СМБ

Ю. В. ПРОХОРОВ
Ю. А. РОЗАНОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СПРАВОЧНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

Ю. В. ПРОХОРОВ, Ю. А. РОЗАНОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ
ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.17
П84
УДК 519.2(083)

Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. **Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.** Справочник.— 3-е изд., перераб.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 400 с. (Справ. мат. б-ка.)

Содержит обзор понятий, методов и направлений современной теории вероятностей. Представлены все основные разделы. Изложение ведется на высоком уровне строгости. Предназначен для использования математиками смежных (в том числе прикладных) специальностей. Для первоначального знакомства с понятиями теории вероятностей не рекомендуется.

Для научных работников в области математики, в том числе прикладной математики, а также для студентов старших курсов и аспирантов.

2-е изд.— 1973 г.

Табл. 2. Ил. 29. Библиогр. 149 назв.

П $\dfrac{1702070000-143}{053(02)\text{-}87}$ 50-87

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание лишь незначительно отличается от второго. Авторы надеются, что вместе с вышедшими в последние годы другими справочными изданиями по теории вероятностей и математической статистике книга будет полезна широкому кругу читателей.

В новом издании изменена система библиографических ссылок (теперь в конце книги помещен общий список литературы), а также система ссылок внутри книги на формулы и параграфы: она стала более простой и не требует каких-либо пояснений.

Авторы сердечно благодарны К. А. Боровкову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд замечаний, способствующих ее улучшению.

2 октября 1986 г. *Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга по своему замыслу предназначена служить справочником, по которому можно было бы ориентироваться в том громадном материале, который к настоящему времени накоплен теорией вероятностей. Основное содержание книги касается таких разделов, как основания теории вероятностей, предельные теоремы и случайные процессы.

Пользуемся случаем еще раз выразить благодарность Л. Н. Большеву.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Опыт с равновероятными исходами

1. Опыт с конечным числом равновероятных исходов.

Частота и вероятность. Рассмотрим такой простой опыт, как бросание монеты. Он имеет два взаимно исключающих друг друга исхода: выпадение «герба» и выпадение «решетки». Обозначим эти исходы русскими буквами Г и Р соответственно. Наблюдатель не может проанализировать и учесть те многочисленные факторы, которые влияют на результат рассматриваемого опыта: исход бросания монеты случаен, и заранее нельзя с уверенностью сказать, выпадет ли Г или Р. Но, несмотря на случайность исхода в каждом отдельном испытании, при многократном повторении опыта можно наблюдать замечательную закономерность. Именно, при n-кратном бросании монеты число выпадений «герба» $n(\Gamma)$ таково, что отношение $n(\Gamma)/n$ приблизительно равно 1/2. Ниже в табл. 1 приведены результаты такой серии испытаний, когда монета подбрасывалась в общей сложности 10 000 раз. При этом отдельно рассматривались серии по $n = 100$ испытаний и в каждой серии регистрировалось соответствующее количество $n(\Gamma)$ выпадений «герба» [96].

Указанное число $\mathsf{P}(\Gamma) = 1/2$ является вероятностью выпадения «герба» в каждом отдельном испытании. Определить эту вероятность можно было бы и без длинной серии испытаний, основываясь на том, что по отношению к условиям опыта исходы Г и Р равнозначны, другими словами, они являются равновероятными: $\mathsf{P}(\Gamma) = \mathsf{P}(\text{Р}) = 1/2$.

Что такое *вероятность*? Какой смысл вкладывается в это понятие?

Накопленные практикой многочисленные наблюдения позволяют следующим образом охарактеризовать вероятность. Предположим, что рассматривается некоторый опыт или явление, в котором в зависимости от случая происходит или не происходит интересующее наблюдателя событие A. Предположим, что условия опыта (условия, при которых происходит рассматриваемое явление) могут быть воспроизведены многократно, так что в

Таблица 1

Число «гербов» n(Г) в сериях по $n = 100$ испытаний										Общее число «гербов» в серии из 1000 испытаний
54	46	53	55	46	54	41	48	51	53	501
48	46	40	53	49	49	48	54	53	45	485
43	52	58	51	51	50	52	50	53	49	509
58	60	54	55	50	48	47	57	52	55	536
48	51	51	49	44	52	50	46	53	41	485
49	50	45	52	52	48	47	47	47	51	488
45	47	41	51	49	59	60	55	53	50	500
53	52	46	52	44	51	48	51	46	54	497
45	47	46	52	47	48	59	57	45	48	494
47	41	51	59	51	52	55	39	41	48	484

принципе осуществима целая серия одинаковых и независимых друг от друга испытаний, в каждом из которых в зависимости от случая происходит или не происходит событие A. Обозначим буквой n число всех опытов в такой серии испытаний, и пусть $n(A)$ — число тех испытаний, которые привели к наступлению события A. Отношение $n(A)/n$ называется *частотой* события A в данной серии опытов. Как показывает практика, при больших n частоты $n(A)/n$ в различных сериях испытаний оказываются приблизительно одинаковыми. Существует некоторое значение $\mathsf{P}(A)$, называемое *вероятностью* события A, около которого группируются указанные частоты $n(A)/n$:

$$\mathsf{P}(A) \approx n(A)/n. \tag{1.1}$$

Подсчет вероятностей. В случае, когда рассматриваемый опыт имеет равновероятные исходы, вероятность $\mathsf{P}(A)$ события A, связанного с этим опытом, может быть вычислена по следующей простой формуле:

$$\mathsf{P}(A) = N(A)/N, \tag{1.2}$$

где N — общее число равновероятных и взаимно исключающих друг друга исходов, $N(A)$ — число тех из них, которые приводят к наступлению события A.

Пример. Предположим, что опыт заключается в бросании двух игральных костей, грани которых занумерованы цифрами от 1 до 6. Какова вероятность того, что на обеих костях выпадет одинаковое количество очков?

Каждый исход этого опыта может быть описан парой чисел (a, b), где a — число очков на первой кости, b — число очков на второй кости. Очевидно, все эти исходы равновероятны. Всего их $N = 36$. Событие A — «выпадает одинаковое количество очков» — происходит тогда и только тогда, когда наступает один из исходов (a, b), при котором $a = b$. Таких исходов $N(A) = 6$. Следовательно, вероятность события A есть $\mathsf{P}(A) = 6/36 = 1/6$.

Пример. *Парадокс де Мере.* В результате многократных наблюдений игры в кости француз де Мере подметил, что при одновременном бросании трех игральных костей более часто выпадает комбинация, дающая в сумме 11 очков, чем комбинация, дающая в сумме 12 очков, хотя, с его точки зрения, эти комбинации были равновероятны.

Де Мере рассуждал следующим образом: 11 очков можно получить шестью различными способами (6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3), и столькими же способами можно получить 12 очков (6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-5-2, 5-4-3, 4-4-4), а равенство числа исходов, в результате которых наступают события A_1 и A_2, означает равенство их вероятностей $\mathsf{P}(A_1)$ и $\mathsf{P}(A_2)$. На ошибку де Мере было указано знаменитым Паскалем, который заметил, что рассматриваемые де Мере исходы в данной задаче не являются равновероятными. Нужно учитывать не только выпадающие очки, но и то, на каких именно костях они выпали. Например, занумеровав кости и выписывая выпадающие очки в соответствующей последовательности, видим, что комбинация 6-4-1 выпадает, когда наступает один из шести исходов (6, 4, 1), (6, 1, 4), (4, 6, 1), (4, 1, 6), (1, 6, 4), (1, 4, 6), а комбинация 4-4-4 выпадает лишь при одном-единственном исходе (4, 4, 4). Равновероятными в данном опыте являются исходы, описываемые тройками чисел (a, b, c), где a — число очков на первой кости, b — число очков на второй кости, c — число очков на третьей кости. Нетрудно подсчитать, что всего имеется $N = 216$ равновероятных исходов. Из них событию A_1 — «сумма выпавших очков равна 11» — благоприятствуют $N(A_1) = 27$ исходов, а событию A_2 — «сумма выпавших очков равна 12» — благоприятствуют лишь $N(A_2) = 25$ исходов. Это и объясняет подмеченную де Мере тенденцию к более частому выпадению 11 очков [12].

2. Некоторые комбинаторные формулы *).

Примеры подсчета вероятностей. Как правило, изучение теоретико-вероятностных схем с конечным числом равновероятных исходов сводится к решению чисто комбинаторных задач. Ниже даны наиболее употребительные комбинаторные формулы.

Комбинации элементов из различных групп; выбор с возвращением. Имеется r групп элементов: первая группа содержит n_1 элементов $a_{11}, \ldots, a_{1n_1}$, вторая — n_2 элементов $a_{21}, \ldots, a_{2n_2}$ и т. д., последняя, r-я группа содержит n_r элементов $a_{r1}, \ldots, a_{rn_r}$. Составляются комбинации из r элементов таким образом, что в каждую комбинацию входит лишь по одному элементу из каж-

*) Дополнительные сведения по комбинаторике можно найти, например, в книге [74].

дой группы. Число всех комбинаций $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ri_r}$ такого типа есть $N = n_1 n_2 \ldots n_r$.

Пусть из некоторой совокупности, содержащей n элементов $a_1, \ldots, a_n$, производится выбор, при котором последовательно выбирается один из элементов a_i (возвращаемый каждый раз обратно в общую совокупность), так что за r шагов регистрируется выборка $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$. Число всевозможных комбинаций $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, где каждый элемент a_{i_k} выбирается из соответствующей «группы» — общей совокупности на k-м шаге,— есть $N = n^r$.

Число размещений; выбор без возвращения. Имеется n элементов $a_1, \ldots, a_n$. Составляются всевозможные комбинации по r элементов типа $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ с учетом порядка внутри каждой из них, другими словами, r из n элементов размещаются по r местам. Число всех таких комбинаций (размещений) есть

$$N = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\ldots(n-r+1).$$

Подобные комбинации образуются, например, при последовательном выборе без возвращения элементов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ из некоторой общей совокупности $a_1, \ldots, a_n$.

Число сочетаний. Пусть в комбинациях $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$, составляемых из общей совокупности $a_1, \ldots, a_n$ объема n, не учитывается порядок элементов, так что комбинации с одними и теми же элементами считаются равными. Число различных комбинаций составляет

$$N = C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

и называется числом сочетаний из n по r.

Размещение по ячейкам. Имеется n различных элементов, которые размещаются по r различным ячейкам. Каждое размещение можно описать комбинацией $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где i_k означает номер ячейки, в которую попадает k-й предмет. Число всевозможных размещений есть $N = r^n$.

Если размещения удовлетворяют тому требованию, что в ячейку с номером i попадают ровно n_i элементов ($i = 1, \ldots, r$ и $n_1 + \ldots + n_r = n$), то число всех таких размещений составляет

$$N = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}.$$

Размещение по ячейкам неразличимых предметов. В случае, когда по ячейкам размещаются неразличимые между собой элементы, каждое размещение определяется количеством элементов, попадающих в соответствующую ячейку, и описывается комбинацией $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, где n_i — число элементов в i-й ячейке.

Число всевозможных таких размещений есть

$$N = \frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!} = C_{n+r-1}^{r-1}.$$

При дополнительном требовании, когда ни одна из ячеек не остается пустой (при этом предполагается, что $n \geqslant r$), число всевозможных размещений составляет

$$N = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = C_{n-1}^{r-1}.$$

Формула Стирлинга. Во всех приведенных выше формулах встречается выражение $n! = n(n-1)\ldots 1$. Непосредственное вычисление такого произведения при больших n весьма трудоемко. Существует сравнительно простая формула, дающая приближенное значение для $n!$, называемая формулой Стирлинга: при больших n

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Здесь и далее соотношение $\alpha_n \sim \beta_n$ между величинами α_n и β_n означает, что $\alpha_n/\beta_n \to 1$ при $n \to \infty$. Относительная погрешность формулы Стирлинга при всех $n \geqslant 1$ оценивается неравенствами

$$0 < \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} - 1 < e^{1/(12n)} - 1.$$

Об уточнении формулы Стирлинга см. § 5.2.

Пример. Партия из 100 деталей проверяется контролером, который наугад отбирает 10 деталей и определяет их качество. Если среди выбранных контролером изделий нет ни одного бракованного, то вся партия принимается; в противном случае она посылается на дополнительную проверку. Какова вероятность того, что партия деталей, содержащая 10 бракованных изделий, будет принята контролером?

Число всевозможных способов выбрать 10 деталей из партии объема 100 равна числу сочетаний из 100 по 10 и составляет $N = \frac{100!}{10!\,90!}$. Естественно считать, что исходы такого выбора равновероятны *). Событие A — «партия деталей принимается контролером» — наступает в том случае, когда все 10 выбираемых наугад деталей образуют группу только из доброкачественных изделий, общее число которых равно 90. Следовательно, число исходов, приводящих к наступлению события A, равно числу сочетаний из 90 по 10, что составляет $N(A) = \frac{90!}{10!\,80!}$. Партия принимается, если происходит один из $N(A)$ равновероятных

*) Собственно говоря, в этом и заключается точный смысл предположения, что контролер отбирает детали «наугад».

исходов, общее число которых есть N. Следовательно, вероятность того, что партия будет принята контролером, есть

$$\mathsf{P}(A) = \frac{81\cdot 82 \ldots 90}{91\cdot 92 \ldots 100} \approx \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 0{,}349$$

(на самом деле с точностью до трех десятичных знаков $\mathsf{P}(A) = 0{,}331$).

Пример. Рассмотрим игру в преферанс, когда старшие 32 карты карточной колоды случайным образом распределяются (сдаются) между тремя игроками, получающими по 10 карт, и «прикупом», куда кладутся две карты. Какова вероятность того, что в «прикупе» окажутся два «туза»?

Число различных комбинаций из двух карт, которые могут оказаться в «прикупе», равно числу сочетаний из 32 по 2, что составляет $N = \frac{32!}{2!\,30!} = 496$. В карточной колоде имеется четыре «туза», и число различных комбинаций, дающих два «туза», равно числу сочетаний из 4 по 2, что составляет $N(A) = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$. Следовательно, искомая вероятность есть $\mathsf{P}(A) = 6/496 \approx 0{,}012$.

Предположим, что один из игроков — «играющий» — имеет 5 старших карт одной масти (скажем, имеет пять «червей»), исключая «даму». При объявлении ранга игры «играющему» приходится учитывать возможность образования у одного из «вистующих» — противников — комбинации из трех оставшихся «червей» (такую комбинацию называют «третьей дамой»). Какова вероятность этого события?

Всего имеется $N = C_{20}^{10} = \frac{20!}{10!\,10!}$ равновероятных случаев распределения 20 карт на две равные группы по 10 карт, которые «сдаются» каждому из двух «вистующих». Если всю комбинацию «третья дама червей» зафиксировать у какого-либо определенного «вистующего», то число совместимых с этим случаев распределения равно числу сочетаний из 17 оставшихся карт по 7, что составляет $N(A) = \frac{17!}{7!\,10!}$. Следовательно, вероятность появления у данного «вистующего» комбинации «третья дама червей» есть $\mathsf{P}(A) = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{18\cdot 19\cdot 20} = \frac{2}{19} \approx 0{,}105$. Вероятность появления у одного из двух «вистующих» (безразлично у какого) «третьей дамы червей» будет, очевидно, вдвое больше.

3. «Геометрические» вероятности*). В случае опыта с равновероятными исходами, которых имеется конечное число, вероятность $\mathsf{P}(A)$ связанного с данным опытом события A определяется как «доля» тех исходов, которые приводят к наступлению этого события (см. формулу (1.2)). Аналогичным образом подсчи-

---

*) Вопросы, связанные с «геометрическими» вероятностями, см. в книге [47].

тывается и вероятность в более сложных опытах, когда имеется бесконечное число равнозначных исходов.

Рассмотрим несколько примеров подсчета так называемых «геометрических» вероятностей.

Пример. Предположим, что на отрезок длины L действительной прямой наугад бросается точка, которую обозначим ξ. Какова вероятность того, что она упадет не дальше, чем на расстоянии l, от середины указанного отрезка (рис. 1)?

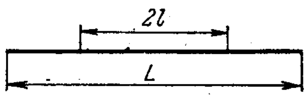


Рис. 1

Здесь имеется бесконечно много возможных исходов: ведь точка ξ может попасть в любую точку рассматриваемого отрезка длины L. Кроме того, условия опыта таковы, что ξ с одинаковой вероятностью может оказаться в любой точке x этого отрезка. Событие A — «точка ξ находится от середины на расстоянии не больше l» — наступает в результате попадания в любую точку x, отстоящую от середины не далее, чем на величину l. «Доля» таких точек x во всем отрезке может быть определена как отношение $L(A)/L$, где L — длина всего рассматриваемого отрезка, $L(A) = 2l$ — длина отрезка, попадание в который влечет за собой наступление события A. Таким образом, искомая вероятность есть

$$\mathsf{P}(A) = \frac{L(A)}{L} = \begin{cases} 2l/L, & \text{если } 2l < L, \\ 1, & \text{если } 2l \geqslant L. \end{cases}$$

Пример. Предположим, что на отрезок длины L бросаются наугад и независимо друг от друга две разные точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними будет не больше l?

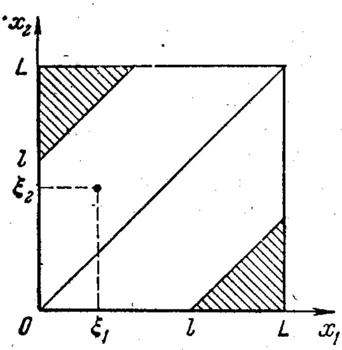


Рис. 2

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к следующей модели. Координату первой точки ξ_1 отложим на отрезке $(0, L)$ оси x_1, а соответствующую координату ξ_2 другой точки отложим по оси x_2 (рис. 2). Можно считать, что точка (ξ_1, ξ_2) бросается наугад в квадрат со стороной длины L. Искомая вероятность совпадает с вероятностью события A, которое состоит в том, что случайно брошенная точка (ξ_1, ξ_2) попадает в область квадрата, ограниченную прямыми с уравнениями $x_2 = x_1 \pm l$. На рис. 2 эта область оставлена незаштрихованной. «Доля» тех исходов, в результате которых наступает интересующее нас событие $A = \{|\xi_1 - \xi_2| \leqslant l\}$, может быть определена как отношение $S(A)/S$, где S — площадь всего квадрата, а $S(A)$ — площадь той области его, попадание в которую ведет к наступлению события A ($S(A)$ — площадь незаштрихованной фигуры):

$$\mathsf{P}(A)=\frac{S(A)}{S}=\frac{L^2-(L-l)^2}{L^2}=1-\left(1-\frac{l}{L}\right)^2.$$

Пример. *Задача об игле.* Предположим, что на плоскость (x, y), «разлинованную» прямыми, параллельными оси x и отстоящими друг от друга на расстояние L, наугад бросается игла длины $l \leqslant L$ (рис. 3). Какова вероятность того, что игла пересечет одну из начерченных линий?

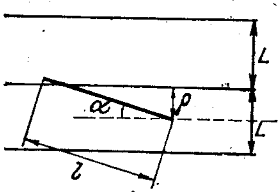


Рис. 3

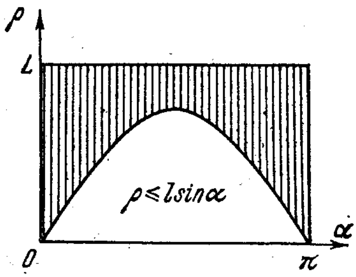


Рис. 4

Будем считать иглу отрезком длины l. Обозначим буквой α угол наклона этого отрезка к оси x, и пусть ρ — расстояние от его нижнего конца до ближайшей сверху линии (см. рис. 3). Интуитивно ясно, что α и ρ с одинаковой вероятностью и независимо друг от друга могут принять одно из возможных значений в соответствующих пределах $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \rho \leqslant L$. Совокупность всех возможных исходов (α, ρ) геометрически представляет собой прямоугольник (рис. 4). Событие A — «игла пересекает одну из начерченных линий» — наступает тогда и только тогда, когда значения α и ρ таковы, что $\rho \leqslant l \sin\alpha$. «Доля» тех исходов (α, ρ), которые ведут к наступлению события A, может быть определена как отношение $S(A)/S$, где S — площадь всего прямоугольника, $S(A)$ — площадь под кривой $\rho = l\sin\alpha$, т. е. площадь области тех значений (α, ρ), которые приводят к наступлению события A. Таким образом, искомая вероятность $\mathsf{P}(A)$ выражается формулой

$$\mathsf{P}(A)=S(A)/S,$$

где $S=\pi L$, $S(A)=l\int\limits_0^\pi \sin\alpha\, d\alpha = 2l$, т. е. $\mathsf{P}(A)=2l/(\pi L)$.

Во всех рассмотренных примерах мы основывались на чисто интуитивных соображениях, касающихся условий опыта, которые кратко определялись как «бросание наугад». В первом примере этого пункта фактически подразумевалось, что вероятность попадания точки ξ в интервал Δ не зависит от того, где этот интервал расположен на рассматриваемом отрезке длины L. Во втором и третьем примерах этого пункта подразумевалось, что вероятность попадания точки с координатами (ξ_1, ξ_2) или (α, ρ) внутрь некоторой фигуры Δ на квадрате $0 \leqslant \xi_1 \leqslant L$, $0 \leqslant \xi_2 \leqslant L$ или на прямоугольнике $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant L$ не зависит от ее расположения. Выполнение этих теперь уже точно сформулированных условий опыта достаточно очевидно.

Стоит отметить, что выражение $\mathsf{P}(A) = 2l/(\pi L)$ для вероятности пересечения брошенной иглой какой-либо линии на плоскости использовалось для определения числа π методом случайных испытаний. А именно, производилась большая серия опытов, и соответствующая частота $n(A)/n$ приравнивалась вероятности $\mathsf{P}(A)$ (здесь n — число опытов, $n(A)$ — число тех из них, в которых игла пересекала одну из линий). Для $l = L$ при $n = 10\,000$ соответствующее значение $\pi \approx \frac{2l}{L} \cdot \frac{n}{n(A)}$ оказалось равным 3,15.

§ 2. Пространство элементарных событий и закон сложения вероятностей

1. Комбинация событий. События A_1 и A_2 называются *равными*: $A_1 = A_2$, если осуществление события A_1 влечет за собой осуществление события A_2 и, наоборот, осуществление A_2 влечет за собой осуществление A_1. События A_1 и A_2 называются *несовместными* или *непересекающимися*, если наступление одного исключает возможность наступления другого, иначе говоря, A_1 и A_2 не могут произойти одновременно.

Пример. При бросании двух игральных костей равными оказываются события A_1 — «выпадает четная сумма очков» и A_2 — «на каждой грани выпадают очки одной и той же четности». Аналогичные события в другом опыте, когда бросаются не две, а три игральных кости, уже не будут равными.

Объединением или *суммой событий* A_1 и A_2 называется событие A, которое означает осуществление хотя бы одного из событий A_1, A_2: $A = A_1 \cup A_2$, где $\cup$ — специальный символ объединения. Аналогично определяется объединение многих событий A_1, A_2, ..., обозначаемое как $A = \bigcup_k A_k$. *Пересечением* или *произведением событий* A_1 и A_2 называется событие A, которое означает осуществление и события A_1, и события A_2: $A = A_1 \cap A_2$, где $\cap$ — специальный символ пересечения. Аналогично определяется произведение многих событий $A_1, A_2, \ldots$, обозначаемое как $A = \bigcap_k A_k$ или $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots$ *Разностью событий* A_1 и A_2 называется событие A, которое означает, что происходит событие A_1, но не происходит событие A_2: $A = A_1 \setminus A_2$. *Дополнительным* к событию A называется событие $\bar{A}$, которое означает, что событие A не происходит.

Пример. Рассмотрим опыт с бросанием двух игральных костей. Событие A — «выпадает четная сумма очков» — есть объединение непересекающихся событий A_1 — «на каждой грани выпадает четное число очков» — и A_2 — «на каждой грани выпадает нечетное число очков». При этом $A_1 = A\setminus A_2$ и $A_2 = A\setminus A_1$. Дополнительным к событию A является событие $\bar{A}$ — «выпадает нечетная сумма очков»; дополнительным к A_1 является событие $\bar{A}_1$ — «хотя бы на одной грани выпадает нечетное число очков», и дополнительным к событию A_2 является событие $\bar{A}_2$ — «хотя бы на одной грани выпадает четное число очков». При этом $\bar{A}_1\setminus\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot A = A_2$ и $\bar{A}_2\setminus\bar{A} = \bar{A}_2 \cdot A = A_1$.

2. Пространство элементарных событий. Предположим, что среди всех возможных событий A, которые в данном опыте по воле случая происходят или не происходят, можно выделить совокупность так называемых *элементарных событий* или *элементарных исходов*, обладающих следующими свойствами. Во-первых, все они взаимно исключают друг друга — являются непересекающимися — и в результате данного опыта обязательно происходит одно из этих элементарных событий. Во-вторых, каково бы ни было событие A, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие. Элементарные исходы обычно обозначаются греческой буквой ω, а их совокупность Ω называется *пространством элементарных событий.*

Пример. При бросании двух игральных костей элементарным исходом можно считать пару чисел $\omega = (a, b)$, где a — число очков на первой кости, b — число очков на второй кости, $1 \leqslant a,\ b \leqslant 6$. При бросании иглы на разлинованную плоскость (см. задачу об игле) элементарный исход можно описать точкой $\omega = (\alpha, \rho)$, где α есть угол наклона иглы, а ρ — расстояние от ее нижнего конца до ближайшей сверху линии; пространство Ω в этом случае будет геометрически представлять собой прямоугольник $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant L$ на плоскости переменных (α, ρ).

Пусть Ω — пространство элементарных исходов ω рассматриваемого опыта или явления. Для каждого связанного с этим опытом события A можно выделить совокупность тех элементарных исходов ω, наступление которых влечет за собой наступление события A. Обозначим совокупность (иначе: множество) этих элементарных исходов ω тем же символом A, что и соответствующее событие. Очевидно, событие A наступает тогда и только тогда, когда наступает один из элементарных исходов ω, входящий в указанное множество A; другими словами, событие A равно событию, которое состоит в том, что наступает какой-либо элементарный исход ω, входящий в множество A (принадлежность ω множеству A указывается символической записью $\omega \in A$). Можно отождествить событие A с соответствующим множеством A элементарных исходов ω.

Достоверное событие A, наступающее в результате любого из элементарных исходов ω, при таком отождествлении событий и множеств совпадает с пространством Ω: $A=\Omega$. *Невозможное событие* A, не наступающее ни при каком элементарном исходе ω, совпадает с пустым множеством, обозначаемым обычно символом $\varnothing$: $A=\varnothing$.

Введенные ранее понятия объединения, пересечения и т. д. приобретают теперь большую наглядность: $A_1 \cup A_2$ есть объединение множеств A_1 и A_2, $A_1 \cap A_2$ — их пересечение, $\bar{A}=\Omega\backslash A$ — множество элементарных исходов, дополняющее множество A до всего пространства элементарных событий Ω. Событие A_1 влечет наступление события A_2 тогда и только тогда, когда A_1 входит (содержится) в A_2, что записывается: $A_1 \subseteq A_2$ или $A_2 \supseteq A_1$.

Для более отчетливого уяснения отношений между теми или иными событиями часто оказывается удобным условное представление пространства элементарных событий Ω в виде некоторой области на плоскости; при этом элементарные исходы ω изображаются точками плоскости, лежащими внутри Ω, а события (определенные совокупности точек ω) изображаются в виде некоторых фигур. На рис. 5 показаны различные соотношения между событиями A_1 и A_2, которые представлены в виде фигур на плоскости, лежащих внутри прямоугольника Ω, условно изображающего пространство элементарных событий. Заштрихованная фигура изображает событие A, причем на рис. *а*), *б*) и *в*)

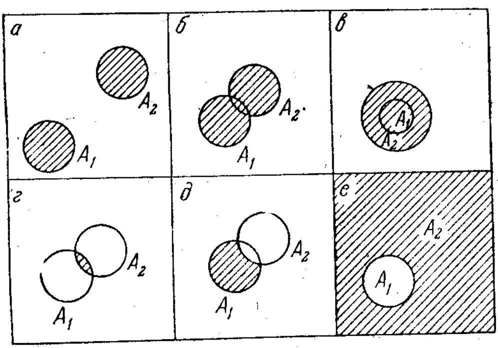


Рис. 5

$A=A_1 \cup A_2$, на рис. *г*) $A=A_1 \cap A_2$, на рис. *д*) $A=A_1\backslash A_2$ и на рис. *е*) $A=A_2=\bar{A}_1$.

Используя наглядные свойства таких фигур, можно легко увидеть, что имеют место следующие общие связи между различными соотношениями событий. Именно, если $A_1 \subseteq A_2$, то $\bar{A}_1 \supseteq \bar{A}_2$; если $A=A_1 \cup A_2$, то $\bar{A}=\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$; если $A=A_1 \cap A_2$, то $\bar{A}=\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$. Вообще, если справедливо некоторое соотношение между какими-то событиями, то будет справедливо и соотношение, получаемое из первоначального переходом к дополнительным событиям и заменой знаков объединения $\cup$, пересечения $\cap$ и включения $\subseteq$ на соответствующие «обратные» знаки $\cap$, $\cup$ и $\supseteq$ (знаки равенства $=$ остаются неизменными). Например, равносильны следующие соотношения:

$$\bigcup_k A_k = B \subseteq \overline{\bigcap_k C_k}; \quad \bigcap_k \overline{A}_k = \overline{B} \supseteq \bigcap_k C_k; \quad \bigcup_k A_k = B \subseteq \bigcup_k \overline{C}_k.$$

3. Закон сложения вероятностей. Рассмотрим несовместные события A_1, A_2 и их объединение $A = A_1 \cup A_2$. Представим себе, что проводится серия одинаковых и независимых между собой опытов, результатом каждого из которых могут быть указанные события A, A_1 или A_2. Пусть n — число всех испытаний, $n(A)$, $n(A_1)$ и $n(A_2)$ — число тех из них, которые привели к наступлению соответствующих событий A, A_1 и A_2. Если в каком-то опыте произошло событие A, то это значит, что произошло или событие A_1, или событие A_2 (одновременно A_1 и A_2 произойти не могут, так как по условию они являются несовместными). Поэтому числа $n(A)$, $n(A_1)$ и $n(A_2)$ связаны между собой равенством

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2).$$

Следовательно, частоты рассматриваемых событий таковы, что

$$n(A)/n = n(A_1)/n + n(A_2)/n.$$

При достаточно большом числе испытаний n частоты практически совпадают с соответствующими вероятностями (см. по этому поводу § 1), так что вероятности рассматриваемых событий A, A_1 и A_2 должны быть связаны между собой равенством

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2). \tag{2.1}$$

Формула (2.1) выражает частный случай закона сложения вероятностей, согласно которому вероятность объединения несовместных событий (в конечном или счетном числе) равна сумме их вероятностей: $\mathsf{P}\left\{\bigcup_k A_k\right\} = \sum_k \mathsf{P}(A_k)$.

Вероятности различных комбинаций событий. Если соотношения между различными событиями наглядно описываются соотношениями между изображающими их фигурами на плоскости (см. рис. 5), то свойства вероятностей вполне аналогичны свойствам площадей этих фигур. В частности,

$$\begin{gathered} \mathsf{P}(A_1 \setminus A_2) = \mathsf{P}(A_1) - \mathsf{P}(A_1 \cap A_2), \\ \mathsf{P}(A_2 \setminus A_1) = \mathsf{P}(A_2) - \mathsf{P}(A_1 \cap A_2), \\ \mathsf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) - \mathsf{P}(A_1 \cap A_2). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — некоторые события и

$$p_i = \mathsf{P}(A_i), \; p_{ij} = \mathsf{P}(A_iA_j), \; p_{ijk} = \mathsf{P}(A_iA_jA_k), \; \ldots$$

Положим

$$S_0 = 1, \quad S_1 = \sum p_i, \quad S_2 = \sum p_{ij}, \quad S_3 = \sum p_{ijk}, \ \ldots,$$

где суммирование идет по всем различным группам индексов (по различным группам событий). Имеет место формула

$$Q_1 = \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots - (-1)^n S_n.$$

Вероятность P_0 того, что ни одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не осуществится, есть

$$P_0 = 1 - Q_1 = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^n S_n.$$

Вообще вероятность P_m того, что осуществится ровно m событий из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$, может быть вычислена по формуле

$$P_m = S_m - C_{m+1}^1 S_{m+1} + C_{m+2}^2 S_{m+2} - \ldots + (-1)^{n-m} C_n^{n-m} S_n.$$

Вероятность Q_m наступления по крайней мере m событий из A_1, $A_2, \ldots, A_n$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ выражается в терминах сумм $S_m, S_{m+1}, \ldots$ $\ldots, S_n$ формулой

$$Q_m = S_m - C_m^1 S_{m+1} + C_{m+1}^2 S_{m+2} - \ldots + (-1)^{n-m} C_{n-1}^{n-m} S_n$$

(здесь, как и всюду, C_m^k означает число сочетаний из m по k, причем если $k > m$, то $C_m^k = 0$).

Пример. *Задача о совпадениях.* Пусть имеется n ячеек и n некоторых элементов; каждая ячейка и каждый элемент снабжены соответствующим номером i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Элементы случайно размещаются по ячейкам так, что каждая ячейка содержит ровно один элемент; все такие размещения считаются равновероятными. Совпадением называется любое из событий A_i, состоящее в том, что элемент с номером i попал в ячейку с тем же номером. Чему равна вероятность Q_1 хотя бы одного совпадения? Вероятность P_m ровно m совпадений? Как меняются эти вероятности с увеличением числа элементов n?

Событию A_i благоприятствуют $(n-1)!$ всевозможных размещений $n-1$ элементов по $n-1$ местам (ячейка с номером i занята элементом с тем же номером); событию A_iA_j благоприятствуют $(n-2)!$ размещений (ячейки с номерами i и j заняты соответствующими элементами) и т. д. Всего возможных размещений $n!$, так что

$$p_i = \frac{(n-1)!}{n!}, \quad p_{ij} = \frac{(n-2)!}{n!}, \quad p_{ijk} = \frac{(n-3)!}{n!}, \ \ldots$$

Сумма S_k содержит ровно $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ одинаковых слагаемых, каждое из которых равно $\frac{(n-k)!}{n!}$, и потому $S_k = \frac{1}{k!}$. Следовательно, вероятность наступления хотя бы одного события из $A_1, A_2, \ldots, A_n$

(другими словами, вероятность хотя бы одного совпадения) есть

$$Q_1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots - (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Полученное выражение представляет собой отрезок из $n+1$ первых членов ряда для $1 - e^{-1}$:

$$1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots$$

($e = 2,718\ldots$). Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_1 = 1 - e^{-1} = 0,632\ldots$. Аналогично для $m \geqslant 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} P_m = \frac{1}{m!}e^{-1}$, т. е. $P_m \approx \frac{1}{m!}e^{-1}$.

Лемма Бореля — Кантелли. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — некоторая последовательность событий и Q_m — вероятность того, что осуществится по крайней мере m событий из $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Вероятности Q_m ($m = 1, 2, \ldots$) монотонно убывают, и

$$\lim_{m\to\infty} Q_m = Q$$

если вероятность того, что осуществляется бесконечное число событий из $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$; если

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i) < \infty,$$

то $Q = 0$.

§ 3. Связь различных событий

1. Условные вероятности. При анализе того или иного явления перед наблюдателем часто возникает вопрос о том, как влияет на возможность осуществления некоторого события A наступление некоторого другого события B. Простейшими примерами связи событий A и B могут служить следующие два крайних случая: наступление B ведет к обязательному осуществлению события A или, наоборот, наступление B исключает возможность осуществления события A. В теории вероятностей характеристикой связи событий A и B служит так называемая условная вероятность $\mathsf{P}(A \mid B)$ события A при условии B, определяемая как отношение

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(AB)/\mathsf{P}(B) \tag{3.1}$$

(предполагается, что вероятность события B положительна).

Величина $\mathsf{P}(A \mid B)$ может рассматриваться как вероятность осуществления события A в новых условиях — именно при условии наступления события B. Поясним это на примере опыта с конечным числом равновероятных элементарных исходов ω. Пусть N — число всех элементарных исходов, $N(B)$ — число тех из них, которые приводят к наступлению события B, а $N(AB)$ — число тех элементарных исходов, которые приводят к осуществлению и события A, и события B. В этом случае вероятности событий B и AB есть $\mathsf{P}(B)=N(B)/N$ и $\mathsf{P}(AB)=N(AB)/N$, так что условная вероятность $\mathsf{P}(A \mid B)$ выражается формулой

$$\mathsf{P}(A \mid B)=N(AB)/N(B). \tag{3.2}$$

Здесь $N(B)$ — число всех элементарных исходов ω, возможных при условии наступления события B, а $N(AB)$ — число тех из них, которые приводят к осуществлению события A. В соответствии с общей формулой (1.2) равенство (3.2) определяет вероятность события A в новых условиях, которые возникают при наступлении события B.

Условные вероятности обладают всеми свойствами, присущими обычным вероятностям. Именно,

$$0 \leqslant \mathsf{P}(A \mid B) \leqslant 1.$$

Если событие B ведет к обязательному осуществлению события A: $B \subseteq A$, то

$$\mathsf{P}(A \mid B)=1.$$

Если наступление события B исключает возможность осуществления A: $A \cdot B=\varnothing$, то

$$\mathsf{P}(A \mid B)=0.$$

Если событие A есть объединение непересекающихся событий $A_1, A_2, \ldots$: $A=\bigcup\limits_k A_k$, то

$$\mathsf{P}(A \mid B)=\sum_k \mathsf{P}(A_k \mid B).$$

Формула полной вероятности. Для нахождения вероятности того или иного события A часто бывает удобно сначала подходящим образом выбрать некоторое событие B и определить условную вероятность $\mathsf{P}(A \mid B)$ как вероятность события A в новых условиях, когда достоверно известно, что событие B произошло. Если имеется некоторая *полная система несовместных событий* $B=B_1, B_2, \ldots$ (т. е. система таких непересекающихся событий, хотя бы одно из которых обязательно осуществится), то вероятность $\mathsf{P}(A)$ события A выражается в терминах соответствующих условных вероятностей $\mathsf{P}(A \mid B)$ при помощи так называемой *формулы полной вероятности*

$$\mathsf{P}(A)=\sum_k \mathsf{P}(A \mid B_k)\,\mathsf{P}(B_k). \tag{3.3}$$

П р и м е р. Представьте себе странника, идущего из некоторого пункта O и на разветвлении дорог выбирающего наугад один из возможных путей. Схема дорог изображена на рис. 6. На этом рисунке указан также некоторый пункт A и ведущие в него пути. Какова вероятность, что странник попадет в этот пункт? Как показано на рисунке, странник обязательно проходит через один из промежуточных пунктов B_1, B_2, B_3, B_4. Обозначим B_k событие, состоящее в том, что при своем движении он попадет в пункт B_k. События B_1, B_2, B_3, B_4 образуют полную систему. Очевидно, что эти события равновероятны, так как по условию странник выбирает один из путей OB_1, OB_2, OB_3, OB_4 наугад. Таким образом, $\mathsf{P}(B_k) = 1/4$. Если странник попадает в B_1, он может прийти в A лишь по одному из трех равновероятных направлений движения из пункта B_1, так что условная вероятность достигнуть A при условии B_1 равна 1/3. Если обозначить буквой A событие, состоящее в том, что странник приходит в пункт A, то, как было сказано, $\mathsf{P}(A \mid B_1) = 1/3$. Аналогично, согласно рис. 6,

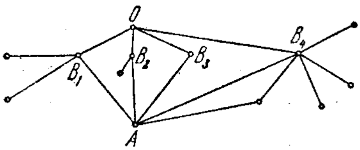


Рис. 6

$$\mathsf{P}(A \mid B_2) = 1/2,\ \mathsf{P}(A \mid B_3) = 1,\ \mathsf{P}(A \mid B_4) = 2/5,$$

и по формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{61}{120}.$$

Пример. *Задача о наилучшем выборе.* Предположим, что имеется некоторая совокупность из m предметов, сравнивая которые наблюдатель может установить, какой из них лучше или хуже. Задача состоит в том, чтобы выбрать предмет как можно лучше. Предположим, что эта задача осложняется тем, что, осмотрев и отвергнув некоторый предмет, нельзя к нему снова возвращаться. Тогда, в частности, можно случайно отвергнуть абсолютно наилучший предмет в надежде найти еще более лучший при дальнейшем осмотре. (Представьте себе, например, разборчивую невесту, которая либо принимает предложение сватающегося жениха, и тогда на этом выбор заканчивается, либо отвергает его, и тогда отвергнутый жених безвозвратно потерян для невесты.)

Рассмотрим одно естественное правило выбора: *не останавливаться на том предмете, который хуже какого-нибудь уже ранее осмотренного предмета.* Будем считать, что наблюдатель руководствуется этим правилом, так что при последовательном осмотре имеющихся предметов он может сразу выбрать первый из них (и на этом процесс выбора закончится). Если он этого не сделал, то он продолжает осмотр до тех пор, пока на каком-то шаге не окажется предмет, который будет лучше всех осмотренных ранее. Наблюдатель может выбрать этот наилучший среди осмотренных предметов (и на этом процесс выбора закончится), а может продолжить осмотр в надежде найти предмет еще лучше и т. д. Конечно, при этом не исключено, что на самом деле будет отвергнут абсолютно наилучший предмет, и тогда вообще ничего не будет выбрано. Но если число имеющихся предметов велико, то едва ли кто-нибудь согласится взять первый попавшийся предмет, не испытав счастья найти что-нибудь получше.

Предположим, что, следуя описанному правилу, наблюдатель сделал выбор, остановившись на k-м осмотренном предмете, т. е. последний из k осмотренных предметов оказался лучше всех предшествующих и на него-то и пал выбор. Какова вероятность того, что этот выбранный предмет является наилучшим среди всей совокупности как осмотренных, так и еще не осмотренных предметов?

Обозначим B событие, состоящее в том, что среди k осмотренных предметов последний оказался наилучшим. Наблюдателю известно о том, что событие B произошло. Обозначим A событие, состоящее в том, что k-й по счету предмет является наилучшим среди всех имеющихся предметов. Нас интересует условная вероятность $\mathsf{P}(A \mid B)$ события A при условии наступления события B. Эта условная вероятность выражается формулой (3.2), поэтому для вычисления $\mathsf{P}(A \mid B)$ нужно найти вероятности событий B и AB. Очевидно, событие A содержится в B, так что пересечение AB совпадает с самим событием A. Описанные условия выбора таковы, что следует считать равновероятными все имеющиеся возможности расположения предметов. Вероятность события B совпадает с вероятностью того, что при случайной перестановке k отличимых друг от друга элементов (они различаются по качеству) на фиксированном k-м месте окажется наилучший из этих k элементов. Такая вероятность равна $(k-1)!/k!$, где $k!$ — число всех перестановок из k; $(k-1)!$ — число перестановок из $k-1$ элементов, совместимых с тем условием, что на k-м месте зафиксирован наилучший элемент. Итак,

$$\mathsf{P}(B) = (k-1)!/k! = 1/k.$$

Аналогично вычисляется вероятность события A, которая совпадает с вероятностью того, что при случайной перестановке m отличимых друг от друга элементов на фиксированном k-м месте окажется вполне определенный элемент — наилучший предмет из всей имеющейся совокупности m предметов. Таким образом,

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(AB) = (m-1)!/m! = 1/m,$$

и искомая условная вероятность есть $\mathsf{P}(A \mid B) = k/m$.

Пример. *Задача о разорении игрока.* Рассмотрим игру в так называемую «орлянку», когда игрок выбирает «герб» или «решетку», после чего бросается монета. Если выпадает та сторона монеты, которая была названа игроком, то он выигрывает, получая, скажем, 1 рубль; в противном случае он столько же проигрывает. Предположим, что начальный капитал игрока составляет x рублей и игрок ставит себе целью довести его до некоторой суммы в a рублей. Игра продолжается до тех пор, пока игрок не наберет заранее определенную сумму a либо пока он не разорится, проиграв весь имеющийся у него капитал. Какова вероятность того, что в конце концов игрок разорится, так и не набрав желаемую сумму a рублей?

Ясно, что эта вероятность зависит от начального капитала x и конечной суммы a. Обозначим $p(x)$ вероятность того, что, имея x рублей, игрок все-таки разорится. Тогда вероятность разорения при условии выигрыша на первом шаге в наших обозначениях будет $p(x+1)$, так как после выигрыша капитал игрока станет равным $x+1$. Аналогично вероятность разорения при условии проигрыша на первом шаге равна $p(x-1)$, так как после проигрыша капитал игрока станет равным $x-1$. Обозначим B_1 событие, заключающееся в том, что игрок выиграл на первом шаге; B_2 — событие, заключающееся в том, что он проиграл. И пусть событие A означает разорение игрока. Условные вероятности разорения в принятых нами обозначениях выражаются формулами

$$\mathsf{P}(A|B_1) = p(x+1), \qquad \mathsf{P}(A|B_2) = p(x-1).$$

События B_1 и B_2 образуют полную систему, так как на первом шаге игрок либо выигрывает, либо проигрывает, причем очевидно, что $\mathsf{P}(B_1) = \mathsf{P}(B_2) = 1/2$.

Формула полной вероятности дает следующее уравнение для вероятностей $p(x)$:

$$p(x) = \frac{1}{2}\,[p(x+1) + p(x-1)], \qquad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

причем $p(0) = 1$, $p(a) = 0$. Решением этого уравнения является линейная функция

$$p(x) = C_1 + C_2 x,$$

коэффициенты которой должны быть определены из указанных граничных условий:

$$p(0) = C_1 = 1, \quad p(a) = C_1 + C_2 a = 0,$$

откуда получаем окончательное выражение для искомой вероятности разорения $p(x)$ при начальном капитале x:

$$p(x) = 1 - x/a, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.$$

Урновая схема. Рассматривается урна с шарами белого и черного цвета. Первоначально урна содержит a белых и b черных шаров. Из нее наугад вынимается один шар и затем в урну добавляется c шаров того же цвета, что и вынутый шар, и d шаров другого цвета. При этом параметры c и d могут быть и отрицательными, что соответствует дополнительному уменьшению количества шаров определенного цвета. При условии, что вынут белый шар, вероятность вынуть белый шар при следующем испытании равна $\frac{a+c}{a+b+c+d}$, вероятность вынуть черный шар равна $\frac{b+d}{a+b+c+d}$. При условии, что вынут шар черного цвета, вероятность вынуть белый шар при следующем испытании равна $\frac{a+d}{a+b+c+d}$, вероятность вынуть черный шар равна $\frac{b+c}{a+b+c+d}$.

Пример. *Модель диффузии.* Имеется два резервуара A и B, наполненных соответственно «белыми» и «черными» молекулами. Молекулы случайно переходят из одного резервуара в другой. Считается, что одновременный переход двух и более молекул невозможен и на каждом шаге переход из A в B или из B в A совершается с вероятностями, пропорциональными количеству молекул в A и B. Перед нами урновая схема с параметрами $c=-1$ и $d=1$. При условии, что в текущий момент в резервуаре A имеется a молекул и в резервуаре B имеется $b=N-a$ молекул, на следующем шаге с вероятностью a/N в A будет содержаться $a-1$ молекул и с вероятностью b/N в A будет содержаться $a+1$ молекул.

2. Независимые события. Рассмотрим два независимых опыта. Понятно, что это значит: никакой исход одного опыта никак не влияет на исходы другого. Если событие A_1 связано только с первым опытом, а событие A_2 связано только со вторым опытом, то наступление события A_1 не влияет на возможность осуществления A_2 и, наоборот, событие A_2 не влияет на A_1. В этом смысле можно сказать, что события A_1 и A_2 *независимы* друг от друга. Какова вероятность совместного осуществления таких событий?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к эмпирически установленному факту, согласно которому частота какого-либо события в большой серии независимых испытаний приблизительно совпадает с его вероятностью (см. по этому поводу § 1.1). Мысленно представим себе, что имеется большая серия независимых испытаний, в каждом из которых проводятся оба рассматриваемых опыта. Если число всех испытаний равно n, а $n(A_1A_2)$ — число тех испытаний, которые привели к одновременному наступлению событий A_1 и A_2, то искомая вероятность $\mathsf{P}(A_1A_2)$ может быть вычислена приближенно по формуле

$$\mathsf{P}(A_1A_2) \approx n(A_1A_2)/n.$$

Рассмотрим теперь только те испытания, при которых осуществляется событие A_2. Пусть число таких испытаний есть $n(A_2)$. Имеет место приближенное равенство

$$\mathsf{P}(A_2) \approx n(A_2)/n.$$

При достаточно большом n велико и число $n(A_2)$ тех испытаний, в которых осуществляется событие A_2. Но событие A_2 связано только со вторым опытом, который проводится независимо от первого опыта и связанного с ним события A_1. В серии из $n(A_2)$ испытаний, завершающихся наступлением события A_2 во втором опыте, будем рассматривать результаты первого опыта. Число тех испытаний, которые приводят к наступлению события A_1, равно указанному выше числу $n(A_1A_2)$, так что

$$\mathsf{P}(A_1) \approx n(A_1A_2)/n(A_2).$$

Полученные соотношения дают возможность выразить вероятность совместного осуществления независимых событий A_1 и A_2 через вероятности $\mathsf{P}(A_1)$ и $\mathsf{P}(A_2)$ этих событий:

$$\mathsf{P}(A_1A_2) \approx \frac{n(A_1A_2)}{n} = \frac{n(A_1A_2)}{n(A_2)} \cdot \frac{n(A_2)}{n}.$$

Но $n(A_2)/n \approx \mathsf{P}(A_2)$, следовательно,

$$\mathsf{P}(A_1A_2) = \mathsf{P}(A_1) \cdot \mathsf{P}(A_2). \tag{3.4}$$

Отвлекаясь от физических условий того или иного опыта, в теории вероятностей называют *независимыми* всякие два события A_1 и A_2, для которых имеет место равенство (3.4).

Это определение независимости событий хорошо согласуется с введенным ранее понятием условной вероятности. Именно, событие A_1 является независимым от события A_2 тогда и только тогда, когда наступление события A_2 не влияет на вероятность наступления события A_1, точнее, когда условная вероятность $\mathsf{P}(A_1 \mid A_2)$ события A_1 (при условии наступления события A_2) равна безусловной вероятности этого события:

$$\mathsf{P}(A_1 \mid A_2) = \mathsf{P}(A_1)$$

(события A_1 и A_2 здесь можно поменять местами).

Пример. Рассмотрим следующий опыт. Из карточной колоды, содержащей 36 карт, наугад вытягивается одна карта. Пусть событие A_1 состоит в том, что это «пики», а событие A_2 — что это «дама». Являются ли независимыми эти события? Едва ли здесь легко дать ответ, основываясь лишь на интуиции. Элементарные же подсчеты показывают, что вероятность $\mathsf{P}(A_1)$ вытащить одну из имеющихся в колоде девяти карт пиковой масти есть $9/36 = 1/4$, вероятность $\mathsf{P}(A_2)$ вытащить одну из четырех «дам» есть $4/36 = 1/9$, вероятность $\mathsf{P}(A_1A_2)$ извлечь «даму пик» есть $1/36$, т. е. $\mathsf{P}(A_1A_2) = \mathsf{P}(A_1) \cdot \mathsf{P}(A_2)$. Таким образом, в данном случае события A_1 и A_2 являются независимыми.

Пример. Предположим, что бросаются две игральные кости. Пусть событие A_1 состоит в том, что «нечетная грань выпадает на первой кости», A_2 — «нечетная грань выпадет на второй кости» и A_3 — «сумма выпавших очков является нечетной». Естественно считать, что исход бросания одной кости никак не влияет на исход бросания другой, так что события A_1 и A_2 независимы друг от друга, причем $\mathsf{P}(A_1) = \mathsf{P}(A_2) = 1/2$. При одном из условий A_1 или A_2 событие A_3 наступает тогда и только тогда, когда на второй или первой кости соответственно выпадает четное число очков, и легко видеть, что

$$\mathsf{P}(A_3 \mid A_1) = \mathsf{P}(A_3 \mid A_2) = \mathsf{P}(A_3) = 1/2.$$

Таким образом, A_1 и A_2, A_2 и A_3, A_3 и A_1 представляют собой пары независимых событий. В то же время при условии одновременного наступления событий A_1 и A_2 событие A_3 просто невозможно, так что нельзя считать событие A_3 независимым от совокупности событий A_1 и A_2.

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots$ являются *взаимно независимыми*, если вероятность пересечения событий $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ при любых различных $i_1, \ldots, i_n$ равна произведению вероятностей отдельных событий:

$$\mathsf{P}\left(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\right) = \mathsf{P}\left(A_{i_1}\right) \ldots \mathsf{P}\left(A_{i_n}\right) \text{ *)}.$$

Закон нуля или единицы. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — некоторая последовательность взаимно независимых событий, и пусть B — любое событие, наступление которого зависит от исходов «бесконечно удаленных» событий $A_n, A_{n+1}, \ldots$, где n может быть взято сколь угодно большим. Вероятность $\mathsf{P}(B)$ любого такого события равна 0 или 1.

Пример. Пусть B означает, что происходит бесконечное число событий из $A_1, A_2, \ldots$ Согласно закону нуля или единицы, вероятность $\mathsf{P}(B)$ события B равна 0 или 1. Если ряд из вероятностей рассматриваемых событий $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$ расходится, то $\mathsf{P}(B) = 1$; если же данный ряд сходится, то $\mathsf{P}(B) = 0$. Этот результат носит название леммы Бореля — Кантелли (см. с. 20).

3. Количество информации. Как количественно оценить ту или иную информацию? Если речь идет об информации, которая заключена в некотором письменном тексте, то при самом грубом подходе предположительно можно измерить ее длиной текста. При этом, конечно, нужно выбрать какой-то подходящий способ записи, какое-то подходящее правило кодирования информации.

Пусть имеется N каких-либо объектов. Для их обозначения воспользуемся так называемым двоичным кодом, сопоставив каждому объекту соответствующую кодовую комбинацию вида $(a_1, \ldots, a_d)$, где символы a_i принимают одно из двух возможных значений 0 или 1 и длина d всех кодовых комбинаций одна и та

---

*) В связи с понятием независимости много интересного можно найти в книге [43].

же. Всего имеется 2^d различных кодовых комбинаций такого типа. Следовательно, чтобы различать N объектов, нужно выбрать длину d кодовой комбинации так, чтобы имело место неравенство $N \leqslant 2^d$. Наименьшее d, при котором такое неравенство справедливо, есть натуральное число, удовлетворяющее соотношению

$$0 \leqslant d - \log_2 N < 1.$$

Видно, что величина

$$I = \log_2 N$$

характеризует длину наиболее экономных кодовых комбинаций, при помощи которых можно описать N различных объектов.

Рассмотрим опыт, результатом которого может быть одно из N несовместных событий $A_1, \ldots, A_N$, имеющих вероятности

$$p_1 = \mathsf{P}(A_1), \ldots, p_N = \mathsf{P}(A_N),$$

где $p_1 + \ldots + p_N = 1$. Предположим, что проводится n независимых и одинаковых испытаний, в каждом из которых наступает одно из рассматриваемых событий $A_1, \ldots, A_N$. Сообщение об исходе n испытаний можно условно записать в виде последовательности $(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n})$, где A_{i_k} — то событие из $A_1, \ldots, A_N$, которое имело место при k-м испытании. Так как частота $n(A)/n$ события A в большой серии испытаний практически совпадает с его вероятностью $\mathsf{P}(A)$, то в сообщении $(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n})$ событие A_1 практически встречается $n_1 \approx p_1 n$ раз, событие A_2 встречается $n_2 \approx p_2 n$ раз и т. д., событие A_N встречается $n_N \approx p_N n$ раз. Только такие исходы и рассматриваются ниже.

Число всех исходов, в которых событие A_1 наступает n_1 раз, событие A_2 наступает n_2 раз и т. д., событие A_N наступает ровно n_N раз $(n_1 + n_2 + \ldots + n_N = n)$, есть

$$N_n = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_N!}.$$

При $n \to \infty$ и $n_1 \approx p_1 n$, $n_2 \approx p_2 n$, $\ldots$, $n_N \approx p_N n$, используя формулу Стирлинга, получаем

$$\log_2 N_n \approx$$

$$\approx n \log_2 n - \sum_{i=1}^{n} n p_i \log_2 (n p_i) + \left(\log_2 \sqrt{2\pi n} - \sum_{i=1}^{N} \log_2 \sqrt{2\pi n_i} \right),$$

$$\log_2 N_n \approx -n \sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i.$$

Если для обозначения сообщения $(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n})$ воспользоваться двоичным кодом, то, как было показано выше, длина наиболее экономной кодовой комбинации будет приближенно равна

$$d_n \approx \log_2 N_n \approx -n \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i.$$

В среднем на каждое из n испытаний это составит величину

$$I(p_1, \ldots, p_N) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i. \tag{3.5}$$

В теории вероятностей величина I, определяемая формулой (3.5), принята за *количество информации*, которую в среднем несет сообщение о наступлении одного из событий $A_1, \ldots, A_N$ в каждом отдельном испытании. Для равновероятных событий эта величина есть

$$I = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N} = \log_2 N.$$

К выражению (3.5) для количества информации $I(p_1, \ldots, p_N)$ можно прийти и совсем другим путем, отправляясь от нескольких простых требований, которые естественно предъявить к величине, количественно оценивающей информацию. Именно, во-первых, функция $I(p_1, \ldots, p_N)$ не должна меняться при любой перестановке аргументов $p_1, \ldots, p_N$, так как при этом система событий $A_1, \ldots, A_N$ остается неизменной. Во-вторых, если уже известно, что произошло событие $B_1 = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$ (т. е. если наступил один из исходов $A_1, \ldots, A_m$), то, согласно принятым обозначениям, количество информации должно выражаться величиной

$$I_1 = I(p_1/q_1, \ldots, p_m/q_1, 0, \ldots, 0),$$

где $q_1 = \sum_{k=1}^{m} p_k = \mathsf{P}(B_1)$ и $p_i/q_1 = \mathsf{P}(A_i \mid B_1)$ суть вероятности исходов A_i $(i = 1, \ldots, m)$ при условии B_1. Аналогично при условии наступления события $B_2 = \bigcup_{k=m+1}^{N} A_k$ количество информации должно выражаться величиной

$$I_2 = I(0, \ldots, 0, p_{m+1}/q_2, \ldots, p_N/q_2),$$

где $q_2 = \sum_{k=m+1}^{N} p_k = \mathsf{P}(B_2)$. Естественно потребовать, чтобы среднее количество информации $I(p_1, \ldots, p_N)$ было связано с количествами I_1 и I_2 соотношением

$$I(p_1, \ldots, p_N) = q_1 \cdot I(p_1/q_1, \ldots, p_m/q_1, 0, \ldots, 0) + \\ + q_2 \cdot I(0, \ldots, 0, p_{m+1}/q_2, \ldots, p_N/q_2),$$

Если считать функцию $I(p_1, \ldots, p_N)$ непрерывно зависящей от аргументов $p_1, \ldots, p_N$, то перечисленные требования определяют $I(p_1, \ldots, p_N)$ однозначно с точностью до постоянного множителя. Именно, функция $I(p_1, \ldots, p_N)$ обязательно должна иметь вид

$$I(p_1, \ldots, p_N) = -c \sum_{k=1}^{N} p_k \log p_k,$$

где c — некоторая постоянная (основание системы логарифмов может быть выбрано произвольным).

Экспериментальное подтверждение правильности определения количества информации было получено в результате достаточно большого практического опыта. Было обнаружено, в частности, что передача информации в живом организме происходит таким образом, что затрачиваемое на это время пропорционально количеству информации, вычисляемому по формуле (3.5). Примером подобного рода может служить один из простейших опытов по определению среднего времени психических реакций. Опыт заключается в том, что перед испытуемым человеком зажигается одна из N лампочек, на которую он должен указать. Проводится большая серия испытаний, в которых i-я лампочка зажигается с определенной вероятностью p_i $(i = 1, \ldots, N)$. Оказывается, среднее время, необходимое для правильного ответа испытуемого, пропорционально именно величине $I = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i$ (а не числу лампочек N, как можно было бы ожидать) [119].

Вообще *количество информации* о событиях $A_1, A_2, \ldots$, которое несет сообщение о наступлении одного из событий $B_1, B_2, \ldots$, определяется формулой

$$I = \sum_{i,j} \mathsf{P}(A_i B_j) \log \frac{\mathsf{P}(A_i B_j)}{\mathsf{P}(A_i)\,\mathsf{P}(B_j)} \tag{3.6}$$

(здесь $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2, \ldots$ — некоторые полные системы непересекающихся событий).

Пример. Предположим, что в некотором пункте за весенне-летний сезон примерно в один из пяти дней бывает дождь, в остальные дни — ясная погода. Предположим, что накануне каждого дня дается прогноз погоды. Естественно, этот прогноз может оказаться ошибочным. Предположим, что прогноз дождя бывает ошибочным приблизительно в половине всех случаев (правильно предсказать маловероятное событие — дождь — весьма трудно), а прогноз ясной погоды действует точнее и оказывается ошибочным лишь в одном случае из десяти. Каково количество информации, которое в среднем несет в себе прогноз погоды?

Введем следующие обозначения: A_1 — дождь, A_2 — ясная погода, B_1 — прогноз дождя, B_2 — прогноз ясной погоды. Следует положить

$$\mathsf{P}(A_1)=1/5, \qquad \mathsf{P}(A_2)=4/5,$$
$$\mathsf{P}(A_1 \mid B_1)=1/2, \qquad \mathsf{P}(A_1 \mid B_2)=1/10.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}(A_1)=\mathsf{P}(A_1 \mid B_1)\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(A_1 \mid B_2)\mathsf{P}(B_2)$$

находим

$$\mathsf{P}(B_1)=1/4, \qquad \mathsf{P}(B_2)=3/4,$$
$$\mathsf{P}(A_1B_1)=1/8, \qquad \mathsf{P}(A_1B_2)=3/40,$$
$$\mathsf{P}(A_2B_1)=1/8, \qquad \mathsf{P}(A_2B_2)=27/40,$$

откуда, согласно формуле (3.6), искомое количество информации есть

$$I=\frac{1}{8}\log_2\frac{5}{2}+\frac{3}{40}\log_2\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\log_2\frac{5}{8}+\frac{27}{40}\log_2\frac{9}{8}\approx 0{,}120 \text{ (двоичных единиц).}$$

Насколько больше инфорации нес бы абсолютно безошибочный прогноз? Для ответа на этот вопрос следует положить $B_1=A_1$, $B_2=A_2$, и тогда, согласно формуле (3.5), получим

$$I=-\frac{1}{5}\log_2\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\log_2\frac{4}{5}\approx 0{,}722 \text{ (двоичных единиц).}$$

§ 4. Случайные величины

1. Случайные величины и их распределения вероятностей. Числовая величина ξ, значение которой может меняться в зависимости от случая, называется *случайной величиной*. В рамках общей теоретико-вероятностной схемы, когда предполагается, что имеется некоторое пространство Ω элементарных исходов ω, случайной величиной ξ называют функцию от элементарных исходов ω:

$$\xi=\xi(\omega), \qquad \omega\in\Omega.$$

Различают два основных типа случайных величин: *дискретные* и *непрерывно распределенные*. Дискретная величина $\xi=\xi(\omega)$ в зависимости от элементарных исходов ω принимает конечное или счетное число различных значений x с соответствующими вероятностями

$$P_\xi(x)=\mathsf{P}\{\xi=x\}$$

(здесь символом $\{\xi=x\}$ обозначено событие, состоящее в том, что случайная величина ξ принимает значение x, т. е. $\{\xi=x\}=\{\omega\colon\ \xi(\omega)=x\}$). Вероятность события $x'\leqslant\xi\leqslant x''$, состоящего в том, что случайная величина ξ принимает одно из значений x, лежащих в пределах $x' \leqslant x \leqslant x''$, есть

$$\mathsf{P}\{x' \leqslant \xi \leqslant x''\} = \sum_{x'}^{x''} P_\xi(x)$$

(суммирование производится по конечному или счетному числу значений x, которые может принимать дискретная случайная величина ξ); $P_\xi(x)$ как функция всех возможных значений x случайной величины ξ называется *распределением вероятностей* этой величины.

Пусть ξ — произвольная случайная величина. Функция $F_\xi(x)$, определяемая для всех x на действительной прямой как

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}, \quad -\infty < x < \infty,$$

называется *функцией распределения* вероятностей случайной величины ξ. При любых x' и x'' $(x' < x'')$

$$\mathsf{P}\{x' < \xi \leqslant x''\} = F_\xi(x'') - F_\xi(x').$$

Видно, что функция распределения $F_\xi(x)$ монотонно не убывает; кроме того, она непрерывна справа:

$$F_\xi(x+0) = \lim_{h \to +0} F_\xi(x+h) = F_\xi(x),$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1.$$

Всякая функция, обладающая перечисленными выше свойствами, может служить функцией распределения вероятностей.

Для дискретной случайной величины ξ функция распределения $F_\xi(x)$ является ступенчатой, сохраняя постоянное значение

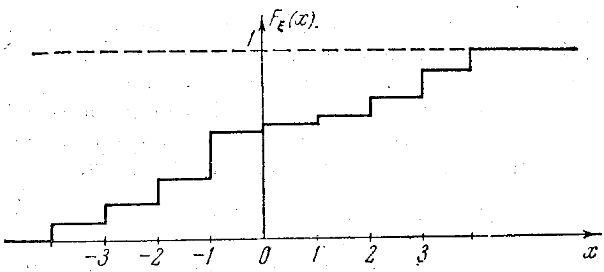


Рис. 7

на каждом полуинтервале $(x', x'']$, не содержащем точек x с $P_\xi(x) > 0$; в указанных точках x функция $F_\xi(x)$ меняется скачком:

$$F_\xi(x) - F_\xi(x-0) = P_\xi(x)$$

На рис. 7 изображен график некоторой ступенчатой функции распределения.

Если функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ является непрерывной, то величина ξ принимает каждое отдельное значение x лишь с вероятностью, равной нулю. Если функция распределения $F_\xi(x)$ не только непрерывна, но и дифференцируема, то $p_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* (или, короче, *плотностью вероятности*), а сама ξ — *непрерывно распределенной* случайной величиной. Плотность распределения $p_\xi(x)$ является неотрицательной функцией такой, что при любых x' и x'' $(x' < x'')$

$$\mathsf{P}\{x' \leqslant \xi \leqslant x''\} = \int_{x'}^{x''} p_\xi(x)\,dx.$$

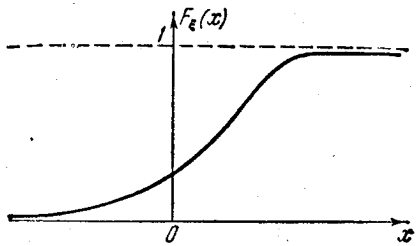


Рис. 8

В обозначениях функции распределения и плотности вероятности индекс ξ часто опускают и пишут просто $F(x)$ и $p(x)$. На рис. 8 изображен график некоторой непрерывной функции распределения $F_\xi(x)$.

Пример. Предположим, что на отрезок $[a, b]$ действительной прямой наугад бросается точка ξ. Вероятность попадания в заданный отрезок $[x', x'']$ есть

$$\mathsf{P}\{x' \leqslant \xi \leqslant x''\} = \frac{x'' - x'}{b - a} = \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{b - a}, \quad a \leqslant x' \leqslant x'' \leqslant b.$$

Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{при} \quad x < a, \ x > b. \end{cases}$$

Такое распределение вероятностей называется равномерным (на отрезке $[a, b]$).

Совместное распределение вероятностей. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — совокупность нескольких случайных величин или, как еще говорят, *векторная случайная величина*, причем $\xi_1, \ldots, \xi_n$ являются дискретными величинами. Событие $\{\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n\}$, состоящее в том, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ принимают соответствующие значения $x_1, \ldots, x_n$, имеет определенную вероятность

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}\{\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n\}.$$

Вероятности $P(x_1, \ldots, x_n)$, где переменные $x_1, \ldots, x_n$ пробегают все возможные значения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, образуют так называемое *совместное распределение вероятностей* этих величин. Вероятность события $\{x_1' \leqslant \xi_1 \leqslant x_1'', \ldots, x_n' \leqslant \xi_n \leqslant x_n''\}$, состоящего в том, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ лежат в соответствующих пределах $x_1' \leqslant \xi_1 \leqslant x_1'', \ldots, x_n' \leqslant \xi_n \leqslant x_n''$, есть

$$\mathsf{P}\{x_1' \leqslant \xi_1 \leqslant x_1'', \ldots, x_n' \leqslant \xi_n \leqslant x_n''\} = \sum_{x_1'}^{x_1''} \ldots \sum_{x_n'}^{x_n''} P(x_1, \ldots, x_n).$$

Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ являются непрерывно распределенными. Если существует неотрицательная функция $p(x_1, \ldots, x_n)$ от $x_1, \ldots, x_n$ такая, что для всех $x_1' \leqslant x_1'', \ldots, x_n' \leqslant x_n''$

$$\mathsf{P}\{x_1' \leqslant \xi_1 \leqslant x_1'', \ldots, x_n' \leqslant \xi_n \leqslant x_n''\} = \int_{x_1'}^{x_1''} \ldots \int_{x_n'}^{x_n''} p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

то она называется *плотностью совместного распределения вероятностей* величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Пусть случайная величина η есть функция от $\xi_1, \ldots, \xi_n$: $\eta = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тогда

$$\mathsf{P}\{y' \leqslant \eta \leqslant y''\} = \sum_{y' \leqslant \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant y''} \ldots \sum P(x_1, \ldots, x_n)$$

для дискретных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (суммирование производится по всем тем $x_1, \ldots, x_n$, для которых выполнено неравенство $y' \leqslant \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant y''$) и

$$\mathsf{P}\{y' \leqslant \eta \leqslant y''\} = \int_{y' \leqslant \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant y''} \ldots \int p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

для непрерывно распределенных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (интегрирование производится по области переменных $x_1, \ldots, x_n$, в которой $y' \leqslant \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant y''$).

Независимые величины. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми*, если взаимно независимы всевозможные события вида $\{x_1' \leqslant \xi_1 \leqslant x_1''\}, \ldots, \{x_n' \leqslant \xi_n \leqslant x_n''\}$. Дискретные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда их совместное распределение вероятностей таково, что

$$P_\xi(x_1, \ldots, x_n) = P_{\xi_1}(x_1) \ldots P_{\xi_n}(x_n)$$

(здесь $P_{\xi_k}(x_k)$ есть распределение отдельно взятой величины ξ_k, $k = 1, \ldots, n$). Непрерывные случайные величины независимы тогда и только тогда, когда плотность их совместного распределения такова, что

$$p_\xi(x_1, \ldots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \ldots p_{\xi_n}(x_n)$$

(здесь $p_{\xi_k}(x_k)$ есть плотность распределения отдельно взятой величины ξ_k, $k = 1, \ldots, n$).

Пример. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины с плотностями распределений $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Каково распределение вероятностей случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$?

Совместная плотность распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 есть $p_1(x_1) \cdot p_2(x_2)$. Имеем

$$\mathsf{P}\{y' \leqslant \eta \leqslant y''\} =$$
$$= \iint\limits_{y' \leqslant x_1 + x_2 \leqslant y''} p_1(x_1)\, p_2(x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{y'}^{y''} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(y - x)\, p_2(x)\, dx\right] dy.$$

Случайная величина η имеет плотность распределения

$$p(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(y - x)\, p_2(x)\, dx.$$

Таким образом, плотность $p(y)$ есть *свертка* (*композиция*) исходных плотностей $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Например, если ξ_1 и ξ_2 равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$, то плотность $p(y)$ величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$ (рис. 9) есть

$$p(y) = \begin{cases} y & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 2 - y & \text{при } 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

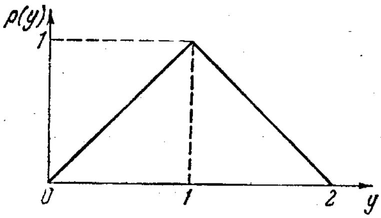


Рис. 9

2. Математическое ожидание, дисперсия и коэффициент корреляции. *Математическим ожиданием* или *средним значением* случайной величины ξ называется постоянная, обозначаемая символом $\mathsf{M}\xi$ и определяемая следующим образом:

$$\mathsf{M}\xi = \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} x P_\xi(x) & \text{для дискретной } \xi, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\, dx & \text{для непрерывной } \xi. \end{cases}$$

Пример. Пусть ξ принимает с равными вероятностями одно из N возможных значений $x = x_1, \ldots, x_N$. Тогда ее среднее значение есть

$$\mathsf{M}\xi = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k.$$

Если ξ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[a, b]$, то ее среднее значение есть

$$\mathsf{M}\xi = \int\limits_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2}.$$

Пусть η — некоторая случайная величина, являющаяся функцией от $\xi_1, \ldots, \xi_n$: $\eta = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тогда

$$\mathsf{M}\xi = \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n) P_{\xi}(x_1, \ldots, x_n) \\ \qquad\qquad \text{для дискретных } \xi_1, \ldots, \xi_n, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n) p_{\xi}(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n \\ \qquad\qquad \text{для непрерывных } \xi_1, \ldots, \xi_n. \end{cases}$$

Простейшие свойства математического ожидания:

а) $\mathsf{M}1 = 1$;

б) для любой постоянной c

$$\mathsf{M}(c\xi) = c\mathsf{M}\xi;$$

в) для любых ξ_1 и ξ_2, имеющих математические ожидания $\mathsf{M}\xi_1$ и $\mathsf{M}\xi_2$,

$$\mathsf{M}(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{M}\xi_1 + \mathsf{M}\xi_2;$$

г) если случайные величины $\xi_1 = \xi_1(\omega)$ и $\xi_2 = \xi_2(\omega)$ таковы, что $\xi_1(\omega) \leqslant \xi_2(\omega)$ при всех элементарных исходах ω, то

$$\mathsf{M}\xi_1 \leqslant \mathsf{M}\xi_2;$$

д) если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, то

$$\mathsf{M}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \mathsf{M}\xi_1 \cdot \mathsf{M}\xi_2.$$

Дисперсией случайной величины ξ называется постоянная, обозначаемая символом $\mathsf{D}\xi$ и определяемая равенством

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - a)^2, \quad a = \mathsf{M}\xi.$$

Простейшие свойства дисперсии:

а) $\mathsf{D}1 = 0$;

б) для любой постоянной c

$$\mathsf{D}(c\xi) = c^2\mathsf{D}\xi;$$

в) если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, то

$$\mathsf{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{D}\xi_1 + \mathsf{D}\xi_2.$$

Неравенства Чебышева. Если случайная величина ξ принимает лишь неотрицательные значения и математическое ожидание

$\mathsf{M}\xi$ существует, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathsf{M}\xi.$$

Это неравенство часто называют *первым неравенством Чебышева*. *Второе неравенство*, по сути дела, есть следствие первого. Именно, если существует дисперсия $\mathsf{D}\xi$, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\mathsf{P}\{|\xi - a| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathsf{D}\xi, \quad a = \mathsf{M}\xi.$$

Второе неравенство Чебышева показывает, что если дисперсия $\mathsf{D}\xi$ достаточно мала (скажем, $\mathsf{D}\xi \leqslant \delta\varepsilon^2$), то с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, зависящее от случая значение $\xi = \xi(\omega)$ будет отличаться от своего среднего значения $a = \mathsf{M}\xi$ не более чем на ε, т. е.

$$\mathsf{P}\{a - \varepsilon \leqslant \xi \leqslant a + \varepsilon\} \geqslant 1 - \delta.$$

Закон больших чисел. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие одно и то же распределение вероятностей, в частности одни и те же математические ожидания $a = \mathsf{M}\xi_k$ и дисперсии $\sigma^2 = \mathsf{D}\xi_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, при достаточно большом n зависящее от случая арифметическое среднее $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)$ с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, будет отличаться от математического ожидания a лишь не более чем на ε.

Этот факт является следствием второго неравенства Чебышева, согласно которому

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| \leqslant \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Иными словами, если $n \geqslant \sigma^2/(\delta\varepsilon^2)$, то с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, будут справедливы неравенства

$$a - \varepsilon \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \leqslant a + \varepsilon.$$

Если мы практически пренебрегаем возможностью наступления событий с вероятностью, меньшей δ, и не делаем различия между величинами, отличающимися не более чем на ε, то при достаточно больших n (например, при $n \geqslant \sigma^2/\delta\varepsilon^2$) можно считать, что арифметическое среднее $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$ рассматриваемых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ практически совпадает с их математическим ожиданием:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \approx a.$$

Этот факт носит название *закона больших чисел.*

Частота и вероятность. Предположим, что проводится серия одинаковых и независимых между собой испытаний, в каждом из которых может осуществиться либо исход A, либо исход $\bar{A}$. Если определить случайные величины ξ_k, положив в k-м испытании $\xi_k = 1$ при наступлении события A и $\xi_k = 0$ при наступлении события $\bar{A}$, то частота $n(A)/n$ события A в серии из n испытаний будет совпадать с арифметическим средним величин ξ_k:

$$\frac{n(A)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k.$$

Вероятность события A совпадает с математическим ожиданием $\mathsf{M}\xi_k$ каждого из слагаемых: $\mathsf{P}(A) = \mathsf{M}\xi_k$. Поэтому, согласно закону больших чисел,

$$n(A)/n \approx \mathsf{P}(A),$$

когда число испытаний n достаточно велико.

Связь различных случайных величин. Коэффициент корреляции. Простейшей характеристикой связи случайных величин ξ_1 и ξ_2 является так называемый *коэффициент корреляции*, определяемый формулой

$$r = \frac{\mathsf{M}(\xi_1 - a_1)(\xi_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2},$$

где

$$a_1 = \mathsf{M}\xi_1, \quad a_2 = \mathsf{M}\xi_2, \quad \sigma_1^2 = \mathsf{D}\xi_1, \quad \sigma_2^2 = \mathsf{D}\xi_2.$$

Для независимых величин ξ_1 и ξ_2 коэффициент корреляции равен 0. В общем случае он всегда лежит в пределах $-1 \leqslant r \leqslant 1$. Если $r = -1$ или $r = 1$, то ξ_2 — линейная функция от ξ_1:

$$\xi_2 = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\xi_1 - a_1) + a_2.$$

Вообще, каков бы ни был коэффициент корреляции, величина $\hat{\xi}_2 = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\xi_1 - a_1) + a_2$ дает *наилучшее линейное приближение* для случайной величины ξ_2, наилучшее в том смысле, что

$$\mathsf{M}(\xi_2 - \hat{\xi}_2)^2 = \min_{c_1, c_2}\mathsf{M}(\xi_2 - c_1\xi_1 - c_2)^2,$$

где min берется по всевозможным постоянным c_1 и c_2. Аналогично величина $\hat{\xi}_1 = r\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(\xi_2 - a_2) + a_1$ является наилучшим линейным приближением для ξ_1.

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются *некоррелированными*, если их коэффициент корреляции равен 0. Например, не коррелированы наилучшее линейное приближение $\hat{\xi}_1$ и разность $\xi_2 - \hat{\xi}_2$.

Коэффициент корреляции случайных величин ξ_1 и ξ_2, грубо говоря, характеризует лишь «степень линейной зависимости» ξ_1 и ξ_2. Пусть, например, ξ_1 — симметрично распределенная величина с плотностью $p_\xi(x)$ такой, что $p_\xi(-x) = p_\xi(x)$, и пусть $\xi_2 = |\xi_1|$. Тогда, хотя величина ξ_2 и является функцией от ξ_1, коэффициент корреляции величин ξ_1 и ξ_2 будет равен 0, поскольку

$$\mathsf{M}\xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx = 0,$$

$$\mathsf{M}\xi_1\xi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x\,|x|\,p_\xi(x)\,dx = 0.$$

3. Целочисленные величины и производящие функции. Пусть ξ — целочисленная случайная величина, принимающая в зависимости от случайного исхода одно из значений $k = 0, 1, 2, \ldots$, с соответствующими вероятностями $P_\xi(k)$. Функция $\varphi_\xi(z)$ переменной z ($|z| \leqslant 1$), определяемая формулой

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_\xi(k) z^k,$$

называется *производящей функцией* распределения случайной величины ξ. Она является аналитической функцией от z ($|z| < 1$), и приведенная формула дает ее разложение в степенной ряд. Распределение вероятностей $P_\xi(k)$ однозначно определяется своей производящей функцией:

$$P_\xi(k) = \frac{1}{k!}\varphi_\xi^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\varphi_\xi^{(k)}(0)$ — значение производной $d^k\varphi_\xi(z)/dz^k$ в точке $z = 0$.

Производящая функция $\varphi_\xi(z)$ при фиксированном z совпадает с математическим ожиданием случайной величины $\eta = z^\xi$:

$$\varphi_\xi(z) = \mathsf{M}z^\xi.$$

Если случайная величина ξ имеет математическое ожидание $\mathsf{M}\xi$ и дисперсию $\mathsf{D}\xi$, то

$$\mathsf{M}\xi = \varphi_\xi'(1),$$

$$\mathsf{D}\xi = \varphi_\xi''(1) + \varphi_\xi'(1) - [\varphi_\xi'(1)]^2.$$

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с производящими функциями $\varphi_{\xi_1}(z), \ldots, \varphi_{\xi_n}(z)$, и пусть $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Имеет место следующая формула:

$$\varphi_\xi(z) = \varphi_{\xi_1}(z) \ldots \varphi_{\xi_n}(z).$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие одно и то же распределение вероятностей с производящей функцией $\varphi(z)$, и $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ — сумма некоторого числа этих величин, где число слагаемых ν является случайным, но не зависящим от $\xi_1, \xi_2, \ldots$, и имеет распределение вероятностей с производящей функцией $\psi(z)$. Производящая функция $\varphi_\xi(z)$ суммы ξ может быть найдена по формуле

$$\varphi_\xi(z) = \psi[\varphi(z)].$$

Сходимость распределений. Пусть ξ_n — последовательность случайных величин, $P_n(k)$ — распределение вероятностей и $\varphi_n(z)$ — производящая функция *) случайной величины ξ_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Распределение вероятностей $P(k)$ называется *предельным* для $P_n(k)$ при $n \to \infty$, если

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = P(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Сходимость $P_n(k) \to P(k)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$$

равномерно по z в каждом круге $|z| \leqslant r < 1$, где $\varphi(z)$ — производящая функция предельного распределения.

§ 5. Некоторые распределения вероятностей

1. Распределения вероятностей, связанные с законом Пуассона.

Распределение Пуассона. Так называется распределение вероятностей вида

$$P(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Оно определяется единственным положительным параметром a. Если ξ — случайная величина, имеющая распределение Пуассона, то соответствующий параметр a есть среднее значение этой

---

*) Обозначения $P_n(k)$ и $\varphi_n(z)$ представляют собой более простую форму записи распределения вероятностей $P_{\xi_n}(k)$ и производящей функции $\varphi_{\xi_n}(z)$.

случайной величины:

$$a = \mathsf{M}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kP(k).$$

Производящая функция $\varphi(z)$ пуассоновского распределения имеет вид

$$\varphi(z) = e^{a(z-1)}.$$

Функция распределения Пуассона $F(x)$ в точках $x = 0, 1, 2, \ldots$ выражается формулой

$$F(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \frac{1}{(x+1)!} \int_a^{\infty} y^x e^{-y} dy.$$

Однородный поток событий. Предположим, что с течением времени t регистрируется наступление некоторых событий. Например, регистрируются требования, последовательно поступающие на некоторую систему обслуживания (скажем, поступают запросы в справочное бюро, к бензозаправочной станции подъезжают автомашины и т. п.).

Предположим, что рассматриваемый поток событий обладает следующими свойствами:

а) вероятность отдельного события за малый промежуток времени Δt есть $\lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, где λ — некоторая положительная постоянная и $o(\Delta t)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δt;

б) вероятность наступления более чем одного события есть $o(\Delta t)$;

в) количества событий $\xi(\Delta_1), \ldots, \xi(\Delta_n)$, наступивших на непересекающихся временны́х интервалах $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, представляют собой взаимно независимые случайные величины.

Рассмотрим фиксированный промежуток времени $(0, t)$. Если разбить его на n равных частей $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, то общее число $\xi(t)$ наступивших за время t событий можно представить в виде

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\Delta_k),$$

где случайные величины $\xi_k(\Delta_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ независимы и имеют одинаковое распределение вероятностей с производящей функцией $\varphi_n(z)$, которая с точностью до малых высшего порядка (по сравнению с $1/n$) есть

$$\varphi_n(z) = \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right) + \frac{\lambda t}{n} z + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{\lambda t (z-1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Производящая функция $\varphi(z)$ случайной величины $\xi(t)$ есть, следовательно,

$$\varphi(z) = [\varphi_n(z)]^n = \left[1 + \frac{\lambda t(z-1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем окончательную формулу

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{\lambda t(z-1)}{n}\right]^n = e^{\lambda t(z-1)}.$$

Следовательно, $\varphi(z)$ есть производящая функция распределения Пуассона с параметром $a = \lambda t$. Таким образом, общее число наступающих за время t событий является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона:

$$\mathsf{P}\{\xi(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где введенная ранее постоянная λ равна среднему числу событий, наступающих за единицу времени: $\lambda t = \mathsf{M}\xi(t)$.

Показательное распределение. В рассмотренном выше потоке событий, скажем потоке требований, поступающих на некоторую систему обслуживания, время ожидания первого требования является случайным. Обозначим это время τ. Распределение вероятностей случайной величины τ таково, что

$$\mathsf{P}\{\tau > t\} = \mathsf{P}\{\xi(t) = 0\} = e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0.$$

Это распределение вероятностей называется *показательным*. Оно имеет плотность вида

$$p(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Среднее значение случайной величины τ — среднее время ожидания — есть

$$\mathsf{M}\tau = \int_0^\infty tp(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Сложное распределение Пуассона. Пусть имеются некоторая целочисленная случайная величина ν, распределенная по закону Пуассона с параметром $a = \mathsf{M}\nu$, и совокупность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ целочисленных, одинаково распределенных независимых случайных величин, не зависящих от числа ν. Распределение вероятностей суммы $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ случайного числа слагаемых $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ носит название *сложного пуассоновского распределения.* Производящая функция $\psi(z)$ этого распределения дается формулой

$$\psi(z) = e^{a[\varphi(z)-1]},$$

где $\varphi(z)$ — производящая функция распределения отдельных слагаемых.

2. Распределения вероятностей, связанные с нормальным законом.

Нормальное распределение. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, и пусть $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Если сами слагаемые $\xi_1, \ldots, \xi_n$ достаточно малы, а число их n достаточно велико (точнее, если при $n \to \infty$ математическое ожидание $\mathsf{M}\xi$ и дисперсия $\mathsf{D}\xi$ величины $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ таковы, что $\mathsf{M}\xi \sim a$, $\mathsf{D}\xi \sim \sigma^2$), то

$$\mathsf{P}\{x' \leqslant \xi \leqslant x''\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{x'}^{x''} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx$$

для любых x' и x'' $(x' < x'')$. Предельное распределение вероятностей, описываемое плотностью вида

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty,$$

называется *нормальным* или *гауссовским распределением.* Оно определяется двумя параметрами a и σ. Если ξ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ, то $a = \mathsf{M}\xi$ есть среднее значение этой величины, $\sigma^2 = \mathsf{D}\xi$ — ее дисперсия:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx.$$

Преобразованием $u = (x-a)/\sigma$ нормальное распределение с произвольными параметрами a и σ приводится к стандартному нормальному закону с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ и плотностью

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}, \quad -\infty < u < \infty,$$

график которой изображен на рис. 10.

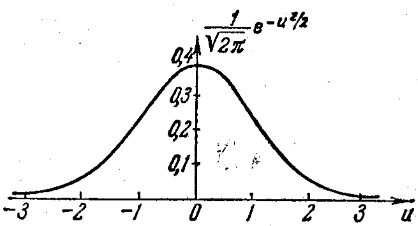


Рис. 10

Имеются таблицы функции нормального распределения [11, 45, 93]

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du, \quad -\infty < x < \infty.$$

Функция $\Phi(x)$ удовлетворяет тождеству $\Phi(x) + \Phi(-x) \equiv 1$. Если $x \to \infty$, то имеет место асимптотическая формула

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^6} + \ldots\right).$$

Для конечных значений x абсолютная погрешность этой формулы не превосходит первого отброшенного члена. Например, если $x \geqslant 4$, то

$$0 < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{x^4}\right) - [1 - \Phi(x)] < \\ < \frac{15}{x^7\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \leqslant 2\cdot 10^{-7}.$$

Если ξ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ, то

$$\mathsf{P}\{a + \sigma x' \leqslant \xi \leqslant a + \sigma x''\} = \Phi(x'') - \Phi(x')$$

при любых x' и x'' таких, что $x' < x''$. В частности, при $x'' = -x' = x$

$$\mathsf{P}\{a - \sigma x \leqslant \xi \leqslant a + \sigma x\} = 2\Phi(x) - 1.$$

Численные значения этих вероятностей приведены в табл. 2.

В таблице даны значения интеграла

$$2\Phi(x) - 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-u^2/2} du$$

с тремя значащими цифрами. Например, если $x = 2{,}58$, то на пересечении строки 2,5 и столбца 08 находим число 012. Так как первые три цифры в столбце 00 соответствующей «зоны» есть 0,99, то искомое значение интеграла при $x = 2{,}58$ равно 0,99012.

Логарифмически нормальное распределение. Так называется распределение вероятностей неотрицательной случайной величины ξ, логарифм которой распределен по нормальному закону. Плотность логарифмически нормального распределения имеет вид

$$p(x) = \frac{\log e}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x} e^{-(\log x - a)^2/(2\sigma^2)}, \quad 0 < x < \infty,$$

где параметры a и σ суть $a = \mathsf{M}\log\xi$, $\sigma^2 = \mathsf{D}\log\xi$. На рис. 11 изображены графики плотностей $p(x)$, соответствующие значениям $a = 1$ и $\sigma = 0{,}1$; 0,3; 0,5.

Моменты случайной величины ξ, подчиняющейся логарифмически нормальному закону с параметрами a и σ, выражаются формулой

$$\mathsf{M}\xi^n = e^{na + n^2\sigma^2/2}.$$

Распределение χ^2 (хи-квадрат) и гамма-распределение. Так называется распределение вероятностей случайной величины χ^2 вида

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2,$$

Таблица 2

x	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0,0	0,000	008	016	024	032	040	048	056	064	072
1	080	088	096	108	111	119	127	135	143	151
2	159	166	174	182	190	197	205	213	221	228
3	236	243	251	259	266	274	281	289	296	303
4	311	318	326	333	340	347	354	362	369	376
0,5	0,383	390	397	404	411	418	425	431	438	445
6	451	458	465	471	478	484	491	497	503	510
7	516	522	528	535	541	547	553	559	565	570
8	576	582	588	593	599	605	610	616	621	627
9	632	637	642	648	653	658	663	668	673	678
1,0	0,683	688	692	697	702	706	711	715	720	724
1	729	733	737	742	746	750	754	758	762	766
2	770	774	778	781	785	789	792	796	799	803
3	806	810	813	816	820	823	826	829	832	835
4	838	841	844	847	850	853	856	858	861	864
1,5	0,866	869	871	874	876	879	881	884	886	888
6	0,980	893	895	897	899	011	031	051	070	090
7	0,9 109	127	146	164	181	199	216	233	249	265
8	281	297	312	328	316	357	371	385	399	412
9	426	439	451	464	447	488	500	512	523	534
2,0	0,9 545	556	566	576	586	596	606	615	625	634
1	643	651	660	668	676	684	692	700	707	715
2	722	729	736	743	749	756	762	768	774	780
3	786	791	797	802	807	812	817	822	827	832
4	836	840	845	849	853	857	861	865	869	872
2,5	0,9 876	879	883	886	889	892	895	898	012	040
6	0,99 068	095	121	146	171	195	219	241	264	285
7	307	532	347	367	386	404	422	439	456	473
8	489	605	520	535	549	563	576	590	602	615
9	627	739	650	661	672	682	692	702	712	721
3,0	0,99 730	839	747	755	763	771	779	786	793	800
1	806	813	819	825	831	837	842	848	853	858
2	0,99 863	067	872	876	880	885	889	892	896	900
3	0,999 033	367	100	132	162	192	221	248	275	301
4	326	550	374	396	418	439	460	480	499	517
3,5	0,999 535	652	568	584	600	615	629	643	656	669
6	682	794	705	717	727	738	748	757	767	776
7	784	893	801	809	816	823	830	837	843	849
8	0,999 855	061	867	872	877	882	887	891	896	900
	0,9999 038	077	115	151	185	218	251	281	311	339
4,0	0,9999 367									

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие одно и то же нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$; число n называется *числом степеней свободы* распределе-

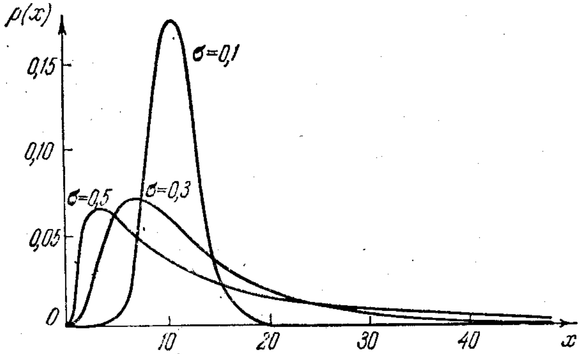


Рис. 11

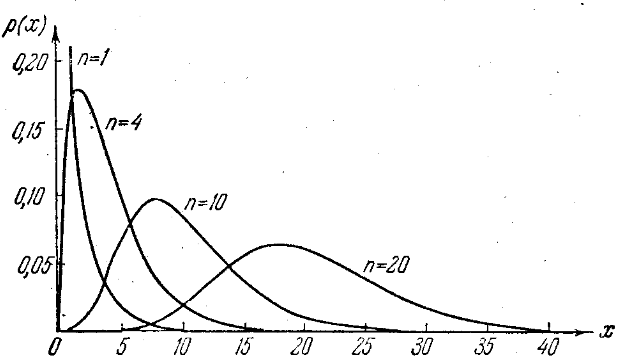


Рис. 12

ния χ^2. Соответствующая плотность (рис. 12) описывается формулой

$$p(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad 0 < x < \infty.$$

Распределение χ^2 представляет собой частный случай так называемого *гамма-распределения*, плотность которого выражается формулой *)

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

*) Пятизначные таблицы функции распределения χ^2 см. [11]. Значения функции гамма-распределения с семью десятичными знаками (при любых положительных α и β) можно вычислить с помощью таблиц [65].

где α и β — положительные параметры и

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy.$$

При любом действительном положительном α имеет место равенство

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha);$$

поэтому, если α — целое число, то

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!.$$

Так как $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, то в формуле плотности распределения χ^2

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}-1\right)!, & \text{если } n \text{ четное}, \\ \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, & \text{если } n \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Если $\alpha\to\infty$, то имеет место асимптотическая *формула Стирлинга*

$$\ln\Gamma(\alpha) \sim \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\ln\alpha - \alpha + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{k=1}^{s}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\cdot\frac{1}{\alpha^{2k-1}},$$

где B_r — числа Бернулли ($B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, ...), значения которых определяются тождеством

$$\sum_{r=0}^{\infty} B_r\frac{z^r}{r!} = \frac{z}{e^z-1}.$$

При всех положительных α справедливо неравенство

$$\left|\ln\Gamma(\alpha) - \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\ln\alpha + \alpha - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \sum_{k=1}^{s}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\cdot\frac{1}{\alpha^{2k-1}}\right| < \frac{|B_{2(s+1)}|}{2(s+1)(2s+1)\alpha^{2s+1}}.$$

Распределение χ. Так называют распределение квадратного корня

$$\sqrt{\chi^2} = \sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2},$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальному распределению с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$. Плотность распределения χ выражается формулой

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x\leqslant 0, \\ \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}x^{n-1}e^{-x^2/2}, & \text{если } x>0. \end{cases}$$

Моменты случайной величины χ вычисляются по формуле

$$\mathsf{M}\chi^m = \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}\int\limits_0^\infty x^{n+m-1}e^{-x^2/2}dx = 2^{m/2}\frac{\Gamma((n+m)/2)}{\Gamma(n/2)},$$

$$(n+m>0).$$

Пример. *Отраженное нормальное распределение* представляет собой распределение вероятностей модуля $|\xi|$ случайной величины ξ, подчиняющейся симметричному нормальному закону с параметрами $a=0$ и $\sigma>0$. Плотность отраженного нормального распределения выражается формулой

$$p(x) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-x^2/2}, \quad 0<x<\infty,$$

причем

$$\mathsf{M}|\xi|^m = \sigma^m \mathsf{M}\chi^m = \sigma^m 2^{m/2}\frac{\Gamma((m+1)/2)}{\sqrt{\pi}}.$$

Распределение Коши. Так называется распределение вероятностей с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty<x<\infty,$$

график которой изображен на рис. 13. Оно совпадает с распределением вероятностей отношения ξ_1/ξ_2 независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2, имеющих одно и то же нормальное распределение с параметрами $a=0$, $\sigma=1$. Такое же распределение вероятностей имеет $\operatorname{tg}\alpha$ — тангенс случайной величины α, равномерно распределенной на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$.

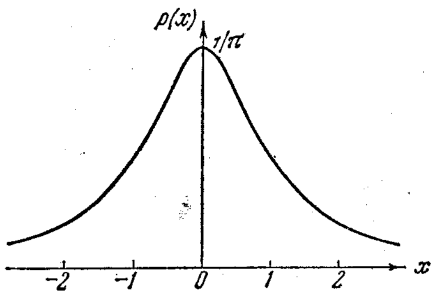


Рис. 13

Бета-распределение. Так называется распределение вероятностей с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(a, b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},$$

$$0<x<1.$$

Бета-распределение зависит от двух положительных параметров a и b. Нормирующий множитель $\mathrm{B}(a, b)$ (так называемая *бета-функция*) выражается формулой

$$\mathrm{B}(a, b) = \int\limits_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

где $\Gamma(\alpha)$ — определенная выше гамма-функция. Если a и b —

целые положительные числа, то

$$\mathrm{B}(a, b) = \frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

Функция бета-распределения *) представляет собой интеграл

$$F(x;\, a, b) = \frac{1}{\mathrm{B}(a, b)} \int_0^x y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,dy, \quad 0 < x < 1.$$

Если случайная величина ξ подчиняется бета-распределению, то ее математическое ожидание и дисперсия выражаются формулами

$$\mathsf{M}\xi = \frac{a}{a+b}, \quad \mathsf{D}\xi = \frac{ab}{(a+b)^2\,(a+b+1)}.$$

3. Распределения вероятностей, связанные с испытаниями Бернулли. Одинаковые и независимые между собой испытания, в каждом из которых рассматривается некоторое событие A, наступающее с положительной вероятностью $p = \mathsf{P}(A)$, называются *испытаниями Бернулли*. Событие A условно называется «успехом», а дополнительное событие $\bar{A}$ — «неудачей».

Биномиальное распределение. Пусть ξ — число успехов в n испытаниях Бернулли. Распределение вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$P(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

и называется *распределением Бернулли* или *биномиальным распределением* **). Здесь p — вероятность отдельного успеха, n — число испытаний и $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k. Биномиальное распределение определяется двумя параметрами p и n. При этом

$$\mathsf{M}\xi = np, \quad \mathsf{D}\xi = np(1-p),$$

$$\mathsf{M}(\xi - np)^3 = np(1-p)(1-2p),$$

а производящая функция $\varphi(z)$ величины ξ есть

$$\varphi(z) = [1 + p(z-1)]^n.$$

Функция биномиального распределения выражается формулой ($m = 0, 1, 2, \ldots, n$)

$$F(m) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant m\} = \sum_{k=0}^{m} P(k) = \frac{1}{\mathrm{B}(m+1,\, n-m)} \int_p^1 x^m (1-x)^{n-m-1}\,dx.$$

*) О вычислении функции бета-распределения см. [11, 143].

**) Наиболее популярны таблицы биномиального распределения [144, 147].

Иными словами, если $F(x;\ m+1,\ n-m)$ — функция бета-распределения с параметрами $a=m+1$ и $b=n-m$, то

$$F(m)=1-F(p;\ m+1,\ n-m)=F(1-p;\ n-m,\ m+1).$$

При $n\to\infty$ и $np\to\infty$ имеют место асимптотические формулы:

1) $$P(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\Delta x,$$

где

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}},\quad \Delta x=\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}},\quad -\infty<x<\infty;$$

2) $$\mathsf{P}\left\{x'\leqslant\frac{\xi-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x''\right\}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x'}^{x''}e^{-x^2/2}dx.$$

Это — так называемое *нормальное приближение* для биномиального закона.

При $n\to\infty$ и $np\sim a$

$$P(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\sim\frac{a^k}{k!}e^{-a},\quad k=0,1,2,\ldots$$

Это — так называемое *пуассоновское приближение*, действующее в случае, когда каждый отдельный «успех» маловероятен и является редким событием в соответствующей схеме испытаний Бернулли.

Пример. *Задача об изюминках*. Имеется некоторое количество теста V, из которого выпекаются булочки с изюмом. Некоторое количество изюма n высыпается в тесто, после чего все многократно тщательно перемешивается и затем разрезается на равные части. Пусть на отдельную булку расходуется количество теста v, так что всего выпекается $N=V/v$ булок. Ясно, что, хотя средний расход изюма на отдельную булку составляет вполне определенную величину $a=n/N$, количество изюма в разных булках вовсе не одинаково. Какова вероятность того, что в отдельно взятой булке окажется хотя бы одна изюминка?

Естественно считать, что количество изюма много меньше количества теста, так что при многократном перемешивании теста изюминки в конце концов движутся практически независимо друг от друга (в частности, независимо друг от друга попадают в выбранную булку). Очевидно, после тщательного перемешивания изюминки распределяются в тесте приблизительно равномерно и вероятность попадания любой из изюминок в любую из булок одна и та же и есть $p=1/N$. Попадание отдельной изюминки в определенную булку можно рассматривать как «успех» в отдельном испытании, вероятность которого $p=1/N$. Независимость движения изюминок при перемешивании позволяет считать, что имеется n испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p (n — общее число изюминок). Эта вероятность сравнительно мала, если булок выпекается достаточно много. В то же время число изюминок n сравнительно велико. Следовательно, случайное число изюминок в отдельной булке, равное числу «успехов», приблизительно распределено по закону Пуассона: вероятность $P(k)$ того, что в булке окажется ровно k изюминок, есть

$$P(k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где $a = n/N = nv/V$ — среднее число изюминок, приходящееся на одну булку. Вероятность P того, что в булке окажется хотя бы одна изюминка, есть

$$P = 1 - P(0) \approx 1 - e^{-a} = 1 - e^{-nv/V}.$$

Пример. *Модель радиоактивного распада.* Как известно, радий (Ra) с течением времени превращается в радон (Rn). Распадающееся ядро атома радия «испускает» так называемую α-частицу — ядро атома гелия (He). Установим некоторые закономерности, которым подчиняется процесс излучения радием α-частиц.

Межатомные расстояния сравнительно велики, и естественно считать, что распад отдельного атома радия происходит независимо от состояния других атомов. Предположим, что вероятность распада отдельного атома радия в некотором промежутке времени зависит лишь от длины этого промежутка. Обозначим $p(t)$ вероятность распада в течение промежутка времени длины t. Если всего имеется n атомов радия (в одном грамме насчитывается приблизительно 10^{22} атомов), то среднее число α-частиц, испускаемых за время t, будет $a = np(t)$. Как показывают многочисленные эксперименты, это число при $t = 1$ с имеет порядок 10^{10}, так что вероятность $p(t)$ является очень малой (при $t = 1$ с вероятность $p(t)$ имеет порядок 10^{-12}).

Если считать «успехом» распад каждого из атомов радия, то число испускаемых за время t α-частиц будет равно числу «успехов» в n «испытаниях Бернулли» с вероятностью «успеха» $p = p(t)$. Параметры n и p таковы, что фактическим распределением вероятностей случайной величины $\xi(t)$ — числа испускаемых за время t α-частиц — будет распределение Пуассона с параметром $a = np(t)$:

$$\mathsf{P}\{\xi(t) = k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь «испытания Бернулли» выступают как формальная схема, позволяющая найти фактическое распределение случайной величины $\xi(t)$.

Геометрическое распределение. Рассмотрим неограниченные испытания Бернулли. Обозначим ξ число испытаний, предшествующих наступлению первого «успеха». Если считать, что каждое испытание длится единицу времени, то можно считать ξ временем ожидания до первого «успеха». Распределение вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$P(k)=p(1-p)^k, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и называется *геометрическим распределением*. Оно определяется одним параметром $p>0$. В соответствующей схеме испытаний Бернулли — это вероятность отдельного «успеха». Математическое ожидание, дисперсия и производящая функция случайной величины ξ имеют вид

$$\mathsf{M}\xi=\frac{1-p}{p}, \quad \mathsf{D}\xi=\frac{1-p}{p^2}, \quad \varphi(z)=\frac{p}{1-(1-p)z}.$$

Распределение Паскаля. Пусть при неограниченных испытаниях Бернулли ξ означает общее число «неудач», предшествующих наступлению r-го очередного «успеха». Распределение вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$P(k)=C_{r+k-1}^{r-1}p^r(1-p)^k, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и называется *распределением Паскаля*. Оно совпадает с распределением суммы $\xi=\xi_1+\ldots+\xi_r$, где $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_r$ — независимые случайные величины, имеющие одно и то же геометрическое распределение с параметром p. Математическое ожидание, дисперсия и производящая функция величины ξ имеют вид

$$\mathsf{M}\xi=r\frac{1-p}{p}, \quad \mathsf{D}\xi=r\frac{1-p}{p^2}, \quad \varphi(z)=\left[\frac{p}{1-(1-p)z}\right]^r.$$

Функция распределения Паскаля выражается формулой ($m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$)

$$F(m)=\mathsf{P}\{\xi\leqslant m\}=\sum_{k=0}^{m}C_{r+k-1}^{r-1}p^r(1-p)^k=$$

$$=\sum_{l=r}^{r+m}C_{r+m}^{l}\,p^l(1-p)^{r+m-l}=\frac{1}{\mathrm{B}(r,\ m+1)}\int_0^p x^{r-1}(1-x)^m\,dx.$$

Иными словами, если m — целое неотрицательное число, то значение функции распределения Паскаля $F(m)$ (с параметрами r и p) в точке m совпадает со значением функции биномиального распределения *) (с параметрами $n=r+m$ и $p'=1-p$) в той же точке m.

---

*) Существуют таблицы, позволяющие вычислять значения $F(m)$ непосредственно, без обращения к таблицам биномиального распределения [149].

Представление $F(m)$ в виде функции бета-распределения позволяет естественным образом определить $F(m)$ при всех действительных неположительных значениях параметра r. В таком расширенном толковании распределение Паскаля называют *отрицательным биномиальным распределением.*

Гипергеометрическое распределение. Пусть имеется совокупность n элементов, среди которых m элементов одного типа и $n-m$ элементов другого типа. Предположим, что из этой совокупности наудачу совершенно случайно выбирается группа из r элементов. Число ξ элементов первого типа, содержащихся в указанной выборке из r элементов, является случайным. Распределение вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$P(k)=\frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r},\quad \max(0,\, m+r-n)\leqslant k\leqslant \min(m,\, r)$$

(k — целое число), и называется *гипергеометрическим распределением* *). Соответствующие математическое ожидание и дисперсия суть

$$\mathsf{M}\xi=\frac{mr}{n},\quad \mathsf{D}\xi=\frac{mr(n-m)(n-r)}{n^2(n-1)}.$$

При $n\to\infty$ и $m/n\sim p$ имеет место *«биномиальное приближение»*:

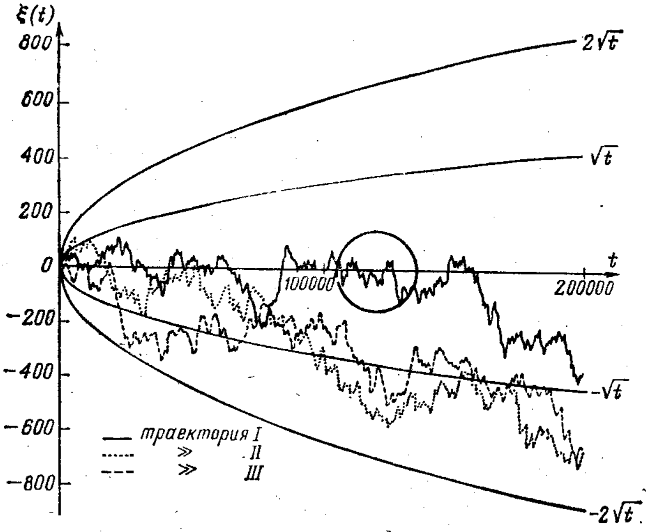
$$P(k)=\frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}\sim C_r^k p^k(1-p)^{r-k},\quad k=0,\,\ldots,\,r.$$

4. **Некоторые распределения вероятностей, возникающие в схеме симметричного случайного блуждания и предельного процесса броуновского движения.** Представьте себе частицу, взвешенную в однородной жидкости. Она испытывает хаотические столкновения с молекулами жидкости, в результате чего находится в непрерывном беспорядочном движении. Дискретным аналогом такого процесса может служить следующая модель случайного блуждания. Частица меняет свое положение лишь в дискретные моменты времени, кратные Δt. Изменение положения происходит таким образом, что, находясь в точке x, частица независимо от предшествующего поведения переходит с равными вероятностями в одну из соседних точек $x+\Delta x$ или $x-\Delta x$, причем смещение Δx одно и то же для всех точек (речь идет лишь об одной координате движущейся частицы, иначе, об одномерном случайном блуждании). В пределе, когда определенным образом $\Delta t\to 0$, $\Delta x\to 0$, получается непрерывное случайное блуждание, называемое в теории вероятностей процессом броуновского движения **). На рис. 14, *а* изображены три траекто-

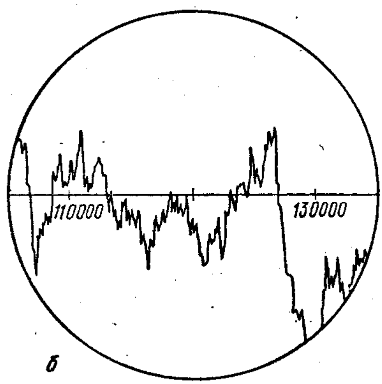
*) Таблицы гипергеометрического распределения имеются в книге [64].
**) См., например, книги [44, 104].

рии броуновского движения, полученные моделированием; участок одной из них указан на рис. 14, *б* в увеличенном виде [121].

Обозначим $\xi(t)$ положение броуновской частицы в момент времени t. Пусть в начальный момент времени $t=0$ частица



а



б

Рис. 14

находится в точке $x=0$. При дискретном блуждании за время t она совершает $n=t/\Delta t$ шагов, из которых какое-то случайное число шагов совершается в положительном направлении. Если обозначить ξ_n число шагов в положительном направлении, то общее смещение в положительном направлении составит $\xi_n\Delta x$, а в отрицательном направлении $(n-\xi_n)\Delta x$. Таким образом, общее смещение $\xi(t)$ за время $t=n\Delta t$ связано с числом ξ_n следующим равенством:

$$\xi(t)=[\xi_n\Delta x-(n-\xi_n)\Delta x]=(2\xi_n-n)\Delta x.$$

Используя нормальное приближение для биномиального распределения величины ξ_n при $n\to\infty$ и $\Delta x^2/\Delta t\sim\sigma^2$, получаем

$$\mathsf{P}\left\{x'\leqslant\frac{\xi(t)}{\sigma\sqrt{t}}\leqslant x''\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{x''}e^{-x^2/2}dx.$$

В силу однородности рассматриваемого движения приращение $\xi(t+s)-\xi(s)$ при любом значении $\xi(s)$ имеет то же распределение вероятностей, что и $\xi(t)-\xi(0)$ при $\xi(0)=0$.

В дискретной модели при любом фиксированном значении $\xi(s)=a$ движение броуновской частицы после момента s (в который она находится в точке a) не зависит от ее поведения до этого момента. Это свойство сохраняется и для предельного непрерывного процесса броуновского движения, что легко позволяет найти распределение вероятностей случайной величины τ_a — *момента первого достижения броуновской частицей точки* $x=a$. Именно, в момент t частица может оказаться правее точки a (считаем для определенности $a>0$) лишь при условии, что в некоторый момент $\tau_a\leqslant t$ она находилась в этой точке (при непрерывном движении частица не может «перескочить» через a), так что $\{\xi(t)\geqslant a\}\subseteq\{\tau_a\leqslant t\}$ и

$$\mathsf{P}\{\xi(t)\geqslant a\mid\tau_a\leqslant t\}=\frac{\mathsf{P}\{\xi(t)\geqslant a\}}{\mathsf{P}\{\tau_a\leqslant t\}}.$$

Очевидно, условная вероятность $\mathsf{P}\{\xi(t)\geqslant a\mid\tau_a\leqslant t\}$ при условии, что в момент τ_a ($\tau_a\leqslant t$) частица находится в a, совпадает с вероятностью того, что после выхода из точки a она к моменту t окажется правее a. Но из соображений симметрии вытекает, что вероятность оказаться к моменту t правее исходной точки a такая же, как и вероятность оказаться к этому моменту левее a, и равна 1/2. Таким образом, $\mathsf{P}\{\xi(t)\geqslant a\mid\tau_a\leqslant t\}=1/2$, и, считая для простоты коэффициент диффузии σ^2 равным 1, находим функцию распределения величины τ_a:

$$F_{\tau_a}(t)=\mathsf{P}\{\tau_a\leqslant t\}=2\mathsf{P}\{\xi(t)\geqslant a\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{at^{-1/2}}^{\infty}e^{-x^2/2}dx,\quad t>0,$$

и ее плотность вероятности

$$p_{\tau_a}(t)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}t^{-3/2}e^{-a^2/(2t)},\quad 0\leqslant t<\infty$$

($p_{\tau_a}(t)=0$ при $t<0$). Это — так называемый *положительный устойчивый закон с параметром* $\alpha=1/2$ (рис. 15).

Зная распределение величины τ_x — момента достижения точки x, сразу можно найти и распределение вероятностей величины *максимального смещения* броуновской частицы за фиксированное время t:

$$\mathsf{P}\left\{\max_{0<s<t} \xi(s) \geqslant x\right\} = \mathsf{P}\{\tau_x \leqslant t\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{xt^{-1/2}}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int\limits_{x}^{\infty} e^{-u^2/(2t)} du;$$

функцией распределения величины $\bar{\xi} = \max\limits_{0<s<t} \xi(s)$ будет

$$F_{\bar{\xi}}(x) = 1 - \mathsf{P}\left\{\max_{0<s<t} \xi(s) \geqslant x\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int\limits_{0}^{x} e^{-u^2/(2t)} du.$$

Это — *отраженное нормальное распределение.*

Непрерывная траектория броуновской частицы $\xi(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant t)$ достигает своего абсолютного максимума в некоторой точке τ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$. Плотность совместного распределения вероятностей случайных величин τ и $\bar{\xi} = \max\limits_{0<u<t} \xi(u)$ имеет вид

$$p_{\tau, \bar{\xi}}(s, x) = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}} \frac{x}{s} e^{-x^2/(2s)},$$

$$0 < s < t, \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

Получить эту формулу можно, рассмотрев совместное распределение вероятностей случайных величин τ_a и $\bar{\xi}$, где τ_a, как и раньше, означает момент первого достижения броуновской частицей точки $a > 0$. После попадания в a дальнейшее

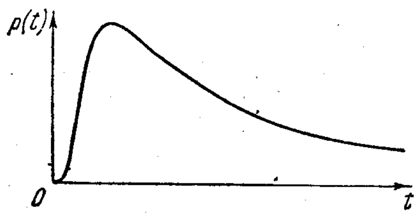


Рис. 15

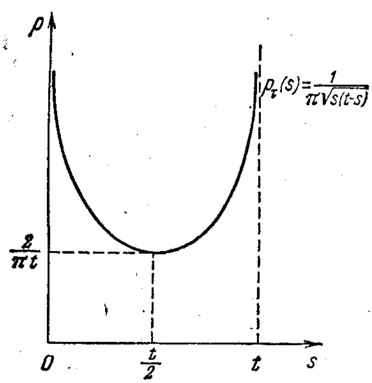


Рис. 16

поведение броуновской частицы подчиняется таким же закономерностям, как если бы эта точка была исходной. Поэтому величина $\bar{\xi} = \max\limits_{0<u<t} \xi(u)$, совпадающая при условии $\tau_a = s$ $(0 \leqslant s \leqslant t)$

с величиной $\max\limits_{s<u<t} \xi(u)$, при указанном условии имеет такое же распределение вероятностей, как и величина $a + \max\limits_{0<u<t-s} \xi(u)$, и имеет условную плотность распределения

$$p_{\bar{\xi}}(x \mid s) = \sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}\, e^{-(x-a)^2/[2(t-s)]}, \qquad a \leqslant x < \infty.$$

Отсюда вытекает, что плотность $p_{\tau_a, \bar{\xi}}(s, x)$ совместного распределения вероятностей величин τ_a, $\bar{\xi}$ при $0 < s < t$, $a \leqslant x < \infty$ имеет вид

$$p_{\tau_a, \bar{\xi}}(s, x) = p_{\tau_a}(s)\, p_{\bar{\xi}}(x \mid s) = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}} \frac{a}{s} \exp\left\{-\frac{a^2}{2s} - \frac{(x-a)^2}{2(t-s)}\right\}.$$

С другой стороны, при условии $\bar{\xi} = \max\limits_{0<u<t} \xi(u) = a$ точка максимума τ совпадает с моментом τ_a, и, следовательно, при указанном условии величины τ, τ_a имеют одинаковое распределение вероятностей. Отсюда вытекает, что плотность вероятности величин $(\tau, \bar{\xi})$ в точке $\tau = s$, $\bar{\xi} = a$ совпадает с плотностью вероятности величин $(\tau_a, \bar{\xi})$ в той же точке (s, a), поскольку

$$p_{\tau, \bar{\xi}}(s, a) = p_\tau(s \mid a)\, p_{\bar{\xi}}(a) = p_{\tau_a}(s \mid a)\, p_{\bar{\xi}}(a) = p_{\tau_a, \bar{\xi}}(s, a),$$

где $p_\tau(s \mid x)$ и $p_{\tau_a}(s \mid x)$ означают условные плотности распределений вероятностей величин τ и τ_a при условии $\bar{\xi} = x$, что и дает нам указанную ранее формулу.

