В.П. Савчук

БАЙЕСОВСКИЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ

НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В.П. Савчук

БАЙЕСОВСКИЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ

НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.172
С13
УДК 519. 31

С а в ч у к В.П. **Байесовские методы статистического оценивания: Надежность технических объектов.** — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 328 с. ISBN 5-02-014103-8.

Описывается современное состояние прикладной теории байесовского статистического оценивания. Особое внимание уделяется непараметрическим методам и способам выбора априорного распределения. Исследуется ряд новых типов байесовских оценок: квазипараметрические оценки, байесовские условно минимаксные оценки, оценки вероятности безотказной работы на основе параметрических моделей работоспособности с аддитивной погрешностью. Показываются возможности байесовского подхода при оценивании показателей надежности в расчетных ситуациях, которые практически исчерпывают многообразие задач анализа безотказности технических объектов.

Для специалистов в области прикладного статистического анализа и теории надежности, инженеров, занимающихся исследованием надежности технических объектов, а также для студентов и аспирантов.

Табл. 39. Ил. 41. Библиогр. 247 назв.

Р е ц е н з е н т ы:
доктор технических наук *И.А. Ушаков*,
доктор физико-математических наук *Ю.К. Беляев*,
доктор физико-математических наук *Д.М. Чибисов*

$С\frac{1402010000-117}{053(02)-89}147\text{-}89$

ISBN 5-02-014103-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Определяющей тенденцией современного этапа развития научных исследований в различных областях знания является глубокое проникновение в существо решаемых проблем, стремление построить по возможности полное представление изучаемого процесса или явления, привлекая для этого всю имеющуюся информацию. В равной мере это относится к научным и техническим дисциплинам, использующим методы прикладной математической статистики, и, в частности, к теории надежности технических объектов. Адекватным отражением упомянутой тенденции применительно к прикладным областям математической статистики является использование байесовского подхода, который позволяет принимать решение на основе как объективных данных, получаемых при испытаниях, так и неформального опыта исследователя. Стремление к применению байесовского подхода, наблюдаемое в последнее время в различных областях науки, вызвано его естественным сопряжением с любого рода человеческой деятельностью, в процессе которой приобретается новое знание или создаются материальные объекты. Вместе с тем байесовскую теорию отличают внутренняя логическая стройность и простота, что делает ее еще более привлекательной для прикладных целей.

История знает немало случаев, когда идеи, появившиеся в глубине веков, возрождаются заново в более поздние периоды и определяют современные тенденции развития соответствующей области знаний. Подобный феномен происходит и с байесовским подходом. Со времени выхода изначальной работы Томаса Байеса прошло более 200 лет. В настоящее же время мы являемся свидетелями повышенного интереса к байесовской теории среди специалистов в области математической статистики и различных прикладных областей знаний. Разумеется, речь идет не о простой доработке идей Байеса, а о переосмысленной доктрине, которая прямо или косвенно впитала в себя все лучшие достижения, накопленные в математической статистике за последние сто лет. Современное состояние байесовской теории многие ученые называют "необайесианством", хотя дело здесь совсем не в названии, а в небывалом всплеске новых идей и решений применительно к различным теоретическим и прикладным областям знаний.

Основной замысел этой книги заключается в показе привлекательных сторон байесовской методологии при решении задач надежности. Содержание книги преследует также еще две более конкретные цели:

изложить современное состояние прикладной теории байесовского статистического оценивания применительно к исследованию вопросов надежности;

показать возможности байесовского подхода при оценивании вероятности безотказной работы в расчетных ситуациях, которые практически исчерпывают многообразие задач анализа безотказности технических объектов.

Автор выбрал эту сравнительно узкую область, сознавая, что рассмотрение более широкого круга вопросов может привести к поверхностному изложению материала и отрыву от конкретных приложений. Книга написана в первую очередь для специалистов-практиков, хотя в ней изложен и ряд чисто теоретических вопросов. Зная, что излишне громоздкие и чрезмерно формализованные математические построения часто отпугивают инженеров, автор старался излагать материал по возможности проще. Компромисс между математической строгостью изложения и простотой решался обычно в пользу последней, если только удавалось сохранить существо вопроса.

Байесовский подход не является общепринятым среди специалистов в области математической статистики и теории надежности. Сомнения в возможности его применения при решении практических задач вызваны в первую очередь тем, что он допускает использование субъективных вероятностей. В главе 1, которая играет роль введения, обосновывается, в том числе с достаточно общих философских позиций, правомочность применения байесовского подхода, формулируются общие положения байесовской методологии и проводится детальный анализ каждого положения. Для полноты общего представления в главе рассмотрены исторические аспекты байесовской теории, а также современные попытки ее модификации.

В главе 2 изложен стандартный байесовский метод оценивания в его классическом варианте. Основное внимание уделено вопросам априорного распределения и функции потерь. Рассмотрено отношение байесовского подхода к свойствам состоятельности, несмещенности, эффективности и достаточности, традиционно рассматриваемым для статистических оценок. В заключение описаны общая схема и классификация задач оценивания показателей надежности. Читатель, желающий познакомиться главным образом с практическими вопросами байесовского статистического оценивания, без ущерба для общего понимания может после главы 1 сразу же перейти к последнему параграфу второй главы.

В главе 3 систематизированы основные результаты в области параметрического байесовского оценивания надежности, полученные в основном зарубежными авторами. Кроме того, продемонстрированы приемы решения часто встречающихся задач оценивания вероятности безотказной работы в тех случаях, когда задано параметрическое семейство распределений вероятностей времени безотказной работы. Отличительной особенностью полученных здесь результатов является способ задания априорной информации в виде априорного распределения непосредственно для показателя надежности, а не для параметров функции распределения, что характерно для известных решений. Получено также новое решение задачи оценки надежности при форсированных испытаниях.

Глава 4 посвящена непараметрическому байесовскому оцениванию, которое, по мнению автора, является передовым фронтом байесовской теории. Впервые непараметрические байесовские методы были исследованы Фергюсоном в 1973 г. С тех пор появился ряд новых оригинальных решений, совокупность которых может претендовать на отдельное направление в рамках байесовской теории. Тем не менее ни в одной из отечественных и зарубежных книг эти результаты не изложены вместе. Данный пробел в какой-то мере восполняется материалами четвертой главы. Надо отметить, что большая часть известных в этой области результатов получена в формально математическом виде. Излагая данный материал, автор стремился показать содержательную сторону каждого результата.

В главе 5 изложен новый подход к байесовскому оцениванию, впервые предложенный в работах автора и названный квазипараметрическим. Существо подхода заключается в построении ассоциированных с априорной информацией параметрических приближений на классах стареющих распределений и последующем обращении к стандартному байесовскому методу. Основное внимание здесь было уделено исследованию достоверности получаемых оценок вероятности безотказной работы.

В главе 6 исследован класс байесовских оценок вероятности безотказной работы в условиях частичной априорной определенности. Данный класс описывает расчетные случаи, в которых априорное распределение параметров модели надежности не задано. В то же время известен ряд ограничений, которым удовлетворяет априорное распределение. Например, может быть априорно известно мат матическое ожидание. Решение задачи в данной постановке приводит к новому типу оценок, названных байесовскими условно минимаксными. Рассмотрены условия существования этих оценок и область их практического применения.

Глава 7 посвящена эмпирическому байесовскому оцениванию, идея которого впервые была высказана Роббинсом. В свое время Нейман расценил появление эмпирического байесовского метода как способ выхода из тупика, к которому якобы пришел байесовский подход. Это мнение представляется излишне утрированным. Тем не менее эмпирический байесовский метод является ярким и плодотворным направлением в рамках байесовского подхода. В главе 7 дана краткая характеристика наиболее важных результатов и предложен новый метод, основанный на идее квазипараметрического оценивания.

Главы 8–10 объединены общим содержанием и базируются на способе определения надежности с помощью так называемых функциональных моделей работоспособности. Последние являются формализованным описанием условий нормального в некотором смысле функционирования исследуемого объекта. Модель работоспособности составляется, исходя из существующих представлений соответствующей области знаний, которые обладают различной степенью полноты отражения реальных свойств исследуемых объектов, т.е. имеют различную степень определенности. Целью этой части книги является изучение методов оценки надежности в условиях неполной определенности относительно моделей работоспособности и числовых данных. Данная задача в рамках байесовского подхода ставится и решается, по-видимому, впервые. Материал излагается в порядке возрастания сложности. В главе 8 предполагается, что модель работоспособности является идеальной, т.е. не содержит погрешности, а исходные числовые данные при расчете вероятности безотказной работы задаются с ошибкой. В главах 9, 10 рассмотрен общий случай, включающий оба указанных вида неопределенности. Из методических соображений вопросы априорного и апостериорного анализа надежности рассмотрены в отдельных главах. Особенности предлагаемых процедур статистического оценивания надежности иллюстрируются на примерах реальных механических систем и элементов конструкций, для которых модели работоспособности разработаны наиболее полно.

В результате работы над книгой у автора сложилось глубокое убеждение в том, что использование байесовского подхода во многом обогатит решение любой прикладной задачи теории надежности. К сожалению, байесовская теория не привлекает должного внимания среди специалистов в области надежности в нашей стране. В то же время интерес к байесовскому подходу за рубежом неизменно возрастает. Свидетельством тому библиография в конце книги. Поэтому еще одна цель этой книги заинтересовать байесовской теорией специалистов в надежности и смежных областях.

Автор благодарит своих коллег Г.Г. Харитонову и В.Б. Чернявского за техническую помощь, оказанную при подготовке книги.

ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

ВБР – вероятность безотказной работы
б.о. – байесовская оценка
м.о. – математическое ожидание
о.м.п. – оценка максимального правдоподобия
п.н. – почти наверное
п.р. – плотность распределения
с.к.о. – среднее квадратическое отклонение
ф.р. – функция распределения
$P\{A\}$ – вероятность события A
R^k – k-мерное евклидово пространство
$X \times Y$ – прямое произведение множеств X и Y
$[a, b]$ – закрытый промежуток на R^1
$(a, b]$, $[a, b)$ – полузакрытый промежуток на R^1
(a, b) – открытый промежуток на R^1
$f(x) \propto \varphi(x)$ – функция $f(x)$ с точностью до постоянного множителя тождественна $\varphi(x)$
$E(X)$, $E[X]$, m_X – математическое ожидание величины X
$D[X] = \sigma_X^2$ – дисперсия величины X
$h(\cdot)$ – априорная п.р.
$l(\cdot \mid x)$ – функция правдоподобия, соответствующая данным x
$\hbar(\cdot \mid x)$ – апостериорная п.р., соответствующая данным x
$L(d, \theta)$ – функция потерь в связи с заменой параметра θ элементом решения d
$G(\cdot)$ – функция риска (функция усредненных потерь)
$\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ – выборка значений времени безотказного функционирования объекта при проведении n независимых испытаний
$t^* = (t_1^*, t_2^*, \ldots, t_d^*)$ – множество моментов отказов из τ
$t = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ – множество моментов приостановок испытаний до отказа из τ (множество моментов цензурирования)
θ^* – априорная байесовская оценка параметра
$\hat{\theta}^*$ – апостериорная байесовская оценка параметра
$R(t)$ – ВБР объекта в течение времени t
$\lambda(x) = -R'(x)/R(x)$ – функция интенсивности отказов
$\Lambda(x) = \int\limits_0^x \lambda(t)\,dt$ – функция ресурса (интегральная функция интенсивности)
$\underline{R}_\gamma^*$ – байесовская нижняя γ-доверительная граница ВБР
$\Gamma(\alpha, \beta)$ – гамма-распределение с параметром масштаба α и параметром формы β
$N(\mu, \sigma)$ – нормальное (гауссово) распределение с м.о. μ и с.к.о. σ
$\mathrm{Be}(\alpha, \beta)$ – бета-распределение с параметрами α и β

$U(\alpha, \beta)$ – равномерное распределение в промежутке $[\alpha, \beta]$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ – распределение Дирихле с параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$

S_0 – непараметрический класс распределений вероятностей с неубывающей функцией интенсивности (класс стареющих распределений)

$\xi \sim F$ – случайная величина ξ подчиняется распределению вероятностей F

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2} dt$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ БАЙЕСОВСКОЙ ТЕОРИИ

§ 1.1. Фрагмент истории байесовского подхода

Свое начало *байесовский подход* берет с известной работы Томаса Байеса, которая впервые была опубликована в 1763 г., почти через три года после смерти автора. По свидетельству Крелина [99], записи Байеса, касающиеся того, что сейчас называют байесовским подходом, были обнаружены Ричардом Прайсом, который и послал их в Королевское общество под заголовком "Заметка о решении проблемы в учении о случае". Современный вариант статьи можно найти в [76]. В [129] Фишер провел анализ статьи Байеса, используя современные понятия. Впоследствии тот факт, что Байес не опубликовал эту свою работу при жизни, оценивался многими противниками байесовского подхода как свидетельство сомнения автора в правильности сделанных им выводов. Это суждение о событии более чем 200-летней давности следует считать по меньшей мере странным и уж во всяком случае недостойным служить аргументом в научном споре.

Остановимся кратко на существе начальных положений байесовской теории. Во второй части своей статьи (первая не содержит каких-либо новых идей) Байес рассматривает умозрительный опыт с выбрасыванием последовательно двух шаров. Бросок первого шара соответствует получению некоторого числа p из промежутка $[0, 1]$. Бросок второго шара образует последовательность n биномиальных исходов с вероятностями успеха p и отказа $(1 - p)$ в каждом. Далее доказываются две леммы.

Пусть X – число успехов, Y – число отказов. Тогда в соответствии с первой леммой

$$P\{p_1 \leqslant p \leqslant p_2, \quad X = a, \quad Y = b\} = \int\limits_{p_1}^{p_2} \frac{n!}{a!b!} p^a (1 - p)^b dp. \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, что при $p_1 = 0$, $p_2 = 1$

$$P\{X = a, \quad Y = b\} = \int\limits_0^1 \frac{n!}{a!b!} p^a (1 - p)^b dp = \frac{1}{n + 1}. \tag{1.2}$$

Таким образом, параметр p признается случайным, а вероятность того, что p попадает в промежуток dp, пропорциональна величине этого промежутка. Иначе говоря, p распределен в $[0, 1]$ равномерно. Этот факт еще раз подчеркивается следствием (1.2), утверждающим, что вероятность наблюдения a успехов и b отказов априорно не зависит от значений a и b, а только от их суммы. Факт равномерности априорного распределения в статье Байеса является несколько завуалированным, и поэтому на него часто не обращают внимания. Этот вопрос специально исследован Эдвардом в работе [117].

Следующая лемма Байеса определяет условную апостериорную вероятность попадания случайного параметра p в некоторый промежуток $[p_1, p_2]$:

$$P\{p_1 \leqslant p \leqslant p_2 \mid X = a,\ Y = b\} = \frac{(n+1)!}{a!b!} \int_{p_1}^{p_2} p^a(1-p)^b dp. \tag{1.3}$$

Данная вероятность сводится к неполной бета-функции, способам вычисления которой посвящается оставшаяся часть статьи Байеса. Выражение (1.3) является прямым логическим следствием (1.1) и (1.2) и видоизмененным вариантом теоремы Байеса применительно к биномиальным величинам. Поэтому принципиально новым и, как утверждают противники байесовского подхода, спорным является не теорема Байеса, а постулирование случайности биномиального параметра и приписывание ему равномерного априорного распределения. Важно заметить, что Байес в своей статье ни слова не говорит о характере вероятностного утверждения относительно p, т.е. субъективно оно или объективно.

Дальнейшему своему развитию байесовский подход обязан Лапласу. Тот факт, что Байес якобы не был уверен в своем предположении, не помешал Лапласу принять постулат Байеса об однородной априорной информации в качестве аксиомы, в которой вероятность понимается как некая логическая величина. Именно Лаплас создал предпосылки к субъективной трактовке априорных вероятностей. Математики того времени, по свидетельству Крелина [99], активно поддерживали байесовский подход. Здесь достаточно упомянуть Гаусса и Пуассона как защитников байесовского подхода. Только в середине XIX столетия Буль [85] и Венн [238] указали на произвольность использования постулата Байеса для получения вероятностей, которые не могут быть проверены каким-либо способом. Именно в те времена возникла и не прекращается до сих пор полемика между защитниками и противниками байесовского подхода. Эта полемика то затухает, то разгорается с новой силой в зависимости от новых аргументов, которые появляются то у байесианцев, то у их оппонентов. В начале XX столетия появляются работы Фишера, Стьюдента и других статистиков классического направления, которые посвящены разработке теории выборочных распределений. В статье [130] Фишер выступает с основательной критикой байесовского постулата, особенно в части произвольности выбора априорного распределения. В результате интерес к байесовскому подходу ослабевает.

Сравнительно надавнее возрождение байесовского подхода связано с появлением ярких и оригинальных работ Гуда [134], Де Финетти [108, 109], Сэвиджа [210], Рамсея [203], Де Гроота [15, 110], Джеффриса [149], Кейнеса [156]. Такой подъем на байесовском фронте позволил Гуду в 1947 г. сделать прогноз [134] о том, что преобладающей философией оставшейся части столетия будет байесовская философия. Возвратившись к этому вопросу в 1980 г., Гуд с удовлетворением отметил [135]:

"...треть столетия прошла, и ее тенденция поддержала меня". Другой известный сторонник байесовского направления в статистике Линдли, автор двух замечательных обзоров [166, 168], утверждает более категорично: будущее математической статистики составят результаты, которые будут получены в XXI столетии статистиками байесовского направления [167]. Нужно твердо представлять, что указанные работы не только защищают постулат Байеса, но, что гораздо важнее, являются своего рода переосмысливанием и дальнейшим развитием работ Байеса и Лапласа. Это развитие осуществляется с позиций субъективной интерпретации вероятностных представлений и не оставляет места какой-либо другой (например, частотной). Сложившаяся ситуация позволяет многим ученым, не обязательно категоричным байесианцам (см., например, высказывание Басу [75]), квалифицировать это новое направление как необайесианство. Итог более чем шестидесятилетнего этапа развития байесовской теории подведен Хартиганом в фундаментальной монографии [142]. Эта работа содержит ряд важных, хотя и весьма частных, для теории и практики результатов, характеризующих современное состояние байесовской теории.

Существует, однако, весьма авторитетное заявление о том, что байесовская теория зашла в "тупик". Этот "тупик" связан с отсутствием достаточно обоснованных правил выбора априорных распределений. Ярким примером работ подобного типа является статья Неймана [37], подготовленная для специальной дискуссии в рамках байесовского подхода. По мнению Неймана, выходом из "тупика" является *эмпирическое байесовское оценивание*, которое основано на аппроксимации априорного распределения по выборочным данным. Данное предложение было сделано Роббинсом [204] и поддержано рядом авторов. Следующий шаг сделали Дили и Линдли, которые предложили [106] весьма остроумное байесовское "исправление" эмпирического байесовского оценивания путем введения случайного гиперпараметра для семейства априорных распределений параметра распределения основной случайной величины.

В заключение этого краткого исторического экскурса отметим, что существуют попытки примирения байесовского и классического подходов. Наиболее авторитетной из них является "байесовский-небайесовский компромисс", предложенный в ряде работ Гуда по иерархическому байесовскому методу (см., например, [135]). Суть предложений Гуда заключается в различной трактовке вероятностей, появляющихся в схеме байесовских процедур принятия решения. В его рассуждениях находят место не только субъективные, но и частотные (или объективные) вероятности. Как следует из дискуссии после статьи [135], этот компромисс не находит поддержки среди байесианцев.

Параллельно с эволюцией принципиальных байесовских положений совершенствовалась техника байесовских вычислений. Так, Байесу для нахождения вероятностей типа (1.3) потребовались представление в виде рядов и утомительные вычисления. Сейчас существуют таблицы неполных бета-функций, существенно упрощающие расчеты. Большие возможности в смысле решения весьма сложных задач в байесовской постановке предоставляет ЭВМ. Конечные представления исключительного большинства результатов по байесовскому оцениванию носят алгоритмический характер, и их практическое использование связано с расчетами на ЭВМ. В то же время принципиально новые математические идеи (в плане решения какой-либо более общей задачи) до появления работы Фергюсона [125] отсутствовали. Эта работа открыла новое направление в байесовской теории, названное *непараметрическим байесовским оцениванием.* Следующий шаг в этом направлении был сделан Беляевым [3], предложившим заменить дискретное представление априорных процессов непрерывным.

§ 1.2. Философия байесовского подхода

Философские аспекты байесовской теории можно условно разделить на две группы, соответственно затрагивающие 1) соотношение между дедуктивным и индуктивным способами рассуждения, 2) интерпретацию понятия вероятности.

Во времена зарождения байесовского подхода главенствующую роль в научной практике играл дедуктивный способ рассуждения. Результаты работы Байеса, по существу, продемонстрировали, как задачу индуктивного рассуждения полностью перевести на основу теории вероятностей и тем самым приспособить к системе более приемлемой в то время дедуктивной логики.

Вопрос о соотношении дедукции и индукции на современном этапе решается более серьезно и сложно. И этому во многом способствуют последние достижения байесовской теории. Книга Джеффриса [150] дает достаточно ясный анализ соотношения между дедуктивным и индуктивным способами рассуждения, включая определяющую роль в этом соотношении байесовского подхода. Приведем основные положения теории Джеффриса.

Во-первых, только один дедуктивный вывод не может составить адекватную основу для всех возможных выводов любой прикладной науки. Это справедливо, так как дедуктивная логика допускает только три утверждения: высказывание может быть полностью доказано, полностью опровергнуто либо не может быть ни доказано, ни опровергнуто. Никакое число прошлых случаев осуществления закона не может составить дедуктивное доказательство того, что закон окажется верным и в следующем случае.

Другим аргументом Джеффриса в пользу неединственности инструмента дедуктивной логики является то обстоятельство, что для некоторого произвольно взятого множества наблюдений обычно существует достаточно большое число законов, их описывающих. Требуются более широкие принципы выбора, одним из которых, возможно, является соображение простоты, например, в виде принципа бритвы Оккама [18]. Суть последнего очень проста: необходимо упрощать теории до тех пор, пока они не начнут противоречить наблюдениям.

Таким образом, дедуктивные рассуждения составляют важный ингредиент научного вывода, но не являются его единственной базой. Фундаментальной задачей научного прогресса, равно как и повседневной жизни, служит обучение на опыте. Знания, получаемые таким образом, частично просто состоят из результатов прошлых наблюдений, но частично они заключаются в том, что мы используем выводы из прошлого опыта для предсказания будущего результата. Данная часть знаний названа Джеффрисом обобщением, или индукцией. Джеффрис понимает индуктивную логику так, что дедуктивная логика является ее частным случаем. Основные понятия "истинно" и "ложно" дедуктивной логики являются предельными случаями типов истинностных значений, которые дает индуктивная логика.

Джеффрис подчеркивает, что вывод из прошлых наблюдений для будущих не является дедуктивным. Техническим термином для этого является индукция. Во всех выводах этого типа присутствует элемент неопределенности.

Для полноты представления заметим, что существуют еще так называемые редуктивные выводы [18]. Их существо состоит в том, что новые изобретения и открытия являются комбинацией многих известных идей и появляются в результате как сознательной, так и подсознательной деятельности людей. Для редуктивных выводов практически невозможно построить формализованную теорию и использовать байесовский подход.

Итак, по Джеффрису, важнейшую часть индукции составляет обобщение прошлого опыта и эмпирических данных в целях анализа наблюдаемых и предсказания будущих явлений. Для упорядочения процесса индукции Джеффрис выдвигает восемь правил: пять основных (обязательных) и три дополнительных (рекомендательных) [18].

1. Все гипотезы должны быть сформулированы в явном виде, и заключения должны получаться только из этих гипотез.

2. Индуктивная теория должна быть внутренне непротиворечивой, т.е. не допускать возможности получения противоречивых заключений на основе ее системы постулатов и любого заданного массива эмпирических данных.

3. Любой заданный закон должен быть практически выполнимым. Определение бесполезно, если определяемый объект не может в реальности быть распознан с помощью этого определения. Существование объекта или оценка величины не должны быть связаны с практически невозможным экспериментом.

4. Индуктивная теория должна предусматривать возможность того, что полученные с ее помощью выводы окажутся неверными.

5. Индуктивная теория не должна априорно отвергать никакого эмпирического наблюдения.

Первые два правила вводят критерии, принятые в математике. Третье и пятое указывают на различие между априорными и эмпирическими наблюдениями. Четвертое правило показывает главное отличие индукции от дедукции: сделанные выводы могут быть модифицированы или даже заменены другими по мере накопления новых фактов. Заметим, что последнее выдержано в духе материалистической диалектики: истина никогда не может быть в последней инстанции.

Три дополнительных правила имеют следующий смысл:

6. Число постулатов должно быть сведено к минимуму.

7. Хотя мы и не считаем человеческий разум совершенным мыслительным инструментом, мы должны принять его как полезный инструмент, а также единственный, которым располагаем. Поэтому, хотя теория и не обязательно детально представляет реальные мыслительные процессы, она должна согласовываться с ними в общей схеме.

8. Ввиду сложности индукции мы не можем надеяться на то, что нам удастся ее развить более тщательно, чем дедукцию. Поэтому следует отверг-

нуть любое возражение, ставящее под сомнение какое-либо утверждение чистой математики.

Правило 6, по существу, является упомянутым выше принципом бритвы Окаама. Правила 7 и 8 не должны вызвать возражения.

Предложенная Джеффрисом теория индуктивного вывода выглядит вполне разумной и к тому же имеет ярко выраженную практическую направленность. Вместе с тем, отталкиваясь от нее, мы приходим к противоречию в отношении практического использования наиболее распространенной частотной интерпретации вероятности.

Заметим, что с точки зрения математической теории вероятность представляет собой функцию множества, удовлетворяющую аксиомам общей теории меры. Чтобы применять теоремы математической теории вероятностей (и в том числе теорему Байеса), достаточно удовлетвориться тем, чтобы эти аксиомы выполнялись. В то же время интерпретация выводов может быть существенно различной в зависимости от того, какой смысл вкладывается в изначальное понятие вероятности.

Существуют два полюса вероятности: объективная вероятность (имеется в виду в основном частотная интерпретация) и субъективная вероятность как "разумный уровень доверия". В объективистском смысле вероятность события A рассматривается при осуществлении некоторого принципиально воспроизводимого неограниченное количество раз комплекса условий [13]. Здесь надо выделить два момента: во-первых, принципиальную воспроизводимость и, во-вторых, возможность проведения неограниченного числа экспериментов при сохранении неизменным комплекса условий. Оба эти атрибута объективной вероятности находятся в прямом противоречии с третьим правилом Джеффриса. Иначе говоря, для описания реальных или возможных наблюдений объективистское определение вероятности становится недопустимым и неприемлемым для индуктивного вывода.

В субъективном смысле вероятность является количественной оценкой возможности наступления события, которую исследователь задает, например, на основе своего индивидуального опыта или, другими словами, априорной информации об опыте или явлении. Эта информация может быть получена в ситуации, когда комплекс внешних условий нельзя считать неизменным. Она проходит предварительное обобщение в индивидуальном опыте исследователя и лишь затем получает количественную оценку. Субъективная вероятность адекватна теории индуктивного вывода и одновременно удовлетворяет аксиомам вероятности. Совершенно очевидно, что уровни доверия устанавливаются весьма ориентировочно. В этих условиях, как считает Лимер [32], "представляется оправданным такое построение теории вывода и теории принятия решений, как будто уровни доверия невозможно измерить совершенно точно. Но при этом необходимо учитывать последствия ошибок измерения".

При выяснении соотношения между интерпретациями вероятности необходимо исследовать два важных вопроса. Первый затрагивает толкование понятия случайности применительно к байесовскому подходу, второй выясняет реальный смысл термина "объективный".

Частотный подход исходит из того, что параметры исследуемой модели, к примеру модели надежности, не случайны, а случайны их оценки, так как последние являются функциями наблюдений, появившихся в случайном опыте. Байесовский подход в одной из своих версий предполагает случайность параметров модели, т.е. рассматривает случайность как имманентное свойство параметра, считая, что физический объект подвержен реальным случайным изменениям. Этой интерпретации случайности адекватны как объективная, так и субъективная вероятности. Однако такая трактовка параметра, по-видимому, не всегда соответствует реальному положению. В большинстве случаев параметр, отражая какое-либо объективное свойство исследуемого объекта, не является случайным. Но так как значение параметра неизвестно, он является неопределенным. Отмеченное состояние неопределенности по внешним проявлениям (например, результатам испытаний) напоминает случайность. Однако для описания неопределенности объективная вероятность неприемлема, так как отсутствует многократная воспроизводимость при неизменных условиях. В то же время субъективная вероятность как степень уверенности адекватна описанию неопределенности. В этом смысле субъективная вероятность не альтернативна объективной. Они относятся к различным классам случайности (или, можно сказать, к различным классам неопределенности).

В тех редких ситуациях, когда области их применения пересекаются, использование объективной вероятности, основанной на устойчивости частот, правомочно при большом числе экспериментальных данных, что характерно для массового производства. Здесь субъективные уровни доверия будут опираться на имеющийся статистический материал и совпадать с объективными вероятностями. При малом числе наблюдений (прошлых или текущих) устойчивость относительных частот установить не удается, и для получения вывода необходимо использовать неформальный опыт исследователя. Это в конечном итоге приводит к отказу от объективных вероятностей и принятию субъективных.

Сейчас мы подходим ко второму из указанных ранее вопросов, выясняющих реальный смысл термина "объективный". Здесь будет уместно использовать результаты анализа этого понятия, проведенного Де Финетти [108]. Идеи о возможности использования субъективных вероятностей взамен объективных, по словам Де Финетти, "потрясли многих людей, которые рассматривают объективность в строгом смысле, как необходимый атрибут вероятности и науки. Но сожаления в связи с потерей абсолютной объективности в вероятности и, следовательно, в науке несправедливы. Ничего не потеряно, кроме явной иллюзии. И эта иллюзорная объективность сейчас заменена реально достигаемой объективностью, т.е. степенью объективности, достигнутой человеческой наукой через человеческий разум" [108, с. 121]. К этому мнению присоединяется Корнфилд [96]. По его мнению, объективность науки обнаруживает свое математическое выражение в следующем факте. Отдельные исследователи, взяв в качестве исходных различные априорные вероятности, всегда придут к одним и тем же апостериорным при большом числе экспериментов. Этот факт математически закреплен в виде теоремы, параллельно доказанной Бернштейном (см. [37]) и Мизесом [184]. Приведенные выше утверждения выдержаны в духе материалистической диалектики, утверждающей, что единственным критерием истины, а следовательно, и объективности является практика, которая в статистическом смысле понимается как совокупность большого числа экспериментальных данных. В противном случае говорить об объективности и выводить "истину в последней инстанции" лишено смысла.

Существующие разногласия между "объективистами" и "субъективистами" носят, по-видимому, в основном терминологический характер. Дело в том, что, как правило, говоря о вероятности, всегда понимают частоту. В настоящее время, как указывает Де Финетти, это похоже на "фарс, в котором два близнеца постоянно меняются местами, создавая забавное и абсурдное непонимание" [108, с. 125]. Было бы гораздо проще навести порядок, если бы "субъективисты" не претендовали на термин "вероятность", а удовлетворились бы каким-либо аналогичным, например "правдоподобность". Но они этого никогда не сделают, так как считают, что теория вероятностей разработана в том числе (а может быть, даже исключительно) для субъективной вероятности, поскольку последняя следует аксиомам Колмогорова. Заметим попутно, что эти аксиомы как прерогатива теории меры удовлетворяют многим случаям, когда употребление термина "вероятность" лишено всякого смысла. Лимер остроумно отмечает [32]: "Например, вес вашей руки, вполне возможно, составляет 10% веса вашего тела. Но вряд ли вы станете заявлять, что вероятность вашей руки составляет 0,1".

Рассмотренные в настоящем параграфе вопросы с философских позиций обосновывают правомочность использования байесовского подхода в общей системе индуктивных рассуждений и одновременно объясняют непринятие этого подхода со стороны ученых, "прочно" стоящих на объективистских позициях.

§ 1.3. Общие положения байесовской методологии

Методологию байесовского подхода будем понимать в общепринятом для этого понятия смысле, т.е. как совокупность принципов построения, форм и способов изучения. Прежде всего необходимо выяснить, какие положения составляют основу байесовского подхода. Нередко, говоря о байесовской теории, имеют в виду какой-либо отдельный ее аспект, например, субъективное толкование вероятности, методологию, основанную на теореме Байеса, выборочную байесовскую теорию решения и т.д. В то же время байесовский подход в современном представлении является единой теорией, органично сочетающей в себе следующие три главных положения.

Положение 1. Параметр исследуемой системы или модели является случайным, причем случайность может трактоваться не только в общепринятом смысле, но также как неопределенность. Случайному параметру приписывается априорное распределение.

Положение 2. Результаты наблюдения и априорное распределение объединяются с помощью теоремы Байеса с целью получения апостериорного распределения параметра.

Положение 3. Статистический вывод или решающее правило принимается, исходя из максимизации ожидаемой полезности, в частности минимизации потерь, связанных с применением этого правила.

Рассмотрим каждое из приведенных положений в отдельности.

1.3.1. Возможные интерпретации вероятностей. В отличие от классической теории оценивания, в которой параметр является неслучайным, байесовская теория предполагает случайность параметра. Эта случайность понимается в общепринятом смысле, когда значение параметра порождается устойчивым реальным случайным механизмом, свойства которого либо известны, либо могут быть получены посредством анализа соответствующих данных. Кокс и Хинкли [25] в качестве примера рассматривают ситуацию, когда параметром является мера определенных свойств партии материала в задаче обследования массового производства. В этом случае наблюдения над предыдущими партиями позволяют оценить априорное распределение. Условием этого является, конечно, достаточная стабильность механизма исходного технологического процесса, позволяющая использовать его "в качестве ориентира на пути интерпретации текущей совокупности данных". Для рассмотренной ситуации адекватным является частотная интерпретация вероятности. Однако данная ситуация является насколько желаемой, настолько и редкой.

В большинстве ситуаций, возникающих при решении научно-технических задач, параметры системы или модели суть особого рода постоянные, представляющие в идеализированной форме внутренние истинные свойства исследуемой системы или модели. Кокс и Хинкли отмечают [25], что "частично из-за математической привлекательности доводов, основанных на теореме Байеса, было предпринято много попыток обосновать для байесовского способа рассуждения гораздо более широкую область применения. При этом использовалось соответствующим образом обобщенное определение и интерпретация вероятности посредством степеней уверенности". Здесь случайность понимается не в классическом смысле, а как неопределенность. Содержание понятия неопределенности легко раскрывается на следующем примере. Исследуется корреляция между какими-либо двумя физическими величинами, которые являются случайными в классическом смысле. Корреляция описывается, например, коэффициентом корреляции, который в рассматриваемой ситуации является адекватной характеристикой корреляции и по своей природе неизменен. Однако указать его более или менее точное значение без проведения достаточно большого числа испытаний невозможно. Из опыта прошлых исследований, т.е. априорно, известно, что коэффициент корреляции неотрицателен. (Заметим, что для выводов подобного рода иногда можно воспользоваться соображениями здравого смысла, например, когда две исследуемые величины – рост и вес человека.) Вследствие этого заключаем, что коэффициент корреляции содержится в промежутке [0, 1], причем неизвестно, какое значение он принимает внутри этого промежутка. Другими словами, параметр корреляции пребывает в состоянии неопределенности по отношению к промежутку [0, 1]. Как же измерить эту неопределенность? Какой математический аппарат ей адекватен?

Одним из возможных вариантов является предложенный Джеффрисом подход, основанный на рациональных уровнях уверенности. "Фундаментальной идеей, – пишет Джеффрис [149], – является введение разумного уровня уверенности, который удовлетворяет некоторым правилам непротиворечивости и в соответствии с этим правилом может быть формально выражен числом". Для практических приложений этот принцип сводится к установлению априорного распределения, математически выражающего факт отсутствия сведений о параметре. В какой-то мере цель предлагаемого подхода та же, что и классических методов, т.е. не делается попытки ввести другие формы информации. Некоторые авторы (см., например, [18]) характеризуют теорию Джеффриса как "объективную", поскольку ее процедуры обеспечивают разным исследователям получение одинаковых результатов при использовании одной и той же модели и одного и того же массива эмпирических данных.

Если пойти дальше утилитарного представления рациональных уровней уверенности как выражения отсутствия знаний, то обнаруживается связь подхода Джеффриса с субъективной интерпретацией вероятностных суждений. Рациональные уровни доверия в подходе Джеффриса в общем случае трактуются как уровни доверия практического большинства людей. Таким образом, они практически безошибочны. Это обстоятельство позволяет считать подход Джеффриса разновидностью субъективизма. Этого мнения, в частности, придерживается Лимер [32], считая, что "субъективисты делятся на две враждующие между собой группы: персоналисты и рационалисты". Первую группу составляют Де Финетти, Рамсей, Сэвидж, Де Гроот, Кокс, Трибус и другие. Ко второй группе принадлежат Джеффрис, Кейнс, Эванс. Последний, к примеру, занимает крайне рационалистическую позицию, предлагая априорное распределение исправлять в зависимости от разумной интерпретируемости конечного результата [122]. Что касается теории Джеффриса, то она по классификации Де Финетти является субъективной теорией, пытающейся разработать непротиворечивые процедуры поведения в условиях неопределенности в противоположность тем субъективным теориям, которые пытаются охарактеризовать психологическое и рациональное поведение в условиях неопределенности. Теория Джеффриса и ее дальнейшее развитие Хартинганом очень привлекательны в математическом смысле. Более подробный обзор и анализ результатов этой теории помещены в следующей главе.

Переходя к анализу субъективной интерпретации байесовских вероятностных суждений, приведем высказывание Корнфилда [96]: "Невозможность выбрать единственным образом априорные распределения из опыта или принципов незнания привела к более подходящему переосмысливанию доктрины XIX века, выдвинутой Де Морганом и состоящей в том, что вероятность есть степень уверенности. Де Морган утверждал, что вероятность не есть объективная характеристика внешнего мира, а субъективная величина, которая может изменяться от субъекта к субъекту". По мнению всех современных субъективистов, вероятность возникает тогда и только тогда, когда исследователь приступает к изучению какого-либо явления.

Важным методологическим расхождением объективного и субъективного вероятностного суждений является отношение к понятию "событие". В частотной интерпретации событием считается не конкретно интересующее нас событие, а неясно определенное бесконечномерное пространство, в котором единичное событие есть элемент. При этом считается, что все элементы этого пространства независимы и однородны.

Как отмечает Де Финетти [108], в этом случае отбрасывается безвозвратно множество реально существующих особенностей, таких как аналогии, подобия, корреляции между событиями. Идеализация реальных свойств изучаемых явлений с помощью, например, пространства стохастически независимых одинаково распределенных случайных величин с точки зрения субъективистов бесконечно обедняет и искажает явление. В противоположность этому положению субъективная вероятность рассматривает единичные хорошо обусловленные события следующего типа: успешный полет ракеты-носителя космического аппарата (рассматривается для подсчета возможных убытков, связанных с гибелью дорогостоящего аппарата), проработает ли атомная электростанция безаварийно в течение трех лет и т.д. Важно то, что субъективные вероятности вводятся не сами по себе, а как правило, в рамках байесовского решения, когда для изучения какого-либо явления стремятся привлечь по возможности всю имеющуюся информацию, в том числе неформальный человеческий опыт.

Как же оценить субъективные вероятности? Как субъективное мнение и опыт выразить количественно? Это наиболее сложный вопрос байесовской теории. Причем сложность имеет не методический характер, а скорее организационный. Из методических соображений нетрудно сформулировать некоторую (возможно, даже искусственную) совокупность гипотез, которые образуют полную группу, и выразить в долях единицы (или процентах) свое персональное отношение к возможности реализации каждой гипотезы. Именно на удобстве дискретного представления априорной информации настаивают многие авторы (см., например, Бруевич и Мильграм [8], Эванс [122]). Бруевич и Мильграм [8] дают ясную картину назначения априорных вероятностей: "Каждой из гипотез исследователь приписывает определенную априорную вероятность в соответствии с его мнением о правдоподобности рассматриваемых гипотез. Той гипотезе, которая на основании имеющегося (собственного или чужого) опыта кажется правдоподобнее, приписывается больший вероятностный вес. Если нет оснований для предпочтения какой-либо одной или нескольких гипотез, то разумно приписывать всем гипотезам одинаковые априорные вероятности. Разумеется, сумма всех этих вероятностей должна быть равна единице" [8, с. 8]. Де Финетти [108] считает, что одним из возможных способов оценки субъективных вероятностей может быть способ назначения ставок в пари. Гуд [134] для тех же целей предлагает так называемый способ мыслимых опытов. Сложность в оценке субъективной вероятности состоит в том, что это должен сделать специалист в данной области или разработчик системы, а не математик-вероятностник с уклоном в сторону субъективизма. Не все специалисты конкретных областей знаний поддерживают или хотя бы знают байесовский подход. Здесь важна методическая роль математика, консультирующего конкретное исследование. Линдли [165] приводит такой пример: "Инженер-химик уверен, что существует возможность отказа для исследуемого процесса, но не хочет выразить ее количественно. Тем не менее он знает финансовые последствия отказа, и поэтому я спросил его: "Предположим, я в состоянии предоставить Вам план, который сделает этот процесс безотказным.

Сколько Вы мне за это заплатите: 1000 долларов или 10 000?" Он рассмеялся последнему числу, как нелепо высокому, но потом задумался серьезнее. После некоторых переговоров мы пришли к сумме 750 долларов, которую можно преобразовать в вероятность".

Многочисленные доводы "за" и "против" субъективной вероятности можно найти в книге Лимера [32]. Причем сделано это в довольно привлекательной форме, например в таком виде: "Слушается дело: "объективизм" против "субъективизма"". Главным выводом, который можно сделать из приведенных в [32] рассуждений, является методологическая бесполезность дискуссии, так как эти две позиции практически не имеют пересечений.

Сейчас подведем краткий итог. Интерпретация суждений в байесовской методологии всегда носит вероятностный характер, хотя случайность трактуется не только в классическом смысле, но и как неопределенность. Вероятностные суждения могут быть представлены в одном из трех видов:

с помощью частотной (объективной) интерпретации вероятности, что встречается крайне редко, так как требует большого числа прошлых опытов;

с помощью рациональных степеней уверенности, которые для практических задач преимущественно сводятся к математическому выражению отсутствия априорных знаний;

с помощью субъективных уровней доверия, которые выражают персональное отношение исследователя к изучаемому явлению или системе.

Области применения указанных способов практически не пересекаются. В первом случае при наличии большого числа прошлых экспериментальных данных и с рационалистических, и с субъективистских позиций уровни доверия неминуемо совпадают с относительными частотами. При полнейшем отсутствии знания субъективные уровни доверия должны совпадать с рациональными, т.е. с необходимостью принятия равномерного априорного распределения. Во всех прочих ситуациях, а их исключительное большинство, с необходимостью должны быть приняты субъективные уровни доверия.

1.3.2. Объединение априорной информации и эмпирических данных. Методической основой процесса перехода от априорной информации, формализованной в виде априорного распределения, к апостериорной путем добавления эмпирических данных является теорема Байеса. Этот процесс можно представить в виде последовательного накопления информации. На начальной стадии изучения какого-либо явления исследователь, обладающий определенной квалификацией и опытом прошлых подобных работ, имеет некоторое представление о свойствах объекта исследования. В это представление, помимо неформализованного опыта, входят эмпирические данные, полученные ранее при аналогичных исследованиях. В ходе испытаний объекта появляется новая информация в виде совокупности эмпирических данных, которые изменяют представление (вероятностное суждение) о свойствах объекта. Таким образом, происходит постепенный пересмотр и переоценка априорного представления. Причем в каждый момент времени мы можем дать полный ответ о свойствах объекта, и этот ответ будет исчерпывающим в том смысле, что мы использовали для него в с ю имеющуюся информацию. Данный процесс является непрерывным: он продолжается с получением каждого нового эмпирического результата.

Весьма наглядной является представленная Зельнером [18] схема процесса пересмотра вероятностей при получении новых данных (рис. 1.1). Опишем кратко эту схему. Пусть свойства объекта выражаются с помощью параметра θ, в общем случае векторного. Предварительные

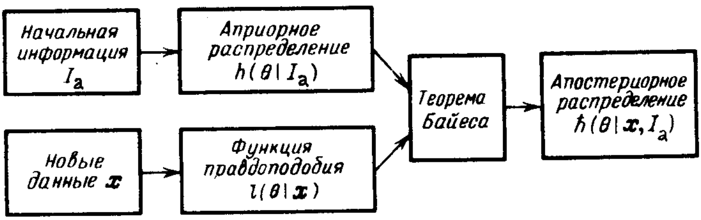


Рис. 1.1. Процесс пересмотра вероятностей при получении новых данных по Зельнеру [18]

представления о свойствах объекта базируются на некоторой упомянутой выше информации I_a. Формализация этой информации осуществляется путем записи априорного распределения параметра θ, которое является условным по отношению к I_a, т.е. $h(\theta \mid I_a)$. Полученные в процессе испытаний или наблюдений эмпирические данные x формализуются с помощью функции правдоподобия $l(\theta \mid x)$. Последняя представляет собой вероятность (или плотность вероятности) наблюдения эмпирических данных, записанную в виде функции от параметра. Существенно, что для получения $l(\theta \mid x)$ необходимо знать модель объекта в виде условного распределения основной случайной величины или какое-либо другое представление. Теорема Байеса с помощью элементарного преобразования

$$\hbar(\theta \mid x, I_a) = \frac{h(\theta \mid I_a) l(\theta \mid x)}{\int h(\theta \mid I_a) l(\theta \mid x) d\theta}$$

позволяет получить апостериорное распределение параметра θ: $\hbar(\theta \mid x, I_a)$, которое является условным по отношению к первоначальной информации I_a и эмпирическим данным x. (Если априорное распределение выбирается по принципу отсутствия информации Джеффриса, апостериорное распределение трактуется лишь как распределение выборочных данных.)

По мере накопления выборочной информации она начинает преобладать в апостериорном распределении. Плотность апостериорного распределения все больше концентрируется вокруг истинного значения параметра. Если два исследователя располагали различными априорными распределениями (в силу, быть может, различной первоначальной информации), их апостериорные распределения будут сближаться.

Описанную выше схему будем называть *ортодоксальной байесовской процедурой.* Ее отличие от более поздних модификаций состоит в том,

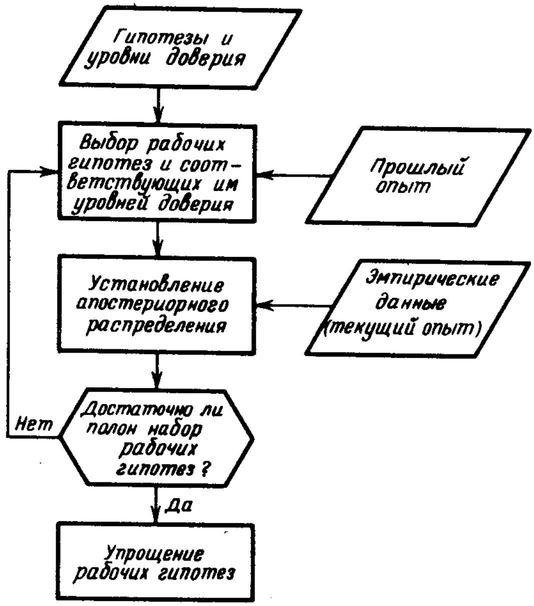


Рис. 1.2. Полная схема получения статистического вывода по Лимеру [32]

что при накоплении эмпирических данных априорное распределение остается неизменным. Эта особенность была отмечена Де Финетти [108]: "Допустимо ли изменять исходные вероятности или модифицировать их выбор после сравнения и практического анализа последствий? Какой-либо выбор и изменение с целью получить решение, которое является более предпочтительным по другим причинам и интересам, было бы, очевидно, некорректным и нечестным". Тем не менее Де Финетти соглашается с тем, что может возникнуть ситуация, когда проводятся исследования для проверки истинннного смысла исходных вероятностей. Здесь уместно вспомнить высказывание Линдли [165] о том, что ни один набор вероятностей не может быть более фундаментальным, чем какой-либо другой.

Лимер [32] приводит более сложную модификацию ортодоксальной схемы, предусматривающую возможность корректировки априорных уровней доверия (рис. 1.2). Лимер исходит из того, что человек от рождения обладает неисчислимым множеством подсознательных суждений, каждому из которых соответствует некоторый врожденный уровень доверия. Опыт приводит к тому, что из набора подобных суждений выделяется сравнительно небольшой набор осознанных суждений, к которому добавляются представления, вновь появившиеся во время приобретения опыта. На основании совокупности указанных суждений формируется набор рабочих гипотез и им соответствующих уровней доверия. В реальных практических ситуациях уровни доверия представляют собой грубые аппроксимации тех уровней доверия, которыми обладает, согласно байесовской теории, исследователь с неограниченной памятью и такими же познавательными способностями. Теоретическая деятельность оканчивается формированием уровней доверия гипотез. Затем с помощью теорем Байеса эти уровни доверия пересчитываются в апостериорные путем добавления эмпирических данных. Особенности, обнаруженные в данных, могут заставить исследователя пересмотреть многие решения, которые были приняты ранее. Данные могут навести на мысль о том, что, например, одну из отброшенных гипотез следовало бы включить в число рабочих или ввести ранее совсем не рассматриваемую гипотезу. Пересмотрев одно или более из своих ранее принятых решений, исследователь повторно анализирует ту же совокупность данных, используя новые рабочие гипотезы или априорные распределения.

Эванс [122] идет еще дальше. Он считает, что байесианцы всегда готовы изменить априорные вероятности при появлении налюдений. В результате, когда новые априорные распределения объединены с количественными наблюдениями, байесовское апостериорное и субъективное априорное распределения становятся согласованными. Наибольший эффект достигается, когда имеется несколько априорных распределений и исследователь выбирает то из них, которое наиболее согласовано с эмпирическими данными. Эванс считает, что такой подход может убрать субъективные вероятности из байесовского подхода вообще. Последнее представляется спорным. Изложенные модификации будем называть *рациональными байесовскими процедурами.*

Главной особенностью описанных байесовских процедур (как ортодоксальной, так и рациональной) является то, что они всегда могут быть использованы для конкретных расчетов и приложимы для целей анализа широкого круга задач в теории надежности и других областях науки. Байесовский подход является универсальным и обладает свойством внутреннего единства. Как отмечает Зельнер [18], "изучаем ли мы адаптивные модели, основанные на анализе временных рядов, простые регрессионные модели или модели, представляющие собой "системы одновременных уравнений", подход и принципы остаются неизменными". В этом смысле байесовская методология выгодно отличается от других подходов, которые предлагают индивидуальные методы и принципы для решения различных проблем. В свое время Гуд [134] использовал меткое выражение "мелкие хитрости" (ad hockeries) для того, чтобы лаконично и, пожалуй, юмористично охарактеризовать эту сторону небайесовских подходов к теории вывода. Этот термин затем взяли на вооружение многие байесианцы [18, 108].

1.3.3. Оптимальность байесовских правил оценивания. Конечным результатом описанных выше байесовских процедур является апостериорное распределение параметра, характеризующего основные свойства изучаемой системы или явления. Это распределение дает ясное и исчерпывающее представление о состоянии неопределенности параметра. Тем не менее в реальных практических ситуациях необходимо иметь более лаконичное решающее правило, позволяющее выразить представление о параметре в виде одной или нескольких числовых постоянных, служащих оценками неизвестного параметра. Примерами таких постоянных являются точечная оценка и байесовские доверительные пределы.

В байесовском подходе различие между параметром и его оценкой находит свое выражение в функции полезности, которая в наиболее употребляемом варианте представляет собой функцию потерь. Последняя по смыслу характеризует потери (в виде точности, денежных средств, времени и т.д.), которые возникают вследствие замены истинного значения параметра его оценкой. Правило оценивания выбирается так, чтобы минимизировать математическое ожидание функции потерь. (Напомним, что в соответствии с байесовской точкой зрения параметр является случайным, а его оценка нет.) Данное правило оценивания является общим для всех задач теории оценивания, решаемых с байесовских позиций. И в этом байесовская методология имеет большое преимущество перед всеми другими подходами. Нужно твердо представлять, что появление такого решающего правила обусловлено первым положением байесовской методологии, т.е., по существу, исходным постулатом Томаса Байеса. Иными словами, байесовская теория статистических решений применима в тех задачах, в которых неопределенность или информация относительно параметра может быть задана посредством вероятностного распределения на множество его возможных значений.

Байесовское решающее правило следует рассматривать с позиций общей теории решений, развитой Вальдом [10]. В этой теории с общих объективистских позиций было введено понятие допустимого решающего правила как такого, которое максимизирует ожидаемую полезность. Допустимость имеет очевидный смысл: решающее правило отклоняется, если одно доминируется другими; допустимым является такое правило, которое доминирует все другие. Как отмечает Де Финетти [108, с. 121], "некто, использующий недопустимое правило, несет в среднем большие убытки..., чем тот, кто использует допустимое правило, которое доминирует предыдущее". Заметим, что термин "допустимый" появился в работе Вальда [10] как русский перевод английского термина admissible. Последний имеет смысл "приемлемый", который применительно к данной ситуации лучше отражает суть решающего правила, доминирующего над всеми остальными.

Решающая функция, минимизирующая ожидаемые потери при заданном априорном распределении, названа Вальдом *оптимальным байесовским решением относительно выбранного априорного распределения.* Надо отметить, что Вальд рассматривал байесовские решения лишь для построения общей теории решений, в частности для доказательства существования полного класса решающих функций. Относительно практической стороны вопроса он считал, что "во многих статистических задачах существование априорных распределений не может быть постулировано, а в тех случаях, когда существование априорного распределения можно предположить, оно обычно неизвестно статистику, и поэтому байесовское решение не может быть определено" [10, с. 325]. В подобных ситуациях Вальд рекомендует другие способы, например минимаксные решающие функции, которые являются предельными по отношению к оптимальным байесовским и соответствуют случаю наихудшего (в смысле конечного результата) априорного распределения. В этом смысле "байесианизм" Вальда ближе к теории Джеффриса, чем к теориям Де Финетти и Де Гроота.

В заключение рассмотрения третьего положения байесовской методологии упомянем взаимные оценки, даваемые "байесианцами" своим противникам и наоборот. В силу существования единого принципа для получения байесовских оценок этот подход называется сторонниками классической теории оценивания догматическим. В свою очередь байесианцы считают все небайесовские решения несогласованными, поскольку они лишены какого-либо единого принципа. Здесь вновь уместно вспомнить ad hockeries ("мелкие хитрости") Гуда. Методологическая привлекательность байесовских решений состоит также в том, что для них нет необходимости рассматривать свойства эффективности, несмещенности и состоятельности. Вспомним, что эти свойства (в основном два первых) являются для многих классических оценок противоречивыми, и в общем случае неизвестно, какую оценку следует предпочесть – несмещенную или смещенную, но более эффективную. С байесовских позиций вместо классических свойств оценок используется одно общее требование: оценка должна быть оптимальной в смысле минимума ожидаемых потерь.

Исследуя байесовский подход с позиций классического свойства состоятельности, можно прийти к выводу, что байесовская теория оценивания решает проблему малой выборки. Справедливость данного утверждения обусловлена тем, что в байесовской теории эта проблема не возникает.

§ 1.4. Разновидности построений субъективных вероятностей

Поскольку байесовский подход основан преимущественно на субъективных вероятностях, концепции последних являются составной частью байесовской методологии. Ниже будут рассмотрены основные положения теории субъективных вероятностей применительно к байесовскому подходу.

Исторически первым предложил трактовать вероятности как степени или уровни доверия Якоб Бернулли в своей книге "Искусство предположений", вышедшей в 1713 г., через восемь лет после смерти автора [5]. В XIX веке Де Морган выдвинул доктрину, что вероятность не есть объективная характеристика внешнего мира, а субъективная величина, которая может изменяться от субъекта к субъекту [108]. Свое дальнейшее развитие вопросы теории субъективных вероятностей получили в работах Рамсея [203], Де Финетти [109], Купмэна [157], Сэвиджа [210], Де Гроота [15] и других авторов. Изложим основные принципы этой теории, следуя последним работам Де Финетти и Де Гроота.

Для упорядочения совокупностей уровней доверия аксиоматически вводится понятие *относительного правдоподобия* одного события (или высказывания) сравнительно с другим. В дальнейшем $A \prec B$ означает, что событие B более правдоподобно, чем A; $A \sim B$ означает одинаковую правдоподобность. Вероятность, исходя из интуитивного представления, есть численная мера правдоподобия события A. Задание вероятностного распределения указывает не только, какое из двух событий более правдоподобно, но и насколько именно оно правдоподобней. Важно, чтобы вероятностное распределение было согласованным с отношением $\preccurlyeq$. Для всякого вероятностного распределения P, заданного на σ-алгебре событий $\mathcal{L}$, свойство согласованности означает, что $P\{A\} \leqslant P\{B\}$ тогда и только тогда, когда $A \preccurlyeq B$. Введем четыре предположения относительно отношения $\preccurlyeq$ [15].

1. *Для любых двух событий A и B имеет место одно и только одно из следующих отношений: $A \prec B$, $B \prec A$, $A \sim B$.*

2. *Если для* A_1, A_2, B_1, B_2 *имеем* $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \phi$ *и* $A_i \preccurlyeq B_i$, *то* $A_1 \cup A_2 \preccurlyeq B_1 \cup B_2$. *Если при этом* $A_1 \prec B_1$ *или* $A_2 \prec B_2$, *то* $A_1 \cup A_2 \prec$ $\prec B_1 \cup B_2$.

3. *Каково бы ни было событие* A, $\phi \preccurlyeq A$. *Кроме того,* $\phi \prec \Omega$, *где* Ω – *все выборочное пространство.*

4. *Если* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ – *убывающая последовательность событий, причем* $A_i \succcurlyeq B$, $i = 1, 2, \ldots$, где B – *некоторое фиксированное событие, то* $\bigcap\limits_1^\infty A_i \succcurlyeq B$.

Эти предположения являются, по существу, аксиомами теории субъективных вероятностей, так как в дальнейшем доказывается, что, во-первых, отношению $\preccurlyeq$ соответствует единственное распределение вероятностей; во-вторых, аксиомы вероятности Колмогорова справедливы для случайных событий, введенных предположениями 1–4.

Субъективные вероятности, которые являются численной мерой правдоподобия событий, устанавливаются путем сравнения этих событий с такими случайными событиями, вероятности которых известны. Вследствие этого необходимо предположить существование класса $\mathfrak{B}$ событий со следующими двумя свойствами: 1) каждое событие из класса $\mathfrak{B}$ имеет известную вероятность; 2) для каждого числа p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ найдется событие $B \in \mathfrak{B}$, вероятность которого равна p. Таким образом, для определения вероятности некоторого события A статистик находит событие $B \in \mathfrak{B}$ такое, что $A \sim B$, и приписывает A ту же вероятность, что и B. В качестве событий из класса $\mathfrak{B}$ выбираются события вида $X \in I$, где X – равномерно распределенная в $[0, 1]$ случайная величина, $I = [a, b]$. В частности, если $I_1 \subset I_2$, то $\{X \in I_1\} \prec \{X \in I_2\}$. Для осуществления такого перехода вводится еще одно (последнее) предположение: *существует случайная величина с равномерным распределением в* $[0, 1]$.

Указанный способ получения субъективных вероятностей событий назван Де Гроотом [15] *вспомогательным экспериментом.* Ясно, что такой эксперимент в действительности производить не обязательно, не нужна даже возможность его осуществления. Достаточно, чтобы статистик представлял себе идеальный вспомогательный эксперимент, который дает случайную величину X с равномерным распределением, и умел сравнивать относительное правдоподобие интересующего его события A и любого события вида $\{X \in I\}$.

Единственность распределения $P\{A\}$ обосновывается следующей теоремой, доказанной в [15].

Теорема 1.1. *Для всякого события* A *существует единственное число* a_* $(0 \leqslant a_* \leqslant 1)$ *такое, что* $A \sim G[0, a_*]$. *Здесь* $G[a, b] = \{X \in [a, b]\}$.

Искомое вероятностное распределение в силу теоремы задается соотношением

$$A \sim G[0, P\{A\}].$$

Из этого соотношения следует, что для двух событий A и B таких, что $A \preccurlyeq B$, имеем $G[0, P\{A\}] \preccurlyeq G[0, P\{B\}]$, откуда заключаем $P\{A\} \leqslant$ $\leqslant P\{B\}$.

Другим подходом к определению субъективной вероятности является использование объединения соображений неопределенности и полезности. Первым предложил теорию решений, построенную на двойственных, взаимосвязанных понятиях оценочной вероятности и полезности, Рамсей [203]. В соответствии с этой теорией вероятность определяется как степень готовности субъекта совершить то или иное действие в ситуации принятия решения при ненадежных возможных выигрышах. Важно только, чтобы все возможные исходы были этически равноценными.

Блестящим развитием этой теории является работа Де Финетти [109], посвященная определению субъективных вероятностей в ситуации анализа шансов при заключении пари. Рассмотрим кратко сущность проведенных Де Финетти построений. Пусть необходимо оценить шансы на множестве определенных событий $A, B, C, \ldots$ и принять любые ставки от окружающих, пожелавших ставить на эти события. Это значит, что каждому событию A придется приписать некоторую вероятность $P\{A\}$. Если теперь ставка противника – S_A (положительная или отрицательная), т.е. эта сумма должна быть выплачена при осуществлении A, то стоимость билета за участие в пари должна составить $P\{A\}\, S_A$. Естественно возникает вопрос, какими желательными свойствами должны обладать эти вероятности. Де Финетти предложил использовать *принцип когерентности*, который имеет предельно простую суть: *вероятности должны назначаться таким образом, чтобы тот, кто их назначает, не остался в проигрыше.* Из этого простого принципа немедленно следуют все аксиомы вероятности.

a) $0 \leqslant P\{A\} \leqslant 1$. Если соперник ставит на A и A действительно происходит, то его выигрыш составляет S за вычетом стоимости билета $P\{A\}\, S$, т.е. $W_1 = S[1 - P\{A\}]$. Если A не происходит, то его выигрыш равен $W_2 = -SP\{A\}$. Принцип когерентности требует, чтобы $W_1 W_2 \leqslant 0$ при всех S, т.е. $[1 - P\{A\}]P\{A\} \geqslant 0$, или $0 \leqslant P\{A\} \leqslant 1$.

b) $P\{\Omega\} = 1$. Какое бы событие ни наступило, оно будет принадлежать всему пространству Ω. Если противник ставит на Ω, то его выигрыш составит $W_\Omega = S_\Omega\,[1 - P\{\Omega\}]$. Согласно условию когерентности не должно найтись такого S_Ω, что $W_\Omega > 0$. Отсюда следует $P\{\Omega\} = 1$.

c) Если $A \cap B = \phi$, то $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$. Пусть противник назначает ставки на события A, B и $C = A \cup B$. Возможны следующие исходы и соответствующие им выигрыши:

$$\begin{aligned}
&\text{для } A \cap \bar{B} \quad W_1 = S_A(1 - P\{A\}) - S_B P\{B\} + S_C(1 - P\{C\}),\\
&\text{для } \bar{A} \cap B \quad W_2 = -S_A P\{A\} + S_B(1 - P\{B\}) + S_C(1 - P\{C\}), \qquad (1.4)\\
&\text{для } \bar{A} \cap \bar{B} \quad W_3 = -S_A P\{A\} - S_B P\{B\} - S_C P\{C\}.
\end{aligned}$$

Условие когерентности требует, чтобы не нашлось таких величин S_A, S_B, S_C, при которых выигрыши W_1, W_2, W_3 одновременно все положительны. Если основная матрица системы линейных уравнений (1.4) обратима, то можно всегда назначить ставки S_A, S_B, S_C таким образом, что выигрыши примут любое наперед заданное значение. Чтобы этого не было, определитель основной матрицы системы (1.4) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix}
1 - P\{A\} & -P\{B\} & 1 - P\{A \cup B\}\\
-P\{A\} & 1 - P\{B\} & 1 - P\{A \cup B\}\\
-P\{A\} & -P\{B\} & -P\{A \cup B\}
\end{vmatrix} = 0,$$

или

$$-P\{A \cup B\} + P\{A\} + P\{B\} = 0,$$

откуда окончательно

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}.$$

Построение Де Финетти убеждает, что поскольку степени уверенности (в данном случае при оценке шансов при пари) подчиняются аксиомам Колмогорова и имеют интуитивную вероятностную трактовку, они могут быть представлены в виде вероятностей. В [32] Лимер отмечает, что вопрос, каким ограничениям должны удовлетворять уровни доверия, имеет единственный ответ: "Они должны быть вероятностями и только, никаких других ограничений нет. Если относительная частота известна и если все события считаются равноправдоподобными, то в силу такого стечения обстоятельств индивидуальная вероятность окажется равной частости".

Важным результатом теории Де Финетти является теорема о взаимозаменяемости событий. Прежде всего Де Финетти утверждает, что понятие независимости, широко используемое в классической статистике, является лишь математической абстракцией и не относится к числу явлений, распознаваемых интуицией или опытной проверкой. Вместо понятия "независимость" он вводит понятие "взаимозаменяемость": последовательность случайных событий называется *взаимозаменяемой,* если вероятности, соответствующие последовательностям, не зависят от порядка следования событий. Например, $A\bar{A}\bar{A}$ имеет такую же вероятность, как и $\bar{A}A\bar{A}$. Де Финетти принадлежит следующая замечательная теорема [109].

Теорема 1.2. *Любое когерентное задание вероятностей бесконечной взаимозаменяемой последовательности биномиальных событий эквивалентно предельному их заданию с помощью совместного распределения, для которого:*

a) *если рассматривать его как условное по p, то события оказываются математически независимыми и*

$$P\{AA\ldots\bar{A}A\ldots\bar{A}\} = p^r(1-p)^{n-r};$$

b) *имеется единственное априорное распределение* $h(p)$.

Маргинальное распределение при этом, очевидно, имеет вид

$$P\{AA\ldots\bar{A}A\ldots\bar{A}\} = \int_0^1 p^r(1-p)^{n-r}h(p)\,dp.$$

Из этой теоремы следует важный методический результат – прогноз вероятности будущего события. Пусть имеется некоторое правильное задание вероятностей относительно бесконечной последовательности взаимозаменяемых событий. При условии, что в первых n попытках было r успехов, вероятность успеха в следующей попытке равна

$$P\{A_{n+1} | A_1A_2\bar{A}_3\ldots A_n\} = \frac{P\{A_1A_2\bar{A}_3\ldots A_nA_{n+1}\}}{P\{A_1A_2\bar{A}_3\ldots A_n\}} =$$

$$= \frac{\int_0^1 p^{r+1}(1-p)^{n-r}\,h(p)\,dp}{\int_0^1 p^r(1-p)^{n-r}h(p)\,dp} = \int_0^1 p\check{h}(p)\,dp,$$

где

$$\hbar(p) = p^r(1-p)^{n-r}h(p)/\int_0^1 p^r(1-p)^{n-r}h(p)dp.$$

Таким образом, вероятность предвидения исхода очередной попытки такова, как будто существует некая истинная доля успехов p и некое априорное распределение $h(p)$, которое преобразуется, согласно теореме Байеса, в апостериорное распределение $\hbar(p)$, исходя из результатов независимой выборки.

Существует теория субъективных вероятностей, которая делает акцент на обеспечении возможности передачи субъективной информации. Эта теория развита в работах Кокса [98], Трибуса [232] и философски обоснована Крелином [99]. Исходным пунктом теории является тезис о возможности передачи субъективной информации в форме правдоподобий и использования правдоподобий для принятия решений. К системе, включающей правдоподобия, предъявляются следующие требования:

1) Система не должна быть двусмысленной, т.е. утверждение, по отношению к которому использовано правдоподобие, должно быть точным.

2) Система должна обеспечивать универсальную сравнимость.Правдоподобия различных утверждений должны иметь возможность сравниваться для того, чтобы передать субъективную информацию о том, что одно утверждение правдоподобнее другого. Система должна быть допустимой для любого утверждения.

3) Система должна быть непротиворечивой. Это означает, что если допускается более одного способа оценки правдоподобия, то должен достигаться один и тот же результат.

4) Система должна обладать свойством непрерывности метода оценки правдоподобия.

Первое требование удовлетворяется за счет использования символической логики и логических предложений, второе – использованием реального численного диапазона для количественной меры правдоподобия. Третье и четвертое условия требуют, чтобы численное представление для правдоподобия составных утверждений подчинялось функциональным соотношениям, использующим правдоподобия компонент. Из интуитивных соображений мера правдоподобия $\Theta(\cdot)$ должна подчиняться соотношениям

$$\Theta\{A \cap B|C\} = \Theta\{A|C\}\Theta\{B|A \cap C\} = \Theta\{B|C\}\Theta\{A|B \cap C\}, \tag{1.5}$$

$$\Theta\{A|C\} + \Theta\{\bar{A}|C\} = 1. \tag{1.6}$$

В работах [98, 232] обосновывается необходимость использования для меры правдоподобия именно этих соотношений. Эти же соотношения являются также фундаментальными в теории вероятностей. Тем не менее существует принципиальное смысловое различие между классической интерпретацией вероятностей и тем толкованием их, которое дают соотношения (1.5) и (1.6). Крелин [99] сраведливо считает, что понятие "вероятность" здесь используется только для того, чтобы оперировать правилами теории вероятностей, носящей дедуктивную форму: "Если бы мы не выбрали для функции, фигурирующей в третьем требовании, название "вероятность", мы могли бы найти другое" [99, с. 132].

Подводя итог рассмотренным теориям субъективных вероятностей, отметим следующее важное обстоятельство: все эти теории используют общеупотребимую теорию вероятностей, основанную на аксиомах Колмогорова, вкладывая в понятие "вероятность" субъективное содержание.

§ 1.5. Иерархическая байесовская методология

Данная методология является развитием ортодоксальной байесовской и изучена в основном в работах Гуда [134, 135]. Ее сущность состоит в установлении для исследуемого явления различных вероятностных уровней, последовательно подчиненных друг другу. Связь между этими уровнями обеспечивается с помощью последовательных условных распределений. Байесовское правило применяется в этом случае столько раз, сколько вероятностных уровней задано сверх начального. Проинтерпретируем иерархический байесовский подход на следующем примере.

Пусть некоторый признак X подчиняется нормальному распределению с неизвестным средним μ и известным средним квадратическим отклонением σ, т.е. $f(x) = f(x;\ \mu) = N(\mu,\ \sigma)$. Этот вероятностный уровень будем считать низшим или начальным. Решая задачу в байесовской постановке, мы полагаем $\mu \in \mathrm{M}$ случайным параметром, имеющим некоторое априорное распределение $h(\mu)$. Если мы будем использовать априорное распределение, сопряженное с ядром функции правдоподобия, то в качестве $h(\mu)$ следует принять нормальную плотность с параметрами a и s, т.е. $h(\mu) = h(\mu;\ a,\ s) = N(a,\ s)$. По отношению к признаку X величины a и s являются гиперпараметрами (этот термин используют в своих работах Гуд [135], Дили, Линдли [106] и другие). Как же выбрать значения гиперпараметров a и s? Для этой цели нужно подняться еще на одну "ступень" байесовской иерархии, т.е. положить гиперпараметры a и s случайными и задать для них априорное распределение $h_1(a,\ s)$. Тогда априорная плотность для параметра μ может быть записана с помощью смешанной плотности, если принять, что $h(\mu)$ является условной плотностью по отношению к a и s:

$$h(\mu) = \iint_{\Omega_{as}} h(\mu; a, s) h_1(a, s)\, da\, ds, \tag{1.7}$$

где Ω_{as} — область значений для a и s. Выражение для маргинальной плотности исходного признака X в этом случае будет иметь вид

$$f(x) = \int_{\mathrm{M}} f(x; \mu) h(\mu)\, d\mu =$$

$$= \int_{\mathrm{M}} f(x; \mu)\, d\mu \iint_{\Omega_{as}} h(\mu; a, s) h_1(a, s)\, da\, ds. \tag{1.8}$$

Представляется очевидным, что соотношение (1.7) может быть записано и для апостериорной плотности $\hbar(\mu|\cdot)$, если в соответствии с теоремой Байеса к условной априорной плотности $h(\mu;\ a,\ s)$ добавить эмпирические данные в виде вектора наблюдений над признаком X.

По мнению Гуда [135], задание гиперпараметров с помощью априорного распределения помогает исследователю более обоснованно подойти к выбору априорного распределения для основного параметра. В рассмотренном примере мы имеем три вероятностных уровня (в традиционном байесовском методе их два), но число уровней может быть бо́льшим.

Назначение иерархической методологии Гуд видит еще и в том, чтобы достичь компромисса между классической и байесовской теориями оценивания. Это можно сделать по крайней мере с двух позиций. Во-первых, различные иерархические уровни можно интерпретировать по-разному. Гуд допускает равноправное существование всех трех интерпретаций вероятностей: объективной (частотной), субъективной и логической. В рассмотренном выше примере распределение основного признака можно трактовать с частотных позиций, для интерпретации распределения параметра μ следует использовать логическую вероятность, а для гиперпараметров a и s – субъективную. Вторым моментом достижения компромисса служит попытка произвести оценку распределения гиперпараметра верхнего уровня байесовской иерархии с помощью небайесовских методов. Это возможно в том случае, когда вероятности верхнего уровня не интерпретируются с субъективных позиций. Отметим, что данный прием не совпадает с эмпирическим байесовским.

В заключение заметим, что не все байесианцы полностью разделяют точку зрения Гуда, о чем свидетельствует дискуссия по статье [135].

