x \in X} p_2[k_2(x)], \quad (2.64)$$

$$k_1(x) \geq k_1(x_1^0).$$

Аналогічно послідовно продовжуємо процедуру за кожним  $i$ -м частинним критерієм (для цього приймаємо  $a_i = 1$ ) до одержання єдиного розв'язку або вичерпання всіх частинних критеріїв.

Для випадку мінімізації втрати корисності (2.59) розв'язування аналогічне. Не викликає утруднень і реалізація схеми поступки, для цього потрібно сформулювати додаткові обмеження вигляду (1.28).

В. Реалізація мінімаксної і максимінної оцінок. Уведемо поняття узагальненого степеневого середнього

$$S = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (2.65)$$

Відповідно до теореми про степеневе середнє для великих степенів виконуються такі співвідношення:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} = \max_i b_i, \quad (2.66)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} = \min_i b_i. \quad (2.67)$$

Доведемо, що співвідношення (2.66), (2.67) виконуються і для функції вигляду

$$S' = \left( \sum_{i=1}^n b_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (2.68)$$

Для цього злогарифмуємо (2.65)

$$\ln S = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta} \ln \left( \sum_{i=1}^n b_i^\beta \right). \quad (2.69)$$

Границя першого доданка при  $\beta \rightarrow \infty$  дорівнює

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{n} \right) = 0, \quad (2.70)$$

тому виключення з формули (2.65) співмножника  $\frac{1}{n}$  і зведення до вигляду (2.68) не тільки не вплине на виконання співвідношень (2.66), (2.67), але і підвищить швидкість збіжності до мінімального або максимального доданка. Це підтверджується даними табл. 2.3, отриманими для двох доданків ( $n=2$ ), що дорівнюють відповідно  $b_1=0,8$ ,  $b_2=0,2$ .

### 2.3. Визначення узагальненого степеневого середнього

Вид співвідношення ( $n=2$ ; $b_1=0,8$ ; $b_2=0,2$ )	Адаптаційний параметр $\beta$				
	1	2	3	4	5
$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}$	0,5	0,583	0,637	0,673	0,697
$\left( \sum_{i=1}^n b_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}$	1,0	0,82	0,805	0,801	0,800

Як видно з табл. 2.3, для формули (2.68) вже при  $\beta=2$  досить точно виконуються співвідношення

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n b_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} = \max_i b_i, \quad (2.71)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \left( \sum_{i=1}^n b_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} = \min_i b_i. \quad (2.72)$$

Математична модель (2.58) з урахуванням (2.72) і за умови  $\beta \leq -2$  набуває вигляду

$$x^0 = \arg \max_{x \in X} \min_i a_i p_i [k_i(x)], \quad (2.73)$$

а (2.59) з урахуванням (2.71) при  $\beta \geq 2$

$$x^0 = \arg \min_{x \in X} \max_i \overline{a_i p_i} [k_i(x)]. \quad (2.74)$$

Отже, універсальна математична модель (2.58), (2.59) дає змогу реалізувати максимінну та мінімаксу моделі при значеннях адаптаційного параметра  $|\beta| \geq 2$  (при цьому, як видно з табл. 2.3, недоцільно застосовувати значення  $|\beta| > 3$ ).

Зазначені моделі (2.73–2.74) застосовуються в двох випадках.

1. Відомі вагові коефіцієнти  $a_i$ , але узагальнена функція корисності

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i p_i [k_i(x)] - \text{неопукла, тобто } \alpha_i \geq 1, \quad i = \overline{1, m} \text{ і } \alpha_j < 1, \quad j = \overline{m+1, n}$$

(ситуація 1).

Для реалізації такої моделі  $a_i$  мають дорівнювати відомим числовим значенням, а  $|\beta| \geq 2$ .

2. Вагові коефіцієнти  $a_i$  невідомі (ситуація 3). Тоді, незалежно від характеру функції узагальненої корисності, усі  $a_i = 1, \forall i = \overline{1, n}$ , а  $|\beta| \geq 2$ .

Отже, узагальнена адаптивна математична модель багатокритеріального оцінювання та оптимізації (2.58–2.59) шляхом вибору  $\beta$  і  $a_i$  дає змогу реалізувати всі основні схеми оцінювання та оптимізації.

### Запитання для самоперевірки

1. Які основні принципи формування узагальненої корисності? Охарактеризуйте їх.

2. Назвіть основні вимірювальні шкали. Дайте їх характеристику. Яким чином якісні вимірювання можна перетворити в кількісні?

3. Навіщо потрібні функції корисності частинних критеріїв? Яким вигодам вони мають задовольняти?

4. Охарактеризуйте основні типи ситуацій вибору компромісного рішення. Що покладено в основу їх типізації?

5. Зазначте принципи вибору компромісного рішення для кожної з типових ситуацій прийняття рішень.

6. Чим відрізняється розмита множина від класичної? Для формалізації яких змінних можна використовувати розмиті множини?

7. Запишіть універсальну адаптивну модель вибору компромісного рішення. Що в ній є адаптаційним параметром? Яких значень він набуває при реалізації частинних схем компромісу?

### **Розділ 3. МЕТОДОЛОГІЯ І КРИТЕРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ**

#### **3.1. АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ УМОВ РИЗИКУ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ЦИХ УМОВАХ**

Попередній розділ присвячено аналізу та обґрунтуванню принципів і критеріїв прийняття рішень в умовах детермінізму, тобто, коли всі функціональні залежності і параметри систем, для яких приймаються рішення, однозначно визначені. Невизначеність задання параметрів моделі прийняття рішень, наприклад, коефіцієнтів відносної важливості критерію  $a_i$  (2.19), можна подолати шляхом детермінізації, тобто обчисленням деяким способом (див. розд. 2.4), у тому числі за допомогою застосування знань експертів і ОПР, конкретних числових значень параметрів. Такі задачі належать до класу *задач прийняття рішень в умовах визначеності*.

Поряд із цим існує великий клас нестаціонарних, високодинамічних систем, із погано прогнозованою динамікою розвитку. Прикладом таких систем є підприємства, фірми, біржи, банки, муніципальні системи, які функціонують в умовах нестабільної, перехідної економіки. Такі умови впливають на високий динамізм змін зовнішнього середовища (некерованих змінних системи): цін, попиту, пропозицій тощо, а часті директивні впливи (законотворчість, постанови центральних і місцевих виконавчих органів, рішення Національного банку) роблять часові ряди короткими і неоднорідними, що найчастіше виключає можливість вірогідного прогнозування змін характеристик зовнішнього середовища.

Перераховані причини призводять до обмеженості (неповноти) або неточності (неоднозначності), тобто до невизначеності інформації як про характеристики системи, так і про ситуацію прийняття рішень. Ця невизначеність має принциповий характер, і її неможливо детермінізувати способами, описаними в попередньому розділі. Отже, виникає необхідність використовувати інші підходи до розв'язання задачі прийняття рішень.

Залежно від ступеня і характеру невизначеності вихідної інформації розрізняють два типи задач прийняття рішень: *в умовах ризику та в умовах невизначеності*.

Для першого типу невизначеність вихідної інформації задається функцією розподілу ймовірності параметрів моделі прийняття рішень, ймовірності випадкових подій тощо. У другому випадку навіть ця інформація відсутня. Отже, з точки зору повноти і якості вихідної інформації *визначеність* (детермінованість) і *невизначеність* являють собою два крайніх випадки, а *ризик* визначає проміжну ситуацію. Методи прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності вивчаються в розділі загальної теорії прийняття рішень, відомому як "Дослідження операцій".

Проведемо системний аналіз можливих джерел невизначеності й сформуємо узагальнену постановку задачі прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності.

Як показано в розд. 1, проблема прийняття рішень у загальному випадку може бути структурована на такі основні етапи: формування множини допустимих рішень  $X$ ; визначення метрики, за допомогою якої порівнюють ці рішення  $x \in X$  (задача оцінювання); вибір із допустимої множини ефективного (найкращого) рішення  $x^0 \in X$  (задача оптимізації).

Множина допустимих рішень  $X$  задається на основі змістовного аналізу конкретної задачі, найчастіше в неявному вигляді як підобласть області існування системи, яка обмежена співвідношеннями у вигляді нерівностей

$$h_s(x, q_h) \leq 0; s = \overline{1, S} \quad (3.1)$$

і рівностей

$$g_l(x, q_g) = 0; l = \overline{1, L}, \quad (3.2)$$

де  $x$  –  $N$ -вимірна ( $x \in R^N$ ) керована змінна;  $h_s, g_l$  – оператори, що визначають структуру математичної моделі відповідного обмеження;  $q_h, q_g$  – кількісні параметри відповідних обмежень.



Розв'язування задачі оптимізації, тобто визначення найкращого рішення  $x^0 \in X$ , пов'язане з формалізацією поняття “найкраще”. Для цього потрібно визначити метрику, за допомогою якої порівнюють якість рішень  $x \in X$ .

Нехай у загальному випадку кожне рішення  $x \in X$  описується  $n$  різними кількісними характеристиками (частинними критеріями)  $k_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Вважаємо, що на множині  $k_i(x)$  існує модель оцінювання, яка дає змогу одержати скалярну, кількісну оцінку будь-якого рішення  $x \in X$ :

$$P(x) = G[a_i, k_i(x)], \quad (3.3)$$

де  $G$  – оператор моделі, що визначає її структуру,  $a_i$  – кількісні параметри моделі (наприклад, коефіцієнти важливості частинних критеріїв).

У загальному випадку (3.3) є функцією цілі системи.

З урахуванням співвідношень (3.1–3.3) задачу умовної оптимізації (математичного програмування) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} x^0 &= \underset{x \in X}{\operatorname{arg\,extr}} P(x), \quad x \in R^N; \\ h_s(x, q_h) &\leq 0, \quad s = \overline{1, S}; \\ g_l(x, q_g) &= 0, \quad l = \overline{1, L}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Традиційна постановка задачі математичного програмування припускає детермінованість об'єкта, тобто математичної моделі (3.4), що означає визначеність структури і кількісних характеристик моделі на інтервалі планування. Це не виключає наявності більшої або меншої невизначеності інформації про структуру і параметри моделі, яку задають інтервалами можливих значень, статистичними характеристиками або розмитими множинами.

Поряд із детермінованими існує великий клас систем, які розвиваються.

Для цих об'єктів характерні такі особливості:

1. Структура об'єкта нестационарна. Її зміна відбувається як унаслідок внутрішнього розвитку, у тому числі при зміні числових значень параметрів, так і під впливом зовнішнього середовища. Фоновими зовнішніми впливами є зміна цін, кон'юнктура ринку тощо.

2. Велика частина параметрів є нестационарними.

3. Наявність великої кількості нелінійних залежностей.

4. Для об'єкта характерна множина зворотних зв'язків.

5. Об'єкт не має скінченних меж обрїю планування.

6. Часті зовнішні директивні керуючі впливи розбивають часові ряди вихідних змінних на короткі, статистично неоднорідні послідовності, що ускладнює коректне рішення задачі прогнозування, визначення статистичних параметрів процесів і оцінку їх значень.

За таких умов потрібно вибрати ефективну стратегію поведінки, тобто реалізувати задачу прийняття рішення. Проблема містить три задачі: синтез адекватної імітаційної математичної моделі системи; визначення цільового функціонала; вибір правила (алгоритму) прийняття рішення.

Метою даного посібника не є розгляд задачі синтезу моделі системи. Тому, не зупиняючись на складності синтезу адекватних моделей нестационарних систем, вважатимемо, що імітаційну модель задано. При цьому для детермінованих систем характерна однозначність реакції й сталість поведінки при варіації вхідних впливів, якщо вони не виходять за межі області допустимих значень. Для моделювання поведінки таких систем достатньо задання початкового стану системи.

На відміну від цього для моделювання нестационарних систем, тобто систем, стан яких залежить від часу, потрібно задати часовий сценарій поведінки зовнішнього середовища  $y(t)$ . Кожному сценарію відповідатиме деяка оптимальна поведінка системи, тобто траєкторія зміни структури, параметрів, керованих змінних. Оптимізаційна модель (3.4) набуває вигляду

$$\begin{aligned}x^0 &= \arg \operatorname{extr}_{x \in X} P(x, y, t), \quad x \in R^N, \quad y \in R^N; \\h_s(x, q_h, y, t) &\leq 0, \quad s = \overline{1, S}; \\g_l(x, q_g, y, t) &= 0, \quad l = \overline{1, L}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

З моделі (3.5) видно, що кожній конкретній реалізації сценарію розвитку зовнішнього середовища  $y(t)$  відповідає деяке конкретне ефективне рішення  $x^0$ . Слід зазначити, що зовнішнє середовище не є цілком керованим і контрольованим навіть з позицій метасистеми. Це означає, що на рівні конкретної локальної системи точний сценарій зміни зовнішнього середовища невідомий і внаслідок зазначених вище причин погано прогнозується. Тому можна робити тільки евристичні припущення про можливі значення  $y(t)$ . За даних умов рішення  $x^0$ , яке обирається для конкретного сценарію  $y(t)$ , для іншого сценарію  $y'(t)$  може виявитися непридатним, тобто у кращому випадку неефективним, а в гіршому – недопустимим або навіть

катастрофічним. Це обумовлено фактом належності екстремального рішення задачі (3.4) межі допустимої області  $X$ .

Крім того, через нелінійність нестационарних систем і особливо наявність в них перемикальних функцій типу бульових змінних, у деяких ситуаціях система стає нестійкою, а її модель – некоректною за Адамаром. Зокрема, невеликі зміни  $y(t)$  стають причиною непропорційно великих змін вихідних змінних. Це може призвести до катастрофічних наслідків, що для соціально-економічних систем означає банкрутство, глибоку фінансову кризу, різкий стрибок цін або інфляції тощо.

Разом із цим слід зазначити, що через такі особливості соціально-економічних систем, як консервативність, велика інерційність, традиційні для технічних і технологічних систем методи, а саме оперативне регулювання та адаптивне керування є неефективними.

Отже, для нестационарних систем потрібні спеціальні проблемно-орієнтовані методи прийняття рішень.

Процедуру прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності пропонується структурувати на два етапи.

На першому формується множина альтернатив  $X_k = \{x_{k_i}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , що відповідають можливим сценаріям поведінки зовнішнього середовища  $y_i(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , де  $t_0, t_k$  – відповідно початковий і кінцевий моменти інтервалу прийняття рішення. Для розв'язування цієї задачі потрібна математична модель, що містить в собі досить адекватну імітаційну модель, яка дає змогу одержати відповідь на питання типу “що буде, якщо...”. Крім того, вважаємо, що цільова настанова на момент прийняття рішення в момент  $t_0$  стабільна (незмінна). Це уможлиблює формування відповідної їй цільової функції, яка підлягає оптимізації шляхом вибору відповідних значень керованих змінних  $x$ . Отже, кожному конкретному сценарію  $y_i(t)$  на момент  $t_k$  відповідає стан  $x_{k_i}$ , що екстремізує цільову функцію системи. Внаслідок цього отримаємо множину можливих станів системи  $X_k = \{x_{k_i}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Задача другого етапу полягає у виборі стратегії поведінки системи  $x(t_0)$  згідно з аналізом множини можливих станів  $X_k$ . При цьому передбачається, що на інтервалі часу  $t \in [t_0, t_k]$  зміна початкового рішення  $x(t_0)$  є неможливою. Наприклад, у момент  $t_0$  приймається рішення про конверсію або модернізацію деякого підприємства. Це пов'язано з прийняттям рішення

про номенклатуру та обсяги майбутнього виробництва, вибір потужності й постачальників устаткування, джерел ресурсів тощо. Ці рішення приймаються на основі аналізу оцінок ємності ринку, цін на продукцію, устаткування і ресурси, податків, процентних ставок на кредити тощо. У процесі реалізації проекту, коли багато рішень уже неможливо скасувати, наприклад, оплачено устаткування, можуть змінитися за різних причин попит, ціни, ставки податків, курси валют тощо. Задача полягає в тому, щоб у момент  $t_0$  прийняти ефективне рішення.

Розглянемо більш докладно і формалізуємо виділені етапи прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності.

### 3.2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І АЛГОРИТМИ ФОРМУВАННЯ МНОЖИНИ ДОПУСТИМИХ АЛЬТЕРНАТИВНИХ РІШЕНЬ

Метою даного етапу є формування множини допустимих альтернативних рішень. Для цього потрібно: визначити оптимальні (опорні) рішення та оцінити їх чутливість і ефективність в умовах варіацій сценаріїв поведінки зовнішнього середовища.

**Формування множини опорних рішень.** Допускаємо, що для розглянутої системи відома оптимізаційна модель (3.5), яку з урахуванням (3.3) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} x^0 &= \arg \operatorname{extr}_{x \in X} G[a_i, k_i(x), y, t], \quad x \in R^N, \quad y \in R^M; \\ h_s(x, q_s, y, t) &\leq 0, \quad s = \overline{1, S}; \\ g_l(x, q_l, y, t) &= 0, \quad l = \overline{1, L}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Цільова настанова на момент прийняття рішення  $t_0$  є незмінною і не залежить від сценарію поведінки зовнішнього середовища  $y(t)$ . Це означає, що множина керованих змінних  $x$ , структура цільової функції (оператор  $G$ ) і склад частинних критеріїв  $k_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , залишаються стабільними.

У цьому разі  $y(t)$  впливає на кількісні значення параметрів  $a_i$ , структуру і параметри моделей обчислення частинних критеріїв  $k_i(x)$ , тобто

$$\begin{aligned} a_i &= f_a[y(t)], \\ k_i(x) &= f_k(x, y, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Що стосується обмежень, то залежно від зовнішнього середовища можуть змінюватися структура обмежень, тобто вид операторів  $h_s, g_l$ , кількість обмежень  $S$  і  $L$  та параметри  $q_h, q_g$ .

Розглянемо найпростіший приклад. Припустимо, що модель (3.6) є лінійною моделлю планування виробничої програми. Тоді цільова функція являє собою прибуток,  $a_i, i = \overline{1, n}$ , – нормовані прибутки від виробництва  $i$ -го типу продукції,  $k_i(x)$  – обсяги виробництва цього типу продукції. Обмеження формалізують виробничі ресурси, кон'юнктуру ринку, наприклад, попит на продукцію тощо. Аналіз виконується в умовах нестабільних цін, лімітів і попиту на вихідні ресурси, орендної плати тощо. Сценарії поведінки зовнішнього середовища  $y(t)$  відбивають різні варіанти рівня попиту на продукцію, цін, платежів, лімітів на зовнішні ресурси. Це зумовлює зміну значень нормованих прибутків  $a_i$ , вільних членів обмежень, що визначають попит, до появи нових обмежень за ресурсами, які лімітуються.

Наявність моделі системи (3.6) дає змогу визначити для кожного конкретного сценарію поведінки зовнішнього середовища  $y_j(t), j = \overline{1, m}$ , відповідне йому *оптимальне рішення*  $x_j^0$ , що надалі називатимемо *опорним*. Відзначимо, що в окремому випадку  $y_j(t)$  може не залежати від часу на інтервалі  $t \in [t_0, t_k]$ , а бути постійним, наприклад,  $y(t) = y(t_0)$ .

Отже, визначення множини опорних рішень  $x_j, j = \overline{1, m}$ , пов'язане з формуванням вихідних сценаріїв поведінки зовнішнього середовища  $y_j(t)$ . Можливі два підходи до розв'язування цієї задачі: *евристичний* та *формальний*.

Згідно з першим, можливі конкретні сценарії поведінки зовнішнього середовища, їх кількість і параметри формуються експертами-аналітиками на інтуїтивному рівні, що не виключає використання на різних етапах попереднього аналізу формальних процедур.

Другий підхід орієнтовано на створення певних більш-менш глибоко формалізованих процедур формування сценаріїв  $y_j(t)$ . Більш докладно цей підхід розглянуто нижче в розд. 4.

**Формування альтернативних рішень  $x_k$  і оцінка їх якості.** Метою цього етапу є оцінка ефективності (сталості) опорних рішень в умовах зміни сценарію поведінки зовнішнього середовища  $y(t)$ .

На попередньому етапі визначено кілька опорних рішень  $x^0$ , кожне з них є оптимальним для конкретного сценарію  $y(t)$  за моделлю (3.6). Розглянемо опорне рішення  $x^0$ . Воно отримане для конкретної реалізації сценарію зміни характеристик зовнішнього середовища  $y_0(t)$  і характеризується змінними  $x^0 = \{x_v\}$ ,  $v = \overline{1, N}$ , які на інтервалі прийняття рішення  $t \in [t_0, t_k]$  за визначенням залишаються незмінними. Внаслідок нестабільності зовнішнього середовища її реальний сценарій змінюється, тобто  $y_k(t)$  буде відрізнятися від  $y_0(t)$ , тому рішення  $x^0$  для умов  $y_k(t)$  є неоптимальним. Потрібно визначити якісні і кількісні наслідки (необов'язково негативні) цієї неоптимальності. Для цього синтезуємо математичну модель оцінки таких наслідків.

Аналіз математичної моделі (3.6) показує, що варіації сценарію  $y_i(t)$  можуть зумовити такі формальні наслідки: зміну цільового функціонала без зміни обмежень, що визначають область допустимих значень керованих змінних; трансформацію обмежень при незмінному цільовому функціоналі; одночасну зміну цільового функціонала та обмежень.

Розглянемо математичні моделі оцінки наслідків варіацій  $y(t)$  у кожній із зазначених ситуацій.

**1. Оцінка наслідків зміни цільової функції.** Як випливає з (3.6), цільову функцію можна подати у вигляді

$$P = G[a_i, k_i(x), y, t], \quad x \in R^N, \quad y \in R^M, \quad (3.8)$$

де  $a_i$  – кількісні параметри функції;  $k_i(x) = f_i(x)$  – частинні критерії,  $i = \overline{1, n}$ .

Цільова настанова на момент прийняття рішення залишається незмінною, тому вважаємо, що оператор  $G$  не залежить від  $y(t)$ , а зовнішнє середовище може частково або повністю змінювати кількісні характеристики  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , і вигляд операторів формування частинних критеріїв  $f_i(x)$ . Значення керованих змінних залишаються в усіх випадках незмінними:  $x = x^0$ , тобто відповідними сценарію  $y(t)$ . Наприклад, цільова функція являє собою прибуток підприємства і дорівнює

$$P = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad (3.9)$$

де  $a_i$  – нормативний прибуток при виробництві і реалізації одиниці продукції  $i$ -го виду;  $x$  – керовані змінні, що визначають номенклатуру та обсяги продукції,  $x = \{x_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Коефіцієнт  $a_i$  залежить від собівартості та відпускної ціни продукції. Ці показники можна інтерпретувати як частинні критерії  $k_1$  і  $k_2$ , які залежать від таких параметрів зовнішнього середовища, як кон'юнктура ринку, ставки податків, вартість первинних ресурсів тощо. Отже, функцію цілі (3.9) можна записати у вигляді

$$P = \sum_{i=1}^n a_i(y) x_i, \quad (3.10)$$

де  $y$  – зовнішні, некеровані змінні.

Нехай  $x^0$  – оптимальне (опорне) рішення, отримане з урахуванням обмежень за моделлю (3.6) для конкретного сценарію зовнішніх умов  $y_0(t)$ . У цьому разі цільова функція (3.10) набуває вигляду

$$P_0 = \sum_{i=1}^n a_i(y_0) x_i^0, \quad (3.11)$$

а для будь-якої іншої конкретної реалізації сценарію зміни параметрів зовнішнього середовища  $y_j(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,

$$P_j = \sum_{i=1}^n a_i(y_j) x_i^0. \quad (3.12)$$

Оцінка наслідків зміни параметрів зовнішнього середовища

$$\Delta P_j = \sum_{i=1}^n a_i(y_0) x_i^0 - \sum_{i=1}^n a_i(y_j) x_i^0. \quad (3.13)$$

У загальному випадку цільова функція

$$P = G(x, y), \quad (3.14)$$

її оптимальне значення для  $y(t)$

$$P_0 = G[x^0, y_0(t)], \quad (3.15)$$

а оцінка наслідків зміни сценарію розвитку зовнішнього середовища щодо опорного рішення  $x^0$

$$\Delta P_j = P_0 - G[x^0, y_j(t)], \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.16)$$

Відзначимо, що  $\Delta P_j$  може набувати як додатних, так і від'ємних значень. Наприклад, у разі збільшення або зменшення цін на первинні ресурси відповідно зросте або знизиться собівартість продукції, що за інших незмінних умов спричинить збільшення або зменшення прибутку підприємства.

Конструктивна реалізація оцінок (3.16) пов'язана із синтезом конкретних моделей, що описують взаємозв'язок  $a_i$  і  $k_i(x)$  із змінною  $y$  (3.7). Питання синтезу таких моделей у даному посібнику не розглядаються, оскільки вимагають глибокого вивчення предметної галузі, особливостей функціонування тощо. Вважатимемо, що такі моделі є заданими, оскільки неможливо дати загальних рекомендацій щодо їх синтезу.

**Модель визначення наслідків зміни обмежень.** Нехай цільова функція (3.8) є стабільною, тобто не залежить від варіацій вектора зовнішніх умов  $y(t)$ , але останній визначає зміни обмежень у моделі (3.6). Такі зміни можуть стосуватися операторів нерівностей  $h_s$ ,  $s = \overline{1, S}$ , і рівностей  $g_l$ ,  $l = \overline{1, L}$ , їх числових параметрів  $q_h$ ,  $q_g$  і навіть кількості обмежень  $S$  і  $L$ .

Отже,

$$h_s = f_s(y); \quad g_l = f_l(y); \quad (3.17)$$

$$q_h = f_h(y); \quad q_g = f_g(y); \quad (3.18)$$

$$S = f_1(y); \quad L = f_2(y). \quad (3.19)$$

При цьому вважаємо, що математичні моделі (3.17)–(3.19) відомі.

У цілому зміна вектора зовнішніх умов  $y$  зумовлює деформацію області допустимих рішень

$$X = \Theta[y], \quad (3.20)$$

а опорне рішення  $x^0$  за визначенням залишається незмінним. Внаслідок цього виникають дві ситуації

$$x^0 \in X(y); \quad x^0 \notin X(y). \quad (3.21)$$



Згідно з першою, опорне рішення  $x^0$  задовольняє всім новим обмеженням, і система не несе прямих збитків. Можна говорити тільки про втрачені можливості, оскільки опорне рішення в загальному випадку не оптимальне в нових умовах. Наприклад, у разі збільшення попиту на продукцію з'являються можливості збільшення прибутку, але на даному інтервалі прийняття рішення вони не будуть реалізовані. Така ситуація називається втраченою вигодою (втраченим прибутком).

Друга ситуація означає, що опорне рішення не належить новій допустимій області, тобто не задовольняє всі або частину обмежень. Це призводить до прямих збитків системи. Наприклад, скорочення попиту на продукцію призводить до втрат за рахунок заморожування обігових коштів, додаткових витрат на збереження надлишкової продукції тощо. Поява нових або зміна існуючих обмежень, що лімітують дефіцитні зовнішні ресурси, призводить або до необхідності скорочення виробництва, або до сплати штрафу за їх перевитрату тощо. Сумарні збитки за рахунок зміни обмежень

$$\Delta P_k = \sum_{l=1}^{L(y)} H_l |g_l(x^0, y)|, \quad (3.22)$$

де  $H_l$  – оператор (лінійний або нелінійний), який визначає збитки, тобто штраф за порушення  $l$ -го обмеження;  $L(y)$  – число обмежень-рівностей залежно від конкретної реалізації  $y$ .

Модуль у рівності (3.22) показує, що будь-яке порушення обмеження-рівності незалежно від його знака зумовлює негативні наслідки.

На відміну від (3.22) сумарні збитки за рахунок порушення обмежень-нерівностей

$$\Delta P_h = \sum_{s=1}^{S(y)} \delta_s [H_s h_s(x^0, y)], \quad (3.23)$$

де  $H_s$  – оператор штрафу за порушення  $s$ -го обмеження;  $S(y)$  – число обмежень-нерівностей залежно від  $y$ ,

$$\delta_s = \begin{cases} 0, & \text{якщо виконується } s\text{-та нерівність,} \\ 1 & \text{– в іншому випадку.} \end{cases} \quad (3.24)$$

Загальні збитки у разі порушення обмеження з урахуванням (3.24) при зміні сценарію поведінки зовнішнього середовища  $y(t)$

$$\Delta P_y = \sum_{l=1}^{L(y)} H_l |g_l(x^0, y)| + \sum_{s=1}^{S(y)} \delta_s [H_s h_s(x^0, y)]. \quad (3.25)$$

Відзначимо, що ці збитки завжди є від'ємними, тобто

$$\Delta P_y \leq 0. \quad (3.26)$$

**Оцінювання комплексних наслідків зміни вектора  $y$ .** Зміни вектора  $y$  або деяких його компонент спричиняють комплексні наслідки, тобто одночасно змінюються функції цілі та обмеження. Наприклад, зміна попиту на продукцію, що формалізується як обмеження, приводить не тільки до вищеописаних наслідків, але і до зміни цільової функції за рахунок зменшення ціни її реалізації. З урахуванням (3.16), (3.23)–(3.25) математична модель оцінки комплексних наслідків зміни сценарію поведінки зовнішнього середовища  $y_j(t)$  має вигляд

$$\Delta P_{kj} = F[x^0, y_0(t)] - F[x^0, y_j(t)] + \sum_{l=1}^{L(y)} H_l |g_l(x^0, y_j(t))| + \sum_{s=1}^{S(y)} \delta_s [H_s h_s(x^0, y_j(t))]. \quad (3.27)$$

Вважається, що математична модель (3.27) є визначеною. Тоді для кожного опорного рішення  $x_j^0$  можна обчислити оцінку наслідків зміни поведінки зовнішнього середовища для кожної конкретної реалізації сценарію  $y_j(t)$ . Для того щоб різні опорні рішення можна було порівнювати між собою за ефективністю і ступенем сталості до варіацій характеристик зовнішнього середовища, доцільно аналіз усіх  $x_j^0$  виконувати для однакових значень зовнішніх змінних  $y_j(t)$ . Результати такого аналізу наведені у табл. 3.1.

3.1. Матриця оцінок наслідків варіацій сценаріїв  $y_j(t)$

Опорні рішення Реалізація $x_j^0$ $y_j(t)$	$x_1^0[y_1(t)]$	$x_2^0[y_2(t)]$	...	$x_m^0[y_m(t)]$
$y_1(t)$	$P_{11}^0[x_1^0, y_1(t)]$	$\Delta P_{12}[x_1^0, y_2(t)]$	...	$\Delta P_{1m}[x_1^0, y_m(t)]$
$y_2(t)$	$\Delta P_{21}[x_2^0, y_1(t)]$	$P_{22}^0[x_2^0, y_2(t)]$	...	$\Delta P_{2m}[x_2^0, y_m(t)]$
...	...	...	...	...
$y_m(t)$	$\Delta P_{m1}[x_m^0, y_1(t)]$	$\Delta P_{m2}[x_m^0, y_2(t)]$	...	$P_{mm}^0[x_m^0, y_m(t)]$

У таблиці по діагоналі записані значення функції цілі для кожного з опорних рішень  $x_j^0$ , що відповідають реалізації зовнішніх умов  $y_j(t)$ , а всі інші елементи кожного рядка є оцінками наслідків варіацій  $y_j(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Табл. 3.1. аналогічна за формою і змістом матриці платежів, що використовується під час прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності. Ця таблиця є вихідною інформацією для прийняття ефективного рішення.

Методика формування випадкових реалізацій векторів характеристик зовнішнього середовища  $y_j(t)$  описана в розд. 4.

### 3.3. МЕТОДИКА І КРИТЕРІЙ ВИБОРУ ЕФЕКТИВНОГО РІШЕННЯ

Згідно з інформацією, наведеною в табл. 3.1, – опорних рішень, оцінок їх якості в оптимальних умовах  $P_{ii}^0$ , а також оцінок наслідків можливих змін сценаріїв поведінки зовнішнього середовища  $y(t)$  – потрібно вибрати єдине рішення.

Прийняття рішень пов'язане з визначенням деякого показника якості. У детермінованих системах і при повній інформованості ОПР за критерій приймають комплексну цільову функцію, яка враховує властивості системи і збитки на їх досягнення, зведені до скалярного вигляду. Правило прийняття рішення полягає в одержанні такого  $x^0$ , що екстремізує цільову функцію.

Прикладом такого підходу є математична модель (3.6). Внаслідок її реалізації одержуємо для кожної  $j$ -ї конкретної ситуації опорне рішення  $x_j^0$  і відповідне йому значення цільової функції (діагональні елементи табл. 3.1). За єдине рішення вибирають опорне рішення, якому відповідає максимальне значення цільової функції.

Реалізація такого алгоритму в умовах невизначеності може призвести до негативних, навіть катастрофічних наслідків. В умовах невизначеності потрібно враховувати не тільки ефективність рішення, але і його стійкість до зміни умов. Кількісну інформацію про стійкість опорних рішень  $x_j^0$  до варіацій сценарію зміни зовнішнього середовища  $y_j(t)$  несуть відповідні значення  $\Delta P_{ij}$  (табл. 3.1). Доцільно використовувати цю інформацію для прийняття рішень. Для цього вибирають відповідні критерії і формулюють правило прийняття рішень.

Незважаючи на принципову відмінність детермінованих систем від систем із різним ступенем невизначеності параметрів, неважко помітити методологічну аналогію процедур прийняття рішень в обох випадках. Зокрема множину можливих рішень (табл. 3.1) можна інтерпретувати як аналог наближеної області компромісів (див. розд. 1.3). Якість кожного з цих рішень характеризується двома локальними числовими критеріями: ефективності та можливих втрат. Як показано раніше (розд. 1.3) багато-критеріальні задачі прийняття рішень є некоректними по Адамару і для їх регуляризації потрібно сформулювати узагальнену скалярну багатofакторну (у даному випадку двокритеріальну) оцінку якості. Можливі варіанти таких критеріїв розглянуті нижче.

**Методи прийняття рішень в умовах ризику** засновані на припущенні, що ОПР відомі ймовірності реалізації сценаріїв поведінки зовнішнього середовища  $y_j(t)$ . У цьому разі критерієм оцінки різних рішень може бути математичне сподівання цільової функції

$$M(P_i^0) = \sum_{j=1}^m V_j (P_{ij} + \Delta P_{ij}), \quad (3.28)$$

де  $V_j$  – ймовірність реалізації  $j$ -ї ситуації (сценарію).

Правило прийняття рішення в цій ситуації набуває вигляду

$$x^0 = \arg \max_i \sum_{j=1}^m V_j (P_{ij} + \Delta P_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.29)$$

за умови, що розглянуті  $y_j(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$ , сценарії утворюють повну групу несумісних випадкових подій, тобто  $\sum_{j=1}^m V_j = 1$ .

Якщо ймовірності  $V_j$  невідомі (прийняття рішень в умовах невизначеності), вважатимемо всі можливі ситуації  $j = \overline{1, m}$  рівноймовірними, тобто

$$V_j = \frac{1}{m}. \quad (3.30)$$

У цьому разі критерій (3.28) перетворюється в *критерій Лапласа*, а співвідношення (3.29) набуває вигляду

$$x^0 = \arg \max_i \sum_{j=1}^m (P_{ij} + \Delta P_{ij}), \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.31)$$

Оскільки  $V_j$  перетворюється в масштабний коефіцієнт, який не впливає на положення екстремуму, то його можна не враховувати.

Розглянуті ймовірнісні критерії є узагальненою двокритеріальною скалярною оцінкою якості можливих альтернатив (рішень), оскільки враховують сумарну ймовірнісну оцінку як позитивного ефекту (доданки  $P_{ij}$ ), так і можливих збитків (доданки  $\Delta P_{ij}$ ). За формою ця оцінка є типовою адитивною багатофакторною оцінкою (див. розд. 2.4, формули 2.22 і 2.23). Відмінність лише в тому, що усі доданки мають однакову розмірність, і в зв'язку з цим відпадає необхідність зведення їх до ізоморфного вигляду (нормалізації), причому роль вагових коефіцієнтів  $a_i$  виконують ймовірності  $V_j$ .

Разом із цим ймовірнісний підхід не є універсальним. Це обумовлено двома причинами: трудністю визначення ймовірності  $V_j$  реалізації різних ситуацій, особливо для нестационарних систем із короткими інтервалами статистичної однорідності, а також неможливістю коректної інтерпретації багатьох класів систем як стохастичних. Це означає, що існують системи, для яких ймовірнісний підхід до прийняття рішень є некоректним.

Як приклад коректного використання ймовірнісного підходу можна навести задачу вибору структури посівних площ кількох сільськогосподарських культур за умови відомої ймовірності різних погодних умов. Для цієї системи характерні: можливість визначення ймовірності реалізації різних погодних умов на великій однорідній статистичній вибірці; багаторазова реалізація прийнятого рішення протягом кількох років.

Останнє означає, що середній у множині реалізацій (років) ефект дійсно збігатиметься до математичного сподівання (3.28).

На відміну від цього задача планування потужності підприємства по випуску продукції нового типу не може бути коректно інтерпретована як ймовірнісна за першою і другою ознаками.

**Особливістю прийняття рішень в умовах невизначеності** є відсутність апріорної інформації (навіть ймовірнісної) про можливість реалізації різних станів системи (різних сценаріїв).

Загальною основою визначення ефективного рішення за цих умов є визначення компромісу між ефективністю та стійкістю рішення. Правило реалізації компромісу визначається критерієм вибору рішення.

Більшість відомих критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності є окремими випадками адитивної схеми компромісу.

Нехай задано допустиму множину рішень  $X$ , на якій визначено два критерії  $k_1(x)$  і  $k_2(x)$ , перший із яких характеризує ефект, а другий – стійкість рішень. Вважатимемо, що обидва критерії мають однакову вимірність. Тоді загальна схема вибору компромісного рішення набуває вигляду

$$x^0 = \arg \max_{x \in X} \sum_{i=1}^2 a_i k_i(x); \quad \sum_{i=1}^2 a_i = 1. \quad (3.32)$$

Вибір значень  $a_i$  визначає конкретний вид критерію прийняття рішень і відповідну йому схему компромісу. Розглянемо деякі окремі випадки.

*Критерій оптиміста.* Цьому критерію відповідають вагові коефіцієнти  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ , тобто при виборі рішення враховується тільки його ефективність. Позначимо через  $P_{ij}(x)$  ефективність рішення

$$P_{ij}(x) = P_{ij}^0 + \Delta P_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.33)$$

де  $P_{ij}^0$ ,  $i = j$ ,  $\Delta P_{ij}$  – відповідні елементи табл. 3.1.

Тоді розглянута схема прийняття рішень набуде вигляду

$$x^0 = \arg \max_i \max_j P_{ij}(x), \quad (3.34)$$

тобто вибирається рішення, що має максимальне значення цільової функції при найбільш сприятливому сценарію розвитку зовнішнього середовища  $y_j(t)$ .

*Критерій Вальда (песиміста).* У цьому випадку  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ , а отже, рішення приймається тільки з урахуванням його стійкості. Найбільш стійким є максимінне рішення

$$x^0 = \arg \max_i \min_j P_{ij}(x). \quad (3.35)$$

Це рішення вибирається в припущенні про самий несприятливий варіант розвитку сценарію зовнішнього середовища  $y_j(t)$  і забезпечує за цих умов гарантований результат.

*Критерій Гурвіца.* При цьому  $a_1 = b$ ,  $0 \leq b \leq 1$ ,  $a_2 = (1 - b)$ . Отже, оцінка якості  $x_i^0$  опорного рішення має вигляд

$$P_i^0 = [\max_j P_{ij}(x)]b + [\min_j P_{ij}(x)](1 - b), \quad (3.36)$$

а правило вибору ефективності рішення

$$x^0 = \max_i P_i^0 = \max_i \{[\max_j P_{ij}(x)]b + [\min_j P_{ij}(x)](1 - b)\}. \quad (3.37)$$

Отже, критерій Гурвіца є універсальним, оскільки дає змогу реалізувати як розглянуті вище частинні критерії, так і будь-які інші переваги ОПР. Принциповим є те, що параметр  $b$  вибирається ОПР згідно з евристичними міркуваннями, і не існує формальних методів визначення  $b$ .

Можливі й інші критерії прийняття рішень в умовах невизначеності, але усі вони засновані на вищенаведеній методології.

Розглянута ситуація є окремим випадком проблеми прийняття рішень, докладно розглянутої в розд. 2, і на неї поширюються всі запропоновані в цьому розділі моделі прийняття рішень при різних способах задання вагових коефіцієнтів  $a_i$ , зокрема у вигляді інтервальних значень і розмитих множин.

### **Запитання для самоперевірки**

1. У чому полягають особливості задач прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності?
2. Як оцінюють наслідки невизначеності задання цільової функції та її обмежень?
3. Як формується матриця оцінок наслідків варіації вектора вхідних змінних?
4. Назвіть основні критерії вибору ефективного рішення в умовах ризику. Яка інформація є необхідною для їх реалізації?
5. Які основні критерії вибору ефективного рішення в умовах невизначеності?
6. Чим критерій оптиміста відрізняється від критерію Вальда?
7. Який вигляд має критерій Гурвіца? Як він узагальнює критерії песиміста та оптиміста?

## Розділ 4. ФОРМУВАННЯ СЦЕНАРІЇВ РОЗВИТКУ ЗОВНІШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА МЕТОДАМИ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

### 4.1. Обґрунтування виду імітаційної моделі

Формування матриці можливих рішень вигляду, наведеного в табл. 3.1, вимагає визначення множини різних сценаріїв розвитку зовнішнього, стосовно аналізованої системи, середовища. Такі сценарії можуть формуватися ОПР відповідно до евристичних міркувань або за допомогою формальних імітаційних моделей.

Як уже відзначалося, зовнішнє середовище є неповністю кероване і контролюване навіть із позиції метасистеми, наприклад, держави, тому стосовно будь-якої локальної системи вона може розглядатися як середовище з випадковими характеристиками. Вважатимемо, що виконуються такі гіпотези.

1. Зовнішнє середовище характеризується багатовимірною змінною  $y = \{y_m\}$ ,  $m = \overline{1, M}$ , де розмірність  $M$  і функціональний зміст компонент змінної  $y$  є різними для кожної конкретної системи і задачі.

2. Компоненти  $y_m$  змінної  $y$  взаємно незалежні. Очевидно, що існують групи залежних змінних. Зокрема при плануванні виробництва зміна ціни продукції веде до зміни попиту і навпаки. У кожній такій групі виділяється базова змінна, і ці змінні вважаються незалежними.

3. Компоненти  $y_m$  випадкової змінної  $y$  можуть бути випадковими подіями, випадковими величинами, випадковими функціями, а також детермінованими змінними.

У загальному випадку  $y$  є композицією зазначених типів змінних.

Крім того, вважаємо, що для кожної з компонент випадкової змінної  $y$  з більшою або меншою визначеністю відома інформація про статистичні параметри, наприклад, імовірність реалізації випадкової події, закон розподілу ймовірностей, математичне сподівання, дисперсія тощо. Для кожної конкретної компоненти зазначена інформація може бути задана точно, приблизно інтервалами можливих значень, лінгвістичними змінними (розмитими множинами) або бути невідомою.

Для цих умов потрібно розробити алгоритм формування змінної  $y(t)$ , що описує поведінку зовнішнього середовища.

Очевидна складність реалізації евристичного підходу, який полягає в тому, що для кожної компоненти змінної  $y$  потрібно вибрати рівні можливих значень на основі аналізу відомої інформації і потім сформувати їх різні комбінації.



Більш перспективна формалізована процедура формування можливих значень змінної  $y$ . В основу такого алгоритму можна покласти ідеї методу Монте-Карло (статистичних іспитів).

*Метод Монте-Карло* застосовують для дослідження стохастичних систем. Ідея полягає в тому, що на вході детермінованої математичної моделі формується випадкова реалізація вхідного впливу. Для нього визначають вихідні змінні, які, незважаючи на детермінізм основної моделі, є випадковими величинами внаслідок випадковості вхідних змінних. Багаторазове повторення описаної процедури моделювання дає змогу одержати вибірку випадкових вихідних змінних, на основі аналізу якої визначаються закон розподілу і статистичні параметри вихідного процесу.

Випадковим входом детермінованої моделі (3.6) є багатовимірна змінна  $u \in R^M$  – сценарій поведінки зовнішнього середовища, а результатом моделювання – стан системи в момент часу  $t_k$ , який позначимо  $x_k \in R^N$ . Отже, задачу формування опорних рішень можна інтерпретувати в термінах методу статистичних досліджень. Конкретизуємо алгоритм формування випадкових реалізацій вектора  $y(t)$  (рис. 4.1).

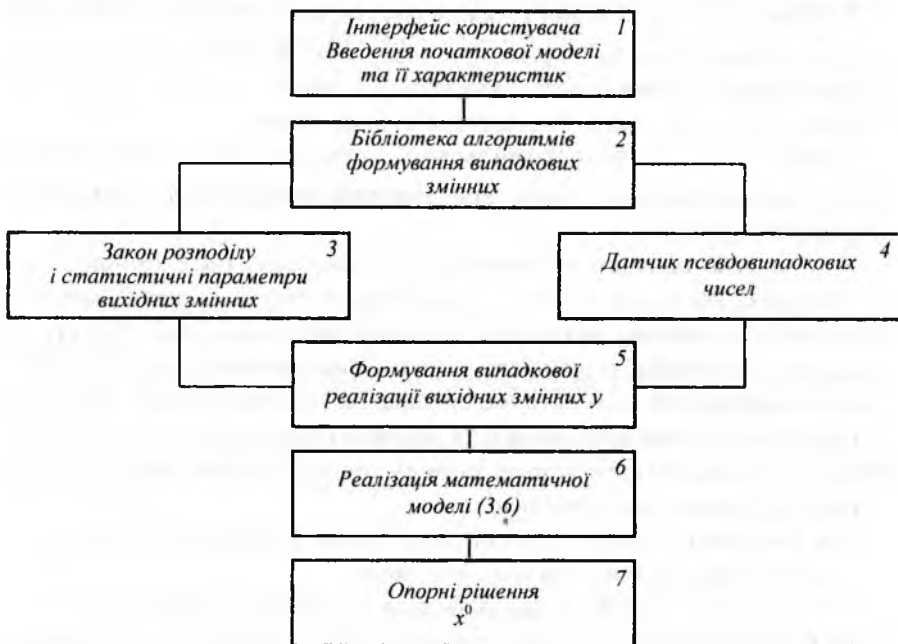


Рис. 4.1. Блок-схема обчислення опорних рішень за методом Монте-Карло

Блок 1. Інтерфейс користувача призначено для введення потрібної вхідної інформації та керування обчислювальним процесом. Перед початком обчислень користувач формує інформацію про якісні й кількісні характеристики моделі (3.6), про структуру вектора вхідних змінних  $u$ , закони розподілу, статистичні параметри його компонент тощо. В окремому випадку користувач може безпосередньо сформулювати і ввести конкретну реалізацію вхідних змінних, тобто реалізувати евристичну процедуру одержання  $u(t)$ .

Блок 2 являє собою бібліотеку алгоритмів формування конкретної реалізації компонент багатовимірної вхідної змінної  $u(t)$ . Такими компонентами можуть бути випадкові події з несумісної групи, випадкові величини, які розподілені за заданим законом із визначеними статичними параметрами, випадкові процеси, детерміновані значення і змінні, які задані лінгвістичними змінними (розмитими множинами). Тому бібліотека містить підпрограми формування змінних із заданими характеристиками, якісні та кількісні значення яких зберігаються в блоці 3. Загальною ідеєю цих алгоритмів є перетворення випадкових чисел, розподілених за законом рівної ймовірності в інтервалі від 0 до 1. Джерелом таких чисел є датчик псевдовипадкових чисел (блок 4), який являє детерміновану алгоритмічну процедуру.

Блок 5 задає випадкову реалізацію зовнішніх впливів  $u(t)$ . Для цього послідовно за допомогою підпрограм із бібліотеки формування змінних (блок 2) реалізуються випадкові значення компонент багатовимірної змінної  $u(t)$ . Результируюча випадкова змінна надходить на вхід моделі (3.6) (блок 6) і відповідно до реалізації цієї моделі визначається опорне рішення  $x^0$ .

Аналіз загальної блок-схеми показує, що центральною ланкою розглянутого підходу є блок 2.

#### **4.2. ФОРМУВАННЯ СЦЕНАРІЇВ ПОВЕДІНКИ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА**

З урахуванням евристичності призначення параметра  $b$  в моделі (3.37) обґрунтованість рішення значною мірою залежить від повноти платіжної матриці (табл. 3.1) та інформованості ОПР про ймовірність реалізації різних можливих наслідків. Ці питання розглянуто в даному підрозділі.

Задача блока 2 полягає у формуванні випадкових реалізацій вхідної багатовимірної змінної  $u(t)$ , яка є сценарієм розвитку зовнішнього середовища. Необхідно забезпечити, щоб ці випадкові реалізації досить повно

“покривали” область можливих значень  $y(t)$ . Потрібно визначити ймовірності або іншу інформацію, яка характеризує “вагу” кожної реалізації.

Компонентами багатовимірної змінної  $y(t)$  у загальному випадку є випадкові події, величини і функції. Розглянемо можливі алгоритми формування цих компонент.

**Формування випадкових подій.** Нехай задана повна група несумісних випадкових подій  $z_k, k = \overline{1, n}$ . Вважаємо, що відома апіорна ймовірність реалізації кожної з подій  $P(z_k) = P_k$ . У цьому випадку

$$\sum_{k=1}^n P_k = 1. \quad (4.1)$$

Для формування реалізації випадкової події можна скористатися таким алгоритмом. Інтервал  $[0, 1]$  розбивається на відрізки, що дорівнюють апіорній ймовірності появи кожної з подій повної групи. Наприклад, для групи з трьох подій  $z_k, k = \overline{1, 3}$ , ймовірність появ яких дорівнює  $P_1 = 0, 3, P_2 = 0, 1, P_3 = 0, 6$ , приймаються інтервали

$$J_1 = [0, 0; 0, 3], \quad J_2 = [0, 3; 0, 4], \quad J_3 = [0, 4; 1, 0]. \quad (4.2)$$

За допомогою алгоритмічного датчика псевдовипадкових чисел, які розподілені за рівномірним законом в інтервалі  $[0, 1]$ , генерується випадкове число  $\eta$ . Вважається, що відбулася подія з номером, який дорівнює номеру інтервалу, до якого потрапило випадкове число

$$(\eta \in J_k) \rightarrow Z_k, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (4.3)$$

В основу алгоритму покладено властивість рівномірного закону, відповідно до якого ймовірність влучення в заданий інтервал дорівнює величині інтервалу. Отже, порядок інтервалів не має значення. Формування складних і умовних подій відповідно до описаного алгоритму не викликає ускладнень. У такий спосіб генеруються випадкові події тоді, коли задані апіорні ймовірності їх виникнення  $P_k$ . Джерелом цієї інформації можуть бути результати статистичних спостережень або оцінки експертів. Остаточно інформація про апіорну ймовірність подій  $P_k$  може бути подана у вигляді точкових числових, інтервальних значень  $P_k \pm \Delta P$ , лінгвістичних змінних типу “приблизно дорівнює” або “належить інтервалу”, невизначених значень.

Для реалізації описаного алгоритму вихідна інформація має бути подана у вигляді точкових числових значень, що задовольняють умову (4.1). Найпростіше ця задача розв'язується у випадку повної невизначеності, коли всі можливі події приймаються рівноймовірними

$$P_k = \frac{1}{n}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (4.4)$$

Другий і третій випадки цілком аналогічні задачі визначення кількісних значень відносних вагових коефіцієнтів  $a_i$ , описаної в розд. 2.4 (ситуації 4, 5). Тому можна скористатися відповідними алгоритмами перетворення інформації.

**Формування випадкових величин** полягає у формуванні конкретних реалізацій цих величин, розподілених за заданим законом, наприклад, за нормальним, Пуассона, експоненціальним або будь-яким іншим, із визначеними статистичними параметрами – дисперсією, математичним сподіванням тощо.

Існує багато методів розв'язування подібних задач, більшість із яких засновано на трансформації чисел, які є розподіленими за рівномірним законом в інтервалі від 0 до 1, у необхідні випадкові величини. Математичні моделі такої трансформації для різних законів розподілу наведено в довіднику [8]. Джерелом вихідних рівноймовірних випадкових чисел є алгоритмічний датчик псевдовипадкових чисел.

Для реалізації алгоритмів генерації випадкових величин потрібна вихідна інформація про розподіл змінної, яка моделюється, в області можливих значень. Ця інформація може бути подана у вигляді функції щільності розподілу ймовірностей випадкової величини і значень її статистичних параметрів; функції належності розмитим множинам типу “приблизно дорівнює ...”; “лежить в інтервалі ...”; “приблизно дорівнює ... і лежить в інтервалі ...”; невизначених значень.

В останньому випадку відсутня інформація про вигляд функції щільності розподілу випадкової величини. Отже, логічно припустити, що всі можливі значення є рівноймовірними, тобто випадкова величина є розподіленою за рівномірним законом у заданому інтервалі. Отже, цей випадок зводиться до першої ситуації.

Як показано в розд. 2.4 (рис. 2.9), функції належності розмитим множинам лінгвістичної змінної зазначеного вище типу за формою близькі до функції щільності нормального закону розподілу випадкової величини.