Плотность отдельно взятой величины τ — точки максимума броуновской траектории $\xi(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant t)$ — будет

$$p_\tau(s) = \int_0^\infty p_{\tau, \bar{\xi}}(s, x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}} \int_0^\infty \frac{x}{s} e^{-x^2/(2s)} dx = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}}, \qquad 0 < s < t.$$

График функции $p_\tau(s)$ изображен на рис. 16. Соответствующая функция распределения вероятностей имеет вид

$$F_\tau(s) = \int_0^s \frac{du}{\pi \sqrt{u(t-u)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Этот закон распределения вероятностей носит название *закона арксинуса*.

ГЛАВА II

ПРОСТРАНСТВА И МЕРЫ

§ 1. Некоторые сведения об измеримых и топологических пространствах

1. Измеримые и топологические пространства.

Множества. Множеством называется совокупность некоторых элементов. Запись $x \in A$ или $x \notin A$ означает, что элемент x входит или соответственно не входит в множество A (иногда вместо символа $\notin$ используют символ $\overline{\in}$). Соотношения $A_1 \subseteq A_2$ или $A_2 \supseteq A_1$ означают, что множество A_1 содержится в множестве A_2, т. е. каждый элемент x из A_1 входит в A_2.

Будем называть некоторое множество X элементов x *пространством*, сами элементы x *точками пространства* X, а множества A точек x ($A \subseteq X$) *множествами пространства* X. Множества A_1 и A_2 называются *равными*: $A_1 = A_2$, если $A_1 \subseteq A_2$ и $A_2 \subseteq A_1$.

Суммой или *объединением* множеств A_1 и A_2 называется множество, обозначаемое $A_1 \cup A_2$, которое состоит из всех точек x, входящих хотя бы в одно из множеств A_1 или A_2. Объединение $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ произвольного числа множеств A_α состоит из всех точек x, которые входят хотя бы в одно из множеств A_α.

Разностью множеств A_1 и A_2 называется множество, обозначаемое $A_1 \setminus A_2$, которое состоит из всех точек x, входящих в A_1, но не входящих в A_2.

Симметрической разностью A_1 и A_2 называется множество, обозначаемое $A_1 \circ A_2$, которое определяется формулой $A_1 \circ A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$. Множество $X \setminus A$, обозначаемое $\bar{A}$, называется *дополнительным* к A.

Пересечением или *произведением* множеств A_1 и A_2 называется множество, обозначаемое $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cdot A_2$ или A_1A_2, которое состоит из всех точек x, одновременно входящих и в A_1, и в A_2; пересечение $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ произвольного числа множеств A_α состоит из всех точек x, которые одновременно входят во все множества A_α. Множества A_1 и A_2 называются *непересекающимися*, если их пересечение $A_1 \cap A_2$ не содержит ни одной точки x, иначе говоря, является *пустым множеством*. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$.

Системы множеств. Совокупность (иначе — система) множеств $\mathfrak{S}$ пространства X называется *полукольцом*, если вместе с любыми входящими в нее множествами A и A_1 она содержит их пересечение, причем если $A_1 \subseteq A$, то множество A может быть представлено в виде объединения конечного числа непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n$, также входящих в $\mathfrak{S}$: $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$; само же пространство X может быть представлено в виде объединения счетного числа непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots$ из $\mathfrak{S}$: $X = \bigcup\limits_{k} A_k$.

Пример. Пусть пространство X есть совокупность точек x действительной прямой. Система всех полуинтервалов вида $(x', x'']$, открытых слева и замкнутых справа, представляет собой полукольцо.

Полукольцо множеств $\mathfrak{S}$ называется *кольцом*, если оно вместе с любыми входящими в него множествами A_1 и A_2 содержит их сумму $A_1 \cup A_2$.

Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольное полукольцо. Тогда совокупность всех множеств $A \subseteq X$, представимых в виде объединения конечного числа непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n$, принадлежащих $\mathfrak{S}$: $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, является кольцом. Если кольцо $\mathfrak{S}$ содержит само пространство X, то оно называется *алгеброй*.

Алгебра множеств $\mathfrak{A}$ вместе с каждым входящим в нее множеством A обязательно содержит его дополнение $\bar{A}$ и вместе с любыми входящими в нее множествами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ содержит их объединение $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Если алгебра $\mathfrak{A}$ вместе с любыми входящими в нее множествами $A_1, A_2, \ldots$ (взятыми в счетном числе) содержит также их объединение $A = \bigcup\limits_{k=1} A_k$, то она называется *σ-алгеброй*.

Пересечение произвольного числа σ-алгебр снова является σ-алгеброй множеств пространства X. Для любой системы множеств $\mathfrak{S}$ существует некоторая σ-алгебра $\mathfrak{A}$, содержащая эту систему $\mathfrak{S}$. *Минимальная σ-алгебра* $\mathfrak{A}$, содержащая систему множеств $\mathfrak{S}$ (она является пересечением всех σ-алгебр, обладающих этим свойством), называется *σ-алгеброй, порожденной системой* $\mathfrak{S}$.

Измеримые и топологические пространства. Пространство X называется *измеримым* и обозначается $(X, \mathfrak{A})$, если в нем выбрана некоторая σ-алгебра множеств $\mathfrak{A}$. Пространство X называется *топологическим*, если в нем выбрана некоторая система $\mathfrak{S}$ так называемых *открытых множеств*: $\mathfrak{S}$ содержит пустое множество $\varnothing$ и само пространство X; вместе с входящими в систему $\mathfrak{S}$ множествами A_1 и A_2 она содержит их пересечение $A_1 \cap A_2$; вместе с множествами A_α из $\mathfrak{S}$ (взятыми в любом числе) содержит их объединение $\bigcup A_\alpha$. При этом обычно предполагается, что система $\mathfrak{S}$ *отделяет точки* пространства X, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$ найдутся непересекающиеся множества $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}$ такие, что $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$.

Некоторая система $\mathfrak{S}$ открытых множеств топологического пространства X называется *базой* этого пространства, если всякое открытое множество является обединением открытых множеств из $\mathfrak{S}$.

Под *измеримым топологическим пространством* обычно понимается измеримое пространство $(X, \mathfrak{A})$, в котором выбрана σ-алгебра $\mathfrak{A}$, порождаемая некоторой базой открытых множеств топологического пространства X. Минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества, называется *борелевской* σ-алгеброй пространства X; множества $A \in \mathfrak{A}$ называются *борелевскими*.

Система открытых множеств, вообще говоря, не является полукольцом. Множества, дополнительные к открытым множествам топологического пространства X, называются *замкнутыми*. Объединение конечного числа и пересечение любого числа замкнутых множеств снова являются замкнутыми множествами. Каждая отдельная точка пространства X является «одноточечным» замкнутым множеством.

Топологическое пространство X называется *регулярным*, если для любого замкнутого множества F и точки $x \notin F$ существуют непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2 такие, что $F \subseteq G_1$ и $x \in G_2$.

Пусть A — произвольное множество пространства X. Минимальное замкнутое множество F, содержащее A (F совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих A), называется *замыканием* множества A и обозначается $[A]$.

Пересечение счетного числа открытых множеств называется *множеством типа* G_δ; сумма счетного числа замкнутых множеств называется *множеством типа* F_σ; сумма счетного числа множеств типа G_δ называется *множеством типа* $G_{\delta\sigma}$; пересечение счетного числа множеств типа F_σ называется *множеством типа* $F_{\sigma\delta}$ и т. д.

Измеримое пространство $(X, \mathfrak{A})$ называется *сепарабельным*, если существует некоторая счетная система множеств $\mathfrak{S}$, отделяющая точки пространства X и порождающая соответствующую σ-алгебру $\mathfrak{A}$. Топологическое пространство X называется *сепарабельным*, если существует некоторая счетная база открытых множеств, отделяющая точки этого пространства.

Пример. Пусть X — произвольное пространство. В качестве базы открытых множеств можно взять все «одноточечные» множества $x \subseteq X$.

Любое множество A пространства X будет тогда одновременно и открытым, и замкнутым. Такое пространство X сепарабельно тогда и только тогда, когда оно содержит лишь счетное число точек x.

Пример. Пусть X — действительная прямая. В качестве базы открытых множеств можно взять все открытые интервалы (x', x''). Множество G будет открытым тогда и только тогда, когда вместе с каждой входящей в него точкой x оно содержит и некоторую ее окрестность $(x-\delta, x+\delta)$. Всякое открытое множество представляет собой сумму счетного числа непересекающихся открытых интервалов. Всякое открытое множество является множеством типа F_σ, а всякое замкнутое множество является множеством типа G_δ. Пространство X сепарабельно (в качестве базы, отделяющей точки, можно взять систему всех открытых интервалов (x', x'') с рациональными концами).

Всякое измеримое сепарабельное пространство $(Y, \mathfrak{B})$ является в некотором смысле частью пространства $(X, \mathfrak{A})$ (X — действительная прямая, $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра борелевских множеств). Именно, существует взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow y$ между точками x некоторого множества A_Y на действительной прямой и точками y пространства Y, при котором каждому множеству $B \in \mathfrak{B}$ будет соответствовать некоторое множество вида $A_Y \cdot A$ $(A \in \mathfrak{A})$, и каждому такому множеству на прямой будет соответствовать некоторое множество $B \in \mathfrak{B}$ (считается, что $A_Y \cdot A \leftrightarrow B$, если $x \leftrightarrow y$ для всех $x \in A_Y \cdot A$, $y \in B$). Такое соответствие пространств $(Y, \mathfrak{B})$ и $(A_Y, \mathfrak{A}_Y)$ ($\mathfrak{A}_Y$ есть σ-алгебра всех множеств нового пространства A_Y, представимых в виде $A_Y \cdot A$ $(A \in \mathfrak{A})$) дается, например, следующим соотношением:

$$x = \sum_k \frac{2}{3^k} \varphi_{B_k}(y),$$

где $B_1, B_2, \ldots$ — некоторая счетная система множеств, отделяющая точки пространства Y и порождающая σ-алгебру $\mathfrak{B}$, а $\varphi_{B_k}(y)$ — индикаторы множеств B_k $(k = 1, 2, \ldots)$:

$$\varphi_B(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \in B, \\ 0 & \text{при } y \notin B \end{cases}$$

(соответствующее множество A_Y является подмножеством известного канторовского множества на действительной прямой).

Произведения пространств. Произведением пространств X_1 и X_2 называется пространство X, обозначаемое $X = X_1 \times X_2$, точками которого являются всевозможные упорядоченные пары (x_1, x_2), где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

Множество $A \in X$ называется *прямоугольным*, если оно представимо в виде $A_1 \times A_2$, точнее, если оно состоит из всех точек $x = (x_1, x_2)$, где $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$. Если $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — некоторые системы множеств в соответствующих пространствах X_1 и X_2, каждая из которых представляет собой полукольцо, то совокупность всех прямоугольных множеств вида $A = A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \mathfrak{S}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{S}_2$, также будет полукольцом.

Пример. Пусть пространство X представляет собой действительную плоскость; X является произведением двух действительных прямых X_1 и X_2. Система всех прямоугольников вида $(x_1', x_1''] \times (x_2', x_2'']$ образует полукольцо множеств на плоскости (система всех полуинтервалов вида $(x', x'']$ образует полукольцо множеств на прямой).

Произведением измеримых пространств $(X_1, \mathfrak{A}_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2)$ называется измеримое пространство $(X, \mathfrak{A})$ $(X = X_1 \times X_2)$, в котором соответствующая σ-алгебра $\mathfrak{A}$ является *произведением σ-алгебр* $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, т. е. $\mathfrak{A}$ порождается полукольцом $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ всевозможных прямоугольных множеств вида $A = A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{A}_2$.

Произведением топологических пространств X_1 и X_2 называется топологическое пространство $X = X_1 \times X_2$, в котором базой открытых множеств служит совокупность всевозможных прямоугольных множеств вида $A = A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \mathfrak{S}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — базы открытых множеств в соответствующих пространствах X_1 и X_2.

Пусть $(E, \mathfrak{B})$ — некоторое измеримое пространство, и пусть T — конечное множество индексов $t = 1, \ldots, n$. Измеримое пространство $(X, \mathfrak{A})$, где $X = E^T$ представляет собой n-кратное произведение пространства E самого на себя, а σ-алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^T$ есть n-кратное произведение соответствующих σ-алгебр $\mathfrak{B}$, называется *измеримым координатным пространством.* Точки $x = \{x(1), \ldots, x(n)\}$ этого пространства $X = E^T$ задаются координатами $x(t)$ $(t \in T)$. Если T — произвольное множество индексов, то координатное пространство $X = E^T$ определяется как совокупность всех функций $x = x(t)$ на множестве T со значениями в пространстве E (отдельные значения $x(t)$ можно интерпретировать как координаты точки $x = x(t)$, принадлежащей пространству $X = E^T$).

Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — произвольные точки множества T, взятые в любом конечном числе n, и пусть $B_1, \ldots, B_n$ — произвольные множества из пространства E. Множество вида

$$\{x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\},$$

принадлежащее пространству X, называется *цилиндрическим множеством* в $X = E^T$. Иными словами, цилиндрическое множество состоит из тех и только тех точек $x = x(t)$, координаты которых $x(t_1), \ldots, x(t_n)$ входят в соответствующие множества $B_1, \ldots, B_n$. Система всех цилиндрических множеств указанного вида, для которых соответствующие $B_1, \ldots, B_n$ входят в σ-алгебру $\mathfrak{B}$ пространства E, представляет собой полукольцо $\mathfrak{B}^T$. *Измеримым координатным пространством* $(X, \mathfrak{A})$ называется пространство $X = E^T$ с σ-алгеброй $\mathfrak{A}$, порожденной полукольцом $\mathfrak{B}^T$, Определим $\mathfrak{A}(S)$ $(S \subseteq T)$ как σ-алгебру, порождаемую полукольцом $\mathfrak{B}^S$, т. е. всевозможными цилиндрическими множествами с соответствующими параметрами $t_1, \ldots, t_n \in S$. Если точка $x' = x'(t)$ пространства $X = E^T$ входит в множество A из $\mathfrak{A}(S)$ и другая точка $x'' = x''(t)$ такова, что соответствующие координаты этих точек совпадают: $x'(t) = x''(t)$ при всех $t \in S$, то $x'' = x''(t)$ также входит в A. Всякое множество A из σ-алгебры $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(T)$ принадлежит одновременно некоторой σ-алгебре $\mathfrak{A}(S)$, где S — некоторое счетное множество (зависящее, вообще говоря, от рассматриваемого множества A).

Пусть E — топологическое пространство и $\mathfrak{S}$ — некоторая база его открытых множеств. *Тихоновским произведением* называется координатное пространство $X = E^T$, в котором базой открытых множеств служит совокупность всех цилиндрических множеств вида

$$\{x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\},$$

где $B_1, \ldots, B_n$ — некоторые открытые множества из базы $\mathfrak{S}$ топологического пространства E.

Отображения множеств. Пусть $\varphi = \varphi(x)$ — функция на множестве A пространства X со значениями в пространстве Y. *Прообразом* множества $B \subseteq Y$ при отображении φ называется множество пространства X, обозначаемое символом $\{\varphi \in B\}$, которое состоит из всех точек $x \in X$ таких, что $\varphi(x) \in B$. *Образом* множества A называется множество пространства Y, обозначаемое $\varphi(A)$, которое состоит из всех точек $\varphi(x)$ $(x \in A)$. Отображение $B \to \{\varphi \in B\}$ $(B \subseteq Y)$ сохраняет теоретико-множественные операции:

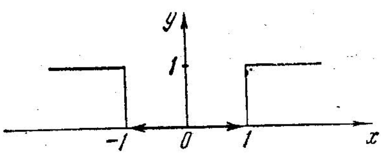


Рис. 17

$$\{\varphi \in \cup B\} = \cup \{\varphi \in B\},$$
$$\{\varphi \in \cap B\} = \cap \{\varphi \in B\},$$
$$\{\varphi \in (B_1 \setminus B_2)\} = \{\varphi \in B_1\} \setminus \{\varphi \in B_2\}.$$

Этого нельзя сказать об отображении $A \to \varphi(A)$ $(A \subseteq X)$.

П р и м е р. Пусть X — действительная прямая и $y = \varphi(x)$ — действительная функция, вид которой указан на рис. 17. Образ каждой из полупрямых $(-\infty, 1)$ и $(-1, \infty)$ состоит из двух точек $y = 0$ и $y = 1$, а образ их пересечения — интервала $(-1, 1)$ — лишь из одной точки $y = 0$.

Пусть $\varphi = \varphi(x)$ — произвольная функция на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A})$ со значениями в произвольном пространстве Y. Совокупность $\mathfrak{B}_\varphi$ всех множеств $B \subseteq Y$ таких, что прообразы $\{\varphi \in B\}$ входят в σ-алгебру $\mathfrak{A}$ пространства $(X, \mathfrak{A})$, является σ-алгеброй.

Пусть X — произвольное пространство и $\varphi=\varphi(x)$ — произвольная функция на X со значениями в измеримом пространстве $(Y, \mathfrak{B})$. Совокупность $\mathfrak{A}^{\varphi}$ всех множеств A, являющихся прообразами множеств B из σ-алгебры $\mathfrak{B}$: $A=\{\varphi\in B\}$ $(B\in\mathfrak{B})$ есть σ-алгебра.

Измеримые и непрерывные отображения. Пусть $(X, \mathfrak{A})$ и $(Y, \mathfrak{B})$ — измеримые пространства. Функция $\varphi=\varphi(x)$ называется $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-*измеримой*, если при любом $B\in\mathfrak{B}$ прообраз $\{\varphi\in B\}$ входит в σ-алгебру $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{S}$ — некоторая система множеств, порождающая σ-алгебру $\mathfrak{B}$, то функция φ измерима тогда и только тогда, когда для любого $B\in\mathfrak{S}$ прообраз $\{\varphi\in B\}$ входит в $\mathfrak{A}$.

Пусть $(X, \mathfrak{A})$, $(Y, \mathfrak{B})$ и $(Z, \mathfrak{C})$ — некоторые измеримые пространства, и пусть функция $\varphi=\varphi(x)$ является $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-измеримой, а функция $\psi=\psi(y)$ является $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$-измеримой. Тогда сложная функция $\psi\,[\varphi(x)]$ на X является $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$-измеримой.

Пусть A — произвольное множество пространства $X=X_1\times X_2$, и пусть x_2 — произвольная точка пространства X_2. Множество A_{x_2} всех точек $x_1\in X_1$, обладающих тем свойством, что пара (x_1, x_2) входит в A, называется *сечением* множества A. Другими словами, сечение A_{x_2} — прообраз множества A при отображении $\varphi(x_1)=(x_1, x_2)$, где x_2 — фиксированная точка пространства X_2:

$$A_{x_2}=\{(x_1, x_2)\in A\}.$$

Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2)$ — измеримые пространства. Если множество A пространства $X=X_1\times X_2$ входит в произведение σ-алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, то сечения A_{x_1} и A_{x_2} этого множества таковы, что $A_{x_2}\in\mathfrak{A}_1$ и $A_{x_1}\in\mathfrak{A}_2$ при любых $x_1\in X_1$ и $x_2\in X_2$.

Пусть $\varphi=\varphi(x)$ $(x=(x_1, x_2))$ — произвольная $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-измеримая функция на некотором множестве A произведения $(X, \mathfrak{A})$ измеримых пространств $(X_1, \mathfrak{A}_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2)$ со значениями в некотором измеримом пространстве $(Y, \mathfrak{B})$. Тогда при любом фиксированном $x_2\in X_2$ функция $\varphi_{x_2}(x_1)=\varphi(x_1, x_2)$ является $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})$-измеримой.

Пусть $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ — произвольные измеримые функции на измеримом пространстве $(Y, \mathfrak{B})$ со значениями в соответствующих пространствах $(X_1, \mathfrak{A}_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2)$. Пара $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2)$ является $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$-измеримой функцией на Y со значениями в произведении $(X, \mathfrak{A})$ пространств $(X_1, \mathfrak{A}_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2)$.

Функция $\varphi=\varphi(x)$ на топологическом пространстве X со значениями в топологическом пространстве Y называется *борелевской*, если прообраз $\{\varphi\in B\}$ всякого открытого (или всякого замкнутого) множества $B\subseteq Y$ является борелевским множеством пространства X. Функция $\varphi=\varphi(x)$ на X называется *непрерывной*, если прообраз $\{\varphi\in B\}$ всякого открытого (замкнутого) множества $B\subseteq Y$ является открытым (соответственно замкнутым) множеством пространства X.

Бэровские множества. Пусть $\mathfrak{S}$ — система всех множеств топологического пространства X, являющихся прообразами $\{\varphi \in B\}$ открытых (или замкнутых) множеств B на действительной прямой Y при непрерывных отображениях φ. Порождаемая системой таких множеств σ-алгебра $\mathfrak{A}$ называется *бэровской σ-алгеброй* пространства X, а множества $A \in \mathfrak{A}$ — *бэровскими множествами* этого пространства.

Пример. *Полукольцо бэровских множеств.* Пусть F — замкнутое бэровское множество в X, являющееся прообразом некоторого замкнутого множества B на действительной прямой Y: $F = \{\varphi \in B\}$. Если взять какую-нибудь непрерывную функцию $\psi(y)$, обращающуюся в нуль на замкнутом множестве B и строго положительную вне B (например, $\psi(y)$ можно определить как расстояние от точки $y \in Y$ до множества $B \subseteq Y$), то сложная функция $\psi[\varphi(x)]$ будет непрерывной на X, причем рассматриваемое замкнутое бэровское множество F совпадает с прообразом $\{\psi[\varphi] = 0\}$.

Система $\mathfrak{S}$ всех замкнутых бэровских множеств F, совпадающих с прообразами нуля при непрерывных отображениях $\varphi = \varphi(x)$ на действительную прямую, вместе с любыми входящими в нее множествами F_1 и F_2 содержит их пересечение $F_1 \cap F_2$ и объединение $F_1 \cup F_2$. Например, если $F_1 = \{\varphi_1 = 0\}$ и $F_2 = \{\varphi_2 = 0\}$, то $F_1 \cap F_2 = \{\varphi_1 \cdot \varphi_2 = 0\}$ и $F_1 \cup F_2 = \{|\varphi_1| + |\varphi_2| = 0\}$. Система всех множеств A, представимых в виде разности $F_1 \setminus F_2$ множеств F_1 и F_2 из $\mathfrak{S}$ $(F_2 \subseteq F_1)$, является полукольцом, порождающим всю σ-алгебру бэровских множеств пространства X.

Метрические пространства. Пространство X называется *метрическим*, если между любыми двумя точками x', $x'' \in X$ определено расстояние $\rho(x', x'')$, обладающее следующими свойствами:

1) $\rho(x', x'') \geqslant 0$ и $\rho(x', x'') = 0$ тогда и только тогда, когда $x' = x''$;

2) $\rho(x', x'') = \rho(x'', x')$;

3) выполнено так называемое *неравенство треугольника*, согласно которому

$$\rho(x', x'') \leqslant \rho(x', x) + \rho(x, x'')$$

для любых x, x', $x'' \in X$.

Открытыми множествами метрического пространства X называются все множества G такие, что вместе с каждой точкой x $(x \in G)$ они содержат целиком некоторую *окрестность* этой точки — множество $V_\delta(x)$ всех точек x', находящихся от точки x на расстоянии, меньшем δ (δ — некоторое положительное число).

Действительная функция $\varphi = \varphi(x)$ на метрическом пространстве X является *непрерывной* тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ и наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно указать окрестность $V_\delta(x)$ этой точки такую, что

$$|\varphi(x)-\varphi(x')|\leqslant\varepsilon \text{ при всех } x'\in V_\delta(x).$$

Функция $\varphi=\varphi(x)$, определяемая как $\varphi(x)=\rho(x, F)$, где $\rho(x, F)$ — расстояние от точки x до произвольно взятого фиксированного замкнутого множества F:

$$\rho(x, F)=\inf_{x'\in F}\rho(x, x'),$$

является непрерывной функцией на пространстве X, причем $\varphi(x)=0$ для $x\in F$ и $\varphi(x)>0$ для $x\notin F$. Всякое замкнутое множество F является бэровским, и σ-алгебры бэровских и борелевских множеств совпадают. Всякое замкнутое множество F совпадает с пересечением счетного числа открытых множеств (например, $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}V_{1/n}(F)$, где $V_\varepsilon(F)$ означает множество всех точек x, отстоящих от F меньше чем на ε: $\rho(x, F)<\varepsilon$), т. е. является *множеством типа* G_δ.

Всякое открытое множество G совпадает с объединением счетного числа замкнутых множеств, т. е. является *множеством типа* F_σ.

Пусть A — произвольное множество метрического пространства. Точка x называется *граничной* для множества A, если расстояние от x как до самого множества A, так и до его дополнения $X\setminus A$ равно нулю:

$$\rho(x, A)=\rho(x, X\setminus A)=0.$$

Совокупность A' всех граничных точек x называется *границей множества* A (граница всего пространства X представляет собой пустое множество).

Точка x называется *точкой прикосновения* для множества $A\subseteq X$, если любая окрестность $V_\delta(x)$ точки x имеет непустое пересечение с множеством A. Совокупность всех точек прикосновения множества A совпадает с замыканием $[A]$ множества A. *Границей* открытого множества G называется разность $[G]\setminus G$; границей произвольного множества A является граница максимального открытого множества G, входящего в A (G является суммой всех открытых множеств, входящих в A).

Множество $A\subseteq X$ называется *всюду плотным* в X, если в любой окрестности $V_\delta(x)$ каждой точки $x\in X$ найдется точка $x'\in A$. Метрическое пространство X является *сепарабельным* тогда и только тогда, когда существует счетное множество точек $x_1, x_2, \ldots\in X$, всюду плотное в X.

Пусть X — топологическое пространство. Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$ этого пространства называется *сходящейся* к точке x, если для любого открытого множества V, содержащего x, существует такое n, что $x_m\in V$ при $m>n$.

Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$ метрического пространства X называется *сходящейся*, если имеется такая точка $x \in X$, что $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$; соответствующая точка x называется *предельной*: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ называется *фундаментальной*, если $\rho(x_m, x_n) \to 0$ при $m, n \to \infty$. Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Метрическое пространство X называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность является сходящейся к некоторой точке x пространства X.

Компакты и их произведения. Система множеств $\mathfrak{S}$ называется *центрированной*, если пересечение конечного числа любых множеств из $\mathfrak{S}$ не пусто.

Замкнутое множество $A \subseteq X$ называется *компактом*, если всякая центрированная система $\mathfrak{S}$ его замкнутых подмножеств F имеет непустое пересечение: $\bigcap F \neq \varnothing$. Множество A называется *компактным* в X, если его замыкание $F = [A]$ является компактом.

Если сепарабельное топологическое пространство X является компактом, то в нем можно определить расстояние $\rho(x', x'')$ таким образом, что всевозможные окрестности $V_\delta(x)$ могут служить базой этого топологического пространства; при этом множество A в X будет компактным тогда и только тогда, когда всякая последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$ этого множества A содержит сходящуюся подпоследовательность.

Если X — произвольный компакт, то система всех открытых бэровских множеств является базой в X.

Имеет место

Лемма Урысона. *Для любых непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 компакта X существует непрерывная на X действительная функция $\varphi = \varphi(x)$ такая, что $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ при всех $x \in X$ и*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in F_1, \\ 1 & \text{при} \quad x \in F_2. \end{cases}$$

Открытые бэровские множества вида $\{\varphi < 1/2\}$ и $\{\varphi > 1/2\}$ содержатся в предварительно произвольно взятых открытых множествах $G_1 = \overline{F}_1$ и $G_2 = \overline{F}_2$.

Топологическое произведение компактов снова есть компакт. Пусть E — произвольный компакт, T — произвольное множество и $X = E^T$ — соответствующее *тихоновское произведение.*

Пространство $X = E^T$ является компактом. Если к тому же исходное пространство E является *сепарабельным*, то бэровская σ-алгебра $\mathfrak{A}$ пространства $X = E^T$ совпадает с минимальной σ-алгеброй, содержащей всевозможные *цилиндрические множества* вида

$$A = \{x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\},$$

где $B_1, \ldots, B_n$ — множества из некоторой базы исходного пространства E. Иными словами, $\mathfrak{A}$ совпадает с σ-алгеброй $\mathfrak{A}(T)$, порожденной полукольцом $\mathfrak{B}^T$ всех цилиндрических множеств указанного вида ($\mathfrak{B}$ — бэровская σ-алгебра пространства E).

Пример. Всякий замкнутый конечный отрезок $[a, b]$ на действительной прямой $-\infty < x < \infty$ является компактом. Вся прямая $-\infty < x < \infty$ не является компактом. Пополненная точками $x = -\infty$ и $x = +\infty$, она становится компактом.

Пример. Пусть E — замкнутый ограниченный отрезок или вся пополненная действительная прямая, T — некоторый отрезок $[t_1, t_2]$ и $X = E^T$ — пространство всех действительных функций $x = x(t)$ на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Каждое бэровское множество A входит в некоторую σ-алгебру множеств $\mathfrak{A}(S)$ координатного пространства $X = E^T$, определяемых условиями на значения $x(t)$ лишь при t из счетного множества S ($S \subseteq T$). Этим свойством не обладает, например, замкнутое множество всех функций $x = x(t)$: $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, так что не всякое борелевское множество тихоновского произведения $X = E^T$ является одновременно и бэровским. Иначе говоря, σ-алгебра борелевских множеств пространства $X = E^T$ более обширна, чем σ-алгебра бэровских множеств, совпадающая с σ-алгеброй $\mathfrak{A}(T)$.

2. Линейные пространства. Пространство X называется *линейным*, если для элементов x этого пространства определены операции сложения и умножения на действительные числа, причем выполняются следующие условия: вместе с любыми $x_1, x_2 \in X$ в X входит и элемент $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, где λ_1, λ_2 — произвольные числа; существует элемент 0 такой, что $x + 0 = x$, $\lambda \cdot 0 = 0$ при любом λ, $0 \cdot x = 0$ при любом $x \in X$; для всякого $x \in X$ имеется так называемый *противоположный элемент* $-x$: $x - x = 0$; кроме того,

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \quad x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3,$$

$$1 \cdot x = x, \ \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot x) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) x,$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) x = \lambda_1 x + \lambda_2 x, \quad \lambda (x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2.$$

Если вместо действительных чисел λ берутся комплексные числа, то X называется *комплексным линейным пространством*.

Пространство X называется *линейным топологическим пространством*, если операции сложения и умножения на числа являются непрерывными, т. е. функция $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ является непрерывной по совокупности переменных (φ рассматривается как функция на произведении $E \times E \times X \times X$, где E — действительная прямая или комплексная плоскость).

Для задания системы всех открытых множеств линейного топологического пространства X достаточно определить некоторую базу $\mathfrak{S}$ открытых множеств элемента 0, т. е. такую систему открытых множеств, что всякое открытое множество пространства X, содержащее элемент 0, совпадает с объединением некоторых открытых множеств из $\mathfrak{S}$.

Нормированные пространства. Линейное пространство X называется *нормированным*, если для каждого из его элементов x определена норма $\|x\|$ — функция от x, обладающая следующими свойствами:

1) $\|x\| \geqslant 0$;
2) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ при любом λ;
4) $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$ при всех $x_1, x_2 \in X$.

Нормированное пространство является *метрическим*: расстояние в нем определяется как $\rho(x_1, x_2) = \|x_2 - x_1\|$. Полное нормированное пространство называется *банаховым*.

Нормированное пространство X называется *гильбертовым*, если определена числовая функция двух переменных x_1 и x_2, обозначаемая (x_1, x_2) и называемая *скалярным произведением*, обладающая следующими свойствами:

1) $(x, x) \geqslant 0$;
2) $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
3) $(x_1, x_2) = \overline{(x_2, x_1)}$;
4) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x) = \lambda_1 (x_1, x) + \lambda_2 (x_2, x)$ при любых λ_1, λ_2 и $x_1, x_2 \in X$.

Норма $\|x\|$ элемента гильбертова пространства X определяется как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Счетно-нормированные пространства. Пусть X — линейное пространство, в котором определено счетное число норм

$$\|x\|_1, \|x\|_2, \ldots, \|x\|_n, \ldots$$

Пусть для всякой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ элементов пространства X, обладающей тем свойством, что

$$\|x_n - x\|_p \to 0, \quad \|x_m - x_n\|_q \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty,$$

имеет место также и соотношение $\|x_n - x\|_q \to 0$. Такое пространство X, в котором в качестве базы нулевого элемента выбраны множества вида

$$\{\|x\|_1 < \varepsilon, \ldots, \|x\|_p < \varepsilon\}, \quad p = 1, 2, \ldots; \ \varepsilon > 0,$$

называется *счетно-нормированным*. Всякое счетно-нормированное пространство X является метрическим. Соответствующее расстояние $\rho(x_1, x_2)$ можно определить как

$$\rho(x_1, x_2) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \cdot \frac{\|x_1 - x_2\|_p}{1 + \|x_1 - x_2\|_p}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \ldots$$

Счетно-нормированное пространство X называется *счетно-гильбертовым*, если каждая из норм $\|x\|_p$ ($p=1, 2, \ldots$) задается некоторым скалярным произведением

$$(x_1, x_2)_p, \quad \|x\|_p = \sqrt{(x, x)_p}, \quad p=1, 2, \ldots$$

Счетно-гильбертово пространство X называется *ядерным*, если для любого p найдутся такое q и такой ядерный оператор A в гильбертовом пространстве X со скалярным произведением $(x_1, x_2) = (x_1, x_2)_q$, что

$$(x_1, x_2)_p = (Ax_1, x_2)_q.$$

Пример. Пусть X — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $x = x(t)$ на действительной прямой $-\infty < t < \infty$, обращающихся в нуль при $|t| \geqslant a$. Если ввести скалярные произведения как

$$(x_1, x_2)_p = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} x_1^{(k)}(t)\, x_2^{(k)}(t)\, dt, \quad p = 0, 1, \ldots,$$

где $x^{(k)}(t)$ означает k-ю производную функции $x(t)$, то пространство X будет *ядерным пространством.*

Линейные функционалы. Пусть U — линейное пространство. Действительная (или комплексная) функция на U, обозначаемая $x = \langle u, x\rangle$, называется *линейным функционалом*, если

$$\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, x\rangle = \lambda_1 \langle u_1, x\rangle + \lambda_2 \langle u_2, x\rangle$$

при любых действительных (комплексных) λ_1, λ_2 и u_1, $u_2 \in U$. В случае, когда U является линейным топологическим пространством, обычно дополнительно предполагается, что линейный функционал $x = \langle u, x\rangle$ является непрерывным.

Если U — полное гильбертово пространство, то всякий линейный функционал $x = \langle u, x\rangle$, определенный на всем пространстве U, является непрерывным и имеет вид

$$\langle u, x\rangle = (u, x), \quad u \in U,$$

где x — некоторый фиксированный элемент из U, (u, x) — соответствующее скалярное произведение.

В произвольном нормированном пространстве U линейный функционал $x = \langle u, x\rangle$ является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен:

$$\|x\| = \sup_{\|u\|=1} |\langle u, x\rangle| < \infty,$$

где sup берется по всем элементам $u \in U$ ($\|u\| = 1$) (величина $\|x\|$ называется *нормой линейного функционала* $x = \langle u, x\rangle$).

Для любого элемента u_0 нормированного пространства U существует линейный непрерывный функционал $x = \langle u, x\rangle$ ($u \in U$) такой, что $\langle u_0, x\rangle = \|u_0\|$ и $\|x\| = 1$. Всякий линейный непрерывный функционал $x = \langle u, x\rangle$ $(u \in U_0)$, определенный лишь на некотором линейном подпространстве U_0 нормированного пространства U, может быть продолжен до линейного непрерывного функционала на всем пространстве U так, что

$$\|x\| = \sup_{\substack{\|u\|=1\\ u\in U_0}} |\langle u, x\rangle|,$$

где sup берется лишь по тем элементам u из подпространства $U_0 \subseteq U$, для которых $\|u\| = 1$.

В счетно-нормированном пространстве U линейный функционал $x = \langle u, x\rangle$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен по отношению к некоторой норме $\|u\|_p$:

$$\|x\|_p = \sup_{\|u\|_p=1} |\langle u, x\rangle| < \infty.$$

Сопряженное пространство. Совокупность всех линейных функционалов $x = \langle u, x\rangle$ на линейном пространстве U является линейным пространством: если x_1 и x_2 — некоторые линейные функционалы, то $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ также является линейным функционалом, определенным формулой

$$\langle u, x\rangle = \lambda_1\langle u, x_1\rangle + \lambda_2\langle u, x_2\rangle.$$

Пусть X — пространство действительных линейных функционалов $x = \langle u, x\rangle$ на некотором действительном линейном пространстве U. Если выбрать в X в качестве базы открытых множеств элемента 0 совокупность всевозможных *цилиндрических множеств* вида

$$\{\langle u_1, x\rangle < \varepsilon, \ldots, \langle u_n, x\rangle < \varepsilon\},$$

где $u_1, \ldots, u_n \in U$ и $\varepsilon > 0$, то X станет линейным топологическим пространством. Указанные открытые цилиндрические множества называются *слабыми окрестностями* нуля, а определяемое ими топологическое пространство X называется *сопряженным пространством* со слабой топологией. Если исходное линейное пространство U является нормированным, то в сопряженном к нему пространстве X всех линейных непрерывных функционалов $x = \langle u, x\rangle$ $(u \in U)$ можно ввести норму

$$\|x\| = \sup_{\|u\|=1} |\langle u, x\rangle|,$$

и тогда X будет полным нормированным пространством. Базой открытых множеств элемента 0 являются в этом случае множества вида $\|x\| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, называемые *сильными окрестностями* нуля. Определяемое ими топологическое пространство X называется *сопряженным пространством* с сильной топологией.

Пусть U — сепарабельное счетно-гильбертово пространство, X — сопряженное к нему пространство всех линейных непрерывных функционалов $x = \langle u, x\rangle$ со слабой топологией. Множество $S_p(r)$ вида

$$S_p(r) = \{\|x\|_p \leqslant r\}$$

($S_p(r)$ — шар радиуса r, т. е. множество элементов $x \in X$, для которых $\|x\|_p = \sup\limits_{\|u\|_p<1} |\langle u, x\rangle| \leqslant r$) является компактом. Все пространство X представляется в виде счетного числа компактов.

Борелевская и бэровская σ-алгебры пространства X со слабой топологией, сопряженного к сепарабельному счетно-нормированному пространству U, совпадают с наименьшей σ-алгеброй $\mathfrak{A}$, содержащей все цилиндрические множества вида

$$\{\langle u_1, x\rangle \in B_1, \ldots, \langle u_n, x\rangle \in B_n\},$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — произвольные элементы из U, а $B_1, \ldots, B_n$ — произвольные борелевские множества на действительной прямой.

Говорят, что в линейном пространстве U задан *линейный оператор* A, если определена функция $v = Au$ от $u \in U$ со значениями в некотором линейном пространстве V такая, что

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \cdot Au_1 + \lambda_2 \cdot Au_2$$

для любых $u_1, u_2 \in U$ и любых чисел λ_1, λ_2. Линейный оператор A^{-1}, определенный на элементах пространства V вида $v = Au$ ($u \in U$), называется *обратным* к оператору A, если $A^{-1}v = u$ при $v = Au$. Пусть A_1, A_2 — любые линейные операторы на пространстве U и λ_1, λ_2 — любые числа. Тогда оператор $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, т. е.

$$Au = \lambda_1 \cdot A_1 u + \lambda_2 \cdot A_2 u, \quad u \in U,$$

также является линейным оператором.

Произведением операторов A и B, где A — линейный оператор на пространстве U со значениями в пространстве V, а B — линейный оператор на V, называется линейный оператор вида

$$BAu, \quad u \in U.$$

Линейный оператор A на линейном топологическом пространстве U, отображающий U в линейное топологическое пространство V, называется *непрерывным*, если функция $v = Au$ является непрерывной. Если U и V — нормированные пространства, то оператор A является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен, т. е.

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| < \infty,$$

где sup берется по всем элементам $u \in U$ ($\|u\| = 1$); величина $\|A\|$ называется *нормой* оператора A.

Линейный оператор A на нормированном пространстве U называется *вполне непрерывным*, если множество элементов вида Au ($u \in U$, $\|u\| = 1$) является компактным в пространстве V.

Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве: U: $AU \subseteq U$. Оператор A^* называется *сопряженным* к A, если $(Au', u'') = (u', A^*u'')$ при всех $u', u'' \in U$. Оператор A называется *самосопряженным*, если $A^* = A$. Самосопряженный оператор A называется *проекционным*, если $A^2 = A$. Самосопряженный оператор A называется *положительным*, если $(Au, u) \geqslant 0$ при всех $u \in U$.

Оператор A на гильбертовом пространстве U со значениями в гильбертовом пространстве V называется *изометрическим*, если $(Au', Au'') = (u', u'')$ при всех $u', u'' \in U$. Изометрический оператор A в гильбертовом пространстве U такой, что $AU = U$, называется *унитарным*.

Система элементов $\{u_\alpha\}$ гильбертова пространства U называется *полной*, если всевозможные линейные комбинации вида $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ образуют всюду плотное множество в пространстве U. Элементы u' и u'' называются *ортогональными*, если скалярное произведение (u', u'') равно нулю. Система элементов $\{u_\alpha\}$ называется *ортонормированной*, если $(u_\alpha, u_\alpha) = 1$ и $(u_\alpha, u_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Пусть $u_1, u_2, \ldots$ — полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве U. Всякий элемент $u \in U$ может быть представлен в виде ряда

$$u = \sum_n (u, u_n)\, u_n.$$

Любой самосопряженный вполне непрерывный оператор A в полном гильбертовом пространстве U имеет полную ортонормированную систему собственных элементов, причем

$$Au = \sum_n \lambda_n (u, u_n) \cdot u_n,$$

где $u_1, u_2, \ldots$ — ортонормированная последовательность всех собственных элементов u_n с отличными от нуля собственными значениями λ_n ($\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$).

Самосопряженный вполне непрерывный оператор A называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если

$$\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность всех отличных от нуля собственных значений; для любых полных ортонормированных систем $u_1, u_2, \ldots$ и $v_1, v_2, \ldots$ в пространстве U имеет место равенство

$$\sum_m \sum_n |Au_m, v_n|^2 = \sum_n |\lambda_n|^2.$$

Положительный вполне непрерывный оператор A в гильбертовом пространстве U называется *ядерным*, если для некоторой полной ортономированной последовательности элементов u_1, u_2, ...

$$\sum_n (Au_n, u_n) < \infty.$$

Пусть A — ядерный оператор, тогда для любой полной ортонормированной последовательности элементов u_1, u_2, ...

$$\sum_n (Au_n, u_n) = \sum_n \lambda_n.$$

Пример. Пусть $L^2(T)$ — гильбертово пространство всех действительных или комплексных интегрируемых функций $u = u(t)$ на отрезке $T = [a, b]$ со скалярным произведением

$$(u_1, u_2) = \int_a^b u_1(t)\overline{u_2(t)}\, dt.$$

Пусть $B(s, t)$ — измеримая функция двух переменных t и s такая, что $B(s, t) \equiv B(t, s)$ и

$$\int_a^b \int_a^b |B(s, t)|^2 ds\, dt < \infty.$$

Тогда оператор B, определенный как

$$Bu(t) = \int_a^b B(s, t)\, u(s)\, ds, \quad t \in T,$$

будет оператором Гильберта — Шмидта. Если функция $B(s, t)$ непрерывна и *положительно определена*, т. е. если

$$\sum \lambda_k \lambda_j B(t_k, t_j) \geqslant 0$$

при любых числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $t_1, \ldots, t_n \in T$, то определенный выше оператор B будет положительным ядерным оператором в пространстве $L^2(T)$.

§ 2. Распределения и меры

1. Меры в измеримых пространствах.

Измеримые пространства с мерой. Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — произвольное измеримое пространство. Неотрицательная функция $\mu = \mu(A)$ на σ-алгебре множеств $\mathfrak{A}$ (быть может, принимающая и значения $+\infty$) называется *мерой*, если она счетно-аддитивна, т. е. для любого счетного числа непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ и $A = \bigcup_k A_k$

$$\mu(A) = \sum_k \mu(A_k). \tag{2.1}$$

Значение $\mu(A)$ называется *мерой множеств* $A \in \mathfrak{A}$.

Мера μ называется *конечной*, если $\mu(X)<\infty$, и σ-конечной, если пространство X можно представить в виде объединения счетного числа множеств A_k таких, что $\mu(A_k)<\infty$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Совокупность $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ называется *пространством с мерой*.

Распределения. Неотрицательная конечная функция $\mu=\mu(A)$ на некотором полукольце множеств $\mathfrak{S}$ произвольного пространства X называется *распределением*, если для всякого множества $A\in\mathfrak{S}$, представимого в виде объединения счетного числа непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{S}$: $A=\bigcup\limits_k A_k$, имеет место соотношение (2.1). Если рассматриваемое полукольцо множеств $\mathfrak{S}$ является кольцом, то функция μ является распределением тогда и только тогда, когда она конечно-аддитивна и непрерывна: для непересекающихся $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}$

$$\mu(A)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k) \text{ при } A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$$

и для $A_1\supseteq A_2\supseteq \ldots \left(\bigcap\limits_n A_n=\varnothing\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0.$$

Неотрицательная конечная функция $\mu=\mu(A)$ на полукольце множеств $\mathfrak{S}$ называется *слабым распределением*, если для всякого множества $A\in\mathfrak{S}$, представимого в виде **к о н е ч н о г о** числа непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n\in\mathfrak{S}$, имеет место соотношение (2.1). Всякое слабое распределение $\mu=\mu(A)$ на $\mathfrak{S}$ может быть однозначно **п р о д о л ж е н о** на кольцо всех множеств $A\subseteq X$, представимых в виде объединения конечного числа непересекающихся множеств из $\mathfrak{S}$: $A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$. Это продолжение задается формулой

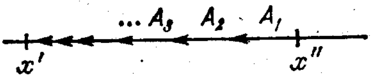


Рис. 18

$$\mu(A)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k).$$

Слабое распределение $\mu=\mu(A)$ на кольце $\mathfrak{A}$ является конечно-аддитивной функцией.

П р и м е р. Пусть X — действительная прямая и $\mathfrak{S}$ — система всех полуинтервалов вида $(x', x'']$. Пусть функция $\mu=\mu(A)$ на полукольце $\mathfrak{S}$ определяется как

$$\mu(A)=x''-x' \quad \text{при } A=(x', x''].$$

Для любого $A=(x', x'']$, разложенного на полуинтервалы

$A_k = (x_k', x_k''] \, (k = 1, 2, \ldots)$ (рис. 18), имеем

$$x_1'' = x'', \; x_2'' = x_1', \; \ldots, \; x_{n+1}'' = x_n', \; \ldots,$$
$$(x_1'' - x_1') + (x_2'' - x_2') + \ldots = x'' - x'.$$

Таким образом, функция μ является распределением.

Продолжение распределений и мер. Пусть $\mu = \mu(A)$ — распределение на полукольце множеств $\mathfrak{S}$ пространства X. Предположим, что распределение μ является ограниченным:

$$\sup_{A \in \mathfrak{S}} \mu(A) < \infty.$$

Рассмотрим величину $\mu^*(A)$, называемую *внешней мерой* множества $A \subseteq X$ и определяемую как

$$\mu^*(A) = \inf \sum_k \mu(A_k),$$

где inf берется по всем (взятым в счетном числе) множествам $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{S}$, в сумме покрывающим A: $A \subseteq \bigcup_k A_k$. Величина $\mu^*(A)$ для любого множества $A \subseteq X$ является конечной. Множество A называется *измеримым* (относительно μ на $\mathfrak{S}$), если

$$\mu^*(A) = \mu^*(X) - \mu^*(X \setminus A).$$

Совокупность $\mathfrak{A}$ всех измеримых множеств является σ-алгеброй, содержащей полукольцо $\mathfrak{S}$. Функция $\mu = \mu(A)$, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ формулой

$$\mu(A) = \mu^*(A), \quad A \in \mathfrak{A},$$

является мерой и называется *продолжением распределения* μ.

Вообще мера μ_1 называется *продолжением распределения* μ, если μ_1 определена на содержащей полукольцо $\mathfrak{S}$ σ-алгебре $\mathfrak{A}_1$ и $\mu_1(A) = \mu(A)$ при $A \in \mathfrak{S}$. Для любого продолжения μ_1 меры μ имеют место неравенства

$$\mu^*(A) \geqslant \mu_1(A) \geqslant \mu^*(X) - \mu^*(X \setminus A).$$

Продолжение распределения μ на σ-алгебру $\mathfrak{A}$ всех измеримых множеств является однозначным. Для любого отдельно взятого множества $A \subseteq X$ и числа m, заключенного в пределах

$$\mu^*(A) > m \geqslant \mu^*(X) - \mu^*(X \setminus A),$$

существует продолжение μ_1 меры μ такое, что $\mu_1(A) = m$ [139].

Если исходное распределение μ на полукольце $\mathfrak{S}$ является неограниченным, то пространство X можно представить в виде объединения счетного числа непересекающихся множеств $X = \bigcup_k A_k \; (A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{S})$; в этом случае *измеримым* называется множество A такое, что измеримыми являются пересечения

AA_k, т. е. пересечения A со вспомогательными пространствами A_k $(k=1, 2, \ldots)$. Совокупность $\mathfrak{A}$ всех измеримых множеств является σ-алгеброй. Продолжение распределения μ определяется как

$$\mu(A)=\sum_k \mu^*(A\cdot A_k), \quad A\in\mathfrak{A}.$$

Пример. *Распределение на прямой.* Пусть X — действительная прямая и $\mu=\mu(A)$ — распределение на полукольце $\mathfrak{S}$ всех полуинтервалов вида $A=(x', x'']$, задаваемое формулой

$$\mu(A)=x''-x', \quad A=(x', x''].$$

Продолжение этого распределения представляет собой так называемую *лебеговскую меру* на действительной прямой. Пусть $F(x)$ — произвольная, непрерывная справа, монотонно неубывающая неотрицательная функция на действительной прямой $-\infty<x<\infty$ такая, что

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x)=1.$$

Формула

$$\mu(A)=F(x'')-F(x'), \quad A=(x', x''],$$

задает некоторое распределение на полукольце $\mathfrak{S}$ всех полуинтервалов $A=(x', x'']$. Продолжение этого распределения на σ-алгебру всех измеримых множеств представляет собой нормированную меру μ $(\mu(X)=1)$, обозначаемую обычно dF. Сама функция $F(x)$ описанного типа называется *функцией распределения.* Всякая нормированная борелевская мера μ на действительной прямой однозначно определяется некоторой функцией распределения $F(x)$, связанной с μ соотношением

$$F(x)=\mu(A), \quad A=(-\infty, x].$$

Пример. Пусть $\mu=\mu(A)$ — нормированная борелевская мера в n-мерном евклидовом пространстве X. Соотношение $F(x_1, \ldots, x_n)=\mu(A)$ при $A=(-\infty, x_1]\times\ldots\times(-\infty, x_n]$ определяет так называемую *функцию распределения* $F=F(x_1, \ldots, x_n)$ $(-\infty<x_k<\infty,\ k=1, \ldots, n)$. Функция распределения F однозначно задает соответствующее распределение $\mu=\mu(A)$ на полукольце множеств вида $A=(x_1', x_1'']\times\ldots\times(x_n', x_n'']$:

$$\mu(A)=\Delta(x_1', x_1'')\ldots\Delta(x_n', x_n'')F,$$

где $\Delta(x', x'')$ — *оператор разности*, действие которого на функцию $\varphi(x)$ переменной x выражается формулой

$$\Delta(x', x'')\varphi=\varphi(x'')-\varphi(x').$$

Функция распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$ по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$ монотонно не убывает и непрерывна справа, причем

$$\lim_{x_k \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

$$\lim_{x_1 \to \infty, \ldots, x_n \to \infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

Не всякая функция F, обладающая перечисленными свойствами, является функцией распределения. Например, функция $F(x_1, x_2)$ двух переменных x_1, x_2:

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_1, x_2 \geqslant 0, \ \max(x_1, x_2) \geqslant 1, \\ 0 & \text{при остальных} \quad x_1, x_2 \end{cases}$$

обладает всеми перечисленными свойствами, но не является функцией распределения какой бы то ни было меры μ на плоскости.

Пример. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — произвольное пространство с конечной мерой, где $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра всех измеримых (относительно μ) множеств. Пусть A — произвольное множество пространства X, не входящее в σ-алгебру $\mathfrak{A}$. Минимальная σ-алгебра $\mathfrak{A}_1$, содержащая σ-алгебру $\mathfrak{A}$ и множество A, состоит из всех множеств вида

$$A_1 A \cup A_2 \bar{A}, \qquad A_1, A_2 \in \mathfrak{A}.$$

Если внешняя мера $\mu^*(A)$ множества A такова, что

$$\mu^*(A) = \mu^*(X),$$

то для любых измеримых множеств A_1, $A_2 \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющих условию $A_1 \cdot A = A_2 \cdot A$, симметрическая разность $A_1 \circ A_2$ входит в дополнение $\bar{A}$ и $\mu(A_1 \circ A_2) = 0$. Формула

$$\mu_1(A_1 A \cup A_2 \bar{A}) = \mu(A_1)$$

определяет продолжение меры μ на более широкую σ-алгебру $\mathfrak{A}_1$, причем

$$\mu_1(A) = \mu^*(A).$$

Полные меры. Мера $\mu = \mu(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ называется *полной*, если всякое множество A', содержащееся в некотором множестве $A \in \mathfrak{A}$ меры нуль: $\mu(A) = 0$, входит в σ-алгебру $\mathfrak{A}$. Мера $\mu = \mu(A)$ на σ-алгебре всех измеримых множеств является полной. Всякую меру μ можно продолжить до полной меры.

2. Меры в топологических пространствах.

Бэровские меры и их продолжение. Пусть X — регулярное топологическое пространство, и пусть $\mathfrak{A}$ представляет собой σ-алгебру его бэровских множеств. Всякая конечная мера $\mu = \mu(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ обладает так называемым свойством *регулярности*: для любого бэровского множества A

$$\mu(A) = \inf_{G \supseteq A} \mu(G),$$

где inf берется по всем открытым бэровским множествам $G \supseteq A$, или, что фактически то же самое,

$$\mu(A) = \sup_{F \subseteq A} \mu(F),$$

где sup берется по всем замкнутым бэровским множествам $F \subseteq A$.

Пример. Пусть X — действительная прямая. Бэровские и борелевские множества на прямой — это одно и то же. Мера $\mu(A)$ всякого измеримого множества A есть

$$\mu(A) = \inf \sum_k \mu(A_k),$$

где inf берется по всем непересекающимся полуинтервалам $A_k = (x_k', x_k'']$, в сумме содержащим множество A. В то же время каждый полуинтервал $(x', x'']$ является пересечением счетного числа открытых интервалов, и ясно, что

$$\mu(A) = \inf \mu(G),$$

где inf берется по всем открытым множествам G, т. е. по объединениям открытых интервалов, содержащим A.

Аналогичное объяснение можно дать и в случае произвольного регулярного пространства X. В самом деле, всякое множество $F \in \mathfrak{A}$, являющееся прообразом нуля при некотором непрерывном отображении $\varphi = \varphi(x)$ на действительную прямую Y: $F = \{\varphi = 0\}$, совпадает с пересечением счетного числа открытых множеств G_δ вида $G_\delta = \{|\varphi| < \delta\}$: $F = \bigcap G_\delta$. В силу непрерывности меры μ

$$\mu(F) = \inf \mu(G_\delta).$$

Для разностей $A = F_1 \backslash F_2$ таких множеств F_1 и F_2 $(F_2 \subseteq F_1)$ имеем

$$\mu(A) = \mu(F_1) - \mu(F_2) = \inf \mu(G),$$

где inf берется по всем открытым множествам G вида $G_1 \backslash F_2$ $(G_1 \supseteq F_1)$. Мера же произвольного измеримого (по отношению к μ) множества A есть

$$\mu(A) = \inf \sum_k \mu(A_k),$$

где inf берется по всем взятым в счетном числе непересекающимся множествам A_k вида $A_k = F_{1k} \backslash F_{2k}$, образующим полукольцо в $\mathfrak{A}$. Ясно, что $\mu(A)$ совпадает с нижней гранью $\inf \mu(G)$, взятой по всем открытым множествам G, т. е. по объединениям соответствующих открытых множеств $G_k \supseteq A_k$.

Регулярные распределения на компактах. Слабое распределение $\mu = \mu(A)$ на полукольце множеств $\mathfrak{S}$ топологического пространства X называется *регулярным*, если для любого $A \in \mathfrak{S}$

$$\mu(A) = \sup \mu(F),$$

где sup берется по всем замкнутым множествам F из $\mathfrak{S}$ $(F \subseteq A)$, или

$$\mu(A) = \inf \mu(G),$$

где inf берется по всем открытым множествам G из $\mathfrak{S}$ $(G \supseteq A)$. В случае, когда полукольцо $\mathfrak{S}$ является σ-алгеброй, а $\mu = \mu(A)$ — мерой на $\mathfrak{S}$, μ называется *регулярной мерой*.

Пусть пространство X является компактом. Тогда всякое слабое регулярное распределение $\mu = \mu(A)$ является регулярным распределением. Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что μ определено на кольце множеств, и если имеется некоторая последовательность множеств $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ из $\mathfrak{S}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) > 0$ ($A_1, A_2, \ldots$ можно считать замкнутыми), то пересечение любого конечного числа множеств из этой последовательности не пусто, а в компакте X такая центрированная система имеет непустое пересечение: $\bigcap\limits_n A_n = \varnothing$. Поэтому, если $\bigcap\limits_n A_n = \varnothing$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, так что функция $\mu = \mu(A)$ непрерывна — является регулярным распределением. Продолжение μ на σ-алгебру соответствующих измеримых множеств является регулярной мерой.

Пусть $\mu = \mu(A)$ — произвольная бэровская мера на компакте X (т. е. мера, определенная на σ-алгебре бэровских множеств пространства X). Она может быть продолжена до регулярной борелевской меры μ (т. е. меры, определенной на всех борелевских множествах в X). Это продолжение единственно и может быть задано, например, следующим образом: для любого открытого множества $A \subseteq X$

$$\mu(A) = \sup \mu(G),$$

где sup берется по всем бэровским открытым множествам G $(G \subseteq A)$, и для произвольного борелевского множества $A \subseteq X$

$$\mu(A) = \inf \mu(G),$$

где inf берется по всем открытым множествам G $(G \supseteq A)$.

Регулярное слабое распределение $\mu = \mu(A)$ на некотором полукольце множеств $\mathfrak{S}$ произвольного топологического пространства X называется *плотным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $A \in \mathfrak{S}$, что $\mu^*(X \backslash A) \leqslant \varepsilon$. Плотной, например, является всякая регулярная борелевская мера в топологическом пространстве X, представимом в виде счетной суммы компактов. Плотной является всякая мера в произвольном сепарабельном метрическом пространстве.

Высказанные выше положения о распределениях в компактах остаются справедливыми, если соответствующие распределения являются плотными в рассматриваемом пространстве X.

Меры и отображения. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство с мерой, $\varphi = \varphi(x)$ — функция на X со значениями в пространстве Y. Соотношение

$$\mu_\varphi(B) = \mu\ \{\varphi \in B\}$$

определяет меру $\nu = \mu_\varphi$ на σ-алгебре $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\varphi$ всех множеств B, прообразы $\{\varphi \in B\}$ которых входят в σ-алгебру $\mathfrak{A}$ (говорят, что мера $\nu = \mu_\varphi$ *индуцирована* отображением φ).

Пусть X — произвольное пространство, $\varphi = \varphi(x)$ — функция на X со значениями в Y, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — измеримое пространство с мерой. В случае, когда множество $\varphi(X)$ является измеримым, соотношение

$$\nu^\varphi(A) = \nu\{B \cap \varphi(X)\}, \quad A = \{\varphi \in B\},$$

определяет меру $\mu = \nu^\varphi$ на σ-алгебре $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\varphi$ всех множеств пространства X, являющихся прообразами каких-либо множеств $B \in \mathfrak{B}$ (говорят, что мера $\mu = \nu^\varphi$ *индуцирована* отображением φ).

Мера μ на σ-алгебре множеств $\mathfrak{A}$ пространства X называется *совершенной*, если при всяком $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-измеримом отображении $\varphi = \varphi(x)$ пространства $(X, \mathfrak{A})$ в действительную прямую $(Y, \mathfrak{B})$ с борелевской алгеброй $\mathfrak{B}$ индуцированная на σ-алгебре $\mathfrak{B}_\varphi$ мера μ_φ является регулярной. Мера μ совершенна тогда и только тогда, когда для любой $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-измеримой действительной функции $\varphi = \varphi(x)$ и любого $A \in \mathfrak{A}$ образ $\varphi(A)$ является измеримым множеством на прямой (по отношению к мере $\nu = \mu_\varphi$, индуцированной соответствующим отображением φ).

Всякая плотная мера является совершенной.

Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство с совершенной мерой μ. Любое отображение $\varphi = \varphi(x)$ пространства X в произвольное пространство Y индуцирует в нем совершенную меру $\nu = \mu_\varphi$ на соответствующей σ-алгебре $\mathfrak{B}_\varphi$.

3. Согласованные распределения.

Произведение мер. Пусть X_1 и X_2 — произвольные пространства, $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — некоторые системы множеств в X_1 и X_2, каждая из которых является полукольцом, $\mu_1 = \mu_1(A_1)$ и $\mu_2 = \mu_2(A_2)$ — некоторые распределения на соответствующих множествах $A_1 \in \mathfrak{S}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{S}_2$.

Пусть $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ — полукольцо всех множеств A пространства $X = X_1 \times X_2$, представимых в виде $A = A_1 \times A_2$. Если определить на $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ неотрицательную функцию $\mu = \mu(A)$, положив

$$\mu(A) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2), \quad A = A_1 \times A_2,$$

то μ будет распределением на $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$; $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ называется *произведением распределений* μ_1 и μ_2.

Всякое распределение $\mu = \mu(A)$ на полукольце $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ прямоугольных множеств $A = A_1 \times A_2$ при фиксированном A_1 (или при фиксированном A_2) можно рассматривать как распределение только на $\mathfrak{S}_2$ (или только на $\mathfrak{S}_1$). Соответствующие распределения

$$\mu_1(A_1) = \mu(A_1, X_2), \quad \mu_2(A_2) = \mu(X_1, A_2)$$

называются *проекциями* распределения μ.

Пусть X — топологическое пространство, являющееся произведением топологических пространств X_1 и X_2. Распределение μ будет регулярным и плотным, если соответствующими свойствами обладает каждая из его проекций [81].

Пример. Пусть $l = l(B)$ — лебеговская мера на отрезке $I = [0, 1]$ и $m = m(A)$ — мера на борелевских множествах A квадрата $I \times I$, определенная формулой

$$m(A) = l\{(x, x) \in A\},$$

где $\{(x, x) \in A\}$ означает множество таких точек $x \in I$, что $(x, x) \in A$ (мера $m = m(A)$ «сосредоточена» на диагонали D квадрата $I \times I$). Пусть X_1 — такое неизмеримое множество на отрезке $[0, 1]$, что внешняя мера $l^*(X_1)$ и внешняя мера $l^*(X_2)$ дополнительного множества $X_2 = I \backslash X_1$ равны 1. Пусть $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ суть σ-алгебры множеств вида $A_1 = B_1 X_1$ и $A_2 = B_2 X_2$ в пространствах X_1 и X_2 (B_1 и B_2 — борелевские множества отрезка $I = [0, 1]$). Пусть $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ — полукольцо множеств произведения $X = X_1 \times X_2$, имеющих вид

$$A = A_1 \times A_2 = (B_1 \times B_2) \cdot (X_1 \times X_2),$$

и $\mu = \mu(A)$ — аддитивная функция на $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, определенная формулой

$$\mu(A) = m(B_1 \times B_2) = l(B_1 \cdot B_2).$$

По каждому из аргументов $A_1 X_1$ или $A_2 X_2$ эта функция представляет собой меру. Если предположить, что она является распределением и продолжается до меры, то на множествах вида $A \cdot (X_1 \times X_2)$, где A — борелевское множество квадрата $I \times I$, она будет удовлетворять соотношению

$$\mu[A(X_1 \times X_2)] = m(A).$$

Но это соотношение не выполнено при $A = D$ (D — диагональ квадрата $I \times I$). В самом деле, пересечение $D \cdot (X_1 \times X_2)$ является пустым множеством, и если μ — мера, то $\mu[D \cdot (X_1 \times X_2)] = 0$. С другой стороны, $m(D) = 1$. Таким образом, функция $\mu = \mu(A)$ на полукольце множеств вида $A = B_1 X_1 \times B_2 X_2$ не является распределением, хотя по каждому из аргументов представляет собой меру.

Согласованные распределения. Пусть E — некоторое пространство и $\mathfrak{S}$ — некоторое полукольцо его множеств. Пусть $X = E^T$ — совокупность всех функций $x = x(t)$ на некотором множестве T со значениями в E. Совокупность $\mathfrak{S}^T$ всех цилиндрических множеств пространства X вида

$$A = \{x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\},$$

где $t_1, \ldots, t_n \in T$ и $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{S}$, является полукольцом.

Пусть $\mu = \mu(A)$ — произвольное распределение на полукольце $\mathfrak{S}^T$. Определим функции $\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n)$ «многих переменных» $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{S}$, положив

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n) = \mu\{x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\}.$$

Функции $\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n)$ по каждому из аргументов $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{S}$ представляют собой распределение на полукольце $\mathfrak{S}$, причем

$$\mu_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(B_{i_1}, \ldots, B_{i_n}) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n)$$

при любой одновременной перестановке $t_1, \ldots, t_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ и, кроме того,

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(B_1, \ldots, B_n, E) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n).$$

Совокупность функций $\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n)$, обладающих перечисленными свойствами, называется *семейством согласованных распределений*. Всякое семейство согласованных распределений $\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n)$ однозначно определяет некоторое слабое распределение $\mu = \mu(A)$ на полукольце всех цилиндрических множеств. Это слабое распределение μ определяется формулой

$$\mu(A) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n)$$

при

$$A = \{x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\}, \quad B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{S}.$$

Пусть пространство E — компакт, T — произвольное множество, X^T — соответствующее тихоновское произведение, и пусть $\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n)$ — семейство согласованных регулярных распределений (имеется в виду регулярность распределений $\mu_t(B) = \mu_{t,t_1,\ldots,t_n}(B, E, \ldots, E)$ $(t \in T)$ на полукольце $\mathfrak{S}$ множеств B пространства E). Определяемое ими слабое распределение $\mu = \mu(A)$ на полукольце $\mathfrak{S}^T$ цилиндрических множеств также является регулярным и однозначно продолжается в регулярную меру μ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ всех измеримых (по отношению к распределению μ) множеств A пространства $X = E^T$. Отметим, что согласованные распределения $\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n)$, заданные на бэровских множествах пространства E, регулярны. Все высказанные здесь положения остаются в силе, если исходное пространство E и не является компактом, но рассматриваемые согласованные распределения плотны в E.

Пусть E — сепарабельное топологическое пространство, являющееся компактом, и $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра бэровских множеств в E. В этом случае бэровская σ-алгебра $\mathfrak{A}$ тихоновского произведения $X = E^T$ порождается системой всех цилиндрических множеств A вида $A = \{x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\}$, где $B_1, \ldots, B_n$ — бэровские множества пространства E: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(T)$.

Всякая мера $\mu = \mu(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ может быть продолжена до регулярной меры на всех борелевских множествах пространства $X = E^T$. Такое продолжение единственно и может быть, например, задано следующим образом: для любого открытого множества $A \subseteq X$

$$\mu(A) = \sup \mu(G)$$

и для любого борелевского множества $A \subseteq X$

$$\mu(A) = \inf \mu(G),$$

где sup берется по всем открытым бэровским множествам $G \subseteq A$, каждое из которых представляет собой объединение счетного числа открытых цилиндрических множеств, а inf берется по всем открытым множествам $G \supseteq A$ (см. [141]).

Согласованные распределения в линейных пространствах. Пусть U — некоторое линейное пространство, X — сопряженное пространство линейных функционалов $x = \langle u, x\rangle$ на U. Система цилиндрических множеств $A \subseteq X$ вида

$$\{\langle u_1, x\rangle \in B_1, \ldots, \langle u_n, x\rangle \in B_n\}$$

($u_1, \ldots, u_n$ — произвольное конечное число элементов из U, $B_1, \ldots, B_n$ — произвольные борелевские множества на прямой) образует полукольцо $\mathfrak{S}$. Пусть $\mu = \mu(A)$ — некоторое распределение на $\mathfrak{S}$. Положим

$$\mu_{u_1, \ldots, u_n}(B_1, \ldots, B_n) = \mu(A) \tag{2.2}$$

при $A = \{\langle u_1, x\rangle \in B_1, \ldots, \langle u_n, x\rangle \in B_n\}$.

Функции $\mu_{u_1, \ldots, u_n}(B_1, \ldots, B_n)$ по каждому из аргументов $B_1, \ldots, B_n$ представляют собой борелевское распределение на прямой, не меняются при любой одновременной перестановке $u_1, \ldots, u_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ и, кроме того, согласованы в том смысле, что если цилиндрические множества

$$A' = \{\langle u'_1, x\rangle \in B'_1, \ldots, \langle u'_m, x\rangle \in B'_m\},$$
$$A = \{\langle u_1, x\rangle \in B_1, \ldots, \langle u_n, x\rangle \in B_n\}$$

совпадают, то

$$\mu_{u'_1, \ldots, u'_m}(B'_1, \ldots, B'_m) = \mu_{u_1, \ldots, u_n}(B_1, \ldots, B_n).$$

Всякое семейство функций $\mu_{u_1, \ldots, u_n}(B_1, \ldots, B_n)$, обладающее указанными свойствами, называется *семейством согласованных* *распределений.* Согласованные распределения $\mu_{u_1,\ldots,u_n}(B_1, \ldots, B_n)$, отвечающие каждым $u_1, \ldots, u_n \in U$, определяют слабое распределение $\mu = \mu(A)$ на полукольце всех цилиндрических множеств ($\mu(A)$ задается формулой (2.2)).

Пусть U — счетно-гильбертово пространство, X — сопряженное к нему топологическое пространство всех линейных непрерывных функционалов. Задаваемое согласованными распределениями $\mu_{u_1,\ldots,u_n}(B_1, \ldots, B_n)$ слабое распределение $\mu = \mu(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порождаемой полукольцом цилиндрических множеств, будет настоящим распределением тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует шар $S_p(r) = \{\|x\|_p \leqslant r\}$ — компакт в X — такой, что $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ при $A \subset \overline{S_p(r)}$ (т. е. при любом $A \in \mathfrak{A}$, лежащем вне шара $S_p(r)$).

Каждая из функций $\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n)$ согласованного семейства распределений фактически представляет собой распределение на полукольце всех множеств вида $B_1 \times \ldots \times B_n$ в n-мерном пространстве E^n (E — действительная прямая) и определяет борелевскую меру в этом пространстве. Обозначим такую меру $\mu_{u_1,\ldots,u_n}$.

Пусть пространство U не только счетно-нормированное, но и ядерное. Условие, при котором согласованное семейство распределений задает распределение $\mu = \mu(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порождаемой полукольцом цилиндрических множеств, состоит в том, что при $u_{1k} \to u_1, \ldots, u_{nk} \to u_n$ борелевские распределения $\mu_{u_{1k},\ldots,u_{nk}}$ (отвечающие функциям $\mu_{u_{1k},\ldots,u_{nk}}(B_1, \ldots, B_n)$) слабо сходятся к соответствующему распределению $\mu_{u_1,\ldots,u_n}$:

$$\mu_{u_{1k},\ldots,u_{nk}} \Rightarrow \mu_{u_1,\ldots,u_n} \quad \text{при } k \to \infty.$$

§ 3. Меры и интегралы

1. Интеграл и его свойства. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — произвольное пространство с конечной полной мерой $\mu = \mu(A)$ на σ-алгебре множеств $\mathfrak{A}$. Функция $\varphi = \varphi(x)$ на пространстве X со значениями в некотором пространстве Y называется *простой*, если она принимает не более счетного числа различных значений $y_1, y_2, \ldots$ на соответствующих непересекающихся множествах $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$. Действительная простая функция $\varphi(x)$ на пространстве X называется *интегрируемой* (относительно меры μ), если сходится соответствующий ряд $\sum |y_k| \mu(A_k)$.

Интеграл простой интегрируемой функции $\varphi(x)$ определяется формулой

$$\int_X \varphi(x) \mu(dx) = \sum_k y_k \mu(A_k).$$

Произвольная действительная функция $\varphi(x)$ на X называется *интегрируемой*, если она является пределом равномерно сходящейся последовательности простых интегрируемых функций $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots$:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x);$$

интегралом интегрируемой функции $\varphi(x)$ называется соответствующий предел

$$\int\limits_X \varphi(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi_n(x)\,\mu(dx).$$

Функция $\varphi(x)$ называется *интегрируемой на множестве* $A \in \mathfrak{A}$, если интегрируемой является функция вида $\varphi(x)\varphi_A(x)$, где $\varphi_A(x)$ — *индикатор множества* A:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in A, \\ 0 & \text{при } x \notin A. \end{cases}$$

Интеграл $\int\limits_A \varphi(x)\,\mu(dx)$ функции $\varphi(x)$ на множестве A определяется как

$$\int\limits_A \varphi(x)\,\mu(dx) = \int\limits_X \varphi(x)\,\varphi_A(x)\,\mu(dx).$$

Всякая измеримая ограниченная функция $\varphi(x)$ является интегрируемой; в качестве последовательности простых интегрируемых функций $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,$ равномерно сходящейся к $\varphi(x)$, можно взять функции $\varphi_n(x)$ вида

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{n} \quad \text{при} \quad \frac{k-1}{n} < \varphi(x) \leqslant \frac{k}{n}.$$

Функция $\varphi(x)$ является интегрируемой тогда и только тогда, когда она измерима, а ее абсолютная величина $|\varphi(x)|$ интегрируема. Если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ таковы, что $|\varphi_1(x)| \leqslant |\varphi_2(x)|$, $\varphi_1(x)$ измерима, а $\varphi_2(x)$ интегрируема, то интегрируемой является и функция $\varphi_1(x)$; если $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$, то

$$\int\limits_X \varphi_1(x)\,\mu(dx) \leqslant \int\limits_X \varphi_2(x)\,\mu(dx).$$

Выражения *почти всюду* или *для почти всех* x (относительно меры μ) означают, что речь идет о всех $x \in X$, за исключением, быть может, некоторого множества $A \subseteq X$ меры нуль: $\mu(A) = 0$. Для любой функции $\varphi(x)$, почти всюду равной нулю, интеграл $\int\limits_X \varphi(x)\,\mu(dx)$ равен нулю; если $\int\limits_X |\varphi(x)|\,\mu(dx) = 0$, то $\varphi(x) = 0$ почти всюду.

Для любой интегрируемой функции $\varphi(x)$

$$\int\limits_A |\varphi(x)|\,\mu(dx) \leqslant \operatorname{vrai\,sup}|\varphi|\cdot\mu(A),$$

где $\operatorname{vrai\,sup}|\varphi|$ — так называемая *истинная верхняя грань* функции $|\varphi(x)|$ — определяется как верхняя грань всех тех y, для которых $\mu\{|\varphi|>y\}>0$.

Для любых интегрируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и любых действительных λ_1 и λ_2 функция $\varphi(x)=\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x)$ является интегрируемой, причем

$$\int\limits_X \varphi(x)\,\mu(dx) = \lambda_1\int\limits_X \varphi_1(x)\,\mu(dx) + \lambda_2\mu_2(dx).$$

Обобщенные меры и их абсолютная непрерывность. Пусть $\nu=\nu(A)$ — конечно-аддитивная действительная функция на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Выражение

$$\operatorname{Var}\nu(A) = \sup\sum_k |\nu(A_k)|,$$

где sup берется по всем разбиениям множества $A\in\mathfrak{A}$ на непересекающиеся множества $A_1, A_2, \ldots \in\mathfrak{A}$, называется *вариацией* функции ν на множестве A.

Если $\operatorname{Var}\nu(A)$ является *непрерывной* функцией на $\mathfrak{A}$, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\nu(A_n) = 0$$

для любой последовательности $A_1\supseteq A_2\supseteq\ldots$ множеств из $\mathfrak{A}$, имеющих пустое пересечение, то $\nu(A)$ называется *обобщенной мерой*. Вариация $\operatorname{Var}\nu(A)$ обобщенной меры $\nu(A)$ является мерой на $\mathfrak{A}$. Обобщенная мера $\nu(A)$ называется *абсолютно непрерывной* относительно меры $\mu(A)$, если для любого $\varepsilon\geqslant 0$ существует такое δ, что $\operatorname{Var}\nu(A)\leqslant\varepsilon$ при $\mu(A)\leqslant\delta$, каково бы ни было множество $A\in\mathfrak{A}$. Это равносильно тому, что $\operatorname{Var}\nu(A)=0$ при $\mu(A)=0$ $(A\in\mathfrak{A})$.

Для любой интегрируемой функции $\varphi(x)$ (относительно меры μ) интеграл

$$I(A) = \int\limits_A \varphi(x)\,\mu(dx),\quad A\in\mathfrak{A},$$

представляет собой обобщенную меру на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, абсолютно непрерывную относительно меры $\mu(A)$. При этом

$$\operatorname{Var} I(A) = \int\limits_A |\varphi(x)|\,\mu(dx),$$

$$\operatorname{Var} I(X) = \int\limits_X |\varphi(x)|\,\mu(dx) < \infty.$$

Всякая обобщенная мера $\nu(A)$ на $\mathfrak{A}$, имеющая ограниченную вариацию и абсолютно непрерывная относительно меры $\mu(A)$, представляется в виде

$$\nu(A)=\int_A \varphi(x)\,\mu(dx),$$

где $\varphi(x)$ — некоторая интегрируемая функция, называемая *плотностью* и обозначаемая как $\varphi(x)=\nu(dx)/\mu(dx)$.

Всякая обобщенная мера $\nu(A)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\operatorname{Var}\nu(A)$ и может быть представлена в виде $\nu(A)=\mu_1(A)-\mu_2(A)$, где μ_1 и μ_2 — *взаимно сингулярные*, или, иначе, *перпендикулярные*, *меры* на $\mathfrak{A}$. Перпендикулярность μ_1 и μ_2 означает, что существуют такие непересекающиеся множества A_1 и A_2 из $\mathfrak{A}$, что

$$\mu_1(X\setminus A_1)=0,\quad \mu_2(X\setminus A_2)=0.$$

Каковы бы ни были меры ν и μ, мера ν может быть представлена в виде $\nu(A)=\mu_1(A)+\mu_2(A)$, где μ_1 и μ_2 — взаимно сингулярные меры, причем μ_1 абсолютно непрерывна относительно μ, а μ_2 перпендикулярна μ.

Пространство $C(X)$. Пусть пространство X является компактом, и пусть $\mu=\mu(A)$ — мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ всех бэровских множеств пространства X. Всякая действительная непрерывная функция $\varphi(x)$ на X измерима, ограничена и интегрируема. Пусть $C(X)$ — нормированное пространство всех действительных непрерывных функций $\varphi(x)$ на X с нормой

$$\|\varphi\|=\sup_x|\varphi(x)|.$$

Интеграл

$$\langle\varphi, I\rangle=\int_X \varphi(x)\,\mu(dx)$$

является линейным непрерывным функционалом на пространстве $C(X)$. Этот функционал положителен в том смысле, что $\langle\varphi, I\rangle\geqslant 0$ при $\varphi(x)\geqslant 0$. Всякий линейный непрерывный положительный функционал $\langle\varphi, I\rangle$ на пространстве $C(X)$ представляется в виде $\langle\varphi, I\rangle=\int\limits_X \varphi(x)\,\mu(dx)$, где μ — некоторая бэровская мера. Всякий линейный непрерывный функционал представляется в виде разности положительных функционалов.

Сходимость функций и интегралов. Некоторые неравенства. Пусть $a(y)$ — такая борелевская неотрицательная функция на прямой, что $a(-y)=a(y)$ и $a(y'')\geqslant a(y')$ при $0\leqslant y'\leqslant y''$. Тогда для любой измеримой действительной функции $\varphi(x)$ имеет место следующее неравенство:

$$\mu\{|\varphi|>y\}\leqslant\frac{1}{a(y)}\int_X a[\varphi(x)]\,\mu(dx),$$

где y — произвольное положительное число. В случае $a(y) = |y|^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$

$$\mu\{|\varphi| > y\} \leqslant \frac{1}{|y|^{\alpha}} \int_X |\varphi(x)|^{\alpha} \mu(dx),$$

а для $a(y) = e^{\alpha y}$ $(\alpha > 0)$

$$\mu\{|\varphi| > y\} \leqslant e^{-\alpha y} \int_X e^{\alpha\varphi(x)} \mu(dx).$$

Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — произвольное пространство с мерой. Последовательность измеримых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... называется *сходящейся по мере* *) к измеримой функции $\varphi(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{|\varphi_n - \varphi| > \varepsilon\} = 0.$$

Сходимость по мере равносильна сходимости в метрическом пространстве всех измеримых функций, в котором расстояние определено как

$$\rho(\varphi', \varphi'') = \int_X \frac{|\varphi'(x) - \varphi''(x)|}{1 + |\varphi'(x) - \varphi''(x)|} \mu(dx).$$

При этом равенство $\varphi' = \varphi''$ означает, что $\varphi'(x) = \varphi''(x)$ для почти всех x.

Это метрическое пространство является *полным*, т. е. всякая фундаментальная по мере последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ...:

$$\lim_{m, n\to\infty} \mu\{|\varphi_m - \varphi_n| > \varepsilon\} = 0$$

сходится по мере к некоторой измеримой функции $\varphi(x)$. Любая сходящаяся почти всюду последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... сходится по мере. Всякая сходящаяся по мере последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... содержит некоторую подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. Последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... сходится почти всюду тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{m>n} \{|\varphi_m - \varphi| > \varepsilon\}\Big) = 0.$$

Если последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... сходится по мере к функции $\varphi(x)$, то последовательность φ_{n_k} $(k = 1, 2, \ldots)$, для которой при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \mu\{|\varphi_{n_k} - \varphi| > \varepsilon\} < \infty,$$

будет сходиться к $\varphi(x)$ для почти всех x.

---

*) В случае вероятностной меры говорят о *сходимости по вероятности*.

Последовательность интегрируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., называется *сходящейся в среднем* к интегрируемой функции $\varphi(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,\mu(dx)=0.$$

Для такой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \varphi_n(x)\,\mu(dx)=\int_X \varphi(x)\,\mu(dx).$$

Сходимость в среднем означает сходимость в нормированном пространстве $L^1(X)$ всех интегрируемых функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi(x)\|=\int_X |\varphi(x)|\,\mu(dx).$$

При этом равенство $\varphi'=\varphi''$ означает, что $\varphi'(x)=\varphi''(x)$ для почти всех x.

Это пространство является полным, т. е. всякая фундаментальная в среднем последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ...:

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_X |\varphi_m(x)-\varphi_n(x)|\,\mu(dx)=0$$

сходится в среднем к некоторой интегрируемой функции $\varphi(x)$.

Последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... называется *равномерно интегрируемой*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое δ, что

$$\int_A |\varphi_n(x)|\,\mu(dx)\leqslant\varepsilon$$

одновременно для всех $n=1, 2, \ldots$ при $\mu(A)\leqslant\delta$ $(A\in\mathfrak{A})$. Последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... является равномерно интегрируемой тогда и только тогда, когда

$$\int_{A_n} |\varphi_n(x)|\,\mu(dx)\leqslant\varepsilon,\quad A_n=\{|\varphi_n|>y\},$$

одновременно для всех $n=1, 2, \ldots$ при достаточно большом y.

Всякая сходящаяся в среднем последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... равномерно интегрируема. Равномерно интегрируемой будет последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., удовлетворяющая одному из следующих условий:

$$|\varphi_n(x)|\leqslant\psi(x),\qquad n=1, 2, \ldots,$$

где $\psi(x)$ — некоторая интегрируемая функция;

$$|\varphi_n(x)|\leqslant|\varphi_{n+1}(x)|,\quad \int_X |\varphi_n(x)|\,\mu(dx)\leqslant C,\quad n=1, 2, \ldots,$$

$C=\mathrm{const}$ не зависит от n. Последовательность интегрируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... сходится в среднем тогда и только тогда, когда она равномерно интегрируема и сходится по мере.

Если функции $[\varphi_1(x)]^2$ и $[\varphi_2(x)]^2$ интегрируемы, то интегрируемы также произведение $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ и сумма $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$, причем

$$\int\limits_X |\varphi_1(x)\varphi_2(x)|\,\mu(dx)\leqslant\sqrt{\int\limits_X|\varphi_1(x)|^2\mu(dx)\int\limits_X|\varphi_2(x)|^2\mu(dx)},$$

$$\sqrt{\int\limits_X|\varphi_1(x)+\varphi_2(x)|^2\mu(dx)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\int\limits_X|\varphi_1(x)|^2\mu(dx)}+\sqrt{\int\limits_X|\varphi_2(x)|^2\mu(dx)}.$$

Пространство $L^2(X)$ всех функций $\varphi(x)$, квадраты которых интегрируемы, является полным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int\limits_X\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\mu(dx).$$

При этом отождествляются все функции $\varphi(x)$, отличающиеся друг от друга лишь на множестве меры нуль.

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ измеримы и если функции $|\varphi(x)|^\alpha$ и $|\psi(x)|^\beta$, где α, $\beta>0$ и $1/\alpha+1/\beta=1$, являются интегрируемыми, то будет интегрируемо и произведение $\varphi(x)\psi(x)$. При этом имеет место неравенство

$$\int\limits_X|\varphi(x)\,\psi(x)|\,\mu(dx)\leqslant\left[\int\limits_X|\varphi(x)|^\alpha\mu(dx)\right]^{1/\alpha}\left[\int\limits_X|\psi(x)|^\beta\mu(dx)\right]^{1/\beta}.$$

Для любых измеримых функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ таких, что $|\varphi_1|^\alpha$ и $|\varphi_2|^\alpha$ $(\alpha\geqslant1)$ являются интегрируемыми функциями, имеет место неравенство

$$\left[\int\limits_X|\varphi_1(x)+\varphi_2(x)|^\alpha\mu(dx)\right]^{1/\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant\left[\int\limits_X|\varphi_1(x)|^\alpha\mu(dx)\right]^{1/\alpha}+\left[\int\limits_X|\varphi_2(x)|^\alpha\mu(dx)\right]^{1/\alpha}.$$

Пространство $L^\alpha(X)$ всех измеримых функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|=\left[\int\limits_X|\varphi(x)|^\alpha\mu(dx)\right]^{1/\alpha},\quad\alpha\geqslant1,$$

представляет собой *нормированное пространство*, в котором отождествлены функции, отличающиеся друг от друга лишь на множестве меры нуль. При этом пространство $L^\beta(X)$ будет *сопря-*

женным к пространству $L^\alpha(X)$ $(1/\alpha+1/\beta=1)$: всякий линейный непрерывный функционал $\langle\varphi, \psi\rangle$ на элементах $\varphi\in L^\alpha(X)$ имеет вид

$$\langle\varphi, \psi\rangle=\int\limits_X \varphi(x)\psi(x)\mu(dx),$$

где $\psi(x)$ — некоторая функция из пространства $L^\beta(X)$. Сопряженным к пространству $L^1(X)$ является пространство $L^\infty(X)$ всех измеримых функций $\varphi(x)$, истинная верхняя грань которых конечна:

$$\|\psi\|=\operatorname{vrai\,sup}|\psi(x)|=\lim_{n\to\infty}\left[\int\limits_X|\psi(x)|^n\mu(dx)\right]^{1/n}.$$

Именно, всякий линейный функционал $\langle\varphi, \psi\rangle$ на пространстве $L^1(X)$ всех интегрируемых функций $\varphi(x)$ имеет вид

$$\langle\varphi, \psi\rangle=\int\limits_X \varphi(x)\psi(x)\mu(dx),$$

где $\psi(x)$ — некоторая функция из пространства $L^\infty(X)$.

Пусть $L^\alpha(X)$ $(0<\alpha<1)$ — пространство всех измеримых функций $\varphi(x)$ таких, что

$$\int\limits_X|\varphi(x)|^\alpha\mu(dx)<\infty.$$

Это пространство является линейным. Если отождествить те его элементы φ' и φ'', для которых $\varphi'(x)=\varphi''(x)$ почти всюду, и ввести расстояние

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2)=\int\limits_X|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|^\alpha\mu(dx),\quad \varphi_1, \varphi_2\in L^\alpha(X),$$

то $L^\alpha(X)$ будет полным линейным метрическим пространством. Сходимость в этом пространстве называется *сходимостью в среднем с показателем* α.

Сходимость мер. Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — произвольное измеримое пространство с σ-алгеброй множеств $\mathfrak{A}$. Последовательность мер $\mu_n=\mu_n(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ $(n=1, 2, \ldots)$ называется *сходящейся по вариации* к мере $\mu=\mu(A)$, если

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}[\mu_n(X)-\mu(X)]=0,$$

где $\operatorname{Var}(\mu_n-\mu)$ означает вариацию разности $\mu_n(A)-\mu(A)$ как обобщенной меры на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Совокупность всех обобщенных мер $\mu=\mu(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ является полным нормированным пространством с нормой $\|\mu\|=\operatorname{Var}\mu(X)$. Сходимость по вариации означает сходимость в этом нормированном пространстве.

Пусть $\nu_n = \nu_n(A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность обобщенных мер, абсолютно непрерывных относительно некоторой меры $\mu = \mu(A)$:

$$\nu_n(A) = \int_A \varphi_n(x)\,\mu(dx), \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Тогда сходимость по вариации этой последовательности к обобщенной мере $\nu = \nu(A)$ означает сходимость в среднем соответствующих плотностей $\varphi_n(x) = \nu_n(dx)/\mu(dx)$; предельная обобщенная мера ν абсолютно непрерывна относительно μ:

$$\nu(A) = \int_A \varphi(x)\,\mu(dx),$$

и при $n \to \infty$

$$\operatorname{Var}[\nu_n(X) - \nu(X)] = \int_X |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\,\mu(dx) \to 0.$$

Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра всех бэровских множеств в X и $C(X)$ — пространство всех действительных непрерывных ограниченных функций $\varphi(x)$ на X с нормой $\|\varphi\| = \sup|\varphi(x)|$. Любая действительная обобщенная мера $\mu = \mu(A)$ $(A \in \mathfrak{A})$ задает некоторый линейный непрерывный функционал $\langle\varphi, I\rangle$ на пространстве $C(X)$:

$$\langle\varphi, I\rangle = \int_X \varphi(x)\,\mu(dx)$$

(см. с. 88). Норма этого функционала есть

$$\|I\| = \operatorname{Var}\mu(X).$$

Сходимость по вариации последовательности бэровских мер μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ означает сильную сходимость последовательности соответствующих линейных функционалов I_n (т. е. сходимость в сопряженном пространстве с сильной топологией). Последовательность бэровских мер μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ называется *слабо сходящейся* к бэровской мере μ: $\mu_n \Rightarrow \mu$, если слабо сходится последовательность соответствующих функционалов I_n (т. е. последовательность I_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится в сопряженном пространстве со слабой топологией):

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi(x)\,\mu_n(dx) = \int_X \varphi(x)\,\mu(dx)$$

для любой непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$ $(\varphi \in C(X))$.

Пусть X — сепарабельное метрическое пространство. Слабая сходимость последовательности мер μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ равносильна каждому из перечисленных ниже условий:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G) \geqslant \mu(G)$ для любого открытого множества $G \subseteq X$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$ для любого замкнутого множества $F \subseteq X$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ для любого борелевского множества $A \subseteq X$ такого, что его граница A' имеет меру нуль: $\mu(A') = 0$.

В полном сепарабельном метрическом пространстве X совокупность всех бэровских мер μ будет полным сепарабельным метрическим пространством, расстояние в котором определено следующим образом:

$$\rho(\mu', \mu'') = \max(\rho', \rho''),$$

где ρ' и ρ'' — нижние границы чисел r' и r'' соответственно таких, что для любого замкнутого множества $F \subseteq X$

$$\mu'(F) < \mu''(V_{r'}(F)) + r', \quad \mu''(F) < \mu'(V_{r''}(F)) + r'',$$

$V_\varepsilon(F)$ — совокупность точек $x \in X$, находящихся от замкнутого множества F на расстоянии, меньшем $\varepsilon > 0$.

Сходимость в этом метрическом пространстве равносильна слабой сходимости. Семейство мер μ на борелевской σ-алгебре пространства X *слабо компактно* [72] (т. е. компактно в описанном выше метрическом пространстве всех борелевских мер) тогда и только тогда, когда это семейство равномерно ограничено:

$$\mu(X) \leqslant C,$$

и равномерно плотно: для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $A \subseteq X$ такой, что для всех мер μ рассматриваемого семейства $\mu(X \setminus A) \leqslant \varepsilon$.

Пример. *Слабая сходимость функций распределения.* Всякая нормированная борелевская мера μ на действительной прямой $-\infty < x < \infty$ однозначно определяется функцией распределения $F(x)$, связанной с μ соотношением

$$F(x) = \mu(A), \quad A = (-\infty, x].$$

Последовательность мер μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ слабо сходится к мере μ тогда и только тогда, когда *слабо сходится* соответствующая последовательность функций распределения F_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Слабая сходимость $F_n \Rightarrow F$ при $n \to \infty$ равносильна каждому из условий:

а) $F_n(x) \to F(x)$ при каждом x, являющемся точкой непрерывности предельной функции $F(x)$ (включая точки $x = \pm\infty$);

б) $F_n(x) \to F(x)$ на некотором всюду плотном множестве точек x действительной прямой (включая $x = \infty$);

в) $\rho(F_n, F) \to 0$, где расстояние $\rho(F', F'')$ между функциями распределения $F'(x)$ и $F''(x)$ определяется как нижняя грань тех r, для которых при всех x

$$F''(x-r) - r < F'(x) < F''(x+r) + r.$$

На рис. 19 указана область, в которой лежат графики всех функций распределения, находящихся от $F(x)$ на расстоянии $\rho(\cdot, F) \leqslant r$.

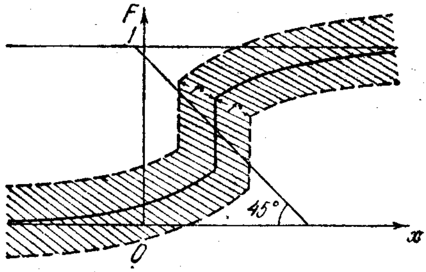


Рис. 19

Пример. Пусть $X = C[a, b]$ — пространство действительных непрерывных функций $x = x(t)$ на отрезке $[a, b]$, причем $\|x\| = \sup\limits_t |x(t)|$. Для слабой компактности семейства ограниченных в совокупности бэровских мер μ на пространстве $X = C[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовали число M и функция $\varphi = \varphi(\delta)$ $\left(\lim\limits_{\delta \to 0} \varphi(\delta) = 0\right)$ такие, что равномерно по всему семейству мер

$$\mu\{\sup |x(t)| \leqslant M\} \geqslant \mu(X) - \varepsilon,$$

$$\mu\{\sup_{|\Delta| \leqslant \delta} \omega(\Delta) \leqslant \varphi(\delta) \text{ при всех } \delta\} \geqslant \mu(X) - \varepsilon,$$

где Δ — интервал длины $|\Delta|$ и $\omega(\Delta) = \sup\limits_{t_1, t_2 \in \Delta} |x(t_1) - x(t_2)|$.

2. Абстрактные меры и интегралы. Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — произвольное измеримое пространство с σ-алгеброй множеств $\mathfrak{A}$, L — некоторое полное нормированное пространство и $\mu = \mu(A)$ — конечно-аддитивная функция множеств на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ со значениями в пространстве L. Величина

$$\operatorname{Var} \mu(A) = \sup \left\| \sum_k \lambda_k \mu(A_k) \right\|,$$

где sup берется по всем числам λ_k ($|\lambda_k| \leqslant 1$) и всем конечным разбиениям множества $A \in \mathfrak{A}$ на непересекающиеся множества $A_k \in \mathfrak{A}$, называется *вариацией* функции μ на множестве A.

Если вариация $\operatorname{Var} \mu(A)$ — конечная и непрерывная функция на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, то μ называется *обобщенной мерой* со значениями в пространстве L; непрерывность вариации $\operatorname{Var} \mu$ означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Var} \mu(A) = 0$$

для любой последовательности $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ множеств из $\mathfrak{A}$, имеющих пустое пересечение.

Если функция $\mu=\mu(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ со значениями в нормированном пространстве L является обобщенной мерой, то для любого линейного непрерывного функционала $\nu=\langle\cdot,\nu\rangle$ на пространстве L обобщенной мерой является числовая функция

$$\nu(A)=\langle\mu(A),\nu\rangle,\quad (A\in\mathfrak{A});$$

при этом

$$\operatorname{Var}\mu(A)=\sup_{\|\nu\|=1}\operatorname{Var}\nu(A),$$

где sup берется по всем линейным непрерывным функционалам ν, для которых $\|\nu\|=1$.

Пример. *Ортогональные меры.* Пусть L — гильбертово пространство, и пусть обобщенная мера $\mu=\mu(A)$ со значениями в L такова, что для любых непересекающихся множеств A_1 и A_2 из $\mathfrak{A}$ значения $\mu(A_1)$ и $\mu(A_2)$ ортогональны:

$$(\mu(A_1),\mu(A_2))=0.$$

В таком случае неотрицательная функция $m=m(A)=\|\mu(A)\|^2$ представляет собой конечную меру на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Вариация $\operatorname{Var}\mu(A)$ есть $\sqrt{m(A)}$.

Пусть $\mu=\mu(A)$ — произвольная обобщенная мера на $(X,\mathfrak{A})$ со значениями в нормированном пространстве L, и пусть $\varphi=\varphi(x)$ — простая действительная (или комплексная) функция на пространстве X:

$$\varphi(x)=y_k,\quad x\in A_k,\quad k=1,2,\ldots$$

Положим $B=\bigcup\limits_{k=m}^{n}A_k$ и

$$\operatorname{Var}\int_B\varphi(x)\,\mu(dx)=\sup\Big\|\sum_{k,j}\lambda_{kj}\mu(A_{kj})\Big\|,$$

где верхняя грань берется по всем числам λ_{kj} ($|\lambda_{kj}|\leqslant|y_k|$) и по всем конечным разбиениям множеств A_k ($k=m,\ m+1,\ \ldots,\ n$) на непересекающиеся множества $A_{kj}\in\mathfrak{A}$. Говорят, что функция $\varphi=\varphi(x)$ *интегрируема*, если

$$\lim_{m,n\to\infty}\operatorname{Var}\int_B\varphi(x)\,\mu(dx)=0.$$

Интеграл такой функции определяется формулой

$$\int_X\varphi(x)\,\mu(dx)=\sum_k y_k\mu(A_k).$$

Точнее, интеграл $\int_X\varphi(x)\,\mu(dx)$ — предельный элемент для частных сумм $\sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k)$:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_X \varphi(x)\,\mu(dx) - \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k) \right\| = 0.$$

Произвольная функция $\varphi(x)$ называется *интегрируемой*, если она является пределом равномерно сходящейся последовательности простых интегрируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ...; интеграл такой функции $\varphi(x)$ определяется как

$$\int_X \varphi(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)\,\mu(dx).$$

Интеграл функции $\varphi(x)$ на множестве $A \in \mathfrak{A}$ определяется формулой

$$\int_A \varphi(x)\,\mu(dx) = \int_X \varphi(x)\,\varphi_A(x)\,\mu(dx),$$

где

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in A, \\ 0 & \text{при } x \notin A. \end{cases}$$

Все ограниченные измеримые функции интегрируемы. Если измеримые функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ таковы, что $|\varphi_1(x)| \leqslant |\varphi_2(x)|$, и функция $|\varphi_2(x)|$ интегрируема, то интегрируемой будет и функция $\varphi_1(x)$.

Для любых интегрируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и любых чисел λ_1, λ_2 функция $\varphi(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x)$ также интегрируема, причем

$$\int_X \varphi(x)\,\mu(dx) = \lambda_1 \int_X \varphi_1(x)\,\mu(dx) + \lambda_2 \int_X \varphi_2(x)\,\mu(dx).$$

Для любой интегрируемой функции $\varphi(x)$ интеграл

$$I(A) = \int_A \varphi(x)\,\mu(dx), \quad A \in \mathfrak{A},$$

представляет собой обобщенную меру со значениями в пространстве L, *абсолютно непрерывную* относительно μ, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что $\operatorname{Var} I(A) \leqslant \varepsilon$ при $\operatorname{Var} \mu(A) \leqslant \delta$, каково бы ни было $A \in \mathfrak{A}$. При этом

$$\operatorname{Var} I(X) = \operatorname{Var} \int_X \varphi(x)\,\mu(dx) < \infty.$$

Выражения *почти всюду* или *для почти всех* x (относительно обобщенной меры μ) означают, что речь идет о всех $x \in X$, за исключением, быть может, некоторого множества $A \in \mathfrak{A}$ такого, что $\operatorname{Var}\mu(A)=0$. Для любой функции $\varphi(x)$, почти всюду равной нулю, интеграл $\int\limits_X \varphi(x)\,\mu(dx)$ равен нулю; если $\operatorname{Var}\int\limits_X \varphi(x)\,\mu(dx)=0$, то $\varphi(x)=0$ почти всюду.

Имеет место неравенство

$$\operatorname{Var}\int\limits_X \varphi(x)\,\mu(dx) \leqslant \operatorname{vrai\,sup}|\varphi|\cdot\operatorname{Var}\mu(X),$$

где vrai sup означает верхнюю грань тех y, для которых $\operatorname{Var}\mu\{|\varphi|>y\}>0$.

Вообще, если интегрируемые функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ таковы, что $|\varphi_1(x)|\leqslant|\varphi_2(x)|$, то

$$\operatorname{Var}\int\limits_X \varphi_1(x)\,\mu(dx) \leqslant \operatorname{Var}\int\limits_X \varphi_2(x)\,\mu(dx).$$

Последовательность измеримых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... называется *сходящейся по мере* к измеримой функции $\varphi(x)$, если для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\mu\{|\varphi_n-\varphi|>\varepsilon\}=0.$$

Всякая сходящаяся почти всюду последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... сходится по мере. Всякая сходящаяся по мере последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... содержит некоторую подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.

Последовательность интегрируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... называется *сходящейся в среднем* к интегрируемой функции $\varphi(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\int\limits_X [\varphi_n(x)-\varphi(x)]\,\mu(dx)=0.$$

Для такой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X \varphi_n(x)\,\mu(dx)=\int\limits_X \varphi(x)\,\mu(dx).$$

Всякая сходящаяся в среднем последовательность интегрируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... равномерно интегрируема: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что при $\operatorname{Var}\mu(A)\leqslant\delta$ выполняется неравенство $\operatorname{Var}\int\limits_A \varphi_n(x)\,\mu(dx)\leqslant\varepsilon$ одновременно для всех $n=1, 2, \ldots$, каково бы ни было $A\in\mathfrak{A}$.

Последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... равномерно интегрируема тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое y, что

$$\operatorname{Var}\int\limits_{A_n} \varphi_n(x)\,\mu(dx)\leqslant\varepsilon,\quad A_n=\{|\varphi_n|>y\},$$

одновременно для всех $n=1, 2, \ldots$ Равномерно интегрируемой будет, например, последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... таких, что $|\varphi_n(x)| \leqslant \psi(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $\psi(x)$ — некоторая интегрируемая функция. Последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... сходится в среднем тогда и только тогда, когда она равномерно интегрируема и сходится по мере.

Пример. *Спектральное представление операторов.* Пусть $E = E(B)$ — операторная функция на σ-алгебре борелевских множеств B действительной прямой $-\infty < \lambda < \infty$, и пусть значениями этой функции являются проекционные операторы $E(B)$ в гильбертовом пространстве U, причем функция $E(B)$ такова, что:

а) $E\left(\bigcup\limits_n B_n\right) = \sum\limits_n E(B_n)$ для любых непересекающихся множеств $B_1, \ldots, B_n$ $\left(E\left(\bigcup\limits_n B_n\right)\right.$ — единичный оператор, если $B_1, \ldots, B_n$ в сумме составляют всю действительную прямую);

б) $E(B' \cdot B'') = E(B') \cdot E(B'')$ для любых B' и B''.

Тогда при каждом фиксированном $u \in U$ функция $\Phi_u(B) = E(B)u$ будет такой обобщенной ортогональной мерой на действительной прямой со значениями в гильбертовом пространстве U, что $\operatorname{Var}\Phi_u = \|u\|$.

Всякая измеримая ограниченная функция $\varphi = \varphi(\lambda)$ будет интегрируемой относительно обобщенной меры $\Phi_u = \Phi_u(B)$, каково бы ни было $u \in U$, а соответствующий интеграл

$$Au = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\Phi_u(d\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,E(d\lambda)\,u$$

определяет линейный ограниченный оператор A на пространстве U. Если A_1 и A_2 — линейные операторы такого типа, то

$$(A_1u', A_2u'') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\lambda)\overline{\cdot\varphi_2(\lambda)}\,F_{u'u''}(d\lambda),$$

где $\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$ — соответствующие операторам A_1 и A_2 функции на действительной прямой $-\infty < \lambda < \infty$, а $F_{u',u''}$ — обобщенная (действительная или комплексная) борелевская мера:

$$F_{u',u''}(B) = (\Phi_{u'}(B), \Phi_{u''}(B)) = (E(B)u', u'').$$

Если функция $\varphi(\lambda)$ является действительной, то соответствующий ей оператор A будет самосопряженным. Если $|\varphi(\lambda)| = 1$, то соответствующий оператор A будет унитарным (см. с. 73).

Всякий ограниченный самосопряженный оператор A допускает представление в виде

$$Au = \int\limits_a^b \lambda E(d\lambda)\,u, \quad u \in U,$$

где $E=E(B)$ — некоторая операторная мера описанного типа. Всякий унитарный оператор A допускает представление в виде

$$Au=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda}E(d\lambda)u, \quad u\in U.$$

Любая операторная функция $A=A(t)$ (на действительной прямой $-\infty<t<\infty$), значениями которой являются унитарные операторы $A(t)$ в гильбертовом пространстве U и которая удовлетворяет условию

$$A(t_1+t_2)=A(t_1)\cdot A(t_2),$$

допускает представление в виде

$$A(t)u=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}E(d\lambda)u, \quad u\in U.$$

Интегрирование абстрактных функций. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — произвольное пространство с конечной полной мерой μ на σ-алгебре множеств $\mathfrak{A}$, Y — полное нормированное сепарабельное пространство, $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра пространства Y.

Функция $\varphi=\varphi(x)$ на множестве A пространства $(X, \mathfrak{A})$ со значениями в пространстве $(Y, \mathfrak{B})$ является измеримой тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

а) для любого непрерывного функционала $z=\langle y, z\rangle$ на пространстве Y числовая функция $\langle\varphi(x), z\rangle$ $(x\in X)$ измерима;

б) функция $\varphi(x)$ является пределом равномерно сходящейся последовательности простых измеримых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n(x)-\varphi(x)\|=0$$

равномерно по $x\in X$.

Если функция $\varphi(x)$ измерима, то числовая функция $\|\varphi(x)\|$ также измерима.

Пусть $y_1, y_2, \ldots$ — некоторое счетное множество точек пространства Y, всюду плотное в Y. В таком случае последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... простых измеримых функций, равномерно сходящаяся к измеримой функции $\varphi(x)$, может быть построена следующим образом:

$$\varphi_n(x)=y_m \quad \text{при } x\in A_{mn}, \quad m, n=1, 2, \ldots,$$

где измеримые множества A_{mn} определяются формулами

$$A_{1n}=\{\|\varphi(x)-y_1\|<1/n\},$$

$$A_{mn}=\{\|\varphi(x)-y_m\|<1/n\}\setminus\bigcup_{k=1}^{m-1}A_{kn}, \quad m=2, 3, \ldots$$

Простая функция $\varphi(x)$ на пространстве X со значениями в нормированном пространстве Y:

$$\varphi(x)=y_k \quad \text{при } x\in A_k, \quad k=1, 2, \ldots,$$

называется *интегрируемой*, если сходится ряд

$$\sum_k \|y_k\| \mu(A_k).$$

Интеграл такой функции определяется как

$$\int_X \varphi(x)\mu(dx)=\sum_k y_k\mu(A_k).$$

Точнее, интеграл $\int_X \varphi(x)\mu(dx)$ является пределом частных сумм $\sum_{k=1}^n y_k\mu(A_k)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_X \varphi(x)\mu(dx)-\sum_{k=1}^n y_k\mu(A_k)\right\|=0.$$

Произвольная функция $\varphi(x)$ называется *интегрируемой*, если она является пределом равномерно сходящейся последовательности простых интегрируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ...; *интеграл* такой функции определяется как предел

$$\int_X \varphi(x)\mu(dx)=\lim_{n\to\infty}\int_X \varphi_n(x)\mu(dx).$$

Интеграл функции $\varphi(x)$ на множестве $A\in\mathfrak{A}$ определяется формулой

$$\int_X \varphi(x)\mu(dx)=\int_X \varphi(x)\varphi_A(x)\mu(dx),$$

где

$$\varphi_A(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\in A,\\ 0 & \text{при } x\notin A.\end{cases}$$

Функция $\varphi(x)$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема числовая функция $\|\varphi(x)\|$. Для интегрируемой функции $\varphi(x)$ интеграл

$$I(A)=\int_A \varphi(x)\mu(dx), \quad A\in\mathfrak{A},$$

представляет собой *обобщенную меру* на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ такую, что

$$\operatorname{Var} I(A)\leqslant\int_A \|\varphi(x)\|\mu(dx).$$

Для любых интегрируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и любых чисел λ_1, λ_2 функция $\varphi(x)=\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x)$ будет также интегрируемой, причем

$$\int\limits_X \varphi(x)\,\mu(dx)=\lambda_1\int\limits_X \varphi_1(x)\,\mu(dx)+\lambda_2\int\limits_X \varphi_2(x)\,\mu(dx).$$

Сходимость последовательности измеримых или интегрируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... к некоторой измеримой или интегрируемой функции $\varphi(x)$ типа *сходимости почти всюду*, *сходимости по мере* или *сходимости в среднем* означает соответствующую сходимость к нулю последовательности числовых функций $\|\varphi_n(x)-\varphi(x)\|$ $(n=1, 2, \ldots)$. Последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... сходится в среднем тогда и только тогда, когда функции $\|\varphi_1(x)\|$, $\|\varphi_2(x)\|$, ... равномерно интегрируемы и последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... сходится по мере.

Все высказанные положения остаются справедливыми и в том случае, когда $\mu=\mu(A)$ $(A\in\mathfrak{A})$ является обобщенной числовой мерой ограниченной вариации: нужно лишь в соответствующих местах очевидным образом заменить обобщенную меру $\mu(A)$ на положительную меру $\operatorname{Var}\mu(A)$.

Повторное интегрирование. Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2)$ — произвольные измеримые пространства, μ_1 — числовая обобщенная мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}_1$, μ_2 — обобщенная мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}_2$ со значениями в полном нормированном пространстве L и $\varphi(x_1, x_2)$ — измеримая функция на произведении измеримых пространств $(X_1, \mathfrak{A}_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2)$, принимающая числовые значения или (когда обобщенная мера μ_2 является числовой) принимающая значения в полном нормированном сепарабельном пространстве Y.

Если функция $\varphi(x_1, x_2)$ для почти всех $x_1\in X_1$ как функция от $x_2\in X_2$ является интегрируемой, то соответствующий интеграл

$$\varphi_1(x_1)=\int\limits_{X_2}\varphi(x_1, x_2)\,\mu_2(dx_2)$$

представляет собой измеримую функцию от $x_1\in X_1$. Если функция $\varphi(x_1, x_2)$ для почти всех $x_2\in X_2$ как функция от $x_1\in X_1$ является интегрируемой, то соответствующий интеграл

$$\varphi_2(x_2)=\int\limits_{X_1}\varphi(x_1, x_2)\,\mu_1(dx_1)$$

является измеримой функцией от $x_2\in X_2$. Для интегрируемых функций $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{X_1}\left[\int\limits_{X_2}\varphi(x_1, x_2)\,\mu_2(dx_2)\right]\mu_1(dx_1)=\int\limits_{X_2}\left[\int\limits_{X_1}\varphi(x_1, x_2)\,\mu_1(dx_1)\right]\mu_2(dx_2).$$

Пусть обобщенные меры μ_1 и μ_2 таковы, что их вариации $\operatorname{Var}\mu_1(A_1)$ $(A_1\in\mathfrak{A}_1)$ и $\operatorname{Var}\mu_2(A_2)$ $(A_2\in\mathfrak{A}_2)$ представляют собой меры на σ-алгебрах $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, и пусть $\mu=\mu_1\times\mu_2$ — обобщенная мера на σ-алгебре множеств пространства $X=X_1\times X_2$ (являющейся произведением σ-алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$), заданная на полукольце множеств $A=A_1\times A_2$ как произведение мер:

$$\mu(A)=\mu_1(A_1)\cdot\mu_2(A_2),\quad A_1\in\mathfrak{A}_1,\quad A_2\in\mathfrak{A}_2.$$

Функция $\varphi(x)=\varphi(x_1, x_2)$ от $x=(x_1, x_2)$ интегрируема (относительно μ) тогда и только тогда, когда определен один из указанных выше повторных интегралов, так что если существует один из этих повторных интегралов, то существует также и другой, причем

$$\int\limits_X \varphi(x)\,\mu(dx)=\int\limits_{X_1}\left[\int\limits_{X_2}\varphi(x_1, x_2)\,\mu_2(dx_2)\right]\mu_1(dx_1)=\\ =\int\limits_{X_2}\left[\int\limits_{X_1}\varphi(x_1, x_2)\,\mu_1(dx_1)\right]\mu_2(dx_2).$$

ГЛАВА III

ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Пространства элементарных событий. Распределения вероятностей и характеристические функции

1. Основные теоретико-вероятностные схемы.

Пространство элементарных событий. В основе всякой теоретико-вероятностной схемы лежит так называемое пространство элементарных событий $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ — измеримое пространство элементов ω, называемых *элементарными событиями* или *элементарными исходами*, с заданной на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ *вероятностной мерой* $\mathsf{P} = \mathsf{P}(A)$: $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Множества пространства Ω называются *событиями*; мера $\mathsf{P}(A)$ множества $A \in \mathfrak{A}$ называется *вероятностью* события A.

Случайные величины. Пусть $(X, \mathfrak{B})$ — некоторое измеримое пространство; $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-измеримая функция $\xi = \xi(\omega)$ на пространстве элементарных событий $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ со значениями в $(X, \mathfrak{B})$ называется *случайной величиной* в фазовом пространстве $(X, \mathfrak{B})$. *Распределением вероятностей* этой случайной величины ξ называется функция $\mathsf{P}_\xi = \mathsf{P}_\xi(B)$ на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ фазового пространства, определенная как $\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}\{\xi \in B\}$, $B \in \mathfrak{B}$ (распределение вероятностей P_ξ представляет собой вероятностную меру в фазовом пространстве $(X, \mathfrak{B})$).

Случайные величины $\xi = \xi(\omega)$ и $\eta = \eta(\omega)$ в фазовом пространстве $(X, \mathfrak{B})$ называются *эквивалентными*, если для любого множества $B \in \mathfrak{B}$ события $\{\xi \in B\}$ и $\{\eta \in B\}$ совпадают с вероятностью единица: $\mathsf{P}(\{\xi \in B\} \circ \{\eta \in B\}) = 0$.

Для сепарабельного фазового пространства эквивалентность означает, что величины ξ и η совпадают с вероятностью единица, т. е. $\mathsf{P}\{\xi \neq \eta\} = 0$.

Случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ называется *непосредственно заданной*, если каждый элементарный исход ω описывается соответствующей точкой x фазового пространства (точнее, если $\Omega = X$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ и функция $\xi = \xi(x)$ имеет вид $\xi(x) = x$ $(x \in X)$).