§ 1.6. Использование байесовской методологии в теории надежности

Вопрос о том, можно ли применять байесовский подход в теории надежности, не имеет однозначного ответа среди специалистов в этой области. По мнению Крелина [99], вывод о возможности использования байесовского подхода должен быть поставлен в зависимость от назначения надежности: "Если надежность обязана только давать отчет о полученных данных, то субъективные вероятности, возможно, не понадобятся. Важно понять, что субъективные знания будут окончательно отфильтрованы в процессе принятия решения, что полностью соответствует содержанию инженерной практики. Специалисты по надежности должны быть заинтересованы в том, чтобы использовать относящееся к делу субъективное знание и использовать рационально. Поскольку они хотят получить наилучшую форму знаний, относящихся к надежности, они должны чувствовать долг в передаче ее. Для того чтобы передать субъективные знания, их необходимо соответствующим образом выразить количественно". Так появляются субъективные вероятности в области надежности.

Если заключение о надежности рассматривать как элемент процесса принятия решения, то эмпирические данные должны быть дополнены относящимся к предмету исследования субъективным знанием. Справедливость такого вывода вытекает из существа инженерной практики. Разработка нового технического устройства происходит, с одной стороны, с помощью индивидуального опыта разработчика, математических моделей данной области знаний, анализа устройств-аналогов и т.п.; с другой стороны – при наличии экспериментальной отработки. Совокупность факторов первой группы дает априорное представление о надежности, экспериментальная отработка предоставляет эмпирические данные. И то, и другое одинаково уместно в процессе принятия решения о надежности. В самом деле, если при разработке устройства мы вправе полагаться на собственный опыт, то почему нельзя доверять этому же опыту при оценке качества устройства? Тем более эта оценка всегда будет подправлена эмпирическими данными, которые носят объективный характер.

Эванс [119] утверждает, что одним из преимуществ байесовского метода является то, что он позволяет инженеру использовать свои знания. В [121] Эванс заявляет более категорично, что знания могут компенсировать отсутствие данных. В этом состоит наиболее притягательное свойство байесовской методологии. Именно это свойство заставляет прагматично настроенных инженеров использовать байесовские методы с той только целью, чтобы получать такие же точно выводы, как и выводы классической статистики, но опираясь на меньший объем данных. Это особенно важно, когда ставится задача, подтвердить с большой достоверностью высокий (более 0,95) уровень надежности. Классические методы в подобных ситуациях приводят к необходимости использования очень больших объемов эмпирических данных, что далеко не всегда возможно. Поэтому в практических приложениях нужно очень тщательно и добросовестно обосновывать байесовские модели и априорные распределения, не выдавая желаемое за действительное. Истерлинг [116] отмечает, что байесовский метод "в руках недобросовестных статистиков может стать настоящим ящиком Пандоры. Один из недостатков метода заключается в том, что им очень легко злоупотреблять".

На перспективность использования байесовской методологии указывали также советские специалисты в области надежности. В частности, Беляев [3] подчеркивает, что байесовский подход следует рассматривать как общий метод получения статистических выводов на основе результатов испытаний, он обладает рядом практических преимуществ и отличается внутренней логической простотой. Бруевич и Мильграм [8] рассматривают байесовскую процедуру в теории надежности как процесс самообучения, связанный с использованием эвристических возможностей человека, его способностей анализировать и экстраполировать. В монографии [63] Червоный, Лукьященко, Котин указали на важную роль использования байесовского подхода в общей многоэтапной и многоцелевой системе обеспечения надежности сложных технических систем.

Таким образом, уместность и актуальность байесовского подхода к надежности вряд ли могут дискутироваться. Что же касается частных вопросов применения байесовских процедур в конкретных ситуациях, то здесь необходимо занять предельно осторожную позицию, чтобы избежать злоупотреблений привлекательными аспектами байесовской методологии.

СТАНДАРТНЫЙ БАЙЕСОВСКИЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ

§ 2.1. Составные части байесовского подхода

Используя формально-математические построения байесовской теории, кратко изложим структуру байесовских оценок. Байесовская схема принятия решений условно может быть представлена в виде четырех составных частей.

1. Статистическая модель, представленная вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{L}, P)$. Здесь Ω – множество всех возможных при некотором плане проведения экспериментов П данных, $\Omega = \{ x \}$. Данные x являются реализацией случайного эксперимента, поэтому на Ω задана σ-алгебра $\mathcal{L}$ случайных событий. $P \in \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ – семейство вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{L})$. В традиционном байесовском подходе вероятностная мера P определяется заданием некоторого параметра θ (векторного или скалярного), т.е. $\mathcal{B} = \{ P_\theta; \ \theta \in \Theta \}$ является параметризированным семейством вероятностных мер.

2. Вероятностное пространство $(\Theta, \mathcal{E}, H)$ **для параметра** θ**, который считается случайным.** Здесь $\mathcal{E}$ – σ-алгебра на Θ, а H – вероятностная мера на $(\Theta, \mathcal{E})$. Меру H называют *априорной вероятностной мерой параметра* θ. Априорная мера H принадлежит некоторому заданному семейству вероятностных мер $\mathcal{H}$.

3. Множество таких возможных решений D**, что любой элемент** d **из** D **является измеримой функцией на** Ω. В теории оценивания множество решений D может состоять из всех оценок параметра θ или некоторой измеримой на Θ функции $R(\theta)$.

4. Функция потерь $L(\theta, d)$ **(или** $L(R(\theta), d)$**), определенная на** $\Theta \times D$. Эта функция определяет потери, обусловленные ошибочным оцениванием, т.е. заменой параметра θ элементом решения d.

В дальнейшем предполагается, что семейства $\mathcal{B}$ и $\mathcal{H}$ доминируются некоторыми σ-конечными мерами μ и ζ соответственно. Если теперь обозначить плотности

$$f(x \mid \theta) = P_\theta \{ dx \} / \mu \{ dx \}, \quad h(\theta) = H \{ d\theta \} / \zeta \{ d\theta \},$$

которые существуют в соответствии с теоремой Радона–Никодима, то совместная плотность распределения вероятностей случайных величин X и θ имеет вид

$$g(x, \theta) = f(x \mid \theta) h(\theta).$$

В соответствии с теоремой Байеса условная плотность для θ при $X = x$, называемая *апостериорной плотностью распределения* (п.р.) *параметра* θ, записывается в виде

$$\hbar(\theta \mid X = x) = \frac{f(x \mid \theta) h(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f(x \mid \theta) H\{d\theta\}}, \quad \theta \in \Theta, \tag{2.1}$$

для каждого $x \in \Omega$ такого, что

$$f(x) = \int f(x \mid \theta) h(\theta) \zeta\{d\theta\} > 0.$$

Если Y – статистика на $(\Omega, \mathcal{L}, P_\theta)$, то вероятностная мера P_θ преобразуется в P_θ^Y. И если теперь $f^Y(y \mid \theta) = P_\theta^Y\{dy\} / \mu\{dy\}$ – плотность вероятностной меры P_θ^Y, то апостериорная п.р. параметра θ при $Y(X) = y$ имеет вид

$$\hbar^Y(\theta \mid Y = y) = \frac{f^Y(y \mid \theta) h(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f^Y(y \mid \theta) h(\theta) \zeta\{d\theta\}}. \tag{2.2}$$

При записи формулы Байеса (2.1) или (2.2) примем в дальнейшем следующие упрощения. Для априорной и апостериорной п.р. всегда будем использовать соответственно обозначения $h(\theta)$ и $\hbar(\theta \mid x)$. Поскольку знаменатель (2.1) и (2.2) не зависит от θ, а определяется лишь наблюдением x (или статистикой y), будем указывать лишь ядро апостериорной плотности, употребляя символ пропорциональности "$\backsim$". Так, вместо выражения (2.1) будем записывать

$$\hbar(\theta \mid x) \backsim f(x \mid \theta) h(\theta), \tag{2.3}$$

учитывая, что нормирующий множитель апостериорной п.р. $\hbar(\theta \mid x)$ вычисляется с помощью интеграла

$$\beta = [\int\limits_{\Theta} f(x \mid \theta) h(\theta) \zeta\{d\theta\}]^{-1}. \tag{2.4}$$

В этом случае, когда параметр θ принимает дискретные значения θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_k$, априорное распределение задается в виде априорных вероятностей $p_j = P\{\theta = \theta_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Выражения (2.3) и (2.4) для этого случая также справедливы, если $h(\theta)$ и $\hbar(\theta \mid x)$ представить с помощью обобщенной дельта-функции. В частности,

$$h(\theta) = \sum_{j=1}^{k} p_j \delta(\theta - \theta_j).$$

Формула Байеса (2.3) позволяет найти апостериорную плотность параметра θ, представленную в виде

$$\hbar(\theta \mid x) = \sum_{j=1}^{k} \tilde{p}_j \delta(\theta - \theta_j),$$

где $\tilde{p}_j = P\{\theta = \theta_j \mid x\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, – апостериорные вероятности.

Для случая дискретных параметров θ формулу Байеса часто записывают в виде

$$p_j = \frac{p_j f(x \mid \theta_j)}{\sum_{i=1}^{k} p_i f(x \mid \theta_i)}, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.5}$$

Важное значение в теории байесовского оценивания имеет выбор *функции потерь*. В большинстве исследований функция потерь задается в следующем виде:

$$L(\theta, d) = C(\theta)\, W(|\, d - \theta\, |), \tag{2.6}$$

где $W(0) = 0$ и $W(t)$ – монотонно возрастающая функция при $t > 0$; $C(\theta)$ полагается положительной и конечной. Априорная байесовская оценка $\hat{\theta}_H$ определяется как элемент из D, который минимизирует априорный риск [17]

$$G(H, d) = \int_{\Omega} f(x)\mu\{dx\} \int_{\Theta} C(\theta)\, W(|\, d(x) - \theta\, |) H\{d\theta \mid x\}. \tag{2.7}$$

После того как X наблюдено, с байесовской точки зрения наиболее подходящей функцией для дальнейшего рассмотрения является апостериорный риск вида

$$\tilde{G}(H, d) = \int_{\Theta} C(\theta)\, W(|\, d(x) - \theta\, |) H\{d\theta \mid x\}, \tag{2.8}$$

а не априорный (2.7). Тогда байесовской оценкой параметра θ относительно априорного распределения H следует считать элемент $\hat{\theta}_H(X)$ множества D, который минимизирует апостериорный риск при заданном X:

$$\int_{\Theta} C(\theta)\, W(|\, \hat{\theta}_H(X) - \theta\, |) H\{d\theta \mid X\} =$$

$$= \inf_{d \in D} \int_{\Theta} C(\theta)\, W(|\, d(X) - \theta\, |) H\{d\theta \mid X\}. \tag{2.9}$$

Анализ изложенной постановки показывает, что исследователя в конкретном решении, когда план испытания П задан, будут интересовать следующие три вопроса:

1) выбор семейства вероятностных мер $\mathscr{B}$;
2) выбор априорного распределения H;
3) выбор функции потерь $L(d, \theta)$.

Если первый вопрос имеет практическую направленность и связан с тем, насколько полное представление о статистической модели имеет исследователь, то два последующих менее специфичны. Некоторые общие рекомендации по выбору H и $L(d, \theta)$ будут даны ниже.

В прикладном статистическом анализе часто используются интервальные оценки. Байесовская теория также располагает аналогичным понятием, однако его трактовка отлична от классической. В простейшем случае скалярного параметра θ байесовский доверительный интервал $\underset{\sim}{\theta}$ вводится с помощью выражения

$$\int_{\underset{\sim}{\theta}} \hbar(\theta \mid x)\, d\theta = \gamma,$$

где γ – доверительная вероятность. Поскольку выбор $\underset{\sim}{\theta}$ может осуществляться не единственным образом, дополнительно требуют минимальную длину интервала $\underset{\sim}{\theta}$. В случае векторного параметра θ доверительный интервал для некоторого функционала $R(\theta)$ выбирается из условия

$$\int\limits_{\underline{R} \leqslant R(\theta) \leqslant \overline{R}} \hbar(\theta \mid x)\, d\theta = \gamma,$$

причем разность $\overline{R} - \underline{R}$ должна быть наименьшей.

Как видно из приведенных определений, классический и байесовский доверительный интервалы имеют различную трактовку. В классическом виде случаен доверительный интервал, который с заданной доверительной вероятностью "накрывает" неизвестный параметр. В байесовском подходе случаен параметр, а доверительный интервал имеет строгие границы, определяемые апостериорной плотностью и доверительной вероятностью γ.

§ 2.2. Классические свойства применительно к байесовским оценкам

С позиций классической статистики качество статистических оценок определяется тем, насколько они удовлетворяют требованиям состоятельности, несмещенности, эффективности и достаточности. Как правило, принятая в конкретном расчетном случае классическая оценка является компромиссной, т.е. одному свойству отдается предпочтение в ущерб другому. Как уже было отмечено ранее, главным свойством байесовской оценки является ее оптимальность. Указанные классические свойства, по существу, не адекватны байесовской методологии. Многие авторы рассматривают их, отдавая дань традиции. Ниже приведен ряд результатов, посвященных модификации классических свойств оценок в байесовском подходе.

2.2.1. Достаточность. Методически наиболее просто обстоит дело со свойством достаточности. С формулой Байеса в виде (2.1) или (2.2) связано байесовское определение достаточной статистики. С байесовской точки зрения апостериорная п.р. параметра θ, порождаемая достаточной статистикой $S(X)$, эквивалентна апостериорной п.р. параметра θ, построенной по первоначальному наблюдению, т.е.

$$\hbar^{s}(\theta \mid S(X)) = \hbar(\theta \mid X).$$

В то же время доказана эквивалентность байесовского и традиционного определений достаточности (см., например, [17]). Таким образом, свойство достаточности в теории байесовского оценивания сохраняет свой классический вид.

2.2.2. Состоятельность. По отношению к свойству состоятельности предыдущий вывод сделать нельзя. Рассуждая строго, можно утверждать, что традиционные исследования поведения оценки при объеме выборки, стремящемся к бесконечности, не соответствуют содержанию байесовского подхода. В самом деле, если полагать, что параметр θ является случайным с невырожденной априорной п.р. $h(\theta)$, то нет смысла спрашивать, каковы асимптотические свойства сходимости оценки $\hat{\theta}_H$ к фиксированному

$\theta = \theta_0$. По той же причине некорректно, вычисляя математическое ожидание, сравнивать его со случайной величиной θ. Тем не менее существуют представления, позволяющие исследовать поведение оценки $\hat{\theta}_H$ при больших выборках. Если считать, что выбранное априорное распределение не является точным, то можно получить оценку с помощью байесовской схемы, а затем, отвлекаясь от способа получения оценки, исследовать ее в рамках классической теории. Во многих случаях байесовские оценки асимптотически состоятельны и часто сходятся к о.м.п.

Заксом [17] приведен пример, когда оценка пуассоновской ф.р. $p(i \mid \lambda) = e^{-\lambda}\lambda^i/i!$ при априорном $\lambda \sim \Gamma(1, 1)$ является состоятельной. Линдли [168] доказал, что если $\hat{\theta}_n$ является наилучшей асимптотической нормальной оценкой, то можно утверждать асимптотическую эквивалентность б.о. и о.м.п. Точный вид априорного распределения в данном случае несуществен, поскольку в очень больших выборках о.м.п. можно подставить вместо неизвестного значения параметра θ. Биккелем и Йахавом [83] получено строгое доказательство аналогичного утверждения для случая однопараметрического экспоненциального семейства и функции потерь квадратичного типа. Асимптотические свойства байесовских оценок дискретных ф.р. исследованы Фридманом [131].

Приведем фрагмент рассуждений Джеффриса [150] относительно свойств апостериорной п.р. при больших выборках. Пусть для скалярного параметра θ в соответствии с (2.3)

$$\hbar(\theta \mid x) \backsim h(\theta)\, l(\theta \mid x) = h(\theta)\, e^{\ln l(\theta \mid x)}, \tag{2.10}$$

где $l(\theta \mid x)$ – функция правдоподобия, которая по определению суть п.р. наблюдаемых в опыте значений $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и по смыслу совпадает с $f(x \mid \theta)$ в (2.3). (При записи функции правдоподобия параметр θ принято считать аргументом функции.) Предполагается, что $h(\theta)$ и $l(\theta \mid x)$ $(\theta \in \Theta)$ являются невырожденными и имеют непрерывные производные; кроме того, $l(x \mid \theta)$ имеет единственный максимум в точке $\hat{\theta}_{\text{мп}}$, являющейся о.м.п. Вообще говоря, $\ln[l(\theta \mid x)]$ имеет порядок n, в то время как $h(\theta)$ не зависит от объема выборки. Таким образом, уже интуитивно ясно, что сомножитель правдоподобия при больших выборках будет доминировать в апостериорной п.р.

Более строгое утверждение доказано Бернштейном (см. [37]) и Мизесом [184]. Смысл теоремы состоит в том, что если априорная п.р. параметра θ непрерывна, то по мере возрастания числа наблюдений апостериорная п.р. θ стремится к пределу (который иногда можно вычислить аналитически), не зависящему от априорного распределения. Далее, поскольку при весьма общих условиях с возрастанием n вид п.р. приближается к кривой плотности нормального распределения, центрированной вокруг о.м.п. $\hat{\theta}_{\text{мп}}$, то и апостериорная п.р. для случая больших выборок будет нормальной с математическим ожиданием, равным $\hat{\theta}_{\text{мп}}$.

Доказательство асимптотической нормальности апостериорной п.р. $\hbar(\theta \mid x)$ может быть проведено следующим образом [17]. Разложим $h(\theta)$

и $l(\theta \mid x)$ в ряд Тейлора в окрестности о.м.п. $\hat{\theta}_{\text{мп}}$:

$$h(\theta) = h(\hat{\theta}_{\text{мп}}) + (\theta - \hat{\theta}_{\text{мп}})h'(\hat{\theta}_{\text{мп}}) + \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta}_{\text{мп}})^2 h''(\hat{\theta}_{\text{мп}}) + \ldots =$$

$$= h(\hat{\theta}_{\text{мп}})\left[1 + \frac{(\theta - \hat{\theta}_{\text{мп}})h'(\hat{\theta}_{\text{мп}})}{h(\hat{\theta}_{\text{мп}})} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(\theta - \hat{\theta}_{\text{мп}})^2 h''(\hat{\theta}_{\text{мп}})}{h(\hat{\theta}_{\text{мп}})} + \ldots\right]$$

и, обозначив $g(\theta) = \ln l(\theta \mid x)$, учитывая, что $g'(\hat{\theta}_{\text{мп}}) = 0$, имеем

$$\exp[g(\theta)] \backsim \exp\left[\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta}_{\text{мп}})^2 g''(\hat{\theta}_{\text{мп}})\right]\left[1 + \frac{1}{6}(\theta - \hat{\theta}_{\text{мп}})^3 g'''(\hat{\theta}_{\text{мп}}) + \ldots\right],$$

где последнее выражение получено с использованием разложения $e^x =$ $= 1 + x + \ldots$ Перемножая полученные разложения, будем иметь

$$\hbar(\theta \mid x) \backsim \exp\left[\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta}_{\text{мп}})^2 g''(\hat{\theta}_{\text{мп}})\right]\left[1 + \frac{(\theta - \hat{\theta}_{\text{мп}})h'(\hat{\theta}_{\text{мп}})}{h(\hat{\theta}_{\text{мп}})} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{(\theta - \hat{\theta}_{\text{мп}})^2 h''(\hat{\theta}_{\text{мп}})}{h(\hat{\theta}_{\text{мп}})} + \frac{1}{6}(\theta - \hat{\theta}_{\text{мп}})^3 g'''(\hat{\theta}_{\text{мп}}) + \ldots\right]. \qquad (2.11)$$

Доминирующий сомножитель имеет вид п.р. нормального распределения с математическим ожиданием, равным о.м.п. $\hat{\theta}_{\text{мп}}$, и дисперсией, равной

$$[-g''(\hat{\theta}_{\text{мп}})]^{-1} = \left[-\frac{d^2 \ln l(\theta \mid x)}{d\theta^2}\right]^{-1}_{\theta = \hat{\theta}_{\text{мп}}}.$$

Таким образом, если использовать только доминирующий сомножитель, аппроксимация апостериорной п.р. для θ при больших объемах выборки n будет иметь вид

$$\hbar(\theta \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,|g''(\hat{\theta}_{\text{мп}})|^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta}_{\text{мп}})^2\,|g''(\hat{\theta}_{\text{мп}})|\right]. \qquad (2.12)$$

Поскольку $|g''(\hat{\theta}_{\text{мп}})|$ обычно имеет порядок n, то с ростом n апостериорная п.р. приобретает все более островершинный характер. В [150] Джеффрис указывает, что рассмотренная аппроксимация дает ошибку порядка $n^{-1/2}$. В [25] приведено обобщение этого результата на случай векторного параметра θ.

В доводах, которые привели к (2.12), использовался только тот факт, что правдоподобие должно со всевозрастающей степенью концентрироваться вокруг своего максимума. Таким образом, эти доводы имеют гораздо более широкую область применения, чем лишь случай независимых одинаково распределенных случайных величин. Уолкер [240] и Девид [103] провели тщательное исследование комплекса условий регулярности, при которых с вероятностью единица апостериорное распределение является асимптотически нормальным. Эти условия практически совпадают с условиями регулярности, необходимыми для асимптотической нормальности о.м.п. Исследования по применению разложения (2.11) для статистических выводов можно найти в работах Линдли [164] и Джонсона [152].

В работе [225] Штрассером изучено соотношение между состоятельностью байесовских оценок и о.м.п. Дело в том, что существует пример Шварца [215], в котором о.м.п. не является состоятельной, а полученная при тех же условиях байесовская оценка этим свойством обладает. Штрассер [225] дополнил условия регулярности для строгой состоятельности о.м.п. [17] условиями для априорной меры H так, что из состоятельности оценки максимального правдоподобия следует состоятельность байесовской оценки. Обстоятельное изучение соотношения между состоятельностью о.м.п. и байесовских оценок проведено Ле Камом [159].

Более естественно и ближе к классической интерпретации состоятельность байесовской оценки может быть исследована, если параметр θ трактовать как фиксированный, но неизвестный. Эти вопросы были рассмотрены Де Гроотом [15], Берком [80], Мизесом [184] и рядом других авторов. Существо состоит в следующем. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка из распределения с неизвестным параметром θ и если значение θ в действительности равно θ_0, то при $n \to \infty$ $\hbar(\theta \mid x)$ будет все больше концентрироваться вокруг значения θ_0. Оценку параметра, построенную на таком апостериорном распределении, следует, по-видимому, называть состоятельной.

Поясним этот феномен на примере. Пусть параметр θ может принимать конечное число значений $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Предположим, что $P\{\theta = \theta_i\} = p_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, и пусть для каждого заданного значения $\theta = \theta_i$ случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют выборку из распределения с п.р. f_i. Принимается, что все f_i различны в том смысле, если Ω – выборочное пространство, отвечающее одному наблюдению, то

$$\int\limits_{\Omega} |f_i(x) - f_j(x)| \, d\mu(x) > 0 \quad \forall i \neq j.$$

Для наблюденных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ пусть $\tilde{p}_i$ обозначает апостериорную вероятность события $\{\theta = \theta_i\}$, для которой по теореме Байеса имеем

$$\tilde{p}_i = \frac{p_i \prod\limits_{j=1}^{n} f_i(x_j)}{\sum\limits_{r=1}^{k} p_r \prod\limits_{j=1}^{n} f_r(x_j)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Предположим теперь, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют в действительности выборку из распределения с п.р. f_t, где t – одно из значений $1, 2, \ldots, k$. Показано [15], что с вероятностью 1 справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{p}_t(x) = 1, \qquad \lim_{n \to \infty} \tilde{p}_i(x) = 0 \quad \forall i \neq t.$$

Приведем другой пример с непрерывным распределением параметра θ, который является математическим ожиданием гауссовой случайной величины с известной мерой точности r (дисперсия равна r^{-2}). Допустим, что априорное распределение θ гауссово со средним μ и мерой точности τ $(-\infty < \mu < \infty, \tau > 0)$. Нетрудно убедиться, что апостериорное распределение θ является гауссовым со средним

$$\mu' = \frac{\tau\mu + nr\hat{\mu}}{\tau + nr}, \quad \text{где} \quad \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

и мерой точности $\tau + r$. Перепишем выражения для μ' в виде

$$\mu' = \frac{\tau\mu}{\tau + nr} + \hat{\mu}\frac{nr}{\tau + nr}.$$

Предположим теперь, что в действительности выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ взята из гауссова распределения с математическим ожиданием θ_0. Согласно усиленному закону больших чисел (см., например, вторую теорему Колмогорова [45]) $\hat{\mu} = \theta_0$ с вероятностью 1. В то же время, как видно из формулы для μ', при $n \to \infty$ $\mu' \to \hat{\mu}$. Поэтому апостериорная оценка μ' при $n \to \infty$ стремится к θ_0 с вероятностью 1. В этом смысле μ' является состоятельной. Далее, поскольку апостериорная дисперсия параметра θ стремится к нулю, апостериорное распределение θ сходится к вырожденному, сосредоточенному в точке θ_0.

2.2.3. Несмещенность. Здесь, очевидно, имеет место та же ситуация, что и при исследовании состоятельности. В самом деле, поскольку параметр θ является случайным, искать оценку $\hat{\theta}$ такую, что $E[\hat{\theta}] = \theta$, не имеет смысла. Поэтому многие авторы и в том числе Фергюсон [125] поступают так: сначала получают байесовскую оценку определенного вида, а затем "забывают" о случайности параметра и исследуют несмещенность в обычном толковании этого понятия.

Садж и Мелса [208] делают попытку дать байесовское определение несмещенности. В частности, сделаны два определения:

1) байесовская оценка $\hat{\theta}(x)$ называется *несмещенной*, если $E[\hat{\theta}(x)] = E[\theta]$;

2) байесовская оценка $\hat{\theta}(x)$ называется *условно несмещенной*, если $E[\hat{\theta}(x) \mid \theta] = E(\theta)$.

Второе определение представляется более существенным, так как, во-первых, ближе к классическому, а во-вторых, имеет более ясный смысл по сравнению с первым. В самом деле, так как $E[\theta]$ есть математическое ожидание по априорной мере, то равенство $E[\hat{\theta}(x)] = E[\theta]$ соответствует той идеальной схеме, когда апостериорное распределение совпадает с априорным (хотя это не обязательно). В этом смысле ни одна байесовская оценка не может быть несмещенной. В работе [84] Бланд приводит пример статистической модели, которая доказывает некорректность первого определения.

Второе из указанных определений несмещенности использует Хартинган в фундаментальной работе [142]. Оценка $\hat{\theta}(x)$, удовлетворяющая условию $E[\hat{\theta}(x) \mid \theta] = E[\theta]$, названа несмещенной, а не условно несмещенной, как ранее. Возможность использования первого определения даже не обсуждается. Помимо этого введено определение точной байесовской оценки, как удовлетворяющей условию $P\{\hat{\theta}(x) \neq \theta\} = 0$. В [142] доказывается, что несмещенная байесовская оценка является точной.

2.2.4. Эффективность. Говорить о том, что одна байесовская оценка более эффективна по сравнению с другой, не имеет смысла по следующим причинам. Если в качестве меры эффективности избрать апостериорную дисперсию, то ее значение при одинаковых наблюдениях будет определяться априорным распределением (в основном априорной дисперсией параметра). Следовательно, критерий сравнения не является объективным, так как выбор априорного распределения в определенном смысле произволен. Если же взять одно и то же априорное распределение, то в силу единственности байесовского решения не может существовать двух б.о. при одинаковых наблюдениях.

§ 2.3. Виды функций потерь

Как было отмечено в § 2.1, функция потерь $L(d, \theta)$, где обычно $d = \hat{\theta}$, во многих исследованиях задается в виде

$$L(d, \theta) = C(\theta)\, W(|d - \theta|). \tag{2.13}$$

Здесь $W(0) = 0$ и $W(t)$ – монотонно возрастающая функция; $C(\theta)$ предполагается положительной и конечной. По свидетельству Ле Кама [159] функцию потерь вида (2.13) ввел еще Лаплас, понимая, что точный вид функции W не может быть выведен математически.

Выбор функции потерь является важным вопросом в теории байесовского статистического оценивания, правильности выбора функции потерь в конечном счете обусловливает качество оценки. Зачастую авторы используют квадратичную функцию потерь, для которой $W(|d - \theta|) = (\theta - d)^2$. Эта функция дает хорошую аппроксимацию для любой функции потерь вида $C(\theta) W(|d - \theta|)$, гладкой в окрестности нуля. Широко используется также выпуклая функция потерь, для которой $W(|d - \theta|) = |d - \theta|^k, k \geqslant 1$.

Хорошо известно, что для квадратичной функции потерь байесовская оценка функции $R(\theta)$ имеет вид апостериорного среднего

$$\hat{R}^* = \int_{\Theta} R(\theta)\, h(\theta \mid x)\, d\theta.$$

При $k = 1$ байесовской оценкой является медиана апостериорного распределения. Общая теория байесовских оценок для выпуклой функции потерь разработана Де Гроотом и Рао [110]. Рукхин [207] доказал теорему, согласно которой оценка параметра θ одна и та же для любой выпуклой функции потерь, если только апостериорная плотность унимодальна и симметрична по отношению к $\hat{\theta}$. Указанные функции потерь являются неограниченными, что может служить причиной определенных затруднений. В частности, Гиршиком и Сэвиджем [132] рассмотрен пример, когда байесовская оценка, минимизирующая апостериорный риск, может иметь бесконечный априорный риск.

Существует ряд работ, в которых используют другие функции потерь. Исходят при этом из различных соображений, большей частью связанных со свойствами статистических моделей и особенностями исследуемых явлений. Прямым обобщением квадратичной функции потерь является квадратичная относительная ошибка

$$L_{S_1}(\hat{\theta},\theta)=\left(\frac{\theta-\hat{\theta}}{\theta}\right)^2 \qquad (2.14)$$

и ее модификация

$$L_{S_2}(\hat{\theta},\theta)=\left(\frac{\theta^{\beta}-\hat{\theta}^{\beta}}{\theta^{\beta}}\right)^2, \quad \beta>0, \qquad (2.15)$$

которые широко используются при тех исследованиях, когда важны именно относительные ошибки. Как показали Хиггинс и Цокос [147], байесовская оценка некоторой функции $R(\theta)$, минимизирующая апостериорный риск при функции потерь (2.15), вычисляется следующим образом:

$$\hat{R}^*_{\beta}=\left\{\frac{\int\limits_{\Theta}\frac{\hbar(\theta\mid x)}{[R(\theta)]^{\beta}}\,d\theta}{\int\limits_{\Theta}\frac{\hbar(\theta\mid x)}{[R(\theta)]^{2\beta}}\,d\theta}\right\}^{1/\beta}.$$

В работе [140] Харрис предлагает при исследовании вероятности безотказной работы невосстанавливаемого технического устройства использовать функцию потерь вида

$$L_H(\hat{\theta},\theta)=\left|\frac{1}{1-\hat{\theta}}-\frac{1}{1-\theta}\right|^k. \qquad (2.16)$$

При этом его доводы дословно звучат следующим образом: "Если надежность системы 0,99, то в среднем она откажет в одном случае из 100, в то время, как если надежность системы 0,999, она откажет в одном случае из 1000, и, следовательно, в 10 раз лучше. Поэтому функция потерь должна зависеть от того, насколько хорошо можно оценить величину $(1-\theta)^{-1}$".

Хиггинс и Цокос [147] предложили использовать функцию потерь вида

$$L_e(\hat{\theta},\theta)=\frac{f_1e^{-f_2(\hat{\theta}-\theta)}+f_2e^{-f_1(\hat{\theta}-\theta)}}{f_1+f_2}-1,\ f_1>0,\ f_2>0, \qquad (2.17)$$

которая ужесточает потери, если оценка сильно отличается от параметра в сторону увеличения или уменьшения. Интересно, что при малых $\theta-\hat{\theta}$

$$L_e(\hat{\theta},\theta)=\frac{f_1f_2}{2}(\theta-\hat{\theta})^2+O((\theta-\hat{\theta})^3).$$

В той же работе [147] проведено сравнение байесовских оценок интенсивности отказов, среднего времени до отказа и функции надежности для пяти типов функций потерь: квадратичной, видов (2.15), (2.16), (2.17), а также линейной функции потерь следующего вида:

$$L_p(\hat{\theta},\theta)=\begin{cases}p\,|\theta-\hat{\theta}|, & \hat{\theta}\leqslant\theta,\\ (1-p)\,|\theta-\hat{\theta}|, & \hat{\theta}>\theta,\end{cases} \qquad (2.18)$$

которая обобщает ранее рассмотренную функцию $L(\hat{\theta}, \theta) = |\theta - \hat{\theta}|$ на случай неодинаковой значимости превышения и занижения оценки $\hat{\theta}$ по отношению к параметру θ. Выводы, сделанные Хиггинсом и Цокосом, состоят в следующем:

(1) Квадратичная функция потерь менее устойчива в сравнении с другими рассмотренными. Если квадратичная функция используется в качестве аппроксимации, то получаемое приближение байесовской оценки не является удовлетворительным.

(2) Байесовская оценка очень чувствительна к выбору функции потерь.

(3) Выбор функции потерь должен диктоваться соображениями практической значимости, а не математическими удобствами.

Функция потерь, которая использует тот факт, что превышение оцениваемого параметра хуже его принижения (это справедливо, например, для показателя надежности), записана Кэнфилдом [96] в виде

$$L(\hat{\theta}, \theta) = \begin{cases} K_1\left(\dfrac{\hat{\theta}}{\theta} - 1\right)^2, & \hat{\theta} \leqslant \theta, \\ K_1\left(\dfrac{\hat{\theta}}{\theta} - 1\right)^2 + K_2\left(\dfrac{\hat{\theta}}{\theta} - 1\right), & \hat{\theta} > \theta. \end{cases} \tag{2.19}$$

Следуя цели обеспечить функции потерь различную значимость для положительной и отрицательной ошибок, Зельнер [247] использует так называемую линейно экспоненциальную функцию потерь вида

$$L_{EX}(\hat{\theta} - \theta) = b\,[e^{a(\hat{\theta} - \theta)} - a(\hat{\theta} - \theta) - 1]\,. \tag{2.20}$$

Данная функция является асимметричной, а при малых a близка к симметричной и хорошо аппроксимируется квадратичной функцией. Приведем пример оценки, получаемой с помощью функции потерь (2.20). Если X – гауссова случайная величина с неизвестным средним θ и известной дисперсией σ^2 и для априорной п.р. θ справедливо $h(\theta) \backsim \text{const}$, то

$$\hat{\theta}^* = \bar{x} - a\sigma^2/(2n),$$

где $\bar{x}$ – выборочное среднее. Как видно, при малом a и (или) большом объеме выборки n оценка $\hat{\theta}^*$ близка к о.м.п. По существу, функция потерь (2.20) решает ту же задачу, что и функция потерь (2.19). Но последняя менее удобна в вычислительном отношении, так как обычно не позволяет получать оценки в аналитическом виде и требует применения численных методов.

Эль-Сайадом [118] наряду с рассмотренными выше использовались следующие функции потерь:

$$L_{\alpha\beta}(\hat{\theta}, \theta) = \theta^{\alpha}(\hat{\theta}^{\beta} - \theta^{\beta})^2, \tag{2.21}$$

$$L_{\ln}(\hat{\theta}, \theta) = (\ln\hat{\theta} - \ln\theta)^2. \tag{2.22}$$

Смитом [218] изучен класс ограниченных функций потерь Λ, задаваемых условиями: функция потерь симметрична по отношению к $|\hat{\theta} - \theta|$, является убывающей по $|\hat{\theta} - \theta|$ и удовлетворяет ограничениям $\sup\limits_{\hat{\theta},\,\theta} L(\hat{\theta}, \theta) =$

$= 1, \quad \inf\limits_{\hat\theta,\theta} L(\hat\theta, \theta) = 0$. Детально изучены байесовские оценки так называемой шаговой функции потерь

$$L_b(\hat\theta, \theta) = L_b(\hat\theta - \theta) = \begin{cases} 0, \text{если } |\hat\theta - \theta| < b, \\ 1, \text{если } |\hat\theta - \theta| \geqslant b. \end{cases} \tag{2.23}$$

Найдены оценки для большого числа параметрических семейств. Полученные оценки существенно отличаются от байесовских оценок с квадратичной функцией потерь.

§ 2.4. Выбор априорного распределения

Выбор априорного распределения в прикладных вопросах байесовского оценивания является одной из наиболее важных задач. В то же время решение этой задачи не составляет сущности байесовского подхода. Существование априорного распределения постулируется, и все дальнейшие рассуждения проводятся в рамках этого постулата. Тем не менее ряд авторов исследует вопросы выбора априорного распределения, оставаясь в рамках байесовского подхода. Сейчас можно говорить о существовании трех направлений, дающих рекомендации по выбору априорного распределения. Эти направления соответственно основаны на 1) принципе сопряженности, 2) отсутствии априорной информации, 3) информационном критерии. Рассмотрим каждое из указанных направлений в отдельности.

2.4.1. Сопряженные априорные распределения [15, 18, 25, 44]. Принципиально по теореме Байеса любое априорное распределение может быть использовано в сочетании с любой функцией правдоподобия. Удобно, однако, брать априорные распределения специальных форм, приводящих к простым оценкам. Для заданного распределения $f(x \mid \theta)$ можно подобрать такое семейство априорных п.р., что апостериорные п.р. будут принадлежать тому же семейству. Такое семейство называют *замкнутым относительно выбора* или *сопряженным относительно* $f(x \mid \theta)$. Иногда говорят: "естественно сопряженное семейство априорных распределений" [18]. Основная часть авторов считает, что такой подход продиктован исключительно соображениями удобства теоретических рассуждений и простоты практических выводов. Райфа и Шлейфер [44] делают попытку привести более веское обоснование сопряженных априорных распределений. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть выборочные распределения независимы и допускают достаточную статистику y фиксированной размерности с областью определения Ω_y. Семейство априорных распределений $\mathcal{H}$ конструируется таким образом, что каждому элементу $\mathcal{H}$ соответствует элемент Ω_y. Кроме того, если до опыта для θ выбирается элемент из $\mathcal{H}$, соответствующий $y' \in \Omega_y$, а выборка дает достаточную статистику y, то апостериорное распределение также принадлежит $\mathcal{H}$ и соответствует некоторому элементу $y'' \in \Omega_y$. Для целей определения y'' по y' и y вводится бинарная операция $y'' = y' * y$. Ниже рассмотрена предлагаемая в [44] формализация сопряженных априорных распределений.

Предполагается, что для любых выборок $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при каждом n существует достаточная статистика

$$y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y = (y_1, y_2, \ldots, y_s),$$

где y_j – действительные числа и размерность s вектора y не зависит от n. Кроме того, для любого заданного n и произвольной выборки $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ существует такая функция k и s-мерный вектор действительных чисел $y = (y_1, \ldots, y_s)$, что для функции правдоподобия выполняется соотношение

$$l_n(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \backsim k(\theta \mid y).$$

Функция $k(\theta \mid y)$ называется *ядром правдоподобия*. Укажем на одно важное свойство ядра $k(\theta \mid y)$.

Теорема. *Пусть* $y^{(1)} = y_p(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *и* $y^{(2)} = y_{n-p}(x_{p+1}, \ldots, x_n)$. *Тогда можно найти бинарную операцию* $*$, *для которой*

$$y^{(1)} * y^{(2)} = y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_s^*)$$

обладает следующими свойствами:

$$l_n(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \backsim k(\theta \mid y^*),$$
$$k(\theta \mid y^*) \backsim k(\theta \mid y^{(1)}) k(\theta \mid y^{(2)}).$$

Из теоремы следует, что y^* можно вычислить по $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$, не зная $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Априорная п.р. строится с помощью функции ядра $k(\theta \mid y)$ следующим образом:

$$h(\theta \mid y) = N(y) k(\theta \mid y), \tag{2.24}$$

где y – некоторая статистика, $N(y)$ – функция, которую предстоит определить.

Для того чтобы функция $h(\theta \mid y)$, определенная на Θ равенством (2.24), действительно была п.р., необходимо и достаточно, чтобы она была всюду неотрицательной и чтобы интеграл от нее по Θ был равен единице. Так как $k(\theta \mid y)$ – функция ядра совместной п.р. наблюдений, определенная на Θ для всех $y \in \Omega_y$, то $k(\theta \mid y)$ необходимо неотрицательна для всех (y, θ) из $\Omega_y \times \Theta$. Следовательно, если интеграл от $k(\theta \mid y)$ по Θ существует, то $N(y)$ определяется соотношением

$$[N(y)]^{-1} = \int_{\Theta} k(\theta \mid y)\, d\theta$$

и $h(\theta \mid y)$, определенная выражением (2.24), будет п.р.

Пусть теперь y – достаточная статистика, определенная с помощью наблюденной выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и $h(\theta)$ – априорная п.р. В соответствии с теоремой Байеса для апостериорной плотности имеем

$$\hbar(\theta \mid y) \backsim h(\theta) k(\theta \mid y).$$

Если теперь $h(\theta)$ – плотность, сопряженная к ядру k с параметром $y' \in \Omega_y$, т.е. $h(\theta) \backsim k(\theta \mid y')$, то в соответствии с теоремой Байеса

$$h(\theta \mid y) \backsim k(\theta \mid y') k(\theta \mid y) \backsim k(\theta \mid y' * y).$$

Таким образом: 1) ядро априорной п.р. комбинируется с ядром выборки так же, как комбинируются два выборочных ядра; 2) и априорная, и апостериорная п.р. порождаются одним и тем же ядром правдоподобия, но различными статистиками. Из этих выводов напрашивается следующая трактовка содержательности сопряженных априорных распределений: априорное распределение есть результат обработки некоторых несуществующих (или существовавших, но забытых) данных для той же статистической модели, что и функция правдоподобия.

Рассмотрим пример. Процесс Бернулли с параметром $\theta = p$ порождает независимые случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с одинаковыми вероятностями $p^x(1-p)^{1-x}$, где $x = 0, 1$. Если n – число наблюденных значений, а $r = \Sigma x_i$, то правдоподобие выборки запишется следующим образом:

$$l_n(p \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \backsim p^r(1-p)^{n-r}.$$

При этом $y = (y_1, y_2) = (r, n)$ – достаточная статистика размерности 2 независимо от n. Априорная п.р., сопряженная с ядром правдоподобия и порожденная статистикой $y' = (r', n')$, является плотностью бета-распределения

$$h(p) = \frac{p^{r'}(1-p)^{n'-r'}}{B(r'+1, n'-r'+1)}, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1,$$

где

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

По теореме Байеса

$$\hbar(p \mid y) \backsim h(p)p^r(1-p)^{n-r} \backsim p^{r'+r}(1-p)^{n+n'-(r+r')},$$

т.е. ядра апостериорной и априорной п.р. совпадают, и апостериорным также является бета-распределение с параметрами $r'' = r + r'$ и $n'' = n + n'$.

Семейство сопряженных априорных п.р. может быть увеличено расширением области Ω_y до включения всех значений, для которых $k(\theta \mid y)$ неотрицательна при всех θ, и интеграл от $k(\theta \mid y)$ по области Θ сходится. В только что рассмотренном примере параметры r и n принимают значения натуральных чисел. В то же время интеграл от $k(\theta \mid y)$ по $\Theta = [0, 1]$ сходится для всех действительных $r > -1$ и $n > -1$ к полной бета-функции. Поэтому мы можем получить более богатое семейство плотностей, полагая, что параметр $y = (r, n)$ может принимать любое значение из определенной таким образом области.

Обширная сводка естественно сопряженных п.р. приведена в монографиях [15] и [44]. Дэвидом и Гуттманом [104] вопрос получения сопряженных распределений исследован с общих позиций особенностей моделей. В частности, показано, что простые формы сопряженных распределений являются следствием групповой структуры моделей.

2.4.2. *Априорные распределения, представляющие "скудость знания"*, введены Джеффрисом [150], а в дальнейшем изучались Зельнером [17] и рядом других авторов. Это предложение явилось следствием желания не покидать рамки байесовского подхода в тех ситуациях, когда исследователь мало знает о свойствах параметров модели или не знает вообще ничего. Джеффрис [150] предлагает два правила выбора априорного распределения, которые, по его мнению, "охватывают наиболее распространенные ситуации", когда знание о параметре отсутствует:

1) если параметр существует в конечном промежутке $[a, b]$ или в интервале $(-\infty, \infty)$, то его априорная вероятность должна считаться равномерно распределенной;

2) если параметр принимает значение в интервале $[0, \infty)$, то следует считать равномерно распределенной вероятность его логарифма.

Рассмотрим первое правило. Если интервал параметра конечен, то для нахождения апостериорного распределения можно воспользоваться стандартной байесовской процедурой. При этом априорное распределение не будет, разумеется, сопряженным с ядром функции правдоподобия. Если интервал для параметра θ бесконечен, то мы имеем дело с несобственной априорной п.р. Правило Джеффриса для представления факта незнания значения параметра в этом случае предлагает принять

$$h(\theta)\,d\theta \backsim d\theta, \quad -\infty<\theta<\infty, \tag{2.25}$$

т.е. $h(\theta) \backsim \text{const}$. Таким образом, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\,d\theta=\infty,$$

для представления вероятности достоверного события Джеффрис предлагает использовать ∞ вместо 1. Именно этот факт, по его мнению, позволяет получить формальное представление незнания. В самом деле, для любых двух интервалов (a, b) и (c, d) отношение

$$\frac{P\{a<\theta<b\}}{P\{c<\theta<d\}} = \frac{0}{0},$$

т.е. является неопределенностью, и мы не в состоянии сделать утверждение о том, каковы шансы на то, что θ лежит в некоторой конечной паре конечных интервалов.

Второе правило Джеффриса относится к параметрам, природа которых позволяет делать допущение о том, что они принимают значение от нуля до бесконечности, например среднее квадратическое отклонение. Для такого параметра Джеффрис предлагает принять равномерно распределенным его логарифм, т.е. если положить $\vartheta = \ln\theta$, то априорная п.р. для ϑ будет выбрана в виде (2.25):

$$h(\vartheta)\,d\vartheta \backsim d\vartheta, \quad -\infty<\vartheta<\infty. \tag{2.26}$$

Поскольку $d\vartheta=d\theta/\theta$, из (2.26) следует

$$h(\theta) \backsim \theta^{-1}, \qquad 0\leqslant\theta<\infty, \tag{2.27}$$

что соответствует отсутствию информации о параметре θ.

Важным свойством (2.27) является ее инвариантность относительно преобразований вида $\kappa = \theta^n$. В самом деле,

$$d\kappa=n\theta^{n-1}d\theta \Rightarrow \frac{d\kappa}{\kappa} \backsim \frac{d\theta}{\theta}.$$

Это свойство имеет важное значение потому, что некоторые исследователи, например, параметризируют модели в терминах среднего квадратического отклонения σ, а другие – в терминах дисперсии σ^2 или параметра точности $\tau = \sigma^{-2}$. Легко показать, что если мы выберем $d\sigma/\sigma$ в качестве априорной п.р. для σ, то в качестве логического следствия получим

$$\frac{d\sigma}{\sigma} \backsim \frac{d\sigma^2}{\sigma^2} \backsim \frac{d\tau}{\tau}.$$

Данное априорное распределение также является несобственным, откуда следует, что отношение $P\{0 < \theta < a\}/\ P\{a < \theta < \infty\}$ есть неопределенность, т.е. ничего нельзя сказать о шансах попасть параметру θ в промежутки $(0, a)$ и (a, ∞). Подобная неопределенность опять рассматривается как формальное представление незнания.

Вопрос интерпретации несобственных априорных п.р. рассмотрен Акайком [67–69]. Предложенная интерпретация такова: несобственную априорную п.р. можно представить в виде предела собственных априорных п.р. таким образом, что соответствующие апостериорные п.р. сходятся поточечно к апостериорной п.р., отвечающей несобственному априорному распределению. В качестве меры близости распределений рассматривается их взаимная энтропия. Показано, что наиболее целесообразным является выбор аппроксимирующих собственных распределений, зависящих от выборки.

Несмотря на то, что априорные п.р. согласно предложению Джеффриса являются несобственными, соответствующие им апостериорные распределения собственные и позволяют получить необходимые оценки. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка из $N(\mu, \sigma)$, причем μ и σ неизвестны. Если априорное представление о μ и σ отсутствует, мы можем воспользоваться принципом Джеффриса и в качестве априорной п.р. взять функцию вида

$$h(\mu, \sigma)\, d\mu\, d\sigma \backsim \frac{1}{\sigma} d\mu\, d\sigma, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad 0 < \sigma < \infty.$$

Используя теорему Байеса, нетрудно получить апостериорную п.р.:

$$\hbar(\mu, \sigma \mid x) \backsim h(\mu, \sigma) l(\mu, \sigma \mid x) \backsim$$
$$\backsim \frac{1}{\sigma^{n+1}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\nu s^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2] \right\}, \tag{2.28}$$

где $l(\mu, \sigma \mid x) = \sigma^{-n} \exp[-\Sigma(x_i - \mu)^2/(2\sigma^2)]$ есть функция правдоподобия, $\nu = n - 1$, $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \Sigma x_i$, $\nu s^2 = \Sigma(x_i - \hat{\mu})^2$. Записанная апостериорная плотность является собственной. Точно так же маргинальная апостериорная п.р. параметра μ

$$\hbar(\mu \mid x) = \int_0^\infty \hbar(\mu, \sigma \mid x)\, d\sigma \backsim \int_0^\infty \frac{1}{\sigma^{n+1}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\nu s^2 + \right.$$
$$\left. + n(\mu - \hat{\mu})^2] \right\} d\sigma \backsim [\nu s^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2]^{-\frac{\nu+1}{2}} \tag{2.29}$$

– собственная. Как видно из (2.29), $\mathfrak{h}(\mu \mid x)$ имеет вид п.р. Стьюдента с математическим ожиданием $\hat{\mu}$. По аналогии для $\mathfrak{h}(\sigma \mid x)$ имеем

$$\mathfrak{h}(\sigma \mid x) \backsim \frac{1}{\sigma^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}\right).$$

Эта апостериорная п.р. для σ имеет вид обратного гамма-распределения.

Некоторые авторы не решаются использовать несобственные п.р. Они предпочитают вводить "локально равномерные" или "пологие" п.р. Примером могут служить предложения Бокса и Тико [86]. Предлагаемые п.р. являются "достаточно пологими" в той области, где функция правдоподобия принимает большие значения. Вне этой области форма кривой априорной п.р. не играет роли, так как при выводе ядра апостериорной п.р. она умножается на малые значения функции правдоподобия.

Наиболее важной и интересной особенностью предлагаемых несобственных априорных п.р. является отмеченное выше свойство инвариантности. Джеффрис [149] дает блестящее обобщение этому свойству. Он доказывает следующее утверждение. Пусть априорная п.р. для вектора θ выбрана в виде

$$h(\theta) \backsim |\,\mathrm{Inf}_\theta\,|^{1/2}. \tag{2.30}$$

Здесь Inf_θ есть информационная матрица Фишера для вектора параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, т.е.

$$\mathrm{Inf}_\theta = -E_X \left[\frac{\partial^2 \ln f(X \mid \theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \right],$$

где математическое ожидание берется по случайной величине X. Тогда априорная п.р. вида (2.30) будет инвариантна в следующем смысле. Если исследователь параметризирует свою модель с помощью компонент вектора η, где $\eta = F(\theta)$, а F – взаимно однозначное дифференцируемое преобразование компонент вектора θ, и выбирает априорную п.р. для η так, что

$$h(\eta) \backsim |\,\mathrm{Inf}_\eta\,|^{1/2},$$

то апостериорные вероятностные утверждения, полученные на этой основе, не будут противоречить апостериорным утверждениям, полученным с помощью параметризации компонентами вектора θ и априорной п.р. вида (2.30). Доказательство этого утверждения можно найти также в книге Зельнера [18]. Хартиган [141] развил идею представления априорной п.р. в виде (2.30), сформулировав шесть свойств инвариантности, среди которых свойство (2.30) является частным случаем. Трактовка инвариантности Хартигана является более общей и включает, в частности, инвариантности относительно преобразований выборочного пространства, многократного произведения выборок, сужения пространства для параметра θ.

2.4.3. *Выбор априорных распределений с помощью информативных критериев* рассмотрен во многих работах по байесовскому оцениванию. Наибольший интерес в этом плане представляют [16, 18, 95, 107, 148].

Изложенный Зельнером [18] подход состоит в следующем. В качестве меры информации, содержащейся в п.р. наблюдения $f(x \mid \theta)$ при заданном θ, используется интеграл

$$I_x(\theta) = \int_{\Omega} f(x \mid \theta) \ln f(x \mid \theta)\, dx. \tag{2.31}$$

Априори среднее информационное содержание определится в виде

$$\overline{I}_x = \int_{\Theta} I_x(\theta) h(\theta)\, d\theta.$$

Если теперь из среднего априорного информационного содержания $\overline{I}_x$, ассоциированного с наблюдением x, вычесть информационное содержание априорной информации, то можно образовать меру информационного выигрыша:

$$G = \overline{I}_x - \int_{\Theta} h(\theta) \ln h(\theta)\, d\theta.$$

Теперь предлагается (в случае, если нет четкого представления об априорной п.р.) выбирать $h(\theta)$ из условия максимизации G. Согласно Зельнеру [18] найденная таким образом функция $h(\theta)$ называется априорной п.р. с "минимальной информацией".

Рассмотрим пример. Пусть

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\theta)^2}{2} \right], \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Тогда нетрудно получить

$$I_x(\theta) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x \mid \theta) \ln f(x \mid \theta)\, d\theta = -\frac{1}{2}(\ln 2\pi + 1),$$

т.е. $I_x(\theta)$ не зависит от θ, откуда для собственных $h(\theta)$

$$\overline{I}_x = -\frac{1}{2}(\ln 2\pi + 1)$$

и

$$G = -\frac{1}{2}(\ln 2\pi + 1) - \int_{\Theta} h(\theta) \ln h(\theta)\, d\theta.$$

Значение G будет максимальным при минимизации количества информации, содержащегося в априорном распределении,

$$I_\theta = \int_{\Theta} h(\theta) \ln h(\theta)\, d\theta.$$

Решением этой задачи является равномерная п.р. на Θ, т.е. $h(\theta) \backsim \text{const}$. Заметим, что это соответствует виду априорной п.р., получаемой из правила Джеффриса [149].

Линдли [164] показывает, что если рассматривать функционал G в асимптотическом виде

$$G_A = \int_{\Theta} h(\theta) \ln \sqrt{n \mid \text{Inf}_\theta \mid}\, d\theta - \int_{\Theta} h(\theta) \ln h(\theta)\, d\theta,$$

где n – число независимых выборок из генеральной совокупности, распределенной по закону $f(x \mid \theta)$, и искать априорную п.р. $h(\theta)$, максимизирующую G_A при ограничении $\int\limits_{\Theta} h(\theta)\,d\theta = 1$, то можно получить

$$h(\theta) \backsim |\,\mathrm{Inf}_\theta\,|^{1/2},$$

т.е. априорная п.р. соответствует ранее рассмотренному обобщенному правилу Джеффриса, приводящему к инвариантным априорным п.р. В то же время, как показал Зельнер [18], если G задано не в асимптотическом виде, то инвариантные априорные п.р. Джеффриса не всегда являются п.р. с "минимальной информацией". В случае, если априорная п.р. Джеффриса не максимизирует G, использование таковой приводит к внесению большей априорной информации в анализ, чем если бы применялась априорная информация, максимизирующая G. Приведенные результаты, полученные путем использования информационного критерия, показывают, что стремление Джеффриса обеспечить свойство инвариантности статистического вывода относительно преобразования параметра приводит к отступлению от принципа "скудости знания".

Конверт [95], Дили, Тирни и Зиммер [107] и Джайнис [148] исследовали вопрос о выборе априорного распределения путем минимизации непосредственного количества информации I_θ (Шеннона), содержащегося в априорной п.р. Правило выбора $h(\theta)$ из условия $I_\theta \to \min$ названо *принципом максимума энтропии*, поскольку вместо I_θ была использована энтропия $S_\theta = -I_\theta$. Введен термин *наименее благоприятствующее распределение*. Если $\mathcal{H}$ – семейство априорных распределений, то $H \in \mathcal{H}$ является наименее благоприятствующим распределением при условии, что соответствующий ему минимум ожидаемых потерь больше, чем для всех остальных членов семейства. Следует отметить, что получаемая таким образом оценка параметра совпадает с минимаксной [10].

Дили, Тирни и Зиммер [107] рассмотрели использование принципа максимума энтропии для выбора априорного распределения в биномиальной и экспоненциальной моделях. Ими, в частности, показано, что наименее благоприятствующее распределение может быть наилучшим согласно принципу максимума энтропии.

Джайнис [148] изучил более общую модификацию этого принципа, рассмотрев меру

$$S_\kappa = -\int\limits_{\Theta} h(\theta) \ln \left[\frac{h(\theta)}{\kappa(\theta)} \right] d\theta,$$

где κ, как отметил Эль-Сайад [118], – некоторая подходящая монотонная функция θ. Выбор $\kappa(\theta)$ Эль-Сайад предложил производить с помощью аппарата теории групп. Существенно, что этот подход, ведущий к изменению параметров $h(\theta)$, не приводит к изменению энтропийной меры. Например, если θ_1 – параметр положения, а θ_2 – масштабный параметр ($\theta_2 > 0$), то априорная плотность ищется такой, что $h(\theta_1, \theta_2) = ag(\theta_1 + b, a\theta_2)$, и решение имеет вид $h(\theta_1, \theta_2) \backsim \theta_2^{-1}$. Таким образом, мы снова получаем инвариантную априорную п.р. Джеффриса.

Для биномиальной модели, как показал Джайнис [148], использование обобщенного принципа максимума энтропии приводит к уравнению $\theta(1-\theta)h'(\theta) = (2\theta - 1)h(\theta)$, откуда $h(\theta) \backsim [\theta(1-\theta)]^{-1}$.

В [16] Девятирековым информационный критерий

$$I(\hat{\theta}) = \int_{\Theta}\int_{\Omega} \hbar(\theta \mid x) p(x) \ln q(\theta \mid \hat{\theta})\, dx\, d\theta,$$

где $q(\theta \mid \hat{\theta})$ – п.р. параметра при заданной оценке, используется для определения наилучшей (в смысле минимума I) оценки $\hat{\theta}$. Получаемая таким образом оценка названа *огрубленной*. Показано, что задача сводится к поиску наименее благоприятствующего априорного распределения из условия минимума фишеровской информации. Получаемая оценка оказывается менее чувствительной (по сравнению с обычной) к изменению априорного распределения. Интересно, что дисперсия оценки для гауссовых распределений достигает нижней границы неравенства Крамера – Рао.

В работе [95] Канфилд и Тид используют информационное количество не в качестве критерия выбора априорного распределения, а как способ устранения неопределенности при определении параметров априорной п.р. Рассуждения работы [95] проведены на интуитивном уровне, но представляются разумными и могут быть использованы в практических ситуациях. Приведем основные результаты [95]. Пусть $f(x \mid \theta)$ – п.р. наблюдения x и $h(\theta;\, \gamma)$ – априорная п.р. с параметром γ. По аналогии с фишеровской информацией $I_x(\theta)$ вводится так называемая *байесовская информация*, содержащаяся в $h(\theta, \gamma)$:

$$BI_\gamma(\theta) = E_\theta \left[\left| \frac{\partial \ln h(\theta; \gamma)}{\partial \theta} \right|^2 \right]. \tag{2.32}$$

Далее задается весовая значимость w априорной информации по отношению к опытной: $w = BI_\gamma(\theta)/I_x(\theta)$. Пусть теперь θ_p – априорная оценка параметра θ. Если вектор γ состоит из двух параметров γ_1 и γ_2, то для их определения должна быть решена система из двух уравнений:

$$E_\gamma[\theta] = \theta_p,$$

$$BI_\gamma(\theta) = wI_x(\theta).$$

В случае, когда число параметров γ превышает два, необходимо привлекать дополнительные соображения (в [95] не указано какие). Например, для биномиальной модели

$$f(x \mid \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

и априорной п.р. бета $h(\theta) \backsim \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}$ имеем

$$I_x(\theta) = \frac{n}{\theta(1-\theta)}.$$

Из (2.32) также следует

$$BI_\gamma(\theta) = \frac{(a+b-4)(a+b-2)(a+b-1)}{(a-2)(b-2)}.$$

Система уравнений для определения a и b имеет вид

$$\frac{a}{a+b} = \theta_p,$$

$$BI_\gamma(\theta) = wI_x(\hat{\theta}),$$

где θ_p и $\hat{\theta}$ – априорная и опытная оценки параметра θ.

Основанные на информационном критерии способы выбора априорного распределения в известном смысле выходят за рамки традиционного байесовского подхода и тяготеют либо к минимаксному, либо к эмпирическому байесовскому методам. Существуют попытки построения более или менее стройных, фундаментальных теорий, связанных с обоснованием правил выбора априорных распределений. Заслуживает внимания, в частности, серия работ японского статистика Акайка [67–69], предлагающего способ объективного использования байесовских моделей. Целью предлагаемых построений является изменение роли априорного распределения в байесовских моделях. Акайк [67] предлагает использовать адаптивные к эмпирическим данным априорные распределения, названные модификаторами. В задаче прогноза плотности распределения $g(z)$ будущих наблюдений по выборке полученных данных x, которая решается с помощью байесовской теории, априорное распределение (т.е. модификатор) выбирается, исходя из соответствия между $g(z)$ и ее оценкой $\hat{g}(z)$, выраженного с помощью *информационной меры Кульбака*

$$B(g,\hat{g}) = -\int \ln\,[g(z)/\hat{g}(z)]\; g(z)\,dz.$$

В качестве критерия используется математическое ожидание энтропии $E_x\;[B(g(z), g(z \mid x)]$, причем

$$g(z \mid x) = \int_\Theta f(z \mid \theta)\hbar(\theta \mid x)\,d\theta, \text{ а } \hbar(\theta \mid x) \backsim f(x \mid \theta)h(\theta).$$

Таким образом, априорная п.р. $h(\theta)$ выбирается путем минимизации математического ожидания энтропии. Интересно отметить, что в ряду случаев (в частности, при прогнозировании распределения гауссового случайного вектора) метод Акайка приводит к несобственным априорным п.р. Джеффриса.

Другая интересная попытка избежать произвола в выборе априорных п.р. предложена Бернардо в работе [81]. Существо предложений состоит в выборе эталонных априорных и апостериорных распределений, которые описывают ситуацию "незначительной исходной информации", причем недостающая информация получается из опытных данных. Критерий выбора априорной п.р. $h(\theta)$ строится с помощью величины ожидаемой информации о θ, введенной Линдли:

$$I^\theta\{\epsilon, h(\theta)\} = \int_\Omega f(x)\,dx \int_\Theta \hbar(\theta \mid x) \ln \frac{\hbar(\theta \mid x)}{h(\theta)}\,d\theta,$$

где ϵ условно обозначает эксперимент, в ходе которого наблюдается случайная величина X с п.р. $f(x \mid \theta)$, $\theta \in \Theta$. Предполагается также, что $h(\theta)$ принадлежит классу допустимых априорных распределений $\mathcal{H}$. Суть основной идеи состоит в следующем. Рассмотрим величину $I^\theta\{\epsilon(k), h(\theta)\}$, определяющую количество информации о θ, которое ожидается при k повторениях эксперимента. Путем бесконечного повторения можно добиться точного знания θ. Таким образом, $I^\theta\{\epsilon(\infty), h(\theta)\}$ измеряет количество недостающей информации о θ при априорной п.р. $h(\theta)$. Эталонное априорное распределение $\pi(\theta)$, соответствующее ситуации "неопределенного исходного знания", определяется как максимизирующее недостающую информацию в классе $\mathcal{H}$. Эталонное апостериорное распределение после наблюдения x определяется с помощью теоремы Байеса:

$$\pi(\theta \mid x) \propto \pi(\theta) f(x \mid \theta).$$

Поскольку для точного знания вещественного числа требуется знание бесконечного количества информации, в непрерывном случае получаем $I^\theta\{\epsilon(\infty), h(\theta)\} = \infty \quad \forall h(\theta) \in \mathcal{H}$. В этом случае эталонные апостериорные распределения определяются путем перехода:

$$\pi(\theta \mid x) = \lim_{k \to \infty} \pi_k(\theta \mid x),$$

причем $\pi_k(\theta \mid x) \propto \pi_k(\theta) f(x|\theta)$, а $\pi_k(\theta) = \arg\max I^\theta\{\epsilon(k), h(\theta)\}$. Для случая биномиальных испытаний эталонная априорная п.р. $\pi(\theta) \propto \theta^{-1}(1-\theta)^{-1}$, что совпадает с результатом Джайниса [148], полученным с помощью обобщенного принципа максимума энтропии.

Привлекательной стороной теории Бернардо является то, что она свободна от ряда затруднений стандартного байесовского метода. В частности, при использовании эталонных априорных распределений не возникают маргинализационные парадоксы (см. работы Стоуна, Дэвида [226], Дэвида, Стоуна и Зидека [105]), характерные для неинформативных априорных.

Интересный подход к выбору априорного распределения, основанный на геометрических вероятностях, демонстрируют Фелленберг и Пилз [124]. Рассматривается задача оценки ВБР для экспоненциального распределения с ф.р. $F(t; \lambda) = 1 - \exp(-\lambda t)$. В качестве априорной информации используется промежуток неопределенности $[\lambda_1, \lambda_2]$ для параметра λ, которому соответствует пространство ф.р. $\mathcal{B} = \{F(t; \lambda_1) \leqslant F(t, \lambda) \leqslant F(t; \lambda_2)\}$, содержащее неизвестную функцию распределения $F(t; \lambda)$. Предполагается, что вероятность попадания λ в $[\lambda_1, \lambda_2]$ равна единице. Априорная п.р. $h(\lambda)$ определяется из того условия, что вероятность попадания параметра λ в промежуток $[\lambda_1, x]$ равна вероятности попадания ф.р. $F(t; \lambda)$ в подпространство $\mathcal{B}_x = \{F(t; \lambda_1) \leqslant F(t; \lambda) \leqslant F(t; x)\}$. Равенство вероятностей

$$P\{\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant x\} = P\{F(t; \lambda) \in \mathcal{B}_x\}$$

справедливо вследствие монотонности зависимости $F(t; \lambda)$ от параметра λ. Вероятность $P\{F(t; \lambda) \in \mathcal{B}_x\}$ определяется из геометрических соображений (исходя из принципа равных возможностей) как отношение площади, заключенной между $F(t; \lambda_1)$ и $F(t; x)$. Окончательное выражение для априорной плотности параметра λ имеет вид

$$h(\lambda) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2.$$

§ 2.5. Общая схема и разновидности задач оценивания показателей надежности

Данный параграф идейно связан с четырьмя предыдущими. Тем не менее никаких ссылок на материалы первых четырех параграфов здесь не делается. Читатель, по какой-либо причине не желающий изучать байесовский подход с формально-математических позиций, может начать рассмотрение общих вопросов байесовской теории оценивания непосредственно с настоящего параграфа.

2.5.1. Постановка задачи байесовского оценивания показателей надежности в общем случае включает в себя четыре элемента:

а) *распределение вероятностей основной случайной величины*, характеризующее надежность технического объекта (например, функция распределения наработки на отказ $F(t;\theta)$, где θ – вектор параметров);

б) *априорное распределение вероятностей*, например, в виде п.р. $h(\theta)$, вектора параметров θ, характеризующее степень неопределенности имеющейся априорной информации $I_а$ о надежности;

в) *функцию потерь* $L(\hat{R}, R)$, которая символизирует потери, связанные с заменой истинного значения показателя надежности R его оценкой $\hat{R}$;

г) *план испытаний* П, предписывающий способ получения экспериментальных данных $I_э$.

Задача заключается в том, чтобы, объединяя априорную информацию $I_а$ и экспериментальные данные $I_э$, получить оценки показателя надежности R. Ниже рассматриваются две формы представления оценок показателей надежности:

а) совокупность точечной оценки $\hat{R}$ и среднего квадратического отклонения (с.к.о.) $\sigma_{\hat{R}}$, являющегося характеристикой точности определения $\hat{R}$;

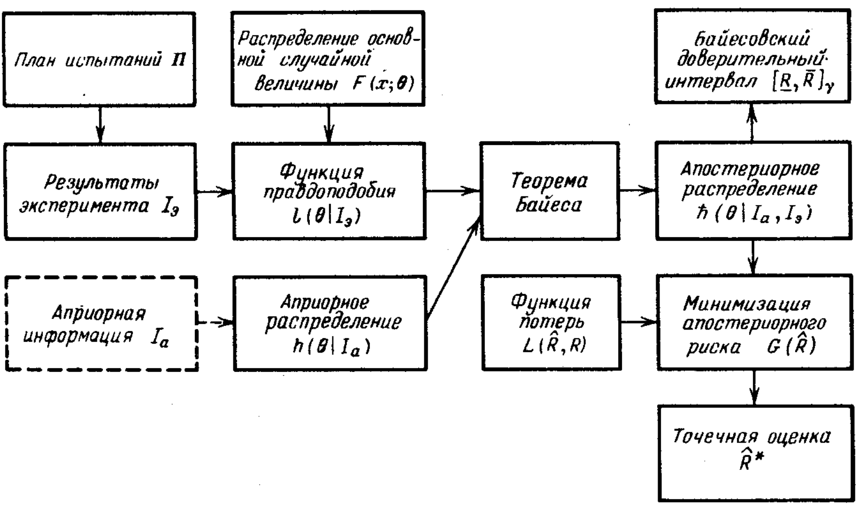


Рис. 2.1. Общая схема получения байесовских оценок

б) доверительный интервал $[\underline{R}, \overline{R}]_\gamma$ при заданной доверительной вероятности γ.

На рис. 2.1 изображена общая схема получения байесовских оценок, которая состоит из следующих этапов.

Этап 1. *Составление функции правдоподобия* $l(\theta \mid I_э)$. Для записи функции правдоподобия используется какая-либо статистическая модель, основанная на распределении основной случайной величины $F(t;\theta)$ и экспериментальных данных $I_э$, полученных вследствие реализации плана испытаний П.

Этап 2. *Построение апостериорного распределения* $\hbar(\theta \mid I_а, I_э)$. Здесь используется формула Байеса

$$\hbar(\theta \mid I_а, I_э) = \frac{h(\theta \mid I_а) l(\theta \mid I_э)}{\int\limits_\Theta h(\theta \mid I_а) l(\theta \mid I_э)\, d\theta}, \tag{2.33}$$

где Θ – область изменения параметра θ.

Этап 3. *Получение байесовских оценок.* Байесовский доверительный интервал определяется условием $P\{\underline{R} \leqslant R \leqslant \overline{R}\} = \gamma$, или

$$\int\limits_{\underline{R} \leqslant R(\theta) \leqslant \overline{R}} \hbar(\theta \mid I_а, I_э)\, d\theta = \gamma. \tag{2.34}$$

Для нахождения байесовской точечной оценки $\hat{R}^*$ записывают функцию апостериорного риска

$$G(\hat{R}) = \int\limits_\Theta L(\hat{R}, R(\theta))\, \hbar(\theta \mid I_а, I_э)\, d\theta \tag{2.35}$$

и среди всех оценок $\hat{R}$ выбирают ту, которая минимизирует функцию (2.35):

$$\hat{R}^* = \arg \min_{\hat{R} \in [0,\, 1]} G(\hat{R}). \tag{2.36}$$

Если в качестве функции потерь выбрана квадратичная функция вида $L(\hat{R}, R) = (R - \hat{R})^2$, то б.о. $\hat{R}^*$ определяется в виде апостериорного среднего

$$\hat{R}^* = \int\limits_\Theta R(\theta)\, \hbar(\theta \mid I_а, I_э)\, d\theta. \tag{2.37}$$

Погрешность расчета значения $\hat{R}^*$ оценивается с помощью апостериорного с.к.о. $\sigma_{\hat{R}^*}$, для которого справедливо соотношение

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \int\limits_\Theta R^2(\theta)\, \hbar(\theta \mid I_а, I_э)\, d\theta - \hat{R}^{*2}. \tag{2.38}$$

Пример. Наработка объекта на отказ подчиняется показательному распределению с плотностью

$$f(t;\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0. \tag{2.39}$$

В качестве априорного распределения выбрано гамма-распределение, которое является сопряженным с ядром правдоподобия [44]. Плотность распределения параметра λ имеет вид

$$h(\lambda \mid I_a) = \frac{\rho^\delta \lambda^{\delta-1} e^{-\rho\lambda}}{\Gamma(\delta)}, \quad \lambda \geq 0, \ \delta \geq 0, \ \rho \geq 0, \tag{2.40}$$

причем параметры δ и ρ считаются известными. Функция потерь – квадратичная $L(\hat{R}, R) = (R - \hat{R})^2$, а в качестве плана испытаний выбран план $[n, U, T]$ (см. [14]). Все четыре элемента постановки задачи приведены. Необходимо найти оценки интенсивности отказов λ. Решение задачи проведем в указанной последовательности.

(1) При составлении функции правдоподобия учтем, что в результате проведения испытаний по плану $[n, U, T]$ наблюдается цензурированная выборка. Пусть для определенности d испытаний окончились отказами в моменты времени $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_d^*$, оставшиеся $(n-d)$ испытаний были прекращены до отказа через T единиц времени после начала. Из общих соображений [14] функция правдоподобия для описанной ситуации определяется соотношением

$$l(\lambda \mid I_э) = \prod_{i=1}^{d} f(t_i^*; \lambda) \prod_{j=1}^{n-d} \int_T^\infty f(x; \lambda)\, dx. \tag{2.41}$$

После подстановки п.р. (2.39) в (2.41) и элементарных преобразований получим

$$l(\lambda \mid I_э) = \prod_{i=1}^{d} \lambda e^{-\lambda t_i^*} (e^{-\lambda T})^{n-d} = \lambda^d e^{-\lambda \kappa}, \tag{2.42}$$

где $\kappa = t_1^* + t_2^* + \ldots + t_d^* + (n-d)T$. Таким образом, байесовской достаточной статистикой испытаний является пара чисел (d, κ).