Тому вони можуть бути апроксимованими відповідною функцією шляхом вибору таких значень математичного сподівання і дисперсії, що мінімізують деякий критерій, наприклад, найменших квадратів. Друга і третя форми подання вихідної інформації про розподіл значень випадкової величини можуть бути зведені до першої форми, для якої не виникає принципових утруднень як із математичної, так і обчислювальної точок зору при генерації випадкових величин. Для зручності використання і підвищення універсальності алгоритми генерації випадкових величин, розподілених за відмінними законами, можуть бути організовані у вигляді бібліотеки (див. блок 2, рис. 4.1). Бібліотека є відкритою і в разі потреби може поповнюватися новими алгоритмами (законами розподілу).

**Формування випадкових функцій** вимагає моделювання значень випадкової функції в дискретні моменти часу. Такі функції називаються випадковими послідовностями. Для їх формування доцільно скористатися канонічним розкладом випадкової функції [9]. У цьому разі випадкова функція  $X(t)$  набуває вигляду

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t), \quad (4.5)$$

де  $m_x(t)$  – математичне сподівання (тренд) випадкової функції;  $V_i$  – коефіцієнти розкладу, що є випадковими величинами з математичним сподіванням, яке дорівнює нулеві, і кореляційною матрицею  $\|K_{ij}\|$ ;  $\varphi_i(t)$  – невідповідні (координатні) функції.

Для канонічного розкладання випадкової функції всі коефіцієнти  $V_i$  некорельовані, тобто  $K_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Кореляційна функція випадкового процесу

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) \varphi_i(t') D_i, \quad (4.6)$$

де  $D_i$  – дисперсія відповідних випадкових коефіцієнтів  $V_i$  розкладу, а дисперсія випадкової функції

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^m [\varphi_i(t)]^2 D_i. \quad (4.7)$$

Не зупиняючись на проблемі подання випадкової функції в канонічній формі, яку докладно розглянуто в [9], відзначимо, що для одержання

випадкової послідовності, за умови, що є заданим розклад (4.5), потрібно формувати тільки випадкові величини  $V_i$ . Цю процедуру описано вище.

Отже, використовуючи алгоритми формування випадкових подій, величин і функцій, одержимо множину конкретних випадкових сценаріїв поведінки зовнішнього середовища. Для кожного з них відповідно до моделі (3.6) визначаються реакції системи, що утворюють випадкову статистичну вибірку. Її аналіз дає змогу визначити закон розподілу і статистичні параметри вихідної величини. У межах даної моделі розглядаються скалярні узагальнені оцінки стану об'єкта, тому виходом системи буде одини-мірний випадковий процес.

Точність визначення оцінок статистичних параметрів вихідної величини при моделюванні за методом Монте-Карло визначається залежністю

$$\varepsilon = t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (4.8)$$

де  $t_{\alpha}$  – коефіцієнт, що враховує рівень надійної ймовірності оцінки;  $\sigma$  – середньоквадратичне відхилення процесу, що моделюється;  $N$  – кількість реалізацій математичних експериментів (досліджень) із моделлю.

Отже, можна стверджувати, що для фіксованого рівня надійної ймовірності  $P_{\alpha}$ , точність моделювання обернено пропорційна квадратному кореню з числа досліджень

$$\varepsilon \sim \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (4.9)$$

Нижче описується метод, який дає змогу істотно зменшити трудомісткість методу Монте-Карло шляхом скорочення числа досліджень  $N$ .

У загальному вигляді стохастична модель

$$y_i = \Theta_i(\varphi_j, x_l), \quad i = \overline{1, c}, \quad j = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, k}, \quad (4.10)$$

де  $y_i$  –  $i$ -та складова випадкового вихідного впливу;  $\Theta$  – оператор, що встановлює зв'язок між входом і виходом моделі;  $\varphi_j$  –  $j$ -й випадковий параметр оператора  $\Theta$ ;  $x_l$  –  $l$ -та складова вхідного впливу.

Згідно з методом Монте-Карло передбачається, що всі потрібні для моделювання якісні (закони розподілу) і кількісні (значення статистичних параметрів) характеристики величин  $\varphi_j$  і  $x_l$  відомі.

Друге припущення полягає в тому, що усі випадкові вхідні величини і параметри моделі (оператора  $\Theta$ ) взаємно незалежні. За результатами моделювання потрібно розв'язати задачу ідентифікації функції щільності розподілу вихідного впливу, тобто визначити закон розподілу і кількісні значення його статистичних параметрів.

Вихідною інформацією для розв'язування зазначеної задачі є гістограма, що являє собою упорядковану статистичну вибірку реалізації випадкової величини. За визначенням [6], гістограма є кусково-сталою апроксимацією функції щільності розподілу. При реалізації методу Монте-Карло гістограма створюється в такий спосіб. Здається число її розрядів, які розбивають діапазон можливих значень величини, що моделюється (вісь абсцис), на відповідне число рівномірних або нерівномірних інтервалів. Формується випадкова реалізація  $\varphi_j$  і  $x_j$ . Потім за моделлю (4.10) визначається реалізація випадкової величини  $y_j$ . Це значення є абсцисою точки, що дає змогу віднести її до конкретного розряду. Ордината  $P_s^*$  розряду гістограми (при рівномірному розбитті) визначається за формулою [6]

$$P_s^* = \frac{d_s}{N}, \quad (4.11)$$

де  $d_s$  – кількість експериментів, які потрапили у  $s$ -й інтервал;  $N$  – загальне число експериментів.

Неперервна крива, що апроксимує гістограму, є функцією щільності розподілу. Точність апроксимації залежить від числа точок (звичайно це межі або середини розрядів гістограми) і точності визначення їх ординат, яка залежить від розміру вибірки  $N$ . Вважається, що число розрядів має бути не менше за 20, а  $N$  не менше за 1000. У загальному випадку ці значення визначаються необхідною точністю моделювання, зокрема з урахуванням (4.9).

На відміну від описаного методу пропонується більш точний і менш трудомісткий спосіб формування вихідної інформації для визначення функції щільності розподілу  $y_i$ . Абсциса кожної точки, тобто конкретне значення випадкової величини  $y_{jn}$ ,  $n = \overline{1, N}$ , визначається, як і в традиційному методі, за моделлю (4.12), а ордината – ймовірністю появи конкретної реалізації випадкових величин  $\varphi_{jn}$  і  $x_{jn}$

$$f(y_{in}) = \prod_{j=1}^m f(\varphi_{jn}) \prod_{l=1}^k f(x_{ln}), \quad n = \overline{1, N}. \quad (4.12)$$

Функції щільності розподілу  $\varphi_j$  і  $x_l$  відомі, їх обчислення не викликає ускладнень.

Точність обчислення ординати залежить тільки від точності вихідної інформації і не залежить від загального числа експериментів  $N$ . Кожна реалізація моделі (4.12) дає точку на кривій функції щільності, тобто для одержання інформації, яка дорівнює за обсягом гістограмі з 20 інтервалами, потрібно 20 експериментів. Трудомісткість одного експерименту зростає порівняно з традиційним методом тільки на витрати, необхідні для обчислення (4.12). Подальше статистичне опрацювання отриманої інформації виконують традиційними методами.

### Запитання для самоперевірки

1. Що таке сценарій зміни зовнішнього середовища системи?
2. Охарактеризуйте основні особливості, схему реалізації та область застосування методу Монте-Карло (статистичних іспитів).
3. Опишіть алгоритм формування випадкових подій.
4. Яким є алгоритм формування випадкових величин згідно з заданим законом розподілу ймовірностей?
5. Яким чином одержуються реалізації випадкових функцій?
6. Від чого залежить і яким способом визначається точність моделювання за методом Монте-Карло?

### Висновки

Кінцевою метою розв'язування загальної задачі прийняття рішення є визначення (вибір) єдиного оптимального рішення  $x^0$  з деякої множини  $X$ .

Для цього слід виконати такі процедури.

1. *Визначити множину рішень  $X$ .* Ця задача містить у собі два етапи:

- 1.1. Змістовне визначення множини, тобто переліку значущих характеристик, за наявності яких елемент включається в множину. Зазначені характеристики в теорії прийняття рішень називаються незалежними змінними. Набір цих змінних позначасмо  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , при цьому, якщо  $n = 1$ , змінна називається одновимірною, за умови  $n > 1$  – багатовимірною.



Обов'язковою умовою конструктивності процедури прийняття рішення є вимога, щоб усі незалежні змінні були виміряні в кількісних шкалах, тобто усі вони повинні мати числові значення. У цьому випадку будь-яке значення незалежної змінної може бути інтерпретоване як точка  $n$ -вимірного простору. При  $n = 1$  ( $x \in R^1$ ) – точка на числовій осі, за умови  $n = 2$  ( $x \in R^2$ ) – точка на площині,  $n = 3$  ( $x \in R^3$ ) – точка у тривимірному просторі,  $n > 3$  – точка  $n$ -вимірного простору. Положення точки визначається значеннями незалежних змінних.

1.2. Задання меж множини рішень  $X$ . Це другий етап реалізації процедури формування множини рішень, при цьому можливі дві ситуації.

А. На незалежні змінні  $x_i$  не накладено ніякі додаткові обмеження, крім тих, що впливають зі змісту змінної в контексті конкретної задачі прийняття рішень. Наприклад, ціна виробу не може бути від'ємною, але може змінюватися в інтервалі  $[0, \infty]$ , а прибуток може бути від'ємним і змінюватися в  $[-\infty, +\infty]$ . Це означає, що множина рішень збігається з областю існування  $X^S$  системи, що аналізується (див. розд. 1).

Б. Альтернативна ситуація полягає в тому, що межі множини рішень  $X$  задані чітко у вигляді набору обмежень (рівностями або нерівностями) на значення або кожної незалежної змінної, або комбінації (суми, добутку тощо) частини, або всіх змінних. Наприклад,  $x_1 \geq a$  або  $x_1 \geq bx_2$  ( $a$  і  $b$  – деякі числа). Множина, яку задано обмеженнями на значення керованих змінних, називається допустимою множиною рішень (розв'язків)  $X$ . Вона є підмножиною області існування  $X \subset X^S$ .

2. *Сформувати скалярну міру ефективності (якості) рішень  $x \in X$ .* Такою мірою у загальному випадку є функція узагальненої корисності  $P(x)$ . Принципи та алгоритми її формування докладно розглянуто в розд. 2. Цю функцію часто називають функцією цілі, оскільки вона характеризує ступінь досягнення цілі.

Наявність скалярної функції цілі дає змогу порівняти, тобто встановити відношення порядку на довільній парі рішень  $x^1, x^2 \in X$  із множини рішень.

При цьому визначається не тільки яке рішення ефективніше, має перевагу, наприклад,  $x^1 \succ x^2$ , але і сила переваги, тобто на скільки або у скільки разів одне рішення ефективніше за інше.

Аналогічно можна встановити відношення порядку (тобто ранжирувати за ефективністю) на будь-якій зчисленній або скінченній множині рішень. Наприклад, за підсумками фінансового року можна визначити ефективність роботи усіх відділень великого банку, регіональних філій фірми, провести порівняльний аналіз кількох інвестиційних проєктів. Однак у загальному випадку ОПР цікавить тільки одне, найефективніше з усіх можливих рішення, тобто з формальної точки зору тільки крайній (мінімальний або максимальний залежно від змісту функції цілі) елемент упорядкованого ряду рішень (розв'язків). Таке рішення (розв'язок) називається екстремальним (від лат. *extremum* – крайній) або оптимальним (від лат. *optimus* – найкращий).

Загальна постановка задачі визначення одного екстремального (оптимального) рішення (розв'язку)  $x^0$  набуває вигляду

$$x^0 = \underset{x \in X}{\operatorname{arg\,extr}} f(x),$$

де  $f(x)$  – цільова функція.

Ця задача нетривіальна і методи її розв'язування істотно залежать від вигляду функції цілі  $f(x)$ , способу задання і особливостей множини рішень  $X$ , кількості керованих змінних (вимірності задачі) тощо. Ці питання докладно розглянуті в наступних двох частинах навчального посібника.

### Список рекомендованої літератури

1. **Енциклопедія кібернетики.** – К.: Гл. ред. УСЭ, 1974. – Т. 2. – С. 335–339.
2. **Гермейер Ю. Б.** Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971. – 384 с.
3. **Економетрика** / Под ред. И. И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 344 с.
4. **Ларичев О. И.** Количественные методы принятия решений / О. И. Ларичев, Е. М. Мошкович. – М.: Физматлит, 1996. – 208 с.
5. **Нейман Дж.** Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука, 1970. – 124 с.
6. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 668 с.
7. **Заде Л.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 128 с.
7. **Хастингс Н.** Справочник по статическим распределениям / Н. Хастингс, Дж. Пикон. – М.: Статистика, 1980. – 95 с.
8. **Свешников А. А.** Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 464 с.

**Розділ 5. ЧИСЕЛЬНИЙ ПОШУК  
ЕКСТРЕМУМУ**

Як показано в першій частині навчального посібника, обов'язковим заключним етапом розв'язування загальної задачі прийняття рішень є оптимізація, тобто вибір з допустимої множини  $X$  рішення, яке мінімізує або максимізує задану функцію якості (цільову функцію).

Залежно від того, яким чином задано множину рішень  $X$ , визначають два класи задач: безумовної та умовної оптимізації. У першому випадку  $X$  збігається з областю існування функції і не має ніяких додаткових обмежень (умов). Цей клас називають задачами пошуку екстремуму функцій. При умовній оптимізації межі множини  $X$  задано обмеженнями у вигляді рівностей і нерівностей, кількість і вид яких визначається змістовною постановкою конкретної задачі. Цей клас називається задачами математичного програмування.

Більшість практичних задач оптимізації рішень відноситься до класу задач умовної оптимізації, але інструментарій їх розв'язування базується на методах безумовної оптимізації. Це визначило порядок викладення навчального матеріалу.

У другій частині навчального посібника розглянуто теоретичну основу, методи, алгоритми і обчислювальні процедури розв'язування задач безумовної оптимізації.

**5.1. Основні поняття і визначення**

Постановка будь-якої задачі оптимізації починається з визначення набору незалежних змінних і звичайно включає умови, що характеризують їх прийнятні значення, тобто визначають множину можливих рішень  $X$ . Ці умови називають *обмеженнями* задачі. Обов'язковою складовою частиною опису є скалярна міра "якості" – *цільова функція*. Розв'язування оптимізаційної задачі полягає у визначенні такого значення змінних із множини  $X$ , якому відповідає екстремальне (максимальне або мінімальне) значення цільової функції. Отже, для досягнення екстремуму потрібно

змінювати в межах  $X$  значення незалежних змінних. Тому вони часто називаються *керованими* змінними. Наприклад, мова може йти про максимізацію прибутку або мінімізацію собівартості продукції.

Переважає більшість оптимізаційних задач, що виникають на практиці, зводиться до деякої стандартної форми. Навіть ті задачі, що самі по собі в ці межі не входять, часто можуть бути зведені до послідовності стандартних. Проте існування універсальної форми зображення зовсім не означає, що розходженнями між окремими задачами варто зневажати. Навпаки, треба використовувати особливості конкретної постановки для організації найефективнішого способу розв'язування.

Визначення ознак, за якими розумно класифікувати оптимізаційні задачі, – складна проблема. Найчастіше використовують три класифікаційні ознаки, а саме: характер множини можливих рішень, розмірність задачі, особливість цільової функції.

За характером множини можливих рішень  $X$  може бути скінченною або зчисленною (дискретною), нескінченною або незчисленною (неперервною).

У першому випадку елементи множини  $X$  (змінні) можуть набувати тільки дискретних значень, у другому – змінні змінюються неперервно. Це відповідно визначає два класи задач: дискретної та неперервної оптимізації.

Особливість задач дискретної оптимізації полягає у тому, що елементи їх множин можливих рішень  $X$  можна послідовно перебрати (якщо  $X$  скінченна) або зазначити правило послідовного перебору (якщо  $X$  зчисленна). Ця особливість лежить в основі більшості методів розв'язування задач дискретної оптимізації, що зводяться до повного або часткового спрямованого перебору елементів множини  $X$ . Задачам неперервної оптимізації зазначена особливість не притаманна.

Розмірність задачі (число незалежних змінних) значною мірою визначає витрати обчислювальних ресурсів (оперативної пам'яті, машинного часу) на розв'язування оптимізаційної задачі тим або іншим методом. Класифікація за цією ознакою, безсумнівно, відносна, вона залежить від особливості задачі, обчислювальних ресурсів користувача, потрібної точності тощо. Проте нині склався стійкий поділ за цією ознакою на два класи методів пошуку екстремуму: *функцій однієї змінної та функцій багатьох змінних*.

Найбільш очевидні розходження між задачами пов'язані з математичними характеристиками їх функцій. Наприклад, в одному випадку цільова функція буде гладкою, а в іншому – розривною.

Найважливішою інтегральною характеристикою особливостей цільової функції, що визначає як загальну класифікацію методів, так і вибір алгоритму розв'язування конкретної задачі, є існування і доступність (трудомісткість) обчислень перших двох її похідних. Ця ознака є визначальною при класифікації та виборі методу розв'язування задачі.

### 5.1.1. Формальна постановка задачі оптимізації

Сама по собі постановка задачі оптимізації проста: задано множину  $X$  і функцію  $f(x)$ , визначену на  $X$ . Потрібно знайти точки мінімуму або максимуму функції  $f$  на  $X$ . Запишемо задачу на мінімум у вигляді

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (5.1)$$

При цьому  $f$  називатимемо *цільовою функцією*,  $X$  – *множиною розв'язків*, будь-який елемент  $x \in X$  – *розв'язком задачі* (5.1).

Надалі розглядатимемо *скінченновимірні* задачі оптимізації, допустима множина яких лежить в евклідовому просторі  $R^n$ , де  $n$  – скінченне число.

Потрібно підкреслити, що саме поняття *точки мінімуму*, тобто *оптимального* розв'язку задачі (5.1), є неоднозначним і вимагає уточнення.

Точка  $x^0 \in X$  називається:

1) *точкою глобального мінімуму* функції  $f$  на множині  $X$ , або *глобальним розв'язком* задачі (5.1), якщо

$$f(x^0) \leq f(x) \quad \text{при всіх } x \in X; \quad (5.2)$$

2) *точкою локального мінімуму*  $f$  на  $X$ , або *локальним розв'язком* задачі (5.1), якщо існує число  $\varepsilon > 0$  таке, що

$$f(x^0) \leq f(x) \quad \text{за умови } x \in [X \cap U_\varepsilon(x^0)], \quad (5.3)$$

де  $U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^n \mid \|x - x^0\| \leq \varepsilon\}$  –  $\varepsilon$ -окіл точки  $x^0$ .

Якщо нерівність у (5.2) або (5.3) виконується як строга при  $x \neq x^0$ , то кажуть, що  $x^0$  – *точка строгого мінімуму* (строгового розв'язку) у глобальному або локальному змісті.

Глобальний розв'язок є і локальним, обернене твердження є неправильним.

Якщо  $x^0 \in X$  – точка глобального мінімуму функції  $f$  на  $X$ , то застосовується запис  $f(x^0) = \min_{x \in X} f(x)$  або  $x^0 = \operatorname{arg\,min}_{x \in X} f(x)$ . Точка  $x^0$  реалізує величину  $f(x^0) = \min_{x \in X} f(x)$ , тобто мінімальне значення функції  $f$  на  $X$ .

Множину всіх точок глобального мінімуму  $f$  на  $X$  позначимо через  $\operatorname{Arg\,min}_{x \in X} f(x) = \{x^0 \in X \mid f(x^0) = f\}$ . Отже,  $\operatorname{arg\,min}_{x \in X} f(x)$  – це довільна точка з множини  $\operatorname{Arg\,min}_{x \in X} f(x)$ .

За аналогією з (5.1) запишемо задачу максимізації функції  $f$  на множині  $X$  у вигляді

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in X. \quad (5.4)$$

Замінюючи в означеннях слово “мінімум” на “максимум” і знак нерівностей у (5.2), (5.3) на знак  $\geq$ , одержуємо відповідні поняття для задачі (5.4).

Розв’язки задач (5.1), (5.4), тобто точки мінімуму і максимуму функції  $f$  на  $X$ , називають також *точками екстремуму*, а самі задачі (5.1), (5.4) – *екстремальними* задачами.

Задача (5.4) еквівалентна задачі

$$-f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X.$$

Це дає змогу для певності, але не втрачаючи загальності, розглядати тільки одну екстремальну задачу, розповсюджуючи на іншу всі отримані результати. У теорії оптимізації прийнято як базову розглядати задачу мінімізації. Тому надалі, якщо не зазначено обернене, розглядається задача мінімізації.

### 5.1.2. Задача безумовної й умовної оптимізації

Всі оптимізаційні задачі (5.1) поділяють на класи безумовної й умовної оптимізації.

У першому випадку множина розв’язків  $X$  збігається з областю існування цільової функції  $f(x)$ , тобто  $x \in R^n$  і не обмежена ніякими додатковими умовами. Задача безумовної оптимізації набуває вигляду

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in R^n. \quad (5.5)$$

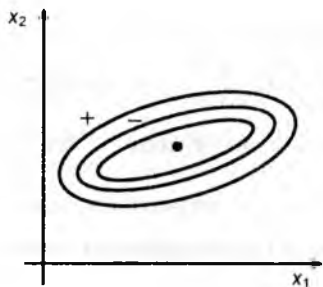


Рис. 5.1. Лінії рівного рівня функції двох змінних

При умовній оптимізації область розв'язків  $X$  є підмножиною області існування і задана (обмежена) додатковими умовами (обмеженнями) на допустимі значення керованих змінних.

Надалі ми часто вдаватимемося до геометричної інтерпретації задач оптимізації, заснованої на понятті *ліній* (або *поверхонь*) *рівного рівня* функції  $f$ , тобто множин вигляду

$$L_\alpha = \{x \mid f(x) = \alpha\}, \quad \alpha \in R.$$

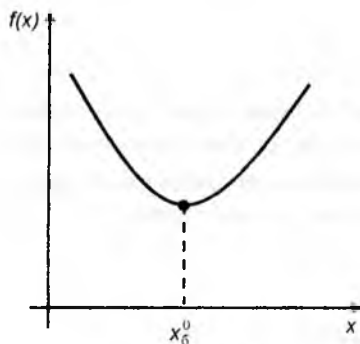


Рис. 5.2. Безумовний  $x_6^0$  екстремум функції однієї змінної

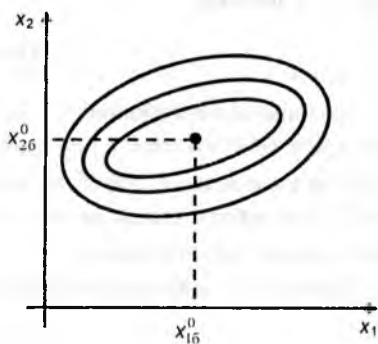


Рис. 5.3. Безумовний  $x^0 = \{x_{16}^0, x_{26}^0\}$  екстремум функції кількох змінних

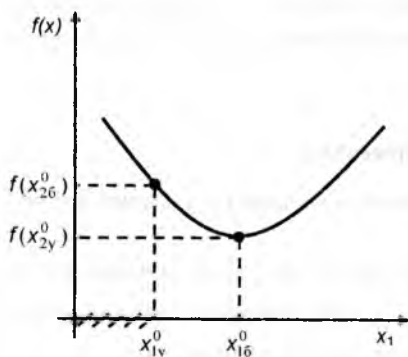


Рис. 5.4. Розв'язок задачі умовної оптимізації функції однієї змінної

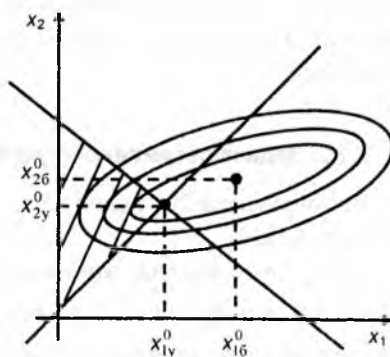


Рис. 5.5. Розв'язок задачі умовної оптимізації функції кількох змінних

Це означає, що в будь-якій точці лінії (поверхні) рівного рівня значення функції однакові.

Для геометричної інтерпретації, наприклад, двовимірної задачі потрібно зобразити її допустиму множину  $X$  і кілька характерних ліній рівного рівня цільової функції  $f$  (рис. 5.1). Щоб відобразити характер зміни функції, біля лінії рівня  $L_\alpha$  ставимо знак “+” з того боку, де  $f$  набуває значень, більших за  $\alpha$ , і знак “-” з іншого. Якщо функція  $f$  диференційовна в точці  $x$ , то градієнт  $f'(x)$  є ортогональним *дотичній* до лінії рівня, яка проходить через  $x$ , і спрямованим (за умови  $f'(x) \neq 0$ ) у бік зростання функції, тобто до знака “+”.

На рис. 5.2–5.5 показано відмінності та особливості задач безумовної та умовної оптимізації. Особливості задання множини розв’язків зумовлюють різні оптимальні рішення та вимагають застосування різних методів їх визначення. При цьому у багатьох випадках методи безумовної оптимізації (методи пошуку екстремуму функції) є інструментальною основою розв’язування задач умовної оптимізації.

Існує два основних підходи до розв’язування задач пошуку екстремуму функції: *аналітичний* та *чисельний*.

### 5.1.3. Аналітичний підхід до розв’язування задачі пошуку екстремуму функції

В основі аналітичного підходу лежить використання аналітичних умов оптимальності (екстремуму).

Розрізняють *необхідні* умови оптимальності, тобто умови, які має задовольняти точка, що є розв’язком задачі, і *достатні* умови, з яких випливає, що дана точка є розв’язком задачі. Інтерес до умов оптимальності пояснюється тим, що вони, по-перше, складають основу якісних методів теорії оптимізації, тобто методів, спрямованих на вивчення властивостей екстремальних задач; по-друге, застосовуються при побудові й обґрунтуванні чисельних методів розв’язування цих задач; по-третє, дозволяють у простих випадках явно розв’язати задачу.

Відомості про необхідні і достатні умови оптимальності в задачах безумовної оптимізації викладаються в будь-якому курсі вищої математики. Нагадаємо відповідні результати.

Нехай  $\nabla f(x^0) = f'(x^0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)$  – вектор перших частинних похідних (градієнт) функції  $f$  у точці  $x^0 \in R^n$ ;



$$\nabla^2 f(x^0) = f''(x^0) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \right) - \text{матриця других частинних похід-}$$

них (матриця Гессе, гесіан) функції  $f$  у точці  $x^0 \in R^n$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Необхідна умова локальної оптимальності першого порядку.

Нехай функція  $f$  диференційовна в точці  $x^0 \in R^n$ . Якщо  $x^0$  – локальний розв'язок задачі (5.5), то

$$f'(x^0) = 0. \quad (5.6)$$

Точка  $x^0$ , що задовольняє умову (5.6), називається *стаціонарною* точкою функції  $f$  або задачі (5.5). Стаціонарна точка не обов'язково є екстремумом (вона може бути точкою перегину графіка функції), тобто (5.6) не є достатньою умовою оптимальності. Для знаходження “сторонніх” стаціонарних точок застосовують необхідну умову локальної оптимальності другого порядку.

Нехай функція  $f$  двічі диференційовна у точці  $x^0 \in R^n$ . Якщо  $x^0$  – локальний розв'язок задачі (5.5), то матриця  $f''(x^0)$  невід'ємно визначена, тобто

$$(f''(x^0)h, h) \geq 0 \text{ при всіх } h \in R^n. \quad (5.7)$$

Вираз в круглих дужках – скалярний добуток двох векторів, що визначається у такий спосіб. Для  $x, y \in R^n$  маємо  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

Достатня умова локальної оптимальності містить характерне посилення вимог на матрицю  $f''(x^0)$ .

Нехай функція  $f$  двічі диференційовна у точці  $x^0 \in R^n$ . Припустимо, що  $f'(x^0) = 0$ , а матриця  $f''(x^0)$  додатно визначена, тобто

$$(f''(x^0)h, h) > 0 \text{ при всіх } h \in R^n, h \neq 0. \quad (5.8)$$

Тоді  $x^0$  – строгий локальний розв'язок задачі (5.5).

Відзначимо, що для функції  $f$  числового аргументу ( $n=1$ ) умови (5.7) і (5.8) означають, що друга похідна  $f''(x^0)$  як скалярна величина є відповідно невід'ємною і додатною.

У тих випадках, коли функція  $f$  досить проста, умови оптимальності дають змогу розв'язати задачу (5.5). При цьому для дослідження матриці  $f''(x^0)$  на невід'ємну і додатну визначеність, як правило, використовується критерій Сільвестра, що має такий вигляд.

*Дійсна симетрична матриця  $A$  додатно (невід'ємно) визначена тоді і тільки тоді, коли усі її діагональні мінори є додатними (невід'ємними).*

**Приклад 5.1.** У загальному випадку в теорії керування запасами наводиться задача мінімізації сумарних витрат системи керування запасами. Розглянемо найпростішу систему – *однопродуктову детерміновану статичну модель*. Нехай інтенсивність попиту (за одиницю часу) запасу дорівнює  $\beta > 0$ . Найвищого рівня запас досягає в момент постачання замовлення розміром  $y > 0$ . Рівень запасу досягає нуля через  $\frac{y}{\beta}$  одиниць часу після одержання замовлення розміром  $y$ .

Нехай  $K > 0$  – витрати на оформлення замовлення, що мають місце кожного разу при його розміщенні, і витрати на збереження одиниці замовлення за одиницю часу, які дорівнюють  $h > 0$ .

Оскільки витрати залежать від частоти розміщення замовлення й обсягу збереженого запасу, то  $y$  вибирається з умови забезпечення збалансованості між двома видами витрат. Сумарні витрати за одиницю часу складаються з витрат на оформлення замовлення і витрат на збереження запасу за цей час, тобто

$$f(y) = \frac{K}{y} + h \left( \frac{y}{2} \right).$$

За умови, що  $y$  є неперервною змінною, знайдемо екстремальне значення розглянутої функції. Для цього обчислимо першу похідну  $f'(y)$

$$\frac{df}{dy} = -\frac{K\beta}{y^2} + \frac{h}{2}.$$

Використовуючи необхідні умови мінімуму в одновимірній задачі без обмежень, визначимо стаціонарну точку функції, для якої  $\frac{df}{dy} = 0$ :

$$\frac{df}{dy} = -\frac{K\beta}{y^2} + \frac{h}{2} = 0; \quad y = \sqrt{2 \frac{K\beta}{h}}.$$

Значення функції цілі в стаціонарній точці дорівнює  $\sqrt{2K\beta h}$ .

Отриманий вираз називають формулою *економічного розміру замовлення Уілсона*.

Перевіримо в стаціонарній точці умови мінімуму, взявши другу похідну

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = 2 \frac{K\beta}{y^3}.$$

Друга похідна у даній точці більша за нуль, що характеризує її як точку мінімуму відповідно достатній умові мінімуму в одновимірній задачі без обмежень.

**Приклад 5.2.** Розглянемо задачу

$$f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x^0 \in R^n.$$

Умова (5.6) набуває вигляду

$$3x_1^2 - 3x_2 = 0, \quad 3x_2^2 - 3x_1 = 0.$$

Розв'язками цієї системи (стаціонарними точками) є  $x^1 = (0, 0)$  і  $x^2 = (1, 1)$ .

При цьому

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{bmatrix}, \quad f''(x^1) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(x^2) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

За критерієм Сільвестра матриця  $f''(x^1)$  не є невід'ємно визначеною, а матриця  $f''(x^2)$  додатно визначена. Тоді, відповідно до необхідної умови оптимальності, точка  $x^1$  не може бути розв'язком задачі. Згідно з достатньою умовою, точка  $x^2$  – строгий локальний розв'язок задачі.

#### 5.1.4. Поняття опуклої множини й опуклої функції

Важливою складовою теорії оптимізації є опуклий аналіз – розділ математики, де вивчаються властивості опуклих множин і опуклих функцій.

Множина  $X \in R^n$  називається *опуклою*, якщо  $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$  при всіх  $x^1, x^2 \in X$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Тобто множина  $X$  є опуклою, якщо разом з двома будь-якими точками  $x^1$  і  $x^2$  їй належить відрізок, що з'єднує ці точки, тобто множина вигляду (рис. 5.6, а)

$$\begin{aligned} & [x^1, x^2] = \\ & = \{x \in R^n \mid x = x^2 + \lambda(x^1 - x^2), 0 \leq \lambda \leq 1\}. \end{aligned}$$

На числовій прямій  $R$  опуклими множинами є різні *проміжки*, тобто одноточкові множини, інтервали, півінтервали, відрізки, напівпрямі і, на решті, сама пряма. Опуклою множиною у просторі  $R^n$  є простір, лінійний підпростір, одноточкова множина, куля, відрізок, а також такі множини:

$$l_{x^0 h} = \{x \in R^n \mid x = x^0 + \alpha h, \alpha \in R\} -$$

пряма, що проходить через точку  $x^0$  у напрямку вектора  $h$ ;

$$l_{x^0 h}^+ = \{x \in R^n \mid x = x^0 + \alpha h, \alpha \geq 0\} -$$

промінь, що виходить із точки  $x^0$  у напрямку  $h$ ;

$$H_{p\beta} = \{x \in R^n \mid (p, x) = \beta\} - \quad (5.9)$$

гіперплощина із нормаллю  $p$ ;

$$H_{p\beta}^+ = \{x \in R^n \mid (p, x) \geq \beta\}, \quad H_{p\beta}^- = \{x \in R^n \mid (p, x) \leq \beta\} - \quad (5.10)$$

півпростори, що породжуються гіперплощиною (5.9).

Неважко зрозуміти, що всі перераховані множини, крім кулі, є окремими випадками опуклої множини вигляду

$$X = \{x \in R^n \mid Ax \leq b\} = \{x \in R^n \mid (a_i, x) \leq b_i, i = \overline{1, m}\}, \quad (5.11)$$

де  $A$  – деяка матриця розмірами  $m \times n$  із рядками  $a_1, \dots, a_m$ ,  $b = (b_1, \dots, b_m) \in R^m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Множини (5.11) називають *полідральними* або просто *полідрами*. Отже, поліедр – це множина розв’язків деякої системи лінійних нерівностей скінченної кількості, або переріз скінченної кількості півпросторів (рис. 5.7).

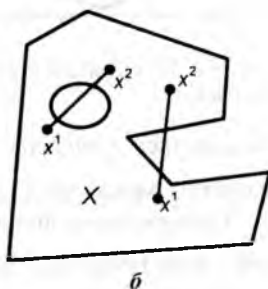
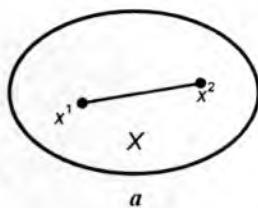


Рис. 5.6. Опукла (а) і не-опукла (б) множини

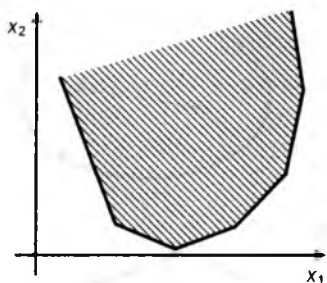


Рис. 5.7. Поліедральна множина (поліедр)

Функція  $f$ , визначена на опуклій множині  $X \subset R^n$ , називається *опуклою* (опуклою донизу) на  $X$ , якщо для будь-яких  $x^1, x^2 \in X$  і  $\lambda \in [0, 1]$  виконується

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2). \quad (5.12)$$

Якщо при всіх  $x^1, x^2 \in X, x^1 \neq x^2$  і  $\lambda \in (0, 1)$  нерівність (5.12) є строгою, то  $f$  називається *строго опуклою* на  $X$ . Функція  $f$  називається (*строго*) *увігнутою* (опуклою догори), якщо функція  $(-f)$  (*строго*) *опукла* на  $X$ .

Геометрично опуклість функції  $f$  означає, що будь-яка точка довільної хорди графіка  $f$  розташовується не нижче відповідної точки самого графіка (рис. 5.8, а). Для увігнутої функції взаємне розташування хорди і графіка є оберненим (рис. 5.8, б). Звідси очевидно (і можна строго показати), що функції  $f(x) = x^2, f(x) = e^x$  опуклі на  $R$ ;  $f(x) = \ln x$  увігнута на множині додатних чисел;  $f(x) = \sin x$  увігнута на  $[0, \pi]$  і опукла на  $[\pi, 2\pi]$ . Відзначимо, що зазначені функції є строго опуклі або увігнуті.

Функція  $f(x) = \|x\|$  опукла, а  $f(x) = \|x\|^2$  строго опукла на  $R^n$ .

Вираз  $\|x\|$  позначає норму вектора  $x$ :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Функцію вигляду

$$f(x) = (a, x) + b, \quad (5.13)$$

де  $a \in R^n, b \in R$ , називатимемо *лінійною*. Для лінійної функції нерівність (5.12) виконується як рівність. Тому вона одночасно опукла й увігнута на  $R^n$ , але не строго.

Задача (5.1) називається *опуклою*, якщо  $X$  – опукла множина,  $f$  – опукла функція на  $X$ .

Наведемо кілька тверджень, що пояснюють інтерес до зазначеного типу задач оптимізації.

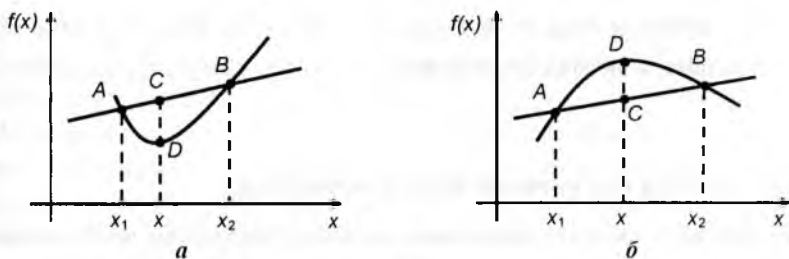


Рис. 5.8. Функції опукла донизу (а) і опукла догори (б):

$$A = (x_1, f(x_1)); B = (x_2, f(x_2)); x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2;$$

$$C = (x, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)); D = (x, f(x))$$

Якщо задача (5.1) опукла, то будь-який її локальний розв'язок є також глобальним.

Отже, для опуклих задач поняття локального і глобального розв'язків не розрізняються.

Другу властивість опуклих задач можна подати у вигляді такого загального принципу: необхідні умови оптимальності в тому або іншому класі задач оптимізації при відповідних припущеннях опуклості є і достатніми.

Нехай функція  $f$  опукла на  $R^n$  і диференційовна в точці  $x^0 \in R^n$ . Якщо  $f'(x^0) = 0$ , то  $x^0$  – точка мінімуму  $f$  на  $X$ , тобто розв'язок задачі (5.5).

## 5.2. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Як впливає з розд. 5.1, іноді вдається, спираючись на умови оптимальності або на геометричну інтерпретацію, одержати розв'язок задачі оптимізації

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X \quad (5.14)$$

у явному вигляді.

Проте в більшості випадків задачу (5.14) доводиться розв'язувати чисельними методами із застосуванням комп'ютера. При цьому, використовуючи необхідні умови оптимальності, задачу оптимізації можна звести до деякої іншої задачі, а потім спробувати використати розроблені для її розв'язування чисельні методи. Наприклад, для розв'язування задачі мінімізації на  $R^n$  диференційовної функції  $f$  можна скористатися деяким

чисельним методом розв'язування системи рівнянь  $f'(x^0) = 0$ . Проте найефективнішими є методи, розроблені спеціально для розв'язування задачі оптимізації.

### 5.2.1. Поняття про чисельні методи оптимізації

На відміну від аналітичних, чисельні методи передбачають багаторазове обчислення значень цільової функції і, в разі необхідності, інших її характеристик, наприклад, похідних, у різних точках допустимої множини рішень, тобто за різних значень незалежних змінних. Згідно з цією інформацією з більшою або меншою точністю визначається екстремум функції. Такий підхід є більш трудомістким порівняно з аналітичним і припускає, що користувач має у своєму розпорядженні досить великі обчислювальні ресурси.

Чисельні методи пошуку екстремуму поділяють на два класи: пасивні та активні.

Основна ідея пасивних методів полягає у виборі деякої кількості точок, що регулярно або випадково розташовуються на множині можливих розв'язків. Це означає, що для кожної точки задаються її координати, тобто значення багатовимірної незалежної змінної. Потім у кожній точці обчислюється значення цільової функції і точка з мінімальним значенням (іноді її називають рекордною) є екстремумом функції. Очевидними є такі особливості пасивних методів: вони в загальному випадку не гарантують визначення точного значення екстремуму функції, точність визначення якого залежить від кількості точок і їх розміщення; методи мають велику трудомісткість.

Альтернативними є активні методи. Їх принципова відмінність від пасивних полягає в побудові послідовності точок, яка цілеспрямовано приводить в окіл екстремуму функції. Така послідовність значень незалежної змінної  $x^0, x^1, x^2, \dots, x^m$  називається *траєкторією руху до екстремуму* (для випадку мінімізації функції її називають *траєкторією спуску*).

При активному методі координати кожної наступної точки траєкторії руху до екстремуму визначаються на підставі аналізу значення цільової функції і залежно від методу, значень тих або інших характеристик в одній або групі попередніх точок. Кожна наступна точка траєкторії вибирається таким чином, щоб обов'язково виконувалася умова (для випадку мінімізації)  $f(x^0) > f(x^1) > f(x^2) > \dots > f(x^m) \dots$

Такі послідовності називаються релаксаційними, а методи їх побудови – методами спуску. Релаксаційна послідовність гарантує наближення (часто говорять збіжність методу) до екстремуму.

Активні й пасивні чисельні методи пошуку екстремуму не гарантують у загальному випадку визначення точного значення оптимуму, а тільки допомагають знайти наближене значення в близьких околах екстремуму, причому ці околи можуть бути як завгодно малі.

У розділах 1–4 точний розв’язок оптимізаційної задачі позначався  $x^0$ . При розгляді чисельних методів надалі наближений розв’язок позначатимемо  $x^*$ . Співвідношення

$$\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$$

визначає точність обчислення екстремуму чисельним методом,  $\varepsilon$  – радіус околу точного розв’язку, якому належить  $x^*$ .

Нині розроблена велика кількість чисельних методів розв’язування задач безумовної оптимізації. Вони відрізняються кількістю і видом використовуваних характеристик цільової функції і процедурами побудови траєкторії спуску, проблемною орієнтацією на класи задач тощо. Незважаючи на зазначену різноманітність методів, можна сформулювати універсальне правило формування траєкторії спуску (релаксаційної послідовності). Воно має вигляд

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k \cdot h^k, \quad \alpha_k \in R, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.15)$$

де  $k$ ,  $\alpha_k$  – відповідно номер і розмір кроку (ітерації спуску);  $x^k$  – значення незалежної змінної в  $k$ -й точці траєкторії;  $h^k$  – вектор, що показує напрямок руху до екстремуму в  $k$ -й точці.

Конкретний алгоритм визначається заданням початкової точки траєкторії, правилами вибору векторів  $h^k$  і чисел  $\alpha_k$  на основі отриманої внаслідок обчислень інформації, а також умовою припинення. Початкова точка  $x^k$  ( $k=0$ ) траєкторії спуску, яку потрібно задати перед початком роботи алгоритму, заснованого на формулі (5.15), називається *початковим наближенням* до розв’язку задачі або *стартовою точкою*. Надалі позначатимемо її  $x^s$ . Задання стартової точки – важливий етап розв’язування задачі. Від того, наскільки далеко від точки екстремуму її обрано, залежить кількість кроків



розв'язування задачі при оптимізації однокстремальної функції. За умови, що функція цілі багатокстремальна, вибір стартової точки вплине на те, до якого з локальних екстремумів зійдеться послідовність наближень. Початкове наближення до розв'язку задачі оптимізації є найбільш вдалим, якщо при його заданні використана додаткова інформація, пов'язана з фізичною сутністю розв'язуваної задачі. У разі відсутності такої інформації початкове наближення задається випадковим способом. При необхідності, наприклад, під час дослідження багатокстремальних функцій, розв'язування задачі варто виконувати багаторазово з різними стартовими точками.

Параметри  $\alpha_k$ ,  $h^k$  у формулі (5.15) визначаються деякими конкретними функціональними залежностями від значень цільової функції та її характеристик у попередніх точках, причому на практиці прагнуть використовувати найбільш прості види залежностей. Вибір  $\alpha_k$ ,  $h^k$  передбачає і додаткові обчислення деяких характеристик цільової функції в точках, відмінних від  $x^s$ ,  $x^1$ , ...,  $x^k$ .

Надалі поряд із терміном *крок методу* користуватимемося терміном *ітерація методу*. Варто мати на увазі, що при  $\|h^k\| \neq 1$  довжина відрізка, що з'єднує точки  $x^k$ ,  $x^{k+1}$ , безумовно, не дорівнює  $|\alpha_k|$ . Традиційно назва методу мінімізації визначається способом вибору  $h^k$ , а його різні варіанти обумовлюються способами вибору  $\alpha_k$ .

При побудові траєкторії спуску всі без винятку чисельні методи пошуку екстремуму використовують інформацію про значення цільової функції в одній або кількох попередніх точках. Крім того, при визначенні напрямку руху до екстремуму  $h^k$  може застосовуватися інформація про похідні цільової функції. За цією ознакою методи безумовної оптимізації поділяють на три класи: нульового порядку (прямі методи), першого (градієнтні) та другого порядку (методи Ньютона).

За цією класифікацією порядок методу означає порядок використовуваної для визначення  $h^k$  вищої похідної. Звідси випливає, що прямі методи похідних не застосовують, градієнтні використовують тільки перші, а методи Ньютона – перші й другі похідні.

Іншою ознакою класифікації чисельних методів є правило формування кроку спуску  $\alpha_k$ . Згідно з цим виділяють методи: з постійним кроком, із дробленням кроку і з оптимізацією довжини кроку.

У першому випадку крок приймається постійним для всієї траєкторії спуску. При цьому, оскільки довжина кроку визначає точність знаходження числового розв'язку  $x^*$  (розмір околу точного розв'язку  $x^0$ ), то його конкретний розмір визначається вимогами точності.

Згідно з другим методом, крок  $\alpha_k$  послідовно зменшується (найчастіше ділиться навпіл) у вихідних критичних точках траєкторії, що визначаються шляхом аналізу інформації про зміну величини і знаку приросту цільової функції в міру наближення до екстремуму. Дроблення продовжується до забезпечення необхідної точності визначення розв'язку.

Нарешті, у третьому випадку довжина кроку визначається з умови мінімізації цільової функції вздовж заданого напрямку  $h^k$ , тобто розв'язується задача

$$f(x^k + \alpha_k h^k) = \min_{\alpha} f(x^k + \alpha h^k), \quad (5.16)$$

де  $\min$  визначається по  $\alpha \geq 0$ . Такий спосіб вибору  $\alpha_k$  є в деякому сенсі найкращим, оскільки він забезпечує досягнення найменшого значення функції вздовж заданого напрямку. Методи, що використовують зазначений алгоритм визначення  $\alpha_k$ , називають методами найшвидшого спуску. Проте він на кожному кроці вимагає розв'язування додаткової задачі одновимірної мінімізації.

Серед методів мінімізації можна умовно виділити *скінченнокрокові* і *нескінченнокрокові*. Скінченнокроковими, або скінченними, називаються методи, що гарантують отримання розв'язку задачі за скінченне число кроків. Скінченнокрокові методи вдається побудувати лише для деяких спеціальних типів задач оптимізації, наприклад, задач лінійного і квадратичного програмування (див. розд. 3). Для нескінченнокрокових методів досягнення розв'язку гарантується лише на границі послідовності наближень. Розглянуті в наступному розділі чисельні методи пошуку екстремуму є нескінченнокроковими.

### 5.2.2. Збіжність методів

Вважатимемо, що метод (5.15) збігається, якщо послідовність наближень  $x^k$  необмежено наближається до точного розв'язку  $x^0$  задачі (5.14), тобто  $x^k \rightarrow x^0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Такий вид збіжності ще називають *збіжністю*

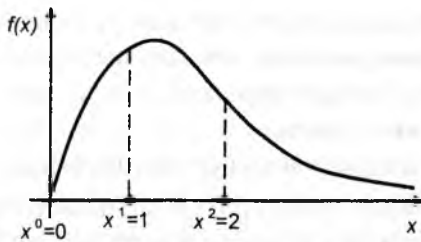


Рис. 5.9. Збіжність за функцією

за аргументом. На відміну від нього, збіжністю за функцією називається такий вид збіжності, коли послідовність значень функції цілі, обчисленої в точках  $x^k$ , наближається до значення функції цілі в точці  $x^0$ , тобто

$$f(x^k) \rightarrow f(x^0) \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Нескладно показати, що зі збіжності за аргументом впливає збіжність за функцією. Обернене твердження є неправильним, у випадку збіжності за функцією збіжність за аргументом може не забезпечуватися. Наприклад, для функції, графік якої зображено на рис. 5.9, значення функції в точках послідовності  $x^k = k$  необмежено наближаються до значення функції в точці точного розв'язку  $x^0 = 0$ , тоді як значення наближень  $x^k$  необмежено віддаляються від  $x^0 = 0$ .

Якщо точка мінімуму  $x^*$  не єдина, під збіжністю методу розуміють збіжність послідовності  $x^k$  до множини  $X^*$  точок мінімуму функції  $f$ .

Ефективність методів спуску характеризується *швидкістю збіжності*. При оцінці якості методу говорять про *лінійну швидкість збіжності* (або про збіжність із швидкістю геометричної прогресії), якщо

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q \|x^k - x^*\|, \quad (5.17)$$

де  $x^*$  – розв'язок задачі, а  $0 < q < 1$  – деяка константа. Швидкість збіжності є *надлінійною*, якщо

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q_k \|x^k - x^*\|, \quad (5.18)$$

де  $q_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , і *квадратичною*, якщо

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C \|x^k - x^*\|^2, \quad C \geq 0. \quad (5.19)$$

Говорячи про швидкість збіжності того або іншого методу, звичайно вважають, що вона тим краща, чим менша кількість ітерацій потрібна для одержання наближеного розв'язку з заданою точністю. Ефективним

вважається, наприклад, метод Ньютона (див. розд. 7), швидкість збіжності якого є квадратичною. Великий практичний інтерес має інше розуміння ефективності методу, коли за критерій приймають число машинних операцій, потрібних для досягнення заданої точності. За такої оцінки більш кращим може виявитися метод, який хоч і збігається повільніше, тобто вимагає для досягнення заданої точності більшого числа ітерацій, але розрахунок кожної з ітерацій займає менше часу. На жаль, для подібної оцінки методу немає інших ефективних способів, крім експериментальної перевірки.

### 5.2.3. Умови припинення (критерії закінчення) розрахунку

Нагадаємо, що чисельні методи не можуть гарантувати одержання точного розв'язку задачі оптимізації. Одержати розв'язок з більшою або меншою точністю можна, регулюючи величину кроку  $\alpha_k$  у співвідношенні (5.15). Внаслідок цього послідовність наближень потрапляє в окіл точки екстремуму й одна з точок околу вибирається як наближений розв'язок. Оскільки на практиці будь-який алгоритм має скінченну кількість кроків, то потрібно прийняти певні умови припинення алгоритму.

Умова припинення може визначатися наявними обчислювальними ресурсами. Наприклад, може бути задана кількість кроків (ітерацій) обчислення цільової функції  $f$ , що мінімізується.

Підставою для припинення може бути *зациклювання*, коли послідовні прирости функції цілі змінюють знак на протилежний. У послідовності, що мінімізує функцію цілі, починає повторюватися певний набір точок. Зациклювання свідчить про те, що поточне наближення знаходиться в околі точки екстремуму. В такому випадку слід або зменшити величину кроку, або зупинити роботу алгоритму.

Припинення здійснюють у разі досягнення заданої точності розв'язку задачі, наприклад, згідно з оцінками (5.17)–(5.19). Однак при розв'язуванні реальної задачі важко оцінити справжню точність. Зокрема константи, що фігурують в оцінках (5.17)–(5.19), звичайно невідомі. Тому про досягнення заданої точності доводиться судити за непрямими ознаками.

На практиці часто використовують такі умови припинення:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon_1; \quad (5.20)$$

$$\left| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right| \leq \varepsilon_2; \quad (5.21)$$

$$\left\| f'(x^{k+1}) \right\| \leq \varepsilon_3. \quad (5.22)$$

До початку обчислень вибирають одну з умов (5.20)–(5.22) і відповідне додатне число  $\varepsilon$ . Обчислення припиняють після  $(k+1)$ -го кроку, якщо вперше виконана обрана умова припинення. На практиці також використовують критерії, що передбачають одночасне виконання двох з умов (5.20)–(5.22) або всіх трьох умов. Виконання критерію (5.22) означає, що в точці  $x^{k+1}$  із точністю  $\varepsilon_3$  забезпечена умова стаціонарності. Замість критеріїв (5.20)–(5.22), заснованих на понятті *абсолютної похибки*, можна використовувати аналогічні критерії, засновані на понятті *відносної похибки*:

$$\left\| x^{k+1} - x^k \right\| \leq \delta_1 \left( 1 + \left\| x^{k+1} \right\| \right); \quad (5.23)$$

$$\left| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right| \leq \delta_2 \left( 1 + \left| f(x^{k+1}) \right| \right); \quad (5.24)$$

$$\left\| f'(x^{k+1}) \right\| \leq \delta_3 \left( 1 + \left| f(x^{k+1}) \right| \right). \quad (5.25)$$

Відзначимо, що виконання зазначених критеріїв та інших евристичних умов припинення не гарантує досягнення необхідної точності розв'язку задачі.

### Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте та поясніть загальну постановку задачі оптимізації.
2. Що називається розв'язком і оптимальним розв'язком задачі оптимізації?
3. Поясніть поняття локального і глобального розв'язків задачі оптимізації.
4. Визначте поняття задач безумовної й умовної оптимізації. У чому полягає їх збіжність та розбіжність?
5. Сформулюйте необхідну та достатню умови локальної оптимальності для задач безумовної оптимізації.
6. Визначте поняття і наведіть приклади опуклої та неопуклої множини.

7. Що таке опукла й увігнута функції?
8. Яка задача оптимізації називається опуклою? У чому її особливості?
9. Наведіть класифікацію чисельних методів оптимізації. Який результат їх застосування?
10. Яка загальна схема чисельних методів оптимізації?
11. Що називається збіжністю чисельного методу оптимізації?
12. Які умови припинення роботи методу оптимізації?

## Розділ 6. ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Задача оптимізації, функція цілі якої залежить від однієї змінної, відноситься до найпростішого типу оптимізаційних задач і має вигляд

$$f(x) \rightarrow \min, x \in [a, b]. \quad (6.1)$$

Аналіз задач такого типу займає центральне місце в оптимізаційних дослідженнях, як теоретичної, так і практичної спрямованості. Насамперед це пов'язано з тим, що методи оптимізації функцій однієї змінної використовуються для розв'язування проміжних підзадач під час пошуку екстремуму функцій багатьох змінних. Важливість оптимізаційних задач з однією керованою змінною обумовила розроблення великої кількості алгоритмів їх розв'язування. Класифікація методів розв'язування задач цього класу ґрунтується на різних припущеннях щодо природи і властивостей функції  $f(x)$ .

### 6.1. Властивості функцій

Нехай  $y = f(x)$  – функція однієї змінної. Розглянемо множину  $S \subset R^1$ , де  $R^1$  – множина всіх дійсних чисел. Визначимо відповідність (або перетворення), за допомогою якого кожній точці  $x \in S$  надається єдине числове значення. Така відповідність називається *скалярною функцією*  $f$ , визначеною на множині  $S$ .

За умови  $S = R^1$  маємо справу з *усюди визначеною функцією* однієї змінної. Якщо  $S$  – деяка підмножина множини  $R^1$ , то функція  $f$  визначена в

обмеженій області. Наприклад,  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$  для всіх  $x \in \mathbb{R}^1$  – усюди визначена функція, тоді як функція  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$  при всіх  $x \in S = \{-5 \leq x \leq 5\}$  визначена в обмеженій області. В теорії оптимізації  $f(x)$  називається цільовою функцією, а  $S$  – допустимою областю, множиною точок, що задовольняють обмеженням, або областю допустимих значень  $x$ .

Зрозуміло, не завжди потрібно, щоб область допустимих значень незалежної змінної  $x$  містила всі дійсні числа з розглянутого інтервалу. Можливі випадки, коли змінна набуває тільки *дискретних* значень.

Очевидно, що залежно від того, чи є досліджувана функція неперервною або дискретною, а також від структури допустимої області для реалізації процедури пошуку точок оптимуму функції варто використовувати різні методи. Потрібно відзначити, що метод, ефективний при аналізі неперервних функцій, може виявитися неефективним у разі дослідження розривних функцій.

Функція  $f(x)$  є *монотонною* (як при зростанні, так і при спаданні), якщо для двох довільних точок  $x_1$  і  $x_2$ , таких, що  $x_1 \leq x_2$ , виконується одна з нерівностей:  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (монотонно зростаюча функція),  $f(x_1) \geq f(x_2)$  (монотонно спадна функція).

На рис. 6.1 зображено графік функції, що монотонно спадає за умови  $x \leq x^0$  і монотонно зростає при  $x \geq x^0$ . Функція досягає свого мінімуму в точці  $x = x^0$  і є монотонною з обох боків від точки мінімуму. Такі функції називаються *унімодальними*.

Отже, функція  $f(x)$  є *унімодальною* на відрізку  $a \leq x \leq b$  тоді і тільки тоді, коли вона є монотонною з обох боків від єдиної на розглянутому інтервалі оптимальної точки  $x^0$ . Іншими словами, якщо  $x^0$  – єдина точка мінімуму  $f(x)$  на відрізку  $a \leq x \leq b$ , то  $f(x)$  унімодальна на даному інтервалі тоді і тільки тоді, коли для точок  $x_1, x_2$  з нерівності  $x^0 \leq x_1 \leq x_2$  випливає, що  $f(x^0) \leq f(x_1) \leq f(x_2)$ , а з  $x^0 \geq x_1 \geq x_2$  випливає, що  $f(x^0) \leq f(x_1) \leq f(x_2)$ .

При цьому будь-який інтервал  $[c, d] \subset [a, b]$ , що містить  $x^0$ , називається *інтервалом невизначеності*.

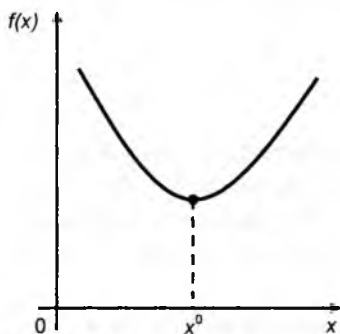


Рис. 6.1. Унімодальна функція

Відзначимо, що властивості монотонності та унімодальності функції не передбачають її неперервності. Унімодальність функцій є винятково важливою властивістю, що широко використовується в оптимізаційних дослідженнях. Питання, пов'язані з цією властивістю функцій, розглядаються в наступному підрозділі.

## 6.2. МЕТОДИ ВИЛУЧЕННЯ ІНТЕРВАЛІВ

У попередніх розділах були розглянуті необхідні і достатні умови оптимальності розв'язку. Слушні й для функцій однієї змінної, вони дають змогу визначити, чи є даний розв'язок оптимальним.

Перейдемо до вивчення питання, пов'язаного з визначенням оптимального розв'язку. З цією метою нижче розглядається ряд одновимірних методів пошуку, орієнтованих на відшукування точки оптимуму всередині заданого інтервалу. Методи пошуку, за допомогою яких визначають оптимум функції однієї змінної шляхом послідовного вилучення підінтервалів і, отже, шляхом зменшення інтервалу невизначеності, мають загальну назву методів вилучення інтервалів.

Всі одновимірні методи пошуку, використовувані на практиці, засновані на припущенні, що досліджувана функція в допустимій області принаймні має властивість унімодальності. Корисність цієї властивості полягає у тому, що для унімодальної функції  $f(x)$  порівняння значень  $f(x)$  у двох різних точках інтервалу пошуку дає змогу визначити, у якому з заданих двома зазначеними точками підінтервалів точка оптимуму відсутня. Підкреслимо, що обчислення значення функції в одній точці для такого висновку недостатньо. Властивість унімодальності функції лежить в основі *правила вилучення інтервалів*, що формулюється так.

Нехай функція  $f(x)$  є унімодальною на замкненому інтервалі  $a \leq x \leq b$ , а її мінімум досягається в точці  $x^0$ . Розглянемо такі точки  $x_1$  і  $x_2$ , що  $a < x_1 < x_2 < b$ . Порівнюючи значення функції в точках  $x_1$  і  $x_2$ , можна зробити висновки:

- 1) якщо  $f(x_1) > f(x_2)$ , то точка мінімуму не належить інтервалу  $(a, x_1)$ , тобто  $x^0 \in (x_1, b)$ ;
- 2) якщо  $f(x_1) < f(x_2)$ , то точка мінімуму не належить інтервалу  $(x_2, b)$ , тобто  $x^0 \in (a, x_2)$ .

Відповідно до цього правила, можна реалізувати процедуру пошуку, що дає змогу знайти точку оптимуму шляхом послідовного вилучення частин



вихідного обмеженого інтервалу. Пошук завершується, коли підінтервал (інтервал або зона невизначеності), що залишився, суттєво зменшується. Правило вилучення інтервалів усуває необхідність повного перебирання всіх допустимих точок. Перевагою пошукових методів є те, що вони засновані лише на обчисленні значень функції. В теорії одновимірної чисельної оптимізації таке обчислення називають *експериментом*. При цьому не потрібно, щоб досліджувані функції були диференційовними; більш того, припустимі випадки, коли функцію не можна навіть записати в аналітичному вигляді. Єдиною вимогою є можливість визначення значень функції  $f(x)$  у заданих точках  $x$  за допомогою прямих розрахунків або імітаційних експериментів.

Взагалі в процесі застосування розглянутих методів пошуку можна виділити два етапи:

1) встановлення меж інтервалу, на якому реалізується процедура пошуку меж досить широкого інтервалу, що містить точку оптимуму;

2) зменшення інтервалу, на якому виконується скінченна послідовність перетворень вихідного інтервалу з тим, щоб зменшити його довжину до задалегідь встановленої величини.

### 6.2.1. Етап установлення меж інтервалу

На цьому етапі спочатку вибирають вихідну точку, а потім, згідно з правилом вилучення, будують відносно широкий інтервал, що містить точку оптимуму. Зазвичай пошук межових точок такого інтервалу здійснюють за допомогою евристичних методів. Відповідно до одного з цих методів,  $(k + 1)$  пробна точка визначається за рекурентною формулою

$$x^{k+1} = x^k + 2^k \Delta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.2)$$

де  $\Delta$  – розмір кроку, що підбирається деяким способом. Нехай  $x^s$  – довільно обрана початкова точка. Кожна наступна пробна межа точка розташовується від попередньої на всезростаючій відстані, що забезпечується множенням  $\Delta$  на  $k$ -й степінь двійки у формулі (6.2). Знак  $\Delta$  визначається шляхом порівняння значень  $f(x^s)$ ,  $f(x^s + |\Delta|)$ ,  $f(x^s - |\Delta|)$ . Якщо

$$f(x^s - |\Delta|) \geq f(x^s) \geq f(x^s + |\Delta|), \quad (6.3)$$

то, відповідно до припущення про унімодальність, точка мінімуму має розташовуватися праворуч точки  $x^s$ , і  $\Delta$  є додатним. Змінюючи знаки нерівностей на протилежні,  $\Delta$  вибирають від'ємним. За умови

$$f(x^s - |\Delta|) \geq f(x^s) \leq f(x^s + |\Delta|) \quad (6.4)$$

точка мінімуму лежить між  $x - |\Delta|$  та  $x + |\Delta|$ , і пошук межових точок завершено. Випадок, коли

$$f(x^s - |\Delta|) \leq f(x^s) \geq f(x^s + |\Delta|),$$

суперечить припущенню про унімодальність. Виконання цієї умови свідчить про те, що функція не є унімодальною.

**Приклад 6.1.** Розглянемо задачу мінімізації функції  $f(x) = (100 - x)^2$  при заданій початковій точці  $x = 30$  і розмірі кроку  $|\Delta| = 5$ . Знак  $\Delta$  визначається на основі порівняння значень

$$f(x^s) = f(30) = 4\,900,$$

$$f(x^s + |\Delta|) = f(35) = 4\,225,$$

$$f(x^s - |\Delta|) = f(25) = 5\,625.$$

Оскільки

$$f(x^s - |\Delta|) \geq f(x^s) \geq f(x^s + |\Delta|),$$

то величина  $\Delta$  має бути додатною, а координата точки мінімуму  $x^0$  більшою від 30. Маємо  $x_1 = x + \Delta = 35$ . Далі  $x_2 = x_1 + 2\Delta = 45$ ,  $f(45) = 3025 < f(x_1)$ , звідси  $x^0 > 35$ ;  $x_3 = x_2 + 2^2\Delta = 65$ ,  $f(65) = 1\,225 < f(x_2)$ , звідки  $x^0 > 45$ ;  $x_4 = x_3 + 2^3\Delta = 105$ ,  $f(105) = 25 < f(x_3)$ , звідки  $x^0 > 65$ ;  $x_5 = x_4 + 2^4\Delta = 185$ ,  $f(185) = 7\,225 < f(x_4)$ , тобто  $x^0 < 185$ . Отже, шість кроків обчислень  $x^0$  дають змогу знайти інтервал  $65 \leq x^0 \leq 185$ , у якому розташована точка  $x^0$ .

Зауважимо, що ефективність пошуку межових точок безпосередньо залежить від розміру кроку  $\Delta$ . Якщо він великий, одержуємо грубі оцінки координат межових точок, і побудований інтервал дуже широкий. З іншого боку, якщо  $\Delta$  є малий, для визначення межових точок може знадобитися досить великий обсяг обчислень.

### 6.2.2. Етап зменшення інтервалу невизначеності

Після встановлення меж інтервалу, що містить точку оптимуму, можна застосувати більш складну процедуру *зменшення інтервалу пошуку* з метою одержання уточнених оцінок координат оптимуму. Єдиною інформацією, що використовується для пошуку, є обчислені значення функції  $f(x)$  у точках інтервалу невизначеності, які називаються експериментами. Спосіб вибору кількості і місця розташування точок на інтервалі невизначеності називається *стратегією експерименту*. Можливість швидкого і точного пошуку точки мінімуму на інтервалі  $[a, b]$  залежить від виду функції  $f(x)$  і стратегії проведення експериментів. Оскільки вид  $f(x)$  може бути будь-яким, то для підвищення ефективності пошуку варто раціонально вибрати кількість і місця розташування точок експерименту на інтервалі невизначеності.

Розглянемо приклад такої стратегії з трьома точками експериментів для функції  $f(x)$ , унімодальної на  $[0, 1]$ . Виберемо стратегію  $x_1 = 0, 2$ ,  $x_2 = 0, 6$ ,  $x_3 = 0, 9$ . Можливі наслідки експериментів для цього випадку наведено на рис. 6.2.

Відповідно до правила вилучення інтервалів (6.4), розмір інтервалу невизначеності залежно від результатів експериментів складе: а) 0,6, б) 0,7, в) 0,4. Визначимо довжину інтервалу невизначеності для серії з  $n$  експериментів. Нехай  $k$  – номер експерименту  $x_k$ , при якому отримане найменше значення  $f(x)$ , тобто  $f(x_k) = \min_{1 \leq j \leq n} f(x_j)$ . Тоді довжина інтервалу невизначеності після  $n$  експериментів

$$L_n(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = x_{k+1} - x_{k-1}. \quad (6.5)$$

При цьому вважаємо, що  $x_0 = 0$ ,  $x_{n+1} = 1$ . Оскільки прогнозувати величину  $L_n$  заздалегідь не можна (її визначають тільки після проведення всіх  $n$  експериментів), то не варто  $L_n$  брати за показник ефективності пошуку. Таким показником може бути максимальна довжина інтервалу невизначеності заданої стратегії. Тоді кожен з отриманих результатів буде свідомо не гірше розрахованого (гарантованого). Запишемо цей гарантований результат

$$\bar{L}_n(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = \max_{1 \leq k \leq n} \{L_n(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)\}. \quad (6.6)$$

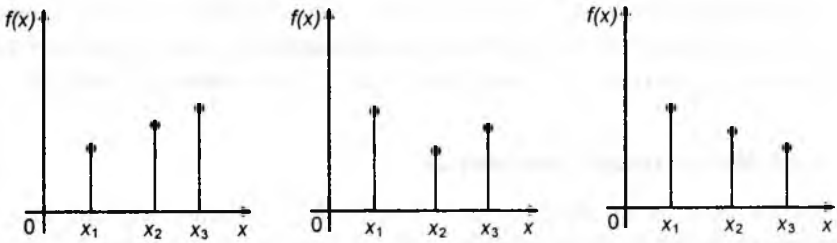


Рис. 6.2. Можливі наслідки експериментів з трьома пробними точками

Для розглянутого прикладу з трьома експериментами відповідно до (6.5) максимальна (гарантована) величина інтервалу невизначеності

$$\begin{aligned} \bar{L}_3(0, 2; 0, 6; 0, 9) &= \max_k \{(x_2 - x_0), (x_3 - x_1), (x_4 - x_2)\} = \\ &= \max \{0, 6; 0, 7; 0, 4\} = 0, 7. \end{aligned}$$

Очевидно це найгірший результат за даної стратегії пошуку. Проте можуть бути і кращі результати зі значеннями показника ефективності 0,6 і 0,4.

*Мінімаксна стратегія пошуку.* Розглянемо задачу вибору такої стратегії проведення експериментів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , що приводить до мінімального значення критерію  $\bar{L}_n(x_1, \dots, x_n)$ , тобто мінімізує максимальну довжину інтервалу невизначеності. Така стратегія називається оптимальною, позначимо її  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ . Тоді

$$\bar{L} = \bar{L}_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \min_{0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1} \{\bar{L}_n(x_1, \dots, x_n)\}. \quad (6.7)$$

Враховуючи те, що  $\bar{L}_n = \bar{L}_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  являє собою гарантований результат, отримаємо

$$\bar{L} = \min_{0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1} \max_{1 \leq k \leq n} \{L_n(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)\}. \quad (6.8)$$

Принцип вибору стратегії згідно з цією умовою називається *принципом мінімакса*. Результат, який одержують відповідно з цим принципом, є гарантованим. Це означає, що довжина інтервалу невизначеності, отриманого внаслідок такого вибору точок експериментів, буде не більше (а може бути і менше!), ніж  $\bar{L}$ . Отже, внаслідок  $n$  експериментів можна розраховувати не більш, ніж на таку довжину інтервалу невизначеності.

Критерій (6.8) застосовується для оптимізації різних стратегій проведення експериментів. Нижче розглянуто найчастіше використовувані в інженерній практиці стратегії розв'язку задачі одновимірної оптимізації.

### 6.2.3. Методи пошуку екстремуму

Як і в загальному випадку (див. розд. 5.2.1), чисельні методи пошуку екстремуму функції однієї змінної діляться на пасивні й активні.

Основна особливість *пасивних методів* полягає у тому, що на етапі підготовки задачі до розв'язку визначається необхідне число експериментів  $n$  і стратегія їх проведення. Далі всі експерименти виконуються одночасно. Згідно з отриманими результатами за формулою (6.5) визначається зона невизначеності, всередині якої знаходиться оптимум  $x^0$ .

Найпростіша пасивна стратегія проведення  $n$  експериментів (метод рівномірного пошуку) полягає в розбиванні вихідного інтервалу невизначеності на рівні відрізки  $\Delta$ , число яких у цьому випадку дорівнює  $(n+1)$ ,

а  $\Delta = \frac{1}{n+1}$ . Тоді зона невизначеності відповідно до формули (6.5) дорівнюватиме  $v = 2\Delta$ .

Якщо задана потрібна точність визначення екстремуму (зона невизначеності)  $v$ , неважко розв'язати обернену задачу і визначити потрібну для її забезпечення кількість експериментів:  $n = \frac{2}{v} - 1$ .

**Приклад 6.2.** Визначити екстремум функції з вихідною зоною невизначеності  $[0, 1]$ , якщо точність  $v \leq 0,01$ . Знайти потрібну кількість експериментів для рівномірної стратегії.

Вона дорівнює

$$n = \frac{2}{v} - 1 = \frac{2}{0,01} - 1 = 199.$$

Розглянемо приклади побудови оптимальних пасивних стратегій. Оскільки один експеримент не дає змоги зменшити вихідний інтервал невизначеності  $[0, 1]$ , то починати потрібно з випадку  $n = 2$ .

Нехай  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ . Тоді  $\bar{L}_2 = \max\{(x_2 - x_0), (x_3 - x_1)\} = \max\{x_2, (1 - x_1)\}$ .

Легко показати, що

$$\bar{L} = \bar{L}_2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \min_{0 \leq x_1 < x_2 \leq 1} \max\{x_1, (1 - x_2)\} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

де  $\epsilon > 0$  – мале число, близьке до нуля (конкретне значення  $\epsilon$  вибирається за умови гарантованої розрізненості результатів експериментів).

Нехай  $n = 3$ , тоді

$$\bar{L} = \bar{L}_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \min_{x_i} \max_k \{x_2, (x_3 - x_1), (1 - x_2)\} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

причому  $\bar{x}_2 = \frac{1}{2}$ , а  $\bar{x}_1$  і  $\bar{x}_3$  – будь-які, що задовольняють умову  $x_3 - x_1 \leq \frac{1}{2}$  і вихідне обмеження.

Отже, введення третього експерименту зменшує зону невизначеності усього на  $\frac{\epsilon}{2}$ . З цього випливає, що використання непарного числа експериментів у пасивній стратегії недоцільне. Для парного числа експериментів найкраще розміщення має вигляд рівновіддалених  $\epsilon$ -пар (тобто експерименти в кожній парі розташовані на відстані  $\epsilon$ ).

Отже, для виконання умов прикладу 6.2 потрібно провести 198 експериментів.

Для реалізації пасивних стратегій потрібно значно більше обчислювальних ресурсів, ніж для активних. Незважаючи на це, вони використовуються на практиці, коли поряд із визначенням екстремуму функції потрібна візуалізація її графіка на виділеному інтервалі; дослідженню підлягають функції, відмінні від унімодальних, у тому числі багатоекстремальні, у цьому разі знаходяться всі локальні екстремуми.

Альтернативою пасивним методам є *активні стратегії* пошуку екстремуму. Їх особливість полягає в тому, що кожний наступний експеримент планується з урахуванням інформації, отриманої на попередніх кроках пошуку. Це зумовлює істотне підвищення ефективності процедур пошуку екстремуму. Розглянемо найбільш відомі схеми послідовного активного пошуку.

*Метод поділу інтервалу навпіл (метод дихотомії)* дає змогу вилучити точно половину інтервалу на кожній ітерації. Іноді цей метод називають *треточковим пошуком на рівних інтервалах*, оскільки його реалізація заснована на виборі трьох пробних точок, які є рівномірно розподіленими в інтервалі пошуку. Нижче наводиться опис основних кроків процедури пошуку точки мінімуму функції  $f(x)$  в інтервалі  $(a, b)$ .

Задати межі інтервалу  $(a, b)$ , точність розв'язку задачі  $\nu > 0$ .

Крок 1. Прийняти  $x_m = (a + b)/2$  і  $L = b - a$ . Обчислити значення  $f(x_m)$ .

Крок 2. Покласти  $x_1 = a + L/4$ ,  $x_2 = b - L/4$ . Точки  $x_1$ ,  $x_m$ ,  $x_2$  поділяють інтервал  $(a, b)$  на чотири рівні частини. Обчислити значення  $f(x_1)$  і  $f(x_2)$ .

Крок 3. Порівняти  $f(x_1)$  і  $f(x_m)$ .

1. Якщо  $f(x_1) < f(x_m)$ , вилучити інтервал  $(x_m, b)$ , поклавши  $b = x_m$ . Середньою точкою нового інтервалу пошуку стає точка  $x_1$ . Отже, потрібно покласти  $x_m = x_1$ . Перейти до кроку 5.

2. При  $f(x_1) \geq f(x_m)$ , перейти до кроку 4.

Крок 4. Порівняти  $f(x_2)$  і  $f(x_m)$ .

1. Якщо  $f(x_2) < f(x_m)$ , вилучити інтервал  $(a, x_m)$ , поклавши  $a = x_m$ . Оскільки середньою точкою нового інтервалу стає точка  $x_2$ , покласти  $x_m = x_2$ . Перейти до кроку 5.

2. За умови  $f(x_2) \geq f(x_m)$ , вилучити інтервали  $(a, x_1)$  і  $(x_2, b)$ . Покласти  $a = x_1$  і  $b = x_2$ . Зауважимо, що  $x_m$  продовжує залишатися середньою точкою нового інтервалу. Перейти до кроку 5.

Крок 5. Обчислити  $L = b - a$ . Якщо  $L < \nu$ , закінчити пошук. У протилежному разі повернутися до кроку 2.

*Зауваження.* 1. На кожній ітерації алгоритму вилучається точно половина інтервалу пошуку.

2. Середня точка послідовно одержуваних інтервалів завжди збігається з однією з пробних точок  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_m$ , знайдених на попередній ітерації. Отже, на кожній ітерації потрібно не більш двох обчислень значення функції.

3. Якщо проведено  $n$  обчислень значення функції, то довжина отриманого інтервалу складає  $(1/2)^{n/2}$  довжини вихідного інтервалу.

4. Дослідження методів вилучення інтервалів показує, що з усіх методів пошуку на рівних інтервалах (двоточковий, триточковий, чотириточковий і т. д.) триточковий пошук, або метод поділу інтервалу навпіл, є найефективнішим.

**Приклад 6.3.** Мінімізувати  $f(x) = 100 - x^2$  в інтервалі  $60 \leq x \leq 150$ , застосовуючи метод поділу інтервалу навпіл. Нехай  $a = 60$ ,  $b = 150$  і  $L = 150 - 60 = 90$ .  $x_m = (60 + 150)/2 = 105$ .

Ітерація 1.  $x_1 = a + (L/4) = 60 + (90/4) = 82,5$ ;  $x_2 = b - (L/4) = 150 - (90/4) = 127,5$ ;  $f(82,5) = 306,25 > f(105) = 25$ ;  $f(127,5) = 756,25 > f(105) = 25$ .

Отже, вилучаються інтервали  $(60; 82,5)$  і  $(127,5; 150)$ . Довжина інтервалу пошуку зменшується з 90 до 45.

Ітерація 2.  $a = 82,5$ ;  $b = 127,5$ ;  $x_m = 105$ ;  $L = 127,5 - 82,5 = 45$ ;  $x_1 = 82,5 + (45/4) = 93,75$ ;  $x_2 = 127,5 - (45/4) = 116,25$ ;  $f(93,75) = 39,06 > f(105) = 25$ ;  $f(116,25) = 264,06 > f(105) = 25$ . Тобто інтервал невизначеності –  $(93,75; 116,25)$ .

Ітерація 3.  $a = 93,75$ ;  $b = 116,25$ ;  $x_m = 105$ ;  $L = 116,25 - 93,75 = 22,5$ ;  $x_1 = 99,375$ ;  $x_2 = 110,625$ ;  $f(x_1) = 0,39 < f(105) = 25$ . Отже, вилучається інтервал  $(105; 116,25)$ . Новий інтервал невизначеності –  $(93,75; 105)$ , середня точка –  $99,375$  (точка  $x_1$  на ітерації 3). Відзначимо, що за три ітерації (шість обчислень значення функції) вихідний інтервал пошуку довжини 90 зменшився до розміру  $(90/1/2)^3 = 11,25$ . Ітерації продовжуються доти, поки не буде забезпечена потрібна зона невизначеності.

*Пошук методом золотого перерізу.* З проведеного вище обговорення методів вилучення інтервалів і мінімаксної стратегії пошуку можна зробити такі висновки.

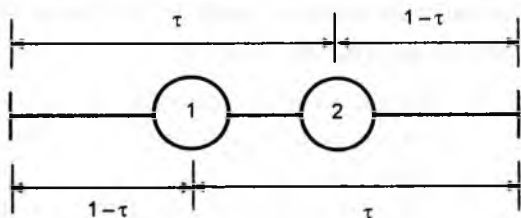
1. Якщо кількість пробних точок дорівнює двом, то їх варто розмішувати на однакових відстанях від середини інтервалу.

2. Відповідно до загальної мінімаксної стратегії пробні точки мають розмішуватися в інтервалі за симетричною схемою таким чином, щоб відношення довжини підінтервалу, що вилучається, до довжини інтервалу пошуку залишалось постійним, тобто  $\frac{L_0}{L_1} = \frac{L_1}{L_2} = \dots$

3. На кожній ітерації процедури пошуку бажано обчислювати тільки одне нове значення функції в останній побудованій точці.

Згідно з цими висновками розглянемо симетричне розташування двох пробних точок на вихідному інтервалі одиничної довжини (рис. 6.3).

Пробні точки розташовані від межових точок інтервалу на відстані  $\tau$ . При такому симетричному розміщенні точок довжина інтервалу, що залишається після вилучення, завжди дорівнює  $\tau$  незалежно від того, яке із значень функції в пробних точках виявляється меншим. Крім того, відношення довжини зон невизначеності після першої ітерації до-



рівнює  $\frac{L_0}{L_1} = \frac{1}{\tau}$ . Припустимо, **Рис. 6.3.** Розташування пробних точок у методі золотого перерізу



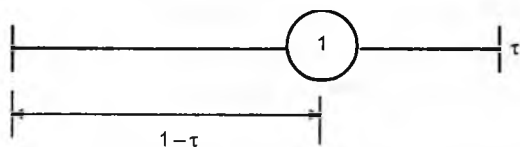


Рис. 6.4. Залишок вихідного інтервалу після вилучення

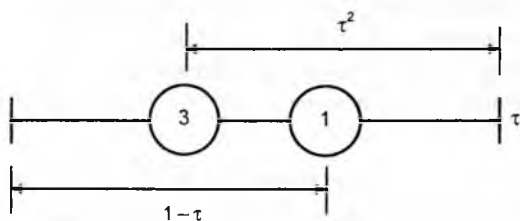


Рис. 6.5. Симетрія золотого перерізу інтервалу

$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\tau}{(1-\tau)}$ . Для того щоб це відношення зберігало постійне значення  $\frac{1}{\tau}$ ,

має виконуватися умова  $(1-\tau) = \tau^2$ .

Розв'язуючи квадратне рівняння, маємо

$$\tau = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

отже,  $\tau = 0,61803\dots$  Метод пошуку, при якому пробні точки поділяють інтервал у цьому відношенні, називають *методом золотого перерізу*. Зауважимо, що після перших двох обчислень значень функції кожне наступне обчислення дає змогу вилучити підінтервал, довжина якого складає  $(1-\tau)$ -ту частку від довжини інтервалу пошуку. Отже, якщо вихідний інтервал має одиничну довжину, то довжина інтервалу, отриманого внаслідок  $n$  обчислень значень функції, дорівнює  $\tau^{n-1}$ .

**Приклад 6.4.** Розглянемо задачу з прикладу 6.3, в якій потрібно мінімізувати функцію  $f(x) = 100 - x^2$  в інтервалі  $60 \leq x \leq 150$ , застосовуючи метод золотого перерізу.

Для того щоб перейти до інтервалу одиничної довжини, проведемо заміну змінної, поклавши  $w = (x-60)/90$ . Отже, потрібно мінімізувати  $f(w) = (40 - 90w)^2$  при обмеженні  $0 \leq w \leq 1$ .

що вилучається правий підінтервал. На рис. 6.4 показано, що підінтервал довжини  $\tau$ , який залишився, містить одну пробну точку, розташовану на відстані  $(1-\tau)$  від лівої межової точки.

Для збереження симетрії пошукового зразка наступну пробну точку розміщують на відстані  $(1-\tau)$  від правої межової точки інтервалу (рис. 6.5).

У цьому разі незалежно від результату експерименту зона невизначеності дорівнюватиме  $L_2 = (1-\tau)$  і, отже,

Ітерація 1.  $I_1 = (0; 1)$ ;  $L_1 = 1$ . Проведемо два перших обчислення значень функції:  $w_1 = \tau = 0,618$ ,  $f(w_1) = 244,0$ ;  $w_2 = 1 - \tau = \tau^2 = 0,382$ ,  $f(w_2) = 31,6$ .

Оскільки  $f(w_2) < f(w_1)$  і  $w_2 < w_1$ , то інтервал  $w \geq w_1$  вилучається.

Ітерація 2.  $I_2 = (0; 0,618)$ ;  $L_2 = 0,618 = \tau$ . Обчислюють значення функції для точки  $w_3 = \tau - \tau^2 = \tau(1 - \tau) = \tau^3 = 0,236$ ,  $f(w_3) = 352$ .

Оскільки  $f(w_3) > f(w_2)$  і  $w_3 < w_2$ , то інтервал  $w \leq w_3$  вилучається.

Ітерація 3.  $I_3 = (0,236; 0,618)$ ,  $L_3 = 0,382 = \tau^2$ . Наступне обчислення виконують для точки, яка розташована на відстані  $\tau \times$  (довжина отриманого інтервалу) від лівої межової точки інтервалу, або на відстані  $(1 - \tau) \times$  (довжина інтервалу) від правої межової точки. Отже,  $w_4 = 0,618 - (1 - \tau)L_3 = 0,618 - \tau^2 L_3 = 0,618 - \tau^2(\tau^2) = 0,618 - \tau^4 = 0,472$ ,  $f(w_4) = 6,15$ .

Оскільки  $f(w_4) < f(w_2)$  і  $w_4 > w_2$ , то інтервал  $w \leq w_2$  вилучається. Тобто інтервал невизначеності дорівнює:  $0,382 \leq w \leq 0,618$  або  $94,4 \leq x \leq 115,6$ .

Якщо в процесі пошуку проведено шість обчислень значень функції, то довжина результуючого інтервалу для змінної  $w$  дорівнює  $\tau^{n-1} = \tau^5 = 0,09$ , що відповідає інтервалу довжиною 8,1 для змінної  $x$ . Для порівняння нагадаємо, що в аналогічній ситуації, застосовуючи метод поділу інтервалу навпіл, після шести експериментів одержали інтервал довжиною 11,25.

У загальному випадку, якщо права і ліва межові точки інтервалу невизначеності (позначимо їх відповідно через  $XP$  і  $XL$ ) відомі, то координати всіх наступних пробних точок одержують за допомогою методу золотого перерізу згідно формул

$$w = XR - \tau^n; \quad w = XL + \tau^n \quad (6.9)$$

залежно від того, який підінтервал був вилучений на попередній ітерації — правий або лівий. Пошук закінчують при досягненні заданої точності, довжина інтервалу невизначеності має бути менше заданого значення  $\nu$ .

Розглянемо питання про визначення оптимальної стратегії послідовного пошуку. Таку задачу було поставлено і розв'язано ізраїльським математиком Кіфером. Її розв'язування базується на відомих числах Фібоначчі, тому запропонований на цій основі метод одержав назву методу Фібоначчі. Викладення цього методу виходить за межі цієї книги. Відзначимо лише, що метод Фібоначчі близький за ефективністю до методу золотого перерізу. При великих  $n$  довжина остаточного інтервалу невизначеності в методі золотого перерізу усього на 17 % більше, ніж у методі Фібоначчі.

#### 6.2.4. Порівняння методів вилучення інтервалів

Розглянемо відносну ефективність розглянутих методів вилучення інтервалів. Позначимо довжину вихідного інтервалу невизначеності через  $L_1$ , а довжину інтервалу, отриманого внаслідок  $n$  обчислень значень функції, – через  $L_n$ . Як показник ефективності того або іншого методу вилучення інтервалів приймемо *відносне зменшення* вихідного інтервалу:  $FR(n) = \frac{L_n}{L_1}$ .

Нагадаємо, що при використанні методу поділу інтервалу навпіл і методу золотого перерізу довжина інтервалу складає відповідно  $L_1(0,5)^{n/2}$  і  $L_1(0,618)^{n-1}$ . Отже, після  $n$  обчислень значень функції відносне зменшення інтервалу

$$FR(n) = \begin{cases} (0,5)^{n/2} & \text{для методу поділу інтервалу навпіл,} \\ (0,618)^{n-1} & \text{для методу золотого перерізу.} \end{cases}$$

Для порівняння розглянемо пасивний метод рівномірного пошуку, відповідно до якого оцінювання функції виконують в  $n$  рівновіддалених одна від одної точках (при цьому інтервал  $L_1$  ділиться на  $(n+1)$  рівних інтервалів довжиною  $\frac{L_1}{n+1}$ ). Нехай  $x^0$  – точка мінімуму функції  $f(x)$  – потрапляє в інтервал

$$\left[ \left( x^0 - \frac{L_1}{n+1} \right), \left( x^0 + \frac{L_1}{n+1} \right) \right],$$

звідки  $L_n = \frac{2L_1}{n+1}$ . Отже, для методу рівномірного пошуку

$$FR(n) = \frac{2}{n+1}.$$

У табл. 6.1 наведені значення  $FR(n)$  для трьох методів пошуку. З таблиці видно, що пошук за допомогою методу золотого перерізу забезпечує найбільше відносне зменшення інтервалу при однаковій кількості обчислень значень функції.

## 6.1. Розміри відносного зменшення інтервалу

Метод пошуку	Кількість обчислень значень функції, $n$				
	2	5	10	15	20
Поділ інтервалу навпіл	0,5	0,177	0,031	0,006	0,0009
Золотий переріз	0,618	0,146	0,013	0,001	0,0001
Рівномірний пошук	0,667	0,333	0,182	0,125	0,095

З іншого боку, можна так само порівняти кількості обчислень значень функції, потрібні для досягнення заданої величини відносного зменшення інтервалу або заданого ступеня точності. Якщо  $FR(n)=v$  задана, то кількість обчислень за методами розподілу інтервалу навпіл, золотого перерізу і рівномірного пошуку визначають за формулами відповідно

$$n = \frac{2 \ln v}{\ln 0,5}, \quad n = \frac{1 + \ln v}{\ln 0,618}, \quad n = \frac{2}{v} - 1.$$

У табл. 6.2. наведено дані про кількості обчислень значень функції для визначення координати точки мінімуму з заданою точністю.

## 6.2. Кількість обчислень значень функції

Метод пошуку	Задана точність, $v$			
	0,1	0,05	0,01	0,001
Поділ інтервалу навпіл	7	9	14	20
Золотий переріз	6	8	11	16
Рівномірний пошук	19	39	199	1 999

Зауважимо, що метод золотого перерізу є найбільш ефективним порівняно з іншими двома методами, оскільки він вимагає найменшого числа оцінювань значення функції для досягнення такої самої заданої точності.

## Запитання для самоперевірки

1. Наведіть і поясніть постановку задачі оптимізації функції однієї змінної.
2. Яка функція називається унімодальною?
3. Сформулюйте правило вилучення інтервалів.
4. Що таке інтервал невизначеності?
5. У чому полягає мінімаксна стратегія пошуку мінімуму на інтервалі невизначеності?

6. Які переваги і недоліки пасивних методів?
7. Викладіть схему методу розподілу інтервалу навпіл.
8. Сформулюйте метод золотого перерізу. У чому його відмінності від методу поділу інтервалу навпіл?
9. Як можна порівнювати ефективність різних методів вилучення інтервалів?

## Розділ 7. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

У даному розділі розглядаються методи, які використовуються для пошуку безумовних мінімумів функцій кількох змінних. Викладення базується на матеріалах розд. 6, оскільки одновимірні методи відіграють важливу роль при дослідженні функцій кількох змінних.

Нагадаємо (див. розд. 5), що задача безумовної оптимізації функції кількох змінних має вигляд

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R^n. \quad (7.1)$$

Основні властивості задач цього типу докладно розглянуто в розд. 5, де наведено необхідні і достатні умови оптимальності, які дають змогу зробити висновок про те, чи є задана точка розв'язком задачі. У даному розділі розглядаються тільки чисельні методи пошуку екстремуму.

При розв'язуванні задач безумовної оптимізації функцій кількох змінних потрібно враховувати їх властивості. Функція цілі  $f(x)$  може бути як диференційовною, так і недиференційовною. Диференційовна функція може мати досить складні для обчислення перші і другі похідні. Ці особливості задачі безумовної оптимізації суттєво впливають на вибір методу її розв'язування. Крім того, нелінійна цільова функція може мати кілька екстремумів, тому доводиться обмежуватися визначенням точки локального оптимуму.

У даному розділі розглядаються методи й алгоритми, які уможливають на ітераційній основі визначення з наперед заданою точністю значення керованих змінних  $x^*$ , яким відповідає мінімальне значення функції  $f(x)$ . Методи можна застосовувати також до задач максимізації, де цільову функцію слід замінити на  $-f(x)$ . Як відзначалося в розд. 5, чисельні методи, орієнтовані на розв'язування задач безумовної оптимізації, можна поділити на три великі класи відповідно до типу використовуваної інформації.

1. Методи прямого пошуку (нульового порядку), засновані на обчисленні тільки значень цільової функції.

2. Градієнтні методи, у яких крім значень цільової функції використовуються значення перших похідних  $f(x)$ .

3. Методи другого порядку, де поряд із першими похідними застосовуються також другі похідні функції  $f(x)$ .

Нижче розглядаються методи, що відносяться до кожного з зазначених класів, оскільки жодний метод або клас методів не є універсальним при розв'язуванні задач безумовної оптимізації різних типів. Особливості задач оптимізації, такі як диференційовність цільової функції, обчислювальна складність визначення її значень зумовлюють вибір того або іншого методу.

## 7.1. Методи прямого пошуку

Як вже зазначалося, для реалізації *методів прямого пошуку* потрібні тільки значення цільової функції. Нехай цільова функція  $f(x)$  може бути обчислена у будь-якій точці  $x \in R^n$  і є унімодальною в розглянутій області. Розглянемо більш докладно методи прямого пошуку, а саме: метод сіток, метод покоординатного спуску, метод пошуку Хука – Дживса, пошуку по симплексу (метод багатогранника), метод випадкового пошуку.

Загальні особливості зазначених методів полягають у простоті відповідних обчислювальних процедур, які легко реалізуються й ефективно функціонують.

### 7.1.1. Метод сіток

Названий метод є одним із чисельних методів, що реалізують пасивну стратегію пошуку екстремуму. Він передбачає “покриття” області пошуку, яка має оптимальний розв'язок.

Згідно з зазначеним методом на область простору  $R^n$ , що містить за припущенням точку мінімуму, наноситься сітка з досить великим кроком  $\Delta_i$ , у загальному випадку індивідуальним за кожною змінною  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Вузли сітки визначаються змінними

$$x_i = x_i^{\Delta} + m\Delta_i, \quad m = 0, 1, \dots, i = \overline{1, n}. \quad (7.2)$$

В усіх вузлах отриманої сітки обчислюються значення функції цілі  $f(x)$  і запам'ятовується вузол  $\bar{x}_k$ , у якому  $f(x)$  набуває мінімального значення.

Далі за формулою (6.5) для кожної змінної  $x_i$  визначається (зверніть увагу на аналогію з методами одновимірної оптимізації) зона невизначеності, всередині якої знаходиться екстремум функції  $x^0$ . На наступній ітерації методу величина кроку  $\Delta_i$  за кожною змінною зменшується. При цьому розміри сітки обмежуються вузлами, що знаходяться в околі точки  $\bar{x}$ . Для побудованої в такий спосіб більш дрібної сітки всі дії повторюються. Алгоритм припинить роботу тоді, коли кожен з кроків за змінними  $\Delta_i$  стане меншим від заданого  $\nu_i > 0$ , що дає змогу визначити вузол  $x^*$  із найменшим значенням функції з достатньою точністю.

Розглянемо випадок, коли вузол  $\bar{x}_k$ , у якому  $f(x)$  набуває найменшого значення, розташований на межі побудованої сітки. Таке розташування свідчить про те, що сітка не покриває частину області, що містить точку екстремуму. У цій ситуації сітку потрібно зрушити або розширити у відповідному напрямку.

Метод сіток є дуже трудомістким і передбачає значну кількість обчислень. Так, якщо в просторі  $n$  змінних на кожній осі відкладено  $m$  значень  $x_i$ , то кількість вузлів у побудованій сітці складе  $m^n$ . Це значною мірою обмежує область застосування методу. Проте зазначений метод має і деякі переваги над іншими. Він дає змогу аналізувати найбільш “незручні” для оптимізації функції, у тому числі багатоекстремальні. Крім того, цей метод допомагає відновити вигляд досліджуваної функції за її значеннями у вузлах сітки, що робить його особливо привабливим при розв’язуванні задач у системах, які використовують візуалізацію, зокрема в системах автоматизації проектування (САПР). Наприклад, за допомогою методу сіток можна розрахувати, визначити екстремуми і візуалізувати температурні та електромагнітні поля тощо.

### 7.1.2. Метод покоординатного спуску

Найбільш простим активним методом пошуку екстремуму функції нульового порядку є метод покоординатного спуску (МПС). На відміну від пасивного методу сіток, у якому розраховується значення функції в усіх без винятку вузлах, МПС орієнтований на побудову цілеспрямованої траєкторії руху до екстремуму на її вузлах. При цьому траєкторія спуску формується шляхом послідовного руху за кожною змінною при фіксованих значеннях усіх інших. Отже, спуск здійснюється послідовно у напрямках, які збігаються з напрямками осей координат. Саме це визначило назву методу. Розглянемо алгоритм реалізації МПС.

На етапі підготовки користувач задає початковий крок  $\Delta x_i$  варіювання кожної із змінних цільової функції  $f(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Величина початкового кроку індивідуальна для кожної змінної. Крім того, задається кількість дроблень кроку (поділів навпіл), що забезпечують потрібну точність визначення екстремуму, і стартова точка  $x^s$ . У цій точці фіксуються значення всіх змінних, крім  $x_1$ , і за цією змінною здійснюється одновимірна мінімізація функції.

Для розв'язування задачі може бути використаний будь-який метод одновимірної оптимізації, але найчастіше застосовується простий спуск із постійним кроком  $\Delta x_1$ . Для визначення напрямку руху по координаті (у бік збільшення або зменшення значень) використовується пробний крок. Спуск продовжується доти, поки приріст функції не змінить знак, тобто поки функція в заданому напрямку не почне зростати, що свідчить про зациклювання. Точка з мінімальним значенням функції приймається як проміжний розв'язок. У цій точці фіксується значення змінної  $x_1$  і здійснюється перехід до варіювання змінної  $x_2$  і так послідовно за всіма змінними. Як правило, одного циклу варіювання змінних недостатньо для досягнення екстремуму функції, тому цикли повторюються доти, поки відбудеться зациклювання послідовно за всіма змінними. У цій точці крок спуску зменшується (ділиться навпіл) і вищеописана процедура повторюється до забезпечення необхідної точності визначення екстремуму. Приклад формування траєкторії спуску МПС для функції двох змінних  $f(x_1, x_2)$  показано на рис. 7.1.

Численні дослідження показали, що швидкість збіжності методу слабо залежить від порядку варіювання змінних, тому можна рекомендувати природний порядок (за зростанням індексів змінних).

Переваги МПС полягають у простоті та наочності алгоритму реалізації, можливості визначення чутливості функції за кожною змінною і часткового відновлення профілю функції вздовж траєкторії спуску. Крім того, відзначимо, що настроювання параметрів багатьох фізичних приладів здійснюється саме МПС.

Недоліки методу – мала швидкість збіжності та великі

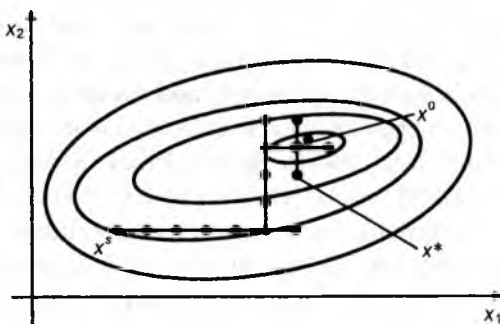


Рис. 7.1. Формування траєкторії спуску МПС для функції двох змінних



витрати обчислювальних ресурсів на його реалізацію, що лінійно зростають у разі збільшення числа змінних. Ще один недолік полягає в тому, що для функцій, які не всюди диференційовні, метод може “зупинитися” в точці, що не є локальним екстремумом, наприклад, на ребрі кусково-диференційовної функції.

### 7.1.3. Модифікації методу покоординатного спуску

Простота методу покоординатного спуску робить його дуже привабливим. Разом із тим, метод має низьку швидкість збіжності, що зменшується зі збільшенням розмірності простору змінних. Ці обставини зумовили пошук модифікацій методу покоординатного спуску, орієнтованих на поліпшення збіжності. Одна з таких модифікацій відома як *алгоритм Хука – Дживса*.

Основна ідея методу полягає в заміні послідовності ортогональних траєкторій спуску вздовж кожного з координатних напрямків рухом до екстремуму вздовж узагальненого вектора, спрямованого у бік зменшення функції. Для побудови цього вектора використовується інформація про результати пробних кроків за кожною із змінних  $x_i$  (координат).

Будь-який цикл спуску реалізується у два етапи.

На першому, що має назву *дослідницького пошуку*, формується так звана *базова точка*. Для цього з початкової (стартової) точки  $x^s$  здійснюється однокроковий спуск послідовно за кожною координатою (покоординатний спуск). Для проведення пошуку потрібно задати крок, який може бути різним для окремих координатних напрямків і змінюватися в процесі пошуку. Дослідницький пошук починається в стартовій точці  $x^s$  і полягає у виконанні пробних кроків за кожною змінною  $x_i$ . Якщо значення цільової функції в пробній точці не перевищує її значення в стартовій точці, то крок пошуку вважається успішним. У противному разі потрібно повернутися у вихідну точку і зробити крок у протилежному напрямку з наступним перевірнням значення цільової функції. Після перебирання всіх  $n$  координат пошук завершується. Краща з розглянутих точок називається базовою точкою. Позначимо її  $x^k$ , при цьому на першому кроці циклу  $k = 1$ .

Другий етап (*спуск за зразком*) полягає у формуванні траєкторії руху до екстремуму. Пряма, що з'єднує стартову і базову точки, визначає напрямок руху. У цьому напрямку виконують крок. Нову  $(k + 1)$  точку визначають за формулою

$$x_p^{k+1} = x^k + (x^k - x^{k-1}). \quad (7.3)$$

Точку  $x_p^{k+1}$  фіксують і знову виконують дослідницький пошук. Якщо одержують точку з меншим значенням цільової функції, ніж у точці  $x^k$ , то вона розглядається як нова базова точка  $x^{k+1}$ . З іншого боку, якщо пошук у точці  $x_p^{k+1}$  не є успішним, повертаються в точку  $x^k$  і здійснюють пошук з метою виявлення нового напрямку мінімізації. Врешті-решт виникає ситуація, коли такий пошук не приводить до успіху. В цьому разі крок зменшують шляхом застосування деякого множника і відновлюють пошук із точки  $x^k$ . Пошук завершують, коли крок стає досить малим. Послідовність точок, одержану в процесі реалізації методу, можна записати так:  $x^k$  – поточна базова точка,  $x^{k-1}$  – попередня базова точка,  $x_p^{k+1}$  – точка, побудована при русі за зразком,  $x^{k+1}$  – наступна (нова) базова точка. Наведена нижче послідовність обчислювальних операцій характеризує логічну структуру пошуку за методом Хука – Дживса.

Крок 1. Визначити: початкову точку  $x^s$ , приріст  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , коефіцієнт зменшення кроку  $\alpha > 1$ , параметр закінчення пошуку  $\nu > 0$ .

Крок 2. Провести дослідницький пошук.

Крок 3. Чи був пошук успішним (чи знайдена точка з меншим значенням цільової функції)? Так – перейти до кроку 5. Ні – перейти до кроку 4.

Крок 4. Перевірка на закінчення пошуку. Чи виконується нерівність  $\|\Delta x\| < \nu$ ? Так – припинити пошук; поточна точка знаходиться в заданих околах точки оптимуму  $x^0$ . Ні – зменшити приріст за формулою  $\Delta_i = \Delta_i / \alpha$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Перейти до кроку 2.

Крок 5. Провести спуск за зразком

$$x_p^{k+1} = x^k + (x^k - x^{k-1}).$$

Крок 6. Провести дослідницький пошук, використовуючи  $x_p^{k+1}$  як нову початкову точку. Нехай  $x^{k+1}$  – точка, отримана внаслідок пошуку.

Крок 7. Чи виконується нерівність  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ ? Так – покласти  $x^{k-1} = x^k$ ,  $x^k = x^{k+1}$  (збільшити індекс незалежної змінної на 1). Перейти до кроку 5. Ні – покласти  $x^{k+1} = x^k$  (зменшити індекс на 1). Перейти до кроку 2.

**Приклад 7.1.** Знайти точку мінімуму функції  $f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$  методом Хука–Дживса, використовуючи початкову точку  $x^s = [-4, -4]^T$ .

Задамо вихідні дані:  $\Delta x = [1, 1]^T$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\nu = 10^{-4}$ , де  $\Delta x$  – вектор приросту,  $\alpha$  – коефіцієнт зменшення кроку,  $\nu$  – параметр закінчення пошуку.

Ітерації починаємо з пошуку навколо точки  $x^s$ , якій відповідає значення функції  $f(x^s) = 272$ . Фіксуємо  $x_2$ , задамо збільшення змінної  $x_1$ :

$$x_2 = -4, x_1 = -4 + 1 \rightarrow f(-3, -4) = 200 < f(x^s) \rightarrow \text{успіх.}$$

Отже, зафіксуємо  $x_1 = -3$  і задамо приріст змінної  $x_2$ :

$$x_1 = -3, x_2 = -4 + 1 \rightarrow f(-3, -3) = 153 < 200 \rightarrow \text{успіх.}$$

Таким чином, внаслідок дослідницького пошуку знайдено базову точку

$$x^1 = [-3, -3]^T, f(x^1) = 153.$$

Оскільки пошук був успішним, перейдемо до спуску за зразком:

$$x_p^2 = x^1 + (x^1 - x^s) = [-2, -2]^T, f(x_p^2) = 68.$$

Далі виконуємо пошук навколо точки  $x_p^2$ , який буде вдалим при використанні додатних приростів змінних  $x_1$  і  $x_2$ . Одержуємо точку

$$x^2 = [-1, -1]^T, f(x^2) = 17.$$

Оскільки  $f(x^2) < f(x^1)$ , пошук із точки  $x_p^2$  вважаємо успішним, і  $x^2$  стає новою базовою точкою при наступному проведенні спуску за зразком. Ітерації продовжуються доти, поки зменшення значення кроку не вкаже на закінчення пошуку в околі точки мінімуму  $x^* = [0, 0]^T$ .

З прикладу 7.1 випливає, що метод Хука – Дживса характеризується складною стратегією пошуку, відносно простотою обчислень і невисоким рівнем вимог до обсягу пам'яті комп'ютера. Завдяки цьому алгоритм Хука – Дживса знаходить широке застосування в багатьох областях інженерної практики. Однак потрібно відзначити, що заснований на циклічному русі по координатах алгоритм іноді може закінчувати роботу передчасно (аналогічно МПС), а при наявності значних нелінійних ефектів вироджується в послідовність дослідницьких пошуків без переходу до прискорюючого спуску за зразком, тобто перетворюється в різновид МПС.