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — случайные величины на пространстве элементарных событий $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ в соответствующих фазовых пространствах $(X_k, \mathfrak{B}_k)$. *Совместным распределением вероятностей* этих величин называется функция $\mathsf{P}_{\xi_1,\ldots,\xi_n} = \mathsf{P}_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(B_1, \ldots, B_n)$, определенная на множествах $B_1 \in \mathfrak{B}_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}_n$ как

$$\mathsf{P}_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(B_1, \ldots, B_n) = \mathsf{P}\{\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n\}.$$

Распределение вероятностей $\mathsf{P}_{\xi_1,\ldots,\xi_n}$ как функция на полукольце множеств вида $B_1 \times \ldots \times B_n$ ($B_1 \in \mathfrak{B}_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}_n$) в произведении пространств $X_1 \times \ldots \times X_n$ представляет собой *функцию распределения*. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми*, если при любых $B_1, \ldots, B_n$

$$\mathsf{P}_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(B_1, \ldots, B_n) = \mathsf{P}_{\xi_1}(B_1) \ldots \mathsf{P}_{\xi_n}(B_n).$$

Для всякого семейства распределений вероятностей P_t в соответствующих фазовых пространствах $(X_t, \mathfrak{B}_t)$ (параметр t пробегает произвольное множество T) существует семейство случайных величин $\xi_t = \xi_t(\omega)$ на некотором пространстве элементарных событий $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ в соответствующих фазовых пространствах $(X_t, \mathfrak{B}_t)$ с распределением вероятностей P_t, независимых между собой (т. е. любые случайные величины $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$ ($t_1, \ldots, t_n \in T$) являются независимыми).

Случайные процессы. Пусть $(E, \mathfrak{B})$ — измеримое пространство, T — некоторое множество значений параметра t. Функция $\xi = \xi(t)$ параметра $t \in T$, значениями $\xi(t)$ которой являются случайные величины $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ на пространстве элементарных событий $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$, называется *случайным процессом в фазовом пространстве* $(E, \mathfrak{B})$. Всевозможные совместные распределения вероятностей значений $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$ ($t_1, \ldots, t_n \in T$):

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n) = \mathsf{P}\{\xi(t_1) \in B_1, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\},$$
$$B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B},$$

называются *конечномерными распределениями вероятностей* случайного процесса $\xi = \xi(t)$.

Случайные процессы $\xi = \xi(t)$ и $\eta = \eta(t)$ на множестве T, принимающие значения в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$, называются *эквивалентными*, если при любом $t \in T$ эквивалентны соответствующие значения $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ и $\eta(t) = \eta(\omega, t)$.

При каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $\xi(\omega, t)$ параметра $t \in T$ со значениями в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ называется *траекторией* или *реализацией* случайного процесса $\xi = \xi(t)$. Случайный процесс $\xi = \xi(t)$ называется *непосредственно заданным*, если каждый элементарный исход ω описывается соответствующей траекторией $x = x(t)$ в функциональном пространстве $X = E^T$ всех функций на множестве T со значениями в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$, точнее, если $\Omega = X$ и σ-алгебра $\mathfrak{A}$ порождается всевозможными цилиндрическими множествами $\{x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\}$, где $t_1, \ldots, t_n \in T$ и $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}$, а значения $\xi(t)=\xi(x,t)$ имеют вид $\xi(x,t)=x(t)$ $(x\in X)$. Любому случайному процессу можно поставить в соответствие непосредственно заданный случайный процесс с теми же самыми конечномерными распределениями. Для каждого согласованного семейства конечномерных распределений вероятностей $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_n)$ $(t_1,\ldots,t_n\in T,\ B_1,\ldots,B_n\in\mathfrak{B})$ таких, что $\mathsf{P}_t=\mathsf{P}_t(B)$ $(t\in T)$ являются плотными мерами в топологическом фазовом пространстве $(E,\mathfrak{B})$, существует непосредственно заданный случайный процесс $\xi=\xi(t)$ с такими же конечномерными распределениями вероятностей.

Случайные величины в линейном фазовом пространстве. Пусть $\xi=\xi(\omega)$ — случайная величина в линейном нормированном пространстве X на пространстве элементарных событий $(\Omega,\mathfrak{A},\mathsf{P})$.

Средним значением или *математическим ожиданием* случайной величины ξ называется интеграл

$$\mathsf{M}\xi=\int_\Omega \xi(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)=\int_X x\mathsf{P}_\xi(dx)$$

(предполагается, что функция $\xi=\xi(\omega)$ является интегрируемой).

Рассмотрим векторную случайную величину $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ в n-мерном действительном пространстве $(X,\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра. Функция $F_\xi(x)=\mathsf{P}\{\xi_1\leqslant x_1,\ldots,\xi_n\leqslant x_n\}$ переменной $x=(x_1,\ldots,x_n)$ $(x\in X)$ называется *функцией распределения* случайной величины ξ (или *функцией совместного распределения* величин $\xi_1,\ldots,\xi_n$). Функция

$$\varphi_\xi(u)=\mathsf{M}e^{i\langle u,\xi\rangle}=\int_X e^{i\langle u,x\rangle}\mathsf{P}_\xi(dx),\qquad \langle u,\xi\rangle=\sum_{k=1}^n u_k\xi_k,$$

переменной $u=(u_1,\ldots,u_n)$ на n-мерном действительном пространстве U называется *характеристической функцией* случайной величины ξ (или характеристической функцией величин $\xi_1,\ldots,\xi_n$). Она непрерывна и положительно определена в том смысле, что

$$\sum_{k,j}\lambda_k\bar{\lambda}_j\varphi_\xi(u_k-u_j)\geqslant 0$$

для любых $u_1,u_2,\ldots\in U$ и любых чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$, при этом $\varphi(0)=1$. Всякая функция $\varphi=\varphi(u)$, обладающая указанными свойствами, является характеристической функцией некоторой случайной величины ξ.

И функция распределения $F_\xi=F_\xi(x)$, и характеристическая функция $\varphi_\xi=\varphi_\xi(u)$ однозначно определяют распределение вероятностей $\mathsf{P}_\xi=\mathsf{P}_\xi(B)$ $(B\in\mathfrak{B})$ случайной величины ξ.

Обобщенные случайные процессы. Пусть U — некоторое действительное или комплексное линейное пространство элементов u. Функция $\xi=\langle u,\xi\rangle$ параметра $u\in U$, значениями $\langle u,\xi\rangle$

которой являются действительные или комплексные случайные величины $\langle u, \xi\rangle = \langle u, \xi(\omega)\rangle$ на пространстве элементарных событий $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, такая, что для любых $u_1, u_2 \in U$ и любых действительных или комплексных чисел λ_1, λ_2

$$\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \xi\rangle = \lambda_1\langle u_1, \xi\rangle + \lambda_2\langle u_2, \xi\rangle$$

при почти всех $\omega \in \Omega$ (иначе — *с вероятностью* 1), называется *обобщенным случайным процессом.* Всевозможные распределения вероятностей значений $\langle u_1, \xi\rangle, \ldots, \langle u_n, \xi\rangle$ $(u_1, \ldots, u_n \in U)$:

$$\mathsf{P}_{u_1,\ldots,u_n}(B_1, \ldots, B_n) = \mathsf{P}\{\langle u_1, \xi\rangle \in B_1, \ldots, \langle u_n, \xi\rangle \in B_n\}$$

$(B_1, \ldots, B_n$ — борелевские множества действительной прямой или комплексной плоскости), называются *конечномерными распределениями вероятностей* обобщенного процесса $\xi = \langle u, \xi\rangle$.

Обобщенный процесс $\xi = \langle u, \xi\rangle$ называется *непосредственно заданным,* если каждый элементарный исход ω описывается соответствующим элементом $x = \langle u, x\rangle$ — линейным функционалом на пространстве U; точнее, если $\Omega = X$, где X — некоторое пространство линейных функционалов на U, σ-алгебра $\mathfrak{A}$ порождается всевозможными цилиндрическими множествами

$$\{\langle u_1, x\rangle \in B_1, \ldots, \langle u_n, x\rangle \in B_n\}$$

пространства X и значения $\langle u, \xi\rangle = \langle u, \xi(x)\rangle$ имеют вид $\langle u, \xi(x)\rangle = \langle u, x\rangle$ $(x \in X)$.

Пример. Пусть U — совокупность всех действительных или комплексных функций $u = u(t)$ на действительной прямой $-\infty < t < \infty$, каждая из которых бесконечное число раз дифференцируема и обращается в нуль вне некоторого конечного интервала. И пусть X — совокупность всех линейных функционалов на пространстве U, непрерывных в том смысле, что

$$\lim_{u_n \to u} \langle u_n, x\rangle = \langle u, x\rangle,$$

где сходимость $u_n \to u$ означает, что все функции $u_n = u_n(t)$ обращаются в нуль вне некоторого конечного интервала (одного и того же для всех функций) и $u_n^{(k)}(t) \to u^{(k)}(t)$ равномерно по t для всех производных порядка $k = 0, 1, \ldots$ (описанное пространство X является одним из основных пространств так называемых *обобщенных функций,* а соответствующий обобщенный случайный процесс — одним из основных типов обобщенных процессов).

Пусть $\xi = \langle u, \xi\rangle$ — действительный обобщенный процесс на пространстве U. Функция

$$\varphi_\xi(u) = \mathsf{M}e^{i\langle u, \xi\rangle}, \quad u \in U,$$

называется *характеристическим функционалом* обобщенного процесса $\xi = \langle u, \xi\rangle$. Характеристический функционал однозначно определяет конечномерные распределения обобщенного процесса.

Пусть U — счетно-гильбертово пространство со скалярными произведениями $\langle u', u''\rangle_1, \langle u', u''\rangle_2, \ldots$, и пусть X — сопряженное пространство всех линейных непрерывных функционалов $x = \langle u, x\rangle$ на пространстве U. Функция $\varphi = \varphi(u)$ $(u \in X)$ является характеристическим функционалом непосредственно заданного обобщенного случайного процесса тогда и только тогда, когда $\varphi(0) = 1$, функция φ положительно определена в том смысле, что

$$\sum_{k,j} \lambda_k \overline{\lambda}_j\, \varphi(u_k - u_j) \geqslant 0$$

при любых $u_1, u_2, \ldots \in U$ и любых числах $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, и, кроме того, выполняется следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое n и такой ядерный оператор A в гильбертовом пространстве U со скалярным произведением $\langle u', u''\rangle$, что $|\varphi(u) - 1| \leqslant \varepsilon$ при всех $u \in U$, $\langle Au, u\rangle_n \leqslant 1$. Если U — ядерное пространство, то данное условие равносильно просто непрерывности функции φ.

Пример. Пусть U — произвольное линейное пространство и $B(u, v)$ — произвольный билинейный положительный функционал на U. Всегда существует обобщенный гауссовский процесс $\xi = \langle u, \xi\rangle$ $(u \in U)$ с корреляционным функционалом $B(u, v)$ $(u, v \in U)$ (см. § 2, п. 2). Если U — гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v) и B — линейный положительный оператор на U, то непосредственно заданный гауссовский обобщенный процесс $\xi = \langle u, \xi\rangle$ на пространстве U с корреляционным функционалом вида $B(u, v) = (Bu, v)$ существует тогда и только тогда, когда оператор B ядерный.

Предельные теоремы. Одной из основных задач теории вероятностей является вычисление вероятностей одних событий по заданным вероятностям других, в определенном смысле более простых событий. При этом особое место занимают различные схемы приближенного вычисления вероятностей. В основе этих схем, как правило, лежат так называемые *предельные теоремы.*

Одна из общих схем подобного рода представляет собой следующее. Рассматривается некоторая последовательность распределений вероятностей

$$\mathsf{P}_1 = \mathsf{P}_1(B), \quad \mathsf{P}_2 = \mathsf{P}_2(B), \ \ldots$$

на топологическом пространстве $(X, \mathfrak{B})$ и выясняются условия, при которых данная последовательность слабо сходится к определенному распределению вероятностей $\mathsf{P} = \mathsf{P}(B)$ $(B \in \mathfrak{B})$. Один из общих результатов, которые используются при выводе подобного рода теорем, выражается следующим образом.

Пусть X — евклидово пространство, $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра его борелевских множеств; последовательность $\mathsf{P}_n = \mathsf{P}_n(B)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ распределений вероятностей на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ слабо сходится к распределению $\mathsf{P}=\mathsf{P}(B)$ $(B\in\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функционалов $\varphi_n=\varphi_n(u)$ $(u\in U)$ сходится к соответствующему характеристическому функционалу $\varphi=\varphi(u)$:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(u)=\varphi(u),\quad u\in U.$$

Наиболее важной схемой, в которой приведенный результат играет фундаментальную роль, является *схема суммирования серий* независимых случайных величин $\xi_{1n},\ldots,\xi_{k_n n}$ $(n\to\infty)$ со значениями в евклидовом пространстве X, когда речь идет о предельном распределении вероятностей P для нормированных сумм

$$S_n=\frac{\xi_{1n}+\ldots+\xi_{k_n n}-A_n}{B_n},$$

где A_n и B_n — некоторые постоянные. Замечательным фактом, обусловливающим успех многих конкретных исследований (см. гл. IV), является то, что характеристическая функция суммы независимых величин выражается как произведение характеристических функций отдельных слагаемых.

2. Связи различных событий и случайных величин.

Условные вероятности и условные математические ожидания. Пусть $(\Omega,\mathfrak{A},\mathsf{P})$ — пространство элементарных событий с распределением вероятностей $\mathsf{P}=\mathsf{P}(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, и пусть $\mathfrak{B}$ — некоторая σ-алгебра событий, содержащаяся в $\mathfrak{A}$. Условная вероятность события $A\in\mathfrak{A}$ относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, обозначаемая $\mathsf{P}(A|\mathfrak{B})$, определяется как неотрицательная функция от элементарных исходов ω $(0\leqslant\mathsf{P}(A|\mathfrak{A})\leqslant 1)$, измеримая относительно $\mathfrak{B}$, для которой

$$\int_B\mathsf{P}(A|\mathfrak{B})\,\mathsf{P}(d\omega)=\mathsf{P}(AB)$$

при любом $B\in\mathfrak{B}$. Эта функция $\mathsf{P}(A|\mathfrak{B})$ на пространстве элементарных событий Ω определена однозначно для почти всех элементарных исходов ω и представляет собой плотность распределения $\mathsf{P}(AB)$ $(B\in\mathfrak{B})$ относительно распределения вероятностей $\mathsf{P}(B)$ на σ-алгебре $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$.

Если σ-алгебра $\mathfrak{B}$ порождается счетным числом непересекающихся событий $B_1, B_2, \ldots$, имеющих положительные вероятности и в сумме составляющих все пространство Ω, то условная вероятность $\mathsf{P}(A|\mathfrak{B})$ представляет собой простую функцию элементарных исходов $\omega\in\Omega$ вида

$$\mathsf{P}(A|\mathfrak{B})=\frac{\mathsf{P}(AB_k)}{\mathsf{P}(B_k)}\ \text{при}\ \omega\in B_k,\quad k=1,2,\ldots$$

В любом случае условная вероятность $\mathsf{P}(A|\mathfrak{B})$ является пределом равномерно сходящейся последовательности простых функций $\mathsf{P}(A|\mathfrak{B}_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ указанного вида:

$$\mathsf{P}(A|\mathfrak{B}_n)=\frac{\mathsf{P}(AB_{kn})}{\mathsf{P}(B_{kn})} \text{ при } \omega\in B_{kn}, \quad n, k=1, 2, \ldots$$

Например, в качестве событий B_{kn} можно взять

$$B_{kn}=\left\{\frac{k-1}{n}\leqslant \mathsf{P}(A|\mathfrak{B})<\frac{k}{n}\right\}, \quad n, k=1, 2, \ldots$$

Условная вероятность $\mathsf{P}_{\mathfrak{B}}=\mathsf{P}(A|\mathfrak{B})$, рассматриваемая как функция от $A\in\mathfrak{A}$ со значениями в нормированном пространстве $L^1(\Omega)$ всех интегрируемых (действительных или комплексных) функций $\xi=\xi(\omega)$ на Ω: $\|\xi\|=\mathsf{M}|\xi|$, представляет собой обобщенную меру на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ пространства Ω, вариация которой есть

$$\operatorname{Var}\mathsf{P}(A|\mathfrak{B})=\mathsf{P}(A), \quad A\in\mathfrak{A}.$$

Всякая случайная (действительная или комплексная) величина $\xi=\xi(\omega)$, имеющая математическое ожидание (т. е. являющаяся интегрируемой функцией на пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ с мерой P), интегрируема по отношению к обобщенной мере $\mathsf{P}_{\mathfrak{B}}=\mathsf{P}(A|\mathfrak{B})$. Соответствующий интеграл

$$\mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B})=\int_{\Omega}\xi(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega|\mathfrak{B})$$

называется *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ.

Если имеется случайная величина $\eta=\eta(\omega)$ со значениями в фазовом пространстве $(Y, \mathfrak{C})$ или семейство таких величин $\eta(t)=\eta(\omega, t)$ $(t\in T)$ и речь идет об условных вероятностях и условных математических ожиданиях относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, порожденной всевозможными событиями вида $\{\eta\in C\}$ или $\{\eta(t)\in C\}$ $(C\in\mathfrak{C},\ t\in T)$, то соответствующие условные вероятности и условные математические ожидания обозначаются символами $\mathsf{P}(A|\eta)$ и $\mathsf{M}(\xi|\eta)$ или $\mathsf{P}(A|\eta(t),\ t\in T)$ и $\mathsf{M}(\xi|\eta(t),\ t\in T)$.

Условные вероятности и условные математические ожидания обладают следующими свойствами.

Пусть $\xi=\xi(t)$ — измеримый случайный (действительный или комплексный) процесс на отрезке $T=[a, b]$ такой, что

$$\int_a^b \mathsf{M}|\xi(t)|\operatorname{Var}\mu(dt)<\infty,$$

где μ — некоторая обобщенная числовая мера на отрезке T. С вероятностью 1 траектории $\xi(\omega, t)$ такого процесса являются интегрируемыми функциями, причем

$$\mathsf{M}\left[\int_a^b \xi(\omega, t)\,\mu(dt)\right] = \int_a^b [\mathsf{M}\xi(t)]\,\mu(dt).$$

Условное математическое ожидание

$$\mathsf{M}[\xi(t)\,|\,\mathfrak{B}] = \int_\Omega \xi(\omega, t)\,\mathsf{P}(d\omega\,|\,\mathfrak{B}), \quad t \in T,$$

рассматриваемое как функция на отрезке $T = [a, b]$ со значениями в нормированном пространстве $L^1(\Omega)$, определено почти всюду относительно меры μ и является интегрируемой функцией, причем

$$\int_a^b \mathsf{M}[\xi(t)\,|\,\mathfrak{B}]\,\mu(dt) = \int_\Omega \left[\int_a^b \xi(\omega, t)\,\mu(dt)\right]\mathsf{P}(d\omega\,|\,\mathfrak{B}) =$$

$$= \mathsf{M}\left[\int_a^b \xi(t)\,\mu(dt)\,|\,\mathfrak{B}\right].$$

Пусть ξ — некоторая случайная величина, $\mathsf{M}|\xi| < \infty$ и $\mathfrak{B}$ — некоторая σ-алгебра событий пространства Ω. Тогда

$$\mathsf{M}[\mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B})] = \mathsf{M}\xi.$$

Пусть $\ldots \supseteq \mathfrak{B}_{-1} \supseteq \mathfrak{B}_0 \supseteq \mathfrak{B}_1 \supseteq \ldots$ — последовательность монотонно расширяющихся σ-алгебр, входящих в $\mathfrak{A}$, и

$$\mathfrak{B}_{-\infty} = \bigcap_n \mathfrak{B}_n = \lim_{n\to-\infty} \mathfrak{B}_n,$$

$$\mathfrak{B}_\infty = \bigcup_n \mathfrak{B}_n = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}_n;$$

точнее, $\mathfrak{B}_\infty$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все $\mathfrak{B}_n$. Для любой случайной величины ξ, имеющей математическое ожидание, с вероятностью 1

$$\lim_{n\to-\infty} \mathsf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{B}_n) = \mathsf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{B}_{-\infty}),$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{B}_n) = \mathsf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{B}_\infty).$$

Если случайная величина ξ такова, что $\mathsf{M}|\xi|^\alpha < \infty$ $(\alpha \geqslant 1)$, то последовательность $\mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B}_n)$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ сходится к соответствующим пределам $\mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B}_{-\infty})$ и $\mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B}_\infty)$ не только с вероятностью 1, но и в среднем с показателем α:

$$\lim_{n\to-\infty} \mathsf{M}\,|\,\mathsf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{B}_n) - \mathsf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{B}_{-\infty})\,|^\alpha = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\,|\,\mathsf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{B}_n) - \mathsf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{B}_\infty)\,|^\alpha = 0.$$

Пусть событие A входит в σ-алгебру $\mathfrak{B}$; тогда с вероятностью 1

$$\mathsf{P}(A|\mathfrak{B}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in A, \\ 0 & \text{при } \omega \notin A. \end{cases}$$

Если случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, то с вероятностью 1

$$\mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B}) = \xi.$$

Более того, для любой случайной величины $\eta = \eta(\omega)$ такой, что $\mathsf{M}|\eta| < \infty$ и $\mathsf{M}|\xi\eta| < \infty$, имеет место равенство

$$\mathsf{M}(\xi\eta|\mathfrak{B}) = \xi\mathsf{M}(\eta|\mathfrak{B}).$$

Если σ-алгебры событий $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ таковы, что $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2$, то

$$\mathsf{M}[\mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B}_2)|\mathfrak{B}_1] = \mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B}_1).$$

Если же σ-алгебры событий $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ *независимы*, т. е. если для любых событий $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ и $B_2 \in \mathfrak{B}_2$ имеет место равенство $\mathsf{P}(B_1B_2) = \mathsf{P}(B_1)\mathsf{P}(B_2)$, то

$$\mathsf{M}[\mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B}_1)|\mathfrak{B}_2] = \mathsf{M}\xi.$$

В частности, если случайная величина ξ не зависит от событий $B \in \mathfrak{B}$, точнее, если σ-алгебра всех событий вида $\{\xi \in C\}$ (C — борелевские множества на действительной прямой или комплексной плоскости) и σ-алгебра $\mathfrak{B}$ независимы, то

$$\mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B}) = \mathsf{M}\xi.$$

Пусть $L^2_{\mathfrak{B}}(\Omega)$ — подпространство гильбертова пространства $L^2(\Omega)$, образованное случайными величинами $\eta = \eta(\omega)$ ($\mathsf{M}|\eta|^2 < \infty$), измеримыми относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, и пусть случайная величина ξ принадлежит пространству $L^2(\Omega)$, т. е. $\mathsf{M}|\xi|^2 < \infty$. Тогда условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B})$ представляет собой проекцию величины ξ на подпространство $L^2(\Omega)$:

$$\mathsf{M}|\xi - \mathsf{M}(\xi|\mathfrak{B})|^2 = \min_{\eta \in L^2_{\mathfrak{B}}(\Omega)} \mathsf{M}|\xi - \eta|^2.$$

Условные распределения вероятностей. Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина на пространстве элементарных событий Ω со значениями в фазовом пространстве $(X, \mathfrak{A})$, $\mathfrak{B}$ — некоторая σ-алгебра событий и

$$\mathsf{P}_\xi(A|\mathfrak{B}) = \mathsf{P}\{\xi \in A|\mathfrak{B}\}, \quad A \in \mathfrak{A},$$

есть соответствующие условные вероятности. Для любых непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ с вероятностью 1

$$\mathsf{P}_\xi\Big(\bigcup_k A_k|\mathfrak{B}\Big) = \sum_k \mathsf{P}_\xi(A_k|\mathfrak{B}).$$

То исключительное множество элементарных исходов $\omega \in \Omega$, при которых данное соотношение нарушается, вообще говоря, зависит от самих $A_1, A_2, \ldots$ Если условные вероятности $\mathsf{P}_\xi(A|\mathfrak{B})$ $(A \in \mathfrak{B})$ можно выбрать так, что при почти каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ соответствующие значения $\mathsf{P}_\xi(A|\mathfrak{B})$ $(A \in \mathfrak{A})$ для любых непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ удовлетворяют равенству

$$\mathsf{P}_\xi\left(\bigcup_k A_k \mid \mathfrak{B}\right) = \sum_k \mathsf{P}_\xi(A_k \mid \mathfrak{B}),$$

то вероятностные меры $\mathsf{P}_{\omega\xi} = \mathsf{P}(A|\mathfrak{B})$ $(A \in \mathfrak{A})$, каждая из которых зависит от некоторого элементарного исхода $\omega \in \Omega$, называются *условными распределениями вероятностей*.

Условные распределения $\mathsf{P}_{\omega\xi} = \mathsf{P}(A|\mathfrak{B})$ $(A \in \mathfrak{A})$ всегда существуют, если фазовое пространство $(X, \mathfrak{A})$ является сепарабельным, а распределение вероятностей $\mathsf{P}_\xi = \mathsf{P}_\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{A})$ представляет собой совершенную меру. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что фазовое пространство $(X, \mathfrak{A})$ есть просто действительная прямая с σ-алгеброй борелевских множеств. При почти каждом $\omega \in \Omega$ можно определить монотонно неубывающую и непрерывную справа функцию $F_{\omega\xi} = F_{\omega\xi}(x)$ на счетном, всюду плотном в X множестве точек x, такую, что с вероятностью 1

$$F_{\omega\xi}(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x|\mathfrak{B}\}.$$

Каждую такую функцию можно доопределить так, что она станет функцией распределения на действительной прямой X. Распределения вероятностей $\mathsf{P}_{\omega\xi}$ с соответствующими функциями распределений $F_{\omega\xi}$ будут условными распределениями вероятностей.

Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина в произвольном фазовом пространстве $(X, \mathfrak{A})$. Если имеются условные распределения вероятностей $\mathsf{P}_{\omega\xi} = \mathsf{P}(A|\mathfrak{B})$ $(A \in \mathfrak{A})$ и множество $\xi(\Omega)$ (образованное всеми точками $x = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$) входит в σ-алгебру $\mathfrak{A}$, то формула

$$\mathsf{P}_\omega\{\xi \in A\} = \mathsf{P}_{\omega\xi}(A), \quad A \in \mathfrak{A}$$

определяет при соответствующих $\omega \in \Omega$ вероятностные меры P_ω на σ-алгебре $\mathfrak{A}^\xi$ всех событий вида $\{\xi \in A\}$ $(A \in \mathfrak{A})$. Эти распределения вероятностей P_ω на σ-алгебре событий $\mathfrak{A}^\xi$ таковы, что при каждом фиксированном $A \in \mathfrak{A}$ с вероятностью 1

$$\mathsf{P}_\omega\{\xi \in A\} = \mathsf{P}\{\xi \in A|\mathfrak{B}\}.$$

Пример. Рассмотрим равномерное распределение вероятностей $\mathsf{P}(B)$ $(B \in \mathfrak{B})$ на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}$ отрезка $[0, 1]$ и некоторое неизмеримое множество A_0 на этом отрезке такое, что его верхняя мера равна 1, а нижняя — 0. Рассмотрим продолжение распределения $\mathsf{P}(B)$ $(B \in \mathfrak{B})$ на σ-алгебру $\mathfrak{A}$ всех множеств вида

$$A = B_1 A_0 \cup B_2 \bar{A}_0, \quad B_1, B_2 \in \mathfrak{B},$$

определенное как

$$\mathsf{P}(B_1 A_0 + B_2 \overline{A}_0) = \frac{\mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)}{2}.$$

Легко видеть, что

$$\mathsf{P}(A_0 | \mathfrak{B}) = 1/2$$

и условные распределения $\mathsf{P}(B|\omega)$ на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ (относительно $\mathfrak{B}$) таковы, что

$$\mathsf{P}(B|\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in B, \\ 0 & \text{при } \omega \notin B, \end{cases}$$

т. е. каждое условное распределение сосредоточено в соответствующей точке ω: $\mathsf{P}(\omega|\omega) = 1$. Видно, что на расширенной σ-алгебре $\mathfrak{A}$ нельзя определить условные распределения $\mathsf{P}(A|\omega)$ ($A \in \mathfrak{A}$), поскольку должно было бы быть

$$\mathsf{P}(A|\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in A, \\ 0 & \text{при } \omega \notin A, \end{cases}$$

тогда как при $A = A_0$ имеем $\mathsf{P}(A_0|\omega) = 1/2$ для почти всех ω.

Плотности условных распределений. Формула Байеса. Пусть $\xi = \xi(\omega)$ и $\eta = \eta(\omega)$ — случайные величины на одном пространстве элементарных событий Ω со значениями в фазовых пространствах $(X, \mathfrak{A})$ и $(Y, \mathfrak{B})$. Предположим, что совместное распределение вероятностей $\mathsf{P}_{\xi\eta}(A, B)$ случайных величин ξ и η абсолютно непрерывно относительно некоторой меры Q на произведении пространств $X \times Y$, являющейся произведением мер Q_X и Q_Y:

$$\mathsf{P}_{\xi\eta}(A, B) = \int_{A \times B} p(x, y) \mathsf{Q}(dx\, dy)$$

для любых $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$, где $p(x, y)$ — соответствующая *плотность распределения вероятностей*.

Условное распределение вероятностей $\mathsf{P}_\xi(A|\eta)$ ($A \in \mathfrak{A}$) может быть выбрано одинаковым для всех $\omega \in \Omega$, при которых случайная величина $\eta = \eta(\omega)$ сохраняет одно и то же значение: $\eta(\omega) = y$. При почти каждом $y \in Y$ (относительно распределения P_η в фазовом пространстве $(Y, \mathfrak{B})$) условное распределение вероятностей $\mathsf{P}_\xi(A|y) = \mathsf{P}_{\omega\xi}(A)$, где $\omega \in \{\eta = y\}$ и $A \in \mathfrak{A}$, будет абсолютно непрерывно относительно меры Q_X:

$$\mathsf{Q}_X(A) = \int_{A \times Y} \mathsf{Q}(dx\, dy),$$

причем соответствующая *плотность условного распределения* *вероятностей* будет иметь вид

$$p_\xi(x\,|\,y) = \frac{\mathsf{P}_\xi(dx\,|\,y)}{\mathsf{Q}_X(dx)} = \frac{p(x, y)}{\int\limits_{\mathfrak{X}} p(x, y)\,\mathsf{Q}_X(dx)}.$$

Все сказанное остается справедливым и в отношении условного распределения вероятностей $\mathsf{P}_\eta(B\,|\,\xi)$ $(B \in \mathfrak{B})$. При этом плотности условных распределений связаны между собой так называемой *формулой Байеса*

$$p_\eta(y\,|\,x) = p_\xi(x\,|\,y) \int\limits_X p(x, y)\mathsf{Q}_X(dx) \Big/ \int\limits_Y p(x, y)\mathsf{Q}_Y(dy).$$

Пусть случайные величины ξ и Δ независимы, а $\eta = \varphi(\xi, \Delta)$ есть функция от ξ и Δ. Пусть $\mathsf{P}(B\,|\,x)$ $(B \in \mathfrak{B})$ — распределение вероятностей случайной величины $\varphi(x, \Delta)$ при фиксированном $x \in X$, имеющее плотность распределения $p(x, y)$ относительно некоторой меры $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(B)$ в фазовом пространстве $(Y, \mathfrak{B})$:

$$\mathsf{P}(B\,|\,x) = \int\limits_B p(x, y)\,\mathsf{Q}(dy), \quad B \in \mathfrak{B},$$

причем $\int\limits_{\mathfrak{X}} p(x, y)\,\mathsf{P}_\xi(dx) < \infty$ для почти всех y (относительно меры Q). Тогда условное распределение вероятностей $\mathsf{P}_\xi(A\,|\,y)$ $(A \in \mathfrak{A})$ случайной величины ξ абсолютно непрерывно относительно исходного распределения $\mathsf{P}_\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{A})$:

$$\mathsf{P}_\xi(A\,|\,y) = \int\limits_A p_\xi(x\,|\,y)\,\mathsf{P}_\xi(dx), \quad A \in \mathfrak{A},$$

для почти всех y; соответствующая плотность условного распределения $p_\xi(x\,|\,\eta = y)$ выражается формулой

$$p_\xi(x\,|\,y) = p(x, y) \Big/ \int\limits_X p(x, y)\,\mathsf{P}_\xi(dx).$$

Энтропия и количество информации. Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — произвольное измеримое пространство, P_1 и P_2 — вероятностные меры на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ пространства X. Величина

$$H = \sup \sum_k \mathsf{P}_1(A_k) \log \frac{\mathsf{P}_1(A_k)}{\mathsf{P}_2(A_k)},$$

где основание логарифмов произвольно и sup берется по всем разбиениям пространства X на счетное число непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$, называется *энтропией* распределения P_1 относительно P_2 (при этом считается, что $\mathsf{P}_1(A) \log \frac{\mathsf{P}_1(A)}{\mathsf{P}_2(A)} = 0$ при $\mathsf{P}_1(A) = 0$). Если энтропия H является конечной, то распределение P_1 абсолютно непрерывно относительно P_2, причем

$$H = \int_X \left(\log \frac{\mathsf{P}_1(dx)}{\mathsf{P}_2(dx)}\right) \mathsf{P}_1(dx),$$

где $\mathsf{P}_1(dx)/\mathsf{P}_2(dx)$ — соответствующая плотность.

Энтропия H всегда неотрицательна, причем $H=0$ тогда и только тогда, когда распределения P_1 и P_2 совпадают на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Энтропия $H = H(\mathfrak{A})$, рассматриваемая как величина, зависящая от соответствующей σ-алгебры $\mathfrak{A}$, является монотонно неубывающей в том смысле, что

$$H(\mathfrak{A}_1) \leqslant H(\mathfrak{A}_2), \quad \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2.$$

Пусть $\xi_1 = \xi_1(\omega)$ и $\xi_2 = \xi_2(\omega)$ — произвольные случайные величины в фазовых пространствах $(X_1, \mathfrak{A}_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2)$ с распределениями вероятностей P_1 и P_2. Пусть $X = X_1 \times X_2$ — произведение пространств X_1 и X_2; P_{12} — вероятностная мера на σ-алгебре $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ пространства X, отвечающая совместному распределению вероятностей случайных величин ξ_1 и ξ_2; $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$ — произведение вероятностных мер P_1 и P_2. Величина

$$I(\xi_1, \xi_2) = H(\mathfrak{A}),$$

равная энтропии $H(\mathfrak{A})$ распределения P_{12} относительно $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$, называется *количеством информации* относительно одной величины (ξ_1 или ξ_2), заключенной в другой величине (ξ_2 или ξ_1 соответственно).

Максимальный коэффициент корреляции. Пусть $\xi_1 = \xi_1(\omega)$ и $\xi_2 = \xi_2(\omega)$ — произвольные случайные величины на пространстве элементарных событий $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, и пусть $L_1^2(\Omega)$ и $L_2^2(\Omega)$ — подпространства гильбертова пространства $L^2(\Omega)$, образованные всеми действительными случайными величинами η_1 и η_2, являющимися функциями от ξ_1 и ξ_2 соответственно. Величина

$$r(\xi_1, \xi_2) = \sup \mathsf{M}\eta_1\eta_2,$$

где sup берется по всем случайным величинам $\eta_1 \in L_1^2(\Omega)$ и $\eta_2 \in L_2^2(\Omega)$ таким, что

$$\mathsf{M}\eta_1 = \mathsf{M}\eta_2 = 0, \quad \mathsf{M}\eta_1^2 = \mathsf{M}\eta_2^2 = 1,$$

называется *максимальным коэффициентом корреляции* случайных величин ξ_1 и ξ_2. Этот коэффициент $r(\xi_1, \xi_2)$ равен нулю тогда и только тогда, когда случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы.

Наряду с максимальным коэффициентом корреляции показателем зависимости случайных величин ξ_1 и ξ_2 является величина

$$\alpha(\mathfrak{A}_{\xi_1}, \mathfrak{A}_{\xi_2}) = \sup \mathsf{M}(\eta_{A_1}\eta_{A_2}) = \sup |\mathsf{P}(A_1A_2) - \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)|,$$

где sup берется по всем величинам $\eta_{A_1} \in L_1^2(\Omega)$ и $\eta_{A_2} \in L_2^2(\Omega)$ вида

$$\eta_A = \begin{cases} 1 - \mathsf{P}(A) & \text{при } \omega \in A, \\ -\mathsf{P}(A) & \text{при } \omega \notin A; \end{cases}$$

события A_1 и A_2 входят в соответствующие σ-алгебры $\mathfrak{A}_{\xi_1}$ и $\mathfrak{A}_{\xi_2}$, порожденные событиями вида $\{\xi_1 \in B_1\}$ и $\{\xi_2 \in B_2\}$ соответственно ($B_1 \in \mathfrak{B}_1$ и $B_2 \in \mathfrak{B}_2$ — произвольные множества в соответствующих фазовых пространствах $(X_1, \mathfrak{B}_1)$ и $(X_2, \mathfrak{B}_2)$ случайных величин ξ_1 и ξ_2).

Показателями зависимости служат также величины

$$\beta(\mathfrak{A}_{\xi_1} \mid \mathfrak{A}_{\xi_2}) = \sup_{A_1 \in \mathfrak{A}_{\xi_1}} |\mathsf{P}(A_1 \mid \mathfrak{A}_{\xi_2}) - \mathsf{P}(A_1)|$$

($\beta(\mathfrak{A}_{\xi_1} | \mathfrak{A}_{\xi_2})$ зависит от элементарных исходов $\omega \in \Omega$) и математическое ожидание

$$\bar{\beta} = \mathsf{M}\beta(\mathfrak{A}_{\xi_1} \mid \mathfrak{A}_{\xi_2}).$$

При этом величина $2\bar{\beta}$ совпадает с вариацией разности вероятностных распределений $\mathsf{P}_{\xi_1\xi_2}$ и $\mathsf{P}_{\xi_1} \times \mathsf{P}_{\xi_2}$ на σ-алгебре $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ в произведении $X = X_1 \times X_2$ фазовых пространств X_1 и X_2:

$$\bar{\beta}(\mathfrak{A}_{\xi_1}, \mathfrak{A}_{\xi_2}) = \frac{1}{2} \operatorname{Var} \{\mathsf{P}_{\xi_1\xi_2} - \mathsf{P}_{\xi_1} \times \mathsf{P}_{\xi_2}\}.$$

Регулярные случайные процессы. Пусть $\xi = \xi(t)$ — случайный процесс на действительной прямой $-\infty < t < \infty$ в произвольном фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$. Обозначим $\mathfrak{A}(s, t)$ σ-алгебру событий, порождаемую событиями вида $\{\xi(u) \in B\}$, где $s \leqslant u \leqslant t$ и $B \in \mathfrak{B}$. Случайный процесс $\xi = \xi(t)$ называется *регулярным*, если для любого события $A \in \mathfrak{A}(t, \infty)$ с вероятностью 1

$$\lim_{s \to -\infty} \mathsf{P}(A \mid \mathfrak{A}(-\infty, s)) = \mathsf{P}(A).$$

Регулярность случайного процесса $\xi(t)$ означает, что σ-алгебра $\mathfrak{A}^{-\infty} = \bigcap_s \mathfrak{A}(-\infty, s)$ содержит лишь события вероятности 0 или 1.

Регулярность процесса $\xi(t)$ равносильна тому, что для любого события $A \in \mathfrak{A}(t, \infty)$

$$\lim_{s \to -\infty} \sup_{A' \in \mathfrak{A}(-\infty, s)} |\mathsf{P}(AA') - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(A')| = 0.$$

Говорят, что случайный процесс $\xi = \xi(t)$ обладает свойством *полной регулярности* (иначе — *вполне регулярен*), если

$$\alpha(s, t) = \sup_{\substack{A \in \mathfrak{A}(t, \infty) \\ A' \in \mathfrak{A}(-\infty, s)}} |\mathsf{P}(AA') - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(A')| \to 0$$

при $t - s \to \infty$ (равномерно по всем s, t).

3. Случайные процессы и их распределения вероятностей. *Сепарабельные случайные процессы.* Случайный процесс $\xi = \xi(t)$ на множестве T действительной прямой в топологическом фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ называется сепарабельным, если существуют такое счетное множество $S_0 \subseteq T$ и такое событие A_0 вероятности нуль, что для всех событий вида

$$A(IT) = \{\xi(t) \in F \text{ при } t \in IT\}$$

(F — замкнутое множество в E, I — интервал на действительной прямой) разность $A(IS_0) \setminus A(IT)$ входит в событие A_0:

$$A(IS_0) \setminus A(IT) \subseteq A_0, \quad \mathsf{P}(A_0) = 0;$$

S_0 называется *множеством сепарабельности.*

Отнюдь не всякий случайный процесс является сепарабельным.

Пример. Пусть $\tau = \tau(\omega)$ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, и $\xi = \xi(t)$ — случайный процесс на отрезке $T = [0, 1]$ вида

$$\xi(\omega, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau(\omega) = t, \\ 0 & \text{при } \tau(\omega) \neq t. \end{cases}$$

В этом случае для любого счетного множества $S \subseteq T$

$$\mathsf{P}\{\xi(t) = 0 \text{ при } t \in S\} = 1,$$

тогда как

$$\mathsf{P}\{\xi(t) = 0 \text{ при } t \in T\} = 0.$$

Пусть фазовое пространство $(E, \mathfrak{B})$ представляет собой компакт со счетной базой. Тогда для любого случайного процесса $\xi = \xi(t)$ в этом фазовом пространстве существует эквивалентный ему сепарабельный случайный процесс $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$. Существование такого процесса $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ имеет место и при более слабых условиях, чем компактность фазового пространства [106].

Непосредственно заданный сепарабельный процесс. Пусть фазовое пространство $(E, \mathfrak{B})$ представляет собой компакт со счетной базой открытых множеств и $\xi = \xi(t)$ — непосредственно заданный случайный процесс на отрезке T действительной прямой в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$, причем соответствующее распределение вероятностей $\mathsf{P} = \mathsf{P}_\xi$ в функциональном пространстве $X = E^T$ является регулярной борелевской мерой. Для каждого множества $A \subseteq X$ определим множество $A(S)$ $(S \subseteq T)$, отнеся к $A(S)$ каждую функцию $x = x(t)$, совпадающую при $t \in S$ с какой-либо функцией $x = x'(t)$ из A. Имеет место следующий факт [141]: для любого борелевского множества $A \subseteq X$ типа $F_{\sigma\delta}$ существует счетное множество $S \subseteq T$ такое, что

$$\mathsf{P}\{A(S) \setminus A\} = 0.$$

Укажем непосредственно заданный сепарабельный случайный процесс $\xi=\xi(t)$, определяемый как

$$\xi(x,\ t)=x(t),\ x\in X.$$

В сепарабельном фазовом пространстве E имеется счетное число замкнутых множеств $F\subseteq E$ таких, что всякое замкнутое множество пространства E является пересечением некоторого числа множеств F. Пусть

$$A(IT)=\{x(t)\in F \text{ при } t\in IT\}$$

есть множества в функциональном пространстве $X=E^T$, отвечающие указанным множествам F и интервалам I с рациональными концами. Каждое из множеств $A(IT)$ замкнуто, и существует счетное множество $S\subseteq T$ такое, что

$$\mathsf{P}\{A(IS)\setminus A(IT)\}=0.$$

Если положить*

$$S_0=\cup S,\ A_0=\cup\{A(IS)\setminus A(IT)\},$$

где объединение берется по всем указанным F и I, то счетное множество S_0 и множество $A_0\subseteq X$ вероятности нуль будут удовлетворять условиям, данным в формулировке сепарабельного процесса.

Измеримые и непрерывные случайные процессы. Пусть $(\Omega,\ \mathfrak{A},\ \mathsf{P})$ — произвольное пространство элементарных событий и T — измеримое множество на действительной прямой с σ-алгеброй измеримых подмножеств. Случайный процесс $\xi=\xi(t)$ на множестве T со значениями в фазовом пространстве $(E,\ \mathfrak{B})$ называется *измеримым*, если измерима функция $\xi=\xi(\omega,\ t)$ двух переменных $(\omega,\ t)$, рассматриваемая как функция на измеримом пространстве $\Omega\times T$ со значениями в измеримом пространстве $(E,\mathfrak{B})$.

Отнюдь не всякий случайный процесс является измеримым. Например, не будет измеримым непосредственно заданный действительный случайный процесс $\xi=\xi(t)$ на отрезке $T=[a,\ b]$: $\xi(x,\ t)=x(t)$, $x\in X$, где X — пространство всех действительных функций $x=x(t)$ $(t\in T)$.

Пусть фазовое пространство $(E,\ \mathfrak{B})$ представляет собой компакт со счетной базой открытых множеств, T — борелевское множество на действительной прямой с σ-алгеброй всех его борелевских подмножеств, а случайный процесс $\xi=\xi(t)$ является *стохастически непрерывным*, т. е. для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{s\to t}\mathsf{P}\{\rho[\xi(s),\ \xi(t)]>\varepsilon\}=0$$

при всех $t\in T$, где $\rho(\cdot,\ \cdot)$ означает расстояние между соответствующими точками фазового пространства E. Тогда существует сепарабельный измеримый случайный процесс $\tilde{\xi}=\tilde{\xi}(t)$, эквивалентный процессу $\xi=\xi(t)$ (при этом всякое всюду плотное в T

множество S_0 является множеством сепарабельности процесса $\tilde{\xi}=\tilde{\xi}(t)$).

Пусть $\xi=\xi(t)$ — сепарабельный случайный процесс. Тогда событие A, заключающееся в том, что траектория процесса $\xi(\omega, t)$ $(t \in T)$ окажется разрывной в фиксированной точке t_0, имеет определенную вероятность (входит в σ-алгебру событий $\mathfrak{A}$, на которой определена вероятностная мера P). Если эта вероятность положительна: $\mathsf{P}(A)>0$, точка t_0 называется *фиксированной точкой разрыва*. Пусть $\mu=\mu(\Delta)$ — некоторая мера на σ-алгебре измеримых подмножеств в T. Обозначим символом Δ_0 совокупность всех фиксированных точек разрыва случайного процесса $\xi=\xi(t)$. Если $\mu(\Delta_0)=0$, то случайный процесс $\xi=\xi(t)$ является измеримым. Более того, с вероятностью 1 его траектории являются непрерывными почти всюду (относительно меры μ) функциями параметра $t \in T$.

Случайный процесс $\xi=\xi(t)$ в топологическом фазовом пространстве E называется *непрерывным с вероятностью* 1, если для почти всех элементарных исходов $\omega \in \Omega$ его траектории $\xi(\omega, t)$ $(t \in T)$ являются непрерывными функциями на множестве T. Для сепарабельных процессов непрерывность на множестве T равносильна непрерывности на счетном всюду плотном множестве $S_0 \subseteq T$.

Пусть на отрезке $T=[a, b]$ $\xi=\xi(t)$ представляет собой сепарабельный случайный процесс в полном метрическом пространстве E, такой, что при некоторых положительных α, ε и постоянной $C>0$

$$\mathsf{M}\rho[\xi(s), \xi(t)]^{\alpha} \leqslant C(t-s)^{1+\varepsilon}$$

для любых $s \leqslant t$ (M — символ математического ожидания, $\rho(\cdot, \cdot)$ — расстояние между соответствующими точками фазового пространства E). Тогда случайный процесс $\xi(t)$ непрерывен с вероятностью 1.

Пример. Пусть $\tau=\tau(\omega)$ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $T=[a, b]$, и $\xi=\xi(t)$ — случайный процесс с траекториями вида

$$\xi(\omega, t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<\tau(\omega), \\ 1 & \text{при } t \geqslant \tau(\omega).\end{cases}$$

Для любых $s \leqslant t$

$$\mathsf{M}|\xi(s)-\xi(t)|^{\alpha}=\mathsf{P}\{s \leqslant \tau \leqslant t\}=t-s.$$

В то же время каждая траектория $\xi(\omega, t)$ $(t \in T)$ этого процесса имеет разрыв в некоторой точке $\tau=\tau(\omega)$.

Пусть фазовое пространство E представляет собой компакт со счетной базой. Тогда множество $C(T)$ всех непрерывных функций $x=x(t)$ на отрезке $T=[a, b]$ со значениями в фазовом пространстве E является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в функциональном пространстве $X = E^T$:

$$C(T) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{|t-s|<1/n} \left\{\rho\,[x(s), x(t)] \leqslant \frac{1}{m}\right\}.$$

Если P — распределение вероятностей в X, представляющее собой регулярную борелевскую меру, то существует такое счетное множество $S \subseteq T$, что

$$\mathsf{P}\{C(S) \setminus C(T)\} = 0,$$

где $C(S)$ — множество всех функций $x = x(t)$, непрерывных лишь при $t \in S$.

Если при некоторых положительных α_1, α_2, ε и постоянной $C > 0$ выполняется неравенство

$$\mathsf{M}\,\{\rho\,[\xi(s), \xi(u)]^{\alpha_1} \cdot \rho\,[\xi(u), \xi(t)]^{\alpha_2}\} \leqslant C\,(t-s)^{1+\varepsilon}, \quad s \leqslant u \leqslant t,$$

то с вероятностью 1 случайный процесс $\xi = \xi(t)$ имеет лишь разрывы первого рода, т. е. для почти всех элементарных исходов $\omega \in \Omega$ его траектории $\xi(\omega, t)$ $(t \in T)$ являются функциями, имеющими лишь разрывы первого рода; иными словами, при любом t существуют односторонние пределы

$$\lim_{s \to t-0} \xi(\omega, s), \quad \lim_{s \to t+0} \xi(\omega, s).$$

Пусть фазовое пространство E представляет собой компакт со счетной базой. Тогда множество $D(T)$ всех функций $x = x(t)$ на отрезке $T = [a, b]$ со значениями в фазовом пространстве E, имеющих лишь разрывы первого рода, является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в функциональном пространстве $X = E^T$:

$$D(t) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{|t-s|<1/n \\ s<u<t}} \left\{\min\,(\rho\,[x(s), x(u)], \rho\,[x(u), x(t)]) \leqslant \frac{1}{m}\right\}.$$

Если P — распределение вероятностей в X, представляющее собой регулярную борелевскую меру, то существует такое счетное множество $S \subseteq T$, что

$$\mathsf{P}\{D(S) \setminus D(T)\} = 0,$$

где $D(S)$ — множество всех функций $x = x(t)$, имеющих при $t \in S$ лишь разрывы первого рода.

Моменты первого выхода. Пусть E — топологическое пространство, $X = E^T$ — пространство всех функций $x = x(t)$ на конечном отрезке $T = [a, b]$ со значениями в E.

Пусть $x = x(t)$ — некоторая функция на отрезке $[a, b]$ со значениями в E, $x^{(a,t)}$ — множество значений $x(s)$ на отрезке $a \leqslant s \leqslant t$ и $[x^{(a,t)}]$ — замыкание этого множества. *Моментом первого выхода* из множества $B \subseteq E$ называется величина $\tau = \tau_B$, равная верхней грани тех t, для которых множество $x^{(a,t)}$ содержится в B; τ называется также *моментом первого достижения* дополнительного множества $E \setminus B$.

Моментом первого выхода изнутри множества B называется величина $\overline{\tau}$, равная верхней грани тех t, для которых множество $[\underline{x^{(a,\,t)}}]$ содержится в B. Для замкнутого множества B величины τ и $\overline{\tau}$ совпадают.

Если функция $x = x(t)$ является непрерывной, то величины τ_B и $\overline{\tau}_B$ совпадают для любого множества B, поскольку $x(a,\,b) = [x(a,\,b)]$.

Обозначим символом $\{[x^{(a,\,b)}] \subseteq B\}$ множество всех функций $x = x(t)$, для которых $[x^{(a,\,b)}] \subseteq B$. Пусть E — компакт со счетной базой открытых множеств. Если B — замкнутое множество, то $\{[x^{(a,\,b)}] \subseteq B\}$ — замкнутое множество в тихоновском произведении $X = E^T$; если же B — открытое множество, то $\{[x^{(a,\,b)}] \subseteq B\}$ является множеством типа F_σ.

Пусть P — борелевское регулярное распределение в функциональном пространстве $X = E^T$. Тогда для любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}$

$$\mathsf{P}\,\{[x^{(a,\,t)}] \subseteq B\} = \sup \mathsf{P}\,\{[x^{(a,\,t)}] \subseteq F\} = \inf \mathsf{P}\,\{[x^{(a,\,t)}] \subseteq G\},$$

где sup берется по всем замкнутым множествам $F \subseteq B$, а inf — по всем открытым множествам $G \supseteq B$.

Пусть $\xi = \xi(t)$ — случайный процесс на отрезке $T = [a,\,b]$ в топологическом фазовом пространстве E. При каждом элементарном исходе $\omega \in \Omega$ определим $\tau_B = \tau_B(\omega)$ как момент первого выхода из B траектории $\xi(\omega,\,t)$, а $\overline{\tau}_B = \overline{\tau}_B(\omega)$ как момент первого выхода изнутри множества B. Пусть фазовое пространство E представляет собой компакт со счетной базой, и пусть $\mathfrak{A}(T)$ есть σ-алгебра событий из пространства элементарных событий Ω, порожденная всеми событиями вида $\{\xi(t) \in B\}$ $(t \in T$, B — борелевские множества фазового пространства $E)$.

Распределение вероятностей P_ξ случайного процесса $\xi = \xi(t)$ всегда можно продолжить до борелевской регулярной меры в функциональном пространстве $X = E^T$. Если множество $\xi(\Omega)$ всех траекторий $\xi(\omega,\,t)$ этого процесса на отрезке $T = [a,\,b]$ измеримо, то распределение вероятностей P на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$ можно продолжить таким образом, что будут определены вероятности всех событий вида $\{\xi \in A\}$ — событий, означающих, что траектория $\xi(\omega,\,t)$ принадлежит борелевскому множеству A в функциональном пространстве $X = E^T$.

В частности, для любого борелевского множества B в фазовом пространстве E момент $\overline{\tau} = \overline{\tau}(\omega)$ первого выхода изнутри B будет измеримой функцией на пространстве элементарных событий, причем

$$\{\overline{\tau}_B > t\} = \{[\xi^{(a,\,t)}] \subseteq B\} \quad (t \in T).$$

Если случайный процесс $\xi = \xi(t)$ не является измеримым, то функция $\xi(\omega, \tau(\omega))$ от ω, вообще говоря, неизмерима.

Пример. Пусть τ — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону:

$$\mathsf{P}\{\tau > t\} = e^{-\lambda t} \quad (t \geqslant 0).$$

Определим случайные процессы $\xi_1 = \xi_1(t)$ и $\xi_2 = \xi_2(t)$ как

$$\xi_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 1 \text{ при } t > \tau, \end{cases} \qquad \xi_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant t < \tau, \\ 1 \text{ при } t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Конечномерные распределения этих процессов совпадают, а поэтому совпадают и отвечающие им борелевские регулярные распределения вероятностей P_1 и P_2 на тихоновском произведении $X = E^{[0, \infty]}$, т. е. на пространство всех действительных функций $x = x(t)$ на полуоси $[0, \infty]$, принимающих значения из некоторого отрезка E, содержащего отрезок $[0, 1]$. Пусть $\xi = \xi(t)$ — непосредственно заданный случайный процесс: $\xi(x, t) = x(t)$ $(x \in X)$ и $\tau = \tau(x)$ — момент первого выхода из точки 0. Предположим, что множество $\{\xi(x, \tau) = 0\}$ является измеримым. Тогда, очевидно,

$$\mathsf{P}_1\{\xi(x, \tau) = 0\} = 1, \quad \mathsf{P}_2\{\xi(x, \tau) = 0\} = 0.$$

Но так как борелевские меры P_1 и P_2 совпадают, то должно иметь место равенство

$$\mathsf{P}_1\{\xi(x, \tau) = 0\} = 1, \quad \mathsf{P}_2\{\xi(x, \tau) = 0\} = 0.$$

Полученное противоречие свидетельствует, что на самом деле множество $\{\xi(x, \tau) = 0\}$ неизмеримо.

Если случайный процесс $\xi = \xi(t)$ измерим, точнее, $\xi(\omega, t)$ — измеримая функция на произведении $\Omega \times T$ (T — отрезок с σ-алгеброй борелевских множеств), то для любой случайной величины $\tau = \tau(\omega)$ $(\tau \in T)$ функция $\xi(\omega, \tau)$ от ω также является случайной величиной. Например, так будет, если случайный процесс $\xi = \xi(t)$ непрерывен с вероятностью 1.

§ 2. Основные типы случайных процессов

1. Случайные процессы как кривые в гильбертовом пространстве.

Ковариационная функция. Пусть $\xi = \xi(t)$ — действительный или комплексный случайный процесс на множестве T, имеющий вторые моменты: $\mathsf{M}|\xi(t)|^2 < \infty$. Если не делать различия между случайными величинами, отличающимися друг от друга лишь с вероятностью нуль, то значения случайного процесса $\xi(t)$ можно рассматривать как элементы гильбертова пространства $L^2(\Omega)$ — пространства всех случайных величин η $(\mathsf{M}|\eta|^2 < \infty)$ со скалярным произведением

$$(\eta_1, \eta_2) = \mathsf{M}\eta_1\overline{\eta_2}.$$

Важнейшими характеристиками такого случайного процесса $\xi(t)$ являются его *математическое ожидание*

$$A(t) = \mathsf{M}\xi(t) = (\xi(t), 1)$$

и *ковариационная функция*

$$B(s, t) = \mathsf{M}\xi(s)\overline{\xi(t)} = (\xi(s), \xi(t)).$$

Вместо ковариационной функции можно рассматривать *корреляционную функцию*

$$B(s, t) = \mathsf{M}\xi(s)\overline{\xi(t)} - A(s)\overline{A(t)},$$

являющуюся ковариационной функцией процесса вида $\xi(t) - A(t)$ с нулевым математическим ожиданием.

Функция $B(s, t)$ двух переменных s и t является ковариационной функцией некоторого случайного процесса $\xi(t)$ ($\mathsf{M}|\xi(t)|^2 < \infty$) тогда и только тогда, когда она для всякого $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет следующему условию положительной определенности:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B(t_k, t_j)\, \overline{c_k} c_j \geqslant 0$$

при любых $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ и любых комплексных $c_1, \ldots, c_n$.

Канонические представления. При изучении случайного процесса $\xi = \xi(t)$ как функции параметра $t \in T$ со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ часто используются различного рода канонические разложения. Под *каноническим представлением случайного процесса* $\xi(t)$ понимается представление его в виде

$$\xi(t) = \int_{\Lambda} \varphi(t, \lambda)\, \Phi(d\lambda), \quad t \in T,$$

где Λ — измеримое пространство с некоторой σ-алгеброй измеримых множеств Δ и заданной на ней обобщенной ортогональной мерой $\Phi = \Phi(\Delta)$ со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$; $\varphi(t, \lambda)$ — некоторое семейство функций переменной $\lambda \in \Lambda$, зависящих от параметра $t \in T$. Ортогональность меры $\Phi = \Phi(\Delta)$ означает, что

$$\mathsf{M}\Phi(\Delta_1)\overline{\Phi(\Delta_2)} = 0$$

для любых непересекающихся измеримых множеств Δ_1 и Δ_2 пространства Λ.

Соотношение

$$F(\Delta) = \mathsf{M}|\Phi(\Delta)|^2$$

определяет σ-конечную меру $F = F(\Delta)$ на измеримых множествах Δ рассматриваемого пространства Λ такую, что ковариационная функция $B = B(s, t)$ случайного процесса $\xi = \xi(t)$, имеющего указанное каноническое представление, выражается формулой

$$B(s, t) = \int\limits_{\Lambda} \varphi(s, \lambda) \overline{\varphi(t, \lambda)} F(d\lambda).$$

Подобное представление ковариационной функции $B = B(s, t)$ служит отправным пунктом для построения соответствующего канонического представления самого случайного процесса $\xi = \xi(t)$. Именно, пусть $L^2(\Lambda)$ — гильбертово пространство всех измеримых (действительных или комплексных) функций $\varphi = \varphi(\lambda)$ на пространстве Λ со скалярным произведением

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_{\Lambda} \varphi_1(\lambda) \overline{\varphi_2(\lambda)} F(d\lambda).$$

Пусть U — оператор, переводящий элементы $\varphi(t, \lambda)$ пространства $L^2(\Lambda)$ в элементы $\xi(t)$ пространства $L^2(\Omega)$:

$$\xi(t) = U\varphi(t, \lambda), \quad t \in T.$$

Этот оператор U является *изометрическим* и может быть продолжен с сохранением изометричности*) на все пространство $L^2(\Lambda)$. При этом

$$\Phi(\Delta) = U\varphi_\Delta(\lambda), \quad \varphi_\Delta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda \in \Delta, \\ 0 & \text{при } \lambda \notin \Delta, \end{cases}$$

будет обобщенной ортогональной мерой на измеримых множествах Δ пространства Λ со значениями в $L^2(\Omega)$ и такой, что

$$\xi(t) = \int\limits_{\Lambda} \varphi(t, \lambda) \Phi(d\lambda).$$

Пример. Пусть $\xi = \xi(t)$ — случайный процесс на отрезке $T = [a, b]$ с непрерывной ковариационной функцией $B = B(t, s)$. В гильбертовом пространстве $L^2[a, b]$ всех функций $\varphi = \varphi(t)$ со скалярным произведением

$$(\varphi_1 \varphi_2) = \int\limits_a^b \varphi_1(t) \overline{\varphi_2(t)}\, dt$$

соотношение

$$B\varphi(t) = \int\limits_a^b B(t, s) \varphi(s)\, ds, \quad t \in T,$$

*) Такое продолжение возможно, конечно, не всегда. Дополнительное требование должно состоять в том, чтобы размерность пространства $L^2(\Omega)$ была не менее размерности пространства $L^2(\Lambda)$.

определяет *положительный ядерный оператор*. Пусть $\varphi(t, \lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) — полная ортонормированная система собственных элементов $\varphi(t, \lambda)$ с собственными значениями λ (λ пробегает некоторое счетное множество Λ). Тогда

$$B(s, t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(s, \lambda) \overline{\varphi(t, \lambda)} \lambda = \int_{\Lambda} \varphi(s, \lambda) \varphi(t, \lambda) F(d\lambda),$$

где F — конечная мера на счетном множестве Λ: $F(\lambda) = \lambda$ при всех $\lambda \in \Lambda$. В соответствии с этим сам случайный процесс $\xi(t)$ представляется в виде суммы

$$\xi(t) = \sum_{\lambda \in \Delta} \varphi(t, \lambda) \Phi(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = \int_a^b \xi(t) \varphi(t, \lambda)\, dt,$$

где $\Phi(\lambda)$ — ортогональные случайные величины: $\mathsf{M}\Phi(\lambda_1)\overline{\Phi(\lambda_2)} = 0$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, причем $\mathsf{M}|\Phi(\lambda)|^2 = \lambda$.

Наряду с каноническими могут быть использованы более общие представления вида

$$\xi(t) = \int_{\Lambda} \varphi(t, \lambda) \Phi(d\lambda),$$

где обобщенная мера Φ уже не обязательно ортогональна. Такое представление тесно связано с соответствующим представлением ковариационной функции:

$$B(s, t) = \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} \varphi(\lambda, s) \overline{\varphi(\mu, t)} F(d\lambda, d\mu),$$

где $F(d\lambda, d\mu)$ — некоторая мера ограниченной вариации (F принимает, вообще говоря, комплексные значения) такая, что

$$F(d\lambda, d\mu) = \mathsf{M}\Phi(d\lambda)\overline{\Phi(d\mu)}.$$

Если линейная оболочка функций $\varphi(\lambda, t)$ (параметр t пробегает множество T) всюду плотна в функциональном гильбертовом пространстве $L^2(\Lambda)$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_R \int_R \varphi(\lambda) \overline{\psi(\mu)} F(d\lambda, d\mu),$$

то для любого измеримого $\Delta \subseteq \Lambda$ значение обобщенной меры $\Phi(\Delta)$ принадлежит пространству H — замкнутой линейной оболочке значений рассматриваемого процесса $\xi(t)$ ($t \in T$). При этом

$$\Phi(\Delta) = \lim \sum_t c(t) \xi(t)$$

для любой последовательности величин вида $\sum c(t) \xi(t)$ такой, что соответствующая последовательность функций вида $\sum c(t) \varphi(\lambda, t)$

сходится в пространстве $L^2(R)$ к функции

$$\varphi_\Delta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda \in \Delta, \\ 0 & \text{при } \lambda \notin \Delta. \end{cases}$$

Линейно регулярные процессы. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс на действительной прямой $-\infty < t < \infty$, причем $\mathsf{M}|\xi(t)|^2 < \infty$. Обозначим символом $H(s, t)$ замкнутую линейную оболочку значений $\xi(u)$ $(s \leqslant u \leqslant t)$, рассматриваемых как элементы гильбертова пространства $L^2(\Omega)$. Случайный процесс $\xi = \xi(t)$ называется *линейно регулярным*, если

$$\bigcap_t H(-\infty, t) = 0.$$

Случайный процесс $\xi = \xi(t)$ с «дискретным временем» t (t принимает лишь целочисленные значения) линейно регулярен тогда и только тогда, когда его можно представить в следующем виде:

$$\xi(t) = \sum_{s=-\infty}^{t} \varphi(t, s)\,\Phi(s),$$

где $\Phi = \Phi(s)$ — некоторая последовательность некоррелированных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве H, $\Phi(t) \in H(-\infty, t)$ при всех t, а $\varphi(t, s)$ — некоторая числовая последовательность такая, что при каждом t

$$\sum_{s=-\infty}^{t} |\varphi(t, s)|^2 F(s) < \infty, \quad F(s) = \mathsf{M}|\Phi(s)|^2.$$

Аналогичный факт имеет место и в случае «непрерывного времени» t (t принимает все действительные значения), когда пространство H является сепарабельным. Именно, случайный процесс $\xi = \xi(t)$ линейно регулярен тогда и только тогда, когда его можно представить в следующем виде:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} \varphi_k(t, s)\,\Phi_k(ds).$$

Здесь $\Phi_k(ds)$ при каждом k представляет собой обобщенную ортогональную меру со значениями в гильбертовом пространстве H:

$$\mathsf{M}|\Phi_k(\Delta)|^2 = F_k(\Delta);$$

если множества Δ_1 и Δ_2 не пересекаются, то

$$\mathsf{M}\Phi_k(\Delta_1)\overline{\Phi_k(\Delta_2)} = 0,$$

причем $\Phi_k(\Delta) \in H(s, t)$ для любого измеримого множества Δ, принадлежащего отрезку $[s, t]$. При $k \neq j$

$$\mathsf{M}\Phi_k(\Delta_1)\overline{\Phi_j(\Delta_2)} = 0$$

для любых измеримых множеств Δ_1 и Δ_2.

При каждом t

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} |\varphi(t, s)|^2 F_k(ds) < \infty$$

(число N может быть как конечным, так и бесконечным). Подобное представление единственно и называется *регулярным каноническим представлением* процесса $\xi(t)$.

Для любого конечного или счетного числа N и семейства мер $F_k(dt)$ $(k=1, 2, \ldots, N)$ существует линейно регулярный случайный процесс $\xi(t)$ $(t \in T)$ с соответствующими параметрами N и и $F_k(dt)$ в его регулярном каноническом представлении [127].

Стационарные случайные процессы. Случайный процесс $\xi(t)$ на действительной прямой $-\infty < t < \infty$ $(\mathsf{M}|\xi(t)|^2 < \infty)$ называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание $A(t)$ и ковариационная функция $B(s, t)$ не меняются при перемене начала отсчета параметра t, т. е. функция $A(t)$ есть постоянная, а функция $B(s, t)$ зависит лишь от разности $t-s$:

$$B(s, t) = B(t-s).$$

Иногда процесс называют также *стационарным*, если инвариантна относительно сдвига параметра t лишь ковариационная функция.

Стационарность процесса $\xi = \xi(t)$ как функции со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ означает, что скалярное произведение

$$(\xi(s), \xi(t)) = B(t-s)$$

зависит лишь от разности $t-s$. Это равносильно тому, что в замкнутой линейной оболочке H величин $\xi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — в подпространстве гильбертова пространства $L^2(\Omega)$ — существует группа унитарных операторов U_s, определяемая соотношением

$$U_s\xi(t) = \xi(t+s), \quad -\infty < s, t < \infty.$$

Всякий стационарный в широком смысле процесс $\xi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ представляет собой функцию со значениями в гильбертовом пространстве H, имеющую следующий вид:

$$\xi(t) = U_t\xi(0), \quad -\infty < t < \infty,$$

где U_t — некоторая группа унитарных операторов в H и $U_0 = I$ — единичный оператор:

$$U_{t_1} \cdot U_{t_2} = U_{t_1+t_2}.$$

Всякий стационарный процесс $\xi(t)$ с непрерывной ковариационной функцией допускает так называемое *спектральное* *представление* вида

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda),$$

где Φ — некоторая обобщенная мера на действительной прямой $-\infty<\lambda<\infty$ со значениями в гильбертовом пространстве H такая, что для непересекающихся измеримых множеств Δ_1 и Δ_2

$$(\Phi(\Delta_1),\ \Phi(\Delta_2)) = \mathsf{M}\Phi(\Delta_1)\overline{\Phi(\Delta_2)} = 0.$$

Ортогональная мера Φ определена на σ-алгебре множеств, измеримых по отношению к неотрицательной ограниченной мере $F(\Delta)=\mathsf{M}|\Phi(\Delta)|^2$, которая называется *спектральной мерой* стационарного процесса $\xi(t)$ и связана с ковариационной функцией $B(t)$ соотношением

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}F(d\lambda).$$

Линейно регулярный стационарный процесс $\xi(t)$ допускает регулярное представление вида

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} c(t-s)\,\eta(ds),$$

где $\eta=\eta(\Delta)$ — некоторая обобщенная ортогональная мера на прямой $-\infty<t<\infty$ со значениями в гильбертовом пространстве H такая, что

$$\eta(\Delta)\in H(-\infty,\ t),$$
$$\mathsf{M}|\eta(\Delta)|^2 = t-s \text{ при } \Delta=(s,\ t),$$

где $H(s,\ t)$ — замкнутая линейная оболочка значений $\xi(u)$ $(s\leqslant u\leqslant t)$.

Обобщенные случайные процессы. Пусть $\xi=\langle u,\ \xi\rangle$ — обобщенный случайный процесс на некотором линейном пространстве U такой, что $\mathsf{M}|\langle u,\ \xi\rangle|^2<\infty$ при всех $u\in U$. Такой процесс $\xi = \langle u,\ \xi\rangle$ может рассматриваться как функция на U со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$. Функционал

$$A(u) = \mathsf{M}\langle u,\ \xi\rangle,\quad u\in U,$$

называется *математическим ожиданием*, а функционал

$$B(u,\ v) = \mathsf{M}\{\langle u,\ \xi\rangle\overline{\langle v,\ \xi\rangle}\},\quad u,\ v\in U,$$

называется *ковариационным функционалом* обобщенного процесса $\xi=\langle u,\ \xi\rangle$.

Пусть U — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $u=u(t)$ на действительной прямой $-\infty<t<\infty$, обращающихся в нуль вне некоторого конечного интервала. Математическое ожидание $A(u)$ и ковариационный функционал $B(u, v)$ обобщенного процесса $\xi = \langle u, \xi\rangle$ на этом пространстве обычно предполагаются непрерывными, т. е. такими, что

$$A(u_n) \to A(u), \quad B(u_n, v_n) \to B(u, v),$$

если при $n \to \infty$ соответствующие последовательности функций $u_n = u_n(t)$ и $v_n = v_n(t)$ сходятся к предельным элементам $u = u(t)$ и $v = v(t)$ соответственно. При этом считается, что $u_n \to u$, если все функции $u_n(t)$ обращаются в нуль вне некоторого конечного интервала, а производные $u_n^{(p)}(t)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ равномерно сходятся к соответствующим производным $u^{(p)}(t)$ предельной функции $u(t)$.

Пусть S_t — *преобразование сдвига*, переводящее функцию $u = u(s)$ в функцию $S_t u = u(s+t)$ $(-\infty < s < \infty)$. Обобщенный случайный процесс $\xi = \langle u, \xi\rangle$ с математическим ожиданием $A(u)$ и ковариационным функционалом $B(u, v)$ называется *стационарным в широком смысле*, если

$$A(S_t u) = A(u), \quad B(S_t u, S_t v) = B(u, v)$$

при любых t и $u, v \in U$.

Математическое ожидание такого процесса есть постоянная:

$$A(u) = a \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt,$$

а ковариационный функционал представим в виде

$$B(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda)\,\overline{\tilde{v}(\lambda)}\,F(d\lambda),$$

где $F = F(\Delta)$ — так называемая спектральная мера, $\tilde{u}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} u(t)\,dt$ — преобразование Фурье функции $u \in U$ ($B = B(u, v)$ предполагается непрерывным). Сам обобщенный стационарный процесс $\xi = \langle u, \xi\rangle$ представим в виде

$$\langle u, \xi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda)\,\Phi(d\lambda),$$

где $\Phi = \Phi(\Delta)$ — обобщенная ортогональная мера на прямой $-\infty < \lambda < \infty$ со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$. Обобщенная мера $\Phi = \Phi(\Delta)$ определена на σ-алгебре множеств, измеримых по отношению к σ-конечной мере $F = F(\Delta) = \mathsf{M}|\Phi(\Delta)|^2$, называемой *спектральной мерой* стационарного процесса $\xi = \langle u, \xi \rangle$ и удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \lambda^2)^{-p} F(d\lambda) < \infty$$

при некотором конечном p. Приведенное каноническое представление называется *спектральным представлением* обобщенного стационарного процесса $\xi = \langle u, \xi \rangle$.

2. Гауссовские случайные процессы. Действительная случайная величина ξ называется *гауссовской*, если ее *характеристическая функция* $\varphi = \varphi(u)$ имеет вид

$$\varphi(u) = \exp\left\{iau - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right\};$$

фигурирующие здесь параметры a и σ^2 имеют простой вероятностный смысл: $a = \mathsf{M}\xi$, $\sigma^2 = \mathsf{D}\xi$. Соответствующее распределение вероятностей также называется *гауссовским*; оно задается плотностью распределения вида

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Случайные величины $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называются *гауссовскими*, если характеристическая функция их совместного распределения имеет вид

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \exp\left\{i \sum_{k=1}^{n} a_k u_k - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{n} b_{kj} u_k u_j\right\}.$$

Фигурирующие здесь параметры суть

$$a_k = \mathsf{M}\xi_k, \quad b_{kj} = \mathsf{M}(\xi_k - a_k)(\xi_j - a_j), \quad k, j = 1, \ldots, n.$$

В случае, когда матрица $b = (b_{kj})$ является *невырожденной*, соответствующее совместное распределение величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ задается плотностью распределения вида

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(\det c)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{n} c_{kj}(x_k - a_k)(x_j - a_j)\right\},$$

где матрица $c = (c_{kj})$ с определителем $\det c$ является обратной к матрице $b = (b_{kj})$. Совместное распределение вероятностей любых величин $\eta_1, \ldots, \eta_m$, каждая из которых представляет собой линейную комбинацию величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, снова являются *гауссовским*.

Действительный случайный процесс $\xi = \xi(t)$ называется *гауссовским*, если гауссовскими являются конечномерные распределения $\mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n}$, т. е. если характеристические функции совместных распределений вероятностей для значений $\xi_1(t), \ldots, \xi(t_n)$

этого случайного процесса имеют вид

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n)=\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}A(t_k)u_k-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}B(t_k,t_j)u_ku_j\right\},$$

где $A(t)=\mathsf{M}\xi(t)$ — математическое ожидание и

$$B(t,s)=\mathsf{M}[\xi(t)-a(t)][\xi(s)-a(s)]$$

есть корреляционная функция.

Распределение вероятностей гауссовского случайного процесса $\xi=\xi(t)$ полностью задается двумя его характеристиками: математическим ожиданием $A(t)$ и корреляционной функцией $B(t,s)$ $(t,s\in T)$. Для любых таких функций $A(t)$ и $B(t,s)$ существует непосредственно заданный гауссовский случайный процесс $\xi=\xi(t)$ такой, что

$$A(t)=\mathsf{M}\xi(t),\quad B(t,s)=\mathsf{M}[\xi(t)-A(t)][\xi(s)-A(s)].$$

Обобщенные гауссовские процессы. Действительный обобщенный случайный процесс $\xi=\langle u,\xi\rangle$ на линейном пространстве U называется *гауссовским*, если его характеристический функционал $\varphi_\xi=\varphi_\xi(u)$ имеет вид

$$\varphi_\xi(u)=\exp\left\{iA(u)-\frac{1}{2}B(u,v)\right\},$$

где $A(u)=\mathsf{M}\langle u,\xi\rangle$ — математическое ожидание обобщенного процесса $\xi=\langle u,\xi\rangle$,

$$B(u,v)=\mathsf{M}[\langle u,\xi\rangle-A(u)][\langle v,\xi\rangle-A(v)]$$

есть его корреляционный функционал. Гауссовость обобщенного процесса $\xi=\langle u,\xi\rangle$ означает, что все случайные величины $\langle u,\xi\rangle$ $(u\in U)$ имеют гауссовское распределение вероятностей.

Пусть U — счетно-гильбертово пространство со скалярными произведениями $(u,v)_p$ $(p=1,2,\ldots)$, и пусть $\xi=\langle u,\xi\rangle$ — обобщенный непосредственно заданный гауссовский процесс на пространстве U. Математическое ожидание $A(u)$ является линейным непрерывным функционалом на U; существуют такое p и такой ядерный оператор B в гильбертовом пространстве U со скалярным произведением $(u,v)=(u,v)_p$, что корреляционный функционал $B(u,v)$ имеет вид

$$B(u,v)=(Bu,v)_p,\quad u,v\in U.$$

Для любых таких $A(u)$ и $B(u,v)$ существует непосредственно заданный гауссовский обобщенный процесс $\xi=\langle u,\xi\rangle$ с математическим ожиданием $A(u)$ и корреляционным функционалом $B(u,v)$.

Пример. Пусть $\xi=\xi(t)$ — действительный гауссовский случайный процесс на отрезке $T=[a,b]$. Предположим, что процесс

$\xi(t)$ измерим, причем $\int\limits_a^b \mathsf{M}\,[\xi(t)]^2\,dt < \infty$. Тогда почти все траектории $\xi(\omega, t)$ будут принадлежать пространству $U = L^2(T)$ интегрируемых в квадрате функций $u = u(t)$ на отрезке T со скалярным произведением $(u_1, u_2) = \int\limits_a^b u_1(t)\,u_2(t)\,dt$. Формула

$$\langle u, \xi\rangle = \int\limits_a^b u(t)\,\xi(\omega, t)\,dt, \quad u \in U,$$

задает обобщенный гауссовский случайный процесс на этом пространстве $U = L^2(T)$. При этом математическое ожидание и корреляционный функционал обобщенного процесса $\xi = \langle u, \xi\rangle$ выражаются формулами

$$A(u) = \int\limits_a^b u(t)\,A(t)\,dt,$$

$$B(u_1, u_2) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b B(s, t)\,u_1(s)\,u_2(t)\,ds\,dt,$$

где $A(t)$ и $B(s, t)$ — соответствующие математическое ожидание и корреляционная функция исходного процесса $\xi = \xi(t)$ на отрезке $T = [a, b]$. Аналогичным образом можно построить обобщенный процесс $\xi = \langle u, \xi\rangle$ на ядерном пространстве U всех бесконечно дифференцируемых функций $u = u(t)$, обращающихся в нуль вне интервала (a, b), со скалярными произведениями

$$(u_1, u_2)_p = \int\limits_a^b \sum_{k=0}^{p} u_1^{(k)}(t)\,u_2^{(k)}(t)\,dt, \quad p = 0, 1, \ldots$$

Плотности произвольных гауссовских распределений. Пусть $\xi = \xi(t)$ $(t \in T)$ — произвольный гауссовский процесс на том или ином вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, где σ-алгебра событий $\mathfrak{A}$ порождается всеми величинами $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ $(\omega \in \Omega$; параметр t пробегает множество $T)$ и, следовательно, вероятностная мера P на $\mathfrak{A}$ однозначно задается конечномерными распределениями процесса $\xi = \xi(t)$ $(t \in T)$, которые в гауссовском случае определяются средним значением $A(t)$ $(t \in T)$ и корреляционной функцией $B(s, t)$ $(s, t \in T)$. Пусть $\widetilde{\mathsf{P}}$ — другая вероятностная мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, по отношению к которой случайный процесс $\xi = \xi(t)$ $(t \in T)$ также является гауссовским со средним значением $\widetilde{A}(t)$ $(t \in T)$ и корреляционной функцией $\widetilde{B}(s, t)$ $(s, t \in T)$. Любые такие вероятностные меры P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ либо эквивалентны, либо перпендикулярны.

При описании общих условий эквивалентности и соответствующей плотности вероятности $p(\omega)=\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega)/\mathsf{P}(d\omega)$, не ограничивая общности, можно считать $A(t)\equiv 0$, так как можно перейти к процессу $\xi(t)-A(t)$ $(t\in T)$, имеющему по отношению к P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ средние значения, равные 0 и $a(t)=\widetilde{A}(t)-A(t)$ $(t\in T)$. Считая $A(t)\equiv 0$, удобно ввести гильбертово пространство H — линейную оболочку всех величин $\xi(t)$,— задав в нем скалярное произведение $\langle\eta_1, \eta_2\rangle=\mathsf{M}\eta_1\eta_2$ $(\eta_1, \eta_2\in H$; M — символ математического ожидания по распределению $\mathsf{P})$. Это скалярное произведение определяется корреляционной функцией $B(s, t)=\langle\xi(s), \xi(t)\rangle$ $(s, t\in T)$. Среднее значение $a(t)$ $(t\in T)$ и корреляционная функция $\widetilde{B}(s, t)$ $(s, t\in T)$ определяют в H линейный функционал $a(\eta)=\widetilde{\mathsf{M}}\eta$ $(\eta\in H)$ и положительный билинейный функционал $\widetilde{B}(\eta_1, \eta_2)=\widetilde{\mathsf{M}}[\eta_1-a(\eta_1)][\eta_2-a(\eta_2)]$ $(\eta_1, \eta_2\in H)$; по существу, описанный выше прием есть переход от параметра $t\in T$ к новому параметру $\eta\in H$.

Распределения P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда среднее значение $a(\eta)$ $(\eta\in H)$ и корреляционная функция $\widetilde{B}(\eta_1, \eta_2)$ $(\eta_1, \eta_2\in H)$ являются непрерывными функционалами в гильбертовом пространстве H:

$$a(\eta)=\langle\eta_0, \eta\rangle, \quad \eta\in H,$$

где η_0 — некоторая величина из пополнения $\overline{H}$ пространства H, и

$$\widetilde{B}(\eta_1, \eta_2)=\langle\widetilde{B}\eta_1, \eta_2\rangle, \quad \eta_1, \eta_2\in H,$$

где $\widetilde{B}$ — некоторый положительный оператор в $\overline{H}$, причем *корреляционный оператор* $\widetilde{B}$ является невырожденным и разность $I-\widetilde{B}$ есть оператор Гильберта — Шмидта.

При $B=\widetilde{B}$ плотность эквивалентных распределений есть

$$\frac{\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega)}{\mathsf{P}(d\omega)}=\exp\left\{\eta_0(\omega)-\frac{1}{2}\langle\eta_0, \eta_0\rangle\right\};$$

при $a\equiv 0$ плотность может быть представлена как

$$\frac{\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega)}{\mathsf{P}(d\omega)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_1\ldots\sigma_n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_k^{-2}-1\right)\eta_k(\omega)^2\right\},$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — ортонормированная система всех собственных функций оператора $I-\widetilde{B}$ с ненулевыми собственными значениями $1-\sigma_1^2, 1-\sigma_2^2, \ldots$

Пример. Пусть $\xi=\xi(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ — гауссовский процесс с распределением $\widetilde{\mathsf{P}}$, эквивалентным распределению P винеровского процесса. Это имеет место тогда и только тогда, когда случайный процесс $\xi = \xi(t)$ представим в виде

$$\xi(t) = \eta(t) - \int_0^t \left[\int_0^s c(s, u)\, d\eta(u) \right] ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $\eta(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — винеровский процесс и $c(s, t)$ — ядро Гильберта — Шмидта [135]:

$$\int_0^1 \int_0^1 c(s, t)^2\, ds\, dt < \infty.$$

Гауссовские процессы как кривые в гильбертовом пространстве. Гауссовские величины ξ_1 и ξ_2 независимы тогда и только тогда, когда они не коррелированы. Если $\mathsf{M}\xi_1 = \mathsf{M}\xi_2 = 0$, то независимость равносильна тому, что величины ξ_1 и ξ_2, рассматриваемые как элементы гильбертова пространства $L^2(\Omega)$, ортогональны:

$$\mathsf{M}\xi_1\xi_2 = (\xi_1, \xi_2) = 0.$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционной матрицей $b = (b_{kj})$ $(b_{kj} = \mathsf{M}\xi_k\xi_j,\ k, j = 1, 2, \ldots, n)$. Условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\xi_1 | \xi_2, \ldots, \xi_n)$ представляет собой элемент подпространства H в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ (подпространство H порождается величинами $\xi_2, \ldots, \xi_n$):

$$\mathsf{M}(\xi_1 | \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{k=2}^{n} c_k \xi_k,$$

где коэффициенты $c_2, \ldots, c_n$ могут быть найдены из условий ортогональности разности $\xi_1 - \sum_{k=2}^{n} c_k \xi_k$ к подпространству H:

$$\sum_{k=2}^{n} c_k b_{kj} = b_{1j}, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Условное распределение вероятностей случайной величины ξ_1 (относительно $\xi_2, \ldots, \xi_n$) является гауссовским; соответствующие математическое ожидание и дисперсия суть

$$a = \mathsf{M}(\xi_1 | \xi_2, \ldots, \xi_n),$$
$$\sigma^2 = \mathsf{M}[\xi_1 - \mathsf{M}(\xi_1 | \xi_2, \ldots, \xi_n)]^2.$$

Пусть $\xi = \xi(t)$ — гауссовский случайный процесс на произвольном множестве T с нулевым математическим ожиданием. Пусть $H(S)$ — замкнутая линейная оболочка величин $\xi(t)$ $(t \in S)$, причем $S \subseteq T$ (т. е. $H(S)$ — подпространство в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$). Условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\xi(t) | \xi(s), s \in S)$ есть проекция элемента $\xi(t)$ на подпространство $H(S)$. Условное распределение величины $\xi(t)$ является гауссовским; соответствующие математическое ожидание и дисперсия суть

$$a = \mathsf{M}(\xi(t) \mid \xi(s),\ s \in S),$$
$$\sigma^2 = \mathsf{M}\{[\xi(t) - a]^2 \mid \xi(s),\ s \in S\}.$$

Пусть S_1 и S_2 — некоторые подмножества множества T, $H(S_1)$ и $H(S_2)$ — соответствующие подпространства гильбертова пространства $L^2(\Omega)$. Положим

$$r = \sup \mathsf{M} h_1 h_2,$$

где sup берется по всем $h_1 \in H(S_1)$ и $h_2 \in H(S_2)$ таким, что $\mathsf{M}h_1^2 = \mathsf{M}h_2^2 = 1$. Имеет место равенство

$$r = \sup \mathsf{M}\eta_1\eta_2,$$

где sup берется по всем случайным величинам $\eta_1 \in L^2(\Omega, S_1)$ и $\eta_2 \in L^2(\Omega, S_2)$ таким, что $\mathsf{M}\eta_1 = \mathsf{M}\eta_2 = 0$, $\mathsf{M}\eta_1^2 = \mathsf{M}\eta_2^2 = 1$ (здесь $L^2(\Omega, S)$ — подпространство в $L^2(\Omega)$, образованное всеми случайными величинами $\eta = \eta(\omega)$, измеримыми относительно соответствующей σ-алгебры $\mathfrak{A}(S)$ $(S \subseteq T)$; $\mathfrak{A}(S)$ есть σ-алгебра событий, порожденная всевозможными событиями вида $\{\xi(s) \in B\}$ $(s \in S)$; B — борелевское множество на действительной прямой).

Пусть

$$\alpha = \sup [\mathsf{P}(A_1A_2) - \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)],$$

где sup берется по всем событиям $A_1 \in \mathfrak{A}(S_1)$ и $A_2 \in \mathfrak{A}(S_2)$. Имеют место следующие соотношения между α и r:

$$\alpha \leqslant r \leqslant 2\pi\alpha.$$

Комплексные гауссовские процессы. Под комплексным гауссовским процессом $\xi(t)$ $(t \in T)$ обычно понимают совокупность комплексных случайных величин

$$\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$$

с гауссовскими действительной и мнимой частями $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, совместные распределения которых при любом наборе моментов времени t являются гауссовскими. Иногда накладывается еще дополнительное условие

$$\mathsf{M}\xi(s)\xi(t) = A(s)A(t),$$

где $A(t) = \mathsf{M}\xi(t)$. Это условие вводится для того, чтобы сохранить то свойство обычных гауссовских случайных величин, согласно которому некоррелированность равносильна независимости.

3. Мартингалы и стохастические интегралы. Действительный случайный процесс $\xi = \xi(t)$ на множестве T действительной прямой называется *мартингалом*, если $\mathsf{M}|\xi(t)| < \infty$ и с вероятностью 1

$$\mathsf{M}\{\xi(t) \mid \mathfrak{A}(-\infty, s)\} = \xi(s)$$

при всех s, $t \in T$ $(s \leqslant t)$, где условное математическое ожидание берется относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}(-\infty, s)$, порожденной всевозможными событиями вида $\{\xi(u) \leqslant x\}$ $(u \leqslant s,\ u \in T)$.

Пример. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ — произвольное пространство элементарных событий с распределением вероятностей $\mathsf{P} = \mathsf{P}(A)$ $(A \in \mathfrak{A})$, и пусть $\widetilde{\mathsf{P}} = \widetilde{\mathsf{P}}(A)$ $(A \in \mathfrak{A})$ — некоторое другое распределение вероятностей. Рассмотрим монотонную последовательность σ-алгебр $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}$, на каждой из которых вероятностная мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ абсолютно непрерывна относительно P, и пусть $p_n(\omega) = \widetilde{\mathsf{P}}(d\omega)/\mathsf{P}(d\omega)$ — соответствующие плотности. Последовательность случайных величин $\xi = \xi(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, определенных как

$$\xi(\omega, n) = p_n(\omega), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

является мартингалом.

Пример. Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — некоторая действительная случайная величина, имеющая математическое ожидание, и $\mathfrak{A}_t$ — некоторое семейство σ-алгебр событий, зависящих от действительного параметра $t \in T$, таких, что $\mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_t$ при любых s, $t \in T$ $(s \leqslant t)$. Тогда случайный процесс $\xi = \xi(t)$, определенный на множестве T как

$$\xi(t) = \mathsf{M}\{\xi \mid \mathfrak{A}_t\},$$

будет мартингалом.

Теоремы о сходимости. Для случайного процесса $\xi = \xi(t)$, являющегося мартингалом, математическое ожидание $\mathsf{M}|\xi(t)|$ — монотонно неубывающая функция от $t \in T$. Пусть $\xi = \xi(t)$ — сепарабельный мартингал и $b = \sup_{t \in T} t$. Если

$$\sup_{t \in T} \mathsf{M}\,|\xi(t)| = M < \infty,$$

то с вероятностью 1 существует предел

$$\xi = \lim_{t \to b} \xi(t).$$

При этом предельная случайная величина $\xi = \xi(b)$ такова, что условия:

а) $\mathsf{M}|\xi(b)| = M$;

б) $\lim_{t \to b} \mathsf{M}\,|\xi(t) - \xi(b)| = 0$;

в) случайные величины $\xi(t)$ $(t \in T)$ равномерно интегрируемы;

являются равносильными.

При выполнении одного из них случайный процесс $\xi = \xi(t)$ на расширенном множестве $T \cup b$ будет мартингалом и представляется в виде

$$\xi(t) = \mathsf{M}(\xi \mid \mathfrak{A}(-\infty, t)), \quad t \in T \cup b.$$

При этом если для некоторого $\alpha > 1$

$$\sup_{t \in T} \mathsf{M} |\xi(t)|^\alpha < \infty,$$

то

$$\mathsf{M} |\xi(b)|^\alpha < \infty, \quad \lim_{t \to b} \mathsf{M} |\xi(t) - \xi(b)|^\alpha = 0.$$

Полумартингалы. Действительный случайный процесс $\xi = \xi(t)$ на множестве T действительной прямой называется *полумартингалом*, если $\mathsf{M}|\xi(t)| < \infty$ и

$$\mathsf{M}(\xi(t) | \mathfrak{A}(-\infty, s)) \geqslant \xi(s)$$

при любых $s, t \in T$ $(s \leqslant t)$.

Если $\xi = \xi(t)$ — мартингал, то случайный процесс $\eta(t) = |\xi(t)|$ будет полумартингалом; для любой действительной непрерывной и выпуклой функции $\varphi = \varphi(x)$ действительной переменной x такой, что $\mathsf{M}|\varphi[\xi(b)]| < \infty$, случайный процесс $\eta(t) = \varphi[\xi(t)]$ будет полумартингалом на множестве $T \cap (-\infty, b]$. Описанным условиям удовлетворяет, например, функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \log_c x \text{ при } x > 0, \\ 0 \quad \text{ при } x \leqslant 0, \end{cases} \quad c > 1.$$

Пусть $\xi = \xi(t)$ — сепарабельный полумартингал на множестве T и $\sup_{t \in T} \mathsf{M}|\xi(t)| < \infty$. Тогда с вероятностью 1 существует предел $\xi = \lim_{t \to b} \xi(t)$ $\left(b = \sup_{t \in T} t\right)$.

Мартингалы и стохастические меры. Пусть $\xi = \xi(t)$ — мартингал на действительной прямой $-\infty < t < \infty$, причем $\mathsf{M}|\xi(t)|^2 < \infty$. Положим при $\Delta = (s, t]$

$$\eta(\Delta) = \xi(t) - \xi(s).$$

Для любого Δ математическое ожидание $\mathsf{M}\eta(\Delta)$ равно нулю, и для любых непересекающихся полуинтервалов Δ_1, Δ_2

$$\mathsf{M}[\eta(\Delta_1)\eta(\Delta_2)] = 0.$$

Более того, при $\Delta_1 = (s_1, t_1]$, $\Delta_2 = (s_2, t_2]$ и $t_2 \leqslant s_1$

$$\mathsf{M}[\eta(\Delta_1)\eta_2] = 0$$

для любой случайной величины $\eta_2 = \eta_2(\omega)$, измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}(s_2, t_2)$.

Функция $m = m(\Delta)$, определенная как $m(\Delta) = \mathsf{M}[\eta(\Delta)]^2$, представляет собой распределение на полукольце всех полуинтервалов $\Delta = (s, t]$ и продолжается в борелевскую меру. Соответствующая стохастическая функция $\eta = \eta(\Delta)$ на полуинтервалах $\Delta = (s, t]$ может быть продолжена в стохастическую меру на σ-алгебре всех измеримых по отношению к m множеств на действительной прямой; при этом соотношения, указанные выше для полуинтервалов Δ_1 и Δ_2, останутся справедливыми и для произвольных измеримых множеств Δ_1, Δ_2 таких, что $\Delta_1 \in (s_1, t_1]$ и $\Delta_2 \in (s_2, t_2]$.

Пример. *Гауссовские стохастические меры.* Пусть $m = m(\Delta)$ — произвольная конечная борелевская мера на действительной прямой $-\infty < t < \infty$. Функция $B(\Delta_1, \Delta_2) = m(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ от параметров Δ_1, Δ_2 — измеримых (по отношению к m) множеств — удовлетворяет условию положительной определенности:

$$\sum_{k,j=1}^{n} \lambda_k \lambda_j B(\Delta_k, \Delta_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum \lambda_k \varphi_{\Delta_k}(x)\right]^2 m(dx) \geqslant 0,$$

где

$$\varphi_\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Delta, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta. \end{cases}$$

Существует гауссовская случайная функция $\eta = \eta(\Delta)$ с нулевым математическим ожиданием $A(\Delta) = \mathsf{M}\eta(\Delta) = 0$ и корреляционной функцией $B(\Delta_1, \Delta_2) = \mathsf{M}\eta(\Delta_1)\eta(\Delta_2)$. Эта функция $\eta = \eta(\Delta)$ представляет собой стохастическую меру на σ-алгебере измеримых множеств Δ действительной прямой $-\infty < t < \infty$ такую, что для любых непересекающихся множеств Δ_1 и Δ_2 соответствующие значения $\eta(\Delta_1)$ и $\eta(\Delta_2)$ независимы. Для любой действительной, интегрируемой в квадрате функции $\varphi = \varphi(t)$ случайный процесс $\xi = \xi(t)$ вида

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(s)\, \eta(ds), \quad -\infty < t < \infty,$$

представляет собой мартингал.

В случае, когда $m = m(\Delta)$ — лебеговская мера на прямой, соответствующая стохастическая функция $\eta = \eta(\Delta)$ называется *стохастической винеровской мерой.* Отвечающий ей случайный процесс $\xi = \xi(t)$ вида

$$\xi(t) = \int_{a}^{t} \eta(ds), \quad a \leqslant t < \infty,$$

называется *винеровским процессом* или *процессом броуновского движения.* Всякий мартингал $\xi = \xi(t)$ на полуоси $a \leqslant t < \infty$ такой, что его траектории непрерывны с вероятностью 1 и при любых $a \leqslant s \leqslant t < \infty$

$$\mathsf{M}\{[\xi(t) - \xi(s)]^2 | \mathfrak{A}(-\infty, s)\} = t - s$$

является процессом броуновского движения.

Стохастические интегралы. Пусть $\eta = \eta(\Delta)$ — стохастическая мера на измеримых подмножествах Δ множества T действительной прямой такая, что

$$\mathsf{M}\eta(\Delta)=0, \quad \mathsf{M}[\eta(\Delta)]^2=m(\Delta)<\infty,$$

и при любых $\Delta_1 \subseteq (s_1, t_1]$ и $\Delta_2=(s_2, t_2]$ $(t_2 \leqslant s_1)$

$$\mathsf{M}\{\eta(\Delta_1)\,|\,\mathfrak{A}(\Delta_2)\}=0,$$

где $\mathfrak{A}(\Delta_2)$ означает σ-алгебру событий, порожденную всевозможными событиями вида $\{\eta(\Delta)\leqslant y\}$ $(\Delta \subseteq \Delta_2 \cap T)$.

Пусть $\varphi=\varphi(t)$ — случайная функция на множестве T, представляющая собой измеримый случайный процесс такой, что при каждом $t \in T$ значения $\varphi(t)=\varphi(\omega, t)$ измеримы относительно соответствующей σ-алгебры $\mathfrak{A}(-\infty, t)$, и, кроме того,

$$\int_T \mathsf{M}\,|\varphi(t)|^2\, m(dt)<\infty,$$

где $m=m(\Delta)$ — мера на множестве T, $m(\Delta)=\mathsf{M}[\eta(\Delta)]^2$.

Стохастическим интегралом «простой» случайной функции $\varphi=\varphi(t)$ описанного типа, значения которой $\varphi(t)=\varphi(t, \omega)$ являются постоянными случайными величинами на интервалах $\Delta_k=(t_k, t_{k-1}]$ $(k=1, \ldots, n)$:

$$\varphi(t, \omega)=\varphi_k(\omega) \text{ при } t \in \Delta_k,$$

называется выражение

$$\int_T \varphi(t)\,\eta(dt)=\sum_k \varphi_k(\omega)\,\eta(\Delta_k).$$

Так определенные стохастические интегралы обладают следующими свойствами:

$$\mathsf{M}\int_T \varphi(t)\,\eta(dt)=0,$$

$$\mathsf{M}\left[\int_T \varphi_1(t)\,\eta(dt)\int_T \varphi_2(t)\,\eta(dt)\right]=\int_T \mathsf{M}\,[\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)]\,m(dt).$$

В частности,

$$\mathsf{M}\left[\int_T \varphi_1(t)\,\eta(dt)-\int_T \varphi_2(t)\,\eta(dt)\right]^2=\int_T \mathsf{M}\,[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]^2\, m(dt).$$

Всякая случайная функция $\varphi(t)$ описанного выше типа является пределом некоторой последовательности «простых» случайных функций $\varphi_n(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_T \mathsf{M}\,[\varphi_n(t)-\varphi(t)]^2\, m(dt)=0.$$

Соответствующая последовательность стохастических интегралов

$\int\limits_T \varphi_n(t)\,\eta(dt)$ $(n=1, 2, \ldots)$, сходится в среднем квадратичном к некоторому пределу

$$\int\limits_T \varphi(t)\,\eta(dt)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_T \varphi_n(t)\,\eta(dt),$$

который и называется *стохастическим интегралом* случайной функции $\varphi=\varphi(t)$.

Для винеровской случайной меры $\eta(dt)$ можно определить стохастический интеграл $\int\limits_T \varphi(t)\,d\eta(t)$ на отрезке $T=[a, b]$ для случайных функций $\varphi(t)$ $(t\in T)$, удовлетворяющих лишь условию

$$\int\limits_T \varphi(t)^2\,dt<\infty$$

с вероятностью 1. При этом предполагается, что значения $\varphi(t)$ и $\eta(t)$ как случайные величины измеримы относительно соответствующих σ-алгебр $\mathfrak{A}(-\infty, t)$, а величины $\eta(\Delta)$ $(\Delta\subseteq[t, b])$ не зависят от $\mathfrak{A}(-\infty, t)$ $(t\in T)$; здесь $\mathfrak{A}(-\infty, t)$ $(t\in T)$ может быть любым монотонным семейством: $\mathfrak{A}(-\infty, s)\subseteq\mathfrak{A}(-\infty, t)$ при $s\leqslant t$. Именно, для последовательности простых функций $\varphi_n(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$ таких, что по вереоятности

$$\int\limits_T |\varphi(t)-\varphi_n(t)|^2\,dt\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

существует предел по вероятности

$$\int\limits_T \varphi(t)\,\eta(dt)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_T \varphi_n(t)\,\eta(dt).$$

Удобно вместо стохастической меры рассматривать винеровский процесс $\eta(t)=\int\limits_a^t d\eta(s)$ и соответственно обозначать стохастический интеграл как $\int\limits_a^b \varphi(t)\,d\eta(t)$.

Пусть

$$\xi(t)=\xi(a)+\int\limits_a^t \varphi(s)\,ds+\int\limits_a^t \psi(s)\,d\eta(s),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

есть случайный процесс, заданный с помощью определенного выше стохастического интеграла по винеровскому процессу $\eta=\eta(t)$. При каждом $t\in T$ значения $\xi(t)$ представляют собой случайные величины, определенные лишь с вероятностью 1; их всегда можно определить таким образом, чтобы случайная функция $\xi=\xi(t)$ на множестве T была сепарабельным измеримым случайным процессом.

Указанное интегральное представление случайного процесса $\xi=\xi(t)$ условно можно записать в дифференциальной форме:

$$d\xi(t)=\varphi(t)\,dt+\psi(t)\,d\eta(t).$$

Это выражение называется *стохастическим дифференциалом*.

Укажем некоторые классы случайных процессов $\xi=\xi(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$, имеющих стохастический дифференциал. Это — марковские диффузионные процессы с коэффициентами сноса $\varphi(t,\ \xi(t))$ и диффузии $\psi(t,\ \xi(t))$ (при определенных аналитических условиях на функции $\varphi(t,\ x)$ и $\psi(t,\ x)$ — см. гл. V, § 4, п. 1); в этом случае

$$d\xi(t)=\varphi(t,\ \xi(t))\,dt+\psi(t,\ \xi(t))\,d\eta(t).$$

Это — случайные процессы с распределениями вероятностей, эквивалентными распределению винеровского процесса; в этом случае

$$d\xi(t)=\varphi(t)\,dt+d\eta(t),$$

где $\varphi(t)$ зависит, вообще говоря, от всей траектории случайного процесса $\xi(s)$ $(s\leqslant t)$ до момента t. Это, наконец, непрерывные процессы, являющиеся мартингалом по отношению к некоторому винеровскому процессу $\eta=\eta(t)$; в этом случае

$$d\xi(t)=\psi(t)\,d\eta(t),$$

где $\psi(t)$ зависит, вообще говоря, от всей траектории случайного процесса $\eta(s)$ $(s\leqslant t)$.

Формула замены переменной. Пусть $\eta=\eta(\Delta)$ — стохастическая винеровская мера и $\xi=\xi(t)$ — случайный процесс, стохастический дифференциал которого имеет вид

$$d\xi(t)=\varphi(t)\,dt+\psi(t)\,d\eta(t).$$

Пусть действительная функция $f(t,\ x)$ двух переменных t и x имеет непрерывные первую производную по t и вторую производную по x. Тогда случайный процесс $\tilde\xi=\tilde\xi(t)$ вида $\tilde\xi(t)=f[t,\ \xi(t)]$ имеет стохастический дифференциал (см., например, [126])

$$d\tilde\xi(t)=\tilde\varphi(t)\,dt+\tilde\psi(t)\,\eta(dt),$$

где

$$\tilde\varphi(t)=\frac{\partial}{\partial t}f[t,\ \xi(t)]+\frac{\partial}{\partial x}f[t,\ \xi(t)]\,\varphi(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f[t,\ \xi(t)]\,[\psi(t)]^2,$$

$$\tilde\psi(t)=\frac{\partial}{\partial x}f[t,\ \xi(t)]\,\psi(t).$$

4. Марковские случайные процессы. Случайный процесс $\xi=\xi(t)$ на множестве T действительной прямой в фазовом пространстве $(E,\ \mathfrak{B})$ называется *марковским*, если условные вероятности $\mathsf{P}\ (A\,|\,\mathfrak{A}(-\infty,\ s))$ событий $A\in\mathfrak{A}(t,\ \infty)$ относительно

σ-алгебры $\mathfrak{A}(-\infty, s)$ таковы, что при $s \leqslant t$ с вероятностью 1

$$\mathsf{P}(A|\mathfrak{A}(-\infty, s)) = \mathsf{P}(A|\xi(s))$$

(здесь $\mathfrak{A}(u, v)$ означает σ-алгебру, порождаемую всевозможными событиями вида $\{\xi(t)\in B\}$ $(t\in[u, v]\cap T,\ B\in\mathfrak{B})$). Если параметр t интерпретировать как время, то описанное марковское свойство случайного процесса $\xi=\xi(t)$ состоит, грубо говоря, в том, что поведение процесса после момента t при фиксированном состоянии $x=\xi(t)$ не зависит от поведения процесса до момента t. Точнее, для любых событий $A_1\in\mathfrak{A}(-\infty, t_1)$ и $A_2\in\mathfrak{A}(t_2, \infty)$ и при любом $t\in T$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ с вероятностью 1

$$\mathsf{P}(A_1A_2|\xi(t)) = \mathsf{P}(A_1|\xi(t))\,\mathsf{P}(A_2|\xi(t)).$$

Выполнение марковского свойства существенным образом зависит от выбора фазового пространства рассматриваемого процесса. Поясним это на следующем примере. Пусть действительный случайный процесс $\xi=\xi(t)$ на отрезке $T=[a, b]$ описывается дифференциальным уравнением первого порядка

$$\xi' = f(t, \xi).$$

Если фиксировать значение $\xi(t_0)=x$, то при каждом элементарном исходе ω траектория $\xi(\omega, t)$ $(t\geqslant t_0)$ рассматриваемого процесса однозначно определяется дифференциальным уравнением $\xi'(\omega, t)=f[t, \xi(\omega, t)]$ и «начальным условием» $\xi(\omega, t_0)=x$, так что процесс $\xi=\xi(t)$ будет марковским. Если же рассматриваемый процесс $\xi=\xi(t)$ описывается дифференциальным уравнением n-го порядка:

$$\xi^{(n)} = f[t, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n-1)}],$$

то он уже не будет марковским; марковское свойство будет выполнено, если рассматривать n-мерный случайный процесс $\{\xi(t), \xi^{(1)}(t), \ldots, \xi^{(n-1)}(t)\}$, компонентами которого являются исходный случайный процесс $\xi(t)$ и все его производные $\xi^{(k)}(t)$ до порядка $n-1$ включительно.

Еще один пример. Пусть $\xi=\xi(t)$ — случайный процесс на действительной прямой $-\infty<t<\infty$ в произвольном фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$, X — пространство всех функций $x=x(s)$ со значениями в E, каждая из которых определена на некотором интервале $-\infty<s\leqslant t$, и пусть $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра, порождаемая всевозможными цилиндрическими множествами

$$\{x(t_1)\in B_1, \ldots, x(t_n)\in B_n\},$$

где $B_1, \ldots, B_n\in\mathfrak{B}$. Обозначим символом $\xi(\omega, s)$ $(-\infty<s\leqslant t)$ траекторию исходного случайного процесса ξ на полуоси $-\infty<s\leqslant t$ ($\xi(\omega, s)$ — случайная величина со значениями в новом фазовом пространстве $(X, \mathfrak{A})$). Если определить «расширенный» случайный процесс в фазовом пространстве $(X, \mathfrak{A})$, взяв за его значение в момент времени t соответствующую траекторию

$\xi(\omega;\ s)$ $(-\infty < s \leqslant t)$, то такой процесс будет обладать марковским свойством.

Условные распределения и переходные функции. Функция $P(s,\ x,\ t,\ B)$ переменных $s,\ t \in T$ $(s \leqslant t)$ и $x \in E$, $B \in \mathfrak{B}$ называется *переходной функцией* марковского случайного процесса $\xi = \xi(t)$ на множестве T в фазовом пространстве $(E,\ \mathfrak{B})$, если эта функция при фиксированных $s,\ t \in T$ и $x \in E$ представляет собой распределение вероятностей на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ и при фиксированных $s,\ t \in T$ и $B \in \mathfrak{B}$ является измеримой функцией от $x \in E$ такой, что с вероятностью 1

$$P(s,\ \xi(s),\ t,\ B) = \mathsf{P}\{\xi(t) \in B \mid \xi(s)\},$$

причем

$$P(s,\ x,\ s,\ B) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in B, \\ 0 & \text{при } x \notin B. \end{cases}$$

Грубо говоря, $P(s,\ x,\ t,\ B)$ есть вероятность того, что из состояния $x = \xi(s)$ процесс за время $t - s$ перейдет в одно из состояний множества B.

Переходная функция $P(s,\ x,\ t,\ B)$ всегда существует, если фазовое пространство $(E,\ \mathfrak{B})$ сепарабельно, а распределения вероятностей $\mathsf{P}_t(B) = \mathsf{P}\{\xi(t) \in B\}$ $(B \in \mathfrak{B})$ являются совершенными мерами. Эта функция для любых $s,\ t \in T$ и $B \in \mathfrak{B}$ и для почти всех $x \in E$ (относительно соответствующих распределений P_t) удовлетворяет соотношению

$$P(s,\ x,\ t,\ B) = \int_E P(s,\ x,\ u,\ dy)\, P(u,\ y,\ t,\ B), \quad s \leqslant u \leqslant t,$$

которое называется *уравнением Колмогорова — Чепмена.*

Конечномерные распределения вероятностей случайного процесса $\xi = \xi(t)$ с переходной функцией $P(s,\ x,\ t,\ B)$ выражаются следующей формулой:

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ \ldots,\ B_n) = \int_{B_1}\int_{B_2}\ldots\int_{B_{n-1}} P(t_{n-1},\ x_{n-1},\ t_n,\ B_n)\,\times$$
$$\times\, P(t_{n-2},\ x_{n-2},\ t_{n-1},\ dx_{n-1})\ldots P(t_1,\ x_1,\ t_2,\ dx_2)\,\mathsf{P}_{t_1}(dx_1).$$

Пусть случайный процесс $\xi = \xi(t)$ на множестве T в фазовом пространстве $(E,\ \mathfrak{B})$ имеет переходную функцию $P(s,\ x,\ t,\ B)$, удовлетворяющую уравнению Колмогорова — Чепмена при всех $x \in E$, и пусть множество $\xi(\Omega)$ функционального пространства $X = E^T$, образованное всеми траекториями $\xi(\omega,\ t)$ — функциями на T со значениями в E $(\omega \in \Omega)$, — входит в σ-алгебру, порожденную полукольцом цилиндрических множеств $\mathfrak{B}^T$. Тогда существует семейство распределений вероятностей $\mathsf{P}_{sx}=\mathsf{P}_{sx}(A)$, каждое из которых определено на соответствующей σ-алгебре событий $\mathfrak{A}(s,\infty)$ пространства элементарных исходов Ω таких, что

$$\mathsf{P}_{sx}\{\xi(t)\in B\}=P(s,\ x,\ t,\ B)$$

при любых $s,t\in T$ $(s\leqslant t)$ и $x\in E$, $B\in\mathfrak{B}$. Кроме того, с вероятностью 1 (относительно P_{sx})

$$\mathsf{P}_{sx}\{\xi(t)\in B|\mathfrak{A}(s,\ u)\}=P(u,\ \xi(u),\ t,\ B)$$

при любых $u\in T$ $(s\leqslant u\leqslant t)$.

Пусть T — произвольное множество на прямой, $(E,\ \mathfrak{B})$ — произвольное измеримое пространство и $P(s,\ x,\ t,\ B)$ — такая функция переменных $s,\ t\in T$ $(s\leqslant t)$ и $x\in E$, $B\in\mathfrak{B}$, которая при фиксированных $s,\ t\in T$ и $x\in E$ задает распределение вероятностей на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ пространства E (предполагается, что эта функция измерима по x при любых фиксированных $s,\ t\in T$ и $B\in\mathfrak{B}$ и удовлетворяет уравнению Колмогорова — Чепмена при $x\in E$). Всегда существует непосредственно заданный случайный марковский процесс $\xi=\xi(t)$ на множестве T в фазовом пространстве $(E,\ \mathfrak{B})$ с такой переходной функцией $P(s,\ x,\ t,\ B)$.

Условные переходные функции. Пусть $\xi_1=\xi_1(t)$ и $\xi_2=\xi_2(t)$ — случайные процессы на множестве T действительной прямой в соответствующих фазовых пространствах $(E_1,\ \mathfrak{B}_1)$ и $(E_2,\ \mathfrak{B}_2)$ такие, что «двумерный» случайный процесс $\xi=\{\xi_1,\ \xi_2\}$ в фазовом пространстве $E=E_1\times E_2$ является марковским, причем марковским является и процесс $\xi_1=\xi_1(t)$. Пусть переходная функция «двумерного» марковского процесса $\xi=\xi(t)$ такова, что при любых $s,\ t\in T$ и $B_1\in\mathfrak{B}_1$, $x_2\in E_2$

$$P\{s,\ (x_1,\ x_2),\ t,\ B_1\times E_2\}=P(s,\ x_1,\ t,\ B_1),$$

где $P(s,\ x_1,\ t,\ B_1)$ — переходная функция марковского процесса $\xi_1=\xi_1(t)$. Предположим, что рассматриваемые фазовые пространства $(E_1,\ \mathfrak{B}_1)$ и $(E_2,\ \mathfrak{B}_2)$ сепарабельны, а распределения вероятностей значений $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ $(t\in T)$ являются совершенными мерами. Тогда существует так называемая *условная переходная функция* $P(s,\ x_2,\ t,\ B_2,\ \omega)$ случайного процесса $\xi_2=\xi_2(t)$: с вероятностью 1

$$P(s,\ \xi_2(s),\ t,\ B_2,\ \omega)=\mathsf{P}\{\xi_2(t)\in B_2|\xi_2(s);\ \xi_1(u),\ u\leqslant s\}.$$

Условная переходная функция при каждом фиксированном элементарном исходе $\omega\in\Omega$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к переходной функции, т. е. является распределением вероятностей на σ-алгебре $\mathfrak{B}_2$, измерима по $x_2\in E_2$ и удовлетворяет уравнению Колмогорова — Чепмена:

$$P(s,\ x_2,\ t,\ B_2,\ \omega)=\int_{E_2}P(s,\ x_2,\ u,\ dy,\ \omega)\,P(u,\ y,\ t,\ B_2,\ \omega),\qquad s\leqslant u\leqslant t.$$

Случайный процесс $\xi_2=\xi_2(t)$ с условной переходной функцией $P(s, x_2, t, B_2, \omega)$ называется *условным марковским процессом.*

Коэффициент эргодичности. Пусть $\xi=\xi(t)$ — случайный марковский процесс в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ с переходной функцией $P(s, x, t, B)$. С вероятностью 1 имеет место равенство

$$\beta(s, t)=\sup_{A\in\mathfrak{A}(t,\infty)}|\mathsf{P}(A\,|\,\mathfrak{A}(-\infty, s))-\mathsf{P}(A)|=$$
$$=\sup_{B\in\mathfrak{B}}|P(s, \xi(s), t, B)-\mathsf{P}_t(B)|.$$

Величина

$$k(s, t)=1-\sup_{x_1,x_2,B}|P(s, x_1, t, B)-P(s, x_2, t, B)|$$

называется *коэффициентом эргодичности* марковского процесса $\xi=\xi(t)$. С вероятностью 1 имеет место неравенство

$$\beta(s, t)\leqslant 1-k(s, t).$$

Уравнение Колмогорова — Чепмена, которому удовлетворяет переходная функция $P(s, x, t, B)$, дает следующее соотношение:

$$1-k(s, t)\leqslant\prod_{i=1}^{n}[1-k(s_i, t_i)],$$

где $s\leqslant s_1\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant s_n\leqslant t_n=t$. Если $k(s, t)\geqslant k>0$ при $t-s\geqslant\delta$, то имеет место оценка $1-k(s, t)\leqslant Ce^{-Dt}$, где C и D — некоторые положительные постоянные.

Марковские моменты и строгая марковость. Пусть $\xi=\xi(t)$ — случайный марковский процесс на множестве T в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ и пусть $\mathfrak{A}^*(s, t)$ есть σ-алгебра событий, порожденных всевозможными событиями вида $\{\xi(u)\in B\}$ $(u\in[s, t]\cap T, B\in\mathfrak{B})$ и пополненных множествами нулевой вероятности. Случайная величина $\tau=\tau(\omega)$ со значениями в T называется *неупреждающим моментом* или *величиной, не зависящей от будущего,* если $\{\tau>t\}\in\mathfrak{A}^*(-\infty, t)$ при любом t. Примером таких величин может служить момент τ первого достижения определенного множества в фазовом пространстве E траекторией $\xi(\omega, t)$ случайного процесса $\xi=\xi(t)$ и т. п.

