

531/075]

1777

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.О.Прятельчук, В.І.Степанчук, В.О.Федотов

ТЕОРІЯ СПОРУД
Модуль I
ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Вінниця ВДТУ 1997

2978-48

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.О. Приятельчук, В.І. Степанчук, В.О. Федотов

ТЕОРІЯ СПОРУД

Модуль І
ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

НТБ ВНТУ



2978-48

531(075)

П 77

1997

Приятельчук В.О. Теорія споруд Модуль І

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів бакалаврського напрямку 6.0502 - "Менеджмент у виробничій сфері будівництва" ступеневої підготовки спеціалістів з вищою технічною освітою

Вінниця ВДТУ 1997

УДК 531 /075/

Теорія споруд. Модуль I. Теоретична механіка. Навчальний посібник /В.О.Прятельчук, В.І.Степанчук, В.О.Федотов -В.:ВДТУ. 1992. - 85 с. Укр. мовою/.

Навчальний посібник написаний згідно з діючою програмою вивчення теоретичної механіки, що є першою частиною дисципліни "Теорія споруд" для студентів бакалаврського напрямку 6.0502 - „Менеджмент у виробничій сфері будівництва“.

Методично навчальний посібник забезпечує студентів теоретичними відомостями, підготовку їх до лабораторних занять, варіантами розрахунково-графічної роботи і прикладом її виконання.

Бібліограф: 8 назв., іл. 96, табл. 4.

Рецензенти: А.С. Линник, проф.

П.С. Берник, доц.



ЗМІСТ

| | | |
|---------|--|----|
| 1. | ВСТУП..... | 5 |
| 2. | ОСНОВИ СТАТИКИ | 16 |
| 2.1. | Сила. Система сил | 16 |
| 2.2. | Основні означення статички | 17 |
| 2.3. | Момент сили відносно центра | 18 |
| 2.4. | Момент сили відносно осі | 19 |
| 2.5. | Головний вектор і головний момент системи сил | 20 |
| 2.6. | Аксиома рівноваги | 21 |
| 2.6.1. | Аксиома рівноваги для збіжної системи сил | 21 |
| 2.6.2. | Аксиома рівноваги для системи паралельних сил | 22 |
| 2.6.3. | Аксиома рівноваги для плоскої системи сил | 23 |
| 2.7. | Аксиома дії та протидії | 23 |
| 2.8. | Аксиома про рівновагу здеформованого тіла | 23 |
| 2.9. | Аксиома про в'язі..... | 23 |
| 2.10. | Класифікація сил | 24 |
| 2.10.1. | Класифікація в'язей | 25 |
| 2.11. | Поняття про пару сил | 28 |
| 2.12. | Практичне застосування аксіом статички | 28 |
| 2.12.1. | Збіжна система сил | 28 |
| 2.12.2. | Плоска довільна система сил | 29 |
| 2.12.3. | Визначення реакцій опор конструкції з двох тіл ... | 31 |
| 2.13. | Розрахунок найпростіших ферм | 32 |
| 2.13.1. | Основні поняття про статично визначувані плоскі ферми | 32 |
| 2.13.2. | Метод вирізування вузлів | 35 |
| 2.13.3. | Діаграма Максвелла-Кремони | 38 |
| 2.13.4. | Метод Ріттера | 39 |
| 2.14. | Центр паралельних сил | 40 |
| 2.14.1. | Центр ваги дискретної системи матеріальних точок . | 42 |
| 3. | ДИНАМІКА | 43 |
| 3.1. | Динаміка точки | 43 |
| 3.1.1. | Швидкість та прискорення точки | 43 |
| 3.1.2. | Диференціальні рівняння руху точки | 48 |
| 3.1.3. | Рівняння руху невідільної матеріальної точки | 48 |
| 3.2. | Динаміка системи | 50 |
| 3.2.1. | Маса системи. Центр мас | 50 |
| 3.2.2. | Момент інерції тіла відносно осі | 52 |

| | | |
|--------|--|----|
| 3.2.3. | Метод кінетостатики | 53 |
| 3.2.4. | Головний вектор та головний момент сил інерції | 55 |
| 4. | ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ | 58 |
| 4.1. | Лабораторна робота № 1. Дослідження рівноваги двох тіл ... | 58 |
| 4.2. | Лабораторна робота № 2. Обчислення осьового моменту інерції тіла | 63 |
| 4.3. | Лабораторна робота № 3. Визначення прискорення сили тяжіння | 65 |
| 5. | РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 1. | |
| | " РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ" | 67 |
| 5.1. | Зразок розрахунку та дослідження плоскої ферми | 78 |
| | ЛІТЕРАТУРА | 83 |
| | ДОДАТОК I. Питання по курсу теоретичної механіки | 84 |

I. ВСТУП

Механіка - це наука про загальні закони механічного руху матеріальних тіл. Механічний рух - це переміщення тіл або їх частин у просторі з перебігом часу.

Теоретична /раціональна/ механіка спирається на певну сукупність узгоджених законів і фактів, встановлених дослідною /експериментальною/ механікою, які вважаються істинними. На цій основі засобами математики дедуктивним шляхом встановлюються нові факти і закони руху.

Класична /ньютонівська/ механіка має справу з матеріальними об'єктами, що складаються з величезного числа атомів або молекул /макроскопічні тіла/, які рухаються із швидкостями v , набагато меншою від швидкості світла c / $v/c \cong 300\ 000$ км/с/. Межі істинності класичної механіки встановлюються, з одного боку, спеціальною та загальною теорією відносності /Пуанкаре, Лоренц, Ейнштейн/, а з іншого боку - квантовою теорією /Планк, Бор, Гейзенберг, де Бройль/. В подальшому будемо розглядати тільки класичну теоретичну механіку.

Історичний розвиток механіки з найдавніших часів можна поділити на періоди.

Найдавніший /доісторичний/ період можна охарактеризувати винаходами колеса, важеля, створенням найпростіших механізмів /візок/, споруд і пристосувань.

Давньоісторичний /античний/ період характеризується створенням ускладнених механізмів /поліспасти, гвинт та ін./, споруд і в зв'язку з цим розробкою перших донаукових систем поглядів на механіку. Термін "механіка" ввів Арістотель /384 - 322 рр. до н.е./ В цей час техніка виділяється в окремий вид діяльності людей. Розвиток механіки як науки / в європейській традиції / починається від Архімеда /287 - 212 рр. до н.е./.

Середньовічний період дає приклади розвитку будівельної механіки і систематизації знань в справі створення допромислових механізмів різноманітного призначення.

Класичний період /16-19 століття/ розвитку механіки своїм початком завдячує прискореному розвитку торгівлі, навігації, астрономії, військової справи. В подальшому розвиток механіки стимулюється паралельним розвитком добувної та обробної промисло-

вості, створенням нових транспортних засобів, що в свою чергу стало можливим завдяки освоєнню гідравлічної та теплової енергії, початку освоєння електричної енергії.

М. Коперник /1473-1543/ створив геліоцентричну систему світу, Й. Кеплер /1571-1630/ відкрив закони обертання планет. Галілей /1564-1642/ вперше сформулював ідеї про інерцію, прискорення, додавання рухів. Х. Гюйгенс /1629-1695/ винайшов годинник, дав теорію фізичного маятника. І. Ньютон /1643-1727/ систематично виклав основи класичної механіки у творі "Математичні начала натуральної філософії" /1687/. Цей твір зберігає своє значення і в наші часи. П. Варіньон /1654-1722/ розробляв методи геометричної статyki. Й. Бернуллі /1667-1748/, Л.Ейлер /1707-1783/, Ж.Даламбер /1717 - 1783/ встановили основні принципи механіки і розв'язали багато знаменитих задач. Ж. Лагранж /1736-1813/ у праці "Аналітична механіка" /1788/ започаткував новий напрямок в теоретичній механіці, дав нові форми рівнянь статyki і динаміки. Л. Луансо /1777-1859/ завершив геометричну статистику. К.Ф. Гаусс /1777-1855/ встановив варіаційний принцип. У. Гамільтон /1805-1865/, К. Якобі /1804-1851/, М.В. Остроградський /1801-1861/ сформулювали нові варіаційні принципи і встановили нові форми рівнянь аналітичної механіки. З другої половини 19-го століття теоретична механіка розгалужується на декілька напрямків, що пов'язані з основними проблемами. П.Л. Чебишев /1821-1894/, В.І. Лігін /1846-1900/ розвинули кінематику механізмів. С.В. Ковалевська /1850-1891/ розв'язала проблему динаміки твердого тіла. О.М. Крилов /1863 - 1945 / розробляв теорію гіроскопів. Е. Раус /1831 - 1907/, А. Пуанкаре /1854 - 1912/, М.С. Жуковський /1847 - 1921/ з'ясували деякі основні поняття теорії стійкості руху. О.М. Ляпунов /1857 - 1918/ у дисертації "Загальна задача про стійкість руху" /1892/ виклав основні поняття і методи цієї теорії. П. Аппель /1855-1930/, П.В. Воронєв /1871-1923/, С.О. Чаплигін /1869 - 1942/ винайшли нові форми рівнянь руху в теорії неголономних систем. Засобами небесної механіки вдалося розрахувати положення невідомої до того часу планети Нептун.

Сучасний період /20-е століття/ розвитку механіки характеризується подальшою диференціацією цієї науки. Поряд із вказаними старими проблемами, які не втратили актуальності, виникли нові, що в свою чергу призвело до появи нових напрямків: теорії нелінійних коливань; теорії реактивного руху і динаміки штучних космічних систем; теорії руху зчленованих екіпажів; механіки систем з ба-

гатьма ступенями вільності /робототехнічних систем/ та інших. Тут вже практично неможливо вказати імена всіх вчених-дослідників. Зауважимо, що всі без винятку зазначені напрямки теоретичної механіки містять багато нерозв'язаних принципів питань, які активно розробляються в наші часи.

Теоретична механіка є основою загальної механіки, що містить найбільш загальні закони механічного руху, які лежать в основі теорії інших механічних дисциплін: механіки деформованого твердого тіла, гідромеханіки, теорії механізмів і машин, деталей машин, будівельної механіки і т.д.

Знання теоретичної механіки потрібні також інженерам немеханічних спеціальностей, які розробляють нову техніку, оскільки в більшості випадків кінцеві ланки складних автоматичних систем - це механізми: електричні двигуни, трансмісії, автомобілі, літальні апарати, космічні прилади, маніпулятори і таке інше. В наш час, коли на протязі людського життя доводиться змінювати характер діяльності, оволодіння фундаментальною наукою теоретичною механікою може стати важливою складовою частиною успішної інженерної діяльності.

Теоретична механіка і математика з часів Ньютона мають тісний зв'язок. Механіка широко використовує апарат математики і в свою чергу спонукає математику до створення нових методів. Багато абстракцій і проблем математики мають прозорий механічний зміст, оскільки на протязі останніх століть механіка була головним поставачальником математичних проблем. Логічна структура механіки подібна до математики. У механіці так само існують аксіоми і теореми, хоча повна аксіоматизація механіки ще не здійснена. Варто вказати на те, що визначні вчені-механіки були одночасно і математиками; до часів М.С. Жуковського теоретичну механіку викладали як суто математичну дисципліну. У деяких своїх розділах теоретична механіка і математика сплелись воедино.

Теоретична механіка - це наука про математичні моделі механічних систем. Тому для розуміння механіки потрібні знання фундаментальних розділів математики - аналітичної геометрії, векторної алгебри і аналізу, теорії тензорів, варіаційного числення, теорії звичайних диференціальних рівнянь, методів обчислювальної математики.

Відмінність теоретичної механіки від математики полягає в способі пізнання матеріального світу, оскільки метою механіки є передбачення поведінки реальних механічних систем з необхідною точністю.

Аксиоми /принципи/ механіки ґрунтуються на дослідних фактах, тому висновки також повинні підтвержуватись експериментально. Схема пізнання приблизно така: фізичний аналіз - механічна /математична/ модель - математичний розв'язок /точний або наближений, часто із застосуванням ЕОМ/ - практичний аналіз / інтерпретація / розв'язку, Це створює труднощі при розв'язуванні практичних задач, які полягають в необхідності для дослідника одночасно володіти абстракціями і конкретно-практичним досвідом. Щасливою особливістю механіки є можливість простої перевірки результатів абстрактних побудов на практиці або за допомогою уявного експерименту. Слід зазначити, що в психологічному плані за здатністю уявляти механічні рухи люди поділяються на "арістотеліанців" та "ньютоніанців". Про це свідчать прості і дотепні досліди, в яких з'ясовується уявлення про можливість чи неможливість вільного криволінійного руху або руху без прикладення сили.

Основні поняття /абстракції/ механіки ми запроваджуємо як деякі ідеалізовані образи /моделі/, що мають певні, означені властивості, запозичені у реальних об'єктів. Це - простір, час, матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, сила.

Абсолютний тривимірний евклідов простір, що вміщує рухомі або нерухомі тіла. За означенням простір однорідний та ізотропний і тіла ніяк не впливають на властивості простору. Зауважимо, що експерименти свідчать про те, що фізичний простір в масштабах 10^{-16} + 10^{28} см можна вважати евклідовим За І. Ньютоном, простір нерухомий і, отже, його можна арифметизувати нерухомою системою координат. Найбільш простов і зручною в загальному випадку є декартова прямокутна система координат.

Розрізняють праву і ліву систему координат /рис. 1.1, а, б відповідно/. У правій системі додатній поворот відбувається проти руху стрілки годинника. З боку додатного напрямку осі OZ поворот від осі Ox до осі Oy відбувається проти руху годинникової стрілки. Ми користуватимемось правими системами координат згідно з традицією, що склалася у 20-му ст.

Для визначення положення довільної точки M у просторі вводять одиницю довжини, однакову для трьох осей. Положення точки M визначається числами x, y, z - координатами, які мають розмірність довжини /рис. 1.2 /. За своїм просторовим, геометричним змістом механічні величини поділяються на скаляри /тензори 0-го рангу/, вектори /тензори 1-го рангу/, тензори 2-го рангу. Використо-

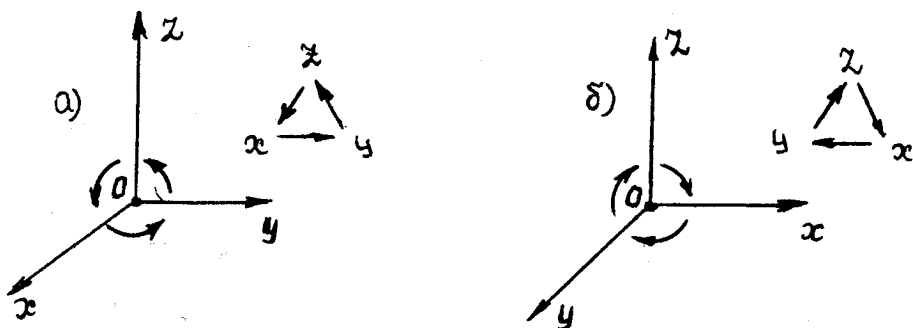


Рис. 1.1

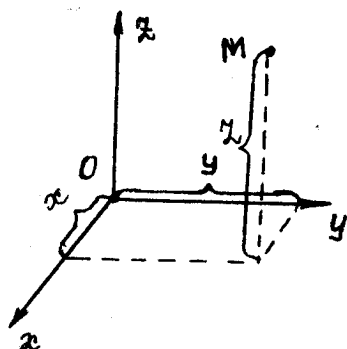


Рис. 1.2

вуючи апарат тензорного числення, можна дістати основні співвідношення механіки в найбільш узагальненій /інваріантній/ формі. Властивості тензорів 2-го рангу будемо з'ясовувати у ході подальшого викладу, а спочатку зупинимось на властивостях векторів у просторі.

В залежності від механічного змісту розрізняють вектори прикладені, зв'язані з певною точкою простору, вектори ковзні, зв'язані з певною прямою, та вільні вектори, які можна віднести до довільної точки простору.

Дії векторної алгебри означені лише для векторів, тому при виконанні операцій ми трактуємо вектори довільного змісту як вільні, а вже потім встановлюємо зміст результату операцій.

Нагадаємо коротко деякі формули векторної алгебри у безкоординатному /інваріантному/ та координатному вигляді, вважаючи, що основи векторної алгебри вже засвоєні в курсі математичних дисциплін.

Розклад довільного вектора \vec{a} по координатних векторах.

Тут і далі \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} - одиничні вектори /орти/ декартової прямокутної системи координат. Нехай a - модуль вектора \vec{a}

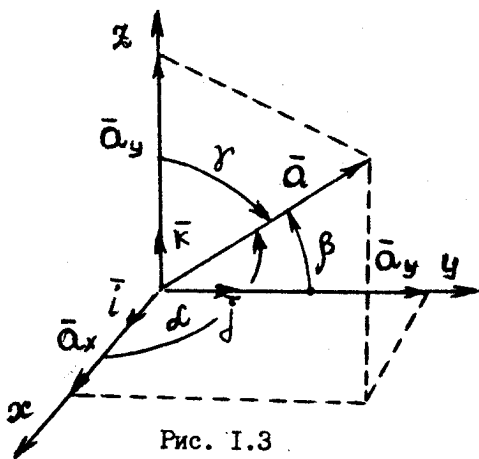


Рис. 1.3

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a \cdot \cos \alpha, \\ a_y &= a \cdot \cos \beta, \\ a_z &= a \cdot \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.3)$$

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.4)$$

Додамо, що іноді зручно зображати вектор у матричному вигляді у формі вектора - рядка

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad (1.5)$$

або вектора - стовпця

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

При цьому одна форма переходить в іншу за допомогою матричної операції транспонування.

Додавання векторів

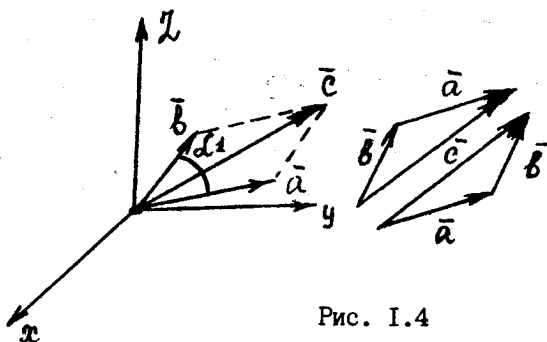


Рис. 1.4

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \quad (1.7)$$

$$\left. \begin{aligned} c_x &= a_x + b_x \\ c_y &= a_y + b_y \\ c_z &= a_z + b_z \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha_1} \quad (1.9)$$

Діями, оберненими додаванню, є розклад вектора на дві складові частини вздовж двох непаралельних прямих у площині та розклад вектора на три довільні некопланарні напрямки у просторі.

Скалярний добуток векторів

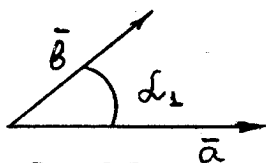


Рис. I.5

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cos \alpha_1. \quad (1.10)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \quad (1.11)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1. \quad (1.12)$$

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}, \quad a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}, \quad a_z = \vec{a} \cdot \vec{k} \quad (1.13)$$

$$b_x = \vec{b} \cdot \vec{i}, \quad b_y = \vec{b} \cdot \vec{j}, \quad b_z = \vec{b} \cdot \vec{k} \quad (1.14)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (b_x, b_y, b_z) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Векторний добуток

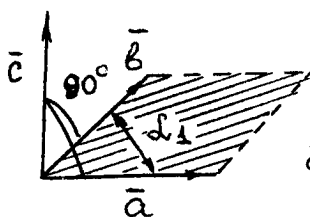


Рис. I.6

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (1.16)$$

$$c = ab \sin(\alpha_1) = ab \sin \alpha_1. \quad (1.17)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x. \quad (1.19)$$

$$\vec{b} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{a} = 0. \quad (1.20)$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0.$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}. \quad (1.21)$$

Записувати векторний добуток із застосуванням матричного вигляду векторів недоцільно, оскільки це потребує розгляду тензорних операцій. Зауважимо, що векторний добуток існує як вектор лише в тривимірному просторі.

Дії векторного ділення, обернені до скалярного та векторного множення, порізно неозначені, однак невідомий вектор, який бере

участь одночасно у скалярному на векторному добутках, можна визначити однозначно.

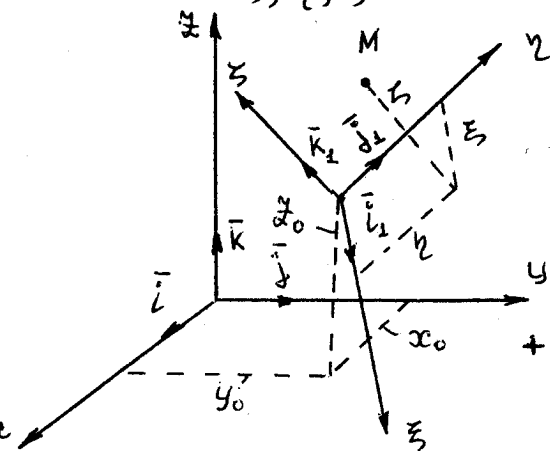
Полярні та аксіальні вектори розрізняються своїм відношенням до орієнтації системи координат /рис.1.1/. Полярні вектори /наприклад, радіус-вектор \vec{r} , швидкість \vec{v} , сила \vec{F} /за своєю суттю не змінюються при зміні орієнтації осей координат. Аксіальні вектори, або псевдовектори /наприклад, кутова швидкість $\vec{\omega}$, момент сили $m_0(\vec{F})$ /, при зміні орієнтації стають протилежними. Векторний добуток двох полярних векторів є вектор аксіальний. Аксіальний вектор у тривимірному просторі можна подати і як антисиметричний /косиметричний/ тензор. Наприклад,

$$\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z), \quad (\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

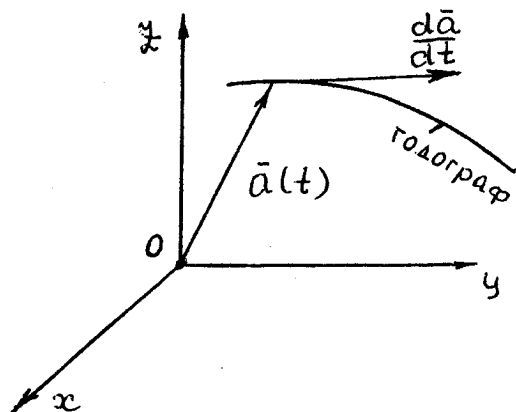
Ортогональні перетворення систем координат. При переході від старої системи координат $O_1 \xi \eta \zeta$ до нової $OxyZ$ /рис.1.7/ нові координати x, y, z довільної точки M через її старі координати ξ, η, ζ можна виразити так:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} dx_\xi & dx_\eta & dx_\zeta \\ dy_\xi & dy_\eta & dy_\zeta \\ dz_\xi & dz_\eta & dz_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$

Рис. 1.7



/ Тут і далі будемо позначати функцію та її значення однією і тією самою літерою/.