#### 7.1.4. Метод пошуку по симплексу (метод багатогранника)

Описаний у 7.1.1 метод сіток заснований на ідеї заміни області визначення цільової функції дискретною множиною (решіткою) точок простору змінних, після чого використовуються різні стратегії зменшення області,

що містить розв'язок задачі. Більш плідна ідея полягає у виборі базової точки й оцінюванні значень цільової функції в точках, що оточують базову точку. Наприклад, при розв'язуванні задачі з двома змінними можна скористатися квадратним зразком, зображеним на рис. 7.2. Потім “найкращу” з чотирьох пробних точок вибирають за наступну базову точку, навколо якої будують аналогічний зразок.

Рис. 7.2. Квадратний зразок (окремий випадок гіперкубічного зразка)

Якщо жодна з пробних точок не має переваги перед базовою, розміри зразка варто зменшити, після чого продовжити пошук. При цьому обчислення значень цільової функції виконують в усіх вершинах, а також у центрі гіперкуба, тобто у точках так званого *кубічного зразка*. Якщо кількість змінних (розмірність простору, в якому ведеться пошук) дорівнює  $n$ , то пошук за кубічним зразком вимагає  $2^n + 1$  обчислень значення функцій для одного зразка. У разі збільшення розмірності задачі потрібна кількість обчислень значення цільової функції зростає експоненціально. Отже, незважаючи на логічну простоту пошуку за кубічним зразком, виникає необхідність використання більш ефективних методів прямого пошуку для розв'язування задач оптимізації, що виникають на практиці.

Одна з найцікавіших стратегій пошуку покладена в основу *методу пошуку по симплексу*. Поняття симплекс (від лат. simplex – простий, найпростіший) означає опуклий багатогранник з  $n+1$  вершиною в просторі  $n$  змінних. Процедура симплексного пошуку базується на тому, що експериментальним зразком, який має найменшу кількість точок, є регулярний симплекс.

*Регулярний симплекс* у  $n$ -вимірному просторі являє собою правильний (тобто з рівними довжинами ребер) багатогранник із  $n+1$  вершиною. Наприклад, у випадку двох змінних симплексом є рівнобічний трикутник, у тривимірному просторі – тетраедр. В алгоритмі симплексного пошуку використовується важлива властивість симплексів, відповідно до якої новий симплекс можна побудувати на будь-якій грані початкового шляхом перенесення обраної вершини на належну відстань уздовж прямої, проведеної через центр ваги інших вершин початкового симплекса. Отримана в такий спосіб точка є вершиною нового симплекса, а вихідна вершина початкового симплекса вилучається. Неважко помітити, що при переході до нового симплекса потрібне одне обчислення значення цільової функції. Рис. 7.3

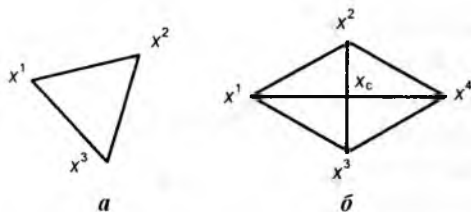


Рис. 7.3. Побудова симплекса:

*a* – початковий симплекс із вершинами  $x^1, x^2, x^3$ ;  
*б* – новий симплекс із вершинами  $x^2, x^3, x^4$ ;  $x_c$  – центр ваги вершин  $x^2, x^3$

ілюструє процес побудови нового симплекса на площині. Реалізація алгоритму симплексного пошуку починається з побудови регулярного симплекса в просторі незалежних змінних і оцінювання значень цільової функції в кожній з його вершин. При цьому визначається вершина, якій відповідає найбільше значення цільової функції.

Потім знайдена вершина проектується через центр ваги інших вершин симплекса в нову точку, яка приймається за вершину нового симплекса. Ітерації продовжуються доти, поки не буде накрита точка мінімуму, або не почнеться циклічний рух по двох чи більше симплексах. Тут скористаємося такими правилами.

1. “Накриття” точки мінімуму. Якщо вершина, якій відповідає найбільше значення цільової функції, побудована на попередній ітерації, то замість неї для відображення береться вершина, якій відповідає наступне за величиною значення цільової функції. У противному разі робота алгоритму з цього кроку зведеться до побудови нескінченної послідовності, яка складається тільки з двох вершин симплекса, що чергуються одна з одною, тобто відбудеться зациклювання. Наприклад, на рис. 7.3, *б* при побудові нового симплекса шляхом відображення вершини  $x^1$  отримано вершину  $x^4$ . Якщо значення функції цілі в ній буде найбільшим серед усіх вершин симплекса, то  $x^4$  підлягає відображенню. Внаслідок відображення буде побудована вершина  $x^1$  із максимальним значенням функції серед вершин  $x^1, x^2, x^3$  у своєму симплексі тощо. Вибір іншої вершини для наступного відображення дасть змогу змінити напрямок руху і, можливо, припинити зациклювання.

2. Циклічний рух. Якщо деяка вершина симплекса не вилучається протягом більше ніж  $M$  ітерацій, то потрібно зменшити розміри симплекса шляхом зменшення величини ребер і побудувати новий симплекс, обравши за базову точку, якій відповідає мінімальне значення цільової функції. При цьому

$$M = 1,65n + 0,05n^2,$$

де  $n$  – розмірність задачі, а  $M$  округлюється до найближчого цілого числа.

Для застосування цього правила потрібно знайти коефіцієнт редуції, тобто коефіцієнт зменшення величин ребер.

3. *Критерій закінчення пошуку.* Пошук завершується, коли розміри симплекса або різниці між значеннями функції у вершинах стають досить малими. Для застосування цього правила потрібно задати параметр закінчення пошуку.

Реалізація алгоритму заснована на побудові регулярного симплекса при заданих базовій точці і масштабному множнику та розрахунку координат відображеної точки.

Побудова симплекса є досить простою процедурою, оскільки з елементарної геометрії відомо, що при заданих початкової (базовій) точці  $x^s$  і масштабному множнику  $\alpha$  координати інших  $n$  вершин симплекса в  $n$ -вимірному просторі обчислюються за формулою

$$x_j^i = \begin{cases} x_j^s + \delta_1, & \text{якщо } j \neq i, \\ x_j^s + \delta_2, & \text{якщо } j = i, \end{cases} \quad (7.4)$$

для  $i, j = \overline{1, n}$ .

Прирости  $\delta_1$  і  $\delta_2$ , що залежать тільки від  $n$  і обраного масштабного множника  $\alpha$ , визначаються за формулами

$$\delta_1 = \alpha \left[ \frac{(n+1)^{1/2} + n - 1}{n\sqrt{2}} \right]; \quad (7.5)$$

$$\delta_2 = \alpha \left[ \frac{(n+1)^{1/2} - 1}{n\sqrt{2}} \right]. \quad (7.6)$$

Зауважимо, що масштабний множник вибирається дослідником, виходячи з характеристик розв'язуваної задачі. При  $\alpha = 1$  ребра регулярного симплекса мають одиничну довжину.

Обчислення другого типу, пов'язані з відображенням відносно центру ваги, також нескладні. Нехай  $x^j$  – точка, що підлягає відображенню. Центр ваги інших  $n$  точок розташований у точці

$$x_c = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x^i, \quad i \neq j.$$

Всі точки прямої, що проходить через  $x^j$  в  $x_c$ , задаються формулою

$$x = x^j + \lambda(x_c - x^j). \quad (7.7)$$

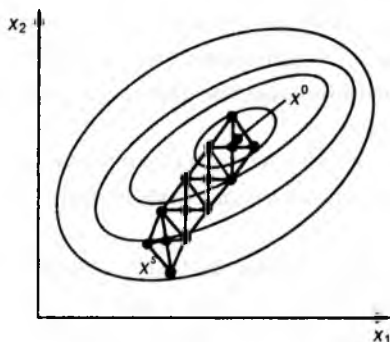


Рис. 7.4. Траєкторія спуску за методом багатогранника

При  $\lambda = 0$  одержуємо вихідну точку  $x^j$ , тоді як значення  $\lambda = 1$  відповідає центру ваги  $x_c$ . Щоб побудований симплекс мав властивість регулярності, відображення має бути симетричним. Отже, нова вершина утворюється при  $\lambda = 2$ . Тому

$$x_{\text{нов}}^j = 2x_c - x_{\text{поперед}}^j \quad (7.8)$$

Послідовна реалізація описаних обчислювальних процедур приводить до побудови траєкторії спуску, наведеної на рис. 7.4.

**Приклад 7.2.** Використовуючи метод пошуку по симплексу, мінімізувати

$$f(x) = (1 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2.$$

Для побудови вихідного симплекса потрібно задати початкову точку і масштабний множник. Нехай  $x^s = [0, 0]^T$ ,  $\alpha = 2$ . Тоді, відповідно до формул (7.5) і (7.6), маємо

$$\delta_1 = 2 \left[ \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \right] = 1,9318; \quad \delta_2 = 2 \left[ \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \right] = 0,5176.$$

Використовуючи ці два параметри, обчислимо координати двох інших вершин симплекса:

$$x^1 = [0 + 0,5176; 0 + 1,9318]^T = [0,5176; 1,9318]^T;$$

$$x^2 = [0 + 1,9318; 0 + 0,5176]^T = [1,9318; 0,5176]^T,$$

яким відповідають значення цільової функції  $f(x^1) = 0,2374$  і  $f(x^2) = 3,0658$ .

Оскільки  $f(x) = 5$ , потрібно вилучити точку  $x^s$  і побудувати симетричну їй вершину відносно центру ваги двох інших вершин симплекса:

$$x_c^{1,2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 x^i = \frac{1}{2} (x^1 + x^2) = [1,2247; 1,2247]^T.$$

Використовуючи формулу (7.8), дістаємо

$$x^3 = 2x_c^{1,2} - x_s = [2 \cdot 1,2247, 2 \cdot 1,2247] - [0, 0],$$

$$x^3 = [2,4494, 2,4494]^T.$$

В отриманій точці  $f(x^3) = 2,3027$ , тобто спостерігається зменшення цільової функції. Новий симплекс утворюється точками  $x^1$ ,  $x^2$  і  $x^3$ . Відповідно до алгоритму варто відобразити точку  $x^2$ , якій відповідає найбільше значення цільової функції, відносно центру ваги точок  $x^1$  і  $x^3$ . Ітерації продовжуються доти, поки не буде потрібно застосування правил 1, 2 і 3, що були сформульовані вище.

Викладений вище алгоритм методу пошуку за регулярним симплексом має кілька очевидних переваг.

1. Розрахунки і логічна структура методу відрізняються порівняною простотою, і, отже, відповідна комп'ютерна програма є відносно стислою.

2. Рівень вимог до обсягу пам'яті комп'ютера невисокий, масив має розмірність  $(n + 1, n + 2)$ .

3. Використовується порівняно невелика кількість заздалегідь встановлених параметрів: масштабний множник, коефіцієнт зменшення множника (якщо застосовується правило 2) і параметри закінчення пошуку.

Проте алгоритм має також кілька істотних недоліків.

1. Не виключене виникнення труднощів, пов'язаних із масштабуванням, оскільки всі координати вершин симплекса залежать від масштабного множника  $\alpha$ . Для запобігання цьому в практичних задачах варто промасштабувати (тобто привести до єдиного інтервалу) усі змінні з тим, щоб їх значення були порівнянними.

2. Робота алгоритму сповільнюється тим, що отримана на попередніх ітераціях інформація не використовується для прискорення пошуку.

3. Не існує простого способу зміни розмірів симплекса, який не вимагає перерахування значень цільової функції в усіх точках зразка. Отже, якщо  $\alpha$  з якоїсь причини зменшується, то пошук має продовжуватися зі зменшеним розміром кроку.

### 7.1.5. Метод деформованого багатогранника

Модифікована процедура пошуку по симплексу, яку називають *методом деформованого багатогранника*, частково усуває деякі з перерахованих недоліків. Неважко помітити, що хоча формула для визначення вершин регулярного симплекса виявляється дуже зручною при побудові вихідного



зразка, однак вагомим основ для зберігання властивості регулярності симплекса в процесі пошуку немає. Отже, при відображенні симплекса існує можливість як його розтягування, так і стиснення, тобто деформації. При описанні методу деформованого багатогранника приймемо такі позначення вершин симплекса:  $x^h$  – вершина, якій відповідає найбільше значення цільової функції  $f^h$ ;  $x^g$  – вершина, якій відповідає наступне за величиною значення цільової функції  $f^g$ ;  $x^l$  – вершина з мінімальним значенням цільової функції  $f^l$ ;  $x_{\text{нов}}$  – вершина нового симплекса, отримана внаслідок відображення за правилом для регулярного симплекса, без розтягування або стиснення.

Нагадаємо, що відображення вершини симплекса здійснюється по прямій

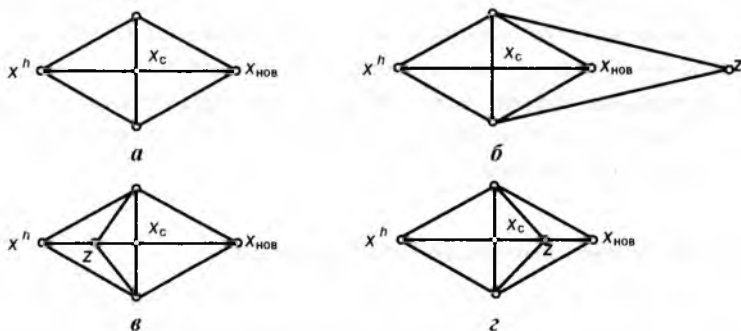
$$x = x^h + \lambda(x_c - x^h),$$

або

$$x = x^h + (1 + \theta)(x_c - x^h). \quad (7.9)$$

Три значення параметра  $\theta$ , використовувані при нормальному відображенні, стисненні та розтягуванні, позначаються відповідно через  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$ .

При  $\theta = 1$  має місце нормальне відображення симплекса, оскільки точка  $x_{\text{нов}}$  розташовується на відстані  $\|x_c - x^h\|$  від точки  $x_c$ . Якщо  $-1 < \theta < 1$ , то спостерігається стиснуте відображення, або *стиснення* симплекса, тоді як вибір  $\theta > 1$  забезпечує розтягнуте відображення, або *розтягування* сим-



**Рис. 7.5.** Розтягування і стиснення (деформація) симплекса: *a* – нормальне відображення; *b* – розтягування; *v, z* – стиснення відповідно при  $\theta = -\beta < 0$  і  $\theta = \beta > 0$

плекса. Вибір того або іншого способу відображення (деформації) симплекса здійснюється за правилами:

а) якщо  $f^l < f(x_{\text{нов}}) < f^g$ , то виконується нормальне відображення,  $\theta = \alpha = 1$ ;

б) за умови  $f(x_{\text{нов}}) < f^l$  маємо розтягування,  $\theta = \gamma > 1$ ;

в) при  $f(x_{\text{нов}}) > f^h$  виконується стиснення із від'ємним значенням  $\theta$ ,  $\theta = -\beta < 0$ ;

г) якщо  $f^g < f(x_{\text{нов}}) < f^h$ , то одержуємо стиснення із додатним значенням  $\theta$ ,  $\theta = \beta > 0$ .

На рис. 7.5 наведено можливі варіанти відображення. Реалізація методу починається з побудови вихідного симплекса і визначення точок  $x^h$ ,  $x^g$ ,  $x^l$  і  $x_c$ . Після нормального відображення здійснюється порівняння значень цільової функції у вершинах відображеного симплекса. Далі вибирається одна з операцій – нормальне відображення, розтягування або стиснення відповідно до правил а) – г). Вершину симплекса, що одержуємо внаслідок такої операції, позначимо  $z$  (рис. 7.5). Ітерації продовжуються, поки зміни значень цільової функції у вершинах симплекса не стануть незначними (рис. 7.6). Рекомендуються значення параметрів  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0,5$  і  $\gamma = 2$ .

Результати окремих експериментів показують, що метод має достатню ефективність і високу надійність за наявності випадкових збурень або помилок при визначенні значень цільової функції, а також добре адаптується до яружних функцій.

### 7.1.6. Метод випадкового пошуку

Поряд з вищеописаними регулярними методами мінімізації функцій кількох змінних існує велика група методів пошуку мінімуму, об'єднаних під назвою методів випадкового пошуку. Ці методи, на відміну від раніше розглянутих, характеризуються навмисним уведенням елемента випадку

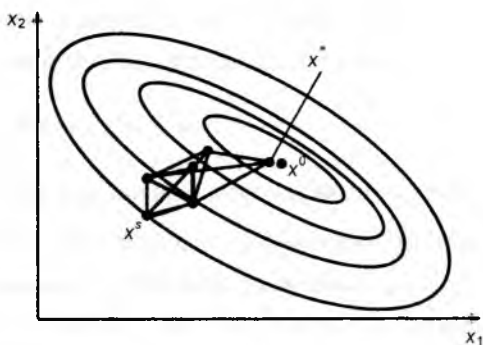


Рис. 7.6. Траєкторія спуску за методом деформованого багатогранника

в алгоритм пошуку. Багато варіантів методу випадкового пошуку зводяться до побудови послідовності  $\{x^k\}$  за правилом:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k \xi, \quad k=0,1, \dots, \quad (7.10)$$

де  $\alpha_k$  – деяка додатна величина;  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$  – реалізація  $n$ -вимірної випадкової величини  $\xi$  з відомим законом розподілу.

Наприклад, координатами  $\xi^i$  випадкового вектора  $\xi$  можуть бути незалежні випадкові величини, розподілені рівномірно на відрізку  $[-1, 1]$ . Отже, метод випадкового пошуку мінімуму функції  $n$  змінних передбачає наявність датчика (або генератора) псевдовипадкових чисел, звертаючись до якого можна одержати реалізацію  $n$ -вимірного випадкового вектора  $\xi$  з заданим законом розподілу.

Наведемо кілька варіантів методу випадкового пошуку мінімуму функції  $f(x)$  на множині  $X \subseteq R^n$ , припускаючи, що  $k$ -те наближення  $x^k \in X$  ( $k \geq 0$ ) уже відоме. В окремому випадку  $x^k$  – це стартова точка  $x^s$ .

**Алгоритм із поверненням при невдалому кроці.** Суть цього алгоритму така. За допомогою датчика випадкового вектора генерують деяку його реалізацію  $\xi$  з компонентами, розподіленими за рівномірним законом, та у просторі  $R^n$  визначають точку  $y_k = x^k + \alpha \xi$ ,  $\alpha = \text{const} > 0$ . Якщо  $f(y_k) < f(x^k)$ , то зроблений крок вважається вдалим, і в цьому випадку  $x^{k+1} = y_k$ . За умови  $f(y_k) \geq f(x^k)$ , крок вважається невдалим і  $x^{k+1} = x^k$ .

Якщо виявиться, що  $x^k = x^{k+1} = \dots = x^{k+N}$  для досить великих  $N$  (де  $N$  – кількість ітерцій), то точка  $x^k$  може бути прийнята як наближення шуканої точки мінімуму.

Приклад траєкторії спуску при реалізації цього алгоритму показано на рис. 7.7.

**Алгоритм найкращої проби.** Беруться які-небудь  $r$  реалізацій  $\xi_1, \dots, \xi_r$  випадкового вектора  $\xi$ , розподіленого за рівномірним законом, і обчислюються значення функції  $f(x)$  у точ-

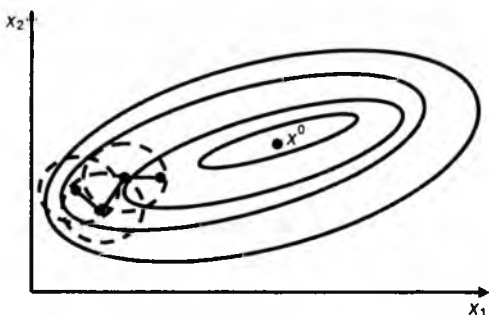


Рис. 7.7. Метод випадкового пошуку

ках  $x = x^k + \alpha \xi_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ . Потім покладаємо  $x^{k+1} = x^k + \alpha \xi_{i_0}$ , де індекс  $i_0$  визначається умовою  $f(x^k + \alpha \xi_{i_0}) = \min_i f(x^k + \alpha \xi_i)$ ,  $i = \overline{1, r}$ .

За  $x^*$  приймається точка, для якої при великих  $N$  не знайдена точка з кращим значенням функції. Зазвичай  $N \geq 7$ . Величини  $r > 0$ , що задає кількість пробних кроків, і  $\alpha = \text{const} > 0$ , що визначає величину кроку в напрямку  $\xi_i$ , є параметрами алгоритму.

**Алгоритм статистичного градієнта.** Для  $r$  реалізацій  $x^{k+1}$  випадкового вектора  $\xi$  обчислюються різниці  $\Delta f_{ki} = f(x^k + \gamma \xi_i) - f(x^k)$ . Потім визначають  $p_k = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^r \xi_i \Delta f_{ki}$  і нову точку траєкторії спуску  $x^{k+1} = x_k + \alpha p_k$ .

Величини  $r > 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$  є параметрами алгоритму. Вектор  $p_k$  називають статистичним градієнтом. Якщо  $X \equiv R^n$ ,  $s = n$ , а вектори  $\xi_i$  є не випадковими і збігаються з відповідними одиничними векторами  $e_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то описаний алгоритм перетворюється в різницевий аналог градієнтного методу.

У вищеописаних методах випадкового пошуку передбачається, що закон розподілу випадкового вектора  $\xi$  є рівномірно незмінним на всіх ітераціях. Такий пошук називають *випадковим пошуком без навчання*. За допомогою алгоритмів випадкового пошуку без навчання неможливо аналізувати результати попередніх ітерацій і виділяти напрямки, більш перспективні відносно спадання функції, що мінімізується. Такі алгоритми збігаються повільно.

Зазначений метод буде більш ефективним, якщо на кожній ітерації враховувати накопичену інформацію про пошук мінімуму на попередніх ітераціях і змінювати ймовірнісні властивості пошуку так, щоб напрямки  $\xi$ , більш перспективні відносно спадання функції, ставали більш імовірними. Інакше кажучи, бажано мати алгоритми випадкового пошуку, що мають здатність до самонавчання і самовдосконалення в процесі пошуку мінімуму залежно від конкретних особливостей функції, що мінімізується. Такий пошук називають *випадковим пошуком із навчанням*. Навчання алгоритму здійснюють за допомогою цілеспрямованої зміни закону розподілу випадкового вектора  $\xi$  залежно від номера ітерації і результатів попередніх ітерацій, тобто, щоб перспективні напрямки, за якими функція спа-

дає, стали більш імовірними, а інші напрямки – менш імовірними. Таким чином, на різних етапах методу випадкового пошуку з навчанням доводиться мати справу з реалізаціями випадкових векторів  $\xi$  із різними законами розподілу. Враховуючи ці обставини, ітераційний процес (7.10) має вигляд

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k \xi_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7.11)$$

Спочатку закон розподілу випадкового вектора  $\xi = \xi_0$  вибирають з урахуванням наявної апіорної інформації про функцію, що мінімізується. Якщо така інформація відсутня, то пошук звичайно починають із випадкового вектора  $\xi_0 = (\xi_0^1, \dots, \xi_0^n)$ , компоненти  $\xi_0^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , якого є незалежними випадковими величинами, рівномірно розподіленими на відрізьку  $[-1, 1]$ .

Для навчання алгоритму в процесі пошуку застосовують сім'ю випадкових векторів  $\xi = \xi(w)$ , що залежать від параметрів  $w = (w^1, \dots, w^n)$ , і при переході від  $k$ -ї до  $(k+1)$ -ї ітерації значення параметрів  $w_k$  замінюють новими  $w_{k+1}$  з урахуванням результатів попереднього пошуку.

Розглянемо два варіанти методу випадкового пошуку з навчанням для мінімізації функції  $f(x)$ .

**Алгоритм покоординатного навчання.** Нехай є сім'я випадкових векторів  $\xi = \xi(w) = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ , кожна координата  $\xi^i$  яких приймає два значення:  $\xi^i = 1$  з імовірністю  $p^i$  і  $\xi^i = -1$  з імовірністю  $1 - p^i$ , де імовірності  $p^i$  залежать від параметра  $w^i$ :

$$p^i = \begin{cases} 0, & w^i < -1, \\ \frac{1}{2}(1 + w^i), & |w^i| \leq 1, \\ 1, & w^i > 1, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (7.12)$$

Нехай початкове наближення  $x^0$  вже задано. Тоді для визначення наступного  $x^1$  у формулі (7.11) при  $k=0$  скористаємося реалізацією випадкового вектора  $\xi_0 = \xi(w_0)$ , що відповідає значенню параметрів  $w = w_0 = (0, 0, \dots, 0)$ . Наближення  $x^2$  визначається за формулою (7.11) при  $k=1$  за допомогою випадкового вектора  $\xi_1 = \xi(w_0)$ . Нехай відомі наближення

$x^s, x^1, \dots, x^k$  і значення параметрів  $w_{k-1} = (w_{k-1}^1, \dots, w_{k-1}^n)$  при деякому  $k \geq 1$ .

Тоді вважаємо, що

$$w_k^i = \beta w_{k-1}^i - \delta \operatorname{sgn} \left[ (f(x^{k-1}) - f(x^{k-2})) (x_{k-1}^i - x_{k-2}^i) \right] \quad (7.13)$$

при  $i = \overline{1, n}, k = 2, 3, \dots$

де  $\beta, \delta$  – параметри відповідно забування та інтенсивності навчання  $\beta \geq 0; \delta \geq 0; \beta + \delta > 0$ , а функція  $\operatorname{sgn}[z]$  має значення:

$$\operatorname{sgn}[z] = \begin{cases} -1, & z < 0, \\ 0, & z = 0, \\ 1, & z > 0. \end{cases}$$

При визначенні наступного наближення  $x^{k+1}$  у формулі (7.11) беремо реалізацію випадкового вектора  $\xi_k = \xi(w_k), w_k = (w_k^1, \dots, w_k^n)$ .

З формул (7.12), (7.13) видно, якщо при переході від точки  $x^{k-2}$  до  $x^{k-1}$  значення функції зменшується, то ймовірність вибору напрямку  $x^{k-1} - x^{k-2}$  на наступному кроці збільшується. І навпаки, якщо при переході від  $x^{k-2}$  до  $x^{k-1}$  значення функції збільшилося, то ймовірність вибору напрямку  $x^{k-1} - x^{k-2}$  на наступному кроці зменшується. Отже, формула (7.13) здійснює навчання алгоритму. Величина  $\delta \geq 0$  у (7.13) регулює швидкість навчання: чим більше  $\delta > 0$ , тим швидше навчається алгоритм; при  $\delta = 0$ , як видно, навчання немає. У формулах (7.13)  $\beta \geq 0$  регулює вплив попередніх значень параметрів на навчання алгоритму. При  $\beta = 0$  алгоритм забуває попередні значення  $w_{k-1}$ . Для усунення можливого надмірного “детермінування” алгоритму і зберігання його здатності до досить швидкого навчання на параметри  $w_k^i$  накладаються обмеження  $|w_k^i| \leq c_i$ , і при порушенні цих обмежень  $w_k^i$  замінюється найближчим із чисел  $c_i$  і  $-c_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Величини  $\beta, \delta, c_i$  є параметрами алгоритму.

Замість формул (7.13), за допомогою яких здійснюється навчання алгоритму, часто користуються іншими формулами:

$$w_k^i = \beta w_{k-1}^i - \delta (f(x^{k-1}) - f(x^{k-2})) (x_{k-1}^i - x_{k-2}^i) \quad (7.14)$$

при  $i = \overline{1, n}, k = 2, 3, \dots$

Описаний алгоритм покоординатного навчання має недолік, який полягає у тому, що пошук і навчання відбуваються лише за одним з  $2^n$  напрямків  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ , де  $\xi^i = 1$  або  $\xi^i = -1$ . Відсутність проміжних напрямків робить покоординатне навчання немобільним в областях із напрямками спуску, що змінюються повільно. Цього недоліку не має наступний алгоритм.

**Алгоритм неперервного самонавчання.** Нехай є сім'я випадкових векторів

$$\xi = \xi(w) = \frac{\eta + w}{|\eta + w|}, \quad (7.15)$$

де  $w = (w^1, \dots, w^n)$  – параметри навчання;  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$  – випадковий вектор, координати  $\eta^i$  якого є незалежними випадковими величинами, розподілені рівномірно на відріжку  $[-1, 1]$ .

Пошук починається з розгляду випадкових векторів  $\xi_0 = \xi(w_0)$ ,  $\xi_1 = \xi(w_1)$ , реалізації яких використовуються при визначенні наближень  $x^0, x^1$  за формулами (7.11). Навчання алгоритму при  $k \geq 2$  виконують за допомогою формул (7.13) або (7.14). При великих значеннях  $|w_k|$  вплив випадкової величини  $\eta$  зменшується, і напрямок  $\xi_k = \xi(w_k)$  стає більш детермінованим і близьким до напрямку  $w_k$ . Для уникнення зайвої детермінованості методу на параметри  $w_k = (w_k^1, \dots, w_k^n)$  накладаються обмеження  $|w_k| \leq c = \text{const}$ , а при порушенні цих обмежень  $w_k$  замінюються  $\frac{w_k}{|w_k|} c$ .

З наведених алгоритмів випадкового пошуку з навчанням видно, що процес навчання в ході пошуку супроводжується зменшенням чинника випадковості та збільшенням ступеня детермінованості алгоритму пошуку мінімуму. При цьому пошук спрямовується переважно в напрямку спадання функції. Водночас наявність випадкового чинника у виборі напрямку дає можливість алгоритму перенавчатися, якщо властивості функції в районі пошуку змінилися або попереднє навчання було неточним. Випадковий пошук із навчанням займає проміжне положення між випадковим пошуком без навчання і детермінованими методами пошуку мінімуму. У детермінованих методах також можна знайти в тому або іншому вигляді елементи самонавчання алгоритму, однак наявність випадкового чинника в алгоритмі робить метод випадкового пошуку більш гнучким.

## 7.2. Градієнтні методи пошуку (методи першого порядку)

У попередньому розділі розглядалися методи, що дають змогу одержати розв'язок задачі на основі використання інформації тільки про значення цільової функції. Важливість прямих методів безсумнівна, оскільки у багатьох інженерних задачах інформація про значення цільової функції є єдино надійною інформацією, якою володіє дослідник. З іншого боку, при використанні навіть найефективніших прямих методів для одержання розв'язку іноді потрібна велика кількість обчислень значень функції. Цим пояснюється необхідність розгляду методів, заснованих на використанні градієнта цільової функції.

Усі градієнтні методи, так само як і прямі, засновано на ітераційній процедурі побудови траєкторії спуску, реалізованої відповідно до формули

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k h(x^k), \quad (7.16)$$

де  $x^k$  – поточне наближення до оптимального розв'язку  $x^0$ ;  $\alpha^k$  – параметр, що характеризує величину кроку;  $h(x^k) = h^k$  – напрямок пошуку в  $n$ -вимірному просторі керованих змінних  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Спосіб визначення  $h(x)$  і  $\alpha$  на кожній ітерації пов'язаний з особливостями застосовуваного методу. Напрямок  $h(x)$  у методах першого порядку формується на основі градієнта цільової функції, тобто вектора, координати якого є частинними похідними  $f(x)$  за змінними  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . При цьому використовується властивість градієнта вказувати в кожній точці напрямок найбільшого зростання функції. Крім того, вектор градієнта спрямований ортогонально дотичної до ліній рівного рівня функції. Вектор, протилежний градієнту (антиградієнт), задає напрямком найбільшого локального спадання функції. Вибір  $\alpha^k$  звичайно здійснюється шляхом розв'язування задачі мінімізації  $f(x)$  у напрямку  $h(x^k)$ .

### 7.2.1. Метод градієнта (метод Коші)

Припустимо, що в деякій точці  $x^k$  простору керованих змінних потрібно визначити напрямком найшвидшого локального спуску, тобто найбільшого локального зменшення цільової функції. Для цього розкладемо цільову функцію в околі точки  $x^k$  у ряд Тейлора без урахування членів другого порядку і вище:

$$f(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T \Delta x + \dots \quad (7.17)$$



Неважко помітити, що локальне зменшення цільової функції визначається другим доданком, оскільки значення  $f(x^k)$  фіксоване. Найбільше зменшення  $f$  асоціюється з вибором такого напрямку в (7.16), якому відповідає найбільша *від'ємна* величина скалярного добутку, що фігурує як другий доданок розкладання. З властивості градієнта вказувати напрямком найбільшого зростання функції впливає, що зазначений вибір забезпечується при

$$h(x^k) = -\nabla f(x^k), \quad (7.18)$$

$$\text{де } \nabla f(x) = \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отримане співвідношення складає основу градієнтного методу, що має кілька різновидів.

**Градієнтний метод із постійним кроком.** Обчислювальна схема методу така. Спочатку задається стартова точка  $x^s$  і постійний додатний параметр  $\alpha$ , що визначає величину кроку методу і точність одержуваного розв'язку  $x^*$ . Далі за формулою

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k) \quad (7.19)$$

будується послідовність наближень до розв'язку задачі оптимізації (траєкторії спуску). В околі розв'язку виникає зациклювання, при якому послідовні прирости функції цілі змінюють свої знаки. Після виникнення зациклювання роботу методу зупиняють. За наближений розв'язок  $x^*$  можна взяти найкраще (рекордне) із побудованих наближень.

Перевагою схеми з постійним кроком є простота її реалізації. Недоліком – необхідність вибору значення параметра  $\alpha$ . Досить мала величина кроку  $\alpha$  забезпечить спадання функції цілі на кожній ітерації, але може призвести і до неприйнятно великої кількості самих ітерацій, необхідних для досягнення точки  $x^*$ . Занадто великий параметр  $\alpha$  зумовить недостатньо точний розв'язок, оскільки послідовні наближення  $x^k$  будуть знаходитися у великому околі точки екстремуму.

Модифікація методу з постійним кроком, яка називається *градієнтним методом із дробленням кроку*, дає змогу усунути зазначену трудність.

**Градієнтний метод із дробленням кроку.** Початок реалізації методу збігається зі схемою з постійним кроком. Початкове значення  $\alpha$  може бути досить великим. Під час виникнення зациклювання  $\alpha$  потрібно зменшити

в заданому співвідношенні, наприклад, удвічі (тобто провести дроблення кроку). Далі метод продовжує свою роботу до наступного зациклювання, після чого знову виконується дроблення кроку.

Припиняють роботу тоді, коли величина кроку після чергового дроблення стане меншою від заданого  $\nu$ . За наближений розв'язок  $x^*$ , як і в методі з постійним кроком, потрібно прийняти рекордне з останніх побудованих наближень. Точність отриманого розв'язку визначається величиною кроку після останнього дроблення і не перевищує  $\nu$ . Приклад траєкторії спуску, обчисленої градієнтним методом із дробленням кроку, показано на рис. 7.8.

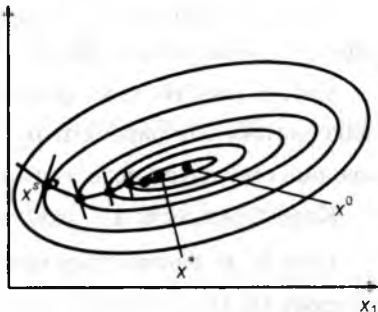


Рис. 7.8. Метод градієнта

Проте ефективніше вибирати значення  $\alpha$  на кожній ітерації градієнтного методу. Цю стратегію реалізує метод найшвидшого спуску.

**Метод найшвидшого спуску** (градієнтний метод з оптимізацією кроку). В основі методу лежить ітераційний процес

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k), \quad (7.20)$$

при цьому відмінність від формули (7.19) полягає в тому, що значення кроку  $\alpha^k$  обчислюється на кожній ітерації шляхом розв'язування задачі мінімізації  $f(x^{k+1})$  уздовж напрямку  $\nabla f(x^k)$  за допомогою одного з наведених у розд. 6 методів одновимірного пошуку. Розглянутий градієнтний метод має назву методу найшвидшого спуску, або *методу Коші*, оскільки Коші першим використав аналогічний алгоритм для розв'язування систем лінійних рівнянь.

#### Алгоритм методу найшвидшого спуску.

Крок 1. Задати  $M$  – максимальну (допустиму) кількість ітерацій,  $n$  – кількість змінних,  $x$  – початкове наближення до  $x^*$ ,  $\nu_1$  – параметр збіжності алгоритму,  $\nu_2$  – параметр збіжності для пошуку вздовж прямої.

Крок 2. Покласти  $k=0$ .

Крок 3. Обчислити компоненти  $\nabla f(x^k)$ .

Крок 4. Чи виконується нерівність  $\|\nabla f(x^k)\| \leq \nu_1$ ? Так – перейти до кроку 10. Ні – перейти до наступного кроку.

Крок 5. Чи виконується рівність  $k > M$ ? Так – перейти до кроку 10. Ні – перейти до наступного кроку.

Крок 6. Знайти таке значення  $\alpha^k$ , при якому  $f(x^k + \alpha^k h(x^k)) \rightarrow \min$  (використовуючи параметр  $v_2$ ). При цьому реалізується звернення до відповідної процедури розв’язування задачі оптимізації функції однієї змінної.

Крок 7. Покласти  $x^{k+1} = x^k + \alpha^k h(x^k)$ .

Крок 8. Чи виконується нерівність  $\|x^{k+1} - x^k\| / \|x^k\| \leq v_1$ ? Так – перейти до кроку 10. Ні – перейти до кроку 9.

Крок 9. Покласти  $k = k + 1$ . Перейти до кроку 3.

Крок 10. Припинити роботу. Вивести на друк  $x^*$ .

Пошук уздовж прямої відповідно до формули (7.20) забезпечує більш високу надійність методу Коші порівняно з найпростішим градієнтним методом, проте швидкість його збіжності при розв’язуванні деяких практичних задач залишається неприпустимо низькою. Це цілком зрозуміло, оскільки природи змінних безпосередньо залежать від градієнта, що наближається до нуля в околі точки мінімуму. Крім того, відсутній механізм прискорення руху до точки мінімуму на останніх ітераціях. Одна з головних переваг методу Коші пов’язана з його стійкістю. Метод має важливу властивість, яка полягає в тому, що при досить малому кроці ітерації забезпечується виконання нерівності

$$f(x^{k+1}) < f(x^k). \quad (7.21)$$

З урахуванням цієї властивості зауважимо, що метод Коші, як правило, дає змогу зменшити значення цільової функції при русі з точок, розташованих на значних відстанях від точки мінімуму, і тому часто використовується при реалізації градієнтних методів як початкова процедура.

### 7.2.2. Евристичні схеми градієнтного спуску

Однією з особливостей градієнтних методів спуску є погана збіжність при пошуку екстремумів функцій із складною топографічною структурою. Характерною рисою таких функцій є істотна відмінність (на один, два порядки і більше) абсолютних значень частинних похідних за різними змінними, тобто

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| \ll \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|. \quad (7.22)$$

У зв'язку з цим за одними змінними ( із відносно великим значенням  $\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|$  ) спадання функції відбувається швидко, а за іншими ( із малими  $\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|$  ) – повільно. Геометрично це нагадує яругу із “схилами” у напрямку змінних, що змінюються швидко і “дном” – уздовж змінних, що змінюються повільно.

Ця особливість призводить до ефекту яруг при розв'язуванні задач оптимізації, коли описані вище градієнтні методи збігаються погано. Для розв'язування таких задач використовуються різні евристичні модифікації градієнтних методів.

**Метод “сильних” і “слабких” змінних.** 1. Нехай у точці  $x^k$  обчислені всі частинні похідні  $\frac{\partial f}{\partial x_i^k}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Задамо мале число  $\epsilon > 0$  і покладемо

$\frac{\partial f}{\partial x_i^k} = 0$ , якщо  $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \leq \epsilon$ . Отже, спуск робиться лише за тими змінними, у

напрямку яких похідна функції досить велика. Це дає змогу швидко спуститися на “дно” яруги.

2. Задамо деяке велике число  $\delta \gg 1$  і застосуємо градієнтний метод,

вважаючи  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ , якщо  $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \geq \delta$ . У цьому разі переміщення відбувається

вздовж “дна” яруги.

Комбінуючи процедури 1 і 2, можна побудувати такий алгоритм спуску. За “сильними” змінними відповідно до алгоритму 1 здійснюється спуск доти, поки не відбудеться зациклювання, тобто коли з кожною наступною ітерацією можна знайти точку, у якій значення функції менше значення, знайденого на попередній ітерації. Після цього здійснюється спуск по множині “слабких” змінних. Зазначені обчислювальні процедури потрібно циклічно повторювати доти, поки не відбудеться зациклювання по обох групах (“сильних” і “слабких”) змінних. Рекордна точка приймається за чисельний екстремум  $x^*$ .

**Метод Гельфанда.** Нехай  $x^s$  і  $\bar{x}^s$  – дві довільні близькі точки. З точки  $x^s$  робимо звичайний градієнтний спуск і після кількох ітерацій з малим кроком  $\alpha$  потрапимо у точку  $x^1$ . Те ж саме робимо для точки  $\bar{x}^s$ , одер-

жуючи точку  $\bar{x}^1$ . Дві точки  $x^1$ ,  $\bar{x}^1$  лежать в околі “дна” яруги. З'єднуючи їх прямою, робимо “великий крок”  $\alpha^1$  в отриманому напрямку, переміщуючись “уздовж” яруги (крок  $\alpha^1$  називають яружним кроком). Так одержуємо точку  $x^2$ . В її околі вибираємо точку  $\bar{x}^2$  і повторюємо процедуру.

Оскільки описані схеми носять евристичний характер, їх збіжність строго не встановлено. Проте практична апробація підтверджує їх працездатність і більш високу обчислювальну ефективність порівняно з класичними градієнтними методами. Крім цього відзначимо, що на яружних функціях ефективним є прямий метод деформованого багатогранника (див. розд. 7.1.5).

### 7.2.3. Чисельна апроксимація градієнтів

При розгляді градієнтних методів передбачалося, що компоненти градієнта  $\nabla f(x)$  можна обчислити з достатнім ступенем точності. Простіше за все це можна зробити на основі аналітичних виразів для частинних похідних за всіма змінними  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Проте це незручно з деяких причин, а саме: потрібне виконання аналітичних, іноді громіздких обчислень для одержання частинних похідних на етапі підготовки задачі до розв'язування; обчислювальний алгоритм стає не універсальним, оскільки в кожному випадку потрібно створювати процедуру обчислення значень частинних похідних.

Крім того, у багатьох практичних задачах одержання аналітичного виразу для градієнта виявляється дуже складним. Як приклад можна розглянути випадок, коли значення  $f(x)$  визначаються внаслідок імітаційного експерименту. Альтернативою є використання чисельних методів визначення оцінок компонент градієнта. Найпростішим варіантом такої схеми може служити апроксимація за допомогою *кінцевої різниці вперед*:

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{x=x^k} = \frac{f(x_j^k + \Delta x_i^k) - f(x^k)}{\Delta x_i}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad (7.23)$$

де  $x^k$  – точка, у якій обчислюється похідна;  $\Delta x_i^k$  – мала варіація змінної  $x_i^k$ .

Така апроксимація безпосередньо ґрунтується на визначенні частинної похідної і за досить малих значень  $\Delta x_i$  дає дуже точні оцінки. Вибір значень  $\Delta x_i$  здійснюється залежно від виду  $f(x)$ , координат точки  $x^k$  і точності

(довжини машинного слова) комп'ютера. Зауважимо, що на границі при наближенні  $\Delta x_j$  до нуля апроксимація стає точною, однак це не може бути підставою до вибору  $\Delta x_j$ . Величину  $\Delta x_j$  слід вибирати досить великою, щоб чисельник співвідношення (7.23) був відмінним від нуля. Якщо ж  $\Delta x_j$  виявляється менше, ніж мінімальна точність розрахунків на комп'ютері, то чисельник перетворюється на нуль. Крім того, не варто вибирати величину  $\Delta x_j$  занадто великою, оскільки в цьому разі розривається зв'язок із граничним переходом, що лежить в основі поняття похідної. Іншими словами, при великих  $\Delta x_j$  одержуємо точні розрахунки на комп'ютері, але погані оцінки похідних.

За рахунок додаткового обчислення значень функції можна підвищити точність апроксимації шляхом використання *центральної кінцевої різниці*

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|_{x=x^k} = \frac{f(x_j^k + \Delta x_j^k) - f(x_j^k - \Delta x_j^k)}{2\Delta x_j}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad j \neq i. \quad (7.24)$$

Для одного й того ж комп'ютера при заданих  $f(x)$ ,  $x$  і  $\Delta x$  така апроксимація більш точна, однак при цьому потрібне додаткове обчислення значення функції.

## 7.3. ПОШУК ЕКСТРЕМУМУ МЕТОДАМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

### 7.3.1. Метод Ньютона

У вищерозглянутому методі Коші застосовується найефективніша локальна стратегія пошуку з використанням градієнта. Тут під локальною стратегією пошуку розуміється можливість за допомогою градієнта визначити напрямок до екстремуму в деякому малому околі поточного наближення до розв'язку  $x^k$ . На відміну від локальної, глобальна стратегія дає змогу в змінній точці зазначити напрямок до екстремуму в досить великому її околі. Рух у напрямку, протилежному градієнту, приводить у точку мінімуму лише в тому випадку, коли лінії рівного рівня функції  $f$  являють собою околи. Отже, напрямок, протилежний градієнту, в загальному випадку не може бути *глобальним* напрямком пошуку точок оптимуму нелінійних функцій. Метод Коші заснований на послідовній *лінійній* апроксимації цільової функції і вимагає обчислення значень функції та її першої похідної на кожній ітерації. Для того щоб побудувати більш ефективну за

швидкістю збіжності стратегію пошуку, варто додатково залучити інформацію відносно других похідних цільової функції, які дають змогу реалізувати *нелінійну (квадратичну)* апроксимацію цільової функції. З цією метою розкладемо цільову функцію в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla^2 f(x^k) \Delta x + O(\Delta x^3).$$

Відкидаючи всі члени розкладання третього порядку і вище, одержимо квадратичну апроксимацію  $f(x)$ :

$$\bar{f}(x; x^k) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T \Delta x^k + \frac{1}{2} \Delta x^{(k)T} \nabla^2 f(x^k) \Delta x^k, \quad (7.25)$$

де  $\bar{f}(x; x^k)$  – апроксимуюча функція змінної  $x$ , побудована в точці  $x^k$ ;  $f(x^k)$  – значення цільової функції в точці  $x^k$ ;  $\nabla f(x^k)$  – градієнт цільової функції  $f(x)$ , обчислений у точці  $x^k$ , а  $\nabla^2 f(x^k)$  – матриця Гессе, складена з других частинних похідних  $f(x)$  за змінними, також обчислених у точці  $x^k$ . Згідно з квадратичною апроксимацією функції  $f(x)$  сформуємо послідовність ітерацій таким чином, щоб у знову одержуваній точці  $x^{k+1}$  градієнт апроксимуючої функції дорівнював нулеві. Для цього здиференціюємо (7.25) по  $\Delta x$  з урахуванням того, що всі інші компоненти є константами. Маємо

$$\nabla \bar{f}(x; x^k) = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) \Delta x^k = 0,$$

звідки

$$\Delta x^k = -\nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k).$$

Загальна формула побудови траєкторії спуску (5.15) для методу Ньютона, заснована на послідовності застосувань схеми квадратичної апроксимації, набуває вигляду

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k). \quad (7.26)$$

Порівняння формул (5.15) і (7.26) показує, що в останній відсутній крок спуску  $\alpha^k$ . Це обумовлено тим, що  $\Delta x^k$  є вектором, модуль і напрямок якого визначені з умови досягнення локального екстремуму апроксимуючої

функції (7.25). Отже, у методі Ньютона неявно реалізована процедура оптимізації величини кроку  $\alpha^k$ .

Розглянемо приклад розв'язування оптимізаційної задачі методом Ньютона.

**Приклад 7.3.** Розглянемо квадратичну цільову функцію з прикладу 7.1.

$$f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2,$$

звідки

$$\nabla f(x) = [16x_1 + 4x_2, 10x_2 + 4x_1]^T, \quad \nabla^2 f(x) = H = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

При  $x^0 = [10, 10]^T$  із формули (7.26) одержуємо

$$x^1 = [10, 10]^T - \left( \frac{1}{144} \right) \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix} [200, 140]^T$$

і, отже,

$$x^1 = [10, 10]^T - \left( \frac{1}{144} \right) [1440, 1440]^T = [0, 0]^T,$$

що збігається з точним розв'язком.

Отже, задачу мінімізації квадратичної функції розв'язують за допомогою однієї ітерації методом Ньютона (при будь-якій початковій точці). Для функцій, відмінних від квадратичних, це твердження не виконується.

Зауважимо, що хоч у викладених схемах методу Ньютона фігурує обернена до  $\nabla^2 f(x^k)$  матриця  $(\nabla^2 f(x^k))^{-1}$ , на практиці немає потреби її обчислювати. Напрямок і величину кроку спуску  $\Delta x^k = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$  можна знайти як розв'язок системи лінійних рівнянь вигляду  $\nabla^2 f(x^k) \Delta x^k = -\nabla f(x^k)$  одним із відомих методів.

Зупинимось на аналізі *збіжності методу Ньютона*. При виконанні досить загальних обмежень, що накладаються на  $f(x)$ , зазначений метод має квадратичну швидкість збіжності, тобто виконується нерівність (див. (5.19))

$$\|x^{k+1} - x^0\| \leq C \cdot \|x^k - x^0\|^2, \quad (7.27)$$

де стала  $C$  пов'язана з обумовленістю матриці Гессе  $\nabla^2 f$ . Звідси випливає, що метод Ньютона збігається, коли вибір  $x^0$  здійснюється відповідно до умови



$$\|x^s - x^0\| < \frac{1}{C}. \quad (7.28)$$

Квадратична швидкість збіжності пояснюється тим, що метод Ньютона заснований на квадратичній апроксимації. При мінімізації довільних неквадратичних функцій може виникнути ситуація, коли при виборі початкової точки  $x^s$ , що задовольняє нерівність

$$\|x^s - x^0\| > \frac{1}{C},$$

застосування методу не приведе до одержання розв'язку. Це пов'язано з тим, що метод Ньютона збігається в досить малому околі точки екстремуму. При невдалому виборі початкової точки метод не має властивості спадання значень цільової функції від ітерації до ітерації. Щоб проаналізувати цю ситуацію, припустимо, що поточне наближення до екстремуму  $\bar{x}$  не є стаціонарною точкою (тобто  $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ ). Знайдемо проекцію напрямку пошуку за методом Ньютона  $h(\bar{x}) = -[\nabla^2 f(\bar{x})]^{-1} \nabla f(\bar{x})$  на напрямок, що задається градієнтом у точці  $\bar{x}$ . За означенням, напрямок пошуку називається напрямком спуску, якщо має місце нерівність

$$\nabla f(\bar{x})^T h(\bar{x}) < 0. \quad (7.29)$$

Дійсно, оскільки градієнт  $\nabla f(\bar{x})$  вказує напрямок зростання цільової функції в точці  $\bar{x}$ , то вектору  $h(\bar{x})$ , що задає напрямок спадання (спуску) у точці  $\bar{x}$ , слід мати з  $\nabla f(\bar{x})$  великий кут, що перевищує  $\frac{\pi}{2}$ . А це означає, що скалярний добуток градієнта  $\nabla f(\bar{x})$  на вектор  $h(\bar{x})$  (7.29) має бути від'ємним.

Отже, з формули (7.26) випливає, що має виконуватися нерівність

$$-\nabla f(\bar{x})^T [\nabla^2 f(\bar{x})]^{-1} \nabla f(\bar{x}) < 0. \quad (7.30)$$

У випадку, коли матриця  $\nabla^2 f(\bar{x})$  додатно визначена, ця умова виконується, тобто напрямок пошуку за методом Ньютона виявляється напрямком спуску. Проте, якщо в деякій точці  $\nabla^2 f(\bar{x})$  від'ємно визначена, то цей напрямок є напрямком підйому, а у випадку невизначеності матриці Гессе однозначного висновку зробити не можна.

Перевагою методу Ньютона є більша швидкість збіжності порівняно з градієнтними методами (тобто одержання розв'язку за менше число ітерацій). Це пов'язано з тим, що квадратична функція локально точніше апроксимує функцію, що мінімізується, ніж лінійна, яка по суті є основою градієнтних методів.

Основні недоліки методу Ньютона полягають у тому, що він, по-перше, передбачає обчислення других похідних (це може бути пов'язане з істотними труднощами) і, по-друге, є дуже чутливий до вибору стартової точки, тобто може розбігатися, якщо цільова функція не є опуклою, а початкове наближення знаходиться досить далеко від точки мінімуму.

Прагнення перебороти або зменшити зазначені недоліки привело до створення модифікацій методу Ньютона. Деякі з них розглянуті нижче.