(2) Подставим функцию правдоподобия (2.42) и априорную п.р. (2.40) в формулу Байеса (2.33), найдем апостериорную плотность

$$\text{ħ}(\lambda \mid I_a, I_э) = \frac{(\rho+\kappa)^{\delta+d}}{\Gamma(\delta+d)} \lambda^{d+\delta-1} e^{-\lambda(\rho+\kappa)}. \tag{2.43}$$

Полученное выражение является гамма-плотностью, что доказывает сопряженность выбранного априорного распределения.

(3) Определим точечную оценку $\hat{\lambda}^*$. Для квадратичной функции потерь минимум апостериорного риска $G(\hat{\lambda})$ достигается в точке апостериорного м.о. оцениваемого параметра, т.е.

$$\hat{\lambda}^* = \int_0^\infty \lambda\, \text{ħ}(\lambda \mid I_a, I_э)\, d\lambda = \frac{d+\delta}{\rho+\kappa}.$$

Апостериорное с.к.о., которое может служить характеристикой точности оценки λ^*, определяется с помощью дисперсии гамма-распределенной случайной величины, т.е.

$$\sigma_{\hat{\lambda}^*} = \frac{\sqrt{d+\delta}}{\rho+\kappa}.$$

В качестве интервальной оценки интенсивности отказов часто используется верхняя γ-доверительная граница. Определим байесовский аналог этой оценки $\overline{\lambda}_\gamma$, принимая, что $\underline{\lambda}_\gamma = 0$. По определению $P\{\lambda \leqslant \overline{\lambda}_\gamma\} = \gamma$. Так как апостериорное распределение является гамма-распределением, преобразование $z = 2\lambda(\rho + \kappa)$ приводит к хи-квадрат-распределению с $2(\delta + d)$ степенями свободы. Отсюда

$$P\{2\lambda(\rho + \kappa) \leqslant \chi_{\gamma;2(\delta+d)}\} = \gamma, \tag{2.44}$$

где $\chi_{\gamma;2(\delta+d)}$ – квантиль указанного распределения хи-квадрат вероятности γ. Из соотношения (2.44) окончательно получим

$$\overline{\lambda}_\gamma = \frac{\chi_{\gamma;2(\delta+d)}}{2(\rho + \kappa)}.$$

2.5.2. Разновидности задач байесовского оценивания. При решении практических задач часто не удается однозначно установить все перечисленные элементы постановки задачи байесовского оценивания показателей надежности. Поэтому необходима дальнейшая классификация возможных разновидностей. С методической точки зрения представляются наиболее существенными следующие три признака классификации:

(1) вид модели работоспособности;

(2) полнота знания априорного распределения (или полнота априорной определенности);

(3) полнота знания распределения основной случайной величины.

Кратко рассмотрим каждую из классификаций. С точки зрения первого признака классификации будем различать два вида моделей работоспособности, которые закладываются в основу соответствующего подхода к определению надежности. Первую, наиболее распространенную модель работоспособности будем условно называть формальной и записывать в виде

$$\xi > t_{\text{тр}}, \tag{2.45}$$

где ξ – случайное время безотказной работы, $t_{\text{тр}}$ – требуемое, согласно техническому заданию, время функционирования объекта. Модель (2.45) не учитывает реальных физических особенностей объекта и позволяет подходить к анализу надежности различных по физической природе объектов единым образом, основываясь только на внешних проявлениях объекта (результатах испытаний).

В отличие от этой модели работоспособности будем также использовать модель, основанную на математическом описании реальных процессов разрушения объекта. Данную модель будем условно называть функциональной и в общем случае записывать в виде

$$Z_j(t) = \varphi(X(t)) > 0, \quad t \geqslant t_{\text{тр}}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.46}$$

Здесь $Z_j(t)$ – случайный процесс, называемый переменной состояния, $X(t)$ – векторный случайный процесс первичных переменных объекта (нагрузочных факторов, физико-механических характеристик, геометрических параметров и т.п.); функция $\varphi(\cdot)$ называется функцией работоспособности. Совокупность условий (2.46) символизирует работоспособное состояние объекта. Методам исследования надежности технических объектов, правда без использования байесовского подхода, посвящена обширная литература [7, 9, 11, 12, 30, 38].

Следуя дальнейшему содержанию книги, заметим, что формальные модели работоспособности использованы в последующих пяти главах, с третьей по седьмую включительно. Байесовским методам анализа надежности на основе функциональных моделей работоспособности посвящены главы 8–10.

С точки зрения полноты априорной определенности (второй классификационный признак) будем различать три расчетных случая:

(А1) случай полной априорной определенности, когда априорная плотность задана однозначно;

(А2) случай частичной априорной определенности, когда априорная плотность $h(\theta)$ не задана, а известно лишь конечное число ограничений, накладываемых на определенные функционалы от априорного распределения (например, может быть известно только априорное математическое ожидание параметра θ);

(А3) случай полной априорной неопределенности, когда задано лишь конечное число оценок параметра θ.

Первый расчетный случай является наиболее распространенным и исследуется в главах 3, 4, 5, 8, 9. Расчетный случай (А2) наименее изучен в байесовской литературе. Глава 6 содержит описание общего формализованного представления частичной априорной определенности и решение ряда конкретных задач. Случай (А3) известен под названием эмпирического байесовского оценивания. Этому расчетному случаю посвящена глава 7.

По отношению к третьему признаку различают два расчетных случая:

(П1) параметрический, когда задано параметрическое семейство для функции распределения основной случайной величины, т.е. $F(t) = F(t;\ \theta)$, где $\theta \in \Theta$;

(П2) непараметрический, когда эта функция распределения определена на некотором непараметрическом классе (например, классе всех непрерывных функций распределения).

В дальнейшем в основном рассмотрены параметрические оценки, как наиболее простые и распространенные на практике. В главах 4 и частично 7 исследованы непараметрические байесовские оценки. В главе 5 исследованы так называемые квазипараметрические байесовские оценки, суть которых заключается в способах приближенного решения задач оценивания в непараметрической постановке средствами параметрических методов.

МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО БАЙЕСОВСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПО ЦЕНЗУРИРОВАННЫМ ВЫБОРКАМ

§ 3.1. Общая характеристика известных процедур статистического оценивания

При анализе надежности технических объектов определяющую роль играют показатели безотказности и, в частности, вероятность безотказной работы (ВБР) объекта в течение некоторого времени t:

$$R = R(t) = P\{\xi > t\}, \tag{3.1}$$

где ξ – случайное время безотказного функционирования. В дальнейшем при исследовании особенностей байесовского подхода будем использовать показатель (3.1), учитывая, что байесовские оценки других показателей, например типа квантилей, получаются аналогичным образом.

Принципиальным для всех параметрических байесовских методов является то, что с точностью до параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_l)$ задана функция распределения $F(t;\ \theta)$ или плотность распределения $f(t;\ \theta)$ случайной величины ξ, так что

$$R = R(t;\theta) = 1 - F(t;\theta) = \int_t^\infty f(x;\theta)\,dx. \tag{3.2}$$

В том случае, когда нас будет интересовать лишь зависимость ВБР от параметра θ при произвольном t, мы будем употреблять запись $R(\theta)$. Векторный параметр θ определен на множестве Θ. Задача состоит в оценке ВБР по совокупности априорной информации и экспериментальных данных.

Априорная информация чаще всего задается в виде априорной п.р. параметров модели надежности $h(\theta)$. Во многих практически важных случаях, которые описываются ниже, используется несколько другая параметризация: параметрами модели служат r_j – значения ВБР в некоторых заданных моментах времени $t_1, t_2, \ldots, t_l$, причем $r_j = R(t_j;\ \theta)$. Практическое преимущество такого способа задания вектора параметров обусловлено тем, что инженеру часто легче формировать априорное представление (субъективное или частотное) непосредственно относительно ВБР, а не с помощью параметра θ, часто не имеющего технической интерпретации. Может существовать также смешанная форма представления априорной информации в виде совместной п.р. ВБР в некоторый момент времени t и $(l-1)$ -й компоненты вектора θ. При выборе способа параметризации важно руководствоваться следующим очевидным принципом: параметры модели надежности должны иметь ясную физическую интерпретацию. Только в этом случае исследователь, используя свой неформальный опыт, может установить априорное распределение, адекватное реальным процессам функционирования технического устройства.

В настоящей и во всех последующих главах исследуются байесовские процедуры оценки ВБР для плана испытаний с цензурированием данных об отказах. Этот план описывает многие инженерные ситуации. Например, исследуемое техническое устройство испытывается в составе сложной системы, элементом которой оно является. Остановка испытания возможна как по причине отказа исследуемого объекта, так и в связи с отказом какого-либо другого элемента. Последнее событие для исследуемого устройства будем называть *приостановкой*. Приостановка может возникать также при автономных испытаниях устройств по причине отказа испытательного оборудования. Типичной является также ситуация, когда оценивается надежность оборудования по результатам эксплуатации. При этом отдельные экземпляры оборудования начали эксплуатацию в различные моменты времени, и необходимо оценить ВБР на текущий момент времени.

Пронумеруем испытуемые изделия. Каждое i-е испытание может окончиться отказом в момент t_i^* или приостановкой в момент t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если отказ наступает в момент $t_i^* \leqslant t_i$, то значение t_i^* становится известным в результате опыта. Если же $t_i^* > t_i$, то точное значение t_i^* неизвестно. Известно лишь, что отказ мог наступить после момента t_i. Случайные моменты отказов предполагаются взаимно независимыми и имеющими п.р. $f(t;\ \theta)$. Пронумеровав отдельно моменты отказов и приостановок, результатом испытаний будем считать вектор $\tau = \{t^*, t\}$, где $t^* = \{t_1^*, t_2^*, \ldots, t_d^*\}$, $t = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$.

Техника определения байесовских оценок ВБР полностью определяется стандартным байесовским методом оценивания, изложенным в главе 2. Исходя из выборки τ, основываясь на п.р. $f(t;\ \theta)$, записывают выражение для функции правдоподобия $l(\theta | \tau)$. Вопросы установления $l(\theta | \tau)$ для цензурированных выборок подробно рассмотрены в следующем параграфе. Далее, по теореме Байеса записывают ядро апостериорной п.р.

$$\hbar(\theta \mid \tau) \backsim l(\theta \mid \tau) h(\theta) \tag{3.3}$$

и определяют нормирующую постоянную β:

$$\beta = \int_{\Theta} l(\theta \mid \tau) h(\theta) d\theta. \tag{3.4}$$

В результате апостериорная п.р. имеет вид

$$\hbar(\theta \mid \tau) = \frac{1}{\beta} h(\theta) l(\theta \mid \tau). \tag{3.5}$$

Задавшись в соответствии с рекомендациями предыдущей главы функцией потерь $L(\hat{R}, R)$, где $\hat{R}$ – оценка, а $R = R(\theta)$ – истинное значение ВБР, путем решения минимизационной задачи

$$\hat{R}^* = \arg \min_{\hat{R} \in [0,1]} \int_{\Theta} L(\hat{R}, R(\theta)) \hbar(\theta \mid \tau) d\theta \tag{3.6}$$

определяют байесовскую точечную оценку ВБР $\hat{R}^*$. Заметим, что при отсутствии экспериментальных данных τ в (3.6) вместо апостериорной п.р.

$\hbar(\theta \mid \tau)$ следует подставить априорную $h(\theta)$. В этом случае оценка $\hat{R}$ будет априорной байесовской.

Если выбрана квадратичная функция потерь, то решение задачи (3.6) записывается в явном виде

$$\hat{R}^* = \int_{\Theta} R(\theta)\hbar(\theta \mid \tau)\,d\theta, \tag{3.7}$$

т.е. оценка $\hat{R}^*$ является апостериорным м.о. функции $R(\theta)$. Точность полученной оценки может быть охарактеризована апостериорной дисперсией (или с.к.о.), которая совпадает с минимальным значением функции риска

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \int_{\Theta} [R(\theta) - \hat{R}^*]^2\,\hbar(\theta \mid \tau)\,d\theta. \tag{3.8}$$

Поскольку ВБР является позитивной характеристикой надежности, представляет интерес построение для нее нижней доверительной границы $\underline{R}^*_\gamma$, которая вводится выражением

$$P\{R(\theta) > \underline{R}^*_\gamma \mid \tau\} = \gamma,$$

где γ – заданный уровень доверия. В конечном итоге определение $\underline{R}^*_\gamma$ сводится к решению в общем случае трансцендентного уравнения

$$\int_{R(\theta) \geqslant \underline{R}^*_\gamma} \hbar(\theta \mid \tau)\,d\theta - \gamma = 0, \tag{3.9}$$

в котором неизвестная оценка $\underline{R}^*_\gamma$ входит в область интегрирования.

Таким образом, стандартный параметрический метод оценивания показателей надежности сводится к последовательному применению выражений (3.3)–(3.9). В зависимости от использования того или иного параметрического семейства $f(t;\ \theta)$ и вида априорной п.р. $h(\theta)$ в решении задачи могут возникать определенные особенности и трудности, которые, как правило, не носят принципиального характера. Решение задачи может усложниться, когда оценивается ВБР какой-либо системы. В этом случае параметр θ содержит большое (в зависимости от количества элементов) число компонент, а функция $R(\theta)$ является весьма громоздкой.

Систематизация известных параметрических байесовских оценок. Вопросам получения параметрических байесовских оценок показателей надежности уделяется большое внимание, особенно со стороны зарубежных авторов. Даже очень краткий обзор полученных в этой области результатов занял бы много места. В то же время необходимость подобного обзора сомнительна, поскольку бóльшая часть результатов не носит принципиального характера. Ниже помещена систематизация основных результатов со ссылками на соответствующие источники. Читатель, заинтересовавшийся каким-либо конкретным результатом, без труда разберется в нем, ознакомившись с оригиналом работы.

Существуют два значительных обзора по применению байесовских методов в надежности. Первый из них [216] приводит подробный анализ основных работ до 1976, второй [231] – с 1977 по 1981 г. Ниже проведена систематизация наиболее интересных и практически важных работ, появившихся в печати в течение последних 20 лет. Помимо работ, помещенных в обзорах [216] и [231], в нее включены работы, появившиеся с 1981 г., а также ряд важных публикаций, не вошедших в упомянутые обзоры.

В основе систематизации лежит следующий принцип. Вся совокупность работ разделяется по определенным признакам, главными из которых являются: (a) вид параметрического семейства, (b) вид функции потерь, (c) способ выбора априорного распределения, (d) планы испытаний для получения оценок, (e) тип структуры технической системы, надежность которой оценивается.

В соответствии с первым признаком все работы подразделяют на следующие группы: биномиальная модель [113, 116, 132, 198, 201, 217, 241, 243], модель с постоянной интенсивностью отказов [74, 82, 169, 171, 182, 192, 236], пуассоновская модель [91, 143, 146, 194, 214, 242, 243, 245], случай нормального распределения [137, 235], случай гамма-распределения [111, 144, 151, 176, 235, 236], модель, основанная на распределении Вейбулла [72, 88, 93, 123, 154, 193, 220, 233, 234], модель с логарифмически нормальным распределением [188, 189]. Особенностью всех работ является то, что они используют естественную параметризацию соответствующих семейств распределений. Это означает, что если, к примеру, функция распределения Вейбулла записывается в виде $F(t;\ \alpha, \sigma) = \exp[-(t/\sigma)^{\alpha}]$, то в качестве априорной информации используется априорная п.р. $h(\alpha, \sigma)$ величин, являющихся параметрами модели. Это затрудняет использование соответствующих результатов на практике, так как инженеру-исследователю обычно трудно формировать априорное представление относительно параметров, которые часто носят абстрактный характер. На практике же распространены ситуации, когда разработчик имеет априорное представление непосредственно о показателе надежности. Например, для упомянутой модели Вейбулла известен интервал значений ВБР в момент t_0: $R_{t_0} = 1 - F(t_0;\ \alpha, \sigma)$, и, исходя из этой информации, необходимо получить байесовскую оценку. Подобные ситуации рассматриваются в последующих параграфах главы.

В соответствии со вторым признаком (видом функции потерь) рассматриваемые публикации подразделяются более полярно. Подавляющее большинство работ используют квадратичную функцию потерь [79, 82, 91, 93, 97, 137, 139, 145, 146, 172, 183, 191, 194, 198, 212, 214, 221, 234, 237, 243], приводящую к байесовской оценке вида апостериорного м.о. В работе [176] использована функция потерь $|\ \hat{R} - R(\theta)\ |$. В ряде работ [107, 214, 237] авторы основываются на приведенных квадратичных функциях потерь $[\hat{R} - R(\theta)]^2/R(\theta)$ и $[\hat{R} - R(\theta)]^2/R^2(\theta)$, приводящих соответственно к оценкам $\{E[R^{-1}\ |\ \tau\ ]\}^{-1}$ и $E[R^{-1}\ |\ \tau]/E[R^{-2}\ |\ \tau]$. В работах [118, 237] вводится и обосновывается полезность функций потерь видов

$$C(R(\theta))[\hat{R}^{\beta} - R^{\beta}(\theta)]^2, \quad C(R(\theta))[\ln\hat{R} - \ln R(\theta)]^2.$$

По третьему признаку всю совокупность работ разделим на четыре группы. Первую группу составляют работы [66, 67, 87, 89–92, 93, 111, 113, 137–139, 145, 154, 162, 169, 176, 177, 181, 183, 189, 190, 194, 195, 211, 212, 217, 220, 221–224, 242], в которых использованы сопряженные системы априорных распределений. Таких работ больше всего. Ко второй группе отнесем публикации, в которых сделаны попытки использовать объективные априорные распределения [79, 93, 97, 136, 145, 146, 163, 172, 193, 234, 241]. Авторы этих работ либо строят априорные распределения по имеющимся статистическим данным прежних разработок, предполагая устойчивыми статистические механизмы, либо попросту используют эмпирический байесовский подход. В работах [87, 139, 145, 176, 188, 194, 209, 214] использованы субъективные дискретные либо равномерные априорные распределения. И, наконец, в четвертую группу вошли немногочисленные публикации [71, 107, 120], в которых использован рассмотренный в главе 2 принцип максимума энтропии. Таким образом, в перечисленных работах авторы стремятся избежать назначения субъективных априорных и делают это только при дискретном представлении.

Согласно четвертому признаку наиболее часто используются следующие планы испытаний: 1) испытывают n изделий с фиксацией момента отказа, испытания прекращаются при достижении $r \leqslant n$ отказов [73, 82, 93, 114, 176, 181, 183, 219–221, 222, 223, 237]; 2) n изделий ставятся на испытание в течение заданного времени T и фиксируется число отказавших экземпляров [143, 146, 243]; 3) n изделий ставятся на испытания и фиксируются моменты отказов, испытания оканчиваются, когда все n изделий откажут [191, 193]; 4) при испытаниях n изделий фиксируются моменты отказов, испытание неотказавшего изделия оканчивается через заданное время T [82, 89, 114, 175].

Последний, пятый признак позволяет подразделить работы следующим образом. В большинстве публикаций речь идет об определении байесовских оценок отдельных элементов. В работах [87, 217, 224, 230, 245] оценивается надежность параллельных систем, а в работах [138, 170, 177, 178, 195, 198, 221–223, 239, 245] – последовательных. Комбинированные (параллельно-последовательные) системы рассматриваются в [89, 161, 162]. Наконец, в работах [154, 243] изучаются байесовские оценки систем, отличных от указанных выше.

Представленные материалы позволяют сделать следующий вывод. Несмотря на столь большое разнообразие решенных задач, недостаточно исследованными следует признать вопросы оценки ВБР по многократно цензурированным выборкам в предположении, что априорная информация задана в виде априорного распределения исследуемого показателя надежности. Этот пробел в той или иной мере восполняется предлагаемыми ниже процедурами.

§ 3.2. Функция правдоподобия для байесовских процедур

Одной из составных частей любой байесовской процедуры оценивания является составление функции правдоподобия. В простейшем случае для планов испытаний без цензурирования данных функция правдоподобия записывается в виде

$$l(\theta \mid \tau) = \prod_{i=1}^{n} f(\tau_i; \theta). \tag{3.10}$$

Вопросы построения функции правдоподобия для цензурированных выборок рассматривались многими авторами (см., например, [23, 89]). Наиболее полно формализация механизма случайного цензурирования проведена в работах [3, 4]. Ниже приводятся основные положения этой формализации.

Пусть проводятся испытания n изделий. Каждому i-му испытанию соответствуют два числа t_i и $t_i^*(i = 1, 2, \ldots, n)$, t_i^* – момент отказа, t_i – момент цензурирования. Моменты отказов t_i^* при отсутствии цензурирования предполагаются взаимно независимыми одинаково распределенными случайными величинами с ф.р. $F(t;\ \theta)$. Выборка $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, соответствующая общему плану испытаний, имеет вид

$$\tau = (t_{i_1}^*, t_{i_2}^*, \ldots, t_{i_d}^*, t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_k}),\quad d + k = n, \tag{3.11}$$

где множество $I = (i_1, i_2, \ldots, i_d)$ образовано из номеров тех изделий, для которых наблюдались отказы, а множество $J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ образовано из номеров изделий, отказы которых были цензурированы. Все множество величин $(t_1^*, \ldots, t_n^*, t_1, \ldots, t_n)$ рассматривается как случайный вектор.

В дальнейшем предполагается, что функция распределения всего множества рассматриваемых случайных величин обладает следующим свойством: условное распределение $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (при условии, что ненаблюдаемые значения моментов отказов $t_{j_1}^* > t_{j_1}, \ldots, t_{j_k}^* > t_{j_k}$, а наблюдаемые значения моментов отказов $t_{i_1}^* \leqslant t_{i_1}, \ldots, t_{i_d}^* \leqslant t_{i_d}$) не зависит от θ и может зависеть лишь от значений $t_{i_1}^*, \ldots, t_{i_d}^*$. В предположении существования совместных п.р. значений t_i это означает, что для условных п.р. имеет место соотношение

$$p(t_1, t_2, \ldots, t_n \mid t_1^*, \ldots, t_n^*) = p(t_1, t_2, \ldots, t_n \mid t_{i_1}^*, \ldots, t_{i_d}^*), \tag{3.12}$$

где

$$t_i^* \leqslant t_i \quad \forall i \in I, \quad t_j^* > t_j \quad \forall j \in J.$$

План испытаний с цензурированием, для которого выполнено соотношение (3.12), назван в [3] *планом испытаний с неинформативным цензурированием*, сокращенно *НЦ-планом*.

Заметим, что условие (3.12) выполнено, если совокупности всех моментов отказов $(t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*)$ и всех моментов цензурирования $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ являются взаимно независимыми. Именно так будет в том случае, когда t_i^* независимы по i и не зависят от всех t_j $(j, i = 1, 2, \ldots, n)$. Такое допущение, в частности, выглядит естественно при испытании изделий с двумя типами отказов, когда каждое испытание продолжается до наступления отказа. При этом указывается, какого типа отказ наступил. Полученная в данном случае выборка имеет вид $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_i = \min\{t_i^*, t_i\}$. Событие $\tau_i = t_i^* (\tau_i = t_i)$ соответствует тому, что отказ первого (второго) типа наступил раньше, чем отказ второго (первого) типа.

Для установления функции правдоподобия запишем совместную плотность наблюдаемых данных:

$$p(\tau) = p(t_{i_1}^*, \ldots, t_{i_d}^*, t_{j_1}, \ldots, t_{j_k}) = \int_{t_{i_1}^*}^{\infty} dt_{i_1} \ldots \int_{t_{i_d}^*}^{\infty} dt_{i_d} \int_{t_{j_1}}^{\infty} dt_{j_1}^* \ldots$$

$$\ldots \int_{t_{j_k}}^{\infty} dt_{j_k}^* \prod_{l=1}^{n} f(t_l^*; \theta)\, p(t_1, \ldots, t_n \mid t_1^*, \ldots, t_n^*).$$

Выполнив интегрирование по $t_{j_1}^*, \ldots, t_{j_k}^*$, учитывая соотношение (3.12), получим

$$p(\tau \mid \theta) = \prod_{m=1}^{d} f(t_{i_m}^*; \theta) \prod_{l=1}^{k} [1 - F(t_{j_l}; \theta)] \, c(\tau), \tag{3.13}$$

где

$$c(\tau) = \int_{t_{i_1}^*}^{\infty} dt_{i_1} \ldots \int_{t_{i_d}^*}^{\infty} dt_{i_d} \, p(t_1, \ldots, t_n \mid t_{i_1}^*, \ldots, t_{i_d}^*)$$

не зависит от параметра θ и определяется только полученными данными.

Запишем выражение (3.13) в виде, более удобном для определения оценок показателей надежности. Для этого используем функцию интенсивности отказов

$$\lambda(t; \theta) = f(t; \theta)/(1 - F(t; \theta)) \tag{3.14}$$

и функцию ресурса (или интегральную функцию интенсивности)

$$\Lambda(t; \theta) = \int_0^t \lambda(x; \theta) \, dx = \int_0^{\infty} \chi(t - x) \lambda(x; \theta) \, dx, \tag{3.15}$$

где

$$\chi(z) = 0 \quad \text{при} \quad z < 0 \text{ и } \chi(z) = 1 \quad \text{при} \quad z \geqslant 0.$$

Заметим, что поскольку

$$R(t; \theta) = 1 - F(t; \theta) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(x; \theta) \, dx\right],$$

для функции ресурса имеем

$$\Lambda(t; \theta) = -\ln[1 - F(t; \theta)]. \tag{3.16}$$

Преобразуем выражение (3.13), используя соотношения (3.14) и (3.16). В результате получаем

$$p(\tau \mid \theta) = c(\tau) \prod_{i \in I} \lambda(t_i^*; \theta) \exp\left\{-\left[\sum_{i \in I} \Lambda(t_i^*; \theta) + \sum_{j \in J} \Lambda(t_j; \theta)\right]\right\}. \tag{3.17}$$

Выражение (3.17) можно переписать более лаконично, учитывая соотношение (3.15). В самом деле,

$$\sum_{i \in I} \Lambda(t_i^*, \theta) + \sum_{j \in J} \Lambda(t_j; \theta) =$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\sum_{i \in I} \chi(t - t_i^*) + \sum_{j \in J} \chi(t - t_j)\right] \lambda(t; \theta) \, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} N(t) \lambda(t; \theta) \, dt, \tag{3.18}$$

где $N(t)$ – число изделий, испытываемых в момент t. С использованием соотношения (3.18) выражение (3.17) примет вид

$$p(\tau \mid \theta) = \prod_{i \in I} \lambda(t_i^*; \theta) \exp\{-\int_0^\infty N(t)\lambda(t'; \theta)\,dt\}\, c(\tau). \tag{3.19}$$

Плотность распределения $p(\tau \mid \theta)$, представленная в виде функции от параметра θ, по определению есть функция правдоподобия для НЦ-плана, соответствующая цензурированным данным τ вида (3.11). В дальнейших рассуждениях будем использовать обозначения $t^* = (t_1^*, \ldots, t_d^*)$, $t = (t_1, \ldots, t_k)$ соответственно для моментов отказа и моментов цензурирования, наблюденных при проведении $n = d + k$ независимых испытаний. С учетом этих обозначений функцию правдоподобия $l(\theta \mid \tau)$ можно записать с помощью одного из трех выражений, которые являются равносильными:

$$l(\theta \mid \tau) = c(\tau) \prod_{i=1}^{d} f(t_i^*; \theta) \prod_{j=1}^{k} [1 - F(t_j; \theta)], \tag{3.20}$$

$$l(\theta \mid \tau) = c(\tau) \prod_{i=1}^{d} \lambda(t_i^*; \theta) \exp[-\sum_{j=1}^{n} \Lambda(\tau_j; \theta)], \tag{3.21}$$

$$l(\theta \mid \tau) = c(\tau) \prod_{i=1}^{d} \lambda(t_i^*; \theta) \exp[-\int_0^\infty N(t)\lambda(t; \theta)\,dt]. \tag{3.22}$$

Использование того или иного из приведенных выражений в конкретных байесовских процедурах диктуется удобством рассуждений, приводящих к апостериорной п.р. $\hbar(\theta \mid \tau)$, и способом задания параметрического семейства распределений случайной величины времени безотказного функционирования.

В заключение данного параграфа заметим, что предположение о случайности моментов цензурирования в проведенных рассуждениях не является принципиальным. В более общем случае для каждого испытания планируется продолжительность t_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$, которая не должна быть превышена. Таким образом, в i-м опыте наблюдается уже минимальная из трех величин $\tau_i = \min\{t_i^*, t_i, t_i'\}$, и выборка данных имеет вид $\tau = (t_1^*, \ldots, t_d^*, t_1, \ldots, t_{k'}, t_1', \ldots, t_{k''}')$, где $k' + k'' = k$, $n = d + k$. Для того чтобы формализовать данный план испытаний в приведенных выше рассуждениях, следует рассмотреть множество случайных величин $\{t_1^*, \ldots, t_n^*, t_1, \ldots, t_n, t_1', \ldots, t_n'\}$, имеющих совместную плотность вида

$$p = \prod_{l=1}^{n} f(t_l^*; \theta)\, p(t_1, \ldots, t_n \mid t_1^*, \ldots, t_n^*) \prod_{j=1}^{n} \delta_j(t_j'),$$

где $\delta_j(t_j')$ — дельта-функция. В дальнейшем путем преобразований, аналогичных приведенным выше, для $p(\tau \mid \theta)$ будем иметь

$$p(\tau \mid \theta) = \prod_{m=1}^{d} f(t_{i_m}^*; \theta) \prod_{l=1}^{k'} [1 - F(t_{j_l}; \theta)] \prod_{s=1}^{k''} [1 - F(t_{j_s}; \theta)].$$

Данное выражение совпадает с (3.13), если положить $k' + k'' = k$ и моменты случайного и детерминированного цензурирования не различать. Таким образом, конечные выражения для функции правдоподобия (3.20) – (3.22) справедливы и в том случае, когда цензурирование осуществляется как случайным, так и детерминированным образом.

§ 3.3. Оценки вероятности безотказной работы при постоянной интенсивности отказов

Случаю постоянной интенсивности отказов $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ соответствует экспоненциальное распределение времени безотказной работы с п.р.

$$f(t;\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$$

и ф.р.

$$F(t;\lambda) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Данное распределение является однопараметрическим. Вероятность безотказной работы в некоторый момент времени t_0 записывается в виде

$$R = R(t_0;\lambda) = e^{-\lambda t_0}.$$

В силу обстоятельств, оговоренных выше, будем рассматривать ситуацию, когда задано априорное распределение непосредственно для оцениваемой ВБР, т.е. известно $h(r)$. Представим п.р. $f(t;\ \lambda)$ и ф.р. $F(t;\ \lambda)$ в зависимости от параметра $r = \exp(-\lambda\, t_0)$. Ввиду однозначности последней зависимости

$$\lambda = \lambda(r) = -\frac{\ln r}{t_0},$$

откуда следует

$$f(t;\lambda(r)) = -\frac{\ln r}{t_0}\, r^{t/t_0} \tag{3.23}$$

и

$$F(t;\lambda(r)) = r^{t/t_0}. \tag{3.24}$$

Подставляя выражения (3.23) и (3.24) в (3.20), получим функцию правдоподобия, соответствующую выборке τ для НЦ-плана испытаний:

$$l(r\,|\,\tau) = c(\tau)\left(-\frac{1}{t_0}\right)^n r^{\omega} \ln^d r, \tag{3.25}$$

где

$$\omega = \omega(\tau) = \frac{1}{t_0}\left(\sum_{i=1}^{d} t_i^* + \sum_{j=1}^{k} t_j\right)$$

– суммарная относительная наработка при испытаниях, образующая совместно с числом отказов d достаточную статистику по отношению к выборке τ при НЦ-плане.

В соответствии с теоремой Байеса (3.3) для апостериорной п.р. параметра r имеем

$$\hbar(r\,|\,\tau) \backsim h(r) r^{\omega} \ln^d r. \tag{3.26}$$

Для дальнейших рассуждений примем квадратичную функцию потерь, что позволяет записать следующие выражения для байесовской оценки $\hat{R}^*$ и апостериорной дисперсии:

$$\hat{R}^* = \frac{1}{\beta}\int_0^1 h(r)\,r^{\omega+1}\ln^d r\,dr, \tag{3.27}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{1}{\beta}\int_0^1 h(r)\,r^{\omega+2}\ln^d r\,dr - \hat{R}^{*2}, \tag{3.28}$$

где $\beta = \int_0^1 h(r) r^{\omega}\ln^d r dr$ – нормирующая постоянная. Нижняя доверительная граница ВБР $\underline{R}^*_\gamma$ в соответствии с общим выражением (3.9) может быть найдена из уравнения

$$\int_{\underline{R}^*_\gamma}^1 h(r)r^{\omega}\ln^d r\,dr = \gamma\int_0^1 h(r)r^{\omega}\ln^d r\,dr, \tag{3.29}$$

где γ – уровень доверия.

В общем случае для практического применения соотношений (3.27) – (3.29) необходимо использовать численные методы интегрирования и решения трансцендентных уравнений. В особенности это будет иметь место, когда $h(r)$ выбирается из частотных соображений и является аппроксимацией некоторого эмпирического распределения. Ниже рассмотрены некоторые практически важные частные случаи.

3.3.1. Случай равномерного априорного распределения. Пусть показатель R подчиняется априорному распределению с плотностью

$$h(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{R_{\text{в}} - R_{\text{н}}}, & R_{\text{н}} \leqslant r \leqslant R_{\text{в}}, \\ 0, & r < R_{\text{н}}, \quad r > R_{\text{в}}. \end{cases} \tag{3.30}$$

Этот случай характерен для практической ситуации, в которой разработчик, используя предшествующий опыт, может гарантировать, что значение ВБР создаваемого изделия не выходит за промежуток $[R_{\text{н}}, R_{\text{в}}]$.

В соответствии с выражением (3.27) получим

$$\hat{R}^* = \frac{\int_{R_{\text{н}}}^{R_{\text{в}}} r^{\omega+1}\ln^d r\,dr}{\int_{R_{\text{н}}}^{R_{\text{в}}} r^{\omega}\ln^d r\,dr}. \tag{3.31}$$

Для проведения расчетов по формуле (3.31) используем несложно вычисляемый интеграл

$$\int x^{\theta}\ln^n x\,dx = x^{\theta+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k n^{(k)}\frac{\ln^{n-k}x}{(\theta+1)^{k+1}} + C, \tag{3.32}$$

где $n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ – число размещений из n элементов по k. Выражение (3.31) преобразуется к виду

$$\hat{R}^* = \frac{I_E(R_в, \omega + 1, d) - I_E(R_н, \omega + 1, d)}{I_E(R_в, \omega, d) - I_E(R_н, \omega, d)}, \tag{3.33}$$

где функция $I_E(x, a, n)$ задается следующим образом:

$$I_E(x, a, n) = x^{a+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{|\ln^{n-k} x|}{(a+1)^k}. \tag{3.34}$$

Аналогично записывается конечное выражение для апостериорной дисперсии

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{I_E(R_в, \omega + 2, d) - I_E(R_н, \omega + 2, d)}{I_E(R_в, \omega, d) - I_E(R_н, \omega, d)} - \hat{R}^{*2}. \tag{3.35}$$

Уравнение (3.29) для рассматриваемого случая имеет вид

$$I_E(\underline{R}^*_\gamma, \omega, d) = (1-\gamma) I_E(R_в, \omega, d) + \gamma I_E(R_н, \omega, d). \tag{3.36}$$

Определенный интерес представляет случай, когда $R_н = 0$, а $R_в = 1$, т.е. ВБР априорно распределена равномерно в промежутке $[0, 1]$. Будем называть эту ситуацию случаем тривиальной априорной информации. Формулы (3.33)–(3.35) становятся существенно проще:

$$\hat{R}^* = \left(1 - \frac{1}{\omega + 2}\right)^{d+1}, \quad \sigma^2_{\hat{R}^*} = \left(\frac{\omega+1}{\omega+3}\right)^{d+1} - \hat{R}^{*2}, \tag{3.37}$$

$$\underline{R}^{*\omega+1}_\gamma \sum_{k=0}^{d} \frac{\omega+1}{(d-k)!} |\ln \underline{R}^*_\gamma|^{d-k} = \beta(1-\gamma). \tag{3.38}$$

Сравним оценки (3.37) с оценками максимального правдоподобия. Для этого воспользуемся функцией правдоподобия (3.25). Решив уравнение правдоподобия $\partial \ln l(r \mid \tau)/\partial r = 0$, получаем

$$R_{мп} = e^{-d/\omega}. \tag{3.39}$$

Найдем теперь минимальную дисперсию оценки. В соответствии с неравенством Крамера–Рао

$$D[R_{мп}] \geqslant 1/I(r),$$

где

$$I(r) = \int_0^\infty \frac{\left[\frac{\partial}{\partial r} f(t; \lambda(r))\right]^2}{f(t; \lambda(r))} dt.$$

Для рассматриваемого случая

$$I(r) = \frac{1}{r^2 \ln^2 r},$$

откуда

$$D[R_{мп}] \geqslant e^{-2n/\omega} (n/\omega)^2 = D_{\min}. \tag{3.40}$$

Сравним соответственно (3.37) с (3.39) и (3.40). Из выражения (3.39) видно, что при $d = 0$ $R_{\text{мп}} = 1$, что исключает возможность применения оценки максимального правдоподобия для случая полностью успешных испытаний. В то же время из выражения (3.37) при $d = 0$ имеем $\hat{R}^* = (\omega + 1)/(\omega + 2)$, и случай $\hat{R}^* = 1$ реализуется лишь в асимптотике при $n \to \infty$. Аналогично, при $d = 0$ из выражения (3.40) имеем $D_{\min} = 0$, а $\sigma^2_{\hat{R}^*}$, как следует из выражения (3.37), всегда положительна и стремится к нулю лишь при $n \to \infty$.

В табл. 3.1 приведены результаты численного сравнения $\hat{R}^*$ с $R_{\text{мп}}$ и $\sigma^2_{\hat{R}^*}$ с $D_{\min}$ в широком диапазоне значений достаточных статистик. Как видно из представленных численных значений, при $d > 1$ $\sigma^2_{\hat{R}^*} < D_{\min}$.

Таблица 3.1

ω	$\hat{R}_{\text{мп}}$	$\hat{R}^*$	$D_{\min}$	$\sigma^2_{\hat{R}^*}$	d
1	1,000000	0,666667	0,0	0,055556	
2	1,000000	0,750000	0,0	0,037500	
3	1,000000	0,800000	0,0	0,026667	
4	1,000000	0,833333	0,0	0,019841	
5	1,000000	0,857143	0,0	0,015306	
10	1,000000	0,916667	0,0	0,005876	
20	1,000000	0,954545	0,0	0,001886	
30	1,000000	0,968750	0,0	0,000917	0
40	1,000000	0,976190	0,0	0,000541	
50	1,000000	0,981769	0,0	0,000356	
100	1,000000	0,990196	0,0	0,000094	
200	1,000000	0,995049	0,0	0,000024	
300	1,000000	0,996689	0,0	0,000011	
400	1,000000	0,997512	0,0	0,000006	
500	1,000000	0,998008	0,0	0,000004	
1	0,367879	0,444444	0,135335	0,052469	
2	0,606531	0,562500	0,091970	0,043594	
3	0,716531	0,640000	0,057046	0,034845	
4	0,778801	0,694445	0,037908	0,027951	
5	0,818731	0,734694	0,026813	0,022725	
10	0,904837	0,840278	0,008187	0,009910	
20	0,951229	0,911157	0,002262	0,003441	
30	0,967216	0,938477	0,001039	0,001723	
40	0,975310	0,952948	0,000595	0,001031	1
50	0,980199	0,961908	0,000384	0,000685	
100	0,990650	0,980488	0,000098	0,000185	
200	0,905012	0,990123	0,000025	0,000048	
300	0,996672	0,993388	0,000022	0,000022	
400	0,997503	0,995031	0,000006	0,000012	
500	0,998002	0,996020	0,000004	0,000008	

ω	$\hat{R}_{\text{мп}}$	$\hat{R}^*$	$D_{\min}$	$\sigma^2_{\hat{R}^*}$	d
2	0,367879	0,421875	0,135335	0,038022	
3	0,513417	0,512000	0,117154	0,034153	
4	0,606531	0,578704	0,091970	0,029534	
5	0,670320	0,629748	0,071893	0,025306	
10	0,818731	0,770255	0,026813	0,012534	
20	0,904836	0,869741	0,008187	0,004708	2
30	0,935507	0,909149	0,003890	0,002426	
40	0,951229	0,930259	0,002262	0,001474	
50	0,960789	0,943410	0,001477	0,000988	
100	0,980199	0,970876	0,000384	0,000272	
200	0,990050	0,985222	0,000098	0,000071	
300	0,993356	0,990099	0,000044	0,000032	
400	0,995012	0,992556	0,000025	0,000019	
500	0,996008	0,994036	0,000016	0,000012	
3	0,367879	0,409600	0,135335	0,029759	
4	0,472367	0,482253	0,125511	0,027740	
5	0,548812	0,539775	0,108430	0,025049	
10	0,740818	0,706067	0,049393	0,014092	
20	0,860700	0,830207	0,016668	0,005726	
30	0,904837	0,880738	0,008187	0,003037	3
40	0,927743	0,908109	0,004841	0,001873	
50	0,941763	0,925268	0,003193	0,001268	
100	0,970446	0,961357	0,000948	0,000355	
200	0,985112	0,980344	0,000218	0,000094	
300	0,990650	0,986821	0,000098	0,000043	
400	0,992528	0,990087	0,000055	0,000024	
500	0,994018	0,992056	0,000036	0,000016	

Сравним теперь байесовскую нижнюю доверительную границу для случая тривиальной априорной информации с традиционной доверительной границей (при $d = 0$)

$$\underline{R}'_\gamma = (1-\gamma)^{1/n}, \tag{3.41}$$

которая справедлива для плана $[N, U, T]$ при полностью безотказных испытаниях. Из уравнения (3.38) при $d = 0$ легко следует

$$\underline{R}^*_\gamma = (1-\gamma)^{1/(\omega+1)}. \tag{3.42}$$

Если теперь редуцировать формулу (3.42) для плана $[N, U, T]$ при $d = 0$, то можно получить

$$\underline{R}^*_\gamma = (1-\gamma)^{1/(n+1)}.$$

Сравнение с (3.41) убеждает, что всегда $\underline{R}^*_\gamma > \underline{R}'_\gamma$.

В работе [21] получена оценка $\underline{R}'_\gamma$ для плана $[N, U, (r, T)]$, который при постоянной интенсивности отказа приводит к достаточной статистике

(d, ω). Эта оценка имеет вид

$$\underline{R}'_\gamma = \exp\left[-\frac{\chi^2_{1-\gamma;2(d+1)}}{2\omega}\right], \tag{3.43}$$

где $\chi^2_{1-\gamma;\,2(d+1)}$ – квантиль распределения хи-квадрат. В табл. 3.2 приведены значения оценки (3.43) и байесовской нижней доверительной границы, рассчитанной в соответствии с уравнением (3.38) в широком диапазоне значений достаточной статистики. Как показывают результаты сравнения, $\underline{R}^*_\gamma > \underline{R}'_\gamma$, т.е. байесовский доверительный интервал всегда меньше обычного. В то же время оценки $\underline{R}^*_\gamma$ и $\underline{R}'_\gamma$ имеют одинаковые пределы при $n \to \infty$, и их значения различаются малосущественно, начиная с $\omega = 40$.

Проведенный анализ убеждает в том, что байесовские оценки всегда более эффективны. К чему же это приводит на практике? Прежде всего к существенному выигрышу в количестве испытаний, необходимых для подтверждения заданных требований по надежности. С целью выяснения количественных соотношений между требуемым объемом испытаний $\omega^*_{\text{тр}}$ в рамках байесовской методологии и таким же объемом $\omega_{\text{тр}}$ при использовании небайесовских методов было проведено численное моделирование процесса экспериментальной отработки объекта на заданный уровень надежности $R_{\text{тр}}$. Значения $\omega^*_{\text{тр}}$ и $\omega_{\text{тр}}$ определялись соответственно из усло-

Таблица 3.2

	$d = 0$		$d = 1$		$d = 2$	
ω	$\underline{R}^*_{0,9}$	$\underline{R}'_{0,9}$	$\underline{R}^*_{0,9}$	$\underline{R}'_{0,9}$	$\underline{R}^*_{0,9}$	$\underline{R}'_{0,9}$
1	0,316229	0,100009	0,0	0,0	0,0	0,0
2	0,464160	0,316241	0,273468	0,143023	0,0	0,0
3	0,562342	0,464172	0,378163	0,273488	0,264325	0,169625
4	0,630958	0,562353	0,459350	0,378184	0,344914	0,264312
5	0,681292	0,630968	0,522942	0,459370	0,411868	0,344900
10	0,811131	0,794335	0,702148	0,677768	0,616408	0,587282
15	0,865964	0,857701	0,784187	0,771592	0,717025	0,701290
20	0,896151	0,891255	0,830918	0,823267	0,776124	0,766343
30	0,928415	0,926121	0,882078	0,878403	0,842242	0,837431
35	0,938042	0,936332	0,897584	0,894824	0,862567	0,858927
45	0,951177	0,950120	0,918917	0,917197	0,890740	0,888449
55	0,959716	0,959001	0,932898	0,931724	0,909335	0,907762
65	0,965714	0,965197	0,942768	0,941917	0,922525	0,921378
75	0,970157	0,969766	0,950107	0,949462	0,932366	0,931493
85	0,973581	0,973275	0,955778	0,955272	0,939989	0,939303
95	0,976300	0,976054	0,960292	0,959885	0,946068	0,945514
100	0,977460	0,977238	0,962220	0,961852	0,948668	0,948167
150	0,984867	0,984767	0,974569	0,974403	0,965367	0,965139
200	0,988610	0,988554	0,980834	0,980740	0,973868	0,973738
300	0,992380	0,992354	0,987160	0,987119	0,982473	0,982415
400	0,994275	0,994260	0,990347	0,990323	0,986816	0,986782
500	0,995415	0,995406	0,992266	0,992251	0,989433	0,989411

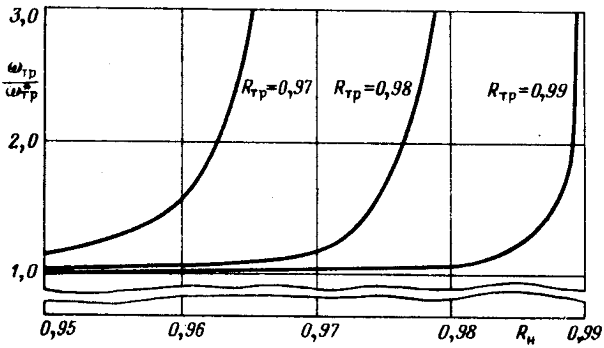


Рис. 3.1. Иллюстрация выигрыша в объеме испытаний при использовании байесовских процедур

вий $\underline{R}^*_\gamma = R_{тр}$ и $\underline{R}'_\gamma = R_{тр}$. На рис. 3.1 представлены зависимости относительного выигрыша в количестве испытаний $\omega_{тр}/\omega^*_{тр}$ от априорного уровня надежности $R_н$ (при $R_в = 1$) для различных $R_{тр}$. Полученные результаты говорят о том, что этот выигрыш может достигать значительных размеров.

3.3.2. Случай априорного бета-распределения. Существуют практические ситуации, когда до начала испытаний разработчику известна точечная априорная оценка ВБР R_0 и погрешность ее определения в виде априорной дисперсии σ_0^2. По свидетельству работы [63] в этом случае априорное распределение может быть аппроксимировано бета-распределением с плотностью

$$h(r) = \frac{r^{\alpha-1}(1-r)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \tag{3.44}$$

где $B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ – бета-функция, а параметры α и β определяются по формулам

$$\alpha = R_0\left[\frac{R_0(1-R_0)}{\sigma_0^2} - 1\right], \quad \beta = (1-R_0)\left[\frac{R_0(1-R_0)}{\sigma_0^2} - 1\right].$$

В соответствии с теоремой Байеса для апостериорной плотности имеем

$$h(r\,|\,\tau) \propto r^{\alpha+\omega-1}(1-r)^{\beta-1}\ln^d r, \tag{3.45}$$

откуда получаются следующие апостериорные байесовские оценки:

$$\hat{R}^* = \frac{I_B(\omega+1)}{I_B(\omega)}, \quad \sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{I_B(\omega+2)}{I_B(\omega)} - \hat{R}^{*2}, \tag{3.46}$$

где функция $I_B(\nu)$ определяется интегралом

$$I_B(\nu) = \int\limits_0^1 x^{\alpha+\nu-1}(1-x)^{\beta-1}|\ln x|^d dx. \tag{3.47}$$

Для высоконадежных изделий $\alpha + \omega \geqslant 100$, и в интеграле (3.47) можно воспользоваться приближением $\ln r \cong (1-r)$. Дело в том, что при $\alpha + \omega \geqslant 100$ апостериорная плотность сосредоточивается в области, прилегающей к единице, так что ее значения вне промежутка $[0{,}9;\ 1]$ пренебрежимо малы, а внутри области указанное приближение дает удовлетворительные для практической точности результаты. Окончательно получим

$$\hat{R}^* \approx \frac{B(\alpha+\omega+1,\beta+d)}{B(\alpha+\omega,\beta+d)} = \frac{\alpha+\omega}{\alpha+\beta+d+\omega},$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} \approx \frac{(\alpha+\omega)(\beta+d)}{(\alpha+\beta+d+\omega)^2(\alpha+\beta+d+\omega+1)}. \tag{3.48}$$

Отметим, что полученные выражения дают точные значения искомых оценок при $d=0$.

§ 3.4. Оценки надежности при линейной функции интенсивности

Развитием предыдущей модели является случай линейно возрастающей функции интенсивности $\lambda(t)$, соответствующей ухудшению условий эксплуатации или изнашиванию изделия [47]. Пусть по-прежнему необходимо оценить ВБР $R = P\{\xi > t_0\}$. Интенсивность отказа в течение промежутка времени $[0, t_0]$ изменяется линейно, причем ухудшается в z раз:

$$z = \frac{\lambda(t_0)}{\lambda(0)} \geqslant 1. \tag{3.49}$$

Величину z назовем степенью деградации функции интенсивности. Понятно, что при $z=1$ имеем прежний случай $\lambda(t) = \mathrm{const}$.

Представим $\lambda(t)$ в виде следующей линейной функции:

$$\lambda(t) = 2\alpha t + \lambda_0,$$

где α и λ_0 – параметры, с помощью которых можно задать любую линейную функцию. Функции $\lambda(t)$ соответствует п.р. времени безотказной работы

$$f(t) = f(t;\alpha,\lambda_0) = (2\alpha t + \lambda_0)\exp[-(\alpha t^2 + \lambda_0 t)] \tag{3.50}$$

и ф.р.

$$F(t) = F(t;\alpha,\lambda_0) = 1 - \exp[-(\alpha t^2 + \lambda_0 t)]. \tag{3.51}$$

Оцениваемый показатель надежности запишется в виде

$$R = R(\alpha,\lambda_0) = \exp(-\alpha t_0^2 + \lambda_0 t_0). \tag{3.52}$$

Данная параметризация естественным образом обобщает предыдущую модель. Тем не менее параметры функций (3.50) – (3.52) не имеют достаточно четкой технической интерпретации. Из практических соображений удобнее использовать параметры r и z, где r совпадает с оцениваемой ВБР, а параметр z был ранее введен с помощью формулы (3.49). Разработчику, как отмечалось выше, обычно проще формировать априорное представление непосредственно о показателе надежности; параметр z также имеет ясную трактовку: он показывает, во сколько раз возросла интенсивность отказов в промежутке $[0, t_0]$. Удобно также, что r и z являются безразмерными. В дальнейшем будем считать, что задано априорное распределение $h(r,z)$, $(r,z) \in \Omega$, где Ω – известная область параметров.

Решая совместно (3.49) и (3.52), получим

$$\alpha = -\frac{\ln r}{t_0^2} \cdot \frac{z-1}{z+1}, \qquad \lambda_0 = -\frac{2\ln r}{t_0(z+1)}. \tag{3.53}$$

Появляется возможность выразить п.р. $f(t)$ и ф.р. $F(t)$ через безразмерные параметры r и z:

$$f(t) = f(t; r, z) = -\frac{2\ln r}{(z+1)t_0}\left[(z-1)\frac{t}{t_0} + 1\right] r^{\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{t^2}{t_0^2} + \frac{2}{z+1}\cdot\frac{t}{t_0}},$$

$$F(t) = F(t; r, z) = 1 - r^{\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{t^2}{t_0^2} + \frac{2}{z+1}\cdot\frac{t}{t_0}}.$$

Подставляя полученные выражения в (3.20), после некоторых преобразований получим функцию правдоподобия для модели надежности с линейной функцией интенсивности и НЦ-плана, приводящего к выборке τ:

$$l(r, z \mid \tau) = c(\tau)\left(-\frac{2}{t_0}\right)^d a(z) r^{b(z)} \ln^d r, \tag{3.54}$$

где

$$a(z) = \frac{1}{(z+1)^d} \prod_{i=1}^{d} [(z-1)\nu_i^* + 1],$$

$$b(z) = \frac{1}{z+1}[(z-1)\kappa + 2\omega],$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} \nu_i^* + \sum_{j=1}^{k} \nu_j, \qquad \kappa = \sum_{i=1}^{d} \nu_i^{*2} + \sum_{j=1}^{k} \nu_j^2,$$

$$\nu_i^* = \frac{t_i^*}{t_0}, \qquad \nu_j = \frac{t_j}{t_0}.$$

Величины ν_i^* и ν_j имеют смысл соответственно приведенных безразмерных моментов отказа и цензурирования. Как видно из выражения (3.54), вместо вектора τ можно использовать объединение векторов ν^* и ν, составленных из безразмерных результатов испытаний. Достаточную статистику в данном случае образуют величины $\{\nu_1^*, \nu_2^*, \ldots, \nu_d^*, d, \omega, \kappa\}$.

В соответствии с теоремой Байеса для апостериорной плотности параметров r и z будем иметь

$$\hbar(r, z \mid \tau) \backsim h(r) a(r) r^{b(z)} \ln^d r. \tag{3.55}$$

Если значение показателя деградации z указывается точно, то задается априорное распределение только параметра r. В этом случае для апостериорной п.р. параметра r получим

$$\hbar(r \mid \tau) \backsim h(r) r^b \ln^d r, \tag{3.56}$$

причем при $z = 1$ имеем $b = \omega$, и соотношение (3.56) совпадает с (3.26), полученным для случая $\lambda = \text{const}$. Достаточная статистика для случая, определяемого соотношением (3.56), лаконичней по сравнению с общим случаем и исчерпывается тремя величинами $\{d, \omega, \kappa\}$.

Рассмотрим распространенную на практике ситуацию, когда разработчик может гарантировать некоторый промежуток $[R_н, R_в]$ для оцениваемого показателя надежности R еще до начала испытаний. В соответствии с этим будем считать априори, что показатель R содержится в $[R_н, R_в]$, а коэффициент деградации интенсивности отказов z принадлежит промежутку $[z_1, z_2]$. Примем для r и z равномерные априорные распределения соответственно в промежутках $[R_н, R_в]$ и $[z_1, z_2]$, причем будем полагать априорную независимость r и z. Общие выражения для байесовской оценки $\hat{R}^*$ и апостериорной дисперсии $\sigma^2_{\hat{R}^*}$ имеют вид

$$\hat{R}^* = \frac{1}{\beta} \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{R_н}^{R_в} r a(z) r^{b(z)} \ln^d r \, dr,$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{1}{\beta} \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{R_н}^{R_в} r^2 a(z) r^{b(z)} \ln^d r \, dr - \hat{R}^{*2},$$

где

$$\beta = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{R_н}^{R_в} a(z) r^{b(z)} \ln^d r \, dr.$$

Если воспользоваться интегралом (3.32), то полученные выражения удается свести к одномерным интегралам, для которых можно использовать хорошо разработанные процедуры численного интегрирования. Образуем функцию

$$I_L(z, R_н, R_в, m, d) = \int_{R_н}^{R_в} x^{b(z)+m} \ln^d x \, dx =$$

$$= I_E(R_в, b(z) + m, d) - I_E(R_н, b(z) + m, d) \tag{3.57}$$

и выразим через нее искомые оценки:

$$\hat{R}^* = \frac{1}{\beta} \int_{z_1}^{z_2} a(z) I_L(z, R_н, R_в, 1, d) dz, \tag{3.58}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{1}{\beta} \int_{z_1}^{z_2} a(z) I_L(z, R_н, R_в, 2, d) dz - \hat{R}^{*2},$$

где

$$\beta = \int_{z_1}^{z_2} a(z) I_L(z, R_н, R_в, 0, d) dz.$$

Для определения байесовской нижней доверительной границы необходимо решить уравнение

$$\int_{z_1}^{z_2} a(z) I_L(z, \underline{R}^*_\gamma, R_в, 0, d) dz = \gamma\beta. \tag{3.59}$$

Проведение расчета с помощью выражений (3.57) – (3.59) предполагает применение численных методов. Все рассмотренные ниже примеры решены с помощью специально разработанной программы на языке Фортран-IV.

Пример 3.1. В процессе статистических испытаний зафиксированы следующие относительные наработки: $\nu^* = (1{,}3)$, $\nu = (2{,}4;\ 3{,}1;\ 2{,}8;\ 1{,}6;\ 2{,}4;\ 3{,}4;\ 4{,}2;\ 1{,}8;\ 2{,}5;\ 3{,}0)$, т.е. одно испытание завершилось отказом, а десять – приостановками. Из априорных соображений известно, что показатель надежности не ниже 0,9, а коэффициент деградации лежит в промежутке $[1{,}0;\ 2{,}0]$. Расчеты с помощью соотношений (3.57)–(3.59) позволили получить следующие значения апостериорных оценок: $\hat{R}^* = 0{,}9576$, $\sigma_{\hat{R}^*} = 0{,}0242$, нижняя доверительная граница (при $\gamma = 0{,}9$) $\underline{R}^*_{0,9} = 0{,}9216$.

Более простым в вычислительном отношении является случай фиксированного значения параметра z, соответствующий апостериорной п.р. вида (3.56). Конечные формулы для искомых оценок записываются с помощью функции (3.57) следующим образом:

$$\hat{R}^* = \frac{I_L(z, R_{\text{н}}, R_{\text{в}}, 1, d)}{I_L(z, R_{\text{н}}, R_{\text{в}}, 0, d)},$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{I_L(z, R_{\text{н}}, R_{\text{в}}, 2, d)}{I_L(z, R_{\text{н}}, R_{\text{в}}, 0, d)} - \hat{R}^{*2}. \tag{3.60}$$

Значение $\underline{R}^*_\gamma$ определяется из уравнения

$$I_L(z, \underline{R}^*_\gamma, R_{\text{в}}, 0, d) - \gamma I_L(z, R_{\text{н}}, R_{\text{в}}, 0, d) = 0. \tag{3.61}$$

Пример 3.2. Исходные данные настоящего примера отличаются от предыдущего лишь тем, что известно точное значение коэффициента деградации $z = 2$. В результате расчетов по формулам (3.60), (3.61) получено: $\hat{R}^* = 0{,}9729$, $\sigma_{\hat{R}^*} = 0{,}0181$, $\underline{R}^*_{0,9} = 0{,}9476$.

С целью изучения особенностей полученных байесовских оценок проводились массовые расчеты по формулам (3.60), (3.61). На рис. 3.2–3.4 представлены зависимости изменения соответственно $\hat{R}^*$, $\sigma_{\hat{R}^*}$ и $\underline{R}^*_\gamma$ от значений нижней границы промежутка неопределенности $R_{\text{н}}$ (при $R_{\text{в}} = 1$) и коэффициента деградации z. Расчеты проводились с помощью специального алгоритма для трех выборок:

выборка № 1: $\nu^* = (0{,}80;\ 0{,}85)$; $\nu = (1{,}10;\ 0{,}95;\ 0{,}90;\ 1{,}15;\ 0{,}75;\ 0{,}90;\ 0{,}85;\ 1{,}20;\ 1{,}15;\ 1{,}20)$;

выборка № 2: $\nu^* = (1{,}10;\ 1{,}80)$; $\nu = (1{,}30;\ 1{,}20;\ 1{,}10;\ 0{,}30;\ 1{,}15;\ 1{,}40;\ 1{,}20;\ 1{,}70;\ 1{,}50;\ 2{,}00)$;

выборка № 3: $\nu^* = (1{,}30)$; $\nu = (2{,}40;\ 3{,}10;\ 2{,}80;\ 1{,}60;\ 2{,}40;\ 3{,}40;\ 4{,}20;\ 1{,}80;\ 2{,}50;\ 3{,}00)$.

Порядок увеличения номера выборок соответствует улучшению результатов эксперимента.

Сплошной линией на графиках рис. 3.2–3.4 представлены оценки ВБР, полученные для первой выборки, пунктирной линией – для второй выборки, штрих-пунктиром – для третьей. Анализ графиков позволяет сделать следующие выводы:

1) с возрастанием номера выборки оценки показателя надежности улучшаются;

Рис. 3.2. Точечная оценка ВБР

Рис. 3.3. Апостериорное среднее квадратическое отклонение ВБР

Рис. 3.4. Байесовская нижняя доверительная граница ВБР

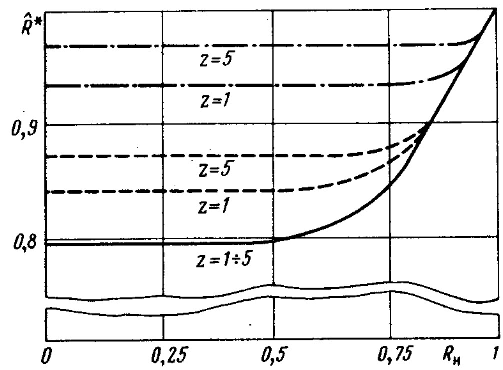


Рис. 3.2

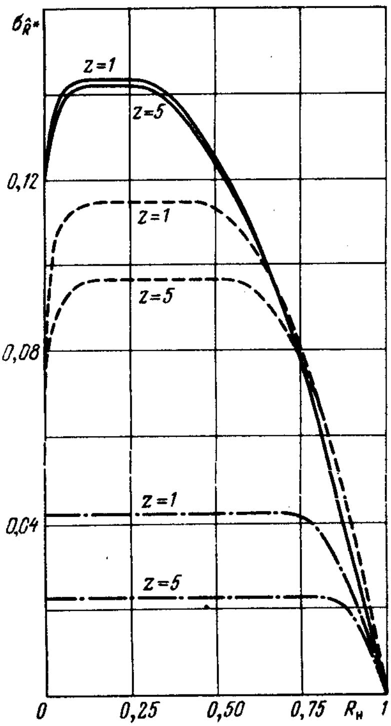


Рис. 3.3

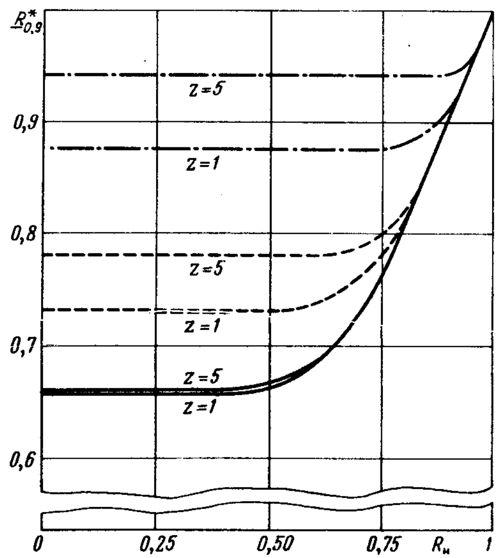


Рис. 3.4

2) для каждой выборки существует свой порог нечувствительности к изменению $R_н$, причем с улучшением результатов эксперимента этот порог сдвигается вправо;

3) с увеличением значения коэффициента деградации z апостериорные оценки улучшаются при одних и тех же выборках.

Последний вывод логически интерпретируется следующим образом. Пусть два изделия с коэффициентами деградации z_1 и z_2 $(z_1 > z_2)$ при испытаниях дают одни и те же результаты. Ясно, что более надежным будет то изделие, коэффициент деградации которого выше.

§ 3.5. Оценивание показателя надежности для распределения Вейбулла времени безотказной работы

Рассмотрим случай, когда время безотказной работы ξ подчиняется распределению Вейбулла с плотностью

$$f(t;\lambda,\alpha)=\lambda\alpha t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^{\alpha}}. \tag{3.62}$$

и ф.р.

$$F(t;\lambda,\alpha)=1-\exp(-\lambda t^{\alpha}). \tag{3.63}$$

Тогда оцениваемый показатель надежности за время t_0 вычисляется по формуле

$$R=R(\lambda,\alpha)=\exp(-\lambda t_0^{\alpha}). \tag{3.64}$$

Выражение для функции правдоподобия при реализации НЦ-плана получается после подстановки зависимостей (3.62), (3.63) в соотношение (3.20):

$$l(\lambda,\alpha\mid\tau)=c(\tau)\lambda^d\alpha^d\left(\prod_{i=1}^{d}t_i^*\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda\omega t_0^{\alpha}}, \tag{3.65}$$

где

$$\omega=\omega(\alpha)=\sum_{i=1}^{d}(v_i^*)^{\alpha}+\sum_{j=1}^{k}v_j^{\alpha},\qquad v_i^*=\frac{t_i^*}{t_0},\qquad v_j=\frac{t_j}{t_0}.$$

Из соображений, аналогичных рассмотренным в предыдущем параграфе, принятая параметризация является неудобной в практических ситуациях. Поэтому вместо параметра λ будем использовать ранее введенный параметр r. Выразим функцию правдоподобия через r и α. Для этого воспользуемся зависимостью (3.64), из которой следует

$$\lambda=-\frac{1}{t_0^{\alpha}}\ln r. \tag{3.66}$$

Подставив (3.66) в (3.65), получим

$$l(r,\alpha\mid\tau)=c(\tau)\left(-\frac{1}{t_0}\right)^d\alpha^d\mu^{\alpha-1}r^{\omega}\ln^d r, \tag{3.67}$$

где

$$\mu=\prod_{i=1}^{d}v_i^*.$$

Отметим, что при $\alpha=1$ модель распределения Вейбулла преобразуется в экспоненциальную и функция правдоподобия (3.67) совпадает с (3.25).

Считая, что априорно задана п.р. $h(r,\alpha)$, используя теорему Байеса, получим

$$\hbar(r,\alpha\mid\tau)\backsim h(r,\alpha)\alpha^d\mu^{\alpha-1}r^{\omega}\ln^d r. \tag{3.68}$$

Зависимость (3.68) является исходной для получения любых оценок показателя надежности R. В частности, при равномерных априорных распределениях параметров r и α соответственно в промежутках $[R_{\text{н}},R_{\text{в}}]$ и $[\alpha_1,\alpha_2]$ получим

$$\hbar(r,\alpha\mid\tau)\backsim\alpha^d\mu^{\alpha-1}r^{\omega}\ln^d r,\qquad r\in[R_{\text{н}},R_{\text{в}}],\qquad \alpha\in[\alpha_1,\alpha_2],$$

откуда

$$\hat{R}^* = \frac{1}{\beta} \int\limits_{R_н}^{R_в} dr \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha^d \mu^{\alpha-1} r^{\omega+1} \ln^d r \, d\alpha,$$

где

$$\beta = \int\limits_{R_н}^{R_в} dr \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha^d \mu^{\alpha-1} r^{\omega} \ln^d r \, d\alpha.$$

Расчет с помощью полученных выражений может быть упрощен, если воспользоваться интегралом (3.32) и образовать функцию

$$I_W(\alpha, R_н, R_в, m, d) = \\ = I_E(R_в, \omega(\alpha)+m, d) - I_E(R_н, \omega(\alpha)+m, d). \qquad (3.69)$$

После весьма громоздких преобразований получим следующие окончательные выражения для оценок показателя R:

$$\hat{R}^* = \frac{1}{\beta} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^d \mu^{x-1} I_W(x, R_н, R_в, 1, d) dx, \qquad (3.70)$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{1}{\beta} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^d \mu^{x-1} I_W(x, R_н, R_в, 2, d) dx - \hat{R}^{*2}, \qquad (3.71)$$

где

$$\beta = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^d \mu^{x-1} I_W(x, R_н, R_в, 0, d) dx. \qquad (3.72)$$

Уравнение для определения байесовской нижней доверительной границы имеет вид

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^d \mu^{x-1} I_W(x, \underline{R}^*_\gamma, R_в, 0, d) dx - \beta\gamma = 0. \qquad (3.73)$$

Проведение расчетов с помощью формул (3.70) – (3.73) предполагает использование алгоритмических численных методов интегрирования и решения трансцендентных уравнений.

Пример 3.3. Результатами испытаний изделия являются следующие значения относительных наработок: $\nu^* = (2{,}7)$; $\nu = (1{,}9;\ 3{,}5;\ 2{,}4;\ 3{,}1;\ 2{,}8;\ 1{,}6;\ 2{,}4;\ 3{,}4;\ 4{,}2;\ 1{,}8;\ 2{,}5;\ 3{,}0)$. Априорно известно, что ВБР R равномерно распределена в промежутке $[0{,}9;\ 1]$, а параметр α – в промежутке $[1;\ 1{,}8]$. Расчет по формулам (3.70) – (3.73) при $\gamma = 0{,}9$ позволил получить $\hat{R}^* = 0{,}9666$, $\sigma_{\hat{R}^*} = 0{,}0202$, $\underline{R}^*_{0,9} = 0{,}9291$.

В том случае, когда значение параметра α задано точно, а не в байесовском смысле, формулы для расчета оценок ВБР существенно упрощаются. Так, для апостериорной п.р. параметра r будет справедливо соотношение

$$\hbar(r \mid \tau) \backsim h(r) r^{\omega} \ln^d r.$$

Выражения для байесовских оценок ВБР легко могут быть получены из соотношений (3.70) – (3.73), если их подынтегральные функции умножить на дельта-функцию, принимающую значения во всех точках, кроме заданного значения α. Используя фильтрующее свойство дельта-функции, получим

$$\hat{R}^* = \frac{I_W(\alpha, R_{\text{н}}, R_{\text{в}}, 1, d)}{I_W(\alpha, R_{\text{н}}, R_{\text{в}}, 0, d)}, \tag{3.74}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{I_W(\alpha, R_{\text{н}}, R_{\text{в}}, 2, d)}{I_W(\alpha, R_{\text{н}}, R_{\text{в}}, 0, d)} - \hat{R}^{*2}. \tag{3.75}$$

Уравнение для $\underline{R}^*_\gamma$ имеет следующий вид:

$$I_W(\alpha, \underline{R}^*_\gamma, R_{\text{в}}, 0, d) - \gamma I_W(\alpha, R_{\text{н}}, R_{\text{в}}, 0, d) = 0. \tag{3.76}$$

Пример 3.4. Изделие было испытано в одинаковых условиях 13 раз; относительные наработки, зафиксированные в опыте, совпадают с исходными данными примера 3.3. Априорно ВБР R распределена равномерно в промежутке $[0{,}9;\ 1]$. Значение параметра α задано точно: $\alpha = 1{,}8$. В результате расчетов по формулам (3.74)–(3.76) получено $\hat{R}^* = 0{,}9766$, $\sigma_{\hat{R}^*} = 0{,}0163$, $\underline{R}^*_{0,9} = 0{,}9546$.

Проведение многочисленных расчетов по формулам (3.70)–(3.76), в частности, для выборок № 1, 2, 3, использованных в предыдущем параграфе, позволило выявить точно такие же закономерности для оценок ВБР, как и в случае линейно возрастающей функции интенсивности.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим модель распределения Вейбулла применительно к широко распространенной на практике биномиальной схеме испытаний. Данная схема может быть сведена к НЦ-плану, если положить, что все полученные в опыте данные совпадают с требуемым временем работы t_0: $t_i^* = t_0$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$, $t_j = t_0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Для апостериорной п.р. имеет место соотношение

$$\hbar(r, \alpha \mid \tau) \propto h(r, \alpha)\alpha^d r^n \ln^d r.$$

Следуя общей схеме байесовской процедуры, для случая априорно независимых параметров α и r получим

$$\hat{R}^* = \frac{\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha^d h(\alpha)d\alpha \int\limits_{R_{\text{н}}}^{R_{\text{в}}} r h(r) r^n \ln^d r\, dr}{\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha^d h(\alpha)d\alpha \int\limits_{R_{\text{н}}}^{R_{\text{в}}} h(r) r^n \ln^d r\, dr} = \frac{\int\limits_{R_{\text{н}}}^{R_{\text{в}}} r^{n+1} h(r) \ln^d r\, dr}{\int\limits_{R_{\text{н}}}^{R_{\text{в}}} r^n h(r) \ln^d r\, dr}, \tag{3.77}$$

т.е. байесовская апостериорная оценка ВБР не зависит от интервала значений параметра α. Конечные выражения для байесовских оценок при равномерном $h(r)$ в промежутке $[R_{\text{н}}, R_{\text{в}}]$ совпадают с выражениями (3.74)–(3.76), если в последние подставить $\omega = n$.

Аналогичный вывод можно сделать и для рассмотренной в предыдущем параграфе модели с линейно возрастающей функцией интенсивности. В самом деле, из выражений (3.54) и (3.55) при $\nu_i^* = \nu_j = 1$ и априорно независимых параметрах r и z следует, что

$$\hbar(r, z \mid \tau) \propto h(z) \left(\frac{z}{z+1}\right)^d h(r) r^n \ln^d r,$$

т.е. апостериорная плотность представима в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит соответственно от z и r. Следовательно, для байесовской точечной оценки ВБР будет справедливо соотношение (3.77).