Годограф вектора є лінія у просторі /рис.1.8/, яку описує кінець \bar{a} при зміні t . Властивості годографа нагадують властивості графіків скалярних функцій.

Похідна векторної функції $\bar{a}(t)$

Рис. 1.8

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{a}(t+\Delta t) - \bar{a}(t)}{\Delta t}$$

також є вектор, напрямлений по дотичній до годографа. Основні властивості похідних вектор-функцій:

$$\frac{d}{dt} (\bar{a} + \bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt} + \frac{d\bar{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} [f(t) \cdot \bar{a}] = \frac{df(t)}{dt} \cdot \bar{a} + f(t) \cdot \frac{d\bar{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\bar{a} \cdot \bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\bar{a} \times \bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt}$$

Інтегрування векторних функцій

$$\bar{b}(t) = \int_{t_1} \bar{a}(t) dt + \bar{c}, \quad \bar{c} = \text{const},$$

$$\bar{f} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{a}(t) dt = \bar{b}(t_1) - \bar{b}(t_0) = \text{const}$$

Матеріальна точка – матеріальне тіло, розмірами якого можна нехтувати при вивченні його руху. Це гранична абстракція реальних тіл.

Система матеріальних точок – сукупність матеріальних точок, в якій положення і рух однієї з цих точок залежить від положення і руху решти точок.

Абсолютно тверде тіло /тверде тіло/ – система матеріальних точок, відстані між якими у процесі руху залишаються незмінними. Запроваджуючи цю абстракцію до вивчення руху реальних твердих тіл, ми робимо перше наближення до встановлення реальних закономірностей. При цьому ми вважаємо, що тіла не можна зруйнувати і що вони є абсолютно непроникними. Слід пам'ятати, однак, що реальні тіла під час руху деформуються: вал, що обертається, трохи збільшує свій діаметр внаслідок пружних деформацій; всі реальні тіла деформуються під дією сил.

Сила – міра механічного прояву фізичного впливу на матеріальні тіла. Природа сили в механіці не встановлюється, це – задача фізики. Сила не може призвести до руйнування абсолютно твердого тіла і матеріальної точки.

Теоретична механіка, власне кажучи, є досить вузький розділ механіки, а саме: механіка матеріальної точки, абсолютно твердого тіла та їх систем, що рухаються із швидкістю значно меншою від швидкості світла $v \ll 300000 \text{ м/с}$ /.

Структура теоретичної механіки. Теоретична механіка традиційно поділяється на три розділи: кінематику, статику, динаміку.

Кінематика вивчає рух без урахування сил. Статика – вчення про рівновагу та про перетворення систем сил. Динаміка вивчає рух під дією сил. Аналітична механіка – особливий розділ механіки, що містить кінематику, статику і динаміку. Історично всі розділи механіки розвиваються паралельно, однак кожен з цих розділів має своє коло задач, свої методи їх розв'язування. Кінематика, статика і динаміка вивчаються послідовно.

2. ОСНОВИ СТАТИКИ

Статика – це загальне вчення про сукупність сил, прикладених до матеріальних тіл, та про основні операції над силами, які дають змогу звести їх сукупність до найпростішого вигляду.

У статичі під матеріальним тілом розуміють абсолютно тверде тіло.

2.1. Сила. Система сил.

У теоретичній механіці одним із основних є поняття сили. У механіці під силою розуміють кількісну міру механічної взаємодії матеріальних тіл, у результаті якої тіла, що взаємодіють, можуть надавати одне одному прискорення або деформуватися /змінювати свою форму/. Із цього означення випливають два методи вимірювання сили: 1/ динамічний, в основі якого лежить вимірювання прискорення тіла в інерціальной системі відліку; 2/ статичний, побудований на вимірюванні деформації пружних тіл.

Те, що в основу механіки було покладено кількісні закони сил, дозволило І.Ньютону сформулювати закони, не вивчаючи фізичних явищ, які виникають при взаємодії тіл. Більш того, в деяких випадках можна встановити кількісний зв'язок між механічними і немеханічними формами матерії при їх взаємних перетвореннях.

Модель сили визначається трьома головними кількісними умовами: величиною, напрямом дії і точкою прикладення.

Такому означенню сили повністю відповідає поняття вектора, довжина якого в обраному масштабі дорівнює значенню сили, прикладеної в даній точці. Вектор напрямлений в бік дії сили. Силу позначимо символом \vec{F} /рис. 2.1/. Пряму ab , на якій відкладено відрізок, що зображує силу, називають лінією дії сили.

Для вимірювання модуля сили її порівнюють з іншою силою, яку вважають еталоном. У СІ за одиницю сили /еталон/ прийнято Ньютон /Н/. Використовуються також більші одиниці вимірювання сил: меганьютон /1 МН = 10^6 Н /; кілоньютон /1 кН = 10^3 Н/.

Сила, як векторна величина, підпорядкована всім законам векторного числення.

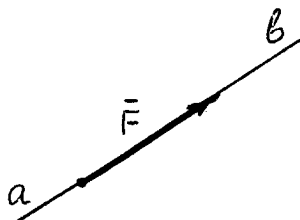


Рис. 2.1.

2.2. Основні означення статyki

Означення 1. Точка перебуває у стані рівноваги, якщо вона перебуває у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно в інерціальній системі відліку.

Наслідок. Коли кожна точка системи матеріальних точок перебуває в стані рівноваги, то і система в цілому буде в стані рівноваги.

Означення 2. Сукупність сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots \vec{F}_n$, прикладених до тіла або до точки, називається системою сил і позначається $\{\vec{F}_k\}_n$.

Означення 3. Система сил $\{\vec{F}_k\}_n$ називається зрівноваженою, або еквівалентною нулю /нульовою системою/, якщо система матеріальних точок під її дією перебуває в стані рівноваги. Символічно нульову систему позначають так:

$$\{\vec{F}_k\}_n \sim 0 \quad (2.1)$$

Наслідок 1. Дві сили, що діють на абсолютно тверде тіло, зрівноважуються тоді і лише тоді, коли вони діють уздовж спільної лінії дії в протилежному напрямі і мають однакове числове значення / рис. 2.2 /.

Наслідок 2. Система матеріальних точок перебуватиме у стані рівноваги, якщо до неї прикласти або від неї відкинути зрівноважену систему сил.

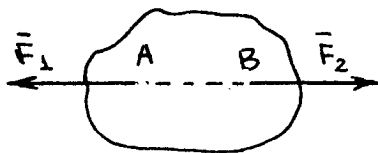


Рис. 2.2

Означення 4. Не змінюючи стану руху абсолютно твердого тіла, силу можна переносити уздовж її лінії дії в довільну точку тіла.

До тіла D у точці A /рис. 2.3/ прикладено силу \vec{F} .

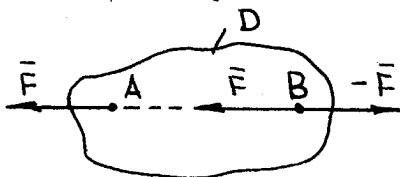
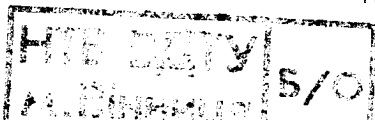


Рис. 2.3

Візьмемо на лінії дії цієї сили довільну точку B і прикладемо в цій точці дві сили, що дорівнюють силі і напрямлені у протилежні боки вздовж її лінії дії.

Таку систему сил можемо прикласти, не порушуючи рівноваги, на підставі означення 3 і наслідків з нього.



Сила \vec{F} , прикладена в точці А, і сила $-\vec{F}$, прикладена в точці В, зрівноважуються. На підставі наслідку 2 /означення 3/ таку систему можна відкинути, не порушуючи рівноваги тіла. Отже, залишається сила \vec{F} , прикладена в точці В. Таким чином, означення 4 є очевидним.

Означення 5. Дві системи сил $\{\vec{F}_k\}_n$ і $\{\vec{F}_k\}_s$ називаються зрівноважувачими одна відносно іншої, якщо їх сукупність утворює зрівноважену систему /нульову/, тобто

$$(\{\vec{F}_k\}_n, \{\vec{F}_k\}_s) \sim 0. \quad /2.2/$$

Означення 6. Дві системи сил $\{\vec{F}_k\}_n$ і $\{\vec{F}_k\}_m$ називаються статично еквівалентними, якщо кожна з них окремо зрівноважує одну й ту саму третю систему сил $\{\vec{F}_k\}_s$:

$$\{\vec{F}_k\}_n \sim \{\vec{F}_k\}_m, \quad /2.3/$$

якщо

$$\left. \begin{aligned} (\{\vec{F}_k\}_n, \{\vec{F}_k\}_s) &\sim 0, \\ (\{\vec{F}_k\}_m, \{\vec{F}_k\}_s) &\sim 0. \end{aligned} \right| \quad /2.4/$$

Означення 7. Якщо система сил $\{\vec{F}_k\}_n$ статично еквівалентна одній силі \vec{F} , то вона називається рівнодієюю системи сил:

$$\{\vec{F}_k\}_n \sim \vec{F}. \quad /2.5/$$

2.3. Момент сили відносно центра.

Нехай О - точка, відносно якої знаходиться момент сили \vec{F} /рис. 2.4/.

Означення. Моментом сили \vec{F} відносно центра називається векторний добуток радіуса-вектора \vec{r} , проведеного із точки О до точки прикладення сили \vec{F} , на вектор сили \vec{F} :

$$m_o \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad /2.6/$$

Модуль векторного добутку

$$|m_o \vec{F}| = r \cdot F \sin \alpha = F \cdot h \quad /2.7/$$

де h - плече сили, тобто перпендикуляр, проведений із центра на лінію дії сили.

Іноді формулу /2.7/ записують у вигляді

$$|m_o \vec{F}| = 2 \cdot S, \quad /2.8/$$

де S - площа моментного трикутника $\triangle OAB$

Запишемо вектори \vec{F} і \vec{z} через їх проєкції на координатні осі X, Y, Z

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k},$$

$$\vec{z} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}. \quad /2.9/$$

Тоді векторний добуток /2.6/ запишеться у вигляді

$$m_o \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \vec{i} + (z \cdot F_x - x \cdot F_z) \vec{j} +$$

$$+ (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \vec{k}. \quad /2.10/$$

Наслідок 1. Із означення ясно, що момент сили \vec{F} відносно центра не зміниться, якщо силу F перенести по лінії дії.

Наслідок 2. Момент сили відносно центра дорівнює нулю, якщо лінія сили проходить через центр O момента.

2.4. Момент сили відносно осі

Силу \vec{F} прикладено в точці A /рис. 2.5/. На площину, яку проведено перпендикулярно до осі Z , спроекуємо вектор \vec{F} . Із точки O перетину площини з віссю Z опустимо перпендикуляр на лінії дії вектора F_{np} .

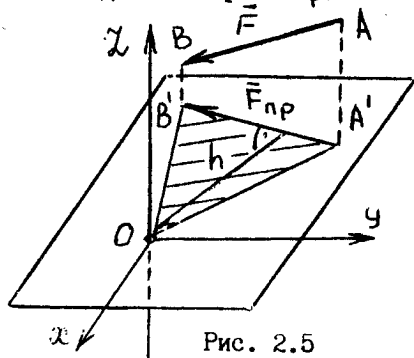


Рис. 2.5

Означення. Моментом вектора \vec{F} відносно осі Z є скалярна величина $m_z \vec{F}$, яка дорівнює добутку модуля вектора F_{np} на плече h цього вектора:

$$m_z \vec{F} = \pm F_{np} \cdot h \quad /2.11/$$

Додатний знак беремо в тому випадку, коли, дивлячись назустріч осі Z , бачитимемо рух век-

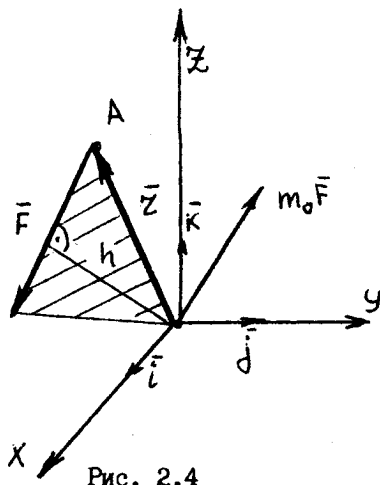


Рис. 2.4

тора \vec{F} навколо неї проти годинникової стрілки.

Вираз /2.11/ можна записати через площу S трикутника $\triangle OA'B'$

$$m_z \vec{F} = \pm 2S. \quad /2.12/$$

Наслідок 1. Момент сили відносно осі не змінюється при переміщенні вектора сили \vec{F} по лінії дії.

Наслідок 2. Якщо сила \vec{F} і вісь Z лежать в одній площині, то момент сили \vec{F} відносно осі Z дорівнює нулю.

Із вищої математики відомо, що момент вектора \vec{F} відносно осі Z дорівнює проекції на цю вісь вектора момента сили \vec{F} відносно довільної точки цієї осі, тобто

$$m_z \vec{F} = (m_o \vec{F})_z. \quad /2.13/$$

Аналогічно для осей X, Y

$$\left. \begin{aligned} m_x \vec{F} &= (m_o \vec{F})_x, \\ m_y \vec{F} &= (m_o \vec{F})_y. \end{aligned} \right| \quad /2.14/$$

Із виразу /2.10/ знайдемо моменти сили \vec{F} відносно осей X, Y, Z через координати точки A і проекції сили \vec{F} на координатні осі F_x, F_y, F_z

$$\left. \begin{aligned} m_x \vec{F} &= y \cdot F_z - z \cdot F_y, \\ m_y \vec{F} &= z \cdot F_x - x \cdot F_z, \\ m_z \vec{F} &= x \cdot F_y - y \cdot F_x. \end{aligned} \right| \quad /2.15/$$

2.5. Головний вектор і головний момент системи сил.

Означення 1. Головним вектором \vec{R}_o , тобто замикаючим вектором силового багатокутника системи сил $\{\vec{F}_k\}_n$, є векторна сума всіх сил системи /рис.2.6/:

$$\begin{aligned} \vec{R}_o &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_k + \dots + \vec{F}_n, \\ \vec{R}_o &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \end{aligned} \quad /2.16/$$

Індекс при символі головного вектора \vec{R} показує, що він прикладений у довільній точці O , від вибору якої не залежить.

Векторну рівність /2.16/ можна записати у вигляді трьох скалярних /через проекції на декартові осі координат X, Y, Z / рівностей:

$$R_{0x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_{0y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_{0z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad /2.17/$$

Означення 2. Головним моментом системи сил $\{\bar{F}_k\}_n$ відносно центра O називається вектор \bar{M}_o , який дорівнює геометричній сумі моментів усіх сил системи відносно того самого центра:

$$\bar{M}_o = \sum_{k=1}^n m_o \bar{F}_k \quad /2.18/$$

Із означення головного момента системи сил слідує, що величина і напрям \bar{M}_o залежать від вибору центра O .

Якщо взяти точку O за початок декартової системи координат, із виразів /2.13, 2.14/ з урахуванням /2.18/ знайдемо головний момент системи сил відносно осей X , Y , Z :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= (\bar{M}_o)_x = \sum_{k=1}^n m_x \bar{F}_k, \\ M_y &= (\bar{M}_o)_y = \sum_{k=1}^n m_y \bar{F}_k, \\ M_z &= (\bar{M}_o)_z = \sum_{k=1}^n m_z \bar{F}_k. \end{aligned} \right| \quad /2.19/$$

2.6. Аксиома рівноваги.

Означення. Система сил $\{\bar{F}_k\}_n$ буде врівноваженою, якщо головний вектор \bar{R}_o і головний момент системи \bar{M}_o відносно довільного центра дорівнюватимуть нулю:

$$\bar{R}_o = 0, \quad \bar{M}_o = 0 \quad /2.20/$$

Умови /2.27/ у проєкціях на декартові осі координат залишаться у вигляді

$$\left. \begin{aligned} R_x &= 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0, \\ M_x &= 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0. \end{aligned} \right| \quad /2.21/$$

2.6.1. Аксиома рівноваги для збіжної системи сил.

Означення. Система сил називається збіжною, якщо лінії дії всіх сил перетинаються в одній точці /рис. 2.7/.

Відповідно до наслідка 2 / підрозділ 2.3/ головний момент

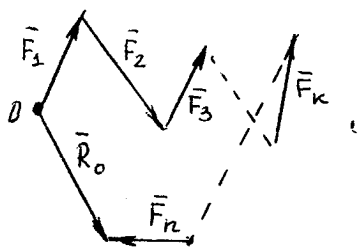
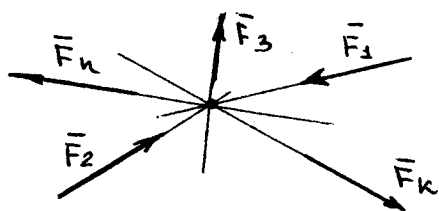


Рис. 2.6

збіжної системи сил відносно точки O дорівнює нулю, і тоді умови /2.20/, /2.21/ залишаються у вигляді

$$\vec{R}_0 = 0. \quad /2.22/$$

$$R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0. \quad /2.23/$$



Із виразу /2.22/ виходить, що для збіжної врівноваженої системи сил силовий багатокутник, побудований на силах, як на сторонах, буде замкненим /рис.2.8/.

Якщо лінії дії врівноваженої системи сили лежать в одній площині, то умову /2.22/ записують у вигляді двох рівнянь, наприклад, для площини XOY

$$R_x = 0, R_y = 0. \quad /2.24/$$

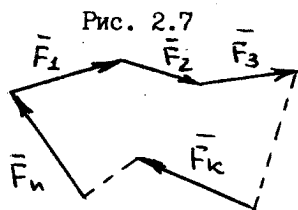
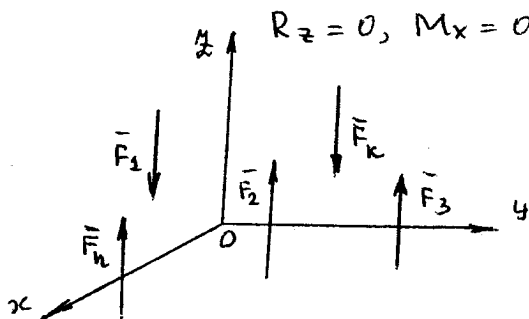


Рис. 2.8

2.6.2. Аксиома рівноваги для системи паралельних сил.

Розглянемо систему сил $\{\vec{F}_n\}_n$, у якій лінії дії всіх сил паралельні. Введемо декартову систему координат таким чином, щоб вісь Z була паралельна векторам сил /рис. 2.9/. Аналізуючи рівняння /2.21/ для врівноваженої довільної просторової системи сил, одержимо умови, за яких система паралельних сил буде врівноваженою:

$$R_z = 0, M_x = 0, M_y = 0. \quad /2.25/$$



Якщо лінії дії всіх сил лежать в одній площині, наприклад XOY /рис. 2.10/, то умови /2.25/ запишуться у вигляді /якщо сили паралельні осі Z /:

Рис. 2.9

$$/2.26/$$

2.6.3. Аксиома рівноваги для плоскої системи сил.

Умови /2.21/ для системи сил,
лінії дії яких довільно розміщені
в одній площині /рис. 2.II/, мають
вигляд

$$R_x = 0, R_y = 0, M_o = 0. /2.27/$$

Три незалежні рівняння для
плоскої системи сил можна запи-
сати інакше:

$$R_x = 0, M_A = 0, M_B = 0. /2.28/$$

$$M_A = 0, M_B = 0, M_C = 0. /2.29/$$

Але при цьому на вибір точок, від-
носно яких знаходять головний вектор
системи, накладаються умови:
точки А і В не повинні лежати на
прямій, перпендикулярній до осі
Х /див.2.28/; точки А, В і С
не повинні лежати на одній прямій.

2.7. Аксиома дії та протидії /третій закон Ньютона/.

Сили взаємодії двох тіл однакові за модулем і напрямлені по
одній прямій у протилежні сторони.

2.8. Аксиома про рівновагу здеформованого тіла

Рівновага здеформованого тіла не порушиться, якщо його точки
жорстко зв'язати і вважати тіло абсолютно твердим.

2.9. Аксиома про в'язі.

Означення 1. Тіло називається вільним, якщо воно з даного по-
ложення може переміщатися в будь-яке сусіднє.

Якщо тіло не може переміщатися в довільному напрямі, то воно
невільне, або зв'язане.

Означення 2. Тіла, які перешкоджають переміщенню невольного
тіла в будь-яку сторону, називаються в'язями.

Означення 3. Сили, з якими в'язі діють на невольне тіло, на-

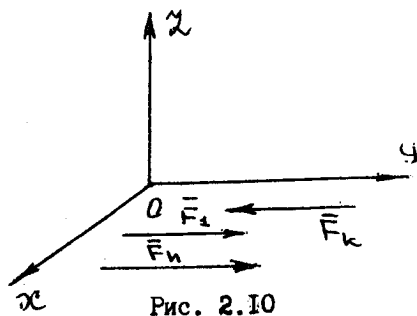


Рис. 2.I0

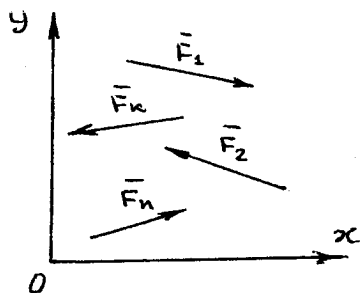


Рис. 2.II

зиваються реакціями в'язей, або просто реакціями.

Аксиома 1. Аксиома про звільнення від в'язей.

Механічний стан системи не зміниться, якщо звільнити її від в'язі, приклавши до точок системи сили, що дорівнюють реакціям в'язі.

Аксиома 2. Аксиома про накладання нових в'язей.

Якщо матеріальна система перебуває в стані рівноваги, то рівновага її не порушиться при накладанні на неї нових в'язей.

2.10. Класифікація сил.

В механіці, опорі матеріалів навантаження, що діє на вільне тверде тіло, називається зовнішніми силами. Ці сили розділяються на активні та реакції в'язей.

Активні сили визначаються службовим призначенням деталі /твердого тіла/: тиск газів або води; вага стержня; вага снігу на покрівлі; корисне навантаження і т.п.. Активні сили розділяються на зосереджені та розподілені.