### 7.3.2. Модифікації методу Ньютона

**Метод Ньютона – Рафсона.** Як уже зазначалося, при пошуку екстремуму неквадратичних функцій метод Ньютона дуже чутливий до вибору стартової точки. Якщо точка  $x^s$  знаходиться на значній відстані від точки  $x^*$ , крок за методом Ньютона часто виявляється надмірно великим, що може призвести до відсутності збіжності. Метод можна досить просто модифікувати, щоб забезпечити його збіжність, тобто зменшення цільової функції від ітерації до ітерації. Послідовність ітерацій будується відповідно до формули

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k). \quad (7.31)$$

Вибір  $\alpha^k \leq 1$  здійснюється таким чином, щоб гарантувати виконання нерівності

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k). \quad (7.32)$$

Такий метод має назву *методу Ньютона – Рафсона*. Він реалізується в такий спосіб. Задається стартова точка  $x^s$  і при  $\alpha^s = 1$  за формулою (7.31) обчислюється значення  $x^1$ . Якщо  $f(x^s) > f(x^1)$ , то подальший спуск здійснюється за класичним методом Ньютона, тобто з  $\alpha^k = 1$  при всіх  $k$ . У протилежному разі  $\alpha^s$  зменшується і приймається, наприклад,  $\alpha^s = \frac{1}{2}$ . Для цього значення  $\alpha^s$  за формулою (7.31) обчислюється нове значення  $x^1$ . Процедура

дроблення  $\alpha^s$  продовжується, поки не буде виконуватись умова  $f(x^s) < f(x^1)$ . Після цього переходимо до наступної ітерації та в разі потреби процедура дроблення  $\alpha$  повторюється. Після виходу траєкторії спуску в околі екстремуму необхідність регулювання параметра  $\alpha$  відпадає і подальший спуск здійснюється при  $\alpha = 1$ , тобто за класичним методом Ньютона.

Існує альтернативний підхід до подолання розбіжності методу Ньютона при невдалому виборі  $x^s$ . Він заснований на комбінації методів Коші та Ньютона.

**Комбінація методів Коші та Ньютона.** Причина розбіжності методу Ньютона полягає у тому, що матриця Гессе других похідних функції, що мінімізується, не є додатно визначеною. У цьому випадку можна використовувати комбінацію методів Коші та Ньютона, у якій вдало поєднуються позитивні властивості обох методів.

Відмітимо, що градієнт показує напрямок найбільшого локального збільшення функції, а рух у напрямку, протилежному градієнту, з точки  $x^s$ , розташованої на значній відстані від точки мінімуму  $x^*$ , звичайно приводить до істотного зменшення цільової функції. Проте в околі точки мінімуму за швидкістю збіжності більш ефективним є метод Ньютона. Проста ідея об'єднання методів Коші і Ньютона була покладена в основу алгоритму, у якому напрямок пошуку визначається рівністю

$$\Delta x^k = -[H^k + \lambda^k E]^{-1} \nabla f(x^k), \quad (7.33)$$

а траєкторія спуску

$$x^{k+1} = x^k - [H^k + \lambda^k E]^{-1} \nabla f(x^k), \quad (7.34)$$

де  $H^k = \nabla^2 f(x)$  – матриця Гессе функції  $f(x)$ .

При цьому параметр  $\lambda$  дає змогу не тільки змінювати напрямок пошуку, але і регулювати довжину кроку. Символом  $E$  тут позначена одинична матриця, тобто матриця, всі елементи якої дорівнюють нулеві, за винятком діагональних елементів, які дорівнюють одиниці. На початковій стадії пошуку параметру  $\lambda^s$  надається велике значення (наприклад,  $10^4$ ), тому

$$[H^s + \lambda^s E]^{-1} = [\lambda^s E]^{-1} = \left( \frac{1}{\lambda^s} \right) E.$$

Таким чином, великим значенням  $\lambda^s$  відповідає напрямок пошуку  $\Delta x^s \rightarrow -\nabla f(x^s)$ . З формули (7.33) можна зробити висновок, що при зменшенні  $\lambda$  до нуля  $\Delta x$  змінюється від напрямку, протилежного градієнту, до напрямку, визначеного за методом Ньютона. Якщо після першого кроку отримана точка з меншим значенням цільової функції (тобто  $f(x^1) < f(x^s)$ ), варто вибрати  $\lambda^1 < \lambda^s$  і реалізувати ще один крок. У протилежному разі покласти  $\lambda^1 = \beta \lambda^s$ , де  $\beta > 1$  і знову реалізувати попередній крок. Нижче подані кроки алгоритму.

Крок 1. Задати  $x^s$  – початкове наближення до  $x^*$ ,  $M$  – максимальна (допустима) кількість ітерацій,  $\epsilon$  – параметр збіжності.

Крок 2. Покласти  $k=0$ ,  $\lambda^s = 10^4$ .

Крок 3. Обчислити компоненти  $\nabla f(x^k)$ .

Крок 4. Чи виконується умова  $\|\nabla f(x^k)\| < \epsilon$ ? Так – перейти до кроку 11.

Ні – перейти до наступного кроку.

Крок 5. Чи виконується нерівність  $k \geq M$ ? Так – перейти до кроку 11.

Ні – перейти до наступного кроку.

Крок 6. Обчислити  $\Delta x^k = -[H^k + \lambda^k E]^{-1} \nabla f(x^k)$ .

Крок 7. Покласти  $x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$ .

Крок 8. Чи виконується нерівність  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ ? Так – перейти до кроку 9. Ні – перейти до кроку 10.

Крок 9. Покласти  $\lambda^{k+1} = \frac{1}{2} \lambda^k$  та  $k = k + 1$ . Перейти до кроку 3.

Крок 10. Покласти  $\lambda^k = 2\lambda^k$ . Перейти до кроку 6.

Крок 11. Зупинити роботу.

Метод характеризується відносною простотою, зменшенням цільової функції при переході від ітерації до ітерації, високою швидкістю збіжності в околі точки мінімуму  $x^*$ , а також відсутністю процедури пошуку вздовж прямої. Головний недолік методу – необхідність обчислення  $H^k$  і розв'язування системи лінійних рівнянь, що відповідає (7.33). Цей метод широко використовується зокрема при розв'язуванні задач, де  $f(x)$  записується у вигляді суми квадратів, тобто  $f(x) = f_1^2(x) + f_2^2(x) + \dots + f_m^2(x)$ .

**Метод постійних напрямків** спрямований на зменшення обчислювальної складності методу Ньютона, пов'язаної з необхідністю обчислення і обер-

нення на кожній ітерації матриці других похідних  $[\nabla^2 f(x)]^{-1}$ . Ідея модифікації полягає у використанні не точних, а наближених значень матриці других похідних. Внаслідок цього зменшується трудомісткість методу, але погіршується збіжність.

Модифікація методу Ньютона, відома як *метод постійних напрямків*, передбачає такий алгоритм формування траєкторії спуску:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k (\nabla^2 f(x^s))^{-1} \nabla f(x^k), \quad \alpha_k > 0. \quad (7.35)$$

У цьому алгоритмі для побудови напрямку спуску щоразу використовується один раз обчислена і обернена в стартовій точці  $x^s$  матриця других похідних  $\nabla^2 f(x^s)$ . Якщо матриця  $\nabla^2 f(x^s)$  додатно визначена, то ітераційний процес (7.35) перетворюється в модифікацію градієнтного спуску. Це означає, що метод постійних напрямків збігається незалежно від початкового наближення  $x^s$  зі швидкістю геометричної прогресії.

#### Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте і поясніть задачу безумовної оптимізації функції кількох змінних.
2. Які методи відносяться до методів прямого пошуку (нульового порядку)?
3. У чому зміст пасивної стратегії пошуку екстремуму?
4. У чому полягає стратегія пошуку за зразком? У яких методах вона реалізована?
5. Які переваги симплекса перед іншими зразками?
6. Викладіть схеми методів багатогранника і деформованого багатогранника.
7. У чому полягають особливості методів випадкового пошуку?
8. Яка основна властивість градієнта використовується в методах оптимізації?
9. Викладіть загальну схему градієнтних методів.
10. У чому полягають особливості методів другого порядку?
11. Викладіть схему методу Ньютона.
12. Які недоліки методу Ньютона? Як можна їх перебороти, модифікуючи метод?

## Висновки

У другій частині даного посібника розглядаються основні властивості задач безумовної оптимізації і методи їх розв'язування. Розд. 5 містить опис загального термінологічного і методологічного базису розв'язування задач цього класу.

Основною ознакою, що визначає належність задачі оптимізації до класу безумовних, є відсутність обмежень на змінні. Це означає, що оптимальним розв'язком задачі є елемент простору  $R^n$ , у якому функція цілі досягає екстремального значення.

Оптимальний розв'язок задачі безумовної оптимізації може бути отриманий одним із двох способів:

*аналітичним*, для чого використовуються необхідні і достатні умови екстремуму;

*чисельним*, із застосуванням методів пошуку екстремуму.

Чисельні методи пошуку екстремуму використовують такі властивості задач оптимізації, як неперервність, унімодальність, опуклість функції цілі. Важливою ознакою, за якою класифікуються чисельні методи пошуку екстремуму, є диференційовність цільової функції. Залежно від можливості використання однієї або кількох похідних функції цілі розрізняють методи нульового, першого і другого порядку.

Якщо функція цілі задачі безумовної оптимізації не є опуклою, вона може виявитися багатоекстремальною (мультимодальною). Застосування методів безумовної оптимізації в цьому випадку приведе до одержання локального екстремуму. При цьому відповідь на питання, який із локальних екстремумів функції цілі буде досягнутий, визначається вибором початкового наближення до екстремуму, тобто стартової точки.

Важливий окремий випадок задач безумовної оптимізації – задачі оптимізації функцій однієї змінної. У цих задачах потрібно знайти точки екстремуму функції однієї змінної на всій числовій прямій. Формалізація задачі одновимірної оптимізації приводить до формулювання її у вигляді задачі визначення екстремуму унімодальної функції на відрізьку прямої. У розд. 6 наведено методологічні, алгоритмічні, обчислювальні процедури розв'язування задач оптимізації функцій однієї змінної. Ці задачі мають як самостійне значення, так і є інструментарієм при розв'язуванні задач оптимізації функцій багатьох змінних.

Відзначимо, що подані в другій частині методи не вичерпують усього різноманіття методів розв'язування задач безумовної оптимізації.

Ці методи досить глибоко досліджені та ретельно пророблені. У тій чи іншій формі вони є основою для створення методів розв'язування іншого класу задач – задач умовної оптимізації, які висвітлені у третій частині даної книги.

### **Список рекомендованої літератури**

1. **Моисеев Н. Н.** Методы оптимизации / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столярова. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
2. **Химмельблауд Д.** Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 536 с.
3. **Карманов В. Г.** Математическое программирование. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
4. **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
5. **Растрингин Л. А.** Системы экстремального управления. – М.: Наука, 1974. – 632 с.
6. **Реклейтис Г.** Оптимизация в технике: В 2 кн. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. – М.: Мир, 1986. – Кн. 1. – 351 с.; Кн. 2. – 320 с.

**Розділ 8. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ МАТЕМАТИЧНОГО  
ПРОГРАМУВАННЯ**

У даній частині посібника розглядаються методи пошуку екстремуму функцій за наявності обмежень на змінні. Математичне програмування є основою заключного етапу узагальненої процедури прийняття рішень, а саме – процедури вибору з можливої множини екстремального, тобто найкращого за якістю єдиного рішення (див. розд. 1). Ціль математичного програмування – синтез надійних і ефективних методів розв'язування відповідних математичних задач (моделей).

У даному розділі розглядаються різні класи умовних оптимізаційних задач.

**8.1. ЗАДАЧА УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ**

Використовуючи термінологію розд. 5, назвемо задачу вигляду

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in X} \quad (8.1)$$

задачею *умовної оптимізації (умовною задачею)*, якщо  $X$  – множина допустимих значень змінної  $x$ , визначена деяким набором додаткових умов (обмежень) на область існування цільової функції  $R^n$ . Математично це означає, що  $X$  є власною підмножиною простору  $R^n$ .

При цьому можливі дві ситуації.

1. Точка  $x^0$  глобального оптимуму цільової функції  $f(x)$  належить допустимій області, тобто  $x^0 \in X$ . У цьому разі на  $X$  виконуються аналітичні умови екстремуму функції (розд. 5.1.3), задача фактично є задачею безумовної оптимізації і можна скористатися відповідними чисельними методами її розв'язування.

2. Точка  $x^0$  глобального оптимуму цільової функції  $f(x)$  знаходиться за межами допустимої області, тобто  $x^0 \notin X$  (рис. 8.1). Тоді розв'язок задачі умовної оптимізації  $x^*$  не збігається з  $x^0$  і завжди належить межі допустимої області  $X$ . Розв'язування таких задач вимагає спеціальних методів, розроблення яких і складає предмет математичного програмування.



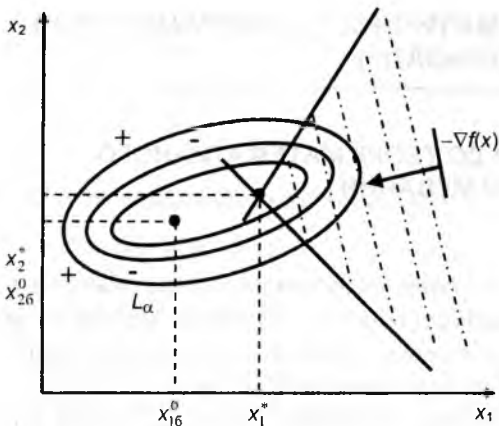


Рис. 8.1. Геометрична інтерпретація задачі

Множину допустимих розв'язків  $X$  на рис. 8.1 заштриховано. Характер зміни функції проілюстровано знаками “+” та “-” біля лінії рівня  $L_\alpha$ . Знак “+” стоїть з того боку, де значення  $f(x_1, x_2) > \alpha$ , а знак “-” – з іншого. З рис. 8.1 видно, що розв'язок задачі – точка  $(x_1^*, x_2^*)$  – належить межі множини  $X$  і не збігається з точкою  $(x_{16}^0, x_{26}^0)$  безумовного мінімуму функції  $f(x_1, x_2)$ .

Вважаємо, що функція  $f$  є диференційовною у кожній точці  $x \in X$ . Антиградієнт функції цілі  $-\nabla f(x)$  є ортогональним дотичній до лінії рівня  $L_\alpha$ , яка проходить через  $x$ , і спрямований (якщо  $\nabla f(x) \neq 0$ ) у бік зменшення функції. У геометричному плані пошук глобального мінімуму зводиться до обчислення мінімального числа  $\alpha^*$  серед усіх  $\alpha$  таких, що лінія рівня  $L_\alpha$  має непорожній перетин з  $X$ . При цьому будь-яка точка  $x^* \in L_{\alpha^*} \cap X$  є розв'язком задачі, а величина  $\alpha^* = f(x^*)$  – мінімальним значенням функції  $f$  на  $X$ .

## 8.2. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Загальну задачу математичного програмування можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min; \\ h_i(x) &\leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \\ g_l(x) &= 0, \quad l = \overline{1, L}, \quad x \in X \subset R^n. \end{aligned} \quad (8.3)$$

При цьому умови вигляду  $h_i(x) \leq 0$  називаються обмеженнями-нерівностями, вигляду  $g_l(x) = 0$  – обмеженнями-рівностями, обидва ці типи умов – *функціональними обмеженнями*, умова  $x \in R^n$  називається *прямим обмеженням*.

Умова  $x \in X \subset R^n$  означає, що  $x$  є  $n$ -вимірною змінною. Тому обов'язковою умовою коректності задачі математичного програмування є умова, щоб число обмежень-рівностей було строго менше за  $n$ , тобто  $L < n$ . У протилежному разі маємо систему  $n$  (при  $L = n$ ) або більше (якщо  $L > n$ ) алгебричних рівнянь з  $n$  невідомими. Якщо ця система сумісна, то вона визначає єдине значення змінної  $x$ . Клас таких задач має практичну значимість, але не відноситься до задач математичного програмування.

Всю множину задач математичного програмування поділяють на два класи: опуклого і неопуклого програмування. Принципова відмінність цих класів полягає у тому, що задачі опуклого програмування мають єдиний екстремум (локальні екстремуми відсутні), у той час як задачі неопуклого програмування є багатоекстремальними. Як уже відзначалося в розд. 5, основний підхід до розв'язування таких задач полягає у визначенні всіх локальних екстремумів і виділенні з них глобального. При цьому в близьких околах будь-якого локального екстремуму функція є унімодальною (опуклою), і для визначення її екстремуму використовують методи опуклого програмування.

Розглянемо формальні ознаки задач опуклого програмування.

**Опукле програмування.** Загальна задача математичного програмування (8.3) називається задачею опуклого програмування, якщо множина допустимих розв'язків  $X$  є опуклою, а цільова функція  $f(x)$  та функції обмежень  $h_i(x)$  та  $g_l(x)$  є опуклими на множині  $X$ .

Окремими випадками опуклого програмування є лінійне і квадратичне програмування.

**Лінійне програмування.** Задачею *лінійного програмування* (ЛП) називається задача мінімізації або максимізації лінійної функції за лінійних обмежень. Зокрема, задача (8.3) є задачею ЛП, якщо  $f(x)$ ,  $h_i(x)$  і  $g_l(x)$  – лінійні функції, а  $X$  – багатогранник, тобто множина, що задається системою лінійних нерівностей.

**Квадратичне програмування.** Задачею *квадратичного програмування* називається задача мінімізації за лінійних обмежень *квадратичної функції* вигляду

$$f(x) = (Cx, x) + (d, x), \quad (8.4)$$

де  $C$  – симетрична невід’ємно визначена матриця розмірами  $n \times n$ ;  $d$  – вектор із  $R^n$ .

Відмітимо, що при зазначеній умові на  $C$  функція (8.4) є опуклою. Отже, задача квадратичного програмування – це окремий випадок задачі опуклого програмування, а задача ЛП – окремий випадок їх обох. Ці два підкласи задач опуклого програмування в даний час найбільш вивчені.

Розглянуті класи не є вичерпними. Наведемо ще три класи дуже важливих поширених задач опуклого математичного програмування.

**Дискретна оптимізація.** Надалі називатимемо скінченні і зчисленні множини *дискретними*. Задача називається задачею *дискретної оптимізації*, якщо вся припустима множина  $X \subset R^n$  є дискретною, або лише деякі з координат вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)$  пробігають дискретні множини на числовій осі, коли  $x$  пробігає  $X$ .

Отже, постановка задачі дискретного програмування відрізняється від загальної задачі математичного програмування спеціальним заданням прямого обмеження:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min; \\ h_i(x) &\leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \\ g_l(x) &= 0, \quad l = \overline{1, L}; \\ x &\in D, \end{aligned} \quad (8.5)$$

де  $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$  – декартовий добуток множин можливих значень відповідно кожної із змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . При цьому  $D$  може бути як однорідним, так і композицією множин цілих  $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , натуральних  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , бульових  $\{0, 1\}$  і дійсних чисел.

Розрізняють задачі цілочислового дискретного програмування (усі  $D_j, j = \overline{1, n}$  – множини цілих або натуральних чисел); дискретні задачі з бульовими змінними (усі  $D_j, j = \overline{1, n}$  – множини бульових  $\{0, 1\}$  змінних); змішані задачі дискретного програмування (композиція цілочислових і бульових змінних); змішані дискретно-неперервні задачі (композиція дискретних і неперервних змінних).

Якщо цільова функція  $f(x)$  та обмеження  $h_i(x), g_l(x)$  – лінійні співвідношення, а  $X \subset D$  – дискретна множина, виділяють окремий клас задач

лінійного дискретного програмування (цілочислових, із бульовими змінними тощо). Усі вищенаведені задачі можуть належати класам як лінійно, так і нелінійного математичного програмування.

**Стохастичне програмування.** Важливою є ознака, відповідно до якої задачі поділяють на *детерміновані* і *стохастичні*. Математичні моделі детермінованих задач (розглянуті вище або аналогічні) не містять випадкових змінних. Але якщо випадкові явища в процесах, що моделюються, відіграють важливу роль, то адекватна модель буде стохастичною, тобто такою, що містить випадкові функції і величини. Такі задачі відносяться до задач стохастичного програмування.

**Приклад 8.1.** Розглянемо двовимірну оптимізаційну задачу, коефіцієнти лінійної функції цілі якої є нормально розподіленими і статистично незалежними:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2,$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$$

$$f(c_1) = N(\bar{c}_1, \sigma_1^2); f(c_2) = N(\bar{c}_2, \sigma_2^2),$$

де  $f(c_i)$  – функція щільності розподілу коефіцієнтів  $c_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\bar{c}_i$  – математичне сподівання;  $\sigma_i$  – середньоквадратичне відхилення коефіцієнтів  $c_i$ ;  $\sigma_i^2 = D_i$  – дисперсія коефіцієнтів  $c_i$ ;  $N$  – знак, який означає, що випадкові величини розподілені за нормальним законом.

Значення цільової функції  $z$  є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом

$$F(z) = N\left(z, \sigma_z^2\right) = N\left(\bar{c}_1x_1 + \bar{c}_2x_2; \sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2\right)$$

з математичним сподіванням  $M_z = (\bar{c}_1x_1 + \bar{c}_2x_2)$  і дисперсією  $D_z = \sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2$ .

**Задача динамічного програмування.** Задача, процес розв'язування якої є багатоетапним, відноситься до класу задач динамічного програмування. Оптимальний розв'язок в таких задачах знаходять крок за кроком, причому прийнятий на кожному кроці розв'язок має задовольняти умову оптимальності щодо розв'язку, прийнятого на попередньому етапі. Методи розв'язування багатоетапних задач об'єднані в розділ математичного програмування, який має назву динамічного програмування.

Однокрокові задачі характеризуються тим, що всі компоненти вектора оптимального розв'язку визначають одночасно за один – останній – крок алгоритму. Поряд із цим, цілу низку задач можна розв'язати тільки за умови послідовного прийняття визначених рішень. Задачі, що описують процеси, параметри яких змінюються залежно від часу, пов'язані з рішеннями керівництва, які, у свою чергу, потрібно приймати у визначені моменти часу.

У кожному із зазначених класів існують численні підкласи, що виділяються за ознаками проблемної орієнтації, специфічними особливостями цільової функції та обмежень тощо.

У даному навчальному посібнику надалі розглядаються загальні методи розв'язування тільки детермінованих задач лінійного і нелінійного програмування на незліченних (неперервних) множинах допустимих розв'язків.

### 8.3. АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Переважає більшість практичних оптимізаційних задач є умовними. Це пов'язано з тим, що практичні рішення завжди приймаються в умовах обмежених ресурсів (трудових, матеріальних, фінансових, часових тощо).

Один із перших плідних і фундаментальних результатів у галузі розв'язування задач умовної оптимізації одержав понад 200 років тому французький математик Ж. Лагранж. Він досліджував задачу умовної оптимізації вигляду

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \\ g_l(x) &= 0, \quad l = \overline{1, L}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Ця задача називається *класичною задачею на умовний екстремум*.

Основна ідея підходу, який реалізовано Лагранжем, полягає у зведенні умовної задачі до задачі безумовної оптимізації та наступного використання відповідних необхідних і достатніх умов екстремальності (див. розд. 5.1.3).

Ідея, запропонована Лагранжем, полягає у формуванні функції (надалі вона одержала назву функції Лагранжа) вигляду

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^L \lambda_i g_i(x), \quad (8.7)$$

де  $x \in R^n$ ,  $\lambda_0 \in R$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_L) \in R^L$ .

Частинні похідні цієї функції за координатами вектора  $x$  мають вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^L \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x), \quad j = \overline{1, n}. \quad (8.8)$$

Складений з них вектор позначається через  $\nabla L_x(x, \lambda_0, \lambda)$ , тобто

$$\nabla L_x(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 \nabla f(x) + \sum_{i=1}^L \lambda_i \nabla g_i(x). \quad (8.9)$$

Необхідні умови локальної оптимальності в задачі (8.6) відомі як *правило множників Лагранжа*.

Нехай функції  $f, g_1, \dots, g_m$  неперервно диференційовні в деякому околі точки  $x^* \in R^n$ . Якщо  $x^*$  – локальний розв'язок задачі (8.6), то існує число  $\lambda_0^*$  і вектор  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_L^*)$ , які не дорівнюють нулеві одночасно, і такі, що

$$\nabla L_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0. \quad (8.10)$$

Якщо при цьому градієнти  $\nabla g_1(x^*), \dots, \nabla g_L(x^*)$  лінійно незалежні (умова регулярності), то  $\lambda_0^* \neq 0$ .

Умова (8.10) з урахуванням (8.9) означає, що градієнти  $\nabla f(x^*), \nabla g_1(x^*), \dots, \nabla g_m(x^*)$  лінійно залежні. Зокрема, якщо  $L=1$ , то  $\nabla f(x^*)$  і  $\nabla g_1(x^*)$  колінеарні. Числа  $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_L^*$  в умові (8.10) називаються *множниками Лагранжа*. Будь-яка точка  $x^*$ , що задовольняє за деяких  $\lambda_0^*$  і  $\lambda^*$ ,  $(\lambda_0^*, \lambda^*) \neq 0$ , умову (8.10), а також умову *допустимості*

$$g_i(x^*) = 0, \quad i = \overline{1, L}, \quad (8.11)$$

називається *стаціонарною* точкою задачі (8.6). Таким чином, стаціонарні точки визначаються системою (8.10), (8.11), що містить (з урахуванням (8.8), (8.9))  $n+L$  рівнянь із  $n+L+1$  невідомими. Зауважимо, що у випадку  $\lambda_0^* \neq 0$  завжди можна вважати  $\lambda_0^* = 1$  (для цього потрібно поділити всі множники Лагранжа на  $\lambda_0^*$ ). Тому при розв'язуванні зазначеної системи досить розглядати лише випадки  $\lambda_0^* = 0$  або  $\lambda_0^* = 1$ , і, отже, невідомих у системі фактично також  $n+L$ . Якщо ж виконується зазначена вище умова

регулярності, то усе зводиться до випадку  $\lambda_0^* = 1$ , і можна обмежитися розглядом функції Лагранжа вигляду

$$L(x, \lambda) = L(x, 1, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^L \lambda_i g_i(x),$$

яку називають *регулярною*.

Як і у випадку безумовної задачі оптимізації, стаціонарні точки задачі (8.6) не обов'язково мають бути її розв'язками. Тут також існують необхідні і достатні умови оптимальності із застосуванням других похідних. Позначимо через

$$\nabla_{xx}^2(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^L \lambda_i \nabla^2 g_i(x) \quad (8.12)$$

матрицю других похідних функції Лагранжа за координатами вектора  $x$ . Тоді необхідна умова локальної оптимальності з використанням других похідних має вигляд.

Нехай функції  $f, g_1, \dots, g_L$  двічі диференційовні в точці  $x^* \in R^n$  і неперервно диференційовні у її деякому околі, причому градієнти  $\nabla g_1(x^*), \dots, \nabla g_L(x^*)$  лінійно незалежні. Якщо  $x^*$  – локальний розв'язок задачі (8.6), то

$$\left( \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) h, h \right) \geq 0$$

за будь-яких  $\lambda_0^*, \lambda^*$ , що задовольняють (8.12) і всіх  $h \in R^n$  таких, що

$$\left( \nabla g_i(x^*), h \right) = 0, \quad i = \overline{1, L}. \quad (8.13)$$

Достатня умова з використанням других похідних функції Лагранжа має наступний вигляд.

Нехай функції  $f, g_1, \dots, g_L$  двічі диференційовні в точці  $x^* \in R^n$ , що задовольняє (8.13). Припустимо, що за деяких  $\lambda_0^*$  і  $\lambda^*$  виконується умова (8.12) і, крім того,

$$\left( \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) h, h \right) > 0$$

за всіма ненульовими  $h \in R^n$ , що задовольняють (8.13). Тоді  $x^*$  – строгий локальний розв'язок задачі (8.6).

#### 8.4. УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ЛАГРАНЖА

Розглянемо узагальнення методу Лагранжа для розв'язування задачі математичного програмування вигляду

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min; \\ h_i(x) &\leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \\ x &\in X \subset R^n. \end{aligned} \tag{8.14}$$

**Принцип Лагранжа (необхідні умови оптимальності).** Нехай у задачі (8.14) множина  $X$  опукла, функції  $f, h_1, \dots, h_m$  – диференційовні в точці  $x^* \in R^n$ , функції  $h_1, \dots, h_m$  – неперервно диференційовні в деякому околі  $x^*$ . Якщо  $x^*$  – локальний розв'язок задачі (8.14), то існують такі невід'ємні числа (множники Лагранжа)  $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ , які не дорівнюють нулеві одночасно, і такі, що

$$\begin{aligned} (\nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) h, h) &\geq 0, \quad \forall x \in X; \\ \lambda_i^* h_i(x^*) &= 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Відзначимо, що множники Лагранжа, які відповідають обмеженням-нерівностям, невід'ємні, а множники, що відповідають обмеженням-рівностям, можуть мати будь-який знак.

Для будь-якої точки  $x^* \in X$  введемо множину

$$I(x^*) = \{i \mid h_i(x^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq m\} \tag{8.16}$$

активних у точці  $x^*$  (ці обмеження обертаються в точці  $x^*$  в рівності) обмежень-нерівностей. Інші обмеження-нерівності називатимемо пасивними.

Умови (8.15), які іноді називаються умовами доповнювальної нежорсткості, означають, що множники Лагранжа, які відповідають пасивним обмеженням-нерівностям, повинні перетворюватися на нуль.

**Достатні умови оптимальності (умови Куна – Такера).** Нехай задані опуклі функції  $f, h_1, \dots, h_m$  і опукла множина  $X$ . Потрібно розв'язати задачу вигляду (8.14).

Нехай  $x^*$  – точка мінімуму функції  $f$  при заданих обмеженнях й існує така точка  $x_1 \in X$ , що  $h_i(x_1) < 0, \quad i = \overline{1, m}$ . Тоді існує вектор множників Лагранжа  $\lambda_i^* > 0, \quad i = \overline{1, m}$ , такий, що



$$f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* h_i(x^*) \leq f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x),$$

$$x \in X, \lambda_i^* h_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Наведені умови є і достатніми.

**Приклад 8.2.** Розглянемо статичну модель, призначену для системи керування запасами, що включає  $n$  ( $n > 1$ ) видів продукції, яка зберігається на одному складі обмеженої площі. Дану умову, яка визначає взаємозв'язок між різними видами продукції, включено в модель як обмеження.

Нехай  $A$  – максимально допустима площа складського приміщення для  $n$  видів продукції. Припустимо, що площа, яка потрібна для збереження одиниці продукції  $i$ -го виду, дорівнює  $a_i$ . Якщо  $y_i$  – величина замовлення на одиницю продукції  $i$ -го виду, то обмеження на ємність складського приміщення складає  $\sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A$ .

Вважаємо, що запас продукції кожного виду поповнюється миттєво, знижки цін відсутні, дефіцит не допускається. Нехай  $K_i$ ,  $\beta_i$  і  $h_i$  – відповідно витрати на оформлення замовлення, інтенсивність попиту і витрати на збереження одиниці продукції за одиницю часу для кожного  $i$ -го виду.

Отже, задача набуває вигляду

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i \beta_i}{y_i} + h_i \left( \frac{y_i}{2} \right) \rightarrow \min \quad (8.17)$$

$$\text{при } \sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A, y_i > 0, i = \overline{1, n}. \quad (8.18)$$

Загальний розв'язок даної задачі можна знайти методом множників Лагранжа. Проте перш ніж застосовувати метод потрібно з'ясувати, чи задовольняє обмеження на площу складу розв'язок задачі пошуку безумовного мінімуму функції

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i \beta_i}{y_i} + h_i \left( \frac{y_i}{2} \right) \rightarrow \min, \quad (8.19)$$

яка відповідає задачі (8.17)–(8.18).

Гradient функції цілі (8.19) має вигляд

$$\nabla f = \left( -\frac{K_1 \beta_1}{y_1^2} + \frac{h_1}{2}, -\frac{K_2 \beta_2}{y_2^2} + \frac{h_2}{2}, \dots, -\frac{K_n \beta_n}{y_n^2} + \frac{h_n}{2} \right).$$

Стационарна точка  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$  функції цілі (8.17), в якій градієнт функції дорівнює нулеві, має координати

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i\beta_i}{h_i}}. \quad (8.20)$$

Матриця Гессе функції цілі (8.19) є діагональною вигляду

$$\begin{bmatrix} 2\frac{K_1\beta_1}{y_1^3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\frac{K_2\beta_2}{y_2^3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2\frac{K_n\beta_n}{y_n^3} \end{bmatrix}.$$

Всі діагональні елементи більші від нуля. Легко помітити, що за критерієм Сільвестра ця матриця є додатно визначеною і вектор (8.20) визначає точку глобального мінімуму задачі (8.16).

Якщо в точці (8.20) обмеження (8.18) виконується, то воно надлишкове і його можна не враховувати.

Обмеження діє, якщо воно не виконується для значень  $y_i^*$ . Тут потрібно знайти нове оптимальне значення  $y_i^*$ , яке задовольняє обмеження на площу складу, що накладається у вигляді рівності.

У даному випадку така модифікація задачі можлива, оскільки функція цілі опукла і задача має єдине лінійне обмеження (опукла множина розв'язків). Така редукція задачі може виявитися некоректною за інших обмежень або якщо їх більше, ніж одне.

Отже, для розв'язування даної задачі можна застосувати викладену вище теорію.

Побудуємо функцію Лагранжа вигляду

$$\begin{aligned} L(\lambda, y_1, y_2, \dots, y_n) &= f(y_1, y_2, \dots, y_n) - \lambda \left( \sum_{i=1}^n a_i y_i - A \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{K_i \beta_i}{y_i} + h_i \frac{y_i}{2} \right) - \lambda \left( \sum_{i=1}^n a_i y_i - A \right), \end{aligned}$$

де  $\lambda (< 0)$  – множник Лагранжа.

Оптимальні значення  $y_i^*$  і  $\lambda$  можна знайти, прирівнявши до нуля відповідні частинні похідні функції Лагранжа, що дає систему нелінійних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{K_i \beta_i}{y_i^2} + \frac{h_i}{2} - \lambda a_i = 0, \quad i = \overline{1, n},$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^n a_i y_i + A = 0.$$

Розв'язування побудованої системи нелінійних рівнянь може здійснюватися одним із чисельних методів, викладених, наприклад, у книзі "Основы вычислительной математики" (Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.).

### Зпитання для самоперевірки

1. Яка основна відмінність між класом задач безумовної оптимізації і задачами математичного програмування?
2. Сформулюйте класичну задачу на умовний екстремум. Чи накладаються в даній задачі обмеження на знак змінних?
3. Що таке лінії рівня функції? Побудуйте геометричну інтерпретацію.
4. Наведіть класифікацію задач математичного програмування.
5. Сформулюйте необхідні умови оптимальності в задачах умовної оптимізації.
6. Як будується функція Лагранжа?
7. У якому випадку на знак множників Лагранжа накладаються обмеження?
8. Як використовується градієнт функції Лагранжа і її матриця Гессе за змінними  $x$ ?
9. Наведіть достатні умови оптимальності в задачах умовної оптимізації.
10. Наведіть основні кроки аналітичного методу розв'язування задач умовної оптимізації за допомогою функції Лагранжа.

## Розділ 9. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ Й АНАЛІЗ ДІЯЛЬНОСТІ

### 9.1. Історичні відомості

Одним із розділів математичного програмування, теорія і методи якого характеризуються найбільш високим ступенем розробки, є лінійне програмування. Мета даного розділу – продемонструвати можливість оптимального рішення широкого спектра проблем, що виникають у різних сферах людської діяльності, зокрема в економіці, потребами якої значною мірою було ініційовано появу і бурхливий розвиток теорії і методів лінійного програмування.

Різні методи оптимального керування, що одержали розвиток у другій половині минулого століття завдяки створенню і поширенню комп'ютерної техніки, не тільки відповідають потребам економіки, але і відіграють роль найважливішого її елемента. І це цілком природно, оскільки однією з головних задач економіки є розроблення теоретичного фундаменту керування, тобто методів найкращого розподілу обмежених ресурсів (трудо-вих, матеріальних, фінансових, часових) для підтримки функціонування і розвитку підприємства або економіки країни.

Першою економічною моделлю, що містила деякі найпростіші ідеї лінійного програмування, була “Економічна таблиця” Ф. Кене, датована приблизно 1758 р. У даній роботі не тільки якісно, але і кількісно були досліджені взаємозв'язки між землевласниками, селянами і ремісниками. У 1874 р. Л. Вальрас запропонував складну математичну модель економіки, що містила технологічні коефіцієнти. Проте зазначена модель була недосконалою і не знайшла практичного застосування.

У 1926 р. у СРСР було опубліковано баланс народного господарства СРСР за 1923–1924 рр. Даний документ містив всі основні ідеї і риси моделі міжгалузевого балансу, що використовується для аналізу міжгалузевих економічних зв'язків. Базуючись на цих ідеях, американський економіст В. Леонтьєв створив метод економіко-математичного аналізу “витрати-випуск” для упорядкування міжгалузевого балансу виробництва і розподілу суспільного продукту (Нобелівська премія з економіки, 1973 р.).

Однак справжнім початком лінійного програмування в його сучасному вигляді варто вважати роботи академіка Л. Канторовича, який у 1939 р. опублікував фундаментальну монографію “Математичні методи організації

і планування виробництва". Вчений вперше показав, що великий клас найважливіших процесів планування та організації виробництва припускає формалізацію у вигляді оптимізаційної математичної моделі. Він запропонував метод розв'язування таких задач – метод розв'язуючих множників, що став основою лінійного програмування. На жаль, його роботи тільки наприкінці 60-х років минулого століття були переведені англійською мовою і стали надбанням широкої світової наукової громадськості.

У 1947 р. американський економіст Т. Купманс звернув увагу на унікальні можливості моделей лінійного програмування для розв'язування економічних задач.

Для ефективного чисельного розв'язування складних задач лінійного програмування Данцигом і його співробітниками в 1947–1949 рр. був розроблений симплекс-метод.

У 1975 р. Л. Канторовичу і Т. Купмансу за розробки в галузі створення методології лінійного програмування присуджено Нобелівську премію в галузі економіки.

Нині лінійне програмування вийшло за межі економіки, і з його допомогою розв'язується багато технічних задач.

Отже, *лінійне програмування (ЛП)* – це метод пошуку невід'ємних значень змінних, що мінімізують або максимізують значення лінійної цільової функції за наявності обмежень, заданих у вигляді лінійних нерівностей або рівностей.

Мета ЛП полягає у визначенні плану найефективнішого використання обмежених ресурсів з урахуванням суперечливих запитів.

Відзначимо також безсумнівне теоретичне значення методів лінійного програмування. Технологія розв'язування оптимізаційних задач із лінійною функцією цілі та лінійних обмежень відіграє велику роль у створенні алгоритмів розв'язування задач математичного програмування всіх інших типів: нелінійних, цілочислових, стохастичних, параметричних, задач динамічного програмування. Лінійне програмування також використовується при дослідженнях у різних галузях теоретичної і прикладної математики.

## **9.2. ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ**

Розглянемо кілька лінійних моделей економічних і технологічних процесів у різних галузях людської діяльності. Мета перших двох моделей – пошук максимуму лінійної функції цілі системи лінійних нерівностей, на-

ступних двох – пошук мінімуму, і нарешті п'ята задача – приклад широко-відомої транспортної задачі.

### 9.2.1. Управління фінансами (банківська справа)

Банк надає п'ять видів позики з різними річними процентними ставками (табл. 9.1).

#### 9.1. Види позик банку

Вид позики	Величина коштів	Річна процентна ставка, %
Комерційна позика	$x_1$	15
Іпотека 1 (позика під заставу нерухомості, землі)	$x_2$	10
Кредит на поліпшення житлових умов	$x_3$	13,6
Іпотека 2	$x_4$	14
Короткостроковий кредит, що автоматично поновлюється	$x_5$	18

Попит на короткостроковий кредит ніколи не перевищує 5 млн грн. На інші види позики обмежень щодо попиту немає. Резерв банку складає 53 млн грн. Мета банку – максимізувати свій прибуток від капіталовкладень, тобто знайти найбільш вигідний спосіб розміщення капіталу.

#### Статут банку.

1. Кредит на поліпшення житлових умов не перевищує 20 % від іпотеки 1.
2. Комерційна позика має бути менше або дорівнювати іпотеці 2.
3. Банк зобов'язаний інвестувати за іпотечними позиками як мінімум 60 % від загальної суми капіталовкладень.
4. З міркувань безпеки на кожен гривню, вкладену в іпотеку 2, хоча б дві гривні мають бути інвестовані в іпотеку 1.
5. Короткостроковий кредит не може перевищувати 5 млн грн.

#### Постановка задачі.

1. Основними змінними задачі є незалежні змінні ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ), що відповідають різним видам коштів (табл. 9.1).
2. Цільова функція: необхідно максимізувати загальний річний прибуток

$$z = 0,15x_1 + 0,10x_2 + 0,136x_3 + 0,14x_4 + 0,18x_5.$$

3. Обмеження. Місячний резерв:  $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 \leq 53\,000\,000$ ;

- За статутом
- 1:  $1x_3 \leq 0,2x_2$ ,
  - 2:  $1x_1 \leq 1x_4$ ,
  - 3:  $1x_2 + 1x_4 \geq 0,6(1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5)$ ,
  - 4:  $1x_2 \geq 2x_4$ ,
  - 5:  $1x_5 \leq 5\,000\,000$ ;
- $x_i \geq 0, i = \overline{1, 5}$ .

## 9.2.2. Планування роботи аудиторської фірми

“Артур і Син” – аудиторська фірма, що здійснює ревізію бухгалтерського обліку і звітності в інших компаніях. “Артур” може виконати 90 фінансових перевірок (ФП) за рік, якщо він буде витратити весь свій робочий час тільки на ФП, або 180 перевірок звітності (ПЗ) в компаніях, або будь-яку їх лінійну комбінацію. Лінійна комбінація припускає, що одна ФП еквівалентна за обсягом часу, який затрачується, двом ПЗ (із пропорції 90 : 180). Отже, “Артур” може проводити такі комбінації, як 89 ФП і 2 ПЗ або 88 ФП і 4 ПЗ і т. д. Задача “Сина” – оброблення звітів “Артура” про його ревізійну діяльність на фірмах, що є клієнтами компанії.

“Син” може підготувати 180 звітів по фінансових перевірках або 150 звітів по ревізії звітності за рік, або будь-яку їх лінійну комбінацію. Персонал контори в змозі обробляти не більше, ніж 160 звітів щорічно. Фірма має постійних клієнтів і, щоб не загубити їх, має виконувати не менше 30 ФП і 50 ПЗ щороку.

Прибуток з кожної ФП складає в середньому 720 грн, а з кожної ПЗ – близько 650 грн. Скільки ФП і ПЗ варто зробити “Артурові і Сину”, щоб їх прибуток досяг свого максимуму?

### Постановка задачі.

1. Основні змінні:  $x_1, x_2$  – відповідно кількість ПЗ і ФП.

2. Цільова функція  $z$ , яку потрібно максимізувати:  $z = 650x_1 + 720x_2$ .

3. Обмеження. Для формулювання обмежень зобразимо ситуацію для “Артура” (рис. 9.1). “Артур” може проводити 90 ФП і 0 ПЗ за рік. Точка  $A(0, 90)$  відповідає цій

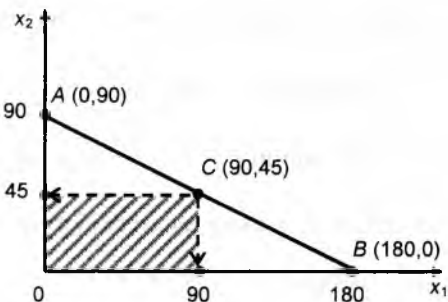


Рис. 9.1. Геометрична інтерпретація обмежень задачі

ситуації, а точка  $B(180, 0)$  – випадку, коли “Артур” виконує 180 ПЗ і не здійснює фінансових перевірок.

Пряма  $AB$  визначає допустимі лінійні комбінації робіт. Наприклад, точки  $C$  відповідає 90 ПЗ і 45 ФП.

Запишемо рівняння розглянутого обмеження. З аналітичної геометрії відомо, що рівняння прямої, яка проходить через дві точки  $(x_1^1, x_2^1)$  і  $(x_1^2, x_2^2)$ , має вигляд

$$x_2 = \frac{x_2^2 x_1^1 - x_2^1 x_1^2}{x_1^1 - x_1^2} + \left( \frac{x_2^1 - x_2^2}{x_1^1 - x_1^2} \right) x_1. \quad (9.1)$$

Для “Артура” рівняння допустимої лінійної комбінації робіт:  $x_2 = 90 - \left( \frac{90}{180} \right) x_1 = 90 - 0,5x_1$ , або  $0,5x_1 + x_2 = 90$ , і обмеження-нерівність  $0,5x_1 + x_2 \leq 90$ . Аналогічно для “Сина”:  $1,2x_1 + x_2 \leq 180$ .

Обмеження на працездатність персоналу фірми:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 160, \\ x_2 &\geq 30, \\ x_1 &\geq 50. \end{aligned}$$

Остаточна постановка задачі:

$$z = 650x_1 + 720x_2 \rightarrow \max$$

за умови, що

$$\left. \begin{aligned} 0,5x_1 + x_2 &\leq 90, \\ 1,2x_1 + x_2 &\leq 180, \\ x_1 + x_2 &\leq 160, \\ x_2 &\geq 30, \\ x_1 &\geq 50. \end{aligned} \right\}$$

### 9.2.3. Вибір технології нарізування паперу

Паперова компанія випускає рулони паперу розмірами 30 см завширшки і 300 см завдовжки. Такі стандартні рулони купують багато клієнтів. Однак деякі замовляють рулони завширшки 5, 9 або 12,5 см і завдовжки 300 см. Мінімальна кількість рулонів, що вимагають клієнти: 500 шт. 5-сан-





чих, на галузі, що виробляють кондиționери, автомобільні комп'ютери тощо. Метод міжгалузевого балансу (interindustry analysis) дає змогу відповісти на питання, пов'язані з міжгалузевими взаємодіями та їх впливом на основні макроекономічні показники. Крім того, способи аналізу, розроблені для розв'язування проблем взаємних зв'язків, потрібні й для формування економічних планів, що послідовно пов'язують макрозмінні з галузевими змінними мікрорівня.

Мета балансового аналізу – відповісти на питання, що виникає в макроекономіці стосовно ефективності ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної із  $n$  галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь є, з одного боку, виробником деякої продукції, а з іншого – споживачем і своєї продукції, і виробленої іншими галузями. Зв'язок між галузями, як правило, характеризується даними таблиць міжгалузевого балансу. Математична модель, що дає змогу їх аналізувати, розроблена В. Леонт'євим. Розглянемо докладніше цю модель.

Припустимо, що розглядається  $n$  галузей промисловості, кожна з яких виробляє свою продукцію. Частина продукції йде на виробниче споживання даною та іншими галузями, інша частина призначена для кінцевого (поза сферою матеріального виробництва) особистого і суспільного споживання. Цю частину називатимемо кінцевим продуктом. Процес виробництва розглядається за деякий плановий період часу (наприклад, рік).

#### *Постановка задачі.*

1. Основні змінні:  $x_i$  – загальний обсяг продукції  $i$ -ї галузі господарства за плановий період,  $x_{ij}$  – обсяг продукції  $i$ -ї галузі, що використовується у виробництві  $j$ -ї галузі за цей період,  $p_i$  – плановий обсяг кінцевого продукту  $i$ -ї галузі.

2. Цільова функція. Позначивши собівартість одиниці продукції  $i$ -ї галузі через  $c_i$ , маємо цільову функцію вигляду

$$z = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min, \quad (9.2)$$

де  $c_i x_i$  – вартість усієї продукції, виробленої в  $i$ -й галузі;  $\sum_{i=1}^n c_i x_i$  – сумарна вартість усієї продукції, виробленої  $n$  галузями.

3. Обмеження. Валовий обсяг продукції будь-якої  $i$ -ї галузі дорівнює сумарному обсягу продукції, яку споживають  $n$  галузей, та кінцевого продукту:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + p_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.3)$$

Записані рівняння називаються *співвідношеннями балансу*. Розглянемо вартісний міжгалузевий баланс, коли всі величини, що входять у ці рівняння, мають вартісний вираз.

Уведемо коефіцієнти прямих витрат

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (9.4)$$

що показують витрати продукції  $i$ -ї галузі на виробництво одиниці продукції  $j$ -ї галузі. Вважаємо, що коефіцієнти  $a_{ij}$  постійні і залежать тільки від технології виробництва. Сформуємо лінійну залежність матеріальних витрат від валового випуску:

$$x_{ij} = a_{ij}x_j, \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + p_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Використаємо матричне подання  $X = AX + P$ , де  $X$  – вектор валового випуску,  $P$  – вектор кінцевого продукту;  $A$  – матриця прямих витрат; де  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Оскільки загальний обсяг продукції кожної галузі має задовольняти потреби інших галузей і забезпечувати виконання плану за кінцевим продуктом, одержуємо для невідомих таку умову:

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq p_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.5)$$

Очевидно, величини  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , не можуть бути від'ємними або перевищувати деякі величини  $b_i$ , які обумовлені обмеженими можливостями виробництва, тобто

$$\begin{aligned} x_i &\leq b_i; \\ x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Остаточна постановка задачі при системі умов (9.5) і (9.6):

$$z = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min. \quad (9.7)$$

Отже, це типова задача лінійного програмування.

### 9.2.5. Транспортна задача

Нехай на  $m$  пунктах відправки  $A = \{A_i\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , зосереджено однорідний вантаж у кількостях  $a_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , що треба доставити в  $n$  інших пунктів доставки  $B = \{B_j\}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , у кількостях  $b_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Відомо, що вартість доставки одиниці вантажу з пункту  $A_i$  у пункт  $B_j$  дорівнює  $c_{ij}$ . Потрібно мінімізувати загальну вартість перевезень, якщо з пунктів відправки до пунктів доставки вантаж повністю вивозиться в потрібних, заздалегідь заданих кількостях.

*Постановка задачі.*

1. Основні змінні:  $x_{ij}$  – кількість вантажу, що перевозиться з пункту  $A_i$  у пункт  $B_j$ , при цьому вартість перевезення дорівнює  $c_{ij}x_{ij}$ .

2. Цільова функція визначається як сума всіх можливих добутків типу  $c_{ij}x_{ij}$ :

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (9.8)$$

3. Обмеження визначають умови повного вивезення вантажу з пунктів  $A_i$  та повного задоволення потреб пунктів  $B_j$ , тобто маємо дві групи обмежень:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (9.9)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (9.10)$$

Очевидна необхідність накладання на змінні задачі природних обмежень невід'ємності

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

оскільки перевезення вантажів із пунктів  $B_j$  у пункти  $A_i$  не передбачається. Звернемо увагу на той важливий факт, що сума всіх вивезених із пунктів  $A_i$  вантажів має дорівнювати сумі всіх завезених у пункти  $B_j$ , тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij}. \quad (9.11)$$

Сформульована задача називається транспортною задачею за критерієм вартості з *правильним балансом* (9.11), або *закритою транспортною задачею*. У разі порушення співвідношення (9.11), а, отже, і рівностей (9.8) або (9.9), які набувають вигляду

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = \overline{1, n},$$

розглядається задача з *неправильним (порушенням) балансом*, інакше – *відкрита задача*.

### 9.3. КЛАСИФІКАЦІЯ І ФОРМИ ЗАПИСУ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Існує багато задач лінійного програмування. Проте всю множину постановок задач ЛП можна розбити на три великих класи, за якими історично закріпилися такі назви: *задачі планування виробництва*, *задачі про суміші*, *транспортні задачі*.

У *задачах планування виробництва* кілька продуктів (які називаються також кандидатами або роботами) борються за обмежені виробничі ресурси (обмежений обсяг виробництва). Завдання полягає у тому, щоб з'ясувати, які продукти і в яких кількостях включати до плану виробництва для того, щоб максимізувати прибуток, або досягти іншої подібної мети при фіксованому рівні ресурсів. Хоча розв'язок задачі планування виробництва визначає обсяги виробництва різних продуктів, у дійсності він є планом розподілу дефіцитних ресурсів.

*Задачі про суміші* полягають у визначенні оптимального складу суміші з доступних компонентів для виробництва визначеної кількості продукції

відповідно до технології. Оптимальна суміш означає найдешевшу суміш із деяких компонентів за умови задоволення заданих обмежень. Задачі про суміші особливо часто розв'язуються при багатостадійному виробництві, такому як виробництво бензину, хімічних продуктів та у тих галузях, де заданий рівень послуг бажаний при мінімальній ціні. ОПР має визначити, які інгредієнти та у яких кількостях використовувати.

Розглядаючи задачі планування виробництва (прикладми таких задач є 9.2.1–9.2.2), потрібно *максимізувати* прибуток, отриманий внаслідок продажу продукції, яку вироблено з заданої кількості ресурсів. У класі задач про суміші (задачі 9.2.3–9.2.4) потрібно *мінімізувати сумарну вартість ресурсів*, необхідних для забезпечення заданого рівня виробництва або послуг, залишаючись у межах технології.

Транспортні задачі орієнтовані на мінімізацію транспортних витрат у великих системах взаємозалежних постачальників і споживачів ресурсів. Завдяки особливостям математичного опису, що полягає в наявності подвійного підсумовування в цільовій функції і специфічних обмежень, ці задачі розв'язуються спеціальними методами і розглядаються окремо від задач планування виробництва і задач про суміші.

Наведемо основні форми подання математичних моделей задач ЛП перших двох класів.

Загальна постановка задачі ЛП має вигляд

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min; \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, k}; \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{k+1, m}; \\
 & x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.
 \end{aligned}
 \tag{9.12}$$

Аналогічні форми запису використовуються і для задачі ЛП на максимум.