Пусть $\tau=\tau(\omega)$ — некоторая величина, не зависящая от будущего, и пусть $\mathfrak{A}^*(s, \tau)$ есть σ-алгебра всех событий $A\in\mathfrak{A}^*(-\infty, \infty)$ таких, что пересечение $A\cdot\{\tau\leqslant t\}$ входит в σ-алгебру $\mathfrak{A}^*(-\infty, t)$; далее, пусть $\eta=\eta(\omega)$ — случайная величина со значениями в T, измеримая относительно $\mathfrak{A}^*(-\infty, \tau)$ и такая, что $\eta(\omega)\geqslant\tau(\omega)$. Наконец, пусть T — борелевское множество и пусть марковский случайный процесс $\xi=\xi(\omega, t)$ измерим относительно произведения σ-алгебры $\mathfrak{A}^*(-\infty, \infty)$ и σ-алгебры всех борелевских подмножеств множества T. Процесс $\xi=\xi(t)$ называется *строго марковским*, если для любых τ, η и $B\in\mathfrak{B}$ с вероятностью 1

$$\mathsf{P}\{\xi(\eta)\in B|\mathfrak{A}^*(-\infty,\ \tau)\}=P\{\tau,\ \xi(\tau),\ \eta,\ B\}.$$

Рассмотрим случайный марковский процесс $\xi=\xi(t)$ в метрическом фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$. Пусть его переходная функция $P(s, x, t, B)$ такова, что при $s\to s_0$ и $x\to x_0$ соответствующие распределения вероятностей $P(s, x, t, B)$ $(B\in\mathfrak{B})$ слабо сходятся к распределению $P(s_0, x_0, t, B)$, т. е.

$$\int\limits_E P(s, x, t, dy)\,\varphi(y)\to\int\limits_E P(s_0, x_0, t, dy)\,\varphi(y)$$

для любой ограниченной непрерывной функции $\varphi=\varphi(x)$ $(x\in\in E)$. Если с вероятностью 1 рассматриваемый случайный процесс $\xi=\xi(t)$ непрерывен справа, то он является строго марковским процессом.

Пусть C — некоторый компакт метрического фазового пространства $(E, \mathfrak{B})$, $\tau_C=\tau_C(\omega)$ — момент первого выхода из множества C траектории $\xi(\omega, t)$ сепарабельного марковского процесса $\xi=\xi(t)$ на отрезке $T=[a, b]$, и пусть переходная функция $P(s, x, t, B)$ удовлетворяет условию «равномерной стохастической непрерывности»: при любом $\varepsilon>0$

$$P\{s,\ x,\ t,\ E\setminus V_\varepsilon(x)\}\leqslant\delta_\varepsilon(t-s),$$

где $x\in E$, $V_\varepsilon(x)$ есть ε-окрестность точки x и $\delta(h)\to 0$ при $h\to\to 0$. Тогда с вероятностью 1 траектории $\xi(\omega, t)$ на интервале $(a, \tau_C(\omega))$ могут иметь лишь разрывы первого рода; при этом существует эквивалентный исходному процессу $\xi=\xi(t)$ случайный марковский процесс $\tilde{\xi}=\tilde{\xi}(t)$, почти все траектории которого непрерывны справа до момента $\tau_C=\tau_C(\omega)$ первого выхода из компакта C. Если указанное соотношение при любом ε выполняется для некоторой функции $\delta_\varepsilon=\delta_\varepsilon(h)$ такой, что $\delta_\varepsilon(h)=o(h)$ при $h\to 0$, то с вероятностью 1 траектории $\xi(\omega, t)$ являются непрерывными функциями на интервале $(a, \tau_C(\omega))$.

Обрывающиеся марковские процессы. Пусть Ω — пространство элементарных событий, T — множество на действительной прямой, $(E, \mathfrak{B})$ — некоторое фазовое пространство, $\tau=\tau(\omega)$ — некоторая функция на Ω со значениями в T, $\xi=\xi(\omega, t)$ — функция двух переменных $\omega\in\Omega$ и $t\in T\cap(-\infty, \tau(\omega))$ со значениями в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$. Пусть $\mathfrak{A}_s^t$ означает σ-алгебру событий «подпространства» $\Omega_t=\{\tau>t\}$, порожденную всевозможными событиями вида $\{\xi(u)\in B,\ \tau>t\}$ $(\xi(u)=\xi(\omega, u))$, где $u\in T\cap(s, t)$ и $B\in\mathfrak{B}$, и пусть $\mathfrak{A}(s, t)$ — некоторая σ-алгебра событий основного пространства Ω, содержащая все $\mathfrak{A}_s^u$ $(u\leqslant t)$. Пусть при каждом $s\in T$ и $x\in E$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}(s, \infty)$ определено распределение вероятностей $\mathsf{P}_{sx} = \mathsf{P}_{sx}(A)$ такое, что при любых s, $t \in T$ $(s \leqslant t)$ и $B \in \mathfrak{B}$

$$P(s, x, t, B) = \mathsf{P}_{sx}\{\xi(t) \in B\}$$

есть измеримая функция от $x \in E$,

$$P(s, x, t, B) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in B, \\ 0 & \text{при } x \notin B \end{cases}$$

и для почти всех ω (относительно P_{sx})

$$\mathsf{P}_{sx}\{\xi(t) \in B \mid \mathfrak{A}_s^u\} = P(u, \xi(u), t, B)$$

при любых $u \in T$ $(s \leqslant u \leqslant t)$. Соответствующая случайная функция $\xi = \xi(t)$, значения $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ которой суть случайные величины, определенные для элементарных исходов $\omega \in \Omega$ $(\tau(\omega) > t)$, называется *обрывающимся марковским процессом*; случайная величина $\tau = \tau(\omega)$ называется *моментом обрыва* процесса $\xi = \xi(t)$; величину τ можно интерпретировать как момент выхода из рассматриваемого фазового пространства E.

Например, если $\xi = \xi(t)$ — необрывающийся марковский процесс и $\tau = \tau(\omega)$ — некоторый марковский момент (скажем, момент выхода из некоторого множества фазового пространства), то случайный процесс с траекториями $\xi(\omega, t)$ $(t < \tau(\omega))$ будет обрывающимся марковским процессом с моментом обрыва τ.

5. Однородные и стационарные случайные процессы.

Преобразования сдвига и инвариантные распределения. Пусть T — некоторая группа (или полугруппа) на действительной прямой, т. е. для любых t_1, $t_2 \in T$ определена операция $t_1 + t_2$, и точка $t = t_1 + t_2$ также входит в множество T. Пусть $(E, \mathfrak{B})$ — некоторое измеримое пространство и $X = E^T$ — пространство всех функций $x = x(t)$ на множестве T со значениями в E. Рассмотрим преобразование S_u $(u \in T)$ в функциональном пространстве X: если $x = x(t) \in X$, то

$$S_u x(t) = x(t + u).$$

Пусть $S_u^{-1}A$ — прообраз множества $A \subseteq X$ при отображении S_u. Рассмотрим $S_u^{-1} = S_u^{-1}A$ как преобразование множеств функционального пространства X. *Преобразование сдвига* S_u^{-1} сохраняет теоретико-множественные операции:

$$S_u^{-1}\left(\bigcup_k A_k\right) = \bigcup_k (S_u^{-1}A_k),$$

$$S_u^{-1}\left(\bigcap_k A_k\right) = \bigcap_k (S_u^{-1}A_k),$$

$$S_u^{-1}(A_1 \setminus A_2) = S_u^{-1}A_1 \setminus S_u^{-1}A_2.$$

При этом каждое цилиндрическое множество A вида

$$A = \{x(t_1) \in B_1, \ \ldots, \ x(t_n) \in B_n\}$$

переходит в цилиндрическое же множество

$$S_u^{-1}A = \{x(t_1+u) \in B_1, \ \ldots, \ x(t_n+u) \in B_n\}.$$

Если $\mathfrak{A}(s, t)$ есть σ-алгебра, порожденная всевозможными цилиндрическими множествами $\{x(u) \in B\}$, где $u \in T \cap [s, t]$ и $B \in \mathfrak{B}$, то совокупность всех множеств вида $S_u^{-1}A$ $(A \in \mathfrak{A}(s, t))$ совпадает с σ-алгеброй $\mathfrak{A}(s+u, t+u)$. Если на σ-алгебрах $\mathfrak{A}(s, t)$ и $\mathfrak{A}(s+u, t+u)$ заданы распределения вероятностей P_s и P_{s+u} соответственно такие, что для любого цилиндрического множества $A \in \mathfrak{A}(s, t)$ выполнено равенство

$$\mathsf{P}_{s+u}(S_u^{-1}A) = \mathsf{P}_s(A),$$

то оно будет выполнено и для любого множества $A \in \mathfrak{A}(s, t)$.

Пусть $\xi = \xi(t)$ — случайный процесс на множестве T со значениями в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$. Рассмотрим отображение ξ соответствующего пространства элементарных событий Ω в функциональное пространство X: $x = \xi(\omega, t)$. При отображении ξ каждый элементарный исход $\omega \in \Omega$ переходит в траекторию $\xi(\omega, t)$ на множестве T. Пусть $\xi^{-1}A$ — прообраз множества $A \subseteq X$ при отображении ξ, и пусть $\mathfrak{A}_\xi(s, t)$ означает σ-алгебру событий, порожденную всевозможными событиями $\{\xi(u) \in B\}$, где $u \in T \cap [s, t]$ и $B \in \mathfrak{B}$. Совокупность всех событий вида $\xi^{-1}A$ $(A \in \mathfrak{A}(s, t))$ совпадает с σ-алгеброй $\mathfrak{A}_\xi(s, t)$.

Пусть $\xi^{-1}A$ $(A \in \mathfrak{A}(-\infty, \infty))$ — некоторое событие из σ-алгебры $\mathfrak{A}_\xi(-\infty, \infty)$. Положим

$$S_u^{-1}(\xi^{-1}A) = \xi^{-1}(S_u^{-1}A).$$

Для каждого исходного события $\xi^{-1}A$ соответствующее событие $\xi^{-1}(S_u^{-1}A)$ определено, вообще говоря, неоднозначно (одно и то же событие может быть представлено и как $\xi^{-1}A_1$, и как $\xi^{-1}A_2$, где множества A_1 и A_2 различны).

Пусть на σ-алгебрах $\mathfrak{A}_\xi(s, t)$ и $\mathfrak{A}_\xi(s+u, t+u)$ заданы распределения вероятностей P_s и P_{s+u} соответственно такие, что для любого события $\{\xi(t_1) \in B_1, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\}$, где $t_1, \ldots, t_n \in T \cap [s, t]$ и $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}$, выполнено равенство

$$\mathsf{P}_{s+u}\{\xi(t_1+u) \in B_1, \ \ldots, \ \xi(t_n+u) \in B_n\} = \mathsf{P}_s\{\xi(t_1) \in B_1, \ \ldots, \ \xi(t_n) \in B_n\}.$$

Тогда для любых множеств $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}(s, t)$ таких, что $\xi^{-1}A_1 = \xi^{-1}A_2$, соответствующие события $\xi^{-1}(S_u^{-1}A_1)$ и $\xi^{-1}(S_u^{-1}A_2)$ отличаются друг от друга лишь на событие вероятности нуль:

$$\mathsf{P}_{s+u}\{\xi^{-1}(S_u^{-1}A_1) \circ \xi^{-1}(S_u^{-1}A_2)\} = 0.$$

Если не делать различия между такими событиями, то *преобразование сдвига* S_u^{-1} на σ-алгебре событий $\mathfrak{A}_\xi(s, t)$ уже *будет определено однозначно*. При этом для любого события $A \in \mathfrak{A}_\xi(s, t)$ соответствующее событие $S_u^{-1}A$ входит в σ-алгебру $\mathfrak{A}_\xi(s+u, t+u)$, и всякое событие из $\mathfrak{A}_\xi(s+u, t+u)$ может быть представлено как $S_u^{-1}A\,(A \in \mathfrak{A}_\xi(s, t))$, т. е. $S_u^{-1}\mathfrak{A}_\xi(s, t) = \mathfrak{A}_\xi(s+u, t+u)$.

Если не делать различия между случайными величинами $\eta = \eta(\omega)$, совпадающими с вероятностью 1, то можно определить *преобразование сдвига* U_u для каждой случайной величины $\eta = \eta(\omega)$, измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_\xi(s, t)$. Именно, для простой случайной величины η такой, что $\eta(\omega) = y_k$ при $\omega \in A_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, преобразование сдвига можно определить как

$$U_u\eta(\omega) = y_k \text{ при } \omega \in S_u^{-1}A_k, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

для произвольной случайной величины η можно положить

$$U_u\eta(\omega) = \lim_{n\to\infty} U_u\eta_n(\omega),$$

где $\eta_n(\omega)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — некоторая последовательность простых случайных величин, равномерно сходящихся к $\eta(\omega)$. Преобразование сдвига U_u таково, что для любой борелевской функции $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ на пространстве $(E^n, \mathfrak{B}^n)$

$$U_u\varphi[\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)] = \varphi[\xi(t_1+u), \ldots, \xi(t_n+u)].$$

Однородные марковские процессы. Пусть для определенности T — множество всех неотрицательных или целых чисел $t \geqslant 0$. Случайный марковский процесс $\xi = \xi(t)$ на множестве T в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ называется *однородным*, если его переходная функция $P(s, x, t, B)$ при любых $u, s, t \in T$ $(s \leqslant t)$ и $x \in E$, $B \in \mathfrak{B}$ удовлетворяет *условию стационарности*:

$$P(s+u, x, t+u, B) = P(s, x, t, B).$$

В случае однородности марковского процесса $\xi = \xi(t)$ переходная функция в действительности зависит лишь от $t - s$, x и B, и поэтому ее можно обозначить символом $P(t-s, x, B)$. Соответствующие условные распределения $\mathsf{P}_{sx} = \mathsf{P}_{sx}(A)$ $(A \in \mathfrak{A}_\xi(s, \infty))$ однородного марковского процесса $\xi = \xi(t)$ таковы, что

$$\mathsf{P}_{s+u, x}\{\xi(t_1+u) \in B_1, \ldots, \xi(t_n+u) \in B_n\} = \mathsf{P}_{sx}\{\xi(t_1) \in B_1, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\}$$

для любых $t_1, \ldots, t_n \in T \cap [s, \infty)$ и $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}$.

Соответствующие преобразования сдвига S_u можно определить на каждой из σ-алгебр событий $\mathfrak{A}_\xi(s, \infty)$; при этом $S_{u_1}S_{u_2} = S_{u_1+u_2}$ для любых $u_1, u_2 \in T$ и

$$\mathsf{P}_{s+u,x}(S_u^{-1}A) = \mathsf{P}_{sx}(A), \quad A \in \mathfrak{A}_\xi(s, \infty);$$

все распределения $\mathsf{P}_{sx}(A)$ определяются, например, по распределению

$$\mathsf{P}_x(A) = \mathsf{P}_{0x}(A), \quad A \in \mathfrak{A}_\xi(0, \infty).$$

Стационарные случайные процессы. Пусть для определенности T — множество всех действительных или целых чисел t. Случайный процесс $\xi = \xi(t)$ на множестве T в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ называется *стационарным* (*в узком смысле*), если его конечномерные распределения для любых $u, t_1, \ldots, t_n \in T$ и $B_1, \ldots$ $\ldots, B_n \in \mathfrak{B}$ удовлетворяют условию стационарности:

$$\mathsf{P}_{t_1+u, \ldots, t_n+u}(B_1, \ldots, B_n) = \mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n}(B_1, \ldots, B_n).$$

Для стационарного процесса $\xi = \xi(t)$ преобразование сдвига S_u определено при каждом $u \in T$ на всей σ-алгебре событий $\mathfrak{A}_\xi(-\infty, \infty)$, причем соответствующее распределение вероятностей $\mathsf{P} = \mathsf{P}(A)$ $(A \in \mathfrak{A}_\xi(-\infty, \infty))$ инвариантно относительно преобразований S_u:

$$\mathsf{P}(S_u^{-1}A) = \mathsf{P}(A)$$

при всех $u \in T$, $A \in \mathfrak{A}_\xi(-\infty, \infty)$. Для любых $u_1, u_2 \in T$

$$S_{u_1}S_{u_2} = S_{u_1+u_2}.$$

Преобразование сдвига U_u $(u \in T)$, рассматриваемое как преобразование в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ всех случайных величин $\eta = \eta(\omega)$, измеримых относительно $\mathfrak{A}_\xi(-\infty, \infty)$, со скалярным произведением $(\eta_1, \eta_2) = \mathsf{M}(\eta_1 \cdot \overline{\eta_2})$, представляет собой унитарный оператор; при этом для любых $u_1, u_2 \in T$

$$U_{u_1}U_{u_2} = U_{u_1+u_2}.$$

Пример. *Марковский стационарный процесс.* Пусть $\xi = \xi(t)$ — случайный марковский однородный процесс на действительной прямой T в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$, и пусть его переходная функция $P(t, x, B)$ такова, что в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ существует так называемое *инвариантное* или *стационарное распределение вероятностей* $\mathsf{P}^0 = \mathsf{P}^0(B)$ $(B \in \mathfrak{B})$:

$$\mathsf{P}^0(B) = \int_E \mathsf{P}^0(dx)\, P(t, x, B)$$

при всех $B \in \mathfrak{B}$ и $t \in T$. Это распределение вероятностей P^0 таково, что однородный марковский процесс $\xi(t)$ с переходной функцией $P(t, x, B)$ и распределениями

$$\mathsf{P}_t(B) = \mathsf{P}\{\xi(t) \in B\} = \mathsf{P}^0(B), \quad B \in \mathfrak{B},$$

будет стационарным в узком смысле.

ГЛАВА IV

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Распределения и их характеристические функции

1. Однозначность соответствия между распределениями и характеристическими функциями. Схема сложения случайных величин (принимающих не обязательно вещественные значения) до сих пор остается одним из главных объектов изучения в теории вероятностей. При этом очень часто с помощью тех или иных приемов случай зависимых величин сводится к случаю независимых. Основным аналитическим орудием здесь являются характеристические функции, определенные ранее (см. гл. III, § 1, п. 1). Пусть P_ξ — распределение случайной величины или случайного конечномерного вектора $\xi \in R^s$. Характеристическая функция $\varphi_\xi = \varphi_\xi(t)$ выражается формулой

$$\varphi_\xi(t) = \varphi(t; \mathsf{P}_\xi) = \mathsf{M}e^{i(t,\xi)} = \int_{R^s} e^{itx}\mathsf{P}_\xi(dx).$$

Свойство мультипликативности (для независимых ξ_1 и ξ_2) $\varphi_{\xi_1+\xi_2} = \varphi_{\xi_1}\varphi_{\xi_2}$ связано с тем, что при фиксированном t функция $e^{i(t,x)}$ представляет собой *характер* аддитивной группы действительных чисел (или соответственно векторов конечномерного евклидова пространства): $e^{i(t,\xi_1+\xi_2)} = e^{i(t,\xi_1)}e^{i(t,\xi_2)}$.

Это замечание служит отправным пунктом при распространении понятия характеристической функции на случайные величины со значениями из группы, более общей, чем та, о которой только что говорилось. Областью определения характеристической функции служит множество всех характеров (в коммутативном случае) или унитарных неприводимых представлений соответствующей группы (в некоммутативном случае). Можно рассматривать в качестве области определения и множество всех элементарных положительно определенных функций, нормированных условием равенства единице в единице группы (имеется в виду мультипликативная запись) [25]. В этой главе речь будет идти в основном о коммутативном случае.

Взаимная однозначность соответствия между характеристическими функциями и распределениями основана на достаточности множества характеров. Последняя должна в этом контексте пониматься, грубо говоря, как возможность аппроксимировать любую непрерывную и ограниченную функцию от x конечными линейными комбинациями характеров равномерно на каждом компактном множестве.

Рассмотрим вопрос об однозначности соответствия, например, на действительной прямой (т. е. для вещественных случайных величин). Пусть P_{ξ_1} и P_{ξ_2} — два распределения на прямой, причем

$$\varphi_{\xi_1} \equiv \varphi_{\xi_2},$$

и пусть f — произвольная, непрерывная и ограниченная функция. Из равенства характеристических функций вытекает равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Bigl(\sum_j c_j e^{it_jx}\Bigr) \mathsf{P}_{\xi_1}(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \Bigl(\sum_j c_j e^{it_jx}\Bigr) \mathsf{P}_{\xi_2}(dx)$$

для любых тригонометрических полиномов. Отсюда ввиду того, что а) каждое распределение на прямой «почти целиком» сосредоточено на некотором компакте и б) каждая непрерывная и ограниченная функция может быть аппроксимирована тригонометрическими полиномами равномерно на каждом компакте, вытекает равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathsf{P}_{\xi_1}(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathsf{P}_{\xi_2}(dx)$$

для любой непрерывной и ограниченной функции, а отсюда — совпадение самих распределений [70].

Однако распределения не обязаны совпадать, если соответствующие характеристические функции равны лишь на некотором отрезке числовой прямой. Один из путей построения примеров, иллюстрирующих это утверждение, дает теорема Пойа, согласно которой вещественная непрерывная четная функция $g(t)$ с $g(0)=1$, $g(t)\to 0$ $(t\to\infty)$, выпуклая на $[0, \infty)$, является характеристической.

Простое и полезное достаточное условие единственности в этой ситуации — аналитичность характеристической функции в некоторой окрестности нуля. В терминах соответствующих распределений это требование равносильно так называемому условию Крамéра: интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} \mathsf{P}_{\xi}(dx)$$

конечен при всех h, достаточно близких к нулю. Условие Крамéра может быть иначе сформулировано в терминах производных характеристической функции в нуле (или в терминах моментов): существует $H > 0$ такое, что

$$\mathsf{M}\xi_1^{2k} \leqslant (2k)!\, H^{2k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(дальнейшие результаты см. в § 3).

С другой стороны, можно указать и достаточные условия неединственности. Например, если характеристическая функция $\varphi(t)$ такова, что

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\, dx, \quad p(x) \in L_2(R^1), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log p(x)|}{1+x^2}\, dx < \infty,$$

то, каким бы ни было a, найдется другая характеристическая функция $\varphi_a(t)$ такая, что

$$\varphi(t) = \varphi_a(t), \qquad |t| \leqslant a.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для более общего случая распределений с ненулевой абсолютно непрерывной компонентой.

При специальных предположениях относительно случайных величин наряду с характеристическими функциями используются их аналоги: для целочисленных ξ — *производящие функции*

$$\sum_n z^n \mathsf{P}\{\xi = n\},$$

а для положительных ξ — *преобразования Лапласа* соответствующих распределений

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \mathsf{P}_\xi(dx).$$

Преобразования Лапласа (двусторонние) используются также при изучении распределений с функциями распределения, экспоненциально приближающимися к нулю (единице) при аргументе, стремящемся к $-\infty(+\infty)$. И производящие функции, и преобразования Лапласа обладают мультипликативными свойствами (перемножаются при композиции распределений) и однозначно определяют соответствующие распределения*).

2. Формулы обращения. Единственным дополнением к теоремам единственности для характеристических функций служат явные выражения $\mathsf{P}_\xi(A)$ для тех или иных классов множеств A через характеристическую функцию. Если ξ — случайная величина со значениями в конечномерном пространстве R^s и с

*) Преобразования Лапласа для более общих объектов (таких, как «случайные меры») определены, например, в статьях [71, 82].

абсолютно интегрируемой характеристической функцией

$$\int_{R^s} |\varphi_\xi(t)|\, dt < \infty,$$

то распределение ξ имеет непрерывную плотность, и по *формуле обращения для интегралов Фурье*

$$p_\xi(x) = (2\pi)^{-s} \int_{R^s} e^{-i(t,x)} \varphi_\xi(t)\, dt.$$

Интегрированием по x при $x \in A$ получаем (во всяком случае, для ограниченных A)

$$\mathsf{P}_\xi(A) = (2\pi)^{-s} \int_{R^s} \left(\int_A e^{-i(t,x)} dx \right) \varphi_\xi(t)\, dt.$$

Аналогичная формула для произвольных распределений получается с помощью так называемого «сглаживания», представляющего собой весьма удобный и часто применяемый технический прием. Можно начать со следующего утверждения: пусть $H(x)$ — функция, представимая в виде

$$H(x) = (2\pi)^{-s} \int_{R^s} e^{i(t,x)} h(t)\, dt$$

с абсолютно интегрируемой $h(t)$. Тогда

$$\mathsf{M}H(\xi) = (2\pi)^{-s} \int_{R^s} \varphi_\xi(t)\, h(t)\, dt.$$

Так как

$$\mathsf{P}_\xi(A) = \mathsf{M}I_A(\xi),$$

где I_A — индикатор множества A ($I_A(x) = 1$ $(x \in A)$ и $I_A(x) = 0$ $(x \notin A)$), то для получения «формул обращения» достаточно уметь приблизить $I_A(x)$ функциями $H(x)$ указанного выше типа. Этого можно достигнуть, например, полагая

$$H_\sigma(x) = \int I_A(y) (2\pi)^{-s/2} \sigma^{-s} \exp\left\{ -\frac{(x-y,\, x-y)}{2\sigma^2} \right\} dy =$$

$$= (2\pi)^{-s} \int_{R^s} e^{i(t,x)} \left(\int_A e^{-i(t,v)} dv \right) e^{-\sigma^2 (t,t)/2} dt.$$

Всегда

$$0 \leqslant H_\sigma(x) \leqslant 1,$$

и если $\sigma \to 0$, то $H_\sigma(x) \to 1$, когда x есть внутренняя точка A, и $H_\sigma(x) \to 0$, когда x — внутренняя точка дополнения к A. Отсюда для множеств непрерывности распределения P_ξ (т. е. для множеств A с P_ξ $(\partial A = 0)$, ∂A — граница A) получаем

$$\mathsf{P}_\xi(A) = \lim_{\sigma\to 0} (2\pi)^{-s} \int\limits_{R^s} \left(\int\limits_A e^{-i(t,v)} dv \right) e^{-\sigma^2(t,t)/2} \varphi_\xi(t)\, dt.$$

Рассмотрим, в частности, шары

$$A = S_{ar} = \{x\colon\ |x-a| \leqslant r\}.$$

Так как

$$\int\limits_{S_{ar}} e^{-i(t,v)} dv = e^{-i(t,a)} \left(\frac{2\pi r}{|t|}\right)^{s/2} J_{s/2}(r\,|\,t\,|)$$

($J_{s/2}(z)$ — функция Бесселя порядка $s/2$), то

$$\mathsf{P}_\xi(S_{ar}) = \lim_{\sigma\to 0} (2\pi)^{-s} \int\limits_{R^s} \left(\frac{2\pi r}{|t|}\right)^{s/2} J_{s/2}(r\,|\,t\,|)\, e^{-\sigma^2(t,t)/2} e^{-i(t,a)} \varphi_\xi(t)\, dt.$$

На этом пути помимо формул обращения можно получить полезные неравенства. Приведем для примера одно из них. Пусть $\sum a_{jk} t_j t_k$ — неотрицательная квадратичная форма. Если неравенство

$$\sum_{j,k} a_{jk} t_j t_k \leqslant 1$$

влечет неравенство

$$1 - \operatorname{Re} \varphi_\xi(t) \leqslant \varepsilon,$$

то

$$\mathsf{P}\{|\xi| \geqslant r\} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \left(\varepsilon + \frac{2\sum\limits_k a_{kk}}{r^2} \right).$$

Второе слагаемое в скобках можно заменить на

$$2\sqrt{2} \exp\left\{ -\frac{r^2}{4} \sum_k a_{kk} \right\}.$$

Непрерывность соответствия между распределениями и характеристическими функциями. Имеет место следующее свойство непрерывности соответствия между распределениями в евклидовом пространстве и их характеристическими функциями: поточечная сходимость характеристических функций равносильна слабой сходимости соответствующих распределений, а равностепенная непрерывность семейства характеристических функций в нуле равносильна относительной слабой компактности семейства распределений. Если равностепенно непрерывны в нуле не сами характеристические функции, а их абсолютные величины, то соответствующее семейство распределений сдвиг-компактно, т. е. семейство распределений случайных величин или векторов $\xi_n - A_n$ при надлежащем выборе констант A_n относительно слабо компактно. Верно и обратное утверждение.

Иногда желательно рассматривать типы сходимости, более сильные, чем слабая сходимость. Тогда возникает задача формулировки соответствующих условий в терминах характеристических функций. Задача эта обычно оказывается трудной (см. § 2).

3. Свойства распределений, выраженные в терминах характеристических функций.

Абсолютная непрерывность и сингулярность. Если характеристическая функция абсолютно интегрируема, то, как было замечено выше, распределение имеет непрерывную и ограниченную во всем пространстве плотность. Если

$$\int_{R^s} |\varphi_\xi(t)|^2 dt < \infty,$$

то распределение ξ абсолютно непрерывно. Это утверждение дополняется следующим весьма тонким результатом [134]: для любой неотрицательной ограниченной измеримой функции $f(x)$ такой, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, существуют сингулярное распределение P_1 и абсолютно непрерывное распределение P_2 (с непрерывной плотностью) с компактными носителями, для которых

$$\int_{R^5} |\varphi(t, \mathsf{P}_1)|^2 f(|\varphi(t, \mathsf{P}_1)|)\, dt < \infty,$$

$$\int_{R^3} |\varphi(t, \mathsf{P}_2)|^2 \frac{1}{f(|\varphi(t, \mathsf{P}_2)|)}\, dt = \infty.$$

В R^1 имеет место очень глубокое и в известном смысле обратное к высказанному утверждение [39, 40]: в R^1 для всех достаточно правильно убывающих при $|t| \to \infty$ функций $\varphi(t)$ таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t)\, dt = \infty$$

(во всяком случае, для функций, эквивалентных при $|t| \to \infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{|t|}}, \quad \frac{1}{\sqrt{|t|\log|t|}}, \quad \frac{1}{\sqrt{|t|\cdot\log|t|\cdot\log\log|t|}}, \ \ldots$$

и т. п.), существуют соответствующие сингулярные распределения P с

$$\varphi(t;\ \mathsf{P}) = O(\varphi(t)) \quad \text{при} \quad |t| \to \infty.$$

Этот результат можно использовать для построения примеров сингулярных распределений, которые после некоторого числа композиций самих с собой становятся абсолютно непрерывными. В R^1 такие примеры могут казаться «патологическими». Однако в R^s при $s \geqslant 2$ существуют простые, естественные примеры распределений, обладающих подобным свойством.

Пример. Пусть P — равномерное распределение на единичной окружности в R^2. Это распределение сингулярно относительно лебеговой меры. Его характеристическая функция $\varphi(t_1, t_2) = J_0\left(\sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)$ допускает при $|t| \to \infty$ оценку

$$\varphi(t_1, t_2) = O\left(1/\sqrt[4]{t_1^2 + t_2^2}\right) = O(|t|^{-1/2})$$

(как это следует из известных асимптотических формул для функций Бесселя). Поэтому при $n \geqslant 5$ функция φ^n абсолютно интегрируема и соответствующая n-кратная композиция $\mathsf{P} * \mathsf{P} * \ldots * \mathsf{P}$ имеет непрерывную и ограниченную плотность. Прямой подсчет показывает, что уже распределение $\mathsf{P} * \mathsf{P}$ имеет плотность

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2 |x| \sqrt{4 - |x|^2}}, \quad 0 < |x| < 2.$$

Приведенный пример может быть обобщен в том смысле, что для равномерного распределения на поверхности достаточно гладкого выпуклого тела с неисчезающей кривизной характеристическая функция имеет порядок $O(|t|^{-s/2})$, где $|t| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2}$. Точно так же степенным образом убывают характеристические функции таких сингулярных распределений в R^s, как совместное распределение степеней $(\xi, \xi^2, \ldots, \xi^s)$ данной непрерывно распределенной случайной величины ξ и т. п.*).

Вернемся к случаю R^1 и сделаем некоторые дополнительные замечания, касающиеся абсолютной непрерывности и сингулярности.

Если распределение P имеет абсолютно непрерывную компоненту, то

$$\varlimsup_{|t| \to \infty} |\varphi(t, \mathsf{P})| < 1. \tag{C}$$

Для дискретного распределения всегда $\varlimsup_{|t| \to \infty} |\varphi(t, \mathsf{P})| = 1$. Рассмотрим, с другой стороны, характеристическую функцию вида

$$\varphi(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_j} e^{it2^{-j}}\right),$$

где $2 < \lambda_n \to \infty$ и $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda_j}\right) = 0$. Соответствующее распределение не имеет точек положительной массы. Вместе с тем верно

*) См. ссылки и дальнейшие результаты в работах [80, 115].

равенство $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}\,|\varphi(t, \mathsf{P})| = 1$. Тогда при любом n

$$\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}\,|\varphi(t, \mathsf{P})^n| = 1,$$

и соответствующее распределение не содержит абсолютно непрерывной компоненты ни при каком n.

Неравенство (С) может быть уточнено при дополнительных ограничениях. Так, если распределение P сосредоточено на конечном отрезке $[-L, L]$ и имеет ограниченную плотность

$$p(x) \leqslant A < \infty,$$

то

$$\sup_{|t| \geqslant \pi/2L} |\varphi(t, \mathsf{P})| \leqslant 1 - CA^{-2}L^{-2},$$

где C — абсолютная постоянная (можно взять, например, $C = 1/128$)*).

Для симметричных и унимодальных распределений P можно установить неравенства следующего типа. Допустим, не ограничивая общности, что максимум плотности равен 1/2. Тогда

1) $\varphi(t) \leqslant \sin t/t, \quad 0 < t < \pi/2;$
2) $\varphi(t) \leqslant 1/t, \quad \pi/2 \leqslant t;$
3) $\varphi(t) > -\sin\gamma/\gamma, \quad 0 < t < \gamma,$

где γ — наименьший положительный корень уравнения $\gamma = \operatorname{tg}\gamma$ ($\gamma = 4{,}49\ldots$);

4) $\varphi(t) \geqslant \sin t/t, \quad \gamma \leqslant t < 3\pi/2,$
5) $\varphi(t) \geqslant -1/t, \quad 3\pi/2 \leqslant t.$

Все границы правильные: все равенства достигаются, причем в случаях 1) и 4) равенство $\varphi(t)$ соответствующему выражению в правой части хотя бы при одном значении t возможно только при равномерном на $[-1, 1]$ распределении. Из сказанного вытекает, что $|\varphi(t)| \leqslant \sin t/t$ при $|t| \leqslant \pi/2$.

Принадлежащая Г. Краме́ру лемма: если при $|t| \geqslant a$ характеристическая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет неравенству $|\varphi(t)|^2 \leqslant b^2$, то при $|t| < a$

$$|\varphi(t)|^2 \leqslant 1 - \frac{1-b^2}{8a^2}t^2$$

— позволяет использовать оценки характеристической функции вне некоторой окрестности нуля для описания ее поведения в этой окрестности.

Более точные неравенства (другого типа), касающиеся поведения характеристической функции в окрестности нуля, осно-

*) Многомерный случай см. [5].

ваны на использовании *моментов*. Пусть, например, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины,

$$\mathsf{M}\xi_i = 0, \quad \mathsf{M}\xi_i^2 = \sigma_i^2, \quad \mathsf{M}\,|\xi_i|^3 = \beta_i,$$

и пусть

$$s_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2, \quad \varepsilon = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Тогда при всех t

$$|\varphi_{s_n/\sigma}(t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{t^2}{2}(1 - K\varepsilon\,|t|)\right\},$$

где

$$K = 4 \sup_{x>0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^3} = 0{,}396648\ldots$$

Решетчатые распределения. Напомним, что множество L точек s-мерного пространства R^s называют *решеткой*, если существует множество линейно независимых векторов $l_1, l_2, \ldots, l_s$ и вектор l_0 такой, что все точки L, и только они, представляются в виде

$$l_0 + k_1 l_1 + \ldots + k_s l_s, \tag{1.1}$$

где k_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ пробегает все целые числа от $-\infty$ до ∞. С решеткой L связан ее шаг — объем $h(L)$ параллелепипеда, построенного на векторах $l_1, \ldots, l_s$. Решетку, порожденную векторами $l_1, \ldots, l_s$, можно рассматривать и как порожденную другими векторами, например $l_1 + l_2, l_2, \ldots, l_s$. Шаг решетки, конечно, не зависит от выбора представлений. Распределение P в R^s называют *решетчатым*, если для некоторой решетки L имеет место равенство $\mathsf{P}(L) = 1$. Число $h(L)$ называют при этом *шагом распределения*. Если решетка L такова, что для любой подрешетки $L' \subset L$

$$\mathsf{P}(L') < 1,$$

то решетка L называется *основной*. Если решетка L'' такова, что $\mathsf{P}(L'') = 1$, то отношение $h(L)$ к $h(L'')$ является целым числом и $h(L)$ носит название *максимального шага распределения*. Величина $h(L)$ численно равна умноженному на $s!$ общему наибольшему делителю объемов всех s-мерных симплексов с вершинами в возможных значениях распределения P.

Пусть для решетки (1.1) $\mathsf{P}(L) = 1$. Возьмем репер $\tilde{l}_1, \ldots, \tilde{l}_s$, взаимный реперу $l_1, \ldots, l_s$, т. е. такой, что скалярные произведения

$$(l_i, \tilde{l}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). Тогда для характеристической функции

$\varphi(t) = \varphi(t, \mathsf{P})$ выполняются равенства

$$|\varphi(2\pi \bar{l}_j)| = 1, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{1.2}$$

Если решетка L основная, то во всех точках замкнутого параллелепипеда $\bar{D}$, построенного на векторах $2\pi\bar{l}_1, \ldots, 2\pi\bar{l}_s$ (кроме его вершин), модуль φ меньше единицы. Обратно, если для некоторого репера имеет место (1.2), то существует вектор l_0 такой, что распределение P сосредоточено на решетке, образованной l_0 и взаимным репером. Эта решетка будет основной, если $|\varphi(t)| < 1$ для всех $t \in \bar{D}$, кроме вершин.

Остановимся на время на одномерном случае и рассмотрим, не ограничивая общности, распределения, сосредоточенные на решетке целых чисел. Согласно сказанному выше, если $h = 1$ — максимальный шаг распределения, то $|\varphi(t)| < 1$ $(0 < t < 2\pi)$. Однако внутри этого интервала модуль $\varphi(t)$ может быть сколь угодно близким к единице. Это утверждение очевидным образом верно в примерах такого типа, где распределение почти целиком сосредоточено на подрешетке L' решетки целых чисел (скажем, P приписывает массы $\frac{1-\varepsilon}{2}$, ε, $\frac{1-\varepsilon}{2}$, где ε мало, точкам -1, 0, 1 соответственно). Помимо этого тривиального случая возможен и другой. Именно, пусть P приписывает вероятности p_0, p_1, p_2 точкам с координатами 0, k_1, k_2 соответственно ($0 < k_1 < k_2$; k_1 и k_2 взаимно просты), и пусть l_1/l_2 — последняя подходящая дробь для k_1/k_2. Тогда $k_1 l_2 - k_2 l_1 = \pm 1$ и, как показывает простой подсчет,

$$\left|\varphi\left(2\pi \frac{l_2}{k_2}, \mathsf{P}\right)\right|^2 \geqslant 1 - p_1(1-p_1)\left(\frac{2\pi}{k^2}\right)^2.$$

Например, если $p_0 = p_1 = p_2 = 1/3$, $k_1 = 3$, $k_2 = 10$, то

$$\left|\varphi\left(2\pi \frac{3}{10}\right)\right|^2 > 0{,}91.$$

Наличие подобных точек может сильно ухудшать точность действия локальных теорем (см. п. 2 § 8).

Значения характеристической функции в точках, соизмеримых с 2π, связаны с вероятностями попадания на подрешетки решетки целых чисел. Именно, если

$$L_{l,h} = \{l\colon\ l = l_0 + kh,\ -\infty < k < \infty\},$$

то

$$\varphi\left(2\pi \frac{r}{h}\right) = \sum_{l_0=0}^{h-1} \mathsf{P}(L_{l_0,h})\, e^{2\pi i r l_0/h} = \sum_{j=0}^{h-1} \mathsf{P}(L_{l_j,h})\, e^{2\pi i j/h},$$

$$r l_j \equiv j \pmod h.$$

§ 2. Оценка близости распределений по близости их характеристических функций

1. Равномерные расстояния. В настоящее время имеется несколько употребительных способов измерять «расстояние» между функциями распределения. Эти способы, как будет видно, имеют различную степень общности. Пространство распределений, заданных на σ-алгебре борелевских множеств полного сепарабельного метрического пространства, может быть метризовано таким образом, что сходимость в смысле этой метрики будет равносильна слабой сходимости (см. с. 94). Мы не будем останавливаться сейчас на этом направлении. Можно определить «расстояние» формулой

$$\rho_{\mathfrak{A}}(\mathsf{P}, \mathsf{Q}) = \sup_{A \in \mathfrak{A}} |\mathsf{P}(A) - \mathsf{Q}(A)|,$$

где верхняя грань берется по некоторому подклассу $\mathfrak{A}$ класса измеримых множеств. В случае распределений в евклидовом пространстве R^s наиболее естественными представляются два случая: а) $\mathfrak{A}$ совпадает с классом $\mathfrak{C}$ всех выпуклых борелевских множеств, б) $\mathfrak{A}$ совпадает с классом $\mathfrak{B}$ всех борелевских множеств.

Рассмотрим $\rho_{\mathfrak{C}}(\mathsf{P}, \mathsf{Q})$ сначала в R, где

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant \rho_{\mathfrak{C}}(\mathsf{P}, \mathsf{Q}) \leqslant 2 \sup_x |F(x) - G(x)|.$$

Здесь F и G — функции распределения мер P и Q соответственно. Сходимость

$$\sup_x |F_n(x) - G(x)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

вытекает из сходимости

$$\sup_t |\varphi_n(t) - \psi(t)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

для соответствующих характеристических функций. Однако существуют примеры, где

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t |\varphi_n(t) - \psi_n(t)| = 0$$

и в то же время

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |F_n(x) - G_n(x)| > 0.$$

Например, выбирая два действительных числа a и b $(0 < a < b)$ и рассматривая две функции распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \Big| \ln \frac{b}{a}, \quad x \leqslant 0,$$

$$G(x) = 1 - F(-x),$$

имеем

$$F(0) - G(0) = 1.$$

Однако для разности характеристических функций справедлива оценка

$$|\varphi(t)-\psi(t)|=\left|i\pi\frac{t}{|t|}\left(e^{-a|t|}-e^{-b|t|}\right)\right|\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-1}<\pi\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-1}.$$

Основой доказательства многих предельных теорем служит следующее неравенство Эссеена (в котором $G(x)$ может быть не только функцией распределения, но и просто функцией с ограниченным изменением): при любом $T>0$

$$\sup_x|F(x)-G(x)|\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^T\left|\frac{\varphi(u)-\psi(u)}{u}\right|du+\frac{24}{\pi}\cdot\frac{\sup|G'|}{T}.$$

Можно отметить ряд неравенств, близких по смыслу к приведенному *). Доказано, например, что найдется такая абсолютная постоянная C, что для любых A, T, $\varepsilon>0$, неубывающей функции $F(x)$ и функции ограниченной вариации $G(x)$ из условий:

1) $F(-\infty)=G(-\infty)$;
2) $G'(x)$ существует при всех x и $|G'(x)|\leqslant A$;
3) $|\varphi(t)-\psi(t)|<\varepsilon$ для $|t|<T$

следует, что для любого $L>2/T$

$$|F(x)-G(x)|<C\left(\varepsilon\ln(LT)+\frac{A}{T}+\gamma(L)\right),$$

где

$$\gamma(L)=\operatorname*{Var}_{-\infty<x<\infty}G(x)-\sup_x\operatorname*{Var}_{x<y<x+L}G(y).$$

Наконец, если F и G изменяются только скачками, расположенными в целых точках, то

$$|F(x)-G(x)|\leqslant\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t}\right|dt.$$

Для сходимости по вариации, т. е. для сходимости в смысле расстояния $\sup_{\mathfrak{B}}|\mathsf{P}(A)-\mathsf{Q}(A)|$, нет никакого адекватного выражения в терминах характеристических функций, и предельные теоремы со сходимостью по вариации приходится доказывать обходными путями.

Заметим, что если P и Q абсолютно непрерывны относительно какой-либо меры, скажем меры Лебега:

$$\mathsf{P}(A)=\int_A p(x)\,dx,\quad \mathsf{Q}(A)=\int_A q(x)\,dx,$$

*) Оценки расстояния Леви через характеристические функции см. [34].

то

$$\sup_{\mathfrak{B}} |\mathsf{P}(A) - \mathsf{Q}(A)| = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |p(x) - q(x)|\, dx.$$

Сходимость плотностей $p_n(x)$ к плотности $p(x)$ обычно удается установить, представляя $p_n(x)$ в виде (q_n и r_n — некоторые плотности)

$$p_n(x) = \lambda_n q_n(x) + \mu_n r_n(x), \quad \lambda_n + \mu_n = 1, \quad \lambda_n \geqslant 0, \quad \mu_n \geqslant 0,$$

где $q_n(x)$ сходится к $q(x)$ равномерно на всей оси, а $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

2. **Многомерный случай.** Перейдем теперь к многомерному случаю. Отметим сначала аналог классической теоремы Пойа о том, что слабая сходимость последовательности функций распределения к непрерывной функции распределения автоматически оказывается равномерной. Пусть P — вероятностная мера в R^s такая, что каждое выпуклое подмножество R^s имеет P-нулевую границу. При этом условии $\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P}$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{C \in \mathfrak{C}} |\mathsf{P}_n(C) - \mathsf{P}(C)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

где $\mathfrak{C}$ — класс всех борелевских выпуклых множеств. В частности, это верно, если мера P абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега.

Известны многомерные аналоги неравенства Эссеена, указанного выше в п. 1, но они значительно сложнее формулируются.

Оценка близости распределений на сферах по разности их характеристических функций для специального случая сходимости к нормальному закону встречается у Эссеена [128].

«Равномерные» расстояния и связанные с ними предельные теоремы становятся бесполезными, когда нужно оценивать малые вероятности с большой относительной точностью. Наиболее важный случай «больших отклонений» изучен довольно полно (см. § 10). При этом в качестве существенного вспомогательного средства используются «равномерные» теоремы [96].

§ 3. Моменты и семиинварианты

1. Формальные соотношения.

Моменты. Пусть ξ — действительная случайная величина и P_ξ — распределение вероятностей, представляющее собой вероятностную борелевскую меру на действительной прямой. Пусть $F = F_\xi$ — функция распределения и $\varphi = \varphi_\xi$ — характеристическая функция, отвечающие этой мере (т. е. это функция распределения и характеристическая функция случайной величины ξ: $F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$, $\varphi_\xi(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$).

Моментом порядка k случайной величины ξ называется математическое ожидание $\mathsf{M}\xi^k$ (если оно существует); *абсолютным моментом порядка* k — величина $\mathsf{M}|\xi|^k$; *центральным моментом порядка* k — величина $\mu_k = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^k$. Центральный момент второго порядка

$$\mu_2 = \mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2 = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2$$

называется *дисперсией* случайной величины ξ.

Если $\mathsf{M}|\xi|^k < \infty$, то характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ имеет непрерывные производные до порядка k включительно, причем

$$\mathsf{M}\xi^k = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi_\xi(t)\big|_{t=0}.$$

В свою очередь существование производной $\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \varphi_\xi(t)\big|_{t=0}$ влечет за собой существование абсолютного момента порядка $2k$: $\mathsf{M}|\xi|^{2k} < \infty$.

Семиинварианты. Если $\mathsf{M}|\xi|^k < \infty$, то в некоторой окрестности точки $t = 0$ функция $\ln \varphi_\xi(t)$ (ветвь логарифма, для которого $\ln \varphi_\xi(0) = 0$) непрерывно дифференцируема до порядка k включительно. Величина

$$\varkappa_k = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} \ln \varphi_\xi(t)\big|_{t=0}$$

называется *семиинвариантом порядка* k. Отметим, что

$$\varkappa_1 = \mathsf{M}\xi = \alpha_1, \quad \varkappa_2 = \mathsf{D}\xi = \mu_2, \quad \varkappa_3 = \mathsf{M}(\xi - \varkappa_1)^3 = \mu_3.$$

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — действительные случайные величины; функция их совместного распределения $F = F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}$ определяется как

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\}.$$

Характеристическая функция $\varphi = \varphi_{\xi_1,\ldots,\xi_n}$ *совместного распределения* случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выражается формулой

$$\varphi_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(t_1, \ldots, t_n) = \mathsf{M}\exp\{i(t_1\xi_1 + \ldots + t_n\xi_n)\}.$$

Если $\mathsf{M}|\xi_j|^k < \infty$ при всех $j = 1, \ldots, n$, то существуют *смешанные моменты* $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} = \mathsf{M}\xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n}$ для всех $k_j \geqslant 0$, $k_1 + \ldots + k_n \leqslant k$. В этом случае характеристическая функция $\varphi = \varphi_{\xi_1,\ldots,\xi_n}$ имеет непрерывные частные производные до порядка k включительно, причем

$$\alpha_{k_1,\ldots,k_n} = (-i)^{k_1+\ldots+k_n} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_n^{k_n}}\Bigg|_{t_1=\ldots=t_n=0}.$$

В некоторой окрестности точки $t_1 = \ldots = t_n = 0$ имеет непрерывные производные того же порядка и функция $\ln \varphi$; величины

$$\varkappa_{k_1, \ldots, k_n} = (-i)^{k_1 + \ldots + k_n} \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_n^{k_n}} \log \varphi \,|_{t_1 = \ldots = t_n = 0}$$

называются *семиинвариантами.*

Соотношения между моментами и семиинвариантами. Важнейшие характеристики распределения вероятностей случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — моменты и семиинварианты — связаны между собой простыми соотношениями. Именно, пусть

$$\begin{gathered}
\eta_1 = \xi_1, \ldots, \eta_{k_1} = \xi_1, \\
\eta_{k_1+1} = \xi_2, \ldots, \eta_{k_1+k_2} = \xi_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_{m-k_n+1} = \xi_n, \ldots, \eta_m = \xi_n,
\end{gathered}$$

где $m = k_1 + \ldots + k_n$, и пусть $I_p = (i_1, \ldots, i_p)$ — множество натуральных чисел. Моменты

$$\alpha(I_p) = \mathsf{M} \eta_{i_1} \ldots \eta_{i_p}$$

и семиинварианты

$$\varkappa(I_p) = \frac{\partial^p}{\partial t_{i_1} \ldots \partial t_{i_p}} \ln \varphi(0)$$

зависят лишь от I_p и связаны с указанными выше моментами $\alpha_{k_1, \ldots, k_n}$ и семиинвариантами $\varkappa_{k_1, \ldots, k_n}$ формулами [55]

$$\alpha_{k_1, \ldots, k_n} = \sum \prod_{p=1}^{q} \alpha(I_p), \quad \varkappa_{k_1, \ldots, k_n} = \sum (-1)^{q-1} (q-1)! \prod_{p=1}^{q} \varkappa(I_p),$$

где суммирование производится по всевозможным разбиениям множества натуральных чисел $1, \ldots, m$ на непересекающиеся множества I_p.

В частности, для одномерного случая имеет место соотношение

$$\alpha_m = \sum_{r=0}^{m} \sum \left(\frac{\varkappa_{l_1}}{l_1!}\right)^{j_1} \ldots \left(\frac{\varkappa_{l_r}}{l_r!}\right)^{j_r} \frac{m!}{j_1! \ldots j_r!},$$

где внутренняя сумма распространена на все те неотрицательные j и l, для которых

$$l_1 j_1 + \ldots + l_r j_r = m.$$

Отсюда, например, получаем

$$\mu_2 = \varkappa_2,$$
$$\mu_3 = \varkappa_3,$$
$$\mu_4 = \varkappa_4 + 3\varkappa_2^2,$$
$$\mu_5 = \varkappa_5 + 10\varkappa_3\varkappa_2,$$
$$\mu_6 = \varkappa_6 + 15\varkappa_4\varkappa_2 + 10\varkappa_3^2 + 15\varkappa_2^3,$$
$$\mu_7 = \varkappa_7 + 21\varkappa_5\varkappa_2 + 35\varkappa_4\varkappa_3 + 105\varkappa_3\varkappa_2^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Выражение семиинвариантов в терминах моментов дается формулой

$$\varkappa_m = m! \sum_{r=0}^{m} \sum \frac{(-1)^{j-1}(j-1)!}{j_1! \ldots j_r!} \left(\frac{\alpha_{l_1}}{l_1!}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\alpha_{l_r}}{l_r!}\right)^{j_r},$$

где суммирование производится по всем неотрицательным числам j и l, подчиненным условиям

$$l_1 j_1 + \ldots + l_r j_r = m, \quad j_1 + \ldots + j_r = j.$$

Отсюда получаем (в предположении, что $\alpha_1 = 0$)

$$\varkappa_2 = \alpha_2,$$
$$\varkappa_3 = \alpha_3,$$
$$\varkappa_4 = \alpha_4 - 3\alpha_2^2,$$
$$\varkappa_5 = \alpha_5 - 10\alpha_3\alpha_2,$$
$$\varkappa_6 = \alpha_6 - 15\alpha_4\alpha_2 - 10\alpha_3^2 + 30\alpha_2^3,$$
$$\varkappa_7 = \alpha_7 - 21\alpha_5\alpha_2 - 35\alpha_4\alpha_3 + 210\alpha_3\alpha_2^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

2. Проблема моментов. Для того чтобы распределение вероятностей P однозначно определялось своими моментами, достаточно выполнение условия (Карлеман)

$$\sum_{1}^{\infty} (\alpha_{2n})^{-1/(2n)} = \infty.$$

Для распределения m-мерных случайных векторов ξ полагаем

$$\alpha_{p_1 \ldots p_m} = \int_{R^m} x_1^{p_1} \ldots x_m^{p_m} \mathsf{P}_\xi (dx_1 \ldots dx_m),$$

$$A_n = \alpha_{n0\ldots0} + \alpha_{0n0\ldots0} + \ldots + \alpha_{0\ldots0n}.$$

Тогда условие

$$\sum_{0}^{\infty} (A_{2n})^{-1/(2n)} = \infty$$

достаточно для того, чтобы m-мерное распределение однозначно определялось своими моментами.

С другой стороны, известны условия, при которых распределение заведомо не определяется своими моментами однозначно. Так будет, например, если функция распределения $F(x)$ удовлетворяет условию (F' — производная абсолютно непрерывной части F)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln F'(x)}{1+x^2}\,dx > -\infty.$$

Классический пример. Пусть $\alpha > 0$, $0 < \rho < 1$, $\beta = \alpha \operatorname{tg}(\pi\rho/2)$; плотности

$$p(x) = k \exp\{-\alpha|x|^\rho\}\{1 + \varepsilon\cos(\beta|x|^\rho)\}$$

при всех ε из интервала $|\varepsilon| < 1$ имеют одни и те же моменты.

Другой пример. Пусть ξ — нормальная случайная величина, причем $\mathsf{M}\xi = 0$, $\mathsf{D}\xi = 1$; тогда распределение ξ^k при $k \geqslant 3$ не определяется своими моментами однозначно. Точно так же и распределение e^ξ (так называемое *логарифмически нормальное распределение*) не определяется однозначно своими моментами.

3. Неравенства. Перейдем теперь к неравенствам, связывающим моменты, а также моменты и семиинварианты. Семиинварианты можно оценить через абсолютные центральные моменты $\beta_r = \mathsf{M}|\xi - \mathsf{M}\xi|^r$ неравенством

$$|\varkappa_r| \leqslant r^r \beta_r.$$

Однако для большинства приложений это неравенство оказывается слишком грубым. Например, для равномерного на отрезке $\left[-\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}\right]$ распределения имеем

$$\varkappa_{2j+1} = 0, \quad \varkappa_{2j} = B_{2j}\frac{h^{2j}}{2j},$$

где B_{2j} — числа Бернулли ($B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$, $B_{10} = 5/66, \ldots$). Поэтому, например, здесь

$$|\varkappa_4| = \frac{4}{3}\beta_4,$$

в то время как предыдущее неравенство дает

$$|\varkappa_4| \leqslant 256\beta_4.$$

Аналогично для дискретного распределения, приписывающего точкам $1, 2, \ldots, n$ одинаковые вероятности, равные $1/n$, имеем при $j \geqslant 1$

$$\varkappa_{2j+1} = 0, \quad \varkappa_{2j} = B_{2j}\frac{n^{2j}-1}{2j}.$$

Моменты какой-либо случайной величины ξ связаны неравенствами, равносильными утверждению о выпуклости функции $\gamma(r) = \ln \mathsf{M}|\xi|^r$ в той области, где эта функция определена. Большую информацию о соотношении между моментами можно получить, если предположить, что ξ является суммой независимых случайных величин (подчиненных, может быть, каким-либо дополнительным ограничениям).

Пример. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ принимают значения ± 1 с вероятностью $1/2$ каждое. Тогда при любых $b_i > 0$ и $s \geqslant 2$

$$\mathsf{M}\left|\sum b_j\xi_j\right|^s \leqslant C(s, n)\left(\sum b_j^2\right)^{s/2},$$

где

$$C(s, n) = 2^{-n}n^{-s/2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k |n-2k|^s \leqslant \frac{2^{s/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right).$$

Указанное неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда или $s = 2$, или все b_i равны одному и тому же числу. Из этого неравенства можно вывести (с использованием условных распределений) следующее утверждение. Если все ξ_i симметричны, $|\xi_j| \leqslant 1$ и $\sum b_j^2 = 1$, то при целом s

$$\mathsf{M}\left|\sum b_j\xi_j\right|^{2s} \leqslant 1\cdot 3 \ldots (2s-1).$$

Другой тип неравенств для моментов суммы $s_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ симметричных слагаемых ξ_j можно получить, фиксируя некоторое количество моментов неубывающей функции

$$G(x) = F_1(x) + \ldots + F_n(x), \quad F_j(x) = \mathsf{P}\{\xi_j < x\}.$$

Именно, пусть ξ_j симметрично распределены и имеют моменты до порядка $2k$ включительно. Тогда при фиксированных

$$x_{2j} = \int_{-\infty}^{\infty} u^{2j}\,dG(u), \quad 1 \leqslant j \leqslant k,$$

имеем

$$\sup_{\xi_j, n} \mathsf{M}s_n^{2k} = \mathsf{M}\tau^{2k},$$

где τ — безгранично делимая случайная величина (см. § 4) с характеристической функцией

$$\varphi_\tau(t) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu} - 1)\,dG(u)\right\}.$$

Полагая последовательно $k = 2, 3, \ldots$, получаем неравенства

$$\mathsf{M}s_n^4 \leqslant x_4 + 3x_2^2,$$
$$\mathsf{M}s_n^6 \leqslant x_6 + 15x_4x_2 + 15x_2^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Отсюда можно получить при целых $k>0$ неравенства

$$\mathsf{M}s_n^{2k} \leqslant \widetilde{C}(n, k)\cdot \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{M}\xi_j^{2k},$$

где $\widetilde{C}(n, k)$ — $2k$-й момент безгранично делимой случайной величины с характеристической функцией $e^{n(\cos t-1)}$.

4. Сходимость моментов. Использование моментов при доказательстве предельных теорем базируется на следующем факте. Пусть F_n — последовательность функций распределения, все моменты которых конечны, и пусть при каждом целом $k \geqslant 1$ имеет место сходимость

$$\alpha_k(F_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_n \to \alpha_k \neq \pm\infty, \quad n\to\infty.$$

Тогда существует подпоследовательность F_{n_j}, слабо сходящаяся к функции распределения F, имеющей α_k своими моментами. Если моменты определяют F однозначно, то последовательность F_n слабо сходится к F.

Пример. Одно из следствий этого факта (часто используемое, например, при изучении отклонений эмпирического распределения от теоретического) таково. Пусть

$$E_{n1}, \ldots, E_{nn}$$

— последовательность серий случайных событий, и пусть при $n\to\infty$ и каждом $r = 1, 2, 3, \ldots$

$$S_{nr} = \sum_{i_1<\ldots<i_r} \mathsf{P}\{E_{ni_1}\ldots E_{ni_r}\} \to \frac{a^r}{r!}.$$

Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что наступает ровно m событий n-й серии, имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = e^{-a}\frac{a^m}{m!}.$$

Приведем еще два типичных примера, где метод моментов оказывается полезным. Во-первых, рассмотрим последовательность сумм s_n ($s_0=0$) независимых, одинаково распределенных случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями. Тогда при достаточно общих условиях для числа ν_n перемен знака в последовательности $s_0, s_1, \ldots, s_n$ можно установить (методом моментов), что при $x\geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\nu_n \leqslant x\frac{\beta_1}{2\sigma}\sqrt{n}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz,$$

где

$$\beta_1 = \mathsf{M}|\xi_j|, \quad \sigma^2 = \mathsf{M}\xi_j^2.$$

(заметим попутно, что можно привести пример двух распределений, у которых все моменты совпадают, а первые абсолютные моменты различны; отсюда следует, что асимптотическое поведение ν_n не определяется моментами распределения в отличие от s_n).

Во-вторых, метод моментов является подходящим орудием исследования сумм вида

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(T^m x), \tag{3.1}$$

где T — метрически транзитивное, сохраняющее меру преобразование пространства с мерой в себя [54]. Пусть, например, g — натуральное число, $0<\alpha<1$ и $T\alpha$ равно дробной части $g\alpha$. Тогда для любой достаточно гладкой вещественной периодической (с периодом 1) функции f такой, что $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}\left\{\alpha\colon 0<\alpha<1,\ \sum_{m=0}^{n-1} f(g^m\alpha) < z\sqrt{n}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{z} e^{-u^2(2\sigma^2)}\,du.$$

Более общий результат дается следующей теоремой.

Пусть T — эргодический эндоморфизм коммутативной компактной группы G, μ — инвариантная мера на G, $f(x)\in L_2(G)$ и коэффициенты c_k разложения f по характерам $\chi_k(x)$ группы удовлетворяют условию

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\neq 0} |c_k|\,|c_{A^j(k)}| < \infty,$$

где $A(k)$ — преобразование индексов, определяемое соотношением

$$\chi_{A(k)}(x) = \chi_k(Tx).$$

Тогда суммы (3.1) асимптотически нормальны.

§ 4. Безгранично делимые распределения и их связь с предельными теоремами

1. Определение, связь с предельными теоремами. Распределение в R^1 с функцией распределения $F(x)$ и характеристической функцией $\varphi(t)$ называют *безгранично делимым*, если при любом n оно может быть представлено как композиция n одинаковых распределений, или, что то же самое,

$$\varphi(t) = (\varphi_n(t))^n,$$

где φ_n — характеристическая функция. Случайная величина ξ, определенная над полем вероятностей $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, называется *без-*

гранично делимой, если при любом n она может быть представлена в виде суммы n одинаково распределенных независимых случайных величин. Очевидно, всякая безгранично делимая случайная величина имеет *безгранично делимое распределение*. Обратное может быть неверно. Так, если взять дискретное поле вероятностей, составленное из неотрицательных целых чисел с приписанными им пуассоновыми вероятностями

$$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

то случайная величина, равная номеру элементарного события, не будет безгранично делимой, хотя распределение Пуассона безгранично делимо.

Далее речь будет идти в основном о безгранично делимых распределениях. Из определения легко вытекает, что $\varphi(t) \neq 0$ и что при $n \to \infty$

$$n[\varphi_n(t) - 1] \to \ln \varphi(t)$$

равномерно в каждом конечном интервале.

Чисто аналитический факт, лежащий в основе так называемого канонического представления безгранично делимых законов и условий сходимости последовательностей безгранично делимых законов, состоит в следующем. Рассмотрим пространство Y, точками которого являются непрерывные на всей прямой функции и топология в котором порождается равномерной в каждом конечном интервале сходимостью. Класс Ψ функций вида

$$\psi(t) = i\gamma t + \lambda[\varphi(t) - 1]$$

(γ — константа, φ — характеристическая функция) не является замкнутым подмножеством Y. Его замыкание Ψ^* состоит из функций, представимых в виде

$$\psi^*(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} L(u, t) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u),$$

где

$$L(u, t) = e^{iut} - 1 - \frac{itu}{1+u^2},$$

γ — константа, $G(u)$ — неубывающая функция ограниченной вариации такая, что $G(-\infty) = 0$. Подынтегральное выражение при $u = 0$ принимается равным $-t^2/2$. Соответствие $\psi^* \leftrightarrow (\gamma, G)$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывным. Последнее означает, что равномерная в каждом конечном интервале сходимость

$$\psi_n^*(t) \to \psi^*(t)$$

эквивалентна двум требованиям: а) $\gamma_n \to \gamma$, б) $G_n(u)$ слабо сходится к $G(u)$.

Связь безгранично делимых законов с предельными теоремами для сумм независимых случайных величин подробно изучена [23]. Мы приведем здесь лишь несколько утверждений, наиболее выпукло иллюстрирующих эту связь. Пусть

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

— *последовательность серий* случайных величин. Внутри каждой серии эти величины предполагаются независимыми. Кроме того, они предполагаются *бесконечно малыми* в следующем смысле: при каждом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leqslant k\leqslant k_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| > \varepsilon\} = 0.$$

Пусть

$$s_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}.$$

Тогда для того, чтобы функция распределения F могла быть предельной для функции распределения случайных величин $s_n - A_n$ (при некотором выборе A_n), необходимо и достаточно, чтобы она была безгранично делимой.

Каноническое представление логарифма характеристической функции безгранично делимого закона, которое, согласно сказанному выше, имеет вид

$$\ln \varphi(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} L(u, t) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u),$$

часто используется в несколько отличной от приведенной записи. Именно, полагая при $u < 0$ (соответственно при $u > 0$)

$$dM(u) = \frac{1+u^2}{u^2} dG(u), \quad dN(u) = \frac{1+u^2}{u^2} dG(u),$$
$$M(-\infty) = N(\infty) = 0,$$

мы получаем две не убывающие на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ функции (соответственно $M(u)$ и $N(u)$) такие, что при каждом $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\varepsilon}^{-0} u^2 dM(u) + \int_{+0}^{\varepsilon} u^2 dN(u) < \infty.$$

Пусть $\sigma^2 = G(+0) - G(-0)$. Тогда

$$\ln \varphi(t) = i\gamma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{-\infty}^{-0} L(u, t)\, dM(u) + \int_{+0}^{\infty} L(u, t)\, dN(u).$$

В отличие от G функции M и N имеют прямой вероятностный смысл, объясняемый в теории процессов с независимыми приращениями. Роль этих функций в предельных теоремах демонстрируется, например, следующим утверждением. Предположим (используя прежние обозначения), что при некотором выборе постоянных A_n функции распределения разностей $s_n - A_n$ слабо сходятся к некоторой предельной функции распределения. Тогда для того, чтобы это была функция распределения с заданными M и N, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\min_k \xi_{nk} < u\right\} = \begin{cases} 1 - e^{-M(u)} & \text{при } u < 0, \\ 1 & \text{при } u > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\max_k \xi_{nk} < u\right\} = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0, \\ e^{N(u)} & \text{при } u > 0. \end{cases}$$

Как легко видеть, для нормального закона $M \equiv 0$ и $N \equiv 0$. Поэтому, если предельный закон для $s_n - A_n$ *существует*, то он будет нормальным тогда и только тогда, когда при любом $u > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\max_k |\xi_{nk}| > u\right\} = 0,$$

или, что то же самое, при любом $u > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| > u\} = 0.$$

2. Свойства безгранично делимых законов. Ввиду того что описание класса безгранично делимых законов дается в терминах характеристических функций, свойства этих законов приходится описывать с помощью свойств функции G, входящей в каноническое представление (или, что то же самое, в терминах M, N и σ).

Пример. Функция безгранично делимого распределения F дискретна тогда и только тогда, когда G дискретна и $\int_{-\infty}^{\infty} u^{-2} dG(u) < \infty$; F непрерывна тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{\infty} u^{-2} dG(u) = \infty$. Для абсолютной непрерывности F известны лишь достаточные условия в терминах функций M и N.

Момент порядка $2k$ (k — целое положительное число) функции безгранично делимого распределения F существует тогда и только тогда, когда существует момент того же порядка функции G *). Известно, что ограниченная случайная величина не может иметь безгранично делимый закон распределения. Более того, достаточно быстрое убывание вероятности $\mathsf{P}\{|\xi| > x\}$ при $x \to \infty$, например $\mathsf{P}\{|\xi| > x\} = O(\exp\{-ax \log^{\delta} x\})$ ($a > 0$, $\delta > 0$), для безгранично делимого закона влечет его нормальность.

*) Несколько более общее утверждение см. [51, 131].

Однако известны условия ограниченности сверху (снизу). Так, если ξ — случайная величина с безгранично делимым законом распределения, то для существования константы A такой, что $\mathsf{P}\{\xi > A\} = 0$, необходимы и достаточны условия [131]

$$N(u) \equiv 0, \quad \sigma^2 = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} M(u)\,du < \infty.$$

Добавим, что плотность безгранично делимого закона (если она существует) либо вообще не имеет нулей, либо равна нулю на целой полупрямой.

§ 5. Последовательности независимых случайных величин (общие свойства)

Значительная часть вероятностной интуиции формируется на примере независимых случайных величин и его важнейшем частном случае — последовательности независимых одинаково распределенных величин. У таких последовательностей имеется ряд свойств, которые сравнительно легко устанавливаются при ограничениях типа конечности моментов какого-либо порядка, существования плотностей рассматриваемых величин и т. п., но которые по своей природе кажутся связанными только с фактом независимости членов последовательности и тождественности их распределений. Однако доказательство подобных свойств в общей форме бывает часто делом совсем не простым. Рассмотрим типичные примеры, начиная с простейших.

Пример. *Убывание концентрации распределений* (слабый вариант). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных величин с невырожденной функцией распределения $F(x)$, и пусть

$$s_0 = 0, \quad s_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Можно показать, что вероятность неравенства $a \leqslant s_n \leqslant b$ при любых фиксированных a и b и $n \to \infty$ стремится к нулю. Более того, полагая

$$Q_\xi(l) = \sup_x P\{x \leqslant \xi \leqslant x + l\}$$

($Q_\xi(l)$ — так называемая *функция концентрации* ξ; см. [103]), имеем при любом $l > 0$

$$\lim_{n\to\infty} Q_{s_n}(l) = 0.$$

Доказательство проще всего проводится полезным методом «сглаживания». Допустим, что η — случайная величина, не зависящая от последовательности $\{\xi_n\}$ и имеющая распределение с абсолютно интегрируемой на всей прямой характеристической функцией.

В качестве распределения случайной величины η можно взять, например, треугольное распределение с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1 \end{cases}$$

и характеристической функцией

$$\varphi_\eta(t) = \left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)^2.$$

Для суммы $s_n + \eta$ плотность существует и выражается формулой обращения

$$p_{s_n+\eta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left[\varphi_{\xi_1}(t)\right]^n \varphi_\eta(t)\, dt.$$

Так как $\left|\varphi_{\xi_1}(t)\right| \leqslant 1$ при всех t и равенство возможно только в счетном множестве точек, то при $n \to \infty$

$$\lambda_n = \sup_x p_{s_n+\eta}(x) \to 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\{x \leqslant s_n \leqslant x + l\} \leqslant \mathsf{P}\{x - 1 \leqslant s_n + \eta \leqslant x + l + 1\} \leqslant (l+2)\lambda_n,$$

и, значит,

$$Q_{s_n}(l) \leqslant (l + 2)\lambda_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Пример. *Выход за двусторонние пределы.* Можно доказать, что с вероятностью единица

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |s_n| = \infty.$$

Это утверждение вытекает как следствие из другого, несколько более сильного утверждения [15]: для любой последовательности $\{\xi_n\}$ и любых $a < 0 < b$ найдутся два числа $C > 0$ и q $(0 < q < 1)$ такие, что

$$P_N(a, b) = \mathsf{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{N} (a \leqslant s_n \leqslant b)\right\} \leqslant Cq^N.$$

Последнее в свою очередь можно получить из сказанного в предыдущем примере.

Пример. *Верхние и нижние функции.* Функция $g(n)$ называется *верхней* для последовательности сумм s_n, если

$$\mathsf{P}\{\text{начиная с некоторого } n_0,\ s_n \leqslant g(n)\} = 1,$$

и *нижней*, если

$$\mathsf{P}\{\text{для бесконечно многих } n\ s_n \geqslant g(n)\} = 1.$$

Если справедливы предположения о независимости и одинаковой распределенности невырожденных слагаемых, то каждая функция является либо верхней, либо нижней.

Дальнейшие примеры потребуют некоторых дополнительных предположений о рассматриваемых случайных величинах.

Пример. Пусть $-\infty \leqslant M\xi_j \leqslant 0$. Тогда с вероятностью единица

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n = -\infty. \tag{5.1}$$

При $M\xi_j < 0$ это утверждение вытекает из усиленного закона больших чисел (если $M\xi_j$ конечно), а при $M\xi_j = -\infty$ — из некоторого его обобщения. Рассмотрим поэтому случай $M\xi_j = 0$. Для доказательства предельного соотношения (5.1) усиленного закона больших чисел здесь недостаточно. Можно воспользоваться результатом Чжуна и Фукса: если возможные значения ξ_j не кратны одному и тому же числу и $M\xi_j = 0$, то для любых x и ε

$$P\{|s_n - x| < \varepsilon \text{ для бесконечно многих } n\} = 1; \tag{5.2}$$

если же возможные значения ξ_j кратны некоторому числу и x_0 — наибольшее по модулю число с этим свойством, то соотношение (5.2) верно для всех чисел, кратных x_0.

Из этого же результата можно сделать следующий вывод: если $M\xi_j$ существует, то

$$P\{s_n > 0 \text{ для бесконечно многих } n\} =$$
$$= P\{s_n < 0 \text{ для бесконечно многих } n\} = 1$$

в том и только том случае, когда $M\xi_j = 0$.

Пример. *Верхние функции для сумм симметрично распределенных слагаемых.* Каковы бы ни были симметрично распределенные величины ξ_j,

$$P\left\{\varlimsup_{n\to\infty} \frac{s_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = \sigma^2\right\} = 1, \tag{5.3}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) \leqslant \infty.$$

Для $\sigma^2 < \infty$ справедливость соотношения (5.3) вытекает из закона повторного логарифма, для $\sigma^2 = \infty$ доказательство справедливости (5.3) требует несложных дополнительных рассуждений.

Пример. *Более точные оценки убывания концентрации.* Первая абсолютная, т. е. содержащая лишь абсолютные константы, оценка для концентрации суммы при заданных концентрациях слагаемых была получена А. Н. Колмогоровым методом, развивающим метод П. Леви. В дальнейшем этот результат был усилен Б. А. Рогозиным, которому удалось найти формулировку, включающую в качестве частных случаев все ранее найденные теоремы об убывании концентрации и увеличении рассеяния сумм независимых случайных величин. Эти результаты Рогозина основаны на одной лемме, опирающейся на глубокие факты комбинаторики.

Пусть D_n — максимальная вероятность в симметричной схеме Бернулли с n испытаниями:

$$D_n = C_n^{[n/2]} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

и пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые величины (не обязательно одинаково распределенные) такие, что

$$\mathsf{P}\{\xi_i = x_i\} = \mathsf{P}\{\xi_i = -x_i\} = 1/2, \quad x_i \geqslant l/2.$$

Лемма. *Для сумм указанных случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots$

$$Q_{s_n}(l-0) \leqslant D_n.$$

Простым применением этой леммы получается средствие: пусть $p = \sup\limits_x \mathsf{P}\{\xi_i = x\}$, тогда

$$\sup_x \mathsf{P}\{s_n = x\} \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{n(1-p)}} \tag{5.4}$$

(для симметричных ξ_i можно взять $C_1 = 1$). Уместно заметить, что для одинаково распределенных целочисленных ξ_i с характеристической функцией $\varphi(t)$ вышеприведенное неравенство равносильно следующему:

$$\int_0^\pi |\varphi(t)|^n dt \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{n(1-p)}}; \tag{5.5}$$

поэтому, доказав (5.5) аналитическим путем*), мы доказали бы и (5.4).

Наиболее общие результаты, касающиеся оценок функций концентрации в одномерном случае, принадлежат Б. В. Рогозину и Г. Кестену [103, 137].

Пример. *Сближение распределений сумм с безгранично делимыми распределениями.* Пусть опять ξ_i — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, а $F^{n*}(x)$ — функция распределения суммы s_n. Обозначим буквой $\mathfrak{G}$ класс всех безгранично делимых законов, и пусть

$$\rho(F, G) = \sup_x |F(x) - G(x)|,$$

$$\psi_n = \sup_F \inf_{G \in \mathfrak{G}} \rho(F, G).$$

*) Об аналитическом доказательстве см. [129].

Расположению множества «степеней» (в смысле композиции F^{n*} функций распределения F) посвящено много интересных работ *). Отметим результат Т. В. Арака [1, 2], устанавливающий точную скорость убывания ψ_n: существуют абсолютные постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 n^{-2/3} \leqslant \psi_n \leqslant C_2 n^{-2/3}.$$

Пример. *Убывание концентрации при сложении случайных векторов* **). Пусть ξ — случайный вектор со значениями в R^k. Функцией концентрации l-го порядка, соответствующей случайному вектору ξ, называется функция

$$Q_l^{\xi}(v) = \sup_{A \subset C_{lv}} \mathsf{P}\{\xi \in A\}, \quad 1 \leqslant l \leqslant k,$$

где C_{lv} — класс всех замкнутых выпуклых множеств, сечения которых всевозможными l-мерными гиперплоскостями имеют l-мерный объем, не превосходящий v. Пусть ξ_i — независимые одинаково распределенные случайные векторы в R^k, $\zeta_n = \sum_1^n \xi_i$. Допустим, что при некотором $n = n_0$ распределение случайного вектора ζ_{n_0} имеет компоненту, являющуюся сдвигом меры, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега некоторого l-мерного подпространства (рассматриваемой как мера в R^k). Тогда при $m \leqslant l$ имеют место неравенства

$$Q_m^{\zeta_n}(V) \leqslant C n^{-(l-m+1)/2},$$

где C — константа, зависящая, вообще говоря, от V и закона распределения отдельных слагаемых.

Отдельно может быть описан дискретный случай. Предположим, что ξ_i — независимые случайные векторы с одинаковыми дискретными невырожденными распределениями в R^k и $\zeta_n = \sum_1^n \xi_i$. Тогда при всех m $(1 \leqslant m \leqslant k)$ выполняются неравенства

$$Q_m^{\zeta_n}(V) \leqslant C n^{-(k-m+1)/2}.$$

§ 6. Последовательности независимых случайных величин. Сходимость к нормальному закону

1. Условия сходимости. В этом параграфе речь будет идти (если не оговорено противное) о последовательностях независимых одинаково распределенных случайных величин или векто-

*) См. ссылки и цит. монографии Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [23] (стр. 219).

**) Относительно убывания концентрации при сложении независимых векторов со значениями в банаховых пространствах см. [138].

ров. Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть ξ_n — последовательность случайных величин и $F(x) = \mathsf{P}\{\xi_n < x\}$. Для того чтобы при некоторых постоянных A_n и $B_n > 0$ распределение нормированной суммы

$$\eta_n = \frac{s_n - A_n}{B_n} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

сходилось к нормальному, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{X\to\infty}\left(X^2 \int\limits_{|x|>X} dF(x) \Big/ \int\limits_{|x|<X} x^2 dF(x)\right) = 0.$$

Нормирующие константы B_n могут или расти, как $\sqrt{n}$, или отличаться от $\sqrt{n}$ медленно меняющимся множителем. Известно, что $B_n \sim \sqrt{n}$ в том и только том случае, когда слагаемые имеют конечные дисперсии σ^2. Если предположить дополнительно существование конечного третьего момента у ξ_n, то для

$$F_n(x) = \mathsf{P}\left\{\frac{s_n - \mathsf{M}s_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\}$$

можно доказать неравенство

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < C\frac{\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}dz,$$

где $\beta_3 = \mathsf{M}|\xi_n - \mathsf{M}\xi_n|^3$ и C — абсолютная постоянная. Для C были последовательно предложены оценки 7,59; 2,9 (Эссеен); 2,05 (Уоллес); 0,9051 (Золотарев); 0,7655 (Шиганов). Известно также, что $C \geqslant 1/\sqrt{2\pi}$.

И. А. Ибрагимовым указаны необходимые и достаточные условия, при выполнении которых

$$|F_n(x) - \Phi(x)| = O(n^{-1/2}).$$

Во-первых, должно быть

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) < \infty,$$

и, во-вторых, при $z \to \infty$

$$\int\limits_{|x|>z} x^2 dF(x) = O(z^{-1}), \quad \int\limits_{|x|<z} x^3 dF(x) = O(1).$$

2. Уточнения. При наличии большего чем три числа конечных абсолютных моментов у ξ_n и при определенных предположениях о гладкости $F(x)$ можно дать более точные сведения о разности (см. [23, 36]) $F_n(x) - \Phi(x)$. Исходным пунктом при этом служит разложение для характеристической функции (имеющее один и тот же вид в пространствах любого конечного числа s измерений и даже в банаховых пространствах)

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{r} \frac{t^k}{k!} \mathsf{M}(t, \xi)^k + o(|t|^r),$$

справедливое в предположении

$$\mathsf{M}|\xi|^r < \infty$$

(здесь ξ обозначает любую из величин ξ_j, (t, ξ) — скалярное произведение векторов t и ξ). Из указанного разложения при $\mathsf{M}(t, \xi) = 0$ стандартными приемами выводится соотношение

$$\left[\varphi_\xi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = e^{\mathsf{M}(t,\xi)^2/2}\left(1 + \sum_{k=1}^{r-2} P_k \cdot n^{-k/2}\right) + o\left(n^{-(r-2)/2}\right),$$

где P_k — полиномы относительно $\mathsf{M}(t, \xi)^j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$.

Формальное обращение последнего равенства дает

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}} \in A\right\} = \Phi(A) + \sum_{k=1}^{r-2} \Phi_k(A)\, n^{-k/2} + o\left(n^{-(r-2)/2}\right).$$

В конечномерном пространстве Φ есть нормальное распределение (с теми же первыми и вторыми моментами, что и распределение ξ), а Φ_k — линейная комбинация обобщенных мер с преобразованиями Фурье

$$(it_1)^{m_1} \ldots (it_s)^{m_s} e^{-\mathsf{M}(t,\xi)^2/2}, \quad t = (t_1, \ldots, t_s).$$

Соответствующие коэффициенты определяются по моментам до r-го порядка включительно.

Указанное формальное обращение законно в одномерном случае, если, например, допустить, что величины ξ_j имеют абсолютно интегрируемую характеристическую функцию. В качестве A можно взять любое борелевское множество. Если же известно только, что

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |\varphi_\xi(t)| < 1,$$

то получается разложение для функций распределения [23, 96]

$$F_n(x) = \Phi(x) + \Phi'(x) \sum_{k=1}^{r-2} Q_k(x)\, n^{-k/2} + o\left(n^{-(r-2)/2}\right),$$

где Q_k — многочлен степени $3k - 1$ с коэффициентами, зависящими от

$$\alpha_3/\sigma^3, \ \ldots, \ \alpha_{k+2}/\sigma^{k+2}, \quad \alpha_p = \mathsf{M}\xi^p.$$

Одно из наиболее полезных применений последнего результата — построение преобразований, «улучшающих сходимость» к нормальному закону. Речь идет о следующем. Допустим, что последовательность η_n асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$. Требуется подобрать простые (и просто обратимые) функции $f_n(\cdot)$ так, чтобы случайные величины $\zeta_n = \xi_n + f_n(\xi_n)$ были «более нормальны», чем η_n.

Можно пояснить эту, не очень определенно сформулированную задачу таким примером. Величины χ_n^2, $\sqrt{2\chi_n^2}$, $(\chi_n^2/n)^{1/3}$ асимптотически нормальны*) при $n\to\infty$. Равномерное отклонение соответствующих функций распределения от их нормальных аппроксимаций становится меньше 0,01 для χ_n^2 при $n\geqslant 354$, для $\sqrt{2\chi_n^2}$ при $n\geqslant 23$; для $(\chi_n^2/n)^{1/3}$ при $n\geqslant 3$ это отклонение не превосходит 0,007.

Прием построения подобного рода преобразований может быть изложен следующим образом [8, 9]. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины с одним и тем же распределением вероятностей, и пусть $\varkappa_j$ есть j-й семиинвариант случайной величины ξ_1, η_n — нормированная сумма:

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n\varkappa_2}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_j - \varkappa_1).$$

Далее, пусть U_r — множество функций $u(x, v)$ с областью определения $|x| < \infty$ $(0 \leqslant v \leqslant V$, V — положительная постоянная), и пусть:

1) производная $\partial^{r-2}u/\partial v^{r-2}$ существует и непрерывна по v на прямой с уравнением $v = 0$;

2) существует положительная частная производная $\partial u/\partial x$ в области

$$|x| < Cv^{-(r-2)/(r-1)}, \quad C > 0, \quad r \geqslant 3.$$

В таком случае, если $|\varkappa_r| < \infty$ и $u(x, v) \in U_r$, то функция распределения $G_n(z)$ случайной величины

$$\zeta_n = u(\eta_n, n^{-1/2})$$

удовлетворяет условию

$$G_n(z) = \Phi(z) + O(n^{-(r-2)/2})$$

тогда и только тогда, когда для $u(x, v)$ при $v\to 0$ справедлива

*) Случайная величина χ_n^2 представляет собой сумму квадратов n независимых случайных величин, распределенных одинаково нормально с параметрами (0, 1).

асимптотическая формула

$$u(x, v) = x + \sum_{m=1}^{r-3} P_{3m-1}(x)\, v^m + O(v^{r-2}).$$

Здесь $P_i(x)$ — полиномы, которые определяются следующим образом. Сначала берется разложение

$$F_n(x) - \Phi(x) = \varphi(x) \sum_{m=1}^{r-3} Q_k(x)\, n^{-m/2} + O(n^{-(r-2)/2}),$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

и разложение правой части равенства

$$y(x) = \Phi^{-1}[\Phi + (F_n - \Phi)]$$

в точке Φ (по степеням $F_n - \Phi$). Подставляя вместо $F_n - \Phi$ его выражение, после перегруппировки членов получаем

$$y(x) = x + \sum_{m=1}^{r-3} P_{3m-1}(x)\, n^{-m/2} + R_r(x),$$

где $P_i(x)$ — искомые полиномы и $R_r(x) = O(n^{(r-2)/2})$.

При $m = 1$ и $m = 2$ имеем соответственно

$$P_2(x) \equiv \frac{\varkappa_3}{6\varkappa_2^{3/2}} (x^2 - 1),$$

$$P_5(x) \equiv \frac{\varkappa_3^2}{36\varkappa_2^3} (4x^3 - 7x) - \frac{\varkappa_4}{24\varkappa_2^2} (x^3 - 3x).$$

В цитированных статьях Л. Н. Большева имеется много примеров применения указанного приема.

Общий недостаток приводившихся выше асимптотических разложений и приближенных формул состоит в том, что оценка соответствующей им ошибки (получаемая в ходе доказательства) оказывается весьма большой. В то же время опыт применения указанных формул ко многим естественно возникающим примерам показывает их высокую точность*). Таким образом, задача выделения достаточно широкого класса распределений, для которых гарантированная точность нормальной аппроксимации и ее уточнений соответствует фактически наблюдаемой, все еще остается нерешенной.

3. Биномиальное распределение. Выше речь шла о непрерывных распределениях. Рассмотрим теперь важнейший случай дискретного распределения — биномиальное распределение. Пусть

*) См., например, пояснительную часть сборника [11].

n — полное число испытаний Бернулли с вероятностью успеха, равной p, $q = 1 - p$, $\sigma = \sqrt{npq}$, нормированное число успехов

$$z_k = \frac{k - np}{\sigma}.$$

Обозначим символом $P_{\lambda\mu}$ вероятность того, что число успехов удовлетворяет неравенству $\lambda \leqslant m \leqslant \mu$. Пусть, далее, для какой-либо функции $R(z)$

$$R_{\lambda\mu} = R\left(z_\mu + \frac{1}{2\sigma}\right) - R\left(z_\lambda - \frac{1}{2\sigma}\right).$$

Из равномерных нормальных аппроксимаций биномиального распределения наиболее сильной является, по-видимому, предложенная Я. Успенским:

$$P_{\lambda\mu} = \Phi_{\lambda\mu} + \Psi_{\lambda\mu} + \omega,$$

где

$$\Psi(z) = \frac{q - p}{6\sigma\sqrt{2\pi}}(1 - z^2)\, e^{-z^2/2},$$

причем, если $\sigma \geqslant 5$, то

$$|\omega| < (0{,}13 + 0{,}18|p - q|)\sigma^{-2} + e^{-3\sigma/2}.$$

Однако относительная точность такой аппроксимации для вероятностей типа $1 - P_{\lambda\mu}$ (коль скоро они малы) оказывается недостаточной. Чтобы исправить положение, С. Н. Бернштейном, а затем В. Феллером были предложены другие формулы. С. Н. Бернштейн предлагает определять решения α_x и β_x квадратных уравнений

$$x - \frac{3}{2} - np = \sigma\alpha_x + \frac{q - p}{6}\alpha_x^2,$$

$$x + \frac{1}{2} - np = \sigma\beta_x + \frac{q - p}{6}\beta_x^2.$$

Тогда при $\sigma^2 \geqslant 62{,}5$, $\alpha_\lambda \geqslant 0$, $\beta_\mu \leqslant \sqrt{2}\sigma^{1/3}$ имеют место неравенства

$$\Phi(\beta_\mu) - \Phi(\beta_\lambda) \leqslant P_{\lambda,\,\mu-1} \leqslant \Phi(\alpha_\mu) - \Phi(\alpha_\lambda).$$

Неравенство В. Феллера имеет более широкую область применения. Пусть

$$\sigma^2 \geqslant 9, \quad \lambda \geqslant (n + 1)p, \quad \mu + \frac{1}{2} \leqslant (n + 1)p + \frac{2}{3}\sigma^2.$$

Тогда

$$P_{\lambda\mu} \leqslant e^{5(1-pq)/(36\sigma^2)}\,[\Phi(\eta_{\mu+1}) - \Phi(\eta_\lambda)],$$

$$\eta_k = \frac{k - (n+1)p}{\sigma} + \frac{a}{\sigma}\left(\frac{k - (n+1)p}{\sigma}\right)^2 + \frac{2a}{\sigma} - \frac{1}{2\sigma^3}.$$

Предыдущее неравенство заменяется на обратное, если положить

$$\eta_k = \frac{k-(n+1)p}{\sigma} + \frac{a}{\sigma}\left(\frac{k-(n+1)p}{\sigma}\right)^2 + \frac{2a}{\sigma} + \frac{M}{6\sigma} + \frac{1}{7\sigma},$$

где

$$a = \frac{p-q}{6}, \quad M = \frac{[k+1/2-(n+1)p]^3}{\sigma^4}.$$

4. **Многомерный случай.** Сделаем теперь несколько замечаний по поводу многомерного случая. Естественная нормировка последовательности сумм одинаково распределенных векторов осуществляется путем вычитания математических ожиданий и деления на $\sqrt{n}$. Для различно распределенных слагаемых естественно рассматривать нормировку линейными преобразованиями. Один из получающихся на этом пути результатов звучит следующим образом: пусть ξ_n — последовательность независимых равномерно ограниченных случайных векторов:

$$|\xi_n| \leqslant C < \infty,$$

и пусть $\zeta_n = \sum_1^n \xi_k$; для существования последовательности A_n линейных преобразований и последовательности a_n векторов таких, что распределения случайных векторов $\eta_n = A_n\zeta_n + a_n$ сходятся слабо к некоторому невырожденному нормальному распределению N, необходимо и достаточно условие:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{D}(t, \zeta_n) = \infty \text{ при всех } t \neq 0, \quad t \in R^m.$$

Это же условие необходимо и достаточно для существования такой последовательности невырожденных нормальных распределений N_n в R^m, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathfrak{C}} |\mathsf{P}_{\zeta_n}(A) - \mathsf{N}_n(A)| \to 0,$$

где $\mathfrak{C}$ — класс всех выпуклых множеств.

Уточнения нормального приближения в многомерном случае для гладких распределений имеют тот же характер, что и в одномерном случае. Без предположений гладкости порядок разности

$$\mathsf{P}_{\eta_n}(A) - \mathsf{N}(A),$$

где $\mathsf{P}_{\eta_n}(A)$ — распределение нормированной суммы и N — некоторое m-мерное нормальное распределение, зависит от «формы» и «положения» множества A *).

*) Обзор результатов и ссылки см. в статье Ю. В. Прохорова [73]; см. также недавнюю монографию В. В. Сазонова [145].

§ 7. Последовательности независимых случайных величин. Сходимость к устойчивым законам

1. Определение устойчивых законов и некоторые их свойства. В § 5 было указано, что n-кратная свертка $F^{n*}=F*F*\ldots*F$ любой фиксированной функции распределения $F(x)$ (т. е. закон распределения суммы s_n независимых одинаково распределенных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ таких, что $\mathsf{P}\{\xi_j<x\}=F(x)$) сближается с множеством всех безгранично делимых законов; иными словами, существует последовательность $G_n(x)$ безгранично делимых законов такая, что

$$\sup_x |F^{n*}(x)-G_n(x)|\to 0, \quad n\to\infty.$$

Распределения G_n строятся по F довольно сложно. Однако важное место занимает случай, когда все G_n получаются из одного и того же распределения G линейной заменой аргумента:

$$G_n(x)=G(xB_n+A_n)$$

($B_n>0$, A_n — константы). В этом случае распределение «нормированной суммы»

$$\frac{s_n-A_n}{B_n}=\frac{1}{B_n}(\xi_1+\ldots+\xi_n-A_n)$$

сходится к $G(x)$. Известны необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять исходная функция распределения F, чтобы такое распределение G существовало, а также описан класс всех распределений G, которые могут появляться в подобной обстановке. Он совпадает с классом всех *устойчивых распределений.*

Распределение называется *устойчивым*, если при любых $a_1>0$, b_1, $a_2>0$, b_2 найдутся такие $a>0$ и b, что при всех x

$$F(a_1x+b_1)*F(a_2x+b_2)=F(ax+b).$$

Как показали А. Я. Хинчин и П. Леви, натуральные логарифмы характеристических функций устойчивых распределений (и только они) допускают представление

$$\ln\varphi(t)=i\gamma t-c|t|^\alpha\left\{1+i\beta\frac{t}{|t|}\omega(t,\alpha)\right\},$$

где α, β, γ, c — постоянные, $0<\alpha\leqslant 2$, $-1\leqslant\beta\leqslant 1$, $c\geqslant 0$, γ — любое действительное число и

$$\omega(t,\alpha)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha, \quad \alpha\neq 1,$$

$$\omega(t,\alpha)=\frac{2}{\pi}\ln|t|, \quad \alpha=1.$$

Так как характеристические функции устойчивых законов абсолютно интегрируемы, то соответствующие распределения имеют непрерывные плотности (ниже приводятся более сильные утверждения). Однако явный вид плотностей устойчивых законов известен лишь в нескольких исключительных случаях (нормальный закон, закон Коши и некоторые другие).

Плотности устойчивых законов *одновершинны* и отличны от нуля или на всей прямой, или на полупрямой (скажем, при $x \geqslant A$ или $x \leqslant A$). Известна асимптотика плотностей на концах области положительности. Прежде чем перечислять асимптотические формулы, положим, не ограничивая общности, $\gamma = 0$, $c = 1$. Можно показать, что при этих условиях плотность устойчивого закона удовлетворяет соотношениям

$$p(x;\ \alpha,\ \beta) = p(-x;\ \alpha,\ -\beta)$$

при всех x, α и β;

$$p(x;\ \alpha,\ \beta) = x^{-1-\alpha} p(-x^{-\alpha};\ \alpha^{-1},\ \tilde{\beta})$$

при $\alpha > 1$, $x > 0$, $\tilde{\beta} = (\alpha - 1)(\beta - 1) - \beta$.

Приведем теперь результаты, относящиеся к асимптотике устойчивых плотностей. Детали и доказательства можно найти в монографии И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника *). Целесообразно разделить случай крайних распределений (так называют распределения с $\beta = \pm 1$) и случай $|\beta| < 1$.

А. Если $-1 < \beta \leqslant 1$, то при $\alpha < 1$ и $x \to \infty$

$$p(x;\ \alpha,\ \beta) \sim \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha + 1) \sin\left[\frac{\pi}{2}\alpha(\beta + 1)\right] x^{-(1+\alpha)};$$

при $\alpha > 1$ и $x \to \infty$

$$p(x;\ \alpha,\ \beta) \sim \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha + 1) \sin\left[\frac{\pi}{2}(\alpha + (2 - \alpha)\beta)\right] x^{-(1+\alpha)};$$

при $\alpha = 1$ и $x \to \infty$

$$p(x;\ 1,\ \beta) \sim \frac{1}{\pi}(1 + \beta)\, x^{-2}.$$

Б. Если $\beta = -1$ и $\alpha < 1$, то

$$p(x;\ \alpha,\ -1) = 0$$

при $x > 0$ и, кроме того, при $x \uparrow 0$

$$p(x;\ \alpha,\ -1) \sim \frac{\alpha^{\gamma/(2\alpha)}}{\sqrt{2\pi(1 - \alpha)}} |x|^{-1-\gamma/2} \exp\{-(1 - \alpha)\alpha^{\gamma} x^{-\gamma}\},$$

где $\gamma = \alpha/(1 - \alpha)$;

*) См. [23, 36]. Можно указать еще монографию Лукача [60]. Некоторые устойчивые законы табулированы, см. [10].

при $\alpha=1$ и $x\to\infty$

$$p(x;\ 1,\ -1)\sim\frac{1}{2\sqrt{e}}\exp\left\{\frac{\pi}{4}x-\frac{2}{\pi e}e^{-\frac{\pi}{2}x}\right\}.$$

Отметим, что в случае крайнего закона с $\alpha=1/2$ и $\beta=1$ известна явная формула для плотности:

$$p(x;\ 1/2,\ 1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-3/2}e^{-1/(2x)},\quad x>0.$$

2. Условия сходимости. Уточнения. Условия сходимости распределений нормированных сумм случайных величин к устойчивым распределениям, отличным от нормального (т. е. к распределениям с $0<\alpha<2$), даются следующей теоремой:

Для указанной сходимости необходимо и достаточно, чтобы при $x\to\infty$

$$F(-x)\sim c_1\frac{h_1(x)}{|x|^\alpha},\quad 1-F(x)\sim c_2\frac{h_2(x)}{x^\alpha},$$

$$c_1\geqslant 0,\quad c_2\geqslant 0,\quad c_1+c_2>0,$$

где h_i — медленно меняющиеся функции. При этом B_n отличается от $n^{1/\alpha}$ лишь медленно меняющимся множителем. Можно принять $B_n=n^{1/\alpha}$ в том и только том случае, когда

$$F(-x)\sim c_1/|x|^\alpha,\quad 1-F(x)\sim c_2/x^\alpha.$$

Одно из применений устойчивых законов связано с *теорией восстановления*. Допустим, что промежутки времени между последовательными возвращениями некоторой «системы» в «исходное состояние» суть независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда время до n-го возвращения будет суммой n таких величин и при указанных выше условиях будет распределено асимптотически устойчиво. Пусть ν_t — число возвращений в исходное состояние за время t. Очевидное соотношение

$$\mathsf{P}\{\nu_t\geqslant n\}=\mathsf{P}\{s_n\leqslant t\}$$

дает возможность получить предельное распределение для ν_t при $t\to\infty$.

Пример. Рассмотрим приведенный в гл. I, § 5, п. 4, пример симметричного случайного блуждания. Время s_n до n-го возвращения в исходное состояние в этом примере сходится (при нормировке $A_n=0$, $B_n=(\pi n^2)/2$) к устойчивому закону с плотностью $p(x;\ 1/2,\ 1)$, явное выражение которой указано в конце предыдущего пункта. Соответственно, как легко видеть,

$$\mathsf{P}\{\nu_t\geqslant z\sqrt{t}\}=\int_0^{z^{-2}}p\left(x;\ \frac{1}{2},\ 1\right)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z e^{-x^2/2}dx.$$

Один из интересных вопросов — уточнение предельных теорем о сходимости к устойчивым законам с $0<\alpha<2$ (подобное уточнению, которое имеет место в случае сходимости к нормальному закону). Один из основных имеющихся здесь результатов, установленный Г. Крамéром, можно описать следующим образом. Пусть $F(x)$ — функция распределения, удовлетворяющая условиям:

а) при $x\to\infty$

$$F(-\infty)=\frac{c_1}{x^\alpha}+\frac{d_1}{x^{\alpha_1}}+r_1(x),\quad r_1(x)=O(x^{-\gamma}),$$

$$1-F(x)=\frac{c_2}{x^\alpha}+\frac{d_2}{x^{\alpha_1}}+r_2(x),\quad r_2(x)=O(x^{-\gamma}),$$

$$\alpha<\alpha_1<\gamma,\quad c_1\geqslant 0,\quad c_2\geqslant 0,\quad c_1+c_2>0;$$

б) в случае, когда $0<\gamma\leqslant 1$, функции $r_1(x)\pm r_2(x)$ предполагаются монотонными для всех достаточно больших $x>0$.

Пусть $\beta=(c_1-c_2)/(c_1+c_2)$, $g_\alpha(t)$ — характеристическая функция распределения с плотностью $p(x;\ \alpha,\ \beta)$ и $G_{\alpha\beta}(x)$ — соответствующая функция распределения. Обозначим, далее,

$$k=k_1\alpha+k_2(\alpha_1-\alpha)+k_3(2-\alpha)+k_4,$$

где k_i — неотрицательные целые числа, хотя бы одно из которых отлично от нуля (таким образом, всегда $k>0$). Пусть $P_{k_1k_2k_3k_4}(t)$ — полином степени $k_1+\ldots+k_4-1$ относительно t с комплексными, вообще говоря, коэффициентами.

Теорема. *Если α, β и γ не целые и F удовлетворяет условиям а) и б), то можно выбрать нормирующие константы A_n и $B_n=bn^{1/\alpha}$ и полиномы $P_{k_1k_2k_3k_4}$ так, что при $n\to\infty$ равномерно относительно x*

$$F_n(x)=G_{\alpha\beta}(x)+\sum_{0<k<\lambda}G_{\alpha\beta}\left(x;\ P_{k_1k_2k_3k_4}\right)n^{-k/\alpha}+O\left(n^{-\lambda/\alpha}\right),$$

где

$$G_{\alpha\beta}\left(x;\ P_{k_1k_2k_3k_4}\right)=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left[\int_0^\infty t^{k+\alpha-1}P_{k_1k_2k_3k_4}\left(t^\alpha\right)g_\alpha(t)\,e^{-itx}dt\right],$$

$$\lambda=\min(1,\ \gamma-\alpha).$$

Суммирование распространяется на все k, определенные указанной выше формулой и удовлетворяющие неравенству $0<k<\lambda$.

Аналогичные, но более сложно формулируемые результаты верны и для целых α и α_1.

§ 8. Локальные теоремы для решетчатых распределений

1. Асимптотически равномерная распределенность. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины, принимающие лишь целые значения,

$$p_{nk} = \mathsf{P}\{\xi_n = k\}, \quad s_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$
$$P_n(m) = \mathsf{P}\{s_n = m\}, \quad A_n = \mathsf{M}s_n, \quad B_n^2 = \mathsf{D}s_n.$$

Последовательность ξ_n по определению удовлетворяет *локальной теореме*, если равномерно по m при $n \to \infty$

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,B_n} \exp\left\{-\frac{(m-A_n)^2}{2B_n^2}\right\} + o\left(\frac{1}{B_n}\right).$$

Из применимости к ξ_n локальной теоремы вытекает, как легко видеть, *интегральная сходимость*: функции распределения $F_n(x)$ нормированных сумм $(s_n - A_n)/B_n$ сходятся к функции нормального распределения $\Phi(x)$. Поскольку условия интегральной сходимости (т. е. условия применимости *центральной предельной теоремы*) хорошо известны, то, естественно, возникает вопрос: что нужно прибавить к условиям центральной предельной теоремы, с тем чтобы имела место локальная теорема?

Введем необходимое определение. Назовем последовательность s_n *асимптотически равномерно распределенной*, если при любом фиксированном h имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{s_n \equiv j (\mathrm{mod}\, h)\} = 1/h, \quad j = 0, 1, \ldots, h-1.$$

Нетрудно видеть, что как применимость локальной теоремы, так и асимптотическая равномерная распределенность сумм могут зависеть от структуры нескольких первых слагаемых (как в примере, где $\xi_2, \xi_3, \ldots$ одинаково распределены: $\mathsf{P}\{\xi_2 = \pm 1\} = 1/2$, а $\mathsf{P}\{\xi_1 = 1\} = 1 - \mathsf{P}\{\xi_1 = 0\} = p \leqslant 1/2$). Мы исключим такую ситуацию из рассмотрения и *ограничимся только случаем, когда этой зависимости нет* (т. е. когда как данная последовательность, так и любая полученная из нее изменением или отбрасыванием конечного числа начальных членов являются одновременно асимптотически равномерно распределенными и соответственно удовлетворяют локальной теореме). При этом ограничении можно утверждать, что для асимптотической равномерной распределенности необходимо и достаточно условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min_{0 < a < h-1} \mathsf{P}\{\xi_n \notin L_{ah}\} = \infty,$$

где L_{ah} — подрешетки решетки целых чисел: $L_{ah} = \{m\colon m = a + kh\}$.

Известно, что асимптотическая равномерная распределенность сумм s_n необходима для справедливости локальной теоремы. Известно также, что при довольно общих условиях из интегральной сходимости и асимптотической равномерной распределенности сумм s_n вытекает локальная теорема (например, если слагаемые равномерно ограничены или таковы, что

$$\int\limits_{|x-\mathsf{M}\xi_n|>z} (x-\mathsf{M}\xi_n)^2 \,\mathsf{P}_{\xi_n}(dz) \to 0, \quad z\to\infty,$$

равномерно по n).

Сходный результат верен и в многомерном случае. Однако вообще интегральная сходимость и асимптотическая равномерная распределенность сумм s_n не влекут локальную теорему.

2. **Целочисленные одинаково распределенные слагаемые.** Ограничимся теперь случаем одинаково распределенных целочисленных слагаемых. При наличии конечных вторых моментов необходимое и достаточное условие справедливости локальной теоремы имеет один и тот же вид в случае любого конечного числа измерений и состоит в том, что максимальный шаг распределения равен единице. Однако точность действия локальной теоремы при небольших или умеренных значениях n может быть малой даже в простых примерах.

Пример. Рассмотрим слагаемые, принимающие значения 0, 3, 9 с вероятностями 1/3 каждое. В этом случае поведение вероятностей $P_n(m)$ будет почти столь же «правильным», как в случае схемы Бернулли (для которой во всех учебниках приводятся убедительные графические иллюстрации). Однако если, оставив вероятности прежними, мы возьмем в качестве возможных значений 0, 3, 10, то картина будет совсем другая: при n порядка нескольких десятков вероятности $P_n(m)$ ведут себя весьма нерегулярно. Объяснение состоит в том, что внутри интервала $0<t<2\pi$ модуль характеристической функции слагаемых весьма близко подходит к единице:

$$\left|\varphi\left(2\pi\cdot\frac{3}{10}\right)\right|^2 \geqslant 0{,}91$$

(см. § 1).

Известны аналитические достаточные условия применимости локальной теоремы (содержащие требование «малости» некоторого интеграла от модуля характеристической функции суммы s_n) [66]. Можно предложить и необходимые условия аналогичного вида. Они основаны на следующем неравенстве.

Пусть

$$\sup_m \left| P_n(m) - \frac{1}{\sqrt{2\pi B_n}} \exp\left\{-\frac{(m-A_n)^2}{2B_n^2}\right\}\right| = \frac{\lambda_n}{B_n}.$$

Тогда

$$B_n \int\limits_{\frac{2\pi}{2k_n+1}<|t|<\pi} \prod_{j=1}^{n} |\varphi(t;\xi_j)|^2\,dt \leqslant C\left(\frac{C_1}{B_n}+C_2\lambda_n\right),$$

где C, C_1 и C_2 — абсолютные постоянные и k_n равно целой части $B_n\sqrt{C_1/B_n+C_2\lambda_n}$ (можно взять $C=2+1/(8\sqrt{\pi})$, $C_1=2(1+\sqrt{2\pi})/\pi$, $C_2=2$).

Последнее неравенство можно использовать для оценки числа слагаемых, необходимого для достижения заданной точности в локальной теореме.

§ 9. Локальные теоремы для плотностей

Рассмотрим опять последовательность независимых одинаково распределенных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$, положим

$$s_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$$

и допустим, что при некотором $n = n_0$ распределение суммы s_n имеет плотность (иногда под плотностью будет удобно понимать *производную абсолютно непрерывной части* распределения при условии, что она отлична от нуля; в этом случае мы будем говорить о «плотности»). Тогда при $n \geqslant n_0$ суммы s_n будут иметь плотность, и естественно поставить вопрос о поведении этой плотности при $n \to \infty$.

Мы рассмотрим два типа сходимости: *равномерную сходимость* и *сходимость в среднем*. Пусть, как и раньше,

$$\mathsf{M}s_n = A_n, \quad \mathsf{D}s_n = B_n^2, \quad \eta_n = (s_n - A_n)/B_n,$$

$$p_n(x) = p_{\eta_n}(x), \quad \varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Если к условию существования r-го момента $\mathsf{M}|\xi_j|^r$ добавляется условие:

а) *существует число n_0 такое, что плотность $p_{n_0}(x)$ ограничена*, то мы получим при $n \to \infty$ сходимость

$$p_n(x) \to \varphi(x),$$

равномерную относительно x, а при $r \geqslant 3$ асимптотическое разложение

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\sum_{k=1}^{r-2} Q_k(x)\,n^{-k/2}\right] + o\left(n^{-(r-2)/2}\right),$$

где опять-таки оценка остаточного члена равномерна относительно x.

Заметим, что условие а) оказывается одновременно и необходимым для равномерной сходимости $p_n(x)$ и $\varphi(x)$.

Если к условию существования момента r-го порядка $(r \geqslant 3)$ добавляется условие:

б) *Для некоторого n_0 существует «плотность» $p_{n_0}(x)$*, то для плотностей имеет место сходимость в среднем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_n(x) - \varphi(x)|\, dx \to 0, \quad n \to \infty.$$

Условие б) для подобной сходимости необходимо.

Заметим, что если P и Q — два распределения на прямой и распределение Q абсолютно непрерывно относительно меры Лебега, то

$$\sup_A |\mathsf{P}(A) - \mathsf{Q}(A)| = \alpha + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\beta h_2(x) - q(x)|\, dx,$$

где h_2 и q — плотности мер H_2 и Q соответственно; H_2 — абсолютно непрерывная компонента в разложении

$$\mathsf{P}(A) = \alpha \mathsf{H}_1(A) + \beta \mathsf{H}_2(A),$$
$$\alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \mathsf{H}_1(R^1) = \mathsf{H}_2(R^1) = 1,$$

т. е. в разложении распределения P на сингулярную и абсолютно непрерывную части.

Из сказанного вытекает, что в случае существования второго момента для сходимости «по вариации»:

$$\sup_A \left| \mathsf{P}\{\eta_n \in A\} - \int_A \varphi(x)\, dx \right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

необходимо и достаточно условие б).

При условии существования моментов более высокого порядка можно получить оценки для

$$\sup_A \left| \mathsf{P}\{\eta_n \in A\} - \int_A \left[\varphi(x) + \frac{d}{dx}\varphi(x) \sum_{k=1}^{r-3} Q_k(x)\, n^{-k/2} \right] dx \right|.$$

Переходя к случаю разнораспределенных слагаемых, мы должны сразу отметить, что нельзя рассчитывать на какие-либо необходимые и достаточные условия применимости локальной теоремы к плотностям сумм независимых случайных величин. Эту мысль можно пояснить примером независимых величин $\{\xi_n\}$ таких, что ξ_1 равномерно распределена на $(-1, 1)$, а ξ_n при $n \geqslant 2$ принимает значения $\pm 1/\sqrt{n}$ с вероятностью $1/2$ каждое. Здесь нормированные суммы η_n имеют плотности, сходящиеся к плотности нормального закона, а все слагаемые, начиная со второго, дискретны.

Известно много достаточных условий справедливости локальной теоремы для плотностей. Найдены также широкие классы распределений, для которых из слабой сходимости распределений сумм к нормальному закону вытекает сходимость «по вариации».

Рассматривались и другие типы сходимости плотностей, например сходимость в смысле «расстояния»

$$\rho(P, Q) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha} \,|\, p(x) - q(x) \,|^{\beta}\, dx \right)^{1/\beta}$$

и т. п. Результаты, касающиеся случая одинаково распределенных слагаемых, допускают немедленное распространение на многомерный случай, а также на случай сходимости к устойчивым предельным распределениям.

§ 10. Вероятности больших отклонений. Неравенства и асимптотические формулы

Темы, указанные в заглавии, подробно разобраны в литературе, по крайней мере для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин (см. [36]). Суть дела можно объяснить следующим образом. Пусть η_n — нормированная сумма $s_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$\eta_n = (s_n - \mathsf{M}s_n)/\sqrt{\mathsf{D}s_n},$$

и пусть η_n удовлетворяют центральной предельной теореме:

$$F_n(x) = P\{\eta_n < x\} \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{z^2/2} dz.$$

При больших $|x|$, т. е. при малых $F_n(x)$ $(x < 0)$ или $1 - F_n(x)$ $(x > 0)$, абсолютные оценки близости F_n к Φ оказываются бесполезными и необходимы оценки для относительной точности аппроксимации, т. е. для отношений

$$\frac{F_n(x)}{\Phi(x)}, \quad x < 0, \quad \text{и} \quad \frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)}, \quad x > 0.$$

Ограничимся для определенности случаем $x > 0$. Типичный результат для одинаково распределенных величин дает теорема: *если* $\mathsf{M}\xi_i = 0$ *и*

$$\mathsf{M}e^{h|\xi_i|} < \infty \text{ при } |h| \leqslant h_0, \quad h_0 > 0,$$

то для $x > 1$, $x = o(\sqrt{n})$ *имеем*

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left\{ -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right\} \left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right],$$

где $\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — *степенной ряд, сходящийся в достаточно малой окрестности нуля, и* c_n *определяется отношениями* $M\xi_j^k/\sigma^k$ $(k = 2, 3, \ldots, n+2)$ (точнее о построении ряда $\lambda(z)$ будет сказано ниже).

Теоремы этого типа обычно формулируются с остаточными членами в виде O или o и поэтому для подсчета соответствующих вероятностей (с гарантированной степенью точности) не пригодны. Исключением служит результат В. Феллера *). Пусть ξ_n — последовательность независимых случайных величин, подчиненная условиям

$$|\xi_k| < \lambda_n \sqrt{Ds_n} = \lambda_n B_n, \quad M\xi_k = 0.$$

Обозначим $\sigma_k^2 = D\xi_k$, $\alpha_{k\nu} = M\xi_k^\nu$, и пусть $\varkappa_{k\nu}$ есть ν-й семиинвариант случайной величины ξ_k и $K_{n\nu} = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_{k\nu}$. Определим h как решение уравнения

$$x = \frac{1}{B_n} \sum_{\nu=2}^{\infty} K_{n\nu} \frac{h^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

и введем затем степенной ряд $Q_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{n\nu} x^\nu$, полагая

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} Q_n(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} K_{n\nu} \frac{\nu-1}{\nu!} h^\nu.$$

Можно показать, что при этом

$$q_{n1} = \frac{1}{3B_n^3} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k3},$$

$$q_{n2} = \frac{1}{12B_n^4} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k4} - \frac{1}{4B_n^4} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k2}^2 - \frac{1}{4B_n^6} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k3} \right)^2 \text{ и т. д.}$$

Если $0 < \lambda_n x < (3 - \sqrt{5})/4$, то

$$1 - F_n(xB_n) = e^{-x^2 Q_n(x)/2} \left[\{1 - \Phi(x)\} + \theta \lambda_n e^{-x^2/2} \right].$$

Если же $0 < \lambda_n x < 1/12$, то $|\theta| < 9$ и $|q_{n\nu}| < (12\lambda_n)^\nu/7$. Пользуясь тем, что при $x > 0$

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x} e^{-x^2/2} \left(1 - \frac{\vartheta}{x^2}\right), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

*) См. [130]. Можно, впрочем, добавить и результаты В. А. Статулявичуса [91].

можно написать также

$$1 - F_n(xB_n) = (2\pi)^{-1/2} x^{-1} e^{-x^2(1+Q_n(x))/2} \left(1 - \vartheta/x^2 + \sqrt{2\pi}\,\theta\lambda_n x\right).$$

Интересно сопоставить эти результаты с так называемыми «экспоненциальными границами»*). Допустим для простоты, что $\mathsf{M}e^{h\xi_k}$ существует при всех действительных h. Неравенство Чебышева дает

$$1 - F_n(xB_n) \leqslant e^{-hxB_n} \mathsf{M} e^{hs_n}.$$

Определяя h из условия минимизации правой части последнего неравенства, получим

$$xB_n = \frac{d}{dh} \ln \mathsf{M} e^{hs_n} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \mathrm{K}_{n\nu} \frac{h^{\nu-1}}{(\nu-1)!},$$

$$1 - F_n(xB_n) \leqslant e^{-x^2(1+Q_n(x))/2}.$$

Отсюда видно, насколько точнее действуют приведенные выше теоремы, чем неравенство Чебышева. Напомним, что при дополнительных условиях (например, при равномерной ограниченности слагаемых или ограничениях на рост их моментов, скажем

$$|\mathsf{M}\xi_k^\nu| \leqslant \frac{\sigma_k^2}{2} H^{\nu-2} \nu!,$$

где H — константа, не зависящая от k) прием, основанный на экспоненциальном неравенстве Чебышева, приводит к неравенствам типа

$$1 - F_n(xB_n) < e^{-x^2/4}, \qquad 0 < x < B_n/H,$$

$$1 - F_n(xB_n) < e^{-xB_n/(4H)}, \qquad x > B_n/H.$$

Локальный вариант теоремы, приведенный в начале параграфа, может быть сформулирован как для слагаемых с непрерывными распределениями, так и для решетчатых слагаемых. Если к условиям этой теоремы добавить, например, условие существования у слагаемых ограниченной на всей прямой плотности, то получим при $x \geqslant 1$, $x = o(\sqrt{n})$ и $n \to \infty$

$$p_n(x) = \varphi(x) \exp\left[\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $p_n(x)$ — плотность нормированной суммы.