Означення 1. Сили, що діють на нескінченну малу площу /точку/ тіла, називаються зосередженими. Сили \vec{F}_1, \vec{F}_2 /рис. 2.12/.

Означення 2. Сили, що діють на тіло по деякій площі або лінії, називаються розподіленими.

Означення 3. Навантаження, що діє на одиницю довжини або площі, називається інтенсивністю навантаження.

Найбільш поширене розподілене навантаження у формі прямокутника /рис. 2.12/ або трикутника /рис. 2.13/.

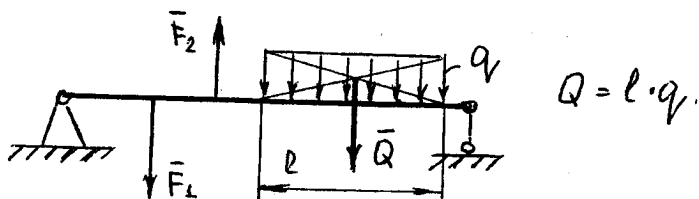


Рис. 2.12.

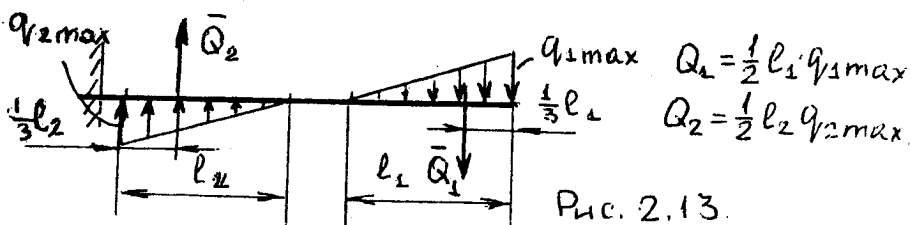


Рис. 2.13.

Розподілення навантаження можна замінити однією силою Q , що прикладена у центрі мас. /рис.2.12, 2.13/

2.10.1. Класифікація в'язей.

За своєю природою в'язі можна розділити на два класи.

До першого класу належать в'язі, напрям реакцій яких не залежить від величини і напрямку активних сил, прикладених до тіла, що перебуває у стані рівноваги. Наприклад: троси, нитки, ланцюги /рис. 2.14/; ідеальні стержні /рис. 2.15, а, в/; гладенькі поверхні /рис. 2.16, а, б/; рухомі шарніри /2.16, в/.

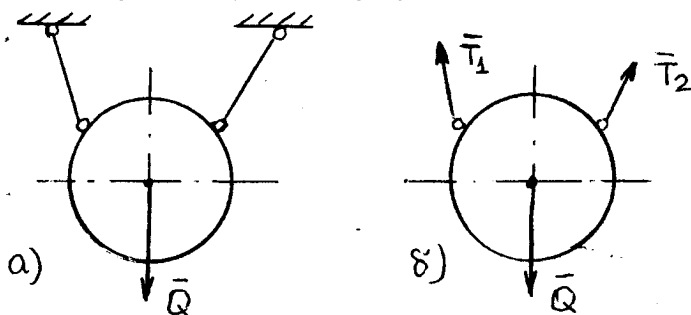


Рис. 2.14.

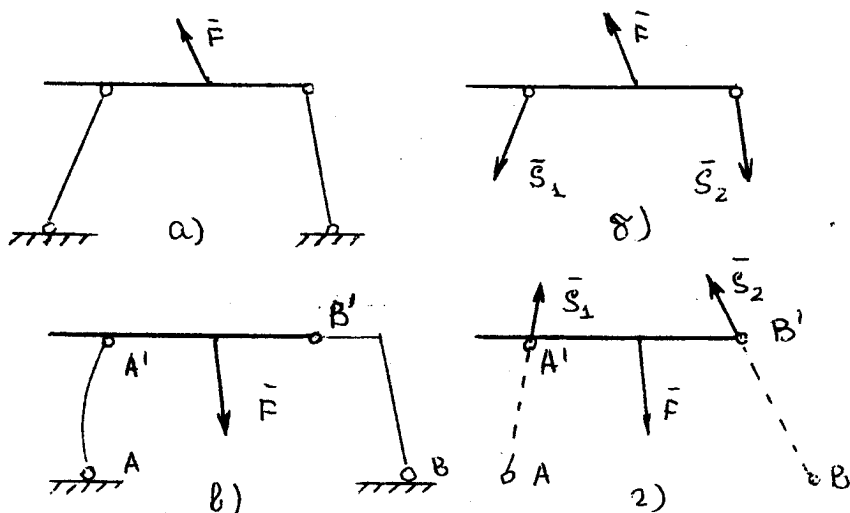


Рис. 2.15.

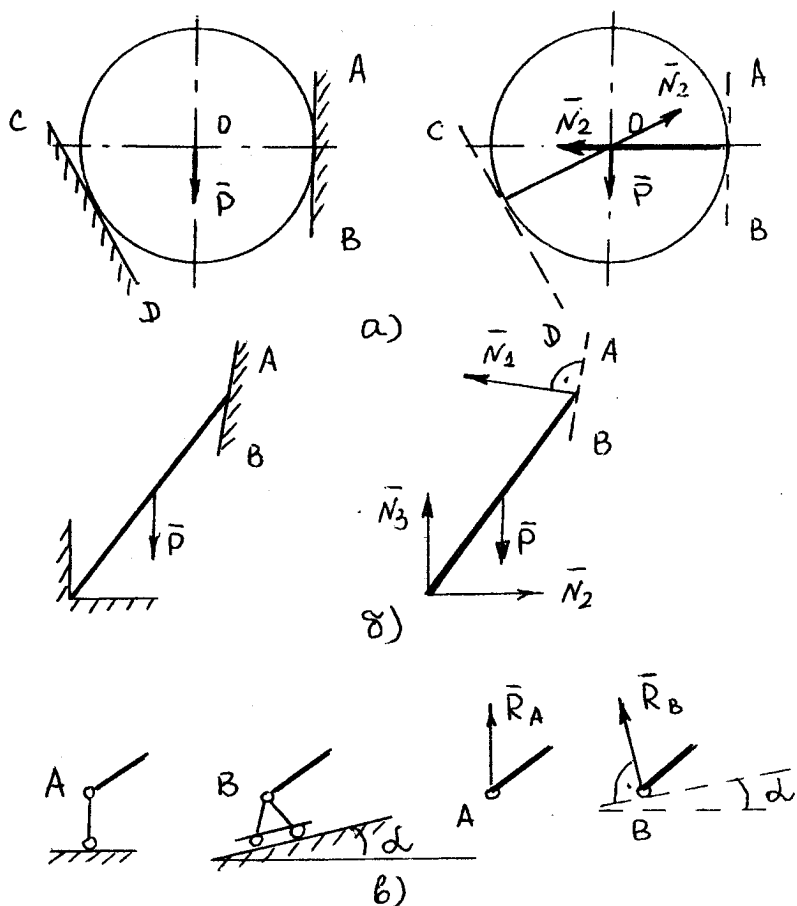


Рис.2.16.

Реакції в'язей троса, нитки, ланцюга напрямлені по тросу, нитці, ланцюгу, причому ці тіла можуть тільки розтягуватися /рис. 2. 14,6/, тобто чинять протидію тільки дії розтягання. Невагомий стержень, до якого не прикладено сили /активні та реакції в'язей/, називається ідеальним. Реакції в'язі ідеального стержня напрямлені по лінії, яка сполучає початок і кінець стержня /рис.2.15,б,г/, причому ідеальний стержень може стискатися або розтягуватися.

Гладенькими, з точки зору статки, називаються такі поверхні, в яких реакції в'язей в точці контакту з іншими тілами напрямлені

по загальній нормалі до дотичних поверхонь /рис. 2.16/.

До другого класу належать в'язі, напрям реакцій яких повністю визначається напрямом і величиною активних сил. Такими в'язями є заземлення /рис. 2.17, а/, циліндричний /рис. 2.18, а/ і сферичний /рис. 2.19, с/ шарніри. На рис. 2.19, а показано циліндричний шарнір разом із горизонтальною гладенькою поверхнею. Реакції в'язей другого класу зображено на рис. 2.17,б; 2.18,б; 2.19,б; 2.20,д

Рухомий шарнір еквівалентний одному ідеальному стержню; нерухомий /циліндричний/ - двом ідеальним стержням; заземлення - трьом ідеальним стержням.

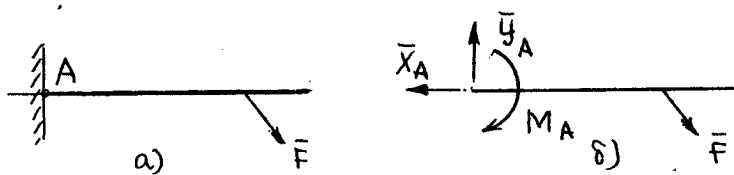


Рис. 2.17.

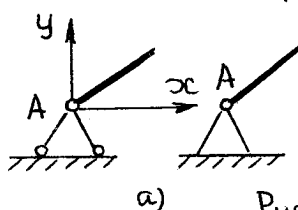


Рис. 2.18.

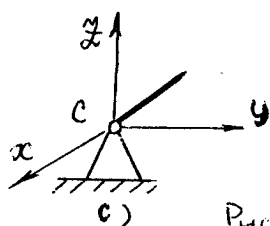
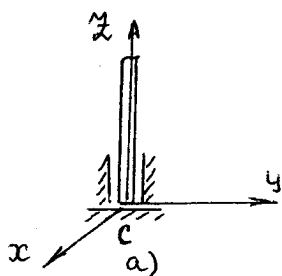
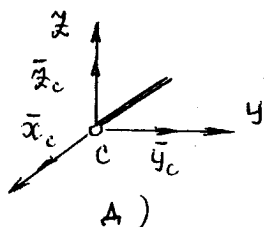
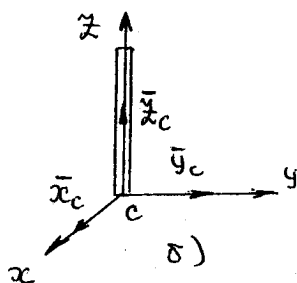


Рис. 2.19



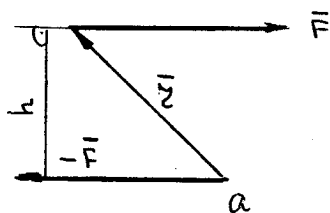
2.II. Поняття про пару сил.

Означення 1. Парою сил називається система двох паралельних сил, що мають однакові модулі та протилежні напрями /рис. 2.20/.

Означення 2. Площина, в якій лежать сили \vec{F} і $-\vec{F}$, називається площиною пари.

Означення 3. Найкоротша відстань між лініями дії пари сил називається плечем пари сил.

Момент пари сил $/\vec{F}, -\vec{F}/$



$$\vec{M} = m(\vec{F}, -\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Модуль моменту пари

$$|\vec{M}| = F \cdot h$$

Пара сил на рисунках умовно зображається:

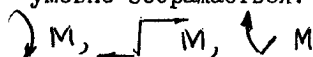


Рис. 2.20

Як впливає із означення пари сил, головний вектор пари сил дорівнює нулю

$$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0.$$

Головний момент пари сил не залежить від вибору центра моменту і дорівнює моменту пари сил.

Аксіома рівноваги пар сил

Тіло буде знаходитись у стані рівноваги під дією системи пар $\{\vec{F}_k, -\vec{F}_k\}_n$ тільки тоді, коли сума моментів пар цієї системи дорівнює нулю.

2.I2. Практичне застосування аксіом статки.

2.I2.I. Сбіжна система сил.

На гладенькій площині /рис. 2.21а/, нахилений під кутом α до горизонту, знаходиться тіло В, що утримується у рівновазі нитками АВ та ВС. Нитка ВС перекинута через ідеальний С, і на кінці її прив'язаний вантаж D вагою Q. Ділянка нитки ВС - горизонтальна. Визначити натяг нитки АВ і тиск тіла на площину, якщо тіло В має вагу P.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу тіла В /рис. 2.21, б/.

До тіла прикладена активна сила \vec{P} . На підставі аксіоми про звільнення від в'язей, дію ниток АВ, ВС та гладенької похилої поверхні на тіло В

замінюємо реакціями в'язей: $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{N}$.

Вільне тіло /рис.2.21б/

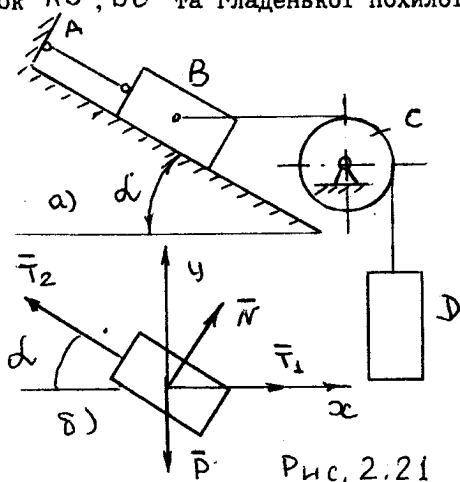
знаходиться у рівновазі під дією сил $\vec{P}, \vec{N}, \vec{T}_1, \vec{T}_2$.

Причому, натяг нитки

T_1 дорівнює вазі тіла D,

$$T_1 = Q.$$

Запишемо аксіому рівноваги для збіжної системи сил в проекціях на осі X і Y



$$\sum F_x = 0; T_1 - T_2 \cos \alpha + N \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0; -P + T_2 \sin \alpha + N \cos \alpha = 0.$$

Звідки знаходимо невідомі сили N та T_2

$$N = \frac{1}{2} (Q - P) \sin 2\alpha,$$

$$T_2 = Q + (Q - P) \sin^2 \alpha.$$

2.12.2. Плоска довільна система сил.

На горизонтальну балку АВ /рис.2.22,а/ діє зосереджена сила F під кутом α до балки, пара сил з моментом M та рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q . Знайти реакції рухомого А та нерухомого С шарнірів, якщо: $\alpha = 60^\circ$

$P = 4 \text{ кН}; l_1 = l_2 = l_3 = l = 2 \text{ м};$
 $\beta = 30^\circ, M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}; q = 1 \text{ кН/м}.$
 Вагою балки АВ нехтуємо.

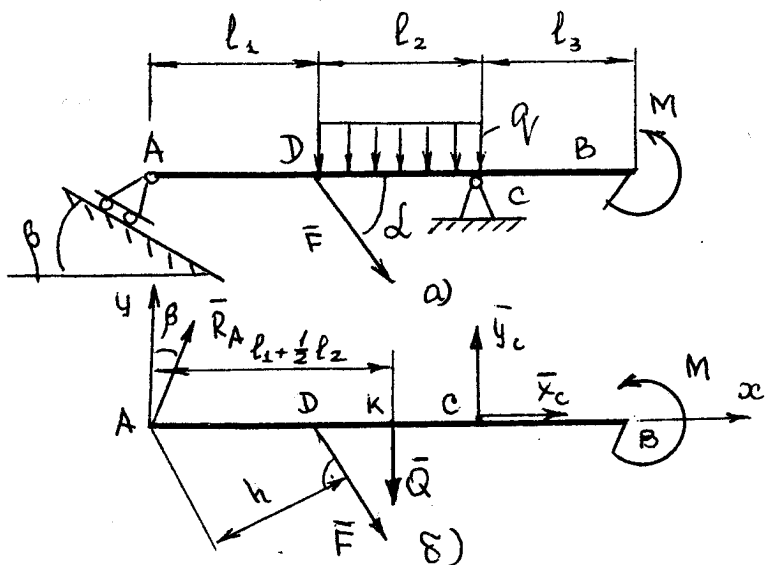


Рис. 2.22

Розв'язання: Розглянемо рівновагу невідільної балки AB . На неї діють активні сили: зосереджена сила \bar{F} ; пара сил з моментом M ; розподілене навантаження інтенсивністю q , яке замінюємо однією силою Q ($Q = q \cdot l_2$). На балку AB накладені в'язі: рухомий шарнір A та нерухомий B . Використовуючи аксіому звільнення від в'язей, дію шарнірів A і B на балку замінюємо реакціями $\bar{R}_A, \bar{Y}_c, \bar{X}_c$ /рис. 2.22 б/. Отримали плоску довільну систему сил, для якої умовами рівноваги є три рівняння: сума проєкцій всіх сил на осі X та Y і сума моментів сил відносно довільної точки площини.

Запишемо рівняння рівноваги для системи сил $\{ \bar{R}_A, \bar{F}, \bar{Q}, \bar{Y}_c, \bar{X}_c, M \}$ /рис. 2.22, б/.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & R_A \cdot \sin \beta + P \cos d + X_c = 0; \\ \sum F_y = 0; & R_A \cdot \cos \beta - P \sin d - Q + Y_c = 0; \\ \sum m_A \bar{F}_i = 0; & M + Y_c \cdot AC - Q \cdot AK - F \cdot h = 0. \end{aligned}$$

Звідки знаходимо невідомі сили R_A, X_C, Y_C .

$$R_A = 4,3 \text{ кН}; \quad X_C = -4,75 \text{ кН}; \quad Y_C = 1,73 \text{ кН}.$$

Оскільки проекція сили X_C на вісь X має від'ємне значення, то дійсний напрямок сил X_C протилежний показаному на рис. 2.22,б.

2.12.3. Визначення реакцій опор конструкції з двох тіл.

Знайти сили, що діють на тверді тіла конструкції, зображеної на рис. 2.23. Прийняти: $q = 30 \text{ н/м}$; $M = 60 \text{ н.м}$; $F = 400 \text{ н}$; $\beta = 30^\circ$; $\alpha = 60^\circ$

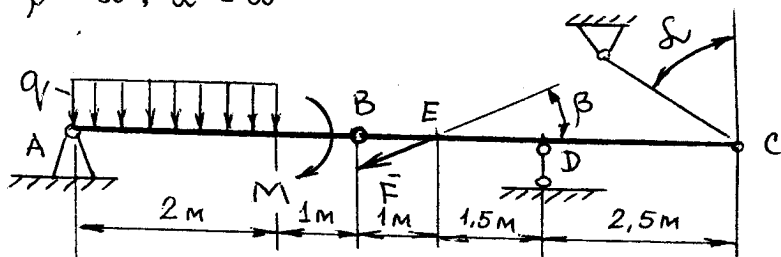


Рис. 2.23

Розв'язання: Розглянемо рівновагу балок АВ та ВС.

На рис. 2.24, 2.25 зображені сили, що діють на ці балки. Запишемо аксіому рівноваги для врівноважених плоских систем сил, під дією яких балки АВ і ВС знаходяться у спокої.

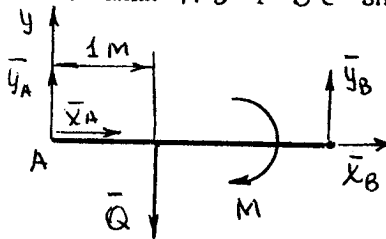


Рис. 2.24

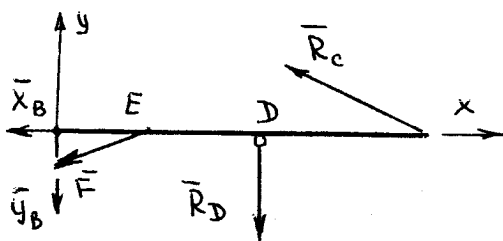


Рис. 2.25.

Для балки АВ /рис. 2.24/

$$\sum F_x = 0; \quad X_A + X_B = 0;$$

$$\sum m_A \bar{F}_i = 0; -Q \cdot 1 - M + Y_B \cdot 3 = 0;$$

$$\sum m_B \bar{F}_i = 0; -M - Q \cdot 2 + Y_A \cdot 3 = 0.$$

Для балки BC /рис. 2.25/

$$\sum F_x = 0; -X_B - F \cos \beta - R_C \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\sum m_D \bar{F}_i = 0; -Y_B \cdot 2,5 - F \cdot 1,5 \sin \beta - R_C \cdot 2,5 \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum m_C \bar{F}_i = 0; R_D \cdot 2,5 + F \cdot 4 \sin \beta - Y_B \cdot 5 = 0.$$

Маємо шість рівнянь, в які входять шість невідомих величин:

$X_A, Y_A, X_B, Y_B, R_D, R_C.$

Тоді:

$$Y_B = \frac{M + 1 \cdot Q}{3} = \frac{60 + 1 \cdot 60}{3} = 40 \text{ Н.}$$

$$Y_A = \frac{M + 2 \cdot Q}{3} = \frac{60 + 2 \cdot 60}{3} = 60 \text{ Н.}$$

$$R_D = \frac{-4F \sin \beta + 5Y_B}{2,5} = \frac{-400 \cdot 4 \cdot 0,5 + 40 \cdot 5}{2,5} = -240 \text{ Н}$$

$$R_C = \frac{-Y_B \cdot 2,5 - F \cdot 1,5 \cdot \sin \beta}{2,5} = \frac{-30 \cdot 2,5 - 400 \cdot 1,5 \cdot 0,5}{2,5} = -150 \text{ Н}$$

$$X_B = -X_A = F \cos \beta + R_C \sin \alpha = 400 \frac{\sqrt{3}}{2} - 150 \frac{\sqrt{3}}{2} = 216 \text{ Н.}$$

2.13. Розрахунок найпростіших ферм.

2.13.1. Основні поняття про статично визначувані плоскі ферми.

Фермою називається геометрична незмінна система прямолінійних стержнів, з'єднаних шарнірами. Найпростішим прикладом ферми є система трьох стержнів, з'єднаних шарнірами. Така система утворює три-

кутник, який є фігурою, геометрично незмінною в тому розумінні, що, не змінюючи довжини стержнів, не можна змінити її форму та розміри. Прикладом геометрично змінної системи або механізму є система чотирьох стержнів, з'єднаних шарнірами /рис.2.26/. Якщо осі всіх стержнів лежать в одній площині, ферма називається плоскою. В цьому розділі ми розглянемо тільки плоскі ферми.

Обмежимося розглядом ферм, що мають меншу можливу кількість стержнів при заданій кількості шарнірів /необхідність цього обмеження задачі з'ясуємо далі/. Такі ферми називатимемо найпростішими.