Особливістю загальної задачі є композиція в кожному конкретному випадку різного числа обмежень у вигляді нерівностей і рівностей. Це ускладнює створення універсального обчислювального алгоритму, оскільки його потрібно адаптувати кожного разу до конкретної постановки. Тому

в ЛП прийняті дві стандартні форми запису: з *однотипними умовами та канонічна*.

У задачі з однотипними умовами всі обмеження подані у вигляді однотипних нерівностей, і вона записується в такій формі (для випадку мінімізації):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \min; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad n < m; \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

У матричній формі цей запис має вигляд:

$$\begin{aligned} CX &\rightarrow \min; \\ AX &\leq B; \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

де  $C = \|c_1, c_2, \dots, c_n\|$  – матриця-рядок коефіцієнтів функції цілі;  $X = \|x_1, x_2, \dots, x_n\|$  – матриця-стовпець керованих (незалежних) змінних;  $A = \|a_{ij}\|$  – прямокутна матриця коефіцієнтів обмежень розмірності  $(m \times n)$ ;  $B = \|b_1, b_2, \dots, b_m\|$  – матриця-стовпець значень правих частин обмежень.

У канонічній формі всі обмеження описуються рівностями

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \min; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n; \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (9.15)$$

і, відповідно,

$$\begin{aligned} CX &\rightarrow \min; \\ AX &= B; \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Відзначимо, що обмеження на невід'ємність керованих змінних  $x_j \geq 0$  є загальним для всіх форм запису задачі ЛП і тому часто опускається.

Загальну задачу ЛП можна подати в довільній стандартній формі, використовуючи такі правила.

Для зміни вигляду оператора цільової функції (min або max) на протилежний потрібно помножити його на  $(-1)$ . Для зміни знака нерівності на протилежний потрібно помножити ліву і праву частину нерівності на  $(-1)$ .

Будь-яку рівність, наприклад  $x = b$ , можна подати парою нерівностей вигляду  $x \leq b$ ;  $x \geq b$ , а нерівність перетворити в рівність шляхом уведення додаткової змінної  $s \geq 0$ . Отже, обмеження

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (9.17)$$

трансформується в рівність

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + s_i = b_i, \quad (9.18)$$

де  $s_i$  – змінна резерву (змінна нестачі).

Аналогічно

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (9.19)$$

трансформується в рівність

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - s_i = b_i, \quad (9.20)$$

де  $s_i$  – змінна перевиконання (надлишку).

Обмеження-рівність не має додаткових змінних.

#### **9.4. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ**

Графічний метод використовується для ілюстрації особливостей розв'язування задач лінійного програмування. Єдиний випадок, коли графічний метод застосовується на практиці – це нескладні задачі з двома змінними і невеликою кількістю обмежень, або задачі з двома обмеженнями і кількома змінними.



Розглянемо застосування графічного методу розв'язування на прикладі задачі планування виробництва (максимізаційна задача).

*Постановка задачі.* Дві моделі кольорових телевізорів, вироблені корпорацією Verjozka, позначимо як  $A$  і  $B$ . Прибуток від реалізації моделі  $A$  складає 300 грн, а від реалізації моделі  $B$  – 250 грн. Метою компанії є максимізація сумарного прибутку. Однак існують певні обмеження, що заважають корпорації виробляти і продавати тисячі телевізорів щодня. Такими обмеженнями є:

1) сукупний щоденний час роботи складального цеху – 40 год (*обмеження трудових ресурсів*), причому для складання кожного телевізора моделі  $A$  (більш високої якості) потрібно 2 год роботи, телевізора моделі  $B$  – 1 год;

2) сукупний щоденний час підготовки комплектуючих для складання – 45 год (*технічне обмеження*), причому час виробництва комплектуючих для одного телевізора моделі  $A$  – 1 год, моделі  $B$  – 3 год;

3) можливість продавати щоденно не більше ніж 12 телевізорів моделі  $A$  (*торгове обмеження*).

Проблемою корпорації є визначення, скільки телевізорів кожної моделі потрібно виробляти щодня, щоб сумарний прибуток був максимально можливим.

*Постановка задачі планування виробництва.*

1. Незалежні змінні:  $x_1, x_2$  – кількість телевізорів відповідно моделей  $A$  і  $B$ , які вироблялися підприємством щоденно.

2. Цільова функція. Щоденний прибуток, отриманий від продажу телевізорів  $A$ , складає  $300x_1$  (тобто прибуток від продажу однієї одиниці продукції, помножений на кількість проданих одиниць). Аналогічно для моделі  $B$  отриманий прибуток становитиме  $250x_2$ . Сумарний прибуток  $z$  (цільова функція) складає  $300x_1 + 250x_2$ .

Потрібно максимізувати сумарний прибуток, тобто максимізувати значення цільової функції  $z$ .

3. Обмеження, що накладаються на систему. Обмеження трудових ресурсів можна записати так:

$$\begin{array}{ccc} 2x_1 + x_2 & \leq & 40. \\ \text{Витрати} & & \text{Ресурс} \\ \text{робочого часу} & & \text{робочого часу} \end{array}$$

Слід зазначити, що використовується знак  $\leq$ , тобто 40 год – максимальний обсяг часу, який необов'язково має бути використаний повністю.

Обмеження на час виробництва комплектуючих деталей:  $x_1 + 3x_2 \leq 45$ .

Торгове обмеження:  $x_1 \leq 12$ .

Обмеження невід'ємності. Неможливо зробити від'ємну кількість телевізорів, тобто  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Зробимо підсумок і подамо задачу в такому вигляді: знайти значення  $x_1$  і  $x_2$ , що максимізують цільову функцію

$$z = 300x_1 + 250x_2 \rightarrow \max \quad (9.21)$$

і задовольняють обмеження

$$2x_1 + x_2 \leq 40; \quad (9.22)$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 45; \quad (9.23)$$

$$x_1 \leq 12; \quad (9.24)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (9.25)$$

Можна не писати два останніх обмеження при постановці задачі. Проте завжди варто пам'ятати про їх існування. Відзначимо також, що в комерційних комп'ютерних програмах, що реалізують методи ЛП, немає потреби вводити ці обмеження. Вони приймаються автоматично.

Крім того, оскільки виробництво триває день за днем, необов'язково закінчувати складання всіх телевізорів до кінця дня, тобто допустимі дробові значення (наприклад, 5,73 телевізорів). Однак, якщо потрібно завершити складання всіх телевізорів, то додаються додаткові обмеження, які зводять множину допустимих значень  $x_1$  і  $x_2$  до множини цілих чисел. У цьому разі задача зводиться до одного з видів задач цілочислового програмування.

Розглянута задача містить тільки дві змінні і може розглядатися в двовимірному просторі.

**Зображення області допустимих розв'язків.** Внаслідок невід'ємності змінних у задачі лінійного програмування розглядається тільки перший квадрант координатної площини, тобто  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ . Графічний метод починається із зображення області допустимих розв'язків, де виконують пошук оптимального розв'язку. Допустима область задається за допомогою графічного зображення всіх обмежень задачі.

Кожна з нерівностей (9.22–9.25) визначає півплощину, а відповідна рівність – пряму лінію. Побудуємо геометричне зображення обмеження-нерівності на прикладі обмеження на трудові ресурси (9.22), тобто  $2x_1 + x_2 \leq 40$ .

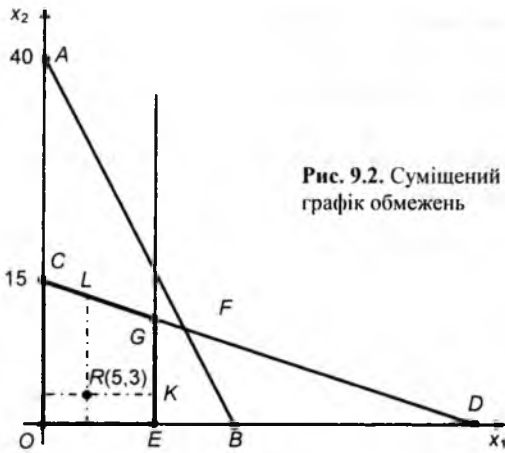


Рис. 9.2. Суміщений графік обмежень

Процедура включає два етапи: побудова лінії (прямої), що поділяє простір змінних на дві півплощини, і визначення допустимої півплощини.

Пояснимо процес побудови графічної інтерпретації алгебричної рівності на прикладі рівності  $2x_1 + 1x_2 = 40$ . Оскільки рівність може бути графічно зображена у вигляді прямої лінії (лінійна функція у двовимірному просторі), досить знайти координати

двох точок, що належать прямій. Для цього спочатку прирівнюємо  $x_1$  до нуля та одержимо точку  $A$  (рис. 9.2) перетину прямої  $2x_1 + 1x_2 = 40$  із віссю  $x_2$ . Її координати  $A(0, 40)$ . Аналогічно, якщо  $x_2 = 0$ , то  $x_1 = 20$ . Пряма, проведена через точки  $A(0, 40)$  і  $B(20, 0)$ , є графічним зображенням рівності.

Для визначення півплощини, що відповідає нерівності  $2x_1 + 1x_2 \leq 40$ , візьмемо контрольну точку, яка не належить прямій  $2x_1 + 1x_2 = 40$  і є очевидно допустимою (або очевидно недопустимою), і за допомогою підстановки її координат у рівняння знайдемо шукану півплощину. Звичайно контрольною точкою є початок координат.

Нерівність  $2x_1 + 1x_2 \leq 40$  виконується і при від'ємних значеннях  $x_1$  і  $x_2$ . Але в лінійному програмуванні існують додаткові обмеження на невід'ємність змінних (9.25), отже, допустима область є трикутником  $OAB$  (включаючи межі) на рис. 9.2. Тобто область  $OAB$  замкнена, обмежена і має нескінченну кількість комбінацій рішень про випуск телевізорів тієї або іншої моделі, що задовольняють обмеження на трудові ресурси.

Аналогічно трикутник  $OCD$  (рис. 9.2) – це область допустимих розв'язків, що задовольняють обмеження  $x_1 + 3x_2 \leq 45$ .

Рівність  $x_1 = 12$  зображено на площині вертикальною прямою, яка рівнобіжна осі  $x_2$  і проходить через точку  $E$  (рис. 9.2). Допустима область лежить ліворуч прямої і включає пряму.

Розв'язки з області  $OCGE$  не порушують жодного обмеження. Ця замкнена область називається областю допустимих розв'язків (на рис. 9.2 позначена жирними лініями).

**Аналіз допустимих розв'язків.** Будь-яка точка області  $OCGE$  є допустимим розв'язком і їй відповідає визначене значення цільової функції (прибутку). Оскільки в цій області існує нескінченна множина точок, то існує і нескінченна множина розв'язків задачі. Щоб знайти оптимальний розв'язок, потрібно визначити розв'язок (точку) із допустимої області, який максимізує цільову функцію (прибуток).

Розглянемо один з допустимих розв'язків усередині області, наприклад, точку  $R$  (рис. 9.2). Ця точка являє собою план, за яким складається 5 телевізорів моделі  $A$  ( $x_1 = 5$ ) і 3 телевізори моделі  $B$  ( $x_2 = 3$ ). Цей розв'язок неоптимальний, оскільки виробництво телевізорів моделі  $A$  може бути збільшене до 12 (точка  $K$  відповідає виробництву 12 телевізорів моделі  $A$  і 3 телевізорів моделі  $B$ ), що підвищить прибуток. Таке збільшення може відбуватися, поки розв'язки належать допустимій області. Аналогічно точка  $L$  відповідає виробництву більшої кількості телевізорів моделі  $B$ , а отже, принесе більший прибуток, ніж точка  $R$ .

Можна довести, що, незалежно від знака коефіцієнтів цільової функції, завжди існує принаймні одна точка на межі допустимої області, яка є кращою, ніж будь-яка точка всередині області. Тому оптимальні розв'язки задачі лінійного програмування не знаходяться всередині допустимої області, а обов'язково належать її межі.

Більш того, обов'язково знайдеться вершина області допустимих розв'язків, у якій досягається оптимальний розв'язок.

**Зображення цільової функції.** Функцію прибутку  $z = 300x_1 + 250x_2$  описує нескінченна кількість рівностей (залежно від значення  $z$ ). Цільова функція не може бути зображена на площині у вигляді однієї лінії. Потрібно побудувати сім'ю рівнобіжних прямих, які мають назву *ліній однакового прибутку* (ліній рівня), шляхом надання  $z$  різних значень (рис. 9.3).

Нехай  $z = 1\,500$ . При цьому лінія рівня цільової функції може бути зображена за алгоритмом графічного подання обмеження-рівності. Лінія рівня  $z = 1\,500$  перетинає вісь  $x_1$  у точці  $N(5, 0)$  і вісь  $x_2$  у точці  $M(0, 6)$ . Точка  $N$  показує, скільки потрібно зробити телевізорів моделі  $A$ , щоб дістати прибуток 1 500 грн, тобто  $1\,500 : 300 = 5$ . Внесок одного телевізора моделі  $B$  у сумарний прибуток становить 250 грн, отже, потрібно зробити 6 телевізорів моделі  $B$  (якщо виробляти тільки модель  $B$ ) для одержання прибутку 1 500 грн. Всі точки відрізка  $MN$  знаходяться всередині допустимої області і є розв'язками, що дають однаковий сумарний прибуток 1 500 грн.

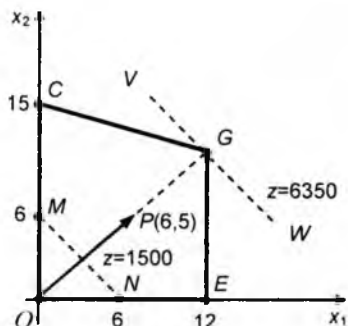


Рис. 9.3. Зображення області допустимих розв'язків

Аналогічно формуються лінії однакового прибутку для інших значень прибутку. При цьому рівень прибутку зростає з віддаленням від початку координат (точки  $O$ ). Виникає питання, де знаходиться найбільш віддалена лінія рівного рівня?

**Пошук оптимального розв'язку.** Із загальної теорії оптимізації відомо, що функція зростає в напрямку свого градієнта (див. розд. 5). Функція цілі  $z$  розглянутої задачі лінійна, тому градієнт  $\nabla z = (300, 250)$ . Графічно градієнт  $\nabla z$  – це вектор нормалі до

лінії однакового рівня цільової функції (прибутку) з компонентами  $(300, 250)$ , тобто градієнт  $\nabla z$  рівнобіжний вектору  $OP$  (рис. 9.3).

Тепер, якщо почати побудову ліній однакового прибутку в напрямку градієнта  $OP$ , то вони будуть характеризувати однакові прибутки, що збільшуються.

У розглянутому прикладі найбільш далека лінія рівного прибутку  $WV$  проходить через точку  $G(12, 11)$ , яка і є оптимальним розв'язком. Значення цільової функції складає  $300 \times 12 + 250 \times 11 = 6\,350$ . Це і є екстремальне значення прибутку.

При застосуванні графічного методу можуть виникнути дві ситуації. Перша – крайня лінія рівного прибутку проходить через єдину вершину, забезпечуючи єдиний оптимальний розв'язок. Друга – максимальна лінія рівного прибутку збіжиться з однією з ліній, що обмежують область допустимих розв'язків. Таку ситуацію при розв'язуванні задачі максимізації показано на рис. 9.4. Лінія рівня цільової функції під час руху від початку координат при досягненні межі області допустимих розв'язків проходить не через одну з вершин цієї області, а збігається із сегментом одного з обмежень між двома вершинами (на рис. 9.4 це точки  $P$  і  $Q$ ). Це відбувається, коли лінія однакового прибутку рівнобіжна “активному” (обов'язковому) обмеженню. У такому разі оптимальними розв'язками є точки  $P$  і  $Q$ , а також нескінченна множина точок, що належить відрізу  $PQ$ .

Внаслідок лінійності функції цілі й функцій обмежень можна довести, що для ефективного пошуку оптимального розв'язку досить брати до уваги тільки кутові точки (у даному прикладі – це точки  $O, C, G, E$  на рис. 9.3).

Отже, оптимальний розв'язок завжди знаходиться на межі, а не всередині області допустимих розв'язків, і, якщо він існує, то завжди збігається з вершиною.

Якщо оптимальні значення  $x_1$  і  $x_2$  підставити в обмеження, то розв'язок буде цілком використовувати тільки другий і третій ресурси. Таким чином, обмеження робочої сили не є критичним. Це видно з рис. 9.2, де обмеження робочої сили не проходить через оптимальну точку. Взагалі будь-яке обмеження, що не проходить через оптимальну вершину, не є критичним (ресурс, що відповідає такому обмеженню, використовується не повністю).

Задача планування виробництва (9.21)–(9.25) записана в стандартній формі. Для зведення її до канонічної форми скористаємося співвідношеннями (9.17)–(9.20). Математична модель набуває вигляду:

$$z = 300x_1 + 250x_2 \rightarrow \max, \quad (9.26)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 40, \\ x_1 + 3x_2 + s_2 = 45, \\ x_1 + s_3 = 12, \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0, \end{cases} \quad (9.27)$$

де  $s_1, s_2, s_3$  – відповідно резерв робочого часу, резерв часу підготування комплектуючих, резерв торгового обмеження.

**Вправа 9.1.** Підрахувати надлишковий запас робочого часу в точці  $C$ .

### 9.5. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Використовуючи наведені в розд. 5 визначення глобального і локального розв'язку задачі, приймемо без доказу такі факти.

Будь-який локальний розв'язок задачі ЛП є і глобальним. Якщо допустима множина  $X$  задачі ЛП непорожня та обмежена, то задача має розв'язок.

Ще раз звернемося до геометричної інтерпретації задачі лінійного програмування з двома змінними  $n = 2$ . Допустима множина даної задачі – деякий багатокутник  $X$  (рис. 9.5).



Рис. 9.4. Приклад нескінченної множини розв'язків

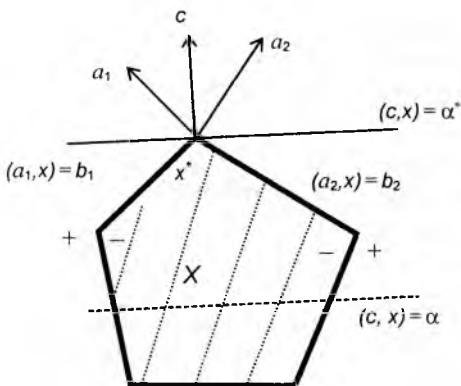


Рис. 9.5. Характеристика оптимальної точки задачі ЛП

Лінії рівня цільової функції являють собою сім'ю рівнобіжних прямих  $(c, x) = \alpha$ , причому їх загальну нормаль  $c$  спрямовано в бік зростання функції  $(c, x)$ . Пошук розв'язку задачі зводиться до визначення максимального числа  $\alpha^*$  серед усіх  $\alpha$ , за яких пряма  $(c, x) = \alpha$  має непорожній перетин з  $X$ . Якщо таке (скінченне) число  $\alpha^*$  існує, то воно є розв'язком задачі.

У даному випадку (рис. 9.5) розв'язок є єдиним – це точка  $x^*$ , в якій активними є обмеження  $a_1$  і  $a_2$ .

Зауважимо, що на рис. 9.5 нормаль до цільової функції розміщено між нормальми  $a_1$  і  $a_2$  активних обмежень у точці  $x^*$ . Це означає, що  $c$  є лінійною комбінацією векторів  $a_1$  і  $a_2$  з невід'ємними коефіцієнтами. Звідси зрозуміло геометричний зміст двох фундаментальних фактів.

Допустима точка  $x^*$  є розв'язком задачі лінійного програмування (рис. 9.5) тоді і лише тоді, коли існують такі числа  $y_i^* \geq 0$ ,  $(i \in I(x^*))$ , що

$$c = \sum_{i \in I(x^*)} y_i^* a_i, \quad (9.28)$$

де  $I(x^*)$  – множина номерів активних обмежень.

Нехай задача ЛП має розв'язок, причому її допустима множина має хоча б одну вершину. Тоді існує така вершина, що служить розв'язком задачі. Зокрема, якщо розв'язок єдиний, то він обов'язково є вершиною.

Отже, якщо задача ЛП має розв'язок, то для його визначення потрібно знайти усі вершини допустимої множини і вибрати серед них ту, на якій функція цілі досягає екстремального значення. Повний перебір вершин у задачах практичної розмірності неможливий, тому розроблено метод упорядкованого перебору вершин (перебору, при якому кожна наступна вершина краща за значенням цільової функції), а саме *симплекс-метод*.

## 9.6. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Фундаментом лінійного програмування, зокрема симплекс-методу, є теорія опуклих функцій і множин та теорія скінченних лінійних нерівностей. Багато основних означень уже розглянуті в розд. 5. Уведемо додаткові необхідні поняття.

### 9.6.1. Опуклі множини і функції

Нехай задано дві точки  $x, y \in R^n$ , тоді їх *опуклою комбінацією* буде будь-яка точка вигляду

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad \lambda \in R^1 \text{ і } 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (9.29)$$

Якщо  $0 < \lambda < 1$ , то  $z$  є строгою опуклою комбінацією  $x$  та  $y$ .

Точкова множина  $S \subseteq R^n$  є *опуклою*, якщо вона містить всі опуклі комбінації пар точок  $x, y \in S$ .

*Екстремальною* точкою опуклої множини  $S \subseteq R^n$  називається така точка  $z \in S$ , для якої виконання умови

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad \lambda \in R^1 \text{ і } 0 < \lambda < 1, \quad x, y \in S \quad (9.30)$$

означає, що  $x = y = z$ .

Відзначимо, що перетин будь-якого числа опуклих множин є опуклим.

### 9.6.2. Лінійні комбінації

Нехай є набори з  $n$  векторів  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  і  $n$  чисел  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Складемо лінійну комбінацію векторів  $\{A_i\}$  з коефіцієнтами  $\{x_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Для цього  $i$ -й вектор помножимо на  $i$ -те число і візьмемо суму всіх отриманих добутків.

Інакше кажучи, *лінійною комбінацією* векторів  $\{A_i\}$  із коефіцієнтами  $\{x_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , називається вектор  $b$  вигляду

$$b = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n. \quad (9.31)$$



Формування лінійної комбінації виконується з упорядкованими наборами векторів і чисел, що дає змогу подати її у вигляді матрично-векторної операції

$$b = (A_1, A_2, \dots, A_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix} = AX,$$

де вектори  $\{A_i\}$  – стовпці матриці  $A$ .

Отже, будь-який добуток матриці  $A$  і деякого вектора  $X$  є лінійною комбінацією стовпців  $\{A_i\}$  матриці  $A$  з коефіцієнтами, які дорівнюють компонентам вектора  $\{x_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Лінійну комбінацію з нульовими коефіцієнтами називають *тривіальною*, а якщо хоча б один із коефіцієнтів відмінний від нуля, – *нетривіальною*.

### 9.6.3. Лінійна залежність і незалежність

Нехай  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  – деякий набір векторів і вектор  $A_{k+1}$  можна подати у вигляді їх лінійної комбінації з деякими коефіцієнтами.

Тоді говорять, що  $A_{k+1}$  є *лінійно залежним* від векторів  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ .

**Приклад 9.1.** Вектор  $A_1 = (3, 2, 3)$  є лінійною комбінацією  $A_1 = 3A_2 + 4A_3$  векторів  $A_2 = (1, 0, 1)$  і  $A_3 = (0, 0, 5, 0)$ . Отже, вектор  $a$  лінійно залежить від  $\{A_2, A_3\}$ .

Лінійну залежність можна визначити інакше – як властивість набору векторів. Вектори  $\{A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}\}$  лінійно залежні, якщо нуль можна подати у вигляді їх нетривіальної лінійної комбінації. Наприклад, вектори  $A_1, A_2$  і  $A_3$  лінійно залежні, оскільки їх нетривіальна лінійна комбінація дорівнює нулеві:  $3A_2 + 4A_3 - A_1 = 0$ .

Якщо вектор  $A_{k+1}$  не може бути поданий у вигляді лінійної комбінації векторів  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ , то вважають, що  $A_{k+1}$  є *лінійно незалежним* від  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ . Аналогічно система векторів  $\{A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}\}$  називається лінійно незалежною, якщо будь-яка їх нетривіальна лінійна комбінація відмінна від нуля.

**Приклад 9.2.** Вектор  $A_1 = (1, 1, -1)$  не можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів  $A_2 = (1, 0, 1)$  і  $A_3 = (0, 0, 5, 0)$ . Отже, система  $\{A_1, A_2, A_3\}$  є лінійно незалежною.

Якщо стовпці деякої матриці  $A$  лінійно незалежні, то говорять, що  $A$  має *повний стовпцевий ранг*. Матриця  $A$  має *повний строковий ранг*, якщо лінійно незалежні її рядки.

#### 9.6.4. Елементи теорії лінійних нерівностей

Наведемо визначення основних елементів теорії лінійних нерівностей.  
Рангом  $r$  скінченної системи лінійних нерівностей над простором  $R^n$

$$(a_j, x) \leq b_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (9.32)$$

називається максимальне число лінійно незалежних векторів з множини  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ . Вектор  $x^0$  називається розв'язком системи (9.32), якщо він задовольняє всі її нерівності. Система (9.32) називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Якщо  $(a, x) \leq b$  – лінійна нерівність, причому  $a \neq 0$ , то множина  $P = \{x \in R^n : (a, x) \leq b\}$  називається півпростором простору  $R^n$ .

Точкова множина  $P^* = \{x \in R^n : (a, x) = b\}$  називається гіперплощиною.

Якщо система (9.32) сумісна, то множина її розв'язків збігається з пелетиною скінченного числа півпросторів і тому є опуклою. У несумісній системі рівнянь множина розв'язків порожня.

Відомо (див. розд. 5), що непорожня множина  $X \subset R^n$  розв'язків системи (9.32) називається опуклою поліедральною множиною (поліедром) або багатогранником розв'язків вигляду

$$X = \{x \in R^n \mid Ax \leq b\} = \{x \in R^n : (a_j, x) \leq b_j, \quad j = \overline{1, m}\}, \quad (9.33)$$

де  $A$  – матриця коефіцієнтів системи з рядками  $a_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad b \in R^m$ .

Для будь-якої точки  $x \in X \subset R^n$  позначимо через  $I(x)$  множину номерів тих нерівностей із (9.33), що у даній точці виконуються як рівності

$$I(x) = \{i, 1 \leq i \leq m \mid (a_i, x) = b_i\}. \quad (9.34)$$

Точка  $x^*$  називається вершиною поліедра  $X$  із (9.33), якщо  $x^* \in X$  і серед векторів  $a_i, i \in I(x^*),$  є  $n$  лінійно незалежних, тобто ранг матриці  $A_{I(x^*)} = n$ .

Отже, точка  $x^* \in X$  є вершиною  $X$ , якщо вона є єдиним розв'язком системи рівнянь  $A_{I(x^*)} x = b_{I(x^*)}$ .

Таким чином, для вершини  $x^*$  у разі потреби  $|I(x^*)| \geq n$ . Вершину  $x^*$  називають невиродженою, якщо  $|I(x^*)| = n$ . у протилежному разі – виродженою.

Прикладом виродження може служити випадок, коли три або більше обмежень проходять через розв'язок (вершину багатокутника розв'язків) задачі з двома змінними (рис. 9.6). Відзначимо, що будь-який поліедр має скінченну кількість вершин.

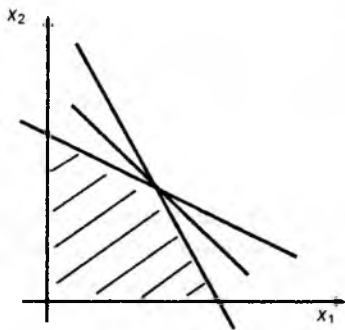


Рис. 9.6. Вироджена вершина в задачі з двома змінними

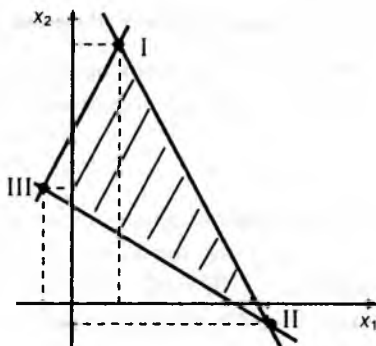


Рис. 9.7. Багатокутник розв'язків системи нерівностей з прикладу 9.3

**Приклад 9.3.** Розглянемо систему лінійних нерівностей вигляду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4. \end{cases} \quad (9.35)$$

Потрібно надати:

- графічне подання множини розв'язків системи (9.35) – поліедра  $X$ ;
- аналітичний опис усіх вершин поліедра  $X$ .

Матриця  $A$  з рядками  $a_i, i = 1, 2, 3$ , коефіцієнтів системи має вигляд

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

вектор  $b = (6, 9, 4), n = 2, x \in R^2$ .

Стовпці  $A_j, j = 1, 2$ , матриці  $A$  лінійно незалежні, тому повний стовпцевий ранг матриці дорівнює 2. Рядки матриці також лінійно незалежні, тому повний рядковий ранг дорівнює 3.

Кожна з нерівностей  $(a_i, x) \leq b_i$  визначає півплощину. Для геометричного зображення нерівностей системи побудуємо прямі вигляду

$$\{x_1 + x_2 = 6, -3x_1 + x_2 = 9, x_1 + 2x_2 = 4\},$$

кожна з яких поділяє площину на дві півплощини, і заштрихуємо відповідні нерівностям півплощини (рис. 9.7). Процедуру побудови описано в розд. 9.4.

Зобразимо вершини багатокутника розв'язків. Аналітичними описами вершин у даному прикладі можуть бути три можливих підсистеми рівнянь системи (9.35) вигляду

$$\text{I. } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6; \\ -3x_1 + x_2 = 9; \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6; \\ x_1 + 2x_2 = 4; \end{cases} \quad \text{III. } \begin{cases} -3x_1 + x_2 = 9; \\ x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

У даному випадку всі ці підсистеми є сумісними і визначають вершини багатокутника розв'язків. Більше того, усі вершини багатокутника розв'язків неvierоджені. Їх координати I. : (0,75, 11,25); II. : (8, -2); III. : (-2, 3).

Оскільки перетин півплощин непорожній, строковий і стовпцевий ранги не збігаються, та система має нескінченну множину розв'язків. Це зумовлено тим, що будь-яка точка всередині заштрихованої області та на її межах (рис. 9.7) є допустимим розв'язком.

Відзначимо, що зображення алгебричних рівностей і нерівностей на координатній площині у вигляді ліній і кривих уперше було застосовано французьким філософом Декартом у XVII столітті.

Гранню поліедра  $X$  (9.33) називається його непорожня підмножина  $\Gamma$  вигляду

$$\Gamma = \{x \in X \mid (a_i, x) = b_i, i = \overline{1, L}\}. \quad (9.36)$$

Іншими словами, аналітичний опис грані поліедра  $X$  матимемо, замінивши деякі знаки нерівностей у системі, що задає  $X$ , знаками рівностей, причому отримана система має розв'язок.

Відзначимо, що ранг системи  $(a_i, x) = b_i, i = \overline{1, L}$  може лежати в межах від 1 до  $n$ .

Якщо ранг системи  $(a_i, x) = b_i$  дорівнює 1, то ця система має одне рівняння і визначає гіперплощину розмірності  $(n-1)$ . Дійсно, із даного рівняння можна знайти тільки одну змінну, а інші  $(n-1)$  змінні можуть набувати будь-яких значень.

Якщо ранг системи  $(a_i, x) = b_i$  дорівнює  $n$ , то система складається з  $n$  рівнянь і визначає деяку точку  $x$  простору  $R^n$ , що у випадку виконання умови  $x \in X$  є вершиною поліедра  $X$  і може розглядатися як грань нульової розмірності.

**Приклад 9.4.** Нехай розглядається поліедр  $X$  у просторі  $R^2$ . Тоді система з одного рівняння задає пряму лінію на площині (рівняння прямої  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ ). З даного рівняння можна виразити одну змінну, наприклад  $x_1$ , тоді для будь-якого значення  $x_2$  можна знайти відповідне (одне) значення  $x_1$ . Система двох рівнянь визначає точку, тому що пов'язує обидві змінні.

Грань поліедра  $X$ , що має одиничну розмірність, тобто є відрізком, променем або прямою, називається *ребром*. Вершини  $x_1$  і  $x_2$  називаються *суміжними*, якщо відрізок  $[x_1, x_2]$  є ребром  $X$ .

Нехай  $x_1$  і  $x_2$  – вершини поліедра  $X \subset R^n$ , причому  $x_1$  не вироджена.

Має місце наступний важливий факт. Вершини  $x_1$  і  $x_2$  будуть суміжними тоді і тільки тоді, коли  $|I(x_1) \cap I(x_2)| = n - 1$ , де  $I(x_1)$ ,  $I(x_2)$  – множини індексів обмежень, які є активними у точках відповідно  $x_1$  і  $x_2$  (нерівностей, що виконуються в цих точках як рівності).

Отже, системи рівнянь, що визначають суміжні вершини, відрізняються одним рівнянням.

Відзначимо, що на рис. 9.7 усі вершини багатокутника розв'язків є суміжними.

**Приклад 9.5.** Нехай  $X$  – поліедр у  $R^2$ , що задається системою

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ -2x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + x_2 \geq -3. \end{cases}$$

Знайти (не здійснюючи геометричні побудови) усі вершини, суміжні з вершиною  $x^* = (3, 2)$ .

Вершина  $x^* = (3, 2)$  не вироджена і  $I(x^*) = \{1, 2\}$  (можна перевірити підстановкою координат вершини в нерівності системи). Тому досить знайти розв'язок систем виду  $A_l = b$ , де  $l = \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$  і вибрати серед них ті, що належать  $X$ , тобто задовольняють усі чотири нерівності. Отже,  $x_1 = (-1, 6)$ ,

$$x_2 = \left( -\frac{1}{9}, -\frac{8}{3} \right).$$

### 9.6.5. Базисні допустимі розв'язки.

**Перехід від одного базисного допустимого розв'язку до іншого**

Нехай задана сумісна система рівностей і нерівностей вигляду

$$\begin{aligned} Ax &= b; \\ x &\geq 0, \end{aligned} \tag{9.37}$$

де  $A$  – матриця розмірності  $(m \times n)$  і  $m < n$ .

Нагадаємо, що  $m$  – число рівностей (рядків матриці), а  $n$  – число змінних  $x_i$ . Таким чином, розглядається недовизначена система нерівностей. Вона описує деякий поліедр  $X \subset R^n$ .

*Базисом*  $B$  вершини  $x$  поліедра  $X$  називається довільна система з  $m$  лінійно незалежних стовпців  $A_{B(i)}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , матриці  $A$ , що включає в себе всі стовпці, які відповідають додатним координатам точки  $x$ .

Змінні  $x_i$ , що відповідають заданому базису, називаються *базисними*. При цьому *небазисні* змінні дорівнюють нулеві. Така можливість визначається нерівностями  $x \geq 0$ . Отриманий розв'язок  $x$  називається *базисним допустимим розв'язком*.

**Приклад 9.6.** Знайти усі вершини поліедра  $X \subset R^4$ , який задано системою

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \end{cases}$$

а також базисні розв'язки, відповідні вершинам поліедра.

Очевидно, всі вершини поліедра мають тільки дві ненульові координати, які можна знайти з перших двох рівнянь. Усього шість таких можливостей. Розглянемо їх.

1. Базис  $B = \{A_1, A_2\}$ . У даному випадку система, що визначає вершину, має вигляд

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 = 3, \\ x_{3,4} = 0. \end{cases}$$

Відповідний базисний розв'язок  $\left(\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, 0, 0\right)$ . Оскільки всі числа невід'ємні, то це вершина поліедра, перші дві змінні – базисні, останні дві – небазисні.

2. Базис  $B = \{A_1, A_3\}$ . Базисний розв'язок  $\left(\frac{11}{7}, 0, -\frac{1}{7}, 0\right)$ . Оскільки  $x_3$  менший за нуль, то це недопустимий базисний розв'язок.

3. Базис  $B = \{A_1, A_4\}$ . Базисний розв'язок  $\left(\frac{5}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$ , що визначає вершину поліедра.

4. Базис  $B = \{A_2, A_3\}$ . Базисний розв'язок  $\left(0, \frac{11}{14}, \frac{9}{14}, 0\right)$ , який визначає вершину поліедра.

5. Базис  $B = \{A_2, A_4\}$ . Базисний розв'язок  $(0, -5, 0, 9)$ . Оскільки  $x_2$  менший за нуль, то це не вершина допустимого поліедра.

6) Базис  $B = \{A_3, A_4\}$ . Вершина  $\left(0, 0, \frac{5}{9}, \frac{11}{9}\right)$ .

Отже, усього вершин поліедра (базисних допустимих розв'язків) чотири.

Нехай  $x_0$  – базисний допустимий розв'язок для поліедра  $X \subset R^n$  вигляду (9.29), що відповідає упорядкованій множині індексів базисних стовпців  $A_{B(i)}$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Якщо  $x_{i0}$  – базисні компоненти вектора  $x_0$ , то

$$\sum_{i=1}^m x_{i0} A_{B(i)} = b, \quad (9.38)$$

де  $x_{i0} \geq 0$ .

За визначенням множина базисних вектор-стовпців  $B$  є лінійно незалежною, тому довільний небазисний стовпець  $A_j \in R^m$ ,  $A_j \notin B$ , можна подати у вигляді лінійної комбінації базисних стовпців:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} A_{B(i)} = A_j. \quad (9.39)$$

Помноживши (9.39) на скаляр  $\theta > 0$  і віднявши отриману рівність із (9.38), дістанемо

$$\sum_{i=1}^m (x_{i0} - \theta x_{ij}) A_{B(i)} + \theta A_j = b. \quad (9.40)$$

Вважатимемо, що  $x_0$  – не вироджений розв'язок. Тоді всі  $x_{i0} > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , і, збільшуючи  $\theta$ , починаючи з нуля, переходитимемо від заданого допустимого базисного розв'язку до деяких допустимих розв'язків із  $(m+1)$  строго додатними компонентами. Як довго можна збільшувати  $\theta$  і залишатися в допустимій області (поліедрі  $X$ )? Доти, поки одна з компонент  $(x_{i0} - \theta x_{ij})$  не перетвориться на нуль, що відбудеться при значенні

$$\theta_0 = \min_{i: x_{ij} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{ij}} = \frac{x_{i_0 0}}{x_{i_0 j}}. \quad (9.41)$$

Окремий випадок 1 – *виродженість*. Відзначимо, що мінімум у (9.41) може бути досягнутий при більше, ніж одному  $i$ . Це означає, що в (9.40) відповідні компоненти перетворяться на нуль. Отже, розв'язок вироджений – число ненульових змінних у розв'язку менше від числа обмежень.

Проблема полягає у виборі: яку із змінних вилучити з базису? Змінна, що вилучається, може бути обрана довільно, без впливу на остаточний розв'язок. Проте варто звернути увагу на те, що інша нульова змінна, не вилучена з базису, хоч і набуде нульового значення, але залишиться ба-

зисною і використовуватиметься в обчисленнях.

Окремий випадок 2 – *необмежений розв'язок*. Якщо усі  $x_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , невід'ємні, можна рухатися як завгодно далеко, залишаючись у допустимій множині. У такому разі область допустимих розв'язків необмежена. На рис. 9.8, що ілюструє цей випадок, область допустимих розв'язків буде нескінченно розширюватися. Оптимальний розв'язок є невизначеним. Такий результат свідчить або про помилку, або неправильність постановки задачі, або про некоректність припущень.

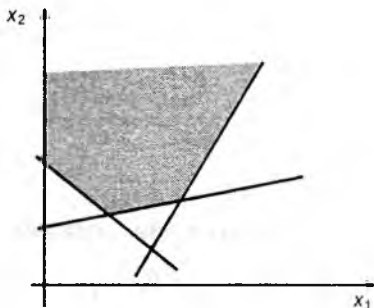


Рис. 9.8. Необмежена задача максимізації

**Приклад 9.7.** Продовжимо розгляд прикладу 9.6.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \end{cases}$$

і припустимого базисного розв'язку  $\left(\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, 0, 0\right)$  із множиною базисних вектор-стовпців  $B = \{A_1, A_2\}$ .

Небазисний стовпець  $A_4 = (-1, 2)$  можна подати у вигляді

$$A_4 = x_{14} A_1 + x_{24} A_2 = \frac{1}{7} A_1 + \frac{4}{7} A_2. \quad (9.42)$$

Тоді рівність (9.40) набуває вигляду

$$\left(\frac{9}{7} - \frac{1}{7}\theta\right) A_1 + \left(\frac{1}{7} - \frac{4}{7}\theta\right) A_2 + \theta A_4 = b. \quad (9.43)$$

Використовуючи формулу (9.41), визначимо

$$\theta_0 = \min_{l: x_{lj} > 0} \left\{ \frac{9/7}{1/7}, \frac{1/7}{4/7} \right\} = \frac{1}{4}.$$

При цьому  $l = 2$ . Отже, стовпець  $A_2$  вилючається з базису, стовпець  $A_4$  входить у базис, нові компоненти базисного розв'язку мають вигляд



$$x_{01} = \frac{9}{7} - \frac{1}{7}\theta_0 = \frac{9}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4};$$

$$x_{02} = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\theta_0 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} = 0;$$

$$x_{04} = \theta_0 = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, отримано новий базис  $B = \{A_1, A_4\}$  і новий базисний розв'язок  $\left(\frac{5}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$ , що визначає вершину поліедра (порівняйте з розв'язком 3 прикладу 9.6).

Вищевикладене можна узагальнити так.

Нехай задано базисний допустимий розв'язок  $x_{0i}$  із базисними компонентами  $x_{0i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , та базисом  $B = \{A_{B(i)}, i = \overline{1, m}\}$  і таке  $j$ , що  $A_j \notin B$ . Тоді новий допустимий розв'язок, обумовлений рівностями

$$\theta_0 = \min_{i: x_{ij} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{ij}} = \frac{x_{l0}}{x_{lj}}. \quad (9.44)$$

$$x'_{i0} = \begin{cases} x_{i0} - \theta_0 x_{ij}, & i \neq l, \\ \theta_0, & i = l, \end{cases} \quad (9.45)$$

є базисним допустимим розв'язком із базисом  $B'$

$$B'(i) = \begin{cases} B(i), & i \neq l, \\ j, & i = l. \end{cases} \quad (9.46)$$

Причому, якщо мінімум у (9.41) досягається при більше ніж одному  $i$ , то новий допустимий базисний розв'язок вироджений.

Отже, у будь-який момент можна легко одержати подання (9.39) будь-якого небазисного стовпця  $A_j$  через базисні стовпці. Для цього лише потрібно, щоб були відомі коефіцієнти  $x_{ij}$ .

**Приклад 9.8.** Зобразимо систему лінійних рівнянь

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$

у матричному вигляді (табл. 9.3), відокремлюючи праві частини рівнянь вертикальною лінією і розглядаючи їх як нульовий стовпець.

### 9.3. Подання системи лінійних рівнянь у матричному вигляді

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1	1	-2	4	-1
3	2	3	1	2

При виконанні елементарних перетворень над рядками, інформація, що подається відповідною системою рівнянь, не зміниться. Таким чином, знаючи базис  $B$ , можна зробити елементарні перетворення над рядками так, щоб базисні стовпці утворили одиничну підматрицю  $A_{B(i)} = e_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , де  $e_i$  – вектор-стовпець із  $m$  елементами, де в  $i$ -му рядку стоїть 1, а в інших рядках – 0.

Нехай у нашому прикладі  $B = \{A_1, A_2\}$ . Тоді виконаємо послідовно такі дії:

а) помножимо перший рядок на 2 і віднімемо результат із другого рядка, потім помножимо отриманий результат на  $\frac{1}{7}$ , це буде новий другий рядок (табл. 9.4);

б) помножимо новий другий рядок на 2 і, склавши результат із першим рядком, одержимо новий перший рядок (табл. 9.4).

### 9.4. Результат перетворення матриці

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$\frac{9}{7}$	1	0	2	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{7}$	0	1	-1	$\frac{4}{7}$

У нульовому стовпці стоять значення базисних змінних  $x_{(i)} = x_{i0}$ ,  $i = 1, 2$ , які мають місце, якщо небазисні змінні будуть дорівнювати нулеві (порівняйте з пунктом 1 прикладу 9.6). Перші два стовпці утворюють одиничну матрицю.

Зауважимо, що небазисні стовпці містять точно числа  $x_{ij}$  (порівняйте з (9.39)!), наприклад,  $A_4 = x_{14}A_1 + x_{24}A_2 = \frac{1}{7}A_1 + \frac{4}{7}A_2 = \sum_{i=1}^2 x_{i4}A_{B(i)}$ .

Отже, можна безпосередньо зробити обчислення, потрібні для зміни базису. Нехай, наприклад, в базис вводиться стовпець  $j = 4$ . Тоді (9.44) дає

$$\theta_0 = \min_{i: x_{ij} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{ij}} = \theta_0 = \min_{i: x_{ij} > 0} \left\{ \frac{9/7}{1/7}, \frac{1/7}{4/7} \right\} = \frac{1}{4},$$

якщо  $i = l = 2$ .

Таким чином, потрібно одержати в стовпці  $j=4$  одиничний вектор із 1 у рядку  $l=2$ . Для цього: а) розділимо другий рядок на  $\frac{4}{7}$ ; б) помножимо другий рядок на  $\frac{1}{7}$  і віднімемо результат із першого рядка.

Зазвичай для подання цієї операції в таблиці обводять кружком "головний" елемент  $x_{lj}$  (див. табл. 9.4). Нова таблиця має вигляд (табл. 9.5).

#### 9.5. Матриця $A$ з базисним стовпцем $A_4$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$\frac{5}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4}$	0
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{4}$	1

Новим базисом буде множина стовпців  $B=\{A_1, A_4\}$  і новий базисний розв'язок  $-\left(\frac{5}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$  (порівняйте з попереднім прикладом).

У загальному випадку, якщо  $B$  і  $B'$  – відповідно стара і нова базисні множини і  $x_{lj}$  – головний (ведучий) елемент, то

$$x'_{lq} = \frac{x_{lq}}{x_{lj}}, \quad q = \overline{0, n}; \quad (9.47)$$

$$x'_{iq} = x_{iq} - x'_{lq} x_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad i \neq l, \quad q = \overline{0, n};$$

$$B'(i) = \begin{cases} B(i), & i \neq l, \\ j, & i = l. \end{cases} \quad (9.48)$$

### 9.7. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Як зазначено в попередніх розділах, допустима множина розв'язків задачі лінійного програмування є багатогранником (поліедром). Оптимальний розв'язок задачі обов'язково збігається з однією (якщо розв'язок єдиний) або кількома (якщо існує множина еквівалентних оптимальних розв'язків) вершинами. Тому очевидним способом розв'язування задач ЛП є визначення координат усіх вершин багатогранника допустимих розв'язків,

обчислення значення цільової функції в кожній із них і визначення вершини з екстремальним значенням. Але цей метод вимагає дуже великих витрат обчислювальних ресурсів, поліедр допустимих розв'язків має скінченне число вершин, їх кількість дорівнює

$$N = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad (9.49)$$

де  $C_n^m$ ,  $n$  і  $m$  – відповідно числа сполучень змінних і обмежень.

Тому розробляють більш ефективні з обчислювальної точки зору методи задач ЛП.

Найбільш поширеним і включеним у багато пакетів прикладних програм є симплекс-метод розв'язування задач ЛП. Його основна ідея полягає в організації такого цілеспрямованого послідовного перебору вершин (базисних розв'язків) допустимого поліедра  $X$ , при якому значення цільової функції поліпшуються на кожній ітерації. У такий спосіб будується траєкторія руху до екстремуму, як послідовність вершин  $x^{k-1}$ ,  $x^k$ ,  $x^{k+1}$ , причому кожна пара вершин є суміжними. Вершина, для якої не існує кращої за значенням цільової функції, є оптимальним розв'язком. Це означає, що на відміну від більшості чисельних методів пошуку екстремуму симплекс-метод є скінченно-кроковою процедурою, яка гарантує при конкретній постановці задачі (невиродженість і обмеженість допустимої області) визначення оптимального розв'язку.

Симплекс-метод є універсальним і дає змогу розв'язувати задачі як максимізації, так і мінімізації цільової функції, але цей метод орієнтований на подання вихідної математичної моделі задачі в стандартній канонічній формі (див. розд. 9.3), тобто у вигляді

$$\begin{aligned} (c, x) &\rightarrow \min; \\ Ax &= b; \\ x &\geq 0; \\ c, x &\in R^n, b \in R^m. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Надалі, по умовчання, вимогу невід'ємності змінних опускатимемо.

Теоретичні основи реалізації симплекс-методу викладені в розд. 9.6. Нижче запропоновано основні етапи практичної реалізації обчислювальних процедур алгоритму.

## Основні етапи реалізації симплекс-методу.

Крок 0. Полягає у зведенні вихідної математичної моделі задачі до канонічної форми і запису її у вигляді, зручному для реалізації наступних обчислювальних процедур.

Крок 1. Визначення початкового допустимого базисного розв'язку ( $n - m$  небазисних змінних дорівнюють нулеві) і побудова для нього вихідної симплекс-таблиці.

Крок 2. Перевірка оптимальності отриманого розв'язку. Якщо розв'язок оптимальний – перехід до кроку 5. Якщо ні – перехід до кроку 3.

Крок 3. Побудова нового базисного розв'язку (вибір суміжної вершини багатогранника), який забезпечує поліпшення значення цільової функції. Перехід до кроку 4.

Крок 3 передбачає визначення змінних, які потрібно ввести або вилучити з базису.

Крок 4. Визначення нового базисного розв'язку, що відповідає новому складу небазисних і базисних змінних, і формування нової симплекс-таблиці. Перехід до кроку 2.

Крок 5. Перевірка, чи є оптимальний розв'язок єдиним або існує множина оптимальних розв'язків, і закінчення обчислень.

Розглянемо реалізацію вищенаведених обчислювальних процедур на конкретних прикладах.

### 9.7.1. Максимізація цільової функції

Розглянемо задачу планування виробництва (9.21)–(9.25), яка вже була розв'язана графічно (розд. 9.4). Вихідна математична модель цієї задачі має вигляд

$$\begin{aligned} z &= 300x_1 + 250x_2 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 40, \\ x_1 + 3x_2 \leq 45, \\ x_1 + 0x_2 \leq 12. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.51)$$

Проілюструємо на прикладі розв'язування цієї задачі обчислювальні процедури симплекс-методу.

Крок 0. Зведення моделі до канонічної форми і вигляду, зручному для наступного використання. Канонічна форма передбачає, що всі обмеження

мають бути подані у вигляді рівностей. Для цього введемо в кожному з нерівностей додаткову змінну  $s_i, i = \overline{1,3}$  (див. розд. 9.3). Тобто

$$z = 300x_1 + 250x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 40, \\ x_1 + 3x_2 + s_2 = 45, \\ x_1 + 0x_2 + s_3 = 12. \end{cases} \quad (9.52)$$

Особливі ситуації. У загальному випадку вихідна математична модель задачі може містити обмеження не тільки у вигляді нерівностей “менше або дорівнює ( $\leq$ )”, але й у вигляді “більше або дорівнює ( $\geq$ )” і рівностей. Розглянемо процедуру зведення до канонічного вигляду обмежень двох останніх типів.

Обмеження вигляду

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad (9.53)$$

шляхом введення змінної перевиконання  $s_i$  трансформується в рівність вигляду (див. розд. 9.3)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i.$$

При цьому має виконуватися умова  $s_i \geq 0$ . Проте, якщо  $x_j = 0, \forall j$ , то  $s_i = -b_i$ , тобто умова невід’ємності не виконується. Щоб задовольнити умову, введемо ще одну змінну  $d_i$ . Вона називається *штучною*. Тоді вихідна нерівність набуває вигляду

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i + d_i = b_i,$$

при цьому  $s_i \geq 0, d_i \geq 0$ . Обмеження рівності вигляду

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

також стає некоректним у випадку, якщо  $x_j = 0, \forall j$  ( $0 = b_i$ ). Це можна подолати шляхом подання рівності у вигляді

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + d_i = b_i, \quad d_i \geq 0. \quad (9.54)$$

Всі змінні, тобто резерву і надлишку  $s_i$ , штучні  $d_i$  мають бути введені до цільової функції. Це збільшує вимірність задачі, проте уможлиблює уніфікацію процедури вибору стартової вершини допустимого багатогранника.

Змінні  $s_i$  включаються в цільову функцію зі своїми знаками і нульовими коефіцієнтами (див. 9.52), оскільки ці змінні не впливають на значення функції цілі. На відміну від цього аналіз змісту штучних змінних  $d_i$  показує, що їх відмінність від нульових значень є небажаною, оскільки означає або невиконання обмежень-рівностей, або нераціональну перевитрату ресурсів. Тому змінні  $d_i$  вводяться в цільову функцію з великим коефіцієнтом  $M$  (наприклад, 1 000 або 10 000), який є “штрафом” за відхилення змінних  $d_i$  від нульових значень. У разі максимізації цільової функції ці коефіцієнти за змінних  $d_i$  вводяться зі знаком мінус, а при мінімізації – зі знаком плюс.

Крок 1. Визначення початкового допустимого базисного розв’язку (стартової точки) і побудова вихідної симплекс-таблиці.

При реалізації симплекс-методу за стартову точку можна вибрати будь-яку вершину багатогранника допустимих розв’язків, досить тільки обчислити її координати. Для цього потрібно визначити базисні і небазисні змінні і розв’язати відповідну систему рівнянь (див. приклад 9.6).

Кількість небазисних ( $=0$ ) змінних дорівнює  $(n-m)$ , де  $n$  – загальна кількість змінних усіх видів, включаючи додаткові;  $m$  – кількість обмежень усіх видів, крім обмежень на невід’ємність змінних.