Обобщение рассмотренных особенностей позволяет сделать вывод: байесовские оценки для биномиальной схемы испытаний являются непараметрическими для класса всех моделей с линейными и степенными (вида t^{α}) функциями интенсивности, если параметры модели априорно независимы.

§ 3.6. Байесовская оценка вероятности безотказной работы при форсированных испытаниях

В настоящее время при экспериментальной отработке разнообразных технических устройств используются методы форсированных испытаний. Современное состояние теории форсированных испытаний достаточно подробно изложено в [22]. Сущность используемых методов состоит в сокращении продолжительности испытаний благодаря увеличению жесткости режима. В реальных условиях часто не удается установить однозначную связь между режимом испытания и характеристикой надежности. Кроме того, режим может носить случайный характер. В подобной ситуации полезным может оказаться использование байесовского подхода, позволяющего в условиях неопределенности принимать решения, наилучшие в смысле минимума некоторой функции потерь. Возможность решения подобных задач продемонстрирована в работе [200]. Недостатком этой работы является неудобный для практического применения способ представления априорной информации.

Ниже излагается предложенная в [51] процедура оценки вероятности безотказной работы изделия, испытания которого проводятся по схеме ступенчатого нагружения [22]. Особенностью процедуры является предположение о случайном характере режимов, воспроизводимых при испытаниях, и простой способ представления априорной информации.

Пусть в процессе форсированных испытаний необходимо найти оценку ВБР в течение некоторого времени t: $R = R(t) = P\{\xi > t\}$. Изделие работает в некотором номинальном режиме ϵ_0. Поскольку испытания будут проводиться также в утяжеленных режимах, выражение для $R(t)$ перепишем в зависимости от режима ϵ_0:

$$R = R(t;\epsilon_0) = P\{\xi(\epsilon_0) > t\}, \tag{3.78}$$

где $\xi(\epsilon_0)$ – случайная продолжительность безотказной работы в номинальном режиме. Здесь и в дальнейшем под режимом понимается совокупность технических параметров, характеризующих условия и характер функционирования изделия. Задача оценки показателя (3.78) решается при следующих допущениях:

(1) В испытаниях реализуется схема многоступенчатого нагружения, существо которой заключается в следующем. Задаются некоторой наибольшей продолжительностью испытаний T и промежуток $[0, T]$ разбивают на $m + 1$ непересекающихся промежутков $\mu_j = [s_j, s_{j+1})$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$. Это разбиение устанавливается на стадии предварительных исследова-

тельских испытаний. Каждый опытный образец независимо от других работает в номинальном режиме ϵ_0. Затем, если отказ не наступает, происходит переключение на более жесткий режим ϵ_1 и т.д. Каждому промежутку μ_j соответствует свой режим ϵ_j. Существенно, что указанные режимы фиксируются неоднозначно. Добиваются лишь того, чтобы каждый последующий режим был более жестким по сравнению с предыдущим. Для описания этого факта будем использовать обозначение $\epsilon_j \succ \epsilon_{j-1}$. Предполагается, что испытания могут завершаться отказами или приостановками, которые в свою очередь могут быть случайными или детерминированными через заданное время T. По формальным характеристикам описанные испытания сводятся к НЦ-плану, в результате которого наблюдается выборка $\tau = \{ \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{t} \}$, где $\boldsymbol{t}^* = (t_1^*, t_2^*, \ldots, t_d^*)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $d + k = n$.

(2) Функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ предполагается кусочно-постоянной таким образом, что $\lambda(t) = \lambda_j = \text{const}$ при $t \in \mu_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Другими словами, интенсивность отказа зависит от режима испытания: $\lambda(t) = \lambda(\epsilon(t))$. Будем считать, что более жесткие условия испытаний однозначно приводят к увеличению интенсивности отказов, т.е. из условия $\epsilon_j \succ \epsilon_{j-1}$ следует $\lambda(\epsilon_j) \geqslant \lambda(\epsilon_{j-1})$, или $\lambda_j \geqslant \lambda_{j-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

(3) До начала испытаний известно априорное распределение $h(r_0)$ для ВБР в некоторый момент времени t_0. В дальнейшем в качестве основного используется равномерное априорное распределение показателя $R_0 = R(t_0, \epsilon_0)$ в промежутке $[R_н, R_в]$.

Сформулированные предположения позволяют решать задачу оценки показателя $R = R(t, \epsilon_0)$ в параметрической байесовской постановке. Параметризация вводится с помощью вектора $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, число компонент которого совпадает с количеством режимов. Решение задачи будет следовать стандартной байесовской процедуре, состоящей в записи априорной плотности распределения указанного вектора $h(\lambda)$, нахождении функции правдоподобия $l(\lambda \mid \tau)$ и апостериорного распределения $\hbar(\lambda \mid \tau)$, с помощью которого определяются окончательные оценки $\hat{R}^*$, $\sigma_{\hat{R}^*}$, $\underline{R}_\gamma^*$.

Плотность априорного распределения $h(\lambda)$ будем искать в виде

$$h(\lambda) = h_0(\lambda_0) h_1(\lambda_1 \mid \lambda_0) \ldots h_m(\lambda_m \mid \lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}), \tag{3.79}$$

где $h_j(\lambda_j \mid \lambda_0, \ldots, \lambda_{j-1})$ – условная априорная п.р. параметра λ_j при условии $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}$. Маргинальную априорную п.р. $h_0(\lambda_0)$ определим, используя равномерное априорное распределение показателя $R_0 \in [R_н, R_в]$ и зависимость $R_0 = \exp(-\lambda_0 t_0)$:

$$h_0(\lambda_0) = \frac{t_0}{R_в - R_н} e^{-\lambda_0 t_0}, \quad \lambda_0' \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_0'', \tag{3.80}$$

где $\lambda_0' = -\ln R_в / t_0$, $\lambda'' = -\ln R_н / t_0$.

Условную априорную п.р. $h(\lambda_j \mid \lambda_0, \ldots, \lambda_{j-1})$ установим, предположив, что каждый сомножитель априорной п.р. (3.79) принадлежит одному и тому же семейству плотностей, а именно усеченному экспоненциальному. Это предположение аналогично другому, имеющему более конкретный физический смысл: ВБР в момент времени t_0 для режима ϵ_j не превосходит ВБР в тот же момент для режима ϵ_{j-1}, т.е. $R(t_0, \epsilon_j) \in [0, R(t_0, \epsilon_{j-1})]$ $\forall j = 1, 2, \ldots, m$. Кроме того, показатель $R(t_0, \epsilon_j)$ распределен в указанном промежутке равномерно. Используя данное предположение, нетрудно получить

$$h_j(\lambda_j \mid \lambda_0, \ldots, \lambda_{j-1}) = t_0 \exp[-(\lambda_j - \lambda_{j-1}) t_0], \tag{3.81}$$

$$\lambda_j \geqslant \lambda_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Подставляя выражения (3.80) и (3.81) в (3.79), после очевидных преобразований получим

$$h(\lambda) = \frac{t_0^{m+1}}{R_\text{в} - R_\text{н}} e^{-\lambda_m t_0}, \qquad \lambda \in D, \tag{3.82}$$

где область D определяется системой неравенств $\lambda_0' \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_0''$, $\lambda_0 \leqslant \lambda_1$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1} \leqslant \lambda_m$. Как следует из (3.82), априорная п.р. зависит в явном виде только от параметра λ_m. Тем не менее $h(\lambda)$ является функцией всех параметров, так как эта зависимость выражена формой области D.

Для нахождения функции правдоподобия $l(\lambda \mid \tau)$ воспользуемся общим выражением (3.21), записанным через функцию интенсивности $\lambda(t)$ и функцию ресурса $\Lambda(t)$. Используя функцию

$$\rho_j(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mu_j = [s_{j-1}, s_j), \\ 0, & t \notin \mu_j, \end{cases}$$

для $\lambda(t)$ легко получить

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \rho_j(t). \tag{3.83}$$

Проинтегрировав функцию интенсивности, получим

$$\Lambda(t) = \sum_{j=0}^{m} \rho_j(t) \left[\sum_{r=0}^{j-1} \lambda_r \Delta_r + \lambda_j (t - s_j) \right]. \tag{3.84}$$

После подстановки выражений (3.83) и (3.84) в (3.21) получим

$$l(\lambda \mid \tau) = c(\tau) \prod_{i=1}^{d} \left[\sum_{j=0}^{m} \rho_j(t_i^*) \lambda_j \right] \times$$

$$\times \exp\left\{ - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \rho_j(\tau_i) \left[\sum_{r=0}^{j-1} \lambda_r \Delta_r + \lambda_j (\tau_i - s_j) \right] \right\}. \tag{3.85}$$

Преобразуем выражение (3.85) к более удобному виду и установим достаточные статистики.

Пусть m_j – количество элементов выборки τ, принадлежащих промежутку μ_j; эти элементы обозначим $\tau_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \ldots, m_j$. Будем подставлять $\tau_i^{(j)}$ последовательно в (3.84) и суммировать полученные значения по всем индексам i для всех m промежутков. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \rho_j(\tau_i) \left[\sum_{r=0}^{j-1} \lambda_r \Delta_r + \lambda_j (\tau_i - s_j) \right] = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \kappa_j, \tag{3.86}$$

где

$$\kappa_j = n_j \Delta_j + \sum_{i=1}^{m_j} (\tau_i^{(j)} - s_j),$$

$$n_j = m_{j+1} + m_{j+2} + \ldots + m_m,$$

$$j = 1, 2, \ldots, m-1, \quad n_m = 0, \quad \Delta_j = s_{j+1} - s_j.$$

Величина n_j определяет число опытных образцов, не отказавших после испытания в j-м режиме, а статистика κ_j имеет смысл суммарной наработки, зафиксированной при испытаниях в j-м режиме.

Аналогичным образом, обозначив через d_j число отказов, наблюдаемых при испытаниях в j-м режиме, нетрудно получить равенство

$$\prod_{i=1}^{d} \left[\sum_{j=0}^{m} \rho_j(t_i^*) \lambda_j \right] = \prod_{j=0}^{m} \lambda_j^{d_j}. \tag{3.87}$$

С помощью соотношений (3.86) и (3.87) выражение для функции правдоподобия (3.85) можно переписать в следующем более удобном виде:

$$l(\lambda \mid \tau) = c(\tau) \prod_{j=0}^{m} \lambda_j^{d_j} \exp\left(- \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \kappa_j\right). \tag{3.88}$$

Как видно из выражения (3.88), достаточную статистику в данном случае образуют величины $d_1, d_2, \ldots, d_m, \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_m$.

В соответствии с теоремой Байеса для апостериорной п.р. вектора λ имеем

$$\hbar(\lambda \mid \tau) \backsim \prod_{j=0}^{m} \lambda_j^{d_j} \exp\left[- \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j \kappa_j + \lambda_m (\kappa_m + t_0)\right], \quad \lambda \in D. \tag{3.89}$$

Поскольку искомый показатель $R = R(t, \epsilon_0)$ зависит только от λ_0, для получения байесовских оценок показателя R необходимо знать маргинальную апостериорную п.р. $\hbar_0(\lambda_0 \mid \tau)$. Для нахождения последней проинтегрируем соотношение (3.89) по параметрам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, причем область интегрирования обусловливается областью D,

$$\hbar_0(\lambda_0 \mid \tau) \backsim \int_{\lambda_0}^{\infty} \int_{\lambda_1}^{\infty} \ldots \int_{\lambda_{m-1}}^{\infty} \hbar(\lambda \mid \tau) d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_m.$$

После интегрирования и громоздких преобразований удается получить следующее, по-видимому, наиболее простое соотношение для $\hbar_0(\lambda_0 \mid \tau)$:

$$\hbar_0(\lambda_0 \mid \tau) \backsim \lambda_0^{d_0} = S_m(\lambda_0) \exp\left[-\lambda_0 (X_0 + t_0)\right], \tag{3.90}$$

где

$$S_m(\lambda_0) = \sum_{i_m=0}^{D_m - N_m} \ldots \sum_{i_1=0}^{D_1 - N_1} \lambda_0^{D_1 - N_0} \prod_{j=1}^{m} \frac{(D_j - N_j)^{(i_j)}}{(X_j + t_0)^{i_j + 1}},$$

$$X_j = \sum_{i=0}^{m} \kappa_i - \sum_{i=0}^{j-1} \kappa_i, \quad D_j = d - \sum_{i=0}^{j-1} d_i, \quad N_j = n - \sum_{l=0}^{j-1} i_l,$$

символ $k^{(l)}$ обозначает операцию $k!/(k-l)!$.

Оценки $\hat{R}^*$ и $\sigma_{\hat{R}^*}$ определим, исходя из того, что $R = \exp(-\lambda(\epsilon_0)t) = \exp(-\lambda_0 t)$, используя квадратичную функцию потерь. Исходными для определения искомых оценок являются выражения, следующие из (3.7) и (3.8):

$$\hat{R}^* = \int_{\lambda_0'}^{\lambda_0''} e^{-\lambda_0 t} \hbar_0(\lambda_0 \mid \tau)\, d\lambda_0,$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \int_{\lambda_0'}^{\lambda_0''} e^{-2\lambda_0 t} \hbar_0(\lambda_0 \mid \tau)\, d\lambda_0 - \hat{R}^{*2},$$

где $\lambda'_0 = -\ln R_{\text{в}}/t_0$, $\lambda''_0 = -\ln R_{\text{н}}/t_0$.

В конечном виде $\hat{R}^*$ и $\sigma_{\hat{R}^*}$ могут быть записаны с помощью функции приведенного аргумента $v = t/t_0$ следующего вида:

$$H_{ml}(v) = \sum_{i_m=0}^{D_m - N_m} \overset{(m+1)}{\dots} \sum_{i_0=0}^{D_0 - N_0} \frac{(D_0 - N_0)^{(i_0)}}{(\omega_0 + lv + 1)^{i_0+1}} \prod_{s=1}^{m} \frac{(D_s - N_s)^{(i_s)}}{(\omega_s + 1)^{i_s+1}} \times$$

$$\times (R_{\text{в}}^{\omega_0 + lv + 1} |\ln R_{\text{в}}|^{d-i} - R_{\text{н}}^{\omega_0 + lv + 1} |\ln R_{\text{н}}|^{d-i}), \quad l = 0, 1, 2, \tag{3.91}$$

где

$$\omega_s = \frac{X_s}{t_0}, \qquad i = i_0 + i_1 + \dots + i_m.$$

Теперь

$$\hat{R}^* = \frac{H_{m1}(v)}{H_{m0}(v)}, \quad \sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{H_{m2}(v)}{H_{m0}(v)} - \hat{R}^{*2}. \tag{3.92}$$

Вычисление байесовской нижней γ-доверительной границы предполагает решение уравнения относительно x:

$$\int_{\lambda_0'}^{x} \hbar_0(\lambda_0 \mid \tau)\, d\lambda_0 = \gamma,$$

после чего $\underline{R}^*_\gamma = \exp(-xt)$. Конечный вид уравнения для $\underline{R}^*_\gamma$ следующий:

$$\sum_{i_m=0}^{D_m - N_m} \overset{(m+1)}{\dots} \sum_{i_0=0}^{D_0 - N_0} \prod_{s=0}^{m} \frac{(D_s - N_s)^{(i_s)}}{(\omega_s + 1)^{i_s+1}} \cdot (R_{\text{в}}^{\omega_0+1} |\ln R_{\text{в}}|^{d-i} -$$

$$- \underline{R}^{*\frac{\omega_0+1}{v}}_\gamma |\ln \underline{R}^{*\frac{1}{v}}_\gamma|^{d-i}) - \gamma H_{m0}(v) = 0. \tag{3.93}$$

Судя по выражениям (3.91)–(3.93), байесовскую достаточную статистику образует совокупность чисел отказов $d_0, d_1, \dots, d_m$, наблюдаемых в промежутках с неизменным режимом, и безразмерных параметров $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$. Параметр ω_j имеет смысл относительной (по отношению к t_0) суммарной наработки при испытаниях, зафиксированной в промежутках $\mu_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_m$.

Рассмотрим редукцию формул (3.91)–(3.93) для метода "доламывания" [22], который является частным случаем метода ступенчатых нагружений и характеризуется двумя режимами: номинальным и ужесточенным. В выражениях (3.91)–(3.93) необходимо положить $m = 1$, что приводит к существенно более простому вычислительному алгоритму. В частности, функция $H_{1l}(v)$ имеет вид

$$H_{1l}(v) = \sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d-i} \frac{(d-i)^{(j)}}{(\omega_0 + lv + 1)^{j+1}} \cdot \frac{d_1^{(i)}}{(\omega_1 + 1)^{i+1}} \times$$

$$\times (R_{\text{в}}^{\omega_0 + lv + 1} |\ln R_{\text{в}}|^{d-i-j} - R_{\text{н}}^{\omega_0 + lv + 1} |\ln R_{\text{н}}|^{d-i-j}). \tag{3.94}$$

Уравнение для определенности $\underline{R}_\gamma^*$ при $m = 1$ также существенно проще:

$$\sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d-i} \frac{(d-i)^{(j)}}{(\omega_0 + 1)^{j+1}} \cdot \frac{d_1^{(i)}}{(\omega_1 + 1)^{i+1}} (R_{\text{в}}^{\omega_0 + 1} |\ln R_{\text{в}}|^{d-i-j} -$$

$$- \underline{R}_\gamma^{*\frac{\omega_0 + 1}{v}} |\ln \underline{R}_\gamma^{*\frac{1}{v}}|^{d-i-j}) - \gamma H_{10}(v) = 0. \tag{3.95}$$

Пример 3.5. Испытаниям подвергают 10 экземпляров изделий. Из априорных соображений известно, что ВБР изделия при работе в течение 100 ч не менее 0,8. Необходимо оценить ВБР изделия при работе в номинальном режиме в течение 140 ч. Испытания проводятся по схеме "доламывания", переключение режима производится после 100 ч работы. Предельная продолжительность испытаний 160 ч. В результате испытаний зафиксированы следующие наработки (в часах): 135, 142, 148, 135, 140, 150, 139, 144, 148, 136, причем каждое испытание закончилось отказом. Расчеты оценок ВБР проводились с помощью специально разработанного алгоритма по формулам (3.94), (3.95) и (3.92). В результате расчетов получены следующие оценки: $\hat{R}^* = 0{,}9055$, $\sigma_{\hat{R}^*} = 0{,}07054$, $\underline{R}_{0,9}^* = 0{,}8379$.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ БАЙЕСОВСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

§ 4.1. Непараметрические байесовские оценки, основанные на процессах Дирихле

Для решения многих непараметрических задач в течение долгого времени безуспешно пытались использовать байесовский подход к статистическим выводам. Это объясняется главным образом трудностью нахождения работоспособного априорного распределения, заданного на параметрическом пространстве, которое в непараметрических задачах выбирается в виде набора вероятностных распределений на данном пространстве выборок. Одной из первых успешных попыток в области непараметрического байесовского оценивания явилась работа Фергюсона [125]. В этой работе Фергюсон прежде всего сформулировал требования к априорному распределению:

(1) носитель априорного распределения должен быть велик по отношению к некоторой подходящей топологии пространства распределений вероятностей, заданных на пространстве выборок;

(2) апостериорное распределение при заданной выборке наблюдений из истинного распределения вероятностей должно по возможности иметь простой аналитический вид.

Эти свойства являются антагонистичными в том смысле, что одно из них может быть получено за счет другого. В работе [125] предлагается класс априорных распределений, названных *процессами Дирихле,* которые в широких предпосылках обладают первым свойством и для которых имеет место второе свойство. Выбор именно процессов Дирихле продиктован тем обстоятельством, что апостериорное распределение случайной вероятностной меры также является процессом Дирихле. Дополнительным аргументом в пользу применения распределения Дирихле в практических приложениях является тот факт, что оно хорошо аппроксимирует многие параметрические семейства распределений. Этот вопрос специально исследовался Далалом [100] и Халлом [101]. В настоящем параграфе излагаются основные результаты в области непараметрического байесовского оценивания, основанные на использовании процессов Дирихле. Это распределение появляется в задачах, использующих порядковые статистики [60]. В параметрической байесовской теории оно используется как сопряженное с ядром выборочного правдоподобия для параметров мультиномиального распределения [15]. Следуя Фергюсону [125], дадим определение распределения Дирихле и приведем важные для практического анализа свойства.

4.1.1. Определение процесса Дирихле. Обозначим через $\Gamma(\alpha, \beta)$ гамма-распределение с параметром $\alpha \geqslant 0$ и скалярным параметром $\beta > 0$. При $\alpha > 0$ это распределение имеет плотность

$$f(z; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} e^{-z/\beta} z^{\alpha-1} I_{(0,\infty)}(z), \tag{4.1}$$

где $I_S(z)$ – индикаторная функция множества S, тождественно равная единице для всех $z \in S$ и нулю в противном случае.

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_k$ – независимые случайные величины, $z_j \sim \Gamma(\alpha_j, 1)$, где $\alpha_j \geqslant 0$ для всех j и $\alpha_j > 0$ для некоторых j. Распределение Дирихле с параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, которое в дальнейшем обозначается $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, определяется как распределение величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, связанных с z_j следующим образом:

$$Y_j = z_j / \sum_{i=1}^{k} z_i, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Заметим, что если какое-либо любое $\alpha_j = 0$, то соответствующее Y_j также вырождается в нуль. Если же $\alpha_j > 0$ для всех j, то $(k-1)$-мерное распределение величин $Y_1, \ldots, Y_{k-1}$ абсолютно непрерывно с плотностью

$$f(y_1, \ldots, y_{k-1}; \alpha_1, \ldots, \alpha_k) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_k)} \prod_{j=1}^{k-1} y_j^{\alpha_j - 1} \Big(1 - \sum_{j=1}^{k-1} y_j\Big)^{\alpha_k - 1} I_S(y_1, \ldots, y_{k-1}), \tag{4.2}$$

где S есть следующее множество: $\{(y_1, \ldots, y_{k-1})\colon\ y_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{k-1} y_j \leqslant 1\}$.

Для $k = 2$ выражение (4.2) преобразуется в бета-распределение, которое будем обозначать Be (α_1, α_2).

Использование распределения Дирихле построено на следующих его свойствах:

Свойство 1. *Если $(Y_1, \ldots, Y_k) \sim D$ и $r_1, r_2, \ldots, r_l$ – целые числа такие, что $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_l = k$, то*

$$\Big(\sum_{i=1}^{r_1} Y_i, \sum_{i=r_1+1}^{r_2} Y_i, \ldots, \sum_{i=r_{l-1}+1}^{r_l} Y_i\Big) \sim$$

$$\sim D\Big(\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i, \sum_{i=r_1+1}^{r_2} \alpha_i, \ldots, \sum_{i=r_{l-1}+1}^{r_l} \alpha_i\Big).$$

Свойство 2. *Если априорное распределение величин $Y_1, \ldots, Y_k$ есть $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и если $P\{X = j \mid Y_1, \ldots, Y_k\} = Y_j$ почти наверное для $j = 1, 2, \ldots, k$, то апостериорное распределение величин $Y_1, \ldots, Y_k$ при $X = j$ есть распределение Дирихле $D(\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_k^{(j)})$, где $\alpha_i^{(j)} = \alpha_i$ при $i \neq j$ и $\alpha_i^{(j+1)} = \alpha_j + 1$ при $i = j$.*

В дальнейшем понадобятся два момента распределения Дирихле:

$$E[Y_i] = \frac{\alpha_i}{\alpha},$$

$$E[Y_i^2] = \frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)}{\alpha(\alpha + 1)},$$

$$E[Y_i Y_j] = \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha(\alpha + 1)}, \qquad i \neq j,$$

где $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$.

Дадим теперь определение процесса Дирихле. Пусть Ω – пространство выборок и $\mathcal{L}$ – σ-алгебра из этого пространства. Вероятностная мера P, определенная на $(\Omega, \mathcal{L})$, является в байесовском подходе случайной и в дальнейшем называется *стохастическим процессом.* Заметим, что в отличие от параметрического байесовского оценивания не предполагается, что мера P принадлежит какому-либо параметрическому семейству. Существо задачи непараметрического байесовского оценивания состоит в том, чтобы для любого конечного разбиения из пространства Ω задать некоторое работоспособное априорное распределение на параметрическом пространстве, определяемом этим разбиением. При этом под измеримым разбиением пространства Ω понимают набор подмножеств $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ таких, что $B_i \in \mathcal{L}$ для всех i, $B_i \cap B_j = \phi$ для всех $i \neq j$ и, наконец, $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$. Вероятности $P\{B_1\}$, $P\{B_2\}, \ldots, P\{B_k\}$ являются случайными, а задача заключается в выборе априорного распределения для этих вероятностей при любом $k > 1$.

Определение 4.1. Пусть α – неотрицательная конечно-аддитивная мера на $(\Omega, \mathcal{L})$. Случайная мера P на $(\Omega, \mathcal{L})$ называется *процессом Дирихле на* $(\Omega, \mathcal{L})$ *с параметром* α, если для каждого $k = 1, 2, \ldots$ и измеримого разбиения $(B_1, \ldots, B_k)$ множества Ω распределение случайных величин $P\{B_1\}, \ldots, P\{B_k\}$ есть распределение Дирихле $D(\alpha(B_1), \ldots, \alpha(B_k))$.

В работе [125] с помощью свойства 1 доказывается единственность процесса Дирихле, а также выполнение условий состоятельности Колмогорова. Несложно убедиться в том, что свойства случайной вероятностной меры P и параметра процесса α тесно связаны. В частности, если $\alpha(A) = 0$, то $P\{A\} = 0$ с вероятностью единица. Точно так же, если $\alpha(A) > 0$, то $P\{A\} > 0$ с вероятностью единица. Кроме того,

$$E[P\{A\}] = \frac{\alpha(A)}{\alpha(\Omega)}. \tag{4.3}$$

Для использования процесса Дирихле в байесовской теории необходимо найти его апостериорное распределение, т.е. условное распределение процесса Дирихле при данной выборке. Определим сначала понятие выборки из случайного вероятностного распределения. Фергюсон [125] делает это следующим образом.

Определение 4.2. Пусть P – случайная вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{L})$. Множество $X_1, \ldots, X_n$ называется *выборкой объема n из P*, если для любого $m = 1, 2, \ldots$ и измеримых множеств $A_1, \ldots, A_m$, $C_1, \ldots, C_n$ имеем

$$P\{X_1 \in C_1, \ldots, X_n \in C_n \mid P\{A_1\}, \ldots, P\{Am\}, \ P\{C_1\}, \ldots, P\{C_n\}\} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} P\{C_j\} \tag{4.4}$$

почти наверное.

Другими словами, $X_1, \ldots, X_n$ есть выборка объема n из распределения P, если для данных $P\{C_1\}, \ldots, P\{C_n\}$ события $\{X_1 \in C_1\}, \ldots, \{X_n \in \in C_n\}$ независимы от остальных событий процесса и независимы между собой, так что $P\{X_j \in C_j \mid P\{C_1\}, \ldots, P\{C_n\}\} = P\{C_j\}$ почти наверное для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Это определение задает совместное распределение величин $X_1, \ldots, X_n$, $P\{A_1\}, \ldots, P\{A_m\}$, как только задано распределение процесса, поэтому

$$P\{X_1 \in C_1, \ldots, X_n \in C_n, \ P\{A_1\} \leqslant y_1, \ldots, P\{A_m\} \leqslant y_m\}$$

может быть найдено интегрированием выражения (4.4) по совместному распределению $P\{A_1\}, \ldots, P\{A_m\}$, $P\{C_1\}, \ldots, P\{C_n\}$ на множестве $[0, y_1] \times \ldots \times [0, y_m] \times [0, 1] \times \ldots \times [0, 1]$.

Непосредственно из сделанного определения и предыдущих свойств процесса Дирихле следуют два важных утверждения.

(1) Если X – выборка единичного объема из процесса Дирихле на $(\Omega, \mathcal{L})$ с параметром α, то для $A \in \mathcal{L}$ имеем

$$P\{X \in A\} = \alpha(A)/\alpha(\Omega).$$

(2) В тех же предпосылках для любого измеримого разбиения $B_1, \ldots$ $\ldots, B_k$ пространства Ω имеем

$$P\{X \in A, \ P\{B_1\} \leqslant y_1, \ldots, P\{B_k\} \leqslant y_k\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha(B_j \cap A)}{\alpha(\Omega)} D(y_1, \ldots, y_k; \alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_k^{(j)}),$$

где $D(y_1, \ldots, y_k; \alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_k^{(j)})$ – функция распределения Дирихле, причем $\alpha_i^{(j)} = \alpha(B_i)$, если $i \neq j$, $\alpha_i^{(j)} = \alpha(B_j) + 1$, если $i = j$.

Данные утверждения позволяют в свою очередь доказать теорему об апостериорном распределении процесса Дирихле, в соответствии с которой апостериорное распределение имеет такой же вид, как и априорное, с параметрами, зависящими от выборки. Более подробно, если δ_X обозначает меру на $(\Omega, \mathcal{L})$, придающую единичную массу точке X, т.е. $\delta_X(A) = 1$ при $X \in A$ и $\delta_X(A) = 0$ при $X \notin A$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть P – процесс Дирихле на $(\Omega, \mathcal{L})$ с параметром α и $X_1, \ldots, X_n$ – выборка объема n из P. Тогда условное распределение процесса P при данной выборке есть процесс Дирихле с параметром* $\alpha + \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$.

Сформулированная теорема является основным результатом работы [125], позволяющим решить ряд практических задач. Методической особенностью использования этой теоремы является нахождение байесовского правила принятия решения для задачи в отсутствие выборки (при $n = 0$) и последующая редукция этого правила путем замены параметра α на $\alpha + \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$ для задачи с выборкой $X_1, \ldots, X_n$.

4.1.2. Некоторые непараметрические оценки. Ниже приведен ряд примеров использования процесса Дирихле. Во всех примерах в качестве пространства Ω принята действительная прямая R^1 или некоторая ее часть, например положительная полупрямая $R^+ = [0, \infty)$. В качестве $\mathcal{L}$ используется σ-алгебра всех борелевских множеств B. Важно понимать, что при решении практических задач прежде всего необходимо задать метрику α, которая отражает априорное представление об изучаемой модели. Везде ниже под α принимает σ-аддитивную ненулевую конечную метрику на (R^1, B) или (R^+, B).

Пример 4.1. Оценка функции распределения и ВБР. Пусть сначала необходимо оценить функцию распределения случайной величины $F(t) = P\{(-\infty, t)\}$ при квадратичной функции потерь. Если P является процессом Дирихле, то $F(t) \sim \mathrm{Be}(\alpha((-\infty, t]), \alpha((t, \infty))$ для каждого t. Байесовский риск для задачи без выборки минимизируется выбором для каждого t такой оценки $\hat{F}^*(t)$, при которой минимальна величина $E[(F(t) - \hat{F}(t))^2]$. Это достигается выбором в качестве $\hat{F}^*$ величины $E[F(t)]$. Таким образом, байесовское решающее правило для задачи без выборки есть

$$\hat{F}^*(t) = F_0(t) = E[F(t)].$$

В соответствии с выражением (4.3)

$$F_0(t) = \frac{\alpha((-\infty, t])}{\alpha(R^1)}. \tag{4.5}$$

Выражение (4.5) с помощью ранее выбранной метрики α дает априорное представление о форме неизвестного распределения $F(t)$.

Исходя из теоремы 4.1, по аналогии с соотношением (4.5) для выборки объема n имеем следующее решающее правило:

$$\hat{F}^*(t \mid x_1, \ldots, x_n) = \frac{\alpha((-\infty, t]) + \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}((-\infty, t])}{\alpha(R^1) + n} =$$

$$= p_n F_0(t) + (1 - p_n) F_n(t \mid x_1, \ldots, x_n), \tag{4.6}$$

где $p_n = \alpha(R^1)/(\alpha(R^1) + n)$, $F_n(t \mid x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}((-\infty, t])$ – эмпирическая функция распределения.

Таким образом, байесовское решающее правило (4.6) является смесью априорного представления о форме $F(t)$ и эмпирической функции распределения с соответствующими весами p_n и $(1 - p_n)$. Если $\alpha(\mathbf{R}^1)$ велико по сравнению с n, то наблюдениям придается малый вес. Если же $\alpha(\mathbf{R}^1)$ мало по сравнению с n, то малый вес придается априорной догадке о форме $F(t)$. Можно интерпретировать $\alpha(\boldsymbol{R}^1)$ как меру верности априорной догадки о форме $F(t)$, измеренную в единицах числа измерений. Интересно также заметить, что, какая бы ни была истинная функция распределения, байесовская оценка (4.6) сходится к ней почти наверное. Это следует из того факта, что $p_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь необходимо оценить вероятность безотказной работы $R(t) = 1 - F(t)$ в некоторый момент времени t по результатам независимых испытаний с фиксированием момента отказа. Все проведенные выше рассуждения сохраняются, если заменить $\boldsymbol{R}^1$ на $\boldsymbol{R}^+$, поскольку $t \in [0, \infty)$. В результате получим

$$\hat{R}^*(t) = p_n R_0(t) + (1 - p_n)\left[1 - \frac{m(t)}{n}\right], \tag{4.7}$$

где $R_0(t)$ – априорное представление о ВБР, $m(t)$ – количество изделий, отказавших к моменту времени t.

Как видно из формулы (4.7), большое влияние на значении байесовской оценки имеет $\alpha(\boldsymbol{R}^+)$. Если, к примеру, принять, что наработка на отказ априорно следует экспоненциальному распределению с параметром λ, и положить

$$\alpha((0,\ t]) = e^{-\lambda t},$$

то получим $\alpha(\boldsymbol{R}^+) = 1$ и, следовательно,

$$\hat{R}^*(t) = \frac{1}{n+1} e^{-\lambda t} + \frac{n}{n+1}\left[1 - \frac{m(t)}{n}\right].$$

Интересно, что в этом случае, если проводится одно испытание и наблюдается отказ, то априорную оценку ВБР следует уменьшить в два раза; если проводятся два отказовых испытания, то в три раза и т.д. Как видно, значимость априорной оценки в этом случае очень мала.

Пример 4.2. Байесовская оценка квантилей. Квантиль распределения $F(t) = P\{(-\infty,\ t]\}$ вероятности q, которую будем обозначать t_q, с помощью случайной вероятностной меры P вводится следующим образом:

$$P\{(-\infty,\ t_q)\} \leqslant q \leqslant P\{(-\infty,\ t_q]\}.$$

Нетрудно убедиться, что для $0 < q < 1$ q-я квантиль распределения единственна с вероятностью единица. Поэтому t_q есть хорошо определенная случайная величина. В [125] рассмотрена задача оценивания t_q с функцией потерь для некоторого p $(0 < p < 1)$ вида

$$L(t_q,\ \hat{t}_q) = \begin{cases} p(t_q - \hat{t}_q), & t_q \geqslant \hat{t}_q, \\ (1-p)(\hat{t}_q - t_q), & t_q < \hat{t}_q. \end{cases} \tag{4.8}$$

Величина p играет роль весового коэффициента. В частности, при $p = ½$ имеем $L(t_q,\ \hat{t}_q) = ½\,|t_q - \hat{t}_q|$. Поэтому функцию потерь вида (4.8) можно считать обобщением часто используемой функции потерь типа абсолютной ошибки.

Распределение случайной величины t_q может быть найдено, исходя из того, что $F(t) \sim \mathrm{Be}(\alpha((-\infty, t]),\ \alpha((t, \infty)))$. Имеем

$$P\{t_q \leqslant t\} = P\{F(t) > q\} =$$

$$= \int_q^1 \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(ua)\Gamma((1-u)a)} z^{ua-1}(1-z)^{(1-u)a-1}dz, \tag{4.9}$$

где

$$a = \alpha(R^1), \qquad u = \frac{\alpha((-\infty,\ t])}{\alpha(R^1)} = F_0(t).$$

В работе [125] констатируется, что любая p-я квантиль распределения t_q есть байесовская оценка t_q с функцией потерь вида (4.8). Чтобы найти p-ю квантиль распределения случайной величины t_q, выражение (4.9) необходимо положить равным p и решить его относительно t:

$$\int_q^1 \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(ua)\Gamma((1-u)a)} z^{ua-1}(1-z)^{(1-u)a-1}dz = p. \tag{4.10}$$

Рассмотрим соотношение (4.10) как уравнение относительно u и обозначим через $u(p, q, \alpha(R^1))$ единственный корень этого уравнения. Тогда байесовская оценка t_q^* в задаче без выборки определится с помощью уравнения

$$u(p, q, \alpha(R^1)) = \frac{\alpha((-\infty, t_q^*])}{\alpha(R^1)}, \tag{4.11}$$

или

$$u(p, q, \alpha(R^1)) = F_0(t_q^*).$$

Таким образом, байесовская оценка квантили t_q в отсутствие выборки есть квантиль распределения $F_0(t)$ вероятности $u(p, q, \alpha(R^1))$, найденной в свою очередь с помощью уравнения (4.10).

Для выборки $x_1, \ldots, x_n$ байесовская оценка t_q^* по аналогии с (4.11) определится из уравнения

$$u(p, q, \alpha(R^1) + n) = \frac{\alpha((-\infty, t_q^*]) + \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}((-\infty, t_q^*])}{\alpha(R^1) + n},$$

т.е. в данном случае t_q^* является квантилью вероятности $u(p, q, \alpha(R^1) + n)$ распределения $\hat{F}_n^*(t \mid x_1, \ldots, x_n)$, задаваемого выражением (4.6). Для практического использования данной методики желательно располагать таблицами функции $u(p, q, a)$, которые в принципе можно получить из таблиц неполной бета-функции.

Существенным недостатком рассмотренных построений является тот факт, что величина P, рассматриваемая как стохастический процесс Дирихле, является дискретной с вероятностью единица. Возможное неудобство состоит главным образом в том, что, имея дело с выборками из процесса Дирихле, можно ожидать появления одного наблюдения, в точности равного другому. В приведенных примерах возможность совпадения элементов выборки не играет существенной роли. В то же время существуют задачи, в которых этот факт имеет решающее значение. Одна из таких задач описана Фергюсоном. Задача заключается в проверке гипотезы H_0, состоящей в том, что распределение на $[0, 1]$ является равномерным. Если в качестве альтернативной гипотезы выбрать процесс Дирихле с параметром α, имеющим равномерное распределение на $[0, 1]$, и если задана выборка объема $n \geqslant 2$, то единственное нетривиальное нерандомизированное байесовское решающее правило требует отвергнуть гипотезу H_0 тогда и только тогда, когда два или более наблюдений в точности равны между собой. В действительности же это есть проверка гипотезы о том, что распределение является непрерывным, против гипотезы, что оно дискретно.

4.1.3. Дальнейшее развитие теории Фергюсона. Рассмотренная выше основополагающая работа Фергюсона инициировала многочисленные исследования как теоретического, так и прикладного характера в области непараметрического байесовского оценивания с использованием априорных процессов Дирихле. Значительный интерес в теоретическом плане представляет работа Ямато [244], рассматривающая связь непараметрических байесовских оценок, основанных на процессах Дирихле, с U-статистиками [60]. Объектом исследования работы [244] являются введенные Заксом [17] допускающие оценку параметры $\theta(P)$. Параметр $\theta(P)$ называется допускающим оценку, если он имеет несмещенную оценку, т.е. если существует статистика $a(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что

$$\theta(P) = \int_{\Omega^n} a(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} dP(x_i),$$

где $\Omega^n = \Omega \times \ldots \times \Omega$. Степенью k $(k \geqslant 1)$ допускающего оценку функционала $\theta(P)$ называется при этом наименьший объем выборки, для которой существует несмещенная оценка этого функционала. Ясно, к примеру, что математическое ожидание, рассмотренное в качестве параметра, имеет первую степень, а дисперсия – вторую. В исходной работе Фергюсона [125] в основном рассмотрены параметры первой степени и иногда второй. Ямато [244] получает непараметрические байесовские оценки параметров второй и третьей степени. Исследование зависимости байесовских оценок и U-статистик проведено не случайно. Дело в том, что U-статистики в классе несмещенных оценок параметра $\theta(P)$ при заданном объеме выборки обладают минимальной дисперсией.

Обозначим с помощью θ_k параметр k-й степени, допускающий оценку в смысле [17]. Основной результат работы [244] состоит в следующем. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – выборка из распределения $F \sim D(\alpha)$, где α – конечная неотрицательная мера на $(\Omega, \mathcal{L})$. Тогда байесовская оценка параметра

$$\theta_3 = \iiint a_3(x, y, z)\, dF(x)\, dF(y)\, dF(z),$$

где $a_3(\,\cdot\,)$ – измеримая вещественная функция, симметричная по аргументам x, y, z и обладающая первым абсолютным моментом, определится с помощью выражения

$$\hat{\theta}_3^* = \frac{[\alpha(\Omega) + n]^2}{[\alpha(\Omega) + n + 1]\,[\alpha(\Omega) + n + 2]} \iiint a_3(x, y, z)\, dF_n^*(x)\, dF_n^*(y)\, dF_n^*(z) +$$
$$+ \frac{3\,[\alpha(\Omega) + n]}{[\alpha(\Omega) + n + 1]\,[\alpha(\Omega) + n + 2]} \iint a_3(x, x, y)\, dF_n^*(x)\, dF_n^*(y) +$$
$$+ \frac{2}{[\alpha(\Omega) + n + 1]\,[\alpha(\Omega) + n + 2]} \int a_3(x, x, x)\, dF_n^*(x), \tag{4.12}$$

где

$$F_n^*(\cdot) = p_n F_0(\cdot) + (1-p_n)F_n(\cdot), \quad p_n = \frac{\alpha(\Omega)}{\alpha(\Omega)+n},$$

$F_0(\cdot)$ и $F_n(\cdot)$ – соответственно априорная и эмпирическая функции распределения.

Для допускающего оценку функционала второй степени

$$\theta_2 = \iint a_2(x,y)\,dF(x)\,dF(y)$$

в тех же предположениях справедлива следующая байесовская оценка:

$$\hat{\theta}_2^* = \frac{\alpha(\Omega)+n}{\alpha(\Omega)+n+1}\Bigg[p_n^2 \iint a_2(x,y)\,dF_0(x)\,dF_0(y) +$$

$$+\frac{2}{n}p_n(1-p_n)\sum_{i=1}^{n}\int a_2(x,x_i)\,dF_0(x) + \frac{1}{n^2}(1-p_n)^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_2(x_i,x_j) +$$

$$+\frac{1}{\alpha(\Omega)+n+1}\left[p_n \int a_2(x,x)\,dF_0(x) + \frac{1}{n}(1-p_n)\sum_{i=1}^{n} a_2(x_i,x_i)\right]. \quad (4.13)$$

Как видно из приведенных выражений (4.12), (4.13), значения оценок $\hat{\theta}_2^*$ и $\hat{\theta}_3^*$ при фиксированной выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяются выбором априорной меры α. Последняя, как отмечалось ранее, однозначно определяется в случае, когда задано значение $\alpha(\Omega)$ и существует априорное представление о функции распределения $F_0(x)$. Интересно исследовать поведение оценок при $\alpha \to 0$. Этот случай, по-видимому, можно рассматривать как отсутствие априорного представления. В прикладном анализе чаще всего используются функции $a_k(x, y, \ldots)$, обращающиеся в нуль при условии, что хотя бы два аргумента равны. В этих условиях байесовские оценки $\hat{\theta}_2^*$ и $\hat{\theta}_3^*$ при $\alpha \to 0$ имеют вид

$$\hat{\theta}_{02}^* = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sum a_2(x_i,x_j), \quad (4.14)$$

$$\hat{\theta}_{03}^* = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\sum\sum a_3(x_i,x_j,x_k). \quad (4.15)$$

Обнаруживается схожесть полученных байесовских оценок с соответствующими U-статистиками, для которых справедливы хорошо известные формулы [17]

$$U_2 = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sum a_2(x_i,x_j),$$

$$U_3 = \frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\sum\sum a_3(x_i,x_j,x_k).$$

Таким образом, имеем следующие конечные зависимости между байесовскими оценками $\hat{\theta}_{0k}^*$ и U-статистиками:

$$\hat{\theta}_{02}^* = \frac{n-1}{n+1}U_2, \quad \hat{\theta}_{03}^* = \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}U_3,$$

из которых, в частности, следует сходимость $\hat{\theta}_{0k}^*$ к U_k при $n \to \infty$.

Рассмотрим два примера непараметрических байесовских оценок для допускающих оценку параметров второго порядка.

Пример 4.3. Оценка квадрата среднего m^2 для неизвестного распределения F. Если положить $a_2(x, y) = xy$, то получим $\theta_2 = m^2$. Из выражения (4.13) немедленно следует

$$\hat{m}^{2*} = \frac{\alpha(R^1)+n}{\alpha(R^1)+n+1}\,[p_n \int x dF_0(x) + (1-p_n)\bar{x}_n]^2 +$$

$$+ \frac{1}{\alpha(R^1)+n+1}\,[p_n \int x^2 dF_0(x) + (1-p_n)\overline{x^2_n}],$$

где $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, а при $\alpha(\cdot)\to 0$ получим

$$\hat{m}_0^{2*} = \frac{n}{n+1}(\bar{x}_n)^2 + \frac{1}{n+1}\,\overline{x^2_n},$$

где $\overline{x^2_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Интересно, что соответствующая U-статистика имеет вид

$$U_2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = \frac{n}{n-1}\,(\bar{x}_n)^2 + \frac{1}{n-1}\,\overline{x^2_n}.$$

Пример 4.4. Оценка дисперсии распределения F. При $a_2(x, y) = (x-y)^2/2$ имеем $\theta_2 = \sigma^2$, где σ – среднее квадратическое отклонение распределения F. Из выражений (4.13), (4.14) соответственно получим

$$\hat{\sigma}^{2*} = \frac{\alpha(R^1)+n}{\alpha(R^1)+n+1}\left\{p_n[\int x^2 dF_0(x) - (\int x dF_0(x))^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}(1-p_n)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2 + p_n(1-p_n)(\int x dF_0(x) - \bar{x}_n)^2\right\}, \qquad (4.16)$$

$$\hat{\sigma}_0^{2*} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2, \qquad \alpha\to 0. \qquad (4.17)$$

Приведенная оценка (4.16) совпадает с оценкой дисперсии, полученной Фергюсоном [125]. Соответствующая байесовской оценке (4.17) U-статистика – хорошо известная несмещенная оценка дисперсии

$$U_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2.$$

Определенным развитием работы Фергюсона [125] явилась статья Сусарлы и Ван Райзина [229], в которой получена непараметрическая байесовская оценка ВБР $R(t) = 1 - F(t)$ для $F(t) \sim D(\alpha)$ по результатам цензурированных испытаний. Приведем основной результат работы [229]. Пусть, как и в главе 3, t_i^* – моменты отказа ($i = 1, 2, \ldots, n$), а t_i – моменты цензурирования, и в опыте наблюдается минимальная из указанных величин: $\tau_i = \min\{t_i^*, t_i\}$. Достаточную статистику можно представить в виде совокупности двух векторов (τ, δ), причем $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, а $\delta_i = 1$, если $t_i^* \leqslant t_i$, т.е. наблюдается отказ, и $\delta_i = 0$ в противном случае. Предполагается, что моменты отказов и моменты цензурирования являются взаимно независимыми. Заметим, что все байесовские решающие правила безразличны к порядку записи элементов выборки. Поэтому выборку можно записать так, чтобы первые d ее элементов $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d$ являлись моментами наблюденных отказов, а последующие k элементов $\tau_{d+1}, \ldots, \tau_n$ – моментами цензурирования. Обозначим, наконец, с помощью $\tau_{(d+1)}, \ldots$ $\ldots, \tau_{(m)}$ отличные друг от друга значения среди множества моментов цензурирования $\tau_{d+1}, \ldots, \tau_n$, а с помощью λ_j – число моментов цензурирования равных $\tau_{(j)}$.

В качестве параметра априорного процесса Дирихле для рассматриваемого случая выбирается положительная конечная мера на $(R^+, \mathcal{B})$, где $R^+ = [0, \infty)$, а $\mathcal{B}$ – σ-алгебра всех борелевских множеств на R^+. Основным результатом работы [229] является выражение для апостериорных моментов случайной величины $R(t) = 1 - F(t)$, полученной с использованием теории Фергюсона. Для $t \in [\tau_{(l)}, \tau_{(l+1)}]$, $l = d, \ldots, m$, и $\tau_{(d)} = 0$, $\tau_{(m+1)} = \infty$ имеем

$$E[(R(t))^p \mid (\tau, \delta)] = \prod_{s=0}^{p-1} \left\{ \frac{\alpha([t, \infty)) + s + N^+(t)}{\alpha(R^+) + s + n} \prod_{j=d+1}^{l} \frac{\alpha([\tau_{(j)}, \infty)) + s + N(\tau_{(j)})}{\alpha([\tau_{(j)}, \infty)) + s + N(\tau_{(j)}) - \lambda_j} \right\}, \tag{4.18}$$

где $N(u)$ – количество элементов выборки τ, превосходящих или равных u, $N^+(u)$ – количество элементов, строго больших u. Причем при $t < \tau_{(k+1)}$ внутреннее произведение в выражении (4.18) следует положить равным единице. Приведенное выражение (4.18) позволяет без труда записать точечную оценку ВБР $\hat{R}^*(t) = E[R(t) \mid (\tau, \delta)]$ и апостериорную дисперсию $\sigma^2_{\hat{R}^*} = E[R^2(t) \mid (\tau, \delta)] - \hat{R}^{*2}(t)$. В частности, для $t \in [\tau_{(l)}, \tau_{(l+1)}]$

$$\hat{R}^*(t) = \frac{\alpha([t, \infty)) + N^+(t)}{\alpha(R^+) + n} \prod_{j=d+1}^{l} \frac{\alpha([\tau_{(j)}, \infty)) + N(\tau_{(j)})}{\alpha([\tau_{(j)}, \infty)) + N(\tau_{(j)}) - \lambda_j}. \tag{4.19}$$

Интересно сравнение байесовской оценки (4.19) с соответствующей оценкой Каплана – Мейера [155]

$$\hat{R}(t) = \prod_{j \in I_0(t)} \frac{n-j}{n-j+1}, \tag{4.20}$$

где $I_0(t)$ – множество индексов вариационного ряда $\tau_1' \leqslant \tau_2' \leqslant \ldots \leqslant \tau_n'$, составленного из выборки τ, таких, что $\tau_i' \leqslant t$ и τ_i' является моментом отказа. Сравнение оценок (4.19) и (4.20) убеждает в предпочтительности байесовской оценки. Во-первых, оценка Каплана–Мейера использует лишь информацию о количестве моментов цензурирования между моментами отказа, в то время как байесовская оценка использует всю информацию, содержащуюся в достаточной статистике (τ, δ). Во-вторых, хотя обе оценки (4.19) и (4.20) являются кусочно-гладкими, имеющими конечные приращения в точках моментов отказов, байесовская оценка в промежутках между моментами отказа является убывающей функцией (вследствие непрерывности априорной меры α), оценка (4.20) в этих промежутках тождественна некоторой постоянной. Наконец, если последний элемент вариационного ряда τ_n' является моментом цензурирования, то в промежутке $[\tau_n', \infty)$ оценка (4.20) не определена.

Предельный переход в выражении (4.19) при $\alpha \to 0$, что соответствует отсутствию априорной информации, приводит байесовскую оценку (4.19) к оценке Каплана–Мейера. Следует лишь оговорить, что последняя была получена в работе [155] в виде (4.20), не предполагающем совпадения моментов цензурирования. В случае, когда такое совпадение возможно, оценка Каплана – Мейера получается из (4.19) в виде

$$R(t) = \begin{cases} \dfrac{N^+(t)}{n} \prod\limits_{i \in I_0(t)} \left[\dfrac{N^+(\tau_i) + \lambda_i}{N^+(\tau_i)} \right]^{\delta_i}, & t < \tau_n', \\ 0, & t \geqslant \tau_n', \end{cases} \tag{4.21}$$

где $I_0(t)$ – множество первых индексов среди повторяющихся элементов выборки τ, для которых выполняется условие $\tau_i \leqslant t$. Формулы (4.20) и (4.21) приводят к одинаковым оценкам при $\lambda_i = 1$ для всех i, причем последняя является более общей.

Свойства непараметрических оценок типа (4.18) при больших выборках были исследованы Сусарлой и Ван Райзином в работах [228, 229]. Общие выводы из этих работ коротко можно сформулировать следующим образом. Во-первых, обе оценки в среднем квадратическом поточечно состоятельны порядка $O(n^{-1})$ и строго состоятельны порядка $o(n^{-1/2}/\ln n)$. Во-вторых, обе оценки асимптотически нормальны с одинаковой дисперсией. Таким образом, можно заключить, что с точки зрения теории больших выборок непараметрическая байесовская оценка, основанная на процессах Дирихле, и оценка Каплана – Мейера эквивалентны.

Сравнение указанных оценок при малых выборках проведено Раем, Сусарлой и Ван Райзином [202]. Их работа имеет также определенную методическую ценность, так как предлагает один из способов практического использования непараметрических байесовских оценок, основанных на процессе Дирихле. Основной задачей здесь является выбор априорной меры $\alpha(\cdot)$, в дальнейшем остается лишь воспользоваться формулой (4.18). Введем для дальнейших рассуждений вещественную функцию $\alpha(x) = \alpha([x, \infty))$. Тогда априорное представление о ВБР в соответствии с выражением (4.5) примет вид

$$R_0(t) = \alpha(t)/\alpha(0) = \alpha(t)/\beta, \quad \text{где} \quad \beta = \alpha(0), \tag{4.22}$$

а байесовская оценка ВБР $\hat{R}^*(t)$ для квадратичной функции потерь при отсутствии цензурирования примет вид

$$\hat{R}^*(t) = \frac{\beta}{\beta + n} R_0(t) + \frac{n}{\beta + n} \hat{R}_n(t), \tag{4.23}$$

где $\hat{R}_n$ – эмпирическая оценка ВБР, основанная на выборке n независимых наблюдений. К сожалению, для цензурированных выборок записать оценку типа (4.23), заменив $\hat{R}_n(t)$, например, оценкой Каплана – Мейера, не удается. Тем не менее для выбора априорной меры $\alpha(\cdot)$ целесообразно использовать ее интерпретацию, даваемую выражением (4.22). Пусть в соответствии с априорными представлениями мы принимаем, что случайная наработка на отказ подчиняется экспоненциальному закону с параметром μ. Тогда в соответствии с выражением (4.22) имеем

$$\alpha(t) = \beta \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right). \tag{4.24}$$

В работе [202] такой вид оценок, основанный на конкретной мере α, назван сокращенными непараметрическими байесовскими оценками. Вместо экспоненциального априорного распределения для $F_0(t)$ мы могли бы использовать с таким же успехом распределение Вейбулла, гамма и т.д. В любом случае получается более "узкая" оценка, так как используется вполне определенное ограничение. В работе [202] параметр μ оценивается не из априорных соображений, а статистически, т.е. в функции (4.24) вместо параметра μ подставляется его оценка максимального правдоподобия $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \tau_i/d$, где d – число нецензурированных наблюдений. В результате байесовская оценка ВБР может быть записана с использованием общего выражения (4.19) следующим образом:

$$\hat{R}^*(t) = \frac{\beta \exp\left(-\frac{t}{\hat{\mu}}\right) + N^+(t)}{\beta + n} \prod_{i \in I_0} \left[\frac{\beta \exp\left(-\frac{\tau_i}{\hat{\mu}}\right) + N^+(\tau_i) + \lambda_i}{\beta \exp\left(-\frac{\tau_i}{\hat{\mu}}\right) + N^+(\tau_i)}\right]^{\delta_i}. \tag{4.25}$$

Следует заметить, оценка (4.25), строго говоря, не является байесовской в том классическом значении этого понятия, которое было оговорено в главе 1. С бо́льшим основанием оценку (4.25) следует назвать эмпирической байесовской, так как параметр априорного распределения μ оценивается с помощью эмпирических данных.

При использовании оценки (4.25) остается нерешенным вопрос выбора значения β. Авторы работы [202] исходят из величины средней квадратической ошибки оценки (4.23):

$$E[(\hat{R}^*(t) - R(t))^2] = \left(\frac{\beta}{\beta + n}\right)^2 (R_0(t) - R(t))^2 + \frac{n}{(\beta + n)^2} R(t)(1 - R(t)). \tag{4.26}$$

Первый член выражения (4.26) определяет квадрат смещения, вносимого в баейсовскую оценку априорным представлением о ВБР, в то время как второй есть дисперсия несмещенной оценки $\hat{R}(t)$. С увеличением n рассматриваемая средняя квадратическая ошибка убывает, причем стремится к нулю при условии

$$\lim_{n \to \infty} (n^{-1} \beta(n)) = 0,$$

откуда следует, что для $\beta(n)$ должно быть справедливо $\beta(n) = O(n^{\alpha})$, где $\alpha < 1$. Авторы работы [202] справедливо полагают, что оба члена квадратической ошибки (4.26) должны иметь одинаковый порядок малости

n^{-1}. Это достигается при $\beta = c\sqrt{n}$, где c – некоторая постоянная, которая может зависеть от текущего значения t. В практических расчетах в работе [202] принимают $c = 1$.

Сравнение байесовских оценок с оценками Каплана – Мейера для малых выборок производилось в работе [202] с помощью моделирования. Результаты сравнения представлены в табл. 4.1, 4.2. Особенности проведенных сравнительных исследований заключались в следующем:

a) критерием при сравнении служила параметрическая оценка;

b) использовались два вида моделирования: экспоненциальное и гамма, первый соответствовал выбранной априорной мере (4.24), второй противоречил ей;

c) моделирование производилось при различных значениях теоретического среднего μ и различном проценте цензурирования.

В табл. 4.1, 4.2 приведены осредненные по 200 выборкам значения ВБР в течение некоторого времени.

Данные таблиц позволяют сделать вывод о том, что байесовская оценка лучше оценки Каплана – Мейера. Это преимущество проявляется не только в том случае, когда эмпирические данные соответствуют априорному распределению, но и когда противоречат ему. С увеличением процента цензурирования расхождение оценок Каплана – Мейера и байесовских увели-

Таблица 4.1

Сравнение оценок ВБР при моделировании экспоненциального распределения

Оценка	Процент цензурирования	$n = 10$		$n = 30$	
		$\mu = 1$	$\mu = 5$	$\mu = 1$	$\mu = 5$
параметрическая		0,113	0,252	0,071	0,158
байесовская	0	0,175	0,391	0,108	0,242
Каплана – Мейера		0,203	0,454	0,118	0,264
параметрическая		0,141	0,315	0,092	0,183
байесовская	25	0,194	0,434	0,119	0,266
Каплана – Мейера		0,236	0,529	0,139	0,311
параметрическая		0,171	0,383	0,094	0,211
байесовская	50	0,198	0,444	0,117	0,261
Каплана – Мейера		0,275	0,615	0,198	0,442
параметрическая		0,209	0,467	0,116	0,260
байесовская	75	0,223	0,499	0,126	0,283
Каплана – Мейера		0,412	0,919	0,380	0,847

Таблица 4.2

Сравнение оценок ВБР при моделировании гамма-распределения

Оценка	Процент цензурирования	$n = 10$		$n = 30$	
		$\mu = 1$	$\mu = 5$	$\mu = 1$	$\mu = 5$
параметрическая	0	0,158	0,353	0,133	0,296
байесовская		0,156	0,348	0,092	0,205
Каплана – Мейера		0,181	0,403	0,100	0,223
параметрическая	25	0,167	0,373	0,135	0,301
байесовская		0,167	0,372	0,101	0,225
Каплана – Мейера		0,201	0,449	0,113	0,253
параметрическая	50	0,182	0,408	0,145	0,324
байесовская		0,184	0,412	0,117	0,262
Каплана – Мейера		0,232	0,518	0,145	0,324
параметрическая	75	0,188	0,423	0,139	0,313
байесовская		0,191	0,427	0,121	0,272
Каплана – Мейера		0,315	0,701	0,266	0,592

чивается, причем, если первые удаляются от параметрических, то вторые приближаются к ним. Применение априорной меры, основанной на более гибких распределениях, например на распределении Вейбулла, позволяет, по-видимому, ожидать более качественной оценки. Хотя в вычислительном смысле оценки становятся сложнее.

Оценка, аналогичная (4.19), получена Зенвиртом [246]. Данная оценка названа линейной байесовской и легко интерпретируется как оценка Каплана –Мейера, построенная на смеси априорных и экспериментальных данных.

Важная для приложений непараметрическая байесовская оценка получена Камбеллом и Холландером [90]. Решается задача определения прогнозного интервала, в который попадает заданное число будущих наблюдений. Конкретная формулировка задачи состоит в следующем. Пусть $x_1,..., x_n$ – исходная выборка из $F \sim D(\alpha)$, а $y_1, \ldots, y_N$ – выборка будущих наблюдений. Согласно данному в [90] определению статистики $a_1(x_1, \ldots, x_n)$, $a_2(x_1, \ldots, x_n)$ образуют 100γ %-ный прогнозный интервал (a_1, a_2) для M из N будущих наблюдений, если вероятность $P_{M,N}$ того, что по крайней мере M из N будущих наблюдений попадут в (a_1, a_2), равна γ. Вероятность γ здесь названа коэффициентом прогноза. Отличие a_1 и a_2 от толерантных пределов заключается в том, что последние предполагают рассмотрение всего множества возможных будущих наблюдений. В случае $a_2 = \infty$ мы имеем дело с односторонним прогнозным интервалом.

Хорошей иллюстрацией рассматриваемой задачи может служить следующий технический пример. Изготовитель какого-либо устройства имеет выборку значений определяющего параметра $x_1, x_2, \ldots, x_5$ пяти экземпляров изделия. Партия из трех изделий данного типа поставляется в народное хозяйство. Необходимо определить нижнее гарантированное с вероятностью 0,9 значение определяющего параметра, которое будет достигнуто для всех поставляемых изделий. В данном случае имеем $n = 5$, $N = 3$, $M = 3$, $\gamma = 0{,}9$.

Решение рассматриваемой задачи основано на идее, которая является традиционной при использовании процессов Дирихле: сначала решается задача в отсутствие эмпирических данных ($n = 0$), затем, используя свойство сопряженности распределения Дирихле, решение обобщается на случай, когда $n > 0$. Окончательные расчетные зависимости, используемые для решения задачи, получаются с помощью следующего теоретического результата работы [90]. Пусть для некоторых x и y $(x < y)$ и выборки будущих наблюдений $y_1, \ldots, y_N$ случайные величины $I = I_x$, $J = J_{xy}$, $K = K_y$ обозначают соответственно числа элементов выборки, не превышающих x, больших x, но меньших или равных y, и, наконец, больших y. В [90] доказано, что величины I, J, K подчиняются составному распределению Дирихле, которое с помощью ранее введенных обозначений записывается в виде

$$P\{(I, J, K) = (i, j, k)\} = \frac{N!}{(N-i)!(N-j)!(N-k)!} \times$$

$$\times \frac{\alpha((-\infty, x])^{[i]} \alpha((x, y])^{[j]} \alpha((y, \infty))^{[k]}}{\alpha(R^1)^{[N]}}, \qquad (4.27)$$

где $c^{[m]} = c(c+1) \ldots (c+m-1)$, причем $c^{[0]} = 1$.

Рассмотрим сначала случай построения одностороннего прогнозного 100γ %-ного интервала (a_1, ∞). Для этого примем $k = 0$ и $y = \infty$. В результате получим двумерную случайную величину (I, J), для которой маргинальное распределение J имеет вид

$$P\{J = j\} = \frac{N!}{(N-j)!\, j!} \; \frac{\alpha((-\infty, x])^{[N-j]} \alpha((x, \infty))^{[j]}}{\alpha(R^1)^{[N]}}. \qquad (4.28)$$

Выражение (4.28) определяет вероятность того, что ровно j элементов выборки $y_1, \ldots, y_N$ превышают или равны значению x. Следовательно, вероятность $P_{M,N}$ запишется в виде суммы $P_{M,N} = P\{J = M\} + P\{J = M+1\} + \ldots P\{J = N\}$. Окончательно для определения a_1 в отсутствие выборки необходимо решить уравнение

$$\sum_{j=M}^{N} \frac{N!}{(N-j)!\, j!} \cdot \frac{\alpha((-\infty, x])^{[N-j]} \alpha((x, \infty))^{[j]}}{\alpha(R^1)^{[N]}} = \gamma. \qquad (4.29)$$

Здесь $\alpha(\cdot)$ имеет смысл априорной меры, связанной с априорным представлением о функции распределения $F_0(x)$ с помощью соотношения $\alpha((-\infty, x]) = \beta F_0(x)$, где $\beta = \alpha(R^1)$ имеет смысл весовой значимости априорного распределения. В отсутствие данных оценка a_1, как следует из уравнения (4.29), инвариантна относительно выбора β. В том случае, когда задана выборка $x_1, \ldots, x_n$, в уравнение (4.29) вместо $\alpha(\cdot)$ следует подставить

$$\alpha'(A) = \alpha(A) + \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}(A),$$

где $\delta_{x_i} = 1$, если $x_i \in A$, и $\delta_{x_i} = 0$ в противном случае.

Для определения двустороннего 100γ %-ного прогнозного интервала (a_1, a_2) используются аналогичные рассуждения. В частности, справедливо уравнение

$$\sum_{j=M}^{n} \frac{N!}{(N-j)!\,j!} \cdot \frac{\alpha'((x,y])^{[j]}\alpha'(R^1 - (x,y])^{[N-j]}}{\alpha(R^1)+n} = \gamma, \tag{4.30}$$

причем среди множества значений $a_1 = x$, $a_2 = y$ выбираются такие два числа, для которых длина промежутка минимальна. В заключение работы [90] приведены численные примеры, иллюстрирующие устойчивость полученных оценок.

В работе [102] Далал и Фадия используют априорные процессы Дирихле для решения важной практической задачи оценки зависимости между случайными величинами и проверки соответствующих статистических гипотез. Рассматривается двумерное распределение $F(x, y)$, которое считается случайной вероятностной мерой, подчиняющейся априорному распределению Дирихле $D(\alpha)$, причем α – ненулевая мера на $(R^2, \mathcal{L})$. В качестве меры зависимости используется коэффициент согласованности Δ:

$$\Delta = \Delta_F = P_F\{(X - X')(Y - Y') > 0\} + \frac{1}{2} P_F\{(X - X')(Y - Y') = 0\}, \tag{4.31}$$

где (X, Y) и (X', Y') – два независимых наблюдения из $F(x, y)$. Коэффициент Δ связан с часто используемым τ-параметром Кендалла с помощью зависимости $\Delta = (\tau + 1)/2$. Вид (4.31) предполагает, что случайные величины X и Y не обязательно должны быть непрерывными.

Задача нахождения байесовской оценки Δ^* решается в работе [102] в полном соответствии с теорией Фергюсона [125]. Обозначив с помощью T и U два множества в R^4 такие, что $T = \{(x, y, x', y') : (x - x')(y - y') > 0\}$, $U = \{(x, y, x', y') : (x - x')(y - y') = 0\}$, выражение (4.31) перепишем в виде

$$\Delta = \int \left(I_T + \frac{1}{2} I_U \right) d[F(x,y)F(x',y')],$$

где I_T и I_U – индикаторные функции множеств. Выбрав квадратичную функцию потерь, получим следующую байесовскую оценку параметра Δ:

$$\Delta^* = \int \left(I_T + \frac{1}{2} I_U \right) dE[F(x,y)F(x',y')]. \tag{4.32}$$

Здесь математическое ожидание E определяется по отношению к априорному распределению $D(\alpha)$. В частности, в отсутствие экспериментальных данных имеем

$$E[F(x,y)F(x',y')] = \frac{1}{\beta+1} F_0'(x, x', y, y') + \frac{\beta}{\beta+1} F_0(x, y) F_0(x', y'), \tag{4.33}$$

где $F_0'(x, x', y, y') = F_0(\min(x, x'), \min(y, y'))$, F_0 по-прежнему имеет смысл априорного представления о двумерной функции распределения, а $\beta = \alpha(R^2)$.

После подстановки зависимости (4.33) в выражение (4.32) можно записать следующую байесовскую оценку Δ в отсутствие экспериментальных данных:

$$\Delta^* = \frac{\beta}{\beta+1}\Delta_{F_0} + \frac{1}{2(\beta+1)}, \tag{4.34}$$

где Δ_{F_0} вычисляется с помощью формулы (4.31) для распределения F_0. Если окажется, что величины X и Y априорно независимы, то $\Delta_{F_0} = ½$, и по формуле (4.34) получим $\Delta^* = ½$.

Для случая существования экспериментальных данных $(x_1, y_1), \ldots$ $\ldots, (x_n, y_n)$ математическое ожидание в выражении (4.32) следует определять в отношении апостериорного распределения Дирихле с параметром

$$\alpha' = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \delta_{(x_i, y_i)} = (\beta + n)P^*.$$

Здесь P^* – апостериорная мера, для которой двумерная функция распределения имеет вид

$$F^*(x, y) = p_n F_0(x, y) + (1 - p_n)\hat{F}_n(x, y),$$

где $\hat{F}_n(x, y)$ – эмпирическая функция распределения, основанная на выборке $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, а $p_n = \beta/(\beta + n)$.

Окончательное выражение для байесовской оценки записывается следующим образом:

$$\Delta^* = \frac{\beta+n}{\beta+n+1}\left[p_n^2\Delta_{F_0} + 2p_n(1-p_n)\Delta(F_0, \hat{F}_n) + (1-p_n)^2\Delta_{\hat{F}_n}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\beta+n+1}, \tag{4.35}$$

где

$$\Delta_{\hat{F}_n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{I_{[(x_i-x_j)(y_i-y_j)>0]} + \frac{1}{2}I_{[(x_i-x_j)(y_i-y_j)=0]}\right\},$$

$$\Delta(F_0, \hat{F}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{F_0}\{(X-x_i)(Y-y_i)>0\} +$$

$$+ \frac{1}{2}P_{F_0}\{(X-x_i)(Y-y_i)=0\}.$$

Если в качестве F_0 выбрано двумерное нормальное распределение $N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$, то при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ в соответствии с [102] имеем

$$\Delta_{F_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\sin\rho}. \tag{4.36}$$

Далее, если с помощью $\Phi(x, y)$ обозначить функцию двумерного нормального распределения $N_2(0, 0, 1, 1, \rho)$, а $\bar{\Phi}(x, y) = 1 - \Phi(x, \infty) - \Phi(\infty, y) - \Phi(x, y)$, то можно записать

$$\Delta(F_0, \hat{F}_n) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{x_i - \mu_1}{\sigma_1}, \frac{y_i - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \right.$$

$$\left. + \bar{\Phi}\left(\frac{x_i - \mu_1}{\sigma_1}, \frac{y_i - \mu_2}{\sigma_2}\right)\right]. \tag{4.37}$$

Приведенные соотношения позволяют производить расчет оценки Δ^* при выбранном значении β.

Заметим, что при $n \to \infty$ байесовская оценка (4.35) приближается к выборочной. В то же время при $\beta = 0$, что соответствует отсутствию априорной информации, выражение (4.35) дает обычную непараметрическую оценку коэффициента Δ.

В одной из своих последних работ [127] Фергюсон развивает теорию, основанную на процессах Дирихле, применительно к последовательному оцениванию. В частности, им предложены процедуры получения непараметрических байесовских оценок функции распределения и математического ожидания. Существо процедур заключается в следующем. Каждому единичному испытанию приписывается некоторое положительное число c, имеющее смысл стоимости и измеряемое в тех же единицах, что и функции потерь. Последняя является квадратичной и в общем случае записывается следующим образом:

$$L(F, \hat{F}) = \int_{R^1} [F(x) - \hat{F}(x)]^2 dW(x),$$

где $W(x)$ – весовая функция на R^1. После каждого испытания статистик должен принять решение: стоит ли продолжать испытания или следует их прекратить и выбрать необходимую оценку? В качестве критерия принятия решения используются суммарные потери, связанные с общей процедурой оценивания. Данные потери складываются, с одной стороны, из математического ожидания функции потерь (байесовского риска)

$$G_n = \frac{1}{\beta + n + 1} \int_{R^1} \hat{F}_n^*(x) [1 - \hat{F}_n^*(x)] dW(x),$$

где $\hat{F}_n^*(x)$ – непараметрическая байесовская оценка, основанная на процессах Дирихле (см. выражение (4.6)), $\beta = \alpha(R^1)$. С другой стороны, в потери следует включить стоимость проведенных испытаний.

Пусть, к примеру, в отсутствие выборки ($n = 0$) байесовская оценка $\hat{F}^* = F_0$, а потери составляют

$$G_0 = \frac{1}{\beta + 1} \int F_0(1 - F_0) dW. \tag{4.38}$$

Если мы проведем одно испытание, т.е. получим значение x_1, то суммарные условные потери (при условии x_1) составят

$$c + \frac{1}{\beta + 2} \int F_1^*(1 - F_1^*) dW,$$

а их математическое ожидание будет равно

$$c+\frac{1}{\beta+2}E[\int F_1^*(1-F_1^*)dW]=c+\frac{\beta}{(\beta+1)^2}\int F_0(1-F_0)dW. \tag{4.39}$$

Здесь был использован тот факт, что $E[F_1]=F_0$. Для принятия решения о необходимости проведения первого испытания мы должны сравнить две величины (4.38) и (4.39). Если окажется, что первая из них не превышает второй, что равносильно неравенству

$$\int F_0(1-F_0)\,dW\leqslant c(\beta+1)^2, \tag{4.40}$$

то проводить испытание не имеет смысла (по критерию суммарных потерь) и в качестве оценки $\hat{F}^*$ следует принять априорное представление о функции распределения F_0.

В общем случае для принятия решения после проведения n испытаний необходимо воспользоваться аналогичным неравенством

$$\int\hat{F}_n^*(1-\hat{F}_n^*)\,dW\leqslant c(\beta+n+1).$$

Рассмотренная процедура названа одноступенчатой. Фергюсон [127] дает ее обобщение в виде многоступенчатых процедур.