Локальные теоремы о больших уклонениях допускают сходное по форме распространение на многомерный случай, что позволяет получить оценки для вероятностей попадания в области,

*) См. [4]. Многомерный случай см., например, [116].

«удаленные» от начала координат (математические ожидания слагаемых предполагаются нулевыми) [75, 76].

В последнее время предложена «односторонняя трактовка» задач о больших отклонениях: поведение сумм независимых случайных величин для $x \to \infty$ (соответственно для $x \to -\infty$) связывается с поведением слагаемых для $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$ при минимальных ограничениях на поведение на отрицательной (соответственно положительной) полуоси [35].

§ 11. Заключительные замечания

На протяжении этой главы основное внимание уделялось схеме сложения независимых случайных величин или векторов. Сложение случайных элементов со значениями в тех или иных группах и соответствующие предельные теоремы рассмотрены в цитированной книге У. Гренандера [25]*).

1. Остановимся на схеме умножения комплексных случайных величин ζ, не равных нулю. Хотя эта группа изоморфна $(\zeta \leftrightarrow (\ln|\zeta|, \arg\zeta))$ прямой сумме двух хорошо изученных групп (аддитивной группы вещественных чисел и группы вращений окружности), возможно и нетривиальное построение теории перемножения «почти-единичных» комплексных величин $\zeta_{n1}, \zeta_{n2}, \ldots$ $\ldots, \zeta_{nk_n}$ и соответствующих безгранично делимых законов.

2. *Маргинальные распределения.* Один тип предельных теорем иллюстрируется следующим примером. Возьмем равномерное распределение на $(n-1)$-мерной сфере

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Рассмотрим совместное распределение любого фиксированного числа иксов, скажем $x_1, x_2, \ldots, x_j$. Тогда при $n \to \infty$ величины

$$\sqrt{n}x_1, \ldots, \sqrt{n}x_j$$

асимптотически независимы и распределены нормально с параметрами $(0, 1)$.

Аналогично для равномерного распределения в симплексе

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \quad x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

при $n \to \infty$ величины $nx_1, \ldots, nx_j$ асимптотически независимы и имеют экспоненциальное распределение вероятностей.

3. *Нули случайных многочленов.* Распределением нулей случайных многочленов занимались многие математики, начиная с Харди и Литтлвуда. Один из типичных результатов можно сформулировать следующим образом: для полинома степени n (с независимыми действительными одинаково распределенными

*) См. также более поздний обзор В. В. Сазонова и В. Н. Тутубалина [83] и книгу X. Хейера [102].

коэффициентами) при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\varepsilon_n \ln n < N_n < \alpha (\ln n)^2\} \to 1,$$

где N_n — число действительных корней, α — некоторая постоянная и ε_n — любая последовательность такая, что $\varepsilon_n \to 0$ и $\varepsilon_n \ln n \to \infty$ *).

4. *Случайные матрицы и случайные детерминанты.* Пусть

$$\xi_1 = \begin{Bmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \cdots \\ \xi_1^{(l)} \end{Bmatrix}, \ \ldots, \ \xi_l = \begin{Bmatrix} \xi_l^{(1)} \\ \cdots \\ \xi_l^{(l)} \end{Bmatrix}$$

суть независимые и одинаково распределенные l-мерные случайные вектор-столбцы, A — матрица, составленная из их компонент $\xi_j^{(i)}$, Δ — ее определитель (равный, как известно, ориентированному объему l-мерного параллелепипеда, построенного на указанных векторах).

Распределение Δ известно только в двух случаях: когда ξ_j распределены равномерно на единичной $(l-1)$-мерной сфере l-мерного пространства и когда ξ_j распределены нормально с нулевыми вектором средних и невырожденной корреляционной матрицей. В этом последнем случае отношение $\Delta^2/\det \Sigma$ (Σ — корреляционная матрица) распределено как произведение $\chi_1^2 \ldots \chi_l^2$, где χ_j^2 независимы и имеют χ^2-распределения с 1, 2, ..., l степенями свободы соответственно. Отсюда можно вывести, что при $l \to \infty$ величина $\ln(\Delta^2/\det \Sigma)$ асимптотически нормальна с параметрами $(\ln(l-1)!, \sqrt{2 \ln l})$. Скорость сходимости, как нетрудно показать, имеет порядок $(\ln l)^{-3/2}$, т. е. сходимость очень медленная; в этой обстановке более полезными оказываются неравенства, например

$$\mathsf{P}\{w_l - \mathsf{M} w_l \geqslant x \sqrt{\mathsf{D} w_l}\} \leqslant e^{-x^2/2}, \quad x > 0,$$

где $w_l = \log(\Delta^2/\det \Sigma)$ (А. А. Петров).

Предельный переход от дискретных схем к непрерывным мы проиллюстрируем здесь лишь простейшим примером. Начнем с симметричной схемы Бернулли, т. е., иными словами, с последовательности

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

независимых случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностью 1/2 каждое. Рассматривая фиксированный отрезок

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$$

последовательности $\{\xi_n\}$ и соответствующие «нарастающие суммы»

$$s_0 = 0, \quad s_1 = \xi_1, \ \ldots, \ s_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N,$$

*) Примеры дальнейших результатов см. [37].

мы можем выписать, используя приемы комбинаторики, точные формулы для вероятностей тех или иных событий, связанных с этими суммами (см., например, [96, 148]). Например, вероятность того, что $a \leqslant s_N \leqslant b$, выражается формулой

$$P_N(a, b) = \frac{1}{2^N} \sum_{j=a}^{b} C_N^j.$$

Вероятность того, что суммы s_k $(0 \leqslant k \leqslant N)$ не достигнут значений a и $-b$ (a и b — целые положительные числа), равна

$$p_{abN} = \frac{2}{a+b} \sum_{h=1}^{a+b-1} \frac{\sin \frac{\pi h}{a+b}}{1 - \cos \frac{\pi h}{a+b}} \sin \frac{\pi a h}{a+b} \left(\cos \frac{\pi h}{a+b}\right)^N.$$

Вероятность того, что при четном $N = 2N'$ для $\nu \leqslant 2k$ индексов j выполняются соотношения *)

$$s_{j-1} \geqslant 0, \quad s_j \geqslant 0,$$

равна

$$p_{2k, 2N'} = \sum_{j \leqslant k} \frac{1}{2^N} C_{2j}^j C_{2N'-2j}^{N'-j}.$$

Подобного рода формулы непригодны для вычислений при сколько-нибудь больших N, но применение *формулы Стирлинга* и других приемов асимптотического анализа дает довольно простые приближенные выражения для этих вероятностей, а именно при $a \sim \frac{\alpha}{2} \sqrt{N}$, $b \sim \frac{\beta}{2} \sqrt{N}$, $2k \sim 2N'\gamma$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$P_N(a, b) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-z^2/2} dz,$$

$$p_{abN} \sim \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1/2} \cos\left(\left(j + \frac{1}{2}\right) \pi \frac{a-b}{a+b}\right) \exp\left\{-2\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{(a+b)^2}\right\},$$

$$p_{2k, 2N'} \sim \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\gamma}.$$

Для случайных величин, более общих, чем рассматриваемые, можно получить р а з р о з н е н н ы е асимптотические формулы такого же типа. Однако для того, чтобы получить более или менее полное описание класса всех подобных предельных соотношений, уместно стать на более общую точку зрения и рассмотреть переход от дискретного процесса образования «нарастающих сумм» к непрерывному случайному процессу. Этот переход мож-

---

*) Число таких индексов лишь незначительно (при $N \to \infty$) отличается от числа неотрицательных сумм среди $s_0, s_1, \ldots, s_N$.

но произвести в нескольких, по существу, эквивалентных формах (см., например, [72]). Сейчас мы опишем одну из них, пожалуй, наиболее «геометричную».

Поведение сумм $s_0, s_1, \ldots, s_N$ можно изобразить с помощью «случайной ломаной» $s_N(t)$, получаемой последовательным соединением точек $(k/N, s_k/\sqrt{\mathsf{D}s_N})$ прямолинейными отрезками. Случайная ломаная $s_N(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ порождает некоторое распределение P_N в пространстве $C[0, 1]$ функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$, с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|.$$

Как можно доказать, последовательность P_N оказывается фундаментальной в смысле метрики, порождающей слабую сходимость распределений в $C[0, 1]$, и потому имеет слабый предел W (распределение, соответствующее так называемому винеровскому процессу, или одномерному броуновскому движению). Отсюда в силу свойств слабой сходимости можно вывести, что

$$\mathsf{P}_N(A) \to \mathsf{W}(A)$$

для любого $A \subset C[0, 1]$, причем $\mathsf{W}(\dot{A}) = 0$ ($\dot{A}$ — граница множества A). Кроме того, можно установить, что распределение любого W-почти всюду непрерывного функционала, вычисленное относительно P_N, сходится к его распределению, вычисленному относительно W. Таким путем получается обширный класс предельных соотношений. Указанные выше соотношения получаются, если взять множества A_1 и A_2 вида

$$A_1 = \{x \in C[0, 1]:\ \alpha \leqslant x(1) \leqslant \beta\},$$
$$A_2 = \{x \in C[0, 1]:\ \alpha < \inf_t x(t) \leqslant \sup_t x(t) < \beta\}$$

и функционал

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1 + \operatorname{sign} x(t)}{2}\, dt$$

и учесть, что

$$\mathsf{W}(A_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-z^2/2} dz,$$

$$\mathsf{W}(A_2) =$$
$$= \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j + 1/2} \cos\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)\pi \frac{a - b}{a + b}\right] \exp\left\{-2\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{(a + b)^2}\right\},$$

$$\mathsf{W}\{x:\ f(x) < \gamma\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\gamma}.$$

Следующий шаг состоит в построении асимптотических формул для распределений функционалов от сумм s_n, не определенных для предельного процесса. Такими функционалами будут, например, число перемен знака в последовательности $s_0, s_1, \ldots$ $\ldots, s_N$, число максимумов и минимумов и т. п. [87].

Во всех таким путем полученных соотношениях замечательно то, что они справедливы при весьма широких предположениях относительно случайных величин ξ_j («принцип инвариантности»).

Переход от дискретных процессов к непрерывным является мощным средством получения асимптотических формул (во всяком случае главных членов).

Рекомендуемая литература: [13, 52, 56, 67, 68, 73, 86].

ГЛАВА V

МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Марковские процессы с конечным или счетным числом состояний (цепи Маркова)

1. Марковское свойство и переходные вероятности.

Марковское свойство. Характерное свойство марковских случайных процессов можно увидеть уже на таком простом примере, как известная игра «тише едешь — дальше будешь». В этой игре фишка играющего должна пройти некоторое конечное число пунктов $1, \ldots, m$. Переход из одного пункта в другой каждый раз определяется исходом бросания игральной кости. Именно, если на данном шаге фишка находится в пункте i, то правилами игры устанавливается пункт перехода ее на следующем шаге в зависимости от числа выпавших на игральной кости очков. Из любого пункта i фишка с некоторой вероятностью p_{ij} переходит в один из пунктов j независимо от характера движения до попадания в пункт i.

Указанное свойство лежит в основе определения так называемых *марковских случайных процессов*. Рассмотрим систему, которая может находиться в одном из фазовых состояний $E_1, E_2, \ldots$ (часто оказывается удобным условно обозначать фазовые состояния просто соответствующими номерами $1, 2, \ldots$). Пусть состояние системы меняется в зависимости от некоторого параметра t, причем переход из состояния в состояние зависит также от вмешательства случая. Будем условно называть параметр t *временем* и считать, что t пробегает либо целые, либо действительные числа. Пусть $\xi(t)$ — состояние системы в момент времени t, и пусть соблюдается следующая закономерность: если в данный момент времени s система находится в фазовом состоянии i, то в последующий момент времени t система будет находиться в состоянии j с некоторой вероятностью $p_{ij}(s, t)$ независимо от поведения системы до указанного момента s.

Описывающий поведение системы процесс $\xi(t)$ называется *цепью Маркова*. Вероятности

$$p_{ij}(s, t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(s) = i\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

называются *переходными вероятностями* марковской цепи $\xi(t)$.

Обычно рассматривается поведение марковской цепи $\xi(t)$, начиная с некоторого момента $t=t_0$. Если

$$p_i^0=\mathsf{P}\{\xi(t_0)=i\},\quad i=1,2,\ldots,$$

— *начальное распределение вероятностей*, то

$$\mathsf{P}\{\xi(t_0)=i,\ \xi(t_1)=i_1,\ \ldots,\ \xi(t_n)=i_n\}=$$
$$=p_i^0 p_{ii_1}(t_0,t_1)\ldots p_{i_{n-1}i_n}(t_{n-1},t_n)$$

для любых $i, i_1, \ldots, i_n$ и $t_0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n$.

Марковские моменты времени. Пусть τ — некоторый случайный момент времени, не зависящий от будущего (это означает, что при любом t событие $\{\tau>t\}$ определяется поведением системы до момента t); τ иначе называется *марковским моментом*.

Пусть A — любое событие, осуществление которого целиком зависит от поведения системы после момента τ. Тогда вероятность этого события при условии, что известно поведение системы до момента τ, совпадает с условной вероятностью этого события при условии, что известно состояние системы только лишь в момент τ: $\mathsf{P}\{A\mid\xi(s),\ s\geqslant\tau\}=\mathsf{P}\{A\mid\xi(\tau)\}$.

В частности, для любых $i_1, \ldots, i_n$ и $t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n$

$$\mathsf{P}\{\xi(t_1+\tau)=i_1,\ \ldots,\ \xi(t_n+\tau)=i_n\mid\xi(s),\ s\leqslant\tau\}=$$
$$=p_{\xi(\tau)t_1}(\tau,t_1+\tau)\ldots p_{i_{n-1}i_n}(t_{n-1}+\tau,t_n+\tau).$$

Имеется последовательность $\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\ldots\leqslant\tau_n\leqslant\ldots$ моментов времени такая, что в каждый из моментов τ_n известно соответствующее состояние $i_n=\xi(\tau_n)$. Например, τ_0 — момент первого попадания системы в состояние i, τ_1 — момент первого после τ_0 возвращения в это состояние, τ_2 — момент второго возвращения и т. д. Любые события $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, каждое из которых целиком определяется поведением системы в соответствующем промежутке от τ_{n-1} до τ_n, являются взаимно независимыми.

Однородность процесса. Марковская цепь $\xi(t)$ называется *однородной*, если переходные вероятности $p_{ij}(s,t)$ зависят лишь от разности $t-s$:

$$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t-s),\quad i,j=1,2,\ldots$$

Пример. *Случайное блуждание.* Рассмотрим случайное блуждание частицы по целочисленным точкам действительной прямой, при котором частица на каждом шаге с вероятностью p смещается на 1 и с вероятностью $q=1-p$ смещается на -1. Пусть $\xi(n)$ — положение частицы через n шагов. Последовательность $\xi(0)$, $\xi(1)$, $\xi(2)$, … образует марковскую цепь: если частица находится в какой-то точке i, то ее дальнейшее поведение не зависит от обстоятельств, предшествующих попаданию в точку i, и за последующие n шагов с вероятностями $p_{ij}(n)$ частица переходит в соответствующие состояния j. Ясно, что при $|i-j|>$

$>n$ переход из i в j невозможен и $p_{ij}(n)=0$. Очевидно также, что за n шагов частица может перейти лишь в те состояния j, для которых разность $|i-j|$ имеет ту же четность, что и n, т. е. для которых число

$$m=\frac{n+|i-j|}{2}$$

является целым. При $j\geqslant i$ попасть в состояние j можно тогда и только тогда, когда из всех n шагов ровно $m=\frac{n+|i-j|}{2}$ шагов совершается в положительном направлении. Вероятность этого есть

$$p_{ij}(n)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad j\geqslant i.$$

Аналогично выражается вероятность перехода из i в j при $j\leqslant i$:

$$p_{ij}(n)=C_n^m p^{n-m} q^m, \quad j\leqslant i.$$

Пример. *Радиоактивный распад.* Как известно, с течением времени t радий Ra превращается в радон Rn. При таком превращении появляется одна α-частица (ядро атома гелия He). Если считать, что каждый атом Ra независимо от предшествующих обстоятельств с вероятностью $p(t)$ превращается за время t в атом Rn, то общее число $\nu(t)$ распадающихся за время t атомов Ra, равное числу излученных за это время α-частиц, распределено по закону Пуассона:

$$\mathsf{P}\{\nu(t)=k\}=\frac{a^k}{k!}e^{-a}, \quad k=0, 1, 2, \ldots,$$

где $a=np(t)$, n — исходное число атомов Ra. Число оставшихся атомов Ra есть $\xi(t)=n-\nu(t)$.

Если известно количество радия в некоторый момент s: $\xi(s)=i$, то (независимо от характера процесса распада до момента s) с вероятностью $\frac{a^k}{k!}e^{-a}$ $(a=ip(t-s))$ в промежутке от s до t испускается k α-частиц. Таким образом, $\xi(t)$ — марковский случайный процесс с переходными вероятностями

$$p_{ij}(s, t)=\frac{a^{i-j}}{(i-j)!}e^{-a}, \quad a=ip(t-s), \quad j\leqslant i.$$

Ясно, что при $j>i$ переход из i в j невозможен и $p_{ij}(s, t)=0$.

Время ожидания перемены состояния. Пусть $\xi(t)$ — однородная цепь Маркова. Если фиксировано состояние в какой-либо марковский момент τ: $\xi(\tau)=x$, то дальнейшее поведение процесса $\xi(t)$ $(t\geqslant\tau)$ не зависит от его поведения до момента τ, причем течение процесса $\xi(t)$ после τ подчиняется тем же закономерностям, как если бы это был начальный момент времени $\tau=0$.

Рассмотрим случай непрерывного t и предположим, что в некоторый момент времени t_0 (скажем, $t_0=0$) известно состояние процесса: $\xi(t_0)=x$. Изменение этого состояния происходит в некоторый случайный момент. Обозначим буквой τ время до момента перехода процесса $\xi(t)$ в новое состояние и назовем τ *временем ожидания* перемены состояния. Каково распределение вероятностей случайной величины τ?

Вероятность

$$F(t)=\mathsf{P}\{\tau>t\mid\xi(0)=x\},\quad t>0,$$

как функция от t в силу равенств

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\tau>s+t\mid\xi(0)=x\}&=\\&=\mathsf{P}\{\tau>s+t\mid\xi(0)=x,\ \tau>s\}\mathsf{P}\{\tau>s\mid\xi(0)=x\}=\\&=\mathsf{P}\{\tau>s+t\mid\xi(s)=x\}\mathsf{P}\{\tau>s\mid\xi(0)=x\}\end{aligned}$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(s+t)=F(s)F(t)$$

при любых $s, t>0$. Поэтому вероятность $F(t)$ должна быть экспоненциальной функцией:

$$F(t)=e^{-\lambda t},\quad t>0,$$

где λ — некоторая неотрицательная постоянная (при этом не исключается и значение $\lambda=\infty$).

Таким образом, время ожидания τ имеет *показательное распределение* вероятностей с параметром λ. Постоянная λ называется *плотностью перехода* из соответствующего состояния x.

При $\lambda=0$ процесс $\xi(t)$ навсегда остается в состоянии x (такое состояние называется *поглощающим*); при $\lambda=\infty$ процесс $\xi(t)$ мгновенно покидает состояние x (такое состояние называется *мгновенным*). При $0<\lambda<\infty$ вероятность того, что состояние x процесса $\xi(t)$ изменится за малый промежуток времени Δt, есть

$$\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

где $o(\Delta t)$ — малая высшего порядка по сравнению с Δt.

В случае, когда система изучается лишь в дискретные моменты $t=0, 1, 2, \ldots$, вместо времени ожидания перемены состояния процесса $\xi(t)$ естественно рассматривать «число шагов» τ до попадания в новое состояние, отличное от x. При этом также

$$F(t)=\mathsf{P}\{\tau>t\mid\xi(0)=x\}=e^{-\lambda t},\quad t=0, 1, 2, \ldots,$$

где $e^{-\lambda}$ — вероятность перехода за один шаг из состояния x снова в это же состояние.

Пример. *Процесс радиоактивного распада.* Описанная выше вероятностная модель радиоактивного распада — превращения радия Ra в радон Rn — такова, что переход Ra $\to$ Rn представляет собой однородный марковский процесс с двумя состояниями для каждого атома: Ra или Rn, и единственно возможным переходом Ra $\to$ Rn. Если в исходный момент времени $t=0$ количество атомов Ra равно n_0, то число $\nu(t)$ испускаемых за время t α-частиц имеет распределение Пуассона с параметром $a=n_0p(t)$:

$$\mathsf{P}\{\nu(t)=k\}=\frac{a^k}{k!}e^{-a},\quad k=0,1,2,\ldots$$

Здесь $p(t)$ — вероятность того, что состояние Ra изменится за время t. Эта вероятность должна иметь вид

$$p(t)=1-e^{-\lambda t},$$

где λ — соответствующая плотность перехода $\mathrm{Ra}\to\mathrm{Rn}$ для отдельного атома, т. е. такая постоянная, что вероятность перехода $\mathrm{Ra}\to\mathrm{Rn}$ за малый промежуток времени Δt есть $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$.

Рассмотрим количество радия через время t. Если число α-частиц равно $\nu(t)$, то число оставшихся атомов Ra будет $\xi(t)=n_0-\nu(t)$. Среднее количество радия через время t есть

$$n(t)=\mathsf{M}\xi(t)=n_0-n_0p(t)=n_0e^{-\lambda t}.$$

Экспоненциальный характер функции $n(t)$ говорит, в частности, о том, что время T, за которое в среднем распадается половина исходного количества радия, т. е. такое T, что

$$n(T)=n_0/2,$$

есть некоторая абсолютная постоянная. Это — так называемая *постоянная полураспада*. Она связана с плотностью перехода $\mathrm{Ra}\to\mathrm{Rn}$ равенством $T\lambda=\ln 2$.

Уравнения Колмогорова. Переходные вероятности $p_{ij}(s,t)$ марковской цепи удовлетворяют следующему соотношению:

$$p_{ij}(s,t)=\sum_k p_{ik}(s,u)\cdot p_{kj}(u,t),\quad i,j=1,2,\ldots,$$

где $s\leqslant u\leqslant t$.

Пусть $\xi(t)$ — однородная марковская цепь. Если ее рассматривать лишь в дискретные моменты $t=nh$ $(n=0,1,\ldots;\ h>0)$, то вероятности $p_{ij}(nh)$ «перехода за n шагов» однозначно определяются по вероятностям $p_{ij}=p_{ij}(h)$ «перехода за один шаг»

$$p_{ij}(nh)=\sum_k p_{ik}\cdot p_{kj}[(n-1)h]=\sum_k p_{ik}[(n-1)h]\cdot p_{kj},$$

$$i,j=1,2,\ldots,$$

при всех $n=1,2,\ldots$

Пусть время t меняется непрерывно, и пусть

$$p_{ij}(0)=\lim_{h\to 0}p_{ij}(h)=\begin{cases}1 & \text{при } j=i,\\ 0 & \text{при } j\neq i.\end{cases}$$

Обладающие этим свойством непрерывности переходные вероятности $p_{ij}(t)$ однородной марковской цепи обязательно непрерывно дифференцируемы при $t>0$; всегда существуют и пределы

$$\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)-p_{ij}(0)}{h}=\lambda_{ij},\quad i,j=1,2,\ldots,$$

причем λ_{ij} при $i\neq j$ обязательно конечны:

$$0\leqslant\lambda_{ij}<\infty,\quad \lambda_{ii}=-\lambda_i,$$

где λ_i — плотность перехода из состояния i. Коэффициенты λ_{ij} называются *плотностями перехода* из i в j.

Если считать, что при $t=0$ система находится в состоянии i, и если τ_i — момент первого выхода процесса $\xi(t)$ из состояния i, а τ_{ij} — момент первого попадания в состояние j:

$$\tau_i=\sup_{\xi(t)=i}t,\quad \tau_{ij}=\inf_{\xi(t)=j}t,$$

то вероятность того, что процесс $\xi(t)$ при выходе из состояния i перейдет именно в состояние j, есть

$$\mathsf{P}\{\tau_{ij}=\tau_i\,|\,\xi(0)=i\}=\lambda_{ij}/\lambda_i,\quad j\neq i.$$

Плотности перехода λ_{ij} всегда удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\leqslant\lambda_i,\quad i=1,2,\ldots$$

Если выполнены равенства

$$\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}=\lambda_i,$$

то переходные вероятности $p_{ij}(t)$ удовлетворяют так называемой *обратной системе дифференциальных уравнений Колмогорова*:

$$p'_{ij}(t)=\sum_k\lambda_{ik}p_{kj}(t),\quad i,j=1,2,\ldots$$

При некоторых ограничениях (например, при ограниченных плотностях λ_{ij}) имеет место так называемая *прямая система дифференциальных уравнений*:

$$p'_{ij}(t)=\sum_k\lambda_{kj}p_{ik}(t),\quad i,j=1,2,\ldots$$

Пример. *Пуассоновский процесс.* Однородный поток независимых событий (см. с. 41) обладает, очевидно, тем свойством, что $\xi(t)$ — число событий, наступивших за время t, — является марковским процессом; соответствующие плотности перехода λ_{ij} таковы, что

$$\lambda_{ij}=\begin{cases}\lambda & \text{при } j=i+1,\\ 0 & \text{при } j\neq i+1,\end{cases}\quad i=0,1,2,\ldots,$$

т. е. из состояния i можно непосредственно перейти лишь в следующее состояние $j=i+1$ $(i=0,1,2,\ldots)$.

Очевидно, $p_{ij}(t)=p_{0,j-i}(t)$. Положим

$$p_j(t)=p_{0j}(t), \quad j=0, 1, \ldots$$

Дифференциальные уравнения Колмогорова для функций $p_j(t)$ в данном случае выглядят следующим образом:

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t),$$

$$p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Если перейти к новым функциям $f_k(t)=e^{\lambda t}p_k(t)$, то получим

$$f_0'(t) = \lambda f_0(t) + e^{\lambda t}p_0'(t) = \lambda f_0(t) - \lambda e^{\lambda t}p_0(t) = 0,$$

$$f_k'(t) = \lambda f_k(t) + e^{\lambda t}p_k'(t) =$$

$$= \lambda f_k(t) + \lambda e^{\lambda t}p_{k-1}(t) - \lambda e^{\lambda t}p_k(t) = \lambda f_{k-1}(t),$$

где $f_0(0)=1$ и $f_1(0)=f_2(0)=\ldots=0$.

Система дифференциальных уравнений вида

$$f_0'(t) = 0, \quad f_k'(t) = \lambda f_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

с указанными начальными условиями имеет следующее решение:

$$f_0(t)=1; \quad f_1(t)=\lambda t, \ \ldots, \ f_n(t)=(\lambda t)^n/n!, \ \ldots$$

Возвращаясь к исходным функциям $p_k(t)=e^{-\lambda t}f_k(t)$, получаем

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Пример. Предположим, что на некоторую систему обслуживания поступает поток требований, образующих пуассоновский процесс с параметром λ_1, причем на обслуживание каждого отдельного требования затрачивается случайное время τ, распределенное по экспоненциальному закону с параметром λ_2, т. е. $\mathsf{P}\{\tau > t\} = e^{-\lambda_2 t}$. Рассмотрим два состояния системы обслуживания: E_1 — система свободна, E_2 — система занята.

Пуассоновский поток требований обладает тем свойством, что появление очередного требования после любого фиксированного момента времени $t=t_1$ не зависит от характера поступления требований до этого момента. Поэтому, если система в некоторый момент времени t_1 находится в состоянии E_1, то ее дальнейшее поведение не зависит от предшествующего, и, в частности, в последующий за t_1 промежуток времени Δt она с вероятностью $\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)$ перейдет в состояние E_2 (с такой вероятностью в указанном промежутке времени поступит очередное требование).

Предположим, что в момент t_2 система находится в состоянии E_2. Пусть τ — случайный момент перехода из состояния E_2 в состояние E_1 (τ — момент окончания обслуживания). Согласно экспоненциальному закону распределения времени обслуживания, имеет место равенство

$$\mathsf{P}\{\tau > t \mid \tau > t_2\} = e^{-\lambda_2(t-t_2)}, \quad t > t_2.$$

Видно, что в промежутке времени от t_2 до t система с вероятностью $1 - e^{-\lambda_2(t-t_2)}$ переходит в состояние E_1 независимо от ее поведения до момента t_2. Таким образом, эволюция системы описывается марковским процессом с двумя состояниями E_1 и E_2 и соответствующими плотностями перехода λ_1 и λ_2.

Пусть $p_{ij}(t)$ — соответствующие переходные вероятности. В рассматриваемом случае $p_{12}(t) = 1 - p_{11}(t)$, $p_{21}(t) = 1 - p_{22}(t)$, и система дифференциальных уравнений Колмогорова распадается на следующие два отдельных уравнения:

$$p_{11}'(t) + (\lambda_1 + \lambda_2)\, p_{11}(t) = \lambda_2,$$

$$p_{22}'(t) + (\lambda_1 + \lambda_2)\, p_{22}(t) = \lambda_1,$$

решения которых выражаются формулами

$$p_{11}(t) = \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$p_{22}(t) = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Устойчивость процесса. В случае непрерывного времени t однородная марковская цепь $\xi(t)$ может иметь так называемые мгновенные состояния, для которых соответствующие плотности перехода суть $\lambda_i = \infty$. Попадая в такое состояние i, система мгновенно его покидает:

$$\mathsf{P}\{\tau_i = 0 \mid \xi(0) = i\} = 1,$$

где τ_i — момент первого выхода из состояния i. При этом на любом сколь угодно малом промежутке времени Δt (после момента $t = 0$) система бесконечно много раз выйдет и снова вернется в это состояние.

Если Δ_i — общее время пребывания системы в состоянии i за промежуток Δt, то

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_i}{\Delta t} = 1 \,\middle|\, \xi(0) = i\right\} = 1.$$

Состояние i называется *устойчивым*, если $\lambda_i < \infty$. В устойчивом состоянии i система с вероятностью 1 находится некоторый положительный промежуток времени:

$$\mathsf{P}\{\tau_i > 0 \mid \xi(0) = i\} = 1.$$

Цепь Маркова называется *устойчивой*, если с вероятностью 1 на любом конечном промежутке времени система лишь конечное число раз переходит из состояния в состояние.

Пусть марковская цепь $\xi(t)$ не имеет мгновенных состояний, т. е. все плотности перехода λ_i конечны, и пусть τ_0 — момент первого выхода из начального состояния i, τ_1 — момент первого выхода из последующего состояния $i_1 = \xi(\tau_0)$ и т. д., τ_n — момент первого выхода из состояния $i_n = \xi(\tau_{n-1})$. Для того чтобы цепь была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: с вероятностью 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\xi}(\tau_n)} = \infty.$$

Всякая цепь с конечным числом состояний является устойчивой.

Пример. *Процесс чистого размножения.* Предположим, что некоторые частицы размножаются таким образом, что если в момент времени t их число было i, то в последующий промежуток времени Δt с вероятностью $\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ может прибавиться еще одна частица, а вероятность прибавления большего числа частиц есть величина порядка $o(\Delta t)$. Такой процесс представляет собой цепь Маркова с состояниями $i = 1, 2, \ldots$ и плотностями перехода

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{при } j = i+1, \\ -\lambda_i & \text{при } j = i, \\ 0 & \text{при } j \neq i,\ i+1. \end{cases}$$

Условие устойчивости заключается в том, что время τ, затраченное системой на бесконечно большое число переходов, с вероятностью 1 является бесконечным. Это условие равносильно тому, что $\mathsf{M}e^{-\tau} = 0$. Если τ_n — момент выхода из состояния n, то

$$\tau = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) + (\tau_3 - \tau_2) + \ldots = \lim_{n\to\infty} \tau_n,$$

где τ_1, $\tau_2 - \tau_1$, $\tau_3 - \tau_2$, ... — взаимно независимые случайные величины, причем $\tau_k - \tau_{k-1}$ подчиняется показательному распределению с параметром λ_k. Поэтому

$$\mathsf{M}e^{-\tau} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathsf{M}e^{-(\tau_k - \tau_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{1+\lambda_k}\right).$$

Видно, что цепь устойчива тогда и только тогда, когда

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{1+\lambda_k}\right) = 0,$$

что равносильно условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \mathsf{M}\tau = \infty.$$

Минимальные переходные вероятности. Для устойчивой цепи переходные вероятности $p_{ij}(t)$ являются **единственным** решением дифференциальных уравнений Колмогорова. Для произвольной цепи это не так, но всегда существует минимальное решение $\bar{p}_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ такое, что для любого другого решения $p_{ij}(t)$ этих уравнений (с теми же начальными условиями) при всех t выполняются неравенства

$$\bar{p}_{ij}(t) \leqslant p_{ij}(t).$$

Компоненты минимального решения $\bar{p}_{ij}(t)$ представляют собой вероятности перехода за время t из i в j, когда система совершает лишь конечное число переходов из состояния в состояние.

Минимальное решение $\bar{p}_{ij}(t)$ описывает поведение цепи до момента $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$, где τ_n означает момент n-го по счету перехода.

Пример. *Процесс чистого размножения.* Пусть плотности переходов таковы, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty,$$

и пусть в начальный момент имеется ровно одна частица. Введем еще одно состояние, означающее, что имеется бесконечно много частиц. Процесс с положительной вероятностью $p_{1\infty}(t)$ приходит в это состояние за время t, хотя соответствующие плотности перехода все равны нулю и прямое дифференциальное уравнение для $p_{1\infty}(t)$ имеет вид

$$p'_{1\infty}(t) = 0, \quad p_{1\infty}(0) = 0.$$

Очевидно, что на самом деле $p_{1\infty}(t)$ не является решением этого уравнения, поскольку $p_{1\infty}(t) > 0$. Минимальное решение прямой системы в целом может быть последовательно определено из уравнений

$$\bar{p}'_{11}(t) = -\bar{p}_{11}(t)\lambda_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{p}'_{1n}(t) = -\bar{p}_{1n}(t)\lambda_n + \bar{p}_{1,n-1}(t)\lambda_{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

2. Классификация состояний однородной марковской цепи. *Возвратные и невозвратные состояния.* Исходное состояние i называется *невозвратным*, если спустя некоторый конечный промежуток времени τ система с вероятностью 1 никогда больше не возвращается в это состояние.

Пусть T_i — общее время пребывания в состоянии i за бесконечный промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Состояние i невозвратно тогда и только тогда, когда случайная величина T_i имеет конечное математическое ожидание:

$$\mathsf{M}\mathrm{T}_i = \sum_{t=0}^{\infty} p_{ii}(t) < \infty \text{ для дискретного } t,$$

$$\mathsf{M}\mathrm{T}_i = \int_0^{\infty} p_{ii}(t)\,dt < \infty \text{ для непрерывного } t.$$

Рассмотрим марковскую цепь $\xi(t)$ лишь в дискретные моменты времени $t = nh$ $(n = 0, 1, \ldots; h > 0)$. Пусть

$$q_{ii}(nh) = \mathsf{P}\{\xi(h) \neq i, \ \ldots, \ \xi((n-1)h) \neq i, \ \xi(nh) = i \mid \xi(0) = i\},$$

т. е. $q_{ii}(nh)$ — вероятность того, что первое возвращение в исходное состояние i произойдет ровно через n шагов, и пусть

$$q_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} q_{ii}(nh),$$

т. е. q_{ii} — вероятность возвращения в исходное состояние i. Производящие функции $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh) z^n$ и $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{ii}(nh) z^n$ связаны соотношением

$$\varphi(z) = 1/(1 - \psi(z)).$$

Для марковской цепи $\xi(t)$ с дискретным временем t (что соответствует значению $h = 1$) состояние i невозвратно тогда и только тогда, когда вероятность возвращения в это состояние строго меньше 1: $q_{ii} < 1$.

Для марковской цепи $\xi(t)$ с непрерывным временем t состояние i невозвратно тогда и только тогда, когда меньше 1 вероятность возращения в дискретные моменты $t = nh$ $(n = 1, 2, \ldots)$: $q_{ii} < 1$ при каком-либо $h > 0$.

Состояние i, которое не является невозвратным, называется *возвратным*.

Нулевые и положительные состояния. Состояние i называется *нулевым*, если средняя доля времени, проведенного системой в состоянии i за бесконечный промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant \infty$, равна нулю, точнее,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} p_{ii}(t) = 0 \text{ для дискретного } t,$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T} p_{ii}(t)\,dt = 0 \text{ для непрерывного } t.$$

Среднее время возвращения. Рассмотрим марковскую цепь $\xi(t)$ в дискретные моменты времени $t = nh$ $(n = 0, 1, \ldots; h > 0)$.

Пусть

$$Q_i = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} nq_{ii}(nh) & \text{при } q_{ii} = 1, \\ \infty & \text{при } q_{ii} < 1. \end{cases}$$

Для марковской цепи с дискретным временем (что соответствует значению $h=1$) величина Q_i есть среднее время возвращения в исходное состояние i; состояние i является нулевым тогда и только тогда, когда

$$Q_i = \infty.$$

Для марковской цепи с непрерывным временем величина Q_i не зависит от выбранного значения $h > 0$; среднее время возвращения в исходное состояние i в дискретные моменты $t = nh$ есть hQ_i. При этом состояние i является нулевым тогда и только тогда, когда $Q_i = \infty$.

Если состояние j нулевое, то для любого исходного состояния i

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0.$$

Ненулевое состояние i называется *положительным.* Если состояние i положительное, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} p_{ii}(t) = \frac{1}{Q_i} \quad \text{для дискретного } t,$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T p_{ii}(t)\,dt = \frac{1}{Q_i} \quad \text{для непрерывного } t.$$

Периодические состояния. Состояние i в цепи с дискретным временем называется *периодическим*, если возвращение в него возможно лишь через число шагов n, кратное некоторому целому d:

$$p_{ii}(n) = 0 \quad \text{при} \quad n \neq kd, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Наибольшее число d, обладающее этим свойством, называется *периодом состояния i.*

В случае непрерывного времени t все вероятности $p_{ii}(t)$ строго положительны при $t > 0$, так что периодических состояний быть не может.

Замкнутые множества состояний. Некоторое множество состояний A называется *замкнутым*, если при условии, что $\xi(t)$ входит в A при $t = t_0$, $\xi(t)$ остается в этом множестве состояний при всех $t > t_0$.

Состояние j называется *достижимым* из состояния i, если имеется положительная вероятность перейти когда-нибудь из i в j. Состояние j достижимо из i тогда и только тогда, когда

$p_{ij}(t)>0$ при некотором $t>0$. В случае непрерывного времени либо $p_{ij}(t)\equiv 0$, либо $p_{ij}(t)>0$ при всех $t>0$. Множество всех состояний j, достижимых из некоторого фиксированного состояния i, является замкнутым.

Состояния i и j называются *сообщающимися*, если они достижимы друг из друга. Сообщающиеся состояния имеют один и тот же тип: они одновременно возвратные или невозвратные, положительные или нулевые, непериодические или периодические с одним и тем же периодом d.

Замкнутое множество состояний называется *минимальным* или *замкнутым классом*, если оно не содержит других замкнутых множеств. Замкнутые классы либо не имеют общих состояний, либо тождественно совпадают. Каждый замкнутый класс состоит из некоторого множества сообщающихся друг с другом состояний, причем состояния вне замкнутого класса являются недостижимыми для состояний, принадлежащих данному классу. По типу входящих в него состояний замкнутый класс называется возвратным или невозвратным, положительным или нулевым, непериодическим или периодическим с соответствующим периодом d. Все возвратные состояния могут быть разбиты на замкнутые классы.

Подклассы периодической цепи. В случае цепи с дискретным временем каждый периодический замкнутый класс A периода d может быть разбит на d непересекающихся подклассов $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_d$ таким образом, что из любого состояния i, входящего в подкласс B_k, система обязательно переходит на следующем шаге в одно из состояний j, входящих в подкласс B_{k+1}, так что эволюция системы обладает определенной цикличностью: $B_1\to$ $\to B_2\to\ldots\to B_d\to B_1\to\ldots$

Если в начальный момент $t=t_0$ система находится в одном из состояний i некоторого подкласса B, то она снова попадает в состояния этого подкласса через число шагов nd, кратное d. Рассматривая систему лишь в моменты времени $t=t_0+nd$ $(n=$ $=0, 1, \ldots)$, мы приходим к новой цепи Маркова со множеством состояний B и переходными вероятностями $p_{ij}=p_{ij}(d)$ $(i, j\in B)$, которая уже является непериодической.

Разбиение на замкнутые классы состояний. Состояние i называется *несущественным*, если имеется состояние j, достижимое из i, но из которого i недостижимо: $p_{ji}(t)\equiv 0$ при всех $t>0$. Несущественными являются невозвратные состояния, из которых достижимы какие-либо возвратные состояния; совокупность E_0 всех таких несущественных состояний обладает тем свойством, что не входящие в нее состояния образуют замкнутое множество E. В этом множестве E можно выделить замкнутые классы $A_1, A_2, \ldots$ возвратных состояний и остающееся множество A_0 невозвратных состояний. Множество A_0 является замкнутым, но не обязательно замкнутым классом. Исходное множество E_0

(множество несущественных состояний) не содержит ни одного замкнутого множества.

Пусть q_{ij} — вероятность когда-либо попасть из состояния i в состояние j. Если состояние j является возвратным, то q_{ij} совпадает с вероятностью q_{iA} когда-либо попасть из состояния i в замкнутый класс A возвратных состояний, содержащий j. В частности, $q_{ij}=1$ для состояний i из того же замкнутого класса A, что и j; $q_{ij}=0$ для состояний i, входящих в другие замкнутые классы.

Пусть q_{iA} — вероятность того, что система, находясь в начальный момент в состоянии i, когда-нибудь достигает некоторого множества состояний A. Для любого фиксированного несущественного состояния i из выделенного множества E_0 вероятности q_{iA}, где A пробегает указанные выше замкнутые множества A_0, A_1, ..., в сумме составляют 1. При любом $A=A_0, A_1, \ldots$ вероятности q_{iA}, где i пробегает все множество E_0, являются единственным ограниченным решением следующей системы линейных уравнений:

$$q_{iA}-\sum_{k\in E_0} p_{ik}q_{kA}=\sum_{j\in A} p_{ij},$$

где $p_{ij}=p_{ij}(h)$ ($h=1$ для целочисленного времени и $h>0$ для непрерывного времени t).

Пример. *Случайное блуждание.* Рассмотрим блуждание частицы по целочисленным точкам действительной прямой, при котором она с вероятностью p смещается на 1 в положительном направлении, а с вероятностью $1-p$ — в отрицательном направлении. Все состояния имеют период $d=2$. Если на каждом шаге частица с большей вероятностью p смещается в положительном направлении ($p>1/2$), то с течением времени она все дальше будет уходить в направлении к $+\infty$. При этом

$$p_{ii}(2n)=\frac{(2n)!}{n!\,n!}[p(1-p)]^n\sim\frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}},$$

и при $p\neq 1/2$, когда $4p(1-p)<1$,

$$\sum_n p_{ii}(2n)<\infty,$$

так что все состояния являются невозвратными.

При симметричном случайном блуждании, когда $p=1/2$, имеем $p_{ii}(2n)\sim 1/\sqrt{\pi n}$ и ряд $\sum\limits_n p_{ii}(2n)$ расходится, так что все состояния являются возвратными.

При любом p все состояния нулевые, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(2n)=0$.

Случайное блуждание с поглощающим экраном. Пусть в точке $i=0$ имеется так называемый *поглощающий экран*: попадая в точку $i=0$, частица остается там навсегда. Очевидно, из любого состояния $i>0$ можно с положительной вероятностью попасть в любое состояние $j>0$. Вероятности q_{ij} попасть когда-нибудь из i в j таковы, что

$$q_{ij}=pq_{i+1,j}+(1-p)q_{i-1,j}.$$

Это соотношение представляет собой конечноразностное уравнение для вероятности q_{ij} как функции от $i=1, 2, \ldots$ Чтобы определить q_{ij} как решение этого уравнения, нужны еще дополнительные «граничные условия». Найти их можно из следующих соображений. Вероятности q_{ij} при $i\neq j$ не изменятся, если в точке j также поставить поглощающий экран. В этом случае, очевидно, имеем $q_{0j}=0$ и $q_{jj}=1$. Отвечающая этим «граничным условиям» функция q_{ij} от $i=1, 2, \ldots, j-1$ при $p\neq 1/2$ имеет вид

$$q_{ij}=A_i+B_j\left(\frac{1-p}{p}\right)^i, \quad 0<i<j,$$

где

$$A_i=\frac{1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^i}, \quad B_j=-\frac{1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^j};$$

если же $p=1/2$, то

$$q_{ij}=i/j, \quad 0<i<j.$$

Ясно, что аналогичные формулы имеют место и тогда, когда поглощающий экран стоит в некоторой точке k и $k<i<j$. В правых частях указанных формул нужно лишь заменить i на $i-k$ и j на $j-k$. Если $k\to-\infty$, то влияние поглощающего экрана исчезает, и предельные формулы дают выражения для вероятностей q_{ij} перехода из точки i в точку $j>i$ при обычном случайном блуждании без всякого поглощающего экрана. Эти формулы имеют вид

$$q_{ij}=\begin{cases}\left(\dfrac{p}{1-p}\right)^{j-i} & \text{для } p<1/2,\\ 1 & \text{для } p\geqslant 1/2,\end{cases} \quad i\leqslant j.$$

Заменив здесь p на $1-p$, получим выражения для вероятностей q_{ij} при $i>j$:

$$q_{ij}=\begin{cases}\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{i-j} & \text{для } p>1/2,\\ 1 & \text{для } p\leqslant 1/2,\end{cases} \quad i\geqslant j.$$

Все эти формулы получены в предположении, что в точке j стоит поглощающий экран, и, естественно, при $i=j$ дают значение $q_{ij}=1$. Истинная вероятность возвращения в исходное состояние $i=j$ может быть определена по найденным уже вероятностям q_{ij} при $i\neq j$ как

$$q_{ii}=pq_{i+1,i}+(1-p)q_{i-1,i},$$

что дает следующее выражение для вероятности возвращения:

$$q_{ii}=\begin{cases}2p & \text{при } p<1/2,\\ 2(1-p) & \text{при } p>1/2,\\ 1 & \text{при } p=1/2.\end{cases}$$

3. Эргодические свойства однородных марковских цепей.

Финальные вероятности. Пусть состояния однородной марковской цепи $\xi(t)$ образуют один замкнутый положительный непериодический класс. Тогда для любого состояния j существует предел

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=P_j,\quad j=1,2,\ldots,$$

один и тот же при всех исходных состояниях $i=1, 2, \ldots$ Предельные значения P_1, P_2, ... представляют собой распределение вероятностей: P_j есть финальная вероятность находиться в состоянии j; при этом

$$P_j=1/Q_j,\quad j=1,2,\ldots,$$

где Q_j — среднее время возвращения в состояние j в дискретные моменты $t=0, 1, 2, \ldots$

Пусть T_A — время пребывания во множестве состояний A за промежуток времени T. С вероятностью 1 для любого множества A

$$\lim_{T\to\infty}\frac{T_A}{T}=\sum_{i\in A}P_i.$$

Стационарное распределение. Начальное распределение вероятностей p_i^0 $(i=1, 2, \ldots)$ называется *стационарным*, если вероятности $p_j(t)$ нахождения системы в соответствующих состояниях $j=1, 2, \ldots$ остаются неизменными с течением времени t:

$$p_j(t)=\sum_i p_i^0\cdot p_{ij}(t)\equiv p_j^0,\quad j=1,2,\ldots$$

В случае стационарности начального распределения остаются неизменными и вероятности более сложных событий:

$$\mathsf{P}\{\xi(t_1+t)=i_1,\ \ldots,\ \xi(t_n+t)=i_n\}=\mathsf{P}\{\xi(t_1)=i_1,\ldots,\xi(t_n)=i_n\},$$

каково бы ни было $t>0$.

Стационарность финального распределения. Для положительных состояний финальные вероятности P_j $(j=1, 2, \ldots)$ задают стационарное распределение и в случае замкнутого класса являются единственным решением системы уравнений вида

$$P_j=\sum_i P_i p_{ij}(h),\quad j=1,2,\ldots$$

Здесь $h=1$ для целочисленного времени и $h>0$ (h может быть произвольным) для непрерывного времени t.

В случае непрерывного времени t стационарные вероятности P_j могут быть определены также из системы линейных уравнений вида

$$\sum_i P_i \lambda_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

где λ_{ij} — соответствующие плотности перехода.

Пусть *коэффициент эргодичности*

$$k(h) = 1 - \frac{1}{2} \sup_{i,k} \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(h) - p_{kj}(h)|$$

положителен при некотором $h > 0$. Тогда сходимость к стационарному распределению будет экспоненциально быстрой:

$$|p_{ij}(t) - P_j| \leqslant Ce^{-Dt},$$

где C и D — некоторые положительные постоянные.

Пример. *Стопка книг.* На письменном столе лежит стопка из m книг. Обозначив каждую из книг соответствующим номером, порядок их расположения сверху вниз можно описать перестановкой из m чисел $(i_1, \ldots, i_m)$, где i_1 — номер книги, лежащей сверху, i_2 — номер следующей книги, и т. д., i_m — номер последней (нижней) книги. Предположим, что i-я книга берется для чтения с определенной вероятностью p_i $(i = 1, \ldots, m)$, причем при возвращении она просто кладется сверху. Как меняется порядок расположения книг?

Возьмем произвольное состояние $(i_1, \ldots, i_m)$. На следующем шаге оно либо остается неизменным, что происходит с вероятностью p_{i_1} (т. е. при выборе лежащей сверху книги с номером i_1), либо меняется на одно из $m-1$ состояний вида $(i_k, i_1, \ldots)$, что происходит с вероятностью p_{i_k} (т. е. при выборе книги с номером i_k). Перед нами марковская цепь с состояниями, каждое из которых описывается соответствующей перестановкой $(i_1, \ldots, i_m)$.

Обозначим $p_{(i_1,\ldots,i_m),(j_1,\ldots,j_m)}$ вероятность перехода из состояния $(i_1, \ldots, i_m)$ в состояние $(j_1, \ldots, j_m)$:

$$p_{(i_1,\ldots,i_m),(j_1,\ldots,j_m)} = \begin{cases} p_{i_k} & \text{при } (j_1, \ldots, j_m) = (i_k, i_1, \ldots), \\ 0 & \text{при остальных } (j_1, \ldots, j_m), \end{cases}$$

где перестановка $(i_k, i_1, \ldots)$ получается из $(i_1, \ldots, i_m)$ выбором некоторого i_k и перестановкой его на первое место. Финальные вероятности $\overset{*}{p}_{(j_1,\ldots,j_m)}$ являются решением следующей системы линейных уравнений:

$$\overset{*}{p}_{(j_1,\ldots,j_m)} = p_{j_1} \sum_{k=1}^{m} \overset{*}{p}_{(j_2,\ldots,j_{k-1},j_1,j_k,\ldots)}.$$

Через достаточно большое число шагов практически устанавливается стационарное распределение вероятностей, т. е. стопка книг с неизменными вероятностями $\overset{*}{p}_{(i_1,\ldots,i_m)}$ будет занимать соответствующие положения $(i_1, \ldots, i_m)$ (при $m=2$ такое распределение устанавливается сразу же, на первом шаге). С какой финальной вероятностью каждая из имеющихся книг оказывается наверху?

Вероятность того, что сверху лежит книга с номером i, есть

$$\overset{*}{p}_i = \sum_{i_2,\ldots,i_m} \overset{*}{p}_{(i,i_2,\ldots,i_m)},$$

где суммирование производится по всем состояниям, в которых на первом месте стоит i. Из уравнений для финальных вероятностей получаем

$$\overset{*}{p}_i = \sum_{i_2,\ldots,i_m} p_i \sum_{k=1}^{m} \overset{*}{p}_{(i_2,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots)} = p_i \sum_{(i_1,\ldots,i_m)} \overset{*}{p}_{(i_1,\ldots,i_m)} = p_i,$$

т. е. i-я книга через достаточно большое число шагов оказывается сверху с той же вероятностью p_i, с какой она выбирается.

Пример. *Многоканальная система обслуживания.* Рассмотрим систему, которая может обслуживать одновременно m требований. Будем считать, что имеется m линий и очередное требование поступает на одну из линий, если хотя бы одна из них свободна; в противном случае поступающее требование получает отказ и уходит из сферы обслуживания. Предположим, что поток требований является пуассоновским с параметром λ_0 и время обслуживания каждого требования (на каждой из m линий) распределено по показательному закону с параметром λ, причем требования обслуживаются независимо друг от друга.

Рассмотрим состояния $E_0, E_1, \ldots, E_m$, где E_k означает, что занято ровно k линий. В частности, E_0 означает, что система свободна, а E_m — что система полностью занята. Переход системы из состояния в состояние с течением времени t представляет собой марковский процесс, для которого плотности перехода имеют вид

$$\lambda_{0j} = \begin{cases} -\lambda_0 & \text{при } j=0, \\ \lambda_0 & \text{при } j=1; \end{cases}$$

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} i\lambda & \text{при } j=i-1, \\ -(\lambda_0+i\lambda) & \text{при } j=i, \\ \lambda_0 & \text{при } j=i+1, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i < m;$$

$$\lambda_{mj} = \begin{cases} m\lambda & \text{при } j=m-1, \\ -m\lambda & \text{при } j=m. \end{cases}$$

При $t \to \infty$ переходные вероятности $p_{ij}(t)$ экспоненциально быстро стремятся к своим финальным значениям P_j $(j=0, \ldots, m)$. Финальные вероятности P_j могут быть найдены из следующей системы:

$$-\lambda_0 P_0 + \lambda P_1 = 0,$$
$$\lambda_0 P_{k-1} - (\lambda_0 + k\lambda) P_k + (k+1)\lambda P_{k+1} = 0, \quad 1 \leqslant k < m,$$
$$\lambda_0 P_{m-1} - m\lambda P_m = 0,$$

решение которой есть

$$P_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^k \Big/ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^i, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Эти выражения для финальных вероятностей называются *формулами Эрланга.*

Неограниченные стационарные распределения. Пусть состояния марковской цепи образуют один замкнутый класс нулевых возвратных состояний. В этом случае имеется неограниченное стационарное распределение P_j $(j = 1, 2, \ldots)$, являющееся решением (единственным с точностью до множителя) системы уравнений

$$P_j = \sum_i P_i p_{ij}(h), \quad j = 1, 2, \ldots$$

$(h > 0$ может быть произвольным). Все P_i положительны, и $\sum_{i=1}^{\infty} P_i = \infty$.

При любом начальном распределении вероятностей и для любых ограниченных множеств A и B с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{T_A}{T_B} = \sum_{i \in A} P_i \Big/ \sum_{j \in B} P_j,$$

где величина T_A означает время пребывания системы в множестве состояний A за промежуток времени T.

Пример. Рассмотрим случайное блуждание, при котором частица из точки i с положительной вероятностью p_i смещается в соседнюю точку $j = i + 1$, а с вероятностью $1 - p_i$ переходит в начальную точку $j = 1$. Эта цепь Маркова имеет вероятности перехода

$$p_{ij} = \begin{cases} p_i & \text{при } j = i+1, \\ 1 - p_i & \text{при } j = 1, \\ 0 & \text{при } j \neq 1,\ i+1. \end{cases}$$

Вероятность вернуться в состояние 1 впервые на $(n+1)$-м шаге есть

$$q_{11}(n+1)=\begin{cases}1-p_1 & \text{при } n=0,\\ p_1p_2\ldots p_{n-1}(1-p_n) & \text{при } n=1, 2, \ldots,\end{cases}$$

так что вероятность возвращения есть

$$q_{11}=\sum_{n=0}^{\infty} q_{11}(n+1)=1-\lim_{n\to\infty}(p_1p_2\ldots p_n).$$

Видно, что состояние 1 является возвратным тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty}(p_1p_2\ldots p_n)=0.$$

Вместе с состоянием 1 одновременно возвратны или невозвратны и все остальные состояния $i=2, 3, \ldots$

Математическое ожидание Q_1 времени возвращения в состояние 1 есть

$$Q_1=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,q_{11}(n+1)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_1p_2\ldots p_n,$$

так что состояние 1 положительно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_1p_2\ldots p_n<\infty.$$

Вместе с 1 одновременно являются положительными или нулевыми и все остальные состояния.

В случае возвратных состояний имеющееся стационарное распределение вероятностей P_j $(j=1, 2, \ldots)$ как решение системы уравнений $P_j=\sum\limits_i P_ip_{ij}$ есть

$$\begin{aligned}&P_1,\\ &P_2=P_1p_1,\\ &\cdots\\ &P_n=P_{n-1}p_{n-1}=P_1p_1\ldots p_{n-1},\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

В случае положительных состояний

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_n=P_1\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p_1p_2\ldots p_n\right)<\infty$$

и существует стационарное распределение вероятностей, отвечающее значению

$$P_1=1\Big/\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p_1p_2\ldots p_n\right).$$

Пример. *Симметричное случайное блуждание.* Рассмотрим случайное блуждание частицы по целочисленным точкам действительной прямой, при котором частица на каждом шаге с равными вероятностями смещается на 1 в положительном или отрицательном направлении. Все состояния $i = 0, \pm 1, \ldots$ возвратные и нулевые. Соответствующее неограниченное стационарное распределение является «равномерным»: $P_j = 1$ при всех j. Для любых интервалов $A = (a_1, a_2)$ и $B = (b_1, b_2)$ с вероятностью 1

$$\lim_{T\to\infty} \frac{T_A}{T_B} = \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1},$$

где T_A — время пребывания частицы во множестве состояний A за промежуток времени T.

4. Общие скачкообразные марковские процессы. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс в произвольном измеримом пространстве $(E, \mathfrak{B})$, и пусть поведение $\xi(t)$ подчиняется следующим вероятностным закономерностям. Если в текущий момент времени t процесс находится в состоянии x, то в последующий малый промежуток времени Δt с вероятностью $1 - \lambda(t, x)\Delta t + o(\Delta t)$ это состояние процесса остается неизменным, а с вероятностью $\lambda(t, x, B)\Delta t + o(\Delta t)$ процесс переходит в некоторое другое состояние, лежащее во множестве B фазового пространства E $(x \notin B)$, причем это происходит независимо от течения процесса до рассматриваемого момента времени t.

Пусть при фиксированных t и x плотности перехода $\lambda(t, x, B)$ во множество B $(B \in \mathfrak{B})$ не содержащее x, задают некоторую ограниченную меру:

$$\lambda(t, x, E \backslash x) = \lambda(t, x) \leqslant C,$$

причем как функции от t плотности перехода $\lambda(t, x, B)$ непрерывны (равномерно по x и B). Тогда с вероятностью 1 описанный процесс $\xi(t)$ за любой ограниченный промежуток времени лишь конечное число раз изменит свое состояние. Начиная с начального состояния $x_0 = \xi(t_0)$, которое в течение положительного промежутка времени остается неизменным, процесс в некоторый случайный момент τ_1 скачком переходит в другое состояние x_1, которое также остается неизменным в течение положительного отрезка времени; затем в случайный момент τ_2 процесс переходит в состояние x_2 и т. д. Этот процесс является марковским с переходной функцией $P(s, x, t, B)$ такой, что при $x \notin B$

$$P(t, x, t + \Delta t, B) = \lambda(t, x, B)\Delta t + o(\Delta t).$$

Пусть это соотношение выполняется равномерно по t, x, B, и пусть $\varphi = \varphi(x)$ — произвольная ограниченная измеримая функция на фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$. Положим

$$\varphi(s, x) = \int_E \varphi(y) P(s, x, t, dy), \quad s \leqslant t.$$

Функция $\varphi(s, x)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, x) = -\int_E \varphi(s, y)\lambda(s, x, dy), \quad s < t,$$

с «концевым» условием

$$\varphi(t, x) = \varphi(x).$$

Если в качестве $\varphi(x)$ выбрать функцию вида

$$\varphi(x) = P(t, x, t, B) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in B, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin B, \end{cases}$$

то получим так называемое *обратное интегро-дифференциальное уравнение* для переходной функции $\varphi(s, x) = P(s, x, t, B)$. Это уравнение может быть решено методом последовательных приближений:

$$\varphi_0(s, x) = \varphi(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{n+1}(s, x) = \varphi(x) + \int_s^t \int_E \varphi_n(u, y)\lambda(u, x, dy)\,du,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем

$$\sup_x |\varphi_n(s, x) - \varphi(s, x)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

равномерно по s на отрезке $t_0 \leqslant s \leqslant t$.

Пусть $Q = Q(A)$ — ограниченная обобщенная мера на фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$. Положим

$$Q(t, B) = \int_E Q(dx)P(s, x, t, B), \quad t \geqslant s.$$

Функция $Q(t, B)$ от t и $B \in \mathfrak{B}$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t, B) = \int_E \lambda(t, x, B)Q(t, dx), \quad t > s,$$

с начальным условием

$$Q(s, B) = Q(B).$$

Если взять функцию $Q(B) = P(s, x, s, B)$ $(B \in \mathfrak{B})$, то получим так называемое *прямое интегро-дифференциальное уравнение* для переходной функции $Q(t, B) = P(s, x, t, B)$. Это уравнение может быть решено методом последовательных приближений:

$$Q_0(t, B) = Q(B),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_{n+1}(t, B) = Q(B) + \int_s^t \int_E \lambda(u, x, B)\, Q_n(u, dx)\, du,$$

$$n = 0, 1, \ldots,$$

причем

$$\operatorname{Var}[Q_n(t, B) - Q(t, B)] \to 0, \quad n \to \infty,$$

равномерно по t на каждом отрезке $s \leqslant t \leqslant t_1$.

§ 2. Ветвящиеся случайные процессы

1. Общее описание случайного ветвящегося процесса. Случайный ветвящийся процесс является теоретико-вероятностной моделью, описывающей процессы размножения и превращения активных частиц. Примерами таких процессов являются различные физико-химические цепные реакции.

Пример. Рассмотрим следующую упрощенную картину цепной реакции — образование нейтронов при делении ядер урана. Решающую роль в этой реакции играют так называемые «медленные» нейтроны, обладающие сравнительно небольшой энергией. Эти нейтроны вызывают деление ядер урана с атомным весом 235. Некоторое значение имеют и «быстрые» нейтроны, вызывающие деление ядер урана с атомным весом 238. «Быстрые» нейтроны, проходя через определенный слой вещества, замедляют свое движение, превращаясь в «медленные» нейтроны. Каждый «медленный» нейтрон, «захваченный» ядром урана-235, вызывает его деление, в результате чего появляется ν_1 «медленных» и ν_2 «быстрых» нейтронов (числа ν_1 и ν_2 являются случайными); кроме того, «медленный» нейтрон может быть поглощен примесями, другими словами, может исчезнуть. «Быстрый» нейтрон при условии его захвата ядром урана-238 вызывает появление также случайного числа «медленных» и «быстрых» нейтронов; кроме того, он может исчезнуть, покинув сферу рассматриваемой реакции (например, выйдя за стенки сосуда, содержащего уран).

Поскольку деление каждого из ядер происходит практически независимо от состояния других ядер, описанные выше превращения частиц (нейтронов) протекают таким образом, что судьба потомства каждой частицы практически не зависит от предыстории ее рождения и превращения других частиц, подчиняясь одним и тем же вероятностным закономерностям.

«Медленный» нейтрон (назовем его частицей типа T_1) с вероятностью $P_1(k_1, k_2)$ превращается в k_1 частиц того же типа T_1

и в k_2 частиц другого типа T_2 (частица типа T_2 — «быстрый» нейтрон); частицы типа T_2 с вероятностью $P_2(k_1, k_2)$ превращаются в k_1 частиц другого типа T_1 и в k_2 частиц того же типа T_2.

Пример. Такого же рода цепная реакция протекает при образовании хлористого водорода HCl из смеси водорода H_2 и хлора Cl_2 под действием света (фотохимическая реакция). Под воздействием кванта света молекула хлора Cl_2 распадается на отдельные атомы: $Cl_2 \to Cl + Cl$, и атомарный хлор дает начало цепной реакции (до 10^5 превращений), идущей по следующей схеме:

$$Cl + H_2 \to H + HCl,$$
$$H + Cl_2 \to Cl + HCl,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Перед нами три типа частиц: хлор Cl — частица типа T_1, водород H — частица типа T_2 и хлористый водород HCl — частица типа T_3. Частица типа T_1 превращается в одну частицу типа T_2 и одну частицу типа T_3, частица типа T_2 превращается в одну частицу типа T_1 и одну частицу типа T_3, частица T_3 остается неизменной, так что процесс последовательных превращений имеет вполне детерминированный характер. Если же рассматривать его течение во времени, то окажется, что скорость течения реакции — скорость образования хлористого водорода — является случайной.

Общая схема случайного ветвящегося процесса. Имеются частицы, вообще говоря, разных типов $T_1, T_2, \ldots, T_n$, которые с течением времени t претерпевают превращения. Состояние процесса в момент времени t описывается вектором $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$ с целочисленными компонентами, каждая из которых равна числу имеющихся к моменту времени t частиц соответствующего типа. Превращение любой частицы не зависит от предшествующего течения процесса. В случае дискретного времени t отдельная частица за один шаг (за единицу времени) с вероятностью p_k, где $k = (k_1, \ldots, k_n)$, превращается в k_1 частиц типа T_1 и т. д., k_n частиц типа T_n, причем $\sum_k p_k = 1$.

В случае непрерывного времени каждая имеющаяся к моменту t частица в течение последующего бесконечно малого промежутка времени Δt остается неизменной с вероятностью $1 - \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ и с вероятностью $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$, где $k = (k_1, \ldots, k_n)$, превращается в k_1 частиц типа T_1 и т. д., k_n частиц типа T_n, причем $\sum_k \lambda_k = \lambda$. Разумеется, вероятности p_k (в случае дискретного времени) и плотности λ_k (в случае непрерывного времени) зависят от типа рассматриваемой частицы.

Описанный случайный ветвящийся процесс $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$ представляет собой однородную марковскую цепь, состояния которой описываются векторами $i=\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ с целочисленными компонентами; соответствующие переходные вероятности p_{ij} (в случае дискретного времени) и плотности перехода λ_{ij} (в случае непрерывного времени) выражаются в терминах исходных характеристик ветвящегося процесса $\xi(t)$ (в случае дискретного времени этими характеристиками являются указанные выше параметры p_k, в случае непрерывного времени — параметры λ_k).

2. Ветвящиеся процессы с одним типом частиц.

Переходные вероятности и производящие функции. Пусть $\xi=\xi(t)$ — случайный ветвящийся процесс с одним типом частиц, каждая из которых за время t независимо от поведения других частиц с вероятностью $p_k(t)$ превращается в k частиц. Если в некоторый исходный момент t_0 (скажем, $t_0=0$) имеется ровно i частиц, то общее число частиц через время t будет

$$\xi(t)=\xi_1(t)+\ldots+\xi_i(t),$$

где $\xi_1(t), \ldots, \xi_i(t)$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины, каждая из которых равна числу частиц, порожденных соответствующей исходной частицей, причем

$$\mathsf{P}\{\xi_j(t)=k\}=p_k(t), \quad k=0, 1, 2, \ldots; \quad j=1, 2, \ldots, i.$$

Вместо самих переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ случайного ветвящегося процесса $\xi(t)$ ($p_{ij}(t)$ — вероятность того, что i частиц за время t превратятся в j частиц) удобно рассматривать соответствующие производящие функции

$$x(t, z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) z^k, \quad x_i(t, z)=\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) z^j.$$

Так как $p_k(t)=p_{1k}(t)$, то имеют место следующие равенства:

$$x_i(t, z)=[x(t, z)]^i, \quad p_{ik}(t)=\sum_{k_1+\ldots+k_i=k} p_{k_1}(t) \ldots p_{k_i}(t).$$

Связь переходных вероятностей $p_k(t)$ при различных t выражается в терминах производящих функций следующим общим соотношением:

$$x(s+t, z)=x[t, x(s, z)].$$

В случае дискретного времени это соотношение позволяет последовательно находить производящие функции $x(t, z)$ и переходные вероятности $p_k(t)$, исходя из заданных вероятностей p_k (p_k — вероятность того, что одна частица за один шаг — за единицу времени — превратится в k частиц) или соответствующей производящей функции

$$x(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$$

Именно,

$$x(0, z)=z, \quad x(1, z)=x(z), \ldots, x(n, z)=x[x(n-1, z)].$$

В случае непрерывного времени, когда для переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ имеет место *обратная система дифференциальных уравнений*, соответствующее дифференциальное уравнение для производящей функции $x(t, z)$ имеет вид

$$\frac{d}{dt} x(t, z) = \varphi[x(t, z)],$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k,$$

λ_k — плотности перехода из состояния 1 в состояние k ($\lambda_1 = -\lambda$); переменную z здесь можно рассматривать как числовой параметр ($0 \leqslant z \leqslant 1$). Начальное условие для производящей функции $x(t, z)$ есть

$$x(0, z)=z.$$

Решение этого уравнения может быть записано в следующей неявной форме:

$$t = \int_z^x \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

Пример. Пусть плотности перехода есть $\lambda_0=\lambda$, $\lambda_1=-\lambda$ и $\lambda_k=0$ при $k=2, 3, \ldots$ В этом случае

$$\varphi(z)=\lambda(1-z),$$

$$t = \int_z^x \frac{dz}{\varphi(z)} = -\frac{1}{\lambda}[\ln(1-x) - \ln(1-z)].$$

Из этого соотношения легко определяется функция $x=x(t, z)$. Именно,

$$(1-x)=-\lambda t+\ln(1-z),$$

и, значит,

$$x(t, z)=1-e^{-\lambda t}(1-z).$$

Вероятности $p_k(t)$, определяемые из разложения $x(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) z^k$, в рассматриваемом случае суть $p_0(t)=1-e^{-\lambda t}$, $p_1(t)=e^{-\lambda t}$ и $p_k(t)=0$ при $k=2, 3, \ldots$

Пример. Пусть $\lambda_0=0$, $\lambda_1=-1$ и $\lambda_k=\frac{1}{(k-1)k}$ при $k=2, 3, \ldots$ В этом случае

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k z^k=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1}z^k-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}z^k=$$
$$=-z\ln(1-z)+\ln(1-z)=(1-z)\ln(1-z),$$

$$t=\int_z^x\frac{dz}{\varphi(z)}=\int_z^x\frac{dz}{(1-z)\ln(1-z)}=-\int_{\ln(1-z)}^{\ln(1-x)}\frac{dz}{z}=$$
$$=-\ln\ln(1-x)+\ln\ln(1-z).$$

Из этого соотношения легко определяется функция $x=x(t, z)$. Именно,

$$\frac{\ln(1-x)}{\ln(1-z)}=e^{-t},$$

и, значит,

$$x(t, z)=1-(1-z)^{e^{-t}}.$$

Соответствующие вероятности $p_k(t)$ могут быть определены

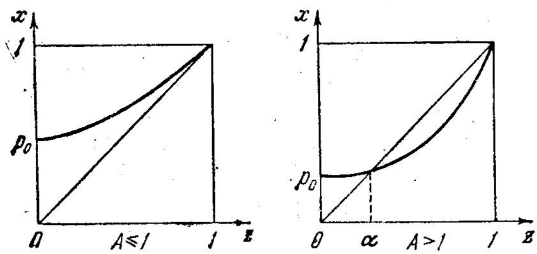


Рис. 20

последовательным дифференцированием:

$$p_k(t)=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}x(t, 0), \quad k=0, 1, \ldots$$

Некоторые свойства производящих функций. Пусть $x(z)$ — производящая функция ветвящегося процесса $\xi(t)$ с дискретным временем:

$$x(z)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k.$$

Функция $x(z)$ является аналитической при $0<z<1$, монотонно неубывающей и выпуклой вниз (рис. 20). Положим

$$A=x'(1).$$

При $A \leqslant 1$ на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 1$ имеется единственный корень уравнения

$$x(z) = z,$$

равный 1; при $A > 1$ кроме 1 имеется еще один корень α этого уравнения такой, что $0 \leqslant \alpha < 1$. Наименьший корень α уравнения $x(z) = z$ на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 1$ может быть получен методом последовательных приближений:

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} x(n, z),$$

где $x(1, z) = x(z)$, ..., $x(n, z) = x[x(n-1, z)]$ и z — произвольная точка отрезка $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Пусть $\varphi(z)$ — производящая функция ветвящегося процесса $\xi(t)$ с непрерывным временем:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k,$$

где плотности перехода λ_k удовлетворяют условию $\sum_k \lambda_k = 0$; $\varphi(z)$ при $0 \leqslant z < 1$ является аналитической выпуклой вниз функцией

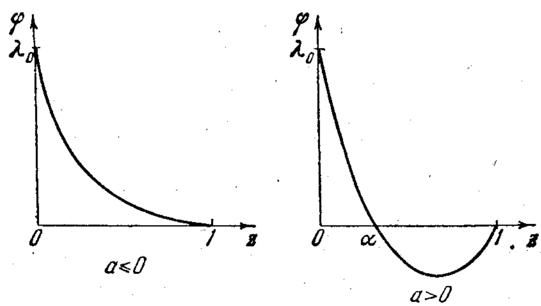


Рис. 21

(рис. 21). Положим $a = \varphi'(1)$. При $a \leqslant 0$ на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 1$ имеется единственный корень уравнения

$$\varphi(z) = 0,$$

равный 1; при $a > 0$ кроме 1 имеется еще один корень α этого уравнения такой, что $0 \leqslant \alpha < 1$.

Рассмотрим интегральные кривые дифференциальных уравнений

$$dx/dt = \varphi(x), \quad dt/dx = 1/\varphi(x),$$

решение $x = x(t)$, $x(0) = z$ которых представляет собой производящую функцию $x(t) = x(t, z)$. Пусть α — корень уравнения $\varphi(z) = 0$, и пусть $x(t) \equiv \alpha$ — соответствующая интегральная кривая рассматриваемых дифференциальных уравнений. Возьмем интегральную кривую, проходящую через фиксированную точку $t=0$, $x=z_0$ $(0 \leqslant z_0 < \alpha < 1)$:

$$t = \int_{z_0}^{x} \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

Поскольку производная $\varphi'(\alpha)$ конечна и при $x \sim \alpha$ функция $\varphi(z)$ имеет вид $\varphi(z) \sim \varphi'(\alpha)(z-\alpha)$, то вдоль интегральной кривой $t = \int_{z_0}^{x} \frac{dz}{\varphi(z)}$ значение t при $x \to \alpha$ неограниченно возрастает, причем эта кривая нигде не пересекает интегральную кривую $x(t) \equiv \alpha$.

На интервале $0 \leqslant z < \alpha$ функция $\varphi(z)$ является положительной, и, следовательно, вдоль интегральной кривой $t = \int_{z_0}^{x} \frac{dz}{\varphi(z)}$ величина x при $t \to \infty$ монотонно возрастает, оставаясь ограниченной значением $x=\alpha$, т. е. $x = x(t)$ — ограниченная монотонная функция.

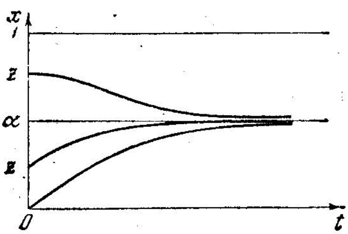


Рис. 22

Вполне аналогично и поведение интегральных кривых, проходящих при $t=0$ через точку z, принадлежащую интервалу $\alpha < z < 1$. Разница будет лишь в том, что $x = x(t)$ монотонно убывает (рис. 22).

Рассмотрим поведение интегральных кривых вблизи прямой $x(t) \equiv 1$. Пусть для некоторого z_0 $(0 \leqslant z_0 < 1)$

$$\int_{z_0}^{1} \frac{dz}{\varphi(z)} = -\infty,$$

что всегда имеет место, когда $a = \varphi'(1) < \infty$. В таком случае интегральная кривая вида

$$t = t_0 + \int_{z_0}^{x} \frac{dz}{\varphi(z)}, \quad 0 \leqslant z < 1,$$

проходящая через некоторую точку (t_0, z_0), такова, что значение t неограниченно убывает при $z \to 1$:

$$t = t_0 + \int_{z_0}^{x} \frac{dz}{\varphi(z)} \to -\infty.$$

Это говорит о том, что, каково бы ни было $t_0 > 0$, при некотором $x = z$ $(0 \leqslant z < 1)$ имеет место равенство

$$t(z) = t_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\varphi(z)} = 0.$$

Все интегральные кривые пересекают ось $t = 0$ в некоторой точке $(0, z)$, где $0 \leqslant z < 1$, и, следовательно, $x(t) \equiv 1$ является единственной интегральной кривой, проходящей через точку $t = 0$, $x = 1$.

Пусть

$$\int_{z_0}^{1} \frac{dz}{\varphi(z)} > -\infty.$$

Тогда при достаточно большом $t_0 > 0$ интегральная кривая $t = t_0 + \int_{z_0}^{x} \frac{dz}{\varphi(z)}$ пересекает интегральную кривую $x(t) \equiv 1$, касаясь ее в некоторой точке $t = \tau$, $x = 1$, где

$$\tau = t_0 + \int_{z_0}^{1} \frac{dz}{\varphi(z)}$$

(рис. 23). В этом случае через точку $(0, 1)$ проходит целое семейство интегральных кривых $x_\tau(t)$, каждая из которых отвечает своему значению $\tau \geqslant 0$. Среди них есть интегральная кривая $x_0(t)$, отвечающая значению $\tau = 0$ и обладающая тем свойством, что кривая $x_0(t)$ лежит ниже всех остальных интегральных кривых $x_\tau(t)$:

$$x_0(t) \leqslant x_\tau(t), \quad 0 \leqslant t < \infty$$

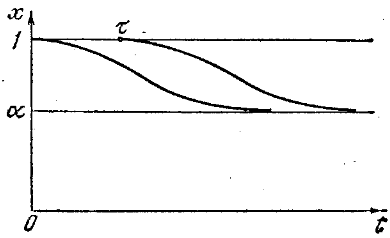


Рис. 23

(это объясняется тем, что внутри области $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant x < \infty$ решение рассматриваемого дифференциального уравнения единственно и интегральные кривые в этой области не пересекаются друг с другом). Интегральная кривая $x_0(t)$ является предельной для других интегральных кривых $x(t, z)$, лежащих ниже ее и проходящих через соответствующие точки $(0, z)$ $(0 \leqslant z < 1)$:

$$x_0(t) = \lim_{z \to 1} x(t, z).$$

Вероятность вырождения. Пусть в исходный момент $t_0=0$ имеется i частиц. Тогда вероятность того, что за время t все частицы исчезнут, равна $[x(t, 0)]^i$. Если τ — момент вырождения ветвящегося случайного процесса $\xi(t)$ (τ — момент достижения состояния $j=0$), то

$$[x(t, 0)]^i = \mathsf{P}\{\tau < t\},$$

и поэтому

$$\lim_{t\to\infty} [x(t, 0)]^i = \mathsf{P}\{\tau < \infty\}$$

есть вероятность того, что через некоторое конечное время не останется ни одной частицы. Предел

$$P_0 = \lim_{t\to\infty} x(t, 0)$$

совпадает с наименьшим корнем α уравнения

$$x(z)=z, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \quad \text{для дискретного } t$$

и уравнения

$$\varphi(z)=0, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \quad \text{для непрерывного } t.$$

При этом $P_0<1$, если $A>1$ или $a>0$, и $P_0=1$, если $A\leqslant 1$ или $a\leqslant 0$.

Асимптотическое поведение разности $1-x(t, 0)$ при $t\to\infty$ таково, что

$$1-x(t, 0) \sim \begin{cases} kA^t & \text{при } A<1, \\ 2/(Bt) & \text{при } A=1 \end{cases}$$

для дискретного t (k — некоторая постоянная, $B=x''(1)$),

$$1-x(t, 0) \sim \begin{cases} ke^{at} & \text{при } a<0, \\ 2/(bt) & \text{при } a=0 \end{cases}$$

для непрерывного t (k — некоторая постоянная, $b=\varphi''(1)$).

Среднее число частиц. Если в исходный момент $t_0=0$ имеется i частиц, то через время t среднее число частиц будет

$$\mathsf{M}\xi(t)=iA^t \quad \text{для дискретного } t,$$

$$\mathsf{M}\xi(t)=ie^{at} \quad \text{для непрерывного } t.$$

Пример. Пусть производящая функция $x(z)$ ветвящегося процесса $\xi(t)$ с дискретным временем t является дробно-линейной. Она зависит от двух параметров и в случае, когда $A>1$, может быть представлена в виде

$$x(z) = 1 - A\frac{\alpha-1}{\alpha-A}\,\frac{1-z}{1-\dfrac{A-1}{\alpha-A}z},$$

где $\alpha < 1$ — наименьший неотрицательный корень уравнения $x(z) = z$.

Положим

$$x(1, z) = x(z), \ldots, x(n, z) = x[x(n-1, z)].$$

Параметр α остается корнем уравнения $x(n, z) = z$ для любой функции $x(n, z)$, причем $x'(n, 1) = A^n$, так что

$$x(n, z) = 1 - A^n \frac{\alpha - 1}{\alpha - A^n} \frac{1 - z}{1 - \frac{A^n - 1}{\alpha - A^n} z}.$$

Разлагая $x(n, z)$ по степеням z, получаем:

$$p_0(n) = 1 - A^n \frac{\alpha - 1}{\alpha - A^n},$$

$$p_k(n) = A^n \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha - A^n}\right)^2 \left(\frac{1 - A^n}{\alpha - A^n}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Если $A = 1$ (и, следовательно, $\alpha = 1$), то производящая функция $x(z)$ зависит от единственного параметра, за который удобно принять $B = x''(1)$. В этом случае функция $x(z)$ может быть представлена в виде

$$x(z) = 1 - \frac{\frac{2}{2+B}(1-z)}{1 - \frac{B}{2+B} z}.$$

Имеем $x''(n, 1) = nB$, так что

$$x(n, z) = 1 - \frac{\frac{2}{2+nB}(1-z)}{1 - \frac{nB}{2+nB} z}.$$

Разлагая $x(n, z)$ по степеням z, получаем

$$p_0(n) = 1 - \frac{2}{2+nB},$$

$$p_k(n) = \left(\frac{2}{2+nB}\right)^2 \left(\frac{nB}{2+nB}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Видно, что при $n \to \infty$

$$p_0(n) \to \begin{cases} \alpha, & \text{если } A > 1, \\ 1, & \text{если } A = 1. \end{cases}$$

Пример. Пусть производящая функция $\varphi(z)$ ветвящегося процесса $\xi(t)$ с непрерывным временем t имеет вид

$$\varphi(z) = p - (p+q)z + qz^2,$$

Соответствующие плотности перехода суть $\lambda = p + q$, $\lambda_0 = p$ и $\lambda_2 = q$. Дифференциальное уравнение для производящих функций $x(t, z)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{dx}{(1-x)(p-qx)} = dt, \quad x(0, z) = z.$$

При $p \neq q$ решение его имеет вид

$$x(t, z) = \frac{p(1-z) + (qz-p)\,e^{(p-q)t}}{q(1-z) + (qz-p)\,e^{(p-q)t}}.$$

Разлагая функцию $x(t, z)$ по степеням z, получаем:

$$p_0(t) = \frac{p}{q} + \frac{1 - e^{(p-q)t}}{1 - \frac{p}{q}\,e^{(p-q)t}},$$

$$p_k(t) = \left(1 - \frac{p}{q}\right)^2 \frac{\left[1 - e^{(p-q)t}\right]^{k-1}}{\left[1 - \frac{p}{q}\,e^{(p-q)t}\right]^{k+1}}\, e^{(p-q)t}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

При $p = q$ производящая функция $x(t, z)$ есть решение уравнения

$$\frac{dx}{p(1-x)^2} = dt, \quad x(0, z) = z,$$

и имеет вид

$$x(t, z) = 1 - \frac{1-z}{1 - pt(1-z)}.$$

Разлагая $x(t, z)$ по степеням z, получим

$$p_0(t) = 1 - \frac{1}{1+pt},$$

$$p_k(t) = \frac{(pt)^{k-1}}{(1+pt)^{k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Наименьшим корнем уравнения $\varphi(z) = 0$ на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 1$ является значение $\alpha = \min(1, p/q)$; параметр $a = \varphi'(1)$ равен $q - p$. Из формул для вероятностей $p_k(t)$ непосредственно видно, что $p_0(t) \to \alpha$ при $t \to \infty$.

Явление взрыва. Пусть $\xi(t)$ — случайный ветвящийся процесс с непрерывным временем, порожденный ровно одной частицей. Если частицы размножаются достаточно быстро, то, вообще говоря, имеется положительная вероятность того, что за некоторое конечное время τ образуется бесконечное число частиц (условно это явление можно назвать *взрывом*). Вероятность осуществления взрыва до момента t есть

$$p_\infty(t) = 1 - \mathsf{P}\{\xi(t) < \infty\} = 1 - \lim_{z \to 1} x(t, z).$$

В случае, когда при некотором z_0

$$\int_{z_0}^{1} \frac{dz}{\varphi(z)} = -\infty,$$

эта вероятность равна нулю, так что при указанном условии взрыв невозможен. Если же

$$\int_{z_0}^{1} \frac{dz}{\varphi(z)} > -\infty,$$

то вероятность взрыва положительна и равна разности $1 - x_0(t)$, где $x_0(t)$ — минимальное решение дифференциального уравнения $x' = 1/\varphi(x)$ с начальным условием $x(0) = 1$.

Предельные распределения. При $t \to \infty$ имеется предельное распределение вероятностей для нормированных случайных величин вида

$$\eta(t) = \xi(t)\,\frac{1 - x(t, 0)}{M(t)}.$$

Для различных случаев — $a < 0$, $a = 0$ и $a > 0$ — соответствующие предельные распределения резко отличаются (при $a < 0$ предельное распределение дискретно, при $a > 0$ оно непрерывно). Если $a < 0$ или $a > 0$, то предельные распределения сложным образом зависят от других характеристик ветвящегося процесса $\xi(t)$; в случае же $a = 0$ предельное распределение является показательным: при $t \to \infty$

$$F_{\eta(t)}(y) \Rightarrow F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0, \\ 1 - e^{-y}, & \text{если } y > 0. \end{cases}$$

Предельное распределение будет приблизительно показательным и при малом параметре a. Точнее, пусть

$$b = \varphi''(1) < \infty, \quad c = \varphi'''(1) < \infty.$$

Тогда равномерно по $b \geqslant b_0 > 0$ и $c \leqslant c_0 < \infty$ при $t \to \infty$ и $a \to 0$ имеет место слабая сходимость

$$F_{\eta(t)}(y) \Rightarrow F(y).$$

§ 3. Случайные процессы с независимыми приращениями

1. Последовательности сумм возрастающего числа независимых случайных величин. Случайный процесс $\xi = \xi(t)$ на множестве T действительной прямой называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любых значений $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots$ из множества T приращения $\xi_k = \xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ являются независимыми случайными величинами.

Случайный процесс $\xi=\xi(t)$ с независимыми приращениями и с «дискретным временем» t (скажем, $t=0, 1, \ldots$) представляет собой последовательность сумм возрастающего числа независимых величин $\xi_k=\xi(k+1)-\xi(k)$:

$$\xi(t)-\xi(0)=\xi_0+\xi_1+\ldots+\xi_{t-1}.$$

Закон нуля и единицы. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин. Обозначим символом $\mathfrak{A}(n, \infty)$ σ-алгебру событий, порожденную величинами $\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots$, и положим

$$\mathfrak{A}^\infty=\bigcap_n \mathfrak{A}(n, \infty).$$

Имеет место следующий *закон нуля или единицы*: вероятность любого события A из σ-алгебры $\mathfrak{A}^\infty$ равна 0 или 1:

$$\mathsf{P}(A)=0 \text{ или } \mathsf{P}(A)=1.$$

Можно дать другую формулировку этого закона: любая случайная величина, измеримая относительно $\mathfrak{A}^\infty$, с вероятностью 1 равна постоянной.

Пример. Рассмотрим последовательность сумм

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \quad n=1, 2, \ldots$$

Существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n$ есть событие из σ-алгебры $\mathfrak{A}^\infty$, так что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k$ сходится либо с вероятностью 1, либо с вероятностью 0.

Неравенство Колмогорова. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие конечные математические ожидания $a_k=\mathsf{M}\xi_k$ и дисперсии $\sigma_k^2=\mathsf{D}\xi_k$. Имеет место следующее неравенство (*неравенство Колмогорова*):

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(\xi_k-a_k)\right|>\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2.$$

Аналогичным является неравенство для произвольных независимых величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$:

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}\xi_k\right|>\delta+\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{1-p}\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|>\varepsilon\right\},$$

если только неотрицательные числа δ и p $(p<1)$ выбраны так, что при всех m $(1\leqslant m\leqslant n_1)$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{m}\xi_k\right|>\delta\right\}\leqslant p.$$

Сходимость рядов из независимых слагаемых. Пусть ξ_1, ξ_2, ...— последовательность независимых случайных величин. Предположим, что сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$, где $a_k = \mathsf{M}\xi_k$ и $\sigma_k^2 = \mathsf{D}\xi_k$. Тогда с вероятностью 1 последовательность частичных сумм

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

сходится при $n \to \infty$ к некоторой случайной величине η.

Определим величины $\tilde{\xi}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, положив

$$\tilde{\xi}_k = \begin{cases} \xi_k & \text{при} \quad |\xi_k| \leqslant C, \\ x_k & \text{при} \quad |\xi_k| > C, \end{cases}$$

где C — произвольная постоянная и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится. Предел $\lim_{n\to\infty} \eta_n$ существует с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда сходится каждый из трех рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi_k \neq \tilde{\xi}_k\}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\sigma}_k^2,$$

где

$$\tilde{a}_k = \mathsf{M}\tilde{\xi}_k, \quad \tilde{\sigma}_k^2 = \mathsf{D}\tilde{\xi}_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Рассеивание и концентрация случайных величин. Дисперсия $\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2$ служит простейшей характеристикой рассеивания величины $\xi = \xi(\omega)$ в зависимости от случая ω. Однако дисперсия может и не существовать. Можно определить *степень рассеивания* случайной величины ξ как [41]

$$\delta_\xi = -\ln \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x_1-x_2|} \mathsf{P}_\xi(dx_1)\mathsf{P}_\xi(dx_2) = -\ln\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi_\xi(u)|^2}{1+u^2}\,du,$$

где P_ξ — распределение вероятностей, φ_ξ — характеристическая функция случайной величины ξ; логарифмы берутся по основанию e.

Степень рассеивания δ обладает следующими свойствами. Во-первых, равенство $\delta_\xi = 0$ эквивалентно тому, что случайная величина ξ с вероятностью 1 есть постоянная. Во-вторых, существование предела $\lim_{n\to\infty} \delta_{\xi_n} = 0$ для некоторой последовательности случайных величин ξ_1, ξ_2, ... равносильно тому, что при некоторых постоянных a_n последовательность $\xi_n - a_n$ сходится по вероятности к нулю. В-третьих, $\delta_{\xi_n} \to \infty$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда *функция концентрации*

$$Q_{\xi_n}(l) = \sup_a \mathsf{P}\{a - l \leqslant \xi_n \leqslant a + l\}$$

случайных величин ξ_n такова, что $Q_{\xi_n}(l) \to 0$ при всяком конечном l. В-четвертых, степень рассеивания суммы $\xi = \xi_1 + \xi_2$ независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 всегда не меньше, чем степень рассеивания каждого из слагаемых:

$$\delta_\xi \geqslant \max\left(\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}\right),$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда одно из слагаемых (ξ_1 или ξ_2) с вероятностью 1 есть постоянная.

Центрированные ряды из независимых слагаемых. Пусть ξ_1, ξ_2, ...— последовательность независимых случайных величин, и пусть

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Условие

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_{\eta_n} < \infty$$

является необходимым и достаточным для существования с вероятностью 1 предела

$$\eta = \lim_{n\to\infty} (\eta_n - b_n),$$

где b_1, b_2, ...— некоторые центрирующие постоянные. При этом

$$\delta_\eta = \lim_{n\to\infty} \delta_{\eta_n}.$$

Центрирующие постоянные b_n могут быть определены, например, из соотношений

$$\mathsf{M} \operatorname{arc\,tg}(\eta_n - b_n) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если же

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{\eta_n} = \infty,$$

то с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1 < m < n} |\eta_m| = \infty.$$

Усиленный закон больших чисел. Пусть ξ_1, ξ_2, ...— независимые, одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием $a = \mathsf{M}\xi_k$. Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k = a.$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями $a_k = \mathsf{M}\xi_k$ и дисперсиями $\sigma_k^2 = \mathsf{D}\xi_k$, и пусть $b_1, b_2, \ldots$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{b_k^2} < \infty.$$

Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a_k) = 0.$$

Закон повторного логарифма. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями $a_k = \mathsf{M}\xi_k$ и дисперсиями $\sigma_k^2 = \mathsf{D}\xi_k$, причем

$$\frac{1}{B_n}(\xi_n - a_n) = o\left\{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln B_n^2}}\right\},$$

где $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$. Тогда с вероятностью 1

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(2B_n^2 \ln\ln B_n^2\right)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a_k) = 1.$$

2. Случайные блуждания и некоторые процессы массового обслуживания.

Процессы восстановления. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность положительных независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение вероятностей, и

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Можно условно считать, что имеется некоторый прибор со сроком службы ξ_1; после выхода его из строя (через случайное время ξ_1) он заменяется новым прибором, который в свою очередь выходит из строя через случайное время ξ_2, после чего заменяется следующим новым прибором и т. д.; величины S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ естественно назвать *моментами восстановления*.

Будем предполагать, что восстановления происходят в дискретные моменты времени $t = kh$, кратные некоторому $h > 0$ (скажем, $h = 1$). В связи с этим нужно уточнить, в какой момент заменяется испорченный прибор. Рассматривая лишь целочисленные значения $t \geqslant 0$, будем считать, что если прибор испортился в промежутке времени $[t, t+1]$, то он заменяется новым прибором в момент времени $t+1$ (срок службы отдельного прибора может быть равен 1, 2, ...). Таким образом, величины

ξ_k принимают целочисленные значения $x=1,\ 2,\ \ldots$ с соответствующими вероятностями $P(x)$ $\left(\sum\limits_{1}^{\infty} P(x)=1\right)$. Обозначим через $\nu(t)$ число восстановлений за время t и через $\xi(t)$ время работы очередного прибора к моменту t:

$$\xi(t)=t-S_{\nu(t)}.$$

К следующему моменту времени $t+1$ прибор либо выходит из строя и заменяется новым прибором — в этом случае $\xi(t+1)=0$, либо продолжает работать — в этом случае $\xi(t+1)=\xi(t)+1$. При условии что прибор проработал время x, он выходит из строя через единицу времени и заменяется новым прибором с условной вероятностью

$$q(x)=\mathsf{P}\{\xi_1=x+1\,|\,\xi_1>x\}=P(x+1)\Bigg/\sum_{y=x+1}^{\infty}P(y),\quad x=0,1,\ldots$$

Случайный процесс

$$\xi(0)\to\xi(1)\to\xi(2)\to\ldots$$

представляет собой цепь Маркова, в которой (см. пример на с. 220) из состояния x возможен переход либо в следующее состояние $x+1$, что происходит с вероятностью

$$p(x)=1-q(x)=G(x+1)/G(x),\quad x=0,\ 1,\ \ldots,$$

либо в «начальное» состояние 0, что происходит с вероятностью $q(x)$ $\left(G(x)=\sum\limits_{y=x+1}^{\infty}P(y)\right.$ означает вероятность того, что срок службы прибора будет больше $\left.x\right)$. Попадание в состояние 0 при некотором t $(\xi(t)=0)$ означает восстановление в момент t; время возвращения в состояние 0 есть не что иное, как время службы отдельного прибора; число попаданий в состояние 0 на интервале $(s,\ t]$ равно числу восстановлений за промежуток времени от s до t и т. п. При условии что среднее время μ возвращения в состояние 0 конечно, имеется *стационарное распределение вероятностей*:

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\xi(t)=x\}=G(x)/\mu,\qquad x=0,\ 1,\ \ldots;$$

при этом *среднее время возвращения* $\mu=\sum\limits_{x=0}^{\infty}G(x)$ *совпадает со средним временем службы отдельного прибора*:

$$\mu=\sum_{x=0}^{\infty}G(x)=\sum_{x=1}^{\infty}xP(x).$$

Среднее число восстановлений за время от t до $t+s$

$$n(t+s)-n(t)=\sum_{u=t+1}^{t+s}\mathsf{P}\{\xi(u)=0\}$$

для любого ограниченного интервала $(t,\ t+s]$ таково, что

$$\lim_{t\to\infty}[n(t+s)-n(t)]=s/\mu,$$

т. е. *при длительном процессе восстановления среднее число восстановлений за время s приблизительно равно величине s/μ, где μ — среднее время службы отдельного прибора.*

Мы условились считать, что если прибор работает в момент t, то он заменяется не раньше, чем через время $h(h=1)$. Примем за время, которое прибор еще будет работать после момента t, величину

$$\eta(t)=S_{\nu(t)+1}-h-t,$$

где $S_{\nu(t)+1}$ — следующий за t момент восстановления (момент замены рассматриваемого прибора). В случае, когда время ожидания поломки прибора имеет показательное распределение вероятностей $(G(x)=e^{-\lambda x},\ x\geqslant 0)$, при всех t

$$\mathsf{P}\{\eta(t)=x\}=\frac{G(x)}{\mu},\quad x=0,1,\ldots,\quad \mu=\frac{1}{1-e^{-\lambda}}.$$

В общем случае *величина $\eta(t)$ при $t\to\infty$ имеет предельное распределение вероятностей*

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\eta(t)=x\}=G(x)/\mu,\qquad x=0,1,\ldots$$

Аналогичные результаты имеют место и в общем случае. В частности, для непрерывно распределенных слагаемых $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ с плотностью вероятности $p(x)$ распределения вероятностей соответствующих величин

$$\xi(t)=t-S_{\nu(t)},\quad \eta(t)=S_{\nu(t)+1}-t$$

слабо сходятся к предельному распределению с плотностью

$$p^*(x)=G(x)/\mu,\quad 0\leqslant x<\infty,$$

где

$$G(x)=\int_x^\infty p(y)\,dy,\qquad \mu=\int_0^\infty xp(x)\,dx=\int_0^\infty G(x)\,dx.$$

Распределение максимума. Пусть

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\qquad n=1,2,\ldots,$$

— последовательность сумм независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_k $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. Для наглядности можно представить себе, что некоторая частица случайно блуждает по действительной прямой, за каждый шаг смещаясь на соответствующую величину ξ_n, и тогда $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ $(n = 1, 2, \ldots;\ S_0 = 0)$ будет траекторией этого случайного блуждания. Пусть величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют отличное от нуля математическое ожидание; для определенности условимся считать, что

$$a = \mathsf{M}\xi_1 < 0.$$

По усиленному закону больших чисел $S_n/n \to a < 0$ с вероятностью 1, так что

$$S_n \to -\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и существует такое зависящее от случая ν, для которого $S_n < 0$ при всех $n > \nu$. Это говорит о том, что максимум

$$\zeta = \max(S_0, S_1, \ldots)$$

траектории случайного блуждания является конечной величиной, совпадающей с максимальным значением последовательности $S_0, S_1, \ldots, S_\nu$. Используя формулу полной вероятности, легко получить следующее уравнение для функции распределения $F_\zeta(z)$:

$$F_\zeta(z) = \mathsf{M}F_\zeta(z - \xi_1), \quad z \geq 0, \tag{3.1}$$

из которого непосредственно следует, что с положительной вероятностью $q > 0$ осуществляется событие $\{\zeta = 0\}$:

$$q = F_\zeta(0) > 0$$

(т. е. частица при выходе из точки $x = 0$ с вероятностью $q \neq 0$ никогда не попадает на положительную полуось $x > 0$).

Существует важная связь распределения вероятностей этой величины ζ с некоторым процессом восстановления $S_0^*, S_1^*, \ldots$, построенным по случайному блужданию $S_0, S_1, \ldots$, которая может быть использована при изучении процессов массового обслуживания. Именно, в рассматриваемом случайном блуждании с вероятностью $p = 1 - q$ частица рано или поздно попадает на положительную часть действительной прямой; обозначим ξ_1^* ее положение при первом попадании в интервал $(0, \infty)$. Величина ξ_1^* существует лишь с вероятностью p: $\mathsf{P}\{\xi_1^* \in (0, \infty)\} = p$ (условно можно считать, что с вероятностью $q = 1 - p$ величина ξ_1^* «исчезает»). Обозначим τ_1 момент попадания частицы в интервал $(0, \infty)$; $\tau_1 = \nu_1^*$, где ν_1^* есть число шагов до того, как смещение частицы впервые становится положительным: $S_n - S_0 \leq 0$ при $n < \tau_1$, $S_{\tau_1} - S_0 = \xi_1^* > 0$. Положим $S_1^* = S_{\tau_1}$. После момента τ_1 смещение частицы происходит по тому же закону, что и после начального момента $\tau_0 = 0$. В частности, с той же вероятностью $p = 1 - q$, что и раньше, частица в некоторый момент τ_2 (через какое-то случайное число шагов $\nu_2^* = \tau_2 - \tau_1$) попадает в точку $S_2^* = S_{\tau_2}$ правее исходной точки S_1^* (ν_2^* есть число шагов после момента τ_1 до того, как смещение частицы вновь становится положительным: $S_n - S_1^* \leqslant 0$ при $n < \tau_2$, $S_{\tau_2} - S_1^* = \xi_2^* > 0$). Начиная с момента $\tau_2 = \nu_1^* + \nu_2^*$, наблюдается та же картина — с вероятностью p частица в некоторый момент τ_3 (через какое-то случайное число шагов $\nu_2^* = \tau_3 - \tau_2$) попадает в точку $S_3^* = S_{\tau_3}$ правее исходной точки S_2^* (ν_2^* есть число шагов после момента τ_2 до того, как смещение частицы снова становится положительным: $S_n - S_2^* \leqslant 0$ при $n < \tau_3$, $S_{\tau_3} - S_2^* = \xi_3^* > 0$). Продолжая этот процесс и дальше, мы придем к последовательности сумм $S_n^* = S_{\tau_n}$:

$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^*, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

положительных случайных величин ξ_k^* $(k = 1, 2, \ldots)$, где ξ_{k+1}^* представляет собой смещение частицы (после выхода ее из точки S_k^*) в момент τ_{k+1}, когда это смещение впервые становится положительным: $S_n - S_k^* \leqslant 0$ при $n < \tau_{k+1}$, $S_{\tau_{k+1}} - S_k^* = \xi_{k+1}^* > 0$. Поскольку величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одинаковое распределение вероятностей, смещение частицы после выхода из исходной точки S_k^* происходит по тому же закону, что и после выхода из точки $S_0^* = 0$ (причем независимо от ее поведения до момента τ_k); поэтому *величины* $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$ *являются независимыми и имеют одно и то же распределение вероятностей.* Поскольку $\mathsf{P}\{S_n^* \in (0, \infty)\} = p^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий $\{S_n^* \in (0, \infty)\}$, т. е. *процесс восстановления* S_n^* $(n = 1, 2, \ldots)$ *обрывается на каком-то конечном шаге.* Положив $S_0^* = 0$ и считая S_0^* также моментом восстановления, для общего числа восстановлений N (во всем бесконечном интервале $[0, \infty)$) имеем геометрическое распределение вероятностей:

$$\mathsf{P}\{N \geqslant n\} = \mathsf{P}\{S_n^* \in (0, \infty)\} = p^n, \quad \mathsf{M}[N] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{1}{q}.$$

Величина $\zeta = \max(0, S_1, S_2, \ldots)$ совпадает с максимальным значением монотонно возрастающей последовательности $0, S_1^*, S_2^*, \ldots$, иначе говоря, с последним моментом восстановления S_{N-1}^*.

Поэтому при любом $x > 0$

$$\mathsf{P}\{0<\zeta\leqslant x\} = \sum_{n\geqslant 1} \mathsf{P}\{N = n, S_{n-1}^* \in [0, x]\},$$

откуда получается следующее соотношение:

$$F_\zeta(x) = q\mathsf{M}(x), \quad q = F_\zeta(0),$$

где $\mathsf{M}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x)$ и $F^{n*}(x)$ есть функция распределения величин S_n^* $(n = 0, 1, \ldots)$.

В исходном случайном блуждании величина ξ_1^* означает положение частицы при первом попадании на интервал $(0, \infty)$: $\xi_1^* = S_{\tau_1}$, где τ_1 — число шагов до первого попадания на интервал $(0, \infty)$, и для всякого $x \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\{\tau_1 = n, \xi_1^* \geqslant x\} = \mathsf{P}\{S_1 \leqslant 0, \ldots, S_{n-1} \leqslant 0, S_n > x\} =$$
$$= \mathsf{M}\left[G_{\xi_1}(x - S_{n-1})\,\chi_{\{S_1\leqslant 0,\ldots,S_{n-1}\leqslant 0\}}\right], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где χ_A — индикатор события A ($\chi_A = 1$ при наступлении A и $\chi_A = 0$ в противном случае).

Пусть, например, каждая из величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ на интервале $(0, \infty)$ распределена по показательному закону

$$G_{\xi_1}(x) = \mathsf{P}\{\xi_1 > x\} = Ae^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0,$$

где $A = \mathsf{P}\{\xi_1 > 0\}$. В этом случае имеем

$$\mathsf{P}\{\tau_1 = n, \xi_1^* > x\} = \mathsf{M}\left[Ae^{-\lambda x - \lambda S_{n-1}}\chi_{\{S_1\leqslant 0,\ldots,S_{n-1}\leqslant 0\}}\right] = B_n e^{-\lambda x},$$

где

$$B_n = \mathsf{M}\left[Ae^{-\lambda S_{n-1}}\chi_{\{S_1\leqslant 0,\ldots,S_{n-1}\leqslant 0\}}\right],$$

и, суммируя эти равенства по всем $n = 1, 2, \ldots$, получим

$$\mathsf{P}\{\xi_1^* > x\} = pe^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0,$$
$$p = \mathsf{P}\{\xi_1^* > 0\} = 1 - q, \quad q = F_\zeta(0).$$

Таким образом, при плотности вероятности $p_{\xi_1}(x) = A\lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$ величины $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$ будут распределены по показательному закону с плотностью $p^*(x) = p\lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$, отличающейся от обычной показательной плотности лишь множителем p, показывающим, что с вероятностью $q = 1 - p$ величина ξ_1 «исчезает». Отсюда сразу находится

$$\mathsf{M}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) = \frac{1}{q}(1 - pe^{-\lambda q x}), \quad q = 1 - p,$$

и функция распределения максимума $\zeta = \max(0, S_1, \ldots)$

$$F_\zeta(x) = 1 - (1-q)e^{-\lambda q x}, \quad x \geqslant 0,$$

где вероятность $q = F(0)$ *может быть определена из уравнения* (2.1):

$$q = \int_{-\infty}^{0} [1 - (1-q)\, e^{\lambda q x}]\, p_{\xi_1}(x)\, dx.$$

В частности, когда при $x \leqslant 0$ плотность вероятности **имеет тот** же показательный тип, что и при $x > 0$, а именно

$$p_{\xi_1}(x) = B\mu e^{\mu x}, \qquad x < 0,$$

имеем

$$q = B - A\frac{\mu}{\lambda}.$$

Отметим, что величина ν_0 — число шагов до первого (после выхода из точки $S_0 = 0$) попадания в область $x \leqslant 0$ — имеет конечное математическое ожидание

$$M\nu_0 = 1/q.$$

Случайные процессы в системах с одной линией обслуживания *). Пусть на некоторую систему обслуживания в случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$ поступают требования. Предположим, что одновременное поступление разных требований невозможно, а промежутки $\xi_1 = \tau_2 - \tau_1$, $\xi_2 = \tau_3 - \tau_2$, ... между моментами $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ являются независимыми случайными величинами, имеющими одно и то же распределение вероятностей. Предположим, кроме того, что на обслуживание очередного n-го требования затрачивается время η_n и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — независимые случайные величины с одним и тем же распределением вероятностей, независимые также от моментов времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$ (имеется в виду, что η_n — «чистое» время обслуживания n-го требования, не считая случайного времени ожидания H_n от момента τ_n поступления требования до начала обслуживания).

Общее время, проведенное n-м требованием в системе обслуживания, в наших обозначениях есть $H_n + \eta_n$. Предположим, что если следующее $(n+1)$-е требование поступает через время $\xi_n \geqslant H_n + \eta_n$, то оно застает систему обслуживания свободной и немедленно начинает обслуживаться, т. е. $H_{n+1} = 0$; если же $\xi_n < H_n + \eta_n$, то в момент $\tau_{n+1} = \tau_n + \xi_n$ система еще занята обслуживанием предшествующих требований, и до начала обслуживания $(n+1)$-е требование должно ждать время $H_{n+1} = H_n + \eta_n - \xi_n$.

Обычно интересуются закономерностями длительного процесса обслуживания, скажем распределением вероятностей величины

*) С различными задачами теории массового обслуживания, управления запасами и т. п. можно познакомиться, например, по книге [94].

H_n — времени ожидания n-м требованием начала обслуживания (при $n \to \infty$). Если положить

$$\Delta_n = \eta_n - \xi_n, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

то величины H_n будут связаны с н е з а в и с и м ы м и случайными величинами Δ_n ($n = 1, 2, \ldots$) следующими соотношениями:

$$\mathrm{H}_1 = 0, \quad \mathrm{H}_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mathrm{H}_n + \Delta_n \leqslant 0, \\ \mathrm{H}_n + \Delta_n & \text{при} \quad \mathrm{H}_n + \Delta_n > 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{H}_{n+1} = S_n - \min(0, S_1, \ldots, S_n) = \max(0, S_1', \ldots, S_n'),$$

где $S_1' = \Delta_n$, $S_2' = \Delta_n + \Delta_{n-1}, \ldots, S_n' = \Delta_n + \ldots + \Delta_1$.

Совместное распределение $(S_1', \ldots, S_n')$ такое же, как и у $(S_1, \ldots, S_n)$, и, таким образом, *распределение вероятностей величины* H_{n+1} совпадает с распределением величины $\zeta_n = \max(0, S_1, \ldots, S_n)$.

Пусть a — средний промежуток времени между последовательно поступающими требованиями ($a = \mathsf{M}\xi_1$) и b — среднее время обслуживания отдельного требования ($b = \mathsf{M}\eta_1$). Среднее значение величин $\Delta_n = \eta_n - \xi_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) равно $b - a$. При условии

$$\mathsf{M}\Delta_1 = b - a < 0 \tag{3.2}$$

последовательность величин $\zeta_n = \max(0, S_1, \ldots, S_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) монотонно возрастает и сходится к величине $\zeta = \max(0, S_1, \ldots)$, а *распределение вероятностей величин* H_n *сходится к распределению максимума* $\zeta = (0, S_1, S_2, \ldots)$: *для любого* x

$$\mathsf{P}\{\mathrm{H}_n \leqslant x\} \to F_\zeta(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Отметим, что при условии

$$\mathsf{M}\Delta_1 = b - a > 0$$

по усиленному закону больших чисел $S_n/n \to \mathsf{M}\Delta_1$, $S_n \to \infty$ с вероятностью 1 и $\zeta_n = \max(0, S_1, \ldots, S_n) \to \infty$, так что в этом случае

$$\mathsf{P}\{\mathrm{H}_n \geqslant x\} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

для любого сколь угодно большого x. Грубо говоря, это означает, что достаточно поздно поступившие требования H_n ($n \to \infty$) с вероятностью, близкой к 1, будут ждать обслуживания бесконечно долго.

П р и м е р. Предположим, что время обслуживания очередного требования имеет показательное распределение вероятностей с плотностью

$$p_{\eta_1}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

и пусть $p_{\xi_1}(y)$ — плотность вероятности величины ξ_1 ($p_{\xi_1}(y)=0$ при $y<0$). Тогда сумма $\Delta_1=\eta_1-\xi_1$ независимых величин η_1 и $-\xi_1$ имеет плотность

$$p(x)=\int_{-\infty}^{0} p_{\eta_1}(x-y)\,p_{-\xi_1}(y)\,dy=\int_0^{\infty} p_{\eta_1}(x+y)\,p_{\xi_1}(y)\,dy,$$

которая при $x>0$ задается формулой

$$p(x)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda(x+y)}p_{\xi_1}(y)\,dy=A\lambda e^{-\lambda x},\qquad x>0,$$

где

$$A=\int_0^{\infty}e^{-\lambda y}p_{\xi_1}(y)\,dy=\mathsf{P}\{\Delta_1>0\}.$$

Как было указано ранее, в этом случае функция распределения $F_\zeta(x)$ описывается формулой

$$F_\zeta(x)=1-(1-q)e^{-\lambda q x},\quad x\geqslant 0.$$

Если время ожидания очередного требования также имеет показательный закон распределения

$$p_{\xi_1}(x)=\begin{cases}\mu e^{-\mu x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

то плотность вероятности $p(x)$ при $x<0$ будет

$$p(x)=B\mu e^{\mu x},$$

где $B=\mathsf{P}\{\Delta_1\leqslant 0\}=1-A$, причем для указанной плотности

$$A=\frac{\mu}{\lambda+\mu},\quad B=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},\quad q=1-\frac{\mu}{\lambda}.$$

Рассмотрим в общей схеме *период занятости* системы обслуживания — промежуток времени с момента поступления первого требования до момента, когда система становится вновь свободной. Если ν_0 — число всех требований, которые обслуживаются в период занятости, то длительность этого периода будет $T=\sum_{k=1}^{\nu_0}\eta_k$. Величина ν_0 совпадает с числом шагов до первого выхода в область $x\leqslant 0$ последовательности $S_n=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k$ ($n=1, 2, \ldots$) и при условии (3.2) случайная величина ν_0 имеет конечное математическое ожидание $\mathsf{M}\nu_0$, равное $1/q$ ($q=F_\zeta(0)$).

Математическое ожидание случайной величины $T = \sum_{k=1}^{\nu_0} \eta_k$ есть

$$\mathsf{M} \sum_{k=1}^{\nu_0} \eta_k = \mathsf{M}\eta_1 \mathsf{M}\nu_0 = \frac{b}{q},$$

где $q = F_\zeta(0)$ при больших n приблизительно есть вероятность того, что n-е требование застает систему свободной и $b = \mathsf{M}\eta_1$ — среднее время обслуживания одного требования. Приведенная формула дает среднее значение не только первого периода занятости (с момента поступления первого требования), но и вообще любого периода занятости

$$T_1 = \sum_{k=\nu_0+1}^{\nu_1} \eta_k, \quad T_2 = \sum_{k=\nu_1+1}^{\nu_2} \eta_k, \ \ldots,$$

где ν_0, ν_1, ... — последовательные значения n, при которых $(n+1)$-е требование застает систему свободной.

Пусть $x(t)$ — «длина очереди» через время t с начала обслуживания первого требования, поступающего в какой-то момент τ_1 (точнее, $x(t)$ — число требований, поступивших в систему и еще не обслуженных). Положим

$$P_k(t) = \mathsf{P}\{x(t) = k\}, \quad k = 0, 1, \ldots;$$

$P_0(t)$ — вероятность того, что система в момент времени $\tau_1 + t$ свободна, $P_1(t)$ — вероятность того, что в системе имеется лишь одно требование, которое непосредственно обслуживается, и т. д.