Розглянемо закон утворення найпростіших ферм і встановимо зв'язок між кількістю шарнірів і кількістю стержнів у таких фермах. Основою для побудови найпростішої ферми є трикутник abc /рис 2.27/. Щоб ускладнити цю

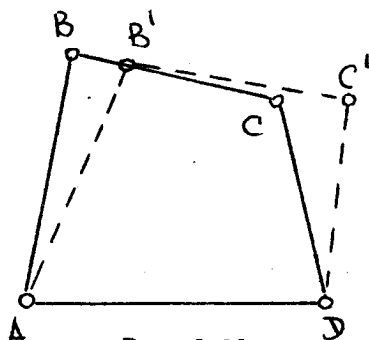


Рис. 2.26

елементарну трикутну ферму, приєднуватимемо до неї нові шарніри. Кожний з таких шарнірів для незмінного з'єднання з основою ферми потребує щонайменше два стержні. Наприклад, шарнір d з'єднано з трикутником abc двома стержнями bd і cd . Далі шарнір e приєднується двома стержнями: be і ce . Так само приєднуються і решта шарнірів.

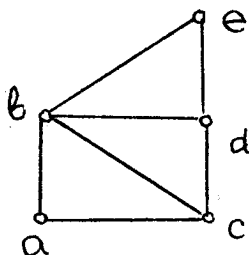


Рис. 2.27

Тепер розглянемо зв'язок між кількістю шарнірів \mathcal{N} і кількістю стержнів \mathcal{N} у найпростіших фермах. Цей зв'язок можна знайти на підставі закону утворення найпростіших ферм.

Справді, нехай найпростіша ферма має \mathcal{N} шарнірів. Треба визначити кількість стержнів цієї ферми. Міркуємо так: елементарний трикутник abc має три шарніри і три стержні; для незмінного з'єднання з основою ферми кожного з решти $(n-3)$ шарнірів потрібні два стержні. Загальна кількість стержнів у найпростішій фермі разом із трьома стержнями основного трикутника

$$N = 2(n-3) + 3 = 2n - 3.$$

/2.30/

Отже, знайшли шукану залежність між кількістю стержнів і шарнірів у найпростіших фермах.

З'єднання стержнів ферми між собою називають вузлами. Очевидно, кожний шарнір міститься у вузлі ферми; рівність /2.30/ встановлює зв'язок між кількістю стержнів і кількістю вузлів у найпростіших фермах.

Тепер стисло розглянемо деякі типи ферм, що різняться за своїм виробничим призначенням. Найчастіше зустрічаються ферми трьох типів: мостові, що використовуються при будівництві мостів; кроквяні, що підтримують дахи в різних спорудах, і кранові, які є деталями підйомних пристроїв. Приклади цих типів ферм зображено відповідно на рис. 2.28 а, б, в. Мостові і кроквяні ферми, як балки, спираються на рухомі і нерухомі опори, кранові ферми – на підп'ятник і підтримуються підшипниками.

Щодо термінології, то вертикальні стержні в мостових і кроквяних фермах називатимемо стояками, стержні зовнішнього контура ферми – відповідно верхнім і нижнім поясом ферми, а стержні, що лежать між цими поясами, утворюють її грати. Стержні грат, нахилені під різними кутами до горизонту, називаються розкосами.

Основна задача, яку розглядатимемо, – це визначення внутрішніх сил, що виникають у стержнях ферми внаслідок дії активних зовнішніх навантажень і зовнішніх реакцій опор.

Цю задачу розв'язуватимемо на основі деяких спрощень у її постановці:

шарніри, якими з'єднані стержні ферми, – ідеальні точкові, без тертя;

усі стержні абсолютно тверді;

зовнішні сили, прикладені до ферми, прикладені у вузлах.

Звичайно, ці припущення

не відповідають дійсності:

їх можна розглядати як засіб, щоб мати перше наближення до справжніх внутрішніх сил, які виникають у стержні ферми під впливом зовнішніх сил. Справді, в реальних фермах стержні з'єднані не шарнірно, а за допомо-

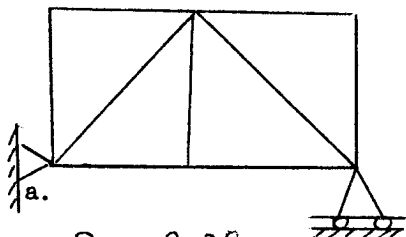
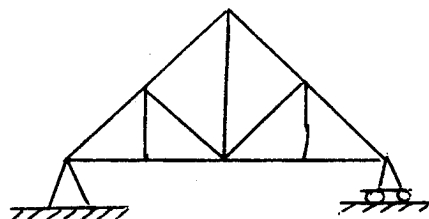


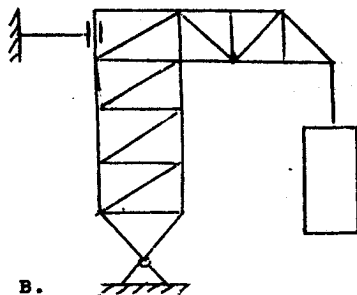
Рис. 2.28

гою зварювання або заклепок. Тому в стержнях ферми виникають не тільки сили розтягу або стиску, а й сили, що згинають стержні. За дослідженнями академіка Є.О. Патона, вплив цих сил порівняно невеликий і в першому наближенні ним можна знехтувати.



б.

Друге припущення є основним для статки абсолютно твердого тіла. Практичне значення помилок, зв'язаних з другим припущенням, невелике.



в.

Рис. 2.28

Третє припущення не приводить до великих помилок при визначенні внутрішніх сил у стержнях ферми, якщо відношення довжин стержнів до прогону ферми невелике.

У всякому разі, наближений розподіл внутрішніх сил у стержнях ферми на підставі трьох зазначених припущень у переважній більшості випадків може використовуватись для технічних розрахунків елементів ферми на міцність.

2.13.2. Метод вирізування вузлів.

Задачею розрахунку ферми є визначення опорних реакцій та зусиль в стержнях.

Найпростіший спосіб визначення зусиль в стержнях ферми базується на методі вирізування вузлів, що може реалізуватися аналітично або графічно.

Перед тим, як шукати зусилля в стержнях, необхідно знайти опорні реакції ферми, яка, наприклад, навантажена силами \vec{F}_1 та \vec{F}_2 / рис. 2.29/.

$$\sum F_x = 0; \quad X_A + F_1 = 0.$$

$$\sum F_y = 0; \quad Y_A + R_B - F_2 = 0.$$

$$\sum m_A \bar{F}_i = 0; -F_2 \cdot 2a - F_1 \cdot h + R_B \cdot 3a = 0.$$

$$x = -F_1; R_B = \frac{2}{3} F_2 + \frac{h}{3a} F_1;$$

$$y_A = -\frac{h}{3a} F_1 + \frac{1}{3} F_2.$$

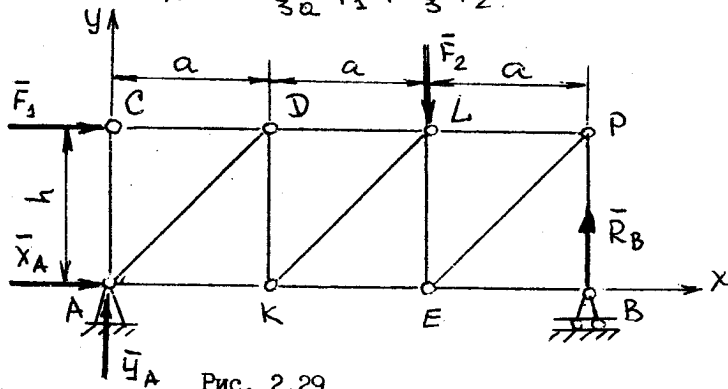


Рис. 2.29

Тепер розглянемо рівновагу вузла ферми, в якому перетинаються два стержні, зусилля в яких невідомі, наприклад, рівновагу вузла В. На вузол В діє сила R_B , і його переміщенню перешкоджають стержні ВР та ВЕ. На підставі аксіоми про звільнення від в'язей, дію стержнів на вузол В замінюємо реакціями в'язей /рис. 2.30, а/, попередньо вважаючи, що стержні ВЕ та ВР розтягнуті.

Запишемо аксіому рівноваги для плоскої збіжної системи сил.

$$\sum F_x = 0; -N_{BE} = 0.$$

$$\sum F_y = 0; R_B + N_{BP} = 0.$$

тоді: $N_{BE} = 0$

$$N_{BP} = -\left(\frac{2}{3} F_2 + \frac{h}{3a} F_1\right).$$

Знак мінус вказує на те, що стержень N_{BP} стиснутий.

Тепер розглянемо рівновагу наступного вузла Р, в якому перетинаються два стержні PL та PE, зусилля в яких невідомі.

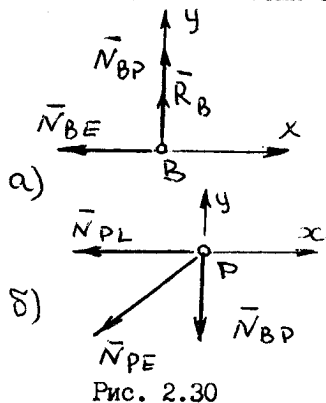


Рис. 2.30

Використовуючи умову, що вузол Р знаходиться у рівновазі, будемо мати /рис. 2.30, б/.

$$\sum F_x = 0; \quad -N_{PN} - N_{PE} \cdot \cos d = 0.$$

$$\sum F_y = 0; \quad -N_{BP} - N_{PE} \cdot \sin d = 0.$$

$$\text{Звідки: } N_{PE} = -\frac{N_{BP}}{\sin d} = \frac{2aF_2 + hF_1}{3ah} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$N_{PN} = -N_{PE} \cdot \cos d = -\frac{2aF_2 + hF_1}{h}$$

Далі, послідовно розглядаючи рівновагу вузлів Е, L, К, D, С, знайдемо зусилля в усіх стержнях ферми аналітичним методом.

Зусилля в стержнях ферми можна визначити і графічним методом.

Побудуємо замкнений силовий багатокутник для вузла В.

У вибраному масштабі з довільної точки О площини відкладаємо відому силу \vec{R}_B

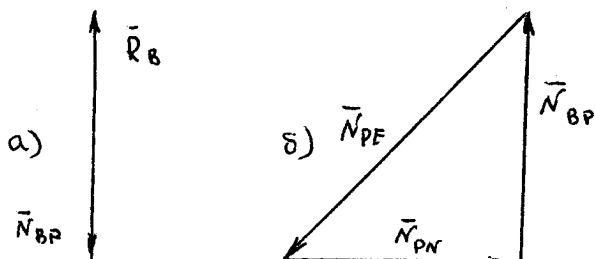


Рис. 2.31.

З кінця вектора R_B проведемо лінію, паралельну стержню ВР, а з початку вектора В - паралельну стержню ВЕ. Побудувавши трикутник сил, бачимо /рис.2.31 а/, що зусилля $N_{BE} = 0$, $N_{BP} = -R_B$. Зусилля N_{BP} направлене до вузла, тобто стоек ВР стиснуто.

Наступний вузол Р перебуває у рівновазі /після звільнення від в'язей/ під дією відомої сили N_{BP} та двох невідомих сил N_{PE} , N_{PN} .

Будуємо замкнений силовий трикутник /рис.2.31, б/, враховуючи, що напрям реакції стержня ВР, прикладеної до вузла Р, проти-

лежний напряму реакції цього стержня, прикладеної до вузла. Із силового трикутника знаходимо величину і напрямок зусиль N_{PE} та N_{PN} .

Недоліки методу вирізування вузлів:

- трудомісткість; при графічному способі кожне зусилля в стержнях відкладається двічі;

- помилка в визначенні зусилля в одному з стержнів приводить до помилки при визначенні зусиль в інших стержнях ферми.

2.13.3. Діаграма Максвелла-Кремони.

Побудова діаграми Максвелла-Кремони здійснюється за такою методикою:

- у вибраному масштабі креслимо ферму /рис.2.32/;

- показуємо активні сили та реакції в'язей; причому всі сили показуємо поза контуром ферми;

- знаходимо реакції в'язей при: $a = h = 1\text{ м.}$; $F_1 = 3\text{ н.}$; $F_2 = 6\text{ н.}$;

$X_A = 3\text{ н.}$; $Y_A = 1\text{ н.}$; $R_K = 5\text{ н.}$; на рисунку показуємо дійсний напрямок реакцій в'язей;

- буквами А, В, С, Д, К, Л, М позначаємо вузли;

- нумеруємо ділянки, що обмежені стержнями ферми /внутрішні поля/ 1, 2, 3, 4, 5, 6/;

- нумеруємо ділянки, що обмежені лініями дії сил /зовнішні поля/ 7, 8, 9, 10/;

- вибираємо напрямок обходу внутрішніх та зовнішніх полів ферми;

- вибираємо масштаб сил /см. : 1н / і будуємо силовий багатокутник зовнішніх сил 7, 8, 9, 10, 11, обходячи зовнішні поля ферми за годинниковою стрілкою; /рис. 2.33/;

- за годинниковою стрілкою послідовно обходимо вузли ферми і будуємо на рис. 2.33 силові багатокутники, дотримуючись правила, що при обході вузла повинні перетинатися не більше двох стержнів, зусилля в яких невідомі.

На діаграмі Максвелла-Кремони отримали зусилля в стержнях у відповідному масштабі. Достатньо виміряти відрізки діаграми, що відповідають певному стержню, та помножити на масштаб сили, і отримаємо величину зусилля у стержнях ферми.

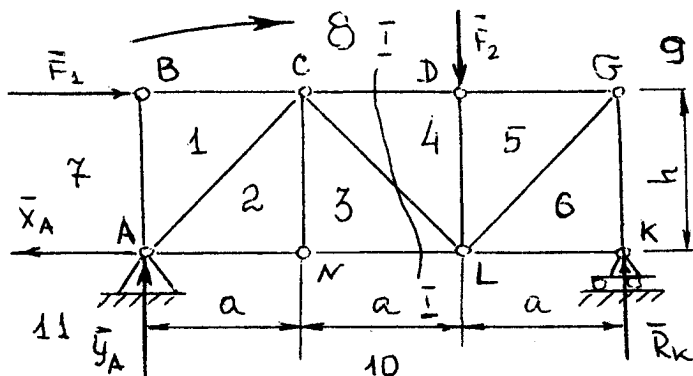


Рис. 2.32

Для визначення стану стержнів ферми необхідно в'яснити: до чи від вузла направлена реакція стержня. Наприклад, при обході у вибраному напрямку вузла С по діаграмі бачимо, що стержень 32 нульовий /зусилля дорівнює нулю/; стержень 21- стиснутий /2-початок вектора, 1-кінець/, зусилля у стержні 21 направлено до вузла С ; стержень 18 - стиснутий; стержень 84 - стиснутий; стержень 43- розтягнутий .

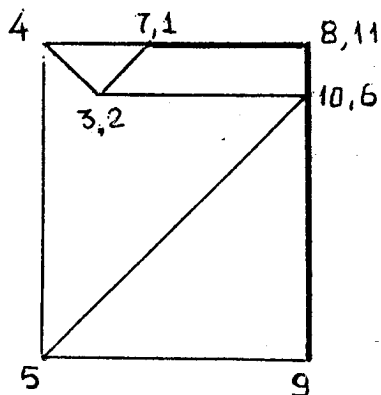


Рис. 2.33

2.13.4. Метод Ріттера .

Метод Ріттера ефективно використовувати в тих випадках, коли кількість невідомих зусиль в стержнях, які треба визначити, порівняно невелика .

У плоскій фермі,, що зображена на рис. 2.32, виконаємо переріз I-I таким чином, щоб у перерізі було не більше трьох стержнів.

Звичайно, попередньо знаходимо опорні реакції: $X_A = 3 \text{ Н}$; $Y_A = 1 \text{ Н}$; $R_K = 5 \text{ Н}$. Розглянемо рівновагу частини ферми, що знаходиться справа від перерізу /рис. 2.34/.

Отримали врівноважену плоску довільну систему сил з трьома невідомими силами S_{84} , S_{43} , S_{310} . Складаємо три рівняння рівноваги таким чином, щоб у кожному рівнянні було одне невідоме.

Для цього знайдемо точки C та L , що називаються моментними, де перетинаються лінії дії невідомих зусиль відповідно \bar{S}_{84} , \bar{S}_{43} та \bar{S}_{43} , \bar{S}_{310} .

Тоді:

$$\sum m_C \bar{F} = 0; -F_2 \cdot a - S_{310} \cdot h + R_K \cdot 2a = 0.$$

$$\sum m_L \bar{F} = 0; S_{84} \cdot h + R_K \cdot a = 0$$

$$S_{310} = 2R_K - F_2 = 4 \text{ Н}; S_{84} = -R_K = -5 \text{ Н}.$$

Зусилля S_{43} знайдемо, якщо спроектуємо всі сили на вісь Y /рис. 2.34/.

$$\sum F_y = 0; -F_2 + S_{43} \cdot \sin \alpha + R_K = 0.$$

$$S_{43} = (F_2 - R_K) / \sin \alpha = 1,41 \text{ Н}.$$

Виконуючи перерізи інших стержнів ферми, знаходимо зусилля в усіх стержнях ферми.

2.14. Центр паралельних сил.

Розглянемо систему паралельних сил $\{F_k\}_n$, в якій головний вектор і головний момент відносно довільного центра відмінні від нуля /рис. 2.35/. Введемо систему координат так, щоб вісь Z була паралельна силам.

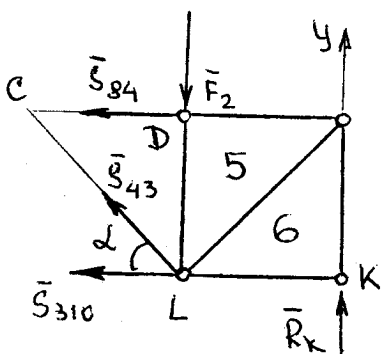


Рис. 2.34.

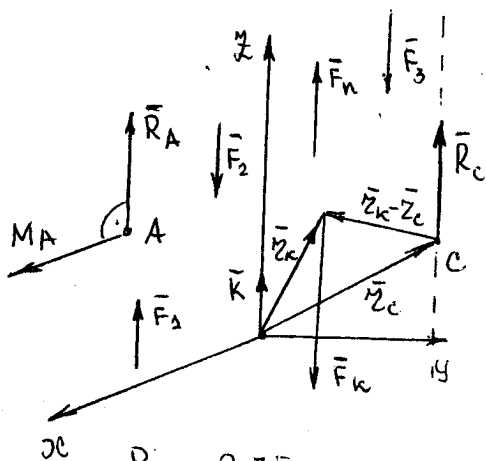


Рис. 2.35

Знайдемо скалярний добуток головного вектора та головного моменту системи, що прикладені у точці А.

$$\bar{R}_A \cdot \bar{M}_A = R_{Ax} \cdot M_{Ax} + R_{Ay} \cdot M_{Ay} + R_{Az} \cdot M_{Az}$$

Як видно з рис. 2.35 ,

$$R_{Ax} = 0, \quad R_{Ay} = 0, \quad R_{Az} \neq 0,$$

$$M_{Ax} \neq 0, \quad M_{Ay} \neq 0, \quad M_{Az} = 0.$$

Тоді:
$$\bar{R}_A \cdot \bar{M}_A = 0 \quad /2.31/$$

Оскільки за умовою головний вектор і головний момент системи відмінні від нуля, то рівність /2.31/ виконуватиметься, якщо сила \bar{R}_A лежатиме в площині пари з моментом \bar{M}_A . Сукупність пари і сили, що лежить у площині пари, можна замінити однією силою \bar{R}_C /рис. 2.36/, перемішуючи її в площині пари у відповідному напрямку на величину $d = M_A / R_A$ ($R_C = R_A$).

Таким чином, система паралельних сил зводиться до однієї сили, що називається рівнодієюю, якщо головний вектор системи відмінний від нуля.

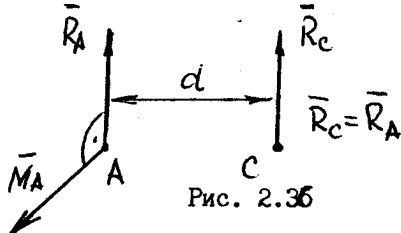


Рис. 2.36

Покажемо радіус-вектор деякої точки С /рис. 2.35/, яка лежить на лінії дії рівнодії. Знайдемо головний момент системи відносно точки С.

$$\bar{M}_C = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k - \bar{r}_C) \times \bar{F}_k \quad /2.32/$$

Система паралельних сил може бути замінена однією рівнодієюю силою \bar{R}_C , лінія дії якої проходить через точку С, а значить, момент вектора \bar{R}_C відносно полюса С дорівнює нулю, тобто $\bar{M}_C = 0$. Тоді із /2.32/ отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n (\bar{r}_k - \bar{r}_C) \times \bar{F}_k = 0 \quad /2.33/$$

Рівність /2.33/ можна переписати в такій формі:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k - \sum_{k=1}^n \bar{r}_C \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k - \bar{r}_C \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0 \quad /2.34/$$

Введемо одиничний вектор \bar{K} , паралельний лініям дії сил. Тоді довільну силу \bar{F}_k можна записати у вигляді

$$\bar{F}_k = F_k' \cdot \bar{K}, \quad /2.35/$$

де $F_k' = F_k$, якщо напрям сили збігається з напрямом вектора \bar{F}_k ; $F_k' = -F_k$, якщо сила \bar{F}_k і вектор \bar{K} напрямлені протилежно.

Тоді
$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \bar{K} \sum_{k=1}^n F_k' \quad /2.36/$$

Підставляючи вирази /2.35/ і /2.36/ у співвідношення /2.34/, маємо

$$\sum_{k=1}^n \bar{z}_k \times \bar{K} \cdot F_k' - \bar{z}_c \times \bar{K} \sum_{k=1}^n F_k' = 0,$$

звідки

$$\left[\sum_{k=1}^n \bar{z}_k \cdot F_k' - \bar{z}_c \sum_{k=1}^n F_k' \right] \times \bar{K} = 0. \quad /2.37/$$

Рівність /2.37/ виконується при довільному напрямі сил тільки за умови, що перший множник дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{z}_k \cdot F_k' - \bar{z}_c \sum_{k=1}^n F_k' = 0, \quad /2.38/$$

звідки

$$\bar{z}_c = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{z}_k \cdot F_k'}{\sum_{k=1}^n F_k'}. \quad /2.39/$$

Точка C називається центром паралельних сил.

Нехай X_c, Y_c, Z_c - координати центра паралельних сил, а X_k, Y_k, Z_k - координати точки прикладення довільної сили \bar{F}_k . Тоді координати центра паралельних сил можна визначити за формулами

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^n X_k \cdot F_k'}{\sum_{k=1}^n F_k'}, \quad Y_c = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k \cdot F_k'}{\sum_{k=1}^n F_k'}, \quad Z_c = \frac{\sum_{k=1}^n Z_k \cdot F_k'}{\sum_{k=1}^n F_k'}. \quad /2.40/$$

Ураховуючи те, що точка C не залежить від орієнтації паралельних сил у просторі, можна сказати, що центр паралельних сил є точка простору, навколо якої повертається рівнодіюча система паралельних сил при повороті всіх сил на один і той самий кут в один бік навколо точок їх прикладення.