Существуют попытки использования распределения Дирихле с помощью подходов, отличающихся от теории Фергюсона. Примером таких работ являются статьи Локхнера и Басу [173–175], которые имеют практическую направленность, связанную с проверкой гипотезы о принадлежности функции распределения $F(t)$ классу S_0 стареющих распределений. Коротко существо предложений Локхнера и Басу состоит в следующем.

Рассматриваются испытания, приводящие к выборке $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)=$ $=(t^*,t)$, где $t^*=(t_1^*,\ldots,t_d^*)$ – вектор моментов отказа, $t=(t_1,\ldots,t_k)$ – вектор моментов неслучайного цензурирования. Для некоторого значения T, совпадающего с одним из моментов цензурирования, строится решетка значений $0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_m=T$, так что каждое значение x_i совпадает с одним из моментов цензурирования. Статистика испытаний представляется в виде $z=(s_1,\ldots,s_m,r_1,\ldots,r_m)$, где s_j – число изделий, отказавших в промежутке $(x_{j-1},x_j]$, $j=1,2,\ldots,m$, r_j – число изделий, прошедших успешные испытания к моменту $x_j(j=1,\ldots,m-1)$, а r_m– число изделий, отказавших к моменту x_m или имеющих отказ после момента x_m. Пусть $p=(p_1,\ldots,p_m)$ – вектор приращений функции распределения, $p_j=F(x_j)-F(x_{j-1})$. В [173] доказано, что z является достаточной статистикой для p.

В дальнейшем полагают, что p имеет априорное распределение Дирихле с плотностью

$$h(p)\backsim p_1^{v_1-1}\ldots p_m^{v_m-1}(1-p_1-\ldots-p_m)^{v_{m+1}-1} \tag{4.41}$$

на множестве $\rho=\{p: 0\leqslant p_j\leqslant 1, j=1,\ldots,m, \sum_{j=1}^{m}p_j\leqslant 1\}$, параметрами априорного распределения являются числа $v_1,v_2,\ldots,v_m,v_{m+1}$. Рассматривается вектор $u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)$, для которого $u_1=(1-p_1)$ и $u_j=$ $=(1-p_1-\ldots-p_j)/(1-p_1-\ldots-p_{j-1})$, $j=2,\ldots,m$. Величины u_j

однозначно связаны с функцией интенсивности отказов изделия в промежутке $(t, t+\Delta)$:

$$\lambda(t, \Delta) = \frac{F(t+\Delta) - F(t)}{\Delta\,[1 - F(t)]}$$

соотношением

$$u_j = 1 - \lambda(x_{j-1}, x_j - x_{j-1})/(x_j - x_{j-1}).$$

Из соотношения (4.41) следует, что величины $u_1, u_2, \ldots, u_m$ являются априорно независимыми и подчиняются бета-распределению с плотностью

$$h_j(u_j|v) \backsim u_j^{w_j-1}(1-u_j)^{v_j-1}, \qquad v = (v_1, \ldots, v_{m+1}),$$

где $w_j = v_{j+1} + \ldots + v_{m+1}$. Кроме того, из свойства сопряженности распределения Дирихле следует, что апостериорным для u_j также будет бета-распределение, для которого

$$\hbar_j(u_j|z, v) \backsim u_j^{\alpha_j-1}(1-u_j)^{\beta_j-1}, \tag{4.42}$$

где $\alpha_j = \sum_{i=j+1}^{m} (s_i + r_i + v_i) + r_j + v_{m+1}, \qquad \beta_j = s_j + v_j.$

Поскольку F полагается случайной вероятностной мерой, событие $F(t) \in S_0$ является случайным. Для вероятности $P\{F(t) \in S_0 | z, v\}$ в [174] получена следующая оценка сверху:

$$P\{F(t) \in S_0 |z, v\} < P\{u_1 < u_2 < \ldots < u_m |z, v\}.$$

С помощью соотношения (4.42) легко записать

$$P\{u_1 < u_2 < \ldots < u_m | z, v\} = \int_0^1 \int_0^{u_1} \ldots \int_0^{u_{m-1}} \prod_{j=1}^{m} \frac{u_j^{\alpha_j-1}(1-u_j)^{\beta_j-1}}{B(\alpha_j, \beta_j)}\, du_m \ldots du_1, \tag{4.43}$$

причем для целых β_j в работе [175] приведено конечное аналитическое выражение. При больших m, как отмечают Локхнер и Басу, вероятность (4.43) очень близка к $P\{F(t) \in S_0 | z, v\}$. Процедура оценки факта принадлежности $F(t)$ классу стареющих распределений S_0 легко строится, исходя из вероятности (4.43).

Помимо указанной процедуры, с помощью апостериорной плотности (4.42) можно производить оценки вероятностей будущих событий. Пусть ξ – момент отказа изделия при будущем испытании или эксплуатации. Тогда

$$P\{x_{i-1} < \xi \leqslant x_i | z, v\} = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{i-1}(1-\gamma_i), \tag{4.44}$$

где $\gamma_j = \alpha_j/(\alpha_j + \beta_j)$, и поэтому

$$P\{\xi < x_i | z, v\} = \sum_{j=1}^{i} \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{j-1}(1-\gamma_j) = 1 - \prod_{j=1}^{i} \gamma_j. \tag{4.45}$$

С помощью вероятностей (4.44) и (4.45) несложно найти оценки любых показателей надежности.

В работе [94] найден весьма простой способ использования теории Фергюсона. Основываясь на общем выражении (4.6), Коломбо, Константини и Яарсма [94] в качестве априорного представления $F_0(t)$ используют эмпирическую функцию распределения, построенную на некоторой гипотетической выборке $t_h^* = (t_{h_1}^*, t_{h_2}^*, \ldots, t_{h_m}^*)$ моментов отказов. Причем в качестве меры значимости априорной информации $\beta = \alpha(R^1)$ используется число $m + 1$. Если теперь $t^* = (t_1^*, \ldots, t_n^*)$ – выборка моментов отказов, то непараметрическая байесовская оценка $\hat{F}^*(t)$ функции распределения $F(t)$ согласно (4.6) имеет вид

$$\hat{F}^*(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < 0, \\ k/(s+1), \text{ если } t_k \leqslant t < t_{k+1} \ (k = 0, 1, \ldots, s), \\ 1, \text{ если } t_{s+1} \leqslant t, \end{cases} \tag{4.46}$$

где $\{t_1, t_2, \ldots, t_s\}$ – упорядоченная в порядке возрастания совместная выборка $\{t_h^*, t\}$. В работе [94] получено обобщение этого результата на случай цензурированных выборок.

§ 4.2. Непараметрические байесовские оценки, не использующие процессы Дирихле

4.2.1. Нейтральные вправо процессы. Одним из общих представлений априорных стохастических процессов, не сводящихся к процессам Дирихле, являются так называемые *нейтральные вправо процессы*, впервые использованные Доксумом [112]. Нейтральный вправо процесс, в дальнейшем называемый *НП-процессом*, был введен Доксумом в виде случайной вероятностной меры $F(t)$ на R^1 такой, что для любых t_1 и t_2 $(t_1 < t_2)$ отношение $[1 - F(t_2)]/[1 - F(t_1)]$ не зависит от F для любых $t \leqslant t_1$. НП-процесс может быть выражен с помощью так называемого *процесса с независимыми приращениями.*

Данные процессы впервые были введены и исследованы Леви [34]. Согласно определению Леви Y_t называется *случайной функцией с независимыми приращениями,* если ее приращения $Y_{st} = Y_t - Y_s$ на непересекающихся промежутках $[s, t)$ независимы. *Процессом с независимыми приращениями* называется семейство таких случайных функций, заданных на некотором вероятностном пространстве с одними и теми же приращениями [34], с. 561. С помощью Y_t НП-процесс определяется следующим образом [112].

Определение НП-процесса. Случайная функция распределения называется НП-процессом, если она может быть представлена в виде

$$F(t) = 1 - e^{-Y_t}, \tag{4.47}$$

где Y_t – процесс с независимыми приращениями, причем Y_t является неубывающим и непрерывным справа п.н. и

$$\lim_{t \to \infty} Y_t = \infty \text{ п.н.}, \qquad \lim_{t \to -\infty} Y_t = 0 \text{ п.н.}$$

Согласно теории Леви случайный процесс Y_t имеет не более чем счетное число точек разрыва $t_1, t_2, \ldots$. Случайные величины $S_1, S_2, \ldots$, представляющие собой высоты скачков соответственно в точках $t_1, t_2, \ldots$, являются независимыми. Процесс Z_t, определенный в виде разности и суммы скачков

$$Z_t = Y_t - \sum_j S_j I_{[t_j, \infty)}(t),$$

где I_B – индикаторная функция множества, также является неубывающим п.н. процессом с назависимыми приращениями. Причем Z_t не содержит точек разрыва и потому имеет безгранично делимое распределение, для которого справедлива формула Леви

$$\ln E\,[e^{-\theta Z_t}] = -\theta b(t) + \int_0^\infty (e^{-\theta z} - 1)\, dN_t(z),$$

где $b(t)$ – неубывающая непрерываня функция, стремящаяся к нулю при $t \to -\infty$, N_t – непрерывная метрика Леви [34].

Основной результат работы Доксума [112] состоит в том, что если $x_1, \ldots, x_n$ – выборка нецензурированных значений из случайной функции распределения $F(t)$, которая суть НП-процесс, то апостериорное распределение $F(t)$ также является нейтральным вправо. Более подробно, пусть X – выборка размера 1 из $F(t)$. Тогда апостериорное распределение $F(t)$ при $X = x$ является нейтральным вправо. Апостериорное распределение приращения процесса Y_t для $t > x$ совпадает с априорным, а апостериорное распределение приращений процесса Y_t левее x может быть получено путем умножения априорного распределения на e^{-y}. Поэтому, если $h(y)$ – априорная п.р. приращения $Y = Y_t - Y_s$ при $s < t < x$, то для апостериорной п.р. $\hbar(y)$ при $X = x$ получим

$$\hbar(y|x) \backsim e^{-y} h(y).$$

Для завершения описания необходимо найти апостериорное распределение приращения процесса в точке x. Доксум [112] вводит непрерывный слева п.н. процесс $Y_t^- = \lim\limits_{s \to t-0} Y_s$, который также имеет независимые приращения. С помощью этого процесса скачок S в точке x может быть записан как $S = Y_x - Y_x^-$. В общем случае апостериорный процесс Y_t имеет разрыв в точке x независимо от того, существовал ли он априори. Несмотря на простоту представления S, записать апостериорное распределение скачка в точке x, плотность которого обозначим $\hbar_X(s \mid x)$, удается далеко не всегда. Если x – априорно фиксированная точка разрыва с п.р. скачка $h_X(s)$, то $\hbar_X(s \mid x) \backsim (1 - e^s)\, h_X(s)$.

Обобщению работы Доксума на случай цензурированных выборок и построению общей теории НП-процессов посвящена статья Фергюсона и Фадия [128]. Рассмотренный в [128] вид цензурирования имеет особенности. Во-первых, моменты цензурирования являются неслучайными. Во-вторых, различаются два типа неслучайного цензурирования: включающее цензурирование, для которого $X \geqslant x$, и исключающее, $X > x$. Апостериорное распределение $F(t)$ для указанных типов цензурирования устанавливается с помощью теоремы Фергюсона–Фадия.

Теорема 4.2. *Пусть $F(t)$ – НП-случайная функция распределения, X – случайная выборка объема* 1, *а x – вещественное число. Тогда* а) *апостериорное распределение F при условии $X > x$ является нейтральным вправо, апостериорное распределение приращений процесса Y_t вправо от x совпадает с априорным, а для $Y = Y_t - Y_s$ при $s \leqslant t \leqslant x$ справедливо* $\hbar\ (y|\,x) \backsim e^{-y}h(y)$;

б) *апостериорное распределение F при условии $X \geqslant x$ является нейтральным вправо, апостериорное распределение приращения процесса Y_t вправо от x или в точке x совпадает с априорным, а для $Y = Y_t - Y_s$ при $s < t < x$ справедливо* $\hbar\ (y|\,x) \backsim e^{-y}h(y)$.

Согласно этой теореме случай цензурированной выборки оказался проще, поскольку он не требует рассмотрения отдельно апостериорного распределения скачка.

Байесовская оценка $F(t)$ ищется для квадратичной функции потерь и представляет собой математическое ожидание $F(t)$. В соответствии с определением (4.47)

$$F^*(t) = E\,[F(t)] = 1 - E\,[\,e^{-Y_t}] = 1 - M_t(1), \tag{4.48}$$

где $M_t(1)$ – значение моменто-производящей функции $M_t(\theta) = E\,[e^{-\theta Y_t}]$ в точке $\theta = 1$.

Введем ряд величин. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – выборка, а $u_1, \ldots, u_k$ – последовательность отличных друг от друга элементов выборки, упорядоченных таким образом, что $u_1 < u_2 < \ldots < u_k$. Обозначим $\delta_1, \ldots, \delta_k$ количества нецензурированных наблюдений, $\nu_1, \ldots, \nu_k$ – количества исключенно цензурированных, а $\mu_1, \ldots, \mu_k$ – количества включенно цензурированных значений выборки. Совокупность векторов $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_k)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ образует статистику испытаний, обозначаемую в дальнейшем κ. Величина

$$\omega_j = \sum_{i=j+1}^{k} (\delta_i + \nu_i + \mu_i)$$

обозначает число элементов исходной выборки, превышающих u_j, а $j(t)$ – число элементов упорядоченной выборки u_i, меньших или равных t. В дальнейшем будут также использованы следующие обозначения: $M_t^-(\theta) = \lim\limits_{s \to t-0} M_s(\theta)$ – моменто-производящая функция Y_t^-, $h_u(s)$ и $\hbar_u(s\,|\,u)$ – соответственно априорная и апостериорная п.р. скачка $S = Y_t - Y_t^-$ в точке u при условии, что $X = u$. Основным результатом работы [128] является выражение для апостериорной моменто-производящей функции процесса Y_t:

$$M_t(\theta|\kappa) = \frac{M_t(\theta + \omega_{j(t)})}{M_t(\omega_{j(t)})} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{j(t)} \left[\frac{M_{u_i}^-(\theta + \omega_{i-1})}{M_{u_i}^-(\omega_{i-1})} \cdot \frac{C_{u_i}(\theta + \omega_i + \nu_i, \delta_i)}{C_{u_i}(\omega_i + \nu_i, \delta_i)} \cdot \frac{M_{u_i}(\omega_i)}{M_{u_i}(\theta + \omega_i)} \right]. \tag{4.49}$$

Функция $C_u(\alpha, \beta)$, входящая в выражение (4.49), определяется следующим образом:

(i) если u является априорно фиксированной точкой разрыва процесса Y_t, то

$$C_u(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{\alpha s}(1-e^{-s})^\beta h_u(s)\,ds;$$

(ii) если u не является априорно фиксированной точкой разрыва, то

$$C_u(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\alpha s}(1-e^{-s})^{\beta-1}\,\hbar_u(s|u)\,ds \text{ при } \beta\geqslant 1 \text{ и } C=0 \text{ при } \beta=0.$$

Последовательное использование выражений (4.49) и (4.48) позволяет найти байесовскую оценку $F(t)$ или любого ее линейного преобразования. Запишем, в частности, выражение для байесовской оценки ВБР $R(t) = 1 - F(t)$, считая, что $t \in R^+$. Для более лаконичного представления $M_t(1)$ в [128] вводятся функции

$$m_t(\omega)=\frac{M_t(\omega+1)}{M_t(\omega)},\qquad r_u(\alpha,\beta)=\frac{C_u(\alpha+1,\beta)}{C_u(\alpha,\beta)}.$$

В результате

$$\hat{R}^*(t)=E[R(t)|\kappa]=M_t(1|\kappa)=$$

$$=m_t(\omega_{j(t)})\prod_{i=1}^{j(t)}\frac{m_{u_i}(\omega_{i-1})}{m_{u_i}(\omega_i)}\,r_{u_i}(\omega_i-\nu_i,\delta_i). \tag{4.50}$$

Основную трудность вычисления оценки (4.50) составляет нахождение априорной плотности скачка $h_u(s)$ в точке u для одного наблюдения. Существует подкласс НП-процессов, для которых эта задача решается сравнительно просто. Указанный подкласс составляют так называемые однородные НП-процессы, для которых приращение процесса $Y_t = -\ln(1-F(t))$ имеет функцию Леви, не зависящую от времени. Это означает, что моментопроизводящая функция процесса Y_t имеет вид

$$M_t(\theta)=\exp\left[\gamma(t)\int_0^\infty(e^{-\theta z}-1)\,dN(z)\right], \tag{4.51}$$

где $N(\cdot)$ – метрика Леви на $(0,\infty)$, для которой

$$\int_0^\infty z(1+z)^{-1}dN(z)<\infty,$$

и $\gamma(t)$ – неубывающая непрерывная функция, причем $\lim\limits_{t\to-\infty}\gamma(t)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma(t)=\infty$.

Для однородного НП-процесса апостериорная п.р. скачка процесса Y_t в точке x при условии появления одного наблюдения $X = x$ не зависит от значения x и может быть представлена в виде

$$\hbar_x(s|x)\,ds \backsim (1-e^{-z})\,dN(s). \tag{4.52}$$

С помощью соотношения (4.52) при заданной метрике Леви нетрудно записать, в частности, байесовскую оценку ВБР $R^*(t)$. Если ввести функцию

$$\varphi(\alpha, \beta, N) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{\alpha z} (1 - e^{-z})^\beta \, dN(z), & \beta \geq 1, \\ 1, \ \beta = 0, \end{cases} \tag{4.53}$$

то использованные в (4.50) функции $C_u(\alpha, \beta)$, $m_t(\omega)$, $r_u(\alpha, \beta)$ можно записать в конечном виде так:

$$C_u(\alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(\alpha, \beta, N)}{\varphi(0, 1, N)}, \ \beta \geq 1, \\ 1, \ \beta = 0, \end{cases}$$

$$m_t(\omega) = \exp\left[-\gamma(t)\,\varphi(\omega, 1, N)\right], \tag{4.54}$$

$$r_u(\alpha, \beta) = \frac{\varphi(\alpha + 1, \beta, N)}{\varphi(\alpha, \beta, N)}. \tag{4.55}$$

Ниже приводятся примеры непараметрических байесовских оценок для двух специальных видов однородных НП-процессов.

Пример 4.5. Гамма-процесс. Если независимые приращения процесса Y_t имеют гамма-распределение, то такой процесс Y_t называется *гамма-процессом*. Моменто-производящая функция гамма-процесса может быть записана в одной из трех приведенных ниже форм

$$M_t(\theta) = \frac{\tau^{\gamma(t)}}{\Gamma(\gamma(t))} \int\limits_0^\infty e^{-\theta y} e^{-\tau y} y^{\gamma(t) - 1} \, dy =$$

$$= \left(\frac{\tau}{\tau + \theta}\right)^{\gamma(t)} = \exp\left[\gamma(t) \int\limits_0^\infty (e^{-\theta z} - 1)\, e^{-\tau z} z^{-1} dz\right]. \tag{4.56}$$

Гамма-процесс имеет параметр формы $\gamma(t)$ и параметр обратного масштаба (или интенсивности) τ, не зависящий от t. Сопоставляя выражения (4.51) и (4.56), для метрики Леви запишем

$$dN(z) = e^{-\tau z} z^{-1} \, dz.$$

Поэтому для гамма-процесса функция (4.53) принимает вид

$$\varphi(\alpha, \beta, N) \equiv \varphi_\Gamma(\alpha, \beta) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{-\alpha z} (1 - e^{-z})^\beta z^{-1} \, dz, & \beta \geq 1, \\ 1, \ \beta = 0. \end{cases} \tag{4.57}$$

Поскольку β – целое число, $\varphi_\Gamma(\alpha, \beta)$ можно записать в конечном виде, используя биномиальную формулу и последующее интегрирование,

$$\varphi_\Gamma(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{\beta - 1} \binom{\beta - 1}{i} (-1)^i \ln\left(\frac{\alpha + i + 1}{\alpha + i}\right). \tag{4.58}$$

С помощью общего выражения (4.50) путем прямой подстановки можно получить байесовскую оценку ВБР для априорного однородного гамма-процесса:

$$\hat{R}^*(t)=\left(\frac{\omega_{j(t)}+\tau}{\omega_{j(t)}+\tau+1}\right)^{\gamma(t)}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{j(t)}\left\{\left[\frac{(\omega_{i-1}+\tau)(\omega_i+\tau+1)}{(\omega_{i-1}+\tau+1)(\omega_i+\tau)}\right]^{\gamma(u_i)}\cdot\frac{\varphi_\Gamma(\omega_i+\nu_i+\tau+1,\delta_i)}{\varphi_\Gamma(\omega_i+\nu_i+\tau,\delta_i)}\right\}. \tag{4.59}$$

Особенностью рассмотренных выше процессов Дирихле является простая интерпретация $\alpha(R^1)$ и интерпретация метрики $\alpha(\cdot)$ с помощью априорного представления функции распределения. В работе [128] Фергюсон и Фадия аналогичный вопрос исследуют для гамма-процессов. Пусть $R_0(t)$ – априорное представление ВБР $R(t)$. Согласно соотношениям (4.56) параметры τ и $\gamma(t)$ должны удовлетворять условию $(\tau/(\tau+1))^{\gamma(t)}=$ $=R_0(t)$, из которого для любого t, входящего в область определения функции $\gamma(t)$, при фиксированном τ получим

$$\gamma(t)=\frac{\ln R_0(t)}{\ln[\tau/(\tau+1)]}. \tag{4.60}$$

Параметр τ можно интерпретировать как меру уверенности в априорном представлении. Такая интерпретация становится ясной, если рассмотреть $\hat{R}^*(t)$ для одного нецензурированного наблюдения. При $n=1$ из общего выражения (4.59) имеем

$$\hat{R}^*(t)=E[R(t)|X=x]=\begin{cases}R_0(t)^{l(\tau)}, & t<x,\\ R_0(t)R_0(x)^{l(\tau)-1}\,l(\tau), & t\geqslant x,\end{cases} \tag{4.61}$$

где

$$l(\tau)=\frac{\ln[(\tau+2)/(\tau+1)]}{\ln[(\tau+1)/\tau]}.$$

Функция $l(\tau)$ монотонна по τ, причем при $\tau\to 0$ имеем $l(\tau)\to 0$, а при $\tau\to\infty$ $l(\tau)\to 1$. Как видно из полученного выражения (4.60), при большом τ $l(\tau)$ близка к 1, и оценка $\hat{R}^*(t)$ близка к $R_0(t)$. При малых τ априорная форма ВБР $R_0(t)$ существенно деформируется функцией $l(\tau)$. В этой связи интересно исследовать поведение оценки при $\tau\to 0$, т.е. когда априорное представление отсутствует. Напомним, что основанная на процессах Дирихле байесовская оценка в аналогичных условиях стремится к оценке максимального правдоподобия. В [128] этот вопрос исследован для нецензурированной выборки при $\nu_i=0$, $\delta_i=1$ и $\omega_i=n-i$ для всех $i=1,2,\ldots,n$. Параметр $\gamma(t)$ выбирается в соответствии с (4.60). Из общего выражения (4.61) при $\tau\to 0$ имеем

$$E[R(t)|\kappa]\to\frac{\ln[(n+1)/n]}{\ln[(n-j(t)+1)/(n-j(t))]}. \tag{4.62}$$

Данный предел не совпадает с оценкой максимального правдоподобия.

Пример 4.6. Простой однородный процесс. Данный процесс искусственно подобран Фергюсоном для того, чтобы избежать отмеченного недостатка гамма-процесса. Производящая функция моментов для рассматриваемого процесса имеет вид

$$M_t(\theta) = \exp\left[\gamma(t) \int_0^{\infty} (e^{-\theta z} - 1) e^{-\tau z} (1 - e^{-z})^{-1} dz\right], \qquad (4.63)$$

а метрика Леви записывается следующим образом:

$$dN(z) = e^{-\tau z}(1 - e^{-z})^{-1}\, dz. \qquad (4.64)$$

Априорное представление для ВБР $R_0(t)$ позволяет записать параметр γ:

$$\gamma(t) = -\tau \ln R_0(t), \qquad (4.65)$$

а параметр τ по-прежнему имеет смысл степени уверенности в априорном представлении. С использованием формулы (4.65) апостериорная оценка для ВБР в конечном виде записывается так:

$$\hat{R}^*(t) = E\,[R(t)|\kappa] = [R_0(t)]^{\frac{\tau}{\omega_{j(t)}+\tau}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{j(t)} \left\{ [R_0(u_i)]^{-\frac{\tau(\omega_{i-1}-\omega_i)}{(\omega_{i-1}+\tau)(\omega_i+\tau)}} \cdot \frac{\omega_i + \nu_i + \tau}{\omega_i + \nu_i + \delta_i + \tau} \right\}. \qquad (4.66)$$

При $\tau \to 0$

$$\hat{R}^*(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{j(t)} \dfrac{\omega_i + \nu_i}{\omega_i + \nu_i + \delta_i}, & t < u_k, \\[2ex] \dfrac{R_0(t)}{R_0(u_k)} \prod_{i=1}^{k} \dfrac{\omega_i + \nu_i}{\omega_i + \nu_i + \delta_i}, & t \geqslant u_k, \end{cases} \qquad (4.67)$$

что совпадает с оценкой максимального правдоподобия. В частности, если отсутствует включающее цензурирование, оценка (4.67) есть оценка Каплана–Мейера.

Важным практическим приложением теории НП-процессов являются результаты работы Калблеича, посвященной байесовскому анализу модели надежности Кокса [153]

$$R(t) = P\{\xi > t | z\} = \exp[-\Lambda(t)\exp(z\beta)], \qquad (4.68)$$

где $z = (z_1, \ldots, z_p)$ – вектор параметров изделия, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)'$ – вектор регрессионных коэффициентов, $\Lambda(t)$ – функция ресурса, определенная ранее. Задача состоит в оценке ВБР вида (4.68), исходя из некоторых априорных представлений о распределении случайной величины ξ и результатов эксперимента $(t_1, z^{(1)})$, $(t_2, z^{(2)})$, ..., $(t_n, z^{(n)})$, где $z^{(j)}$ – реализация вектора z в j-м опыте.

Решение задачи осуществляется по следующей схеме:

(i) исходя из априорных соображений, выбирают априорную оценку функции ресурса $\Lambda_0(t)$;

(ii) для выбранной оценки $\Lambda_0(t)$ находят оценки регрессионных коэффициентов модели (4.68);

(iii) при известном векторе β определяют апостериорную оценку функции ресурса $\Lambda^*(t)$.

Окончательная оценка ВБР $R(t)$ определяется путем подстановки в (4.68) $\Lambda^*(t)$ и оценки вектора регрессионных коэффициентов.

Для получения байесовской оценки функции ресурса полагают, что $\Lambda(t)$ является стохастическим процессом, который исследуется с помощью следующей модели. Положительную полуось $[0, \infty)$ разбивают на k непересекающихся промежутков $[a_0, a_1)$, $[a_1, a_2)$, ..., $[a_{k-1}, a_k)$, причем $a_0 = 0$, $a_k = \infty$. Для каждого промежутка вводят условную вероятность

$$q_i = P\{\xi \in [a_{i-1}, a_i) | \xi \geqslant a_{i-1}, \Lambda\}, \qquad (4.69)$$

если $P\{\xi \geqslant a_{i-1} | \Lambda\} > 0$, и $q_i = 1$ в противном случае. Из выражения (4.69) следует, что $\Lambda(a_0) = 0$ и

$$\Lambda(a_i) = \sum_{j=1}^{i} -\ln(1 - q_j) = \sum_{j=1}^{i} r_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

В дальнейшем полагают, что $\Lambda(t)$ является неубывающим процессом с независимыми приращениями. Это допущение приводит к тому, что случайные величины $q_1, q_2, \ldots, q_k$ имеют независимые априорные распределения, а стохастический процесс, образованный совокупностью $q_1, q_2, \ldots, q_k$, является НП-процессом. Для описания стохастического процесса $\Lambda(t)$ необходимо задать распределения для приращений $r_i = -\ln(1 - q_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. В работе [153] принимается, что $r_1, \ldots, r_k$ имеют независимые гамма-распределения

$$r_i \sim \Gamma(\alpha_i - \alpha_{i-1}, c), \qquad (4.70)$$

где c – некоторая постоянная, а параметры α_i определяются с помощью специальным образом выбранной функции ресурса $\Lambda_0(t)$. Параметры c и $\Lambda_0(t)$ имеют простую интерпретацию. Если рассмотреть разбиение $(0, t)$, $[t, \infty)$, то из предположения (4.7) следует, что $\Lambda(t) \sim \Gamma(c\Lambda_0(t), c)$ и $E[\Lambda(t)] = \Lambda_0(t)$, $D[\Lambda(t)] = \Lambda_0(t)/c$. Таким образом, $\Lambda_0(t)$ имеет смысл априорного представления о функции ресурса, а c – величина, показывающая степень весомости этого априорного представления.

Оценки регрессионных коэффициентов определяются с помощью метода максимального правдоподобия по следующей схеме. Для выборки $(t_1, z^{(1)}), \ldots, (t_n, z^{(n)})$ записывают распределение

$$P\{\xi_1 \geqslant t_1, \ldots, \xi_n \geqslant t_n | \beta, \underset{\sim}{z}, \Lambda\} = \exp\{-\sum_{i=1}^{n} \Lambda(t_i) \exp(z^{(i)}\beta)\}, \qquad (4.71)$$

которое является условным по отношению к стохастическому процессу $\Lambda(t)$. С помощью $\underset{\sim}{z}$ обозначается матрица размерности $p \times n$ с исходами n опытов. Ясно, что для получения оценки β необходимо исключить зависимость распределения (4.71) от $\Lambda(t)$. Это достигается с помощью предположения

$$r_i = \Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}) \sim \Gamma(c\Lambda_0(t_i) - c\Lambda_0(t_{i-1}), c), \qquad i = 1, \ldots, n+1,$$

где без ограничения общности принято, что $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ и $t_0 = 0, t_{n+1} =$

$= \infty$. Здесь t_i играют роль a_i в предыдущих рассуждениях. Поскольку $\Lambda(t_i) = \sum_{j=1}^{i} r_j$, распределение (4.71) перепишется следующим образом:

$$P\{\xi_1 \geqslant t_1, \ldots, \xi_n \geqslant t_n \mid \beta, \underset{\sim}{z}, r_1, \ldots, r_{n+1}\} = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} r_j A_j\right), \tag{4.72}$$

где

$$A_j = \sum_{l=j}^{n} \exp(z^{(l)}\beta), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Интегрирование распределения (4.71) по многомерному гамма-распределению (4.72) позволяет получить

$$P\{\xi_1 \geqslant t_1, \ldots, \xi_n \geqslant t_n \mid \beta, \underset{\sim}{z}\} = \exp\left[-\sum_{j=1}^{n} cB_j \Lambda_0(t_j)\right], \tag{4.73}$$

где

$$B_j = -\ln\left[1 - \exp(z^{(j)}\beta)/(c + A_j)\right].$$

Выражение (4.73) справедливо при любой $\Lambda_0(t)$, дискретной или непрерывной. Если положить, что $\Lambda_0(t)$ является непрерывной и совпадения элементов выборки отсутствуют, то путем дифференцирования выражения (4.73) можно получить плотность распределения, которая интерпретируется как функция правдоподобия $l(\beta)$. В конечном виде функция $l(\beta)$ имеет вид [153]

$$l(\beta) = c^n \exp\left[-\sum_{j=1}^{n} cB_j \Lambda_0(t_j)\right] \prod_{i=1}^{n} \lambda_0(t_i) B_i, \tag{4.74}$$

где $\lambda_0(t) = \Lambda_0'(t)$.

Найденная с помощью минимизации функции (4.74) оценка максимального правдоподобия β_* используется в дальнейшем при нахождении апостериорной байесовской оценки $\Lambda^*(t)$. Эта оценка определяется в [153] при помощи использования свойства сопряженности гамма-распределения, в соответствии с которым величины $r_1, r_2, \ldots, r_k$ имеют независимые апостериорные гамма-распределения. Сначала рассмотрен случай выборки единичного объема, затем проведено обобщение для произвольного n. Конечным результатом работы [153] является следующее утверждение:

Теорема 4.3. *Если выборка $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ не содержит одинаковых значений и $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, то для $t \in [t_{i-1}, t_i)$ апостериорное распределение $\Lambda(t)$ совпадает с распределением суммы случайных величин*

$$X_1 + U_1 + \ldots + X_{i-1} + U_{i-1} + \delta_i,$$

где

$$X_j \sim \Gamma\left[c\Lambda_0(t_{j-1}) - c\Lambda_0(t_j), \quad c + A_j\right],$$

$$\delta_i \sim \Gamma\left[c\Lambda_0(t) - c\Lambda_0(t_{i-1}), c + A_i\right],$$

$$U_j \sim U(c + A_j, \quad c + A_{j+1}).$$

Последнее распределение $U(a, b)$ имеет следующую функцию плотности:

$$f(u) = \frac{\exp(-bu) - \exp(-au)}{u \ln(a/b)} .$$

Если для получения апостериорной оценки функции ресурса воспользоваться квадратичной функцией потерь, то окончательное выражение для $\hat{\Lambda}^*(t)$ можно записать следующим образом:

$$\hat{\Lambda}^*(t) = E\,[\Lambda(t)|\tau, \underset{\sim}{z}, \beta_*] = \sum_{j=1}^{i-1} (E(X_j) + E(U_j)) + E(\delta_j),$$

где $E(X_j)$ и $E(\delta_i)$ – математические ожидания случайных величин, имеющих соответствующие гамма-распределения, а для $E(U_j)$ справедлива формула

$$E(U_j) = \frac{\exp(z^{(j)}\beta)}{(c + A_j)(c + A_{j+1})} \ln \frac{c + A_{j+1}}{c + A_j} . .$$

При малых c, что соответствует случаю отсутствия априорной информации, значения $E(X_j)$ и $E(\delta_j)$ близки к нулю, а $\hat{\Lambda}^*(t)$ почти совпадает с оценкой максимального правдоподобия.

4.2.2. Обобщенные гамма-процессы. В работе [115] Дикстра и Лауд, решая задачу оценивания ВБР, проводят альтернативное построение гамма-процессов, которые не являются нейтральными вправо. Предлагаемые в [115] априорные распределения являются абсолютно непрерывными и поэтому не могут быть сведены к описанным выше априорным распределениям Фергюсона и Доксума.

Рассматриваемый метод построения непараметрической байесовской оценки ВБР основан на так называемых *обобщенных гамма-процессах* (*ОГ-процессах*), которые определяются следующим образом. Пусть параметры гамма-распределения $\Gamma(\alpha, \beta)$ с плотностью

$$g(t; \alpha, \beta) = t^{\alpha - 1} \exp\left(-\frac{t}{\beta}\right) I_{(0,\infty)}(t) / (\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha})$$

являются функциями t. Причем $\alpha(t) > 0$ $(t \geqslant 0)$ – неубывающая непрерывная справа вещественная функция $(\alpha(0) = 0)$, а $\beta(t)$ – положительная непрерывная справа вещественная функция, имеющая предел слева в точке 0. С помощью $Z(t)$ обозначим гамма-процесс с независимыми приращениями по отношению к $\alpha(t)$. Для любых двух точек t и s $(t > s)$ приращение $Z(t) - Z(s)$ не зависит от приращений процесса на других промежутках, не пересекающихся с $[s, t]$, и подчиняется гамма-распределению $\Gamma(\alpha(t) - \alpha(s), 1)$. Кроме того, $Z(0) = 0$. Существование таких процессов доказывается Фергюсоном [126].

Определение ОГ-процесса. Пусть процесс $Z(t)$ имеет неубывающие непрерывные слева выборочные траектории. Тогда стохастический процесс

$$\lambda(t) = \int_0^t \beta(x)\, dZ(x), \tag{4.75}$$

где $\beta(x)$ – положительная непрерывная справа вещественная функция, имеющая предел слева в точке $x = 0$, а интегрирование производится в отношении выборочных траекторий, называется обобщенным гамма-процессом $\Gamma(\alpha(\cdot), \beta(\cdot))$.

Стохастический процесс (4.75) служит для описания случайной функции интенсивности отказов. С его помощью случайная функция распределения записывается в виде

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda(x)\,dx\right]. \tag{4.76}$$

Сравним проведенное построение с теорией НП-процессов Доксума–Фергюсона. В соответствии с последней ф.р. $F(t)$ является нейтральной вправо только в том случае, если $\Lambda(t)$ имеет независимые приращения. Легко видеть, что введенная с помощью соотношения (4.75) функция интенсивности $\lambda(t)$ является процессом с независимыми приращениями, следовательно, $\Lambda(t)$ не имеет независимых приращений, а $F(t)$ не является НП-процессом.

В работе [115] доказано, что характеристическая функция для $\lambda(t)$ в некоторой окрестности нуля имеет вид

$$\psi_{\lambda(t)}(\theta) = \exp\left\{-\int_0^t \ln\left[1 - i\beta(s)\theta\right] d\alpha(s)\right\},$$

откуда для математического ожидания и дисперсии соответственно будут справедливы формулы

$$E[\lambda(t)] = \int_0^t \beta(s)\,d\alpha(s), \qquad D[\lambda(t)] = \int_0^t \beta^2(s)\,d\alpha(s). \tag{4.77}$$

Используя представление интенсивности отказов с помощью ОГ-процесса, условное распределение выборки объема n записывается в виде

$$P\{\xi_1 \geqslant t_1, \ldots, \xi_n \geqslant t_n \,|\, \lambda(t)\} = \prod_{i=1}^{n} \exp\left[-\int_0^{t_i} \lambda(t)\,dt\right]. \tag{4.78}$$

С помощью распределения (4.78) можно получить апостериорное распределение случайной интенсивности $\lambda(t)$ при данной выборке. Заметим, что поскольку процесс $Z(t)$ имеет неубывающие реализации, в силу определения (4.75) $\lambda(t)$ является неубывающей почти наверное функцией. Поэтому априорное представление о функции распределения $F(t)$ следует искать в классе стареющих распределений S_0.

Априорное распределение для $\lambda(t)$ может быть записано, если заданы функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Последние определяются с помощью выражений (4.77) при условии, что заданы неубывающее среднее $\mu(t)$ и дисперсия $\sigma^2(t)$. Функция $\mu(t)$ имеет смысл априорного представления о $\lambda(t)$, а дисперсия $\sigma^2(t)$ характеризует степень неопределенности (неуверенности) относительно значения интенсивности отказов в каждой точке t. Соотношения (4.77) перепишем в виде

$$\mu(t) = \int_0^t \beta(s)\,\alpha'(s)\,ds, \qquad \sigma^2(t) = \int_0^t \beta^2(s)\,\alpha'(s)\,ds,$$

откуда

$$\beta(t)=\frac{d\sigma^2(t)}{dt}\Big/\frac{d\mu(t)}{dt}, \qquad (4.79)$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt}=\left[\frac{d\mu(t)}{dt}\right]^2\Big/\frac{d\sigma^2(t)}{dt}. \qquad (4.80)$$

Выражения (4.79), (4.80) позволяют записать априорное распределение $\Gamma(\alpha(t),\beta(t))$.

Для апостериорного распределения стохастического процесса $\lambda(t)$ Дикстра и Лауд [115] доказывают следующие утверждения:

(i) если $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ – полностью цензурированная выборка, то апостериорным распределением $\lambda(t)$ при данной выборке τ является $\Gamma(\alpha(\cdot),\beta(\cdot))$, причем

$$\hat{\beta}(t) = \frac{\beta(t)}{1+\beta(t)\sum\limits_{i=1}^{k}(t_i-t)\chi(t_i-t)}; \qquad (4.81)$$

(ii) если $\tau = (t_1^*, t_2^*, \ldots, t_d^*)$ – нецензурированная выборка, то апостериорное распределение $\lambda(t)$ при данной выборке τ есть смесь обобщенных гамма-процессов:

$$P\{\lambda(t)\in B\mid\tau\}=$$

$$=\frac{\int\limits_0^{t_d^*}\ldots\int\limits_0^{t_1^*}\prod\limits_{i=1}^{d}\hat{\beta}(z_i)F(B;\Gamma(\alpha+\sum\limits_{i=1}^{d}I_{(z_i,\infty)}\hat{\beta}(z_i))\prod\limits_{i=1}^{d}d\,[\alpha+\sum\limits_{j=i+1}^{d}I_{(z_j,\infty)}](z_i)}{\int\limits_0^{t_d^*}\ldots\int\limits_0^{t_1^*}\prod\limits_{i=1}^{d}\hat{\beta}(z_i)\prod\limits_{i=1}^{d}d\,[\alpha+\sum\limits_{j=i+1}^{d}I_{(z_j,\infty)}](z_i)}, \qquad (4.82)$$

где $F(B;\ Q)$ обозначает вероятность события B для стохастического процесса, распределенного по закону Q, интегрирование производится итеративно от z_1 до z_d.

Если использовать квадратичную функцию потерь, то апостериорная оценка интенсивности отказов $\lambda(t)$ определится в виде апостериорного среднего. Для случая полностью цензурированной выборки $\hat{\lambda}^*(t)$ является математическим ожиданием, относящимся к распределению $\Gamma(\alpha(t), \hat{\beta}(t))$, где $\hat{\beta}(t)$ вычисляется с помощью выражения (4.81). В случае нецензурированной выборки $\hat{\lambda}^*(t)$ является средним значением величины, имеющей распределение (4.82), и записывается с помощью весьма громоздкой формулы

$$\hat{\lambda}^*(t) =$$

$$=\frac{\int\limits_0^{t_d^*}\ldots\int\limits_0^{t_1^*}\int\limits_0^{t}\prod\limits_{i=0}^{d}\hat{\beta}(z_i)\prod\limits_{i=0}^{d}d\,[\alpha(z_i)+\sum\limits_{j=i+1}^{d}I_{(z_j,\infty)}(z_i)]}{\int\limits_0^{t_d^*}\ldots\int\limits_0^{t_1^*}\prod\limits_{i=1}^{d}\hat{\beta}(z_i)\prod\limits_{i=1}^{d}d\,[\alpha(z_i)+\sum\limits_{j=i+1}^{d}I_{(z_j,\infty)}(z_i)]}. \qquad (4.83)$$

Цензурированные данные могут быть добавлены при вычислении $\hat{\lambda}^*(t)$ по формуле (4.83) за счет параметра $\hat{\beta}$, который рассчитывается с помощью формулы (4.81) как по цензурированным, так и по нецензурированным данным.

4.2.3. Другие подходы. Интересным примером построения непараметрической байесовской оценки ВБР, не связанной с теориями Фергюсона и Доксума, является подход Паджета и Уэя [190]. В соответствии с этим подходом априорное распределение задается с помощью ступенчатого стохастического процесса для интенсивности отказов $\lambda(t)$, устроенного следующим образом. Функция $\lambda(t)$ представляет собой ступенчатый процесс с постоянными скачками, равными ϵ, в точках $T_1, T_2, \ldots$, которые являются моментами появления событий пуассоновского процесса с интенсивностью ν. Такое представление $\lambda(t)$ связано с очевидной физической интерпретацией: в случайные моменты времени $T_1, T_2, \ldots$ устройство подвергается негативному воздействию, которое увеличивает интенсивность отказов на постоянную величину ϵ; скачки происходят в соответствии с пуассоновским потоком.

Согласно сделанным предположениям функции интенсивности $\lambda(t)$ и ресурса $\Lambda(t)$ записываются следующим образом:

$$\lambda(t) = \epsilon N(t), \tag{4.84}$$

$$\Lambda(t) = \epsilon \sum_{i=1}^{N(t)} (t - T_i), \tag{4.85}$$

где $N(t)$ – количество пуассоновских событий, появившихся к моменту времени t. Таким образом, априорное распределение задается с помощью стохастического процесса $\lambda(t)$ на параметрическом пространстве Θ, которое определяется множеством всех неубывающих функций интенсивности. Никаких предположений о $F(t)$, кроме $F(t) \in S_0$, не делается. С помощью стохастического процесса $\lambda(t)$ процесс $R(t)$ записывается в виде

$$R(t) = 1 - F(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right] = \exp\left[-\epsilon \sum_{i=1}^{N(t)} (t - T_i)\right]. \tag{4.86}$$

Заметим, что соотношение (4.86) при выбранном способе задания процесса $\lambda(t)$ дает непрерывное представление для $F(t)$, что подчеркивает невозможность сведения настоящего подхода к теориям Фергюсона и Доксума. Обращает на себя внимание компактность формы представления априорной информации: для определения априорного процесса $\lambda(t)$ достаточно задать два числа: величину скачка ϵ и параметр интенсивности пуассоновского потока ν.

Апостериорная вероятностная мера $P_n(B)$ для $B \in \Theta$ определяется с помощью теоремы Байеса, которая в работе [190] записывается следующим образом:

$$P_n(B) = \frac{\int_B l(\epsilon, \nu;\ \tau)dP_0}{\int_\Theta l(\epsilon, \nu;\ \tau)dP_0}, \tag{4.87}$$

где $l(\epsilon, \nu;\ \tau)$ – функция правдоподобия, основанная на выборке τ. Если

τ – цензурированная выборка, $\tau = (t_1^*, \ldots, t_d^*, t_1, \ldots, t_k)$, то для функции правдоподобия справедливо выражение

$$l(\epsilon, \nu;\ \tau) = \prod_{i=1}^{d} \epsilon N(t_i^*) \prod_{i=1}^{n} \exp\left[-\epsilon \sum_{j=1}^{N(\tau_i)} (\tau_i - T_j)\right]. \tag{4.88}$$

При использовании квадратичной функции потерь байесовской оценкой $\hat{R}^*(t)$ является апостериорное среднее, соответствующее распределению (4.87):

$$\hat{R}^*(t) = E[R(t) \mid \tau] = \frac{\int\limits_{\Theta} R(t) l(\epsilon, \nu;\ \tau) dP_0}{\int\limits_{\Theta} l(\epsilon, \nu;\ \tau) dP_0}, \tag{4.89}$$

в котором $R(t)$ задается выражением (4.86), а $l(\epsilon, \nu;\ \tau)$ – выражением (4.88). Входящие в соотношение (4.89) интегралы, по существу, выражают факт осреднения соответствующих подынтегральных функций по возможным значениям $N(\tau_1), \ldots, N(\tau_n),\ T_1, \ldots, T_{N(\tau_n)}$. Например,

$$\int\limits_{\Theta} l(\epsilon, \nu;\ \tau) dP_0 = \int\limits_{\Theta} \prod_{i=1}^{d} [\epsilon N(t_i^*)] \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N(\tau_i)} \epsilon(\tau_i - T_j)\right] \times$$
$$\times\ dP\{N(\tau_1), \ldots, N(\tau_n),\ T_1, \ldots, T_{N(\tau_n)}\}. \tag{4.90}$$

Нахождение интегралов типа (4.90) сопряжено с большими вычислительными трудностями. В работе [190] приведен соответствующий алгоритм, который может быть реализован только на ЭВМ. Рассмотренный в [190] численный пример свидетельствует о работоспособности подхода на практике и удовлетворительном качестве оценки (4.89).

Интересное непараметрическое решение найдено Прошаном и Сингпурвалой в работах [199, 200]. Рассматривается задача оценки интенсивности отказов технического устройства по результатам форсированных испытаний и априорной информации специального вида. Предполагается, что изделие испытывается в k режимах, каждому j-му режиму соответствует своя функция интенсивности отказов $\lambda_j(t)$, причем

$$\lambda_1(t) > \lambda_2(t) > \ldots > \lambda_k(t) > \lambda(t), \tag{4.91}$$

где $\lambda(t)$ – интенсивность отказов при работе в нормальном режиме. Для получения байесовской оценки в [199] используется стохастический процесс, который устроен следующим образом.

Пусть $N_j(t)$ – число изделий, проходящих испытания в j-м режиме к моменту t. Интервал времени возможных продолжительностей испытаний $[0, L]$ точками $s_1, s_2, \ldots$ разбивается на равные промежутки длиной $\Delta > 0$, так что общее число таких промежутков $m = L/\Delta$. Введем обозначения: $N_{j,i}$ – число изделий, подверженных испытаниям в i-м промежутке в j-м режиме, $d_{j,i}$ – соответствующее число отказов, $p_{j,i}$ – вероятность наблюдения отказа в i-м промежутке при испытаниях в j-м режиме. Используемый в дальнейших рассуждениях стохастический процесс задается с помощью средней интенсивности в промежутке $[s_i, s_i + \Delta]$:

$$\mu_{j,i} = \frac{p_{j,i}}{1 - \sum\limits_{l=1}^{i-1} p_{l,i}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{4.92}$$

которая по смыслу является условной вероятностью отказа к моменту $s_i + \Delta$ при условии, что к моменту s_i изделие было работоспособным. Предполагается, что каждая величина $\mu_{j,i}$ подчиняется бета-распределению $\mathrm{Be}(\alpha, \beta_j)$ с плотностью

$$h_{j,i}(p) = h_{j,i}(p;\ \alpha, \beta_j) \backsim p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta_j - 1},$$

причем в совокупности случайные величины $\mu_{j,i}$ являются независимыми. Множество всех $\mu_{j,i}$ образует априорный стохастический процесс, определенный на параметрическом пространстве, для которого выполняется условие (4.91). Носителями априорной информации являются параметры α, β_1, β_2, ..., β_k. Для выполнения условия (4.91) необходимо, чтобы $\mu_{j-1,i} > \mu_{j,i}$ почти наверное для всех $j = 2, 3, \ldots, k$. В [200] показано, что это возможно, если $\beta_1 < \ldots < \beta_k$. Последнее неравенство отражает отличие в жесткости режимов испытаний.

Процедура нахождения апостериорного распределения условных вероятностей $\mu_{j,i}$ основана на свойстве сопряженности бета-распределения применительно к рассматриваемому выборочному плану, предполагающему отсутствие цензурирования. В работе [199] доказывается, что апостериорное распределение $\mu_{j,i}$ при данных $N_{j,i}$ и $d_{j,i}$ является бета-распределением

$$\mathfrak{h}_{j,i}(p \mid N, d) = \frac{\Gamma(\alpha^*_{j,i} + \beta^*_{j,i})}{\Gamma(\alpha^*_{j,i})\,\Gamma(\beta^*_{j,i})}\, p^{\alpha^*_{j,i} - 1}(1-p)^{\beta^*_{j,i} - 1}, \tag{4.93}$$

где $\alpha^*_{j,i} = \alpha + d_{j,i}$, $\beta^*_{j,i} = \beta_j + N_{j,i} - d_{j,i}$.

Теперь, если для получения байесовской оценки $\mu_{j,i}$ использовать квадратичную функцию потерь, то эта оценка примет вид апостериорной средней, соответствующей распределению (4.93):

$$\hat{\mu}^*_{j,i} = \frac{\alpha + d_{j,i}}{\alpha + \beta_j + N_{j,i}}. \tag{4.94}$$

Предполагаемый подход в целом характеризует ясность логического построения и простоту вычислительного алгоритма. В то же время остается неясным, из каких соображений следует выбирать параметры априорного распределения α и β_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

§ 4.3. Непараметрический байесовский подход к оценке квантилей стареющих распределений

В теории надежности представляет интерес получение статистических выводов о значении квантили x_p уровня p для стареющих распределений:

$$x_p = \inf\{x\colon\ F(x) \geqslant p\}. \tag{4.95}$$

В настоящем параграфе рассматривается задача определения байесовской оценки x_p в предположении, что $F(x)$ принадлежит классу стареющих распределений S_0. В статье [3] показано, что для аппроксимации стареющих ф.р. естественно использовать двухпараметрическое семейство E_0 экспоненциальных ф.р. следующего вида:

$$F(t;\ \theta) = \chi(t-\mu)\left[1-\exp\left(-\frac{t-\mu}{m_0}\right)\right], \tag{4.96}$$

где μ – абсолютно гарантированное время безотказной работы, $(\mu + m_0)$ – среднее время безотказной работы, $\theta = (\mu, m_0)$. Для этого семейства квантиль уровня p имеет вид

$$x_p = \mu + m_0\Lambda_p, \qquad \Lambda_p = \ln\frac{1}{1-p}. \tag{4.97}$$

Существо подхода, который был предложен Беляевым [3] и излагается ниже, заключается в использовании байесовской оценки квантили x_p, найденной для параметрического семейства E_0, при построении оценки аналогичной квантили для $F(t) \in S_0$. Это осуществляется путем задания преобразования u_p: $F \to F_0$ $(F \in S_0,\ F_0 \in E_0)$ и определения нижней границы апостериорной вероятности утверждения $\{x_p \geqslant x\}$ по всем возможным преобразованиям u_p. Байесовская оценка x_p строится на основании выборки $\tau = (t_1^*, \ldots, t_d^*, t_1, \ldots, t_k)$, полученной в результате реализации НЦ-плана.

Для записи функции правдоподобия $l(\theta \mid \tau) = l(\mu,\ m_0 \mid \tau)$ используется общее выражение (3.22), в соответствии с которым

$$l(\mu, m_0 \mid \tau) = c(\tau)\prod_{i=1}^{d}\chi(t_i^*-\mu)\,\frac{1}{m_0^d}\exp\left[-\frac{1}{m_0}\int_\mu^\infty N(t)dt\right],$$

где $N(t)$ – число изделий, испытываемых в момент t, $c(\tau)$ не зависит от параметров μ и m_0. Данное выражение можно упростить, если учесть, что

$$\prod_{i=1}^{d}\chi(t_i^*-\mu) = \chi(t_{(1)}^*-\mu),$$

где $t_{(1)}^* = \min(t_1^*, t_2^*, \ldots, t_d^*)$, а

$$\int_\mu^\infty N(t)dt = \int_{t_{(1)}}^\infty N(t)dt + \int_\mu^{t_{(1)}} N(t)dt = s(t_{(1)}^*) + s(\mu, t_{(1)}^*),$$

причем статистики $s(t_{(1)}^*)$ и $s(\mu,\ t_{(1)}^*)$ имеют смысл суммарных наработок соответственно за время испытаний после наступления первого отказа $t_{(1)}^*$ и в промежутке $[\mu,\ t_{(1)}^*]$. Если отказы при испытаниях отсутствуют, то следует положить $t_{(1)}^*$ равным времени T проведения испытаний. Окончательное выражение для функции правдоподобия имеет вид

$$l(\theta \mid \tau) = c(\tau)\chi(t_{(1)}^*-\mu)\,\frac{1}{m_0^d}\exp\left[-\frac{s(t_{(1)}^*)+s(\mu, t_{(1)}^*)}{m_0}\right]. \tag{4.98}$$

Априорная п.р. вектора параметров $\theta = (\mu,\ m_0)$ представляется в виде

$$h(\mu, m_0) = h(m_0)h(\mu \mid m_0), \tag{4.99}$$

где $h(m_0)$ – априорная п.р. параметра m_0, $h(\mu \mid m_0)$ – априорная условная п.р. параметра μ при условии задания значения параметра m_0. Если использовать априорную п.р. $h(\mu, m_0)$, сопряженную с ядром правдоподобия, то выражения для $h(m_0)$ и $h(\mu \mid m_0)$ примут вид

$$h(m_0) = \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{ct_0}{m_0}\right)\right] s_0^{d_0-2} \exp\left(\frac{s_0}{m_0}\right)}{(d_0-3)!\left[1 - \left(\frac{s_0}{ct_0+s_0}\right)^{d_0-2}\right] m_0^{d_0-1}}, \tag{4.100}$$

$$h(\mu \mid m_0) = \frac{c\chi(t_0-\mu)\exp\left[-\frac{c(t_0-\mu)}{m_0}\right]}{1-\exp\left(-c\frac{t_0}{m_0}\right)m_0}. \tag{4.101}$$

Априорная плотность, определяемая выражениями (4.99)–(4.101), зависит от четырех параметров: c, t_0, d_0, s_0. Используя теорему Байеса и соотношения (4.98)–(4.101), нетрудно получить соответствующие $h(m_0)$ и $h(\mu \mid m_0)$ сомножители апостериорной п.р.

$$\mathrm{h}(m_0 \mid \tau) = \frac{\left\{1-\exp\left[-\frac{s_1(0,r)}{m_0}\right]\right\} s_2(r)^{d_0+d-2}\exp\left[-\frac{s_2(r)}{m_0}\right]}{(d_0+d-3)!\left\{1-\left[\frac{s_2(r)}{s_0(r)}\right]^{d_0+d-2}\right\} m_0^{d_0+d-1}}, \tag{4.102}$$

$$\mathrm{h}(\mu \mid m_0, \tau) = \frac{c \div N(\mu)}{m_0} \cdot \frac{\chi(r-\mu)\exp\left[-\frac{s_1(\mu,r)}{m_0}\right]}{1-\exp\left[-\frac{s_1(0,r)}{m_0}\right]}, \tag{4.103}$$

где

$$r = \min\{t^*_{(1)}, t_0\}, \qquad s_1(\mu, r) = \int_\mu^r [c+N(t)]\,dt,$$

$$s_2(r) = s_0 + s_1(r), \qquad s_1(r) = c(t_0 - r) + s(r).$$

С помощью выражений (4.102) и (4.103) апостериорная плотность вектора параметров $\theta = (\mu, m_0)$ определится аналогично априорной (4.99):

$$\mathrm{h}(\mu, m_0 \mid \tau) = \mathrm{h}(m_0 \mid \tau)\,\mathrm{h}(\mu \mid m_0, \tau).$$

Если $F(t)$ задается выражением (4.96), то при накоплении данных происходит концентрация апостериорного распределения в окрестности истинных значений параметров μ, m_0. Накопление данных соответствует объединению результатов испытаний по серии, состоящей из k НЦ-планов, когда k неограниченно возрастает.

С помощью априорных п.р. (4.100), (4.101) априорная плотность квантили $x_p = \mu + m_0\Lambda_p$ выражается следующим образом:

$$h_p(x_p) = \int\limits_G h(m_p \mid m_0)h(m_0)dm_0 =$$

$$= \frac{c(1-p)s_0^{d_0-2}(d_0-2)}{\left[1-\left(\dfrac{s_0}{s_0+ct}\right)^{d_0-2}\right]s_3^{d_0-1}}\left\{L_{d_0-2}\left(\Lambda_p\,\frac{s_3}{x_p}\right)-\right.$$

$$\left.-\ \chi(x_p-t_0)L_{d_0-2}\left(\Lambda_p\,\frac{s_3}{x_p-t_0}\right)\right\},$$

где $m_p = x_p - m_0\Lambda_p$, $s_3 = s_0 + c(t_0 - x_p)$, промежуток интегрирования $G = [((x_p - x_0)/\Lambda_p)^+,\ x_p/\Lambda_p]$, а символ a^+ означает $a^+ = a$, если $a > 0$, $a^+ = 0$, если $a \leqslant 0$, $L_d(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} x^k e^{-x}/k!$.

Для апостериорной п.р. $\hbar_p(x_p \mid \tau)$ значений квантили с помощью формул (4.102), (4.103) аналогично получаем

$$\hbar_p(x_p \mid \tau) = K\int\limits_{G'} \frac{c+N(m_p)}{m_0^{d_0+d}}\exp\left[-\frac{s_0+s_1(m_p)}{m_0}\right]dm_0, \qquad (4.104)$$

где

$$K = \frac{s_2(r)^{d_0+d-2}}{\left\{1-\left[\dfrac{s_2(r)}{s_2(0)}\right]^{d_0+d-2}\right\}(d_0+d-3)!},$$

промежуток интегрирования $G' = [((x_p - r)/\Lambda_p)^+,\ x_p/\Lambda_p]$.

Удобство использования апостериорной п.р. (4.104) при практических расчетах зависит от возможности представления интеграла (4.104) в конечном виде. Это достигается с помощью следующих рассуждений. Рассмотрим вариационный ряд $t_{(1)}, t_{(2)}, \ldots, t_{(l)}$, составленный из неповторяющихся значений моментов цензурирования, которые предшествуют моменту r. Моменту $t_{(i)}$ соответствует конечное приращение подынтегральной функции выражения (4.104). Множество G' разбивается на последовательность промежутков

$$\Delta_l = \left[\left(\frac{x_p-r}{\Lambda_p}\right)^+,\ \left(\frac{x_p-t_{(1)}}{\Lambda_p}\right)^+\right],$$

$$\Delta_i = \left[\left(\frac{x_p-t_{(i+1)}}{\Lambda_p}\right)^+,\ \left(\frac{x_p-t_{(i)}}{\Lambda_p}\right)^+\right], \quad i = 1, 2, \ldots, l-1,$$

$$\Delta_0 = \left[\left(\frac{x_p-t_{(1)}}{\Lambda_p}\right)^+,\ \frac{x_p}{\Lambda_p}\right].$$

В интервалах Δ_i ($i = 0, 1, \ldots, l$) функция $N(m_p)$ является постоянной. Допустим, что в момент цензурирования $t_{(i)}$ снимается n_i изделий. Тогда

$N_i = N - n_1 - \ldots - n_i$ — количество изделий, для которых испытания продолжаются после $t_{(i)}$. Постоянные значения функции $N(m_p)$ на интервалах Δ_i записываются следующим образом:

$$N(m_p) = \begin{cases} N, & \text{если } m_0 \in \Delta_0, \\ N_i, & \text{если } m_i \in \Delta_i, \end{cases}$$

откуда нетрудно получить

$$s_1(m_p) = \begin{cases} (c+N)(t_{(1)} - m_p) + s_1(t_{(1)}), & m_0 \in \Delta_0, \\ (c+N_i)\ (t_{(i+1)} - m_p) + s_1(t_{(i+1)}), & m_0 \in \Delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, l-1, \\ (c+N_l)(r - m_p) + s_1(r), & m_0 \in \Delta_l. \end{cases}$$

Последнее выражение позволяет записать

$$J(\Delta_i) = \int\limits_{m_0 \in \Delta_i} \frac{c + N(m_p)}{m_0^{d_0+d}} \exp\left[-\frac{s_0 + s_1(m_p)}{m_0}\right] dm_0 =$$

$$= c_i \left\{ \chi(x_p - t_{(i)}) L_{d_0+d-2}\left(\Lambda_p \frac{s_0 + (c+N_i)(t_{(i+1)} - x_p) + s_1(t_{(i+1)})}{x_p - t_{(i)}}\right) - \right.$$

$$\left. - \chi(x_p - t_{(i+1)}) L_{d_0+d-2}\left(\Lambda_p \frac{s_0 + (c+N_i)(t_{(i+1)} - x_p) + s_1(t_{(i+1)})}{x_p - t_{(i+1)}}\right)\right\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, l-1, \tag{4.105}$$

где

$$c_i = \frac{(d_0 + d - 2)!(c + N_i)(1-p)^{c+N_i}}{[s_0 + (c+N_i)(t_{(i+1)} - x_p) + s_1(t_{(i+1)})]^{d_0+d-1}}. \tag{4.106}$$

Интегралы $J(\Delta_0)$ и $J(\Delta_l)$ рассчитываются также по формулам (4.105), (4.106), в которых необходимо положить $N_i = N$, $t_{(i)} = 0$ для первого интеграла и $N_i = N_l$, $t_{(i+1)} = r$ для второго. Окончательное выражение для апостериорной плотности квантили $\hbar_p(x_p \mid \tau)$ принимает вид суммы

$$\hbar_p(x_p \mid \tau) = \sum_{i=0}^{l} KJ(\Delta_i). \tag{4.107}$$

Число слагаемых в выражении (4.107) может быть меньше $l + 1$, так как часть интервалов Δ_i может вырождаться в точку.

Наиболее простым для расчетов оказывается тот случай, когда до момента r цензурирование не производится ($t_{(1)} \geqslant r$). В этом случае в сумме (4.107) содержится только одно слагаемое, соответствующее $i = 0$. Апостериорная п.р. значений квантили имеет вид

$$\hbar_p(x_p \mid \tau) = W\left[L_{d_0+d-2}\left(\Lambda_p \frac{s_0 + (c+N)(r - x_p) + s_1(r)}{x_p}\right) - \right.$$

$$\left. - \chi(x_p - r) L_{d_0+d-2}\left(\Lambda_p \frac{s_0 + (c+N)(r - x_p) + s_1(r)}{x_p - r}\right)\right], \tag{4.108}$$

где

$$W = \frac{s_2(r)^{d_0+d-2}(c+N)(1-p)^{c+N}(d_0+d-2)!}{\left[1-\dfrac{s_2(r)}{s_2(0)}\right]^{d_0+d-2}[s_0+(c+N)(r-x_p)+s_1(r)]^{d_0+d-1}}.$$

Формула (4.108) может быть использована при испытаниях по планам $[N, U, R]$, $[N, U, T]$, когда испытания N изделий ведутся в течение заданного времени T и цензурирование до момента r не проводится.

Рассмотрим теперь подход, позволяющий использовать приведенные выше результаты в условиях, когда $F(t)$ принадлежит классу стареющих

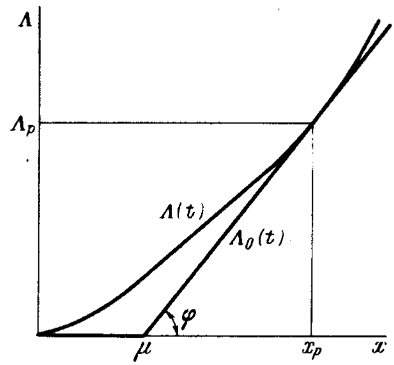


Рис. 4.1. Приближение функции ресурса

распределений S_0. Задача состоит в том, чтобы на основе выборки τ, полученной в результате проведения испытаний по НЦ-плану, сделать статистический вывод о величине квантили x_p. Для использования байесовского подхода нужно задать априорное распределение на классе S_0 всех стареющих ф.р. Это трудно сделать, так как класс S_0 не определяется конечным числом параметров. Излагаемый ниже метод [3] позволяет в некотором отношении "обойти" трудности задания априорного распределения.

Любая ф.р. $F(t) \in E_0$ является стареющей, так как $E_0 \subset S_0$. Зададим отображение u_p: $F(t) \to F_0(t)$, где $F(t) \in S_0$, $F_0(t) \in E_0$. Для этого положим $F_0(t) = F(t)$, если $F(t) \in E_0$. Если же $F(t) \notin E_0$, то сопоставим ей ф.р. $F_0(t) \in E_0$, положив

$$F_0(t) = 1 - \exp(-\Lambda_0(t)),$$
$$\Lambda_0(t) = \max\{0, \Lambda_p + \lambda_p(t - x_p)\}. \tag{4.109}$$

Здесь $\lambda_p = \operatorname{tg}\varphi$ – минимально возможное значение тангенса угла φ наклона касательной, проведенной к графику функции ресурса $\Lambda(t) = -\ln[1 - F(t)]$ в точке (x_p, Λ_p). График функции ресурса $\Lambda_0(t)$ является ломаной, составленной из отрезка $[0, \mu]$ и луча прямой, выходящей из точки $(\mu, 0)$ под углом φ (рис. 4.1).

Отображению u_p: $F \to F_0$ можно сопоставить функцию $u_p(t)$ такую, что

$F(t) = F_0(u_p(t))$.

Из формул (4.109) вытекает, что функция $u_p(t)$ обладает следующими свойствами:

(i) $u_p(t)$ не убывает по t;

(ii) $u_p(t) \geqslant t \quad \forall t > 0$;

(iii) $x_p = u_p(x_p)$.

Если бы функция $t' = u_p(t)$ была известна, то реализация байесовского подхода к задаче оценки квантили x_p не вызывала бы особых затруднений. Для этого вместо данных τ следовало бы использовать преобразованные данные

$$\tau(u_p) = \{ v_i, i = 1, 2, \dots, d, \ \omega_j, \ j = 1, 2, \dots, k \}, \tag{4.110}$$

где $v_i = u_p(t_i^*)$, $\omega_j = u_p(t_j)$. Эти данные соответствовали бы ф.р. $F_0(t) \in E_0$.

При отображении u_p: $F \to F_0$ любое априорное распределение на S_0 перейдет в соответствующее ему априорное распределение на E_0. Ради простоты вычислений это распределение можно аппроксимировать распределениями с п.р., задаваемыми формулами (4.100), (4.101). Далее были бы справедливы все расчеты апостериорной п.р. $\hbar_p(x_p \mid \tau(u_p))$, поскольку значения квантили x_p являются общими для $F(t)$ и $F(t_0)$. С помощью апостериорной п.р. $\hbar_p(x_p \mid \tau(u_p))$ можно было бы найти апостериорную вероятность того, что $x_p \geqslant x$. Эта вероятность была бы равна

$$P\{x_p \geqslant x \mid \tau(u_p)\} = \int_x^\infty \hbar_p(x_p \mid \tau(u_p)) dx_p. \tag{4.111}$$

Решение поставленной задачи только на основе формулы (4.111) невозможно, поскольку неизвестно преобразование u_p: $F \to F_0$, приводящее данные τ к виду (4.110). Однако можно найти нижнюю границу

$$P_0\{x_p \geqslant x \mid \tau\} = \inf P\{x_p \geqslant x \mid \tau(u_p)\}, \tag{4.112}$$

где $\inf$ берется по всем возможным функциям $u_p(t)$, обладающим свойствами (i)–(iii). Это достигается с помощью перебора всех возможных данных $\tau(u_p)$, компоненты v_i и ω_j которых удовлетворяют неравенствам

$$v_i \geqslant t_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, d,$$
$$\omega_j \geqslant t_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Поиск $\inf$ в задаче (4.112) существенно упрощается, если цензурирование

Таблица 4.3

Нижняя оценка апостериорной вероятности утверждения $\{x_{0,01} \geqslant x\}$ [3]

x, ч	65	90	100	110	120	130	140	150
$P\{x_p \geqslant x \mid \tau\}$	0,992	0,985	0,922	0,872	0,794	0,679	0,479	0,255
$P_0\{x_p \geqslant x \mid \tau\}$	0,991	0,956	0,921	0,855	0,741	0,527	0,232	0,064

до первого отказа не производится, т.е. $l = 0$. В этом случае расчет $\hbar_p(x_p \mid \tau(u_p))$ ведется по формуле (4.108), тогда как inf в формуле (4.112) ищется путем подстановки в (4.108) вместо $s_1(r)$ значений $s \geqslant s_1(r)$.

Описанный выше метод сведения непараметрической задачи к параметрической назван в [3] методом концентраций, поскольку в его основе лежит идея концентрации априорного распределения в подмножестве $E_0 \subset S_0$.

Приведем численный пример, соответствующий случаю $l = 0$ [3]. В процессе испытаний наблюдается выборка, состоящая из 20 моментов отказа, которая записывается в виде следующего вариационного ряда:

{108,4; 120,8; 161,3; 172,4; 176,3; 177,3; 190,8; 267,8; 320,0; 331,5; 334,6; 337,1; 352,4; 371,1; 440,8; 467,9; 480,8; 508,9; 567,4; 569,9} ч.

В табл. 4.3 содержатся результаты вычислений с использованием метода концентраций: в верхней строке приведены значения апостериорной вероятности утверждения $\{x_p \geqslant x\}$, которая соответствует определенному набору значений параметров t_0, s_0, d_0 и c, в предположении $F(t) \in E_0$, а в нижней строке даны значения $P_0\{x_p \geqslant x \mid \tau\}$, соответствующие (4.112). Уменьшение значений $P_0\{x_p \geqslant x \mid \tau\}$ по сравнению с $P\{x_p \geqslant x \mid \tau\}$ оказалось существенным для больших значений x. Это вызвано переходом от семейства E_0 к более широкому классу стареющих ф.р. S_0.

Изложенный метод концентраций допускает различные обобщения. В частности, вместо параметрического семейства E_0 можно использовать $E_1 \in S_0$, определяемое соотношениями

$$F_1(t) = 1 - e^{-\Lambda_1(t)},$$

где

$$\Lambda_1(t) = \begin{cases} \lambda_0 t, & t \leqslant x_p, \\ \lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0) x_p, & t > x_p, \end{cases} \quad \lambda_0 = \frac{\Lambda_p}{x_p},$$

которые вводят двухпараметрическое семейство ф.р. Отображению v_p: $F \to F_1 \in E_1$ можно сопоставить функцию $v_p(t)$, которая обладает свойствами $v_p(t) \leqslant t$ и $x_p = v_p(x_p)$. Все дальнейшие рассуждения можно провести аналогичным образом.

КВАЗИПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

§ 5.1. Параметрические приближения на классах стареющих функций распределения

Квазипараметрическая байесовская оценка занимает промежуточное положение между параметрической и непараметрической. Существо данной оценки состоит в следующем. Пусть $\{\Omega, \mathcal{L}, F\}$ – вероятностное пространство, характеризующее статистическую модель, порождаемую некоторым планом П; вероятностная мера F (распределение) принадлежит некоторому классу S. Квазипараметрическая оценка вероятности безотказной работы R, функционально связанной с F, строится следующим образом. Исходя из имеющейся априорной информации, вероятностная мера аппроксимируется с помощью $\tilde{F} \in S_\theta$, где S_θ – параметрическое семейство, выбор которого диктуется способом задания априорной информации, причем $S_\theta \in S$. Параметр θ является случайным, ему соответствует пространство $\{\Theta, \mathcal{E}, H\}$, где $H \in \mathcal{H}$ – априорная вероятностная мера параметра θ на $(\Theta, \mathcal{E})$. Оценка вероятности безотказной работы ищется в виде байесовской оценки соответствующей функции $R = R(\theta)$, измеримой на Θ. Конкретная байесовская процедура определяется видом априорной информации и выбранным способом аппроксимации ф.р. F на классе S. Данные оценки впервые были предложены и исследованы в работах [48, 49].