Обозначим

$$\tau_0^* = \tau_1, \quad \tau_1^* = \tau_1 + \sum_{k=1}^{\nu_0} \xi_k, \quad \tau_2^* = \tau_1^* + \sum_{k=\nu_0+1}^{\nu_1} \xi_k, \ \ldots$$

последовательные моменты времени, в которые поступающие требования застают систему свободной. Если ввести процесс восстановления S_n^* $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$S_0^* = 0, \quad S_1^* = \tau_1^* - \tau_0^*, \quad S_2^* = \tau_2^* - \tau_1^*, \ \ldots,$$

где $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^*$ — суммы независимых одинаково распределенных положительных величин $\xi_k^* = \tau_k^* - \tau_{k-1}^*$, имеющих конечное математическое ожидание

$$\mathsf{M}\xi_1^* = \mathsf{M}\xi_1 \cdot \mathsf{M}\nu_0 = a/q, \quad a = \mathsf{M}\xi_1,$$

то для величин $\xi^*(t) = t - S_{\nu^*(t)}$, где $\nu^*(t)$ — число восстановлений за время t, будет иметь место теорема восстановления: *рас-*

пределение вероятностей величины $\xi^*(t)$ *при* $t\to\infty$ *слабо сходится к распределению некоторой величины* ξ^*. Очевидно, после каждого момента τ_n^*, в который поступающее требование застает систему свободной, процесс образования очереди начинается заново, и поэтому вероятность того, что очередь равна k через время u после момента $\tau_0^*+S_n^*$, такая же, как и при $n=0$, т. е. равна $P_k(u)$. Следовательно, при фиксированном $S^*_{\nu^*(t)}=s$ вероятность того, что $x(t)=k$, будет

$$\mathsf{P}\{x(t)=k\mid S^*_{\nu^*(t)}\}=P_k\left(t\mid -S^*_{\nu^*(t)}\right)=P_k(\xi^*(t)),$$

$$P_k(t)=\mathsf{M}P_k(\xi^*(t)).$$

Распределения случайных величин $\xi^*(t)$ при $t\to\infty$ слабо сходятся к распределению вероятностей случайной величины ξ^*: $\mathsf{M}u(\xi^*(t))\to\mathsf{M}u(\xi^*)$ для любой ограниченной непрерывной функции $u(x)$ (отметим, что функция от дискретных значений $t=0, 1, 2, \ldots$ формально всегда является непрерывной), и для непрерывных вероятностей $P_k(t)$ имеет место сходимость к стационарному распределению $P_k^*=\mathsf{M}P_k(\xi^*)$:

$$\lim_{t\to\infty}P_k(t)=P_k^*,\quad k=0, 1, \ldots$$

3. Процесс броуновского движения. Гауссовский процесс с независимыми приращениями на конечном или бесконечном $T=[a, b]$ такой, что

$$\mathsf{M}[\xi(t)-\xi(s)]=0,\quad \mathsf{D}[\xi(t)-\xi(s)]=t-s$$

при любых $s, t\in T$ $(s\leqslant t)$, называется *броуновским движением* или, иначе, *винеровским процессом.*

Броуновское движение как непрерывное случайное блуждание. Пусть $\xi=\xi(t)$ — процесс броуновского движения на отрезке $T=[0, 1]$, причем $\xi(0)=0$. Рассмотрим значения $\xi(t)$ лишь в дискретные моменты $t=k/n$ $(k=0, 1, \ldots, n)$. Пусть

$$\Delta\xi(t)=\xi\left(t+\frac{1}{n}\right)-\xi(t),$$

и пусть $\xi_n=\xi_n(t)$ — случайный процесс, получающийся в результате линейной интерполяции между соседними значениями $\xi\left(\frac{k-1}{n}\right)$ и $\xi\left(\frac{k}{n}\right)$:

$$\xi_n(t)=\sum_{m=0}^{k-1}\Delta\xi\left(\frac{m}{n}\right)+(nt-k)\,\Delta\xi\left(\frac{k}{n}\right),$$

где $k=[nt]$ — целая часть числа nt (если $0\leqslant t<1/n$, то $\xi_n(t)=nt\Delta\xi(0)$).

Каждая траектория $\xi_n(\omega, t)$ случайного процесса $\xi_n = \xi_n(t)$ представляет собой непрерывную ломаную линию с вершинами в точках $(t = k/n,\ \xi = \xi(\omega, k/n))$ (рис. 24).

Рассмотрим последовательность случайных процессов $\xi_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ описанного вида. С вероятностью 1 равномерно по $t \in T$

$$\xi_n(t) \to \xi(t) \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть ξ_{mn} $(m = 0, \ldots, n-1)$ — одинаково распределенные независимые случайные величины такие, что

$$\mathsf{M}\xi_{mn} = 0, \quad \mathsf{D}\xi_{mn} = 1/n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим непрерывный случайный процесс $\xi_n = \xi_n(t)$ вида

$$\xi_n(t) = \sum_{m=0}^{k-1} \xi_{mn} + (nt - k)\,\xi_{kn},$$

где $k = [nt]$ — целая часть числа nt (если $0 \leqslant t < 1/n$, то $\xi_n(t) = nt\xi_{0n}$).

Пусть $\mathsf{P}_n = \mathsf{P}_n(A)$ — соответствующее распределение вероятностей в пространстве $C\ [0, 1]$ всех непрерывных на отрезке

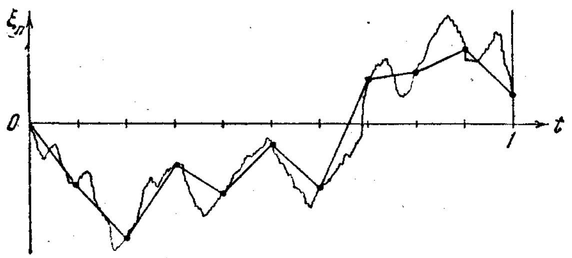


Рис. 24

$T = [0, 1]$ действительных функций $x = x(t)$, определенное на σ-алгебре борелевских множеств $A \subseteq C[0, 1]$. При $n \to \infty$ имеется предельное распределение вероятностей $\mathsf{P} = \mathsf{P}(A)$:

$$\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P}.$$

Непосредственно заданный случайный процесс $\xi = \xi(t)$ с предельным распределением $\mathsf{P} = \mathsf{P}(A)$ — процесс броуновского движения (так называемый *стандартный винеровский процесс*). При этом для любой непрерывной почти всюду на отрезке $T = [0, 1]$ функции $\varphi = \varphi(t)$ (почти всюду относительно лебеговской меры) распределения вероятностей случайных величин

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left[\xi_n\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

при $n \to \infty$ слабо сходятся к распределению случайной величины $\eta = \int_0^1 \varphi[\xi(t)]\,dt$:

$$\mathsf{P}_{\eta_n} \Rightarrow \mathsf{P}_{\eta}.$$

Винеровский процесс как кривая в гильбертовом пространстве. Винеровский процесс $\xi = \xi(t)$ на отрезке $T = [0, 1]$ может быть определен как случайный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$B(s, t) = \min(s, t).$$

Пример. Пусть $\xi = \xi(t)$ — винеровский процесс. Тогда случайный процесс $\xi_1 = \xi_1(t)$ вида

$$\xi_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 0, \\ t\xi(1/t) & \text{при } 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

имеет корреляционную функцию

$$B_1(s, t) = st \cdot \min\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) = \min(s, t)$$

и также является винеровским процессом. Винеровским процессом является и случайный процесс $\xi_2 = \xi_2(t)$ вида

$$\xi_2(t) = \sigma \cdot \xi(t/\sigma^2).$$

Как функция со значениями в гильбертовом пространстве $L^2[0, 1]$ винеровский процесс $\xi = \xi(t)$ допускает *каноническое представление*

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k \varphi_k(t),$$

где Φ_k — независимые гауссовские величины:

$$\mathsf{M}\Phi_k = 0, \quad \mathsf{D}\Phi_k = (\pi(2k+1)/2)^{-2}, \quad k = 0, 1, \ldots;$$

$\varphi_k(t) = \sin(\pi(2k+1)t/2)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ — собственные функции оператора B, определенного формулой

$$B\varphi(t) = \int_0^1 B(s, t)\,\varphi(s)\,ds$$

в гильбертовом пространстве $L^2[0, 1]$ всех интегрируемых с квадратом (относительно лебеговской меры) функций $\varphi = \varphi(t)$ на отрезке $[0, 1]$.

Броуновское движение как марковский случайный процесс. Броуновское движение $\xi = \xi(t)$ $(t \geqslant 0)$ может быть определено как однородный марковский процесс с переходной функцией

$P(t, x, B) = \int\limits_B p(t, x, y)\,dy$, где переходная плотность $p(t, x, y)$ есть фундаментальное решение параболического дифференциального уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

и описывается формулой

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\}.$$

Переходная функция $P(t, x, B)$ и условные распределения вероятностей $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x(A)$ на σ-алгебре событий $\mathfrak{A}(0, \infty)$ инвариантны относительно преобразований сдвига в фазовом пространстве:

$$\mathsf{P}_{x+a}\{\xi(t_1)+a \in B_1, \ldots, \xi(t_n)+a \in B_n\} = \mathsf{P}_x\{\xi(t_1) \in B_1, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\}$$

при любых x и a для всех $t_1, \ldots, t_n \geqslant 0$ и всех борелевских множеств $B_1, \ldots, B_n$.

Выход за границу. Обратимся к моменту τ_a первого достижения точки a траекторий $\xi = \xi(t)$ $(t \geqslant 0)$ случайного процесса броуновского движения. В дополнение к указанным ранее распределениям величин τ_a и $\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} \xi(s)$ (см. § 5 гл. I), используя тот факт, что случайный процесс $\xi_a = \xi_a(t)$ вида

$$\xi_a(t) = \begin{cases} \xi(t) & \text{при } t \leqslant \tau_a, \\ 2a - \xi(t) & \text{при } t \geqslant \tau_a \end{cases}$$

также является процессом броуновского движения и

$$\left\{\max_{0 \leqslant s \leqslant t} \xi(s) \geqslant a, \ \xi(t) \in [c, d] \cap (-\infty, a]\right\} = \{\xi_a(t) \in [2a-d, 2a-c] \cap [a, \infty)\},$$

можно вывести, что при $a > 0$

$$\mathsf{P}_0\left\{\max_{0 \leqslant s \leqslant t} \xi(s) \geqslant a, \ \xi(t) \in [c, d]\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{\max(c,a)}^{\max(d,a)} e^{-x^2/(2t)}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{\max(2a-d,a)}^{\max(2a-c,a)} e^{-x^2/(2t)}\,dx.$$

При $a > 0$ и $[c, d] \subseteq [-a, a]$ имеет место равенство

$$\mathsf{P}_0\left\{\max_{0 \leqslant s \leqslant t} |\xi(s)| < a, \ \xi(t) \in [c, d]\right\} = \int\limits_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp\left\{-\frac{(x-2ka)^2}{2t}\right\} dx.$$

Рассмотрим на плоскости переменных (t, x) границы, описываемые уравнениями

$$x_1(t) = \gamma_1 + \delta_1 t, \quad x_2(t) = \gamma_2 + \delta_2 t,$$

где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 < 0$ и $x_1(t) \geqslant x_2(t)$, $t \geqslant 0$. Пусть $\tau_1 = \tau_1(\omega)$ — момент первого выхода траектории $\xi(\omega, t)$ процесса броуновского

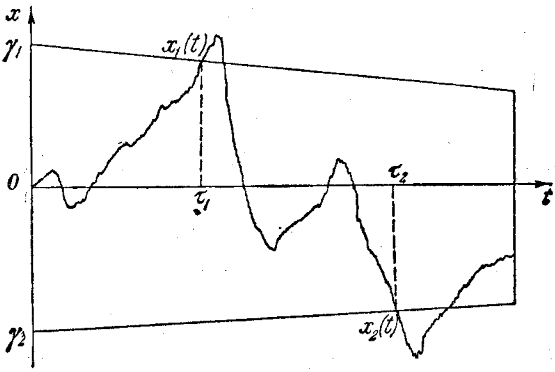


Рис. 25

движения на верхнюю границу, $\tau_2 = \tau_2(\omega)$ — момент первого выхода на нижнюю границу (рис. 25). Имеет место следующая формула [120]:

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}_0\{\tau_1 \leqslant \min(t, \tau_2)\} = 1 - \Phi\left(\frac{\delta_1 t + \gamma_1}{\sqrt{t}}\right) + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\exp\{-2[k\gamma_1 - (k-1)\gamma_2][k\delta_1 - (r-1)\delta_2]\} \times \\
\times \Phi\left(\frac{\delta_1 t + 2(k-1)\gamma_2 - 2(k-1)\gamma_1}{\sqrt{t}}\right) - \exp\{-2[k^2(\gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_2) - \\
- k(k-1)\gamma_1\delta_2 - k(k+1)\gamma_2\delta_1]\}\,\Phi\left(\frac{\delta_1 t + 2k\gamma_2 - (2k-1)\gamma_1}{\sqrt{t}}\right) - \\
- \exp\{-2[(k-1)\gamma_1 - k\gamma_2][(k-1)\delta_1 - k\delta_2]\} \times \\
\times\left[1 - \Phi\left(\frac{\delta_1 t - 2k\gamma_2 + (2k-1)\gamma_1}{\sqrt{t}}\right)\right] + \exp\{-2[k^2(\gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2) - \\
- k(k-1)\gamma_2\delta_1 - k(k+1)\gamma_1\delta_2]\}\left[1 - \Phi\left(\frac{\delta_1 t + (2k+1)\gamma_1 - 2k\gamma_2}{\sqrt{t}}\right)\right]\Bigg\},
\end{gathered}$$

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du.$$

Моменты последнего достижения фиксированной точки. Пусть τ_a^* — наибольший корень уравнения $\xi(s)=a$ на отрезке $0 \leqslant s \leqslant t$ — последний момент достижения точки a за промежуток времени $[0, t]$. Имеет место формула

$$\mathsf{P}_a\{\tau_a^* \leqslant s\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{P}_x\{\tau_a > t-s\} P(a, s, dx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^s \frac{du}{\sqrt{u(t-u)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Метод дифференциальных уравнений. Рассмотрим случайную величину

$$\int_0^t \varphi[\xi(s)]\,ds,$$

где $\varphi = \varphi(x)$ — некоторая действительная функция. При некоторых ограничениях, накладываемых на $\varphi(x)$, функция

$$u_\lambda(t, x) = \mathsf{M}_x \exp\left\{\lambda \int_0^t \varphi[\xi(s)]\,ds\right\},$$

зависящая от параметра λ, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\varphi(x)\,u_\lambda$$

с начальным условием $u_\lambda(0, x) \equiv 1$ (см. § 5, п. 1). Параметр λ принимает либо все чисто мнимые значения: $\lambda = i\alpha$ $(-\infty < \alpha < \infty)$, либо — в случае неотрицательной функции $\varphi(x)$ — все неположительные значения: $\lambda = -\alpha$ $(\alpha \geqslant 0)$. Пусть

$$v_{\lambda\mu}(x) = \int_0^\infty e^{-\mu t} u_\lambda(t, x)\,dt.$$

Функция $v_{\lambda\mu}$ является ограниченным решением дифференциального уравнения вида

$$\frac{1}{2} v''_{\lambda\mu}(x) + [\lambda(x) - \mu]\,v_{\lambda\mu}(x) = -1,$$

получающегося при умножении на $e^{-\mu t}$ и интегрировании по t обеих частей дифференциального уравнения для $u_\lambda(t, x)$. Если $\varphi(x)$ — кусочно непрерывная функция, то $v_{\lambda\mu}(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет вторую производную в точках непрерывности функции $\varphi(x)$ и удовлетворяет указанному уравнению.

Пример. *Время пребывания на положительной полуоси.* Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда случайная величина

$$\tau = \int_0^t \varphi[\xi(s)]\, ds$$

представляет собой «время пребывания» на положительной полуоси $x \geqslant 0$ за промежуток времени $[0, t]$. Ограниченное решение дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2} v''_{-\lambda\mu}(x) - [\lambda\varphi(x) + \mu]\, v_{-\lambda\mu}(x) = -1$$

таково, что при $x = 0$ и $\lambda \geqslant 0$

$$v_{-\lambda\mu}(0) = \frac{1}{\sqrt{(\lambda+\mu)\cdot\mu}} = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{e^{-\lambda s}}{\sqrt{s(t-s)}}\, ds\, dt.$$

Таким образом, соответствующая функция

$$u_{-\lambda}(t, 0) = \mathsf{M}_0 e^{-\lambda\tau} = \int_0^t e^{-\lambda s} p_\tau(s)\, ds$$

(где $p_\tau(s)$ — плотность распределения случайной величины τ) имеет вид

$$u_{-\lambda}(t, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{e^{-\lambda s}}{\sqrt{s(t-s)}}\, ds.$$

Поэтому

$$p_\tau(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t,$$

$$\mathsf{P}_0\{\tau \leqslant s\} = \frac{1}{\pi} \int_0^s \frac{du}{\sqrt{u(t-u)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Пусть $\tau_{(a,b)}$ — момент первого выхода из интервала (a, b), $\varphi = \varphi(x)$ — некоторая действительная функция. Рассмотрим случайную величину вида

$$\int_0^{\tau_{(a,b)}} \varphi[\xi(t)]\, dt.$$

При некоторых ограничениях, накладываемых на $\varphi(x)$, функция

$$u_\lambda(x) = \mathsf{M}_x \exp\left\{\lambda \int\limits_0^{\tau(a,b)} \varphi[\xi(t)]\,dt\right\}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2} u_\lambda''(x) + \lambda\varphi(x)\,u_\lambda(x) = 0$$

с граничными условиями $u_\lambda(a) = u_\lambda(b) = 1$ (при $a = -\infty$ или $b = \infty$ указанные условия следует заменить на условия ограниченности решения при $x \to a$ или $x \to b$ соответственно; см. § 5, п. 1).

Пример. *Время пребывания.* Пусть τ_a — момент первого достижения точки a, и пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда случайная величина $\tau = \int\limits_0^{\tau_a} \varphi[\xi(t)]\,dt$ представляет собой «время пребывания» на положительной полуоси до момента первого достижения точки $a < 0$. Ограниченное решение дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2} u_{-\lambda}''(x) - \lambda\varphi(x)\,u_{-\lambda}(x) = 0, \quad u_{-\lambda}(a) = 1,$$

таково [101], что при $x = 0$ и $\lambda \geqslant 0$

$$u_{-\lambda}(0) = \mathsf{M}_0 e^{-\lambda\tau} = \lambda \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} \mathsf{P}_0\{\tau \leqslant t\}\,dt = \frac{1}{1 - a\sqrt{\lambda}},$$

$$\mathsf{P}_0\{\tau \leqslant t\} = 1 - \frac{2e^{t/a^2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sqrt{t}/a}^{\infty} e^{-s^2}\,ds, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Для положительной точки $a > 0$ функция распределения $\mathsf{P}_0\{\tau \leqslant t\}$ имеет совсем другой характер. В частности, при $a = 1$ соответствующее решение $u_{-\lambda}(x)$ таково [42], что

$$u_{-\lambda} = 1/\operatorname{ch}\sqrt{2\lambda}.$$

Модуль непрерывности. Для почти всех траекторий процесса броуновского движения имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{h \to +0} \sup_{0 < t \leqslant \delta - h} \frac{|\xi(t+h) - \xi(t)|}{\sqrt{2h \ln(\delta/h)}} = 1;$$

при этом

$$\lim_{h\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}[\Delta\xi(kh)]^2=\delta,$$

где $h=\delta/n$, $\Delta\xi(t)=\xi(t+h)-\xi(t)$.

Закон повторного логарифма. Для почти всех траекторий (относительно условного распределения P_0)

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{\xi(h)}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}=1.$$

В применении к процессу броуновского движения вида $\xi_1(t)=t\xi(1/t)$ этот закон повторного логарифма может быть записан в иной форме:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\xi(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1.$$

Локальное время. Пусть

$$\varphi_B(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\in B,\\ 0 & \text{при } x\notin B.\end{cases}$$

Рассмотрим

$$\varphi_0^t(B)=\int_0^t\varphi_B[\xi(u)]\,du.$$

Для каждой фиксированной траектории процесса броуновского движения $\varphi_0^t(B)$ как функция переменной B, представляет собой меру на σ-алгебре борелевских множеств действительной прямой.

Для почти всех траекторий эта мера абсолютно непрерывна:

$$\varphi_0^t(B)=\int_B\tau(t,x)\,dx.$$

Соответствующая плотность $\tau(t,x)$ называется *локальным временем* в точке x. Как функция от t величина $\tau(t,x)$ представляет собой случайный процесс, непрерывный с вероятностью 1.

4. Структура случайных процессов с независимыми приращениями.

Центрирование случайного процесса с независимыми приращениями. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ с независимыми приращениями от непрерывного параметра t на некотором конечном или бесконечном отрезке $T=[a,b]$. Степень рассеивания $\delta(t)=\delta[\xi(t)-\xi(a)]$ такого процесса является монотонно неубывающей функцией от t и имеет не более чем счетное множество точек разрыва, причем при всех t существуют предельные значения

$$\delta(t-0)=\lim_{s\to t-0}\delta(s),\quad \delta(t+0)=\lim_{s\to t+0}\delta(s).$$

Вследствие этого имеется такая *центрирующая функция* $b(t)$, например удовлетворяющая условию

$$\mathsf{M} \operatorname{arctg} [\eta(t) - b(t)] = 0,$$

что для процесса с независимыми приращениями $\eta(t) - b(t)$ при каждом фиксированном t существуют предельные значения $\lim\limits_{s \to t+0} [\eta(s) - b(s)]$. Чтобы не менять обозначений, будем считать, что этим свойством уже обладает сам процесс $\eta(t)$, т. е. $b(t) \equiv 0$. При этом соглашении равенства

$$\eta(t-0) = \eta(t) \quad \text{или} \quad \eta(t+0) = \eta(t)$$

выполняются с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда соответственно

$$\delta(t-0) = \delta(t) \quad \text{или} \quad \delta(t+0) = \delta(t).$$

Скачки $\eta(s) - \eta(s-0)$ и $\eta(s+0) - \eta(s)$ случайного процесса $\eta(t)$ в фиксированных точках s не зависят от течения процесса $\eta(t)$ до момента $s-0$ и s соответственно, точнее, не зависят от совокупности случайных величин $\eta(t)$ $(t < s)$ и $\eta(t)$ $(t \leqslant s)$ и могут изучаться отдельно. В частности, занумеровав все точки разрыва функции $\delta(t)$ — фиксированные точки разрыва случайного процесса $\eta(t)$, — можно определить последовательность случайных процессов $\eta_d^{(n)}(t)$ с независимыми приращениями вида

$$\eta_d^{(n)}(t) = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ s_k \leqslant t}} [\eta(s_k + 0) - \eta(s_k - 0)] - c^{(n)}(t).$$

Предполагается, что если момент t является точкой разрыва $t = s_k$, то вместо $\eta(s_k + 0)$ берется $\eta(s_k)$; центрирующие постоянные $c^{(n)}(t)$ подобраны так, что с вероятностью 1 существует предел

$$\eta_d(t) = \lim_{n \to \infty} \eta_d^{(n)}(t).$$

Грубо говоря, случайный процесс $\eta_d(t)$ с точностью до центрирующей функции представляет собой сумму скачков исходного процесса $\eta(t)$ в фиксированных точках разрыва до текущего момента t и является процессом с независимыми приращениями. Степень рассеивания $\delta_d(t) = \delta[\eta_d(t) - \eta_d(a)]$ этого процесса совпадает с функцией скачков в разложении монотонной функции $\delta(t)$ на непрерывную компоненту $\delta_c(t)$ и функцию скачков $\delta_d(t)$:

$$\delta(t) = \delta_c(t) + \delta_d(t).$$

Непрерывной компоненте степени рассеивания $\delta(t)$ исходного процесса $\eta(t)$ отвечает стохастически непрерывный случайный процесс $\eta_c(t)$ вида

$$\eta_c(t) = \eta(t) - \eta_d(t) - c(t),$$

где центрирующая функция $c(t)$ подобрана, например, так, чтобы удовлетворялось условие

$$\mathsf{M} \operatorname{arctg} [\eta(t) - \eta_d(t) - c(t)] = 0$$

(при этом степень рассеивания $\delta_c(t) = \delta[\eta_c(t) - \eta_c(a)]$ совпадает с непрерывной компонентой $\delta_c(t)$ в разложении монотонной функции $\delta_c(t)$). Случайный процесс $\eta_c(t)$ имеет независимые приращения, которые не зависят от приращений «скачкообразного» процесса $\eta_d(t)$.

Пусть $\xi(t)$ — стохастически непрерывный сепарабельный процесс с независимыми приращениями на некотором отрезке $T = [a, b]$. При каждом фиксированном t с вероятностью 1

$$\lim_{s \to t} \xi(s) = \xi(t).$$

Это не означает, конечно, что будут непрерывными траектории процесса $\xi(\omega, t)$. Однако почти все траектории $\xi(\omega, t)$ будут иметь самое большее разрывы первого рода, т. е. при почти всех ω для любого t существуют пределы

$$\xi(\omega, t-0) = \lim_{s \to t-0} \xi(\omega, s), \quad \xi(\omega, t+0) = \lim_{s \to t+0} \xi(\omega, s),$$

или, что то же самое, на ограниченном интервале Δ имеется лишь конечное число колебаний траектории $\xi(\omega, t)$, превосходящих произвольное фиксированное $\varepsilon > 0$ (*числом колебаний* функции $x = x(t)$ называется максимальное n, для которого на рассматриваемом интервале найдутся $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ такие, что $|x(t_k) - x(t_{k+1})| \geqslant \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$).

Всегда существует эквивалентный исходному процессу случайный процесс $\xi(t)$, траектории которого непрерывны справа: с вероятностью 1

$$\xi(\omega, t+0) = \xi(\omega, t).$$

Пуассоновский процесс. Случайный процесс с независимыми приращениями такой, что

$$\mathsf{P}\{\xi(t) - \xi(s) = k\} = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}$$

при любых $s, t \in T$ $(s \leqslant t)$, называется *пуассоновским процессом.* Это стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, траектории которого являются простыми монотонными функциями параметра t, на каждом конечном интервале имеющими конечное число скачков единичной длины (приращения являются целочисленными неотрицательными величинами), причем

$$\mathsf{M}[\xi(t) - \xi(s)] = \lambda(t-s)$$

для любых s, $t \in T$ $(s \leqslant t)$. Приращения $\xi(t)-\xi(s)$ распределены по закону Пуассона с параметром $a=\lambda(t-s)$.

Стохастические меры, построенные по скачкам случайных процессов. Пусть $\xi(t)$ — стохастически непрерывный, с вероятностью 1 непрерывный справа процесс с назависимыми приращениями. Обозначим символом $\nu(\Delta \times B)$ число таких скачков процесса $\xi(t)$ на интервале времени Δ, значения которых попадают в некоторое борелевское множество B, лежащее на положительном расстоянии от начала координат:

$$\xi(\omega, t)-\xi(\omega, t-0) \in B.$$

Для каждого ограниченного интервала Δ случайная величина $\nu(\Delta \times B)$ с вероятностью 1 конечна, причем величины $\nu(\Delta_1 \times B)$ и $\nu(\Delta_2 \times B)$, соответствующие непересекающимся интервалам Δ_1 и Δ_2, независимы, и, кроме того,

$$\mathsf{P}\{\nu(\Delta \times B)>1\}=o(|\Delta|),$$

где $|\Delta|$ — длина интервала Δ. Таким образом, случайная величина $\nu(\Delta \times B)$ распределена по закону Пуассона:

$$\mathsf{P}\{\nu(\Delta \times B)=k\}=\frac{[N(\Delta \times B)]^k}{k!} e^{-N(\Delta \times B)},$$

где $N(\Delta \times B)=\mathsf{M}\nu(\Delta \times B)$.

Случайная величина $\nu(\Delta \times B)$ как функция множеств продолжается в σ-конечную обобщенную меру на плоскости (t, x) ($\nu(A)$ и $N(A)$ могут обращаться в $+\infty$ для множеств A, примыкающих к оси $x=0$).

Структура процессов с независимыми приращениями. Будем считать интервал $T=[a, b]$ конечным. Введем случайные процессы $\xi_B(t)$ вида

$$\xi_B(t)=\int_B x\nu([a, t] \times dx),$$

которые представляют собой не что иное, как сумму скачков исходного процесса $\xi(t)$ (до текущего момента t) со значениями во множестве B. Имеют место формулы

$$\mathsf{M}\xi_B(t)=\int_B xN([a, t] \times dx),$$

$$\mathsf{D}\xi_B(t)=\int_B x^2N([a, t] \times dx).$$

Если множества B_1 и B_2 не пересекаются, то соответствующие случайные процессы $\xi_{B_1}(t)$ и $\xi_{B_2}(t)$ независимы между собой.

Рассмотрим последовательность случайных процессов $\xi_n(t)=\xi_{B_n}(t)$, отвечающих множествам $B_n=\{|x| \geqslant \varepsilon_n\}$ и представляющих собой сумму скачков исходного процесса $\xi(t)$ на интервале

$[a, t]$, абсолютная величина которых не менее ε_n. Примечательно, что если исключить из процесса $\xi(t)$ скачки, абсолютная величина которых превосходит некоторый фиксированный уровень (например, единицу), то получающийся при этом случайный процесс $\xi(t)-\xi_1(t)$ имеет все моменты. В частности,

$$\int_{-1}^{1} x^2 N([a, b] \times dx) = \mathsf{D}[\xi(t)-\xi_1(t)] < \infty.$$

Если исключить из процесса $\xi(t)$ все скачки, то получим случайный процесс с непрерывными траекториями. Именно таким будет процесс

$$\xi_c(t) = \xi(t) - \xi_1(t) - \lim_{n\to\infty} \{[\xi_n(t)-\xi_1(t)] - \mathsf{M}\{\xi_n(t)-\xi_1(t)\}\},$$

где последовательность ε_n выбрана так, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} x^2 N([a, b] \times dx) < \infty$$

(это условие гарантирует равномерную сходимость по t при описанном предельном переходе).

Непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс $\xi_c(t)$ имеет независимые приращения и, кроме того, не зависит от пуассоновской меры $\nu(dt \times dx)$.

Случайный процесс $\xi_c(t)$ с независимыми приращениями, имеющий непрерывные с вероятностью 1 траектории, представляет собой не что иное, как (неоднородное) броуновское движение — случайный процесс с независимыми гауссовскими приращениями, математическое ожидание $A(t)=\mathsf{M}\xi_c(t)$ и дисперсия $D(t)=\mathsf{D}\xi_c(t)$ которого являются непрерывными функциями от t (всякий сепарабельный гауссовский процесс с независимыми приращениями и непрерывными средним значением и дисперсией с вероятностью 1 имеет непрерывные траектории).

Таким образом, строение произвольного стохастически непрерывного случайного процесса $\xi(t)$ с независимыми приращениями отчетливо видно из представления его в виде

$$\xi(t) = \xi_c(t) + \int_{|x|\leqslant 1} x\,[\nu([a, t] \times dx) - N([a, t] \times dx)] + \int_{|x|>1} x\nu([a, t] \times dx),$$

где $\xi_c(t)$ — непрерывный гауссовский процесс с независимыми приращениями, не зависящий от пуассоновской меры $\nu(dt \times dx)$, построенной по скачкам исходного процесса $\xi(t)$.

Распределения вероятностей случайных процессов с независимыми приращениями. Распределение вероятностей величины

$\xi(t)-\xi(s)$ для стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями является, конечно, безгранично делимым. Верно и в некотором роде обратное утверждение: всегда можно указать стохастически непрерывный случайный процесс с независимыми приращениями, для которого величина $\xi(t)-\xi(s)$ (t и s фиксированы) имеет наперед заданное безгранично делимое распределение (оно может быть взято произвольно). Натуральный логарифм характеристической функции приращения $\xi(t)-\xi(s)$ имеет вид

$$\ln \mathsf{M} \exp\{iu[\xi(t)-\xi(s)]\} = iu[A(t)-A(s)] - \frac{1}{2}u^2[D(t)-D(s)] + \int\limits_{|x|\leqslant 1}(e^{iux}-1-iux)N([s,t]\times dx) + \int\limits_{|x|>1}(e^{iux}-1)N([s,t]\times dx),$$

где $A(t)$ — непрерывная функция, равная математическому ожиданию непрерывной гауссовской компоненты $\xi_c(t)$ в представлении процесса $\xi(t)$, $D(t)$ и $D(t)-D(s)$ — дисперсии самого значения $\xi_c(t)$ и разности $\xi_c(t)-\xi_c(s)$ соответственно, $N([s,t]\times B)$ — математическое ожидание пуассоновской меры $\nu([s,t]\times B)$, построенной по скачкам процесса $\xi(t)$:

$$A(t)=\mathsf{M}\xi_c(t),\quad D(t)=\mathsf{D}\xi_c(t),$$
$$N([s,t]\times B)=\mathsf{M}\nu([s,t]\times B).$$

Полагая

$$G([s,t]\times B)=\int\limits_B \frac{x^2}{1+x^2}N([s,t]\times dx),$$

$$\gamma(t)=A(t)+\int\limits_{|x|>1}\frac{x}{1+x^2}N([a,t]\times dx)-\int\limits_{|x|\leqslant 1}xG([a,t]\times dx),$$

получим

$$\ln \mathsf{M}\exp\{iu[\xi(t)-\xi(s)]\} = iu[\gamma(t)-\gamma(s)]-\frac{1}{2}u^2[D(t)-D(s)] + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x}G([s,t]\times dx).$$

Однородные процессы. Процесс $\xi(t)$ с независимыми приращениями называется *однородным*, если распределение вероятностей приращений $\xi(t)-\xi(s)$ зависит лишь от разности $t-s$ (не зависит от начала отсчета времени). Необходимое и достаточное условие однородности состоит в том, что

$$A(t)=at,\quad D(t)=\sigma^2 t,$$
$$N(dt\times dx)=N(dx)\times dt.$$

Класс однородных процессов с назависимыми приращениями совпадает с классом однородных марковских процессов, переходная функция которых инвариантна относительно преобразований сдвига фазового пространства — действительной прямой $-\infty < x < \infty$:

$$P(t, x, B) = P(t, 0, B\backslash x),$$

где $B\backslash x$ означает множество точек $y - x$ $(y \in B)$.

Однородный процесс $\xi(t)$ с независимыми приращениями называется *устойчивым*, если его приращения имеют закон распределения одного и того же устойчивого типа (см. § 7 гл. IV). Мера $N(dx)$, связанная со скачками устойчивого процесса $\xi(t)$, имеет вид

$$N(B) = C_1 \int\limits_{B\cap(-\infty,0)} \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}} + C_2 \int\limits_{B\cap(0,\infty)} \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}},$$

где параметр α меняется в пределах $0 < \alpha < 2$, что диктуется условиями $\int\limits_{|x|\leq 1} x^2 N(dx) < \infty$ и $\int\limits_{|x|>1} N(dx) < \infty$. Важной характеристикой устойчивого процесса является и параметр β, определяемый как

$$\beta = \frac{C_2 - C_1}{C_2 + C_1}, \quad -1 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

Например, при крайних значениях $\beta = \pm 1$ процесс $\xi(t)$ имеет скачки лишь одного знака вместе с β.

Пример. *Время до первого достижения фиксированной точки.* Пусть $\xi = \xi(t)$ — процесс броуновского движения, $\tau = \tau(a)$ — время до момента первого достижения точки $a > 0$. Если рассматривать точку a как параметр, то случайный процесс $\tau = \tau(a)$ на полупрямой $a \geqslant 0$ является устойчивым случайным процессом с параметрами $\alpha = {}^1/_2$, $\beta = 1$. Распределение вероятностей таково, что при $b \geqslant a \geqslant 0$

$$\mathsf{P}_0\{\tau_b - \tau_a \leqslant t\} =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} s^{-3/2} e^{-(b-a)^2/(2s)} ds = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{a/\sqrt{t}} e^{-x^2/2} dx, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Свойства траекторий. Процесс $\xi(t)$ является непрерывным (с вероятностью 1) тогда и только тогда, когда он гауссовский, т. е.

$$N(dx) \equiv 0.$$

Среди разрывных процессов важное место занимают так называемые «ступенчатые» процессы, у которых траектории (с вероятностью 1) принимают в ограниченном промежутке времени лишь конечное число различных значений, каждое на соответствующем интервале вида $[s, t)$. Чтобы процесс $\xi(t)$ был «ступенчатым», необходимо и достаточно отсутствие гауссовской компоненты и ограниченность меры $N(dx)$:

$$\sigma^2 = 0, \quad \int_{-1}^{1} N(dx) < \infty.$$

Аналогичное условие

$$\sigma^2 = 0, \quad \int_{-1}^{1} |x| N(dx) < \infty$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы почти все траектории процесса $\xi(t)$ были функциями ограниченной вариации. Процесс с ограниченной вариацией можно представить в виде

$$\xi(t) = \xi(s) + a(t-s) + \int_{-\infty}^{\infty} x\nu([s, t] \times dx)$$

(постоянная a здесь отличается слагаемым $\int\limits_{|x| \leqslant 1} xN(dx)$ от скорости сноса $A'(t)$). Такой процесс $\xi(t)$ является дифференцируемым в каждой фиксированной точке s: с вероятностью 1

$$\lim_{t \to s} \frac{\xi(t) - \xi(s)}{t - s} = a.$$

Для процессов с неограниченной вариацией

$$\lim_{t \to s} \frac{|\xi(t) - \xi(s)|}{t - s} = \infty.$$

§ 4. Диффузионные процессы

1. Дифференциальные и стохастические уравнения. *Коэффициенты сноса и диффузии.* Под диффузионным процессом $\xi(t)$, фазовым пространством которого является действительная прямая, обычно понимают непрерывный марковский процесс с переходной функцией $P(s, x, t, B)$, удовлетворяющей следующим условиям: для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{gathered}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|y-x|>\varepsilon} P(s, x, s+\Delta t, dy) = 0, \\
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x) P(s, x, s+\Delta t, dy) = a(s, x), \qquad (4.1) \\
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x)^2 P(s, x, s+\Delta t, dy) = \sigma^2(s, x).
\end{gathered}$$

Величина $a(s, x)$ характеризует среднюю тенденцию в эволюции случайного процесса $\xi(s)$ за малый промежуток времени от s до $s+\Delta t$ при условии $\xi(s)=x$ и называется *коэффициентом сноса*. Величина $\sigma(s, x)$ характеризует среднеквадратичное отклонение процесса $\xi(t)$ от его среднего значения и называется *коэффициентом диффузии*:

$$\xi(s+\Delta t) \sim \xi(s)+a[s, \xi(s)]\Delta t+\sigma[s, \xi(s)]\Delta\eta(s),$$

где $\Delta\eta(s)$ — случайная величина такая, что

$$\mathsf{M}\{\Delta\eta(s)\,|\,\xi(u),\ u \leqslant s\} \sim 0,$$

$$\mathsf{D}\{\Delta\eta(s)\,|\,\xi(u),\ u \leqslant s\} \sim \Delta t.$$

Важнейшим представителем этого класса процессов является броуновское движение, впервые рассмотренное как математическая модель процессов диффузии (отсюда и название «диффузионные процессы»). К этому классу относится и общий гауссовский непрерывный процесс $\xi(t)$ с независимыми приращениями, имеющий гладко меняющиеся моменты $A(t)=\mathsf{M}\xi(t)$ и $D(t)=\mathsf{D}\xi(t)$, которые связаны с коэффициентами сноса $a(t, x)\equiv a(t)$ и диффузии $\sigma(t, x)\equiv\sigma(t)$ следующими соотношениями:

$$A(t)-A(t_0)=\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds, \quad D(t)-D(t_0)=\int_{t_0}^{t} \sigma^2(s)\,ds.$$

Для такого процесса соответствующая величина

$$\Delta\eta(s)=\frac{\xi(s+\Delta t)-\xi(s)-a(s)\,\Delta t}{\sigma(s)}$$

является гауссовской и не зависящей от течения процесса до момента s.

Дифференциальные уравнения Колмогорова. Пусть предельные соотношения (4.1) выполняются равномерно по s, и пусть $\varphi(x)$ — некоторая ограниченная непрерывная функция. Определим $\varphi(s, x)$ формулой

$$\varphi(s, x)=\int \varphi(y)\,P(s, x, t, dy), \quad s<t.$$

Предположим, что функция $\varphi(s, x)$ вместе со своими первыми двумя производными $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(s, x)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(s, x)$ ограничена и непрерывна. Тогда функция $\varphi(s, x)$ имеет производную $\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, x)$ и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, x)=-a(s, x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(s, x)-\frac{1}{2}\sigma^2(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(s, x)$$

с «концевым» условием

$$\lim_{s\to t} \varphi(s, x) = \varphi(x).$$

Если имеется переходная плотность

$$p(s, x, t, y) = \frac{P(s, x, t, dy)}{dy},$$

которая непрерывна по s и x вместе со своими производными $\frac{\partial}{\partial x} p(s, x, t, y)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(s, x, t, y)$, то она является фундаментальным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s} p(s, x, t, y) =$$
$$= -a(s, x)\frac{\partial}{\partial x} p(s, x, t, y) - \frac{1}{2}\sigma^2(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(s, x, t, y),$$

которое называется *обратным уравнением Колмогорова.*

В однородном случае, когда коэффициенты сноса $a(t, x) \equiv a(x)$ и диффузии $\sigma(t, x) \equiv \sigma(x)$ не зависят от времени t, обратное уравнение Колмогорова для соответствующей переходной плотности $p(s, x, t, y) = p(t-s, x, y)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x, y) = a(x)\frac{\partial}{\partial x} p(t, x, y) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t, x, y).$$

Решение этого уравнения существует и единственно (и является переходной плотностью однородного диффузионного процесса), если, например, коэффициенты $a(x)$ и $\sigma(x)$ ограничены, удовлетворяют условию Липшица

$$|a(x) - a(y)| \leqslant C|x-y|,$$
$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant C|x-y|$$

и, кроме того, при всех x

$$\sigma(x) \geqslant \sigma > 0.$$

Пусть соотношения (4.1) выполняются равномерно по s и x, и пусть $Q(dx)$ — некоторая обобщенная мера с непрерывной плотностью $q(x) = Q(dx)/dx$. Определим $Q(t, A)$ формулой

$$Q(t, A) = \int Q(dx)\, P(s, x, t, A), \quad t > s.$$

Предположим, что при каждом t обобщенная мера $Q(t, dx)$ имеет плотность $q(t, x)$, причем производные $\frac{\partial}{\partial t} q(t, x)$, $\frac{\partial}{\partial x}[a(t, x) \times q(t, x)]$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma^2(t, x)\, q(t, x)]$ существуют и непрерывны (первая — по t и x, остальные — по x). Тогда функция $q(t, x)$

удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x}[a(t, x) q(t, x)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma^2(t, x) q(t, x)]$$

с начальным условием

$$\lim_{t \to s} q(t, x) = q(x).$$

Если существует переходная плотность $p(s, x, t, y)$, имеющая непрерывную по t и y производную $\frac{\partial}{\partial t} p(s, x, t, y)$ такую, что функции

$$\frac{\partial}{\partial y}[a(t, y) p(s, x, t, y)], \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(t, y) p(s, x, t, y)]$$

непрерывны по y, то $p(t, x, t, y)$ является фундаментальным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} p(s, x, t, y) = \\ = -\frac{\partial}{\partial y}[a(t, y) p(s, x, t, y)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(t, y) p(s, x, t, y)],$$

которое называется *уравнением Фоккера — Планка* или *прямым уравнением Колмогорова.*

Стохастические уравнения Ито. Пусть $\xi(t)$ — диффузионный процесс такой, что с вероятностью 1

$$\mathsf{M}\{[\xi(t)]^2 | \xi(s)\} \leqslant \eta_s, \quad \mathsf{M}\eta_s < \infty,$$

при $t_0 \leqslant s < t < t_1$ и

$$\left| \mathsf{M}\{\xi(t+\Delta t) - \xi(t) | \xi(t)\} - \int_t^{t+\Delta t} a[s, \xi(t)]\, ds \right| \leqslant [1 + \xi(t)^2]\, \Delta t\, \delta(\Delta t),$$

$$\left| \mathsf{M}\{[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]^2 | \xi(t)\} - \int_t^{t+\Delta t} \sigma[s, \xi(t)]^2\, ds \right| \leqslant \\ \leqslant [1 + \xi(t)^2]\, \Delta t\, \delta(\Delta t),$$

где $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ — соответствующие коэффициенты сноса и диффузии и $\delta(h) \to 0$ монотонно при $h \to 0$. В этом случае

$$\mathsf{M}\{\xi(t) - \xi(s) | \xi(u), u \leqslant s\} = \mathsf{M}\left\{\int_s^t a[u, \xi(u)]\, du \,|\, \xi(u), u \leqslant s\right\},$$

так что процесс $\eta^*(t)$ вида

$$\eta^*(t) = \xi(t) - \xi(t_0) - \int_{t_0}^{t} a[s, \xi(s)]\,ds, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

является непрерывным мартингалом.

Стохастический интеграл

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\sigma[s, \xi(s)]}\,d\eta^*(s), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

(предполагается, что $\sigma(t, x) > 0$), задает процесс броуновского движения $\eta(t)$ такой, что его течение после момента времени t не зависит от поведения исходного процесса $\xi(s)$ до этого момента t, если фиксировано состояние $\xi(t)$.

Диффузионный процесс $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал вида

$$d\xi(t) = a[t, \xi(t)]\,dt + \sigma[t, \xi(t)]\,d\eta(t),$$

т. е. при любом t, принадлежащем отрезку $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a[s, \xi(s)]\,ds + \int_{t_0}^{t} \sigma[s, \xi(s)]\,d\eta(s).$$

В свою очередь, если отправляться от некоторого вспомогательного процесса броуновского движения $\eta(t)$, то, задавшись некоторыми функциями $a(t, x)$ и $\sigma(t, x) \geqslant 0$, можно построить диффузионный процесс $\xi(t)$ с коэффициентами сноса $a(t, x)$ и диффузии $\sigma(t, x)$ как решение *стохастического дифференциального уравнения Ито*

$$d\xi(t) = a[t, \xi(t)]dt + \sigma[t, \xi(t)]d\eta(t);$$

другими словами, можно построить диффузионный процесс $\xi(t)$, удовлетворяющий *стохастическому интегральному уравнению* вида

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a[s, \xi(s)]\,ds + \int_{t_0}^{t} \sigma[s, \xi(s)]\,d\eta(s),$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Решение $\xi(t)$ этого уравнения существует и определяет диффузионный процесс, если, например, коэффициенты $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют следующим условиям: во-первых, функции $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ растут не слишком быстро при $x \to \infty$, так что

$$|a(t, x)| \leqslant C(1 + x^2)^{1/2}, \quad |\sigma(t, x)| \leqslant C(1 + x^2)^{1/2},$$

и, во-вторых, равномерно по t и x в каждом ограниченном интервале функции $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условию Липшица по x, т. е.

$$|a(t, x_1)-a(t, x_2)| \leqslant C|x_1-x_2|,$$
$$|\sigma(t, x_1)-\sigma(t, x_2)| \leqslant C|x_1-x_2|.$$

При таких коэффициентах $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ решение стохастического интегрального уравнения может быть найдено методом последовательных приближений. Именно, пусть $\xi_0(t)$ — произвольный случайный процесс с непрерывными траекториями, приращения $\xi(t)-\xi(s)$ которого не зависят от приращений $\eta(t')-\eta(s')$ $(s \leqslant t \leqslant s' \leqslant t')$ исходного процесса броуновского движения, такой, что

$$\xi_0(t_0)=\xi(t_0), \quad \int_{t_0}^{t} \mathsf{M}|\xi_0(t)|^2\,dt < \infty.$$

Например, в качестве «нулевого приближения» можно взять постоянную во времени величину $\xi_0(t) \equiv \xi(t_0)$. Последовательные приближения определяются с помощью стохастических интегралов как

$$\xi_n(t)=\xi(t_0)+\int_{t_0}^{t} a[s, \xi_{n-1}(s)]\,ds+\int_{t_0}^{t} \sigma[s, \xi_{n-1}(s)]\,d\eta(s),$$
$$n=1, 2, \ldots$$

Эта последовательность случайных процессов с вероятностью 1 равномерно по t на каждом ограниченном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ сходится к решению $\xi(t)$, причем среднеквадратичное отклонение $\xi_n(t)$ от $\xi(t)$ убывает экспоненциально быстро:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathsf{M}|\xi_n(t)-\xi(t)|^2\,dt \leqslant Ce^{-cn}.$$

Дискретная модель диффузии. Приближенной дискретной моделью диффузионного процесса $\xi(t)$ является следующая схема случайного блуждания, в котором $\xi(t)$ означает положение блуждающей частицы в текущий момент времени t. В дискретные моменты времени, кратные Δt, частица может менять свое состояние таким образом, что при $\xi(t)=x$ она с вероятностью

$$p(t, x) \sim \frac{1}{2}+\frac{a(t, x)}{2\sigma(t, x)}\sqrt{\Delta t}$$

переходит в соседнюю точку $x+\Delta x$ и с вероятностью $[1-p(t, x)]$ — в точку $x-\Delta x$ $(\Delta x \sim \sigma(t, x)\sqrt{\Delta t})$, причем этот переход совершается независимо от поведения частицы до момента t $(\xi(t)=x)$.

Пусть $P_{\Delta t}(s, x, t, B)$ — переходная функция описанного случайного блуждания. Формула полной вероятности дает следующее конечно-разностное уравнение для функции $u(s, x) = P_{\Delta t}(s, x, t, B)$:

$$u(s, x) = p(s, x) u(s + \Delta t, x + \Delta x) + [1 - p(s, x)] u(s + \Delta t, x - \Delta x);$$

при $\Delta t \to 0$ в случае гладко меняющихся $u(s, x)$, $a(s, x)$ и $\sigma(s, x)$ оно переходит в дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial s} u(s, x) = -a(s, x)\frac{\partial}{\partial x} u(s, x) - \frac{1}{2}\sigma^2(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(s, x).$$

2. Поведение однородных диффузионных процессов в граничных точках. Эргодические свойства. Пусть $\xi = \xi(t)$ — однородный диффузионный процесс на полупрямой $[0, \infty)$, который в окрестности каждой внутренней точки x отрезка $[r_1, r_2]$ имеет переходную плотность $p(t, x, y)$, удовлетворяющую *обратному уравнению Колмогорова*:

$$\frac{\partial}{\partial t} p = Lp, \quad L = a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

где коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны и $b(x) > 0$. Грубо говоря, в достаточно малой окрестности всякой внутренней точки x случайный процесс $\xi(t)$ управляется стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi(t) = a[\xi(t)]\,dt + \sigma[\xi(t)]\,d\eta(t), \quad \frac{1}{2}\sigma^2(x) = b(x).$$

Граничные экраны. Рассмотрим поведение процесса $\xi(t)$ непосредственно в окрестности граничной точки r (r есть либо r_1, либо r_2). Условие непрерывности траекторий во всем замкнутом отрезке $[r_1, r_2]$ оставляет лишь три возможности: в граничной точке r возможны поглощение (*поглощающий экран*), отражение (*отражающий экран*) и явление так называемого *эластичного экрана*, представляющее собой комбинацию явлений поглощения и отражения.

Явление поглощения очень просто. Если интерпретировать $\xi(t)$ как процесс случайного блуждания некоторой частицы, то эффект поглощения в точке $x = r$ заключается в том, что, попадая в точку r, частица остается там навсегда. Соответствующее граничное условие на переходную плотность $p(t, x, y)$ как решение дифференциального уравнения $\partial p/\partial t = Lp$ выражается следующим образом:

$$\lim_{x \to r} Lp(t, x, y) = 0.$$

Несколько сложнее явление отражения. Можно ограничиться рассмотрением полуоси $[r, \infty]$ и дать следующую геометрическую интерпретацию этого явления. Продолжим функции $a(x)$ и $\sigma(x)$ на все значения x симметрично относительно граничной точки r. Полученные таким способом коэффициенты сноса $\tilde{a}(x)$ и диффузии $\tilde{\sigma}(x)$ определяют некоторый диффузионный процесс $\tilde{\xi}(t)$ с переходной плотностью $\tilde{p}(t, x, y)$. Процесс $\xi(t)$ геометрически получается из $\tilde{\xi}(t)$ при помощи зеркального отражения относительно граничной точки r:

$$\xi(t) = \begin{cases} \tilde{\xi}(t) & \text{при } \tilde{\xi}(t) \geqslant r, \\ 2a - \tilde{\xi}(t) & \text{при } \tilde{\xi}(t) < r. \end{cases}$$

Переходная плотность $p(t, x, y)$ процесса с отражением связана с переходной плотностью $\tilde{p}(t, x, y)$ вспомогательного процесса $\tilde{\xi}(t)$ соотношением

$$p(t, x, y) = \tilde{p}(t, x, y) + \tilde{p}(t, 2r - x, y)$$

и как решение дифференциального уравнения $\partial p/\partial t = Lp$ удовлетворяет граничному условию вида

$$\lim_{x \to r} \frac{\partial}{\partial x} p(t, x, y) = 0.$$

Эластичный экран с точки зрения граничных условий на переходную плотность $p(t, x, y)$ задается просто линейной комбинацией условий поглощения и отражения:

$$\lim_{x \to r} \left[Lp(t, x, y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} p(t, x, y) \right] = 0,$$

где $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$ — некоторая постоянная. Если $\lambda = 0$, то перед нами чистое поглощение, если $\lambda = \infty$, то отражение в граничной точке $x = r$.

Вероятностную интерпретацию явления эластичного экрана можно дать, обратившись к приближенной модели диффузионного процесса $\xi(t)$ — соответствующим образом построенному дискретному случайному блужданию, когда из точки x частица через промежуток времени Δt переходит в соседние с ней точки $x \pm \Delta x$ $(\Delta x \sim \sigma(x)\sqrt{\Delta t})$ в положительном направлении с вероятностью $p(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{a(x)}{2\sigma(x)} \sqrt{\Delta t}$ и в отрицательном направлении с вероятностью $1 - p(x)$.

Если, попадая в граничную точку r, частица с вероятностью 1 остается там и на следующем шаге, то перед нами явление поглощения; если из состояния r она обязательно переходит в смежное с ним состояние $x = r + \Delta r$, то перед нами явление отражения; если же частица по достижении в момент t граничной точки $x=r$ с вероятностью $1-\delta$ остается в ней и на следующем шаге, а с вероятностью $\delta \sim \lambda \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma(x)}$ переходит в смежное состояние $x=r+\Delta r$, то перед нами эластичный экран.

Переходная функция $P(t, x, y)$ описанного случайного блуждания есть решение конечноразностного уравнения

$$P(t+\Delta t, x, y)=p(x)P(t, x+\Delta x, y)+[1-p(x)]P(t, x-\Delta x, y)$$

с граничными условиями

$$P(t+\Delta t, r, y)=(1-\delta)P(t, r, y)+\delta P(t, r+\Delta r, y).$$

При $\Delta t \to 0$ это уравнение переходит в дифференциальное уравнение $\partial p/\partial t = Lp$, а граничные условия — в граничные условия эластичного экрана с параметром λ для непрерывного диффузионного процесса.

Возвратные и невозвратные процессы. Пусть $\xi=\xi(t)$ — диффузионный процесс в интервале (r_1, r_2), $[c, d]$ — отрезок, целиком лежащий внутри интервала (r_1, r_2), и $\tau_{[a,b]}$ — момент первого выхода из этого отрезка. Моментом первого выхода из самого интервала (r_1, r_2) по определению считается величина

$$\tau_{(r_1,r_2)}=\lim_{n\to\infty}\tau_{[c_n,d_n]},$$

где $\tau_{[c_n,d_n]}$ — последовательность моментов первого выхода из расширяющихся замкнутых отрезков $[c_n, d_n]$, предел которых составляет все фазовое пространство (r_1, r_2).

Для любой точки x $(\sigma(x)>0)$ существует такая ее окрестность (c, d), что с вероятностью 1 момент первого выхода $\tau_{(c,d)}$ будет конечным; более того, для любого наперед заданного ε можно так выбрать окрестность (c, d), что

$$\mathsf{M}_x\tau_{(c,d)}\leqslant\varepsilon.$$

Из самой точки x траектория выходит мгновенно:

$$\mathsf{P}_x\{\tau_{[x,x]}=0\}=1,$$

а также

$$\mathsf{P}_x\{\tau_{[c,x]}=\tau_{[x,d]}=0\}=1$$

при любых $c\leqslant x$ и $d\geqslant x$.

Обозначим буквой τ момент выхода из интервала (r_1, r_2), т. е. $\tau=\tau_{(r_1,r_2)}$. Диффузионный процесс $\xi(t)$ называется *регулярным*, если

$$\mathsf{P}_x\{\tau_{(r_1,c]}<\tau\}>0, \qquad \mathsf{P}_x\{\tau_{[d,r_2)}<\tau\}>0,$$

т. е. с положительной вероятностью траектория покидает любое множество вида $(r_1, c]$ или $[d, r_2)$, выходя через внутренние точки c или d интервала (r_1, r_2). Если это происходит с вероятностью 1, процесс $\xi(t)$ называется *возвратным*.

Диффузионный процесс $\xi(t)$ будет регулярным, если коэффициент диффузии $\sigma(x)$ не обращается в нуль на интервале (r_1, r_2). Если процесс $\xi(t)$ возвратный, то с вероятностью 1

$$\underline{\lim_{t\to\tau}}\, \xi(t) = r_1, \quad \overline{\lim_{t\to\tau}}\, \xi(t) = r_2.$$

Если процесс $\xi(t)$ не возвратный, то с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{t\to\tau} \xi(t) = r,$$

где r — граничная точка интервала (r_1, r_2) (r есть либо r_1, либо r_2).

Граничная точка r_i называется *притягивающей*, если существует положительная вероятность того, что предел r в этом соотношении есть именно r_i; в противном случае граница r_i называется *отталкивающей*. Если процесс $\xi(t)$ возвратен, то обе границы r_1 и r_2 являются отталкивающими; для невозвратного процесса $\xi(t)$ хотя бы одна из граничных точек r_1 или r_2 является притягивающей.

Характер границы целиком определяется поведением коэффициентов сноса $a(x)$ и диффузии $\sigma(x)$ в ее окрестности. Именно, граница r_i является притягивающей тогда и только тогда, когда функция

$$R(x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{a(y)}{b(y)}\,dy\right\}$$

интегрируема в окрестности точки $x = r_i$:

$$\left|\int_{x_0}^{r_i} R(x)\,dx\right| < \infty.$$

Это аналитическое условие возникает благодаря следующим обстоятельствам. Вероятность $u(x) = u(x, c, d)$ попасть в точку c раньше, чем в d (при начальном положении $\xi(t_0) = x$, $r_1 < c < x < d < r_2$), представляет собой решение дифференциального уравнения

$$Lu = 0, \quad L = a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

с граничными значениями $u(c) = 1$, $u(d) = 0$ (см. п. 4 этого параграфа). Общим решением такого уравнения является функция

$$u(x) = C_1 \int_{x_0}^{x} R(y)\,dy + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Условие, что граница r_i (скажем, $r_i=r_1$) является отталкивающей, означает, что вероятность $u(x, r_1, d)=\lim_{c\to r_1} u(x, c, d)$ достигнуть r_1 раньше, чем d, тождественно равна нулю, а это равносильно неинтегрируемости функции $R(x)$ в окрестности точки r_1. Граничная точка r_1 является отталкивающей тогда и только тогда, когда уравнение $Lu=0$ не имеет ограниченных решений на интервале (r, c) с заданным условием $u(c)=u_1$.

Для притягивающей границы r_1 вероятность $u(x, r_1, d)$ достигнуть r_1 раньше, чем d, представляет собой положительное решение указанного дифференциального уравнения с граничными условиями $u(r_1)=1$, $u(d)=0$.

Пример. Пусть интервал (r_1, r_2) есть вся бесконечная прямая: $r_1=-\infty$, $r_2=+\infty$, и пусть коэффициент диффузии равномерно ограничен и положителен: $0<\sigma\leqslant\sigma(x)\leqslant C$, а коэффициент сноса $a(x)$ отрицателен на положительной полуоси $x\geqslant 0$ и положителен на отрицательной полуоси $x\leqslant 0$, т. е. детерминированное смещение процесса $\xi(t)$ всегда направлено к началу координат:

$$a(x)\leqslant 0 \text{ при } x>0,$$
$$a(x)\geqslant 0 \text{ при } x<0.$$

Тогда диффузионный процесс $\xi(t)$ будет возвратным, поскольку

$$\int_{-\infty}^{x_0} R(x)\,dx=\int_{x_0}^{\infty} R(x)\,dx=\infty.$$

Если же коэффициент сноса $a(x)$ имеет тот же знак, что и состояние x:

$$a(x)\geqslant 0 \text{ при } x>0,$$
$$a(x)\leqslant 0 \text{ при } x<0,$$

причем $|a(x)|$ если и убывает, то не слишком быстро:

$$\int_{-\infty}^{x_0} R(x)\,dx<\infty,\quad \int_{x_0}^{\infty} R(x)\,dx<\infty,$$

то обе границы $r_1=-\infty$ и $r_2=+\infty$ будут притягивающими.

Достижимые и недостижимые границы. Притягивающая граница r_i называется *достижимой*, если имеется положительная вероятность того, что траектория $\xi(\omega, t)$ выйдет именно на границу r_i через конечное время, т. е. соответствующий момент τ выхода из интервала (r_1, r_2) с положительной вероятностью будет конечным:

$$\mathsf{P}_x\left\{\lim_{t\to\tau}\xi(t)=r_i,\quad \tau<\infty\right\}>0.$$

В противном случае граница называется *недостижимой.*

Если граница r_i достижима, то она достижима за конечное время для почти всех траекторий $\xi(\omega, t)$, выходящих на границу r_i:

$$\mathsf{P}_x\left\{\lim_{t\to\tau}\xi(t)=r_i,\quad \tau<\infty\right\}=\mathsf{P}_x\left\{\lim_{t\to\tau}\xi(t)=r_i\right\}.$$

Граница r_i является достижимой тогда и только тогда, когда функция

$$R_1(x)=R(x)\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{b(y)R(y)},\quad R(x)=\exp\left\{-\int_{x_0}^{x}\frac{a(y)}{b(y)}dy\right\},$$

интегрируема в окрестности точки $x=r_i$:

$$\left|\int_{x_0}^{r_i}R_1(x)\,dx\right|<\infty.$$

К этому результату можно прийти, обратившись к диффузионному процессу $\xi(t)$, отличающемуся от исходного процесса тем, что в некоторой точке $d>r_1$ поставлен отражающий экран. Граничная точка r_1 будет достижимой или недостижимой одновременно для обоих процессов; одним и тем же будет и дифференциальный оператор L:

$$L=a(x)\frac{\partial}{\partial x}+b(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Граничная точка r_1 является достижимой тогда и только тогда, когда существует некоторое конечное T такое, что для времени τ выхода из полуинтервала $(r_1, d]$

$$\inf_{r_1<x<d}\mathsf{P}_x\{\tau\leqslant T\}=\mathsf{P}_d\{\tau\leqslant T\}=p>0.$$

Но тогда

$$\sup_{r_1<x<d}\mathsf{P}_x\{\tau>T\}\leqslant 1-p,\quad \mathsf{P}_x\{\tau>nT\}\leqslant\mathsf{P}_x\{\tau>(n-1)T\}(1-p),$$

так что

$$\sup_{r_1<x<d}\mathsf{P}_x\{\tau>t\}\leqslant Ce^{-Dt}$$

при некоторых положительных постоянных C и D.

Это говорит, в частности, о том, что граница r_1 достижима тогда и только тогда, когда для процесса с отражающим экраном среднее время достижения этой границы конечно:

$$\sup_{r_1 < x < d} \mathsf{M}_x \tau < \infty.$$

Но функция $u(x) = \mathsf{M}_x\tau$ является решением уравнения $Lu = -1$ с граничным условием $u(r_1) = 0$, общее решение которого есть

$$u(x) = -\int_{x_0}^{x} R_1(y)\,dy + C_1 \int_{x_0}^{x} R(y)\,dy + C_2$$

(см. п. 4 этого параграфа).

Пример. Пусть $r = r_2 = \infty$. Если $0 < \sigma \leqslant \sigma(x) \leqslant C$ и, кроме того,

$$|a(x)| \leqslant C,$$

то граница $r_2 = \infty$ является недостижимой. Если же коэффициент сноса $a(x)$ возрастает при $x \to \infty$ достаточно быстро, скажем

$$a(x) \geqslant Cx^{1+\delta}, \quad \delta > 0,$$

то соответствующая функция $R_1(x)$ будет интегрируемой на полупрямой $[x_0, \infty)$, и, следовательно, граница r_2 будет достижимой.

Пример. Пусть интервал (r_1, r_2) конечен, $a(x) \equiv 0$ и $b(x) > 0$. Граница r является достижимой тогда и только тогда, когда коэффициент $b(x)$ не слишком сильно вырождается при приближении x к точке r, так что функция $R_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{b(y)}$ интегрируема в окрестности этой точки. В частности, так будет, если $b(x) \geqslant b_0 > 0$.

Эргодические свойства. Пусть $\xi(t)$ — возвратный диффузионный процесс в открытом интервале (r_1, r_2), т. е. с вероятностью 1 траектория процесса $\xi(t)$ выходит из множества вида $[r_1, c]$ или $[d, r_2)$ через внутреннюю точку c или d. Это означает, что обе граничные точки r_1 и r_2 являются отталкивающими.

Условие, что обе границы r_1 и r_2 будут отталкивающими, можно сформулировать в терминах дифференциального оператора $L = a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ следующим образом: для интервала (c, d), вместе с граничными точками c и d лежащего в фазовом пространстве $E = (r_1, r_2)$, в открытом множестве $E \setminus [c, d]$ существует лишь единственное ограниченное решение уравнения $Lu = 0$ с заданными условиями на границе $u(c) = u_1$, $u(d) = u_2$. На каждом из полуинтервалов $(r_1, c]$ и $[d, r_2)$ этим решением являются постоянные $u(x) \equiv u_1$ и $u(x) \equiv u_2$ соответственно.

Диффузионный процесс $\xi = \xi(t)$ мгновенно возвращается в каждую исходную точку x:

$$\mathsf{P}_x\{\inf_{\substack{t > \tau_{[x,x]} \\ \xi(t)=x}} t = \tau_{[x,x]}\} = 1.$$

Пусть τ_1 — момент первого возвращения в точку x после достижения некоторой точки d $(d > x)$, τ_2 — момент второго возвращения в точку x после достижения точки d и т. д. (τ_{n+1} имеет тот же смысл по отношению к τ_n, что и момент τ_1 по отношению к начальному моменту времени $t = 0$). Весь процесс можно разбить на последовательно совершаемые циклы в промежутке времени от τ_n до τ_{n+1} $(n = 0, 1, \ldots; \tau_0 = 0)$, причем поведение процесса в каждом промежутке $\tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}$ подчиняется одним и тем же вероятностным закономерностям при всех $n = 0, 1, \ldots$ и течение процесса при $\tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}$ не зависит от его поведения до τ_n и после τ_{n+1}.

Обозначим символом $\tau(B)$ время, проведенное траекторией процесса $\xi(t)$ в борелевском множестве B за один цикл — до момента τ возвращения в исходную точку x:

$$\tau(B) = \int_0^\tau \varphi_B[\xi(t)]\,dt,$$

где

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in B, \\ 0 & \text{при } x \notin B. \end{cases}$$

Если множество B вместе со своей границей целиком содержится в интервале (r_1, r_2), то

$$\mathsf{Q}^0(B) = \mathsf{M}\tau(B) < \infty.$$

Это соотношение определяет σ-конечную меру на интервале (r_1, r_2), которая является инвариантной:

$$\mathsf{Q}^0(B) = \int_{r_1}^{r_2} \mathsf{Q}^0(dx)\,P(t, x, B).$$

Всякая инвариантная мера отличается от $\mathsf{Q}^0(dx)$ лишь постоянным множителем. С вероятностью 1

$$\lim_{T\to\infty}\left(\int_0^T \varphi_{B_1}[\xi(t)]\,dt \Big/ \int_0^T \varphi_{B_2}[\xi(t)]\,dt\right) = \frac{\mathsf{Q}^0(B_1)}{\mathsf{Q}^0(B_2)}$$

при $\mathsf{Q}^0(B_2) > 0$, т. е. отношение времен пребывания процесса $\xi(t)$ в соответствующих множествах B_1 и B_2 фазового пространства на большом промежутке $0 \leqslant t \leqslant T$ приблизительно равно отношению мер $Q^0(B_1)$ и $Q^0(B_2)$ этих множеств.

Стационарные распределения. Пусть инвариантная мера конечна. Тогда существует стационарное распределение вероятностей P на фазовом пространстве (r_1, r_2):

$$\mathsf{P}(B) = \int_{r_1}^{r_2} \mathsf{P}(dx)\, P(t, x, B).$$

В этом случае переходная функция $P(t, x, B)$ процесса $\xi(t)$ обладает тем свойством, что

$$\lim_{t\to\infty} P(t, x, B) = \mathsf{P}(B)$$

для любого борелевского множества B и всех $x \in (r_1, r_2)$. Это значит, что по прошествии большого промежутка времени вероятностные закономерности процесса $\xi(t)$ носят *стационарный* характер. Предельный стационарный процесс $\xi = \xi(t)$ таков, как если бы в качестве начального распределения вероятностей было бы взято стационарное распределение $\mathsf{P}(dx)$.

Необходимое и достаточное условие существования конечной инвариантной меры (стационарного распределения P) состоит в том, чтобы математическое ожидание времени возвращения в исходную точку x было конечным:

$$\mathsf{M}\tau < \infty.$$

Это соотношение выполняется или не выполняется одновременно для всех внутренних точек x интервала (r_1, r_2).

Аналитическое условие существования стационарного распределения состоит в том, чтобы функция

$$R_2(x) = \frac{1}{b(x)\, R(x)}, \quad R(x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{a(y)}{b(y)}\, dy\right\},$$

была интегрируемой:

$$\int_{r_1}^{r_2} R_2(x)\, dx < \infty.$$

Это аналитическое условие возникает благодаря следующим обстоятельствам. Функция $u(x) = \mathsf{M}_x\tau_d$, где τ_d — момент первого достижения точки d, является решением дифференциального уравнения

$$Lu = -1, \quad L = a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

с граничным условием $u(d) = 0$ (см. п. 4 этого параграфа). Общее решение такого уравнения имеет вид

$$u(x) = -\int_{x_0}^{x} R_1(y)\,dy + C_1 \int_{x_0}^{x} R(y)\,dy + C_2,$$

где

$$R_1(x) = R(x) \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{b(y)\,R(y)}$$

и C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Математическое ожидание $\mathsf{M}\tau$ рассматриваемого времени возвращения в точку x будет конечным тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{c \to r_1}}\, u(x, c, d)\,\mathsf{M}_c\tau_d < \infty, \quad \overline{\lim_{d \to r_2}}\, u(x, d, c)\,\mathsf{M}_d\tau_c < \infty,$$

где

$$u(x, c, d) = \mathsf{P}_x\{\tau_c < \tau_d\}$$

представляет собой вероятность достигнуть точку c раньше, чем d, и выражается формулой

$$u(x, c, d) = \int_{c}^{x} R(y)\,dy \Big/ \int_{c}^{d} R(y)\,dy.$$

Указанные выше соотношения равносильны интегрируемости функции $R_2(x)$.

Предположим, что имеющееся стационарное распределение P задается плотностью $p = p(x)$. Тогда

$$p(y) = \int_{r_1}^{r_2} p(x)\,p(t, x, y)\,dx.$$

Если возможно дифференцирование по t и двукратное дифференцирование по x под знаком интеграла, то плотность стационарного распределения $p(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$L^*p \equiv -\frac{\partial}{\partial x}[a(x)\,p(x)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x)\,p(x)] = 0.$$

Пример. Пусть фазовое пространство есть вся бесконечная прямая ($r_1 = -\infty$ и $r_2 = +\infty$), а коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ имеют следующий вид:

$$a(x) = a_0 + a_1 x, \quad b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2,$$

где a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 — некоторые постоянные ($a_1 < 0$, $b_2 > 0$). В этом случае существует стационарное распределение вероятностей с плотностью $p(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{x - c_0}{d_0 + d_1 x + d_2 x^2},$$

где

$$c_0 = \frac{b_1 - a_0}{a_1 - 2b_2}, \quad d_0 = \frac{b_0}{a_1 - 2b_2}, \quad d_1 = \frac{b_1}{a_1 - 2b_2}, \quad d_2 = \frac{b_2}{a_1 - 2b_2}.$$

Решением его при различных c_0, d_0, d_1, d_2 являются так называемые *плотности распределений Пирсона.*

3. Преобразования диффузионных процессов.

Преобразования фазового пространства. Взаимно однозначным преобразованием $\tilde{x} = \varphi(x)$ фазового пространства марковский процесс $\xi = \xi(t)$ с переходной функцией $P(s, x, t, B)$ может быть преобразован в случайный процесс $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$, который также будет марковским процессом с переходной функцией $\tilde{P}(s, \tilde{x}, t, \tilde{B})$:

$$\tilde{\xi}(t) = \varphi[\xi(t)], \quad \tilde{P}(s, \tilde{x}, t, \tilde{B}) = \tilde{P}(s, x, t, \{\varphi \in \tilde{B}\}).$$

В однородном случае при помощи такого рода преобразования всегда можно перейти от диффузионного процесса $\xi(t)$ с произвольными коэффициентами сноса $a(x)$ и диффузии $\sigma(x)$ к диффузионному процессу $\tilde{\xi}(t)$ с соответствующими коэффициентами $\tilde{a}$ и $\tilde{\sigma}$. Как функции от старой переменной x эти коэффициенты имеют вид

$$\tilde{a}(x) = a(x)\varphi' + b(x)\varphi'', \quad b(x) = \sigma^2(x)/2,$$

$$[\tilde{\sigma}(x)]^2 = \sigma^2(x)[\varphi'(x)]^2.$$

В частности, выбирая преобразование $\tilde{x} = \varphi(x)$ так, чтобы имело место равенство

$$\varphi'(x) = R(x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{\infty} \frac{a(y)}{b(y)}\,dy\right\},$$

получаем процесс $\tilde{\xi}(t)$ с нулевым коэффициентом сноса:

$$\tilde{a}(x) \equiv 0;$$

выбирая

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sigma(x)},$$

получаем процесс $\tilde{\xi}(t)$ с единичным коэффициентом диффузии:

$$\tilde{\sigma}(x) \equiv 1.$$

Случайная замена времени. Рассмотрим отдельные траектории $\xi(\omega, t)$ диффузионного процесса $\xi = \xi(t)$, который можно интерпретировать как движение некоторой частицы по одной из случайно выбираемых траекторий $\xi(\omega, t)$. Считая траекторию уже выбранной, изменим скорость движения частицы по ней, изменив для этого масштаб времени. Именно, для каждого случая ω (для каждой траектории $\xi(\omega, t)$) введем преобразование времени $\tau = \tau(\omega, t)$ по формуле

$$d\tau/dt = 1/V[t, \xi(\omega, \tau)],$$

где $V = V(t, x)$ — некоторая положительная функция, и определим случайный процесс $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$, положив

$$\tilde{\xi}(\omega, t) = \xi[\omega, \tau(\omega, t)].$$

Полученный при помощи такого *случайного преобразования времени* процесс $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ будет марковским. Грубо говоря, новый процесс $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ отличается от исходного процесса $\xi = \xi(t)$ тем, что, выходя в момент t из какой-либо точки x, случайно блуждающая частица в последующем бесконечно малом промежутке Δt движется в $1/V(t, x)$ раз быстрее. Коэффициенты сноса $\tilde{a}(t, x)$ и диффузии $\tilde{\sigma}(t, x)$ нового процесса $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ связаны с соответствующими коэффициентами исходного диффузионного процесса следующим образом:

$$\tilde{a}(t, x) = a(t, x)/V(t, x), \quad \tilde{\sigma}(t, x) = \sigma(t, x)/\sqrt{V(t, x)}.$$

Преобразования, связанные с аддитивными функционалами. Пусть $\xi = \xi(t)$ — диффузионный процесс с переходной функцией $P(s, x, t, B)$, и пусть $\mathfrak{A}(s, t)$ есть σ-алгебра событий, порожденная событиями вида $\{\xi(u) \in B\}$ $(s \leqslant u \leqslant t)$; $\mathsf{P}_{sx} = \mathsf{P}_{sx}(A)$ — соответствующие условные распределения вероятностей на $\mathfrak{A}(s, \infty)$, $\mathsf{M}_{sx}(\cdot)$ — отвечающие им математические ожидания.

Семейство действительных или комплексных случайных величин $\varphi = \varphi_s^t(\omega)$, зависящих от параметров $s \leqslant t$, определяет так называемый *аддитивный функционал* от процесса $\xi = \xi(t)$, если каждая из величин $\varphi_s^t = \varphi_s^t(\omega)$ измерима относительно соответствующей σ-алгебры $\mathfrak{A}(s, t)$ и при любых $s \leqslant u \leqslant t$ с вероятностью 1

$$\varphi_s^u + \varphi_u^t = \varphi_s^t.$$

Пусть $\varphi = \varphi_s^t(\omega)$ — произвольный аддитивный функционал, для которого при всех s и t

$$\mathsf{M}_{sx} \exp\{-\varphi_s^t(\omega)\} < \infty.$$

Тогда соотношения

$$\tilde{P}(s, x, t, B) = \int\limits_{\{\xi(t) \in B\}} \exp\{-\varphi_s^t(\omega)\}\, \mathsf{P}_{sx}(d\omega) \tag{4.2}$$

определяют семейство обобщенных распределений на борелевских множествах B в фазовом пространстве, удовлетворяющих уравнению Колмогорова — Чепмена:

$$\widetilde{P}(s, x, t, B) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{P}(s, x, u, dy)\, \widetilde{P}(u, y, t, B),$$

$$s \leqslant u \leqslant t.$$

Так же как и переходные функции марковского процесса, «переходные функции» $\widetilde{P}(s, x, t, B)$ задают обобщенные распределения $\widetilde{\mathsf{P}}_{sx} = \widetilde{\mathsf{P}}_{sx}(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}(s, \infty)$:

$$\widetilde{\mathsf{P}}_{sx}\{\xi(t_1) \in B_1, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\} =$$
$$= \int_{B_1} \ldots \int_{B_{n-1}} \widetilde{P}(s, x, t_1, dx_1)\widetilde{P}(t_1, x_1, t_2, dx_2) \ldots \widetilde{P}(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, B_n).$$

Обобщенное распределение $\widetilde{\mathsf{P}}_{sx} = \widetilde{\mathsf{P}}_{sx}(A)$, рассматриваемое на σ-алгебре событий $\mathfrak{A}(s, t)$ при конечных s и t, абсолютно непрерывно относительно исходного распределения вероятностей $\mathsf{P}_{sx} = \mathsf{P}_{sx}(A)$, причем соответствующая плотность $p(\omega) = \widetilde{\mathsf{P}}_{sx}(d\omega)/\mathsf{P}_{sx}(d\omega)$ будет иметь вид $p(\omega) = \exp\{-\varphi_s^t(\omega)\}$.

Изменение коэффициента сноса. Пусть $\xi = \xi(t)$ — диффузионный процесс, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$d\xi(t) = a[t, \xi(t)]dt + \sigma[t, \xi(t)]d\eta(t),$$

и пусть $\varphi = \varphi_s^t(\omega)$ — аддитивный функционал вида

$$\varphi_s^t(\omega) = \int_s^t \frac{\tilde{a}[u, \xi(u)] - a[u, \xi(u)]}{\sigma[u, \xi(u)]}\, d\eta(u) -$$
$$- \frac{1}{2}\int_s^t \left\{\frac{\tilde{a}[u, \xi(u)] - a[u, \xi(u)]}{\sigma[u, \xi(u)]}\right\}^2 du.$$

Тогда преобразование (4.2) задает переходные функции $\widetilde{P}(s, x, t, B)$ диффузионного процесса $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ с коэффициентом сноса $\tilde{a}(t, x)$ и тем же самым, что и у исходного процесса $\xi = \xi(t)$, коэффициентом диффузии $\sigma(t, x)$. Соответствующее распределение вероятностей $\widetilde{\mathsf{P}}_{sx} = \widetilde{\mathsf{P}}_{sx}(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}(s, t)$ будет абсолютно непрерывно относительно исходного распределения $\mathsf{P}_{sx} = \mathsf{P}_{sx}(A)$, причем плотность $p(\omega) = \widetilde{\mathsf{P}}_{sx}(d\omega)/\mathsf{P}_{sx}(d\omega)$

имеет вид

$$p(\omega)=\exp\left\{-\int_s^t \frac{\tilde a[u,\xi(u)]-a[u,\xi(u)]}{\sigma[u,\xi(u)]}\,d\eta(u)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_s^t\left\{\frac{\tilde a[u,\xi(u)]-a[u,\xi(u)]}{\sigma[u,\xi(u)]}\right\}^2 du\right\}.$$

Таким образом, описанным преобразованием распределения вероятностей диффузионный процесс $\xi=\xi(t)$ может быть преобразован в диффузионный же процесс $\tilde\xi=\tilde\xi(t)$ с произвольным коэффициентом сноса $\tilde a(t, x)$ и тем же самым коэффициентом диффузии $\tilde\sigma(t, x)=\sigma(t, x)$. Подобным преобразованием нельзя перейти к процессу $\tilde\xi=\tilde\xi(t)$ с коэффициентом диффузии $\tilde\sigma(t, x)$, отличающимся от исходного коэффициента $\sigma(t, x)$. Всякий диффузионный процесс может быть получен из процесса броуновского движения описанным выше преобразованием распределения вероятностей и последующей случайной заменой времени.

Обрыв процесса. Пусть $\xi=\xi(t)$ — диффузионный процесс и $\tau=\tau(\omega)$ — момент выхода из некоторого интервала (r_1, r_2). Определим аддитивный функционал $\varphi=\varphi_s^t(\omega)$ как

$$\varphi_s^t(\omega)=\begin{cases}\infty, & \text{если } t>\tau(\omega),\\ 0, & \text{если } t\leqslant\tau(\omega).\end{cases}$$

Соответствующее этому функционалу преобразование (4.2) удобнее переписать в виде

$$\tilde P(s, x, t, B)=\int_{\{\xi(t)\in B\}}\varphi_{t<\tau}(\omega)\,\mathsf P_{sx}(d\omega)=\int_{\{\xi(t)\in B,\,t<\tau\}}\mathsf P_{sx}(d\omega),$$

где

$$\varphi_{t<\tau}(\omega)=\begin{cases}0, & \text{если } t>\tau(\omega),\\ 1, & \text{если } t\leqslant\tau(\omega).\end{cases}$$

Оно определяет переходные функции нового процесса $\tilde\xi=\tilde\xi(t)$, получающегося из $\xi=\xi(t)$ *обрывом* после момента τ. Распределения вероятностей $\tilde{\mathsf P}_{sx}=\tilde{\mathsf P}_{sx}(A)$ абсолютно непрерывны относительно исходного распределения $\mathsf P_{sx}=\mathsf P_{sx}(A)$ на каждой из σ-алгебр $\mathfrak A(s, t)$ $(t<\infty)$, и плотность $p(\omega)=\tilde{\mathsf P}_{sx}(d\omega)/\mathsf P_{sx}(d\omega)$ имеет вид

$$p(\omega)=\varphi_{t\leqslant\tau}(\omega).$$

Обрывающийся диффузионный процесс $\tilde\xi=\tilde\xi(t)$ имеет те же самые коэффициенты сноса и диффузии:

$$\tilde a(t, x)=a(t, x),\quad \tilde\sigma(t, x)=\sigma(t, x).$$

при всех t и $x \in (r_1, r_2)$. Переходная функция $\tilde{P}(s, x, t, B)$ такова, что $\tilde{P}(s, x, t, B) \equiv 0$ при $x \notin (r_1, r_2)$.

Момент обрыва другого типа можно определить следующим образом. Именно, каждая траектория $\xi(\omega, t)$ исходного процесса $\xi = \xi(t)$ такая, что $\xi(\omega, t) = x$, обрывается в следующем за t промежутке времени Δt с вероятностью $V(t, x)\Delta t + o(\Delta t)$, где $V = V(t, x) \geqslant 0$ — так называемая *плотность обрыва*. Получаемый таким образом случайный процесс $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ обрывается в некоторый случайный момент τ. Переходная функция такого процесса $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ получается преобразованием типа (4.2) с аддитивным функционалом вида

$$\varphi_s^t(\omega) = \int_s^t V[u, \xi(u)]\, du.$$

Случайный процесс $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ обрывается в случайный момент τ, который можно определить, обратившись к расширенному пространству элементарных событий $\tilde{\Omega} = \Omega \times (-\infty, \infty)$, точками которого являются пары $\tilde{\omega} = (\omega, \lambda)$, где $\omega \in \Omega$, $-\infty < \lambda < \infty$. При этом следует положить $\tau(\tilde{\omega}) = \lambda$ при $\tilde{\omega} = (\omega, \lambda)$ и задать условные распределения формулой

$$\tilde{\mathsf{P}}\{\tau > t \mid \xi(u),\quad s \leqslant u \leqslant t\} = \exp\left\{-\int_s^t V[u, \xi(u)]\, du\right\}.$$

Обрывающийся процесс $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ на расширенном пространстве $\tilde{\Omega}$ можно определить как

$$\tilde{\xi}(\tilde{\omega}, t) = \xi(\omega, t) \text{ при } \tilde{\omega} = (\omega, \lambda),$$

где $t < \lambda$. При таком определении

$$\tilde{P}(s, x, t, B) = \tilde{\mathsf{P}}_{sx}\{\xi(t) \in B, \tau > t\} =$$
$$= \int_{\{\xi(t) \in B\}} \exp\left\{-\int_s^t V[u, \xi(u)]\, du\right\} \mathsf{P}_{sx}(d\omega).$$

Пусть

$$L = a(s, x)\frac{\partial}{\partial x} + b(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad b(s, x) = \frac{1}{2}\sigma^2(s, x),$$

— дифференциальный оператор в обратном уравнении Колмогорова для диффузионного процесса $\xi = \xi(t)$. При определенных условиях (см. п. 1 этого параграфа) функция $u(s, x) = \int \varphi(y) P(s, x, t, dy)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\frac{\partial u}{\partial s}=a(s, x)\frac{\partial u}{\partial x}+b(s, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Пусть

$$\tilde{u}(s, x)=\int \varphi(y)\,\tilde{P}(s, x, t, dy),$$

где $\tilde{P}(s, x, t, B)$ — переходная функция обрывающегося диффузионного процесса $\tilde{\xi}=\tilde{\xi}(t)$ с плотностью обрыва $V=V(t, x)$. Для ограниченной и непрерывной в точке (s, x) плотности обрыва V соответствующая функция $\tilde{u}=\tilde{u}(s, x)$ удовлетворяет дифференциальному равенству

$$-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}=a(s, x)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+b(s, x)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}-V(s, x)\tilde{u},$$

т. е. соответствующий дифференциальный оператор $\tilde{L}$ для процесса $\tilde{\xi}=\tilde{\xi}(t)$ есть $\tilde{L}=L-V$.

Такую трансформацию дифференциального оператора можно понять, обратившись к дискретной модели диффузионного процесса $\xi=\xi(t)$ (см. п. 1 этого параграфа). Именно, если в момент s из точки x случайно блуждающая частица с вероятностью $p(s, x)\sim\frac{1}{2}+\frac{a(s, x)}{2\sigma(s, x)}\sqrt{\Delta t}$ смещается на величину $\Delta x\sim\sigma(s, x)\sqrt{\Delta t}$, с вероятностью $1-p(s, x)-V(s, x)\Delta t$ смещается на величину $-\Delta x$, а с вероятностью $V(s, x)\Delta t$ исчезает из рассматриваемого фазового пространства, то аналогом дифференциального уравнения $-\partial\tilde{u}/\partial s=\tilde{L}\tilde{u}$ является конечно-разностное соотношение вида

$$\tilde{u}(s, x)\sim p(s, x)\tilde{u}(s+\Delta t, x+\Delta x)+$$
$$+[1-p(s, x)]\tilde{u}(s+\Delta t, x-\Delta x)-V(s, x)\tilde{u}(s, x)\Delta t.$$

4. Обратное уравнение Колмогорова и распределения вероятностей некоторых функционалов от диффузионного процесса. Пусть $\xi=\xi(t)$ — диффузионный процесс в конечном или бесконечном интервале (r_1, r_2), переходная плотность $p(s, x, t, y)$ которого удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова

$$-\frac{\partial p}{\partial s}=Lp,\quad L=a(s, x)\frac{\partial}{\partial x}+b(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

где $a(s, x)$ и $b(s, x)$ непрерывны, $b(s, x)>0$. Пусть τ — момент выхода из некоторого интервала (c, d) в фазовом пространстве и $\varphi(x)$ — функция на его границе. Среднее значение

$$u(s, x)=\mathsf{M}_{sx}\varphi[\xi(\tau)],$$

где $\mathsf{M}_{sx}(\cdot)$ — математическое ожидание, соответствующее условному распределению P_{sx}, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\partial u/\partial s = Lu$$

с граничными условиями

$$u(s, c) = \varphi(c), \quad u(s, d) = \varphi(d).$$

При $\varphi(c) = 1$ и $\varphi(d) = 0$ решение $u(s, x) = u(s, x, c, d)$ совпадает с вероятностью попасть в точку c раньше, чем в d.

Дифференциальное уравнение для $u(s, x)$ возникает из функционального соотношения

$$u(s, x) = \int_{r_1}^{r_2} u(t, y) P(s, x, t, dy),$$

где $P(s, x, t, B)$ — переходная функция диффузионного процесса $\xi = \xi(t)$, для которого граничные точки c и d являются поглощающими (т. е. процесс $\xi = \xi(t)$ останавливается при выходе из рассматриваемого интервала).

Дифференциальные уравнения для характеристических функций. Пусть $V(t, x)$ — действительная или комплексная ограниченная функция. Величина

$$u(s,x) = \mathsf{M}_{sx} \exp\left\{-\int_s^\tau V[t, \xi(t)]\, dt\right\} \varphi[\xi(\tau)],$$

где τ — момент выхода из интервала (c, d), удовлетворяет функциональному соотношению

$$u(s, x) = \int_{r_1}^{r_2} u(t, y) \widetilde{P}(s, x, t, dy),$$

в котором $\widetilde{P}(s, x, t, B)$ — «переходная функция» вида

$$\widetilde{P}(s, x, t, B) = \int_{\{\xi(t) \in B,\, t < \tau\}} \exp\left\{-\int_s^t V[u, \xi(u)]\, du\right\} \mathsf{P}_{sx}(d\omega).$$

При определенных условиях (см. п. 1 этого параграфа) функция $u(s, x)$ удовлетворяет и дифференциальному уравнению

$$-\frac{\partial u}{\partial s} = a(s, x)\frac{\partial u}{\partial x} + b(s, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V(s, x)u$$

с граничными условиями

$$u(s, a) = \varphi(c), \quad u(s, b) = \varphi(d).$$

Если $V(t, x) = -i\lambda\psi(t, x)$, где $\psi(t, x)$ — действительная функция, то

$$u(s, x, \lambda) = \mathsf{M}_{sx} \exp\left\{i\lambda \int_s^\tau \psi[t, \xi(t)]\, dt\right\}$$

как функция от λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ является характеристической функцией случайной величины $\Psi = \int_s^\tau \psi[t, \xi(t)]\, dt$, а при фиксированном λ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\frac{\partial u}{\partial s} = a(s, x)\frac{\partial u}{\partial x} + b(s, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\lambda\psi(s, x)\, u,$$

$$u(s, c, \lambda) = u(s, d, \lambda) = 1.$$

Все сказанное выше остается справедливым, когда фигурирующий в выражениях различных функций $u(s, x)$ момент τ не момент выхода из какого-либо интервала, а просто постоянная величина $\tau = t$. В этом случае вместо граничных условий для функций $u(s, x)$ нужно задать соответствующие «концевые» значения:

$$u(t, x) = \varphi(x).$$

Точно так же все сказанное выше остается справедливым и для момента τ выхода из интервала (c, d), граничные точки которого могут совпадать с граничными точками r_1 и r_2 фазового пространства, при том условии, что и c и d достижимы.

Дифференциальные уравнения для математических ожиданий. Пусть

$$v(s, x) = \mathsf{M}_{sx} \int_s^\tau \psi[u, \xi(u)]\, du,$$

где τ — момент выхода из некоторого интервала (c, d) или некоторая постоянная $(\tau \geqslant s)$. Имеет место следующее функциональное соотношение:

$$v(s, x) = \int_{r_1}^{r_2} v(t, y)\, \widetilde{P}(s, x, t, dy) + \widetilde{\mathsf{M}}_{sx} \int_s^t \psi[u, \xi(u)]\, du,$$

где $\widetilde{P}(s, x, t, B)$ — переходная функция процесса $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$, получающегося из исходного диффузионного процесса $\xi = \xi(t)$ обрывом после момента τ. При определенных условиях (функция ψ ограничена и непрерывна) функция $v(s, x)$ имеет ограниченные и непрерывные производные $\partial v/\partial x$ и $\partial^2 v/\partial x^2$, причем выполняется дифференциальное соотношение

$$-\frac{\partial v}{\partial s}=a(s,x)\frac{\partial v}{\partial x}+b(s,x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\psi(s,x)$$

с граничными условиями

$$v(s,c)=v(s,d)=0$$

(если τ есть момент выхода из интервала (c, d)) или

$$v(t,x)=0$$

(если $\tau=t$ есть постоянная).

5. Многомерные диффузионные процессы.

Многомерным диффузионным процессом обычно называют непрерывный марковский процесс

$$\xi(t)=\{\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \ldots,\ \xi_n(t)\},$$

фазовым пространством которого является n-мерное векторное пространство E^n и переходная функция $P(s, x, t, B)$ которого удовлетворяет следующим условиям: для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|y-x|>\varepsilon}P(t,x,t+\Delta t,dy)=0,$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|y-x|<\varepsilon}(y_k-x_k)P(t,x,t+\Delta t,dy)=a_k(t,x),$$

$$k=1,\ldots,n;$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|y-x|<\varepsilon}(y_k-x_k)(y_j-x_j)P(t,x,t+\Delta t,dy)=2b_{kj}(t,x),$$

$$k,j=1,\ldots,n.$$

Вектор $a=\{a_1(t,x),\ \ldots,\ a_n(t,x)\}$ характеризует локальный снос процесса $\xi(t)$, матрица $\sigma^2=(2b_{kj}(t,x))$ $(j, k=1, \ldots, n)$ характеризует среднеквадратичное отклонение случайного процесса $\xi(t)$ от исходного положения x за малый промежуток времени от t до $t+\Delta t$.

При некоторых дополнительных ограничениях переходная плотность $p(s, x, t, y)$ диффузионного процесса удовлетворяет *обратному и прямому дифференциальным уравнениям Колмогорова*

$$\frac{\partial p}{\partial s}=-\sum_{k=1}^{n}a_k(s,x)\frac{\partial p}{\partial x_k}-\sum_{k,j=1}^{n}b_{kj}(s,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x_k\partial x_j},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}[a_k(t,y)p]+\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_k\partial y_j}[b_{kj}(t,y)p].$$

Локальное поведение диффузионного процесса $\xi(t)$ может быть описано при помощи стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\xi_k(t) = a_k[t, \xi(t)]\,dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{kj}[t, \xi(t)]\,d\eta_j(t), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

где $\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$ — взаимно независимые процессы броуновского движения, а векторы

$$\sigma_j = \{\sigma_{1j}(t, x), \ldots, \sigma_{nj}(t, x)\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

являются собственными векторами матрицы $\sigma^2 = (2b_{kj}(t, x))$.

Пример. *Стационарные гауссовские процессы с рациональными спектральными плотностями.* Пусть $\xi_0(t)$ — стационарный гауссовский процесс с рациональной спектральной плотностью $f(\lambda) = |Q(\lambda)|^{-2}$. Многомерный стационарный процесс $\xi(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=0,\ldots,n-1}$, компоненты которого суть исходный процесс $\xi_0(t)$ и все его производные $\xi_k(t) = \xi^{(k)}(t)$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, является однородным марковским процессом. Его переходная функция $P(t, x, B)$ при фиксированных t и x представляет собой гауссовское распределение вероятностей со средним значением

$$A(t, x) = C(t)\,x = \left\{\sum_{j=0}^{n-1} C_{kj}(t)\,x_j\right\}_{k=0,\ldots,n-1}$$

и корреляционной матрицей $(B_{kj}(t))$, совпадающей с корреляционной матрицей компонент вектора $\xi(t) - C(t)\xi(0)$, где $C(t) = (C_{kj}(t))$ — матрица, дающая *наилучший прогноз* (см. гл. VI, § 1, п. 3).

Если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — корни многочлена $|Q(\lambda)|^2$, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, то в случае, когда они все различны, элементы матрицы $C(t) = (C_{kj}(t))$ могут быть найдены из следующих систем линейных уравнений:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (iz_q)^{j-k}\, C_{kj} = e^{iz_q t}, \quad q = 1, \ldots, n;\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Стационарный процесс $\xi = \xi(t)$ со спектральной плотностью $f(\lambda) = |Q(\lambda)|^{-2}\left(Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} q_k (i\lambda)^k\right)$ является решением дифференциального уравнения вида

$$\sum_{k=0}^{n} q_k \xi^{(k)}(t) = \dot{\eta}(t),$$

где $\dot{\eta}(t)$ — так называемый белый шум (обобщенная производная винеровского процесса — см. гл. VI, § 1, п. 6). Это уравнение эквивалентно следующей системе стохастических дифференциальных уравнений:

$$d\xi_{k-1} = \xi_k(t)\,dt, \quad k = 0, \ldots, n-2,$$

$$d\xi_{n-1} = \frac{1}{q_n}\left[-\sum_{k=0}^{n-1} q_k\xi^{(k)}(t)\right]dt + \frac{1}{q_n}\,d\eta(t).$$

Условные марковские процессы. Пусть $\xi_1(t)$ — диффузионный процесс, управляемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi_1(t) = a_1[\xi_1(t),\ t]dt + \sigma_{11}[\xi_1(t),\ t]d\eta_1(t),$$

и пусть процесс $\xi_2(t)$ связан с $\xi_1(t)$ следующим образом:

$$d\xi_2(t) = a_2[\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ t]dt + \sigma_{21}[\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ t]d\eta_1(t) + \\ + \sigma_{22}[\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ t]d\eta_2(t),$$

где $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ — независимые процессы броуновского движения. В совокупности $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ образуют марковский двумерный процесс $\{\xi_1(t),\ \xi_2(t)\}$.

Предположим, что случайный процесс $\xi_2(t)$ по каким-либо причинам недоступен наблюдениям исследователя и о его поведении можно судить лишь по наблюдениям над процессом $\xi_1(t)$. В качестве характеристики ненаблюдаемого процесса можно взять условную переходную функцию

$$P(s,\ x,\ t,\ B,\ \omega) = \mathsf{P}\{\xi_2(t)\in B \mid \xi_2(s) = x,\ \xi_1(u),\ s \leqslant u \leqslant t\}$$

или так называемое *апостериорное распределение вероятностей* неизвестного значения $\xi_2(t)$ в текущий момент t, определяемое как

$$\pi(s,\ t,\ B,\ \omega) = \int_E \mathsf{P}_s(dx)\,P(s,\ x,\ t,\ B,\ \omega),$$

где $\mathsf{P}_s(dx)$ — (*априорное*) распределение вероятностей начального значения $\xi_2(s)$. Наибольший интерес представляет эволюция апостериорного распределения $\pi(s,\ t,\ B,\ \omega)$ с течением времени t.

Предположим, что условная переходная функция $P(s,\ x,\ t,\ B,\ \omega)$ при каждом ω (ω — элементарное событие, связанное с поведением наблюдаемого процесса $\xi_1(t)$) имеет плотность

$$p(s,\ x,\ t,\ y,\ \omega) = P(s,\ x,\ t,\ dy,\ \omega)/dy.$$

Основой для изучения эволюции функции $p(s,\ x,\ t,\ y,\ \omega)$ с течением времени t (так же как и для обычной переходной плотности) может служить следующее функциональное соотношение:

$$p(s,\ x,\ t_1 + t_2,\ y,\ \omega) = \int p(s,\ x,\ t_1,\ y_1,\ \omega)\,p(t_1,\ y_1,\ t_1 + t_2,\ y,\ \omega)\,dy_1.$$

В предположении однородности рассматриваемых процессов для апостериорной плотности распределения

$$\pi(t, y, \omega) = \int\limits_E \mathsf{P}_s(dx)\, p(s, x, t, y, \omega)$$

ненаблюдаемой величины $\xi_2(t)$ имеет место следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$d\pi(t, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{[\sigma_{21}^2(\xi_1(t), y) + \sigma_{22}^2(\xi_1(t), y)]\,\pi(t, y)\}\,dt -$$
$$- \frac{\partial}{\partial y}\{a_2(\xi_1(t), y)\,\pi(t, y)\}\,dt - \frac{\partial}{\partial y}\{\sigma_{21}(\xi_1(t), y)\,\pi(t, y)\}\,d\eta_1(t).$$

При фиксированном y условная плотность $\pi(t, y)$ как случайная функция от t вместе с $\xi_1(t)$ образует двумерный диффузионный процесс, называемый *условным марковским процессом* *).

С точки зрения приложений более интересным является вопрос о том, как по наблюдениям процесса $\xi_2(t)$ можно оценить поведение процесса $\xi_1(t)$ (имеются в виду процессы описанного выше типа). Скажем, как вычислить

$$\hat{\xi}_1(t) = \mathsf{M}(\xi_1(t)\,|\,\xi_2(u),\ s \leqslant u \leqslant t)$$

— условное математическое ожидание неизвестного значения $\xi_1(t)$ по величинам $\xi_2(u)$ $(s \leqslant u \leqslant t)$ и, более того, как описать эволюцию величин $\hat{\xi}_1(t)$ с течением времени t? Ответ на эти вопросы имеется, например, в случае л и н е й н о й системы вида

$$d\xi_1(t) = a_1(t)\,\xi_1(t) + \sigma_1(t)\,d\eta_1(t),$$
$$d\xi_2(t) = a_2(t)\,\xi_1(t) + \sigma_2(t)\,d\eta_2(t),$$

где $a_1(t)$, $a_2(t)$, $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ — некоторые заданные функции от t. Именно, считая $t \geqslant 0$, $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0$, $\sigma_2(t) \equiv 1$, легко убедиться, что разность

$$\eta(t) = \xi_2(t) - \int_0^t a_2(s)\,\hat{\xi}_1(s)\,ds = \int_0^t a_2(s)\,\Delta(s)\,ds + \int_0^t \sigma_2(s)\,d\eta_2(s),$$
$$t \geqslant 0,$$

где $\Delta(t) = \xi_1(t) - \hat{\xi}_1(t)$, представляет собой винеровский процесс, являющийся «обновляющим» для наблюдаемого процесса $\xi_2(t)$: приращения $\eta(t) - \eta(u)$ $(t \geqslant u)$ не зависят от $\xi_2(s)$ $(s \leqslant u)$, причем замкнутые в среднем линейные оболочки ве-

*) Некоторые интересные вопросы об условных процессах рассматриваются в книге [92].

личин $\xi_2(s)$ и $\eta(s)$ $(s \leqslant u)$ совпадают при всех $u \geqslant 0$. Поэтому

$$\widehat{\xi}_1(t) = \int_0^t c(t, s)\, d\eta(s),$$

где весовая функция $c(t, s)$ такова, что

$$\mathsf{M}\widehat{\xi}_1(t)\, \eta(u) = \mathsf{M}\xi_1(t)\, \eta(u) = \int_0^u c(t, s)\, ds, \quad 0 \leqslant u \leqslant t,$$

откуда легко получается соотношение $c(t, t) = a_2(t)\mathsf{M}\Delta(t)^2$. При известных условиях случайный процесс $\widehat{\xi}_1(t)$ $(t \geqslant 0)$ будет иметь стохастический дифференциал

$$d\widehat{\xi}_1(t) = \left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} c(t, s)\, d\eta(s)\right] dt + c(t, t)\, d\eta(t).$$

Интуитивно ясно, и это подтверждается соответствующими выкладками, что коэффициент сноса у «диффузионного» процесса $\widehat{\xi}_1(t)$ должен быть таким же, как и у самого процесса $\xi_1(t)$. Действительно, если

$$\xi_1(t + \Delta t) - \xi_1(t) \sim a_1(t)\xi_1(t)\Delta t + \sigma_1(t)\Delta\eta_1(t),$$

где $\Delta\eta_1(t)$ не зависит от $\xi_2(s)$ $(s \leqslant t)$, то

$$\mathsf{M}(\xi_1(t + \Delta t) \mid \xi_2(s),\ s \leqslant t) - \widehat{\xi}(t) \sim a_1(t)\widehat{\xi}_1(t)\Delta t,$$

а поскольку винеровский процесс $\eta(t)$ является обновляющим для $\xi_2(t)$, то

$$\widehat{\xi}_1(t + \Delta t) - \mathsf{M}(\xi_1(t + \Delta t) \mid \xi_2(s),\ s \leqslant t) =$$
$$= \int_t^{t+\Delta t} c(t + \Delta t, s)\, d\eta(s) \sim c(t, t)\, \Delta\eta(t).$$

В итоге получается, что

$$d\widehat{\xi}_1(t) = a_1(t)\widehat{\xi}_1(t)\,dt + a_2(t)D(t)[d\xi_2(t) - a_2(t)d\widehat{\xi}_1(t)],$$

где $D(t) = \mathsf{M}\Delta(t)^2$ есть квадратичная ошибка в оценке $\widehat{\xi}_1(t)$ для $\xi(t)$. Используя тот факт, что корреляционная функция $B(t, s) = \mathsf{M}\xi(t)\xi(s)$ случайного процесса $\xi(t)$ с «линейным» стохастическим дифференциалом

$$d\xi(t) = a(t)\xi(t)\,dt + \sigma(t)\,d\eta(t)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left.\frac{\partial B(t, s)}{\partial t}\right|_{s=t} = a(t)\,B(t, t) + \sigma(t)^2,$$

для функции $D(t)=\mathsf{M}\Delta(t)^2$ легко получить уравнение Риккати:

$$D'(t)=2a_1(t)D(t)-a_2(t)^2D(t)^2+\sigma_1(t)^2.$$

Указанные уравнения, называемые обычно *уравнениями Кальмана — Бьюси*, обобщаются на многомерные диффузионные процессы аналогичного типа, а также на случай, когда коэффициенты $a_1(t)$ и $\sigma_1(t)$ зависят от $\xi_2(s)$ $(s\leqslant t)$ (но не от самого процесса $\xi_1(s)$, $s\leqslant t$) (см., например, [58]).

Пусть $\xi_1(t)$ — марковский процесс, принимающий лишь конечное число состояний, занумерованных от 1 до n, такой, что плотности перехода $\lambda_{ij}(t)$ из состояния i в состояние j не зависят от поведения случайного процесса $\xi_2(t)$, управляемого стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$d\xi_2(t)=a[t,\ \xi_1(t),\ \xi_2(t)]dt+\sigma[t,\ \xi_2(t)]d\eta(t),$$

где $\eta(t)$ — некоторый процесс броуновского движения, не зависящий от процесса $\xi_1(t)$. Предположим, что случайный процесс $\xi_1(t)$ по каким-либо причинам недоступен наблюдениям исследователя и о состоянии этого процесса $\xi_1(t)$ в момент времени t можно судить лишь по наблюдениям случайного процесса $\xi_2(s)$ $(s\leqslant t)$, в совокупности с $\xi_1(t)$ образующего двумерный марковский процесс $\{\xi_1(t),\ \xi_2(t)\}$.

Если $P_s(k)=\mathsf{P}\{\xi_1(s)=k\}$ $(k=1,\ \ldots,\ n)$ — распределение вероятностей ненаблюдаемого процесса $\xi_1(s)$ в исходный момент времени s, то апостериорные вероятности

$$\pi_j(t)=\sum_{k=1}^{n}P_s(k)\,\mathsf{P}\{\xi_1(t)=j\,|\,\xi_1(s)=k,\ \xi_2(s),\ s\leqslant t\},$$
$$j=1,\ \ldots,\ n,$$

вместе с наблюдаемым процессом $\xi_2(t)$ в совокупности образуют так называемый *условный марковский процесс*, эволюция которого с течением времени t описывается следующими стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$d\pi_j(t)=\Biggl\{\sum_{k=1}^{n}\pi_k(t)\lambda_{kj}(t)-$$
$$-\pi_j(t)\frac{a_j[t,\ \xi_2(t)]-\sum_{k=1}^{n}\pi_k(t)\,a_k[t,\ \xi_2(t)]}{\sigma^2[t,\ \xi_2(t)]}\sum_{k=1}^{n}\pi_k(t)\,a_k[t,\ \xi_2(t)]\Biggr\}dt+$$
$$+\pi_j(t)\frac{a_j[t,\ \xi_2(t)]-\sum_{k=1}^{n}\pi_k(t)\,a_k[t,\ \xi_2(t)]}{\sigma^2[t,\ \xi_2(t)]}d\xi_2(t),$$

где $a_k(t,\ x_2)=a(t,\ k,\ x_2)$.

Если фиксированы $\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t)$ и $\xi_2(t)$, то дальнейшая эволюция вероятностей $\pi_1, \ldots, \pi_n$ происходит независимо от течения процессов $\xi_1(s)$, $\xi_2(s)$ и $\pi_1(s), \ldots, \pi_n(s)$ при $s \leqslant t$.

Если коэффициенты сноса и диффузии наблюдаемого процесса $\xi_2(t)$ зависят лишь от времени и состояния процесса $\xi_1(t)$: $a_k(t, x_1) = a_k(t)$ и $\sigma(t, x_2) = \sigma(t)$, то совокупность апостериорных вероятностей $\{\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t)\}$ представляет собой многомерный диффузионный процесс, управляемый указанными стохастическими дифференциальными уравнениями [109].

§ 5. Общие марковские процессы и их характеристики

1. Полугруппы, отвечающие переходным функциям, и их инфинитезимальные операторы. Пусть $\xi(t)$ $(t \geqslant 0)$ — однородный марковский процесс с переходной функцией $P(t, x, B)$ в измеримом топологическом фазовом пространстве E со счетной базой. Пусть переходная функция $P(t, x, B)$ является *стохастически непрерывной*:

$$\lim_{t \to 0} \int_E \varphi(y) P(t, x, dy) = \varphi'(x)$$

для любой непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$ на E и, кроме того, выполнено так называемое *условие Феллера*: распределения $P(t, x, B)$ в фазовом пространстве E слабо сходятся к $P(t, x_0, B)$ при $x \to x_0$:

$$P(t, x, B) \Rightarrow P(t, x_0, B).$$

Пусть $C(E)$ — пространство всех ограниченных непрерывных функций $\varphi(x)$ на фазовом пространстве E с нормой $\|\varphi\| = \max_x |\varphi(x)|$. Соотношение

$$T_t\varphi(x)) = \int_E \varphi(y) P(t, x, dy)$$

задает полугруппу линейных сжимающих преобразований T_t $(t \geqslant 0)$ пространства $C(E)$:

$$T_s \cdot T_t = T_{s+t}, \quad T_0 = I, \quad \|T_t\| \leqslant 1.$$

Условие стохастической непрерывности переходной функции $P(t, x, B)$ эквивалентно условию непрерывности полугруппы операторов T_t:

$$\lim_{s \to t} T_s\varphi = T_t\varphi, \quad \varphi \in C(E).$$

Для некоторого, всюду плотного линейного подпространства D_A (вообще говоря, незамкнутого) существует предел

$$A\varphi = \lim_{t \to 0} \frac{T_t\varphi - \varphi}{t}, \quad \varphi \in D_A, \tag{5.1}$$

который определяет так называемый *инфинитезимальный оператор* A полугруппы T_t.

Для любого элемента $\varphi \in D_A$ функция $T_t\varphi$ $(t > 0)$ является сильно дифференцируемой и

$$dT_t\varphi/dt = AT_t\varphi = T_tA\varphi,$$

$$T_tf - f = \int_0^t T_sAf\,ds.$$

Пример. Пусть $\xi(t)$ $(t \geqslant 0)$ — марковский процесс с конечным числом состояний (скажем, фазовое пространство E состоит из конечного числа точек $x = 1, \ldots, n$). В этом случае пространство $C(E)$ есть n-мерное евклидово пространство векторов $\varphi = \varphi(x)$ $(x \in E)$ с координатами $\varphi(x)$ $(x = 1, \ldots, n)$, в котором операторы T_t задаются соответствующими матрицами $\{p_{ij}(t)\}$ переходных вероятностей рассматриваемого процесса:

$$T_t\varphi(i) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(j)\, p_{ij}(t).$$

Инфинитезимальный оператор A определен (для всех $\varphi \in C(E)$) формулой

$$A\varphi(i) = \lim_{h\to 0}\left[\sum_{j\neq i} \varphi(j)\frac{p_{ij}(h)}{h} + \varphi(i)\frac{p_{ii}(h)-1}{h}\right] = \sum_{j=1}^{n} \varphi(j)\lambda_{ij},$$

т. е. A задается матрицей $\{\lambda_{ij}\}$ плотностей перехода. Уравнение $dT_t\varphi/dt = AT_t\varphi$ равносильно обратной системе дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi(j)\, p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} \sum_{j=1}^{n} \varphi(j)\, p_{kj}(t).$$

Полугруппа операторов T_t однозначно определяет соответствующее семейство переходных функций $P(t, x, B)$ марковского процесса $\xi(t)$.

Какими свойствами должен обладать некоторый линейный оператор A на всюду плотном линейном подпространстве $D_A \subseteq C(E)$, чтобы быть инфинитезимальным оператором некоторого марковского процесса $\xi(t)$ в фазовом пространстве E? В случае компактного фазового пространства E для этого необходимы и достаточны следующие условия. Во-первых, если функция $\varphi(x)$ из D_A достигает своего минимума в некоторой точке x_0, то $(A\varphi)(x_0) \geqslant 0$ (*принцип минимума*); в частности, $A \cdot 1 = 0$. Во-вторых, уравнение $\lambda\psi - A\psi = \varphi$ при $\lambda > 0$ имеет решение $\psi \in C(E)$ для всех элементов $\varphi \in C(E)$. Именно, при этих условиях линейный функционал $T_t\varphi(x)$ от $\varphi(t$ и x фиксированы) является ограниченным, положительным и представляется в виде

$$T_t\varphi(x) = \int\limits_E \varphi(y) P(t, x, dy),$$

где $P(t, x, B)$ — некоторое распределение, зависящее от t и x, т. е. некоторая переходная функция.

Резольвента. Инфинитезимальный оператор A однозначно определяет соответствующую полугруппу T_t. В частности, для любого элемента $\varphi \in C(E)$ преобразование Лапласа $R_\lambda\varphi$ функции $T_t\varphi$ от t, называемое *резольвентой*:

$$R_\lambda\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t\varphi\, dt, \quad \lambda > 0,$$

принадлежит области определения D_A инфинитезимального оператора A и является единственным решением уравнения

$$\lambda(R_\lambda\varphi) - A(R_\lambda\varphi) = \varphi, \quad \lambda > 0.$$

Потенциал и функция Грина. Оператор

$$G\varphi = \int\limits_0^\infty T_t\varphi\, dt$$

называется потенциалом полугруппы T_t. В отличие от резольвенты R_λ $(\lambda > 0)$ оператор G $(G = R_0)$ является, вообще говоря, неограниченным. Для любой функции $\varphi \in C(E)$ функция $G\varphi$ принадлежит области определения инфинитезимального оператора A и является решением уравнения

$$A[G\varphi] = -\varphi.$$

Формула

$$G(x, B) = \int\limits_0^\infty P(t, x, B)\, dt$$

при каждом $x \in E$ определяет распределение на алгебре всех подмножеств $B \in \mathfrak{B}$, для которых $G(x, B) < \infty$ (величина $G(x, B)$ равна среднему времени пребывания процесса $\xi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$ во множестве B). В случае, когда это распределение продолжается в борелевскую меру, потенциал $G\varphi$ функции $\varphi \in D_G$ есть

$$G\varphi(x) = \int\limits_E \varphi(y) G(x, dy).$$

В случае евклидова пространства при наличии переходной плотности вероятности $p(t, x, y)$ функция

$$g(x, y) = \int\limits_0^\infty p(t, x, y)\, dt,$$

если она существует, называется *функцией Грина*:

$$G(\varphi)x = \int_E \varphi(y)\, g(x, y)\, dy.$$

Сопряженная полугруппа. Обозначим символом T_t^* полугруппу сопряженных к T_t операторов, действующих в пространстве $C^*(E)$ элементов, представляющих собой обобщенные распределения $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(B)$ на фазовом пространстве E. Сопряженная полугруппа T_t^* задается формулой

$$T_t^*\mathrm{Q}(B) = \int_E P(t, x, B)\, \mathrm{Q}(dx),$$

где B — борелевское множество из E.

2. Инфинитезимальные операторы, гармонические и эксцессивные функции. Пусть $\xi(t)$ — непрерывный справа марковский процесс в компактном фазовом пространстве E со счетной базой, переходная функция $P(t, x, B)$ которого стохастически непрерывна и удовлетворяет условию Феллера. Для инфинитезимального оператора A процесса $\xi(t)$ имеет место следующая формула:

$$A\varphi(x) = \lim_{V \to x} \frac{\mathrm{M}_x\varphi[\xi(\tau)] - \varphi(x)}{\mathrm{M}_x\tau},$$

где V означает окрестность точки x, а предельный переход совершается по системе монотонно убывающих окрестностей V, стягивающихся к точке x (т. е. пересечение указанных окрестностей V содержит единственную точку x); $\tau = \tau_V$ — момент выхода процесса $\xi(t)$ из соответствующего множества V.

Пример. Пусть $\xi(t)$ — диффузионный процесс в отрезке $[r_1, r_2]$ с коэффициентами сноса $a(x)$ и диффузии $\sigma(x)$ ($a(x)$ и $b'(x)$ непрерывны, $b(x) = \sigma^2(x)/2 > 0$). Для внутренней точки x выберем интервал $V(x - \Delta x,\ x + \Delta x)$ так, чтобы с точностью до бесконечно малых высших порядков $\mathrm{M}_x\tau \sim \Delta t$. Для этого нужно взять $\Delta x \sim \sigma(x)\sqrt{\Delta t}$. При таком выборе Δt и Δx процесс $\xi(t)$ с вероятностью $p(x) = \frac{1}{2} + \frac{a(x)}{2\sigma(x)}\sqrt{\Delta t}$ выходит из интервала V через точку $x + \Delta x$, а с вероятностью $q(x) = 1 - p(x)$ — через точку $x - \Delta x$. Поэтому

$$A\varphi(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(x + \Delta x)\, p(x) + \varphi(x - \Delta x)\, q(x) - \varphi(x)}{\Delta t},$$

где предел существует и определяет непрерывную в некоторой окрестности x функцию $A\varphi(x)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке x:

$$A\varphi(x) = a(x)\varphi'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\varphi''(x).$$

В граничной точке $x = r$ из условия непрерывности функции $A\varphi(x)$ на всем отрезке $[r_1, r_2]$ имеем

$$A\varphi(r) = \lim_{x\to r} A\varphi(x).$$

При этом для разных границ получаем следующие ограничения на функции $\varphi(x)$ из области определения D_A инфинитезимального оператора A:

$$A\varphi(r) = 0 \text{ в случае поглощения в точке } x = r,$$

$$\varphi'(r) = 0 \text{ в случае отражения в точке } x = r.$$

Общий вид инфинитезимального оператора A регулярного марковского процесса на отрезке $[r_1, r_2]$. Регулярность процесса $\xi(t)$ означает, что для любой внутренней точки x процесс с положительной вероятностью выходит через эту точку как из интервала (r_1, x), так и из интервала (x, r_2).