Для задач великої розмірності визначення координат довільної припустимої вершини є досить трудомісткою задачею. Запис вихідної моделі в канонічній формі дає змогу спростити та уніфікувати процедуру вибору стартової вершини. Для цього в канонічній моделі досить вибрати небазисними ( $=0$ ) всі керовані змінні  $x$  і змінні перевиконання. Тоді змінні резерву і штучні змінні утворюють базис, а їх значення визначаються без обчислень, оскільки вони утворюють одиничну матрицю.

Для задачі (9.52) за вищенаведеним правилом стартова вершина має координати  $x_1=0, x_2=0, s_1=40, s_2=45, s_3=12$ , змінні  $s_i, i=\overline{1,3}$ , є базисними, а  $x_1$  і  $x_2$  – небазисними. Функція цілі в цій вершині дорівнює нулеві.

Тепер потрібно подати наявну інформацію у формі, яка є зручною для алгоритмізації процесів аналізу оптимальності розв'язків і побудови траєкторії руху до екстремальної вершини. Для цього використовуються симплекс-таблиці. Різні види зазначених таблиць містять однакову інформацію, але відрізняються формою її подання і позначеннями. Форма симплекс-таблиці залишається незмінною на всіх етапах розв'язування. Змінюються тільки кількісні значення її параметрів. Таблиця 9.6 являє собою прийнятну в даному посібнику форму симплекс-таблиць, заповнену даними стартового розв'язку задачі (9.52).

9.6. Симплекс-таблиця стартового розв'язку задачі (9.52)

Базисний рядок	Базисна змінна (БЗ)	Коефіцієнт функції цілі БЗ	Значення БЗ	Змінна					Відношення $\theta$
				керована		додаткова			
				$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
			$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	
$B_{s_1}$	$s_1$	0	40	2	1	1	0	0	$40/2 = 20$
$B_{s_2}$	$s_2$	0	45	1	3	0	1	0	$45/1 = 45$
$B_{s_3}$	$s_3$	0	12	1	0	0	0	1	$12/1 = 12$
$B_0$	Рядок коефіцієнта функції цілі $c_j$			300	250	0	0	0	
	Рядок коефіцієнта заміщення $z_j$			0	0	0	0	0	
	Рядок значення функції заміщення $\bar{c}_j = c_j - z_j$			300	250	0	0	0	

У табл. 9.6 збережені всі введені раніше позначення. Виняток складають коефіцієнт заміщення  $z_j$  і функція заміщення  $\bar{c}_j$ . Обидва параметри пов'язані з оцінкою доцільності введення в базис нової змінної, тобто переходу в нову вершину багатогранника допустимих розв'язків. Такий перехід має супроводжуватися поліпшенням значення цільової функції. Тому потрібна оцінка наслідків введення в базис кожної із небазисних змінних. Такою оцінкою є функція заміщення

$$\bar{c}_j = c_j - z_j, \quad (9.55)$$

де  $j$  – індекс небазисної змінної;  $c_j$  – коефіцієнт функції цілі при  $j$ -й змінній;  $z_j$  – коефіцієнт заміщення  $j$ -ї змінної.



Оцінка  $\bar{c}_j$  є нормованою, вона показує на скільки зміниться значення цільової функції при введенні в базис одиничного значення  $j$ -ї небазисної змінної. Змістовна інтерпретація оцінки  $\bar{c}_j$  полягає в наступному. Якщо ввести в базис  $j$ -ту небазисну змінну, то кожна одиниця цієї змінної забезпечить збільшення цільової функції на величину  $c_j$ , де  $c_j$  – коефіцієнт цієї змінної в цільовій функції. Наприклад, для моделі (9.52) кожна одиниця змінної  $x_1$  дає 300 грн, а  $x_2$  – 250 грн. Але збільшення виробництва продукції  $A$  (збільшення змінної  $x_1$ ) внаслідок обмеженості має супроводжуватися зменшенням випуску іншої продукції, тобто зменшенням значень інших змінних. Це викликає зниження прибутку, тобто зменшення значення цільової функції на величину  $z_j$ . Коефіцієнт  $z_j$  обчислюється за формулою

$$z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}c_i, \quad (9.56)$$

де  $a_{ij}$  – елементи  $i$ -го стовпця ( $A_i$ ) матриці  $A$ .

Наприклад (див. табл. 9.6), коефіцієнт заміщення змінної  $x_1$  дорівнює  $z_1 = 2 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$ , а функція заміщення  $\bar{c}_1 = c_1 - z_1 = 300 - 0 = 300$ .

Отже, якщо  $\bar{c}_j > 0$ , то  $j$ -ту небазисну змінну доцільно ввести в базис, і це приведе до збільшення значення цільової функції; за умови  $\bar{c}_j = 0$  цільова функція не змінюється, а при  $\bar{c}_j < 0$  – зменшиться. Отже, у випадку  $\bar{c}_j \leq 0$ ,  $\forall j$   $\bar{c}_j = c_j - z_j$  досягнуто глобальний екстремум. На основі цих співвідношень будується траєкторія руху до екстремуму і визначається момент досягнення оптимуму.

Крок 2. У таблиці 9.6 рядок значень функції заміщення  $\bar{c}$  містить два додатних значення. Отже, стартовий розв'язок не оптимальний, і його потрібно поліпшити, тобто побудувати новий базисний розв'язок.

Крок 3. Формування нового базисного розв'язку. Побудова нового базисного розв'язку складається з двох етапів. По-перше, визначення небазисної змінної, яка вводиться в базис, і, по-друге, визначення базисної змінної, що вилучається з базису.

Згідно з першим етапом, змінну, яку вводять в базис, визначають за таким правилом: у базис вводять небазисну змінну, що має максимальне додатне значення функції заміщення  $\bar{c}_j$ . Таке значення ( $\bar{c}_j = 300$ ) у табл. 9.6

має змінна  $x_1$ , її потрібно ввести в базисний розв'язок. Стовпець коефіцієнтів при змінній, яка вводиться у базис, тобто  $A_1$ , називається *ведучим стовпцем* симплекс-таблиці.

Проте для того, щоб увести в базис нову змінну, з нього потрібно вилучити одну з поточних базисних змінних. На другому етапі вибір цієї змінної визначають за правилом: із базису вилучається змінна, що має мінімальне невід'ємне відношення  $\theta$ , тобто

$$\theta = \min_i \frac{a_{i0}}{a_{i1}}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (9.57)$$

де  $a_{i0}$  – елементи стовпця  $A_0$ , тобто значення базисних змінних;  $a_{i1}$  – елементи ведучого стовпця  $A_1$ . Формула (9.57) аналогічна формулі (9.44).

Як видно з табл. 9.6, найменше значення  $\theta = 12$  має змінна  $s_3$ , її вилучають з базису.

Базисний рядок змінної, що вилучається з базису, називається *ведучим рядком*, а елемент, який стоїть на перетині ведучого стовпця і ведучого рядка, – *ведучим елементом*. У табл. 9.6 його позначено кружком. Отже, новий базис містить змінні  $s_1, s_2, x_1$ , змінна  $s_3$  стає небазисною. Потрібно визначити новий базисний розв'язок й оцінити його оптимальність. Для цього створюється нова симплекс-таблиця.

Крок 4. Формування нової симплекс-таблиці. Нова таблиця цілком аналогічна табл. 9.6, відрізняються тільки числові дані. Розглянемо їх обчислення. Заповнення перших двох стовпців і рядка  $B_0$  не викликає труднощів. Інші дані обчислюються в такий спосіб.

### 9.7. Симплекс-таблиця першого поліпшеного розв'язку

Базисний рядок	Базисна змінна (БЗ)	Коефіцієнт функції цілі БЗ	Значення БЗ	Змінна					Відношення, $\theta$
				керована		додаткова			
				$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
			$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	
$B_{s_1}$	$s_1$	0	16	0	1	1	0	-2	16/1 = 16
$B_{s_2}$	$s_2$	0	33	0	3	0	1	-1	33/3 = 11
$B_{x_1}$	$x_1$	300	12	1	0	0	0	1	12/0 = $\infty$
$B_0$	Рядок коефіцієнта функції цілі, $c_j$			300	250	0	0	0	
	Рядок коефіцієнта заміщення, $z_j$			300	0	0	0	300	
	Рядок значення функції заміщення, $\bar{c}_j = c_j - z_j$			0	250	0	0	-300	

Процедура починається з трансформування рядка вилученої змінної, а потім інших базисних рядків і закінчується обчисленням рядка  $\bar{c}_j = c_j - z_j$  і стовпця  $\theta$  (відношень).

Для формування рядка матриці потрібно всі елементи рядка матриці  $A$  (див. табл. 9.6) поділити на ведучий елемент, тобто 1.

Перетворення рядків  $B_{x_1}$  і  $B_{s_2}$  матриці  $A$  виконується за формулою (9.47). Мета перетворень полягає у визначенні нових значень базисних змінних  $s_1$  і  $s_2$  після введення в базис  $x_1$ . Оскільки  $x_2 = 0$ , то для визначення досить із відповідних рівнянь (рядків  $B_{x_1}$  і  $B_{s_2}$ ) вилучити змінну  $x_1$ . Найпростіше це зробити методом жорданових вилучень. Тоді

старий рядок	$B_{x_1}$	40 2 1 1 0 0
– рядок	$B_{x_1}$	(12 1 0 0 0 1) × 2
новий рядок	$B_{x_1}$	16 0 1 1 0 –2.
Аналогічно		
старий рядок	$B_{s_2}$	45 1 3 0 1 0
– рядок	$B_{x_1}$	(12 1 0 0 0 1) × 2
новий рядок	$B_{s_2}$	33 0 3 0 1 –1

Значення  $z_j$  визначають за формулою (9.56). Для даних із табл. 9.7 розрахунок значень  $\bar{c}_j$  має такий вигляд:

x <sub>1</sub>	300 – (0 × 0 + 0 × 0 + 300 × 1) = 0
x <sub>2</sub>	250 – (0 × 1 + 0 × 3 + 300 × 0) = 250
s <sub>1</sub>	0 – (0 × 1 + 0 × 0 + 300 × 0) = 0
s <sub>2</sub>	0 – (0 × 0 + 0 × 1 + 300 × 0) = 0
s <sub>3</sub>	0 – (0 × (–2) + 0 × (–1) + 300 × 1) = –300

Формування симплекс-таблиці закінчено, переходимо до її аналізу.

Крок 2 (повторення). Перевірка на оптимальність. Для змінної  $x_2$  значення функції заміщення  $\bar{c}_j \geq 0$ , тому розв'язок не оптимальний.

Крок 3 (повторення). Формування нового базисного розв'язку. У табл. 9.7 змінна  $x_2$  має найбільше додатне значення в рядку  $\bar{c}_j = c_j - z_j$  (250) і тому вибирається як змінна, що включається в новий базис.

Використовуючи (9.57) для стовпця  $A_2$  (змінної  $x_2$ ), отримаємо  $\theta_0 = \min \left\{ \frac{16}{1}, \frac{33}{3}, \frac{12}{0} \right\} = \{16, 11, \infty\}$ . Отже, з базису вилучається змінна  $s_2$ .

Крок 4 (повторення). Генерація поліпшеного розв'язку. Рядки нового розв'язку, отримані зі старого (табл. 9.7), показано в табл. 9.8.

### 9.8. Симплекс-таблиця другого поліпшеного розв'язку

Базисний рядок	Базисна змінна (БЗ)	Коефіцієнт функції цілі БЗ	Значення БЗ	Змінна					Відношення 0
				керувана		додаткова			
				$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
			$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	
$B_{s_1}$	$s_1$	0	5	0	0	1	-1/3	-5/3	
$B_{x_2}$	$x_2$	250	11	0	1	0	1/3	-1/3	
$B_{x_1}$	$x_1$	300	12	1	0	0	0	1	
$B_0$	Рядок коефіцієнта функції цілі $c_j$			300	250	0	0	0	
	Рядок коефіцієнта заміщення $z_j$			300	250	0	250/3	300/3	
	Рядок значень функції заміщення $\bar{c}_j = c_j - z_j$			0	200	0	-250/3	-650/3	

Крок 2 (повторення). Перевірка на оптимальність. У рядку  $\bar{c}_j = c_j - z_j$  додатні коефіцієнти відсутні. Отже, можна зробити висновок про оптимальність розв'язку.

Крок 5. Перевірка єдиності розв'язку. Якщо значення функції заміщення для небазисних змінних строго від'ємні – оптимальний розв'язок єдиний. У табл. 9.8 для небазисних змінних цю вимогу виконано. Отже, отриманий оптимальний розв'язок ( $x_1 = 12, x_2 = 11, s_1 = 5$ ) – єдиний.

### 9.7.2. Мінімізація цільової функції

Симплекс-метод інваріантний до виду екстремуму і дає змогу розв'язувати задачі не тільки максимізації, але і мінімізації цільової функції.

Розв'язування задачі мінімізації зводиться до безпосереднього (прямого) розв'язування або трансформації вихідної задачі в задачу максимізації.

У першому випадку симплекс-процедура пошуку мінімуму цільової функції від процедури максимізації відрізняється тільки визначенням оп-

тимального розв'язку: мінімізаційний розв'язок є оптимальним, якщо всі значення рядка функції заміщення  $\bar{c}_j = c_j - z_j$  є невід'ємними,  $\bar{c}_j \geq 0$ . У випадку неоптимальності розв'язку в базис вводять небазисну змінну, для якої  $\bar{c}_j$  – найменше.

Трансформація задачі мінімізації в задачу максимізації полягає у множенні цільової функції на  $(-1)$ . Наприклад, задача  $z = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$  відповідає задачі  $v = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ , при цьому всі обмеження залишаються незмінними.

Розглянемо приклад трансформації задачі мінімізації (задача про суміші) у максимізаційну. Вихідна математична модель має вигляд

$$\begin{aligned} z &= 45x_1 + 12x_2 \rightarrow \min; \\ x_1 + x_2 &\geq 300; \\ 3x_1 &\geq 250. \end{aligned} \quad (9.58)$$

Зведемо її до канонічного вигляду з урахуванням специфіки обмежень "≥" (див. розд. 9.7.1):

$$\begin{aligned} z &= 45x_1 + 12x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Md_1 + Md_2 \rightarrow \min; \\ x_1 + x_2 - s_1 + d_1 &= 300; \\ 3x_1 - s_2 + d_2 &= 250, \end{aligned} \quad (9.59)$$

де  $s_1, s_2$  – змінні перевиконання;  $d_1, d_2$  – штучні змінні;  $M$  – велике число (1 000 або 10 000).

Задачу (9.59) можна розв'язувати безпосередньо з урахуванням специфіки розв'язування симплекс-методом задач мінімізації або звести її до вигляду

$$\begin{aligned} -45x_1 - 12x_2 - 0s_1 - 0s_2 - Md_1 - Md_2 &\rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 - s_1 + d_1 &= 300; \\ 3x_1 - s_2 + d_2 &= 250 \end{aligned} \quad (9.60)$$

і розв'язати стандартним симплекс-методом.

### 9.7.3. Особливі ситуації в симплекс-методі

**Несдинність розв'язку.** У розд. 9.6.5 розглядалися випадки особливих ситуацій у лінійному програмуванні, а саме: *виродженість розв'язку, наявність необмеженого розв'язку і несдинність розв'язку.*

Зупинимося докладніше на останньому випадку. Важливо знати, чи є оптимальний розв'язок єдиним або їх існує деяка множина. Існування множини оптимальних розв'язків уможливорює більш гнучке керування.

Перевірка розв'язку на єдиність проста. Якщо коефіцієнт  $\bar{c}_j = c_j - z_j$  при одній із небазисних змінних дорівнює нулеві, тоді існує множина розв'язків. Нульовий коефіцієнт показує, що змінна може ввійти в базис, визначаючи при цьому новий допустимий розв'язок, причому значення цільової функції не зміниться. Якщо є два оптимальних розв'язки, то існує нескінченна множина оптимальних розв'язків, які є лінійною комбінацією двох даних розв'язків, на відрізку, що сполучає їх.

**Дві вхідні змінні.** Якщо дві або більше змінних мають однакові найбільші коефіцієнти в рядку  $\bar{c}_j = c_j - z_j$ , то вхідною може бути будь-яка з них. Це не вплине на остаточний розв'язок.

**Необмежені змінні.** Іноді виникають складності, коли деяким змінним  $x_j$  не ставляться вимоги невід'ємності, тобто одна або кілька змінних можуть набувати від'ємних значень. У цьому разі постановка задачі трохи змінюється перед застосуванням симплекс-методу, який вимагає, щоб усі змінні були невід'ємними, тобто потрібно замінити таку змінну в постановці задачі різницею двох змінних

$$x_j = (y_i - w_i),$$

де  $y_i \geq 0$  і  $w_i \geq 0$ .

При цьому оптимальний розв'язок матиме значення  $y_i = 0$  (тоді  $x_i = -w_i$ ) або  $w_i = 0$  (тоді  $x_i = y_i$ ).

Наприклад, задано задачу

$$z = 40x_1 + 65x_2 - 8x_3 \rightarrow \max.$$

де  $x_2$  – змінна, що може бути як додатною, так і від'ємною при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 1000, \\ 2x_1 - x_3 \leq 783, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Постановку задачі можна змінити так:



Рис. 9.9. Ілюстрація несумісності обмежень задачі

$$z = 40x_1 + 65x_2 - 8x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + y - w + x_3 \geq 1000, \\ 2x_1 - x_3 \leq 783, \\ x_1, y, w, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Права частина обмежень (b<sub>i</sub>) від'ємна.** У цьому разі обмеження потрібно звести до стандартного вигляду шляхом множення обох частин на  $-1$ . Проте, якщо обмеження є нерівністю, то множення його на  $-1$  змінить знак нерівності на протилежний, що, можливо, спричинить необхідність введення штучних змінних для одержання початкового базису.

Наприклад, якщо одним з обмежень-нерівностей є  $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -10$ , то множення на  $-1$  приведе до нерівності  $-x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 10$ .

Після додання змінної перевиконання  $s_1$  і штучної змінної  $d_1$  обмеження набуває вигляду

$$-1x_1 + 2x_2 - 1x_3 - 1s_1 + 1d_2 = 10.$$

**Відсутність допустимих розв'язків.** У деяких випадках не існує допустимих розв'язків. Іншими словами, система обмежень несумісна. Графічно це зображується як відсутність області, що задовольняє всім обмеженням (рис. 9.9).

**Надлишкові обмеження.** Обмеження, що не утворює межі області допустимих розв'язків, називається надлишковим. Таке обмеження може бути вилучене з задачі без впливу на оптимальний розв'язок. Обмеження  $2x_1 + x_2$  (пряма  $AB$ ) на рис. 9.2 ілюструє такий приклад. Зауважимо, що надлишкові обмеження не впливають на розвиток симплекс-процесу.

З табл. 9.8 видно (рядок  $B_{s_1}$ ), що обмеження 1 має невикористаний запас, тобто будуть використовуватися тільки 35 год робочого часу з 40.

#### 9.7.4. Основні поняття теорії двоїстості

Кожній задачі ЛП можна поставити у відповідність іншу задачу ЛП, яка називається *двоїстою*. Спільне вивчення цих задач складає предмет *теорії двоїстості*.

Перехід від прямої задачі до двоїстої зручно здійснювати у такій спосіб. Вихідну пряму задачу незалежно від вигляду вихідної моделі зводять до стандартної форми з однотипними умовами:

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max; \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \\
 x_j &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.
 \end{aligned}
 \tag{9.61}$$

Цю модель трансформують у модель двоїстої задачі вигляду

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min; \\
 \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i &\geq c_j, \\
 y_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.
 \end{aligned}
 \tag{9.62}$$

Трансформацію моделі прямої задачі (9.61) у двоїсту виконують так.

1. Уводять нові невід'ємні змінні  $y_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , кількість яких дорівнює кількості обмежень-нерівностей прямої задачі за винятком обмежень на невід'ємність. Систему обмежень двоїстої задачі записують відповідно до формули

$$YA^T \geq C, \tag{9.63}$$

де  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  – матриця-рядок нових змінних;  $A^T$  – транспонована матриця коефіцієнтів обмежень прямої задачі;  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}^T$  – матриця-стовпець коефіцієнтів цільової функції прямої задачі.

При цьому потрібно звернути увагу на те, що знак нерівностей двоїстої задачі протилежний знаку нерівностей прямої задачі (присутні обмеження на невід'ємність змінних) і праві частини обмежень двоїстої задачі є відповідними коефіцієнтами цільової функції прямої задачі.

2. Цільову функцію двоїстої задачі записують за формулою

$$w = B \cdot Y \rightarrow \min, \tag{9.64}$$

де  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  – матриця-рядок правих частин обмежень прямої задачі;  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  – матриця-стовпець змінних двоїстої задачі.



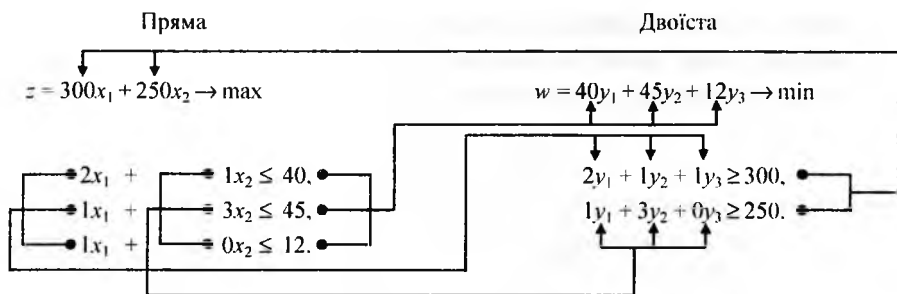


Рис. 9.10. Схема трансформації прямої задачі у двоїсту

У даному випадку коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі є значення правих частин обмежень прямої задачі, а оператор оптимізації змінився на протилежний порівняно з прямою задачею.

На рис. 9.10 наведено схему перетворення прямої задачі планування виробництва (9.51) з невід'ємними змінними у двоїсту задачу.

3. Двоїсту задачу за вищенаведеними правилами зводять до канонічного вигляду і розв'язують стандартним симплекс-методом.

Прийемо без доведення такі твердження.

1. Будь-якій прямій задачі ЛП може бути поставлена у відповідність двоїста і навпаки.
2. Якщо пряма задача ЛП має оптимальний розв'язок, то його має і двоїста задача і навпаки.
3. Чисельні значення цільових функцій для оптимальних розв'язків прямої і двоїстої задач дорівнюють одне одному.

### 9.7.5. Економічна інтерпретація моделей задач лінійного програмування

Змінні  $X$  прямої задачі ЛП – це кількість кожного продукту. Цільова функція задачі – це прибуток підприємства. Кожне обмеження відповідає одному виду сировини. Ліва частина кожного обмеження є загальною кількістю сировини визначеного виду, необхідного для виробництва всіх видів продукції, що випускається. Права частина визначає кількість сировини кожного виду на підприємстві.

Змінні  $Y$  двоїстої задачі ЛП – це так звані тіньові ціни ресурсів. Вони не мають ніякого відношення до реальної вартості сировини на ринку, а показують, як зміниться значення цільової функції у разі зміни кількості

відповідного виду сировини на підприємстві на одиницю. Цільова функція двоїстої задачі – це вартість усіх видів сировини, які використовуються під час виробництва. Кожне обмеження пов'язане з одним із продуктів, що випускаються. У лівій частині задана тіньова вартість сировини, потрібної для виробництва одиниці продукції, у правій – прибуток від випуску одиниці відповідної продукції.

### **9.8. АНАЛІЗ МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ НА ЧУТЛИВІСТЬ**

Можливості, надані теорією ЛП і симплекс-методом, не обмежуються лише одержанням оптимальних значень керованих змінних. Розв'язок задач ЛП має забезпечувати користувача динамічною інформацією. Як тільки умови, відповідно до яких було побудовано модель, змінюються, інформація, асоційована зі статичним оптимальним розв'язком, відразу втрачає актуальність. Аналіз моделі на чутливість саме і пов'язаний із дослідженням можливих змін отриманого оптимального розв'язку внаслідок змін вихідної моделі. Цей процес реалізується після одержання оптимального розв'язку задачі. При такому аналізі завжди розглядається деяка сукупність лінійних оптимізаційних моделей, тобто деяка модель дослідження операцій. Це додає моделі певної динамічності, а її характеристики фактично відображають аналогічні характеристики, властиві реальним процесам. Відсутність методів, які дають змогу виявити вплив можливих змін параметрів моделі на оптимальний розв'язок, може призвести до того, що отриманий (статичний) розв'язок “застаріє” ще до своєї реалізації.

Результуюча симплекс-таблиця “насичена” дуже важливими даними, лише невелику частину яких складають оптимальні значення змінних. З симплекс-таблиці безпосередньо або за допомогою простих додаткових обчислень можна одержати інформацію щодо: 1) оптимального розв'язку; 2) статусу ресурсів; 3) цінності кожного ресурсу; 4) чутливості оптимального розв'язку до зміни запасів ресурсів, варіацій коефіцієнтів цільової функції та інтенсивності споживання ресурсів.

Відомості, що відносяться до перших трьох пунктів, можна дістати безпосередньо із симплекс-таблиці для оптимального розв'язку. Одержання інформації щодо четвертого пункту вимагає додаткових обчислень.

Проілюструємо потенційні можливості аналізу лінійних моделей на чутливість на прикладі задачі ЛП, пов'язаної з виробництвом двох видів товару:  $A$  і  $B$ . Обмеження визначають попит на товари і запаси вихідних

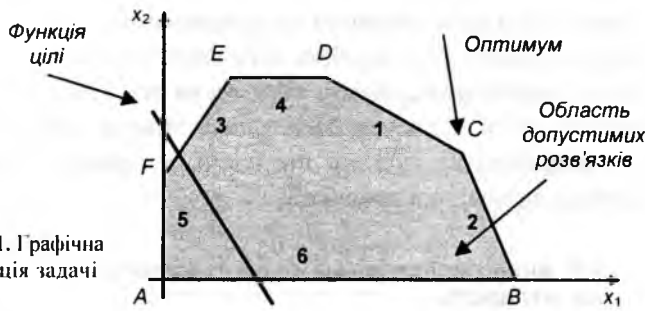


Рис. 9.11. Графічна ілюстрація задачі

продуктів для виробництва товарів  $A$  і  $B$ . Добові обсяги виробництва товарів  $A$  і  $B$  позначимо відповідно через  $x_1$  і  $x_2$ . Прибутки від продажу одиниці продуктів  $A$  і  $B$  – відповідно через  $c_1$  та  $c_2$  грн. Для виробництва товарів використовуються два вихідних продукти  $C$  і  $E$ . Максимально можливі добові запаси цих продуктів складають відповідно  $b_1$  і  $b_2$  т. Витрати продуктів  $C$  і  $E$  на виробництво товарів  $A$  і  $B$  задаються матрицею

	Товар $A$	Товар $B$
Продукт $C$	$a_{11}$	$a_{12}$
Продукт $E$	$a_{21}$	$a_{22}$

Вивчення ринку показало, що добовий попит на товар  $B$  ніколи не перевищує попиту на товар  $A$  більше ніж на  $b_3$  т. Попит на товар  $B$  не більше  $b_4$  т за добу.

Ціль – максимізувати прибуток від реалізації продукції. Відповідна задача ЛП має вигляд (рис. 9.11).

Потрібно знайти

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max (\text{прибуток})$$

при обмеженнях

- $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$ , 1 (вихідний продукт  $C$ );
- $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2$ , 2 (вихідний продукт  $E$ );
- $x_2 - x_1 \leq b_3$ , 3 (обмеження на попит);
- $x_2 \leq b_4$ , 4 (обмеження на попит);
- $x_1 \geq 0$ , 5 (обсяг виробництва  $A$ );
- $x_2 \geq 0$ , 6 (обсяг виробництва  $B$ ).

### 9.8.1. Графічні методи аналізу моделі на чутливість

У даному розділі для проведення аналізу моделі на чутливість використовуються графічні методи.

**Перша задача аналізу на чутливість.** Після одержання оптимального розв'язку логічно з'ясувати, як вплине на нього зміна запасів ресурсів. Особливо важливо проаналізувати такі аспекти.

1. Як можна збільшити запас деякого ресурсу для поліпшення отриманого оптимального значення цільової функції?

2. Як можна знизити запас деякого ресурсу при зберіганні отриманого оптимального значення цільової функції?

Величина запасу кожного з ресурсів фіксується в правих частинах обмежень, тому цей вид аналізу звичайно ідентифікується як аналіз моделі на чутливість до правої частини (обмежень).

Якщо деяке обмеження є активним у оптимальній точці, відповідний ресурс відносять до розряду дефіцитних, оскільки він використовується повністю. На рис. 9.11 активними обмеженнями є тільки обмеження 1 і 2. Ресурс, з яким асоційоване неактивне обмеження, відноситься до розряду недефіцитних ресурсів (тобто наявних у деякому надлишку).

Отже, аналіз моделі на чутливість до правих частин обмежень передбачає визначення: 1) гранично припустимого збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що дає змогу поліпшити знайдений оптимальний розв'язок; 2) гранично припустимого зниження запасу недефіцитного ресурсу, що не змінить знайденого раніше оптимального значення цільової функції. Інформація, отримана в останньому випадку, особливо корисна в тих ситуаціях, коли надлишки недефіцитного ресурсу можна використати для інших цілей.

Чи вплине на отриманий оптимальний розв'язок збільшення обсягу надлишкових ресурсів або тільки надлишковий ресурс стане ще більш надлишковим? Друга частина питання заслуговує особливої уваги, оскільки при можливому недопостачанні дефіцитного ресурсу (зменшення обсягу дефіцитних ресурсів) важливо знати, як це вплине на розв'язок задачі. Проте зменшення обсягу дефіцитних ресурсів ніколи не поліпшує значення цільової функції.

Звернемося до конкретного прикладу (рис. 9.11). У нашій задачі продукти  $C$  та  $E$  (обмеження 1 і 2) є дефіцитними ресурсами. Розглянемо спочатку ресурс  $C$ . З рис. 9.12 видно, що у разі збільшення запасу цього ресурсу пряма  $l$  (або відрізок  $CD$ ) переміщується вгору паралельно собі, поступово

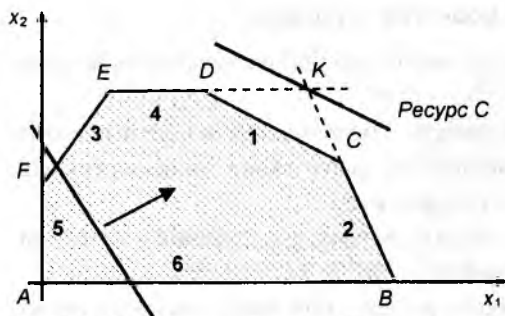


Рис. 9.12. Нова оптимальна точка  $K$

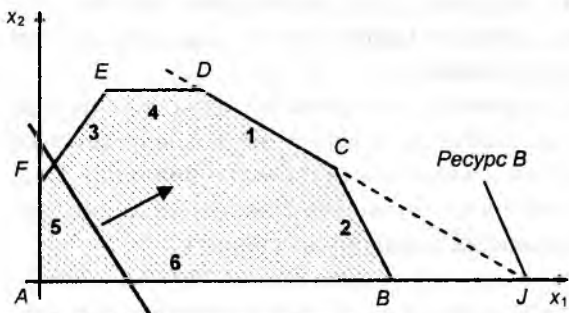


Рис. 9.13. Нова оптимальна точка  $J$

“стягуючи” у точку трикутник  $CDK$ . (Сторони  $CK$  і  $DK$  цього трикутника є продовженням прямих, що відповідають обмеженням 2 і 4). У точці  $K$ , яка відповідає новому оптимальному розв’язку, обмеження 2 і 4 стають активними, а множиною допустимих розв’язків стає багатокутник  $ABKEF$ . У точці  $K$  обмеження 1 (для ресурсу  $C$ ) стає надлишковим, оскільки подальше зростання запасу відповідного ресурсу не впливає на оптимальний розв’язок.

Отже, обсяг ресурсу  $C$  не варто збільшувати після того, коли обмеження 1, що йому відпо-

відає, стає надлишковим, тобто пряма  $l$  проходить через нову оптимальну точку  $K$ .

Цей граничний рівень визначається так.

1. Обчислюються координати  $(x_{1K}, x_{2K})$  точки  $K$  перетину прямих 2 і 4, тобто знаходиться розв’язок системи рівнянь, що визначають прямі 2 і 4.

2. Підстановкою координат точки  $K$  у ліву частину обмеження 1 визначається максимально допустимий запас  $c_f$  ресурсу  $C$   $a_{11}x_{1K} + a_{12}x_{2K} = c_f$ .

Рис. 9.13 ілюструє ситуацію, коли розглядається питання доцільності збільшення запасу дефіцитного ресурсу 2 (вихідний продукт  $E$ ).

Нова оптимальна точка – точка  $J(x_{1J}, x_{2J})$  перетину прямих  $b$  і  $l$ . Отже, запас продукту  $B$  можна збільшити до значення  $b_f = a_{21}x_{1J} + a_{22}x_{2J}$ .

Відмінність недефіцитності ресурсу від його надмірності в тому, що вилучення надлишкового обмеження не впливає на множину допустимих розв’язків і оптимальний розв’язок, тоді як вилучення обмеження, що відповідає недефіцитному ресурсу, завжди впливає на множину допустимих розв’язків, але не завжди – на оптимум.

Розглянемо тепер питання про зменшення правої частини неактивних обмежень. Обмеження 4 фіксує граничний рівень попиту на товар  $B$ .

З рис. 9.11 випливає, що, не змінюючи оптимального розв'язку, пряма 4 можна опустити донизу до перетину з оптимальною точкою  $C$ . Таке зменшення попиту на товар  $B$  ніяк не вплине на оптимальність раніше отриманого розв'язку.

Розглянемо обмеження 3. У цьому випадку праву частину обмеження можна зменшувати, поки пряма 3 ( $EF$ ) не досягне точки  $C$ . При цьому обмеження 3 виконується як строга нерівність:  $x_{Aopt} - x_{Bopt} = d < b_3$ .

Результати проведеного аналізу можна звести в табл. 9.9.

### 9.9. Результати розв'язування першої задачі аналізу на чутливість

Ресурс	Максимальна зміна запасу ресурсу, т	Максимальна зміна прибутку від реалізації $z$ , грн
1	$c_f - b_1 > 0$	$\Delta_{1z} > 0$
2	$b_f - b_2 > 0$	$\Delta_{2z} > 0$
3	$d - b_3 < 0$	$\Delta_{3z} = 0$
4	$x_{Bopt} - b_4 < 0$	$\Delta_{4z} = 0$

Примітка. Тип ресурсів в 1, 2 – дефіцитний. 3, 4 – недефіцитний.

**Друга задача аналізу на чутливість.** Збільшення обсягу якого з ресурсів найбільш вигідно?

При обмеженнях на витрати, пов'язані з додатковим залученням ресурсів (що характерно для більшості економічних задач), природно поставити запитання: якому з ресурсів варто віддати перевагу при вкладенні додаткових засобів? Для відповіді введемо характеристику цінності кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу, що виражається через відповідне збільшення оптимального значення цільової функції. Таку характеристику для розглянутого прикладу можна одержати безпосередньо з табл. 9.9.

Позначимо цінність додаткової одиниці ресурсу  $i$  через  $y_i$ . Величина  $y_i$  визначається із співвідношення

$$\frac{\text{максимальне збільшення оптимального значення } z}{\text{максимально допустимий приріст обсягу ресурсу}}$$

Очевидно, недефіцитні ресурси аналізувати не потрібно. Скориставшись даними табл. 9.9 для дефіцитних ресурсів (продукт  $C$  і продукт  $E$ ),

$$\text{одержимо відповідно } y_1 = \frac{\Delta_{1z}}{c_f - b_1} - b_1, \quad y_2 = \frac{\Delta_{2z}}{b_f - b_2}.$$

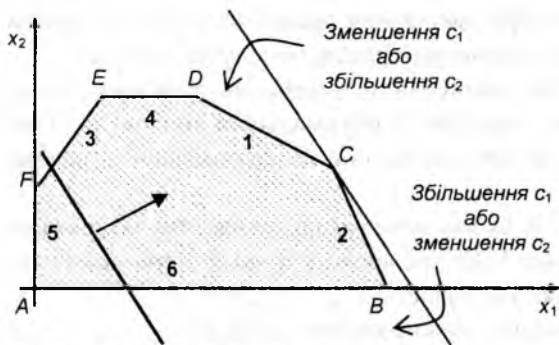


Рис. 9.14. Зміна коефіцієнтів цільової функції

Порівнюючи величини  $y_1$  і  $y_2$ , можна зробити висновок про черговість додаткових вкладень: на збільшення ресурсу 2 (продукт  $E$ ) або на збільшення ресурсу 1 (продукт  $C$ ).

**Третя задача аналізу на чутливість.** У яких межах припустима зміна коефіцієнтів цільової функції?

Зміна коефіцієнтів цільової функції (рис. 9.14) впливає на нахил прямої, що відображає цю функцію в прийнятій системі координат. Ідентифікація конкретної кутової точки як оптимуму залежить насамперед від нахилу цієї прямої. Це означає, що варіація коефіцієнтів цільової функції може зумовити зміну сукупності активних обмежень і статусу того або іншого ресурсу (тобто зробити недефіцитний ресурс дефіцитним і навпаки). Отже, у межах аналізу моделі на чутливість до змін коефіцієнтів цільової функції можуть досліджуватися такі питання.

1. Яким є діапазон зміни (збільшення або зменшення) того або іншого коефіцієнта цільової функції, за яким не відбувається зміни оптимального розв'язку?

2. Як варто змінити той або інший коефіцієнт цільової функції, щоб зробити деякий недефіцитний ресурс дефіцитним і навпаки.

Обговоримо поставлені питання на прикладі нашої задачі. Розглядаючи перше питання, проаналізуємо цільову функцію задачі  $z = c_1x_1 + c_2x_2$ .

З рис. 9.14 видно, що при збільшенні  $c_1$  або зменшенні  $c_2$  пряма, що відображає цільову функцію  $z$ , обертається (навколо точки  $C$ ) до точки  $B$ . Якщо ж  $c_1$  зменшується або  $c_2$  збільшується, ця пряма обертається в протилежному напрямку. Отже, точка  $C$  залишатиметься оптимальною доти, поки нахил прямої не вийде за межі, обумовлені нахилами прямих для обмежень 1 і 2. Коли нахил прямої  $z$  дорівнюватиме нахилу прямої для обмеження 1, одержимо дві альтернативні оптимальні кутові точки  $C$  і  $D$ . Аналогічно, якщо нахил прямої  $z$  дорівнюватиме нахилу прямої для обмеження 2, матимемо альтернативні оптимальні кутові точки  $B$  і  $C$ .

(Наявність альтернативних оптимумів свідчить про те, що оптимальне значення  $z$  може досягатися за різних значень змінних).

Відзначимо, що у точці  $D$  ресурс 2 стає недефіцитним, а ресурс 4 – дефіцитним. Відповідні висновки легко зробити і для точки  $B$ .

### **9.9. СУЧАСНИЙ СТАН ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ**

Відзначимо два основних напрямки досліджень у даній області.

1. Подальше розроблення і модернізація програмних реалізацій модифікацій симплекс-методу різними мовами програмування. Проводяться дослідження в області реалізації ідеї паралельних обчислень певних кроків симплекс-методу для задач великої розмірності та побудови програм для векторних процесорів. Крім того, велика увага приділяється передаванню даних із баз даних, електронних таблиць, математичних пакетів. Аналізуючи сучасні комерційні пакети лінійного програмування, можна зробити висновок, що практично всі програмні продукти не мають інших обмежень на кількість змінних і обмежень, крім обсягу доступної пам'яті комп'ютера.

2. Розвиток альтернативного підходу до розв'язування задач лінійної оптимізації. Численні дослідники, починаючи з Данцига, намагалися перебороти ту незадовільну особливість симплекс-методу, що полягає в необхідності спуску по межі допустимої області, і побудувати алгоритм, який дає змогу уникнути потенційно експоненційної складності руху по суміжних вершинах допустимої області завдяки руху по внутрішніх точках області.

У 1979 р. проблема побудови поліноміального за часом алгоритму лінійного програмування була вирішена Л. Хачіяном. Алгоритм розв'язування канонічної задачі Хачіяна, що базується на методі еліпсоїдів (методі розв'язування задач нелінійного програмування) академіка НАН України Н. Шора, часто називають методом Шора – Хачіяна.

Метод розв'язування задач нелінійного програмування був застосований до розв'язування задачі лінійного програмування, що дало змогу одержати фундаментальні результати. Проте на практиці метод Хачіяна працює повільніше, ніж симплекс-метод. Основні причини цього в тому, що число ітерацій може бути дуже великим, а час виконання кожної ітерації значним порівняно з ітерацією симплекс-методу, оскільки технологію роботи з розрідженими матрицями, якими звичайно є матриці коефіцієнтів системи обмежень задачі, у даному випадку не можна застосувати.



Поява нового поліноміального алгоритму (методу внутрішньої точки), створеного Кармакаром, обумовила новий етап у розвитку теорії і практики розв'язування задач лінійного програмування. Автор анонсував, що метод не тільки є поліноміальним за часом, але й на практиці працює швидше, ніж симплекс-метод.

Потім з'явилося кілька методів, аналогічних методу Кармакара, за винятком деяких відмінностей, таких як проєктивні методи, методи афінних перетворень, методи центрів як варіації методу логарифмічних бар'єрних функцій, застосованих до прямої або двоїстої постановок задач.

Проте всі перераховані алгоритми є реалізацією однієї стратегії, ідея якої полягає в наступному: кожний крок напрямку спуску є лінійною комбінацією оберненого перетворення вектора найшвидшого спуску і центруючого вектора, тобто вектора, що реалізує Ньютонів крок до центру допустимої області.

### Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте основну задачу лінійного програмування.
2. Яка форма задачі лінійного програмування включає обмеження на невід'ємність незалежних змінних?
3. Наведіть визначення лінійної комбінації векторів.
4. Що таке поліедр?
5. Як знайти координати вершин множини допустимих розв'язків задачі лінійного програмування з  $n$  незалежними змінними і  $m$  обмеженнями?
6. Що таке базисні допустимі розв'язки?
7. Як виконати перехід від одного базисного допустимого розв'язку до іншого?
8. Дайте змістовну характеристику графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування.
9. Як організовано таблицю в симплекс-методі?
10. Які значення мають базисні та небазисні змінні?
11. Назвіть особливі ситуації в симплекс-методі.
12. Наведіть основні поняття теорії двоїстості.
13. У чому полягає економічна інтерпретація двоїстих задач?
14. Наведіть основні етапи аналізу моделі лінійного програмування на чутливість.

## Розділ 10. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОЇ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

На відміну від задач лінійного програмування, екстремум функції цілі яких завжди знаходиться у вершині поліедра допустимих розв'язків, у задачах нелінійної умовної оптимізації (НУО) розв'язок може досягатися в будь-якій точці межі допустимої області.

Ця обставина істотно ускладнює процес пошуку розв'язку і приводить до того, що чисельні методи розв'язування задач НУО, за винятком деяких окремих випадків, є нескінченнокроковими, тобто визначають тільки наближення в околах глобального (локального) розв'язку.

Задачі НУО більш складні з обчислювальної точки зору порівняно з задачами лінійного програмування і безумовної оптимізації. Саме тому основні напрямки розроблення методів розв'язування задач НУО пов'язані з прагненням звести вихідну задачу до послідовності задач лінійного програмування або до задачі безумовної оптимізації.

Можна виділити такі основні групи методів, які широко застосовуються при розв'язуванні практичних задач.

1. Скінченнокрокові методи розв'язування задач квадратичного програмування, які є окремим випадком загальної проблеми НУО.

2. Апроксимаційні методи, які у свою чергу можна поділити на дві підгрупи: квадратичної апроксимації з наступним використанням модифікації методу Ньютонa і квадратичного програмування; лінійної апроксимації (лінеаризації) з наступним розв'язуванням задач лінійного програмування.

3. Група методів штрафних функцій, заснованих на трансформації вихідної задачі НУО в задачу безумовної оптимізації з наступним використанням відповідних методів розв'язування.

Нижче розглянуті типові методи для кожної з цих груп.

### **10.1. СКІНЧЕННОКРОКОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ**

*Задачею квадратичного програмування* називають задачу мінімізації квадратичної функції за лінійних обмежень. Таким чином, відмінність від задач ЛП полягає тільки в нелінійності цільової функції.

Задачі квадратичного програмування, як і задачі ЛП, часто виникають на практиці. Завдяки специфіці задач квадратичного програмування для них.

як і для задач ЛП, існують скінченні (скінченнокрокові) методи пошуку точного розв'язку. Ця обставина, а також використання задач квадратичного програмування як допоміжних при чисельному методі розв'язування задач більш складного виду, обумовила виділення їх в окремий клас задач нелінійного програмування.

У даному розділі викладається метод розв'язування задач квадратичного програмування вигляду

$$f(x) = \frac{1}{2}(Cx, x) + (d, x) \rightarrow \min; \quad (10.1)$$

$$(a_i, x) \leq b_i, i = \overline{1, m}, \quad (10.2)$$

де  $C$  – додатно визначена симетрична матриця розмірами  $n \times n$ ;  $d, a_1, \dots, a_m$  – задані вектори з  $R^n$ ;  $b_1, \dots, b_m$  – задані числа.

Скористаємося для розв'язування задачі (10.1), (10.2) методом множників Лагранжа (див. розд. 8.4). Покладемо

$$\Lambda = \{ \lambda \in R^m \mid \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m} \}. \quad (10.3)$$

Регулярною функцією Лагранжа задачі (10.1), (10.2) є функція вигляду

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= \frac{1}{2}(Cx, x) + (d, x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [(a_i, x) - b_i] = \\ &= \frac{1}{2}(Cx, x) + (d, x) + (\lambda, Ax - b) = \\ &= \frac{1}{2}(Cx, x) + (d + \lambda, Ax) - (\lambda, b), \end{aligned} \quad (10.4)$$

де  $x \in R^n$ ,  $\lambda \in R^m$  – матриця-рядок множників Лагранжа;  $A = \{a_{ij}\}$  – матриця розмірів  $n \times m$ ;  $b = \{b_i\}$  – матриця-стовпець,  $i = \overline{1, m}$ .

При цьому градієнт функції (10.4) дорівнює

$$\nabla L_x(x, \lambda) = Cx + d + \lambda A. \quad (10.5)$$

Тоді необхідні і достатні умови оптимальності точки  $x^0$  задачі (10.1), (10.2), відомі як умови Куна – Такера, мають вигляд

$$Cx^0 + d + \lambda^0 A = 0;$$

$$\lambda_i^0 \left( (a_i, x^0) - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (10.6)$$

причому вектор  $\lambda^0 \in \Lambda$ .

Прийемо такі позначення:

$$X = \left\{ x \in R^n \mid (a_i, x) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \right\} - \quad (10.7)$$

допустима множина задачі (10.1), (10.2);

$$I(x) = \left\{ i \mid (a_i, x) = b_i, \quad 1 \leq i \leq m \right\} - \quad (10.8)$$

множина номерів активних обмежень у точці  $x \in X$ .

**Задача квадратичного програмування з обмеженнями-рівностями.**

У процесі реалізації методу розв'язування задачі (10.1), (10.2), що викладається далі, розв'язують більш прості задачі квадратичного програмування вигляду

$$f(x) \rightarrow \min; \quad (10.9)$$

$$(a_i, x) = b_i, \quad i \in I,$$

де  $I$  – деяка підмножина множини  $\{1, 2, \dots, m\}$  така, що зазначена система рівнянь сумісна.

Тоді необхідні і достатні умови оптимальності точки  $x^0$  задачі (10.9) мають вигляд

$$Cx^0 + d + \lambda^0 A = 0;$$

$$(a_i, x^0) - b_i = 0, \quad i \in I, \quad (10.10)$$

де вектор  $\lambda^0 \in \Lambda$ .

Розглянемо скінченний метод розв'язування задачі (10.9).

Насамперед, якщо  $I = \emptyset$  тоді (10.9) – задача безумовної мінімізації функції  $f$ . Розв'язок такої задачі отримуємо, наприклад, методом градієнтів (див. розд. 7.2).

За умови  $I \neq \emptyset$  зазначену задачу можна різними способами звести до безумовної мінімізації деякої квадратичної опуклої функції з наступним застосуванням того ж методу градієнтів.

Відзначимо, що для квадратичної задачі вигляду (10.9) умови (10.10) є системою  $(m+n)$  лінійних рівнянь із  $(m+n)$  невідомими. Розв'язування даної системи, наприклад, методом Гаусса, визначить вектор  $(x^0, \lambda^0)$ , причому точка  $x^0$  є розв'язком задачі (10.9).

**Принципова схема методу розв'язування задачі (10.1), (10.2).** Допустима точка задачі (10.1), (10.2) називається *особливою*, якщо вона є розв'язком задачі вигляду (10.9) за деякого  $I \subset \{1, 2, \dots, m\}$ . При цьому випадок  $I = \emptyset$  не виключається.

Має місце наступний принциповий результат, що обґрунтовує можливість визначення розв'язку задачі (10.1), (10.2) за скінченне число кроків.

*Розв'язок задачі (10.1), (10.2) є особливою точкою, причому кількість особливих точок є скінченною.*

Отже, для одержання розв'язку задачі (10.1), (10.2) досить перебрати усі її особливі точки; та з них, де функція  $f(x)$  набуває найменшого значення, є шуканим розв'язком. Щоб знайти всі особливі точки задачі (10.1), (10.2), потрібно для кожної множини індексів  $I \subset \{1, 2, \dots, m\}$  такої, що система  $(a_i, x^0) = b_i, i \in I$ , сумісна, знайти розв'язок  $\bar{x}$  задачі (10.9), а потім перевірити умову  $\bar{x} \in X$ .

Такий метод повного перебору особливих точок, як і метод повного перебору базисних точок для одержання розв'язку задачі ЛП (див. розд. 9), не має практичної цінності, оскільки вимагає величезного обсягу обчислень навіть при невеликих значеннях  $n$  і  $m$ . Тому потрібно замінити повний перебір упорядкованим. Це і складає основну ідею запропонованого методу.

Метод складається з двох алгоритмів, які рекурентно повторюються. *Перший алгоритм* по заданій допустимій точці задачі (10.1), (10.2) буде особливою точку, у якій функція цілі  $f(x)$  набуває меншого або того самого значення. *Другий алгоритм* визначає: чи є задана особлива точка розв'язком, і якщо ні, то знаходить допустиму точку з меншим значенням функції цілі  $f(x)$ . Після цього відбувається повернення до першого алгоритму.

Отже, формується послідовність особливих точок, на якій функція  $f(x)$  строго спадає, і тому повернення до отриманих раніше особливих точок неможливе. Оскільки число особливих точок скінченне, то за скінченну кількість кроків процес генерування цієї послідовності обірветься, тобто

зустрінемо випадок, що задана особлива точка є розв'язком задачі (10.1), (10.2).

**Алгоритм переходу від заданої допустимої точки до особливої точки з меншим або рівним значенням цільової функції.** Нехай задано допустиму точку  $x^s \in X$ . Потрібно знайти особливу точку  $\bar{x}$ , для якої  $f(\bar{x}) \leq f(x^s)$ . Для цього побудуємо послідовності точок  $x^k \in X$  і  $\bar{x}^k \in R^n$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , за таким правилом.

Якщо при даному  $k = 0, 1, \dots$  точку  $x^k \in X$  вже побудовано, то за  $\bar{x}^k$  візьмемо розв'язок задачі

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \\ (a_i, x) &= b_i, \quad i \in I(x^k). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Розв'язування цієї задачі аналогічно задачі (10.9) і розглянуто вище. Зауважимо, що

$$f(\bar{x}^k) \leq f(x^k), \quad (10.12)$$

оскільки  $\bar{x}^k$  – допустима точка задачі (10.11).

Можливі два випадки:  $\bar{x}^k \in X$  або  $\bar{x}^k \notin X$ .

Якщо  $\bar{x}^k \in X$ , то, за визначенням,  $\bar{x}^k$  – особлива точка задачі (10.1), (10.2). Нехай тепер  $\bar{x}^k \notin X$ . Побудуємо точку

$$x^{k+1} = x^k + q_k (\bar{x}^k - x^k), \quad (10.13)$$

де

$$q_k = \max \{ q \geq 0 \mid x^k + q_k (\bar{x}^k - x^k) \in X \},$$

причому  $q_k < 1$ . Отже,  $x^{k+1}$  вибирається як точка відрізка  $[x^k, \bar{x}^k]$ , що належить  $X$  та найбільше віддалена від  $x^k$ . Параметр  $q_k$  обчислюється за формулою

$$q_k = \min_i \frac{b_i - (a_i, x^k)}{(a_i, \bar{x}^k - x^k)}, \quad (10.14)$$

де мінімум знаходиться за всіма  $i \in I(x^k)$ , для яких  $(a_i, \bar{x}^k - x^k) > 0$ .

Легко показати, що  $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$ , причому  $I(x^k) \subset I(x^{k+1})$ ,  $I(x^k) \neq I(x^{k+1})$ , тобто множина  $I(x^{k+1})$  містить хоча б один додатковий елемент порівняно з  $I(x^k)$ .

Звідси ясно, що на  $k$ -й ітерації випадок  $\bar{x}^k \notin X$  стає неможливим і має місце  $\bar{x}^k \in X$ , тобто буде отримана особлива точка  $\bar{x} = x^k$ .