Рассмотрим несколько практически важных случаев построения приближения неизвестной ф.р. F на классах стареющих S_0 или стареющих в среднем S_1 распределений [1, 2]. Во всех случаях будем основываться на представлении аппроксимирующей ф.р. через функцию ресурса:

$$F(t) \approx \tilde{F}(t;\ \theta) = 1 - \exp[-\tilde{\Lambda}(t;\ \theta)], \tag{5.1}$$

считая, что $\tilde{\Lambda}(t)$ является приближением истинной функции ресурса $\Lambda(t)$, обеспечивающей пребывание ф.р. $\tilde{F}(t;\ \theta)$ в классе S_0 (или S_1).

5.1.1. *Случай одномерного априорного распределения* характеризует ситуацию, когда разработчик располагает некоторой информацией о надежности изделия в фиксированный момент времени t_0, т.е. задана априорная п.р. $h(r)$ для ВБР $R_{t_0} = P\{\xi > t_0\}$ на промежутке $[R_н, R_в]$. В частном случае $h(r)$ может быть равномерной, и тогда указания $R_н$ и $R_в$ достаточно для представления всей априорной информации.

Предположим сначала, что R_{t_0} является фиксированным, т.е. промежуток $[R_н, R_в]$ стянут в точку. Найдем приближение $\tilde{\Lambda}(t)$ такое, что

1) в точке t_0 значения ф.р. $F(t)$ и $\tilde{F}(t)$ совпадают, 2) аппроксимирующая ф.р. $\tilde{F}(t)$ принадлежит классу стареющих распределений S_0. В соответствии с первым условием

$$\tilde{\Lambda}(t_0) = \Lambda(t_0), \tag{5.2}$$

причем $\Lambda(t_0) = -\ln[1 - F(t_0)] = -\ln R_{t_0}$, а значение R_{t_0} по предположению является фиксированным. Функцию $\tilde{\Lambda}(t)$ представим в виде двухзвенной ломаной, удовлетворяющей условию (5.2) (рис. 5.1). Запишем уравнения для звеньев ломаной. Поскольку звено $l_1(t)$ проходит через

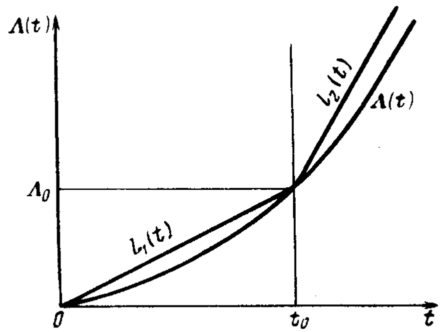


Рис. 5.1. Двухзвенная аппроксимация функции ресурса

начало координат, его уравнение будет определяться одним параметром, который обозначим через λ_0. Из условия (5.2) следует, что

$$l_1(t) = \lambda_0 t, \quad t \leqslant t_0, \tag{5.3}$$

причем

$$\lambda_0 = \frac{\Lambda(t_0)}{t_0} = -\frac{1}{t_0}\ln R_{t_0}, \tag{5.4}$$

т.е. λ_0 определяется однозначно, если задано R_{t_0}. Уравнение для звена $l_2(t)$ зависит от двух параметров: используя ранее введенный параметр λ_0 и новый параметр λ_1, можно записать

$$l_2(t) = \lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0)t_0, \quad t > t_0. \tag{5.5}$$

С учетом выражений (5.3) и (5.5) аппроксимирующую функцию ресурса $\tilde{\Lambda}(t)$ можно записать в виде

$$\tilde{\Lambda}(t) = \tilde{\Lambda}(t;\ \lambda_0, \lambda_1) = \begin{cases} \lambda_0 t, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ \lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0)t_0, & t > t_0, \end{cases}$$

или, если использовать функцию знака,

$$\tilde{\Lambda}(t) = \chi(t_0 - t)\lambda_0 t + \chi(t - t_0)[\lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0)t_0]. \tag{5.6}$$

Заметим, что параметр λ_0 однозначно (при заданном R_{t_0}) определяется соотношением (5.4). В то же время для λ_1 можно установить лишь область возможных значений. Для этого воспользуемся предположением о принадлежности аппроксимирующей ф.р. $\tilde{F}(t)$ классу S_0:

$$\tilde{F}(t) = \tilde{F}(t;\ \lambda_0, \lambda_1) = 1 - \exp[-\tilde{\Lambda}(t;\ \lambda_0, \lambda_1)] \in S_0. \tag{5.7}$$

Условию (5.7) равносильно утверждение о том, что функция ресурса $\tilde{\Lambda}(t)$ выпукла вниз [3], т.е.

$$\tilde{\Lambda}\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\,[\tilde{\Lambda}(t_1) + \tilde{\Lambda}_2(t_2)] \qquad \forall t_1 < t_2. \tag{5.8}$$

Для случаев $t_1 < t_0$, $t_2 < t_0$ и $t_1 > t_0$, $t_2 > t_0$ условие (5.8) выполняется при любых λ_1. Пусть теперь $t_1 < t_0$, $t_2 > t_0$. При $t_1 + t_2 \leqslant 2t_0$ (для выпуклой вниз $\tilde{\Lambda}(t)$) имеем

$$\lambda_0(t_1 + t_2) \leqslant \lambda_0 t_1 + \lambda_1 t_2 - (\lambda_1 - \lambda_0)t_0,$$

откуда $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$. При $t_1 + t_2 \geqslant 2t_0$ получим аналогичный результат. Таким образом, областью значений параметра λ_1, обеспечивающей выполнение условия (5.7), является промежуток $[\lambda_0, \infty)$.

В общем случае значение ВБР R_{t_0} априорно не фиксировано, а является случайным в байесовском смысле и содержится в промежутке $[R_н, R_в]$. Поэтому речь может идти не об обычной, а о байесовской аппроксимации функции ресурса, в которой параметры λ_0 и λ_1 являются случайными. Дело в том, что в байесовской постановке истинная функция ресурса $\Lambda(t)$ является случайной и может принимать одну из реализаций в некотором пространстве, определяемом имеющейся априорной информацией. В рассматриваемом случае это пространство ограничено кривыми $\Lambda_1(t)$ и $\Lambda_2(t)$, которые в свою очередь также являются случайными (рис. 5.2). Неслучайным согласно промежутку априорной неопределенности является лишь тот факт, что эти кривые проходят соответственно через точки (t_0, Λ_{02}) и (t_0, Λ_{01}), где $\Lambda_{02} = -\ln R_н$, $\Lambda_{01} = -\ln R_в$. В классе S_0 кривые

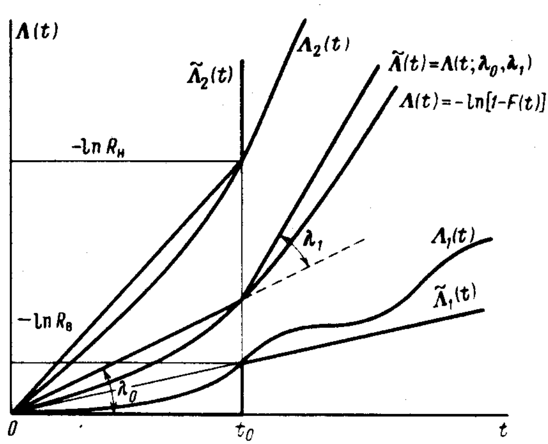


Рис. 5.2. Байесовская двухзвенная аппроксимация функции ресурса

$\Lambda_1(t)$ и $\Lambda_2(t)$ аппроксимируются следующими ломаными (см. рис. 5.2):

$$\widetilde{\Lambda}_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant t_0, \\ -\dfrac{t}{t_0} \ln R_{\text{в}}, & t > t_0, \end{cases}$$

$$\widetilde{\Lambda}_2(t) = \begin{cases} -\dfrac{t}{t_0} \ln R_{\text{н}}, & t \leqslant t_0, \\ \infty, & t > t_0. \end{cases}$$

Итак, функция ресурса $\widetilde{\Lambda}(t)$, определяемая выражением (5.6), аппроксимирует произвольную случайную реализацию функции ресурса $\Lambda(t) \in [\widetilde{\Lambda}_1(t), \widetilde{\Lambda}_2(t)]$. Использованные в выражении (5.6) параметры λ_0 и λ_1 являются случайными величинами. Область D значений случайных параметров λ_0 и λ_1 определяется системой неравенств

$$\begin{aligned} &\lambda_0' \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_0'', \\ &\lambda_0 \leqslant \lambda_1 < \infty, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $\lambda_0' = -\ln R_{\text{в}}/t_0$, $\lambda_0'' = -\ln R_{\text{н}}/t_0$, причем первое неравенство получено из условия $R_{t_0} \in [R_{\text{н}}, R_{\text{в}}]$, второе – из предположения $F(t) \in S_0$.

Определим область D, заменив в предыдущих рассуждениях S_0 более общим классом S_1 стареющих в среднем распределений. Определяющим свойством класса S_1 является неубывающий характер функции $\eta(t) = \Lambda(t)/t$ (см. [3]). Для функции ресурса $\widetilde{\Lambda}(t;\ \lambda_0, \lambda_1)$ вида (5.6) при $t > t_0$ имеем

$$\eta(t) = \lambda_1 - (\lambda_1 - \lambda_0)\frac{t_0}{t}.$$

Из условия $\eta'(t) \geqslant 0$ следует

$$(\lambda_1 - \lambda_0)\frac{t_0}{t^2} \geqslant 0,$$

откуда $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$. Таким образом, предположение $F(t) \in S_1$ приводит к прежней области случайных параметров λ_0 и λ_1 вида (5.9).

Заключая рассмотрение данного частного случая, заметим, что аппроксимация функции ресурса с помощью выражения (5.6) равносильна приближенной аналитической замене функции интенсивности $\lambda(t) = \Lambda'(t)$ кусочно-постоянной функцией:

$$\widetilde{\lambda}(t) = \widetilde{\lambda}(t; \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \chi(t_0 - t) + \lambda_1 \chi(t - t_0). \tag{5.10}$$

5.1.2. *Обобщение случая одномерного априорного распределения* может быть проведено путем увеличения числа звеньев ломаной, с помощью которой аппроксимируется функция ресурса $\Lambda(t)$. Зададимся некоторым числом T_e таким, чтобы промежуток $[0, T_e]$ включал в себя все эмпирические данные. Указанный промежуток разобьем на $N + M$ интервалов $\mu_j = [s_{j-1}, s_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N + M$, одинаковой длины, причем $s_N = t_0$, $s_{N+M} = T_e$. Ясно, что в промежутке $[0, t_0)$ содержится N интервалов

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$, а в $[t_0, T_e) - M$ интервалов $\mu_{N+1}, \ldots, \mu_{N+M}$. С помощью полученной решетки значений $s_0, s_1, \ldots, s_{N+M}$ будем аппроксимировать функцию интенсивности $\lambda(t)$ внутри промежутка $[0, T_e)$. Примем следующие допущения:

(1) Аппроксимирующая функция интенсивности в каждой точке решетки получает приращение. Величина приращения одинакова для всех интервалов $\mu_j \in [0, t_0)$ и равна $\delta_1 \geqslant 0$. Для интервалов $\mu_j \in [t_0, T_e)$ величина скачка δ_2 в общем случае отличается от δ_1. Выбор различных значений δ_1 и δ_2 вызван тем обстоятельством, что по смыслу решаемой задачи δ_1 имеет

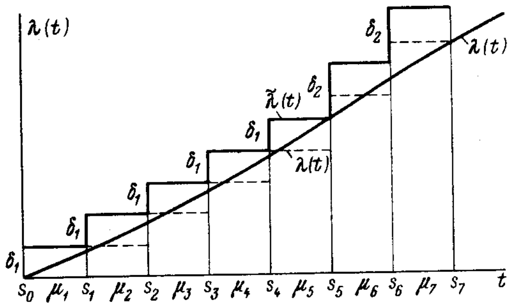


Рис. 5.3. Многозвенная аппроксимация функции интенсивности

ограниченную вариацию, которая обусловлена промежутком априорной неопределенности $[R_н, R_в]$. Подобное ограничение отсутствует для δ_2, и поэтому $\delta_2 \in [0, \infty)$.

(2) Величины δ_1 и δ_2 принимаются в качестве параметров аппроксимирующей функции интенсивности и в дальнейшем играют роль параметров λ_0 и λ_1 из предыдущего случая.

Будем различать два приближения функции интенсивности: верхнее $\tilde{\lambda}(t)$ и нижнее $\underset{\sim}{\lambda}(t)$. На рис. 5.3 $\tilde{\lambda}(t)$ изображено сплошной линией, а $\underset{\sim}{\lambda}(t)$ – пунктиром. Заметим, что приближения $\tilde{\lambda}(t)$ и $\underset{\sim}{\lambda}(t)$ названы соответственно верхним и нижним лишь условно, в силу неравенства $\tilde{\lambda}(t) > \underset{\sim}{\lambda}(t)$. В реальных ситуациях вовсе не обязательно, чтобы выполнялось двойное неравенство $\underset{\sim}{\lambda}(t) \leqslant \lambda(t) \leqslant \tilde{\lambda}(t)$.

Из элементарных соображений запишем

$$\tilde{\lambda}(t) = \begin{cases} j\delta_1 \quad \forall t \in \mu_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \\ N\delta_1 + k\delta_2 \quad \forall t \in \mu_{N+k}, \quad k = 0, 1, \ldots, M. \end{cases} \tag{5.11}$$

Кроме того, ясно, что $\underset{\sim}{\lambda}(t) = \tilde{\lambda}(t) - \delta_1$. Для получения более лаконичного выражения используем функцию

$$\chi_j(t) = \chi(t - t_{j-1})\chi(t_j - t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \mu_j, \\ 0, & \text{если } t \notin \mu_j. \end{cases}$$

Выполнив необходимые преобразования, получим

$$\tilde{\lambda}(t) = \delta_1 [\sum_{j=1}^{N} j\chi_j(t) + N \sum_{k=1}^{M} \chi_{N+k}(t)] + \delta_2 \sum_{k=1}^{M} k\chi_{N+k}(t). \quad (5.12)$$

Выражение для аппроксимирующей функции ресурса $\tilde{\Lambda}(t) = \tilde{\Lambda}(t;\ \delta_1, \delta_2)$ может быть получено путем формального интегрирования функции интенсивности (5.12). В результате весьма громоздких преобразований можно получить

$$\tilde{\Lambda}(t; \delta_1, \delta_2) = \delta_1 \sum_{j=1}^{N} [K_{j-1}\Delta + j(t - s_{j-1})]\chi_j(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \{K_N \delta_1 \Delta + [N(j-1)\delta_1 + K_{j-1}\delta_2]\Delta +$$

$$+ (N\delta_1 + j\delta_2)(t - s_{N+j-1})\}\chi_{N+j}(t), \quad (5.13)$$

где

$$\Delta = s_{j+1} - s_j, \quad K_m = 0 + 1 + \ldots + m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для нижнего приближения функции ресурса по аналогии имеем

$$\underset{\sim}{\Lambda}(t; \delta_1, \delta_2) = \delta_1 \sum_{j=2}^{N} [K_{j-2}\Delta + (j-1)(t - s_{j-1})]\chi_j(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \{K_{N-1}\delta_1 \Delta + [(N-1)(j-1)\delta_1 + K_{j-1}\delta_2]\Delta +$$

$$+ [(N-1)\delta_1 + j\delta_2](t - s_{N+j-1})\}\chi_j(t). \quad (5.14)$$

Полученные выражения (5.12) – (5.14) составляют основу для последующего решения задачи определения оценок ВБР в байесовской постановке.

Качественная характеристика байесовской аппроксимации функции ресурса, основанной на выражении (5.13), представлена на рис. 5.4.

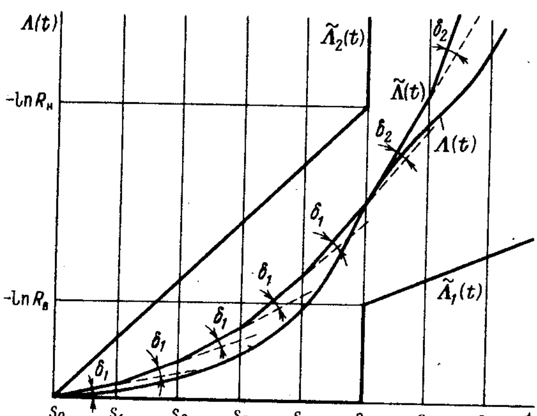


Рис. 5.4. Байесовская многозвенная аппроксимация функции ресурса

Поскольку способ задания априорной информации остался прежним, т.е. $R_{t_0} \in [R_н, R_в]$, функция $\widetilde{\Lambda}(t;\ \delta_1, \delta_2)$ принадлежит области, ограниченной введенными ранее функциями $\widetilde{\Lambda}_1(t)$ и $\widetilde{\Lambda}_2(t)$. Определим область возможных значений D_δ для параметров δ_1 и δ_2. Как и ранее, будем исходить из промежутка априорной неопределенности $[R_н, R_в]$ и предположения о принадлежности $F(t)$ классу стареющих в среднем распределений.

Исходя из принятой аппроксимации функции ресурса, имеем

$$R_{t_0} = \exp\{-\widetilde{\Lambda}(t_0;\ \delta_1, \delta_2)\} \in [R_н, R_в]. \tag{5.15}$$

В то же время из (5.13) получим

$$\widetilde{\Lambda}(t_0) = K_N \Delta \delta_1. \tag{5.16}$$

Из соотношений (5.15) и (5.16) следует, что

$$R_н \leqslant \exp(-K_N \Delta \delta_1) \leqslant R_в,$$

откуда

$$\delta_1' \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_1'',$$

где

$$\delta_1' = -\frac{1}{\Delta_1} \ln R_в, \quad \delta_1'' = -\frac{1}{\Delta_1} \ln R_н, \qquad \Delta_1 = K_N \Delta.$$

Далее, рассмотрев условие

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\widetilde{\Lambda}(t;\ \delta_1, \delta_2)}{t}\right] \geqslant 0,$$

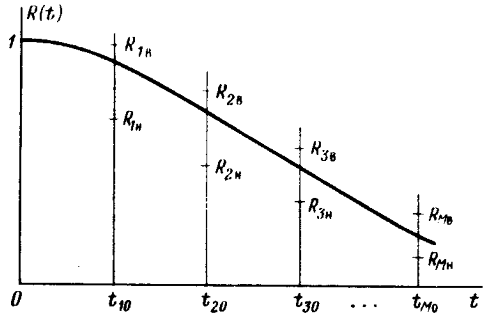
определяющее принадлежность ф.р. $\widetilde{F}(t;\ \delta_1, \delta_2) = 1 - \exp[-\widetilde{\Lambda}(t)]$ классу стареющих в среднем распределений, получаем $\delta_2 \geqslant 0$. Таким образом, областью значений для случайных параметров δ_1 и δ_2 аппроксимирующих функций ресурса $\widetilde{\Lambda}(t)$ и $\underset{\sim}{\Lambda}(t)$ является область D_δ, определяемая неравенствами

$$\delta_1' \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_1'', \qquad 0 \leqslant \delta_2 < \infty. \tag{5.17}$$

На этом представление байесовского параметрического приближения ф.р. на классе S_1 при одномерном априорном распределении исчерпывается.

5.1.3. *Случай многомерного априорного распределения* характеризует ситуацию, когда разработчик имеет априорную информацию о надежности для заданного ряда моментов времени $t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{M0}$. В частности, может оказаться, что для каждого из указанных моментов времени задан промежуток априорной неопределенности $[R_{j\,н}, R_{j\,в}]$, $j = 1, 2, \ldots, M$. Задачу построения параметрического приближения ф.р. $F(t)$ будем решать при следующих допущениях:

Рис. 5.5. Промежутки априорной неопределенности при выполнении нестрогого условия непротиворечивости



(1) Промежутки $[R_{jн}, R_{jв}]$ удовлетворяют условию непротиворечивости. Будем различать два условия непротиворечивости: нестрогое и строгое. В соответствии с первым условием промежутки априорной неопределенности могут частично перекрываться, но при этом обязательно $R_{jн} \leqslant R_{(j+1)н}$ и $R_{jв} \leqslant R_{(j+1)в}$. Для условия строгой непротиворечивости такие пересечения недопустимы, т. е. $R_{jн} \geqslant R_{(j+1)в}$. Указанные виды задания априорной информации схематично изображены на рис. 5.5 и 5.6. Заметим, что в практических ситуациях в зависимости от методов получения и назначения априорной информации могут встречаться как первый, так и второй виды. Очевидно, что при выполнении условия нестрогой непротиворечивости в статистическую модель необходимо вводить дополнительные условия, обеспечивающие монотонность функции надежности.

(2) Функция интенсивности аппроксимируется кусочно-постоянной функцией $\tilde{\lambda}(t)$, имеющей конечные приращения в точках $t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{M0}$. В качестве параметров модели выбираются постоянные значения функции интенсивности на промежутках $[t_{(j-1)0}, t_{j0})$, $j = 1, 2, \ldots, M + 1$; при этом предполагается, что $t_{(M+1)0} = \infty$.

В соответствии со вторым предположением аппроксимирующую функцию интенсивности можно записать в виде

$$\tilde{\lambda}(t) = \sum_{j=1}^{M+1} \lambda_j \chi_j(t), \tag{5.18}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{M+1}$ – параметры функции $\tilde{\lambda}(t)$. Для аппроксимирующей

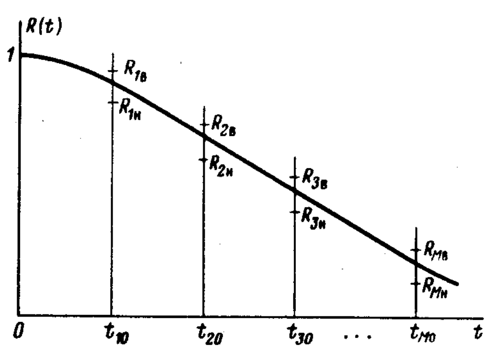


Рис. 5.6. Промежутки априорной неопределенности при выполнении строгого условия непротиворечивости

функции ресурса $\widetilde{\Lambda}(t)$, исходя из выражения (5.18), получим

$$\widetilde{\Lambda}(t) = \sum_{j=1}^{M+1} \chi_j(t) \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i (t_{i0} - t_{(i-1)0}) + \lambda_j (t - t_{(j-1)0}). \qquad (5.19)$$

Установим область возможных значений случайных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{M+1}$. По смыслу задачи данная область должна полностью определяться промежутками априорной неопределенности $[R_{j\text{н}}, R_{j\text{в}}]$, $j = 1, 2, \ldots, M$, и принадлежностью аппроксимирующей ф.р. $\widetilde{F}(t) = 1 - \exp[-\widetilde{\Lambda}(t)]$ классу стареющих в среднем распределений. При $t = t_{10}$ из выражения (5.19) получим

$$R_{10} = \exp[-\widetilde{\Lambda}(t_{10})] = \exp(-\lambda_1 t_{10}).$$

Тогда из неравенства $R_{1\text{н}} \leqslant R_{10} \leqslant R_{1\text{в}}$ следует

$$-\frac{1}{t_{10}} \ln R_{1\text{в}} \leqslant \lambda_1 \leqslant -\frac{1}{t_{10}} \ln R_{1\text{н}}. \qquad (5.20)$$

Получим аналогичное неравенство для произвольного момента t_{j0}. Обозначив $\Delta_j = t_{j0} - t_{(j-1)0}$, с помощью выражения (5.19) запишем

$$R_{j0} = \exp[-\widetilde{\Lambda}(t_{j0})] = \exp(-\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \Delta_i).$$

Используя j-й промежуток априорной неопределенности $[R_{j\text{н}}, R_{j\text{в}}]$, внутри которого лежит значение R_{j0}, получим

$$R_{j\text{н}} \leqslant \exp(-\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \Delta_i) \leqslant R_{j\text{в}},$$

откуда следует неравенство для λ_j:

$$-\frac{1}{\Delta_j} (\ln R_{j\text{в}} + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \Delta_i) \leqslant \lambda_j \leqslant -\frac{1}{\Delta_j} (\ln R_{j\text{н}} + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \Delta_i). \qquad (5.21)$$

Теперь воспользуемся условием о принадлежности $\widetilde{F}(t)$ классу S_1. Образуем для $\widetilde{\Lambda}(t)$ функцию $\eta(t) = \widetilde{\Lambda}(t)/t$. Для произвольного промежутка $[t_{(j-1)0}, t_j]$ получим

$$\eta(t) = \frac{1}{t}[\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \Delta_i + \lambda_j (t - t_{(j-1)0})].$$

Производная от функции $\eta(t)$ имеет вид

$$\eta'(t) = \frac{1}{t^2}[\lambda_j t_{(j-1)0} - \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \Delta_i],$$

и из условия $\eta'(t) \geqslant 0$ немедленно следует

$$\lambda_j \geqslant \frac{\lambda_1 \Delta_1 + \lambda_2 \Delta_2 + \ldots + \lambda_{j-1} \Delta_{j-1}}{\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{j-1}}. \tag{5.22}$$

Сопоставив неравенства (5.21) и (5.22) и объединив их с неравенством (5.20), получим следующую область D_λ возможных значений параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{M+1}$ при выполнении условия нестрогой непротиворечивости для промежутков априорной неопределенности:

$$\lambda'_i \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda''_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, M,$$

$$\lambda'_{M+1} \leqslant \lambda_{M+1} < \infty, \tag{5.23}$$

где

$$\lambda'_1 = -\frac{1}{\Delta_1} \ln R_{1\text{в}}, \qquad \lambda''_1 = -\frac{1}{\Delta_1} \ln R_{2\text{н}},$$

$$\lambda'_j = \max\left\{-\frac{1}{\Delta_j}\left(\ln R_{j\text{в}} + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \Delta_i\right), \frac{\sum\limits_{i=1}^{j-1} \lambda_i \Delta_i}{\sum\limits_{i=1}^{j-1} \Delta_i}\right\}, \qquad j = 2, \ldots, M,$$

$$\lambda''_j = -\frac{1}{\Delta_j}\left(\ln R_{j\text{н}} + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \Delta_i\right), \qquad j = 2, \ldots, M,$$

$$\lambda'_{M+1} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \Delta_i \Big/ \sum_{i=1}^{M} \Delta_i.$$

В том случае, когда промежутки априорной неопределенности удовлетворяют условию строгой непротиворечивости $R_{j\text{н}} \geqslant R_{(j+1)\text{в}}$, можно показать, что

$$-\frac{1}{\Delta_j}\left(\ln R_{j\text{в}} + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \Delta_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \Delta_i \Big/ \sum_{i=1}^{j-1} \Delta_i.$$

Поэтому общие соотношения (5.23) для области D_λ сохраняют вид, а выражение для λ'_j при $j = 2, 3, \ldots, M$ изменится следующим образом:

$$\lambda'_j = -\frac{1}{\Delta_j}\left(\ln R_{j\text{в}} + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \Delta_i\right).$$

Заметим, что рассмотренная в п. 5.1.3 модель приближения ф.р. обобщает случай одномерного априорного распределения, т. е., положив $M = 1$, мы получим все соотношения п. 5.1.1.

§ 5.2. Апостериорные распределения на основе цензурированных данных

Решение задачи байесовского оценивания показателей надежности при известном параметрическом приближении ф.р. $F(t)$ следует стандартной байесовской процедуре, описанной во второй главе. Данная процедура включает определение выражения для функции правдоподобия, формирование априорного распределения на заданном параметрическом пространстве и нахождение с помощью теоремы Байеса апостериорного распределения параметров аппроксимирующей ф.р. В свою очередь указанное апостериорное распределение позволяет получить любые оценки искомого показателя надежности.

Как и ранее, будем исходить из цензурированных данных, полученных в результате реализации НЦ-плана. Эти данные представляем в виде вектора $\tau = \{ \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{t} \}$, где $\boldsymbol{t}^* = (t_1^*, t_2^*, \ldots, t_d^*)$ — вектор моментов отказов, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ — вектор моментов приостановок (случайных и детерминированных). Способы представления апостериорного распределения существенным образом зависят от принятого приближения ф.р. $F(t)$. Поэтому каждый из случаев § 5.1 рассматривается ниже в отдельности.

5.2.1. *Случай одномерного априорного распределения* приближенно параметризован с помощью величин λ_0 и λ_1, имеющих смысл интенсивностей отказа соответственно в промежутках $[0, t_0)$ и $[t_0, \infty)$. Для нахождения функции правдоподобия, соответствующей данному случаю, воспользуемся общим выражением (3.21) для НЦ-плана. Подставив выражения (5.6) и (5.10) в (3.21), получим

$$l(\lambda_0, \lambda_1 \mid \tau) = c(\tau) \prod_{i=1}^{d} [\chi(t_0 - t_i^*)\lambda_0 + \chi(t_i^* - t_0)\lambda_1] \exp\{ - \sum_{i=1}^{d+k} \chi(t_0 - \tau_i)\lambda_0 \tau_i + \chi(\tau_i - t_0)[\lambda_1 \tau_i + (\lambda_1 - \lambda_0) t_0]\}. \quad (5.24)$$

Упростим выражение (5.24). Обозначим через d_0 и d_1 соответственно числа отказов, наблюдаемых до и после t_0, а через k_0 и k_1 — числа моментов приостановок до и после t_0. Ясно, что $d_0 + d_1 = d$ и $k_0 + k_1 = k$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{d} [\chi(t_0 - t_i^*)\lambda_0 + \chi(t_i^* - t_0)\lambda_1] = \lambda_0^{d_0} \lambda_1^{d_1},$$

$$\sum_{i=1}^{d+k} \chi(t_0 - \tau_i)\tau_i = a_0, \qquad \sum_{i=1}^{d+k} \chi(\tau_i - t_0)\tau_i = a_1,$$

$$\sum_{i=1}^{d+k} \chi(\tau_i - t_0) t_0 = (d_1 + k_1) t_0 .$$

Статистистики a_0 и a_1 имеют смысл соответственно суммарных наработок до и после момента t_0. Подставляя полученные выражения в (5.24), функцию правдоподобия $l(\lambda_0, \lambda_1 \mid \tau)$ перепишем более лаконично:

$$l(\lambda_0, \lambda_1 \mid \tau) =$$

$$= c(\tau)\lambda_0^{d_0}\lambda_1^{d_1} \exp\{-[\lambda_0(a_0 + n_1 t_0) + \lambda_1(a_1 - n_1 t_0)]\}, \qquad (5.25)$$

где $n_1 = d_1 + k_1$.

Докажем, что функция $l(\lambda_0, \lambda_1 \mid \tau)$ имеет ограниченную вариацию в области D, определяемой соотношением (5.9). Для этого достаточно доказать, что выражение в квадратных скобках соотношения (5.25) не меньше нуля. Последнее утверждение легко следует из очевидного неравенства

$$a_1 = \sum_{i=1}^{d+k} \chi(t_i - t_0)\tau_i \geqslant (d_1 + k_1)t_0 = n_1 t_0.$$

Из полученного выражения (5.25) следует, что минимальную достаточную статистику образуют величины $d_0, d_1, \kappa_0, \kappa_1$, где $\kappa_0 = a_0 + n_1 t_0$, $\kappa_1 = a_1 - n_1 t_0$. Окончательно функцию правдоподобия запишем следующим образом:

$$l(\lambda_0, \lambda_1 \mid \tau) = c(\tau)\lambda_0^{d_0}\lambda_1^{d_1} \exp[-(\lambda_0\kappa_0 + \lambda_1\kappa_1)]. \qquad (5.26)$$

Рассмотрим теперь задачу выбора априорного распределения. Одним из наиболее распространенных способов является подбор априорного распределения, сопряженного с ядром правдоподобия. Судя по выражению (5.26), плотность сопряженного априорного распределения $h_p(\lambda_0, \lambda_1)$ может быть записана в виде

$$h_p(\lambda_0, \lambda_1) = \frac{1}{\beta}\lambda_0^{c_0}\lambda_1^{c_1} e^{-(\lambda_0\alpha_0 + \lambda_1 c_1)}, \qquad (5.27)$$

где β – нормирующая постоянная. Теперь ядро апостериорной п.р. в соответствии с теоремой Байеса запишется следующим образом:

$$\dot{h}_p(\lambda_0, \lambda_1 \mid \tau) \backsim \lambda_0^{c_0 + d_0}\lambda_1^{c_1 + d_1} \exp\{-[(\alpha_0 + \kappa_0)\lambda_0 +$$

$$+ (\alpha_1 + \kappa_1)\lambda_1]\}, \qquad (\lambda_0, \lambda_1) \in D.$$

Обоснование возможности применения сопряженных априорных распределений было приведено в главе 2. Главной трудностью их практического использования является невозможность достаточно обоснованного выбора параметров априорной п.р. В нашем случае таких параметров четыре: c_0, c_1, α_0, α_1, и нельзя указать какого-либо общего способа их назначения.

Существует альтернативный способ выбора априорного распределения, частично использованный в третьей главе. В соответствии с этим способом при определении априорной п.р. $h(\lambda_0, \lambda_1)$ используется лишь промежуток априорной неопределенности $[R_н, R_в]$ и предположение о равномерности распределения ВБР R_{t_0} в этом промежутке:

$$h(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{R_в - R_н}, & R_н \leqslant r \leqslant R_в, \\ 0, \quad r < R_н, & r > R_в. \end{cases} \tag{5.28}$$

Априорную п.р. $h(\lambda_0, \lambda_1)$ будем искать в виде

$$h(\lambda_0, \lambda_1) = h_0(\lambda_0) h_1(\lambda_1 \mid \lambda_0). \tag{5.29}$$

Определим сначала маргинальную п.р. $h_0(\lambda_0)$. Ввиду монотонности зависимости $R_{t_0} = \exp(-\lambda_0 t_0)$ имеем

$$h_0(\lambda_0) = h(R_{t_0}(\lambda_0)) \mid R'_{t_0}(\lambda_0) \mid =$$

$$= \frac{t_0}{R_в - R_н} e^{-\lambda_0 t_0}, \qquad \lambda_0' \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_0''. \tag{5.30}$$

Вследствие того, что параметры λ_0 и λ_1 имеют одинаковый смысл, условную п.р. $h_1(\lambda_1 \mid \lambda_0)$ определим по аналогии с (5.30), т.е. будем считать, что $h_1(\lambda_1 \mid \lambda_0)$ принадлежит параметрическому семейству усеченных экспоненциальных распределений. К подобному допущению приводят также следующие рассуждения. Примем условно, что некоторому значению λ_1 соответствует вполне определенное значение ВБР в момент t_0:

$$R_1 = \exp(-\lambda_1 t_0). \tag{5.31}$$

Поскольку $\lambda_1 \in [\lambda_0, \infty)$, получим $R_1 \in [R_{1н}, R_{1в}]$, причем

$$R_{1н} = \lim_{\lambda_1 \to \infty} e^{-\lambda_1 t_0} = 0, \qquad R_{1в} = e^{-\lambda_0 t_0}. \tag{5.32}$$

По аналогии с выражением (5.30), учитывая соотношения (5.31) и (5.32), получим

$$h_1(\lambda_1 \mid \lambda_0) = \frac{t_0}{R_в - R_н} e^{-\lambda_1 t_0}, \qquad \lambda_0 \leqslant \lambda_1 < \infty,$$

или, окончательно,

$$h_1(\lambda_1 \mid \lambda_0) = t_0 e^{-(\lambda_1 - \lambda_0) t_0}, \qquad \lambda_0 \leqslant \lambda_1 < \infty. \tag{5.33}$$

Подставив полученные выражения (5.30) и (5.33) в (5.29), запишем конечное соотношение для априорной п.р. параметров λ_0 и λ_1:

$$h(\lambda_0, \lambda_1) = \frac{t_0^2}{R_в - R_н} e^{-\lambda_1 t_0}, \qquad (\lambda_0, \lambda_1) \in D. \tag{5.34}$$

В выражении (5.34) отсутствует явная зависимость от параметра λ_0. Тем не менее записанная п.р. является совместной плотностью распределения обоих параметров λ_0 и λ_1, так как зависимость от λ_0 выражается формой области D. Интересно отметить, что полученная п.р. $h(\lambda_0, \lambda_1)$ является частным случаем сопряженной априорной п.р. $h_p(\lambda_0, \lambda_1)$, представленной выражением (5.27) с параметрами $c_0 = c_1 = \alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = t_0$, и приведенные выше рассуждения можно рассматривать как способ обоснованного выбора параметров сопряженного априорного распределения.

Основываясь на априорной плотности (5.34) и функции правдоподобия (5.26), в соответствии с теоремой Байеса запишем ядро искомой апостериорной п. р.

$$\hbar(\lambda_0, \lambda_1 \mid \tau) \propto \lambda_0^{d_0} \lambda_1^{d_1} \exp\{-[\lambda_0 \kappa_0 + \lambda_1(\kappa_1 + t_0)]\}, \tag{5.35}$$

которое послужит основой получения оценок вероятности безотказной работы в следующем параграфе.

5.2.2. *Обобщенный случай одномерного априорного распределения* характеризуется более сложным в вычислительном отношении апостериорным распределением. В дальнейшем возьмем за основу верхние приближения функции ресурса $\widetilde{\Lambda}(t;\ \delta_1, \delta_2)$ и функции интенсивности $\widetilde{\lambda}(t;\ \delta_1, \delta_2)$. Как и ранее, будем использовать общее выражение для функции правдоподобия (3.21). В данном случае имеем

$$l(\delta_1, \delta_2 \mid \tau) = c(\tau) \prod_{i=1}^{d} \widetilde{\lambda}(t_i^*; \delta_1, \delta_2) \exp[-\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Lambda}(\tau_i; \delta_1, \delta_2)]. \tag{5.36}$$

Прямая подстановка соотношений (5.12) и (5.13) в выражение (5.36) позволяет получить

$$l(\delta_1, \delta_2 \mid \tau) = c(\tau) \prod_{i=1}^{d} \{\delta_1[\sum_{j=1}^{N} j\chi_j(t_i^*) + N \sum_{k=1}^{N} \chi_{N+k}(t_i^*) +$$

$$+ \delta_2 \sum_{k=1}^{N} k\chi_{N+k}(t_i^*)]\} \exp\{\{-\delta_1 \sum_{j=1}^{N} [K_{j-1}\Delta + j(\tau_i - s_{j-1})]\chi_j(\tau_i) -$$

$$- \sum_{j=1}^{M} \{K_N \delta_1 \Delta + [N(j-1)\delta_1 + K_{j-2}\delta_2]\Delta +$$

$$+ (N\delta_1 + j\delta_2)(\tau_i - s_{N+j-1})\chi_{N+j}(\tau_i)\}\}\}. \tag{5.37}$$

Использование полученного выражения функции правдоподобия не представляется возможным. Упростим выражение (5.37), используя следующую запись функций $\widetilde{\lambda}(t)$ и $\widetilde{\Lambda}(t)$:

$$\widetilde{\lambda}(t) = \sum_{j=1}^{N+M} \lambda_j \chi_j(t), \tag{5.38}$$

$$\widetilde{\Lambda}(t) = \sum_{j=1}^{N+M} [\Delta \sum_{k=1}^{j-1} \widetilde{\lambda}_k + \widetilde{\lambda}_j(t - s_{j-1})]\chi_j(t). \tag{5.39}$$

Здесь использованы параметры $\widetilde{\lambda}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N + M)$, совокупность которых является избыточной, поскольку все параметры однозначно определяются с помощью δ_1 и δ_2. Зависимость $\widetilde{\lambda}_j$ от δ_1 и δ_2 устанавливается путем сопоставления выражений (5.38) и (5.11). С помощью выражений (5.38) и (5.39) функция правдоподобия запишется следующим образом:

$$l(\delta_1, \delta_2 \mid \tau) = c(\tau) \prod_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{N+M} \widetilde{\lambda}_j \chi_j(t_i^*) \times$$

$$\times \exp\{-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N+M} [\Delta \sum_{k=1}^{j-1} \widetilde{\lambda}_k + \widetilde{\lambda}_j(\tau_i - s_{j-1})]\chi_j(\tau_i)\}. \quad (5.40)$$

Рассмотрим каждый из сомножителей выражения (5.40) отдельно,

$$A_1 = \prod_{i=1}^{d} [\sum_{j=1}^{N+M} \widetilde{\lambda}_j \chi_j(t_i^*)]. \quad (5.41)$$

Обозначим с помощью $d_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, N + M)$ количество отказов, наблюдаемых в j-м промежутке разбиения. Представим произведение (5.41) в виде

$$A_1 = \prod_{j=1}^{N+M} [\prod_{i_j=1}^{d_j} \sum_{l=1}^{N+M} \widetilde{\lambda}_l \chi_l(t_{i_j}^*)]. \quad (5.42)$$

Поскольку для выражения в квадратных скобках формулы (5.42) индекс j принимает строго определенное значение, получим

$$A_1 = \prod_{j=1}^{N+M} (\prod_{i_j=1}^{d_j} \widetilde{\lambda}_j) = \prod_{j=1}^{N+M} \widetilde{\lambda}_j^{d_j}. \quad (5.43)$$

После подстановки выражений (5.11) в (5.43) получим

$$A_1 = \delta_1^{D_1} \prod_{j=1}^{N} j^{d_j} \prod_{k=1}^{M} \sum_{i_k=0}^{d_{N+k}} \binom{d_{N+k}}{i_k} \times$$

$$\times N^{i_k} \delta_1^{i_k} k^{d_{N+k} - i_k} \delta_2^{d_{N+k} - i_k}.$$

Полученное выражение представим в виде многочлена по степеням параметров δ_1 и δ_2. Это можно сделать после приведения подобных и введения нового индекса $I = i_1 + i_2 + \ldots + i_M$. Окончательно получим

$$A_1 = \prod_{j=1}^{N} j^{d_j} \delta_1^{D_1} \sum_{I=0}^{D_2} \alpha_I \delta_1^{I} \delta_2^{D_2 - I}, \quad (5.44)$$

где

$$\alpha_I = N^I \sum_{i_1=0}^{d_{N+1}} \sum_{i_2=0}^{d_{N+2}} \ldots \sum_{\substack{i_M=0 \\ (i_1+i_2+\ldots+i_M=I)}}^{d_{N+M}} \prod_{k=1}^{M} k^{d_{N+k}-i_k} \binom{d_{N+k}}{i_k},$$

$$D_1 = d_1 + \ldots + d_N, \qquad D_2 = d_{N+1} + \ldots + d_{N+M}.$$

Определим второй сомножитель функции правдоподобия,

$$A_2 = \exp\{-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N+M} [\Delta \sum_{k=1}^{j-1} \tilde{\lambda}_k + \tilde{\lambda}_j(\tau_i - s_{j-1})\chi_j(\tau_i)]\}. \qquad (5.45)$$

Обозначим с помощью I_j множество индексов элементов выборки $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, принадлежащих промежутку μ_j (см. рис. 5.3). Тогда выражение (5.45) перепишется следующим образом:

$$-\ln A_2 = \sum_{i \in I_1} \tilde{\lambda}_1(\tau_i - s_0) + \sum_{i \in I_2} [\tilde{\lambda}_1 \Delta + \tilde{\lambda}_2(\tau_i - s_1)] + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i \in I_{N+M}} [\tilde{\lambda}_1 \Delta + \ldots + \tilde{\lambda}_{N+M-1}\Delta + \tilde{\lambda}_{N+M}(\tau_i - s_{N+M-1})] =$$

$$= \sum_{j=1}^{N+M} \tilde{\lambda}_j [\sum_{i \in I_j} (\tau_i - s_{j-1}) + \sum_{k=j+1}^{N+M} \sum_{i \in I_k} \Delta] = \sum_{j=1}^{N+M} \tilde{\lambda}_j \kappa_j.$$

Нетрудно заметить, что полученная статистика

$$\kappa_j = \sum_{i \in I_j} (\tau_i - s_{j-1}) + \sum_{k=j+1}^{N+M} \sum_{i \in I_k} \Delta \qquad (5.46)$$

наделена отчетливым содержанием, представляя собой суммарную наработку при испытаниях, наблюдаемую в j-м промежутке. Используя выражение (5.46), A_2 представим в виде

$$A_2 = \exp[-\sum_{j=1}^{N+M} \tilde{\lambda}_j \kappa_j]. \qquad (5.47)$$

Окончательное выражение для сомножителя правдоподобия A_2 получим, подставив в (5.47) соотношение (5.40):

$$A_2 = \exp[-(a_1\delta_1 + a_2\delta_2)], \qquad (5.48)$$

где

$$a_1 = \sum_{j=1}^{N} j\kappa_j + N \sum_{j=N+1}^{N+M} \kappa_j, \qquad a_2 = \sum_{j=1}^{N} j\kappa_{N+j}. \qquad (5.49)$$

Поскольку компоненты формулы (5.41) найдены, запишем конечное выражение для функции правдоподобия:

$$l(\delta_1, \delta_2 \mid \tau) =$$

$$= c(\tau) \prod_{j=1}^{N} j^{d_j} \delta_1^{D_1} \sum_{I=0}^{D_2} \alpha_I \delta_1^I \delta_2^{D_2 - I} e^{-(a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2)} . \qquad (5.50)$$

Коэффициент α_I в функции (5.50) зависит от чисел отказов d_{N+1}, $d_{N+2}, \ldots, d_{N+M}$, наблюдаемых в промежутке μ_j $(j > N)$. Поэтому, судя по соотношению (5.50), минимальную достаточную статистику образуют величины $D_1, d_{N+1}, d_{N+2}, \ldots, d_{N+M}, a_1, a_2$.

Ядро функции правдоподобия (5.50) позволяет записать сопряженную априорную п.р. в виде

$$h_p(\delta_1, \delta_2) = B \delta_1^{U_1} \delta_2^{U_2} e^{-\alpha_1 \delta_1 - \alpha_2 \delta_2}, \qquad (\delta_1, \delta_2) \in D_\delta, \qquad (5.51)$$

где U_1, U_2, α_1, α_2 – параметры априорного распределения, B – нормирующая постоянная, а область D_δ имеет вид (5.17). В соответствии с теоремой Байеса для апостериорной п.р. параметров δ_1, δ_2 имеем

$$\hbar(\delta_1, \delta_2 \mid \tau) \backsim \delta_1^{D_1 + U_1} \delta_2^{U_2} \sum_{I=0}^{D_2} \alpha_I \delta_1^I \delta_2^{D_2 - I} \times$$

$$\times e^{-[(a_1 + \alpha_1)\delta_1 + (a_2 + \alpha_2)\delta_2]} . \qquad (5.52)$$

При использовании соотношений (5.51) и (5.52) в практических расчетах, помимо вычислительных трудностей, большую сложность представляет задача определения параметров априорного закона.

Если использовать в качестве исходного лишь предположение о равномерности распределения ВБР в момент t_0 в промежутке $[R_н, R_в]$, то априорную п.р. можно получить путем следующих рассуждений. Будем считать параметры δ_1 и δ_2 независимыми и априорную п.р. искать в виде

$$h(\delta_1, \delta_2) = h_1(\delta_1) h_2(\delta_2), \qquad (\delta_1, \delta_2) \in D_\delta . \qquad (5.53)$$

Используя соотношения (5.15) и (5.16) и свойство монотонности зависимости R_{t_0} от δ_1, получим

$$h_1(\delta_1) = \frac{k_N \Delta}{R_в - R_н} e^{-K_N \Delta \delta_1}, \qquad \delta_1' \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_1'' . \qquad (5.54)$$

Выражение для $h_2(\delta_2)$ будем искать в классе усеченных экспоненциальных распределений, который определяется плотностью (5.54). Данное предположение оправдано в силу одинакового физического смысла параметров δ_1 и δ_2. Поскольку $\delta_2 \in [0, \infty)$, для $h_2(\delta_2)$ получим

$$h_2(\delta_2) = K_M \Delta e^{-K_M \Delta \delta_2}, \qquad 0 \leqslant \delta_2 < \infty .$$

Если в дальнейшем обозначить $\Delta_1 = K_N \Delta$, $\Delta_2 = K_M \Delta$, то окончательное выражение для априорной п.р. $h(\delta_1, \delta_2)$ примет вид

$$h(\delta_1, \delta_2) = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{R_в - R_н} e^{-(\Delta_1 \delta_1 + \Delta_2 \delta_2)}, \qquad (\delta_1, \delta_2) \in D_\delta . \tag{5.55}$$

Полученная п.р. является частным случаем сопряженной априорной п.р. (5.51) при $U_1 = U_2 = 0$, $\alpha_1 = \Delta_1$, $\alpha_2 = \Delta_2$. Проведенные выше рассуждения можно считать обоснованием способа выбора параметров сопряженной априорной п.р., исходя лишь из промежутка априорной неопределенности.

С помощью теоремы Байеса найдем

$$\hbar(\delta_1, \delta_2 \mid \tau) \backsim \delta_1^{D_1} \sum_{I=0}^{D_2} \alpha_I \delta_1^{I} \delta_2^{D_2 - I} \times$$

$$\times e^{-[(a_1 + \Delta_1)\delta_1 + (a_2 + \Delta_2)\delta_2]}, \qquad (\delta_1, \delta_2) \in D_\delta . \tag{5.56}$$

Соотношение (5.56) получено с использованием верхнего приближения для функций интенсивности и ресурса. Рассуждения, приводящие к апостериорной п.р. для соответствующих нижних приближений, совпадают с приведенными выше.

5.2.3. *Случай М-мерного априорного распределения* был описан в предыдущем параграфе с помощью аппроксимирующих функций интенсивности (5.18) и функции ресурса (5.19). Каждая из этих функций зависит от $M + 1$ параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M, \lambda_{M+1}$, имеющих смысл постоянных значений интенсивности в промежутках $[0, t_{10})$, $[t_{10}, t_{20})$, ..., $[t_{(M-1)0}, t_{M0})$, (t_{M0}, ∞). Подставляя выражения (5.18) и (5.19) в (3.21), получим

$$l(\lambda \mid \tau) = c(\tau) \prod_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{M+1} \lambda_j \chi_j(t_i^*) \times$$

$$\times \exp\{-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{M+1} \chi_j(\tau_i) \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k(t_{k0} - t_{(k-1)0}) + \lambda_j(\tau_i - t_{(j-1)0})\} . \tag{5.57}$$

Для упрощения полученного выражения введем статистики $d_1, d_2, \ldots$ ..., d_M, d_{M+1}, имеющие смысл чисел отказов, наблюдаемых соответственно в указанных выше промежутках. Тогда нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\prod_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{M+1} \lambda_j \chi_j(t_i^*) = \prod_{j=1}^{M+1} \lambda_j^{d_j} . \tag{5.58}$$

Если обозначить с помощью I_j множество индексов элементов выборки, принадлежащих промежутку $[t_{(j-1)0}, t_{j0})$, то второй сомножитель функции правдоподобия (5.57) также удается упростить:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{M+1} [\chi_j(t) \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k(t_{k0} - t_{(k-1)0}) + \lambda_j(\tau_i - t_{(j-1)0})] =$$

$$= \sum_{j=1}^{M+1} \lambda_j [\sum_{i \in I_j} (\tau_i - t_{(j-1)0}) + \sum_{k=j+1}^{M+1} \sum_{i \in I_k} (t_{k0} - t_{(k-1)0})]. \qquad (5.59)$$

Полученная статистика

$$\kappa_j = \sum_{i \in I_j} (\tau_i - t_{(j-1)0}) + \sum_{k=j+1}^{M+1} \sum_{i \in I_k} (t_{k0} - t_{(k-1)0}), \qquad (5.60)$$

как и в предыдущем случае, имеет смысл суммарной наработки, зафиксированной при испытаниях в промежутке $[t_{(j-1)0}, t_{j0})$. Подставляя соотношения (5.58) – (5.60) в выражение (5.57), получим окончательное выражение для функции правдоподобия:

$$l(\lambda \mid \tau) = c(\tau) \prod_{j=1}^{M+1} \lambda_j^{d_j} \exp(-\sum_{j=1}^{M+1} \lambda_j \kappa_j). \qquad (5.61)$$

Простота полученного выражения позволяет немедленно записать ядро сопряженной априорной п.р.

$$h_p(\lambda_1, \ldots, \lambda_{M+1}) \backsim \prod_{j=1}^{M+1} \lambda_j^{c_j} \exp(-\sum_{j=1}^{M+1} \alpha_j \lambda_j), \qquad (5.62)$$

где c_j и α_j $(j = 1, 2, \ldots, M+1)$ – параметры априорной п.р., и в дальнейшем ядро апостериорной п.р.

$$\hbar_p(\lambda_1, \ldots, \lambda_{M+1} \mid \tau) \backsim \prod_{j=1}^{M+1} \lambda_j^{c_j + d_j} \exp[-\sum_{j=1}^{M+1} (\alpha_j + \kappa_j)\lambda_j]. \qquad (5.63)$$

Ограничимся полученными соотношениями для апостериорных плотностей распределений. Как видно из проведенных выше рассуждений, подход к их определению не зависит от принятого способа построения параметрического приближения. Различия в аппроксимирующих ф.р. приводят лишь к поиску различных упрощающих приемов, позволяющих установить минимальные достаточные статистики и записать наиболее лаконичное выражение для функции правдоподобия.

§ 5.3. Байесовские оценки вероятности безотказной работы для простейшего приближения функции распределения

В настоящем параграфе излагается способ получения байесовских оценок ВБР, использующий двухзвенное кусочно-линейное приближение функции ресурса вида (5.6). Данный расчетный случай выбран из методических соображений, как наиболее простой. Знание приближения апостериорного распределения в принципе позволяет получить любую численную оценку ВБР. Тем не менее в ряде случаев приходится прибегнуть к весьма громоздким аналитическим построениям или воспользоваться численными методами. Цель настоящего параграфа состоит в получении конечных аналитических соотношений для оценок ВБР и исследовании их качества.

5.3.1. Байесовские оценки ВБР при $t \leqslant t_0$. В промежутке $[0, t_0]$ значение ВБР в соответствии с принятым способом аппроксимации функции ресурса (5.6) имеет вид

$$R(t) = e^{-\tilde{\Lambda}(t)} = e^{-\lambda_0 t}, \qquad t \leqslant t_0. \tag{5.64}$$

Поскольку показатель $R(t)$ определяется только одним параметром λ_0, для определения оценок R необходимо знать маргинальную апостериорную плотность $\hbar_0(\lambda_0 \mid \tau)$. Эту плотность получим путем интегрирования совместной апостериорной плотности $\hbar(\lambda_0, \lambda_1 \mid \tau)$ по параметру λ_1:

$$\hbar_0(\lambda_0 \mid \tau) = \int_{\lambda_0}^{\infty} \hbar(\lambda_0, \lambda_1 \mid \tau) d\lambda_1 \backsim$$

$$\backsim \lambda_0^{d_0} e^{-\lambda_0 \kappa_0} \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda_1^{d_1} e^{-\lambda_1(\kappa_1 + t_0)} d\lambda_1, \qquad \lambda_0' \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_0''. \tag{5.65}$$

Воспользуемся известным интегралом

$$\int x^n e^{-ax} dx = -e^{-ax} \sum_{k=0}^{n} n^{(k)} \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} + C, \tag{5.66}$$

где $n^{(k)} = n!/(n-k)!$. Выполнив интегрирование в (5.65), получим

$$\hbar_0(\lambda_0 \mid \tau) \backsim$$

$$\backsim e^{-\lambda_0(\kappa_0 + \kappa_1 + t_0)} \lambda_0^{d_0} \sum_{i=0}^{d_1} d_1^{(i)} \frac{\lambda_0^{d_1 - i}}{(\kappa_1 + t_0)^{i+1}}. \tag{5.67}$$

Для квадратичной функции потерь искомая точечная оценка $\hat{R}^*(t)$ запишется в виде апостериорного среднего:

$$\hat{R}^*(t) = \int_{\lambda_0'}^{\lambda_0''} e^{-\lambda_0 t} \hbar_0(\lambda_0 \mid \tau) d\lambda_0. \tag{5.68}$$

Апостериорная дисперсия $\sigma^2_{\hat{R}^*(t)}$, которая является характеристикой точности полученной оценки $\hat{R}^*(t)$, запишется аналогичным образом:

$$\sigma^2_{\hat{R}^*(t)} = \int\limits_{\lambda_0'}^{\lambda_0''} e^{-2\lambda_0 t}\hbar_0(\lambda_0 \mid \tau) d\lambda_0 - [\hat{R}^*(t)]^2. \tag{5.69}$$

Выражения (5.68), (5.69) более лаконично можно представить в виде

$$\hat{R}^*(t) = \frac{H_1(t)}{H_0(t)}, \qquad \sigma^2_{\hat{R}^*(t)} = \frac{H_2(t)}{H_0(t)} - [\hat{R}^*(t)]^2, \tag{5.70}$$

где

$$H_k(t) = \int\limits_{\lambda_0'}^{\lambda_0''} \exp(-k\lambda_0 t)\exp[-\lambda_0(\kappa_0 + \kappa_1 + t_0)] \times$$

$$\times \lambda_0^{d_0} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1^{(i)}}{(\kappa_1 + t_0)^{i+1}} \lambda_0^{d_1 - i} d\lambda_0.$$

Для записи функции $H_k(t)$ в конечном виде воспользуемся интегралом (5.66). Получим

$$H_k(t) = \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1^{(i)}}{(\kappa_1 + t_0)^{i+1}} \sum_{j=0}^{d-i} \frac{(d-i)^{(j)}}{(\kappa_0 + \kappa_1 + t_0 + kt)^{j+1}} \times$$

$$\times \{ (\lambda_0')^{d-i-j} \exp[-\lambda_0'(\kappa_0 + \kappa_1 + t_0 + kt)] -$$

$$- (\lambda_0'')^{d-i-j} \exp[-\lambda_0''(\kappa_0 + \kappa_1 + t_0 + kt)]\}. \tag{5.71}$$

Судя по выражению для $H_k(t)$, более удобным в расчетных алгоритмах является использование следующих безразмерных статистик:

$$\omega = \frac{\kappa_0 + \kappa_1}{t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_i}{t_0} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i, \tag{5.72}$$

$$\omega_1 = \frac{\kappa_1}{t_0} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\tau_i}{t_0} - 1\right)\chi(\tau_i - t_0) = \sum_{i=1}^{n} (\nu_i - 1)\chi(\nu_i - 1), \tag{5.73}$$

где $\nu_i = \tau_i / t_0$. Использование статистик ω и ω_1 позволяет представить выборку результатов испытаний в виде относительных наработок ν_i. Поэтому в дальнейшем в качестве исходных данных будем использовать вектор $\nu = \{\nu^*, \nu'\}$, где $\nu^* = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$ – вектор относительных моментов отказа, $\nu' = (\nu_1', \ldots, \nu_k')$ – вектор относительных моментов приостановок испытаний.

В результате достаточная статистика, соответствующая исходной выборке τ, для функции распределения $\tilde{F}(t;\ \lambda_0, \lambda_1)$ записывается в виде набора из четырех величин $\{\omega, \omega_1, d, d_1\}$. Обращает на себя внимание лаконичность и естественный характер этой достаточной статистики. Статистика ω представляет собой суммарную относительную наработку при испытаниях, а статистика ω_1 – суммарную относительную наработку после момента t_0.

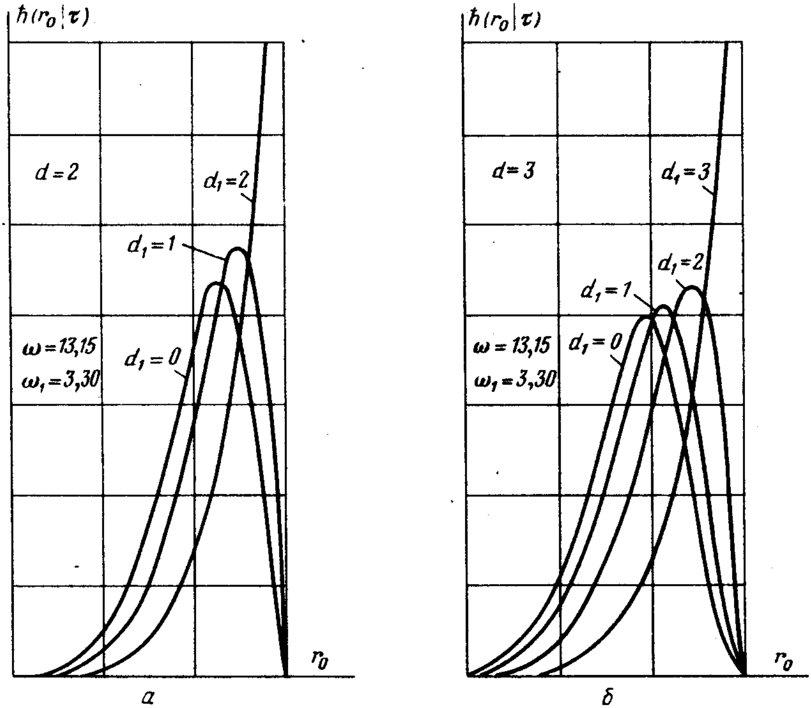


Рис. 5.7. а, б. Апостериорная плотность распределения ВБР

При расчете ω и ω_1 отсутствует необходимость разбивать вектор ν на ν^* и ν', информация о разбиении выборки на отказы и приостановки содержится в статистиках d (общее число отказов из n) и d_1 (число отказов после момента t_0).

Окончательные выражения для оценок (5.70) теперь могут быть записаны следующим образом:

$$\hat{R}^*(t) = \frac{I_{1,v}(\omega, \omega_1, d, d_1)}{I_{0,v}(\omega, \omega_1, d, d_1)}, \tag{5.74}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*(t)} = \frac{I_{2,v}(\omega, \omega_1, d, d_1)}{I_{0,v}(\omega, \omega_1, d, d_1)} - [\hat{R}^*(t)]^2. \tag{5.75}$$

Функция $I_{k,v}(\omega, \omega_1, d, d_1)$ тождественна функции $H_k(t)$, причем вместо t используется безразмерный параметр $v = t/t_0$, и записывается в следующем конечном виде:

$$I_{k,v}(\omega, \omega_1, d, d_1) = \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1^{(i)}}{(\omega_1+1)^{i+1}} \sum_{j=0}^{d-i} \frac{(d-i)^{(j)}}{(\omega+kv+1)^{j+1}} \times$$

$$\times [R_{\text{в}}^{\omega+kv+1} |\ln R_{\text{в}}|^{d-i-j} - R_{\text{н}}^{\omega+kv+1} |\ln R_{\text{н}}|^{d-i-j}]. \tag{5.76}$$

Значение нижней доверительной границы $\underline{R}^*_\gamma(t)$ определим в соответствии с общим подходом из уравнения

$$\int\limits_{\underline{R}^*_\gamma \leqslant e^{-\lambda_0 t} \leqslant R_\text{в}} \hbar_0(\lambda_0 \mid \tau)\, d\lambda_0 - \gamma = 0. \qquad (5.77)$$

Для поиска $\underline{R}^*_\gamma(t)$ введем новую переменную x такую, что $\underline{R}^*_\gamma(t) = \exp(-xt)$. Уравнение (5.77) перепишется в виде

$$\int\limits_{\lambda_0'}^{x} \hbar_0(\lambda_0 \mid \tau)\, d\lambda_0 - \gamma = 0.$$

Интеграл в данном уравнении мы определим с помощью (5.66) и затем проведем преобразования, аналогичные процедуре получения функции (5.76). Окончательно запишем следующее уравнение для определения $\underline{R}^*_\gamma(t)$:

$$\sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1^{(i)}}{(\omega_1+1)^{i+1}} \sum_{j=0}^{d-i} \frac{(d-i)^{(j)}}{(\omega+1)^{j+1}} [R_\text{в}^{\omega+1} \mid \ln R_\text{в}|^{d-i-j} -$$

$$- \underline{R}^*_\gamma(t)^{(\omega+1)/v} |\ln \underline{R}^{*\,1/v}_\gamma(t)|^{d-i-j}] - \gamma I_{0,v}(\omega, \omega_1, d, d_1) = 0. \qquad (5.78)$$

При вычислении оценок ВБР при $t = t_0$ в выражениях (5.74), (5.75), (5.78) следует положить $v = 1$.

Из методических соображений представляет интерес исследование апостериорного распределения оцениваемого показателя надежности. Рассмотрим случай $t = t_0$ $(v = 1)$. Ввиду монотонности зависимости $R(t_0) = \exp(-\lambda_0 t_0)$ для апостериорной плотности показателя $R(t_0)$ будем иметь

$$\hbar(r_0 \mid \tau) = \hbar_0(\lambda_0(r_0) \mid \tau)\, |\lambda_0'(r_0)|. \qquad (5.79)$$

Подставляя соотношение (5.77) в (5.79), после ряда упрощений получим

$$\hbar(r_0 \mid \tau) = \frac{1}{\beta} r_0^\omega \sum_{i=0}^{d_1} d_1^{(i)} \frac{|\ln r_0|^{d-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}}, \qquad (5.80)$$

где $\beta = I_{0,1}(\omega, \omega_1, d, d_1)$. На рис. 5.7,*а,б* представлены примеры конкретных реализаций апостериорной плотности (5.80) при фиксированных ω и ω_1 и различных d и d_1. Из графиков видно, что при постоянном d с увеличением d_1 $(d_1 = 0, 1, \ldots, d)$ кривая $\hbar_0(r_0 \mid \tau)$ смещается вправо, что соответствует более высокому апостериорному значению ВБР. Это согласуется со здравым смыслом и инженерной интерпретацией рассматриваемой схемы: с увеличением d_1 (при прочих неизменных параметрах) растет доля результатов испытаний, окончившихся отказами после момента t_0, и уменьшается количество отказов до момента t_0. Данная ситуация соответствует более высокому уровню надежности.

В табл. 5.1–5.3 приведены результаты расчетов по формулам (5.74)–(5.78) оценок $\hat{R}^*(t_0)$, $\sigma_{\hat{R}^*(t_0)}$, $\underline{R}^*_\gamma(t_0)$ для фиксированной выборки из 10 элементов и различных d и d_1. Анализируя данные таблиц, можно сделать следующие выводы. С увеличением d_1 при неизменном d значения $\hat{R}^*(t_0)$ и $\underline{R}^*_\gamma(t)$ возрастают, что подтверждает ранее сделанный качествен-

Таблица 5.1

Байесовская точечная оценка ВБР $\hat{R}^*(t_0)$

$R_н = 0,8$; $R_в = 1,0$; $\omega = 30,73$; $\omega_1 = 11,13$

d_1	d									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,9696	0,9410	0,9152	0,8933	0,8755	0,8616	0,8510	0,8428	0,8364	0,8315
1		0,9617	0,9299	0,9038	0,8830	0,8669	0,8547	0,8455	0,8385	0,8330
2			0,9574	0,9230	0,8963	0,8761	0,8612	0,8501	0,8418	0,8355
3				0,9553	0,9192	0,8919	0,8720	0,8577	0,8472	0,8395
4					0,9544	0,9174	0,8897	0,8699	0,8557	0,8456
5						0,9540	0,9166	0,8887	0,8689	0,8548
6							0,9539	0,9164	0,8884	0,8685
7								0,9539	0,9163	0,8882
8									0,9539	0,9162
9										0,9539

Таблица 5.2

Апостериорное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\hat{R}^*}(t_0)$

$R_{\text{н}} = 0{,}8$; $R_{\text{в}} = 1{,}0$; $\omega = 30{,}73$; $\omega_1 = 11{,}13$

d_1	d									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0291	0,0383	0,0422	0,0424	0,0404	0,0373	0,0338	0,0305	0,0274	0,0248
1		0,0344	0,0420	0,0437	0,0421	0,0391	0,0354	0,0319	0,0286	0,0258
2			0,0377	0,0444	0,0446	0,0418	0,0380	0,0341	0,0304	0,0273
3				0,0395	0,0460	0,0452	0,0417	0,0376	0,0333	0,0296
4					0,0404	0,0468	0,0456	0,0417	0,0371	0,0328
5						0,0408	0,0472	0,0459	0,0417	0,0470
6							0,0409	0,0474	0,0460	0,0418
7								0,0410	0,0474	0,0460
8									0,0410	0,0475
9										0,0410

Таблица 5.3

Байесовская нижняя доверительная граница $\underline{R}^*_{0,9}(t_0)$

$R_{\text{Н}} = 0,8$; $R_{\text{В}} = 1,0$; $\omega = 30,73$; $\omega_1 = 11,13$

d_1	d									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,9302	0,8867	0,8544	0,8329	0,8204	0,8134	0,8094	0,8070	0,8055	0,8044
1		0,9137	0,8694	0,8409	0,8244	0,8155	0,8106	0,8077	0,8059	0,8047
2			0,9036	0,8582	0,8327	0,8195	0,8126	0,8089	0,8066	0,8052
3				0,8981	0,8517	0,8282	0,8168	0,8110	0,8079	0,8060
4					0,8955	0,8483	0,8258	0,8153	0,8102	0,8073
5						0,8945	0,8468	0,8246	0,8146	0,8097
6							0,8942	0,8462	0,8241	0,8143
7								0,8941	0,8460	0,8240
8									0,8941	0,8459
9										0,8941

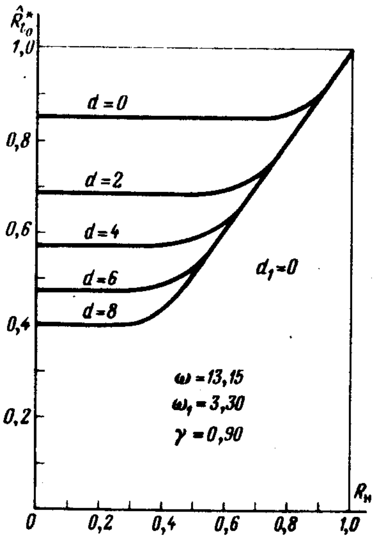


Рис. 5.8. Зависимость байесовской доверительной границы ВБР от нижнего значения промежутка априорной неопределенности

ный вывод. Диагональные элементы имеют свойство асимптотической устойчивости. Это говорит о том, что с увеличением числа отказов (в том случае, когда все отказы происходят после момента t_0, т.е. $d_1 = d$) байесовские оценки, начиная с некоторого значения, не изменяются, если только значения статистик ω и ω_1 остаются постоянными. Этот вывод имеет очевидное объяснение. В самом деле, если изделие эксплуатируется в течение времени t_0, то на значение ВБР в этот момент не должны оказывать влияния отказы, появившиеся после t_0. Отмеченное свойство говорит о гибкости байесовских процедур. Массовые расчеты оценок ВБР позволяют обнаружить область нечувствительности априорной информации, т.е. существование таких промежутков априорной неопределенности, изменение границ которых не приводит к изменению оценки ВБР. Этот факт иллюстрируется графиками рис. 5.8. Как видно из рисунка, чем меньше d (т.е. чем выше надежность), тем выше порог нечувствительности.