Пусть $[c, d]$ — какой-либо отрезок фазового пространства, и пусть $u(x, c, d)$ — вероятность того, что, выходя из точки x $(c \leqslant x \leqslant d)$, процесс $\xi(t)$ раньше попадает в точку c, чем в d. Существует такая монотонно возрастающая непрерывная функция $u(x)$ (единственная с точностью до линейного преобразования), что

$$u(x, d, c) = \frac{u(x) - u(c)}{u(d) - u(c)}$$

для любого отрезка $[c, d]$.

Далее, математическое ожидание $M_x\tau_{[c,d]}$ времени выхода из отрезка $[c, d]$ (при начальном положении x) как функция от x выпукла вниз относительно монотонной функции $u(x)$ (т. е. после замены переменной x на $u = u(x)$), а функция $v(x)$, определяемая как

$$v(x) = -dM_x\tau_{[c,d]}/du(x),$$

является монотонно возрастающей (но не обязательно непрерывной). Функция $v(x)$ с точностью до постоянного слагаемого одна и та же для всех отрезков $[c, d]$.

Определим дифференциальные операторы D_u^+ и D_v формулами

$$D_u^+\varphi(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{u(x+h) - u(x)},$$

$$D_v\varphi(x) = \lim_{h_1, h_2\to 0} \frac{\varphi(x+h_1) - \varphi(x-h_1)}{v(x+h_2) - v(x-h_2)}.$$

Оказывается, инфинитезимальный оператор A во всякой внутренней точке x имеет вид

$$A\varphi(x) = D_v D_u^+\varphi(x).$$

В точке поглощения $x=r$ инфинитезимальный оператор имеет вид

$$A\varphi(r)=0.$$

Если обозначить символом Δt математическое ожидание времени выхода процесса $\xi(t)$ из полуинтервала $[r, r+\Delta x)$ при начальном положении $x=r$, то в граничной точке r, не являющейся точкой поглощения, инфинитезимальный оператор задается формулой

$$A\varphi(r)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(r+\Delta x)-\varphi(r)}{\Delta t}.$$

Область определения D_A инфинитезимального оператора состоит из всех функций $\varphi(x)$, непрерывных вместе с функциями $A\varphi(x)$, определенными в каждой точке x с помощью описанного выше локального оператора A. Это требование непрерывности налагает на функции $\varphi(x)\in D_A$ некоторые условия гладкости и граничные условия при $x=r_1, r_2$.

Гармонические функции. Функция $u(x)\in C(E)$ называется *гармонической* для процесса $\xi(t)$, если

$$u(x)=\mathsf{M}_x u[\xi(\tau)]$$

для любого постоянного τ. Указанное равенство будет выполняться для любого *неупреждающего момента* τ.

Пусть $\xi(t)$ — процесс с непрерывными траекториями. Определенная в области G функция $u(x)$ называется *гармонической в* G, если она непрерывна на $\bar{G}$ (включая границу) и $u(x)=\mathsf{M}_x u[\xi(\tau)]$ для всех $x\in G$. Гармоническая в области G функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Au(x)=0,\quad x\in G. \tag{5.2}$$

Если на границе области G задана некоторая непрерывная функция $\varphi(x)$, то формула

$$u(x)=\mathsf{M}_x\varphi[\xi(\tau)]$$

определяет гармоническую в G функцию, совпадающую на границе с $\varphi(x)$, и задает тем самым решение уравнения (5.2) с указанными граничными условиями.

Пример. Пусть процесс $\xi(t)$ представляет собой многомерный диффузионный процесс: $\xi(t)=\{\xi_k(t)\}_{k=1,\dots,n}$, каждая компонента которого является броуновским движением с нулевым математическим ожиданием и единичным коэффициентом диффузии, причем эти компоненты взаимно независимы. Тогда инфинитезимальный оператор A процесса $\xi(t)$ совпадает с оператором Лапласа:

$$A=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

и гармонические функции $u=u(x)$ для процесса $\xi(t)$ совпадают с обычными гармоническими функциями.

Функция $u(x)\in C(E)$ называется *супергармонической* для марковского процесса $\xi(t)$, если

$$u(x)\leqslant \mathsf{M}_x u[\xi(\tau)]$$

для любого постоянного τ. Указанное неравенство выполняется и для любого *марковского момента* τ. Положительная супергармоническая функция называется *эксцессивной*.

§ 6. Управляемые марковские процессы

1. Управляемые марковские последовательности. Предположим, что изменение положения некоторой системы с течением времени t (t пробегает целые значения) происходит таким образом, что если в момент t система находится в состоянии $\xi(t)=x$, то в следующий момент $t+1$ она перейдет в состояние y (независимо от поведения до момента времени t) с вероятностью $P(t, x, y, d)$, зависящей от некоторого параметра d, который может быть выбран наблюдателем. Решение наблюдателя выбрать тот или иной параметр d основывается, вообще говоря, на наблюдении всего поведения системы до текущего момента t, так что *решение* d есть функция от $\xi^{[t_0,t]}$ — отрезка наблюдаемого процесса в промежутке от t_0 до t.

Пусть $W(t, x)$ — некоторая функция двух переменных t и x, представляющая собой выигрыш от «эксплуатации» рассматриваемой системы за единицу времени от t до $t+1$ при условии, что в момент t система находится в состоянии $\xi(t)=x$. Пусть τ — некоторый не зависящий от будущего момент времени (не исключается и $\tau=\infty$), до которого система подвергается эксплуатации; удобно считать, что рассматриваемый процесс $\xi(t)$ обрывается после момента τ. Тогда средний суммарный выигрыш определяется выражением

$$V=\mathsf{M}\sum_{t_0}^{\tau} W[t, \xi(t)].$$

Математическое ожидание $\mathsf{M}\sum_{t_0}^{\tau} W[t, \xi(t)]$ зависит от решений $d=d\left(t, \xi^{[t_0,t]}\right)$, принимаемых наблюдателем на каждом шаге t, и в итоге зависит от принятой *стратегии* $d^{[t_0,\infty]}$ — функции двух «переменных» t и $\xi^{[t_0,t]}$ ($t\geqslant t_0$). (Принятие наблюдателем стратегии $d^{[t_0,\infty]}$ означает, что в момент t принимается решение $d\left(t, \xi^{[t_0,t]}\right)$, если поведение системы до этого момента описывается траекторией $\xi^{[t_0,t]}$.) Таким образом,

$$V = V\left(d^{[t_0,\infty]}\right).$$

Величина

$$V^* = \sup_{d^{[t_0,\infty]}} V\left(d^{[t_0,\infty]}\right)$$

называется *ценой* — ценой «предприятия по эксплуатации» рассматриваемой системы. Стратегия $d^{[t_0,\infty]}$ называется *оптимальной*, если

$$V\left(d^{[t_0,\infty]}\right) = V^*,$$

и ε-*оптимальной*, если

$$V\left(d^{[t_0,\infty]}\right) \geqslant V^* - \varepsilon.$$

Марковские стратегии. Стратегия $d^{[t_0,\infty]}$ называется *марковской*, если соответствующие решения $d\left(t, \xi^{[t_0,t]}\right)$ в каждый момент времени t принимаются лишь в зависимости от t и состояния $x = \xi(t)$, каково бы ни было поведение системы до момента времени t: $d\left(t, \xi^{[t_0,t]}\right) = d[t, \xi(t)]$. Какова бы ни была стратегия $d^{[t_0,\infty]}$, существует марковская стратегия $\tilde{d}^{[t_0,\infty]}$, обеспечивающая тот же средний выигрыш:

$$V\left(d^{[t_0,\infty]}\right) = V\left(\tilde{d}^{[t_0,\infty]}\right).$$

Уравнение Беллмана *). В дальнейшем рассматриваются лишь марковские стратегии. Обозначим символом $V(t, x, d^{[t,\infty]})$ средний выигрыш от эксплуатации системы за промежуток времени от момента t при условии, что $\xi(t) = x$:

$$V\left(t, x, d^{[t_0,\infty]}\right) = \mathsf{M}\left\{\sum_{s=t}^{\tau} W[s, \xi(s)] \mid \xi(t) = x\right\}.$$

Этот выигрыш определяется марковской стратегией $d^{[t_0,\infty]}$ лишь в рассматриваемый промежуток времени $[t, \infty]$:

$$V\left(t, x, d^{[t_0,\infty]}\right) = V\left(t, x, d^{[t,\infty]}\right).$$

При этом

$$V\left(t, x, d^{[t,\infty]}\right) = \sum_y P(t, x, y, d)\, V\left(t+1, y, d^{[t+1,\infty]}\right).$$

Соответствующая цена

$$V(t, x) = \sup_{d^{[t,\infty]}} V\left(t, x, d^{[t,\infty]}\right)$$

*) С направлением, основанным на уравнении Беллмана, можно подробнее познакомиться, например, по книге [105].

удовлетворяет функциональному *уравнению Беллмана*:

$$V(t, x) = W(t, x) + \sup_d \sum_y P(t, x, y, d) V(t+1, y).$$

При начальном положении (t_0, x_0) стратегия $d^{[t_0, \infty]}$ оптимальна тогда и только тогда, когда она оптимальна в любом промежутке времени $[t, \infty]$ при любых исходных положениях (t, x), достижимых из (t_0, x_0).

Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует ε-оптимальная стратегия $d^{[t,\infty]}$ в промежутке времени $[t, \infty]$, т. е. при любом x

$$V(t, x, d^{[t,\infty]}) \geqslant V(t, x) - \varepsilon$$

(исходный момент t может зависеть от ε), то для каждого $\varepsilon > 0$ существует ε-оптимальная стратегия на всем промежутке $[t_0, \infty]$. Если при некотором t существует оптимальная стратегия $d^{[t,\infty]}$, причем верхняя грань (sup) в уравнении Беллмана достигается в некоторой точке $d = d(t, x)$, то существует оптимальная стратегия $d^{[t_0, \infty]}$ на всем промежутке $[t_0, \infty]$. После момента t она совпадает с исходной оптимальной стратегией, а при каждом $s \leqslant t$ соответствующие оптимальные решения $d(s, x)$ определяются последовательно одно за другим вместе с ценой $V(s, x)$: $d(s, x)$ есть точка максимума выражения

$$\sum_y P(s, x, y, d) V(s+1, y).$$

В частности, если *момент обрыва* $\tau = t$ не является случайным и конечен, то любая стратегия $d^{[t,\infty]}$ будет оптимальной; соответствующая цена есть

$$V(t, x) \equiv W(t, x),$$

и оптимальная стратегия в промежутке времени $[t_0, t]$ может быть найдена описанным выше способом.

Пример. *Задача о наилучшем выборе.* Предположим, что имеется n предметов разного качества, из которых нужно выбрать по возможности наилучший. Сравнивая один предмет с другим, всегда можно сказать, который из них лучше, но процесс выбора осложняется тем обстоятельством, что, обследуя поочередно указанные предметы, нельзя возвращаться к отвергнутым ранее. (Можно представить себе, например, разборчивую невесту, которая выбирает себе жениха из n претендентов; отвергнутый жених в дальнейшем не возвращается, а процесс выбора заканчивается, как только невеста принимает предложение какого-либо очередного претендента на ее руку.)

Предполагается, что предметы обследуются наугад, так что в зависимости от случая и удачи при любом правиле выбора можно остановиться и на самом лучшем, и на самом худшем предмете. Если уже обследованы и отвергнуты k первых предметов, то следующий предмет можно сравнить со всеми предшествующими и на основе этого решить, остановиться ли на этом предмете или отвергнуть его и продолжать осмотр.

Ограничимся процедурами осмотра следующего типа. Пусть $\xi(0)=1$ — первый попадающий на осмотр предмет. Он либо принимается, либо отвергается. Если он отвергается, то автоматически отвергаются и все последующие предметы, которые хуже, чем $\xi(0)$, и следующее решение принимается лишь при появлении предмета лучшего, чем $\xi(0)$. Пусть $\xi(1)$ — порядковый номер этого предмета в процессе осмотра. Предмет с номером $\xi(1)$ принимается с некоторой вероятностью или отвергается; если он отвергается, то автоматически отвергаются и все последующие предметы, которые хуже, чем $\xi(1)$, а следующее решение принимается лишь при появлении предмета $\xi(2)$, лучшего, чем $\xi(1)$, и т. д.

Если выбор останавливается на k-м по счету предмете, то вероятность $W(k)$ того, что выбранный предмет является наилучшим из всех, равна k/n (где n — известное заранее число всех предметов). Если очередной наилучший предмет появляется после осмотра k предметов, т. е. $\xi(t)=k$, то при решении остановиться на нем дальнейший процесс выбора обрывается; если же в зависимости от $\xi(0), \ldots, \xi(t-1)$ принимается решение продолжать смотр, то вероятность того, что следующий наилучший предмет будет j-м по счету (т. е. $\xi(t)=j$), есть $\frac{k}{(j-1)j}$:

$$p(k, j, d)=\begin{cases} 0, & \text{если } d = (\text{принять } k\text{-й предмет}), \\ \dfrac{k}{(j-1)j}, & \text{если } d = (\text{продолжать осмотр}). \end{cases}$$

Средний выигрыш при выбранной стратегии $d^{[0,\infty]}$ есть

$$V(d^{[0,\infty]})=\mathsf{M}W[\xi(\tau)],$$

где $\xi(\tau)$ — порядковый номер принимаемого предмета. Момент обрыва τ не превосходит n, так что существует оптимальная стратегия, при которой средний выигрыш равен цене:

$$V=\max_{d^{[0,\infty]}} V\left(d^{[0,\infty]}\right).$$

Обозначим символом $V(k)$ цену при условии, что были отвергнуты первые $k-1$ предметов, а очередной k-й предмет оказался наилучшим из всех предшествующих. Если этот предмет является последним: $k=n$, то по условию он является наилучшим и, естественно, принимается:

$$V(n)=W(n)=1.$$

Пусть m_n — такое число, что при появлении наилучшего предмета с очередным номером $\xi(t)\geqslant m_n$ этот предмет обязательно принимается и процесс выбора заканчивается (такое число $m_n \leqslant n$, очевидно, существует). Тогда цена $V(k)$ при $k \geqslant m_n$ есть

$$V(k) = W(k) = k/n.$$

Уравнение Беллмана позволяет определить число m_n. Именно, для $k \geqslant m_n$

$$V(k) = \max\left\{W(k),\ \sum_{j=k+1}^{n} p(k, j)\, V(j)\right\},$$

где $p(k, j) = \frac{k}{(j-1)\, j}$, $j > k$, и m_n есть наименьшее целое число k, для которого

$$\sum_{j=k+1}^{n} p(k, j)\, V(j) = \frac{k}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) \leqslant W(k) = \frac{k}{n},$$

т. е. $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} \leqslant 1$.

Если выбирать предмет с порядковым номером $k < m_n$, то средний выигрыш окажется меньше, чем если этот предмет отвергнуть и дальше выбирать по оптимальной стратегии. Таким образом, оптимальная стратегия выбора наилучшего предмета заключается в том, что сначала обследуются первые $m_n - 1$ предметов, а затем принимается первый предмет, который лучше всех предшествующих. При больших n число m_n приблизительно равно $n/3$, точнее, $\lim\limits_{n\to\infty} (m_n/n) = 1/e$, $e = 2{,}718\ldots$

Оптимальная остановка марковского процесса *). На каждом шаге t принимается одно из двух альтернативных решений: остановить процесс ($\tau = t$) или не делать этого. Случайный момент остановки τ является марковским. Цена определяется формулой

$$V = \sup_{\tau} \mathsf{M} W\,[\xi(\tau)].$$

Если функция выигрыша $W(x)$ является эксцессивной, то при любом исходном положении x

$$\mathsf{M}_x W[\xi(\tau)] \leqslant W(x),$$

так что процесс нужно останавливать немедленно. В общем случае нужно рассмотреть *эксцессивную мажоранту* функции $W(x)$, т. е. такую эксцессивную функцию $U(x)$, что при всех x

$$U(x) \geqslant W(x)$$

и $U(x)$ является наименьшей эксцессивной функцией, мажорирующей $W(x)$. Она может быть определена последовательными

---

*) Задачи оптимальной остановки подробно рассматриваются, например, в книге [110].

приближениями как предел

$$U(x)=\lim_{n\to\infty} T^n W(x),\quad TW(x)=\max\{W(x),\ \mathsf{M}_x W[\xi(1)]\}.$$

Пусть $U(x)$ — эксцессивная мажоранта для функции $W(x)$; остановка процесса в момент τ первого достижения множества $\Gamma_\varepsilon=\{x\colon W(x)\geqslant U(x)-\varepsilon\}$ является ε-оптимальной стратегией. В случае, когда фазовое пространство состоит из конечного числа точек x, существует оптимальная стратегия, заключающаяся в том, что процесс останавливается, как только функция $W[\xi(t)]$ станет равной $U[\xi(t)]$, т. е. при достижении множества $\Gamma_0=\{x\colon W(x)=U(x)\}$. Точка x_0 принадлежит Γ_0 тогда и только тогда, когда существует некоторая эксцессивная функция $U(x_0, x)$, мажорирующая $W(x)$ и совпадающая в точке x_0 с функцией выигрыша $W(x_0)$ (такая функция $U(x_0, x)$ называется *барьером* [31]).

Пример. В рассмотренной выше задаче о наилучшем выборе соответствующее множество Γ_0 состоит из точек m_n, $m_{n+1}, \ldots, n$ и может быть найдено путем отыскания соответствующих барьеров $U(x_0, x)$ (ими являются функции $U(k, x)=\min\left(\frac{k}{n}, \frac{x}{n}\right)$, $k\geqslant m_n$).

2. Управление по неполным данным. Предположим, что состояние $\xi(t)$ рассматриваемой системы по каким-либо причинам наблюдается лишь частично. Именно, состояние $\xi(t)=\{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ описывается двумя компонентами $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, из которых наблюдается лишь $\xi_2(t)$. Пусть для определенности возможными значениями ненаблюдаемой компоненты $\xi_1(t)$ являются целые числа 0, 1, 2, ... и $P_{kj}(t, d)$ есть вероятность того, что процесс $\xi_1(t)$ из состояния k перейдет в состояние j, если в момент t наблюдатель принимает *решение* d. Это решение $d=d\left(t, \xi_2^{[t_0,t]}\right)$ принимается по наблюдаемым значениям второй компоненты ξ_2 до текущего момента t.

Пусть поведение процесса $\xi_2(t)$ таково, что при условии $\xi_1(t)=k$ и $\xi_2(t)=x$ вероятность перейти в состояние y есть $P_k(t, x, y, d)$, причем соответствующий переход совершается независимо от поведения процесса до момента t. Состояние ненаблюдаемой компоненты характеризуется апостериорными вероятностями

$$\pi_j(t)=\sum_k \pi_k^0 \mathsf{P}\left\{\xi_1(t)=j \mid \xi_1(t_0)=k,\ \xi_2^{[t_0,t]}\right\},\quad j=0, 1, \ldots,$$

где π_k^0 $(k=0, 1, \ldots)$ — распределение начальной величины $\xi_1(t_0)$. Функция выигрыша $W[t, \xi(t)]$ зависит как от наблюдаемой компоненты $\xi_2(t)$, так и от ненаблюдаемой компоненты $\xi_1(t)$; положим

$$W(t, \{k, x\})=W_k(t, x).$$

Стратегия $d^{[t_0,\infty]}$ называется *марковской*, если в каждый момент времени t принимаемое решение $d = d\left(t, \xi_2^{[t_0,t]}\right)$ зависит лишь от состояния $\xi_2(t)$ наблюдаемого процесса и апостериорного распределения $\pi(t) = \{\pi_1(t), \pi_2(t), \ldots\}$:

$$d = d[t, \pi(t), \xi_2(t)].$$

Для любой стратегии $d^{[t_0,\infty]}$ существует марковская стратегия $\tilde{d}^{[t_0,\infty]}$, обеспечивающая тот же средний выигрыш:

$$V\left(d^{[t_0,\infty]}\right) = V\left(\tilde{d}^{[t_0,\infty]}\right).$$

Уравнение Беллмана. Эволюция апостериорных вероятностей $\pi_1(t), \pi_2(t), \ldots$ может быть описана следующим образом:

$$\pi_k(t+1) = \frac{\sum\limits_j \pi_j(t) P_j\{t, \xi_2(t), \xi_2(t+1), d\} P_{jk}(t, d)}{\sum\limits_j \pi_j(t) P_j\{t, \xi_2(t), \xi_2(t+1), d\}}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Обозначим символом $V\left(t, \pi, x, d^{[t_0,\infty]}\right)$ средний выигрыш от эксплуатации системы в промежутке времени от момента t при условии, что $\pi(t) = \pi$ и $\xi_2(t) = x$:

$$V\left(t, \pi, x, d^{[t_0,\infty]}\right) = \mathsf{M}_{t\pi x} \sum_{s=t}^{\tau} W[s, \xi(s)].$$

Этот выигрыш определяется марковской стратегией $d^{[t_0,t]}$ лишь в рассматриваемом промежутке времени $[t, \infty]$:

$$V\left(t, \pi, x, d^{[t_0,\infty]}\right) = V\left(t, \pi, x, d^{[t,\infty]}\right);$$

при этом

$$V\left(t, \pi, x, d^{[t,\infty]}\right) = \\ = \sum_k \pi_k W_k(t, x) + \sum_k \pi_k \sum_y P_k(t, x, y, d) V\left(t+1, \pi^*, y, d^{[t+1,\infty]}\right),$$

где

$$\pi^* = \pi_k(t+1) = \frac{\sum\limits_j \pi_j P_j(t, x, y, d) P_{jk}(t, d)}{\sum\limits_j \pi_j P_j(t, x, y, d)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Соответствующая цена

$$V(t, \pi, x) = \sup_{d^{[t,\infty]}} V\left(t, \pi, x, d^{[t,\infty]}\right)$$

удовлетворяет *уравнению Беллмана:*

$$V(t, \pi, x) = \\ = \sum_k \pi_k W_k(t, x) + \sup_d \sum_k \pi_k \sum_y P_k(t, x, y, d) V(t+1, \pi^*, y).$$

Так же как и в случае управления системой $\xi(t)$ по непосредственным наблюдениям ее поведения, в рассматриваемом случае управления по наблюдениям над процессом $\xi_2(t)$ оптимальные и ε-оптимальные марковские стратегии на всем промежутке времени $[t_0, \infty]$ могут быть построены из оптимальных или ε-оптимальных стратегий $d^{[t, \infty]}$ на промежутке $[t, \infty]$. Именно, если $d^{[s+1, \infty]}$ $(s<t)$ — оптимальная стратегия и $V(s+1, \pi^*, y)$ — соответствующая цена для любого распределения π^* и положения y, то оптимальное решение $d=d(s, \pi, x)$ на шаге s есть точка максимума выражения

$$\sum_k \pi_k \sum_y P_k(s, x, y, d) V(s+1, \pi^*, y).$$

В случае, когда *момент обрыва* τ есть постоянная $(\tau = T < \infty)$, все стратегии $d^{[t, \infty]}$ после момента T являются оптимальными. Соответствующая цена $V(t, \pi, x)$ есть

$$V(t, \pi, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > T, \\ \sum\limits_k \pi_k W_k(t, x) & \text{при } t = T. \end{cases}$$

Пример. *Задача о двух типах оружия.* Предположим, что имеется некоторая цель, на поражение которой дано n снарядов, причем имеется два орудия (с номерами 0 и 1), одно из которых лучше другого; точнее, вероятность попадания для одного из них есть P, а для другого p $(p<P)$, и неизвестно, какое именно орудие лучше. Обозначим ξ_1 неизвестное качество орудия с номером 1. Условно считается, что ξ_1 — случайная величина, принимающая одно из двух значений, скажем 0, если вероятность попадания есть p, и 1, если вероятность попадания есть P.

Исход $\xi_2(t)$ очередного выстрела с номером t является случайным; с соответствующей вероятностью $1-p$ или $1-P$ $\xi_2(t) = 0$ (промах), а с вероятностью p или P $\xi_2(t)=1$ (попадание). За результатами стрельбы ведется наблюдение, так что к моменту выстрела с номером t известны результаты всех предшествующих выстрелов $\xi_2(1), \ldots, \xi_2(t-1)$, т. е. случайная последовательность $\xi_2(t)$ является наблюдаемой. Вероятность попадания на каждом шаге зависит от выбираемого орудия d и от его качества (от состояния ξ_1). Положим

$$P_k(x, d) = \mathsf{P}\{\xi_2(t) = x \mid \xi_1 = k\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &P_0(0, 0) = 1-P, && P_0(0, 1) = 1-p, \\ &P_0(1, 0) = P, && P_0(1, 1) = p, \\ &P_1(0, 0) = 1-p, && P_1(0, 1) = 1-P, \\ &P_1(1, 0) = p, && P_1(1, 1) = P. \end{aligned}$$

Нужно так выбирать орудие d на каждом шаге (основываясь при этом на результатах наблюдения за стрельбой), чтобы среднее число попаданий было максимальным. Такая стратегия является оптимальной по отношению к функции выигрыша $W(x)$ вида

$$W(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x=0 \text{ (промах)},\\ 1 \text{ при } x=1 \text{ (попадание)}.\end{cases}$$

Пусть $\pi=\{\pi_0, \pi_1\}$ — апостериорные вероятности того, что орудие с номером 1 имеет соответствующее качество 0 или 1, $V(t, \pi, x)$ — цена стрельбы в промежутке от t до n выстрелов при условии, что выстрел с номером t дал результат x. Очевидно,

$$V(n, \pi, x)=W(x),$$
$$V(n-1, \pi, x)=W(x)+\max_d\{\pi_0 P_0(1, d)+\pi_1 P_1(1, d)\},$$

так что оптимальное решение при последнем оставшемся снаряде заключается в том, чтобы стрелять из орудия, которое с наибольшей апостериорной вероятностью имеет лучшее качество: $d=0$, если $\pi_0 \geqslant \pi_1$, и $d=1$, если $\pi_0 \leqslant \pi_1$.

Уравнение Беллмана

$$V(t, \pi, x)=W(x)+\max_d\left\{\sum_{k=0}^{1} \pi_k P_k(y, d)\, V(t+1, \pi^*, y)\right\}$$

позволяет последовательно найти оптимальное решение на каждом шаге t. Именно, всегда нужно выбирать то орудие, которое с наибольшей апостериорной вероятностью имеет лучшее качество: $d(t, \pi)=0$ при $\pi_0(t) \geqslant \pi_1(t)$ и $d(t, \pi)=1$ при $\pi_0(t) \leqslant \pi_1(t)$.

3. Управляемые диффузионные процессы. Пусть $\xi=\xi(t)$ — марковский диффузионный процесс, управляемый стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$d\xi(t)=a[t, \xi(t), u]\,dt+\sigma[t, \xi(t), u]\,d\eta(t), \quad t>t_0,$$

где коэффициенты сноса $a(t, x, u)$ и диффузии $\sigma(t, x, u)$ зависят от управляющего параметра $u=u(t, \cdot)$, скажем, принимающего числовые или векторные значения. Управление $u^{[t_0, \infty]}$ называется *марковским*, если при каждом t соответствующий управляющий параметр $u(t, \cdot)$ зависит лишь от t и наблюдаемого состояния $x=\xi(t)$:

$$u(t, \cdot)=u(t, x).$$

При определенных ограничениях на управляющую функцию $u=u(t, x)$ от двух переменных t, x и на коэффициенты $a(t, x, u)$, $b(t, x, u)$ решение указанного стохастического дифференциального уравнения существует и единственно.

Пусть средний выигрыш от эксплуатации системы, состояние которой в момент t есть $\xi(t)$, задается как

$$V\left(u^{[t_0,\infty]}\right) = \mathsf{M}\left\{\int_{t_0}^{\tau} W[t, \xi(t)]\,dt + W_0[\tau, \xi(\tau)]\right\},$$

где $W(t, x)$ и $W_0(t, x)$ — некоторые функции выигрыша, τ — определенный марковский случайный момент. (Удобно считать, что после τ процесс обрывается.)

Цена «предприятия по эксплуатации системы ξ» после момента времени t определяется как

$$V(t, x) = \sup \mathsf{M}_{tx}\left\{\int_{t}^{\tau} W[s, \xi(s)]\,ds + W_0[\tau, \xi(\tau)]\right\}.$$

Управление $u^{[t,\infty]}$ называется *оптимальным после* t, если соответствующий выигрыш

$$V(t, x, u^{[t,\infty]}) = \mathsf{M}_{tx}\left\{\int_{t}^{\tau} W[s, \xi(s)]\,ds + W_0[\tau, \xi(\tau)]\right\}$$

равен цене $V(t, x)$. Управление $u^{[t_0,\infty]}$ после момента t_0 является оптимальным тогда и только тогда, когда для всякого $t \geqslant t_0$ соответствующее управление $u^{[t,\infty]}$ оптимально (с теми же управляющими параметрами $u[s, \xi(s)]$, что и у исходного управления $u^{[t_0,\infty]}$).

Предположим, что имеется оптимальное управление $u^{[T,\infty]}$ после некоторого момента $T \leqslant \tau$. Дискретной моделью диффузионного процесса $\xi(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$ является управляемое случайное блуждание, при котором частица за каждый шаг длительности Δt из соответствующей точки x переходит с вероятностью $p(t, x, u) = \frac{1}{2} + \frac{a(t, x, u)}{2\sigma(t, x, u)}\sqrt{\Delta t}$ в смежную точку $x + \Delta x$, а с вероятностью $q(t, x, u) = 1 - p(t, x, u)$ — в точку $x - \Delta x$, где $\Delta x = \sigma(t, x, u)\sqrt{\Delta t}$; вероятности перехода p и q зависят, кроме всего прочего, и от управляющего параметра u. Для такой дискретной модели средний выигрыш нужно определить как

$$V^*(t, x, u^{[t,T]}) = \mathsf{M}_{tx}\left\{\sum_{t}^{T-1} W[s, \xi(s)]\,\Delta t + V[T, \xi(T)]\right\}.$$

Цена от эксплуатации дискретной модели в промежутке времени от t до T удовлетворяет уравнению Беллмана:

$$V^*(t, x) = W(t, x)\,\Delta t + \sup_u [p(t, x, u)\,V(t + \Delta t, x + \Delta x) + q(t, x, u)\,V(t + \Delta t, x - \Delta x)], \quad V^*(T, x) \equiv V(T, x).$$

Когда $\Delta t \to 0$, уравнение Беллмана в пределе запишется как

$$-\frac{\partial V^*}{\partial t} = \sup_u \left[a(t, x, u)\frac{\partial V^*}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x, u)\frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2} \right] + W(t, x),$$

$$V^*(T, x) \equiv V(T, x).$$

Если это уравнение имеет единственное достаточно гладкое решение $V^*(t, x)$, то это решение и будет ценой: $V^*(t, x) \equiv V(t, x)$. Более того, если существует функция $u_0 = u_0(t, x)$, которая допустима в качестве управления рассматриваемой системы и такая, что

$$a[t, x, u_0(t, x)]\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{2}\sigma^2[t, x, u_0(t, x)]\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} =$$

$$= \sup_u \left[a(t, x, u)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x, u)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right],$$

то эта функция и будет давать оптимальное управление [132].

Рекомендуемая литература: [3, 19, 20, 21, 29, 32, 33, 42, 46, 53, 84, 88, 89, 90, 96, 99, 100, 107, 124, 140].

ГЛАВА VI

СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Спектральная теория гармонизуемых процессов

1. Линейные преобразования.

Спектральное представление. Стационарный действительный или комплексный случайный процесс $\xi = \xi(t)$, рассматриваемый как функция параметра t со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ всех действительных или комплексных случайных величин $\eta = \eta(\omega)$, $\mathsf{M}|\eta|^2 < \infty$ (со скалярным произведением $(\eta_1, \eta_2) = \mathsf{M}\eta_1\overline{\eta_2}$), может быть представлен в виде

$$\xi(t) = \int e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda). \tag{1.1}$$

В правой части (1.1) интегрирование ведется в пределах $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$ для дискретного параметра t, пробегающего все целые значения, и в пределах $-\infty < \lambda < \infty$ для непрерывного t, пробегающего все действительные значения; функция $\Phi = \Phi(\Delta)$ — *спектральная стохастическая мера* (обобщенная ортогональная мера с значениями в $L^2(\Omega)$):

$$\mathsf{M}\Phi(\Delta_1)\overline{\Phi(\Delta_2)} = 0$$

для любых непересекающихся Δ_1 и Δ_2, определенных на σ-алгебре измеримых множеств (по отношению к *спектральной мере* $F = F(\Delta)$; см. гл. III § 2, п. 1).

Спектральная мера и ковариационная функция

$$B(t) = \mathsf{M}\xi(s)\overline{\xi(s+t)}$$

связаны между собой соотношением

$$B(t) = \int e^{i\lambda t}F(d\lambda), \quad -\infty < t < \infty,$$

при этом $F(\Delta) = \mathsf{M}|\Phi(\Delta)|^2$.

Пусть $H(T)$ — замкнутая линейная оболочка значений $\xi(t)$ $(t \in T)$ в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$, а L^2_T — гильбертово пространство всех функций $\varphi = \varphi(\lambda)$ со скалярным произведением $(\varphi_1, \varphi_2) = \int \varphi_1(\lambda)\overline{\varphi_2(\lambda)}\,F(d\lambda)$ (замыкание всех функций вида $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda t_k}$ $(t_1, \ldots, t_n \in T)$, где $c_1, \ldots, c_n$ — действительные (или комплексные) коэффициенты).

Всякий элемент $h \in H(T)$ допускает *спектральное представление* вида

$$h = \int \varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda),$$

где $\varphi = \varphi(\lambda)$ — некоторый элемент пространства L_T^2, и для любого $\varphi \in L_T$ стохастический интеграл $h = \int \varphi(\lambda)\Phi(d\lambda)$ определяет некоторый элемент $h \in H(T)$. При этом

$$\mathsf{M}\left[\int \varphi_1(\lambda)\,\Phi(d\lambda)\int \overline{\varphi_2(\lambda)\,\Phi(d\lambda)}\right] = \int \varphi_1(\lambda)\,\overline{\varphi_2(\lambda)}\,F(d\lambda),$$

т. е. пространства $H(T)$ и L_T^2 *изометричны*. Функция $\varphi = \varphi(\lambda)$ называется *спектральной характеристикой* соответствующего элемента $h \in H(T)$.

Формулы обращения. Пусть

$$\varphi_\Delta(\lambda) = \begin{cases} 1 \text{ при } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \\ 1/2 \text{ при } \lambda = \lambda_1 \text{ или } \lambda = \lambda_2, \\ 0 \text{ при } \lambda < \lambda_1 \text{ или } \lambda > \lambda_2. \end{cases}$$

Для любого интервала $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ такого, что $F(\lambda_1) = F(\lambda_2) = 0$, функция $\varphi_\Delta(\lambda)$ как элемент пространства L_T^2 разлагается в ряд

$$\varphi_\Delta(\lambda) = \frac{1}{2\pi}(\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{1}{2\pi}\sum_{i \neq 0} \frac{e^{-i\lambda_2 t} - e^{-i\lambda_1 t}}{-it}\,e^{i\lambda t},$$

когда параметр t меняется дискретно. Если же t меняется непрерывно, то $\varphi_\Delta(\lambda)$ представима в виде интеграла

$$\varphi_\Delta(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda_2 t} - e^{-i\lambda_1 t}}{-it}\,e^{i\lambda t}\,dt.$$

В соответствии с этим величина $\Phi(\Delta) = \int \varphi_\Delta(\lambda)\,\Phi(d\lambda)$ представима в виде

$$\Phi(\Delta) = \frac{1}{2\pi}(\lambda_2 - \lambda_1)\,\xi(0) + \frac{1}{2\pi}\sum_{t \neq 0} \frac{e^{-i\lambda_2 t} - e^{-i\lambda_1 t}}{-it}\,\xi(t)$$

для дискретного t и

$$\Phi(\Delta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda_2 t} - e^{-i\lambda_1 t}}{-it}\,\xi(t)\,dt$$

для непрерывного t.

Тогда определено линейное преобразование со спектральной характеристикой

$$\varphi(\lambda) = i\lambda.$$

Соответствующий стационарный процесс $\eta = \eta(t)$ представляет собой производную исходного процесса $\xi = \xi(t)$:

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda) = \xi'(t)$$

(имеется в виду дифференцирование $\xi = \xi(t)$ как функции со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ — дифференцирование в среднем квадратичном).

Как первообразная от интегрируемой на каждом конечном интервале функции $\xi' = \xi'(t)$ случайный процесс $\xi = \xi(t)$ имеет вид

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \xi'(s)\,ds,$$

где $\xi'(s)$ $(t_0 \leqslant s \leqslant t)$ интегрируется, как функция со значениями в $L^2(\Omega)$ в частности, при каждом фиксированном t указанное равенство выполняется с вероятностью 1). Случайный процесс $\xi' = \xi'(t)$ является стохастически непрерывным, и, не ограничивая общности, его можно считать измеримым; при сепарабельности дифференцируемого в среднем квадратичном случайного процесса $\xi = \xi(t)$ он будет непрерывным с вероятностью 1, и почти все его траектории будут иметь вид

$$\xi(\omega, t) = \xi(\omega, t_0) + \int_{t_0}^{t} \xi'(\omega, s)\,ds.$$

Пример. *Интегрирование.* Пусть $\xi = \xi(t)$ — стационарный процесс, спектральная мера которого удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} F(d\lambda) < \infty.$$

Тогда определено линейное преобразование со спектральной характеристикой

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{i\lambda},$$

задающее дифференцируемый в среднем квадратичном стационарный процесс

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\frac{1}{i\lambda}\Phi(d\lambda)$$

Линейные преобразования. Линейным преобразованием стационарного процесса $\xi=\xi(t)$ называется преобразование вида

$$\eta(t)=\int e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda),$$

где функция $\varphi\in L^2_{(-\infty,\infty)}$ называется *спектральной характеристикой* данного линейного преобразования, задающего определенный выше стационарный в широком смысле процесс $\eta=\eta(t)$ со спектральной мерой

$$G(\Delta)=\int_\Delta|\varphi(\lambda)|^2F(d\lambda).$$

Если исходный стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ имеет спектральную плотность $f=f(\lambda)$, т. е. если его спектральная мера $F=F(\Delta)$ абсолютно непрерывна и $F(\Delta)=\int_\Delta f(\lambda)\,d\lambda$, то соответствующий процесс $\eta=\eta(t)$ имеет спектральную плотность

$$g(\lambda)=|\varphi(\lambda)|^2f(\lambda).$$

Как всякий стационарный в широком смысле процесс, $\eta=\eta(t)$ допускает спектральное представление

$$\eta(t)=\int e^{i\lambda t}\Psi(d\lambda),$$

где стохастическая спектральная мера Ψ связана с соответствующей стохастической спектральной мерой Φ следующим образом:

$$\Psi(\Delta)=\int_\Delta\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda).$$

В свою очередь стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ может быть получен «обратным» линейным преобразованием

$$\xi(t)=\int e^{i\lambda t}\psi(\lambda)\,\Psi(d\lambda)$$

тогда и только тогда, когда спектральная характеристика $\varphi=\varphi(\lambda)$ отлична от нуля для почти всех λ относительно спектральной меры F. Спектральная характеристика $\psi=\psi(\lambda)$ «обратного» линейного преобразования задается формулой

$$\psi(\lambda)=1/\varphi(\lambda).$$

Пример. *Дифференцирование.* Пусть $\xi=\xi(t)$ — стационарный процесс с непрерывным временем t такой, что его спектральная мера F удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2F(d\lambda)<\infty.$$

Тогда определено линейное преобразование со спектральной характеристикой

$$\varphi(\lambda) = i\lambda.$$

Соответствующий стационарный процесс $\eta = \eta(t)$ представляет собой производную исходного процесса $\xi = \xi(t)$:

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda) = \xi'(t)$$

(имеется в виду дифференцирование $\xi = \xi(t)$ как функции со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ — дифференцирование в среднем квадратичном).

Как первообразная от интегрируемой на каждом конечном интервале функции $\xi' = \xi'(t)$ случайный процесс $\xi = \xi(t)$ имеет вид

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \xi'(s)\, ds,$$

где $\xi'(s)$ $(t_0 \leqslant s \leqslant t)$ интегрируется, как функция со значениями в $L^2(\Omega)$ в частности, при каждом фиксированном t указанное равенство выполняется с вероятностью 1). Случайный процесс $\xi' = \xi'(t)$ является стохастически непрерывным, и, не ограничивая общности, его можно считать измеримым; при сепарабельности дифференцируемого в среднем квадратичном случайного процесса $\xi = \xi(t)$ он будет непрерывным с вероятностью 1, и почти все его траектории будут иметь вид

$$\xi(\omega, t) = \xi(\omega, t_0) + \int_{t_0}^{t} \xi'(\omega, s)\, ds.$$

Пример. *Интегрирование*. Пусть $\xi = \xi(t)$ — стационарный процесс, спектральная мера которого удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} F(d\lambda) < \infty.$$

Тогда определено линейное преобразование со спектральной характеристикой

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{i\lambda},$$

задающее дифференцируемый в среднем квадратичном стационарный процесс

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{1}{i\lambda} \Phi(d\lambda)$$

такой, что

$$\eta'(t) = \xi(t).$$

Пример. *Скользящее суммирование.* Пусть $\varphi = \varphi(\lambda)$ — преобразование Фурье некоторой интегрируемой функции $c(t)$:

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} c(t)\, dt.$$

Тогда определено линейное преобразование со спектральной характеристикой $\varphi = \varphi(\lambda)$. Соответствующий стационарный процесс $\eta = \eta(t)$ представляет собой следующее:

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t-s)\, \xi(s)\, ds.$$

Неупреждающие линейные преобразования. Линейное преобразование со спектральной характеристикой $\varphi = \varphi(\lambda)$ называется *неупреждающим*, если φ принадлежит пространству $L^2_{[-\infty,0]}(F)$. Грубо говоря, это означает, что значения процесса $\eta(t) = \int e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda)$ в данный момент времени t формируются по значениям $\xi(s)$ исходного процесса в моменты времени $s \leqslant t$.

Пример. Пусть $c = c(t)$ — некоторая функция, обращающаяся в нуль при отрицательных t: $c(t) = 0$ при $t < 0$, и пусть

$$\sum_{0}^{\infty} |c(t)| < \infty \text{ для дискретного } t,$$

$$\int_{0}^{\infty} |c(t)|\, dt < \infty \text{ для непрерывного } t.$$

Тогда линейное преобразование с соответствующей спектральной характеристикой

$$\varphi(\lambda) = \sum_{0}^{\infty} e^{-i\lambda t} c(t) \text{ в дискретном случае,}$$

$$\varphi(\lambda) = \int_{0}^{\infty} e^{-i\lambda t} c(t)\, dt \text{ в непрерывном случае}$$

будет физически осуществимым. Стационарный процесс

$$\eta(t) = \int e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda)$$

имеет вид

$$\eta(t) = \sum_{-\infty}^{t} c(t-s)\, \xi(s) \text{ для дискретного } t,$$

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} c(t-s)\, \xi(s)\, ds \text{ для непрерывного } t.$$

2. Регулярные стационарные процессы.

Процесс «белого шума». Простейшим по своей структуре стационарным процессом с дискретным временем является процесс $\zeta=\zeta(t)$ *с некоррелированными значениями:*

$$\mathsf{M}\zeta(t)=0, \quad \mathsf{M}|\zeta(t)|^2=1,$$
$$\mathsf{M}\zeta(t_1)\overline{\zeta(t_2)}=0, \quad t_1\neq t_2.$$

В случае непрерывного времени t аналогом такого процесса является так называемый *«белый шум»* — обобщенный стационарный процесс $\zeta=\langle u, \zeta\rangle$ вида

$$\langle u, \zeta\rangle=\int u(t)\,\zeta(dt)$$

(параметр $u=u(t)$ есть бесконечно дифференцируемая функция; см. гл. III, § 2, п. 1), а также п. 6 этого параграфа), где стохастическая мера $\zeta=\zeta(\Delta)$ такова, что

$$\mathsf{M}\zeta(\Delta)=0, \quad \mathsf{M}|\zeta(\Delta)|^2=t-s \text{ при } \Delta=(s, t),$$
$$\mathsf{M}\zeta(\Delta_1)\zeta(\Delta_2)=0$$

для любых непересекающихся Δ_1 и Δ_2.

Регулярность. Стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ $(\mathsf{M}\xi(t)=0)$ называется *линейно регулярным*, если

$$\bigcap_t H(-\infty, t)=0,$$

где $H(s, t)$ — замкнутая линейная оболочка в пространстве $L^2(\Omega)$ значений $\xi(u)$ $(s\leqslant u\leqslant t)$. Стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ со спектральной мерой F является линейно регулярным тогда и только тогда, когда $F=F(\Delta)$ абсолютно непрерывна: $F(\Delta)=\int\limits_\Delta f(\lambda)\,d\lambda$, а спектральная плотность $f=f(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(\lambda)\,d\lambda>-\infty \text{ для дискретного } t,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ln f(\lambda)\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}>-\infty \text{ для непрерывного } t.$$

Стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ линейно регулярен тогда и только тогда, когда он получается некоторым неупреждающим линейным преобразованием из процесса $\zeta=\zeta(t)$ с некоррелированными значениями — в случае дискретного t:

$$\xi(t)=\sum_{-\infty}^{t}c(t-s)\,\zeta(s), \quad \sum_0^{\infty}|c(t)|^2<\infty,$$

и из процесса $\zeta=\langle u, \zeta\rangle$ «белого шума» — в случае непрерывного t:

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{t} c(t-s)\,\zeta(ds),\quad \int_{0}^{\infty}|c(t)|^2\,dt<\infty$$

(ср. гл. III, § 2, п. 1).

Спектральная характеристика $\varphi=\varphi(\lambda)$ указанного линейного преобразования в случае дискретного времени t имеет вид

$$\varphi(\lambda)=\sum_{0}^{\infty} e^{-i\lambda t}c(t)$$

и является граничным значением аналитической в единичном круге $|z|<1$ функция $\gamma(z)=\sum\limits_{0}^{\infty} z^t c(t)$; граничное значение выражается формулой $\varphi(\lambda)=\gamma(e^{-i\lambda})$. В случае непрерывного t спектральная характеристика $\varphi=\varphi(\lambda)$ имеет вид

$$\varphi(\lambda)=\int_{0}^{\infty} e^{-i\lambda t}c(t)\,dt$$

и является граничным значением аналитической в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$ функции $\gamma(z)=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-izt}c(t)\,dt$, причем $\varphi(\lambda)=\gamma(\lambda)$. Спектральная плотность $f(\lambda)$ стационарного процесса $\xi(t)$ имеет вид

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}|\varphi(\lambda)|^2.$$

Соответствующий процесс $\zeta=\zeta(t)$ или соответствующая стохастическая мера $\zeta=\zeta(\Delta)$ с некоррелированными значениями могут быть получены при помощи «обратного преобразования»:

$$\zeta(t)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\varphi^{-1}(\lambda)\,\Phi(d\lambda)\quad \text{для дискретного } t,$$

$$\zeta(\Delta)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{\Delta} e^{i\lambda t}dt\right]\varphi^{-1}(\lambda)\,\Phi(d\lambda)\quad \text{для непрерывного } t.$$

Среди всех функций $\varphi=\varphi(\lambda)$ указанного вида существует единственная (с точностью до постоянного множителя) функция $\varphi_0=\varphi_0(\lambda)$, которая является граничным значением *максимальной аналитической функции* $\gamma_0=\gamma_0(z)$:

$$|\gamma_0(z)|\geqslant|\gamma(z)|$$

для каждой аналитической функции $\gamma(z)$, удовлетворяющей тому же граничному условию $|\gamma(z)|=\frac{1}{2\pi}f(\lambda)$, что и функция $\gamma_0(z)$.

Этой и только этой функции $\varphi_0(\lambda)$ отвечает неупреждающее линейное преобразование, спектральная характеристика $\varphi_0^{-1}(\lambda)$ которого принадлежит классу $L^2_{[-\infty,0]}(F)$. Соответствующие процесс $\zeta=\zeta(t)$ или $\zeta=\langle u, \zeta\rangle$ и стохастическая мера $\zeta=\zeta(\Delta)$ называются *фундаментальными* для стационарного процесса $\xi=\xi(t)$.

Максимальная аналитическая функция $\gamma=\gamma(z)$ может быть следующим образом выражена через спектральную плотность $f=f(\lambda)$ процесса $\xi=\xi(t)$:

$$\gamma(z)=\sqrt{2\pi}\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(\lambda)\frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}\,d\lambda\right\}$$

для дискретного t,

$$\gamma(z)=\sqrt{\pi}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\ln f(\lambda)\frac{1+\lambda z}{z-\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}\right\}$$

для непрерывного t.

Процессы с рациональными спектральными плотностями. Важный класс образуют стационарные процессы с рациональными спектральными плотностями. Пусть

$$f(\lambda)=\sum c_k e^{-i\lambda k}\Big/\sum d_k e^{-i\lambda k}$$

— неотрицательная и интегрируемая на отрезке $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$ рациональная функция от $e^{-i\lambda}$, причем числитель и знаменатель не имеют общих множителей. Лежащие на границе единичного круга нули полинома от $e^{-i\lambda}$, стоящего в числителе, обязательно имеют четную кратность; полином же от $e^{-i\lambda}$, стоящий в знаменателе, не имеет ни одного такого нуля.

Функция $f(\lambda)$ всегда может быть представлена в следующем виде:

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\frac{|P(e^{-i\lambda})|^2}{|Q(e^{-i\lambda})|^2},$$

где полином

$$P(z)=\sum_{k=1}^{m}a_k z^k=a_m(z-p_1)\ldots(z-p_m)$$

имеет нули, лежащие вне единичного круга или на его границе, а полином

$$Q(z)=\sum_{k=1}^{n}b_k z^k=(z-q_1)\ldots(z-q_n)$$

имеет нули, лежащие вне единичного круга.

Функция

$$\gamma(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},\quad |\gamma(e^{-i\lambda})|^2=\frac{1}{2\pi}f(\lambda),$$

является максимальной аналитической в единичном круге $|z|<1$ функцией, и стационарный процесс $\xi(t)$ со спектральной плотностью $f(\lambda)$ (время t меняется дискретно) получается из фундаментального процесса с некоррелированными значениями линейным преобразованием со спектральной характеристикой $\varphi(\lambda)=\gamma(e^{-i\lambda})$. Связь процессов $\xi=\xi(t)$ и $\zeta=\zeta(t)$ может быть выражена следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k\xi(t-k)=\sum_{k=0}^{m} a_k\zeta(t-k).$$

Пусть

$$f(\lambda)=\sum c_k\lambda^k/\sum d_k\lambda^k$$

— неотрицательная и интегрируемая на действительной прямой $-\infty<\lambda<\infty$ рациональная функция от λ, причем числитель и знаменатель не имеют общих множителей. Лежащие на действительной прямой нули полинома, стоящего в числителе, обязательно имеют четную кратность; полином же в знаменателе не имеет ни одного такого нуля. Функция $f(\lambda)$ всегда может быть представлена в следующем виде:

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\frac{|P(\lambda)|^2}{|Q(\lambda)|^2},$$

где полином

$$P(z)=\sum_{k=1}^{m} a_k z^k=a_m(z-p_1)\ldots(z-p_m)$$

имеет нули, лежащие в верхней полуплоскости или на действительной прямой, а полином

$$Q(z)=\sum_{k=1}^{n} b_k z^k=(z-q_1)\ldots(z-q_n)$$

имеет нули, лежащие в верхней полуплоскости.

Функция

$$\gamma(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},\quad |\gamma(\lambda)|^2=\frac{1}{2\pi}f(\lambda),$$

является максимальной аналитической в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$ функцией, и стационарный процесс $\xi(t)$ со спектральной плотностью $f(\lambda)$ (время t меняется непрерывно) получается из фундаментального процесса $\zeta=\langle u,\zeta\rangle$ «белого шума» линейным преобразованием со спектральной характеристикой $\varphi(\lambda)=\gamma(\lambda)$. Связь обобщенных процессов $\xi=\langle u,\xi\rangle$ и $\zeta=\langle u,\zeta\rangle$, может быть выражена следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \xi^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} a_k \zeta^{(k)}.$$

Полная регулярность. Рассмотрим линейно регулярный стационарный процесс $\xi = \xi(t)$ $(\mathsf{M}\xi(t) = 0)$, удовлетворяющий условию *полной линейной регулярности*: при $t - s \to \infty$

$$r(t-s) = \sup \mathsf{M}\, h_1 \bar{h}_2 \to 0,$$

где sup берется по всем $h_1 \in H(-\infty, s)$ и $h_2 \in H(t, \infty)$ $(\mathsf{M}h_1^2 = \mathsf{M}h_2^2 = 1)$.

Остановимся на случае дискретного времени t. Если стационарный процесс $\xi = \xi(t)$ удовлетворяет указанному условию, то его спектральная плотность $f = f(\lambda)$ представима в виде

$$f(\lambda) = |P(\lambda)|^2 g(\lambda),$$

где $P = P(\lambda)$ — тригонометрический полином, а функция $g = g(\lambda)$ не имеет нулей; точнее, при каждом λ_0

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{g(\lambda)}{|\ln|\lambda - \lambda_0||} = \infty.$$

При этом первообразная $G = G(\lambda)$ функции g обладает тем свойством, что при $h \to 0$

$$\omega(h) = \sup_{\mu < h} \sup_{\lambda} \frac{|G(\lambda+\mu) - 2G(\lambda) + G(\lambda - \mu)|}{|G(\lambda+\mu) - G(\lambda)|} \to 0.$$

Если спектральная плотность $f = f(\lambda)$ стационарного процесса $\xi = \xi(t)$ представима в указанном виде, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\omega(2^{-k})]^2 < \infty,$$

то стационарный процесс $\xi = \xi(t)$ удовлетворяет условию полной линейной регулярности. При этом соотношение

$$r(t-s) = O\{(t-s)^{-n-\alpha}\},$$

где n — целое положительное число и $0 < \alpha < 1$, имеет место тогда и только тогда, когда соответствующая функция $g(\lambda)$ имеет n-ю производную $g^{(n)}(\lambda)$, удовлетворяющую условию Гёльдера с показателем α: при $h \to 0$

$$\sup_{\lambda} |g^{(n)}(\lambda + h) - g^{(n)}(\lambda)| = O\{h^{\alpha}\}.$$

Соотношение

$$r(t-s) = O\{e^{-c(t-s)}\}, \quad c > 0,$$

выполняется тогда и только тогда, когда спектральная плотность $f(\lambda)$ аналитически продолжается в полосу $-c < \operatorname{Im}\lambda < c$ комплексной плоскости переменной λ. В частности, этим свойством обладают стационарные процессы с рациональными спектральными плотностями.

В случае непрерывного времени t имеют место аналогичные результаты. В частности, пусть спектральная плотность $f=f(\lambda)$ представима в виде

$$f(\lambda)=|P(\lambda)|^2 g(\lambda),$$

где $P=P(\lambda)$ — аналитическая функция экспоненциального типа:

$$P(\lambda)=\int_{-\tau}^{\tau} a(t)\,e^{i\lambda t}dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|^2\,dt<\infty,$$

а $g=g(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln g(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda<\infty,$$

и функция $\ln g(\lambda)$ имеет n-ю производную, удовлетворяющую условию Гёльдера с показателем α. Тогда

$$r(t-s)=O\{(t-s)^{-n-\alpha}\}.$$

3. Линейное прогнозирование стационарных процессов. *Задача о прогнозе.* Пусть нас интересует значение некоторой величины η ($\mathsf{M}|\eta|^2<\infty$), а известными являются лишь значения стационарного процесса $\xi=\xi(t)$ в моменты времени t из некоторого множества T. Иными словами, нас интересует прогноз величины η по значениям $\xi(t)$ $(t\in T)$.

Прогноз $\hat\eta=\hat\eta[\xi(t),\ t\in T]$ является функционалом от значений $\xi(t)$ $(t\in T)$. В случае, когда величина $\hat\eta$ есть элемент подпространства $H(T)$ — элемент замкнутой линейной оболочки величин $\xi(t)$ $(t\in T)$,— прогноз называется *линейным*. Линейный прогноз $\hat\eta$ называется *наилучшим*, если

$$\varepsilon^2=\mathsf{M}|\eta-\hat\eta|^2=\inf_{h\in H(T)} \mathsf{M}|\eta-h|^2.$$

Геометрически задача о наилучшем линейном прогнозе представляет собой следующее. Имеются некоторый элемент η гильбертова пространства $L^2(\Omega)$ и подпространство $H(T)$. Требуется опустить перпендикуляр на это подпространство из точки η. Основание перпендикуляра и будет наилучшим линейным прогнозом для величины η.

При решении задачи о прогнозе естественно считать известными корреляционные связи величины η с «наблюдаемыми» величинами $\xi(t)$ $(t\in T)$, т. е. функцию $\mathsf{M}[\eta\xi(t)]$ от $t\in T$, а также корреляционную функцию $B=B(t)$ или спектральную меру $F=F(\Delta)$ самого стационарного процесса $\xi=\xi(t)$. По этим данным нужно найти спектральную характеристику $\hat{\varphi}(\lambda)$ величины

$$\hat{\eta} = \int \hat{\varphi}(\lambda)\, \Phi(d\lambda),$$

дающей наилучший линейный прогноз (здесь $\Phi = \Phi(\Delta)$ — спектральная стохастическая мера стационарного процесса $\xi = \xi(t)$).

Основание перпендикуляра, опущенного из точки η на подпространство $H(T)$, однозначно определяется двумя условиями: во-первых, $\hat{\eta} \in H(T)$, и, во-вторых, разность $\eta - \hat{\eta}$ ортогональна всем величинам $\xi(t)$ $(t \in T)$. Это равносильно тому, что спектральная характеристика $\hat{\varphi}(\lambda)$ величины $\hat{\eta}$ принадлежит пространству L_T^2 и удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int e^{-i\lambda t} \hat{\varphi}(\lambda)\, F(d\lambda) = \mathsf{M}[\eta \xi(t)], \quad t \in T.$$

Решение этого уравнения всегда существует и единственно в классе $L_T^2(F)$.

Пример. Пусть множество T конечно. Тогда спектральная характеристика $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\lambda)$ является функцией вида

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \sum_{t \in T} a(t)\, e^{i\lambda t},$$

и интегральное уравнение сводится к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a(t)$ $(t \in T)$:

$$\sum_{s \in T} a(s)\, B(s - t) = \mathsf{M}[\eta \xi(t)], \quad t \in T,$$

где $B = B(t)$ — корреляционная функция процесса $\xi = \xi(t)$.

Линейная экстраполяция. Наиболее важной является задача о прогнозе процесса $\xi = \xi(t)$ в будущее. Скажем, известны все значения $\xi(s)$ до момента t (т. е. $s \leqslant t$) и требуется дать наилучший прогноз неизвестных значений $\xi(t+\tau)$ $(\tau > 0)$. Исходя из такой задачи, естественно выделить класс процессов, для которых возможен безошибочный линейный прогноз: при любом $\tau > 0$

$$\hat{\xi}(t+\tau) = \xi(t+\tau).$$

Такие процессы называются *линейно сингулярными*. Условие синулярности равносильно тому, что при всех t

$$H[-\infty, t] = H[-\infty, \infty].$$

Пример. Сингулярным является всякий процесс с *ограниченным спектром*:

$$\xi(t) = \int_{-W}^{W} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda), \quad W < \infty$$

(время t меняется непрерывно). Такой процесс $\xi(t)$ является аналитическим, так что при любом t

$$\xi(t)=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}\xi^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n.$$

Пример. Сингулярным является всякий стационарный процесс с *дискретным спектром:*

$$\xi(t)=\sum_{\lambda\in\Lambda}e^{i\lambda t}\Phi(\lambda),$$

где суммирование идет по некоторому конечному или счетному множеству Λ точек λ — точек спектра процесса $\xi(t)$. С вероятностью 1 каждая его траектория является почти периодической функцией и по своим значениям на временной полуоси может быть целиком восстановлена.

Для того чтобы стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ со спектральной мерой F был линейно-сингулярным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\ln\frac{F(d\lambda)}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}=-\infty$$

(здесь при $F(d\lambda)/d\lambda=0$ считается, что $\ln[F(d\lambda)/d\lambda]=-\infty$). В частности, сингулярными являются все стационарные процессы, для которых плотность $F(d\lambda)/d\lambda$ обращается в нуль на некотором множестве положительной лебеговой меры.

Всякий стационарный процесс $\xi(t)$ может быть разложен в сумму некоррелированных стационарных процессов — регулярного процесса $\xi_r(t)$ и сингулярного процесса $\xi_s(t)$, каждый из которых может быть получен из $\xi(t)$ физически осуществимым линейным преобразованием:

$$\xi(t)=\xi_r(t)+\xi_s(t),$$
$$\mathsf{M}\xi_r(t_1)\xi_s(t_2)=0 \text{ при всех } t_1 \text{ и } t_2.$$

Если в этом разложении присутствуют обе компоненты $\xi_r=\xi_r(t)$ и $\xi_s=\xi_s(t)$, то спектральная мера $F_r=F_r(\Delta)$ регулярной части есть $F_r(\Delta)=\int\limits_{\Delta}\frac{F(d\lambda)}{d\lambda}d\lambda$, а спектральная мера $F_s=F_s(\Delta)$ совпадает с сингулярной частью меры $F=F(\Delta)$. Более того, если Δ — «носитель» этой синулярной части F_s: $F_s(\Delta)=F_s(-\infty,\infty)$, то при $F_r(\Delta)=0$

$$\xi_r(t)=\int e^{i\lambda t}[1-\varphi_\Delta(\lambda)]\Phi(d\lambda),$$
$$\xi_s(t)=\int e^{i\lambda t}\varphi_\Delta(\lambda)\Phi(d\lambda),$$

где

$$\varphi_\Delta(\lambda)=\begin{cases}1 & \text{при } \lambda\in\Delta,\\ 0 & \text{при } \lambda\notin\Delta.\end{cases}$$

Задача о прогнозе любого стационарного процесса $\xi=\xi(t)$ сводится к задаче о прогнозе его регулярной части $\xi_r=\xi_r(t)$:

$$\hat{\xi}(t+\tau)=\hat{\xi}_r(t+\tau)+\hat{\xi}_s(t+\tau).$$

Общая формула экстраполяции (дискретный случай). Пусть $\xi=\xi(t)$ — линейно регулярный стационарный процесс с дискретным временем, и пусть $\zeta=\zeta(t)$ — отвечающий ему фундаментальный процесс с некоррелированными значениями:

$$\xi(t)=\sum_{-\infty}^{t} c(t-s)\,\zeta(s).$$

Фундаментальный процесс обладает тем свойством, что при любом t замкнутая линейная оболочка значений $\zeta(s)$ $(s\leqslant t)$ совпадает с соответствующей оболочкой $H(-\infty,\ t)$ значений $\xi(s)$ $(s\leqslant t)$, так что наилучший прогноз для $\xi(t+\tau)$ есть

$$\hat{\xi}(t+\tau)=\sum_{-\infty}^{t} c(t+\tau-s)\,\zeta(s),$$

а среднеквадратичная ошибка этого прогноза может быть выражена следующим образом:

$$\varepsilon^2=\mathsf{M}\,|\,\xi(t+\tau)-\hat{\xi}(t+\tau)\,|^2=\sum_{0}^{\tau-1}|\,c(s)\,|^2.$$

Стационарный процесс $\hat{\xi}=\hat{\xi}(t+\tau)$ $(-\infty<t<\infty)$, являющийся наилучшим прогнозом процесса $\xi=\xi(t)$ на τ «шагов» вперед, может быть получен физически осуществимым линейным преобразованием со спектральной характеристикой

$$\hat{\varphi}(\lambda,\tau)=e^{i\lambda\tau}\left[\varphi(\lambda)-\sum_{0}^{\tau-1} c(s)\,e^{-i\lambda s}\right]\varphi^{-1}(\lambda),$$

$$\hat{\xi}(t+\tau)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\hat{\varphi}(\lambda,\tau)\,\Phi(d\lambda),$$

где $\varphi(\lambda)=\gamma(e^{-i\lambda})$ — граничное значение максимальной аналитической в единичном круге функции $\gamma(z)=\sum_{0}^{\infty} c(t)\,z^t$ с граничным условием $|\gamma(e^{-i\lambda})|^2=\frac{1}{2\pi}f(\lambda)$, f — спектральная плотность стационарного процесса $\xi=\xi(t)$, Φ — его спектральная стохастическая мера.

Пример. Пусть стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ имеет корреляционную функцию

$$B(t)=\sigma^2e^{-\alpha|t|},\quad \alpha>0.$$

Его спектральная плотность $f(\lambda)$ есть

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1-\beta^2}{|1-\beta e^{-i\lambda}|^2}, \quad \beta = e^{-\alpha},$$

так что

$$\varphi(\lambda) = \sigma\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{1}{1-\beta e^{-i\lambda}} = \sigma\sqrt{1-\beta^2}\sum_0^\infty \beta^k e^{-i\lambda k},$$

$$\widehat{\varphi}(\lambda, \tau) = e^{i\lambda\tau}\sum_\tau^m \beta^s e^{-i\lambda s}\frac{1}{1-\beta e^{-i\lambda}} = \beta^\tau.$$

Таким образом, наилучший линейный прогноз для $\xi(t+\tau)$ дается формулой

$$\widehat{\xi}(t+\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\widehat{\varphi}(\lambda, \tau)\,\Phi(d\lambda) = \beta^\tau\xi(t).$$

Пример. Пусть стационарный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность вида

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|Q(e^{-i\lambda})|^2},$$

где полином $Q(z) = \sum_0^n b_k z^k$ не имеет нулей внутри единичного круга. Тогда

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{Q(e^{-i\lambda})} = \sum_0^\infty c_k e^{-i\lambda k},$$

$$\widehat{\varphi}(\lambda, \tau) = e^{i\lambda\tau}\left[1 - Q(e^{-i\lambda})\sum_0^{\tau-1} c_k e^{-i\lambda k}\right] = \sum_0^{n-1} a_{k+\tau}e^{-i\lambda k},$$

$$a_m = \sum_{\substack{k+r=m\\ k\leqslant\tau-1}} c_k b_r.$$

Таким образом, наилучший линейный прогноз дается формулой

$$\widehat{\xi}(t+\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\widehat{\varphi}(\lambda, \tau)\,\Phi(d\lambda) = \sum_0^{n-1} a_{k+\tau}\xi(t-k).$$

В случае стационарного процесса со спектральной плотностью, рациональной относительно $e^{-i\lambda}$, спектральная характеристика $\widehat{\varphi}(\lambda, \tau)$ наилучшего прогноза на τ шагов вперед является также рациональной функцией от $e^{-i\lambda}$.

Общая формула экстраполяции (непрерывный случай). Пусть $\xi = \xi(t)$ — линейно регулярный стационарный процесс с непрерывным временем и $\zeta = \zeta(\Delta)$ — отвечающая ему фундаментальная стохастическая мера:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} c(t-s)\,\zeta(ds).$$

Фундаментальная стохастическая мера обладает тем свойством, что при любом t замкнутая линейная оболочка значений $\zeta(\Delta)$ для интервалов $\Delta \subseteq (-\infty, t]$ совпадает с замкнутой линейной оболочкой $H(-\infty, t)$ значений $\xi(s)$ $(s \leqslant t)$, так что наилучший прогноз для $\xi(t+\tau)$ есть

$$\hat{\xi}(t+\tau) = \int_{-\infty}^{t} c(t+\tau-s)\,\zeta(ds),$$

а «среднеквадратичная ошибка» этого прогноза может быть выражена следующим образом:

$$\varepsilon^2 = \mathsf{M}\,|\xi(t+\tau) - \hat{\xi}(t+\tau)|^2 = \int_0^{\tau} |c(s)|^2\,ds.$$

При фиксированном τ наилучший линейный прогноз $\hat{\xi} = \hat{\xi}(t+\tau)$ стационарного процесса $\xi = \xi(t)$ является стационарным процессом, который может быть получен физически осуществимым линейным преобразованием со спектральной характеристикой

$$\hat{\varphi}(\lambda, \tau) = e^{i\lambda\tau}\left[\varphi(\lambda) - \int_0^{\tau} e^{-i\lambda s} c(s)\,ds\right]\varphi^{-1}(\lambda).$$

Такой прогноз выражается формулой

$$\hat{\xi}(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\hat{\varphi}(\lambda, \tau)\,\Phi(d\lambda),$$

где $\varphi(\lambda) = \gamma(\lambda)$ — граничное значение максимальной аналитической в нижней полуплоскости функции $\gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-izt} c(t)\,dt$ с граничным условием $|\gamma(\lambda)|^2 = \frac{1}{2\pi} f(\lambda)$.

Пример. Пусть стационарный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию

$$B(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0.$$

Его спектральная плотность $f(\lambda)$ есть

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{\pi}\,\frac{\alpha^2}{|\alpha + i\lambda|^2},$$

так что

$$\varphi(\lambda) = \sigma\sqrt{2\alpha}\,\frac{1}{\alpha+i\lambda} = \sigma\sqrt{2\alpha}\int_0^\infty e^{-i\lambda t}e^{-\alpha t}dt,$$

$$\hat{\varphi}(\lambda, \tau) = e^{i\lambda\tau}\int_\tau^\infty e^{-i\lambda t}e^{-\alpha t}dt\cdot\frac{1}{\alpha+i\lambda} = e^{-\alpha\tau}.$$

Таким образом, наилучший линейный прогноз для $\xi(t+\tau)$ дается формулой

$$\hat{\xi}(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\hat{\varphi}(\lambda, \tau)\,\Phi(d\lambda) = e^{-\alpha\tau}\xi(t).$$

Формула экстраполяции процессов с рациональными спектральными плотностями (см., например, [117]). В случае стационарного процесса со спектральной плотностью, рациональной относительно λ:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{|P(\lambda)|^2}{|Q(\lambda)|^2},$$

спектральная характеристика $\hat{\varphi}(\lambda, \tau)$ наилучшего прогноза на время τ вперед является также рациональной функцией, аналитической в нижней полуплоскости:

$$\hat{\varphi}(\lambda, \tau) = \frac{1}{P(\lambda)}\sum_0^\nu x_k\lambda^k,$$

где степень ν меньше степени n полинома $Q(\lambda)$. Неопределенные коэффициенты x_k могут быть найдены из условия аналитичности в верхней полуплоскости функции

$$\varphi(\lambda, \tau) = \frac{1}{P(\lambda)}\left(e^{i\lambda\tau}P(\lambda) - \sum_0^\nu x_k\lambda^k\right)f(\lambda).$$

Если q_j — нули полинома $Q(z)$, каждый кратности n_j, то коэффициенты x_k удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}\left[e^{i\lambda\tau}P(\lambda) - \sum_{k=0}^\nu x_k\lambda^k\right]\Bigg|_{\lambda=q_j} = 0,$$

где $m = 0, 1, \ldots, n_j$ и $\Sigma n_j = n$.

Пример. Пусть стационарный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda)$ вида

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|Q(\lambda)|^2},$$

где полином $Q(z)=\sum\limits_0^n b_k z^k$ не имеет нулей в нижней полуплоскости. Тогда спектральная характеристика $\hat{\varphi}(\lambda, \tau)$ есть просто полином

$$\hat{\varphi}(\lambda, \tau)=\sum_0^{\nu} x_k\lambda^k,$$

где коэффициенты x_k определяются из линейной системы уравнений вида

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}\left[e^{i\lambda\tau}-\sum_0^{\nu} x_k\lambda^k\right]\Bigg|_{\lambda=q_j}=0$$

(здесь q_j — корни полинома $Q(z)$ соответствующей кратности n_j; $m=0, \ldots, n_j$; $\Sigma n_j=n$). Таким образом, формула наилучшего прогноза для $\xi(t+\tau)$ имеет вид

$$\hat{\xi}(t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\hat{\varphi}(\lambda, \tau)\,\Phi(d\lambda)=\sum_0^{\nu}(-1)^k x_k\xi^{(k)}(t).$$

Стационарно связанные процессы. Стационарные процессы $\xi=\xi(t)$ и $\eta=\eta(t)$ называются *стационарно связанными*, если их *взаимная корреляционная функция* $B_{\xi\eta}(s, t)=\mathsf{M}\xi(s)\overline{\eta(t)}$ не зависит от начала отсчета времени:

$$B_{\xi\eta}(s, t)=B_{\xi\eta}(s-t).$$

Если $\Phi_\xi=\Phi_\xi(\Delta)$ и $\Phi_\eta=\Phi_\eta(\Delta)$ — случайные спектральные меры стационарно связанных процессов $\xi=\xi(t)$ и $\eta=\eta(t)$, то

$$\mathsf{M}\Phi_\xi(\Delta_1)\overline{\Phi_\eta(\Delta_2)}=0$$

для любых непересекающихся интервалов Δ_1 и Δ_2, и

$$F_{\xi\eta}(\Delta)=\mathsf{M}\Phi_\xi(\Delta)\overline{\Phi_\eta(\Delta)}$$

есть обобщенная ограниченная мера на борелевских множествах Δ, называемая *взаимной спектральной мерой* процессов $\xi=\xi(t)$ и $\eta=\eta(t)$. Она связана со взаимной корреляционной функцией следующим образом:

$$B_{\xi\eta}(t)=\int e^{i\lambda t}F_{\xi\eta}(d\lambda).$$

Если обобщенная мера $F_{\xi\eta}$ абсолютно непрерывна, то производная $f_{\xi\eta}(\lambda)=F_{\xi\eta}(d\lambda)/d\lambda$ называется *взаимной спектральной плотностью* процессов $\xi=\xi(t)$ и $\eta=\eta(t)$.

Линейная фильтрация. Пусть $\xi=\xi(t)$ и $\eta=\eta(t)$ — стационарно связанные процессы, из которых $\xi=\xi(t)$ является «наблюдаемым». Требуется по значениям $\xi(s)$ $(s\leqslant t)$ дать наилучший линейный прогноз $\widehat{\eta}(t+\tau)$ неизвестных значений $\eta(t+\tau)$ (τ здесь может быть как положительным, так и отрицательным). Наилучший линейный прогноз $\widehat{\eta}=\widehat{\eta}(t+\tau)$ $(-\infty<t<\infty)$ является стационарным процессом, который может быть получен неупреждающим линейным преобразованием вида

$$\widehat{\eta}(t+\tau)=\int e^{i\lambda t}\widehat{\varphi}(\lambda, \tau)\,\Phi_{\xi}(d\lambda).$$

Пусть спектральные плотности $f_{\xi\xi}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\frac{|P(\lambda)|^2}{|Q(\lambda)|^2}$ и $f_{\eta\xi}(\lambda)$ рациональны относительно λ. В этом случае спектральная характеристика $\widehat{\varphi}(\lambda, \tau)$ также рациональна относительно λ и может быть представлена в виде

$$\widehat{\varphi}(\lambda, \tau)=\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}\,\frac{\sum\limits_{0}^{\nu} x_k\lambda^k}{(\lambda-r_1)\ldots(\lambda-r_n)},$$

где $r_1, \ldots, r_n$ — полюсы взаимной спектральной плотности $f_{\eta\xi}(\lambda)$, лежащие в верхней полуплоскости, а степень ν полинома в числителе меньше, чем число n указанных полюсов, считаемых столько раз, какова их кратность. Коэффициенты $x_1, \ldots, x_\nu$ могут быть найдены из условий аналитичности функции

$$\psi(\lambda, \tau)=e^{i\lambda\tau}f_{\eta\xi}(\lambda)-\widehat{\varphi}(\lambda, \tau)f_{\xi\xi}(\lambda)$$

в верхней полуплоскости. Условия эти состоят в том, что выражение

$$e^{i\lambda\tau}f_{\eta\xi}(\lambda)\,[(\lambda-r_1)\ldots(\lambda-r_n)]-\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}f_{\xi\xi}(\lambda)\sum_{k=0}^{\nu}x_k\lambda^k$$

должно обращаться в нуль вместе со своими производными до порядка n_j-1 включительно в каждой точке λ $(\operatorname{Im}\lambda>0)$, являющейся полюсом порядка n_j функции $f_{\eta\xi}(\lambda)$.

Пример. Пусть стационарные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ таковы, что

$$f_{\xi\xi}(\lambda)=\frac{a^2(\lambda^2+\alpha^2)}{2\pi(\lambda^2+\beta^2)(\lambda^2+\gamma^2)},\quad f_{\eta\xi}(\lambda)=\frac{b}{\lambda^2+\gamma^2},$$

где α, β, $\gamma>0$. Тогда соответствующие полиномы $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ выражаются формулами

$$P(\lambda)=a(\lambda-i\alpha),\quad Q(\lambda)=(\lambda-i\beta)(\lambda-i\gamma),$$

так что спектральная характеристика $\widehat{\varphi}(\lambda, \tau)$ имеет вид

$$\widehat{\varphi}(\lambda, \tau)=x\frac{\lambda-i\beta}{\lambda-i\alpha},$$

где коэффициент x определяется условием аналитичности функции $\psi(\lambda, \tau)$. Это условие в данном случае выражается равенством

$$e^{-\gamma\tau}\frac{b}{2i\gamma}+\frac{ia(\gamma+\alpha)}{(\gamma+\beta)2\gamma}x=0.$$

Таким образом,

$$\hat{\eta}(t, \tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\left[\frac{b}{a}e^{-\gamma\tau}\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\gamma}\frac{\lambda-i\beta}{\lambda-i\alpha}\right]\Phi_\xi(d\lambda)=$$

$$=\frac{b}{a}e^{-\gamma\tau}\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\gamma}\left[\xi(t)+(\beta-\alpha)\int_0^\infty e^{-\alpha s}\xi(t-s)\,ds\right].$$

Интегральное уравнение задачи линейного прогнозирования. Рассмотрим интегральное уравнение, возникающее в задачах о наилучшем линейном прогнозе:

$$\int e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)F(d\lambda)=A(t),\quad t\in T,$$

где $F=F(\Delta)$ — некоторая ограниченная мера, $A=A(t)$ — некоторая заданная функция на множестве T, $\varphi=\varphi(\lambda)$ — неизвестная функция из пространства L_T^2.

Пусть время t меняется непрерывно и множество T представляет собой интервал $T=(-\tau, 0)$. Будем предполагать, что спектральная плотность $f=f(\lambda)$ рациональна и нигде на действительной оси не обращается в нуль. Такая спектральная плотность может быть представлена в виде

$$f(\lambda)=\frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2},$$

где

$$P(z)=\sum_{k=1}^{m}a_kz^k,\quad Q(z)=\sum_{k=0}^{n}b_kz^k$$

представляют собой полиномы с действительными коэффициентами. Все нули этих полиномов лежат в левой полуплоскости.

Если $\varphi=\varphi(\lambda)$ — искомое решение, то функция

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\frac{1}{|Q(i\lambda)|^2}\,d\lambda,$$

определенная при всех действительных t, является решением дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)P\left(-\frac{d}{dt}\right)x(t)=A(t),\quad -\tau<t<0,$$

причем граничные условия выражаются равенствами

$$Q\left(-\frac{d}{dt}\right)x^{(k)}(-\tau+0)=0, \quad Q\left(\frac{d}{dt}\right)x^{(k)}(-0)=0,$$
$$k=0, 1, \ldots, m-1.$$

При этом

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)Q\left(-\frac{d}{dt}\right)x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\,d\lambda,$$

так что решение $\varphi=\varphi(\lambda)$ является преобразованием Фурье от обобщенной функции $y(t)=Q\left(\frac{d}{dt}\right)Q\left(-\frac{d}{dt}\right)x(t)$ (в качестве «обобщенных компонент» она содержит лишь δ-функции и их производные в концевых точках интервала $(-\tau, 0)$).

Решение $\varphi=\varphi(\lambda)$ может быть выписано в явном виде:

$$\varphi(\lambda)=e^{-i\lambda\tau}\sum_{k=0}^{n-m-1}(c_k'+c_k'')(i\lambda)^k+\int_{-\tau}^{0}e^{i\lambda t}c(t)\,dt,$$

где

$$c(t)=\frac{1}{2\pi}Q\left(\frac{d}{dt}\right)Q\left(-\frac{d}{dt}\right)x(t),$$

$$c_k'=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=m+k+1}^{n}b_j\left[Q\left(-\frac{d}{dt}\right)x^{(j-k-1)}(-\tau+0)\right],$$

$$c_k''=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=m+k+1}^{n}(-1)^j b_j\left[Q\left(\frac{d}{dt}\right)x^{(j-k-1)}(-0)\right].$$

Аналогичный метод применим и в случае дискретного времени t.

4. Физическая интерпретация спектрального представления. Пусть $\xi=\xi(t)$ — действительный стационарный процесс. Спектральное представление (1.1) можно переписать в действительной форме, используя тот факт, что спектральная стохастическая мера $\Phi=\Phi(\Delta)$ действительного стационарного процесса удовлетворяет условию

$$\Phi(-\Delta)=\overline{\Phi(\Delta)},$$

где $-\Delta$ есть множество точек вида $-\lambda$, $\lambda\in\Delta$. Именно,

$$\xi(t)=\int\cos(\lambda t)\,\Phi_1(d\lambda)+\int\sin(\lambda t)\,\Phi_2(d\lambda),$$

где интегрирование ведется в пределах $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$ для дискретного t или в пределах $0\leqslant\lambda<\infty$ для непрерывного t; $\Phi_1=\Phi_1(\Delta)$

и $\Phi_2=\Phi_2(\Delta)$ — действительные стохастические меры такие, что

$$\Phi_1(\Delta)=2\operatorname{Re}\Phi(\Delta),\quad \Phi_2(\Delta)=-2\operatorname{Im}\Phi(\Delta),$$

$$M\Phi_1(\Delta')\Phi_2(\Delta'')=0$$

при любых Δ' и Δ''.

Формула (1.1) дает разложение стационарного процесса в «непрерывную» сумму гармонических колебаний вида $\Phi(d\lambda)e^{i\lambda t}$ с соответствующими частотами λ, амплитудами $|\Phi(d\lambda)|$ и фазами $\arg\Phi(\lambda)$ (амплитуды и фазы являются случайными). Спектральная мера $F=F(\Delta)$ задает распределение суммарной энергии стационарного процесса $\xi=\xi(t)$ по его отдельным составляющим $\Phi(d\lambda)e^{i\lambda t}$: средняя энергия, приходящаяся на гармонические составляющие с частотами λ в интервале Δ, с точностью до постоянного множителя равна соответствующему значению $F(\Delta)$.

Линейные преобразования. Спектральная характеристика $\varphi=\varphi(\lambda)$ линейного преобразования стационарного процесса тесно связана с так называемой передаточной функцией $\psi=\psi(p)$ соответствующего линейного устройства, при помощи которого осуществляется данное преобразование (см., например, [61]). Именно, если на вход линейного устройства с передаточной функцией $\psi=\psi(p)$ подать стационарный процесс $\xi=\xi(t)$, то после установления стационарного режима на выходе будет стационарный процесс $\eta=\eta(t)$ вида $\eta(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\Phi(d\lambda)$, где спектральная характеристика $\varphi(\lambda)$ есть

$$\varphi(\lambda)=\psi(i\lambda).$$

Пример. *Возмущенное движение маятника.* Рассмотрим один пример, на котором можно легко проследить некоторые особенности поведения линейных систем под воздействием случайных колебаний. Именно, рассмотрим движение маятника (при наличии трения) с большим периодом собственных колебаний, которые описываются уравнением

$$x''(t)+2hx'(t)+\omega_0^2x(t)=0$$

и в явном виде задаются функцией

$$x(t)=Ae^{-ht}\sin(\omega t+\theta),\quad \omega=\sqrt{\omega_0^2-h^2}.$$

Передаточная функция такой системы есть

$$\psi(p)=\frac{1}{p^2+2hp+\omega_0^2}$$

(спектральная характеристика есть $\varphi(\lambda)=\psi(i\lambda)$).

Предположим, что эта система находится на корабле. Пусть частота ω собственных колебаний маятника много меньше частоты Ω качки корабля: $\omega\ll\Omega$. Если считать, что в результате качки на маятник воздействуют случайные толчки, возникающие приблизительно через малые промежутки времени $\Delta t \sim \pi/\Omega$, причем это внешнее возмущение $\dot{\eta}(t)$ однородно по времени и формально можно считать $\dot{\eta}(t)$ «белым шумом», то установившееся движение маятника будет представлять собой стационарный процесс со спектральной плотностью вида $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\varphi(\lambda)|^2$. Спектральная плотность характеризует распределение энергии случайного процесса $\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda)$ по составляющим его «элементарным колебаниям» в зависимости от частоты λ, а именно средняя амплитуда случайных колебаний, заданных стохастическим интегралом $\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda)$, равна $\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\, d\lambda$. В нашем случае спектральная плотность есть

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(\lambda^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\lambda^2};$$

она имеет максимум при $\lambda^2 = \omega^2 - h^2$ (резко выраженный для малого «коэффициента трения» h) и довольно быстро убывает при удалении от точки максимума (рис. 26). Это говорит о том, что в случайном процессе $\xi(t)$ резко преобладают «элементарные колебания» с частотами, близкими к собственной частоте ω рассматриваемой системы.

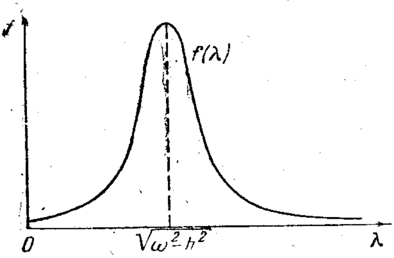


Рис. 26

Для сравнения отметим, что если считать внешнее воздействие (от качки корабля) гаромоническим колебанием частоты Ω, то маятник при установившемся движении будет совершать вынужденные колебания с этой частотой Ω, что качественно отличается от полученного выше результата.

Регулярность. Реально встречающиеся стационарные процессы, как правило, возникают в результате некоторого случайного стационарного возмущения $\zeta = \zeta(t)$ типа «белого шума». Процесс $\zeta = \zeta(t)$ подвергается некоторому неупреждающему линейному преобразованию, часто совершенно скрытому от глаз исследователя, имеющего дело лишь с конечным результатом такого преобразования — стационарным процессом $\xi = \xi(t)$. Спектральная плотность $f = f(\lambda)$ такого процесса в диапазоне спектра ($-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$ для целочисленного времени и $-\infty < \lambda < \infty$ для непрерывного времени t) не может обращаться тождественно в нуль ни на каком интервале: в противном случае стационарный процесс $\xi(t)$ будет *сингулярным*, т. е. может быть целиком восстановлен по значениям лишь на временно́й полуоси $(-\infty,\ t_0)$ до какого-либо момента t_0. Этот факт часто кажется парадоксальным. Широко распространенные в технике и других областях процессы, спектр которых практически сосредоточен в некоторой полосе частот $-W<\lambda<W$, отнюдь не обладают свойствами сингулярных процессов. С энергетической точки зрения указанные процессы действительно имеют ограниченный спектр — настолько мала энергия составляющих эти процессы элементарных гармонических колебаний вида $\Phi(d\lambda)e^{i\lambda t}$ с частотами λ вне интервала $(-W,\ W)$,— но эти колебания существенным образом проявляют себя при рассмотрении вопроса о линейном прогнозе значений $\xi(t+\tau)$ по значениям $\xi(s)$ на временно́й полуоси $s\leqslant t$.

5. Многомерные стационарные процессы.

Спектральное представление. Под многомерным стационарным в широком смысле процессом $\xi=\xi(t)$ понимают совокупность нескольких стационарных и стационарно связанных между собой процессов, скажем $\xi_1(t),\ \ldots,\ \xi_n(t)$; их число n называют размерностью процесса $\xi(t)=\{\xi_1(t),\ \ldots,\ \xi_n(t)\}$.

Матричная функция $B(t)=\{B_{kj}(t)\}$ $(k,\ j=1,\ \ldots,\ n)$, составленная из элементов $B_{kj}(t)$ — соответствующих взаимных корреляционных функций отдельных компонент $\xi_k(t)$ $(k=1,\ \ldots,\ n)$ — называется *корреляционной функцией* многомерного процесса $\xi(t)$; матричная функция $F(\Delta)=\{F_{kj}(\Delta)\}$ $(k,\ j=1,\ \ldots,\ n)$, составленная из элементов $F_{kj}(\Delta)$ — соответствующих (взаимных) спектральных мер отдельных компонент $\xi_k(t)$,— называется *спектральной мерой* многомерного процесса $\xi(t)$. В дальнейшем будем предполагать, что все компоненты многомерного процесса $\xi(t)$ имеют спектральные плотности, так что $\xi=\xi(t)$ также имеет *спектральную плотность* $f(\lambda)$, которой называется матричная функция $f=\{f_{kj}\}$ $(k,\ j=1,\ \ldots,\ n)$, составленная из элементов $f_{kj}(\lambda)=F_{kj}(d\lambda)/d\lambda$.

Обозначим буквой H гильбертово подпространство случайных величин h $(\mathsf{M}|h|^2<\infty)$, являющееся замкнутой линейной оболочкой значений $\xi_k(t)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ -\infty<t<\infty)$. Пусть $L^2(F)$ или просто L^2 — совокупность векторных функций $\varphi=\{\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n\}$ таких, что

$$\int[\varphi f\,\varphi^*(\lambda)]\,d\lambda=\int\left[\sum_{k,j}\varphi_k(\lambda)\,\overline{\varphi_j(\lambda)}\,f_{kj}(\lambda)\right]d\lambda<\infty,$$

где

$$\varphi^*=\begin{Bmatrix}\overline{\varphi}_1\\ \cdots\\ \overline{\varphi}_n\end{Bmatrix}$$

представляет собой вектор-столбец, эрмитово сопряженный вектор-строке $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Если ввести в L^2 скалярное произведение как

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int [\varphi_1 f \varphi_2^* (\lambda)]\, d\lambda,$$

то между пространствами H и L^2 можно установить изометричное соответствие, при котором значениям $\xi_k(t)$ соответствуют векторные функции $e^{i\lambda t}\delta_k$, где k-я по счету компонента вектора δ_k равна 1, а остальные равны 0.

Каждый элемент h пространства H может быть представлен в виде

$$h = \int \varphi(\lambda)\Phi^*(d\lambda) = \int \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\lambda)\,\Phi_k(d\lambda),$$

где $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ — соответствующая элементу h функция из пространства L^2, а Φ_k — спектральные стохастические меры каждого из процессов $\xi_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Векторная функция $\Phi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ называется *спектральной стохастической мерой* процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$. При этом

$$\mathsf{M} h_1 h_2 = \int [\varphi_1 f \varphi_2^* (\lambda)]\, d\lambda,$$

где φ_1 и φ_2 — функции из пространства L^2, соответствующие элементам h_1 и h_2.

Две функции φ_1 и φ_2 из $L^2(F)$ представляют один и тот же элемент этого пространства, если их разность $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяет условию

$$\varphi(\lambda) f(\lambda) \varphi^*(\lambda) \equiv \sum_{k,j=1}^{n} \varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_j(\lambda)} f_{kj}(\lambda) = 0.$$

В случае, когда спектральная плотность $f(\lambda)$ для почти всех λ является невырожденной матрицей, φ_1 и φ_2 совпадают тогда и только тогда, когда $\varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda)$ почти всюду. Но не исключена возможность того, что один и тот же элемент представляется разными по виду функциями $\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$; например, если все компоненты $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ многомерного стационарного процесса совпадают, то функции $e^{i\lambda t}\delta_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$ представляют один и тот же элемент пространства $L^2(F)$, соответствующий общему значению $\xi_1(t) = \ldots = \xi_n(t)$.

Линейные преобразования. Стационарный процесс

$$\eta(t) = \{\eta_1(t), \ldots, \eta_m(t)\},$$

состоящий из m компонент, получается из n-мерного стационарного процесса

$$\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$$

линейным преобразованием, если

$$\eta(t)=\int e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\,\Phi^*(d\lambda),$$

где $\varphi=\{\varphi_{jk}\}$ $(j=1, \ldots, m;\ k=1, \ldots, n)$ — матричная функция размерности $m\times n$, каждая строка которой

$$\varphi_j=\{\varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{jn}\}$$

представляет собой элемент пространства L^2.

В свою очередь процесс $\xi(t)$ может быть получен из $\eta(t)$ «обратным» линейным преобразованием, если существует матричная функция $\psi=\{\psi_{kj}\}$ $(k=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m)$ такая, что произведение $\psi(\lambda)\varphi(\lambda)$ представляет собой матрицу, каждая строка которой является элементом пространства L^2, совпадающим с соответствующим вектором δ_k (k — номер строки):

$$\psi(\lambda)\varphi(\lambda)=I_n,$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Указанная матричная функция ψ служит *спектральной характеристикой* «обратного» линейного преобразования. В частности, когда $\varphi(\lambda)$ — невырожденная почти всюду матрица,

$$\psi(\lambda)=\varphi^{-1}(\lambda).$$

Спектральная плотность

$$g(\lambda)=\{g_{ij}(\lambda)\},\quad i, j=1, \ldots, m,$$

процесса $\eta(t)$, получающегося из $\xi(t)$ линейным преобразованием со спектральной характеристикой $\varphi(\lambda)=\{\varphi_{jk}(\lambda)\}$ $(j=1, \ldots, m;$ $k=1, \ldots, n)$, выражается формулой

$$g(\lambda)=\varphi(\lambda)f(\lambda)\varphi^*(\lambda),$$

где φ^* — матрица, эрмитово сопряженная матрице φ.

Ранг многомерного процесса. Регулярность. Говорят, что n-мерный стационарный процесс $\xi(t)$ имеет *ранг* m, если его спектральная плотность $f(\lambda)=\{f_{kj}(\lambda)\}$ $(k,\ j=1, \ldots, n)$ для почти всех λ имеет один и тот же ранг m. Каждая компонента $\xi_k(t)$ такого процесса может быть представлена в виде (в случае дискретного времени)

$$\xi_k(t)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{-\infty}^{\infty}c_{kj}(t-s)\zeta_j(s),\quad k=1, \ldots, n,$$

где

$$M\zeta_i(t_1)\overline{\zeta_j(t_2)}=0$$

при $i\neq j$ и любых t_1 и t_2, а также при $i=j$ и $t_1\neq t_2$. Если же время t непрерывно, то

$$\xi_k(t)=\sum_{j=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}c_{kj}(t-s)\,\zeta_j(ds),\quad k=1,\ldots,n,$$

где

$$M\zeta_i(\Delta_1)\overline{\zeta_j(\Delta_2)}=0$$

при $i\neq j$ для любых интервалов Δ_1 и Δ_2, а также при $i=j$ для непересекающихся интервалов Δ_1 и Δ_2.

Процессами такого типа являются все *линейно-регулярные* n-мерные стационарные процессы $\xi(t)$, физически представляющие собой линейно преобразованные стационарные возмущения типа «белого шума»:

$$\xi_k(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{-\infty}^{t}c_{kj}(t-s)\,\zeta_j(s),\quad k=1,\ldots,n,$$

для дискретного t и

$$\xi_k(t)=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}c_{kj}(t-s)\,\zeta_j(ds),\quad k=1,\ldots,n,$$

для непрерывного t.

С точки зрения приложений наиболее интересным является случай, когда все компоненты $\xi_k(t)$ рассматриваемого стационарного n-мерного процесса $\xi(t)$ являются результатом одного и того же стационарного возмущения (случай процессов ранга 1) или когда все компоненты $\xi_k(t)$ практически мало связаны друг с другом, так что стационарный процесс $\xi(t)$ имеет максимальный ранг $m=n$.

6. Обобщенные стационарные процессы и процессы со стационарными приращениями.

Линейные преобразования. Пусть $\xi=\langle u,\ \xi\rangle$ — обобщенный стационарный процесс, и пусть

$$\langle u,\xi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\lambda)\,\Phi(d\lambda),\quad u\in U,$$

— его спектральное представление (см. гл. III, § 2, п. 1). Линейное преобразование процесса $\xi=\langle u,\ \xi\rangle$ со спектральной характеристикой $\varphi=\varphi(\lambda)$ определяется как обобщенный стационарный процесс $\eta=\langle u,\ \eta\rangle$ вида

$$\langle u,\eta\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\lambda)\,\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda),$$

где функция $\varphi(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$ растет не быстрее некоторой степени $|\lambda|^p$. Спектральная мера $G=G(\Delta)$ обобщенного стационарного процесса $\eta=\langle u, \eta\rangle$ связана со спектральной мерой $F=F(\Delta)$ исходного процесса $\xi=(u, \xi)$ соотношением

$$G(\Delta)=\int_{\Delta}|\varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda).$$

Пример. Пусть $\varphi=\varphi(\lambda)$ — преобразование Фурье некоторой интегрируемой функции на отрезке $(-\tau, \tau)$:

$$\varphi(\lambda)=\int_{-\tau}^{\tau} e^{-i\lambda t}c(t)\,dt.$$

Линейное преобразование обобщенного стационарного процесса $\xi=\langle u, \xi\rangle$ со спектральной характеристикой φ дает стационарный обобщенный процесс $\eta=\langle u, \eta\rangle$ вида

$$\langle u, \eta\rangle=\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} c(t-s)\,u(s)\,ds,\ \xi\right\rangle.$$

Дифференцирование. Пусть $\xi=\langle u, \xi\rangle$ — обобщенный случайный процесс со средним значением

$$A(u)=\mathsf{M}\langle u, \xi\rangle$$

и ковариационным функционалом

$$B(u, v)=\mathsf{M}\{\langle u, \xi\rangle\overline{\langle v, \xi\rangle}\}.$$

Производной этого процесса называется обобщенный случайный процесс $\xi'=\langle u, \xi'\rangle$, определяемый как

$$\langle u, \xi'\rangle=-\langle u', \xi\rangle$$

и получающийся в результате линейного преобразования со спектральной характеристикой $\varphi(\lambda)=i\lambda$. Его среднее значение и корреляционный функционал суть $-A(u')$ и $B(u', v')$ соответственно, где $u'=u'(t)$ и $v'=v'(t)$ — производные бесконечно дифференцируемых функций $u=u(t)$ и $v=v(t)$, принадлежащих пространству U.

Если обобщенный случайный процесс $\xi=\langle u, \xi\rangle$ имеет вид

$$\langle u, \xi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\xi(t)\,dt$$

и $\xi=\xi(t)$ представляет собой обычный случайный процесс, то будем обозначать обобщенный процесс по-прежнему как $\xi=\xi(t)$, а его производные как $\xi^{(n)}=\xi^{(n)}(t)$ $(n=0, 1, \ldots)$.

«*Белый шум*». Пусть $\zeta=\zeta(\Delta)$ — стохастическая мера с некоррелированными значениями такая, что при $\Delta=(s, t)$

$$\mathsf{M}\zeta(\Delta)=0,\quad \mathsf{M}|\zeta(\Delta)|^2=t-s.$$

С ней можно связать обобщенный процесс $\zeta = \langle u, \zeta\rangle$, определяемый формулой

$$\langle u, \zeta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\zeta(dt).$$

Среднее значение такого процесса равно нулю, а корреляционный функционал есть

$$B(s, t) = \delta(s - t),$$

где $\delta(s-t)$ — обобщенная функция двух аргументов, определяемая формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(s)\,u_2(t)\,\delta(s-t)\,ds\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)\,u_2(t)\,dt.$$

Описанный обобщенный процесс является стационарным процессом, называемым «белым шумом». Его *спектральная мера* $F = F(\Delta)$ абсолютно непрерывна: $F(\Delta) = \int_{\Delta} f(\lambda)\,d\lambda$, а *спектральная плотность* $f(\lambda)$ есть $f(\lambda) = 1/(2\pi)$.

Пример. Пусть $\xi = \xi(t)$ — пуассоновский процесс со средним значение $A(t) = at$ ($\xi(t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$). Производная $\xi' = \xi'(t)$ представляет собой обобщенный процесс вида

$$\xi'(t) = \sum_k \delta(t - \tau_k),$$

где $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — случайные моменты времени — точки роста пуассоновского процесса $\xi(t)$, а $\delta(t-\tau)$ означает δ-функцию с особенностью в точке τ: $\langle u, \xi'\rangle = \sum_k u(\tau_k)$. Среднее значение этого процесса равно постоянной:

$$\mathsf{M}\sum_k u(\tau_k) = a\int_0^{\infty} u(t)\,dt.$$

Корреляционная функция пуассоновского процесса есть

$$B(s, t) = a\min(s, t),$$

так что корреляционный функционал производной $\xi' = \xi'(t)$ равен $a\delta(s-t)$:

$$\mathsf{M}\sum_k u(\tau_k)\,\overline{\sum_l v(\tau_l)} = a\int_0^{\infty} u(t)\,\overline{v(t)}\,dt.$$

Пример. Пусть $\xi = \xi(t)$ ($\mathsf{M}\xi(t) = 0$) — процесс броуновского движения. Его ковариационная функция есть

$$B(s, t) = \min(s, t).$$

Производная $\xi' = \xi'(t)$ процесса броуновского движения имеет ковариационный функционал, равный $\delta(s-t)$, и является процессом «белого шума».

Интегрирование. Пусть $u_1 = u_1(t)$ $(u_1 \in U)$ — некоторая фиксированная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)\,dt = 1.$$

Тогда произвольная функция $u = u(t)$ $(u \in U)$ может быть представлена в виде

$$u(t) = u_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} u(s)\,ds + u_0(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)\,ds = 0.$$

Если $\xi = \langle u, \xi\rangle$ — заданный обобщенный процесс, то его первообразная $\eta = \langle u, \eta\rangle$, $\eta' = \xi$, может быть представлена в виде

$$\langle u, \eta\rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{t} u_0(s)\,ds, \xi \right\rangle + C,$$

где C — некоторая постоянная. При этом все первообразные совпадают на подпространстве $U^{(1)}$ элементов $u \in U$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt = 0.$$

Аналогично все обобщенные процессы $\eta = \langle u, \eta\rangle$, имеющие заданную n-ю производную $\xi = \langle u, \xi\rangle$, $\eta^{(n)} = \xi$, совпадают на подпространстве $U^{(n)}$ элементов $u \in U$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k u(t)\,dt = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

и отличаются друг от друга лишь слагаемым вида $\sum\limits_{0}^{n-1} C_k t^k$. Точнее,

$$\langle u, \eta\rangle = \langle u, \eta_0\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k dt.$$

Если

$$\langle u, \xi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda)\,\Phi(d\lambda)$$

— спектральное разложение заданного процесса $\xi = \langle u, \xi\rangle$, то при $u \in U^{(n)}$

$$\langle u, \xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda)(i\lambda)^{-n} \Phi(d\lambda).$$

Процессы со стационарными приращениями. Случайный процесс называется *процессом со стационарными n-ми приращениями*, если его n-я производная представляет собой стационарный процесс. Для обычного процесса $\eta = \eta(t)$ это равносильно тому, что n-я конечная разность

$$\Delta_h^n \eta(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} \eta(t + hk)$$

при любом h представляет собой стационарный процесс.

Всякий обобщенный стационарный процесс $\xi = \langle u, \xi \rangle$ является производной порядка n от некоторого обычного процесса (необобщенного) со стационарными n-ми приращениями, где n таково, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \lambda^2)^{-n} F(d\lambda) < \infty$$

(здесь F — спектральная мера рассматриваемого процесса ξ).

Пусть

$$\langle u, \xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda) \Phi(d\lambda)$$

— спектральное разложение такого процесса. Соответствующий процесс $\eta = \eta(t)$ со стационарными n-ми приращениями может быть построен следующим образом. Обобщенный процесс $\eta = \langle u, \eta \rangle$, определенный лишь на функциях $u = u(t)$ $(u \in U^{(n)})$, получается n-кратным интегрированием:

$$\langle u, \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda)(i\lambda)^{-n} \Phi(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda) \Psi(d\lambda).$$

В спектральном представлении обобщенного процесса $\eta = \langle u, \eta \rangle$ стохастическая мера Ψ такова, что спектральная мера $G(\Delta) = \mathsf{M}|\Psi(\Delta)|^2$ удовлетворяет условиям: при любом $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon} G(d\lambda) < \infty, \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \lambda^{2n} G(d\lambda) < \infty, \quad \int_{-\varepsilon}^{\infty} G(d\lambda) < \infty.$$

Обычный (необобщенный) процесс $\eta = \eta(t)$ со стационарными n-ми приращениями, который связан с обобщенным процессом

$\eta = \langle u, \eta \rangle$ соотношением

$$\langle u, \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \eta(t)\, dt$$

и n-й производной которого является $\xi = \langle u, \xi \rangle$, может быть представлен как

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i\lambda t} - \frac{1}{1+\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(i\lambda t)^k}{k!} \right] \Psi(d\lambda).$$

Общий вид процесса со стационарными n-ми приращениями [118], n-й производной которого является обобщенный процесс $\xi = \langle u, \xi \rangle$, есть $\eta(t) + \sum_{0}^{n-1} c_k t^k$, где $\sum_{0}^{n-1} c_k t^k$ — произвольный полином степени $n-1$.

7. Гармонизуемые случайные процессы. Некоторые нелинейные преобразования.

Гармонизуемые процессы. Случайный процесс $\xi = \xi(t)$ (время t меняется непрерывно $(-\infty < t < \infty)$) называется *гармонизуемым*, если он допускает представление в виде

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda), \tag{1.2}$$

где $\Phi = \Phi(\Delta)$ — обобщенная мера со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$. Так же как и в стационарном случае,

$$\Phi(\lambda_0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi(t)\, e^{-i\lambda_0 t} dt, \quad -\infty < \lambda_0 < \infty,$$

$$\Phi(\Delta) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-i\lambda_2 t} - e^{-i\lambda_1 t}}{-it} \xi(t)\, dt$$

для любого интервала $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ такого, что $\Phi(\lambda_1) = \Phi(\lambda_2) = 0$.

Пример. Пусть $\xi = \xi(t)$ — стационарный в широком смысле процесс, $c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} m(d\lambda)$, где $m = m(\Delta)$ — некоторая комплексная мера ограниченной вариации, и пусть случайный процесс $\eta = \eta(t)$ определен как

$$\eta(t) = c(t)\, \xi(t).$$

Такой процесс $\eta = \eta(t)$ является гармонизуемым:

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \Psi(d\lambda),$$

где случайная мера $\Psi = \Psi(\Delta)$ определена как

$$\Psi(\Delta) = \int\limits_{\Delta} m(\Delta - \lambda)\, \Phi(d\lambda)$$

($\Delta - \lambda$ есть множество точек $\mu - \lambda$, $\mu \in \Delta$).

Пример. Пусть $\xi = \xi(t)$ — гармонизуемый случайный процесс вида (1.2), A — некоторый линейный ограниченный оператор на подпространстве H гильбертова пространства $L^2(\Omega)$, являющегося замкнутой линейной оболочкой значений $\xi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, и случайный процесс $\eta = \eta(t)$ определен как

$$\eta(t) = A\xi(t).$$

Такой процесс $\eta(t)$ является гармонизуемым:

$$\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Psi(d\lambda),$$

где случайная мера $\Psi = \Psi(\Delta)$ определена как

$$\Psi(\Delta) = A\Phi(\Delta).$$

Ковариационная функция гармонизуемого процесса. Будем считать, что функция

$$F(\Delta_1 \times \Delta_2) = \mathsf{M}\Phi(\Delta_1)\overline{\Phi(\Delta_2)}$$

борелевских множеств $\Delta_1 \times \Delta_2$ действительной плоскости задает комплексную меру F ограниченной вариации. Случайный процесс $\xi = \xi(t)$ является гармонизуемым и имеет спектральную меру F тогда и только тогда, когда его ковариационная функция $B(s, t) = \mathsf{M}\xi(s)\overline{\xi(t)}$ допускает представление вида

$$B(s, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda s - \mu t)}F(d\lambda\, d\mu).$$

Спектральные моменты. Случайный процесс $\xi = \xi(t)$ относят к классу $\Phi^{(2n)}$ $(n \geq 1)$, если $\mathsf{M}|\xi(t)|^{2n} < \infty$ и для всех $k + l \leq 2n$ моменты

$$M^{(k,l)}(s, t) = \mathsf{M}\xi(s_1)\ldots\xi(s_k)\overline{\xi(t_1)}\ldots\overline{\xi(t_l)},$$

$$s = (s_1, \ldots, s_k), \quad t = (t_1, \ldots, t_l),$$

представимы в виде

$$M^{(k,l)}(s, t) = \int\limits_{E^{k+l}} e^{i(\lambda s - \mu t)}\mathscr{M}^{(k,l)}(d\lambda\, d\mu),$$

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k), \qquad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l),$$

$$\lambda s = \lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_k s_k, \quad \mu t = \mu_1 t_1 + \ldots + \mu_l t_l,$$

где $\mathscr{M}^{(k,l)}$ — комплексная мера ограниченной вариации [111] на $(k+l)$-мерном действительном пространстве E^{k+l}.

Пусть $\xi=\xi(t)$ — гармонизуемый случайный процесс и случайная функция $\Phi^{(k,l)}=\Phi^{(k,l)}(\Delta)$ определена на множествах вида $\Delta=\Delta_1\times\ldots\times\Delta_k\times\Delta_1'\times\ldots\times\Delta_l'$ действительного $(k+l)$-мерного пространства E^{k+l} формулой

$$\Phi^{(k,l)}(\Delta)=\Phi(\Delta_1)\ldots\Phi(\Delta_k)\overline{\Phi(\Delta_1')}\ldots\overline{\Phi(\Delta_l')}.$$

Случайный процесс $\xi=\xi(t)$ принадлежит классу $\Phi^{(2n)}$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{M}|\Phi^{(k,l)}(\Delta)|^2<\infty$ при любых Δ и $k+l\leqslant 2n$, а *спектральные моменты*

$$\mathscr{M}^{(k,l)}(\Delta)=\mathsf{M}\Phi^{(k,l)}(\Delta)$$

определяют комплексные меры $\mathscr{M}^{(k,l)}$ ограниченной вариации, которые совпадают с обобщенными мерами, фигурирующими в спектральном представлении моментов $M^{(k,l)}(s,t)$.

В классе $\Phi^{(2n)}$ случайные функции $\Phi^{(k,l)}$ при всех $k,l\leqslant n$ являются обобщенными мерами со значениями в $L^2(\Omega)$, называемыми *стохастическими спектральными мерами*.

Спектральные семиинварианты. Пусть $\xi=\xi(t)$ — действительный случайный процесс класса $\Phi^{(2n)}$. Семиинварианты этого процесса

$$S^{(k)}(t)=\frac{\partial^k}{\partial u_1\ldots\partial u_k}\mathsf{M}\exp\{iu\xi(t)\}\Big|_{u=0},$$
$$t=(t_1,\ldots,t_k),\quad u=(u_1,\ldots,u_k),$$
$$u\xi(t)=u_1\xi(t_1)+\ldots+u_k\xi(t_k),$$

связаны с моментами

$$M^{(k)}(I)=\mathsf{M}\xi(t_1)\ldots\xi(t_k)=$$
$$=\int\limits_{E^k}\exp\left\{i\left(\sum_{r=1}^{p}\lambda_r t_r-\sum_{l=1}^{q}\mu_l t_{p+l}\right)\right\}\mathscr{M}^{(p,q)}(d\lambda\,d\mu)\ ^{*)},$$
$$\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p),\quad \mu=(\mu_1,\ldots,\mu_q),\quad p+q=k,$$

следующими соотношениями:

$$S^{(k)}(I)=\sum_{\bigcup\limits_{p=1}^{q}I_p=I}(-1)^{q-1}[(q-1)!]\prod_{p=1}^{q}M^{(p)}(I_p),$$

$$M^{(k)}(I)=\sum_{\bigcup\limits_{p=1}^{q}I_p=I}\prod_{p=1}^{q}S^{(p)}(I_p).$$

---

*) Такое представление момента $M^{(k)}(I)$ тождественно относительно всех целых неотрицательных p и q таких, что $p+q=k$. Это же замечание справедливо и для указанного ниже представления семиинварианта $S^{(k)}(I)$.

Здесь

$$I = (t_1, \ldots, t_k), \quad I_p = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_p}) \subseteq I$$

и суммирование ведется по всем разбиениям множества I на непересекающиеся подмножества I_p.

Семиинварианты $S^{(k)}(I)$ допускают представление в виде

$$S^{(k)}(I) = \int\limits_{E^k} \exp\left\{i\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k t_k - \sum_{l=1}^{q} \mu_l t_{p+l}\right)\right\} \mathcal{G}^{(p,q)}(d\lambda\, d\mu),$$

где *спектральные семиинварианты* $\mathcal{G}^{(p,q)}$ связаны со *спектральными моментами* $\mathcal{M}^{(p,q)}$ соотношениями указанного выше типа. В частности,

$$S^{(1)}(t) = M^{(1)}(t) \text{ и } \mathcal{G}^{(1,0)}(\Delta) = \mathcal{M}^{(1,0)}(\Delta),$$

где $M^{(1)}(t) = \mathsf{M}\xi(t) = a(t)$ — среднее значение процесса $\xi(t)$, $\mathcal{M}^{(1,0)}(\Delta) = \mathsf{M}\Phi(\Delta)$ — среднее значение его случайной спектральной меры $\Phi = \Phi(\Delta)$, и

$$S^{(2)}(t_1, t_2) = M^{(2)}(t_1, t_2) - M^{(1)}(t_1) M^{(2)}(t_2),$$
$$\mathcal{G}^{(1,1)}(\Delta_1 \times \Delta_2) = \mathcal{M}^{(1,1)}(\Delta_1 \times \Delta_2) - \mathcal{M}^{(1,0)}(\Delta_1) \mathcal{M}^{(0,1)}(\Delta_2),$$

где $M^{(2)}(t_1, t_2) = \mathsf{M}\xi(t_1)\xi(t_2) = B(t_1, t_2)$ — корреляционная функция процесса $\xi(t)$, $\mathcal{M}^{(1,1)}(\Delta_1 \times \Delta_2) = \mathsf{M}\Phi(\Delta_1)\overline{\Phi(\Delta_2)} = F(\Delta_1 \times \Delta_2)$ — его спектральная мера.

При рассмотрении семиинвариантов удобно обратиться к так называемому *характеристическому функционалу* $\varphi_\xi = \varphi_\xi(u)$ процесса $\xi = \xi(t)$, определяемому как

$$\varphi_\xi(u) = \mathsf{M} \exp\left\{i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(t) u(dt)\right\},$$

где $u = u(\Delta)$ пробегает нормированное пространство U всех действительных обобщенных мер, $\|u\| = \operatorname{Var} u$. Для гармонизуемых процессов

$$\varphi_\xi(u) = \mathsf{M} \exp\left\{i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda) \Phi(d\lambda)\right\},$$

где

$$\tilde{u}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} u(dt).$$

В некоторой окрестности точки $u = 0$, т. е. при всех u, норма которых не превосходит некоторого $\varepsilon > 0$, имеет место следующее разложение характеристического функционала:

$$\ln \varphi_\xi(u) = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{i^k}{k!} \int_{E^k} S^{(k)}(t)\, u(dt_1) \ldots u(dt_k) + O(\|u\|^{2n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{i^k}{k!} \int_{E^k} \widetilde{u}(\lambda_1) \ldots \widetilde{u}(\lambda_k)\, \mathcal{G}^{(k)}(d\lambda) + O\left(\|\widetilde{u}\|^{2n}\right),$$

где $\|\widetilde{u}\| = \sup\limits_{\lambda} |u(\lambda)|$.