2.14.1. Центр ваги дискретної системи матеріальних точок.

Відстані між точками системи завжди значно менші від радіуса земної кулі. Тоді сили ваги, прикладені до точок системи, можна наближено розглядати як паралельні сили.

Означення. Центром ваги системи матеріальних точок є центр системи сил ваги, прикладених до точок матеріальної системи.

Позначимо вагу i -ї точки системи через P_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Тоді координати центра ваги системи, згідно з /2.40/, визначатимуться за формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n P_i x_i}{\sum_{i=1}^n P_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n P_i y_i}{\sum_{i=1}^n P_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n P_i z_i}{\sum_{i=1}^n P_i}. \quad /2.41/$$

Сума сил ваги точок системи називається вагою системи P .

$$P = \sum_{i=1}^n P_i$$

2.14.2. Координати центра ваги однорідного тіла.

Припустимо, що треба визначити положення центра ваги однорідного тіла. Позначаючи сталу питому вагу тіла γ , матимемо

$$dP = \gamma dV,$$

де dV -елемент об'єму тіла.

Вага тіла

$$P = \gamma V,$$

де V -об'єм тіла.

Тоді на підставі формули /2.41/ матимемо

$$x_c = \frac{\int x dV}{V}, \quad y_c = \frac{\int y dV}{V}, \quad z_c = \frac{\int z dV}{V}. \quad /2.42/$$

Із /2.42/ випливає, що положення центра ваги однорідного тіла залежить не від фізичних властивостей матеріалу, а лише від геометричної форми і розмірів тіла.

Якщо тіло має форму тонкої пластини, то формули /2.42/ запишуться у вигляді

$$x_c = \frac{\int x dS}{S}, \quad y_c = \frac{\int y dS}{S}. \quad /2.43/$$

де S -площа пластини.

Ш. ДИНАМІКА

Динаміка - це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальної точки, системи матеріальних точок та абсолютно твердого тіла з врахуванням сил, що діють на ці рухомі об'єкти.

В основі динаміки лежать закони І.Ньютона, що викладені ним у книзі "Математичні початки натуральної філософії" /1687 р./

Перший закон Ньютона. Ізольована матеріальна точка знаходиться у спокої або рухається рівномірно по прямолінійній траєкторії.

Ізольованою називається матеріальна точка, яка не взаємодіє з іншими тілами або до якої прикладена врівноважена система сил. Властивість матеріальної точки зберігати спокій або рівномірного і прямолінійного руху називається інертністю. Рух матеріальної точки може змінитися тільки в результаті взаємодії її з іншими тілами, міра якої є сила.

Другий закон Ньютона. Прискорення \vec{a} , що набуває точка масою m під дією сили \vec{F} , пропорційне цій силі і має напрямок сили.

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (3.1)$$

Третій закон Ньютона. Сили взаємодії двох тіл, рівні за величиною, направлені по одній прямій в протилежні сторони.

3.1. Динаміка точки.

3.1.1. Швидкість та прискорення точки.

Перш ніж перейти до поняття швидкості та прискорення, встановимо математичні способи визначення руху точки.

Рух точки визначається трьома основними способами: векторним, координатним і натуральним.

Векторний /інваріантний/ спосіб визначення руху найчастіше застосовується в теорії. Параметр руху - це радіус-вектор \vec{r} / рис. 3.1 /.

Рівняння руху точки має вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad /3.2/$$

Траєкторія - це графік радіус-вектора \vec{r} .

Координатний спосіб визначення руху точки.

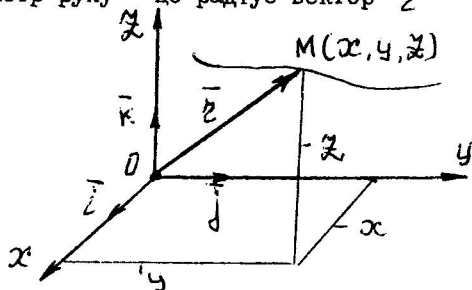


Рис. 3.1.

Рівняння руху точки M /рис.3.1/ в координатній формі мають вигляд

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad /3.3/$$

Радіус-вектор \vec{r} також може бути виражений через координати точки

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \quad /3.4/$$

Залежність /3.4/ встановлює зв'язок між координатним та векторним способами визначення руху точки.

Натуральний спосіб визначення руху точки M полягає в тому, що задається:

- траєкторія точки /рис. 3.2/;
- початок відріку / точка O криволінійної координати S , що має розмірність довжини/;
- додатний та від'ємний напрямки відріку S ;



Рис. 3.2.

- закон руху по траєкторії у вигляді залежності дугової координати S від часу:

$$S = S(t). \quad /3.5/$$

Потрібно розрізняти шлях, що є величиною строго додатною, від дугової координати S , яка може бути і від'ємною.

Зауваження I. За традицією, наслідуючи Ньютона, в механіці похідна від змінної величини за часом позначається крапкою над величиною наприклад,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

Кінематичними мірами /характеристиками/ руху точки є швидкість та прискорення. Почнемо розгляд з векторного способу.

Швидкість точки є похідна від радіуса-вектора \vec{r} цієї точки за часом t у системі відліку, що розглядається /рис. 3.3/

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad /3.6/$$

Вектор \vec{v} швидкості точки напрямлений по дотичній до траєкторії.

Прискорення точки є похідна від вектора швидкості \vec{v} за часом або друга похідна за часом від радіус-вектора \vec{r} у системі відліку, що розглядається

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad /3.7/$$

Формули /3.6/ та /3.7/ є означеннями швидкості та прискорення.

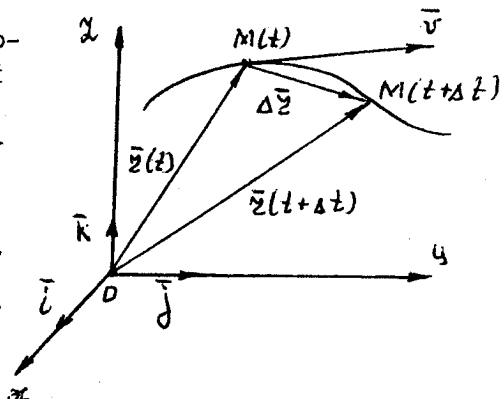


Рис. 3.3.

Швидкість та прискорення при координатному способі визначення руху.

Якщо рух точки заданий координатним способом у декартовій прямокутній системі координат x, y, z /формули 3.3/, то можна перейти до векторного способу виразом /3.4/

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Оскільки в даній системі відліку

$$\vec{i} = \text{const}, \quad \vec{j} = \text{const}, \quad \vec{k} = \text{const},$$

то

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0.$$

Тоді, диференціюючи вираз для \vec{r} за часом t , одержимо

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad /3.8/$$

Проектуючи векторну рівність /3.8/ на осі x, y, z , отримаємо

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Знайдемо модуль швидкості точки

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad /3.9/$$

Проекції вектора прискорення можна одержати, міркуючи аналогічно:

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k},$$

звідки дістанемо

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z},$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad /3.10/$$

Швидкість та прискорення точки при натуральному способі визначення руху. Встановимо зв'язок з векторним способом, формально подаючи \bar{z} через S як складну функцію

$$\bar{z} = \bar{z}[S(t)].$$

Диференціюючи її, дістанем вектор швидкості

$$\bar{v} = \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{d\bar{z}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \dot{S} \cdot \bar{c}. \quad /3.11/$$

або $\bar{v} = v_T \cdot \bar{c}.$

Вектор \bar{c} /рис. 3.4/ направлений по дотичній до траєкторії руху точки в додатному напрямку відліку дугової координати.

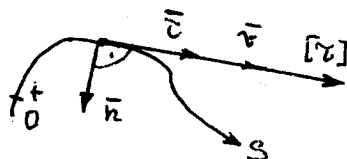


Рис. 3.4

Зауваження. Потрібно розрізняти позначення \bar{v} , v , v_T .

\bar{v} - вектор швидкості; v - швидкість /модуль вектора \bar{v} /;

v_T - проекція вектора швидкості на вісь $[c]$, $v_T = \pm v$;

$v_T < 0$, коли точка рухається у напрямі зменшення S .

Вектор прискорення одержимо, диференціюючи /3.11/.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{S} \cdot \bar{c}) = \ddot{S} \bar{c} + \dot{S} \frac{d\bar{c}}{dt}. \quad /3.12/$$

Величину та напрям другого доданку в /3.12/ з'ясуємо, вважаючи, що $\vec{r} = \vec{r}[s(t)]$.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{s}}{\rho} \vec{n}. \quad /3.13/$$

Нормальний одиничний вектор \vec{n} направлений перпендикулярно до вектора \vec{r} в сторону угнутості траєкторії руху точки.

Вектори \vec{r} та \vec{n} утворюють площину, що найбільш прилегла до траєкторії руху у даній точці. Така площина називається стичною.

Вираз /3.12/ з врахуванням /3.13/ запишеться

$$\vec{a} = \ddot{s} \vec{r} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n}. \quad /3.14/$$

Вираз /3.14/ є розкладення вектора \vec{a} на тангенціальне /дотичне/ прискорення \vec{a}_τ та нормальне прискорення \vec{a}_n (рис. 3.5) /за напрямками натуральних осей/

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \vec{r} + a_n \vec{n} \quad /3.15/$$

$$\left. \begin{aligned} a_\tau &= \ddot{s}, \\ a_n &= \dot{s}^2 / \rho, \\ a_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad /3.16/$$

Це означає, що вектор прискорення завжди лежить у стичній площині. Враховуючи перпендикулярність \vec{r} та \vec{n} , можемо записати

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad /3.17/$$

Тангенціальне прискорення \vec{a}_τ визначає зміну вектора \vec{v} за модулем: коли a_τ та v_τ одного знака, швидкість \vec{v} зростає; коли різного знака - зменшується. Якщо $a_\tau < 0$, то це ще не означає сповільнення.

Нормальне прискорення \vec{a}_n характеризує зміну вектора \vec{v} за напрямком: $a_n = 0$, коли рух прямолінійний ($\rho \rightarrow \infty$), у точках перегину ($\rho \rightarrow \infty$), у місцях зупинки ($v = 0$).

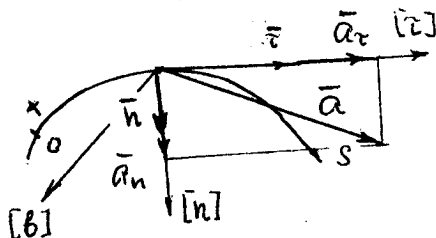


Рис. 3.5.

3.1.2. Диференціальні рівняння руху точки.

Розглянемо рух вільної матеріальної точки масою m під дією сили \vec{F} /рис. 3.6/, що може залежати від часу, швидкості та відстані $\vec{F} = F(\vec{z}, \vec{v}, t)$.

Враховуючи /3.7/, закон /3.1/ запишеться у вигляді

$$m \frac{d^2 \vec{z}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{z}, \vec{v}, t). \quad /3.18/$$

Отримали диференціальне рівняння руху точки у векторній формі.

Рівняння /3.18/ у векторній формі еквівалентне трьом скалярним:

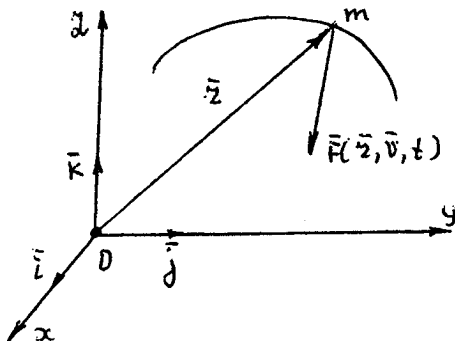


Рис. 3.6

а/. декартова система координат

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= F_x, \\ m \ddot{y} &= F_y, \\ m \ddot{z} &= F_z. \end{aligned} \right\} \quad /3.19/$$

б/. натуральна система координат

$$\left. \begin{aligned} m \dot{s}^2 / \rho &= F_n, \\ m \ddot{s} &= F_\tau, \\ 0 &= F_\nu. \end{aligned} \right\} \quad /3.20/$$

3.1.3. Рівняння руху невільної матеріальної точки.

Для дослідження руху невільної матеріальної точки з допомогою рівняння /3.18/, необхідно, використовуючи аксіому звільнення від в'язей, розглянути точку як вільну, на яку діють головний вектор активних сил \vec{F} та головний вектор реакцій в'язей \vec{R} . Тоді рівняння /3.18/ запишеться у вигляді

$$m \frac{d^2 \vec{z}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{R}. \quad /3.21/$$

Приклад 1. Точка масою m рухається по горизонтальній поверхні під дією сили $\vec{F} = 15t^4 \vec{i}$. Знайти закон руху точки, якщо при $t_0 = 0$; $x_0 = 2 \text{ м}$, $\dot{x}_0 = 5 \text{ м/с}$.

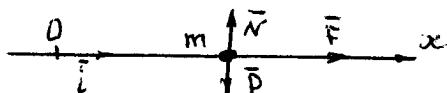


Рис. 3.7.

Розв'язання: Запишемо диференціальне рівняння руху точки в проекціях на вісь x

$$m\ddot{x} = 15t^4. \quad (3.22)$$

Інтегруємо диференціальне рівняння /3.22/ при початкових умовах руху: при $t_0 = 0$; $x_0 = 2 \text{ м}$; $\dot{x}_0 = 5 \text{ м/с}$.

$$m \cdot \frac{d\dot{x}}{dt} = 15t^4,$$

$$\int_5^{\dot{x}} m d\dot{x} = \int_0^t 15t^4 \cdot dt,$$

$$\dot{x} = \frac{5}{m} + \frac{3}{m}t^5,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{m} + \frac{3}{m}t^5,$$

$$\int_2^x dx = \frac{5}{m} \int_0^t dt + \frac{3}{m} \int_0^t t^5 dt,$$

$$x = 2 + \frac{5}{m}t + \frac{t^6}{3m}.$$

Приклад 2. Точка масою m рухається по горизонтальній поверхні /рис. 3.7/ під дією сили $\vec{F} = 4\dot{x}\vec{i}$. Знайти закон руху точки, якщо при $t_0 = 0$; $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ м/с}$.

Розв'язання: Диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь x запишеться:

$$m\dot{x} = 4\dot{x}. \quad /3.23/$$

Початкові умови: при $t_0 = 0$; $x_0 = 0$, $\dot{x} = 10 \text{ м/с}$.

Прискорення точки запишемо у вигляді

$$\frac{d\ddot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \dot{x}.$$

Тоді рівняння /3.23/ набуває вигляду

$$m \frac{d\dot{x}}{dx} = 4,$$

інтегруючи яке, отримаємо:

$$x = \frac{2,5}{m} \left(e^{\frac{4}{m} t} - 1 \right).$$

3.2. Динаміка системи.

3.2.1. Маса системи. Центр мас.

Маса системи матеріальних точок $\{m_k\}_n$ дорівнює сумі мас точок, що входять у систему

$$M = \sum_{k=1}^n m_k \quad /3.24/$$

Центр мас тіла знайдемо із виразу /2.39/, враховуючи, що

$$F_k' = g m_k$$

$$\bar{z}_c = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{z}_k \cdot m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad /3.25/$$

де g - прискорення вільного падіння тіла.

Якщо x_c, y_c, z_c - координати центра мас, а x_k, y_k, z_k - координати положення k -ї точки системи, то векторна рівність /3.25/ у проєкціях на осі декартової системи координат запишеться у вигляді трьох рівнянь

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad /3.26/$$

Диференціюючи за часом вираз /3.25/, знайдемо швидкість та прискорення центра мас.

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{k=1}^N \vec{v}_k \cdot m_k}{\sum_{k=1}^N m_k} \quad /3.27/$$

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_{k=1}^N \vec{a}_k \cdot m_k}{\sum_{k=1}^N m_k} \quad /3.28/$$

3.2.2. Момент інерції тіла відносно осі.

У твердому тілі /рис. 3.8/ виділимо елементарний об'єм масою dm , що знаходиться на відстані ρ від осі Z .

Скалярний добуток маси dm на квадрат її відстані від осі називається моментом інерції точки відносно осі.

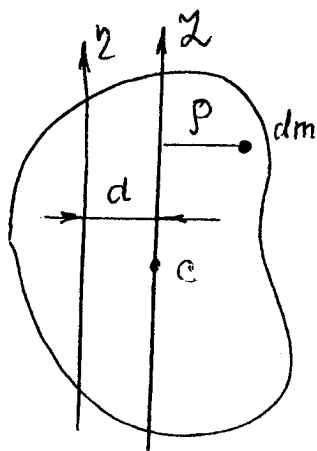


Рис. 3.8.

$$dM_z = \rho^2 dm \quad /3.29/$$

Для визначення моменту інерції тіла відносно осі Z достатньо проінтегрувати вираз /3.29/

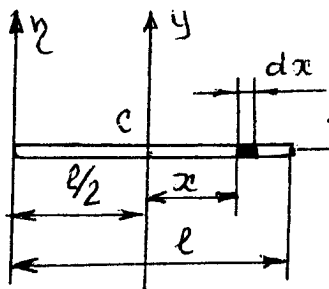
$$J_z = \int_M \rho^2 dm \quad /3.30/$$

Нехай вісь Z проходить через центр мас C тіла. Тоді, у відповідності з теоремою Гюйгенса-Штейнера, момент інерції тіла відносно осі буде складатися із моменту інерції тіла відносно паралельної осі z , що проходить через центр мас C та добутку маси M тіла на квадрат відстані між осями

$$J_z = J_z + Md^2 \quad /3.31/$$

Приклад 1. Знайти момент інерції тонкого стержня відносно осі симетрії та паралельної осі, що проходить через кінець стержня. Маса стержня M ; довжина - l .

Розв'язання. В стержні виділимо елементарний об'єм /рис. 3.9/



Знайдемо момент інерції виділеного елемента стержня відносно осі y

$$dJ_y = x^2 dm,$$

$$де \quad dm = \frac{M}{l} \cdot dx.$$

Тоді момент інерції стержня відносно осі y на підставі /3.30/ буде дорівнювати:

Рис. 3.9.

$$J_y = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{Ml^2}{12} \quad /3.32/$$

Теорема /3.31/ дозволяє знайти момент інерції стержня відносно осі η , використовуючи /3.32/

$$J_{\eta} = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3}$$

Приклад 2. Визначити момент інерції круглої пластини /шківа, циліндра/ масою M та радіусом R відносно осі симетрії.

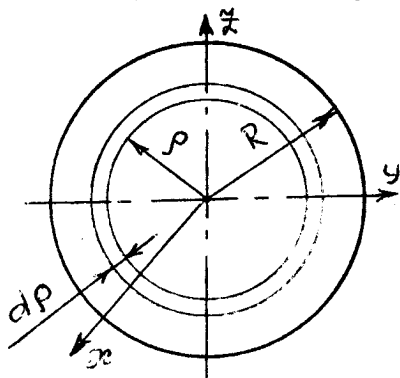


Рис. 3.10

Розв'язання: Момент інерції елемента пластини протяжністю dp та масою dm відносно осі x знайдемо з виразу /3.29/

$$dJ_x = \rho^2 dm = \frac{2M}{R^2} \rho^3 dp, \quad /3.33/$$

$$де \quad dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \rho dp =$$

$$= \frac{2M}{R^2} \rho dp.$$

Інтегруючи /3.32/, будемо мати момент інерції пластини відносно осі x

$$J_x = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{MR^2}{2}.$$

3.2.3. Метод кінетостатики.

Розглянемо рух k -ї точки невільної матеріальної системи

/рис.3.II/.

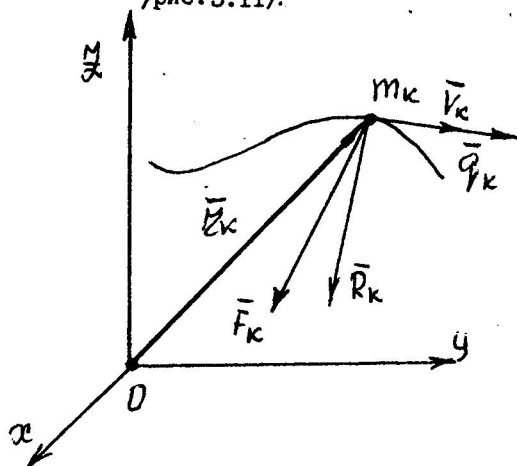


Рис. 3.11

На підставі аксіоми звільнення від в'язей, дію в'язей на точку масою m_k замінюємо реакціями, головний вектор яких \bar{R}_k . Головний вектор активних сил, прикладених до k -ї точки, позначимо \bar{F}_k .

Запишемо диференціальне рівняння руху k -ї точки

$$m_k \frac{d^2 \bar{z}_k}{dt^2} = \bar{F}_k + \bar{R}_k, /3.34/$$

або

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + (-m_k \bar{a}_k) = 0. /3.35/$$

$$\text{де: } \bar{a}_k = \frac{d^2 \bar{z}_k}{dt^2}.$$

Доданок $/-m_k \bar{a}_k/$ називається даламберовою силою інерції, яку у подальшому будемо позначати через $\bar{\Phi}_k$. Тепер рівняння /3.35/ запишеться:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0. /3.36/$$

Рівняння /3.36/ носить назву методу кінетостатики, або принципу Даламбера, для матеріальної точки: у випадку руху невільної матеріальної точки в кожний момент часу векторна сума активних сил, прикладених до точки, реакцій в'язей та сил інерції дорівнює нулю.