**Алгоритм переходу від заданої особливої точки до допустимої точки з меншим значенням цільової функції.** Нехай задано точку  $\bar{x} \in X$ , наприклад,  $\bar{x}$  – особлива точка, яку отримано внаслідок реалізації попереднього алгоритму. Потрібно переконатися, що  $\bar{x}$  – розв'язок задачі (10.1), (10.2), або знайти точку  $x^s \in X$  таку, що  $f(x^s) < f(\bar{x})$ .

Дві ці задачі можна розв'язати одночасно. Для цього лінеаризуємо вихідну цільову функцію  $f(x)$  шляхом розкладання в ряд Тейлора в околі точки  $\bar{x}$ . При цьому отримуємо  $f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(\bar{x} - x^s)$ , де  $f(\bar{x})$  – константа, тому  $f(x)$  потрібно мінімізувати з урахуванням обмежень. Отже, одержимо задачу лінійного програмування

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})(\bar{x} - x^s) &\rightarrow \min; \\ a_i(\bar{x} - x^s) &\leq 0, \quad i \in I(\bar{x}); \\ -1 \leq (\bar{x}_j - x^s_j) &\leq 1, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Тут не враховуються обмеження, що виконуються в точці  $\bar{x}$  як строгі нерівності.

Нехай  $x^s$  – розв'язок задачі лінійного програмування, знайдений, наприклад, симплекс-методом (див. розд. 9), а  $\bar{\eta} = \nabla f(\bar{x})(\bar{x} - x^s)$  – її значення. Оскільки  $x^s = 0$  – допустима точка задачі (10.1), (10.2), тоді можливі тільки два випадки:  $\bar{\eta} = 0$  або  $\bar{\eta} < 0$ .

Якщо  $\bar{\eta} = 0$ , то це означає, що  $\bar{x} - x^s = 0$  і  $\bar{x}$  – розв'язок задачі (10.1–10.2).

Нехай тепер  $\bar{\eta} < 0$ . Тоді  $h = (\bar{x} - x^s)$  є напрямком спадання функції  $f$  у точці  $\bar{x}$ , тобто для всіх досить малих  $q > 0$  виконується нерівність

$$f(\bar{x} + qh) < f(\bar{x}). \quad (10.16)$$

При цьому для всіх  $i \in I(\bar{x})$  і  $q \geq 0$  маємо

$$(a_i, \bar{x} + qh) = b_i + q(a_i, \bar{h}) \leq b_i.$$

Для всіх  $i \notin I(\bar{x})$  і досить малих  $q$  є правильною нерівність

$$(a_i, \bar{x} + qh) \leq b_i, \quad (10.17)$$

оскільки  $(a_i, \bar{x}) < b_i$ .

Конкретне число  $q > 0$ , що задовольняє нерівностям (10.16), (10.17), можна відшукати за скінченне число кроків, наприклад, за правилом дроблення, тобто у процесі послідовної перевірки цих нерівностей при  $q = \nu^k$ , де  $k = 0, 1, \dots$ , а  $\nu$  – фіксоване число з інтервалу  $(0, 1)$  до першого моменту їх виконання.

Після того, як число  $q$  знайдено, будується точка  $x^s = \bar{x} + qh$ . Відповідно до попереднього маємо  $f(x^s) < f(\bar{x})$  і  $x^s \in X$ .

Тепер до заданої точки  $x^s$  застосовується алгоритм визначення особливої точки з меншим або рівним значенням цільової функції, потім до отриманої особливої точки – щойно описаний алгоритм і т. д.

Об'єднуючи вищевикладене, одержуємо метод, що дає змогу відшукати розв'язок задачі (10.1), (10.2) за скінченне число кроків.

Метод починає роботу з деякої точки  $x^s \in X$ . Щоб знайти таку точку або переконатися, що  $X = \emptyset$ , досить розв'язати задачу лінійного програмування (див. розд. 9) відносно змінних  $x$  і  $u = (u_1, \dots, u_m)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m u_i &\rightarrow \min; \\ (a_i, x) &\leq b_i + u_i, \\ u_i &\geq 0, \quad i = 1, m. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Нехай  $(x^0, u^0)$  – розв'язок цієї задачі. Можна показати, що такий розв'язок завжди існує. З цього можна зробити такі висновки: якщо  $u^0 = 0$ , то  $x^0 \in X$ ; якщо  $u^0 \neq 0$ , то  $X = \emptyset$ .



## 10.2. АПРОКСИМАЦІЙНІ МЕТОДИ ПОШУКУ УМОВНОГО ОПТИМУМУ

Наявність скінченнокрокових методів розв'язування задач лінійного і квадратичного програмування обґрунтовує ідею зведення загальної задачі нелінійного програмування до одного з зазначених класів. Це досягається відповідно лінійною або квадратичною апроксимацією цільової функції і, в разі потреби, лінеаризацією обмежень. При цьому збіжність апроксимаційних методів обумовлена тим, що при наближенні до оптимуму точність апроксимації підвищується. У даному розділі розглянуто методи, які засновано на квадратичній, лінійній і лінійно-квадратичній апроксимації цільової функції.

### 10.2.1. Метод Ньютона з регулюванням кроку

Розглянемо задачу пошуку умовного екстремуму наступного вигляду

$$f(x) \rightarrow \min; \quad (10.19)$$

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (10.20)$$

де  $f(x)$  – опукла, принаймні двічі диференційовна цільова функція;  $g_j(x)$  – лінійні або нелінійні залежності, що визначають замкнену (компактну) опуклу множину допустимих розв'язків  $X$ . Якщо  $g_j(x)$  – нелінійні функції, вони повинні мати першу похідну.

Траекторія руху до умовного екстремуму будується за загальним правилом (див. розд. 5.2) вигляду

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k h^k, \quad \alpha^k > 0,$$

де  $k=0, 1, 2, \dots$  – номер ітерації (кроку) спуску;  $h^k$  – напрямок руху до умовного екстремуму в точці  $x^k$ ;  $\alpha^k$  – параметр, що визначає величину кроку.

Для визначення  $h^k$  на кожному кроці розв'язується задача мінімізації функції вигляду

$$\Psi_k = \left[ \nabla f(x^k), x - x^k \right] + \frac{1}{2} \left[ \nabla^2 f(x^k)(x - x^k), (x - x^k) \right] \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (10.21)$$

яка є квадратичною апроксимацією вихідної цільової функції  $f(x)$  за методом Ньютона (див. розд. 7.3.1, 7.3.2). Тут  $h = (x - x^k)$ .

Величину кроку спуску, тобто коефіцієнти  $\alpha^k$ , можна вибрати по-різному. Наприклад, за  $\alpha^k$  береться найбільше значення параметра  $\alpha^k$ , яке одержується процедурою *дроблення кроку*, починаючи з  $\alpha^k = 1$ , та задовольняє нерівність

$$f(x^k + \alpha^k h^k) - f(x^k) \leq \varepsilon \alpha^k \psi_k(\bar{x}^k), \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad x^k \in R^n. \quad (10.22)$$

Зазначений метод найефективніший у випадку, коли функція  $f(x)$  опукла, а множина  $X$  є поліедром. Тоді (10.21) – задача квадратичного програмування, для розв’язування якої існують досить ефективні методи (див. розд. 10.1). Більш того, відзначимо, що і для неопуклих задач із лінійними обмеженнями методи ньютонівського типу (тобто методи, засновані на квадратичній апроксимації цільової функції) часто виявляються кращими за інші.

Якщо всі або частина обмежень (10.20) є нелінійними залежностями, то для зведення вихідної задачі до задачі квадратичного програмування їх потрібно лінеаризувати. Skorистаємося розкладанням у ряд Тейлора, обмежившись тільки лінійними членами. Внаслідок цього одержимо

$$g_j(x^k) - (\nabla g_j(x^k), x - x^k) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (10.23)$$

Проте збіжність методу звичайно погіршується. Тоді більш ефективний є метод лінійно-квадратичної апроксимації.

### 10.2.2. Метод лінійно-квадратичної апроксимації

Розглянемо задачу нелінійного математичного програмування, яка є аналогічною (10.19–10.20) і відрізняється тим, що функції  $f(x^k)$ ,  $g_j(x)$ ,  $j = \overline{1, m}$ , є нелінійними опуклими диференційовними залежностями. Нехай  $X \subset R^n$  – непорожня допустима множина розв’язків задачі.

Довільній точці  $x^k \in R^n$  поставимо у відповідність задачу квадратичного програмування відносно  $h = (x - x^k)$ :

$$\begin{aligned} (\nabla f(x^k), h) + \frac{1}{2} \|h\|^2 &\rightarrow \min; \\ (\nabla g_j(x^k), h) + g_j(x^k) &\leq 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Цю задачу сформульовано на основі лінійних частин розкладів в околі точки  $x^k$ :

$$f(x^k + h) = f(x^k) + (\nabla f(x^k), h) + O(\|h\|);$$

$$g_j(x^k + h) = g_j(x^k) + (\nabla g_j(x^k), h) + O(\|h\|), \quad j = \overline{1, m},$$

причому в цільову функцію додано квадратичний член  $\|h\|^2$ , а константу  $f(x^k)$  відкинуто.

Зауважимо, що внаслідок опуклості функцій  $g_1(x), \dots, g_m(x)$  і умови  $X \neq \emptyset$  допустима множина задачі (10.24) завжди непорожня. Справді, для будь-якої точки  $x \in X$  виконується умова

$$(\nabla g_j(x^k), x - x^k) + \nabla g_j(x^k) \leq g_j(x) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (10.25)$$

Тому вектор  $h = x - x^k$  задовольняє обмеження цієї задачі. Далі, завдяки квадратичному члену, цільова функція задачі (10.24) сильно опукла. Отже, дана задача має розв'язок, причому єдиний. Позначимо його  $h(x)$ .

У даному методі послідовність наближень  $\{x^k\}$  генерується за правилом

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k h^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $h^k$  – розв'язок задачі (10.24) при  $x = x^k$ , тобто  $h^k = h(x^k)$ , а  $\alpha^k$  вибирається певним способом. При цьому послідовність  $\{x^k\}$  не обов'язково належить множині  $X$ , а послідовність  $f(x^k)$  – спадає.

Отже, розв'язок  $x^*$  визначається як границя послідовності  $x^0, x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots$ . Поліпшене  $(k+1)$  наближення  $x^{k+1}$  до розв'язку  $x^*$  отримують, розв'язуючи значно простішу допоміжну задачу вигляду (10.24). Квадратичний доданок  $\frac{1}{2} \|h\|^2$  гарантує існування розв'язку допоміжної задачі на непорожній допустимій множині.

Розв'язок  $x^*$  – стаціонарна точка вихідної задачі умовної оптимізації (10.19), (10.20). Якщо  $f(x)$  – опукла функція, то  $x^*$  – точка її оптимуму.

На кожній ітерації описаного методу потрібно розв'язувати задачу квадратичного програмування вигляду (10.24). Для цього можна використовувати метод, викладений у розд. 10.1.

Задачу (10.24) сформульовано на основі лінеаризації усіх обмежень задачі (10.19), (10.20). Проте можна враховувати лише ті обмеження, що “найбільше порушуються” у заданій точці  $x^k$ . Для цього при фіксованому  $\delta > 0$  розглянемо множину

$$I_\delta(x) = \{j \mid g_j(x) \geq g(x) - \delta, 1 \leq j \leq m\},$$

де функція  $g(x)$  має вигляд  $g(x) = \max\{0, g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)\}$ , і замінимо задачу (10.24) на таку:

$$\begin{aligned} &< \nabla f(x^k), h > + \frac{1}{2} \|h\|^2 \rightarrow \min; \\ &< \nabla g_j(x^k), h > + g_j(x^k) \leq 0, \quad j \in I_\delta(x). \end{aligned}$$

Ця задача містить у загальному випадку менше обмежень ніж задача (10.24), яка відповідає  $\delta = \infty$ . Тому, по-перше, одержання її розв'язку вимагає менше обчислювальних ресурсів і, по-друге, при неопуклих функціях  $g_1(x), \dots, g_m(x)$  вона дає змогу швидше обчислити допустимі точки.

### 10.2.3. Метод умовного градієнта

Метод умовного градієнта є узагальненням методу градієнта (Коші) (див. розд. 7.2) при розв'язуванні задач умовної оптимізації. Метод засновано на лінійній апроксимації цільової функції і, в разі потреби, обмежень задачі.

Розглянемо задачу умовної оптимізації вигляду

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \quad x \in X; \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{10.26}$$

де функції  $f(x), g_j(x)$  – опуклі диференційовні на  $R^n$ ;  $X$  – непорожня множина допустимих розв'язків, визначена обмеженнями  $g_j(x)$ .

Метод умовного градієнта засновано на загальній схемі формування траєкторії спуску, яку описано в розд. 5.2.1. Наближення до розв'язку задачі (10.26) будуються за рекурентною формулою

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k h^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{10.27}$$

Вектор  $h^k$  одночасно показує напрямок спадання функції  $f(x)$  і можливий напрямок відносно обмежень, що визначають  $X$  у точці  $x^k$ , а число  $\alpha^k > 0$  вибирається з умови

$$f(x^{k+1}) < f(x^k), \quad x^{k+1} \in X. \tag{10.28}$$

Для вибору  $h^k$  на  $k$ -му кроці розв'язується задача мінімізації на  $X$  лінійної апроксимації, яку отримано розкладанням функції  $f$  у ряд Тейлора в околі точки  $x^k$ :  $f(x) = f(x^k) + (\nabla f(x^k), x - x^k)$ .

Константа  $f(x^k)$  не впливає на хід розв'язування, цю задачу можна записати у вигляді

$$(\nabla f(x^k), x - x^k) \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (10.29)$$

Відзначимо, якщо  $X$  – опуклий багатогранник, тобто функції обмежень  $g_j(x)$  – лінійні функції, то задача (10.29) є задачею лінійного програмування і розв'язується симплекс-методом, викладеним у розд. 9.

Якщо обмеження  $g_j(x)$  цілком або частково є нелінійними, то їх потрібно лінеаризувати шляхом розкладання в ряд Тейлора. У цьому випадку нелінійні обмеження набувають вигляду

$$g_j(x^k) + (\nabla g_j(x^k), x - x^k) \leq 0, \quad (10.30)$$

і задача, як і при лінійних обмеженнях, розв'язується симплекс-методом.

Нехай  $\bar{x}^k$  – розв'язок задачі (10.29), а значення функції цілі

$$\eta_k = (\nabla f(x^k), \bar{x}^k - x^k). \quad (10.31)$$

Зауважимо, що розв'язок  $\bar{x}^k$  існує, оскільки  $X$  – компакт.

Очевидно,  $\eta_k \leq 0$ . Якщо  $\eta_k = 0$ , то у точці  $x^k$  виконуються необхідні умови оптимальності, тобто досягнуто стаціонарну точку функції  $f(x)$ .

Покладемо

$$h^k = \bar{x}^k - x^k. \quad (10.32)$$

Цей вектор прийнято називати *умовним антиградієнтом* функції  $f(x)$  у точці  $x^k$ .

Коефіцієнт  $\alpha^k$  у (10.27) вибирається з інтервалу  $(0, 1]$  так, щоб виконувалася умова (10.28). У випадку, якщо ліві частини вихідних обмежень  $g_j(x) \leq 0$  є нелінійними функціями, розв'язок  $x^k$ , який отримано після їх лінеаризації, може не належати допустимій множині розв'язків  $X$ . Тоді до умови (10.28) додається перевірка умови

$$x^k \in X. \quad (10.33)$$

Вибір конкретного  $\alpha^k$  може здійснюватися за різними правилами, наприклад, з умови одновимірної мінімізації:

$$\alpha^k = \arg \min_{0 \leq \alpha \leq 1} f(x^k + \alpha h^k). \quad (10.34)$$

Крім того, вибір коефіцієнтів  $\alpha^k$  може здійснюватися процедурою дроблення кроку. Якщо  $h^k$  – напрямок спадання, то дроблення кроку виконують так. Вибираються деякі константи  $0 < \beta < 1$  (рекомендується в даному випадку  $\beta = 0,5$ ). Для коефіцієнта  $\alpha^k = \beta$  перевіряється виконання умови (10.28) і, при потребі, (10.33). Якщо хоча б одна з них не виконується, то здійснюють дроблення кроку, тобто множення поточного значення  $\alpha$  на  $\beta$  доти, поки не виконаються умови (10.28), (10.33). Даний процес не може бути нескінченним, оскільки  $h^k$  – напрямок спадання. Перше  $\alpha$ , при якому виконаються умови (10.28), (10.33), приймається за  $\alpha^k$ .

За допомогою процедури дроблення кроку можна задовольнити нерівність

$$f(x^k + \alpha h^k) - f(x^k) \leq \varepsilon \alpha (\nabla f(x^k), h^k), \quad (10.35)$$

де  $0 < \varepsilon < 1$ .

Збіжність методу умовного градієнта забезпечують такі умови. Нехай  $X$  – опуклий компакт,  $f(x)$  – диференційовна функція на  $X$ , причому її градієнт задовольняє умову

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \|x - y\|, \quad \{x, y\} \in X. \quad (10.36)$$

Тоді будь-яка гранична точка  $x^*$  послідовності  $\{x^k\}$  є стаціонарною в задачі (10.26), тобто

$$\forall x \in X \quad (\nabla f(x^*), x - x^*) \geq 0.$$

Якщо при цьому функція  $f(x)$  опукла на  $X$ , то  $x^*$  – розв'язок задачі (10.26) і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = \min_{x \in X} f(x), \quad (10.37)$$

причому виконується така оцінка збіжності:

$$f(x^k) - \min_{x \in X} f(x) \leq \frac{v_1}{k}, \quad (10.38)$$

де  $v_1 > 0$  – деяка константа.

Розглянемо *алгоритмічну реалізацію методу*. Алгоритм починає роботу з довільної точки  $x^1 \in X$ . На  $k$ -й ітерації алгоритму,  $k \geq 0$ , розв'язується задача мінімізації (10.29)

$$(\nabla f(x^k), x - x^k) \rightarrow \min, \quad x \in X$$

та обчислюються величини  $\eta_k, h^k$  за формулами відповідно (10.31), (10.32).

Будується точка  $x^{k+1} = x^k + \alpha^k h^k$ , де  $\alpha^k$  дорівнює  $2^{-i_0}$ , а  $i_0$  – перший індекс ( $i=0, 1, \dots$ ), для якого виконується нерівність

$$f(x^k + 2^{-i_0} h^k) \leq f(x^k) + 2^{-i_0} \frac{\eta(x_k)}{2}. \quad (10.39)$$

Алгоритм зупиняє роботу, якщо  $\eta_k = 0$ .

**Приклад 10.1.** Проілюструємо реалізацію методу умовного градієнта. Знайти мінімум функції (рис. 10.1)

$$f(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \quad (10.40)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Використовуємо метод умовного градієнта. Нехай відома точка  $x^k = (3, 3)$ , у заданій точці  $f(x^k) = 3(3)^2 + 4(3)(3) + 5(3)^2 = 108$ .

Визначимо градієнт функції цілі  $\nabla f(x^k)$  у точці  $(3, 3)$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(3,3)} = 6x_1 + 4x_2 = 30; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{(3,3)} = 4x_1 + 10x_2 = 42.$$

Отже,  $\nabla f(x^k) = (30, 42)$ .

Допоміжна задача (10.29) має вигляд

$$30h_1^k + 42h_2^k \rightarrow \min, \quad (10.41)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

де  $(h_1^k, h_2^k)$  – умовний антиградієнт функції  $f(x)$  у точці  $x^k$ .

Лінія рівня  $30h_1^k + 42h_2^k = \frac{1}{6}$  функції цілі зображена на

рис. 10.1 штрихпунктирною лінією.

Розв'язування задачі здійснюється симплекс-методом (розд. 9). Оптимальна точка задачі (10.41)  $(h_1^k, h_2^k) = (4, 0)$ .

Значення функції цілі  $\eta_k = (\nabla f(x^k), h^k)$  складає  $\eta_k = -96$ . Це означає, що задана

точка не є оптимальною.

Значення кроку  $\alpha^k \in (0, 1]$  у (10.27) вибирається з умови виконання (10.28).

Вибір конкретного  $\alpha^k$  можна здійснити шляхом упорядкування і розв'язування задачі одновимірної мінімізації вигляду

$$\alpha^k = \arg \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ 3(x_1^k + \alpha h_1^k)^2 + 4(x_1^k + \alpha h_1^k)(x_2^k + \alpha h_2^k) + 5(x_2^k + \alpha h_2^k)^2 \right\} \quad (10.42)$$

або за формулою (10.39).

Покладемо у формулі (10.39)  $i=0$ , тоді ліва частина (10.39) набуває вигляду  $f(x^k + h^k) = f(4, 0) = 48$ , а права  $-f(x^k) + \frac{\eta(x_k)}{2} = 108 + \left(-\frac{96}{2}\right) = 60$ , тобто вже при  $i_0 = 0$  нерівність (10.39) виконується.

Отже,

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k h^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $\alpha^k = 2^{-i_0} = 1$ ,  $h^k = (1, 3)$ ,  $x^{k+1} = (4, 0)$ ,  $f(x^k) = 48$ .

Потім здійснюється перехід до наступної ітерації.

Застосування описаного методу виправдане лише тоді, коли задача вигляду (10.29), тобто задача мінімізації лінійної функції на  $X$ , розв'язується досить просто. Якщо  $X$  – куля або паралелепіпед, то таку задачу можна розв'язати в явному вигляді. Якщо  $X$  – поліедр, то (10.29) – задача ЛП. Але якщо множина  $X$  має складну структуру, то задача (10.29) є такою ж

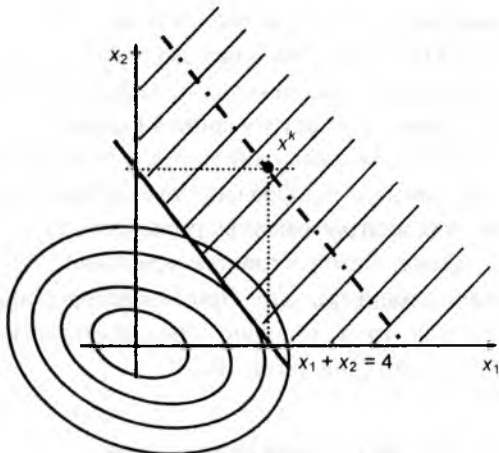


Рис. 10.1. Лінії рівня функції цілі



важкорозв'язуваною, як і вихідна. Крім того, як можна показати, оцінка (10.38) є точною на класі задач мінімізації опуклих функцій на поліедрах, тобто швидкість збіжності методу не є великою, причому саме в тих випадках, коли його застосування виправдане.

Проте розглянутий метод є принциповим, оскільки в найбільш простому вигляді відображає ідею лінійної апроксимації (лінеаризації) функції, яка відіграє важливу роль у чисельних методах оптимізації.

Отже, метод умовного градієнта доцільно застосовувати тоді, коли  $X$  являє собою поліедр. При лінеаризації обмежень збіжність методу погіршується, тому доцільно використовувати метод лінійно-квадратичної апроксимації (див. розд. 10.2.2).

### 10.3. МЕТОД ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ

Методи цієї групи відрізняються від апроксимаційних тим, що вихідна задача умовної оптимізації зводиться до розв'язування послідовності спеціально сконструйованих допоміжних задач безумовної оптимізації. Методи штрафних функцій відрізняються простотою, більшою універсальністю і сильними властивостями збіжності.

До методів штрафних функцій звичайно відносять цілу групу методів, пов'язаних із параметризацією вихідної екстремальної задачі. Один із найпоширеніших підходів засновано на введенні функцій штрафу, що залежать від штрафного параметра і мають такі властивості:

на більшій частині допустимої множини задачі математичного програмування ці функції близькі до нуля;

кожна з них досить швидко зростає або при наближенні зсередини до межі допустимої множини (*внутрішні*, іноді називають *бар'єрними*, штрафні функції), або при виході за його межі (*зовнішні* штрафні функції);

ступінь наближення штрафу до нуля і швидкість його зростання залежать від значення штрафного параметра і збільшуються з його зростанням.

Функція штрафу додається до цільової функції, після чого розв'язуються задачі безумовної оптимізації. За відповідних припущень послідовність розв'язків цих задач при необмеженому зростанні штрафного параметра зводиться до розв'язку вихідної задачі.

Отже, основна ідея методу штрафів полягає в перетворенні задачі мінімізації функції

$$z = f(x), \quad x \in X, \quad (10.43)$$

до задачі пошуку безумовного мінімуму функції

$$z = f(x) + P(x), \quad (10.44)$$

де функція  $P(x)$  є штрафною.

Потрібно, щоб у разі порушення обмежень вона «штрафувала» функцію  $z$ , тобто збільшувала її значення. Тоді мінімум  $z$  знаходитиметься всередині області обмежень. Відзначимо, що функції  $P(x)$ , які задовольняють цю умову, може бути декілька. Це визначає різноманітність методів штрафних функцій.

При викладанні даного методу візьмемо за основу задачу математичного програмування вигляду

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \\ x &\in X \subset R^n. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Нехай, як звичайно,  $X$  – допустима непорожня множина задачі (10.45).

Під розв'язками задачі (10.45) розумітимемо глобальні розв'язки. Вважатимемо, що деякі з результатів розділу справедливі і для локальних розв'язків цієї задачі.

### 10.3.1. Метод внутрішніх (бар'єрних) штрафних функцій

Особливість цього методу полягає в тому, що стартова точка  $x^0$  і вся траєкторія руху до екстремуму належить допустимій області розв'язків  $X$  і не виходить за її межі. Ця властивість забезпечується тим, що штраф, який враховує обмеження, експоненційно зростає (до  $+\infty$ ) при наближенні до меж допустимої області. У такий спосіб уздовж меж області  $X$  формуються своєрідні «бар'єри». Ці особливості й визначили назву методу.

Існують різні модифікації методу, що відрізняються виглядом функцій штрафу. Розглянемо деякі з них.

Метод внутрішніх штрафних функцій орієнтовано на розв'язування задач умовної оптимізації, у яких допустиму множину розв'язків  $X$  задано нерівностями. Отже, вихідна задача набуває вигляду

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min; \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (10.46)$$

Складемо еквівалентну задачу безумовної оптимізації:

$$f(x) + P(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}, \quad (10.47)$$

де  $P(x)$  – штрафна функція, яка має задовольняти умову

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in X, \\ +\infty, & \text{якщо } x \notin X. \end{cases} \quad (10.48)$$

Умові (10.48) відповідає багато функцій, але на практиці найчастіше використовують співвідношення вигляду

$$P_1(x) = r_k \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(x)}; \quad (10.49)$$

$$P_2(x) = r_k \sum_{j=1}^m \ln g_j(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \text{int } X, \quad (10.50)$$

де  $x \in \text{int } X$ ;  $r_k$  – строго спадна послідовність додатних чисел, які називаються параметрами штрафу,  $r_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$  – номер ітерації спуску.

Задачу (10.47) з урахуванням (10.49) або (10.50) розв'язують одним із відомих методів безумовної оптимізації. Метод забезпечує наближений розв'язок усередині допустимої області, який збігається до розв'язку вихідної задачі (10.46).

**Приклад 10.2.** Використовуючи штрафну функцію вигляду (10.49), розв'язати задачу

$$y = f(x) = x \rightarrow \min; \\ x \geq 2.$$

Обмеження задачі може бути перетворене до вигляду  $x - 2 \geq 0$ . Мінімальним значенням функції цілі  $f(x) = x$  розглянутої задачі є 2 при  $x = 2$ . Як за допомогою штрафної функції можна знайти розв'язок?

Розглянемо функцію

$$\varphi(x, r) = x + \frac{r_k}{x - 2}.$$

На рис. 10.2 зображено графік функції  $\varphi(x)$  і показано положення точок її мінімуму для різних значень  $r_k$  (1; 0,25; 0,01).

Допустима область лежить праворуч від вертикальної прямої  $x = 2$ . Незавжди помітити, що послідовність точок  $Q_1, Q_2, Q_3$  збігається до точки  $Q$  – мінімуму функції за наявності обмежень. Знайдемо мінімум функції  $\varphi(x)$  аналітично (із необхідних і достатніх умов оптимальності):

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1 - \frac{r_k}{(x-2)^2}.$$

Прирівнявши першу похідну функції  $\varphi(x)$  до нуля, дістаємо

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad (x-2)^2 = r_k.$$

Отже,  $x = 2 \pm \sqrt{r_k}$ . Тоді  $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{2r_k}{(x-2)^3}$  і мінімум досягається при  $x = 2 \pm \sqrt{r_k}$  усередині області обмежень.

Отже, функція  $\varphi(x, r)$  має мінімум, який дорівнює  $2 + 2\sqrt{r}$  при  $x = 2 + \sqrt{r}$ . Тоді  $Q_1$  є точка з координатами (3; 4),  $Q_2$  – (2,5; 3),  $Q_3$  – (2,1; 2,2). При  $r \rightarrow 0$  мінімум без обмежень функції  $\varphi(x, r)$  наближається до значення 2 і мінімальною є точка  $x = 2$ .

У загальному випадку неможливо аналітично визначити положення мінімуму функції  $\varphi(x, r)$ , розглядаючи її як звичайну функцію від  $r$ . Для визначення мінімуму потрібно звернутися до чисельних методів.

Слід зазначити, якщо цільова функція  $f(x)$  опукла, а функція  $g_j(x)$  увігнута, то функція  $\varphi(x, r)$ , яка задана рівнянням (10.50), також є опуклою функцією в опуклій області обмежень.

### 10.3.2. Метод зовнішніх штрафних функцій

Відмінність цього методу від методу внутрішніх штрафних функцій полягає у тому, що стартова точка  $x^s$  вибирається за межами допустимої області розв'язків  $X$ . Траєкторія спуску не належить  $X$ , але збігається до

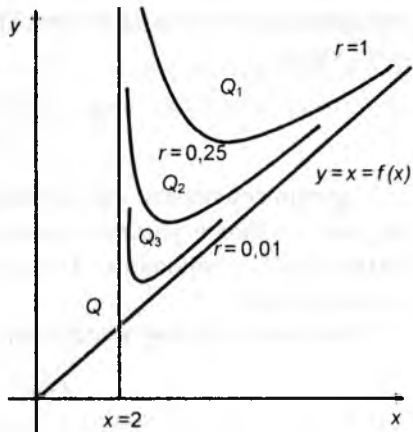


Рис. 10.2. Ілюстрація оптимізаційного процесу

екстремальної точки на її межі. Для цього штрафна функція має задовольняти умову

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in X, \\ > 0, & \text{якщо } x \notin X. \end{cases}$$

Друга особливість методу зовнішніх штрафних функцій полягає в тому, що він більш універсальний і дає змогу розв'язувати задачі умовної оптимізації зі змішаними (заданими у вигляді нерівностей і рівностей) обмеженнями.

Розглянемо задачу умовної оптимізації вигляду

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \quad x \in R^n; \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j = \overline{1, m}; \\ h_l(x) &= 0, \quad l = \overline{m+1, L}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Складемо нову функцію вигляду  $f(x) + P_k(x)$  і розв'яжемо задачу пошуку безумовного екстремуму

$$\varphi(x) = f(x) + P_k(x) \rightarrow \min_{x \in R^n} \quad (10.52)$$

будь-яким з відомих методів безумовної оптимізації.

Граничні точки послідовності  $\{\bar{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$  є оптимальним розв'язком задачі (10.51). У методі зовнішніх штрафних функцій штрафи  $P_k(x)$  вибираються так, що точки поза  $X$  стають все більш невідгідними.

Як зовнішні штрафні функції найчастіше використовуються такі залежності:

$$P_1(x) = r_k \left\{ \sum_{j=1}^m \delta_j [g_j(x)]^2 + \sum_{j=m+1}^L [h_j(x)]^2 \right\}; \quad (10.53)$$

$$P_2(x) = r_k \left\{ \sum_{j=1}^m \delta_j g_j(x) + \sum_{j=m+1}^L |h_j(x)| \right\}, \quad (10.54)$$

де  $r_k$  – строго зростаючий параметр штрафу, тобто  $r_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ ;

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & \text{якщо } g_j(x) \leq 0, \\ 1, & \text{якщо } g_j(x) > 0. \end{cases} \quad (10.55)$$

Відмінність функції (10.53) від (10.54) полягає в тому, що коли  $g_j(x)$  неперервно диференційовні, то вона також буде диференційовною, і для розв'язування задачі безумовної оптимізації можна застосувати ефективний метод градієнтного спуску.

**Приклад 10.3.** Розглянемо скалярну задачу:

$$\begin{aligned}(-x^2 + 4x) &\rightarrow \max; \\ 1 - x &\geq 0.\end{aligned}$$

Квадратична штрафна функція, яку у даному випадку потрібно максимізувати, має вигляд  $\varphi(x, r) = -x^2 + 4x - r[\delta(x-1)^2]$ .

Її похідна по  $x$  обчислюється за формулою  $\nabla\varphi(x, r) = -2x + 4 - 2r[\delta(x-1)]$ .

Вона відображається в нуль в єдиній точці, яка дорівнює  $x(r) = \frac{2+r}{1+r}$ , та є точкою максимуму  $\varphi(x, r)$  при  $r_k \rightarrow +\infty$ . При цьому всі  $x(r)$  не задовольняють обмеження, тобто траєкторія спуску лежить поза допустимою областю і, отже,  $\delta = 1$ .

Відзначимо, що методи штрафних функцій універсальні, оскільки не ставлять ніяких спеціальних вимог до виду цільової функції й обмежень та ефективні при обчислюванні. Швидкість їх збіжності залежить від обраного для розв'язування методу безумовної оптимізації.

### Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає основна ідея методу умовного градієнта?
2. Якими є межі застосування методу умовного градієнта?
3. У чому відмінність методу умовного градієнта і методу Ньютона з регулюванням кроку?
4. Сформулюйте задачу квадратичного програмування і дайте характеристику функції цілі й обмежень задачі.
5. Що таке антиградієнт функції? Поясніть поняття умовного антиградієнта.
6. Як застосовується симплекс-метод при розв'язуванні задачі квадратичного програмування?
7. У чому полягає значення методу штрафних функцій?
8. Наведіть змістовну характеристику методу внутрішніх штрафних функцій.

9. Наведіть характеристику методу зовнішніх штрафних функцій.

10. Поясніть відмінності методів внутрішніх та зовнішніх штрафних функцій.

11. Яку роль відіграє задача квадратичного програмування при розв'язуванні загальної задачі нелінійного програмування методом лінійно-квадратичної апроксимації?

## Висновки

Створення чисельних методів розв'язування задач з обмеженнями є більш складною проблемою, ніж побудова методів безумовної оптимізації. Ефективні алгоритми вдається побудувати лише для спеціальних класів умовних задач, до яких відносяться задачі лінійного, квадратичного й опуклого програмування. Саме цим класам задач приділено основну увагу.

У частині III наведено основні постановки і викладено найпоширеніші методи чисельного розв'язування задач, які виникають у математичному програмуванні, економіці, теорії оптимального керування та інших областях науки і практики.

Значну увагу приділено постановкам задач лінійного програмування. Детально розглянуто симплекс-метод розв'язування задачі ЛП.

Описані вище алгоритми розв'язування задач нелінійного програмування носять ітераційний характер. Це означає, що будується деяка скінченна або нескінченна послідовність точок, відносно якої можна стверджувати, що вона в тому або іншому сенсі збігається до розв'язку задачі мінімізації.

При цьому послідовні точки пов'язані співвідношенням  $x^{k+1} = x^k + \alpha^k h^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , де  $h^k$  – вектор спуску з точки  $x^k$ , а  $\alpha^k$  – крок уздовж напрямку  $h^k$ .

Тому опис наведених алгоритмів нелінійної оптимізації полягає в заданні способу вибору вектора  $h^k$  і величини кроку  $\alpha^k$ .

Слід зазначити, якщо спосіб вибору вектора  $h^k$  визначає загальну швидкість збіжності процесу, то спосіб вибору  $\alpha^k$  істотно впливає на кількість обчислень на кожній ітерації.

Відзначимо, що при виборі алгоритму розв'язування задачі виникає проблема порівняння ефективності різних алгоритмів. Звичайно за критерій

ефективності приймається точність одержуваного результату, час розрахунку, швидкість збіжності ітераційного процесу. Проте навіть таке обмеження не дає змоги однозначно упорядкувати алгоритми і сказати, який із них кращий або гірший. Річ у тім, що одержувані оцінки швидкості збіжності є оцінками не для конкретних задач, а для класів задач. Тому алгоритм, що не може бути застосований для широкого класу задач, може виявитися ефективним на більш вузькому класі. Це означає, що дослідник повинен мати великий вибір алгоритмів і залежно від конкретної задачі застосовувати потрібний.

### Список рекомендованої літератури

1. **Еремін І. І.** Введение в теорию выпуклого и линейного программирования / И. И. Еремин, И. Н. Астафьев. – М.: Наука, 1976. – 340 с.
2. **Заславский Ю. П.** Сборник задач по линейному программированию. – М.: Наука, 1969. – 286 с.
3. **Ашманов С. А.** Линейное программирование. – М.: Наука, 1981. – 286 с.
4. **Степанюк В. В.** Методи математичного програмування. – К.: Вища школа, 1977. – 281 с.
5. **Зайченко Ю. П.** Исследование операций. – К.: Вища школа, 1975. – 312 с.
6. **Пападимитриу Х., Стайглиц К.** Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 580 с.
7. **Таха Р.** Введение в исследование операций: В 2 т. – М.: Мир, 1985. – 479 с.
8. **Гилл Ф.** Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. – М.: Мир, 1985. – 509 с.
9. **Хачиян Л. Г.** Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // ДАН СССР. – 1979. – № 5. – С. 1093 – 1096.
10. **Шор Н. З.** Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. – 1977. – № 1. – С. 94–95.
11. **Писсанецки С.** Технология разреженных матриц. – М.: Мир, 1988. – 410 с.
12. **Karmarkar N.** A new polynomial-time algorithm for linear programming // Combinatorica. – 1984. – № 4. – P. 373–395.



**Адитивність** (від лат. *additivus* – додавальний) – властивість величин, за якою значення величини, що відповідає цілому об'єкту, дорівнює сумі значень величин її частин за будь-якого розбиття.

**Антиградієнт багатовимірної неперервної функції.** Нехай

$$\nabla f(x^0) = f'(x^0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)$$

– *n*-вимірний вектор перших частинних похідних (градієнт) функції *f* у точці  $x^0 \in R^n$ . Тоді вектор  $-\nabla f(x^0)$ , спрямований у протилежний бік, є антиградієнтом функції *f*( $x^0$ ) у точці  $x^0$ .

**Вектор** – упорядкований набір чисел (компонент), кількість яких дорівнює вимірності простору. Відзначимо, що точка простору  $E^n$  задається вектором вимірності *n*.

**Детермінізм** (від лат. *determinare* – визначати) – визначеність і однозначність математичних залежностей та їх параметрів.

**Диференційовність функції.** *Одновимірний випадок.* Розглянемо графік функції *f* на інтервалі, що містить деяку точку  $x^*$ . Виберемо на цьому інтервалі ще одну точку  $y$  ( $y \neq x^*$ ) і побудуємо відрізок із координатами  $(x^*, f(x^*))$ ,  $(y, f(y))$ .

Тангенс кута нахилу цього відрізка до горизонталі дорівнює  $m(y) = \frac{f(y) - f(x^*)}{y - x^*}$ .

Якщо він має границю при  $y \rightarrow x^*$ , то вона дорівнює тангенсу кута нахилу між віссю *OX* і дотичною до графіка *f*( $x^*$ ) у точці  $x^*$ . Цю границю називають першою похідною від *f* у точці  $x^*$

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x^*} m(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h}.$$

У випадку існування такої границі функцію *f* називають диференційовною у точці  $x^*$ .

**Багатовимірний випадок.** Розглянемо в точці  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  зміну  $f$  при збільшенні першої змінної, в той час як інші  $n - 1$  змінні залишаються незмінними. Якщо виявиться, що існує границя

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x^*} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^* + h, x_2^*, \dots, x_n^*) - f(x^*)}{h},$$

то її називають частинною похідною від  $f$  за змінною  $x_1^*$ . Це число являє собою нахил дотичної до  $f$  уздовж напрямку  $x_1$ .

**Лінійною** функцією називають функцію  $f(x)$ , градієнт якої не залежить від  $x$ , тобто  $f(x) = (c, x) + a$ , де  $c, a$  – деякі фіксовані вектор і число, причому  $\nabla f(x) = c$ .

**Експоненційний за часом алгоритм** – алгоритм, складність якого за часом не припускає поліноміальної оцінки.

**Ізоморфізм** (від грец. ізо – рівний, морфі – вид) – взаємно однозначна відповідність.

**Інтервал планування** – період часу, на який складається план дій. Визначається часом початку і закінчення операцій.

**Лінійна комбінація** векторів  $a_i$  із коефіцієнтами  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, k$ , є вектором  $b$  вигляду

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k.$$

**Лінійна незалежність векторів.** Якщо вектор  $a_{k+1}$  неможливо подати у вигляді лінійної комбінації векторів  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , то говорять, що  $a_{k+1}$  є лінійно незалежним від  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ .

**Множина** – сукупність елементів (об'єктів, предметів) будь-якої природи, що мають характеристичні властивості, притаманні всім елементам даної множини і тільки їм.

**Міра множини** – узагальнення поняття довжини відрізка, площі плоскої фігури й об'єму тіла на множини більш загальної природи. У даному посібнику міра “якості” (ефективності) рішення.

**Внутрішньою точкою** множини  $P \subset R^n$  називається точка  $p$ , для якої існує  $\epsilon$ -окіл  $U_\epsilon(p)$  такий, що  $U_\epsilon(p) \subseteq P$ .

Заданою є визначена множина  $A$ , якщо вказана властивість (ознака), яку мають всі елементи  $a$ , що належать множині  $A$ , і якої не мають інші елементи, що не належать множині  $A$ . Множина задається переліком (списком) елементів, породжуючою процедурою, описом характеристичних ознак, які повинні мати її елементи.

**Замкненою** називається множина, яка містить усі свої граничні точки.

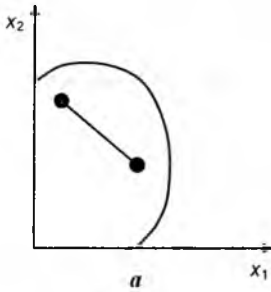


Рис. 1. Вигляд множини:  
а – опукла; б – неопукла

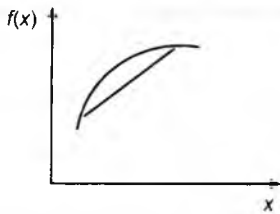
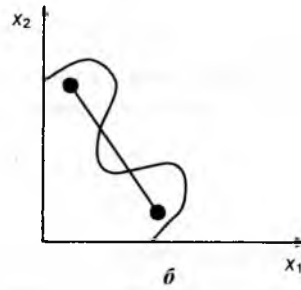


Рис. 2. Опукла догори функція



Рис. 3. Опукла донизу функція

Граничною точкою  $Q$  множини називається точка, в кожному околі якої є точки множини, відмінні від  $Q$ .

Опукла множина – множина в евклідовому або іншому векторному просторі, що разом із будь-якими двома своїми точками містить усі точки з'єднуючого їх відрізка. У протилежному разі – множина є неопуклою (рис. 1).

Належність елемента  $a$  множині  $A$  позначається як  $a \in A$ . Якщо деякий елемент  $x$  не належить  $A$ , то  $x \notin A$ .

Нескінченною називається множина при необмеженій кількості елементів.

Скінченною називається множина, яка складається зі скінченної кількості елементів, що визначається деяким числом  $N = 1, 2, 3, \dots$

Порожньою називається множина, що не містить жодного елемента. Позначається вона символом  $\emptyset$ .

Потужністю  $|M|$  скінченної множини  $M$  називається її число елементів.

**Метасистема** – більш загальна система, елементом якої є система, що розглядається.

**Мультиплікативність** (від лат. multiplico – множу) – властивість деякої величини, що полягає у її рівності добутку частин.

**Опукла функція** – функція, графіком якої є опукла крива. Функція  $f(x)$  називається опуклою догори (донизу) (рис. 2, 3) на відрізку  $[a, b]$ , якщо кожна дуга графіка цієї функції лежить не нижче (не вище) хорди, що її стягує.

Сильно опукла функція – функція, яка визначена на опуклій множині  $X$ , для якої існує постійна  $p > 0$  (параметр сильної опуклості) така, що за довільних  $x, y \in X$  та  $0 \leq \alpha \leq 1$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - \alpha(1 - \alpha)p\|x - y\|^2.$$

**Поліноміальний за часом алгоритм** – алгоритм, складність якого за часом не перевищує  $|p(n)|$ , де  $p$  – деякий поліном,  $n$  – вхідна довжина.

**Вхідна довжина** – кількість символів, за допомогою яких кодується задана задача у прийнятій системі кодування.

**Складність за часом** – максимальна кількість операцій, що виконуються при розв'язуванні алгоритмом задач даного типу вхідної довжини  $n$ .

**Скалярний добуток**  $(a, x)$  – скалярний добуток векторів  $a$  і  $x$  вимірності  $n$ , що визначається за формулою

$$(a, x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot x_k.$$

**Статистична однорідність** означає, що випадкові величини отримані за однакових умов і мають однакові статистичні характеристики.

**Структура** (від лат. *structura* – будова, розташування) – назва, що об'єднує поняття, загальною рисою яких є те, що вони стосуються множин, природа елементів яких не визначена. Для визначення структури задають відношення (зв'язки), у яких знаходяться елементи множини.

	Передмова .....	3
Частина I.	<b>МЕТОДОЛОГІЧНІ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ</b> .....	5
<b>Розділ 1.</b>	<b>Системологічний аналіз процедури прийняття рішень</b> .....	5
	1.1. Визначення абстрактної цілеспрямованої системи .....	5
	1.2. Аналіз основних задач синтезу системи.....	8
	1.3. Структура множини допустимих рішень.....	13
	1.4. Принципи реалізації конструктивного підходу до розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації .....	17
	Запитання для самоперевірки .....	24
<b>Розділ 2.</b>	<b>Формування узагальнених багатокритеріальних оцінок і обґрунтування моделей вибору компромісних рішень</b> .....	25
	2.1. Синтез моделі формування узагальненого критерію.....	25
	2.2. Вимірювання і шкалювання частинних критеріїв.....	29
	2.3. Формування функції корисності частинних критеріїв.....	35
	2.4. Обґрунтування правил вибору компромісних рішень .....	41
	2.5. Синтез універсальної адаптивної математичної моделі багатокритеріального оцінювання та оптимізації.....	57
	Запитання для самоперевірки .....	61
<b>Розділ 3.</b>	<b>Методологія і критерії прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності</b> .....	62
	3.1. Аналіз особливостей умов ризику і невизначеності та постановка задачі прийняття рішень в цих умовах .....	62
	3.2. Математична модель і алгоритми формування множини допустимих альтернативних рішень.....	67
	3.3. Методика і критерії вибору ефективного рішення .....	74
	Запитання для самоперевірки .....	78
<b>Розділ 4.</b>	<b>Формування сценаріїв розвитку зовнішнього середовища методами імітаційного моделювання</b> .....	79
	4.1. Обґрунтування виду імітаційної моделі .....	79
	4.2. Формування сценаріїв поведінки навколишнього середовища....	81
	Запитання для самоперевірки .....	87
	Висновки .....	87

<b>ЧАСТИНА II. МЕТОДИ ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЙ</b>		
<b>(БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ)</b> .....		90
<b>Розділ 5.</b>	<b>Чисельний пошук екстремуму</b> .....	90
5.1.	Основні поняття і визначення .....	90
5.1.1.	Формальна постановка задачі оптимізації .....	92
5.1.2.	Задача безумовної й умовної оптимізації .....	93
5.1.3.	Аналітичний підхід до розв'язування задачі пошуку екстремуму функції .....	95
5.1.4.	Поняття опуклої множини й опуклої функції .....	98
5.2.	Початкові відомості про чисельні методи оптимізації .....	101
5.2.1.	Поняття про чисельні методи .....	102
5.2.2.	Збіжність методів .....	105
5.2.3.	Умови припинення (критерії закінчення) розрахунку ....	107
	Запитання для самоперевірки .....	108
<b>Розділ 6.</b>	<b>Оптимізація функцій однієї змінної</b> .....	109
6.1.	Властивості функцій .....	109
6.2.	Методи вилучення інтервалів .....	111
6.2.1.	Етап установлення меж інтервалу .....	112
6.2.2.	Етап зменшення інтервалу невизначеності .....	114
6.2.3.	Методи пошуку екстремуму .....	116
6.2.4.	Порівняння методів вилучення інтервалів .....	122
	Запитання для самоперевірки .....	123
<b>Розділ 7.</b>	<b>Чисельні методи пошуку екстремуму функцій багатьох змінних</b> .....	124
7.1.	Методи прямого пошуку .....	125
7.1.1.	Метод сіток .....	125
7.1.2.	Метод покоординатного спуску .....	126
7.1.3.	Модифікації методу покоординатного спуску .....	128
7.1.4.	Метод пошуку по симплексу (метод багатогранника) .....	130
7.1.5.	Метод деформованого багатогранника .....	135
7.1.6.	Метод випадкового пошуку .....	137
7.2.	Гradientні методи пошуку (методи першого порядку) .....	143
7.2.1.	Метод градієнта (метод Коші) .....	143
7.2.2.	Евристичні схеми градієнтного спуску .....	146
7.2.3.	Чисельна апроксимація градієнтів .....	148
7.3.	Пошук екстремуму методами другого порядку .....	149
7.3.1.	Метод Ньютона .....	149
7.3.2.	Модифікації методу Ньютона .....	153
	Запитання для самоперевірки .....	156
	Висновки .....	157

Частина III. МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ).....	159
<b>Розділ 8. Вступ до теорії математичного програмування</b> .....	159
8.1. Задача умовної оптимізації .....	159
8.2. Класифікація задач математичного програмування .....	160
8.3. Аналітичний метод розв'язування задач умовної оптимізації .....	164
8.4. Узагальнення методу Лагранжа .....	167
Запитання для самоперевірки .....	170
<b>Розділ 9. Лінійне програмування й аналіз діяльності</b> .....	171
9.1. Історичні відомості .....	171
9.2. Приклади задач лінійного програмування .....	172
9.2.1. Управління фінансами (банківська справа) .....	173
9.2.2. Планування роботи аудиторської фірми .....	174
9.2.3. Вибір технології нарізування паперу .....	175
9.2.4. Оптимізація міжгалузевих зв'язків (модель Леонт'єва) .....	176
9.2.5. Транспортна задача .....	179
9.3. Класифікація і форми запису задач лінійного програмування ...	180
9.4. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування .....	183
9.5. Основні властивості задач лінійного програмування .....	189
9.6. Теоретичні основи лінійного програмування .....	191
9.6.1. Опуклі множини і функції .....	191
9.6.2. Лінійні комбінації .....	191
9.6.3. Лінійна залежність і незалежність .....	192
9.6.4. Елементи теорії лінійних нерівностей .....	193
9.6.5. Базисні допустимі розв'язки. Перехід від одного базисного допустимого розв'язку до іншого .....	196
9.7. Симплекс-метод .....	202
9.7.1. Максимізація цільової функції .....	204
9.7.2. Мінімізація цільової функції .....	211
9.7.3. Особливі ситуації в симплекс-методі .....	212
9.7.4. Основні поняття теорії двоїстості .....	214
9.7.5. Економічна інтерпретація моделей задач лінійного програмування .....	216
9.8. Аналіз моделі лінійного програмування на чутливість .....	217
9.8.1. Графічні методи аналізу моделі на чутливість .....	219
9.9. Сучасний стан чисельних методів розв'язування задач лінійного програмування .....	223
Запитання для самоперевірки .....	224

<b>Розділ 10. Методи нелінійної умовної оптимізації</b> .....	225
10.1. Скінченнокроковий метод розв'язування задач квадратичного програмування .....	225
10.2. Апроксимаційні методи пошуку умовного оптимуму .....	232
10.2.1. Метод Ньютона з регулюванням кроку .....	232
10.2.2. Метод лінійно-квадратичної апроксимації .....	233
10.2.3. Метод умовного градієнта .....	235
10.3. Метод штрафних функцій .....	240
10.3.1. Метод внутрішніх (бар'єрних) штрафних функцій .....	241
10.3.2. Метод зовнішніх штрафних функцій .....	243
Запитання для самоперевірки .....	245
Висновки .....	246
Список рекомендованої літератури .....	247
Словник термінів .....	248



Навчальний посібник

*Петров Едуард Петрович,  
Новожилова Марина Володимирівна,  
Гребеннік Ігор Валерійович*

## **МЕТОДИ І ЗАСОБИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМАХ**

Редактор *О. В. Боброва*

Оформлення художника *В. С. Жиборовського*

Художній редактор *С. В. Анненков*

Коректори *Н. О. Сазонова, Н. М. Мірошніченко, О. О. Куценко*

Комп'ютерна верстка *Т. В. Антіпової*

Підписано до друку 28.01.2004. Формат 60×84 1/16.

Папір офсетний. Друк офсетний. Гарнітура Times.

Умов. друк. арк. 14,88. Обл.-вид. арк. 14,52.

Тираж 1000 прим. Зам. № 4-36.

Видавництво "Техніка". 04053 Київ, вул. Обсерваторня, 25.

Свідцтво про внесення до Державного реєстру України  
суб'єктів видавничої справи ДК № 357 від 12.03.2001 р.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці  
09117 м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.