5.3.2. Байесовские оценки ВБР при $t > t_0$. В соответствии с приближением (5.6) при $t > t_0$ имеем

$$R(t) = R(t;\ \lambda_0,\ \lambda_1) = \exp\{-[\lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0)t_0]\}\ . \tag{5.81}$$

В данном случае ВБР зависит от двух параметров, и поэтому для получения оценок показателя (5.81) необходимо воспользоваться апостериорной плотностью $\hbar(\lambda_0,\ \lambda_1 \mid \tau)$. В соответствии с соотношением (5.35) обозначим ядро апостериорной плотности через

$$C_0(\lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0^{d_0}\lambda_1^{d_1}\exp\{-[\lambda_0\kappa_0 + \lambda_1(\kappa_1 + t_0)]\} \tag{5.82}$$

и определим нормирующий множитель в виде интеграла

$$\beta = \iint\limits_D C_0(\lambda_0,\ \lambda_1)\,d\lambda_0 d\lambda_1 = \left(\frac{1}{t_0}\right)^{d+2}\sum_{i=0}^{d_1}\frac{d_1^{(i)}}{(\omega_1+1)^{i+1}}\sum_{j=0}^{d-i}\frac{(d-i)^{(j)}}{(\omega+1)^{j+1}}\times$$

$$\times\ (R_в^{\omega+1}\,|\ln R_в|^{d-i-j} - R_н^{\omega+1}\,|\ln R_н|^{d-i-j}). \tag{5.83}$$

Найдем оценку $\hat{R}^*(t)$ для квадратичной функции потерь в виде апостериорного среднего функции (5.81):

$$\hat{R}^*(t) = \frac{1}{\beta}\iint\limits_D \exp\{-[\lambda_0\kappa_0 + \lambda_1(\kappa_1 + t_0)]\}C_0(\lambda_0, \lambda_1)\,d\lambda_0 d\lambda_1 =$$

$$= \frac{1}{\beta}\int_{\lambda_0'}^{\lambda_0''}\lambda_0^{d_0}e^{-\lambda_0(\kappa_0 + t_0)}\,d\lambda_0\int_{\lambda_0}^{\infty}\lambda_1^{d_1}e^{-\lambda_1(\kappa_1 + t)}\,d\lambda_1.$$

Дважды воспользуемся интегралом (5.66) и перейдем к безразмерным параметрам ω, ω_1 и v. Окончательно получим

$$\hat{R}^*(t) = \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1^{(i)}}{(\omega_1 + v)^{i+1}} \sum_{j=0}^{d-i} \frac{(d-i)^{(j)}}{(\omega + v + 1)^{j+1}} \times$$

$$\times \left(R_{\text{в}}^{\omega+v+1} \, |\ln R_{\text{в}}|^{d-i-j} - R_{\text{н}}^{\omega+v+1} \, |\ln R_{\text{н}}|^{d-i-j}\right).$$

Вывод выражения для апостериорной дисперсии $\sigma^2_{\hat{R}^*(t)}$ аналогичен. Введем функцию

$$J_{m,v}(\omega,\ \omega_1, d, d_1) = \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1^{(i)}}{(\omega_1 + a_m)^{i+1}} \sum_{j=0}^{d-i} \frac{(d-i)^{(j)}}{(\omega + mv + 1)^{j+1}} \times$$

$$\times \left(R_{\text{в}}^{\omega+mv+1} \, |\ln R_{\text{в}}|^{d-i-j} - R_{\text{н}}^{\omega+mv+1} \, |\ln R_{\text{н}}|^{d-i-j}\right), \qquad (5.84)$$

где

$$a_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ v, & m = 1, \\ 2v - 1, & m = 2. \end{cases}$$

Конечные выражения для оценок $\hat{R}^*(t)$ и $\sigma^2_{\hat{R}^*(t)}$ через эту функцию записываются следующим образом:

$$\hat{R}^*(t) = \frac{J_{1,v}(\omega, \omega_1, d, d_1)}{J_{0,v}(\omega, \omega_1, d, d_1)}, \qquad \sigma^2_{\hat{R}^*(t)} = \frac{J_{2,v}(\omega, \omega_1, d, d_1)}{J_{0,v}(\omega, \omega_1, d, d_1)} - \hat{R}^{*2}(t). \qquad (5.85)$$

Получим теперь уравнение для нахождения $\underline{R}^*_\gamma(t)$. Воспользуемся общим соотношением (2.34) и запишем уравнение относительно $\underline{R}^*_\gamma$:

$$\iint\limits_{\left[\substack{R(t;\,\lambda_0,\,\lambda_1) \geqslant \underline{R}^*_\gamma(t) \\ (\lambda_0,\,\lambda_1) \in D}\right]} \hbar(\lambda_0,\ \lambda_1 | \tau)\, d\lambda_0\, d\lambda_1 - \gamma = 0. \qquad (5.86)$$

Упростим область интегрирования в (5.86). Условно представим $\underline{R}^*_\gamma(t) = \exp(-yt_0)$ и переменную y будем считать неизвестной. Условие $R(t) \geqslant \underline{R}^*_\gamma(t)$ перепишется в виде неравенства $\lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0) t_0 \leqslant y t_0$, или, с помощью безразмерного параметра v,

$$\lambda_1(v - 1) + \lambda_0 \leqslant y. \qquad (5.87)$$

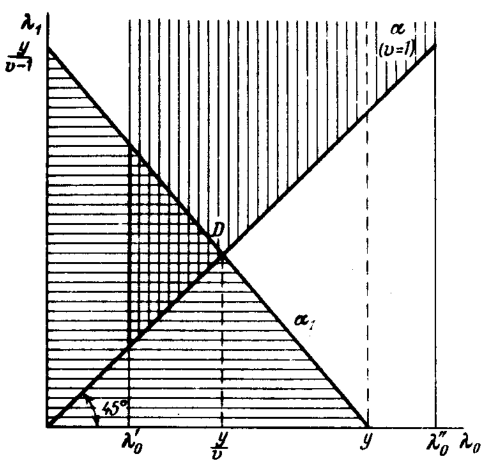


Рис. 5.9. Область интегрирования для определения байесовской доверительной границы ВБР

Пересечение областей D и D_γ, задаваемой с помощью (5.87), показано рис. 5.9. Область D_γ ограничивается прямой α_1, имеющей уравнение $y = \lambda_1(v-1)+\lambda_0$, и координатными осями λ_0 и λ_1. Область $D=\{\lambda_0' \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_0'', \lambda_0 \leqslant \lambda_1\}$ изображена вертикальной штриховкой. Пересечение $D \cap D_\gamma$ записывается в виде совокупности двух неравенств:

$$\lambda_0' \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_0'', \quad \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \frac{y-\lambda_0}{v-1}.$$

Задача определения y и затем $\underline{R}^*_\gamma(t) = \exp(-yt_0)$ имеет следующий геометрический смысл: необходимо найти такое значение переменной y, чтобы интеграл от апостериорной плотности $\hbar(\lambda_0, \lambda_1 \mid \tau)$ по области $D \cap D_\gamma$ был равен доверительной вероятности γ. В окончательном виде уравнение записывается следующим образом:

$$S_1(\underline{R}^*_\gamma(t)) - S_2(\underline{R}^*_\gamma(t)) - \gamma J_{0,v}(\omega, \omega_1, d, d_1) = 0, \tag{5.88}$$

где

$$S_1(x) = \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1^{(i)}}{(\omega_1+1)^{i+1}} \sum_{j=0}^{d-i} \frac{(d-i)^{(j)}}{(\omega+1)^{j+1}} \times$$

$$\times (R_{\text{в}}^{\omega+1} \mid \ln R_{\text{в}}\mid^{d-i-j} - x^{(\omega+1)/v} \mid \ln x^{1/v}\mid^{d-i-j}),$$

$$S_2(x) = \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1^{(i)}}{(\omega_1+1)^{i+1}} \left(\frac{1}{v-1}\right)^{d_1-i} \sum_{k=0}^{d_1-i} \binom{d_1-i}{k} \mid \ln x\mid^{d_1-i-k} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{d_0+k} \frac{(d_0+k)^{(j)}}{a^{j+1}} [x^b R_{\text{в}}^a \mid \ln R_{\text{в}}\mid^{d_0+k-j} - x^{(\omega+1)/v} \mid \ln x^{1/v}\mid^{d_0+k-j}],$$

$$a = \frac{v(\omega-\omega_1)-(\omega-1)}{v-1}, \quad b = \frac{\omega_1+1}{v-1}, \quad d_0 = d - d_1.$$

Уравнение (5.88) является трансцендентным и весьма громоздким. Однако его численное решение не сопряжено с большими трудностями, так как в промежутке $[R_{\text{н}}, R_{\text{в}}]$ это уравнение содержит всего один корень.

В табл. 5.4–5.6 представлены результаты расчетов, проведенных с помощью выражений (5.85) и (5.87). Данные таблиц свидетельствуют о непротиворечивости метода. В самом деле, при фиксированном d_1 оценки $\hat{R}^*(t)$ и $\underline{R}^*_\gamma(t)$ уменьшаются с ростом d. В отличие от табл. 5.1–5.3, табл. 5.4–5.6 не содержат одинаковых диагональных элементов. Это естественно, так как для $R(t_0)$ отказы, произошедшие после t_0, малосущественны. В то же время для $R(t)$ при $t > t_0$ этот факт имеет решающее значение.

Влияние длины промежутка $[R_{\text{н}}, R_{\text{в}}]$ на оценки ВБР такое же, как и в предыдущем случае. Обращает на себя внимание тот факт, что с уменьше-

Таблица 5.4

Байесовская точечная оценка ВБР $\hat{R}^*(t)$ при $t > t_0$

$R_н = 0{,}9$; $R_в = 1{,}0$; $\omega = 30{,}73$; $\omega_1 = 11{,}13$; $\upsilon = \dfrac{t}{t_0} = 1{,}4$

d_1	d									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,9318	0,9053	0,8875	0,8756	0,8675	0,8618	0,8577	0,8546	0,8522	0,8501
1		0,9029	0,8805	0,8662	0,8569	0,8506	0,8461	0,8427	0,8403	0,8382
2			0,8750	0,8553	0,8432	0,8354	0,8302	0,8265	0,8237	0,8216
3				0,8475	0,8293	0,8184	0,8116	0,8070	0,8037	0,8013
4					0,8207	0,8033	0,7931	0,7867	0,7824	0,7794
5						0,7945	0,7778	0,7680	0,7619	0,7578
6							0,7692	0,7530	0,7435	0,7376
7								0,7446	0,7290	0,7198
8									0,7208	0,7057
9										0,6978

Таблица 5.5

Апостериорное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\hat{R}^*(t)}$ при $t > t_0$

$R_н = 0,9$; $R_в = 1,0$; $\omega = 30,73$; $\omega_1 = 11,13$; $\upsilon = \frac{t}{t_0} = 1,4$

d_1	d									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0427	0,0439	0,0416	0,0388	0,0363	0,0343	0,0329	0,0318	0,0297	0,0288
1		0,0489	0,0480	0,0455	0,0431	0,0412	0,0398	0,0388	0,0375	0,0368
2			0,0543	0,0528	0,0506	0,0487	0,0472	0,0462	0,0453	0,0448
3				0,0589	0,0574	0,0555	0,0540	0,0529	0,0520	0,0515
4					0,0628	0,0613	0,0596	0,0583	0,0574	0,0567
5						0,0659	0,0644	0,0628	0,0616	0,0608
6							0,0684	0,0669	0,0653	0,0642
7								0,0704	0,0688	0,0673
8									0,0720	0,0704
9										0,0732

Таблица 5.6

Байесовская нижняя доверительная граница $R^*_{0,9}(t)$ при $t > t_0$

$R_н = 0,9$; $R_в = 1,0$; $\omega = 30,73$; $\omega_1 = 11,13$; $\upsilon = \frac{t}{t_0} = 1,4$

d_1	d									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,8722	0,8507	0,8446	0,8433	0,8424	0,8315	0,8287	0,8243	0,8238	0,8230
1		0,8400	0,8308	0,8289	0,8261	0,8209	0,8191	0,8170	0,8152	0,8144
2			0,8112	0,8102	0,8094	0,8081	0,8075	0,8068	0,8051	0,8047
3				0,7829	0,7812	0,7801	0,7792	0,7783	0,7772	0,7766
4					0,7549	0,7538	0,7524	0,7513	0,7503	0,7496
5						0,7274	0,7266	0,7258	0,7249	0,7239
6							0,7008	0,6998	0,6990	0,6987
7								0,6753	0,6740	0,6731
8									0,6507	0,6492
9										0,6271

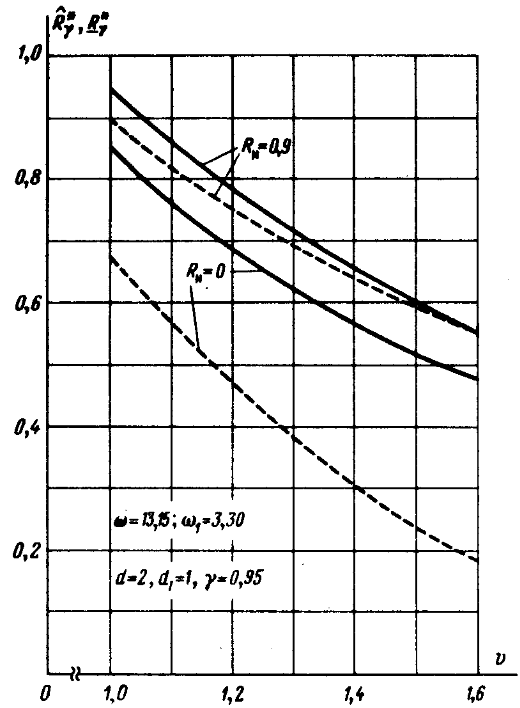


Рис. 5.10. Зависимость байесовских оценок ВБР от безразмерного параметра времени

нием разности $R_в - R_н$ оценки $\hat{R}^*(t)$ и $\underline{R}^*_\gamma(t)$ сближаются при увеличении параметра υ. Эта особенность продемонстрирована на рис. 5.10. Судя по графикам рис. 5.10, зависимость оценок ВБР от безразмерного параметра времени носит естественный характер, т.е. оценки ВБР убывают с ростом υ.

5.3.3. Исследование достоверности полученных оценок. Точная оценка погрешности предлагаемого метода в классе стареющих распределений пока не найдена. Поэтому подтверждение достоверности полученных результатов проводилось с помощью статистического моделирования. Последовательно моделировались выборки объемом 20, 40, 60, 80 значений для случайной величины, подчиняющейся распределению Вейбулла с функцией распределения

$$F(t) = F(t;\ \sigma,\ \alpha) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\alpha}\right],$$

принадлежащей классу стареющих распределений. Цензурирование справа осуществлялось наименьшим из двух чисел: значением $\delta k_2 \sigma$ и случайным числом, следующим равномерному распределению в промежутке $[k_1 \sigma, k_2 \sigma]$. Моделирование производилось при $\alpha = 1, 2, 3$ и различных промежутках априорной неопределенности $[R_н,\ R_в]$. В табл. 5.7 помещен фрагмент результатов моделирования, а именно точечные оценки ВБР $\hat{R}^*(t_0)$, най-

Таблица 5.7

Сравнение байесовской апостериорной точечной оценки $\hat{R}^*(t_0)$ с истинным значением ВБР $R(t_0)$ для распределения Вейбулла

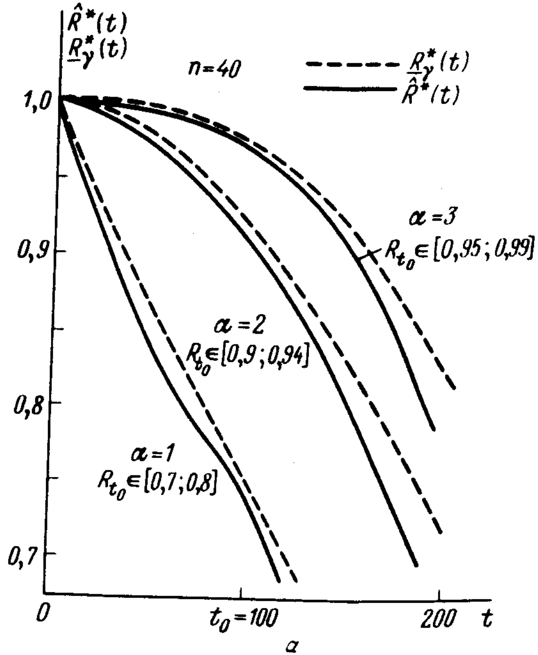
$\alpha = 1$	$R(t_0) = 0{,}7515$			
$R_н$; $R_в$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 80$
0,70; 0,80	0,7432	0,7420	0,7548	0,7449
0,60; 0,85	0,7074	0,7098	0,7618	0,7384
0,50; 0,90	0,6945	0,7044	0,7654	0,7386
0,50; 1,00	0,6947	0,7045	0,7655	0,7387
$\alpha = 2$	$R(t_0) = 0{,}9216$			
0,90; 0,94	0,9227	0,9237	0,9247	0,9223
0,80; 0,96	0,9183	0,9280	0,9334	0,9219
0,70: 0,98	0,9337	0,9429	0,9465	0,9264
0,70; 1,00	0,9526	0,9515	0,9512	0,9268
$\alpha = 3$	$R(t_0) = 0{,}9769$			
0,95; 0,99	0,9726	0,9751	0,9774	0,9752
0,92; 0,99	0,9628	0,9697	0,9746	0,9718
0,90; 1,00	0,9636	0,9771	0,9838	0,9756
0,80; 1,00	0,9546	0,9756	0,9836	0,9754

денные с помощью выражения (4.38) при $\upsilon = 1$, $t = t_0 = 100$с, $\sigma = 350$ с, $k_1 = 0{,}75$, $k_2 = 2{,}0$, $\delta = 0{,}8$. Сравнение точечных оценок с истинным значением ВБР позволяет сделать следующие выводы:

(1) с увеличением объема выборки оценка $\hat{R}^*(t_0)$ приближается к истинному значению $R(t_0)$;

(2) выбор более узкого промежутка априорной неопределенности $[R_н, R_в]$ обеспечивает более близкое к $R(t_0)$ значение оценки.

При $t \neq t_0$ $(\upsilon \neq 1)$ байесовская оценка $\hat{R}^*(t)$ ведет себя следующим образом: в промежутке $[0{,}9t_0;\ 1{,}1t_0]$ приближение точечной оценки к истинному значению $R(t)$ аналогично представленному в таблице, т.е. является удовлетворительным, вне этого промежутка – хуже. Этот факт иллюстрируется рис. 5.11. Отсюда следует важная практическая рекомендация: в качестве априорной информации при оценке ВБР $R(t)$ необходимо выбирать промежутки априорной неопределенности для моментов времени, близких к t.



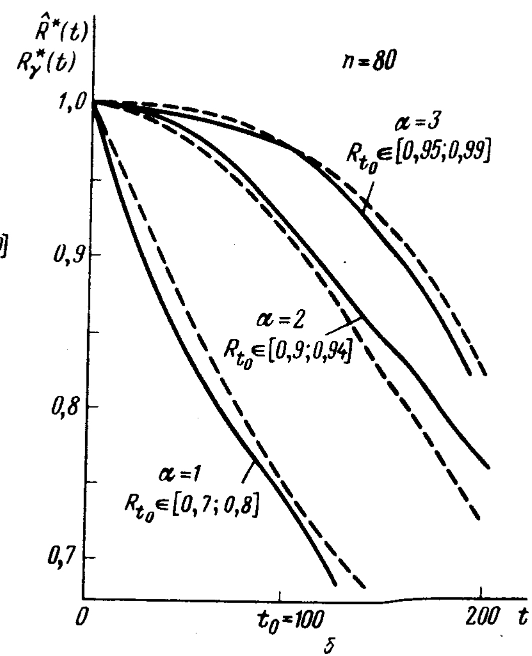


Рис. 5.11. а, б. Сравнение байесовской оценки ВБР с ее точными значениями для распределения Вейбулла

§ 5.4. Байесовские оценки вероятности безотказной работы для ограниченно стареющих распределений

В настоящем параграфе способ приближения функции распределения $F(t)$, основанный на соотношении (5.6), используется для байесовского оценивания вероятности безотказной работы в случае так называемых ограниченно стареющих распределений, задаваемых предельным значением скорости роста функции интенсивности. Применение указанного класса позволяет оценить предельную погрешность за счет используемой аппроксимации. Исследован случай цензурированных результатов испытаний и априорной информации, сводящейся к равномерному априорному распределению искомой ВБР в промежутке $[R_н, R_в] \subset [0, 1]$.

5.4.1. Параметрическое приближение на классе ограниченно стареющих распределений. Будем использовать двупараметрическое приближение функции ресурса (5.6) применительно к некоторому подклассу из класса стареющих распределений S_0.

Определение класса ограниченно стареющих распределений. Класс распределений вероятностей $S_0(\delta) \subset S_0$ назовем *ограниченно стареющим,* или δ-стареющим, если для любой функции распределения $F(x) \in S_0(\delta)$ выполняется условие

$$0 \leqslant \lambda'(x) \leqslant \delta, \tag{5.89}$$

где $\lambda(x) = F'(x)/(1-F(x))$ – функция интенсивности отказов.

Ясно, что при $\delta \geqslant 0$ класс $S_0(\delta)$ непуст и $S_0(\infty) = S_0$. При $\delta = 0$ класс $S_0(\delta)$ вырождается в параметрическое семейство экспоненциальных распределений.

Функцию распределения вероятностей $F_{LS}(x) = F_{LS}(x;\ \alpha,\ c) = 1 - \exp\left[-\left(\alpha x + \frac{c}{2}x^2\right)\right]$ при $c \geqslant 0$ по аналогии будем называть *линейно стареющей.* Класс всех линейно стареющих распределений, задаваемых условием $c \leqslant \delta$, обозначим $S_{LS}(\delta)$. Ясно, что $S_{LS}(\delta) \subset S_0(\delta)$ и при $\delta \geqslant 0$ класс $S_{LS}(\delta)$ непуст.

Неизвестную функцию распределения времени безотказной работы $F(x) \in S_0(\delta)$ будем приближать с помощью функции $\tilde F(x) = \tilde F(x;\ \alpha, \theta) = 1 - \exp\left[-\tilde\Lambda(x;\ \alpha, \theta)\right]$ при

$$\tilde\Lambda(x;\ \alpha,\ \theta) = \chi(t-x)\,\alpha x + \chi(x-t)\,[\theta x - (\theta-\alpha)\,t], \tag{5.90}$$

где t – момент времени, для которого определяется ВБР, θ, α – параметры. С помощью следующей леммы устанавливается связь между $\tilde F(x)$ и классом линейно стареющих распределений.

Лемма. *Пусть параметры α и θ принадлежат множеству*

$$\Omega(\delta) = \{(\alpha, \theta):\ \alpha \geqslant 0,\ \ \alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha + \delta t\}.$$

Тогда для аппроксимирующей функции $\tilde F(x)$ выполняется условие

$$F_{LS}(x;\ \alpha,\ 0) \leqslant \tilde F(x;\ \alpha,\ \theta) \leqslant F_{LS}(x;\ \alpha,\ \delta).$$

Доказательство. Функция интенсивности отказов $\lambda(x) = \tilde\Lambda'(x;\ \alpha,\ \theta)$ с помощью (5.90) может быть записана в виде $\tilde\lambda(x;\ \alpha, \theta) =$

$= \chi(t - x)\ \alpha + \chi(x - t)\ \theta$. При выполнении условий леммы $(\alpha, \theta) \in \Omega(\delta)$ справедливо неравенство

$$\lambda_1 \leqslant \tilde{\lambda}(x;\ \alpha,\ \theta) \leqslant \lambda_2(x),$$

причем $\lambda_1 = \alpha$ и $\lambda_2(x) = \alpha + \delta(x)$ являются соответственно функциями интенсивности для функций распределений $F_{LS}(x;\ \alpha, 0)$ и $F_{LS}(x;\ \alpha, \delta)$. Из приведенного двойного неравенства после преобразований функции интенсивности отказов в функцию распределения следует утверждение леммы.

5.4.2. Приближенные байесовские оценки ВБР для класса $S_0(\delta)$. Сформулируем задачу, приняв следующие исходные допущения:

(1) $F(x) \in S_0(\delta)$, причем значение δ считается заданным;

(2) оцениваемая ВБР $R(t) = 1 - F(t)$ в течение заданного времени t имеет равномерное априорное распределение в промежутке $[R_н, R_в] \subset [0, 1]$;

(3) результаты испытания имеют вид цензурированной выборки $\tau = \{t^*, t\}$, полученной при реализации НЦ-плана.

Задача заключается в нахождении апостериорной плотности $\hbar_R(r \mid \tau)$ искомой ВБР и оценки $\hat{R}^*(t)$ для квадратичной функции потерь.

Мы будем искать приближенное решение задачи, используя аналитическую замену неизвестной функции распределения $F(x) \in S_0(\delta)$ функцией $\tilde{F}(x) \in S_0(\delta)$, определяемой соотношением (5.90). Потребуем дополнительно, чтобы выполнялось условие $F(t) = \tilde{F}(t)$, означающее совпадение значений истинной неизвестной функции распределения и ее аппроксимации в момент времени t, для которого определяется ВБР $R(t)$. Согласно этому допущению параметр α однозначно определяется неизвестным значением $R(t)$:

$$\alpha = \alpha(R(t)) = -\ln R(t)/t. \qquad (5.91)$$

Таким образом, будем определять апостериорную плотность ВБР и соответствующую точечную оценку для параметрического класса функций распределения $\tilde{F}(x;\ \alpha,\ \theta)$, причем $(\alpha, \theta) \in \Omega(\delta;\ R_н, R_в) \subseteq \Omega(\delta)$, где $\Omega(\delta;\ R_н, R_в) = \{(\alpha, \theta):\ \alpha' \leqslant \alpha \leqslant \alpha'', \alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha + \delta t\}$, $\alpha' = -\ln R_в/t$, $\alpha'' = -\ln R_н/t$.

Априорную плотность $h(\alpha,\ \theta)$ будем искать в естественном виде

$$h(\alpha, \theta) = h_1(\alpha)\, h_2(\theta \mid \alpha). \qquad (5.92)$$

Используя исходное допущение (2) и монотонную зависимость (5.91), получим

$$h_1(\alpha) = \frac{t}{R_в - R_н} e^{-\alpha t}, \qquad \alpha \in [\alpha',\ \alpha''] \subset [0, \infty). \qquad (5.93)$$

Потребовав дополнительно, чтобы условная плотность $h_2(\theta \mid \alpha)$ принадлежала классу усеченных экспоненциальных плотностей, определяемых выражением (5.93), найдем

$$h_2(\theta \mid \alpha) = \frac{te^{-(\theta - \alpha)t}}{1 - e^{-\delta t^2}}, \qquad \theta \in [\alpha,\ \alpha + \delta t]. \qquad (5.94)$$

При $\delta = 0$ плотность $h_2(\theta | \alpha)$ вырождается в дельта-функцию. Совместную априорную плотность $h(\alpha, \theta)$ запишем, подставив (5.93) и (5.94) в (5.92):

$$h(\alpha, \theta) = \frac{t^2 \exp(-\theta t)}{(R_в - R_н)(1 - \exp(-\delta t^2))}, \quad (\alpha, \theta) \in \Omega(\delta; R_н, R_в). \tag{5.95}$$

Функция правдоподобия $l(\alpha, \theta | \tau)$ для $\widetilde{F}(x; \alpha, \theta)$ получается по аналогии с (5.26) и имеет следующий вид:

$$l(\alpha, \theta | \tau) = K(\tau) \alpha^{d_0} \theta^{d_1} \exp[-(\alpha\kappa_0 + \theta\kappa_1)], \tag{5.96}$$

где

$$\kappa_0 = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \chi(t - \tau_i) + n_1 t, \quad \kappa_1 = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \chi(\tau_i - t) - n_1 t,$$

$$n_1 = \sum_{i=1}^{n} \chi(\tau_i - t), \quad d_0 = \sum_{i=1}^{n} \chi(t - t_i^*), \quad d_1 = \sum_{i=1}^{n} \chi(t_i^* - t),$$

$K(\tau)$ – функция, зависящая только от данных τ.

Априорная плотность $h(\alpha, \theta)$ и функция правдоподобия $l(\alpha, \theta | \tau)$ однозначно определяют апостериорную плотность $\hbar_R(r | \tau)$.

Теорема 5.1. *Пусть априорная плотность* $h(\alpha, \theta)$ *имеет вид* (5.95). *Тогда для апостериорной плотности* $\hbar_R(r | \tau)$ *вероятности безотказной работы* $R(t) = 1 - \widetilde{F}(t; \alpha, \theta) \in [R_н, R_в]$ *справедливо соотношение*

$$\hbar_R(r | \tau) \backsim r^{\omega}(-\ln r)^{d_0} \sum_{k=0}^{d_1} \frac{d_1^{(k)}}{(\omega_1 + 1)^{k+1}} [(-\ln r)^{d_1 - k} -$$

$$- e^{-\delta t^2(\omega_1 + 1)}(\delta t^2 - \ln r)^{d_1 - k}]$$

при $\delta > 0$ *и*

$$\hbar_R(r|\tau) \backsim r^{\omega}(-\ln r)^{d_0 + d_1}$$

при $\delta = 0$, *причем* $\omega_1 = \kappa_1 / t$, $\omega = (\kappa_0 + \kappa_1)/t$.

Доказательство. Учитывая соотношение (5.91), получим $R(t) = \exp(-\alpha t)$. Поэтому для определения $\hbar_R(r | \tau)$ необходимо найти $\hbar_1(\alpha | \tau)$.

Пусть сначала $\delta > 0$. В соответствии с теоремой Байеса $\hbar(\alpha, \theta | \tau) \backsim h(\alpha, \theta)\, l(\alpha, \theta | \tau)$, откуда с учетом (5.95) и (5.96) получим

$$\hbar(\alpha, \theta | \tau) \backsim \alpha^{d_0} \theta^{d_1} \exp\{-[\alpha\kappa_0 + \theta(\kappa_1 + t)]\},$$
$$(\alpha, \theta) \in \Omega(\delta; R_н, R_в). \tag{5.97}$$

Проинтегрировав соотношение (5.97) по θ в промежутке $[\alpha, \alpha + \delta t]$, получим

$$\hbar_1(\alpha | \tau) \backsim \alpha^{d_0} e^{-\alpha\kappa_0} e^{-\alpha(\kappa_1 + t)} \sum_{k=0}^{d_1} \frac{d_1^{(k)}}{(\kappa_1 + t)^{k+1}} [\alpha^{d_1 - k} -$$

$$- e^{-\delta t(\kappa_1 + t)}(\alpha + \delta t)^{d_1 - k}], \quad \alpha' \leqslant \alpha \leqslant \alpha''. \tag{5.98}$$

Поскольку $\alpha = \alpha(r) = -\ln r/t$, для $\hbar_R(r\mid\tau)$ будем иметь

$$\hbar_R(r\mid\tau) = |\alpha'(r)|\,\hbar_1(\alpha(r)\mid\tau) \backsim$$

$$\backsim \frac{1}{t^{d+2}}\, r^{\omega}(-\ln r)^{d_0} \sum_{k=0}^{d_1} \frac{d_1^{(k)}}{(\omega_1+1)^{k+1}} \, [(-\ln r)^{d_1-k} -$$

$$- e^{-\delta t^2(\omega_1+1)}(\delta t^2 - \ln r)]^{d_1-k}, \tag{5.99}$$

что доказывает первую часть теоремы.

При $\delta = 0$ априорная плотность $\hbar_2(\theta|\,\alpha)$ вырождается в дельта-функцию, и для $\hbar(\alpha,\theta|\,\tau)$ справедливо соотношение

$$\hbar(\alpha,\ \theta\mid\tau) \backsim \alpha^{d_0}\theta^{d_1} \exp\{-[\alpha(\kappa_0+t)+\theta\kappa_1]\}\ \Delta_\theta(\theta-\alpha),$$

где $\Delta_\theta(x)$ обозначает дельта-функцию по переменной θ. Используя фильтрующее свойство дельта-функции, получим

$$\hbar_1(\alpha\mid\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hbar(\alpha,\theta\mid\tau)\ d\theta \backsim \alpha^{d_0+d_1}\, e^{-\alpha(\kappa_0+\kappa_1+t)}.$$

Теперь по аналогии с (5.99) запишем

$$\hbar_R(r\mid\tau) \backsim \frac{1}{t^{d+1}}\, r^{\omega}(-\ln r)^{d_0+d_1},$$

что доказывает вторую часть теоремы.

С помощью теоремы 5.1 несложно найти апостериорную точечную оценку ВБР при $\delta > 0$ и квадратичной функции потерь:

$$\hat{R}^*(t) = \int_0^1 r\hbar_R(r\mid\tau)\,dr = \frac{I_1(R_{\text{н}}, R_{\text{в}})}{I_0(R_{\text{н}},\ R_{\text{в}})}, \tag{5.100}$$

где

$$I_m(R_{\text{н}},\ R_{\text{в}}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{d_1} \frac{d_1^{(k)}}{(\omega_1+1)^{k+1}} \left| \sum_{l=0}^{d-k} \frac{(d-k)^{(l)}}{(\omega+m+1)^{l+1}} (R_{\text{в}}^{\omega+m}\,|\ln R_{\text{в}}|^{d-k-l} - \right.$$

$$- R_{\text{н}}^{\omega+m}|\ln R_{\text{н}}|^{d-k-l}) - e^{-\delta t^2(\omega_1+1)} \sum_{j=1}^{d_1-k} \delta t^2 \sum_{l=0}^{d-k-j} \frac{(d-k-j)^{(l)}}{(\omega+m+1)^{l+1}} \times$$

$$\left.\times\ (R_{\text{в}}^{\omega+m}\,|\ln R_{\text{в}}|^{d-k-j-l} - R_{\text{н}}^{\omega+m}\,|\ln R_{\text{н}}|^{d-k-j-l})\right|, \quad d = d_0 + d_1.$$

При $R_{\text{н}} = 0$, $R_{\text{в}} = 1$ функция I_m имеет более простой вид:

$$I_m(0,1) = \sum_{k=0}^{d_1} \frac{1}{(\omega_1+1)^{k+1}} \left[\frac{(d-k)!}{(d_1-k)!} \cdot \frac{1}{(\omega+m+1)^{d-k+1}} - \right.$$

$$\left. - e^{-\delta t^2(\omega_1+1)} \sum_{j=0}^{d_1-k} \frac{(d-k-j)!}{j!(d_1-k-j)!} \cdot \frac{\delta t^2}{(\omega+m+1)^{d-k-j+1}} \right]. \tag{5.101}$$

По аналогии с (5.100) выражение для апостериорной дисперсии записывается следующим образом:

$$D[R(t)\mid\tau] = \frac{I_2(R_н, R_в)}{I_0(R_н, R_в)} - \left|\frac{I_1(R_н, R_в)}{I_0(R_н, R_в)}\right|^2.$$

В дальнейшем мы ограничимся исследованием случая $R_н = 0$, $R_в = 1$, который соответствует отсутствию априорной информации.

5.4.3. Оценка погрешности приближения. Представление о погрешности используемого приближения функции распределения можно получить воспользовавшись леммой, согласно которой при $(\alpha, \theta) \in \Omega(\delta)$ функция $\widetilde{F}(x;\ \alpha, \theta)$ заключена между двумя линейно стареющими распределениями. Способ определения ВБР, построенных на линейно стареющих распределениях, дается следующей теоремой.

Теорема 5.2. *Для апостериорной плотности распределения* $\hbar_{LS}(r\mid\tau)$ *вероятности безотказной работы* $R_{LS}(t) = 1 - F_{LS}(t;\ \alpha, \beta)$ *при известном* β *и равномерном априорном распределении* $R_{LS}(t)$ *в* $[0, 1]$ *справедливо соотношение*

$$\hbar_{LS}(r\mid\tau) \backsim r^{\omega} \sum_{k=0}^{d} (\beta t^2)^k \omega_k^* \mid \ln r\mid^{d-k}, \qquad r \in [0, 1],$$

где

$$\omega_0^* = 1, \quad \omega_1^* = \sum_{i=1}^{d} \nu_i^*, \quad \omega_2^* = \sum\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant d} \nu_i^* \nu_j^*, \ldots, \omega_d^* = \prod_{i=1}^{d} \nu_i^*,$$

$\nu_i^* = \dfrac{t_i^*}{t} - \dfrac{1}{2}$, $t^* = (t_1^*, t_2^*, \ldots, t_d^*)$ *– множество всех моментов отказов из* τ. •

Доказательство. В соответствии с выражением для $F_{LS}(x;\ \alpha, \beta)$ имеем

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{\beta}{2} t^2 + \alpha t\right)\right]. \tag{5.102}$$

Перепараметризуем $F_{LS}(t;\ \alpha, \beta)$, использовав параметр $r = R(t)$. Согласно (5.102)

$$\alpha = -\frac{\ln r}{t} - \frac{\beta}{2} t.$$

Тогда для функции плотности линейно стареющего распределения справедливо выражение

$$f_{LS}(x) = (\beta x + \alpha) e^{-\frac{\beta}{2} x^2 - \alpha x} =$$

$$= \left[\beta\left(x - \frac{t}{2}\right) - \frac{\ln r}{t}\right] r^{\frac{x}{t}} e^{-\frac{\beta}{2} x(x-t)}.$$

Используя общее выражение для функции правдоподобия (3.20) применительно к выборкам, полученным при реализации НЦ-плана, запишем

$$l_{LS}(r\mid\tau) = K(\tau) \prod_{i=1}^{d} \left[\beta t^2 \left(\frac{t_i^*}{t} - \frac{1}{2}\right) - \ln r\right] r^{\omega}, \tag{5.103}$$

где $\omega = (\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n)/t$, $K(\tau)$ – функция, не зависящая от r.

Преобразовав произведение в сумму, из (5.103) получим

$$l_{LS}(r \mid \tau) = K(\tau) \sum_{k=0}^{d} (\beta t^2)^k \omega_k^* (-\ln r)^{d-k}.$$

Поскольку случайный параметр r имеет равномерное априорное распределение в $[0, 1]$, в соответствии с теоремой Байеса $\hbar_{LS}(r \mid \tau) \backsim l_{LS}(r \mid \tau)$, что доказывает теорему.

С помощью теоремы несложно найти соответствующую апостериорную точечную оценку ВБР

$$\hat{R}_{LS}^*(t) = \hat{R}_{LS}^*(t; \beta) = \int_0^1 r \hbar_{LS}(r \mid \tau) dr = \frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)},$$

где

$$J_m(\beta) = \sum_{k=0}^{d} (\beta t^2)^k \omega_k^* \frac{(d-k)!}{(\omega + m + 1)^{d-k+1}}.$$

Соотношение между оценками $\hat{R}_{LS}^*(t;\ \beta)$ при различных β устанавливается с помощью следующей теоремы. Предварительно введем статистику

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\tau_i}{t}\right)^2.$$

Теорема 5.3. *Пусть $\epsilon \geqslant \omega$. Тогда для любых неотрицательных β_1 и β_2 таких, что $\beta_1 \leqslant \beta_2$, справедливо неравенство*

$$\hat{R}_{LS}^*(t; \beta_1) \leqslant \hat{R}_{LS}^*(t; \beta_2),$$

если в качестве выборки результатов испытаний используется одна и та же выборка τ и вероятность $R_{LS}(t)$ априорно равномерно распределена в $[0, 1]$.

Доказательство. Перепараметризуем функцию распределения $F_{LS}(x;\ \alpha, \beta)$, использовав в качестве параметров $r = R(t)$ и $y = \lambda(t)/\lambda(0)$, где $\lambda(x) = \alpha + \beta x$. Несложно убедиться, что при $\beta \geqslant 0$ имеем $y \geqslant 1$, и, кроме того, из условия $\beta_1 \leqslant \beta_2$ следует $y_1 \leqslant y_2$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что $\hat{R}^*(t;\ y)$ является неубывающей функцией y при $y \geqslant 1$.

Выразим функцию распределения $F_{LS}(x;\ \alpha, \beta)$ в зависимости от параметров r и y:

$$F_{LS}(x; r, y) = 1 - r^{\frac{1}{y+1}\left[(y-1)\frac{x^2}{t^2} + 2\frac{x}{t}\right]},$$

откуда вытекает выражение для функции плотности:

$$f_{LS}(x; r, y) = \frac{2}{t} \cdot \frac{(-\ln r)}{y+1} \left[(y-1)\frac{x}{t} + 1\right] r^{\frac{1}{y+1}\left[(y-1)\frac{x^2}{t^2} + 2\frac{x}{t}\right]}.$$

Имея функции распределения и плотности времени безотказной работы, с помощью общего выражения (3.20) запишем функцию правдоподобия, считая y известным:

$$l_{LS}(r \mid \tau) = K(\tau, y)(-\ln r)^d r^{b(y)}.$$

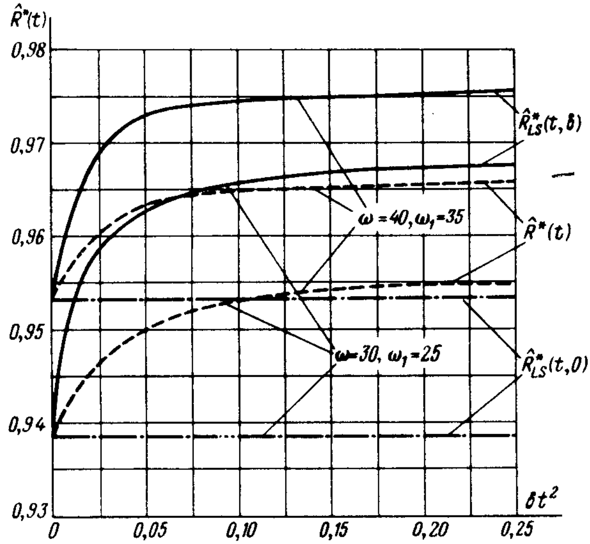


Рис. 5.12. Точечная оценка ВБР и границы промежутка $\mu(\delta)$

где $K(\tau, y)$ – функция, не зависящая от r, $b(y) = \dfrac{(y-1)\epsilon + 2\omega}{y+1}$. Поскольку случайный параметр r подчиняется равномерному априорному распределению в $[0, 1]$, согласно теореме Байеса

$$\hbar_{LS}(r \mid \tau) \backsim l_{LS}(r \mid \tau),$$

откуда

$$\hat{R}^*_{LS}(t; y) = \frac{\int_0^1 \ln^d r \cdot r^{b(y)+1} dr}{\int_0^1 \ln^d r \cdot r^{b(y)} dr} = \left[1 - \frac{1}{b(y)+2}\right]^{d+1}.$$

Исследовав производную функции $\hat{R}^*_{LS}(t; y)$ по t, равную

$$\varphi(y) = \left[1 - \frac{1}{b(y)+2}\right]^d \frac{d+1}{(b(y)+2)^2} \cdot \frac{2(\epsilon-\omega)}{(y+1)^2},$$

замечаем, что при $\epsilon \geqslant \omega$ имеем $\varphi(y) \geqslant 0$, т.е. функция $\hat{R}^*_{LS}(t; y)$ является неубывающей по y, что доказывает теорему.

Заметим, что условие $\epsilon \geqslant \omega$ выполняется всегда, когда рассматриваются высоконадежные объекты, большая часть испытаний которых заканчивается после t.

Использование теорем 5.2 и 5.3 в сочетании с леммой дает основание заключить, что приближенная оценка $\hat{R}^*(t)$, найденная в классе $S_0(\delta)$, содержится при $\epsilon \geqslant \omega$ в промежутке $\mu(\delta) = [\hat{R}^*_{LS}(t; 0), \hat{R}^*_{LS}(t; \delta)]$. Причем величина промежутка определяется значением предельной скорости старения δ и результатами испытаний. На рис. 5.12 представлены зависимости оценки $\hat{R}^*(t)$ и границ промежутка $\mu(\delta)$ от безразмерного параметра δt^2 в предположении $R(t) \in [0, 1]$ при различных значениях достаточных статистик. Начиная с некоторого значения δ, оценка $\hat{R}^*(t)$ и величина верхней границы $\hat{R}^*_{LS}(t;\ \delta)$ практически не изменяются, достигнув своих предельных значений $\hat{R}^*_\infty(t)$ и $\hat{R}^*_{LS}(t;\ \infty)$. Оценка $\hat{R}^*_\infty(t)$ определяется с помощью выражений (5.100) и (5.101) при $\delta \to \infty$ и совпадает с точечной оценкой ВБР (5.74) при $\upsilon = 1$. Для $\hat{R}^*_{LS}(t;\ \infty)$ справедлива следующая формула:

$$\hat{R}^*_{LS}(t;\infty) = \frac{\omega + 1}{\omega + 2},$$

что соответствует точечной оценке ВБР для экспоненциального распределения времени безотказной работы при отсутствии отказов. Величина промежутка $\mu(\delta)$ может служить характеристикой качества используемого приближения неизвестной функции распределения.

Построение байесовских доверительных интервалов для ВБР несложно произвести, используя приведенную в § 5.3 процедуру для апостериорной плотности, устанавливаемой теоремой 5.1.

ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ АПРИОРНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

§ 6.1. Постановка и общее решение задачи

Распространенной ситуацией при оценке показателей надежности ряда объектов техники является случай с неполной, или частичной, априорной определенностью, когда имеющаяся априорная информация не позволяет однозначно задать априорное распределение.

Типичным примером такой ситуации может служить следующая. Разрабатывается система, состоящая из типовых элементов, производимых отраслью. Существуют каталоги, в которых указаны значения интенсивностей отказов по каждому комплектующему элементу. В соответствии с методами теории надежности применительно к сложным многоэлементным системам [61] определяют значение ВБР объекта в течение заданного времени. Полученное значение является априорным при оценке ВБР по всему комплексу производимых мероприятий и не позволяет сформировать априорное распределение. Необходим метод оценки ВБР по точечному априорному значению и результатам испытаний на надежность. Такой метод был предложен впервые в работах автора [52, 55].

Теоретическое решение задачи в случае полного отсутствия априорных данных известно [10, 46]; здесь используются разновидности минимаксного подхода. В работе [46] сформулирована задача поиска оптимального решения на множестве всех байесовских решений, соответствующих определенному классу априорных распределений. В настоящей главе решение задачи проведено для класса априорных распределений, сопряженных с ядром функции правдоподобия. Априорная информация задается в виде совокупности ограничений типа равенств и неравенств, накладываемых на определенные функционалы от неизвестной априорной плотности. Эти ограничения имеют реальный смысл, подобный рассмотренному выше примеру.

6.1.1. Математическая формулировка задачи. Пусть функция распределения случайного времени безотказной работы задана с помощью параметрического семейства $F(t) = F(t;\ \theta)$, где θ – вектор параметров, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$. Поскольку задача формулируется в байесовской постановке, параметр считается случайным. Испытания объекта производятся в соответствии с некоторым планом П, приводящим к цензурированной выборке τ. План испытаний П и функция распределения F порождают класс априорных распределений $H_{\Pi F}$, сопряженных с ядром правдоподобия. На неизвестную априорную плотность $h(\theta)$ из этого класса накладываются ограничения

$$S_j[h(\theta)] \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$
$$S_j[h(\theta)] = 0, \quad j = p+1, \dots, p+q, \tag{6.1}$$

где $S_j[h(\theta)]$ – некоторый функционал, задаваемый видом имеющейся априорной информации. Например, если известно только априорное значение ВБР R_0 в течение времени t_0, то совокупность условий (6.1) сводится к одному равенству

$$\int_\Theta [1 - F(t_0; \theta)] h(\theta) d\theta - R_0 = 0, \tag{6.2}$$

которое символизирует совпадение теоретического априорного среднего значения ВБР с R_0. В практических приложениях чаще всего используются ограничения вида (6.2).

Ограничения (6.1) в общем случае сужают класс априорных распределений $H_{\Pi F}$, образуя подкласс $H_{\Pi F}^{pq} \subset H_{\Pi F}$. Объектом исследований задачи является некоторый функционал $R[F(t)]$, который является характеристикой надежности объекта. В частности, это может быть ВБР в течение некоторого времени t. Тогда $R = R(t) = 1 - F(t)$. Если в качестве показателя надежности используется средняя наработка на отказ, то функционал имеет вид интеграла

$$T = T(\theta) = \int_0^\infty [1 - F(t; \theta)] dt.$$

Предполагается, что задана функция потерь $L(\hat{R}, R(F(t)))$, позволяющая записать функцию апостериорного риска $G(\hat{R}, h)$. Задача заключается в нахождении оценки $\hat{R}$, минимизирующей функцию риска в классе априорных распределений $H_{\Pi F}^{pq}$.

6.1.2. Установление класса априорных распределений $H_{\Pi F}$. В соответствии с постановкой задачи выборка τ является цензурированной, т.е. представлена с помощью объединения двух векторов: $\tau = \{ \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{t} \}$, где $\boldsymbol{t}^* = (t_1^*, \dots, t_d^*)$ – вектор моментов отказа, $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_k)$ – вектор моментов цензурирования. В соответствии с выражением (3.21) функция правдоподобия для произвольного параметрического семейства $F(t; \theta)$ может быть записана в виде

$$l(\theta \mid \tau) = K(\tau) \prod_{i=1}^{d} \lambda(t_i^*; \theta) \exp\left[-\sum_{j=1}^{n} \Lambda(\tau_j; \theta) \right],$$

где $K(\tau)$ – не зависящая от параметра θ функция выборки,

$$\lambda(t; \theta) = F'(t; \theta) / [1 - F(t; \theta)], \qquad \Lambda(t; \theta) = \ln[1 - F(t; \theta)].$$

Имея выражение для $l(\theta \mid \tau)$, необходимо установить минимальную достаточную статистику $\alpha = \alpha(\Pi, F)$, которая определяется планом испытаний Π и видом функции распределения F. В общем случае минимальная достаточная статистика α является вектором $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \Omega_\alpha$, с помощью которого функция правдоподобия записывается в виде

$$l(\theta \mid \tau) = c_0(\tau) l_0(\theta; \alpha), \tag{6.3}$$

где $l_0(\theta\,;\,\alpha)$ – ядро правдоподобия, а функция $c_0(\tau)$ не зависит от α и θ и, вообще говоря, не совпадает с $K(\tau)$. В соответствии с теорией сопряженных априорных распределений [44] ядро априорной плотности $h(\theta)$ совпадает с ядром правдоподобия, т.е.

$$h(\theta\,;\alpha') \backsim l_0(\theta\,;\alpha'), \tag{6.4}$$

где $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_s)$ – вектор параметров априорной плотности, причем α' имеет такую же размерность, что и α, и $\alpha' \in \Omega_\alpha$.

Таким образом, класс априорных распределений $H_{\Pi F}$ полностью определяется видом функции $l_0(\theta\,;\,\alpha)$ и множеством Ω_α. Существует возможность расширения этого класса путем использования множества Ω'_α такого, что $\Omega_\alpha \subseteq \Omega'_\alpha$ [44]. Это можно сделать, например, за счет использования вещественных параметров в векторе α' вместо соответствующих целых компонент вектора α. Этот прием используется в последующих §§ 6.2 и 6.3. В общем случае будем считать, что $\alpha' \in \Omega'_\alpha \supseteq \Omega_\alpha$.

6.1.3. Анализ ограничений и сужение класса $H_{\Pi F}$. Поскольку априорная плотность представлена в зависимости от параметра α', ограничения (6.1) преобразуются к функциональным неравенствам и равенствам вида

$$\psi_j(\alpha') \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \tag{6.5}$$

$$\psi_j(\alpha') = 0, \quad j = p+1, \ldots, p+q, \tag{6.6}$$

где $\psi_j(\alpha') = S_j\,[h(\theta\,;\,\alpha')]$, $j = 1, \ldots, p+q$. Ограничения (6.5) и (6.6) образуют множество $D = D_p \cap D_q$ в параметрическом пространстве вектора α', причем D_q – множество значений параметра α', удовлетворяющих равенствам (6.6), а D_p – множество значений параметра α', удовлетворяющих всем неравенствам (6.5). Условия (6.6) будем считать независимыми, т.е. никакое отдельное уравнение согласно этому допущению не может быть получено из совокупности оставшихся с помощью каких-либо преобразований. При анализе совокупности ограничений (6.5), (6.6) прежде всего необходимо убедиться, что множество D непусто. Поскольку функции $\psi_j(\alpha)$ в общем случае нелинейны, общий анализ области D произвести затруднительно. Следует лишь отметить, что при $s < q$ система уравнений (6.6) является несовместной и множество D пусто. При $s \geqslant q$ множество D в общем случае непусто, причем при $s = q$ множество D является счетным.

Введем класс априорных распределений $H^{pq}_{\Pi F}$, представляющий собой сужение класса $H_{\Pi F}$. Класс $H^{pq}_{\Pi F}$ образует все априорные распределения из $H_{\Pi F}$, для которых выполняются ограничения (6.5), (6.6), или, что то же самое, (6.1). Поскольку класс $H^{pq}_{\Pi F}$ также будет определяться соотношением (6.4), то параметр α' должен принадлежать множеству $\Omega_H = \Omega'_\alpha \cap D \subseteq \Omega'_\alpha$. Окончательно формула определения класса $H^{pq}_{\Pi F}$ имеет вид

$$h(\theta\,;\alpha') \backsim l_0(\theta\,;\alpha'), \quad \alpha' \in \Omega_H = \Omega'_\alpha \cap D \Rightarrow h(\theta\,;\alpha') \in H^{pq}_{\Pi F}. \tag{6.7}$$

6.1.4. Задача выбора априорной плотности из класса $H^{pq}_{\Pi F}$. Если множество D непусто и содержит более одной точки, каждой из которых соответствует вполне определенная априорная плотность распределения, то возникает задача выбора единственной априорной плотности $h_*(\theta) = h(\theta\,;\,\alpha'_*)$.

Для этих целей будем использовать критерий апостериорного риска, т.е. в качестве $h_*(\theta)$ будем выбирать такую априорную плотность, которая обеспечивает максимум функции апостериорного риска. Другими словами, выбирается наихудшее априорное распределение, которое приводит к наиболее пессимистичным в смысле апостериорного риска оценкам показателя надежности.

Зададимся некоторой функцией потерь $L(\hat{R}, R)$, которая выражает потери от замены показателя надежности $R[F(t;\ \theta)]$ оценкой $\hat{R}$. С помощью функции $L(\hat{R}, R)$ запишем функцию среднего апостериорного риска

$$G(\hat{R}, h) = \int_{\Theta} L(\hat{R}, R[F(t)])\hbar(\theta \mid \tau)d\theta, \tag{6.8}$$

где $\hbar(\theta \mid \tau)$ – апостериорная плотность распределения параметра $\theta \in \Theta$. Для определения $\hbar(\theta \mid \tau)$ используем теорему Байеса, согласно которой

$$\hbar(\theta \mid \tau) = \hbar(\theta ; \alpha'') \backsim h(\theta ; \alpha')l_0(\theta ; \alpha),$$

где α'' – параметр апостериорной плотности. С помощью соотношения (6.4) получим

$$\hbar(\theta ; \alpha'') \backsim l_0(\theta ; \alpha')l_0(\theta ; \alpha). \tag{6.9}$$

В дальнейшем используем бинарную операцию над векторными параметрами $\alpha'' = \alpha' * \alpha$, которая определяет следующее преобразование двух одинаковых функций с разными параметрами: $p(x;\ \alpha'') = p(x;\ \alpha')p(x;\ \alpha)$. Используя эту операцию, соотношение (6.9) перепишем в виде

$$\hbar(\theta \mid \tau) = \hbar(\theta ; \alpha'') \backsim l_0(\theta ; \alpha' * \alpha). \tag{6.10}$$

Если в качестве априорной плотности $h_*(\theta)$ используется плотность распределения, обеспечивающая максимум среднего апостериорного риска, то в целом задача получения байесовской апостериорной оценки $\hat{R}^*$ показателя надежности $R[F(t)]$ сводится к следующей минимаксной задаче:

$$G(\hat{R}^*, h_*) = \min_{\hat{R}} \max_{h \in H^{pq}_{\Pi F}} G(\hat{R}, h). \tag{6.11}$$

Учитывая, что $h_*(\theta) = h(\theta ;\ \alpha'_*) \backsim l_0(\theta ;\ \alpha'_*)$, задачу (6.11) сведем к задаче поиска параметра α'_*. С целью упрощения записи положим $R[F(t;\ \theta)] = R(\theta)$. Функция апостериорного среднего риска в зависимости от параметра α' запишется с помощью соотношений (6.8)–(6.10) следующим образом:

$$G(\hat{R}, h(\theta ; \alpha')) = G_\alpha(\hat{R}, \alpha') =$$
$$= \frac{1}{\beta} \int_{\Theta} L(\hat{R}, R(\theta))l_0(\theta ; \alpha * \alpha')d\theta, \tag{6.12}$$

где β – нормирующий множитель апостериорной плотности; согласно (6.10) имеем

$$\beta = \int_{\Theta} l_0(\theta ; \alpha * \alpha')d\theta.$$

С помощью полученного выражения (6.12) задача (6.11) сводится к следующей минимаксной задаче:

$$G_\alpha(\hat{R}^*;\alpha'_*) = \min_{\hat{R}} \max_{\alpha' \in \Omega_H} G(\hat{R}, \alpha'). \qquad (6.13)$$

При решении практических задач множество $\Omega_H = \Omega'_\alpha \cap D$ записать в явном виде затруднительно. Поэтому α'_* удобнее определять путем решения следующей задачи на условный минимакс:

$$G_\alpha(\hat{R}^*, \alpha'_*) = \min_{\hat{R}} \max_{\alpha' \in \Omega'_\alpha} G(\hat{R}, \alpha'),$$
$$\psi_j(\alpha') \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, p, \quad \psi_j(\alpha') = 0, \quad j = p+1, \ldots, p+q. \qquad (6.14)$$

6.1.5. Решение минимаксной задачи. Решение задачи (6.14) сопряжено со значительными математическими трудностями, обусловленными в основном нелинейностью используемых функций. Кроме того, в некоторых случаях записать функцию среднего апостериорного риска в явном виде не удается и приходится прибегать к методам численного интегрирования. Существенное упрощение может быть достигнуто, если использовать квадратичную функцию потерь. Для этого случая справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть функция потерь* $L(\hat{R}, R) = (R - \hat{R})^2$. *Тогда задача* (6.14) *равносильна задаче о поиске максимума апостериорной дисперсии*

$$U(\alpha') = \int_\Theta R^2(\theta)\hbar(\theta;\alpha * \alpha')d\theta - \left[\int_\Theta R(\theta)\hbar(\theta;\alpha * \alpha')d\theta\right]^2 \qquad (6.15)$$

на множестве Ω'_α *при ограничениях*

$$\psi_j(\alpha') \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$
$$\psi_j(\alpha') = 0, \quad j = p+1, \ldots, p+q.$$

Доказательство. В соответствии с теоремой Вальда [10] имеет место следующее равенство минимакса и максимина:

$$\min_{\hat{R}} \max_{\alpha' \in \Omega_H} G_\alpha(\hat{R}, \alpha') = \max_{\alpha' \in \Omega_H} \min_{\hat{R}} G_\alpha(\hat{R}, \alpha'). \qquad (6.16)$$

Рассмотрим задачу минимизации функции $G_\alpha(\hat{R}, \alpha')$ для каждого $\alpha' \in \Omega_H$ при фиксированном значении достаточной статистики α:

$$G_\alpha(\hat{R}^*, \alpha') = \min_{\hat{R}} \int_\Theta L(\hat{R}, R(\theta))\hbar(\theta;\alpha * \alpha')d\theta.$$

При квадратичной функции потерь $L(\hat{R}, R) = (R - \hat{R})^2$ решением задачи является апостериорное среднее

$$\hat{R}^* = \int_\Theta R(\theta)\hbar(\theta;\alpha * \alpha')d\theta, \qquad (6.17)$$

которое приводит к следующему виду функции апостериорного риска:

$$G_\alpha(\hat{R}^*, \alpha') = \int_\Theta [R(\theta) - \hat{R}^*]^2\hbar(\theta;\alpha * \alpha')d\theta. \qquad (6.18)$$

Оценка (6.17) является условно оптимальной, т.е. позволяет определить апостериорное среднее значение ВБР при известном α'. Подставляя выражение (6.18) в (6.14), с учетом соотношений (6.16) и (6.17) получим следующую формулировку задачи (6.14):

$$G_\alpha(\hat{R}^*, \alpha'_*) = \max_{\alpha' \in \Omega'_\alpha} \{ \int_\Theta R^2(\theta) \hbar(\theta; \alpha * \alpha') d\theta -$$

$$- [\int_\Theta R(\theta) \hbar(\theta; \alpha * \alpha') d\theta]^2 \},$$

$$\psi_j(\alpha') \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, p, \quad \psi_j(\alpha') = 0, \quad j = p+1, \ldots, p+q,$$

что доказывает теорему 6.1.

Для определения байесовской нижней доверительной границы $\underline{R}^*_\gamma$ при известном α'_* в соответствии с общим соотношением (2.34) необходимо решить уравнение

$$\int_{R(\theta) \geqslant \underline{R}^*_\gamma} \hbar(\theta; \alpha * \alpha') d\theta - \gamma = 0. \tag{6.19}$$

Формулировка задачи (6.14) совместно с уравнением (6.19) полностью определяют метод получения оценок ВБР. Эти оценки названы байесовскими условно минимаксными, исходя из типа основной задачи (6.14), к которой сводится метод оценивания.

§ 6.2. Частичная априорная определенность для схемы биномиальных испытаний

6.2.1. Формулировка задачи. Рассмотрим следующий план испытаний Π_B. Испытывается n изделий, рассчитанных на одноразовое применение. Каждое изделие при испытаниях работоспособно с постоянной вероятностью p и отказывает с вероятностью $1 - p$. Неизвестную величину p будем рассматривать как параметр на промежутке возможных значений $[0, 1]$. Допустим, что в результате испытаний отказало $d \geqslant 0$ изделий. Функция правдоподобия для рассматриваемой схемы имеет вид

$$l(p; n, d) = \binom{n}{d} p^{n-d} (1-p)^d. \tag{6.20}$$

Априорным распределением, сопряженным с ядром правдоподобия (6.20), является бета-распределение с плотностью

$$h(p) = h(p; \alpha, \beta) = \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \tag{6.21}$$

где $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция. Отметим, что здесь имеет место расширение класса сопряженных априорных распределений, так как достаточные статистики правдоподобия (6.20) являются целыми константами, а параметры α и β являются вещественными. Бета-распределение с параметрами α и β условно будем обозначать $\mathrm{Be}(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим задачу определения ВБР $R = p$, которая в данном случае является вневременной характеристикой, в условиях частичной априорной определенности, выражаемой в виде одного ограничения. Положим вначале, что известно априорное значение ВБР R_0. Это условие имеет следующее математическое выражение:

$$\int_0^1 ph(p;\alpha,\beta)dp = R_0.$$

После интегрирования получим

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = R_0. \tag{6.22}$$

Апостериорным распределением, соответствующим правдоподобию (6.20) и априорной плотности (6.21), является Be$(\alpha+n-d,\ \beta+d)$.

Для нахождения оптимальных значений α_* и β_* параметров априорной плотности $h_*(p) = h(p;\ \alpha_*,\beta_*)$ будем использовать квадратичную функцию потерь $L(\hat{p}, p) = (p - \hat{p})^2$. В соответствии с теоремой 6.1 задача поиска α_* и β_* сводится к максимизации функции апостериорной дисперсии

$$U(\alpha,\beta) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha+n-d+1}(1-x)^{\beta+d-1}}{B(\alpha+n-d,\ \beta+d)}dx - \left[\int_0^1 \frac{x^{\alpha+n-d}(1-x)^{\beta+d-1}}{B(\alpha+n-d,\ \beta+d)}dx\right]^2$$

при ограничении (6.22). После проведения вычислений задача принимает вид

$$\begin{gathered} U(\alpha_*,\beta_*) = \max_{\substack{\alpha\geqslant 0\\ \beta\geqslant 0}} U(\alpha,\beta) = \max_{\substack{\alpha\geqslant 0\\ \beta\geqslant 0}} \frac{(\alpha+n-d)(\beta+d)}{(\alpha+\beta+n)^2(\alpha+\beta+n+1)}, \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - R_0 = 0. \end{gathered} \tag{6.23}$$

6.2.2. Особенности решения задачи. Выясним некоторые важные для приложений особенности решения задачи (6.23). Прежде всего исследуем случай, когда экспериментальные данные отсутствуют, т.е. в задаче (6.23) $n = d = 0$. Этот и другие интересующие нас случаи будем формулировать по мере надобности в виде теорем, которые будем соответствующим образом доказывать.

Теорема 6.2. *Пусть функция апостериорной дисперсии имеет вид*

$$U(\alpha,\beta) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}, \quad \alpha\geqslant 0, \quad \beta\geqslant 0.$$

Тогда точка (α_*, β_*), *соответствующая максимуму функции* $U(\alpha,\beta)$ *при ограничении* $\alpha/(\alpha+\beta) = R_0$, *есть точка* $(0, 0)$ *при любом* R_0, *причем максимальное значение* U *составляет* $R_0(1-R_0)$.

Доказательство. Введем переменную $z = \alpha + \beta$. С помощью этой переменной функцию $U(\alpha, \beta)$ с учетом равенства $\alpha/z = R_0$ запишем в виде

$$F(z) \equiv U(\alpha,\beta) = \frac{R_0(1-R_0)}{z+1}.$$

Поскольку $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, имеем $z \geqslant 0$. Функция $F(z)$ в области неотрицательных значений имеет точную верхнюю грань в точке $z = 0$, равную $F(0) = R_0(1 - R_0)$. Поскольку по условию имеет место равенство $\alpha = R_0 z$, при $z = 0$ получим $\alpha = \beta = 0$, что доказывает теорему.

Согласно доказанному свойству оптимальные значения параметров α_* и β_* в отсутствие экспериментальных данных не зависят от априорного значения ВБР R_0, искомая оценка ВБР равна априорной R_0 и имеет дисперсию $R_0(1 - R_0)$.

Рассмотрим теперь более общий случай $n \geqslant 0$. Решение задачи (6.23) в данном случае может быть охарактеризовано следующей теоремой.

Теорема 6.3. *Пусть функция апостериорной дисперсии показателя R имеет общий вид*

$$U(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha + n - d)(\beta + d)}{(\alpha + \beta + n)^2(\alpha + \beta + n + 1)}$$

при $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $n > 0$, $d \geqslant 0$. Тогда функция U является монотонно

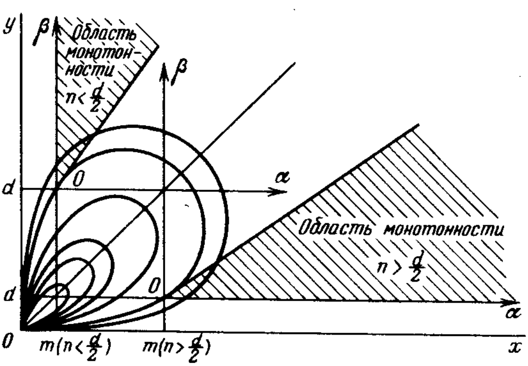


Рис. 6.1. Линии равных уровней для функции $U(x, y)$ и $U(\alpha, \beta)$

убывающей вдоль любой прямой вида $\alpha/(\alpha + \beta) = R_0$, если выполняется неравенство

$$\left(\frac{1 - R_0}{R_0} - g\right)\left(d - \frac{n}{2}\right) \geqslant 0, \tag{6.24}$$

где

$$g = \frac{d}{n - d} \cdot \frac{(d + 1)(n - 2d) + 2(n - d)^2}{(n - d + 1)(n - 2d) - 2d^2}. \tag{6.25}$$

Доказательство. Введем переменные $x = \alpha + m$, где $m = n - d$, и $y = \beta + d$. Функция $U(\alpha, \beta)$ в новых переменных преобразуется к виду

$$\widetilde{U}(x, y) = \frac{xy}{(x + y)^2(x + y + 1)}, \qquad x \geqslant m, \qquad y \geqslant d.$$

Согласно теореме 6.2 функция $\widetilde{U}(x, y)$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ является монотонно убывающей вдоль любой прямой вида $y = px$ при $p > 0$ и достигает своего условного максимума в точке $x = y = 0$. В то же время абсолютный максимум в точке $x = y = 0$ не достигается, т.е. точка $(0, 0)$ является изолированной особой точкой. Нетрудно показать, что $U(x, y) < 0{,}25 \quad \forall x>0$, $y>0$.

Исследуем функцию $y = \varphi(x)$, которая получается в результате сечения функции $z = \tilde{U}(x, y)$ плоскостью $z = h$ (при $h < 0{,}25$). Неявной формой задания функции $y = \varphi(x)$ является $F(x, y) = xy - h(x+y)^2(x+y+1) = 0$. Точка $x = y = 0$ для данной функции является узловой, так как $\Delta = F''^2_{xy}(0,0) - F''_{xx}(0,0)F''_{yy}(0,0) = 1 - 4h > 0$. Нетрудно также установить, что функция $y = \varphi(x)$ симметрична относительно прямой $y = x$. Вследствие отмеченных особенностей функция $F(x, y) = 0$ имеет вид, представленный на рис. 6.1.

Для того чтобы получить вид функции, имеющий неявную форму записи $U(\alpha, \beta) = h$, необходимо перенести начало координат в точку $x = m = n - d$, $y = d$. Как видно из рис. 6.1, функция $U(\alpha, \beta)$ уже не будет монотонно изменяться вдоль любой прямой вида

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = R_0 \Longleftrightarrow \beta = \frac{1-R_0}{R_0}\alpha.$$

Область ее монотонности ограничивается касательной к линии равного уровня $U(\alpha, \beta) = h$ в точке $\alpha = \beta = 0$, или, что то же самое, к линии равного уровня $\tilde{U}(x, y) = h$ в точке $x = m$, $y = d$.

Найдем угловой коэффициент этой касательной g. По определению

$$g = -\frac{F'_x(m,d)}{F'_y(m,d)} = \frac{d}{m}\cdot\frac{(d+1)(m-d)+2m^2}{(m+1)(m-d)-2d^2}. \tag{6.26}$$

Из рис. 6.1 видно, что при $m \geqslant d$ $(n \geqslant d/2)$ функция $U(\alpha, \beta)$ монотонно убывает вдоль любой прямой, положительный угловой коэффициент которой не превосходит g. При $m < d$ $(n < d/2)$, наоборот, функция $U(\alpha, \beta)$ монотонно убывает вдоль любой прямой, угловой коэффициент которой больше или равен g. Другими словами, условие монотонности функции $U(\alpha, \beta)$ вдоль прямой $\alpha/(\alpha+\beta) = R_0$ имеет вид двойного неравенства

$$\frac{1-R_0}{R_0} \leqslant g, \quad \text{если} \quad d \leqslant \frac{n}{2},$$

$$\frac{1-R_0}{R_0} > g, \quad \text{если} \quad d > \frac{n}{2},$$

которое можно записать с помощью неравенства (6.24). Это доказывает теорему.

Из доказанного свойства легко вывести два следствия.

Следствие 1. *Решение задачи* (6.23) *при выполнении условия* (6.24) *не зависит от* R_0 *и является тривиальным*: $\alpha_* = \beta_* = 0$. *Апостериорная байесовская оценка для этого случая совпадает с оценкой максимального правдоподобия*:

$$\hat{R}^* = 1 - \frac{d}{n} \quad \text{и} \quad \sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{\left(1-\dfrac{d}{n}\right)\dfrac{d}{n}}{n+1}.$$

Таким образом, байесовская условно минимаксная оценка может игнорировать априорную информацию, если последняя противоречит результатам испытаний.

Следствие 2. *Для полностью успешных испытаний* ($d = 0$) *условие монотонности* (6.24) *не выполняется никогда.*

Соотношение между оценками максимального правдоподобия и байесовской устанавливается с помощью следующего свойства.

Теорема 6.4. *Пусть условие* (6.24) *не выполняется и решение задачи* (6.23) *отлично от тривиального. Тогда байесовская точечная оценка ВБР* $\hat{R}^*$ *при квадратичной функции потерь превосходит оценку максимального правдоподобия, если* $R_0 \leqslant 1 - d/n$.

Доказательство. Байесовская оценка $\hat{R}^*$ при квадратичной функции потерь совпадает с апостериорным математическим ожиданием:

$$\hat{R}^* = \hat{R}^*(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + n - d}{\alpha + \beta + n}.$$

Исследуем характер изменения функции $\hat{R}^*(\alpha, \beta)$ вдоль прямой $\alpha/(\alpha + \beta) = R_0$. Для этого выразим $\hat{R}^*(\alpha, \beta)$ в виде функции от одной переменной α. Получим

$$\left.\begin{aligned} \hat{R}^* &= \frac{\alpha + n - d}{\alpha + \beta + n} \\ \frac{\alpha}{\alpha + \beta} &= n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{R}^*(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha) = \frac{\alpha + n - d}{\alpha/R_0 + n}.$$

Производная от функции $\varphi(\alpha)$ равна

$$\varphi'(\alpha) = \frac{d + (1 - R_0)n}{R_0\left(\dfrac{\alpha}{R_0} + n\right)^2}.$$

Из выражения для производной видно, что $\varphi'(\alpha) > 0$, если $R_0 > 1 - d/n$, и $\varphi'(\alpha) \leqslant 0$, если $R_0 \leqslant 1 - d/n$. Таким образом, поскольку $\alpha_* > 0$, при условии $R_0 > 1 - d/n$ имеем

$$\hat{R}^*(\alpha_*, \beta_*) = \varphi(\alpha_*) > \varphi(0) = 1 - \frac{d}{n}.$$

В противном случае, т.е. когда $R_0 \leqslant 1 - d/n$, имеем

$$\hat{R}^*(\alpha_*, \beta_*) = \varphi(\alpha_*) \leqslant \varphi(0) = 1 - \frac{d}{n},$$

что доказывает теорему.

Если условие (6.24) не выполняется, задача поиска оптимальных значений параметров α_* и β_* (6.23) может быть сведена к решению кубического уравнения. Введем новую переменную $z = \alpha + \beta + n$, с помощью которой задача (6.23) преобразуется к поиску максимума следующей функции одной переменной z:

$$T(z) = \frac{[R_0(z-n)+n-d]\,[(z-n)(1-R_0)+d]}{z^2(1+z)}.$$

С помощью методов математического анализа задача поиска максимума функции $T(z)$ приводится к решению уравнения

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0, \qquad (6.27)$$

где

$$A = -\frac{2s(2R_0-1)}{R_0(1-R_0)}, \qquad B = -\frac{s(3s+2R_0-1)}{R_0(1-R_0)},$$

$$C = -\frac{2s^2}{R_0(1-R_0)}, \qquad s = n(1-R_0)-d. \qquad (6.28)$$

Уравнение (6.27) имеет единственный корень z_* в области $z > n$, с помощью которого параметры α_* и β_* определяются по формулам

$$\alpha_* = (z_* - n)R_0, \qquad \beta_* = (z_* - n)(1-R_0). \qquad (6.29)$$

6.2.3. Последовательность расчета оценок ВБР. Исходными данными при проведении расчетов являются априорная точечная оценка ВБР R_0, общее количество опытов n, количество отказов d. Расчет оценок $\hat{R}^*$ и $\sigma_{\hat{R}^*}$ проводим в следующей последовательности:

а) По формуле (6.25) определяем угловой коэффициент касательной g и проверяем выполнение условия (6.24).

б) Если условие (6.24) выполняется, то вычисляем искомые оценки

$$\hat{R}^* = 1 - \frac{d}{n}, \qquad \sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{(n-d)d}{n^2(n+1)},$$

и последовательность расчетов заканчивается. В противном случае переходим к следующему шагу.

в) По формулам (6.28) определяем значения коэффициентов A, B, C и решаем уравнение (6.27) в области $z > n$. В результате решения получаем единственный корень z_*.

г) По формулам (6.29) вычисляем оптимальные значения параметров α_* и β_*.

д) Расчет искомых оценок производим с помощью выражений

$$\hat{R}^* = \frac{\alpha_* + n - d}{\alpha_* + \beta_* + n}, \qquad \sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{(\alpha_* + n - d)(\beta_* + d)}{(\alpha_* + \beta_* + n)^2(\alpha_* + \beta_* + n + 1)}. \qquad (6.30)$$

6.2.4. Численный анализ оценок ВБР. Рассмотрим важный для приложений случай безотказных испытаний ($d = 0$). В табл. 6.1 демонстрируется динамика зависимости значений параметров α_* и β_* от числа опытов n и априорного значения ВБР R_0.

Таблица 6.1

Оптимальные значения параметров априорного распределения (первое число α_*, второе β_*)

n	R_0				
	0,80	0,90	0,95	0,97	0,99
2	1,7507 0,4377	2,0905 0,2328	2,2676 0,1194	2,3396 0,0724	2,4126 0,0244
4	3,2000 0,7998	3,8178 0,4242	4,1410 0,2179	4,2719 0,1321	4,4052 0,0445
6	4,6392 1,1598	5,5330 0,6147	6,0002 0,3158	6,1915 0,1915	6,3835 0,0644
8	6,0752 1,5189	7,2447 0,8050	7,8565 0,4135	8,1063 0,2507	8,8359 0,0844
10	7,5104 1,8776	8,9550 0,9950	9,7109 0,5111	10,0190 0,3099	10,3320 0,1044
12	8,9450 2,2362	10,6640 1,1849	11,5653 0,6087	11,9320 0,3690	12,3030 0,1243
14	10,3792 2,5948	12,3732 1,3748	13,4178 0,7062	13,8430 0,4282	14,2748 0,1442
20	15,1792 3,7948	17,4996 1,9444	18,9760 0,9987	19,5780 0,6055	20,1871 0,2039

Судя по данным таблиц, оценки параметров α_* и β_* при постоянном R_0 изменяются пропорционально. Отмечается также рост параметров α_* и β_* с увеличением значений n и R_0.