Рівняння /3.36/ помножимо векторно зліва на радіус-вектор точки

$$\bar{z}_k \times \bar{F}_k + \bar{z}_k \times \bar{R}_k + \bar{z}_k \times \bar{\Phi}_k = 0. /3.37/$$

Враховуючи /2.6/, рівняння /3.37/ набуває вигляду

$$m_0 \bar{F}_k + m_0 \bar{R}_k + m_0 \bar{\Phi}_k = 0. \quad /3.38/$$

Запишемо рівняння /3.36/ та /3.38/ для всіх точок матеріальної системи

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad /3.39/$$

$$m_0 \bar{F}_k + m_0 \bar{R}_k + m_0 \bar{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad /3.40/$$

Складемо векторно доданки рівнянь, що входять відповідно у системи /3.39/ та /3.40/

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k + \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_0 \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n m_0 \bar{R}_k + \sum_{k=1}^n m_0 \bar{\Phi}_k &= 0. \end{aligned} \quad /3.41/$$

Позначимо головні вектори та головні моменти відносно точки O активних сил, реакцій в'язей та сил інерції відповідно через:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \quad \bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k, \quad \bar{\Phi} = \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k, \\ \bar{M}_0^F &= \sum_{k=1}^n m_0 \bar{F}_k, \quad \bar{M}_0^R = \sum_{k=1}^n m_0 \bar{R}_k, \quad \bar{M}_0^\Phi = \sum_{k=1}^n m_0 \bar{\Phi}_k. \end{aligned} \quad /3.42/$$

Тепер рівняння /3.41/ з врахуванням /3.42/ запишуться:

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0, \quad \bar{M}_0^F + \bar{M}_0^R + \bar{M}_0^\Phi = 0. \quad /3.43/$$

Рівняння /3.43/ і є методом кінетостатики /принцип Даламбера/ для дослідження руху невідільної матеріальної системи матеріальних точок: в кожний момент часу векторна сума головних векторів та головних моментів активних сил, реакцій в'язей та сил інерції рухомої невідільної матеріальної системи дорівнюють нулю.

Двом векторним рівнянням /3.43/ відповідають шість рівнянь в проєкціях на осі декартової системи координат:

$$\begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0, \\ F_y + R_y + \Phi_y &= 0, \\ F_z + R_z + \Phi_z &= 0, \\ M_x^F + M_x^R + M_x^\Phi &= 0, \\ M_y^F + M_y^R + M_y^\Phi &= 0, \end{aligned} \quad /3.44/$$

$$M_z^F + M_z^R + M_z^{\Phi} = 0. \quad \uparrow \quad /3.44/$$

3.2.4. Головний вектор та головний момент сил інерції.

При розв'язанні задач необхідно вміти знаходити величину, точку прикладення, напрямок головного вектора та головного моменту сил інерції.

Із означення головного вектора сил інерції отримаємо

$$\bar{\Phi} = \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = \sum_{k=1}^n -m_k \bar{a}_k,$$

але $\bar{a}_k = \frac{d\bar{v}_k}{dt}$, тоді

$$\bar{\Phi} = \sum_{k=1}^n -m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = - \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} (m_k \bar{v}_k). \quad /3.45/$$

Добуток маси точки на її швидкість називається кількістю руху точки

$$\bar{q}_k = m_k \bar{v}_k. \quad /3.46/$$

Тепер вираз /3.45/ з врахуванням /3.46/ набуває вигляду

$$\bar{\Phi} = - \sum_{k=1}^n \frac{d\bar{q}_k}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \bar{q}_k = - \frac{d\bar{Q}}{dt}, \quad /3.47/$$

де $\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k$ - головний вектор кількості руху матеріальної системи, який із /3.27/ з врахуванням /3.24/ можна записати:

$$\bar{Q} = M \bar{v}_c. \quad /3.48/$$

Із /3.47/ і /3.48/ випливає, що головний вектор сил інерції дорівнює добутку маси системи на прискорення центра мас і направлений в протилежну сторону прискорення центра мас.

$$\bar{\Phi} = - M \bar{a}_c. \quad /3.49/$$

Враховуючи /3.47/ та /3.49/, перше рівняння системи /3.43/ можна записати таким чином:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F} + \bar{R} \quad /3.50/$$

або

$$M \bar{a}_c = \bar{F} + \bar{R}. \quad /3.51/$$

Диференціальне рівняння /3.50/ носить назву теореми про зміну головного вектора кількості руху матеріальної системи, а /3.52/- теореми про рух центра мас.

Знайдемо тепер головний момент сил інерції.

$$\begin{aligned} \bar{M}_0^P &= \sum_{k=1}^n m_k \bar{\Phi}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times (-m_k \bar{a}_k) = \\ &= - \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \frac{d}{dt} (m_k \bar{v}_k). \end{aligned} \quad /3.52/$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) &= \frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \bar{v}_k + \bar{r}_k \times \frac{d}{dt} (m_k \bar{v}_k) = \\ &= \bar{v}_k \times \frac{d}{dt} (m_k \bar{v}_k), \end{aligned}$$

$$\bar{M}_0^P = - \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = - \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = - \frac{d\bar{K}_0}{dt}, \quad /3.53/$$

де $\bar{K}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k$ - головний момент кількості руху системи відносно центра O ; $\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k$ - момент кількості руху точки m_k /рис. 3.II/ відносно центра O .

Визначимо головний вектор та головний момент сил інерції при деяких рухах твердого тіла.

а/ Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі, що проходить через центр мас C .

Рух тіла, у якого є дві нерухомі точки, називається обертальним навколо осі Z , що проходить через ці точки /рис. 3.I2/.

Визначимо момент кількості руху тіла відносно осі Z .

$$K_z = \int \rho v dm = \omega \int \rho^2 dm \quad /3.54/$$

Тоді, враховуючи /3.30/, маємо

$$K_z = J_z \cdot \omega. \quad /3.55/$$

І головний момент сил інерції знайдемо із виразу

$$M_z^\Phi = -\frac{dK_z}{dt} = -J_z \cdot \varepsilon. \quad /3.56/$$

При розв'язуванні задач знак мінус у /3.55/ враховується протилежним напрямком величин ε та M_z^Φ /рис.3.12/. Тоді у розрахунках головний момент сил інерції береться із додатним знаком

$$M_z^\Phi = J_z \cdot \varepsilon. \quad /3.57/$$

Головний вектор сил інерції дорівнює нулю / $\bar{V}_c = 0, \bar{a}_c = 0$)

$$\bar{\Phi}_c = 0.$$

6/ Поступальний рух тіла.

Рух тіла, при якому будь-яка пряма, що, проведена в тілі, залишається паралельна сама собі, називається поступальним. При поступальному русі всі точки тіла рухаються по конгруентних траєкторіях з однаковими швидкостями та прискоренням. Щоб дослідити поступальний рух тіла, достатньо визначити характеристики однієї точки тіла, наприклад, центра мас C .

При поступальному русі тіла $\omega = \varepsilon = 0$ і тоді головний вектор /3.49/ та головний момент /3.53/ сил інерції з врахуванням /3.56/ запишуться

$$\bar{\Phi}_c = -M \bar{a}_c, \quad \bar{M}_c^\Phi = 0. \quad /3.58/$$

в/ Плоский рух твердого тіла.

Якщо тіло рухається таким чином, що всі його точки знаходяться на деяких постійних відстанях від нерухомої площини /площина ковзання/, то такий рух називається плоскопаралельним, або плоским рухом тіла.

Щоб дослідити плоский рух тіла, достатньо знати рух плоскої фігури /рис. 3.13/, отриманої від перетину тіла площиною, паралельною площині ковзання.

У плоскій фігурі /рис. 3.13/ за початок /полюс/ рухомої системи координат беремо центр мас тіла,

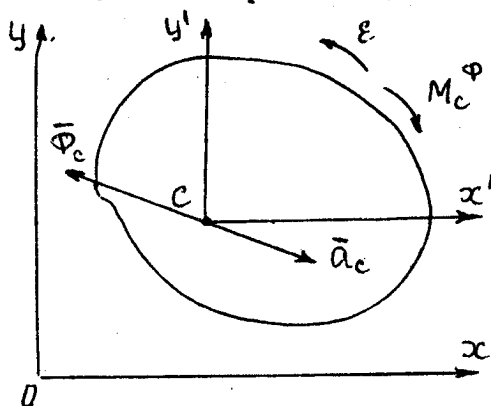


Рис. 3.13

Плоскопаралельний рух тіла можна розглядати, як суперпозицію двох рухів: поступального разом з полюсом та обертального навколо осі, що проходить через полюс перпендикулярного до площини ковзання. Тоді на підставі /3.56/ та /3.58/ запишемо головний вектор та головний момент сил інерції тіла при плоскому русі

$$\vec{\Phi}_c = -M\vec{a}_c, \quad M_c^\Phi = \gamma_c \cdot \epsilon.$$

4. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

4.1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № I

ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНОВАГИ ДВОХ ТІЛ

Мета роботи.

Поглиблення знань з теорії про врівноважену плоску систему сил.

Задачі роботи.

Визначення коефіцієнта тертя спокою та критичного положення рівноваги системи жорстких тіл.

Прилади та приладдя.

1. Експериментальна установка з двома вантажами, що знімаються.
2. Терези з ціною поділок не більше 10 н.
3. Ганчірка.

Опис установки.

На грані AB та BC прямокутної призми ABC /рис. 4.1./ розташовані вантажі 1 і 2, що з'єднані нерозтяжною ниткою, перекинutoю через блок B . До призми в точці C прив'язана нитка, за допомогою якої, використовуючи рукоятку 5, здійснюють обертання призми навколо нерухомої осі A . Кут повороту призми визначається транспортиром 7. Призма фіксується в заданому положенні стопорним гвинтом 6.

Експериментальна частина.

1. Визначення коефіцієнта тертя спокою між поверхнями вантажів 1 і 2 та призми /рис. 4.1./.

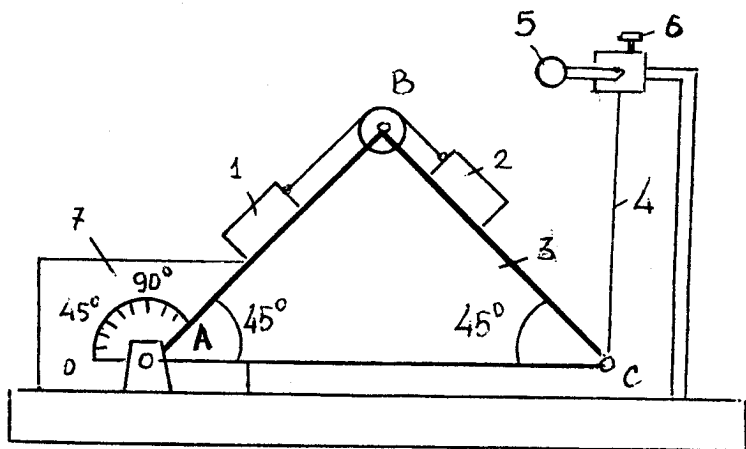


Рис. 4.1.

- 1 - вантаж; 2 - вантаж 2; 3 - призма; 4 - нитка;
5 - рукоятка; 6 - гвинт; 7 - транспортер.

I.1. Від'єднати вантаж 2 від нитки, що сполучає його з вантажем 1.

I.2. Протерти грані AB і BC призми 3 та поверхні вантажів 1 і 2 сухою ганчіркою.

I.3. Зменшуючи довжину нитки 4 за допомогою рукоятки 5, установити мінімальний кут нахилу грані BC призми до горизонту;

I.4. На грань BC помістити вантаж 2.

I.5. Обертаючи рукоятку 5, опустити призму до появи ознак руху вантажа 2.

I.6. Зафіксувати положення призми 3 за допомогою гвинта 6.

I.7. Транспортиром 7 визначити кут φ_1 нахилу грані BC до горизонту;

I.8. Всі дії виконати три рази.

I.9. Визначити вагу вантажу 2.

I.10. Одержані виміри занести в таблицю 4.1.

Таблиця 4.1.

| № спроби | ВАНТАЖ 1 | | ВАНТАЖ 2 | | d_e |
|----------|----------------|-------------|----------------|-------------|-------|
| | Вага $P_1 (H)$ | φ_1 | Вага $P_2 (H)$ | φ_2 | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |

I.11. Всі дії, що описані в пунктах I.3 - I.10, повторити з вантажем 1 / знайти і значення кута φ_2 /.

2. Визначення максимального кута d_e нахилу призми з вантажами, при якому вантажі знаходяться в рівновазі.

2.1. Встановити призму так, щоб грань AC була горизонтальна.

2.2. Вантажі 1 і 2 з'єднати ниткою та установити на грані AB і BC /рис. 4.1/.

2.3. Поволі повертаючи рукоятку 5, знайти положення призми, при якому вантажі 1 і 2 починають рухатись.

2.4. Гвинтом 6 зафіксувати положення призми 3 і визначити транспортиром 7 кут нахилу d грані AB до горизонту.

2.5. Випробування 2.1 - 2.4 виконати три рази,

2.6. Дані вимірювань занести в таблицю 4.1.

ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

1. Визначення коефіцієнтів тертя спокою між вантажем 1 і призмою:

$$f_1 = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \operatorname{tg} \varphi_{1n},$$

/4.1/

між вантажем 2 і призмою:

$$f_2 = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \operatorname{tg} \varphi_{2n}.$$

/4.2/

2. Визначення максимального кута нахилу грані АС до горизонту при критичній рівновазі вантажів 1 і 2 на призмі

$$\alpha_e = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \alpha_n.$$

/4.3/

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

Розглянемо критичну рівновагу призми АВС з вантажами, рівновагу, при якій невелике збільшення кута нахилу грані АВ до горизонту приводить до початку руху вантажів. На рис. 4.2 і 4.3 показані активні сили реакції в'язів, що діють на вантажі 1 і 2.

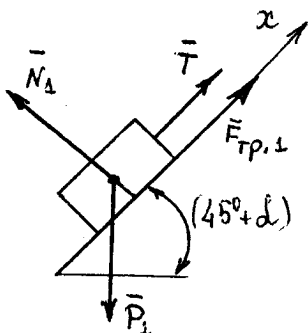


Рис. 4.2.

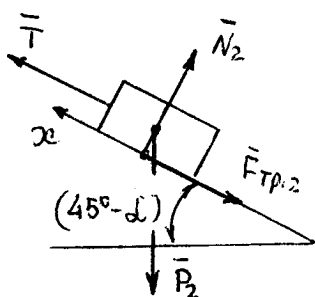


Рис. 4.3.

Записуємо рівняння рівноваги сил, що діють на кожний вантаж окремо, та значення сили тертя, виходячи з закону Амонтона-Кулона.

На вантаж 1.

$$\sum F_x = 0; F_{\text{тр.1}} + T - P_1 \sin(\alpha + 45^\circ) = 0;$$

$$\sum F_y = 0; N_1 - P_1 \cos(\alpha + 45^\circ) = 0,$$

де сила тертя

$$F_{\text{тр.1}} = f_1 \cdot N_1.$$

На вантаж 2.

$$\sum F_x = 0, T - F_{\text{тр.2}} - P_2 \sin(45^\circ - \alpha) = 0,$$

$$\sum F_y = 0, N_2 - P_2 \cos(45^\circ - \alpha) = 0,$$

де сила тертя

$$F_{\text{тр.2}} = f_2 \cdot N_2.$$

/4.4/

Розв'язуючи систему рівнянь/4.4/, знайдемо теоретичне значення кута α

$$\alpha = \arctg \frac{P_2(1+f_2) - P_1(1-f_1)}{P_2(1-f_2) + P_1(1+f_1)}. \quad /4.5/$$

Обчислення відносної похибки експерименту:

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{\alpha_{\text{е}} - \alpha}{\alpha}.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яким чином можна збільшити точність проведення експериментальних дослідів?
2. Які фактори впливають на значення коефіцієнта тертя спокою?
3. Довести, що коефіцієнт тертя дорівнює тангенсу максимального кута нахилу поверхні при рівновазі

$$f = \operatorname{tg} \varphi.$$

4. За яких умов справедливий вираз $F_{\text{тр}} = fN$, де $F_{\text{тр}}$ - значення сили тертя, N - сила нормального тиску, f - коефіцієнт тертя.

5. Із системи рівнянь /4.4/ одержати вираз /4.5/.
6. Записати умови рівноваги для довільної плоскої системи сил.
7. Записати умови рівноваги для плоскої системи сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

4.2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

ОБЧИСЛЕННЯ ОСЬОВОГО МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ ТІЛА

Мета – засвоїти методику експериментального визначення осьового моменту інерції тіла за допомогою математичного маятника.

Опис установки.

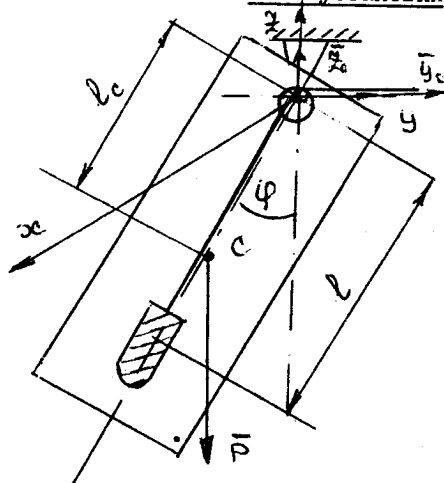


Рис. 4.4.

Установка складається із горизонтальної призми, на яку підвішена металева пластинка. Через призму перекинута нитка, на одному кінці якої висить невеликий тягар, а другий кінець рухомий.

Для виконання роботи необхідні терези та лінійка.

Теоретичні відомості.

Потрібно визначити осьовий момент інерції пластинки відносно осі X /рис.4.4/.

Розглянемо коливання пластинки /фізичного маятника/ навколо горизонтальної осі X і одночасно

но коливання математичного маятника навколо тієї ж осі.

Запишемо диференціальні рівняння руху фізичного маятника:

$$M_x \ddot{\varphi} = -P \cdot l_c \sin \varphi = -mg l_c \sin \varphi,$$

де m – маса пластинки;

M_x – момент інерції фізичного маятника відносно осі підвісу;

l_c – відстань центра мас від осі O .

Якщо кут достатньо малий, то $\sin\varphi \approx \varphi$ і тоді

$$\ddot{\varphi} + \frac{mglc}{J_x} \varphi = 0.$$

Отримали диференціальне рівняння вільних коливань пластинки, частота яких у даному випадку

$$k_{\varphi} = \sqrt{\frac{mglc}{J_x}},$$

а період

$$T_{\varphi} = 2\pi \cdot \sqrt{J_x / (mglc)}.$$

Довжину ℓ математичного маятника з таким же періодом коливань, що і даний фізичний, називають зведеною довжиною фізичного маятника. Щоб визначити довжину ℓ , прирівнюємо період коливань математичного маятника

$$T_M = 2\pi \sqrt{\ell/g}$$

до періоду T_{φ} коливань фізичного маятника. Одержимо

$$\ell = J_x / m\ell c,$$

звідки

$$J_x = m\ell \cdot \ell c.$$

Порядок виконання роботи

1. Підвісити пластинку на горизонтальну призму /тонкий пружний дріт, рис. 4.4/.
2. Поверх призми перекинути тонку нитку з тягарем.
3. Відхилити пластинку і тягар з положення рівноваги так, щоб вони вільно коливались у паралельних площинах.
4. Змінюючи довжину нитки між призмою і тягарем, добитися того, щоб період коливань тягара дорівнював періоду коливань пластинки.
5. Зміряти довжину нитки між призмою і тягарем ℓ .
6. Визначити відстань центра ваги пластинки від осі підвісу ℓ_c .
7. Визначити момент інерції J_x пластинки.

8. Для визначення осьового моменту інерції пластинки J_c використати теорему про момент інерції тіла відносно осі, яка паралельна центральній

$$J_x = J_c + m\ell_c^2.$$

9. Результати занести в таблицю:

| № експерименту! | ρ | ! | ρ_c | ! | ρ | ! | γ_x | ! | ρ_c |
|-----------------|--------|---|----------|---|--------|---|------------|---|----------|
| 1 | ! | ! | | ! | | ! | | ! | |
| 2 | ! | ! | | ! | | ! | | ! | |
| 3 | ! | ! | | ! | | ! | | ! | |

10. Пункти 3-8 повторити при інших амплітудах коливань фізичного маятника і зробити висновки про визначення моменту інерції пластинки відносно осі підвісу.

4.3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ.

Ціль роботи: освоїти методику визначення прискорення сили тяжіння за допомогою вантажу, який виконує вертикальні коливання; набути навиків роботи з вимірвальними приладами.

Опис установки

Установка складається із пружини, один кінець якої закріплений, і вантажу, який може бути підвішений до вільного кінця пружини. Для виконання роботи необхідні два вантажі, секундомір, лінійка.

Теоретичні відомості.

У роботі розглядається теорія вільних гармонічних коливань. Якщо до пружини, закріпленої одним кінцем у точці А, підвісити вантаж, він буде здійснювати вертикальні коливання навколо положення статичної рівноваги /рис. 4.5/.

Нехай: l_0 - довжина нерозтягнутої пружини;

$\lambda_{ст}$ - статичне видовження пружини;

\bar{F} - сила пружності пружини;

\bar{P} - сила тяжіння;

C - жорсткість пружини.

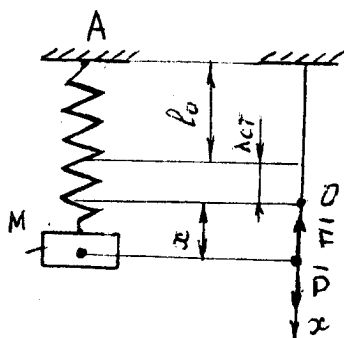


Рис. 4.5

Віднесем рух вантажу до осі, проведеної вертикально вниз із положення рівноваги вантажу. Диференціальне рівняння руху набуде вигляду:

$$m\ddot{x} = P - F$$

Оскільки $F = c(\lambda_{ст} + x)$

$$\text{і } P = c\lambda_{ст}, \text{ то } m\ddot{x} = -cx$$

$$\text{або } \ddot{x} + k^2x = 0, \text{ де } k^2 = c/m;$$

k - кругова частота вільних коли-

вань без врахування опору.

В отриманому диференціальному рівнянні вільних гармонічних коливань період коливань визначається виразом:

$$T = 2\pi/k.$$

Оскільки $k^2 = c/m = cg/\rho_0$ і $P = c\lambda_{ст}$, то маємо:

$$T = 2\pi \sqrt{\lambda_{ст}/g}.$$

Якщо по черзі підвішувати два вантажі різної ваги, то

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\lambda_{1ст}/g_1},$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\lambda_{2ст}/g_2}.$$

Звідки отримаємо

$$g = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) = 2\pi^2 \left(\frac{\lambda_{1ст}}{T_1^2} + \frac{\lambda_{2ст}}{T_2^2} \right). \quad /4.6/$$

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Підвісити вантаж 1 і виміряти величину статичного видовження - $\lambda_{1ст}$.

2. Виміряти за допомогою секундоміра час шести коливань вантажу і визначити середній період коливань T_1 .

3. Виконати п. 1, 2 для вантажу 2.

4. За формулою /4.6/ визначити величину g

5. Результати занести в таблицю:

| | | | | |
|--------------------|----------|--------------------|----------|----------|
| $\lambda_{1ст, м}$ | $T_1, с$ | $\lambda_{2ст, м}$ | $T_2, с$ | $q, м/с$ |
|--------------------|----------|--------------------|----------|----------|

ЗАВДАННЯ І ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Виведіть диференціальне рівняння вільних прямолінійних коливань точки при відсутності опору.
2. За якою формулою визначається період вільних коливань ?
3. Що називається статичним видовженням пружини ?
4. Що таке сила тяжіння ?

5. РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 1

"РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ"

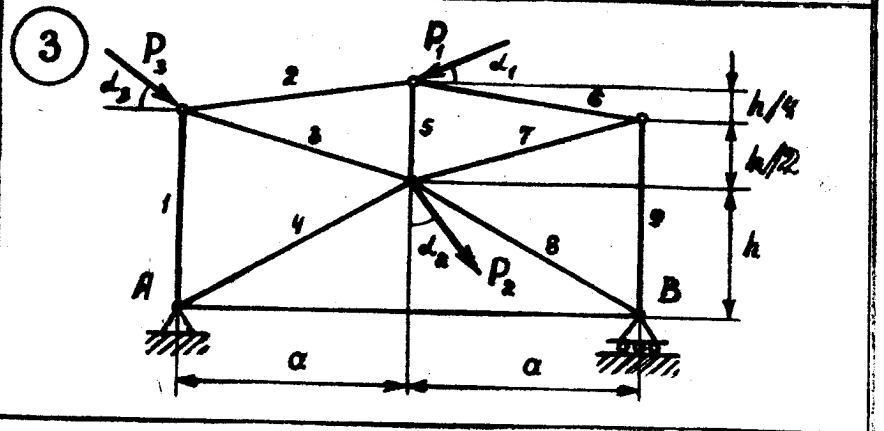
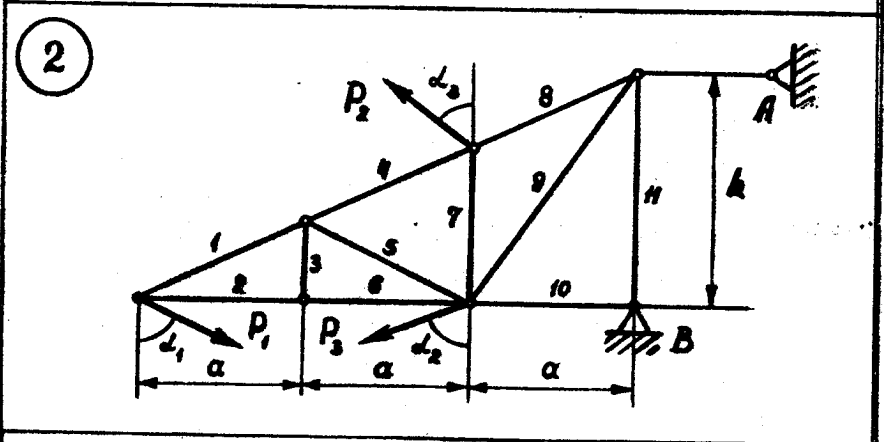
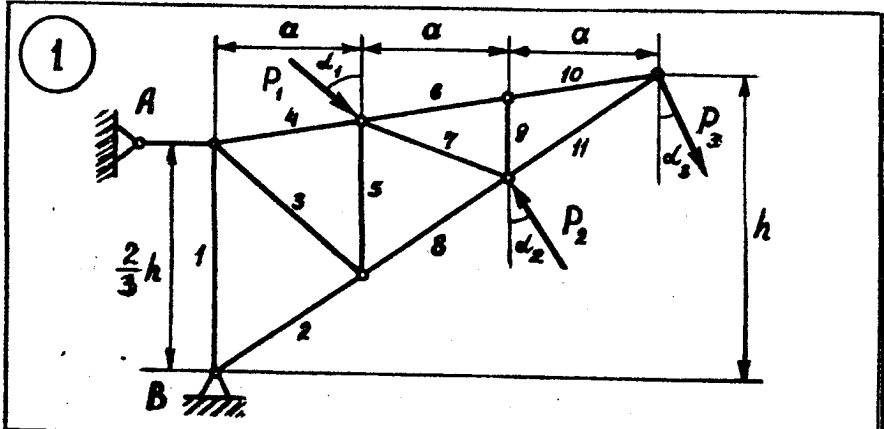
Плоскі ферми, що зображені на схемах (1) (2) (3) ... , (30), утримуються в рівновазі опорами А та В ; до вузлів ферм прикладені сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, напрям яких вказується кутами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Геометричні розміри ферм визначаються величинами a і h .

Значення активних сил P_1, P_2, P_3 , кутів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ та розміри a, h приведені в таблиці 5.1 відповідно до отриманого студентами варіанта. Кути, позначені "*", взяті рівними 30° .

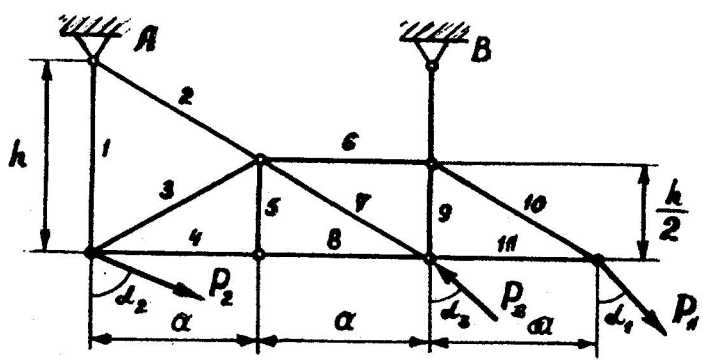
Необхідно визначити зусилля в стержнях ферми графічним методом-побудовою діаграми Максвелла-Кремони.

Таблиця 5.1

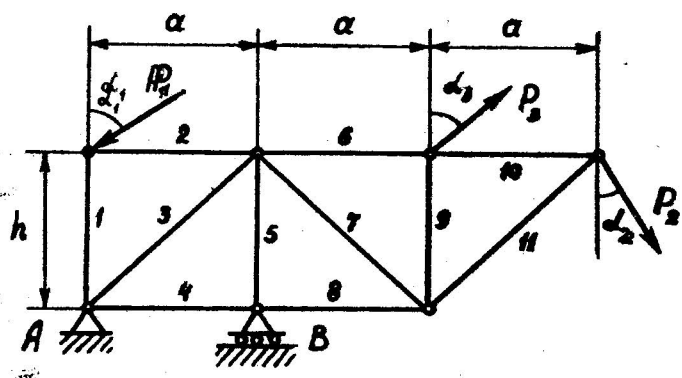
| Варіант | Сила, кН | | | Кут, ...° | | | Розміри, М | |
|---------|----------|-------|-------|-----------|----|----|------------|---|
| | P_1 | P_2 | P_3 | | | | | |
| 1 | 2 | 5 | 7 | * | 30 | 45 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 3 | 2 | 45 | * | 60 | 3 | 4 |
| 3 | 6 | 4 | 3 | 60 | 45 | * | 4 | 3 |
| 4 | 5 | 2 | 4 | * | 60 | 30 | 3 | 3 |
| 5 | 3 | 7 | 2 | 30 | * | 90 | 5 | 3 |
| 6 | 7 | 6 | 3 | 45 | 60 | * | 4 | 6 |
| 7 | 4 | 3 | 5 | * | 90 | 30 | 5 | 4 |
| 8 | 2 | 4 | 6 | 60 | * | 30 | 4 | 3 |
| 9 | 3 | 5 | 2 | 45 | 30 | | 6 | 5 |
| 10 | 6 | 2 | 4 | * | 45 | 60 | 3 | 2 |



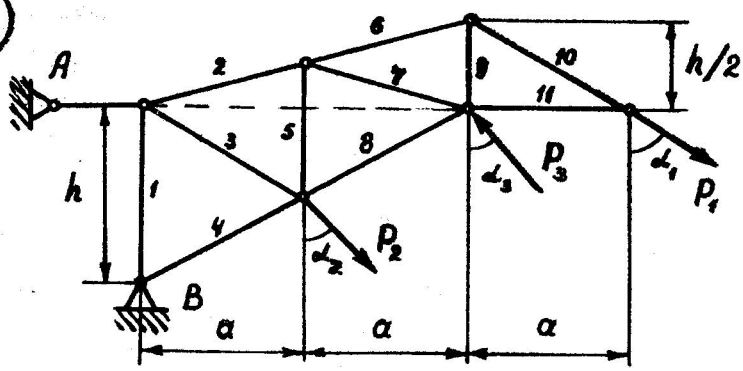
4



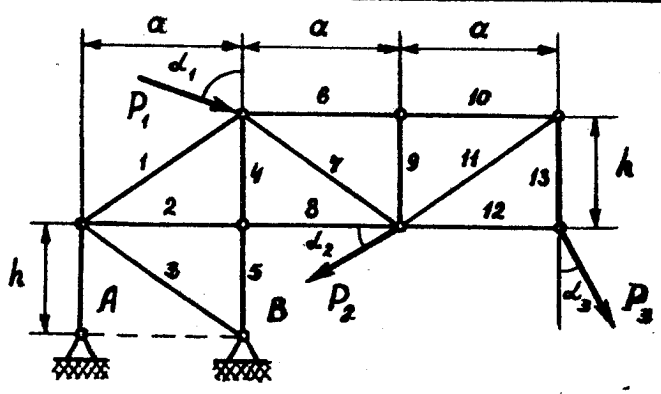
5



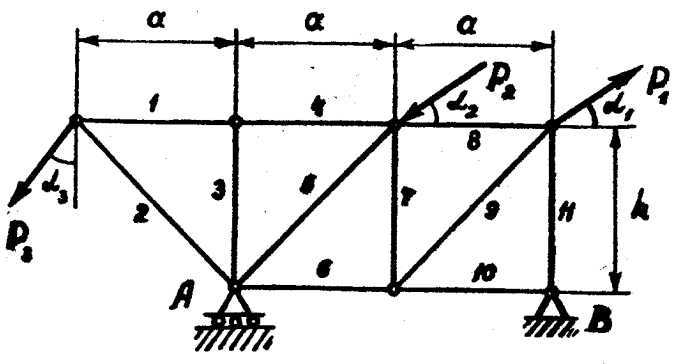
6



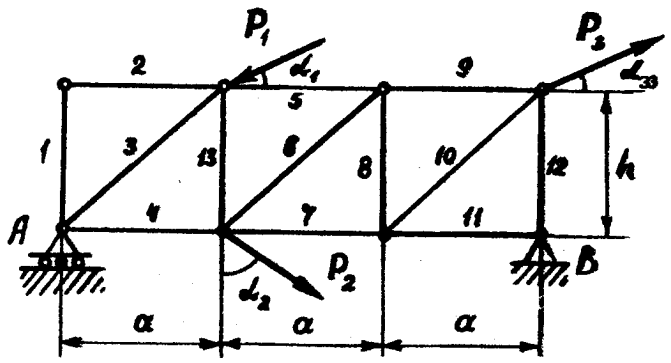
7



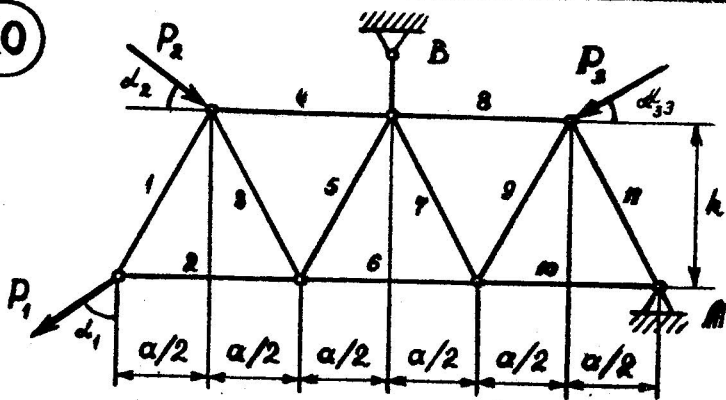
8



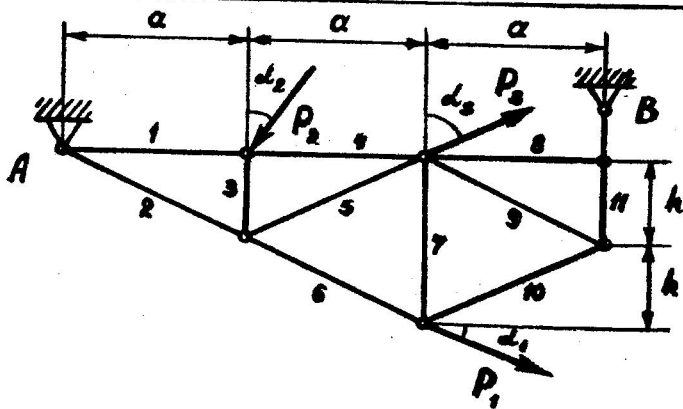
9



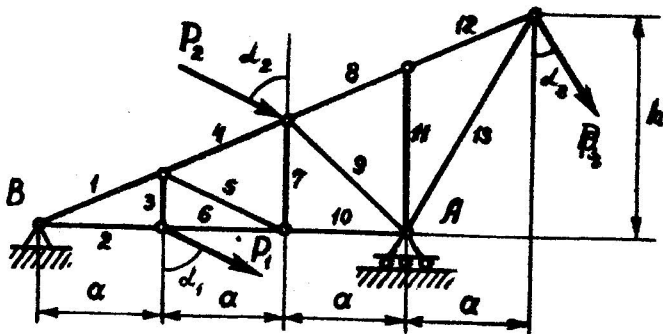
10

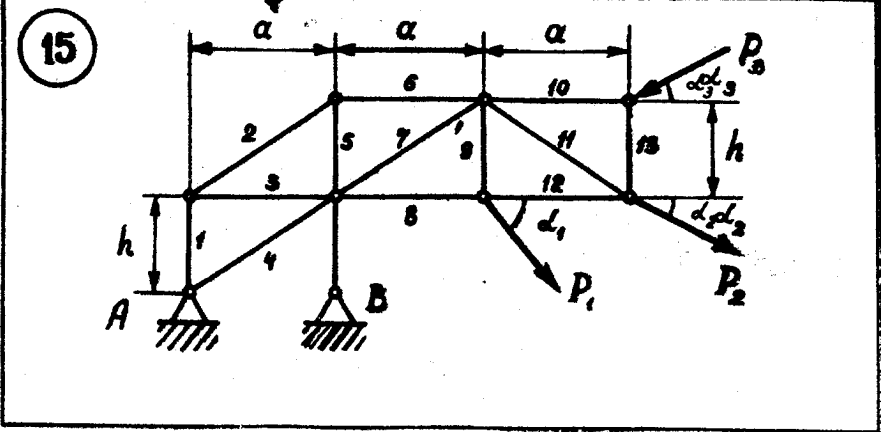
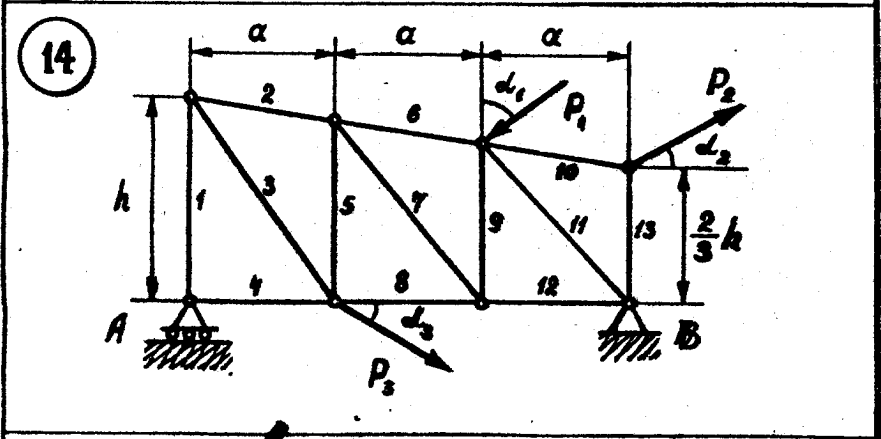
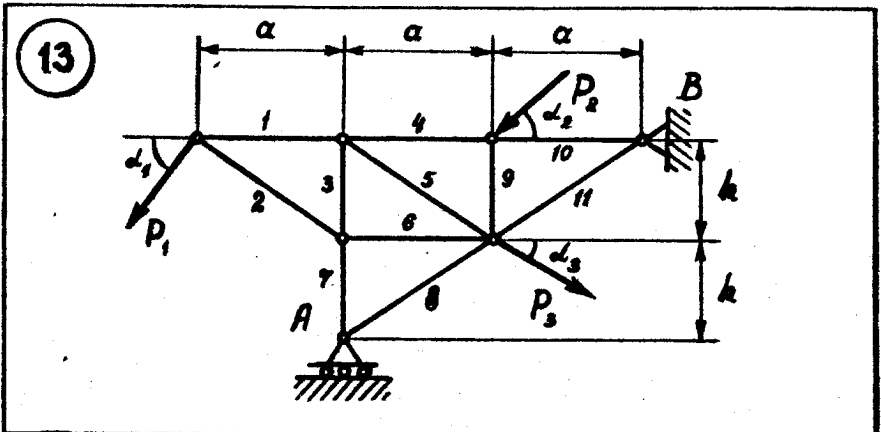