Пример. Пусть $\xi = \xi(t)$ — действительный гауссовский процесс с математическим ожиданием $A(t) = \mathsf{M}\xi(t)$ и ковариационной функцией $B(s, t) = \mathsf{M}\xi(s)\xi(t)$. Тогда

$$\ln \varphi_\xi(u) = i \int_{E^1} A(t)\, u(dt) - \frac{1}{2} \int_{E^2} [B(s, t) - A(s) A(t)]\, u(ds)\, u(dt).$$

В стационарном случае, когда среднее значение равно нулю, а спектральная мера есть $F = F(\Delta)$, имеем

$$\ln \varphi_\xi(u) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{u}(\lambda)|^2 F(d\lambda).$$

Пример. Пусть

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t, s)\, \zeta(ds),$$

где $\zeta = \zeta(\Delta)$ — случайная мера такая, что для каждого интервала Δ величина $\zeta(\Delta)$ распределена по закону Пуассона:

$$\ln \mathsf{M} \exp\{iu\zeta(\Delta)\} = (e^{iu} - 1)\,\sigma(\Delta).$$

Здесь $\sigma = \sigma(\Delta)$ — конечная положительная мера на временно́й оси $-\infty < t < \infty$. Такого типа случайный процесс $\xi = \xi(t)$ носит название *процесса «дробового эффекта»*. Его характеристический функционал $\varphi_\xi = \varphi_\xi(u)$ описывается следующей формулой:

$$\ln \varphi_\xi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp\left\{i \int_{-\infty}^{\infty} c(t, s)\, u(ds)\right\} - 1\right] \sigma(dt).$$

Если $c(t, s) = c(t - s)$, причем весовая функция $c(t)$ представима в виде

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} m(d\lambda),$$

то процесс $\xi=\xi(t)$ дробового эффекта будет гармонизуемым:

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda),$$

где

$$\Phi(\Delta)=\int_{\Delta}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s}\zeta(ds)\right]m(d\lambda).$$

Его первые два спектральных семиинварианта описываются формулами

$$\mathcal{G}^{(1)}(\Delta)=\int_{\Delta} f(\lambda)\,m(d\lambda),$$

$$\mathcal{G}^{(1,1)}(\Delta_1\times\Delta_2)=\int_{\Delta_1}\int_{\Delta_2} f(\lambda-\mu)\,m(d\lambda)\,m(d\mu),$$

где

$$f(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\sigma(dt).$$

Некоторые преобразования гармонизуемых процессов. При линейном преобразовании гармонизуемого процесса $\xi=\xi(t)$, результатом которого является

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda),$$

спектральные моменты $\mathcal{M}_{\eta}^{(k,l)}$ процесса $\eta=\eta(t)$ связаны с соответствующими моментами исходного процесса $\xi=\xi(t)$ следующим образом:

$$\mathcal{M}_{\eta}^{(k,l)}(\Delta_1\times\Delta_2)=\int_{\Delta_1}\int_{\Delta_2}\varphi(\lambda_1)\ldots\varphi(\lambda_k)\overline{\varphi(\mu_1)}\ldots\overline{\varphi(\mu_l)}\,\mathcal{M}_{\xi}^{(k,l)}(d\lambda\,d\mu).$$

В случае действительных процессов $\xi=\xi(t)$ и $\eta=\eta(t)$ аналогичные формулы имеют место для спектральных семиинвариантов:

$$\mathcal{G}_{\eta}^{(k,l)}(\Delta_1\times\Delta_2)=\int_{\Delta_1}\int_{\Delta_2}\varphi(\lambda_1)\ldots\varphi(\lambda_k)\overline{\varphi(\mu_1)}\ldots\overline{\varphi(\mu_l)}\,\mathcal{G}_{\xi}^{(k,l)}(d\lambda\,d\mu).$$

Весьма широкий класс преобразований случайного процесса $\xi=\xi(t)$ класса $\Phi^{(2n)}$ может быть описан формулой

$$\eta(t)=\sum_{k+l<n}\int_{E^{k+l}}\exp\left\{it\left(\sum_{p=1}^{k}\lambda_p-\sum_{q=1}\mu_q\right)\right\}\varphi_{kl}(\lambda,\mu)\,\Phi^{(k,l)}(d\lambda\,d\mu),$$

где $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_l)$ и $\Phi^{(k,l)}$ — стохастические спектральные меры гармонизуемого процесса $\xi=\xi(t)$. Такого рода преобразования включают в себя возведение в степень с последующим линейным преобразованием *).

Каждый процесс $\eta=\eta(t)$ указанного вида является гармонизуемым:

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\Psi(d\lambda),$$

где

$$\Psi(\Delta)=\\ =\sum_{k+l\leqslant n}\int_{E^{k+l}}\varphi_\Delta(\lambda_1+\ldots+\lambda_k-\mu_1-\ldots-\mu_l)\,\varphi_{kl}(\lambda,\mu)\,\Phi^{(k,l)}(d\lambda\,d\mu),$$

а функция $\varphi_\Delta(\lambda)$ имеет вид

$$\varphi_\Delta(\lambda)=\begin{cases}1 & \text{при } \lambda\in\Delta,\\ 0 & \text{при } \lambda\notin\Delta.\end{cases}$$

§ 2. Стационарные в узком смысле процессы

1. **Эргодические свойства.** Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ — пространство элементарных событий с вероятностной мерой P, а S_t — семейство сохраняющих эту меру преобразований сдвига множеств A из σ-алгебры $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(-\infty, \infty)$, соответствующее стационарному в узком смысле случайному процессу $\xi=\xi(t)$, и пусть U_t — соответствующее семейство преобразований сдвига случайных величин $\eta=\eta(\omega)$, измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$ (см. гл. III, § 2, п. 5). Будем считать, что процесс $\xi=\xi(t)$ измерим.

Теорема Биркгофа — Хинчина. Эргодичность. Множество $A\in\mathfrak{A}$ называется *инвариантным*, если при любом t множества S_tA и A совпадают с точностью до множества вероятности нуль. Случайная величина $\eta=\eta(\omega)$, измеримая относительно $\mathfrak{A}$, называется *инвариантной*, если $U_t\eta=\eta$ при любом t с вероятностью 1. Совокупность $\widehat{\mathfrak{A}}$ всех инвариантных множеств является σ-алгеброй. Случайная величина η инвариантна тогда и только тогда, когда она измерима относительно σ-алгебры $\widehat{\mathfrak{A}}$ инвариантных множеств.

Пусть $\eta=\eta(\omega)$ — произвольная случайная величина, измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$ и имеющая математическое ожидание.

Имеет место следующая

Теорема Биркгофа — Хинчина (закон больших чисел). *Пусть $\eta=\eta(t)$ — стационарный процесс, порожденный преобразованиями U_t: $\eta(t)=U_t\eta$.*

*) Нелинейным преобразованиям специально посвящена книга [27].

Тогда

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{0}^{T-1}\eta(t)=\hat{\eta}\quad \textit{для дискретного } t,$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\eta(t)\,dt=\hat{\eta}\quad \textit{для непрерывного } t,$$

где $\hat{\eta}=\mathsf{M}(\eta|\hat{\mathfrak{A}})$ — *условное математическое ожидание исходной случайной величины* η *относительно* σ-*алгебры* $\hat{\mathfrak{A}}$ *инвариантных множеств. Кроме того, если* $\mathsf{M}|\eta|^p<\infty$ *при некотором* $p\geqslant 1$, *то в указанных предельных соотношениях имеет место сходимость и в пространстве* $L^p(\Omega)$.

Стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ называется *эргодическим* или *метрически транзитивным*, если для любой случайной величины $\eta=\eta(\omega)$ соответствующий предел $\hat{\eta}$ оказывается равным математическому ожиданию этой случайной величины: $\hat{\eta}=\mathsf{M}\eta$. Стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ эргодичен тогда и только тогда, когда всякое инвариантное множество имеет вероятность 0 или 1, или, что то же, всякая инвариантная величина η с вероятностью 1 является постоянной.

Для любого действительного λ с вероятностью 1 (а в случае, когда $\mathsf{M}|\eta|^p<\infty$ при $p\geqslant 1$, и в пространстве $L^p(\Omega)$) выполняются соотношения

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{0}^{T-1}e^{-i\lambda t}\eta(t)=\hat{\eta}(\lambda)\quad \text{для дискретного } t,$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}e^{-i\lambda t}\eta(t)\,dt=\hat{\eta}(\lambda)\quad \text{для непрерывного } t,$$

где предельная величина $\hat{\eta}(\lambda)$ обладает тем свойством, что с вероятностью 1

$$U_t\hat{\eta}(\lambda)=e^{i\lambda t}\hat{\eta}(\lambda)$$

при всех t, т. е. $\hat{\eta}(\lambda)$ — собственная функция группы операторов U_t, отвечающая собственному значению λ.

Рассмотрим U_t как группу унитарных операторов в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$. Для эргодичности стационарного процесса $\xi(t)$ необходимо и достаточно, чтобы всякое собственное значение λ было простым, т. е. чтобы размерность подпространства собственных величин $\hat{\eta}(\lambda)$ была равна 1. Это равносильно требованию, чтобы простым являлось собственное значение $\lambda=0$, или, что то же, чтобы всякая собственная функция $\hat{\eta}$, отвечающая собственному значению $\lambda=0$, совпадала с постоянной.

Разложение на эргодические составляющие. Пусть стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ обладает тем свойством, что σ-алгебра $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(-\infty, \infty)$ сепарабельна, а вероятностная мера $\mathsf{P}=\mathsf{P}(A)$ $(A\in\mathfrak{A})$ совершенна. Тогда существует разбиение пространства Ω на непересекающиеся инвариантные множества $A_\alpha\in\mathfrak{A}$:

$$\Omega=\bigcup_\alpha A_\alpha,$$

и такое семейство вероятностных мер $\mathsf{P}_\alpha=\mathsf{P}_\alpha(A)$ ($A\in\mathfrak{A}$; параметр α пробегает некоторое множество действительных чисел), что

$$\mathsf{P}_\alpha(A_\alpha)=1, \quad \mathsf{P}(A)=\int_\Omega \mathsf{P}_{\alpha(\omega)}(A)\,\mathsf{P}(d\omega)$$

для любого $A\in\mathfrak{A}$, где $\alpha(\omega)=\alpha$ при $\omega\in A_\alpha$ и $\xi=\xi(t)$ по отношению к каждой из вероятностных мер P_α, представляет собой стационарный эргодический процесс.

Эргодичность, перемешивание и регулярность. Эргодичность стационарного процесса $\xi(t)$ равносильна тому, что для любых событий $A_1, A_2\in\mathfrak{A}$

$$\lim_{T\to\pm\infty}\frac{1}{T}\sum_0^{T-1}\mathsf{P}\{(S_tA_1)\cap A_2\}=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\quad\text{для дискретного } t,$$

$$\lim_{T\to\pm\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathsf{P}\{(S_tA_1)\cap A_2\}=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\quad\text{для непрерывного } t.$$

Стационарный процесс $\xi(t)$ называется *процессом с перемешиванием*, если для любых множеств $A_1, A_2\in\mathfrak{A}$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\mathsf{P}\{(S_tA_1)\cap A_2\}=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2).$$

Это соотношение выражает собой свойство, которое грубо может быть описано следующим образом: точки ω множества S_tA_1 при $t\to\infty$ «равномерно перемешиваются» (равномерно распределяются по всему пространству Ω) так; что для любого множества этого пространства попадающие в него точки ω из S_tA имеют меру, пропорциональную мере этого множества (общая мера точек $\omega\in S_tA$ сохраняется при всех t).

Свойство перемешивания слабее, чем свойство *регулярности* случайного процесса $\xi=\xi(t)$, означающее, что для любого фиксированного $A_2\in\mathfrak{A}(t, \infty)$ при $t-s\to\infty$

$$\sup_{A_1\in\mathfrak{A}(-\infty,s)}|\mathsf{P}\{A_1\cap A_2\}-\mathsf{P}\{A_1\}\mathsf{P}\{A_2\}|\to 0.$$

В свою очередь свойство регулярности случайного процесса $\xi=\xi(t)$ слабее, чем свойство *полной регулярности* (называемое также *сильным перемешиванием*), когда при $t-s\to\infty$

$$\sup_{\substack{A_1\in\mathfrak{A}(-\infty,s)\\ A_2\in\mathfrak{A}(t,\infty)}}|\mathsf{P}\{A_1\cap A_2\}-\mathsf{P}\{A_1\}\mathsf{P}\{A_2\}|\to 0.$$

Имеется одно важное различие между такими свойствами, как эргодичность, перемешивание, с одной стороны, и свойствами регулярности — с другой. Именно, свойства эргодичности и перемешивания сохраняются при переходе от самого процесса $\xi(t)$ к любому стационарному процессу $\eta(t)$, являющемуся функцией от $\xi(t)$: $\eta(t)=U_t\eta$ (где η — случайная величина, измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(-\infty,\infty)$); свойство же регулярности при таком переходе может быть потеряно.

Центральная предельная теорема. При определенных условиях регулярности стационарного процесса $\xi=\xi(t)$ характер сближения «временны́х средних»

$$\eta_T=\begin{cases}\dfrac{1}{T}\sum\limits_{0}^{T-1}\eta(t) & \text{при дискретном } t,\\[2ex] \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T\eta(t)\,dt & \text{при непрерывном } t\end{cases}$$

с математическим ожиданием $\hat{\eta}=\mathsf{M}\eta$ описывается *центральной предельной теоремой*, согласно которой распределения вероятностей нормированных разностей

$$\Delta_T=\frac{\eta_T-\mathsf{M}\eta}{\sigma_T},\quad \sigma_T^2=\mathsf{D}\eta_T,$$

слабо сходятся к гауссовскому распределению с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией:

$$\mathsf{P}\{\Delta_T\leqslant x\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

Разного типа условия, при которых справедлива центральная предельная теорема, связаны с различными свойствами регулярности процесса $\xi(t)$. Пусть, например,

$$\alpha(t)=\sup_{\substack{A\in\mathfrak{A}(-\infty,0)\\ B\in\mathfrak{A}(t,\infty)}}|\mathsf{P}(AB)-\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)|=O\left(t^{-1-\varepsilon}\right).$$

Тогда указанное предельное соотношение будет иметь место по крайней мере для всех случайных величин $\eta=\eta(\omega)$, измеримых относительно некоторой σ-алгебры $\mathfrak{A}(s_0,t_0)$ и имеющих абсолютный момент порядка $2+\delta$, где $\delta \geqslant 4/\varepsilon$:

$$\mathsf{M}\,|\eta|^{2+\delta} < \infty,$$

и для которых величина σ_T^2 правильно возрастает при $T \to \infty$:

$$\sigma_T^2 \asymp T,$$

т. е. $0 < \varliminf (\sigma_T^2/T) \leqslant \varlimsup (\sigma_T^2/T) < \infty$.

2. Общие эргодические свойства. Приложение их к марковским процессам.

Сохраняющие меру преобразования. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{Q})$ — измеримое пространство с положительной мерой $\mathrm{Q}(d\omega)$, причем не исключается возможность того, что $\mathrm{Q}(\Omega) = \infty$ (точнее, Q представляет собой σ-конечную меру), и пусть S — взаимно однозначное отображение пространства Ω на себя, сохраняющее меру Q, т. е.

$$\mathrm{Q}(SA) = \mathrm{Q}(A)$$

для любого $A \in \mathfrak{A}$.

Множество $A \in \mathfrak{A}$ называется *блуждающим*, если с каждым из своих образов $S_t A$ оно имеет пересечение лишь нулевой меры:

$$\mathrm{Q}(A \cap S_t A) = 0, \quad t = 1, 2, \ldots$$

Говорят, что система $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{Q}, S)$ не имеет *диссипативной части*, если не существует блуждающих множеств положительной меры.

Для любой измеримой действительной функции $\eta = \eta(\omega)$ положим

$$\eta(\omega, t) = \eta(S_t \omega), \quad t = 1, 2, \ldots$$

Пусть система $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{Q}, S)$ не имеет диссипативной части. Тогда для всякой положительной измеримой функции $\zeta = \zeta(\omega)$ при почти всех ω

$$\lim_{T \to \infty} \sum_0^T \zeta(\omega, t) = \infty.$$

Для любых $\eta = \eta(\omega)$ и положительной $\zeta = \zeta(\omega)$ из $L^1(\Omega)$ при почти всех ω существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \left(\sum_0^T \eta(\omega, t) \Big/ \sum_0^T \zeta(\omega, t) \right) = \hat{\eta}(\omega),$$

причем функция $\hat{\eta} = \hat{\eta}(\omega)$ инвариантна относительно S ($\hat{\eta}$, конечно, зависит от ζ) и

$$\int_\Omega \eta(\omega) \mathrm{Q}(d\omega) = \int_\Omega \hat{\eta}(\omega)\, \zeta(\omega)\, \mathrm{Q}(d\omega).$$

В частности, если $Q(\Omega) < \infty$, то при почти всех ω

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0}^{T-1} \eta(\omega, t) = \hat{\eta}(\omega).$$

Если $Q(\Omega) = \infty$ и, более того, не существует инвариантных множеств положительной конечной меры, то при почти всех ω

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0}^{T-1} \eta(\omega, t) = 0.$$

В случае метрически транзитивной системы $(\Omega, \mathfrak{A}, Q, S)$, т. е. когда всякая инвариантная функция $\hat{\eta} = \hat{\eta}(\omega)$ почти всюду совпадает с постоянной, предельная функция $\hat{\eta} = \hat{\eta}(\omega)$ есть

$$\hat{\eta} = \int_{\Omega} \eta(\omega) Q(d\omega) \Big/ \int_{\Omega} \zeta(\omega) Q(d\omega).$$

Аналогичные результаты имеют место и для систем $(\Omega, \mathfrak{A}, Q, S_t)$ с непрерывным параметром t, когда S_t представляет собой полугруппу преобразований $(t \geqslant 0)$, взаимно однозначно отображающих Ω на себя и сохраняющих меру Q.

Инвариантные распределения однородного марковского процесса. Пусть $\xi = \xi(t)$ $(t \geqslant 0)$ — однородный марковский процесс с дискретным временем в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ и с переходной функцией $P(x, B)$, задающей вероятности перехода за один шаг из точки $x \in E$ в множество $B \in \mathfrak{B}$. Положительная σ-конечная мера $Q^0 = Q^0(B)$ в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ называется *инвариантной*, если

$$Q^0(B) = \int_E Q^0(dx) P(x, B)$$

для любого $B \in \mathfrak{B}$.

Предположим, что для марковского процесса $\xi = \xi(t)$ существует инвариантная мера Q^0. Пусть $P_x = P_x(A)$ — условные распределения вероятностей на σ-алгебре $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(0, \infty)$ пространства элементарных событий Ω. Тогда формула

$$Q(A) = \int_E Q^0(dx) P_x(A), \quad A \in \mathfrak{A},$$

определяет на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ σ-конечную меру $Q = Q(A)$, инвариантную относительно преобразования сдвига S. Для любого начального распределения вероятностей $P^0 = P^0(B)$ в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$, абсолютно непрерывного относительно инвариантной меры $Q^0 = Q^0(B)$, соответствующее распределение вероятностей $\mathsf{P} = \mathsf{P}(A)$ в пространстве $(\Omega, \mathfrak{A})$:

$$\mathsf{P}(A) = \int_E \mathsf{P}^0(dx)\, P_x(A),$$

будет абсолютно непрерывным относительно инвариантной меры $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(A)$.

Диссипативная часть системы $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{Q}, S)$ будет отсутствовать, если выполняется следующее условие: $P_x\{\xi(t) \in B$ для бесконечного числа значений $t\} = 1$ при почти всех $x \in B$ относительно меры Q^0 и любого множества $B \in \mathfrak{B}$ $(\mathsf{Q}^0(B) > 0)$. Если интерпретировать $\xi = \xi(t)$ как процесс случайного блуждания частицы, то это условие означает следующее: отправляясь из точки x множества B, частица с вероятностью 1 бесконечно много раз в процессе блуждания попадет в это множество B. При указанном условии для любых случайных величин $\eta = \eta(\omega)$ и положительной $\zeta = \zeta(\omega)$, измеримых относительно $\mathfrak{A}$ и таких, что

$$\int_\Omega |\eta(\omega)|\, \mathsf{Q}(d\omega) < \infty, \quad \int_\Omega \zeta(\omega)\, \mathsf{Q}(d\omega) < \infty,$$

с вероятностью 1 существует соответствующий предел

$$\lim_{T\to\infty} \left(\sum_0^T \eta(\omega, t) \Big/ \sum_0^T \zeta(\omega, t) \right) = \hat{\eta}(\omega).$$

Если указанное условие отсутствия диссипативной части выполняется не только для почти всех x из соответствующего множества B, а при $\mathsf{Q}^0(B) > 0$ и для почти всех $x \in E$, то система $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{Q}, S)$ метрически транзитивна, так что предельная величина $\hat{\eta}$ будет постоянной:

$$\hat{\eta} = \int_\Omega \eta(\omega)\, \mathsf{Q}(d\omega) \Big/ \int_\Omega \zeta(\omega)\, \mathsf{Q}(d\omega).$$

Условия существования инвариантной σ-конечной меры $\mathsf{Q}^0 = \mathsf{Q}^0(B)$ для марковского процесса $\xi = \xi(t)$ могут быть описаны следующим образом [136]. Пусть $m = m(B)$ — некоторая σ-конечная мера в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$; марковский процесс $\xi = \xi(t)$ называется *m-сингулярным*, если для почти всех x (относительно m) существует множество $B_x \in \mathfrak{B}$ нулевой меры $m(B_x) = 0$ такое, что

$$P_x\{\xi(t) \in B_x \text{ при всех } t\} = 1.$$

Если процесс $\xi(t)$ не является m-сингулярным и, кроме того, если при $m(B) > 0$

$$P_x\{\xi(t) \in B \text{ для бесконечного числа значений } t\} = 1$$

при почти всех $x \in E$ (относительно m), то существует инвариантная σ-конечная мера $\mathsf{Q}^0 = \mathsf{Q}^0(B)$, абсолютно непрерывная относительно исходной меры $m=m(B)$. Эта инвариантная мера Q^0 единственна с точностью до постоянного множителя (разным мерам m могут соответствовать, вообще говоря, разные инвариантные меры Q^0).

Условия существования инвариантной вероятностной меры, т. е. условия существования *стационарного распределения вероятностей*, выраженные непосредственно в терминах переходных функций $P(n, x, B)$, можно сформулировать в следующей форме. Пусть мера $m=m(B)$ является конечной и равенство $m(B)=0$ влечет за собой равенство $P(x, B)=0$ для почти всех x (относительно m) при каждом измеримом B. Тогда для существования конечной инвариантной меры $Q^0=Q^0(B)$ необходимо и достаточно, чтобы при каждом B $(m(B)>0)$ выполнялось соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(k, x, B)>0$$

для всех x в некотором множестве B_0 $(m(B_0)>0)$. При этом мера Q^0 эквивалентна мере m.

Пусть мера $m=m(B)$ задает распределение вероятностей:

$$m(B)=\mathsf{P}_0(B).$$

Тогда соответствующее стационарное распределение вероятностей $Q^0=Q^0(B)$ может быть явно выражено в терминах соответствующих распределений вероятностей через n шагов:

$$\mathsf{P}_n(B)=\int_E P(n, x, B)\,\mathsf{P}_0(dx).$$

Именно,

$$Q^0(B)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}_k(B)$$

для любого измеримого множества B.

Говорят, что для марковского процесса $\xi=\xi(t)$ с переходной функцией $P(n, x, B)$ выполняется *условие Деблина*, если существуют конечная мера $m=m(B)$, целое число $n\geqslant 1$ и $\varepsilon>0$ такие, что

$$P(n, x, B)\leqslant 1-\varepsilon \text{ при } m(B)\leqslant\varepsilon.$$

Если выполнено это условие, то при каждом $x\in E$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(k, x, B)=Q^0(x, B).$$

Функция $Q^0(x, B)$ от $B\in\mathfrak{B}$ задает стационарное распределение вероятностей.

Пример. Пусть фазовое пространство E состоит из конечного числа точек. Условие Деблина будет выполнено для меры $m = m(B)$, численно равной количеству точек x в соответствующем множестве B, $n = 1$ и $\varepsilon \leqslant 1$. Действительно, при $m(B) < 1$ множество B оказывается пустым и $P(x, B) = 0$.

Пример. Пусть фазовое пространство E является многомерным евклидовым пространством, а переходная функция $P(x, B)$ задается плотностью

$$P(x, B) = \int_B p(x, y)\, m(dy),$$

где $m = m(B)$ — некоторая конечная мера. Если плотность $p(x, y)$ равномерно ограничена: $p(x, y) \leqslant K$, то условие Деблина выполняется для меры $m = m(B)$, $n = 1$ и $\varepsilon \leqslant 1/(K+1)$.

Рассмотрим однородный марковский процесс $\xi = \xi(t)$, для которого выполнено условие Деблина. Множество $B \in \mathfrak{B}$ фазового пространства E называется *инвариантным*, если

$$P(x, B) = 1 \text{ при всех } x \in B.$$

Непустое инвариантное множество B обязательно имеет меру $m(B)$, не меньшую положительного числа ε, фигурирующего в условии Деблина. Инвариантное множество B называется *минимальным*, если оно не содержит других инвариантных множеств. Два минимальных инвариантных множества B_1 и B_2 либо не пересекаются между собой, либо совпадают с точностью до некоторого множества нулевой m-меры. Всего имеется не больше чем $m(E)/\varepsilon$ существенно различных минимальных инвариантных множеств фазового пространства E.

Пусть $B_1, \ldots, B_N$ — система непересекающихся минимальных инвариантных множеств фазового пространства E. Тогда для каждого $x \in E$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(n, x, \bigcup_k B_k\right) = 1,$$

причем сходимость в этом предельном соотношении является экспоненциально быстрой. Наглядно это соотношение можно интерпретировать следующим образом: отправляясь из любой точки $x \in E$, блуждающая частица с вероятностью 1 через какое-то конечное число шагов попадет в одно из инвариантных множеств $B_1, \ldots, B_N$, после чего остается там навсегда. Предельное стационарное распределение $Q^0(x, B)$ одно и то же при всех x, принадлежащих одному и тому же минимальному инвариантному множеству B_k:

$$Q^0(x, B) = Q_k^0(B), \quad B \in \mathfrak{B},$$

при $x \in B_k$ $(k = 1, \ldots, N)$. Всякая инвариантная мера Q^0 в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ является конечной и представляет собой линейную комбинацию *взаимно перпендикулярных* стационарных распределений вероятностей $Q_k^0 = Q_k^0(B)$ $(k = 1, \ldots, N)$:

$$Q_k^0(B_k) = 1, \quad B_k \cap B_j = \varnothing \quad \text{при} \quad k \neq j.$$

Множество состояний B фазового пространства E называется *нулевым*, если при всех $x \in E$

$$\lim_{n \to \infty} P(n, x, B) = 0.$$

Система непересекающихся минимальных инвариантных множеств $B_1, \ldots, B_N$ определяется с точностью до нулевых множеств и может быть выбрана таким образом, чтобы каждое из множеств B_k (называемое также *эргодическим классом*) могло быть разбито на не пересекающиеся между собой *циклические подклассы* $C_{k1}, \ldots, C_{kd_k}$ — множества состояний фазового пространства, обладающие тем свойством, что

$$P(x, C_{k, i+1}) = 1 \text{ при } x \in C_{ki}, \quad i = 1, \ldots, d_k$$

(множества C_{ki} следуют друг за другом в циклическом порядке), и такие, что предельные соотношения

$$\lim_{n \to \infty} P(nd_k + i_0, x, B) = Q_{kj}^0(B),$$
$$x \in C_{ki}, \quad j = i + i_0 \pmod{d_k},$$

определяют распределения вероятностей $Q_{kj}^0 = Q_{kj}^0(B)$ $(j = 1, \ldots, d_k)$, связанные со стационарным распределением вероятностей $Q_k^0 = Q_k^0(B)$, следующим образом:

$$Q_k^0(B) = \frac{1}{d_k} \sum_{j=1}^{d_k} Q_{kj}^0(B), \quad B \in \mathfrak{B}.$$

При этом сходимость в указанном предельном соотношении такова, что

$$\operatorname{Var}\{P(nd_k + i_0, x, B) - Q_{kj}^0(B)\} \leqslant Ce^{-Dn}$$

при некоторых положительных C и D.

Свойство цикличности подклассов $C_{k1}, \ldots, C_{kd_k}$ наглядно может быть охарактеризовано в терминах случайного блуждания: из любой точки x множества C_{ki} блуждающая частица на следующем шаге с вероятностью 1 переходит в некоторую точку множества $C_{k, i+1}$, следующего в циклическом порядке за множеством C_{ki}. Распределения вероятностей $Q_{kj}^0 = Q_{kj}^0(B)$ $(j = 1, \ldots, d_k)$ так же, как и стационарные распределения $Q_k^0 = Q_k^0(B)$ $(k = 1, \ldots, N)$, определены однозначно; при этом

$$Q_{kj}^0(C_{kj}) = 1, \quad C_{ki} \cap C_{kj} = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Если марковский процесс $\xi=\xi(t)$ таков, что имеется лишь один эргодический класс без циклических подклассов, то существует лишь единственное стационарное распределение вероятностей $\mathsf{Q}^0=\mathsf{Q}^0(B)$. При этом для любого начального распределения $\mathsf{P}_0=\mathsf{P}_0(B)$ соответствующее распределение вероятностей $\mathsf{P}_n=\mathsf{P}_n(B)$ через n шагов:

$$\mathsf{P}_n(B)=\int\limits_E P(n, x, B)\,\mathsf{P}_0(dx)=\mathsf{P}\{\xi(n)\in B\},$$

обладает тем свойством, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_n(B)=\mathsf{Q}^0(B),\qquad B\in\mathfrak{B},$$

т. е. при $n\to\infty$ оно сходится к стационарному распределению вероятностей $\mathsf{Q}^0=\mathsf{Q}^0(B)$. Сходимость в этом предельном соотношении равномерно экспоненциально быстрая:

$$\mathrm{Var}\,\{\mathsf{P}_n-\mathsf{Q}^0\}\leqslant Ce^{-Dn}$$

для некоторых положительных постоянных C и D.

Аналогичные результаты имеют место и для случая непрерывного времени t (эти результаты в известном смысле проще, поскольку не существует циклических подклассов).

Приведем иные по форме условия существования стационарного распределения вероятностей [85]. Пусть $\xi=\xi(t)$ $(t\geqslant 0)$ — однородный марковский процесс с непрерывным временем, и пусть переходная функция $P(t, x, B)$ этого процесса удовлетворяет следующим требованиям: для любого $\varepsilon>0$ существуют конечная мера $m=m(B)$ в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$, множество $B_0\in\mathfrak{B}$ и положительные числа t_0 и δ такие, что при $t\geqslant t_0$ и $B\subseteq B_0$

$$P(t_0, x, B)\geqslant\delta m(B),\quad x\in B_0,$$

$$\mathsf{P}_t(B)=\int\limits_E P(t, x, B)\,\mathsf{P}_0(dx)\leqslant m(B)+\varepsilon,$$

$$\mathsf{P}_t(B_0)\geqslant 1-\varepsilon,$$

для любого начального распределения $\mathsf{P}_0=\mathsf{P}_0(B)$ $(B\in\mathfrak{B})$. Тогда имеется, и притом единственное, стационарное распределение вероятностей $\mathsf{Q}^0=\mathsf{Q}^0(B)$ в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{Var}\,(\mathsf{P}_t-\mathsf{Q}^0)=0$$

для любого начального распределения P_0.

Регулярность и центральная предельная теорема. Пусть $\xi=\xi(t)$ — марковский процесс, удовлетворяющий условию Деблина. При стационарном распределении вероятностей процесс $\xi=\xi(t)$ является эргодическим тогда и только тогда, когда имеется лишь один эргодический класс без циклических подклассов.

В этом случае при любом начальном распределении процесс $\xi=\xi(t)$ обладает следующим свойством регулярности: при $t-s\to\infty$ с вероятностью 1

$$\beta(t-s)=\sup_{A\in\mathfrak{A}(t,\infty)}|\mathsf{P}\{A\mid\mathfrak{A}(-\infty,s)\}-\mathsf{P}\{A\}|\leqslant Ce^{-D(t-s)}$$

для некоторых постоянных $C>0$ и $D>0$.

Пусть величина $\eta=\eta(\omega,t)$ измерима относительно некоторой σ-алгебры $\mathfrak{A}(s_0,t_0)$, $\mathsf{M}|\eta|^2<\infty$ и $\mathsf{D}\sum_0^{T-1}\eta(t)\to\infty$. Тогда отклонение временных средних $\eta_T=\frac{1}{T}\sum_0^{T-1}\eta(t)$ от математического ожидания $\widehat{\eta}=\mathsf{M}\eta$ подчиняется центральной предельной теореме: при $T\to\infty$

$$\mathsf{P}\{\Delta_T\leqslant x\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}du,\quad\Delta_T=\frac{\eta_T-\widehat{\eta}}{\sigma_T},\quad\sigma_T^2=\mathsf{D}\eta_T.$$

Аналогичные результаты имеют место и в случае непрерывного времени t.

3. Спектральные условия эргодичности некоторых стационарных процессов.

Общие спектральные условия. Пусть $\xi=\xi(t)$ — стационарный эргодический процесс, U_t — отвечающая ему группа унитарных операторов в пространстве $L^2(\Omega)$. Всякая собственная функция $\widehat{\eta}=\widehat{\eta}(\lambda)$:

$$U_t\widehat{\eta}(\lambda)=e^{i\lambda t}\widehat{\eta}(\lambda)\quad\text{при всех } t$$

обладает тем свойством, что модуль $\rho(\lambda)=|\widehat{\eta}(\lambda)|$ с вероятностью 1 равен постоянной, а аргумент $\theta(\lambda)=\arg\widehat{\eta}(\lambda)$ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $-\pi\leqslant\leqslant\theta(\lambda)\leqslant\pi$. Если

$$\widehat{\eta}(\lambda)=\rho(\lambda)e^{i\theta(\lambda)},$$

то

$$U_t\widehat{\eta}(\lambda)=\rho(\lambda)e^{i[\theta(\lambda)+\lambda t]}.$$

Пусть для некоторого конечного числа собственных значений λ выполнены соотношения

$$\begin{aligned}&\sum_\lambda\lambda m(\lambda)\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\quad&&\text{для дискретного } t,\\&\sum_\lambda\lambda m(\lambda)=0&&\text{для непрерывного } t,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где коэффициенты $m(\lambda)$ являются целыми числами.

Тогда с вероятностью 1 для некоторой постоянной θ

$$\sum_{\lambda} m(\lambda)\,\theta(\lambda) \equiv \theta \pmod{2\pi}. \tag{2.2}$$

Если стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ обладает свойством перемешивания, то единственным собственным значением является $\lambda=0$, отвечающее собственной функции $\hat{\eta}\equiv 1$.

Процесс с дискретным спектром. Так называется комплексный стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ $(\mathsf{M}|\xi(t)|^2<\infty)$, представимый в виде

$$\xi(t)=\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{i\lambda t}\Phi(\lambda),$$

где суммирование производится по конечному или счетному множеству Λ точек спектра λ стационарного процесса $\xi=\xi(t)$, а $\Phi=\Phi(\lambda)$ — совокупность некоррелированных случайных величин. Каждая из величин $\Phi(\lambda)$ представляет собой собственную функцию операторов U_t, отвечающую соответствующему собственному значению λ.

Стационарный процесс $\xi=\xi(t)$ такого типа является эргодическим тогда и только тогда, когда модуль $\rho(\lambda)=|\Phi(\lambda)|$ каждой из величин $\Phi(\lambda)$ является постоянным, а величины $\theta(\lambda)=\arg\Phi(\lambda)$ таковы, что для любого конечного числа точек $\lambda\in\Lambda$, удовлетворяющих условию (2.1), и соответствующих целых $m(\lambda)$ имеют место соотношения (2.2).

Рассмотрим совокупность M всевозможных последовательностей $m=m(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ с целыми компонентами $m(\lambda)$, отличными от нуля лишь для какого-нибудь конечного числа точек $\lambda\in\Lambda$. Определим сложение последовательностей $m=m(\lambda)$ и их умножение на целые числа α как

$$m=\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_2,\quad m(\lambda)=\alpha_1 m_1(\lambda)+\alpha_2 m_2(\lambda).$$

Пусть M_0 — совокупность тех из последовательностей $m=m(\lambda)$, для которых выполнены соотношения (2.1). Выберем из всей совокупности M_0 последовательностей $m=m(\lambda)$ лишь линейно независимые между собой, т. е. $m_1=m_1(\lambda)$, $m_2=m_2(\lambda)$, ..., такие, что из равенства

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k m_k=0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые целые числа, вытекает

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0.$$

Как отмечалось выше, существуют постоянные θ_1, θ_2, ... такие, что

$$\sum_{\lambda} m_1(\lambda)\,\theta(\lambda) \equiv \theta_1 \pmod{2\pi},$$
$$\sum_{\lambda} m_2(\lambda)\,\theta(\lambda) \equiv \theta_2 \pmod{2\pi},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Распределение вероятностей эргодического стационарного процесса $\xi=\xi(t)$ с дискретным спектром Λ однозначно определяется заданием положительных $\rho(\lambda)$:

$$\sum_{\lambda} [\rho(\lambda)]^2 < \infty$$

и чисел $\theta_1, \theta_2, \dots$ $(-\pi \leqslant \theta_k \leqslant \pi)$, каждое из которых отвечает соответствующему элементу $m_k = m_k(\lambda)$ из выбранной системы линейно независимых элементов совокупности M_0. Именно, σ-алгебра $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(-\infty, \infty)$ совпадает с σ-алгеброй, порожденной случайными величинами $\theta(\lambda)=\arg\Phi(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ и пополненной событиями вероятности 0. Конечномерные распределения этих величин описываются следующим образом. Если точки $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ таковы, что ни при каких целых $m(\lambda)$ $(\lambda=\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ невозможны соотношения (2.1), то случайные величины $\theta(\lambda_1), \dots, \theta(\lambda_n)$ взаимно независимы и равномерно распределены на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если же точки $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют условию (2.1), то числа $m(\lambda)$ $(\lambda=\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, для которых выполняются соотношения (2.1), образуют элемент $m=m(\lambda) \in M_0$, линейно выражающийся через $m_1=m_1(\lambda)$, $m_2=m_2(\lambda), \dots$: $m=\sum_{p=1}^{q} \alpha_p m_{k_p}$. Распределение вероятностей случайных величин $\theta(\lambda)=\arg\Phi(\lambda)$ $(\lambda=\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ будет в этом случае вырожденным, сосредоточенным на $(n-q)$-мерной поверхности n-мерного тора K^n, определяемой системой уравнений

$$\sum_{\lambda} m_{k_1}(\lambda)\,\theta(\lambda) \equiv \theta_{k_1} \pmod{2\pi},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sum_{\lambda} m_{k_q}(\lambda)\,\theta(\lambda) \equiv \theta_{k_q} \pmod{2\pi}.$$

На этой поверхности распределение вероятностей будет равномерным. (Здесь n-мерным тором K^n названа совокупность точек $\theta=\theta(\lambda)$ $(\lambda=\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, компонентами которых являются действительные числа $\theta(\lambda)$, отождествленные по mod 2π с числами отрезка $[-\pi, \pi]$.) Для несоизмеримых точек $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ни при каких $m(\lambda)$ не удовлетворяющих условию (2.1), распределение вероятностей случайных величин $\theta(\lambda)=\arg\Phi(\lambda)$ $(\lambda=\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ является равномерным на K^n, что равносильно независимости этих величин $\theta(\lambda_1), \dots, \theta(\lambda_n)$, каждая из которых равномерно распределена на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Стационарные процессы класса $\Phi^{(2n)}$. Пусть $\xi=\xi(t)$ — стационарный в узком смысле случайный процесс класса $\Phi^{(2n)}$. Отвечающие стационарному процессу $\xi=\xi(t)$ унитарные операторы U_t в пространстве $L^2(\Omega)$ действуют на элементы $\Phi^{(k,l)}(\Delta)$ (на значения стохастической спектральной меры $\Phi^{(k,l)}$) по следующему закону:

$$U_t\Phi^{(k,l)}(\Delta)=\int\limits_{\Delta}\exp\left\{it\left(\sum_{p=1}^{k}\lambda_p-\sum_{q=1}^{l}\mu_q\right)\right\}\Phi^{(k,l)}(d\lambda\, d\mu).$$

Подпространство $L^{(k,l)}$, описываемое уравнением

$$\lambda_1+\ldots+\lambda_k-\mu_1-\ldots-\mu_l=0,$$

таково, что для любого измеримого множества Δ величина $\Phi^{(k,l)}(\Delta\cap L^{(k,l)})$ является инвариантной, и в случае эргодического процесса $\Phi^{(k,l)}(\Delta\cap L^{(k,l)})=\mathscr{M}^{(k,l)}(\Delta\cap L^{(k,l)})$ (см. § 1, п. 7). Более того, если монотонная последовательность множеств $\Delta_1\supseteq\Delta_2\supseteq\ldots$ такова, что $\Delta=\bigcap\limits_k\Delta_k\subseteq L^{(k,l)}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\Phi^{(k,l)}(\Delta_n)=\mathscr{M}^{(k,l)}(\Delta),$$

Частным выражением этого факта является то, что для любого эргодического стационарного процесса $\xi=\xi(t)$ $(\mathsf{M}|\xi(t)|^2<\infty)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\Phi(\delta_{kn})|^2=F(\delta)$$

(здесь берется разбиение произвольного интервала $\delta=(\lambda_1,\ \lambda_2)$ на n интервалов δ_{kn}, длины которых равномерно стремятся к нулю при $n\to\infty$; $F(d\lambda)=\mathsf{M}|\Phi(d\lambda)|^2$ — спектральная мера стационарного процесса $\xi=\xi(t)$).

Спектральные моменты $\mathscr{M}^{(k,l)}=\mathscr{M}^{(k,l)}(\Delta)$ стационарного процесса $\xi=\xi(t)$ класса $\Phi^{(2n)}$ обладают тем свойством, что для любого измеримого множества Δ $(k+l)$-мерного пространства $E^{(k+l)}$ имеет место равенство

$$\mathscr{M}^{(k,l)}(\Delta)=\mathscr{M}^{(k,l)}(\Delta\cap L^{(k,l)}),$$

т. е. подпространство $L^{(k,l)}$ является «носителем» меры $\mathscr{M}^{(k,l)}(d\lambda\, d\mu)$.

В случае эргодического процесса $\xi=\xi(t)$ спектральным моментам $\mathscr{M}^{(k,l)}$ присущи дополнительные свойства, которые могут быть коротко охарактеризованы следующим образом. Пусть k_1 и l_1 — произвольные целые числа такие, что $0\leqslant k_1\leqslant k$ и $0\leqslant l_1\leqslant l$, $k_2=k-k_1$ и $l_2=l-l_1$. Обозначим символами $L^{(k_1,l_1)}$ и $L^{(k_2,l_2)}$

подпространства, описываемые уравнениями

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k_1} = \mu_1 + \ldots + \mu_{l_1},$$
$$\lambda_{k_1+1} + \ldots + \lambda_k = \mu_{l_1+1} + \ldots + \mu_l.$$

Тогда для любых измеримых множеств $\Delta_1 \subseteq L^{(k_1, l_1)}$ и $\Delta_2 \subseteq L^{(k_2, l_2)}$ справедливо равенство

$$\mathscr{M}^{(k,l)}(\Delta_1 \times \Delta_2) = \mathscr{M}^{(k_1, l_1)}(\Delta_1)\, \mathscr{M}^{(k_2, l_2)}(\Delta_2),$$

т. е. на подпространстве $L^{(k_1, l_1)} \times L^{(k_2, l_2)}$ спектральный момент $\mathscr{M}^{(k, l)}$ равен произведению спектральных моментов $\mathscr{M}^{(k_1, l_1)}$ и $\mathscr{M}^{(k_2, l_2)}$ (имеется в виду произведение мер на произведении пространств $L^{(k_1, l_1)}$ и $L^{(k_2, l_2)}$). Если $\xi = \xi(t)$ — стационарный процесс класса $\Phi^{(\infty)}$, т. е. $\xi = \xi(t)$ принадлежит всем классам $\Phi^{(2n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, такой, что его конечномерные распределения вероятностей однозначно определяются всевозможными моментами $M^{(k, l)} = M^{(k, l)}(s, t)$ (см. § 1, п. 7), то указанные соотношения не только необходимы, но и достаточны [112] для эргодичности процесса $\xi = \xi(t)$.

Класс $\Phi^{(\infty)}$ включает в себя многие важные процессы. Например, в класс $\Phi^{(\infty)}$ входят все гауссовские стационарные процессы. Для эргодичности гауссовского стационарного процесса $\xi = \xi(t)$ необходимо и достаточно, чтобы его спектральная мера $F = F(\Delta)$ была непрерывна, т. е. $F(\lambda) = 0$ для любого «одноточечного» множества λ.

§ 3. Гауссовские стационарные процессы

1. Некоторые свойства траекторий.

Непрерывность. Гауссовский стационарный процесс $\xi = \xi(t)$ либо с вероятностью 1 непрерывен, либо почти все его траектории не ограничены на любом интервале. Сепарабельный гауссовский стационарный процесс $\xi = \xi(t)$ непрерывен с вероятностью 1, если

$$B(0) - B(h) \leqslant C \frac{1}{|\log|h||^{\alpha}}, \quad \alpha > 1,$$

при достаточно малых h или если

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\ln(1 + |\lambda|)]^{\alpha} F(d\lambda) < \infty, \quad \alpha > 1.$$

Пусть в достаточно малой окрестности точки $t = 0$ корреляционная функция $B = B(t)$ выпукла вниз. Тогда при условии

$$B(0) - B(h) \geqslant c \frac{1}{|\ln|h||}$$

почти все траектории $\xi(\omega, t)$ будут неограниченными на любом интервале Δ: с вероятностью 1 для любого наперед заданного числа N найдутся точки $t_1 = t_1(\omega)$ и $t_2 = t_2(\omega)$ такие, что $t_1, t_2 \in \Delta$ и

$$\xi(\omega, t_1) \leqslant -N, \quad \xi(\omega, t_2) \geqslant N.$$

Пусть корреляционная функция $B = B(t)$ сепарабельного гауссовского стационарного процесса $\xi = \xi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$B(0) - B(h) \leqslant C \frac{h^{2\alpha}}{|\ln|h||}$$

или неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{2\alpha} \ln(1 + |\lambda|) F(d\lambda) < \infty, \quad \alpha > 0.$$

Тогда с вероятностью 1 его траектории удовлетворяют условию: на любом отрезке $-\tau \leqslant t \leqslant \tau$ при всех достаточно малых h

$$|\xi(\omega, t + h) - \xi(\omega, t)| \leqslant \sqrt{C} \frac{2^{2\alpha+1}}{2^\alpha - 1} |h|^\alpha.$$

Если в некоторой окрестности точки $t = 0$ корреляционная функция $B = B(t)$ выпукла вниз и при некотором $c > 0$

$$B(0) - B(h) \geqslant c \frac{h^{2\alpha}}{|\ln|h||},$$

то с вероятностью 1 имеет место неравенство

$$\varlimsup_{n \to 0} |\xi(\omega, t + h) - \xi(\omega, t)| h^{-\alpha} \geqslant \sqrt{c}.$$

2. Выходы стационарного гауссовского процесса за определенный уровень. Пусть $\xi = \xi(t)$ — стационарный гауссовский процесс, имеющий непрерывную с вероятностью 1 производную $\xi' = \xi'(t)$. Для такого процесса на любом конечном интервале времени с вероятностью 1 имеется лишь конечное число пересечений какого-либо уровня a, причем с вероятностью 1 производная $\xi'(t)$ сохраняет определенный знак (положительна при пересечении уровня a снизу вверх и отрицательна при пересечении сверху вниз) в некоторой окрестности момента пересечения τ, так что в этой окрестности траектория самого процесса $\xi(t)$ монотонно возрастает или убывает. Отметим, что если гауссовский стационарный процесс не имеет непрерывной производной, то его траектории ни на каком интервале (даже на очень малом) не являются монотонными.

Введем следующие обозначения: τ_1^- — момент первого пересечения уровня a снизу вверх после некоторого фиксированного момента времени $t = t_0$; τ_1^+ —момент первого пересечения уровня

a сверху вниз после момента τ_1^-, τ_2^- — момент второго пересечения снизу вверх; τ_2^+ — момент второго пересечения сверху вниз и т. д.; $\nu^-(t_0, t)$ — число пересечений уровня a снизу вверх за промежуток времени (t_0, t); $\nu^+(t_0, t)$ — число пересечений этого уровня сверху вниз; $\nu(t_0, t)$ — общее число пересечений.

Число пересечений на любом конечном интервале не только ограничено с вероятностью 1, но и имеет конечное математическое ожидание:

$$\mathsf{M}\nu^-(t_0, t) = \lambda(t-t_0), \quad \mathsf{M}\nu^+(t_0, t) = \lambda(t-t_0),$$
$$\mathsf{M}\nu(t_0, t) = 2\lambda(t-t_0),$$

где параметр λ — среднее число пересечений за единицу времени — может быть найден по формуле

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{B''(0)}{B(0)}}\exp\left\{-\frac{a^2}{2B(0)}\right\}$$

(здесь $B = B(t)$ — корреляционная функция рассматриваемого гауссовского процесса $\xi = \xi(t)$).

Остановимся на пересечениях уровня a снизу вверх (результаты для остальных типов пересечений совершенно аналогичны). Отметим, что при $h \to 0$

$$\mathsf{P}\{\nu^-(t_0, t_0+h) > 1\} = o(h)$$

и, более того,

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\mathsf{P}\{\nu^-(t_0, t_0+h) = 1\} = \lambda.$$

Существует условное распределение вероятностей продолжительности «*выбросов*» $\tau_1^+ - \tau_1^-$, $\tau_2^+ - \tau_2^-, \ldots$ стационарного процесса $\xi(t)$ за уровень a, когда фиксирован момент $\tau_k^- = t_k$ выхода траектории процесса за этот уровень; положим

$$F(t) = \mathsf{P}\{\tau_k^+ - \tau_k^- \leqslant t \mid \tau_k^- = t_k\}.$$

Функция распределения $F = F(t)$ одна и та же для всех k и t_k и может быть определена следующим предельным соотношением:

$$F(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathsf{P}\{\nu^-(-h, 0) = 1,\ \nu^+(0, t) \geqslant 1\}}{\mathsf{P}\{\nu^-(-h, 0) = 1\}}.$$

Условное распределение «выброса» тесно связано с функцией

$$G(t) = \mathsf{P}\{\xi(s) \geqslant a, \quad 0 \leqslant s \leqslant t\}.$$

Именно,

$$F(t) = 1 + \frac{1}{\lambda}G'(t+0).$$

Имеет место следующая

Теорема сравнения [146]. *Если $B(t)$ и $\tilde{B}(t)$ — корреляционные функции стационарного гауссовского процесса $\xi = \xi(t)$*

с нулевым средним, отвечающие распределениям вероятностей P *и* $\widetilde{\mathsf{P}}$ *соответственно и такие, что*

$$B(s) \geqslant \widetilde{B}(s)$$

при всех s $(0 \leqslant s \leqslant t)$, *то и*

$$\mathsf{P}\{\xi(s) \geqslant 0,\ 0 \leqslant s \leqslant t\} \geqslant \widetilde{\mathsf{P}}\{\xi(s) \geqslant 0,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}.$$

Средняя длительность «выброса» $\Delta = \int\limits_0^\infty t\,dF(t)$ может быть вычислена по формуле

$$\Delta = \frac{1}{\lambda}\mathsf{P}\{\xi(t) \geqslant a\} = \sqrt{-\frac{2\pi}{B''(0)}}\int\limits_a^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2B(0)}(x^2 - a^2)\right\} dx.$$

Эргодические свойства. Пусть рассматриваемый стационарный процесс $\xi = \xi(t)$ является эргодическим. Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\nu^-(0, T) = \lambda,$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\nu_t^-(0, T)}{\nu^-(0, T)} = F(t),$$

где $\nu_t^-(0, T)$ — число «выбросов» с начальным моментом τ^- из интервала $(0, T)$, длительность которых не превосходит t.

Предельные распределения. Укажем асимптотические формулы для распределений вероятностей числа пересечений и длительности отдельного «выброса», когда уровень a неограниченно возрастает. Пусть $\xi = \xi(t)$ — гауссовский вполне регулярный процесс, соответствующий показатель $r(t)$ которого удовлетворяет условию

$$r(t) = O\{t^{-\varepsilon}\}, \quad \varepsilon > 0$$

(см. гл. III, § 2, п. 2 и гл. VI, § 1, п. 2).

Среднее число пересечений уровня a (за единицу времени) весьма быстро убывает при $a \to \infty$. Удобно перейти к новому масштабу времени, положив $t^* = \lambda^{-1}t$. Имеет место предельное соотношение

$$\lim_{a\to\infty} \mathsf{P}\left\{\nu^-\left(s_1^*, t_1^*\right) = k_1, \ldots, \nu^-\left(s_n^*, t_n^*\right) = k_n\right\} = \prod_{i=1}^n \frac{\left(t_i - s_i\right)^{k_i}}{k_i!} e^{-(t_i - s_i)}$$

для любых непересекающихся интервалов (s_i, t_i) $\left(s_i = \lambda s_i^*,\ t_i = \lambda t_i^*\ (i = 1, \ldots, n)\right)$.

Средняя длительность Δ отдельного выброса за уровень a такова, что

$$\lim_{a\to\infty} a\Delta = B(0)\sqrt{-\frac{2\pi}{B''(0)}}.$$

Для функции распределения $F=F(t)$ длительности выброса имеет место предельное соотношение

$$\lim_{a\to\infty} F\left(t\,\frac{B(0)}{a}\sqrt{-\frac{2\pi}{B''(0)}}\right)=1-\exp\left\{-\frac{\pi t^2}{4}\right\},\qquad t\geqslant 0.$$

Обозначим $\tau(0, t)$ время пребывания процесса $\xi(t)$ над уровнем a в промежутке времени от 0 до t, и пусть $V=V(s)$ — функция распределения вероятностей с характеристической функцией

$$\varphi(u)=\exp\left\{t\left[e^{-u^2/\pi}(1+iu)-1\right]\right\}$$

($V=V(s)$ задает распределение вероятностей суммы случайного числа ν независимых величин, имеющих одну и ту же функцию распределения $1-\exp\{-\pi t^2/4\}$, причем число ν не зависит от самих этих величин и распределено по закону Пуассона со средним значением t). Имеет место предельное соотношение [17]

$$\lim_{a\to\infty}\mathsf{P}\left\{\tau(0, t^*)\,\frac{B(0)}{a}\sqrt{-\frac{2\pi}{B''(0)}}\leqslant s\right\}=V(s).$$

Поведение максимума. Распределение максимума процесса $\xi=\xi(t)$ на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$ тесно связано с распределением числа пересечений $\nu(0, T)$ уровня a. Именно,

$$\mathsf{P}\left\{\max_{0<t<T}\xi(t)\leqslant a\right\}+\mathsf{P}\left\{\min_{0<t<T}\xi(t)\geqslant a\right\}=\mathsf{P}\{\nu(0, T)=0\}.$$

При описанных выше условиях регулярности, когда $r(t)=O\{t^{-\varepsilon}\}$,

$$\lim_{T\to\infty}\mathsf{P}\left\{\max_{0<t<T}\xi(t)\leqslant a\right\}=\lim_{T\to\infty}\mathsf{P}\{\nu(0, T)=0\}=e^{-y},\quad T=y/\lambda,$$

где y — некоторое фиксированное число, λ — среднее число пересечений уровня a, равное

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{B''(0)}{B(0)}}\exp\left\{-\frac{a^2}{2B(0)}\right\}.$$

Если максимум рассматриваемого процесса представить в виде

$$\max_{0<t<T}\xi(t)=\sqrt{\frac{B(0)}{2\ln T}}\left(\ln\frac{T^2\sqrt{-B''(0)}}{2\pi}+\zeta_T\right),$$

то для случайной величины ζ_T, определяемой этим соотношением, имеет место следующая предельная теорема:

$$\lim_{T\to\infty}\mathsf{P}\{\zeta_T\leqslant z\}=e^{-y},\qquad y=e^{-z}.$$

Таким образом, при $T\to\infty$

$$\max_{0<t<T}\xi(t)\sim\sqrt{2B(0)\ln T}.$$

3. Эквивалентность распределений вероятностей гауссовских стационарных процессов. Условия эквивалентности общих гауссовских распределений указаны в гл. III, § 2, п. 2. Использование спектрального разложения позволяет представить эти условия в спектральном виде, что открывает сравнительно эффективные пути для отыскания плотности (отношения правдоподобия) эквивалентных распределений.

Эквивалентность распределений вероятностей.

Пример. Пусть P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ — два распределения вероятностей отрезка гауссовского стационарного процесса $\xi = \xi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ с нулевым средним, отвечающие корреляционным функциям

$$B(t) = \sigma^2 e^{-a|t|}, \quad \widetilde{B}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Нетрудно подсчитать, что существует среднеквадратичный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_1 - t_0} \sum_{k=1} \Delta_h \xi(kh) \cdot \Delta_h \xi(t_0 + kh) =$$

$$= \begin{cases} B'(t_0 - 0) - B'(t_0 + 0) & \text{относительно } \mathsf{P}, \\ \widetilde{B}'(t_0 - 0) - \widetilde{B}'(t_0 + 0) & \text{относительно } \widetilde{\mathsf{P}}, \end{cases}$$

где

$$h = \frac{t_1 - t_0}{n}, \quad \Delta_h \xi(t) = \xi(t + h) - \xi(t), \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant t_1;$$

и потому, если величины $B'(-0) - B'(+0) = \sigma^2 a$ и $\widetilde{B}'(-0) - \widetilde{B}'(+0) = 1$ не совпадают, то распределения P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ перпендикулярны (для любого $t_1 > 0$); это же имеет место при $\sigma^2 a = 1$ для $t_1 > 1$, поскольку функция $B'(t)$ непрерывна в точке $t_0 = 1$, а функция $\widetilde{B}'(t)$ терпит в этой точке разрыв: $\widetilde{B}'(t_0 - 0) - \widetilde{B}'(t_0 + 0) = -1/2$.

Общие результаты об эквивалентности позволяют сказать, что при $\sigma^2 a = 1$ распределения P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ «отрезка» $\xi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ будут эквивалентны для $t_1 \leqslant 1$.

Эквивалентность распределений, отличающихся средними значениями. Пусть P — распределение вероятностей гауссовского стационарного процесса

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda)$$

с нулевым математическим ожиданием и спектральной мерой F. Предположим, что распределение вероятностей $\widetilde{\mathsf{P}}$ отличается от P лишь средним значением $a(t) = \widetilde{\mathsf{M}}\xi(t)$ $(t \in T)$ на некотором множестве T действительной прямой $-\infty < t < \infty$. Для эквивалентности P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $a(t)$ была представима в виде

$$a(t) = \int e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\, F(d\lambda), \qquad t \in T,$$

где $\varphi(\lambda)$ — некоторая функция пространства L_T^2 (ср. с интегральным уравнением линейного прогнозирования, с. 331). Соответствующая плотность может быть выражена следующим образом:

$$\frac{\widetilde{\mathsf P}(d\omega)}{\mathsf P(d\omega)} = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda)\right\}.$$

Эквивалентность распределений с различными корреляционными функциями. Пусть $\mathsf P$ и $\widetilde{\mathsf P}$ — распределения вероятностей гауссовского стационарного процесса с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями соответственно

$$B(t) = \int e^{i\lambda t} F(d\lambda), \qquad \widetilde B(t) = \int e^{i\lambda t}\widetilde F(d\lambda).$$

Для эквивалентности $\mathsf P$ и $\widetilde{\mathsf P}$ на σ-алгебре $\mathfrak A(T)$ (T — произвольное множество на действительной прямой) необходимо и достаточно, чтобы разность соответствующих корреляционных функций $b(s, t) = B(s, t) - \widetilde B(s, t)$ была представима в виде

$$b(s, t) = \int\int e^{-i(\lambda s - \mu t)}\varphi(\lambda, \mu)\, F(d\lambda)\, \widetilde F(d\mu), \qquad s, t \in T, \tag{3.3}$$

где $\varphi(\lambda, \mu)$ — некоторая функция пространства $L^2(F, \widetilde F)$, определяемого как совокупность функций φ, удовлетворяющих условиям

$$\int\int |\varphi(\lambda, \mu)|^2 F(d\lambda)\, \widetilde F(d\mu) < \infty,$$

$$\inf_{c_{kj};\, s_k, t_j \in T} \int\int \Big|\varphi(\lambda, \mu) - \sum_{k,j} c_{kj} e^{i(\lambda s_k - \mu t_j)}\Big|^2 F(d\lambda)\, \widetilde F(d\mu) = 0.$$

Соответствующая плотность может быть выражена через решение $\varphi(\lambda, \mu) \in L^2(F, \widetilde F)$ указанного выше интегрального уравнения как

$$\frac{\widetilde{\mathsf P}(d\omega)}{\mathsf P(d\omega)} = D \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \mu)\, \Phi(d\lambda\, d\mu)\right\},$$

где D — нормирующий множитель, а $\Phi(d\lambda\, d\mu)$ — центрированная спектральная мера второго порядка:

$$\Phi(\Delta_1, \Delta_2) = \Phi(\Delta_1)\Phi(\Delta_2) - F(\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

Если спектральные меры F и $\tilde{F}$ имеют плотности $f=f(\lambda)$ и $\tilde{f}=\tilde{f}(\lambda)$, то в случае рациональных $f(\lambda)$ и $\tilde{f}(\lambda)$ распределения P и $\tilde{\mathsf{P}}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\tilde{f}(\lambda)/f(\lambda))=1.$$

Если спектральная плотность $\tilde{f}(\lambda)$ такова, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{\beta}[\tilde{f}(\lambda)-f(\lambda)]=0$$

при некотором $\beta>\alpha+1/2$, то распределения P и $\tilde{\mathsf{P}}$ эквивалентны. Если же $\tilde{f}(\lambda)\geqslant f(\lambda)$ и

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty}\lambda^{\beta}[\tilde{f}(\lambda)-f(\lambda)]>0$$

при $\beta=\alpha+1/2$, то распределения P и $\tilde{\mathsf{P}}$ будут *взаимно перпендикулярны.*

Пример. Пусть P и $\tilde{\mathsf{P}}$ — распределения вероятностей гауссовского стационарного процесса, отвечающие нулевым математическим ожиданиям и корреляционным функциям

$$B(t)=\sigma^2e^{-\alpha|t|},\qquad \tilde{B}(t)=\tilde{\sigma}^2e^{-\tilde{\alpha}|t|}.$$

В этом случае формула для плотности $p(\omega)=\tilde{\mathsf{P}}(d\omega)/\mathsf{P}(d\omega)$ выглядит следующим образом:

$$p(\omega)=\frac{\tilde{\alpha}}{\alpha}\exp\left\{\frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\tau}-\frac{1}{2}(\tilde{\alpha}^2-\alpha^2)\int_0^{\tau}[\xi(\omega,t)]^2\,dt-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(\tilde{\alpha}-\alpha)\,[[\xi(\omega,0)]^2+[\xi(\omega,\tau)]^2]\right\}.$$

§ 4. Элементы математической теории передачи информации по стационарным каналам связи

1. Основные результаты о возможности передачи информации. *Канал связи.* Математическая модель канала связи описывается некоторой совокупностью X_1 элементов x_1, называемых *сигналами на входе* канала, совокупностью X_2 элементов x_2, называемых *сигналами на выходе* канала, и условными распределениями вероятностей $\mathsf{P}_2=\mathsf{P}_2(A_2|x_1)$ на пространстве X_2 выходных сигналов x_2. Если посланный сигнал (сигнал на входе) есть x_1, то с вероятностью $\mathsf{P}_2(A_2|x_1)$ на выходе канала будет принят сигнал x_2 из некоторого множества $A_2\subset X_2$ (условные распределения задают вероятности того или иного искажения посланного сигнала x_1).

Канал связи предназначается для передачи сообщений. Совокупность всех возможных сообщений обозначим символом X_0.

Считается, что каждое из сообщений $x_0 \in X_0$ может поступить с определенной вероятностью, точнее, на пространстве X_0 имеется определенное распределение вероятностей $\mathsf{P}_0 = \mathsf{P}_0(A_0)$.

Сообщения x_0 не могут быть переданы по каналу связи непосредственно: для их передачи могут лишь использоваться сигналы $x_1 \in X_1$. *Кодирование* сообщений x_0 в сигналы x_1 описывается при помощи условного распределения вероятностей $\mathsf{P}_1 = \mathsf{P}_1(A_1|x_0)$: если поступает сообщение x_0, то с вероятностью $\mathsf{P}_1(A_1|x_0)$ будет послан один из сигналов x_1, входящих в множество $A_1 \subset X_1$ (условные распределения $\mathsf{P}_1(A_1|x_0)$ учитывают возможные искажения при кодировании сообщений). Аналогичным образом описывается *декодирование* принимаемых сигналов x_2 в сообщения x_3: оно задается условным распределением вероятностей $\mathsf{P}_3 = \mathsf{P}_3(A_3|x_2)$ на пространстве X_3 сообщений x_3, принимаемых на выходе канала связи.

Схема передачи сообщений выглядит следующим образом. На вход канала связи поступает случайное сообщение ξ_0 с заданным распределением вероятностей $\mathsf{P}_0 = \mathsf{P}_0(A_0)$. При его поступлении передается сигнал ξ_1, распределение вероятностей которого задается «правилом кодирования» $\mathsf{P}_1 = \mathsf{P}_1(A_1|x_0)$:

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \in A_1 | \xi_0\} = \mathsf{P}_1(A_1|\xi_0).$$

В результате передачи посланного сигнала ξ_1 на выходе канала связи возникает сигнал ξ_2:

$$\mathsf{P}\{\xi_2 \in A_2 | \xi_0, \xi_1\} = \mathsf{P}_2(A_2|\xi_1).$$

Наконец, принятый сигнал ξ_2 декодируется, в результате чего получается сообщение ξ_3:

$$\mathsf{P}\{\xi_3 \in A_3 | \xi_0, \xi_1, \xi_2\} = \mathsf{P}_3(A_3|\xi_2).$$

Последовательность $\xi_0 \to \xi_1 \to \xi_2 \to \xi_3$ является марковской. При любых правилах кодирования и декодирования описанного типа имеет место следующее неравенство:

$$I(\xi_0, \xi_3) \leqslant I(\xi_1, \xi_2),$$

где $I(\xi_0, \xi_3)$ — *количество информации* о ξ_0 в принятом сообщении ξ_3, $I(\xi_1, \xi_2)$ — количество информации о ξ_1 в принятом сигнале ξ_2.

Теорема Шеннона [114]. Предположим, что распределение вероятностей входного сигнала ξ_1 не может быть произвольным и ограничено определенными требованиями; скажем, оно должно принадлежать некоторому классу W. Величина

$$C = \sup I(\xi_1, \xi_2),$$

где верхняя грань берется по всем возможным распределениям $\mathsf{P}_1 \in W$, называется *емкостью канала* и характеризует *максимальное количество информации*, которое может быть передано по данному каналу связи.

Предположим, далее, что передача сообщений $\xi_0 \to \xi_3$ должна удовлетворять определенным требованиям точности, скажем, совместное распределение вероятностей $\mathsf{P}_{\xi_0\xi_3}$ передаваемого и принимаемого сообщений ξ_0 и ξ_3 должно принадлежать некоторому классу V. Величина

$$H = \inf I(\xi_0, \xi_3),$$

где нижняя грань берется по всем возможным распределениям $\mathsf{P}_{\xi_0\xi_3} \in V$, характеризует *минимальное количество информации*, которое должно заключать в себе принимаемое сообщение ξ_3 о ξ_0, чтобы было выполнено условие точности передачи; величина H называется *энтропией* источника сообщений.

Если возможна передача $\xi_0 \to \xi_1 \to \xi_2 \to \xi_3$ с соблюдением требований V и W, т. е. существуют соответствующие способы кодирования и декодирования (другими словами, существуют соответствующие условные распределения P_1, P_2 и P_3), то

$$H \leqslant C.$$

При выполнении этого неравенства передача в некотором смысле является возможной (имеется в виду возможность передачи последовательно поступающих сообщений $\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \ldots, \xi_0^{(n)}$).

Предположим, что совокупность X_0 всех возможных сообщений x_0 является дискретной (т. е. имеется не более чем счетное число различных сообщений x_0, поступающих с соответствующими вероятностями $\mathsf{P}_0(x_0)$; $x_0 \in X_0$) и условие точности передачи V состоит в том, что принимаемое сообщение ξ_3 должно просто совпадать с переданным сообщением ξ_0: $\xi_3 = \xi_0$ с вероятностью 1. Тогда

$$H = -\sum_{x_0} \mathsf{P}_0(x_0) \log \mathsf{P}_0(x_0) = -\mathsf{M} \log \mathsf{P}_0(\xi_0).$$

Предположим, далее, что имеется лишь конечное число N различных входных сигналов x_1 и нет никаких ограничений на вероятности $\mathsf{P}\{\xi_1 = x_1\}$ $(x_1 \in X_1)$. Кроме того, предположим, что передаваемые сигналы принимаются без искажений, т. е. с вероятностью 1 $\xi_2 = \xi_1$. Тогда емкость канала выражается формулой

$$C = \log_2 N,$$

т. е. передаваемое количество информации $I(\xi_1, \xi_2)$ будет максимальным в том случае, когда сигналы $x_1 \in X_1$ равновероятны.

Если сообщения $\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \ldots, \xi_0^{(n)}$ поступают независимо друг от друга, то количество информации, которую несет группа сообщений $\xi_{0n} = (\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \ldots, \xi_0^{(n)})$, есть

$$H_n = -\sum_{x_{0n}} \mathsf{P}(x_{0n}) \log \mathsf{P}(x_{0n}) = -\mathsf{M} \log \mathsf{P}(\xi_{0n}) = nH,$$

где $x_{0n} = \left(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}\right)$ — группа сообщений, поступающая на кодирование с вероятностью

$$\mathsf{P}(x_{0n}) = \mathsf{P}_0\left(x_0^{(1)}\right) \mathsf{P}_0\left(x_0^{(2)}\right) \ldots \mathsf{P}_0\left(x_0^{(n)}\right).$$

Пусть $H < C$. Положим $\delta = (C - H)/2$. Согласно закону больших чисел (примененному к последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин $\log \mathsf{P}_0\left(\xi_0^{(k)}\right)$ ($k=1, 2, \ldots$), с математическим ожиданием $\mathsf{M} \log \mathsf{P}_0\left(\xi_0^{(k)}\right) = -H$) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n(\varepsilon)$ такое, что при всех $n \geqslant n(\varepsilon)$

$$\mathsf{P}\left\{-H - \delta \leqslant \frac{1}{n} \log \mathsf{P}(\xi_{0n}) \leqslant H + \delta\right\} \geqslant 1 - \varepsilon,$$

где

$$\log \mathsf{P}(\xi_{0n}) = \sum_{k=1}^{n} \log \mathsf{P}_0\left(\xi_0^{(k)}\right).$$

Полученное неравенство говорит о том, что все группы сообщений x_{0n} можно разбить на два класса. К первому классу X_{0n}^1 относится «высоковероятные» сообщения x_{0n}, для которых $\mathsf{P}(x_{0n}) \geqslant 2^{-n(H+\delta)}$ и количество которых M_n не больше чем $2^{n(H+\delta)}$:

$$M_n \leqslant 2^{n(H+\delta)}.$$

Ко второму классу X_{0n}^2 относятся все остальные «маловероятные» сообщения x_{0n}: $\mathsf{P}\{\xi_{0n} \in X_{0n}^2\} \leqslant \varepsilon$.

Каждую группу высоковероятных сообщений x_{0n} можно в принципе передать, закодировав ее соответствующей комбинацией сигналов $x_{1n} = \left(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right)$. Число всевозможных комбинаций такого вида есть $N_n = 2^{nC}$, и видно, что $M_n < N_n$. Таким образом, имеется N_n различных сигналов x_{1n}, с помощью которых можно закодировать и передать безошибочно все M_n высоковероятных сообщений $x_{0n} \in X_{0n}^1$. Если в дополнение к этому при поступлении любого маловероятного сообщения $x_{0n} \in X_{0n}^2$ передавать некоторый один и тот же сигнал x_{1n}^0 (отличный от сигналов, при помощи которых передаются высоковероятные сообщения $x_{0n} \in X_{0n}^1$), то с вероятностью, не меньшей чем $1 - \varepsilon$, на выходе канала связи будет приниматься последовательность $\xi_3^{(1)}, \xi_3^{(2)}, \ldots, \xi_3^{(n)}$, совпадающая с посланной последовательностью $\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \ldots, \xi_0^{(n)}$:

$$\mathsf{P}\left\{\xi_3^{(1)} = \xi_0^{(1)},\ \xi_3^{(2)} = \xi_0^{(2)}, \ldots, \xi_3^{(n)} = \xi_0^{(n)}\right\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Итак, при выполнении неравенства $H < C$ оказывается возможной передача достаточно длинных сообщений $\xi_0^{(1)}, \ldots, \xi_0^{(n)}$ с той оговоркой, что с вероятностью ε (ε — наперед заданное сколь угодно малое положительное число) может быть допущена ошибка. По существу, здесь имеется целое семейство каналов связи и источников сообщений, зависящих от параметра n.

Информационная плотность. Количество информации $I(\xi_0, \xi_3)$ для абстрактных случайных величин ξ_0 и ξ_3 со значениями в пространствах X_0 и X_3 может быть записано в виде

$$I(\xi_0, \xi_3) = \mathsf{M} i(\xi_0, \xi_3),$$

где

$$i(x_0, x_3) = \frac{\mathsf{P}_{\xi_0\xi_3}(dx_0 dx_3)}{\mathsf{P}_0(dx_0)\,\mathsf{P}_3(dx_3)}$$

— так называемая *информационная плотность.* Последовательность пар (ξ_{0n}, ξ_{3n}) называется *информационно устойчивой*, если при $n \to \infty$

$$I(\xi_{0n}, \xi_{3n}) \to \infty, \quad \frac{i(\xi_{0n}, \xi_{3n})}{I(\xi_{0n}, \xi_{3n})} \to 1 \text{ (по вероятности).}$$

Рассмотренная выше последовательность (ξ_{0n}, ξ_{3n}) (где $\xi_{3n} = \xi_{0n}$) поступающих сообщений $\xi_{0n} = \left(\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \ldots, \xi_0^{(n)}\right)$ обладает свойством информационной устойчивости, что в конечном счете и определило возможность передачи сообщений ξ_{0n} с точностью до ε. Этот факт имеет широкие обобщения. Именно, если C_n — пропускная способность канала $\xi_{1n} \to \xi_{2n}$, H_n — минимальное количество информации, необходимое для соблюдения требуемой точности передачи $\xi_{0n} \to \xi_{3n}$, причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(H_n/C_n) < 1,$$

и существуют информационно устойчивые последовательности пар (ξ_{0n}, ξ_{3n}) и (ξ_{1n}, ξ_{2n}), для которых одновременно

$$\frac{1}{H_n} I(\xi_{0n}, \xi_{3n}) \to 1, \quad \frac{1}{C_n} I(\xi_{1n}, \xi_{2n}) \to 1,$$

то при весьма широких предположениях для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $n(\varepsilon)$, что по всем каналам связи с параметром $n \geqslant n(\varepsilon)$ возможна передача [28] с точностью до ε.

Канал связи с изменяющимися состояниями. Как было указано выше, канал характеризуется условными распределениями P_2, задающими вероятности тех или иных искажений посылаемого сигнала x_1. Несколько изменим схему канала связи, считая, что имеется некоторое множество Z возможных состояний z канала связи, причем если канал находится в некотором состоянии z и на входе возникает сигнал x_1, то независимо от других предшествующих обстоятельств канал переходит в другое состояние z_1. Этот переход подвержен случайностям и описывается условными распределениями $\mathsf{P}(C|x_1, z)$ (здесь $\mathsf{P}(C|x_1, z)$ — вероятность того, что новое состояние z_1 будет входить во множество $C\subset Z$). При этом уже считается, что выходной сигнал x_2 однозначно определяется состоянием канала z_1, т. е. существует некоторая функция $\varphi=\varphi(z)$ на пространстве Z возможных состояний канала такая, что $x_2=\varphi(z_1)$. Эта более общая схема позволяет учитывать те изменения, которые в принципе могут возникать в канале связи по мере его работы.

Стационарные каналы. Рассмотрим стационарный режим работы канала связи, считая, что последовательно передаваемые сигналы

$$\ldots,\ \xi_1(-1),\quad \xi_1(0),\quad \xi_1(1),\ \ldots,$$

соответствующие состояниям канала

$$\ldots,\ \zeta(-1),\quad \zeta(0),\quad \zeta(1),\ \ldots,$$

и определяемые ими сигналы

$$\ldots,\ \xi_2(-1),\quad \xi_2(0),\quad \xi_2(1),\ \ldots$$

на выходе образуют стационарные и стационарно связанные случайные последовательности. Величина

$$\mathscr{C}=\sup\mathscr{T}(\xi_1,\ \xi_2),$$

где $\mathscr{T}(\xi_1,\ \xi_2)$ означает ***скорость передачи информации*** о стационарной последовательности $\{\xi_1(n)\}$ последовательностью $\{\xi_2(n)\}$ (см. п. 2) и верхняя грань берется по всем допустимым распределениям вероятностей входной последовательности $\{\xi_1(n)\}$, называется *пропускной способностью* канала связи.

Предположим, что поступающие на вход канала связи сообщения $\{\xi_0(n)\}$ $(n=\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots)$ образуют случайную стационарную последовательность. Будем считать правило кодирования заданным, если при всех k, m и $k_1,\ \ldots,\ k_m\geqslant k$ определены условные вероятности

$$\mathsf{P}\{\xi_1(k_1)\in B_1,\ \ldots,\ \xi_1(k_m)\in B_m\,|\,\xi_0(-\infty,\ k)\}$$

того, что при поступлении последовательности сообщений

$$\xi_0(-\infty,\ k)=\ldots,\ \xi_0(k-1),\quad \xi_0(k)$$

на соответствующих местах будут переданы сигналы $\xi_1(k_1),\ \ldots$ $\ldots,\ \xi_1(k_m)$, входящие в указанные множества $B_1,\ \ldots,\ B_m$. Эти вероятности считаются стационарными в том смысле, что они не меняются при одновременной замене индексов k и $k_1,\ \ldots,\ k_m$ на $k+l$ и $k_1+l,\ \ldots,\ k_m+l$ при любом целом l. Аналогичными вероятностями $\mathsf{P}\{\xi_3(k_1)\in D_1,\ \ldots,\ \xi_3(k_m)\in D_m\,|\,\xi_2(-\infty,\ k)\}$ задается правило декодирования.

Определим величину $\mathscr{H}$ формулой

$$\mathscr{H}=\inf\mathscr{T}(\xi_0,\ \xi_3),$$

где $\mathcal{T}(\xi_0, \xi_3)$ — скорость передачи информации о стационарной последовательности $\{\xi_0(n)\}$ последовательностью $\{\xi_3(n)\}$ ($n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$) (эти последовательности предполагаются стационарно связанными) и нижняя грань берется по всем допустимым распределениям вероятностей, удовлетворяющим требованиям точности передачи $\{\xi_0(n)\} \to \{\xi_3(n)\}$. Неравенство

$$\mathcal{H} \leqslant \mathcal{C}$$

является необходимым условием возможности передачи

$$\{\xi(n)\} \to \{\xi_1(n)\} \to \{\xi_2(n)\} \to \{\xi_3(n)\}.$$

Напомним, что каждое сообщение $\xi_0(k)$ представляет собой некоторый элемент x_0 из совокупности X_0. Можно интерпретировать X_0 как некоторый алфавит, состоящий из символов-букв x_0. Предположим, что этот алфавит X_0 является конечным и требование точности передачи состоит в безошибочном воспроизведении передаваемых символов:

$$\mathsf{P}\{\xi_3(k) = \xi_0(k)\} = 1 \text{ для любого целого } k.$$

Предположим, далее, что входных сигналов x_1 и состояний канала z имеется лишь конечное число. Обозначим состояния канала целыми числами $1, 2, \ldots, N$, и пусть $p(k, x_1, j)$ — соответствующие вероятности перехода из состояния k в состояние j при входном сигнале x_1:

$$p(k, x_1, j) = \mathsf{P}\{\zeta(n+1) = j \mid \zeta(n) = k, \quad \xi_1(n+1) = x_1\}.$$

Предположим, кроме того, что любые произведения вида

$$p(k_0, x_1(1), k_1)\, p(k_1, x_1(2), k_2) \ldots p(k_{n-1}, x_1(n), k_n)$$

являются стохастическими матрицами, задающими эргодические цепи Маркова. (Это условие будет выполнено, например, если каждая из переходных матриц $\{p(k, x_1, j)\}$ имеет положительный коэффициент эргодичности.) Тогда при выполнении неравенства $\mathcal{H} < \mathcal{C}$ и соблюдении условия эргодичности стационарной последовательности $\{\xi_0(n)\}$ сообщений на входе передача возможна с точностью до любого $\varepsilon > 0$, т. е. при соответствующих способах кодирования и декодирования принимаемая последовательность сообщений $\{\xi_3(n)\}$ будет обладать тем свойством, что

$$\mathsf{P}\{\xi_3(k) \neq \xi_0(k)\} < \varepsilon \text{ для любого целого } k.$$

2. Формулы для количества информации.

Количество информации о гауссовских величинах. Пусть $\xi_1 = \{\xi(t),\ t \in T_1\}$ и $\xi_2 = \{\xi(t),\ t \in T_2\}$ — два семейства случайных величин, имеющих совместное гауссовское распределение вероятностей, и пусть H_1 и H_2 — замкнутые линейные оболочки величин $\xi(t)$ ($t \in T_1$) и $\xi(t)$ ($t \in T_2$) в гильбертовом пространстве

$L^2(\Omega)$. Обозначим буквами P_1 и P_2 операторы проектирования на подпространства H_1 и H_2 и положим $P^{(1)}=P_1P_2P_1$, $P^{(2)}=P_2P_1P_2$. Количество информации $I(\xi_1, \xi_2)$ о семействе величин ξ_1, содержащееся в семействе величин ξ_2, конечно тогда и только тогда, когда один из операторов $P^{(1)}$ или $P^{(2)}$ представляет собой ядерный оператор, т. е. последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ его собственных значений (все они неотрицательны) удовлетворяет условию $\sum_k \lambda_k < \infty$. При этом

$$I(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{2}\sum_k \log(1-\lambda_k).$$

В случае, когда ξ_1 и ξ_2 образованы конечным числом гауссовских величин:

$$\xi_1 = \{\xi(1), \ldots, \xi(m)\}, \quad \xi_2 = \{\xi(m+1), \ldots, \xi(m+n)\},$$

причем корреляционная матрица B общей совокупности $\xi(1), \ldots$ $\ldots, \xi(m+n)$ является невырожденной, количество информации $I(\xi_1, \xi_2)$ может быть выражено следующей формулой:

$$I(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}\log\frac{(\det B_1)(\det B_2)}{\det B},$$

где B_1 и B_2 — корреляционные матрицы соответствующих совокупностей ξ_1 и ξ_2.

ε-энтропия. Пусть $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — векторные случайные величины в n-мерном евклидовом пространстве X и $\rho(x, y)$ — некоторая неотрицательная функция, определяющая условие близости величин ξ и η, которое выражается следующим соотношением:

$$\mathsf{M}\rho(\xi, \eta) \leqslant \varepsilon.$$

Величину $H=H_\varepsilon$, определенную как

$$H_\varepsilon = \inf I(\xi, \eta),$$

обычно называют *ε-энтропией* случайной величины ξ (нижняя грань берется по всем случайным величинам η, удовлетворяющим указанному условию ε-близости к случайной величине ξ).

Пусть $\rho(x, y)=\rho(|x-y|)$ и существует производная $\rho'(0)$ $(0<\rho'(0)<\infty)$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ имеет место асимптотическая формула

$$H_\varepsilon = n\log\frac{1}{\varepsilon} + h(\xi) + \log\frac{\Gamma(n/2)\,[n\cdot\rho'(0)]^n}{(2\pi)^{n/2}\,(n-1)!\,e^n} + O(1),$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция и $h(\xi)$ — так называемая *дифференциальная энтропия* случайной величины ξ:

$$h(\xi) = -\int_X p_\xi(x)\log p_\xi(x)\,dx$$

($p_\xi(x)$ — плотность распределения вероятностей, удовлетворяющая весьма широким условиям, которые выполняются, например, если плотность $p_\xi(x)$ ограничена и $h(\xi) > -\infty$).

Пусть

$$\rho(x, y) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^\alpha\right)^\beta, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Тогда

$$H_\varepsilon = \frac{n}{\alpha\beta}\log\frac{1}{\varepsilon} + h(\xi) - \log\left\{\left(\frac{\alpha\beta e}{n}\right)^{n/(\alpha\beta)}\left[\frac{2}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^n \frac{\Gamma(n/(\alpha\beta))}{\beta\Gamma(n/\alpha)}\right\} + O(1).$$

В частности, при $\alpha = 2$, $\beta = 1$ имеет место асимптотическая формула [57]

$$H_\varepsilon = \frac{n}{2}\log\frac{1}{\varepsilon} + h(\xi) - n\log\sqrt{2\pi e} + O(1).$$

Скорость передачи информации. Пусть пара случайных процессов $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ образует стационарный в узком смысле процесс, $\xi^{[u, v]}$ — совокупность значений $\xi(t)$ $(u \leqslant t \leqslant v)$, и пусть

$$I\left\{\xi_1, \xi_2^{[t_0, t]} \middle| \xi_2^{[-\infty, t_0]}\right\}$$

— условное количество информации о процессе $\xi_1 = \xi_1^{[-\infty, \infty]}$, содержащееся в отрезке $\xi_2^{[t_0, t]}$ процесса ξ_2. Среднее количество указанной информации представляет собой линейно растущую функцию от t:

$$MI\left\{\xi_1, \xi_2^{[t_0, t]} \middle| \xi_2^{[-\infty, t_0]}\right\} = (t - t_0)\mathcal{T}(\xi_1, \xi_2).$$

Фигурирующая здесь величина $\mathcal{T}(\xi_1, \xi_2)$ называется *средней скоростью передачи информации* стационарным процессом ξ_2 о стационарном процессе ξ_1 или, короче, *скоростью передачи информации.*

Скорость передачи информации $\mathcal{T}(\xi_1, \xi_2)$ обладает рядом свойств, аналогичных свойствам количества информации. Но, кроме того, она имеет и специфические свойства. Например, для всякого сингулярного случайного процесса ξ_2, т. е. такого процесса, все значения $\xi_2(t)$ которого являются функциями от совокупности величин $\xi_2^{[-\infty, t_0]}$ (t_0 может быть выбрано любым), имеет место равенство

$$\mathcal{T}(\xi_1, \xi_2) = 0.$$

Для всякого же регулярного случайного процесса ξ_2 равенство $\mathcal{T}(\xi_1, \xi_2) = 0$ справедливо лишь тогда и только тогда, когда случайный процесс ξ_1 не зависит от процесса ξ_2 (это говорит, в частности, о том, что в некоторых случаях $\mathcal{T}(\xi_1, \xi_2) \neq \mathcal{T}(\xi_2, \xi_1)$).

При дополнительных условиях типа регулярности скорость передачи информации $\mathscr{T}(\xi_1, \xi_2)$ совпадает с пределом

$$\mathscr{T}(\xi_1, \xi_2) = \lim_{t-t_0\to\infty} \frac{1}{t-t_0} I\left(\xi_1^{[t_0,t]}, \xi_2^{[t_0,t]}\right),$$

где $I\left(\xi_1^{[t_0,t]}, \xi_2^{[t_0,t]}\right)$ — количество информации об отрезке процесса $\xi_1^{[t_0,t]}$, заключённое в $\xi_2^{[t_0,t]}$. Так будет, например, когда время t меняется дискретно, а отдельные величины $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ могут принимать лишь конечное число различных значений или когда распределение вероятностей процессов ξ_1 и ξ_2 является гауссовским. В случае непрерывного времени t так будет для гауссовских процессов, когда спектральная плотность $f(\lambda)$ процесса $\xi_2(t)$ удовлетворяет условию

$$0 < c \leqslant \lambda^{2n} f(\lambda) \leqslant C < \infty.$$

Пример. Пусть стационарный процесс $\xi = \xi(t)$ представляет собой последовательность величин, каждая из которых принимает значения из некоторого «алфавита» X, состоящего из конечного числа символов $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Предположим, что вероятность появиться на фиксированном месте определенному символу x_i есть p_i, а вероятность появиться за ним символу x_j не зависит от предшествующих x_i значений и есть p_{ij}:

$$\mathrm{P}\{\xi(t) = x_i\} = p_i,$$
$$\mathrm{P}\{\xi(t+1) = x_j \mid \xi(t) = x_i, \xi(t-1), \ldots\} = p_{ij}.$$

Другими словами, $\xi = \xi(t)$ — стационарная цепь Маркова с переходными вероятностями $\{p_{ij}\}$ и стационарным распределением $\{p_i\}$. Тогда скорость передачи информации стационарным процессом $\xi(t)$ будет

$$\mathscr{T}(\xi, \xi) = -\sum_{i,j} p_i p_{ij} \log p_{ij}.$$

В частности, если $\xi = \xi(t)$ — последовательность независимых величин (в этом случае $p_{ij} = p_j$), то

$$\mathscr{T}(\xi, \xi) = -\sum_j p_j \log p_j.$$

Скорость передачи информации в случае гауссовских стационарных процессов. Пусть $\xi_1 = \xi_1(t)$ и $\xi_2 = \xi_2(t)$ — стационарные гауссовские процессы со спектральными плотностями $f_{11}(\lambda)$, $f_{22}(\lambda)$ и взаимной спектральной плотностью $f_{12}(\lambda)$, причем процесс $\xi_2 = \xi_2(t)$ является регулярным. Тогда

$$\mathscr{T}(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{4\pi} \int \log\left[1 - \frac{|f_{12}(\lambda)|^2}{f_{11}(\lambda) f_{22}(\lambda)}\right] d\lambda.$$

Рассмотрим следующее условие близости гауссовских стационарных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$:

$$\mathsf{M}|\xi_1(t)-\xi_2(t)|^2 \leqslant \delta^2.$$

Наименьшая скорость передачи информации

$$H=\inf \mathcal{T}(\xi_1, \xi_2),$$

совместимая с указанным условием «δ-точности», выражается следующей формулой:

$$H=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{f_{11}(\lambda)\geqslant\theta^2} \log\frac{f_{11}(\lambda)}{\theta^2}\,d\lambda=-\frac{1}{4\pi}\int\log\left[1-\frac{|f_{12}(\lambda)|^2}{f_{11}(\lambda)f_{22}(\lambda)}\right]d\lambda,$$

где

$$f_{22}(\lambda)=\begin{cases} f_{11}(\lambda)-\theta^2 & \text{при } f_{11}(\lambda)\geqslant\theta^2, \\ 0 & \text{при } f_{11}(\lambda)<\theta^2, \end{cases} \qquad f_{12}(\lambda)=f_{22}(\lambda),$$

а параметр θ^2 определяется из равенства

$$\int[f_{11}(\lambda)-f_{22}(\lambda)]\,d\lambda=\delta^2.$$

Эта формула показывает, какого типа спектральная плотность $f_{22}(\lambda)$ должна быть у регулярного стационарного процесса $\xi_2(t)$, который несет минимальную информацию $\mathcal{T}(\xi_1, \xi_2)\approx H$ о процессе $\xi_1(t)$ (рис. 27). В случае дискретного времени, когда $f_{11}(\lambda)\geqslant\theta^2$ при всех λ, $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$, нижняя грань H скорости передачи достигается для такого процесса $\xi_2(t)$ (со спектральной плотностью $f_{22}(\lambda)$, задаваемой приведенной выше формулой), который связан с процессом $\xi_1(t)$ формулой

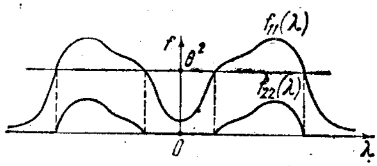


Рис. 27

$$\xi_1(t)=\xi_2(t)+\zeta(t),$$

где $\zeta(t)$ — стационарный гауссовский шум, не зависящий от процесса $\xi_2(t)$; в общем случае формула для $f_{22}(\lambda)$ задает предельный вид соответствующей спектральной плотности регулярного процесса $\xi_2(t)$.

В случае, когда спектральная плотность $f_{11}(\lambda)$ приближенно выражается формулой

$$f_{11}(\lambda)\approx\begin{cases} \sigma^2/(2w) & \text{при } |\lambda\pm\lambda_0|\leqslant w/2, \\ 0 & \text{при остальных } \lambda \end{cases}$$

(рис. 28), соответствующая минимальная скорость передачи информации $\mathcal{H}$ может быть вычислена по приближенной формуле вида

$$H \approx \frac{w}{2\pi} \log \frac{\sigma^2}{\delta^2},$$

$$\sigma^2 = \mathsf{M}[\xi(t)]^2.$$

Симметричный канал без памяти. Рассмотрим симметричный канал без памяти с конечным числом входных сигналов x_1, когда передаваемый сигнал x_1 с вероятностью $1-p$ правильно принимается на выходе канала связи, а с вероятностью p искажается, причем все возможные искажения равновероятны: вероятность того, что на выходе будет сигнал x_2, равна $p/(N-1)$ для любого $x_2 \neq x_1$, где N — общее число сигналов. Для такого канала связи пропускная способность

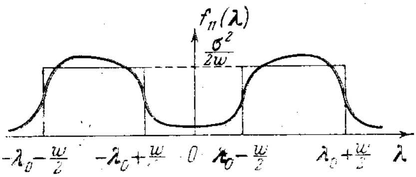


Рис. 28

$$\mathscr{C} = \sup \mathscr{T}(\xi_1, \xi_2)$$

достигается в случае, когда на вход поступает последовательность независимых и равномерно распределенных сигналов $\ldots, \xi_1(-1), \xi_1(0), \xi_1(1), \ldots$; эта пропускная способность выражается формулой

$$\mathscr{C} = \log_2 N - (1-p)\log_2(1-p) - p\log_2 \frac{p}{N-1}.$$

Пропускная способность при наличии гауссовских шумов. Рассмотрим канал связи, на входе которого сигналы образуют стационарный процесс

$$\xi_1 = \xi_1(t), \quad \mathsf{M}[\xi_1(t)]^2 < \infty.$$

Пусть при прохождении сигнала $\xi_1 = \xi_1(t)$ он подвергается линейному преобразованию A_φ со спектральной характеристикой $\varphi(\lambda)$ и, кроме того, на него накладывается аддитивный стационарный гауссовский шум $\zeta = \zeta(t)$, так что на выходе канала имеется случайный процесс $\xi_2(t)$ вида

$$\xi_2(t) = A_\varphi \xi_1(t) + \zeta(t).$$

Предположим, далее, что ограничения на входной процесс состоят в том, что

$$\mathsf{M}[\xi_1(t)]^2 \leqslant \Delta^2$$

(постоянная Δ^2 ограничивает среднюю энергию входного сигнала). Пропускная способность такого канала может быть вычислена по формуле

$$\mathscr{C} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\varphi(\lambda)|^2\theta^2 \geqslant f_{\zeta\zeta}(\lambda)} \log \frac{|\varphi(\lambda)|^2 \theta^2}{f_{\zeta\zeta}(\lambda)} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int \log \left[1 - \frac{|\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)}{|\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda) + f_{\zeta\zeta}(\lambda)} \right] d\lambda$$

(в последнем выражении интегрирование ведется в пределах $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$ для дискретного времени t и в пределах $-\infty < \lambda < \infty$ для непрерывного t), где $f_{\zeta\zeta}(\lambda)$ — спектральная плотность гауссовского процесса $\zeta(t)$, функция $f(\lambda)$ имеет вид

$$f(\lambda) = \begin{cases} \theta^2 - f_{\zeta\zeta}(\lambda)\,|\varphi(\lambda)|^{-2} & \text{при } \theta^2 \geqslant f_{\zeta\zeta}(\lambda)\,|\varphi(\lambda)|^{-2}, \\ 0 & \text{при } \theta^2 < f_{\zeta\zeta}(\lambda)\,|\varphi(\lambda)|^{-2}, \end{cases}$$

а параметр θ^2 определяется из равенства

$$\int f(\lambda)\, d\lambda = \Delta^2.$$

Нужно сказать, что если функция $f(\lambda)$ представляет собой спектральную плотность *регулярного* стационарного гауссовского процесса $\xi_1(t)$, то этот процесс, рассматриваемый как входной сигнал, обеспечивает максимальную скорость передачи информации:

$$\mathscr{T}(\xi_1, \xi_2) = \mathscr{C}.$$

Однако в наиболее интересных случаях, когда время t меняется непрерывно, функция $f(\lambda)$ обращается в нуль на тех интервалах частот λ, где уровень шума сравнительно высок (отличные от нуля значения $f(\lambda)$ сосредоточены в основном на тех интервалах частот λ, где уровень шума сравнительно мал), и поэтому не может служить спектральной плотностью регулярного процесса. Более того, если в качестве входного сигнала выбрать процесс $\xi_1(t)$ с такой спектральной плотностью $f(\lambda)$, то этот сигнал будет сингулярным и соответствующая скорость передачи информации $\mathscr{T}(\xi_1, \xi_2)$ будет равна нулю, а не максимально возможному значению $\mathscr{C}$, указанному выше.

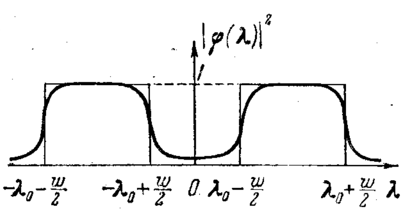


Рис. 29

Тем не менее приведенные выражения полезны, так как позволяют приблизительно представить вид спектральной плотности $f(\lambda)$ регулярного входного сигнала $\xi_1(t)$, обеспечивающей скорость передачи $\mathscr{T}(\xi_1, \xi_2)$, близкую к максимальному значению $\mathscr{C}$. С практической точки зрения наиболее интересен случай, когда канал связи имеет ограниченную полосу W пропускаемых частот, т. е. когда спектральная характеристика φ выражается формулой

$$|\varphi(\lambda)|^2 \approx \begin{cases} 1 & \text{при } |\lambda \pm \lambda_0| \leqslant W/2, \\ 0 & \text{при остальных } \lambda \end{cases}$$

(рис. 29), а проходящий через канал шум имеет равномерный спектр:

$$f_{\zeta\zeta}(\lambda) \approx \begin{cases} \sigma^2/(2W) & \text{при } |\lambda \pm \lambda_0| \leqslant W/2, \\ 0 & \text{при остальных } \lambda. \end{cases}$$

В этом случае пропускная способность может быть вычислена по приближенной формуле

$$\mathscr{C} \approx \frac{W}{2\pi} \log\left(1 + \frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right).$$

При этом входной сигнал $\xi_1(t)$, обеспечивающий скорость передачи информации $\mathscr{T}(\xi_1, \xi_2)$, близкую к максимальной, является гауссовским стационарным процессом со спектральной плотностью $f(\lambda)$ вида

$$f(\lambda) \approx \begin{cases} \Delta^2/(2W) & \text{при } |\lambda \pm \lambda_0| \leqslant W/2, \\ 0 & \text{при остальных } \lambda, \end{cases}$$

так что параметры Δ^2 и σ^2 имеют следующий физический смысл:

$\Delta^2 = \mathsf{M}|\xi_1(t)|^2$ — энергетический уровень входного сигнала,

$\sigma^2 = \mathsf{M}|\zeta(t)|^2$ — энергетический уровень шума.

Рекомендуемая литература: [7, 38, 50, 69, 79, 95, 98, 121, 122, 123, 133].

ДОБАВЛЕНИЕ

Таблица I

Наиболее употребительные непрерывные распределения вероятностей

Название	Формула для плотности и область ее определения	Характеристическая функция
Нормальное распределение	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty$	$e^{-t^2/2}$
Равномерное распределение	$1, \ 0 < x < 1$	$(e^{it} - 1)/it$
Треугольное распределение	$1 - \|x\|, \quad \|x\| < 1$	$2(1 - \cos t)/t^2$
Выпуклое распределение Хинчина	$\frac{1}{\pi}(1 - \cos x)/x^2, \ -\infty < x < \infty$	$1 - \|t\|, \ \|t\| < 1;$ $0, \ \|t\| > 1$
Показательное распределение	$e^{-x}, \quad x > 0$	$(1 - it)^{-1}$
Хи-квадрат-распределение с степенями свободы	$\frac{1}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x}, \quad x > 0$	$(1 - 2it)^{-n/2}$
Гамма-распределение	$\frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x}, \ x > 0, \ p > 0$	$(1 - it)^{-p}$
Распределение Лапласа	$\frac{1}{2} e^{-\|x\|}, \quad -\infty < x < \infty$	$(1 + t^2)^{-1}$
Распределение Коши	$\frac{1}{\pi}(1 + x^2)^{-1}, \ -\infty < x < \infty$	$e^{-\|t\|}$
Логистическое распределение	$e^{-x}(1 + e^{-x})^{-2},$ $-\infty < x < \infty$	$\Gamma(1 + it)\Gamma(1 - it)$
Устойчивое распределение с показателем 1/2	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-1/2x},$ $-\infty < x < \infty$	$e^{-\|t\|^{1/2}(1 + it/\|t\|)}$
Бета-распределение	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1 - x)^{b-1},$ $0 < x < 1$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{k \geqslant 0} \frac{(it)^k \Gamma(a+k)}{k!\,\Gamma(a+b+k)}$
Логарифмическое гамма-распределение	$\frac{1}{\Gamma(p)} \exp(px - e^x),$ $-\infty < x < \infty$	$\Gamma(p + it)/\Gamma(p)$

Таблица II

Наиболее употребительные дискретные распределения вероятностей

Название	Формула для вероятностей	Характеристическая функция
Распределение Бернулли	$p_0 = p, \quad p_1 = 1 - p$	$1 + p(e^{it} - 1)$
Биномиальное распределение	$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, \ldots, n$	$(1 + p(e^{it} - 1))^n$
Отрицательное биномиальное распределение (распределение Паскаля)	$p_k = C_{r+k-1}^k p^r (1-p)^k$, $k = 0, 1, \ldots$	$\left[\dfrac{p}{1-(1-p)e^{it}}\right]^r$
Геометрическое распределение	$p_k = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, \ldots$	$\dfrac{p}{1-(1-p)e^{it}}$
Распределение Пуассона	$p_k = \dfrac{a^k}{k!} e^{-a}$, $k = 0, 1, \ldots$	$e^{a(e^{it}-1)}$
Логарифмическое распределение	$p_k = -\dfrac{(1-p)^k}{k \ln p}$, $k = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{1}{\ln p} \ln\left(1 - (1-p)e^{it}\right)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арак Т. В. О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I, II // Теория вероятн. и ее примен.— 1981.— Т. XXVI, в. 2, 3.— С. 225—245; 449—463.
2. Арак Т. В. Уточнение нижней оценки для скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова // Теория вероятн. и ее примен.— 1982.— Т. XXVII, в. 4.— С. 767—772.
3. Бартлет М. С. Введение в теорию случайных процессов // Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1958.
4. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей.— 4-е изд.— М.— Л.: Гостехиздат, 1946.
5. Бикялис А. Неравенства для многомерных характеристических функций // Лит. матем. сб.— 1970.— Т. X, № 1.— С. 5—12 .
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер // Пер. с англ.— М.: Наука, 1977.
7. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление // Пер. с англ.— М.: Мир, 1974.
8. Большев Л. Н. О преобразованиях случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1959.— Т. IV, в. 1.— С. 136—149.
9. Большев Л. Н. Асимптотические пирсоновские преобразования // Теория вероятн. и ее примен.— 1963.— Т. VIII, в. 1.— С. 129—155.
10. Большев Л. Н., Золотарев В. М., Кедрова Е. С., Рыбинская М. А. Таблицы устойчивых односторонних распределений // Теория вероятн. и ее примен.— 1970.— Т. XV, в. 2.— С. 309—319.
11. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики.— 3-е изд.— М.: Наука, 1983.
12. Борель Э. Вероятность и достоверность.— М.: Физматгиз, 1961.
13. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.— М.: Наука, 1972.
14. Боровков А. А. Теория вероятностей.— 2-е изд., доп.— М.: Наука, 1986.
15. Вальд А. Последовательный анализ // Пер. с англ.— М.: Физматгиз, 1960.
16. Варадарайн В. С. Меры на топологических пространствах // Матем. сб.— 1961.— Т. 55(97), № 1.— С. 35—100.
17. Волконский В. А., Розанов Ю. А. Некоторые предельные теоремы для случайных функций // Теория вероятн. и ее примен.— 1961.— Т. VI, в. 2.— С. 202—215.
18. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые приложения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства // Обобщенные функции, вып. IV.— М.: Физматгиз, 1961.
19. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов.— 2-е изд.— М.: Наука, 1977.
20. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1.— М.: Наука, 1971.
21. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев: Наукова думка, 1968.

22. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.— 5-е изд.— М.: Наука, 1969.
23. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.— М.: Гостехиздат, 1949.
24. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей.— 8-е изд., испр.— М.: Наука, 1976.
25. Гренандер У. Вероятности на алгебраических структурах.— М.: Мир, 1965.
26. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория // Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1962.
27. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов // Пер. с англ.— М.: Сов. радио, 1965.
28. Добрушин Р. Л. Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации // УМН.— 1959.— Т. XIV.— С. 3—104.
29. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы // Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1956.
30. Дынкин Е. Б. Основания теории марковских процессов.— М.: Физматгиз, 1959.
31. Дынкин Е. Б. Управляемые случайные последовательности // Теория вероятн. и ее примен.— 1965.— Т. X, в. 1.— С. 3—18.
32. Дынкин Е. Б. Марковские процессы.— М.: Физматгиз, 1963.
33. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова.— М.: Наука, 1967.
34. Золотарев В. М. Несколько новых неравенств в теории вероятностей, связанных с метрикой Леви // ДАН СССР.— 1970.— Т. 190, № 5.— С. 1019—1021.
35. Золотарев В. М. Односторонняя трактовка и уточнение некоторых неравенств чебышевского типа // Лит. матем. сб.— 1965.— Т. V, № 2.— С. 233—250.
36. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука, 1965.
37. Ибрагимов И. А., Маслова Н. В. О среднем числе вещественных нулей случайных полиномов // Теория вероятн. и ее примен.— 1971.— Т. XVI, в. 2, 3.— С. 229—248; 495—503.
38. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские процессы.— М.: Наука, 1971.
39. Ивашев-Мусатов О. С. О коэффициентах Фурье — Стилтьеса сингулярных функций // ДАН СССР.— 1952.— Т. 82, № 1.— С. 9—11.
40. Ивашев-Мусатов О. М. О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1957.— Т. 21.— С. 559—578.
41. Ито К. Вероятностные процессы // Математика: Сб. переводов.— 1960.— Т. 1.
42. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории // Пер. с англ.— М.: Мир, 1968.
43. Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел // Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1963.
44. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике // Пер. с англ.— М.: Мир, 1965.
45. Келли Т. Л. Статистические таблицы.— М.: ВЦ АН СССР, 1966.
46. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова // Пер. с англ.— М.: Наука, 1970.
47. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности.— М.: Наука, 1972.
48. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей.— 2-е изд.— М.: Наука, 1974.
49. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1985.

50. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения // Пер. с англ.— М.: Мир, 1969.
51. Круглов В. М. Замечание к теории безгранично делимых законов // Теория вероятн. и ее примен.— 1969.— Т. XV, в. 2.— С. 330—336.
52. Кубилюс Й. П. Вероятностные методы теории чисел.— Вильнюс: Госполитнаучиздат, 1962.
53. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение // Пер. с франц.— М.: Мир, 1972.
54. Леонов В. П. Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов.— М.: Наука, 1964.
55. Леонов В. П., Ширяев А. Н. К технике вычисления семиинвариантов // Теория вероятн. и ее примен.— 1959.— Т. IV, в. 3.— С. 342—355.
56. Линник Ю. В. Разложения вероятностных законов.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1960.
57. Линьков Ю. Н. Вычисление ε-энтропии случайных величин при малых ε // Проблемы передачи инф-ии.— 1965.— Т. 1.— С. 18—27.
58. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов // Труды МИАН.— 1968.— Т. 104.— С. 135—180.
59. Лоэв М. Теория вероятностей // Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1962.
60. Лукач Е. Характеристические функции // Пер. с англ.— М.: Наука, 1979.
61. Лэннинг Дж. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в системах автоматического регулирования // Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1958.
62. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей // Пер. с франц.— М.: Мир, 1969.
63. Нейман Ю. В. Вводной курс теории вероятностей и математической статистики // Пер. с англ.— М.: Наука, 1968.
64. Оуэн Д. Б. Сборник статистических таблиц.— М.: ВЦ АН СССР, 1966.
65. Пагурова В. И. Таблицы неполной гамма-функции.— М.: ВЦ АН СССР, 1963.
66. Петров В. В. Локальная теорема для плотностей сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1956.— Т. I, в. 3.— С. 349—357.
67. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.
68. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.— М.: Наука, 1987.
69. Пинскер М. С. Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов.— М.: АН СССР, 1960.
70. Прохоров Ю. В. The method of characteristic functionals // Proc. 4-th Berkeley Symp. V. 2. Berkeley.— Los Angeles: Univ. Press, 1961.— P. 403—419.
71. Прохоров Ю. В. О случайных мерах на компакте // ДАН СССР.— 1961.— Т. 138.— С. 53—55.
72. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятн. и ее примен.— 1956.— Т. I, в. 2.— С. 177—238.
73. Прохоров Ю. В. Многомерные распределения: неравенства и предельные теоремы. Сер. Итоги науки.— М.: ВИНИТИ, 1972.
74. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ // Пер. с англ.— М.: Мир, 1969.
75. Рихтер В. Многомерные локальные теоремы для больших уклонений // Теория вероятностей и ее примен.— 1958, т. III, в. 1.— С. 107—114.
76. Рогозин Б. А., Боровков А. А. О центральной предельной теореме в многомерном случае // Теория вероятн. и ее примен.— 1965.— Т. X, в. 1.— С. 61—69.

77. Розанов Ю. А. Случайные процессы. Краткий курс.— 2-е изд.— М.: Наука, 1979.
78. Розанов Ю. А. Гауссовские бесконечномерные распределения // Труды МИАН.— 1968.— Т. 108.— С. 1—134.
79. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы.— М.: Физматгиз, 1963.
80. Садикова С. М. Некоторые неравенства лдя характеристических функций // Теория вероятн. и ее примен.— 1966.— Т. XI, в. 3.— С. 500—506.
81. Сазонов В. В. О совершенных мерах // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1962.— Т. 26.— С. 391—414.
82. Сазонов В. В. О распределениях в пространствах, двойственных к вполне упорядоченным линейным пространствам // Труды МИАН.— 1964.— Т. 71.— С. 102—103.
83. Сазонов В. В., Тутубалин В. Н. Распределения вероятностей на топологических группах // Терия вероятн. и ее примен.— 1966.— Т. XI, в. 1.— С. 13—55.
84. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы.— М.: Наука, 1971.
85. Севастьянов Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложения к телефонным системам с отказами // Теория вероятн. и ее примен.— 1957.— Т. II, в. 1.— С. 106—115.
86. Сираждинов С. Х. Предельные теоремы для однородных цепей Маркова.— Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1955.
87. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов.— Киев: Изд-во КГУ, 1961.
88. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями.— 2- изд.— М.: Наука, 1986.
89. Скороход А. В., Слободенюк Н. П. Предельные теоремы для случайных блужданий.— Киев: Наукова думка, 1970.
90. Спицер Ф. Принципы случайного блуждания // Пер. с англ.— М.: Мир, 1969.
91. Статулявичус В. А. On large deviations // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.— 1966.— B. 6, H. 3.— S. 133—144.
92. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применения к теории оптимального управления.— М.: Изд-во МГУ, 1966.
93. Таблицы вероятностных функций. Т. 2.— М.: ВЦ АН СССР, 1959.
94. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов // Пер. с англ.— М.: Наука, 1971.
95. Файнстейн А. Основы теории информации // Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1960.
96. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— Т. 1, 2 // Пер. с англ.— 3-е изд.— М.: Мир, 1984.
97. Халмош П. Теория меры // Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1953.
98. Халмош П. Лекции по эргодической теории // Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1959.
99. Хант А. Д. Марковские процессы и потенциал // Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1962.
100. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов // Пер. с англ.— М.: Мир, 1966.
101. Хасьминский Р. З. Распределение вероятностей для функционалов от траектории случайного процесса диффузионного типа // ДАН СССР.— 1955.— Т. 104, № 1.— С. 22—25.
102. Хейер Х. Вероятностные меры на локально компактных группах // Пер. с англ.— М.: Мир, 1981.
103. Хенгартнер В., Теодореску Р. Функции концентрации.— М.: Наука, 1980.
104. Хинчин А. Я. Асимптотические законы теории вероятностей.— М.— Л.: ОНТИ, 1936.

105. Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы // Пер. с англ.— М.: Сов. радио, 1964.
106. Ченцов Н. Н. Дубовские множества и дубовские распределения вероятностей // Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятн. и матем. статистике.— Вильнюс, 1962.— С. 483—493.
107. Чжун Кайлай. Однородные цепи Маркова // Пер. с англ.— М.: Мир, 1964.
108. Шиганов И. С. Об уточнении верхней оценки константы в остаточном члене центральной предельной теоремы // Пробл. устойчивости стох. моделей. Тр. семинара.— М.: ВНИИсист. иссл., 1982.— С. 109—115.
109. Ширяев А. Н. Стохастические уравнения нелинейной фильтрации скачкообразных марковских процессов // Проблемы передачи информации.— 1966.— № 3.— С. 1—22.
110. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1976.
111. Ширяев А. Н. Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов // Теория вероятн. и ее примен.— 1960.— Т. V, в. 3.— С. 293—313.
112. Ширяев А. Н. Об условиях эргодичности стационарных процессов в терминах моментов старших порядков // Теория вероятн. и ее примен.— 1963.— Т. VIII, в. 4.— С. 470—473.
113. Ширяев А. Н. Вероятность.— М.: Наука, 1980.
114. Шэннон К. Э. Работы по теории информации и кибернетике // Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1963.
115. Юринский В. В. Оценки для характеристических функций некоторых вырожденных многомерных распределений // Теория вероятн. и ее примен.— 1972.— Т. XVII, в. 1.— С. 99—110.
116. Юринский В. В. О бесконечномерном варианте неравенств С. Н. Бернштейна // Теория вероятн. и ее примен.— 1970.— Т. XV, в. 1.— С. 106—107.
117. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН.— 1952.— Т. VII, № 5.— С. 3—168.
118. Яглом А. М. Корреляционная теория процессов со случайными стационарными приращениями // Матем. сб.— 1955.— Т. 37, в. 1.— С. 141—196.
119. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1973.
120. Anderson T. W. A modification of the sequential probability test to reduce the sample size // Ann. Math. Statist.— 1960.— V. 31, № 1.— P. 165—198.
121. Bibliography on time series and stochastic processes/Ed. H. O. A. Wold.— Edinburg.— L.: Oliver and Boyd, 1965.
122. Billingsley P. Ergodic theory and information.— N. Y.: Wiley, 1965.
123. Blanc-Lapierre A., Fortet R. Theorie des fonctions aleatotoires.— Paris: Masson, 1963.
124. Blumenthal R. M., Getoor D. K. Markov processes and potential theory.— N. Y.: Academy Press, 1968.
125. Bohner S. Harmonic analysis and the theory of probability.— Berkeley — Los Angeles: Univ. Press, 1955.
126. Clark J. M. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals // Ann. Math. Statist. — 1970.— V. 41.— P. 1282—1295.
127. Cramer H. Stochastic processes as curves in Hilbert space // Теория вероятн. и ее примен.— 1964.— Т. IX.— С. 193—204.
128. Esseen K. G. Fourier analysis of distribution functions // Acta Math.— 1945.— V. 77.— P. 1—125.
129. Esseen K. G. On the Kolmogorov — Rogozin inequality for the concentration function // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.— 1966.— B. 5, H. 3.— S. 210—216.

130. Feller W. Generalization of a probability limit theorem of Cramer // Trans. Amer. Math. Soc.— 1943.— V. 54, № 2.— P. 361—372.
131. Fisz M. Infinitely divisible distributions: recent results and applications // Ann. Math. Statist.— 1962.— V. 33.— P. 68—84.
132. Fleming W. H. The Cauchy problem for degenerate parabolic equations // J. Math. and Mech.— 1964.— V. 13, № 6.— P. 987—1008.
133. Grenander U., Rosenblatt M. Statistical analysis of stationary time series.— Stockholm: Almquist, 1956.
134. Hewitt E., Ritter G. On the integrability of Fourier transforms on groups. Part II: Fourier — Stieltjes transforms of singular measures // Proc. Roy. Irish Acad.— 1976.— V. 76 A, № 25.— P. 265—288.
135. Hitsuda M. Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener processes // Osaka J. Math.— 1968.— V. 5.— P. 299—312.
136. Ito Y. Invariant measures for Markov processes // Trans. Amer. Math. Soc.— 1964.— V. 110, № 1.— P. 152—184.
137. Kesten H. A sharper form of the Doeblin — Levy — Kolmogoroff — Rogozin inequality for concentration functions // Math. Skand.— 1969.— V. 25, № 1.— P. 133—144.
138. Le Cam L. Remarques sur la theoreme limit central dans les espaces localement convexes.— In: Les probabilites sur les structures algebriques.— Paris: CNRS, 1970.— P. 233—249.
139. Los J., Marczewsk E. Extensions of measure // Fund. Math.— 1949.— V. 36.— P. 267—276.
140. McKean H. P. Stochastic integrals.— N. Y.: Academic Press, 1969.
141. Nelson E. Regular probability measures on function space // Ann. Math.— 1969.— V. 69.— P. 630—643.
142. Parthasarathy K. R. Rrobability measures on metric spaces.— N. Y.: Academic, 1967.
143. Pearson K. Tables of the incomplete beta-function.— L.: Biometric Laboratory, 1934.
144. Roming H. G. 50—100 binomial tables.— N. Y.: Wiley, 1953.
145. Sazonov V. V. Normal approximations: Some recent advances. Lect. Notes in Math., N 879.— Berlin — Heidelberg.— N. Y.: Springer, 1981.
146. Slepian D. The one-side barrier problem for Gaussian noise // Bell System Techn. J.— 1962.— V. 41, № 2.— P. 463—501.
147. Tables of the binomial probability distribution.— Washington: N. B. S., 1950.
148. Uspensky J. Introduction to mathematical probability. N. Y.: McGraw-Hill, 1937.
149. Williamson E., Breatherton M. H. Tables of negative binomial probability distribution.— L.— N. Y.: Wiley, 1963.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Юрий Васильевич Прохоров
Юрий Анатольевич Розанов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные понятия
Предельные теоремы
Случайные процессы

Серия «Справочная математическая библиотека»

Редактор *Е. Ю. Ходан*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректоры *Н. Д. Дорохова*, *Н. Б. Румянцева*

ИБ № 32299

Сдано в набор 12.11.86. Подписано к печати 02.07.87. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 3. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 25. Усл. кр.-отт. 25. Уч.-изд. л. 24,33. Тираж 25 500 экз. Заказ № 448.
Цена 1 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск 77, Станиславского, 25

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15