11

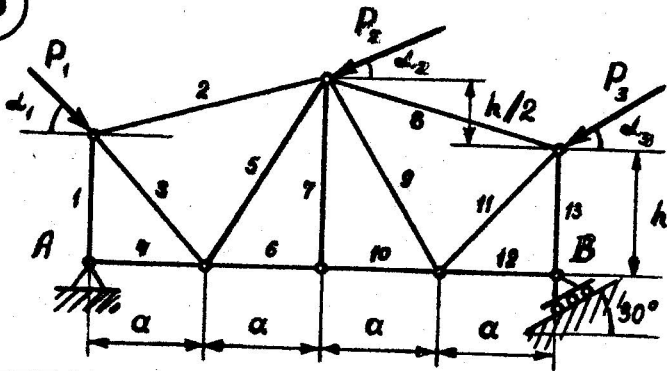


12

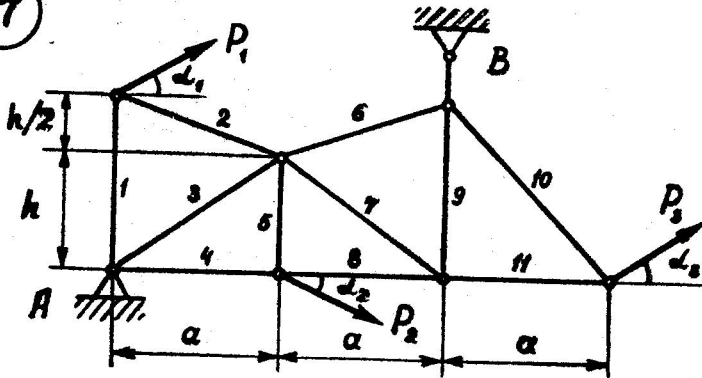




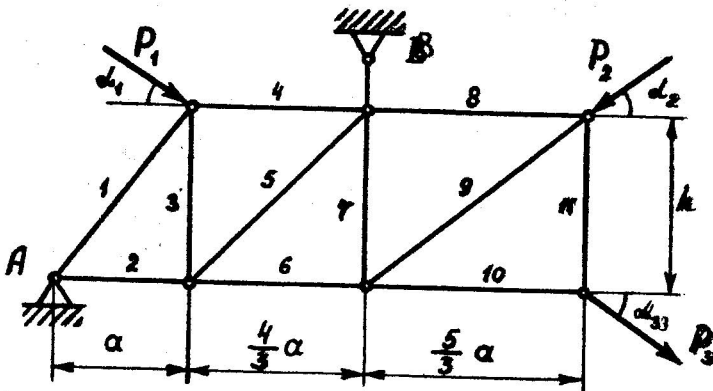
16



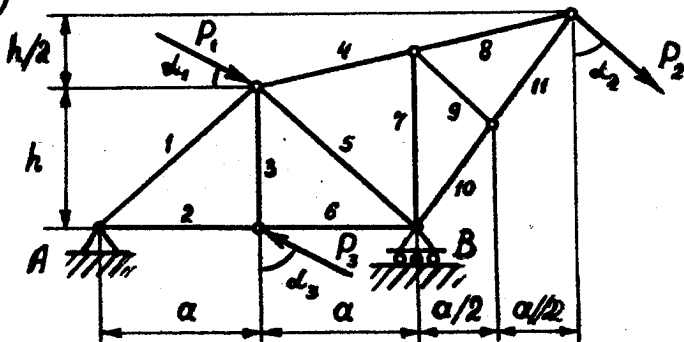
17



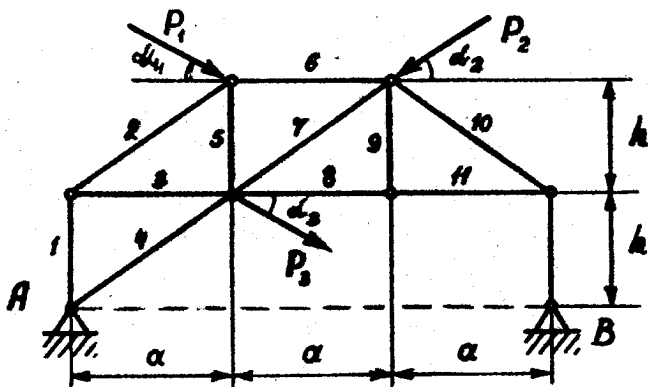
18



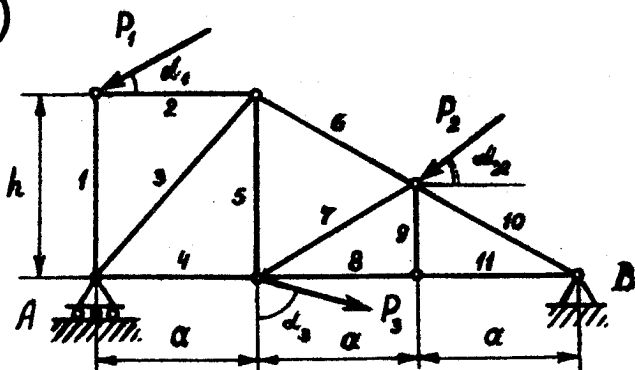
19



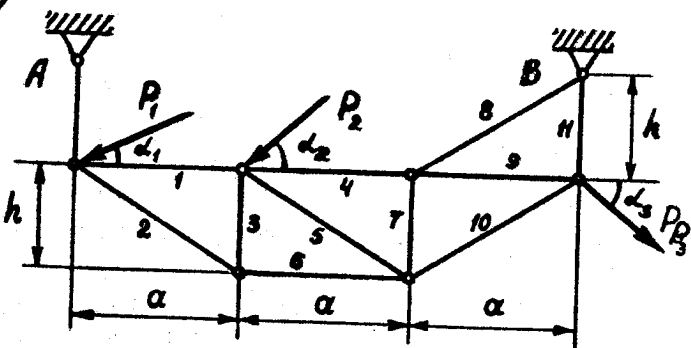
20



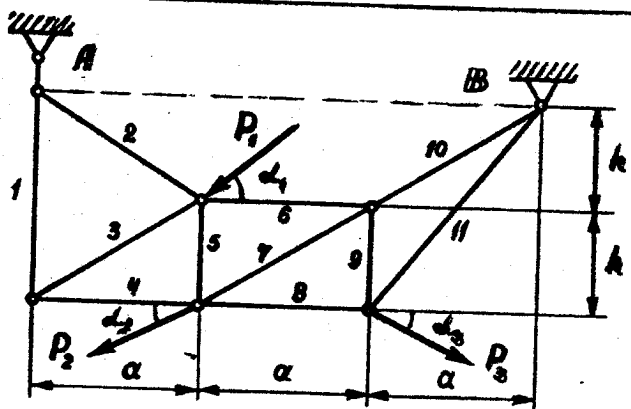
21



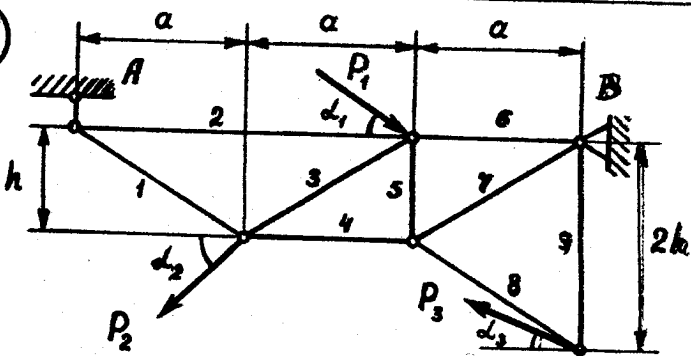
22



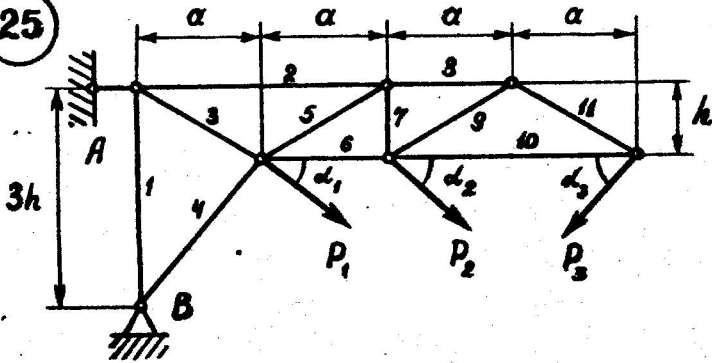
23



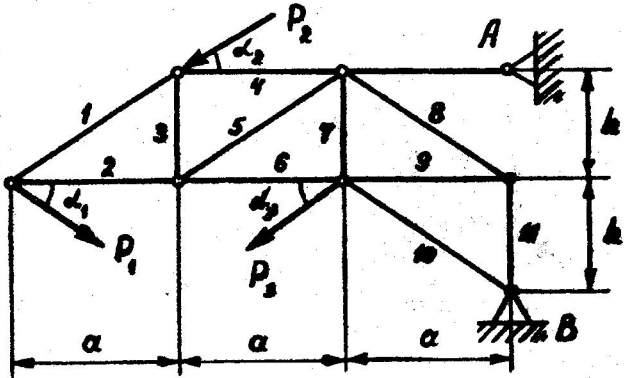
24



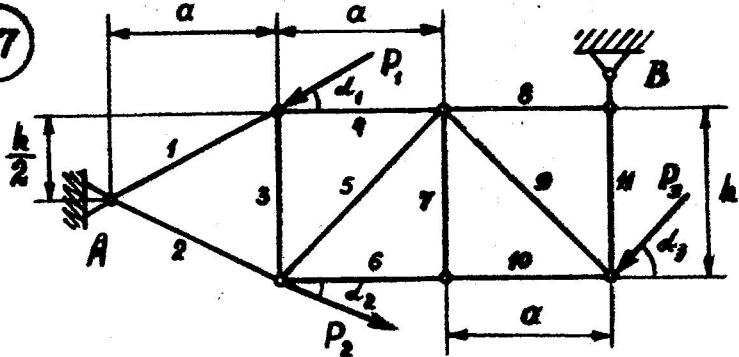
25



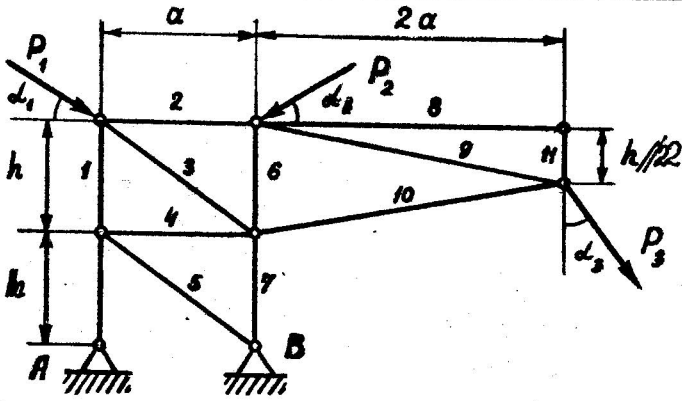
26



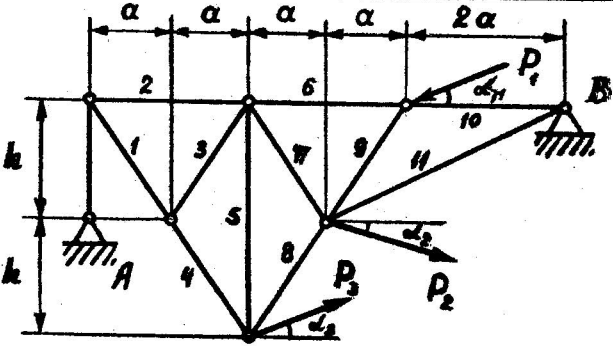
27



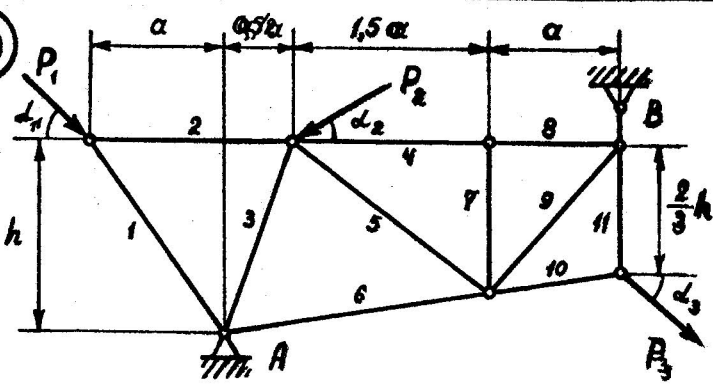
28



29



30



5.1. Зразок розрахунку та дослідження плоскої ферми.

Умова задачі. Дана плоска ферма /рис. 5.1./, опорні пристосування якої - нерухомий плоский шарнір в точці A і шарнірно-закріплений стержень BE . Ферма перебуває в рівновазі і на неї діють зовнішні сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, причому сила \vec{P}_3 - під кутом α до горизонталі. Геометричні розміри ферми визначаються параметрами a , b і h .

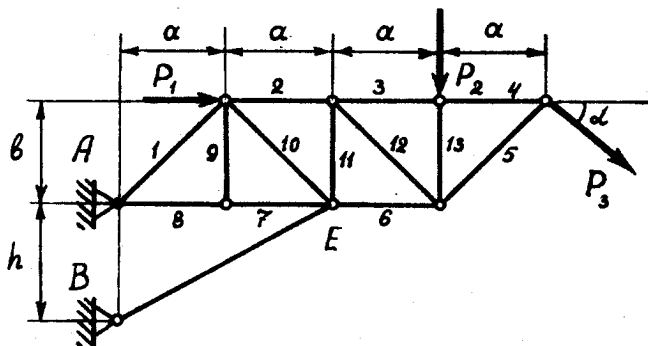


Рис. 5.1.

Прийнявши, що $P_1 = 3 \text{ кН}$, $P_2 = 5 \text{ кН}$, $P_3 = 6 \text{ кН}$, $a = 3 \text{ м}$, $b = 3 \text{ м}$, $h = 6 \text{ м}$, а кут $\alpha = 30^\circ$, визначити:

- опорні реакції ферми аналітичним методом;
- зусилля в стержнях побудовою діаграми Максвелла-Кремони.

5.1.1. Визначення опорних реакцій ферми аналітичним методом.

на ферму /рис. 5.2./ діють активні сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, і на неї накладені в'язі: ідеальний стержень BE та нерухомий шарнір A . На підставі аксіоми звільнення від в'язей, дію в'язей на ферму замінюємо їх реакціями.

У точці E реакція \vec{R}_B направлена по стержню BE , а в нерухомому плоскому шарнірові A реакцію розкладаємо на складові \vec{X}_A і \vec{Y}_A . Із рис. 5.2. знаходимо відповідні тригонометричні функції кутів

$$\begin{aligned} \sin \beta &= 2a / \sqrt{4a^2 + h^2}, & \sin \gamma &= b / \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta}, & \cos \gamma &= \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}. \end{aligned} \quad | \text{ /5.1./}$$

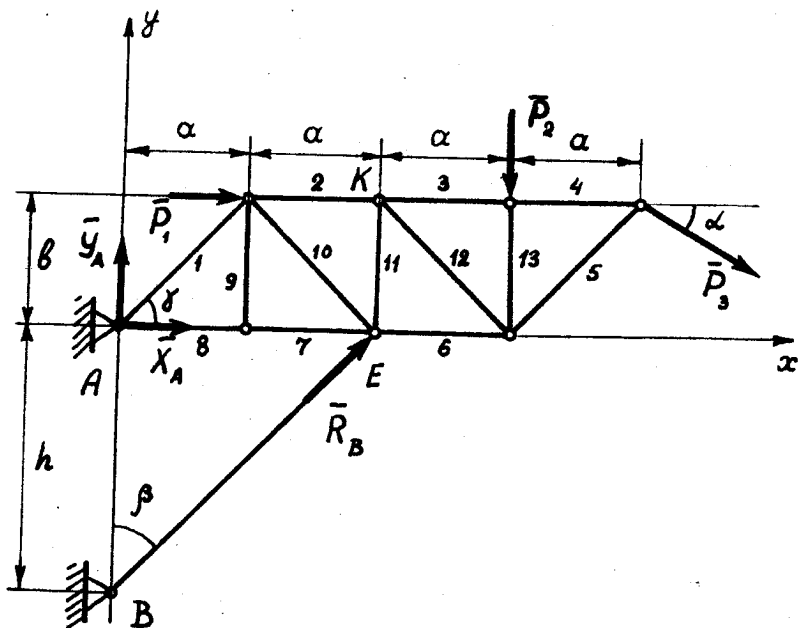


Рис. 5.2.

Запишемо аксіому рівноваги для плоскої врівноваженої системи сил $\{ \bar{R}_B, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3 \} \approx 0$ / рис.5.2/.

$$\sum F_x = 0, X_A + R_B \sin \beta + P_1 + P_3 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0, Y_A + R_B \cos \beta - P_2 - P_3 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum m_A \bar{F} = 0, -P_1 b + R_B 2a \cos \beta - 4P_3 a \sin \alpha - P_3 b \cos \alpha - 3P_2 a = 0 \quad /5.2/$$

Розв'язуючи систему рівнянь /5.2/ отримуємо:

$$R_B = [P_1 b + 3P_2 a + P_3 (4a \sin \alpha + b \cos \alpha)] / 2a \cos \beta,$$

$$Y_A = P_2 + P_3 \sin \alpha - R_B \cos \beta,$$

$$X_A = -P_1 - P_3 \cos \alpha - R_B \sin \beta.$$

/5.3/

Підставляючи в розв'язки /5.3/ дані умови задачі, отримуємо опорні реакції:

$$X_A = -25,79 \text{ кН}, Y_A = -9,6 \text{ кН}, R_B = 24,89 \text{ кН}.$$

5.1.2. Знаходження зусиль в стержнях ферми графічним методом /побудова діаграми Максвелла - Кремони/

Перед побудовою діаграми Максвелла- Кремони необхідно провести таку підготовку:

а/ виконуємо рисунок ферми відповідно до її геометричних розмірів /рис.5.3/ ;

б/ показуємо вектори заданих сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ і знайдених реакцій $R_B, \bar{R}_A (\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A)$;

в/ позначаємо області між зовнішніми силами : Q , B , V , D , F ;

г/ позначаємо внутрішні області: K , L , M , N , O , T ;

д/ позначаємо вузли римськими цифрами: I - VIII ;

е/ вибираємо обхід зовнішніх сил і вузлів /на рис. 5.3. показано його напрям за годинниковою стрілкою/;

є/ вказуємо масштаб сил / в даному випадку в 1 см. - 2кН/.

Побудова діаграми Максвелла - Кремони .

У вибраному масштабі будуємо силовий багатокутник зовнішніх сил, що прикладені до ферми, причому сили відкладаються у послідовності, що зустрічаються при обході ферми у вибраному напрямку. Сили позначаються малими буквами ділянок, на границі яких лежить сила: перша буква у напрямку обходу ферми - початок сили, друга - кінець. Таким чином одержуємо замкнутий багатокутник зовнішніх сил q, b, v, d, f, q /рис. 5.4/.

Визначення зусиль в стержнях ферми графічним методом /діаграма Максвелла - Кремони/ починаємо з вузла I або У /рис. 5.3./, де сходяться не більше двох стержнів, зусилля в яких невідомі.

Розглянемо рівновагу вузла I.

При обході вузла I зустрічаються області Q , K , F і Q. На діаграмі побудований відрізок $\bar{f}q$. Через точку q проводимо пряму, паралельну стержню I, а через точку f - пряму, паралельну стержню B. На перетині цих двох прямих одержуємо точку K. Многокутник $qK\bar{f}q$ - багатокутник сил, прикладених до вузла I. Стержню I відповідає зусилля qK , а стержню B - зусилля $K\bar{f}$.

При обході вузла II зустрічаються області F , K , L і

F. На діаграмі знаходимо відрізок $\bar{f}K$, через точку K проводимо пряму, паралельну стержню G, а через точку f - пряму,

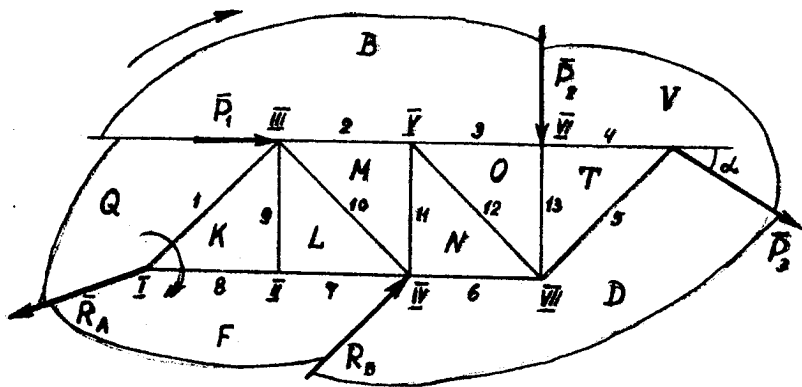


Рис. 5.3.

Масштаб сил:
 в 1 см — 2 кН
 0 1 2 3 кН

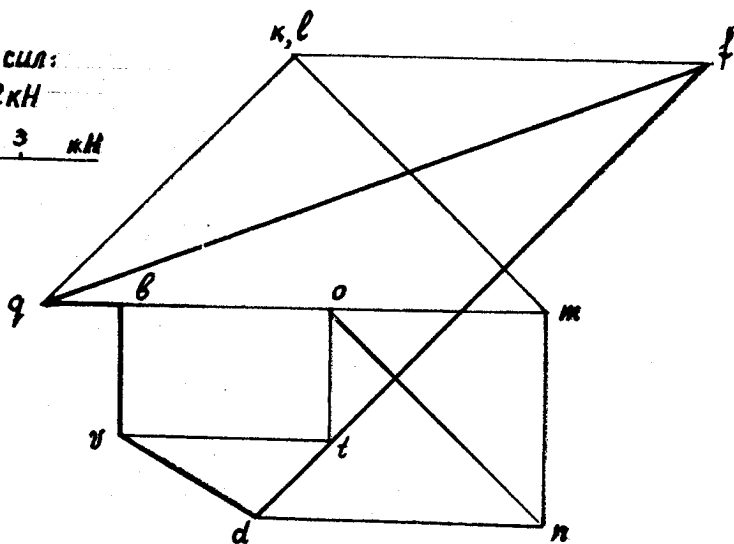


Рис. 5.4.

паралельну стержню 7. Їх точка перетину ℓ відповідає області L та збігається з точкою K . Многокутник сил для вузла II - фігура $\{k\ell t\}$, що показана на діаграмі відрізком $k-t$. Оскільки точки k і ℓ збігаються, то зусилля $k\ell = 0$, тоді стержень 9 - нульовий.

Переходимо до вузла III. Сили, що діють на цей вузол, обмежують області L, K, Q, B, M і L . Після побудови зусиль вузлів I та II зусилля ek, kq , та qb відомі. Тоді через точку b проводимо пряму, паралельну стержню 2, а через точку ℓ - пряму, паралельну стержню 10. Їх перетин дає точку m , що відповідає області M . Многокутник сил для вузла III - $\{kq b m \ell\}$.

Аналогічними побудовами знаходимо многокутники сил для вузлів, що залишились, в такій послідовності: IV, V, VI. Це многокутники: для вузла IV - $d\ell m n d$, для вузла V - $d t v d$, для вузла VI - $b v t o b$. Залишились два останні вузли V та VI.

Для одержання многокутників сил у вузлах V та VI достатньо з'єднати точки O і n /рис.5.4/. Якщо відрізок on буде паралельним стержню 12, то діаграма побудована правильно. Одержуємо силові многокутники: $n m b o n$ - для вузла V і $o t d n$ - для вузла VI. Побудова діаграми закінчена.

Отримана діаграма Максвелла - Кремони /рис. 5.4/ дає змогу відшукати значення зусилля в будь-якому стержні ферми, а також його знак. Модуль вимірюється довжиною відрізка і переводом її через масштаб в одиниці сили, а знак - напрямком відрізків на діаграмі.

Приклад. Розглянемо стержень під номером 11 /див. рис.5.3/. Зусилля цього стержня при обході вузла IV позначається $m n$. Знаходимо на діаграмі / див. рис. 5.4./ напрямлений відрізок $\overline{m n}$, уявно переносимо напрям $m n$ з рис. 5.4 на рис. 5.3. Вектор $m n$ напрямлений до вузла IV. Якщо зусилля спрямоване до вузла, то стержень під його дією стискується. Тоді стержень II стиснутий і знак зусилля S_{11} від'ємний. Якщо зусилля для будь-якого іншого стержня спрямоване від вузла, то такий стержень розтягнений і його зусилля додатне. Із діаграми на рис. 5.4 маємо, кН:

$$\begin{array}{lll}
 S_1 = qk = 13,4; & S_2 = bm = 16,1; & S_3 = ob = 8; \\
 S_4 = vt = 8; & S_5 = dt = -4; & S_6 = dn = 10,8; \\
 S_7 = fl = 16; & S_8 = kl = 16; & S_9 = kl = 0; \\
 S_{10} = ml = -13,6; & S_{11} = nm = -7,8; & S_{12} = on = 11,2; \\
 S_{13} = to = -5; & &
 \end{array}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В., Дунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. - В 2-х томах. - М.: Наука, 1986. - 736 с.
2. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. - В 2-х томах. - М.: Наука, 1977. - 1024 с.
3. Кінематика. Конспект лекцій з курсу теоретичної механіки для студентів бакалаврату спеціальностей Б-33, Б-34, Б-35, Б-57 триступеневої підготовки спеціалістів з вищою інженерною освітою. / Уклад. В.І. Степанчук, В.О. Федотов. - Вінниця, ВПІ, 1993. - 95 с./
4. Конспект лекцій з курсу теоретичної механіки. Статика. / Уклад. В.О. Федотов, В.І. Степанчук. - Вінниця, ВПІ, 1991. - 64 с./
5. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи з розрахунку плоскої ферми за допомогою ЕОМ. / Уклад. В.О. Приятельчук. - Вінниця, ВПІ, 1991. - 32 с./
6. Павловский М.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. - К.: Вища шк. Головное изд-во, 1985. - 328 с.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высш. шк., 1986. - 416 с.
8. Технічна механіка. Кн.І. Теоретична механіка: Підручник / Д.В. Чернілевський, Я.Т. Кіницький, В.М. Колосов та ін. За ред. Д.В. Чернілевського. - К.: НМК ВО, 1992. - 384 с.

ПИТАННЯ ПО КУРСУ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

1. Основні поняття механіки. Історичний шлях розвитку механіки.
2. Сила. Основні означення статички.
3. Момент сили відносно центра.
4. Момент сили відносно осі.
5. Головний вектор та головний момент системи сил.
6. Аксіома рівноваги.
7. Аксіоми статички.
8. В'язі. Класифікація в'язей.
9. Поняття про пару сил.
10. Плоскі ферми: основні поняття.
11. Плоскі ферми: метод вирізування вузлів.
12. Плоскі ферми: метод Ріттера.
13. Плоскі ферми: діаграма Максвелла - Кремони.
14. Центр паралельних сил.
15. Способи визначення руху точки. Швидкість точки.
16. Способи визначення руху точки. Прискорення точки.
17. Диференціальне рівняння руху для вільної та невільної точки.
18. Момент інерції тіла відносно осі.
19. Момент інерції стержня відносно осі.
20. Момент інерції круглої пластини відносно осі.
21. Метод кінетостатички для точки.
22. Метод кінетостатички для системи.
23. Головний вектор сил інерції.
24. Головний момент сил інерції.
25. Головний момент кількості руху тіла відносно осі обертання.
26. Головний вектор та головний момент сил інерції при поступальному, обертальному та плоскому русі тіла.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчальне видання

Володимир Олексійович Приятельчук, Віктор Іванович Степанчук,
Валерій Олександрович Федотов

ТЕОРІЯ СПОРУД
Модуль I
ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник
Вінниця ВДТУ 1997

Редактор В.С.Судома

Тир. 50 прим.

ВДТУ , 286021 , м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95