На графиках рис. 6.2 и 6.3 представлены зависимости оценок $\hat{R}^*$ и $\sigma_{\hat{R}^*}$ от числа опытов и априорного значения ВБР R_0. Эти зависимости демонстрируют характер приближения апостериорных оценок к своим естественным пределам при увеличении n. Дело в том, что при $n \to \infty$ оценка $\hat{R}^*$ стремится к оценке максимального правдоподобия, а при $d = 0$ – к единице. Однако, как видно из рис. 6.2, скорость сходимости существенно зависит от априорного значения ВБР. Такой же вывод справедлив и для апостериорного среднего квадратического отклонения.

6.2.5. Способы вычисления байесовской нижней доверительной границы ВБР. В соответствии с определением оценка $\underline{R}_\gamma^*$ определяется с помощью уравнения

$$\int_{\underline{R}_\gamma^*}^{1} \hbar(p;\alpha_*,\beta_*,n,d)\,dp - \gamma = 0, \tag{6.31}$$

где $\hbar(p)$ – апостериорная плотность бета-распределения, задаваемая выражением

$$\hbar(p) = \frac{p^{\alpha_*+n-d-1}(1-p)^{\beta_*+d-1}}{B(\alpha_*+n-d,\beta_*+d)}, \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1.$$

Первый способ определения оценки $\underline{R}^*_\gamma$ состоит в численном решении уравнения (6.31) для функции $\mathfrak{h}(p)$. Негативная особенность этого способа заключается в том, что при больших значениях ВБР ($R \geqslant 0{,}99$) и $d = 0$ апостериорная плотность сосредоточивается в очень малой окрестности точки $p = 1$. Вследствие этого возможны большие вычислительные погрешности при численном интегрировании.

Второй способ состоит в использовании известного результата для полностью определенной биномиальной схемы [21]. Возможность такого перехода обусловлена тем, что после однозначного определения параметров α_* и β_* рассматриваемая схема становится полностью определенной. По

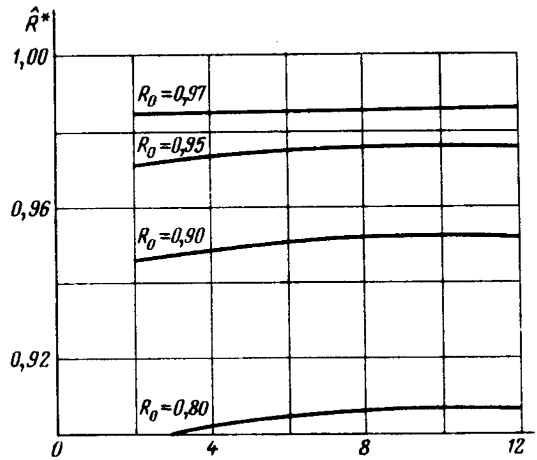


Рис. 6.2. Апостериорная точечная оценка ВБР

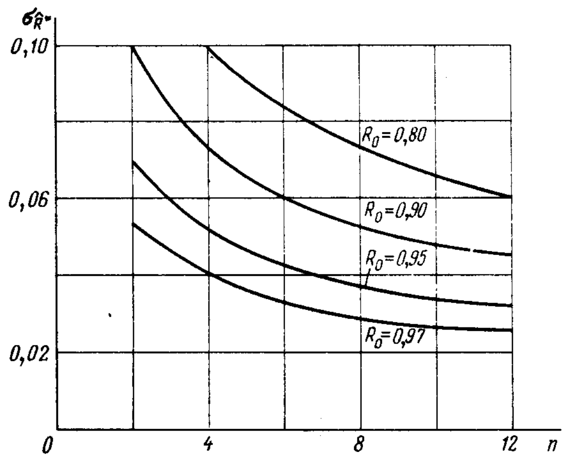


Рис. 6.3. Апостериорное среднее квадратическое отклонение ВБР

Таблица 6.2

Значения байесовской нижней доверительной границы ВБР

n	R_0			
	0,80	0,90	0,95	0,97
4	0,7500	0,8556	0,9188	0,9432
6	0,7855	0,8690	0,9237	0,9523
8	0,8018	0,8789	0,9282	0,9533
10	0,8132	0,8861	0,9315	0,9548
12	0,8211	0,8910	0,9340	0,9561

этой причине для $\underline{R}^*_\gamma$ справедлива следующая формула [21] :

$$\underline{R}^*_\gamma = \left[1 + \frac{\beta_* + d}{\alpha_* + n - d} F_{1-\gamma;\,2(\beta_*+d);\,2(\alpha_*+n-d)}\right]^{-1}, \tag{6.32}$$

где $F_{\delta;\,\nu_1,\,\nu_2}$ – 100δ-процентная точка F-распределения с ν_1 и ν_2 степенями свободы определяется с помощью таблиц [35]. Трудности использования выражения (6.32) на практике заключаются в том, что даже самые полные таблицы [35] содержат значения процентилей F-распределения, начиная со значения степени свободы $\nu_1 = 0, 1$. В то же время при проведении практических расчетов для высоконадежных объектов потребуются значения процентилей при $\nu_1 < 0{,}1$ (см. хотя бы данные табл. 6.1).

В табл. 6.2 представлены результаты расчетов оценки при различных n и R_0. Отмечается более интенсивное увеличение значений $\underline{R}^*_\gamma$ по сравнению $\hat{R}^*$ при возрастании R_0 и n.

Третий способ вычисления $\underline{R}^*_\gamma$ является приближенным и заключается в приближенной аналитической замене апостериорной плотности $\hbar(p)$ плотностью $\underset{\sim}{\hbar}(p)$, соответствующей безотказной апостериорной схеме. Условие соответствия $\hbar(p)$ и $\underset{\sim}{\hbar}(p)$ записывается в виде совпадения первого момента:

$$\int_0^1 p\,\hbar(p)\,dp = \int_0^1 p\,\underset{\sim}{\hbar}(p)\,dp.$$

Исходя из сделанных допущений, получаем

$$\underset{\sim}{\hbar}(p) = \frac{p^{c-1}}{B(c, 1)}, \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1, \tag{6.33}$$

где $c = \hat{R}^*/(1 - \hat{R}^*)$. Уравнение (6.30) приводится к виду

$$\int_{\underline{R}^*_\gamma}^1 \underset{\sim}{\hbar}(p;\, c, 1)\,dp - \gamma = 0,$$

который имеет аналитическое решение

$$\underline{R}^*_\gamma = (1 - \gamma)^{1/c}. \tag{6.34}$$

В табл. 6.3 приведены значения $\underline{R}^*_{0,9}$, найденные по третьему способу, при различных R_0 и n для безотказных испытаний. Сравнение данных табл. 6.3 и 6.2 характеризует точность приближенного способа.

В табл. 6.4 приведены значения $\underline{R}^*_{0,9}$, найденные по приближенной методике при $d = 0$.

Более наглядным является представление конечного результата в виде верхней доверительной границы $\overline{Q}_\gamma$ для вероятности отказа. В табл. 6.5 приведены значения $\overline{Q}_{0,9}$, соответствующие данным табл. 6.4.

Результаты, представленные в табл. 6.5, более удобны для целей прикладного анализа по следующим причинам. Дело в том, что при больших значениях ВБР (бо́льших 0,999) значения получаемых оценок слабо различимы с позиций традиционного отношения к численным данным (отличие наблюдается в пятой значащей цифре). В то же время, если использовать для целей сравнительного прикладного анализа вероятность отказа, то раз-

Таблица 6.3

Приближенные значения байесовской нижней доверительной границы ВБР

n	R_0				
	0,80	0,90	0,95	0,97	0,99
4	0,7742	0,8825	0,9402	0,9639	0,9878
6	0,7780	0,8845	0,9413	0,9644	0,9880
8	0,7800	0,8854	0,9418	0,9649	0,98817
10	0,7813	0,8861	0,9420	0,9651	0,98824
12	0,7820	0,8865	0,9422	0,96524	0,98829

Таблица 6.4

Приближенные значения $R^*_{0,9}$ для высоконадежных объектов

n	R_0			
	0,9990	0,9992	0,9994	0,9996
6	0.9988048	0,9990438	0.9992888	0,9995217
10	0,9988259	0,9990574	0,9992929	0,9995286

Таблица 6.5

Приближенные значения $\overline{Q}_{0,9}$ для высоконадежных объектов

n	R_0			
	0,9990	0,9992	0,9994	0,9996
6	$1,1952 \cdot 10^{-3}$	$9,562 \cdot 10^{-4}$	$7,172 \cdot 10^{-4}$	$4,783 \cdot 10^{-4}$
10	$1,1784 \cdot 10^{-3}$	$9,426 \cdot 10^{-4}$	$7,071 \cdot 10^{-4}$	$4,714 \cdot 10^{-4}$

личия между оценками представимы гораздо более существенно (уже начиная с первой значащей цифры). В связи с этим представляется более целесообразным задавать требование по надежности в виде вероятности отказа $Q_{тр}$, которую нужно подтвердить с уровнем доверия γ. Как следствие этого, процедура контроля достигнутого уровня надежности должна осуществляться в соответствии с условием $\bar{Q}_\gamma \leqslant Q_{тр}$.

6.2.6. Сравнение с известными результатами. Рассмотрим конкретный расчетный пример оценки ВБР по результатам натурных испытаний, решив его различными методами в зависимости от исходных данных.

Пример 6.1. Из априорных соображений известны априорная точечная оценка ВБР $R_0 = 0{,}9576$ и характеристика ее погрешности $\sigma_{R_0} = 0{,}0333$; в процессе экспериментальной отработки изделия проведены 12 безотказных испытаний. Необходимо оценить ВБР с уровнем доверия $\gamma = 0{,}9$.

Р е ш е н и е. Поскольку заданы R_0 и σ_{R_0}, рассматриваемая схема является полностью определенной. Параметры априорного распределения α и β определим по известным формулам

$$\alpha = R_0\rho, \quad \beta = (1 - R_0)\rho, \qquad \rho = \frac{1}{\sigma^2_{R_0}}(1 - R_0)R_0 - 1.$$

Для исходных данных примера имеем $\alpha = 19{,}97$, $\beta = 0{,}499$. По формулам (6.31), положив $\alpha_* = \alpha$, $\beta_* = \beta$, при $n = 12$, $d = 0$ получим $\hat{R}^* = 0{,}9846$, $\sigma_{\hat{R}^*} = 0{,}0213$. С помощью таблиц [35] находим соответствующую процентную точку F-распределения: $F_{0,1;\,0,998;\,64} = 2{,}79$. Затем по формуле (6.32) определим байесовскую нижнюю доверительную границу $\underline{R}^*_{0,9} = 0{,}9583$. Заметим попутно, что для подтверждения уровня надежности $R_{тр} = 0{,}9583$ без учета априорной информации необходимо было бы провести 54 безотказных испытания.

Рассмотрим теперь пример, в котором схема оценки ВБР не обладает полной априорной определенностью.

Пример 6.2. Данные этого примера совпадают с условием примера 6.1, с тем отличием, что значение σ_{R_0} неизвестно.

Р е ш е н и е. По условию примера мы имеем схему с частичной априорной определенностью, детальное рассмотрение которой проведено в настоящем параграфе. Обратимся к п. 6.2.3. Поскольку $d = 0$, имеем $g = 0$ и убеждаемся в том, что условие (6.24) не выполняется. Следовательно, для расчета оптимальных значений параметров α_* и β_* необходимо прибегнуть к решению кубического уравнения (6.27). По формулам (6.28) находим значения коэффициента уравнения $A = -22{,}94$, $B = -30{,}60$, $C = -12{,}75$. Решая кубическое уравнение (6.27) с помощью стандартных средств, получаем $z_* = 24{,}22$. Используя формулы (6.29), вычисляем оптимальные значения параметров: $\alpha_* = 11{,}92$, $\beta_* = 0{,}52$. Расчет оценок ВБР производим с помощью выражений (6.30) и (6.32). Окончательно получаем $\hat{R}^* = 0{,}9788$, $\sigma_{\hat{R}^*} = 0{,}0286$, $\underline{R}^*_{0,9} = 0{,}9425$.

Сравним решения примеров 6.1 и 6.2. Во-первых, оценка ВБР, найденная в первом случае, имеет меньшую погрешность. Такой вывод неизбежен, так как первая расчетная схема является полностью априорно определенной. Таким образом, оценивая надежность в более общем случае частичной априорной определенности, мы проигрываем в точности получаемых оценок. Это является своеобразной платой за возможность решения задачи в более общем случае. Во-вторых, оценка $\underline{R}_\gamma^*$ во втором случае получилась меньшей, и, значит, для подтверждения одного и того же уровня надежности в условиях частичной априорной определенности приходится проводить большее число опытов. Это также имеет убедительную интерпретацию – недостаток априорной информации компенсируется дополнительными данными.

В заключение заметим, что выигрыш в числе испытаний по сравнению с традиционным небайесовским подходом остается в случае реализации схемы с частичной априорной определенностью еще очень существенным. Так, в условиях примера 6.2 для подтверждения уровня надежности $R_{\text{тр}} = 0{,}9425$ при отсутствии априорной информации требуется проведение 39 безотказных испытаний против 12 в предположении, что известно значение R_0. Имеем выигрыш более чем в три раза. При более высоких требуемых значениях выигрыш в точности возрастает.

§ 6.3. Частичная априорная определенность при постоянной интенсивности отказов

Будем считать, что случайное время безотказной работы подчиняется экспоненциальному распределению с функцией

$$F(t) = F(t; \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geqslant 0, \ \ \lambda \geqslant 0. \tag{6.35}$$

Испытания проводятся в соответствии с планом, приводящим к цензурированной выборке $\tau = \{\boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{t}\}$, где $\boldsymbol{t}^* = (t_1^*, \ldots, t_d^*)$ – выборка моментов отказов, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_k)$ – выборка моментов цензурирования.

6.3.1. Задача оценки ВБР $R(t)$ для произвольного времени. Пусть в качестве априорной информации используется априорное значение ВБР R_0 для заданного времени t_0. Необходимо найти оценку $R(t)$ для момента t, в общем случае не совпадающего с t_0. Решение задачи проведем в соответствии с общим подходом, изложенным в § 6.1.

Согласно общему выражению (6.3) запишем функцию правдоподобия для параметрического семейства (6.35):

$$l(\lambda \mid \tau) = K(\tau)\lambda^d e^{-\kappa\lambda}, \qquad d \geqslant 0, \ \ \kappa > 0, \tag{6.36}$$

где $\kappa = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$ – суммарная наработка при испытаниях. Исходя из выражения (6.36), заключаем, что сопряженной априорной плотностью для параметра λ является плотность гамма-распределения с некоторыми неизвестными параметрами s и ϵ:

$$h(\lambda) = h(\lambda;\ s, \epsilon) = \frac{\epsilon^{s+1}}{\Gamma(s+1)} \lambda^s e^{-\lambda\epsilon}, \qquad \epsilon \geqslant 0, \ \ s \geqslant 0, \tag{6.37}$$

или, более коротко, будем отмечать – λ подчиняется распределению $\Gamma(s, \epsilon)$. Параметр s, в отличие от d, является вещественным, т.е. имеет место расширение множества значений достаточной статистики (d, κ). В соответствии с теоремой Байеса $(d, \kappa) * (s, \epsilon) = (d + s, \kappa + \epsilon)$, так что апостериорное распределение для λ есть $\Gamma(d + s, \kappa + \epsilon)$, т.е.

$$\hbar(\lambda \mid \tau) = \hbar(\lambda;\ d, s, \kappa, \epsilon) = \frac{(\kappa + \epsilon)^{d+s+1}}{\Gamma(d + s + 1)} \lambda^{d+s} e^{-\lambda(\kappa+\epsilon)}. \tag{6.38}$$

Параметры s и ϵ в (6.37) и (6.38) являются неизвестными. Определим оптимальные значения s_* и ϵ_* этих параметров, используя минимаксный принцип, изложенный в § 6.1. Выберем квадратичную функцию потерь и воспользуемся теоремой 6.1. Задача поиска s_* и ϵ_* сводится к максимизации апостериорной дисперсии функции $R(t) = 1 - F(t)$ при ограничении на априорное математическое ожидание этой же функции:

$$\begin{aligned} U_R(s, \epsilon) = \int_0^\infty R^2(t;\ \lambda)\hbar(\lambda;\ d, s, \kappa, \epsilon)\, d\lambda - \\ - \Big[\int_0^\infty R(t;\ \lambda)\hbar(\lambda;\ d, s, \kappa, \epsilon)\, d\lambda\Big]^2 \to \max, \\ \int_0^\infty R(t_0;\ \lambda) h(\lambda;\ s, \epsilon)\, d\lambda = R_0. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Проведя необходимые вычисления, задачу (6.39) перепишем в конечном виде

$$\begin{aligned} U(s_*, \epsilon_*) = \max_{s,\ \epsilon} \left[\left(\frac{\kappa + \epsilon}{\kappa + \epsilon + 2t}\right)^{d+s+1} - \left(\frac{\kappa + \epsilon}{\kappa + \epsilon + t}\right)^{2(d+s+1)} \right], \\ \frac{\epsilon}{\epsilon + t_0} = R_0. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Как и в предыдущем параграфе, имеем задачу на условный максимум, однако эта задача может быть решена только с помощью численных методов.

6.3.2. Задача оценки интенсивности отказов. Видоизменим задачу, задавшись целью сначала оценить параметр λ, а затем с помощью полученных оценок найти оценку ВБР $R(t)$. По-прежнему будем использовать квадратичную функцию потерь и теорему 6.1. В качестве априорной информации примем априорное значение интенсивности отказов λ_0, т.е. ограничение задачи будет иметь вид

$$\int_0^\infty \lambda h(\lambda;\ s, \epsilon)\, d\lambda = \lambda_0,$$

или, после подстановки (6.37) и интегрирования,

$$\frac{s + 1}{\epsilon} = \lambda_0. \tag{6.41}$$

Запишем функцию апостериорной дисперсии параметра λ в зависимости от неизвестных параметров s и ϵ:

$$U_\lambda(s, \epsilon) = \int_0^\infty \lambda^2 \hbar(\lambda;\ d, s, \kappa, \epsilon)\, d\lambda - \Big[\int_0^\infty \lambda \hbar(\lambda;\ d, s, \kappa, \epsilon)\, d\lambda\Big]^2 = \frac{d + s + 1}{(\kappa + \epsilon)^2}. \tag{6.42}$$

Учитывая выражения (6.42) и (6.41), в соответствии с теоремой 6.1 задачу поиска оптимальных значений параметров s_* и ϵ_* представим следующим образом:

$$U_\lambda(s_*, \epsilon_*) = \max_{\substack{s \geqslant 0 \\ \epsilon \geqslant 0}} U_\lambda(s, \epsilon) = \max_{\substack{s \geqslant 0 \\ \epsilon \geqslant 0}} \frac{d+s+1}{(\kappa+\epsilon)^2},$$

$$\frac{s+1}{\epsilon} = \lambda_0. \tag{6.43}$$

Задача (6.43) может быть решена аналитически.

Решение задачи (6.43). Исходя из ограничения задачи, имеем $\epsilon = (s+1)/\lambda_0$. Образуем функцию

$$\varphi(s) \equiv U_\lambda\left(s, \frac{s+1}{\lambda_0}\right) = \lambda_0^2 \frac{d+s+1}{(\lambda_0\kappa+s+1)^2}, \quad s \geqslant 0,$$

наибольшее значение которой соответствует решению задачи (6.43). Исследуем производную функции

$$\varphi'(s) = \lambda_0^2 \frac{(\lambda_0\kappa - 2d - 1) - s}{(\lambda_0\kappa+s+1)^3} \tag{6.44}$$

при $s \geqslant 0$. Из выражения (6.44) видно, что если выполняется условие

$$\lambda_0\kappa - 2d - 1 \leqslant 0 \iff \lambda_0 \leqslant \frac{2d+1}{\kappa}, \tag{6.45}$$

то производная $\varphi'(s)$ всегда неположительна при $s \geqslant 0$, функция $\varphi(s)$ является монотонной при $s \geqslant 0$ и достигает наибольшего значения в точке $s_* = 0$. В противном случае функция $\varphi(s)$ имеет единственный максимум в точке $s_* = \lambda_0\kappa - 2d - 1$. Таким образом, общее решение задачи (6.43) имеет вид

$$(s_*, \epsilon_*) = \begin{cases} \left(0, \dfrac{1}{\lambda_0}\right), \text{ если } \lambda_0 \leqslant \dfrac{2d+1}{\kappa}, \\ \left(\lambda_0\kappa - 2d - 1, \ \kappa - \dfrac{2d}{\lambda_0}\right), \text{ если } \lambda_0 > \dfrac{2d+1}{\kappa}. \end{cases} \tag{6.46}$$

С помощью известных значений s_* и ϵ_* расчет апостериорных оценок интенсивности отказов осуществляется с помощью следующих выражений:

$$\hat{\lambda}^* = \frac{d+s_*+1}{\kappa+\epsilon_*}, \quad \sigma^2_{\hat{\lambda}^*} = \frac{d+s_*+1}{(\kappa+\epsilon_*)^2}. \tag{6.47}$$

Для определения байесовской верхней доверительной границы можно использовать результаты работы [21] для полностью априорно определенной схемы с постоянной интенсивностью отказов, в соответствии с которыми

$$\overline{\lambda}_\gamma = \frac{\chi^2_{1-\gamma;\,2(d+s_*+1)}}{2(\kappa+\epsilon_*)}, \tag{6.48}$$

где $\chi^2_{\alpha;\,\nu}$ – 100α-процентная точка распределения хи-квадрат.

13*

6.3.3. Оценки ВБР с помощью оценок интенсивности отказов. При известных параметрах s_* и ϵ_*, которые определяются выражениями (6.46), апостериорная плотность параметра λ (6.38) является полностью определенной. Это позволяет без труда найти соответствующие оценки для ВБР $R(t) = 1 - F(t; \lambda) = \exp(-\lambda t)$. В частности,

$$\hat{R}^*(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \hbar(\lambda;\ d, s_*, \kappa, \epsilon_*)\, d\lambda =$$

$$= \frac{(\kappa + \epsilon_*)^{d+s_*+1}}{\Gamma(d + s_* + 1)} \int_0^\infty \lambda^{d+s_*} e^{-\lambda(\kappa+\epsilon_*+t)} d\lambda =$$

$$= \frac{(\kappa + \epsilon_*)^{d+s_*+1}}{\Gamma(d + s_* + 1)} \int_0^\infty \frac{z^{d+s_*} e^{-z} dz}{(\kappa + \epsilon_* + t)^{d+s_*}} = \left(\frac{\kappa + \epsilon_*}{\kappa + \epsilon_* + t}\right)^{d+s_*+1}$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для апостериорной дисперсии $\sigma^2_{\hat{R}^*(t)}$. Если ввести безразмерные параметры

$$u_* = (\epsilon_* + \kappa)/t, \qquad v_* = s_* + d, \tag{6.49}$$

то оценки ВБР могут быть записаны с помощью следующих простых формул:

$$\begin{aligned} \hat{R}^*(t) &= \left(\frac{u_*}{u_* + 1}\right)^{v_*+1}, \\ \sigma^2_{\hat{R}^*(t)} &= \left(\frac{u_*}{u_* + 2}\right)^{v_*+1} - \left(\frac{u_*}{u_* + 1}\right)^{2(v_*+1)}. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Для оценки $\underline{R}^*_\gamma(t)$ справедливо $P\{R(t) \geqslant \underline{R}^*_\gamma(t)\} = P\{\bar{\lambda}_\gamma \leqslant \lambda\}$, откуда

$$\underline{R}^*_\gamma(t) = \exp\left[-\frac{\chi^2_{1-\gamma;\, 2(d+s_*+1)}}{2u_*}\right]. \tag{6.51}$$

Оценка $\underline{R}^*_\gamma(t)$ может быть найдена также с помощью уравнения (6.19), которое в данном случае записывается следующим образом:

$$\int_{e^{-\lambda t} \geqslant \underline{R}^*_\gamma(t)} \hbar(\lambda;\ d, s_*, \kappa, \epsilon_*)\, d\lambda - \gamma = 0$$

и приводится к виду

$$(\underline{R}^*_\gamma(t))^{u_*} \left[1 + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k!} u_* \mid \ln \underline{R}^*_\gamma(t) \mid^k \right] = 1 - \gamma. \tag{6.52}$$

Данное уравнение может быть рекомендовано для оценки ВБР в составе какого-либо вычислительного алгоритма, когда нецелесообразно использование табличных значений процентных точек распределения хи-квадрат. В случае $d = 0$ уравнение (6.52) имеет простое аналитическое решение

$$\underline{R}^*_\gamma(t) = (1 - \gamma)^{1/u_*}, \tag{6.53}$$

использование которого удобнее по сравнению с (6.51).

6.3.4. Вычислительный анализ оценок ВБР. В табл. 6.6 и 6.7 представлены результаты расчетов оценок ВБР по формулам (6.50) и (6.52) в зависи-

Таблица 6.6

Байесовские оценки ВБР для безотказных испытаний

$\hat{R}^*(t_0)/\underline{R}^*_{0,9}(t_0)$

ω	R_0			
	0,9992	0,9994	0,9996	0,9998
2	0,99920153 0,99816168	0,99940095 0,99862060	0,99960045 0,99907984	0,99980003 0,99953951
6	0,99920413 0,99816746	0,99940235 0,99862388	0,99960105 0,99908134	0,99980023 0,99953991
10	0,99920662 0,99817334	0,99940375 0,99862718	0,99960165 0,99808284	0,99980033 0,99954031

Таблица 6.7

Байесовские оценки ВБР для случая одного отказа

$\hat{R}^*(t_0)/\underline{R}^*_{0,9}(t_0)$

ω	R_0			
	0,9992	0,9994	0,9996	0,9998
2	0,99840370 0,99689645	0,99880226 0,99767105	0,99920106 0,99844630	0,99960001 0,99922240
6	0,99840899 0,99690650	0,99880506 0,99767665	0,99920226 0,99844881	0,99960050 0,99922305
10	0,99841387 0,99691900	0,99880786 0,99768205	0,99920346 0,99845125	0,99960071 0,99922370

Таблица 6.8

Байесовские оценки вероятности отказа для безотказных испытаний

$Q^*(t_0)/\bar{Q}^*_{0,9}(t_0)$

ω	R_0			
	0,9992	0,9994	0,9996	0,9998
2	$7{,}985 \cdot 10^{-4}$ $1{,}838 \cdot 10^{-3}$	$5{,}990 \cdot 10^{-4}$ $1{,}379 \cdot 10^{-3}$	$3{,}995 \cdot 10^{-4}$ $9{,}202 \cdot 10^{-4}$	$2{,}001 \cdot 10^{-4}$ $4{,}605 \cdot 10^{-4}$
6	$7{,}959 \cdot 10^{-4}$ $1{,}833 \cdot 10^{-3}$	$5{,}976 \cdot 10^{-4}$ $1{,}376 \cdot 10^{-3}$	$3{,}989 \cdot 10^{-4}$ $9{,}187 \cdot 10^{-4}$	$1{,}998 \cdot 10^{-4}$ $4{,}601 \cdot 10^{-4}$
10	$7{,}934 \cdot 10^{-4}$ $1{,}827 \cdot 10^{-3}$	$5{,}962 \cdot 10^{-4}$ $1{,}373 \cdot 10^{-3}$	$3{,}983 \cdot 10^{-4}$ $9{,}172 \cdot 10^{-4}$	$1{,}997 \cdot 10^{-4}$ $4{,}597 \cdot 10^{-4}$

Таблица 6.9

Байесовские оценки вероятности отказа для случая одного отказа $\bar{Q}^*(t_0)/\bar{Q}^*_{0,9}(t_0)$

ω	R_0			
	0,9992	0,9994	0,9996	0,9998
2	$1{,}596 \cdot 10^{-3}$ $3{,}103 \cdot 10^{-3}$	$1{,}198 \cdot 10^{-3}$ $1{,}329 \cdot 10^{-3}$	$7{,}989 \cdot 10^{-4}$ $1{,}554 \cdot 10^{-3}$	$3{,}999 \cdot 10^{-4}$ $7{,}776 \cdot 10^{-4}$
6	$1{,}591 \cdot 10^{-3}$ $3{,}094 \cdot 10^{-3}$	$1{,}195 \cdot 10^{-3}$ $2{,}323 \cdot 10^{-3}$	$7{,}977 \cdot 10^{-4}$ $1{,}551 \cdot 10^{-3}$	$3{,}995 \cdot 10^{-4}$ $7{,}770 \cdot 10^{-4}$
10	$1{,}586 \cdot 10^{-3}$ $3{,}081 \cdot 10^{-3}$	$1{,}192 \cdot 10^{-3}$ $2{,}318 \cdot 10^{-3}$	$7{,}965 \cdot 10^{-4}$ $1{,}548 \cdot 10^{-3}$	$3{,}993 \cdot 10^{-4}$ $7{,}763 \cdot 10^{-4}$

мости от априорного значения $R_0 = R(t_0)$ и приведенной статистики испытаний $\omega = \kappa/t$. Расчеты оценок ВБР производились для момента времени $t = t_0$, что позволяет проследить эволюцию апостериорной оценки $\hat{R}^*$ в зависимости от эмпирических данных. Как видно из сравнения табл. 6.6 и 6.7, оценки ВБР при $d = 1$ закономерно ниже соответствующих оценок при безотказных испытаниях. С ростом ω и R_0 оценки ВБР также увеличиваются.

В табл. 6.8 и 6.9 результаты расчетов надежности представлены с помощью вероятности отказов. Как и в § 6.2, отмечается бóльшая наглядность и более удобная сравнимость такой формы представления оценок надежности.

§ 6.4. Использование априорного доверительного интервала для расчета оценок ВБР

В главах 3 и 5 в качестве априорной информации использовались промежутки априорной неопределенности оцениваемого параметра. При этом предполагалось, что оцениваемый показатель или параметр принадлежит указанному промежутку с вероятностью единица. Основным недостатком такого способа задания априорной информации является излишняя категоричность высказывания относительно области возможных значений параметра.

В настоящем параграфе исследована модификация формы задания априорной информации в виде промежутка априорной неопределенности. Существо модификации заключается в том, что указанный промежуток содержит оцениваемый параметр с некоторой вероятностью $\mu < 1$, т.е. не является абсолютно гарантированным. Такая форма является более приемлемой для практических приложений, поскольку менее категорична. При использовании сопряженных априорных распределений получаемые оценки надежности принадлежат классу байесовских условно минимаксных оценок.

6.4.1. Постановка задачи. Пусть время безотказной работы исследуемого объекта подчиняется распределению вероятностей с функцией $F(t;\ \theta)$, где $\theta \in \Omega$ – в общем случае векторный параметр. Параметр θ распределен в соответствии с плотностью вероятности $h(\theta)$, которая неизвестна. В качестве априорной информации используется пара (Θ, μ), где $\Theta \in \Omega$, а $\mu \in [0, 1]$, связанная соотношением

$$\int_{\Theta} h(\theta)\,d\theta \geqslant \mu. \tag{6.54}$$

Определение. Множество $\Theta \subset \Omega$ будем называть *байесовским априорным доверительным множеством*, если оно удовлетворяет соотношению (6.54). В случае одномерного параметра промежуток $\Theta = [\theta', \theta'']$ называется *априорным доверительным интервалом.*

Будем считать, что испытания проводятся по НЦ-плану и результируются выборкой $\tau = \{\,\boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{t}\}$, где $\boldsymbol{t}^* = (t_1^*, \ldots, t_d^*)$ – вектор моментов отказов, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_k)$ – вектор моментов приостановок испытаний, не связанных с отказом. Задача заключается в нахождении апостериорной оценки ВБР $R(t) = 1 - F(t)$ для квадратичной функции потерь.

6.4.2. Общее решение задачи. Исходя из вида ограничения (6.54), накладываемого на априорную плотность, приходим к выводу, что данная задача совпадает с общей задачей оценивания ВБР в условиях частичной априорной определенности. Как и в общем решении (см. § 6.1), будем использовать сопряженное априорное распределение, ядро которого совпадает с ядром правдоподобия:

$$h(\theta) = h(\theta; \alpha') \backsim l_0(\theta; \alpha'), \tag{6.55}$$

где α' – вектор параметров априорной плотности, $l_0(\theta; \alpha')$ – ядро правдоподобия, которое для НЦ-плана записывается с помощью общей формулы (3.20).

В дальнейшем будем использовать общий для класса байесовских оценок в условиях частичной априорной определенности принцип выбора параметра α', который в конечном виде приводит к решению минимаксной задачи (6.14). Подставляя соотношение (6.55) в неравенство (6.54), получим следующий частный случай формулировки задачи (6.14) для получения байесовской оценки $\hat{R}^*$ и вектора параметров априорной плотности α'_*:

$$\begin{gathered} G(\hat{R}^*, \alpha'_*) = \min_{\hat{R}} \max_{\alpha'} \int_{\Omega} L(\hat{R}, R(\theta))\, l_0(\theta; \alpha * \alpha')\,d\theta, \\ \int_{\Theta} l_0(\theta; \alpha')\,d\theta \geqslant \mu \int_{\Omega} l_0(\theta; \alpha')\,d\theta. \end{gathered} \tag{6.56}$$

Ниже рассмотрены два важных для приложений конкретных случая: первый с экспоненциальным распределением $F(t;\ \theta)$, второй биномиальный.

6.4.3. Оценка ВБР для экспоненциального распределения времени безотказной работы. Пусть $F(t;\ \lambda) = 1 - \exp(-\lambda t)$, $\lambda > 0$, и необходимо оценить ВБР

$$R(t) = P\{\xi > t\} = e^{-\lambda t} \tag{6.57}$$

при условии, что задан априорный μ-доверительный интервал $[R_н, R_в]$ такой, что

$$P\{R_н \leqslant R(t_0) \leqslant R_в\} \geqslant \mu, \tag{6.58}$$

причем, вообще говоря, $t_0 \neq t$. Результаты испытаний представлены вектором τ, который был введен в § 6.1.

Установим сначала априорное распределение для λ. Вследствие монотонности зависимости (6.57) априорный доверительный интервал для λ имеет вид $[\lambda', \lambda'']$, где $\lambda' = -\ln R_{\text{в}}/t_0$, $\lambda'' = -\ln R_{\text{н}}/t_0$. Согласно определению априорного доверительного интервала для априорной плотности $h(\lambda)$ параметра λ имеем

$$\int_{\lambda'}^{\lambda''} h(\lambda)\, d\lambda \geqslant \mu. \tag{6.59}$$

Вид априорной плотности $h(\lambda)$, сопряженной с ядром правдоподобия, для экспоненциального распределения задается формулой (6.37). Окончательная формулировка задачи поиска оптимальных значений параметров априорной плотности s_* и ϵ_* согласно (6.56) записывается по аналогии с формулировкой (6.43) и имеет вид

$$\begin{gathered} U(s_*, \epsilon_*) = \max_{s,\,\epsilon} U(s, \epsilon) = \max_{s,\,\epsilon} \frac{d + s + 1}{(\kappa + \epsilon)^2}, \\ \int_{\lambda'}^{\lambda''} \lambda^s e^{-\lambda\epsilon} d\lambda \geqslant \mu \frac{\Gamma(s+1)}{\epsilon^{s+1}}, \end{gathered} \tag{6.60}$$

где $\kappa = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$, $U(s, \epsilon)$ – апостериорная дисперсия параметра λ.

Задача (6.60) относится к классу задач нелинейного программирования и может быть решена лишь численно на ЭВМ. Для приближенного решения задачи (6.60) рассмотрим так называемый случай безотказных априорных испытаний, который можно сопоставить высоконадежным техническим объектам. Этот случай вводится с помощью условия $s_* = 0$, так как параметр s имеет смысл априорного количества отказов, приходящихся на суммарную наработку ϵ. Будем считать также, что $R(t_0) \in [R_{\text{н}}, 1]$, откуда следует $\lambda' = 0$, $\lambda'' = -\ln R_{\text{н}}/t_0$. Применительно к указанным допущениям задача (6.60) приобретает вид

$$\begin{gathered} U_0(\epsilon_*) = U(0, \epsilon_*) = \max_{\epsilon > 0} \frac{d + 1}{(\kappa + \epsilon)^2}, \\ \int_0^{\lambda''} e^{-\lambda\epsilon} d\lambda \geqslant \frac{\mu}{\epsilon}. \end{gathered} \tag{6.61}$$

Поскольку параметр ϵ является непрерывным, решение задачи (6.61) принадлежит границе области допустимых решений, т.е. определяется условием

$$R_{\text{н}}^{\epsilon_*/t_0} = 1 - \mu,$$

откуда следует

$$\epsilon_* = \frac{\ln(1 - \mu)}{\ln R_{\text{н}}} t_0. \tag{6.62}$$

Таблица 6.10

Апостериорные оценки ВБР для экспоненциального распределения

ω	$\mu = 0{,}90$			$\mu = 0{,}95$		
	$R_н = 0{,}90$	$R_н = 0{,}95$	$R_н = 0{,}99$	$R_н = 0{,}90$	$R_н = 0{,}95$	$R_н = 0{,}99$
5	0,9641 0,0346 0,9178	0,9803 0,0192 0,9549	0,9957 0,0042 0,9902	0,9709 0,0282 0,9334	0,9845 0,0153 0,9643	0,99671 0,00334 0,99242
10	0,9696 0,0295 0,9303	0,9821 0,0176 0,9589	0,9958 0,0041 0,9904	0,9746 0,0247 0,9418	0,9856 0,0142 0,9669	0,99676 0,00326 0,99255
15	0,9736 0,0257 0,9394	0,9836 0,0162 0,9623	0,9959 0,0041 0,9906	0,9775 0,0220 0,9484	0,9865 0,0132 0,9691	0,99680 0,00316 0,99267
20	0,9767 0,0227 0,9465	0,9848 0,0149 0,9651	0,9960 0,0040 0,9908	0,9798 0,0198 0,9536	0,9874 0,0124 0,9711	0,99696 0,00314 0,99279
50	0,9863 0,0135 0,9685	0,9896 0,0103 0,9760	0,9964 0,0035 0,9918	0,9874 0,0124 0,9711	0,9909 0,0091 0,9790	0,99714 0,00287 0,99341

Дальнейший расчет оценок ВБР производим по формулам, аналогичным (6.50):

$$\hat{R}^*(t) = \left(\frac{u_*}{u_* + 1}\right)^{d+1}, \quad u_* = \frac{\epsilon_*}{t} + \frac{\kappa}{t}, \tag{6.63}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*(t)} = \left(\frac{u_*}{u_* + 2}\right)^{d+1} - \left(\frac{u_*}{u_* + 1}\right)^{2(d+1)}. \tag{6.64}$$

Для расчета баейсовской нижней доверительной границы рекомендуется формула (6.51) при $s_* = 1$. В табл. 6.10 представлены оценки ВБР, найденные по формулам (6.62) – (6.64), (6.51) при различных значениях характеристик априорной информации $R_н$ и μ и экспериментальных данных, выраженных статистиками $\omega = \kappa/t_0$ и $d = 0$. Для каждого расчетного варианта определялись три оценки $\hat{R}^*$, $\sigma_{\hat{R}^*}$ и $\underline{R}^*_{0,9}$, которые помещены последовательно одна под другой. Как видно из данных таблицы, с увеличением априорного доверительного уровня μ оценки ВБР улучшаются: точечная оценка и доверительная граница возрастают, а апостериорное среднее квадратическое отклонение уменьшается.

6.4.4. Оценка ВБР для биномиальных испытаний. Рассмотрим случай независимых испытаний, когда результаты фиксируются в виде "успех–отказ", так что в конечном виде представлены общим числом испытаний n и количеством отказов d. Функция правдоподобия для рассматриваемой схемы имеет вид (6.20), а сопряженным априорным распределением является бета-распределение с плотностью (6.21). Общая условно минимаксная задача поиска неизвестных значений параметров априорного распределения α_* и β_* и оценки ВБР $R = p$ в данном случае формулируется в виде

$$G(\hat{p}^*;\ \alpha_*, \beta_*) = \min_{\hat{p}} \max_{\substack{\alpha \geqslant 0 \\ \beta \geqslant 0}} \int_0^1 L(\hat{p}, p) p^{n-d+\alpha-1} (1-p)^{d+\beta-1} dp,$$

$$\int_{R_н}^{R_в} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} dp \geqslant \mu B(\alpha, \beta). \tag{6.65}$$

Задача (6.65) соответствует случаю задания априорного доверительного интервала $[R_н, R_в]$ с вероятностью μ. При решении задачи мы опять сталкиваемся с необходимостью использования численных методов. В случае квадратичной функции потерь $L(\hat{p}, p) = (\hat{p} - p)^2$, как показано в § 6.1, минимакс функции апостериорного риска сводится к максимуму апостериорной дисперсии $U(\alpha, \beta)$ параметра p. В окончательном виде задача (6.65) редуцируется в следующую задачу нелинейного программирования:

$$U(\alpha_*, \beta_*) = \max_{\substack{\alpha \geqslant 0 \\ \beta \geqslant 0}} U(\alpha, \beta) = \max \frac{(\alpha + n - d)(\beta + d)}{(\alpha + \beta + n)^2 (\alpha + \beta + n + 1)},$$

$$\int_{R_н}^{R_в} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} dp \geqslant \mu B(\alpha, \beta). \tag{6.66}$$

Данная задача также не имеет аналитического решения и требует применения одного из методов численной оптимизации. Рассмотрим упрощенный вариант задачи. Будем полагать $R_в = 1$ и $\beta_* = 1$. Этот случай соответствует той практической ситуации, когда надежность исследуемого объекта велика, а априорная информация получена в виде μ-доверительного байесовского интервала на основе безотказных испытаний. Задача (6.66) упрощается и приобретает вид

$$U(\alpha_*, 0) = \max_{\alpha > 0} \frac{(\alpha + n - d)(d + 1)}{(\alpha + n + 1)^2 (\alpha + n + 2)},$$

$$R_н^\alpha \leqslant 1 - \mu.$$

Нетрудно установить, что решение задачи лежит на границе области допустимых решений, т.е.

$$\alpha_* = \frac{\ln(1 - \mu)}{\ln R_н}. \tag{6.67}$$

Теперь для оценки ВБР достаточно воспользоваться формулами (6.30) и (6.32), которые применительно к данному случаю имеют вид

$$\hat{R}^* = \hat{p}^* = \frac{\alpha_* + n - d}{\alpha_* + n + 1}, \tag{6.68}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{(\alpha_* + n - d)(d + 1)}{(\alpha_* + n + 1)^2 (\alpha_* + n + 2)}, \tag{6.69}$$

$$\underline{R}^*_\gamma = \left[1 + \frac{d + 1}{\alpha_* + n - d} F_{1-\gamma;\, 2(d+1);\, 2(\alpha_* + n - d)}\right]^{-1}. \tag{6.70}$$

Таблица 6.11

Байесовская нижняя доверительная граница ВБР для биномиальных испытаний

μ	$R_н$				
	0,80	0,90	0,95	0,97	0,99
0,90	0,9289	0,9413	0,9498	0,9536	0,9622
0,95	0,9527	0,9629	0,9696	0,9733	0,9787
0,99	0,9871	0,9907	0,9927	0,9937	0,9952

Интересно отметить, что в методике расчета оценок ВБР, основанной на формулах (6.68) – (6.70), величина α_* играет роль количества безотказных испытаний, эквивалентных используемой априорной информации. В табл. 6.11 численно иллюстрируется зависимость оценки $\underline{R}^*_{0,9}$ от $R_н$ и априорной доверительной вероятности μ.

ЭМПИРИЧЕСКИЕ БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ

§ 7.1. Постановка задачи и состояние теории эмпирического байесовского оценивания

Во многих практических ситуациях разработчик располагает оценками показателей надежности объектов, которые являются прототипами или аналогами разрабатываемого устройства или системы. Упомянутые аналоги в течение длительного времени могут находиться в эксплуатации, так что информация о характеристиках их надежности имеет высокую достоверность. В качестве прототипа по отношению к разрабатываемому объекту могут использоваться изделия аналогичного назначения и структуры, отличающиеся введением некоторых новых элементов или изменением параметров (разрабатываемый объект в этом случае является модификацией существующего); изделия того же типа, но изготовленные по измененной технологии или на другом предприятии; изделия, находящиеся в эксплуатационных условиях, несколько отличающихся от условий эксплуатации разрабатываемого объекта.

Перспективным представляется следующий подход к разработке технических объектов. В процессе непрерывной деятельности какого-либо проектно-конструкторского подразделения, разрабатывающего типовые агрегаты, накапливается статистическая информация в виде результатов испытаний и эксплуатации каждого типа устройств. При проектировании нового варианта устройства данного типа, как правило, используется опыт создания предшествующих вариантов. Это естественным образом должно отражаться на способах оценки надежности, которые должны использовать информацию о характеристиках надежности предшествующих вариантов. Данная ситуация порождает необходимость разработки метода оценки надежности в условиях накопления данных. Это отвечает современной тенденции развития техники в условиях автоматизированных систем проектирования и производства, необходимой частью которых являются разнообразные банки данных. Один из методов оценки надежности в условиях накопления данных может быть основан на эмпирическом байесовском подходе, который использует априорную информацию, например, в виде оценок надежности предшествующих вариантов изделия, но не требует однозначного задания априорного распределения.

В настоящей главе проведен краткий анализ существующих методов оценивания в рамках эмпирического байесовского подхода, даны методические рекомендации по расчету оценок ВБР в наиболее распространенных практических ситуациях и предложен новый метод эмпирического байесовского оценивания в условиях накопления экспериментальных данных.

Для простоты изложения основ теории эмпирического байесовского оценивания рассмотрим случай получения оценки скалярного параметра θ и связанного с ним показателя надежности $R(\theta)$. При эмпирическом байесовском подходе постулируется существование априорного распределения параметра θ, которое является неизвестным. Основная идея этого подхода заключается в использовании в общей схеме байесовского оценивания (см. главу 2) аппроксимации либо байесовского решающего правила, либо априорного распределения. В обоих случаях аппроксимация основывается на прежних наблюдениях. Первоначально эмпирический байесовский подход появился в работе Роббинса [204] и в дальнейшем развивался в работах этого автора [205, 206]. Существенные результаты были получены рядом других авторов. К числу наиболее важных принадлежат работы [185, 197, 213].

7.1.1. Постановка задачи эмпирического байесовского оценивания. Пусть $\tau^{(j)} = (\tau_1^{(j)}, \tau_2^{(j)}, \ldots, \tau_{n_j}^{(j)})$ – результаты испытаний (например, в виде наработок на отказ), зафиксированные в j-й серии экспериментов. Объекты, испытанные в 1-й, 2-й, ..., $(N-1)$-й сериях, являются аналогами для объекта, который подвергается испытаниям в N-й серии. Следуя формализованному описанию эмпирического байесовского подхода [45, 77], будем полагать, что существует устойчивый статистический механизм, который приводит к априорному распределению $h(\theta)$, в общем случае неизвестному. Задача заключается в нахождении байесовской оценки параметра θ или показателя надежности $R(\theta)$ по результатам испытаний в N-й серии с учетом результатов испытаний предшествующих серий. Следуя принятому ранее способу представления оценок, в общем случае будем рассматривать следующие оценки:

для параметра θ – точечную оценку $\hat{\theta}_э^*$, апостериорное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\hat{\theta}_э^*}$, байесовский доверительный интервал $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]_\gamma$;

для ВБР – точечную оценку $\hat{R}_э^*$, апостериорное среднее квадратичное отклонение $\sigma_{\hat{R}_э^*}$, нижнюю доверительную границу $\underline{R}_{\gamma э}^*$.

7.1.2. Классификация методов. Укрупненная классификация эмпирических байесовских методов представлена на рис. 7.1. Первоначально все методы мы подразделяем на две части: *параметрические*, которые исследуют случай с известным параметрическим семейством распределения вероятностей $F(t;\ \theta)$ времени безотказной работы ξ, и *непараметрические* методы, которые исходят из допущения о принадлежности $F(t;\ \theta)$ некоторому непараметрическому классу S, более или менее широкому.

В группе параметрических методов можно выделить два класса. Методы первого класса основаны на эмпирической аппроксимации байесовского решающего правила без аппроксимации априорного распределения. Методы второго класса ближе к общей схеме байесовского оценивания, они основаны на эмпирической аппроксимации априорного распределения с последующим обращением к стандартной байесовской процедуре. Эти методы составляют основу практических процедур эмпирического байесовского оценивания.

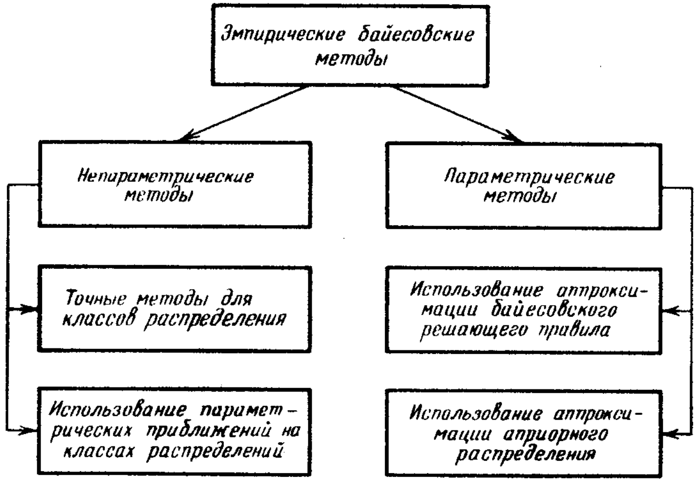


Рис. 7.1. Классификация эмпирических байесовских методов

В группе непараметрических методов мы также выделяем два класса. Первый класс, условно названный классом точных методов, основан на соображениях, совпадающих с построениями Фергюсона, которые рассматривались в четвертой главе. Разработке методов второго класса посвящен третий параграф настоящей главы.

7.1.3. Параметрические методы, основанные на аппроксимации байесовского решающего правила. Данные методы разработаны для специальных хорошо определенных параметрических семейств. Приведем типичный для этой группы результат, полученный в работах [185, 186]. Рассматривается параметрическое семейство с функцией распределения массы вероятности $P(x \mid \theta)$, $\theta \in \Theta$, которое удовлетворяет следующим свойствам:

(1) случайная величина X является дискретной при любом $\theta \in \Theta$;

(2) функция $P(x \mid \theta)$ такова, что

$$\frac{P(x+1 \mid \theta)}{P(x \mid \theta)} = a(x) + b(x)\theta,$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – некоторые функции, причем $b(x) \neq 0$. Примерами таких распределений являются пуассоновское и отрицательное биномиальное. Задача заключается в нахождении оценки параметра θ в виде математического ожидания $\hat{\theta}_n = E(\theta \mid x)$ по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наблюдений случайной величины X.

Из определения параметрического семейства $P(x \mid \theta)$ следует, что

$$\theta = \frac{P(x+1 \mid \theta)}{b(x)P(x \mid \theta)} - \frac{a(x)}{b(x)}.$$

Искомое апостериорное среднее параметра θ может быть представлено в виде

$$E(\theta \mid x) = \frac{1}{b(x)} \int\limits_{\Theta} \frac{P(x+1 \mid \theta)}{P(x \mid \theta)} dH(\theta \mid x) - \frac{a(x)}{b(x)},$$

где $H(\theta)$ и $H(\theta \mid x) = P(x \mid \theta)H(\theta)/P(x)$ – соответственно априорная и апостериорная функции распределения параметра θ. Тип параметрического семейства таков, что в результате несложных преобразований выражение для $E(\theta \mid x)$ допускает упрощение, согласно которому

$$E(\theta \mid x) = \frac{P(x+1)}{P(x)b(x)} - \frac{a(x)}{b(x)}.$$

В данном выражении функции $a(x)$ и $b(x)$ известны, а $P(x)$ и $P(x+1)$ нет. Для получения оценки $\hat{\theta}_n = E_n(\theta \mid x)$ используются соответствующие оценки функций $\hat{P}_n(x)$ и $\hat{P}_n(x+1)$, найденные по наблюденной выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем в качестве оценок $\hat{P}_n(x)$ и $\hat{P}_n(x+1)$ могут использоваться обычные непараметрические эмпирические оценки. Недостатком изложенного способа является жесткое ограничение на тип параметрического семейства $P(x \mid \theta)$.

7.1.4. Параметрические методы, основанные на аппроксимации априорного распределения. В этом классе, который представляет наибольшую группу методов, можно выделить два подкласса: первый использует непараметрическую эмпирическую аппроксимацию априорного распределения, второй для этих же целей исходит из какого-либо параметрического семейства априорных распределений и оценивает параметры этого семейства. Изложение методов первого подкласса проведем с помощью работ [79, 97, 180, 213]. Все рассмотренные ниже методы не имеют, как в предыдущем случае, ограничений на параметрическое семейство $F(t;\ \theta)$.

В основе методов лежит традиционная байесовская формула оценки параметра θ по произвольной выборке τ:

$$E(\theta \mid \tau) = \frac{\int\limits_{\Theta} \theta f_\tau(\tau \mid \theta) dH(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f_\tau(\tau \mid \theta) dH(\theta)}, \tag{7.1}$$

где $f_\tau(\tau \mid \theta)$ – плотность распределения наблюдений. Предполагается, что каждое из наблюдений $\tau^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ является вектором одинаковой размерности n. Заметим, что это является упрощением более общего случая, когда каждый вектор $\tau^{(j)}$ имеет размерность n_j. Существует статистика $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\tau)$, которая является достаточной для каждой реализации параметра θ из множества $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$. В этом случае, в соответствии с теоремой факторизации [45],

$$E(\theta \mid \tau) = E(\theta \mid \hat{\theta}(\tau)) = E(\theta \mid \hat{\theta}).$$

Тогда выражение (7.1) перепишется в виде

$$E(\theta \mid \hat{\theta}) = \frac{\int\limits_{\Theta} \theta f(\hat{\theta} \mid \theta) dH(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f(\hat{\theta} \mid \theta) dH(\theta)}, \tag{7.2}$$

причем предполагается, что плотность распределения статистики $f(\hat{\theta} \mid \theta)$ известна. Предложенный в [77] метод состоит в аппроксимации априорной функции распределения с помощью ступенчатых функций, имеющих приращение $1/N$ в каждой из оценок $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_N$. Указанная аппроксимация для $dH(\theta)$ имеет вид

$$d\hat{H}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(\hat{\theta}_i; \theta), \tag{7.3}$$

где

$$\delta(\hat{\theta}_i; \theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } \theta = \theta_i, \\ 0, \text{ если } \theta \neq \theta_i. \end{cases}$$

Подставляя аппроксимацию (7.3) в формулу (7.2), получаем окончательное выражение для оценки параметра θ по выборке $\tau^{(N)}$:

$$\hat{\theta}^* = E_N(\theta \mid \hat{\theta}) = \frac{\sum_{j=1}^{N} \hat{\theta}_j f(\hat{\theta}_N \mid \hat{\theta}_j)}{\sum_{j=1}^{N} f(\hat{\theta}_N \mid \hat{\theta}_j)}. \tag{7.4}$$

Оценка $\hat{\theta}^*$, найденная с помощью формулы (7.4), названа в [77] оценкой первого приближения. Она может быть уточнена путем использования следующей простой идеи. Вместо каждой оценки $\hat{\theta}_j$ в формуле (7.4) будем использовать эмпирическую байесовскую оценку $\hat{\theta}_j^{(1)} = \hat{\theta}_j^*$ первого приближения, найденную с помощью формулы (7.4) по совокупности данных $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(j)}$. Таким образом, имеем следующую процедуру получения эмпирической байесовской оценки $\hat{\theta}^{(2)}$ второго приближения. Сначала для каждого $j = 1, 2, \ldots, N$ находим оценку первого приближения:

$$\hat{\theta}_j^{(1)} = \hat{\theta}_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{j} \hat{\theta}_i f(\hat{\theta}_j \mid \hat{\theta}_i)}{\sum_{i=1}^{j} f(\hat{\theta}_j \mid \hat{\theta}_i)}, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.5}$$

Затем вычисляем оценку $\hat{\theta}^{(2)}$ второго приближения:

$$\hat{\theta}^{(2)} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \theta_j^{(1)} f(\hat{\theta}_N^{(1)} / \theta_j^{(1)})}{\sum_{j=1}^{N} f(\hat{\theta}_N^{(1)} \mid \hat{\theta}_j^{(1)})}. \tag{7.6}$$

По свидетельству работы [180] оценка второго приближения является более точной. В [77] Беннетом предложено уточнять оценку (7.6) за счет третьего, четвертого и т.д. приближений. Однако заметного увеличения точности в этом случае не обнаруживается.

Процедуры получения эмпирических байесовских оценок для различных параметрических семейств исследованы Леманом в работе [160].

Наибольшее внимание в прикладных работах по эмпирическому байесовскому оцениванию уделено параметрическому семейству Вейбулла [77, 79, 97, 146, 181].

Существенным недостатком изложенного выше метода является дискретный характер аппроксимации априорного распределения, что не позволяет, в частности, строить доверительные границы для параметра θ и связанного с ним показателя надежности. В этой связи представляет интерес предложение Беннета и Мартца [78] использовать для аппроксимации априорной плотности $h(\theta)$ непрерывное непараметрическое приближение Парзена [196] вида

$$h(\theta) = \hat{h}_N(\theta) = \frac{1}{Nk(N)} \sum_{j=1}^{N} w\left(\frac{\theta - \theta_j}{k(N)}\right), \tag{7.7}$$

где $w(\cdot)$ – определенная функция, удовлетворяющая условиям ограниченности и регулярности, $k(N)$ – не зависящая от θ постоянная такая, что

$$\lim_{N\to\infty} k(N) = 0, \qquad \lim_{N\to\infty} Nk(N) = \infty.$$

Беннет и Мартц использовали, в частности, приближение (7.7), для которого

$$w(y) = \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2, \quad y = \frac{\theta' - \hat{\theta}_j}{2k(N)}, \quad k(N) = N^{-1/s}.$$

Байесовская оценка параметра θ в этом случае имеет вид (для первого приближения)

$$\hat{\theta}^* = \frac{1}{\beta} \int_{\Theta} \theta f(\theta \mid \hat{\theta}_N)\hat{h}(\theta)d\theta, \tag{7.8}$$

где β – нормирующая постоянная. Теперь существует возможность определения байесовской нижней доверительной границы для ВБР, например, с помощью уравнения

$$\int_{R(\theta) \geqslant \underline{R}_\gamma} f(\theta \mid \hat{\theta}_N)\hat{h}(\theta)d\theta = \gamma \int_{\Theta} f(\theta \mid \hat{\theta}_N)\hat{h}(\theta)d\theta. \tag{7.9}$$

Подкласс параметрических методов, которые используют для аппроксимации априорного распределения какие-либо параметрические семейства, образуют методы, построенные по следующей естественной схеме [213]. Для заданного параметрического семейства $F(t;\ \theta)$ строится функция правдоподобия и устанавливается априорное распределение, сопряженное с ядром правдоподобия. Параметры этого априорного распределения считаются неизвестными и оцениваются (например, по методу моментов), исходя из оценок $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_N$. В работе [205] Роббинс показывает, что с увеличением N эмпирическая байесовская оценка начинает "забывать" тип априорного распределения. Существуют возможности усовершенствования этой простой процедуры за счет специфических особенностей рассматриваемой схемы оценки. Пример такой модификации дает работа Хиггинса и Цокоса [146]. Как показано в этой работе, если в пуассоновской схеме производить оценку априорного гамма-распределения через коэффициент вариации, то удается увеличить эффективность байесовской оценки ВБР.

7.1.5. Непараметрические эмпирические байесовские методы. Все известные результаты восходят к теории Фергюсона, характеристика которой была дана в § 4.1. Первое распространение этой теории на случай эмпирического байесовского оценивания было дано Корваром и Голандером в работе [158]. Дальнейшим развитием этой работы на случай цензурированных выборок явилась статья Сусарлы и Ван Райзина [227]. Важный для практики частный случай, когда все моменты цензурирования распределены по одинаковому вероятностному закону, рассмотрен Фадиа в [197]. Все полученные результаты основаны на аппроксимации априорной меры α по результатам предшествующих цензурированных испытаний (δ_1, τ_1), $(\delta_2, \tau_2), \ldots, (\delta_{N-1}, \tau_{N-1})$, где $\tau_i = \min\{\xi_i, \zeta_i\}$, ξ_i – момент отказа, ζ_i – момент цензурирования, $\delta_j = 1$, если наблюдается отказ, и $\delta_j = 0$, если отказ был цензурирован. Оценка ВБР $R(t)$ строится по результату N-го наблюдения (δ_N, τ_N) с учетом упомянутой аппроксимации меры α априорного процесса Дирихле. Приведем оценку $\hat{R}^*(t)$, полученную в работе [197] для случая, когда моменты цензурирования имеют одинаковое распределение, а моменты отказа – различное. Предполагается, что показатель значимости априорной информации $\beta = \alpha([0, \infty))$ задан,

$$\hat{R}^*(t) = \frac{1}{\beta + 1}\{I[t < \tau_N] + \hat{\alpha}([t, \infty)) + $$

$$+ I[\delta_N = 0,\ t \geqslant \tau_N]\}\ \frac{\hat{\alpha}([t, \infty))}{\hat{\alpha}([\tau_N, \infty))},$$

где

$$\hat{\alpha}([t, \infty)) = \frac{N^+(t)}{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} \left(\frac{N^+(\tau_i) + c + 1}{N^+(\tau_i) + c}\right)^{I[\delta_i = 0,\ t \geqslant \tau_i]},$$

$N^+(t)$ – число наблюдений из множества $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{N-1}$, превышающих t, $I[A]$ – индикатор события A: если A происходит, то $I = 1$, в противном случае $I = 0$, c – положительная постоянная, которая регулирует плавность оценки (в практических вычислениях часто полагают $c = 1$).

Недостатком рассмотренных методов является то, что они не позволяют оценить точность определения $\hat{R}^*(t)$ и найти интервальную оценку.

§ 7.2. Эмпирические байесовские оценки ВБР для наиболее распространенных параметрических семейств

В настоящем параграфе мы рассмотрим общую процедуру параметрического эмпирического байесовского оценивания ВБР и ее частные реализации для биномиального, экспоненциального, Вейбулла распределений, а также для случая с линейно возрастающей функцией интенсивности отказов.

7.2.1. Общая процедура получения оценок. Пусть случайное время безотказной работы подчиняется распределению с функцией $F(t;\ \theta)$ и известны результаты N серий испытаний $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(N)}$ объемом соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_N$. Каждый вектор $\tau^{(j)}$ представляет собой объединение векторов $t^{*(j)}$ и $t^{(j)}$ моментов отказов и цензурирования соответственно объемов d_j и k_j, так что $n_j = d_j + k_j$. Эмпирическую байесовскую оценку ВБР $R(t;\ \theta) = 1 - F(t;\ \theta)$ необходимо найти для выборки $\tau^{(N)}$ с учетом результатов испытаний предшествующих серий.

Наличие параметрического семейства позволяет с помощью общих выражений (3.20) или (3.21) записать функцию правдоподобия $l(\theta \mid \tau)$ для произвольной выборки τ и, образовав достаточную статистику α, представить ее в виде $l(\theta \mid \tau) = K(\tau) l_0(\theta;\ \alpha)$. Интересующая нас оценка ВБР $R(\theta)$ может быть найдена, если известна апостериорная плотность параметра θ по результатам испытаний N-й серии. С помощью теоремы Байеса получим

$$\hbar(\theta \mid \tau^{(N)}) = \hbar(\theta \mid \alpha^{(N)}) \sim h(\theta) l_0(\theta; \alpha^{(N)}). \tag{7.10}$$

Априорная плотность $h(\theta)$ нам неизвестна, и мы будем ее соответствующим образом аппроксимировать. Для этого предположим существование оценок $\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}, \ldots, \hat{\theta}^{(N)}$, каждая из которых получена на основании своей "собственной" выборки $\tau^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Для получения оценки $\hat{\theta}^{(j)}$ можно воспользоваться любым пригодным для этих целей статистическим методом, желательно, конечно, чтобы получаемая оценка была по возможности более эффективной. В частности, можно воспользоваться методом максимального правдоподобия, и тогда компоненты оценки $\hat{\theta}^{(j)}$ следует определять, решая систему уравнений

$$\frac{\partial l(\theta; \alpha^{(j)})}{\partial \theta_i} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_i^{(j)} = \theta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7.11}$$

где m – размерность вектора θ. Для эти же целей пригоден и стандартный байесовский метод, в соответствии с которым оценка $\hat{\theta}_i^{(j)}$ определится как апостериорное среднее для выборки $\tau^{(j)}$:

$$\hat{\theta}_i^{(j)} = \frac{1}{\beta_j} \int_{\Theta} \theta_i l_0(\theta;\ \alpha^{(j)}) h_j(\theta) d\theta, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7.12}$$

где β_j – нормирующий множитель, $h_j(\theta)$ – априорная плотность параметра θ, которая, возможно, существует при исследовании надежности по j-й серии. Если априорная информация в j-й серии отсутствует, в качестве $h_j(\theta)$ следует использовать неинформативную плотность Джеффриса [149].

Для аппроксимации $h(\theta)$ в соотношении (7.10) будем использовать непараметрическую дискретную оценку плотности, для которой

$$d\hat{H}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} n_j \delta(\hat{\theta}^{(j)}, \theta), \tag{7.13}$$

где

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y, \end{cases} \qquad n = \sum_{i=1}^{N} n_i.$$

Данная оценка обобщает использованную в работе [77] оценку (7.3) на случай разных объемов выборок $\tau^{(j)}$. Соответствующая оценка эмпирической функции априорного распределения $\hat{H}(\theta)$ имеет вид ступенчатой функции с приращением n_j/n в каждой точке $\hat{\theta}^{(j)}$.

Пусть теперь необходимо найти оценку $\hat{R}^*_э = \hat{R}^*_э(t_0)$ в виде апостериорного среднего (используется квадратичная функция потерь). Данная оценка, основанная на аппроксимации априорного распределения, определится с помощью интеграла

$$\hat{R}^*_э(t_0) = \frac{\int\limits_{\Theta} R(t_0;\theta)\, l_0(\theta;\alpha^{(N)})\, d\hat{H}(\theta)}{\int\limits_{\Theta} l_0(\theta;\alpha^{(N)})\, d\hat{H}(\theta)}, \tag{7.14}$$

где $\alpha^{(N)}$ – достаточная статистика, соответствующая выборке $\tau^{(N)}$. Подставим в выражение (7.14) приближение (7.13), после ряда упрощающих преобразований получим

$$\hat{R}^*_э(t_0) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j R(t_0;\hat{\theta}^{(j)})\, l_0(\hat{\theta}^{(j)};\alpha^{(N)})}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j l_0(\hat{\theta}^{(j)};\alpha^{(N)})}. \tag{7.15}$$

Аналогичным образом мы без труда сможем найти эмпирическую оценку апостериорной дисперсии

$$\sigma^2_{\hat{R}^*_э(t_0)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j R^2(t_0;\hat{\theta}^{(j)})\, l_0(\hat{\theta}^{(j)};\alpha^{(N)})}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j l_0(\hat{\theta}^{(j)};\alpha^{(N)})} - \hat{R}^{*2}_э(t_0). \tag{7.16}$$

Заметим, что в таком виде параметрическая эмпирическая байесовская процедура не встречалась ни в одной из цитированных выше работ. Представляется, что изложенная выше эмпирическая байесовская процедура является наиболее общей в классе процедур, использующих дискретную аппроксимацию априорного распределения. К сожалению, она не позволяет находить интервальные оценки ВБР, и для поиска $\underline{R}^*_\gamma$ можно рекомендовать какой-либо приближенный способ, основанный на знании точечной оценки $\hat{R}^*_э(t_0)$ и среднего квадратического отклонения $\sigma_{\hat{R}^*_э(t_0)}$.

В заключение изложения общей процедуры заметим, что она допускает получение эмпирических байесовских оценок второго и последующих приближений. Для этого сначала необходимо найти эмпирические байесовские оценки параметров $\hat{\theta}^{(j)}$ первого приближения:

$$\hat{\theta}^{(j)}_{i(1)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{j} n_k \hat{\theta}^{(k)}_i\, l_0(\hat{\theta}^{(k)};\alpha^{(j)})}{\sum\limits_{k=1}^{j} n_k l_0(\hat{\theta}^{(k)};\alpha^{(j)})}, \tag{7.17}$$

а затем в формулы (7.15) и (7.16) подставить вместо $\hat{\theta}^{(j)}$ оценки первого приближения $\hat{\theta}^{(j)}_{(1)}$.

7.2.2. Биномиальная схема. Рассмотрим сначала простейший биномиальный случай, когда данные $\tau^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, N)$ представляют собой совокупность 0 и 1 и достаточная статистика $\alpha^{(j)} = (n_j, d_j)$ состоит из общего числа испытаний n_j и числа отказов d_j. ВБР в данном случае совпадает со значением единственного параметра p, а функция правдоподобия имеет вид

$$l(p; n, d) = \binom{n}{d} p^{n-d}(1-p)^d.$$

В соответствии с общими выражениями (7.15), (7.16) эмпирическая байесовская оценка имеет вид

$$\hat{R}^*_э = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{p}_j^{n_N - d_N + 1}(1-\hat{p}_j)^{d_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{p}_j^{n_N - d_N}(1-\hat{p}_j)^{d_N}}, \tag{7.18}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*_э} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{p}_j^{n_N - d_N + 2}(1-\hat{p}_j)^{d_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{p}_j^{n_N - d_N}(1-\hat{p}_j)^{d_N}} - \hat{R}^{*2}_э. \tag{7.19}$$

В качестве оценок $\hat{p}_j$ могут быть использованы оценки максимального правдоподобия $\hat{p}_j = 1 - d_j/n_j$. Однако в случае $d_j = 0$ имеем $\hat{p}_j = 1$, что загрубляет оценку (7.18). Более целесообразно использовать байесовскую оценку $\hat{p}_j^*$, полученную для равномерного на [0, 1] априорного распределения. В этом случае

$$\hat{p}_j^* = \frac{\sum\limits_{i=0}^{d_j} (-1)^i \dfrac{d_j}{(d_j - i)!\, i!\,(n_j + i + 2)}}{\sum\limits_{i=0}^{d_j} (-1)^i \dfrac{d_j}{(d_j - i)!\, i!\,(n_j + i + 1)}},$$

и при $d_j = 0$ имеем $\hat{p}_j^* = 1 - 1/(n_j + 2)$, что в большей степени соответствует реальной ситуации.

7.2.3. Экспоненциальное распределение. Для параметрического семейства $F(t;\ \lambda) = 1 - \exp(-\lambda t)$ функция правдоподобия для выборки $\tau^{(j)}$ имеет вид

$$l(\lambda \mid \tau^{(j)}) \backsim l_0(\lambda;\ d_j, \kappa_j) = \lambda^{d_j} e^{-\lambda \kappa_j},$$

где $\kappa_j = \tau_1^{(j)} + \tau_2^{(j)} + \ldots + \tau_{n_j}^{(j)}$, d_j – число отказов в j-й выборке. Вследствие этого эмпирическая байесовская оценка интенсивности отказов λ вычисляется по формулам

$$\hat{\lambda}_э^* = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\lambda}_j^{d_N+1} e^{-\hat{\lambda}_j \kappa_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\lambda}_j^{d_N} e^{-\hat{\lambda}_j \kappa_N}},$$

$$\sigma^2_{\hat{\lambda}_э^*} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\lambda}_j^{d_N+2} e^{-\hat{\lambda}_j \kappa_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\lambda}_j^{d_N} e^{-\hat{\lambda}_j \kappa_N}} - \hat{\lambda}_э^{*2}. \qquad (7.20)$$

Для оценки ВБР $R(t_0)$ справедливы аналогичные выражения

$$\hat{R}_э^*(t_0) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\lambda}_j^{d_N} e^{-\hat{\lambda}_j (\kappa_N + t_0)}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\lambda}_j^{d_N} e^{-\hat{\lambda}_j \kappa_N}},$$

$$\sigma^2_{\hat{R}_э^*(t_0)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\lambda}_j^{d_N} e^{-\hat{\lambda}_j (\kappa_N + 2t_0)}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\lambda}_j^{d_N} e^{-\hat{\lambda}_j \kappa_N}} - \hat{R}_э^{*2}(t_0). \qquad (7.21)$$

Вопрос заключается в том, каким образом по выборке $\tau^{(j)}$ строить оценку $\hat{\lambda}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. В большинстве эмпирических байесовских процедур предлагают использовать оценки максимального правдоподобия. Решая уравнение правдоподобия применительно к данному случаю, мы получим оценку вида $\hat{\lambda}_j = d_j/\kappa_j$. Для высоконадежных объектов в процессе испытаний отказы могут не наблюдаться. Это автоматически приводит к нулевой оценке $\hat{\lambda}_j$. Если во всех N сериях зафиксированы только успешные исходы (все выборки $\tau^{(j)}$ состоят только из моментов приостановок испытаний без отказа), то формулы (7.20), (7.21) перестают быть работоспособными. Более целесообразно в качестве оценки $\hat{\lambda}_j$ выбирать байесовскую оценку по выборке $\tau^{(j)}$, соответствующую случаю тривиальной априорной информации. Такая оценка может быть найдена, если мы положим равномерное априорное распределение для λ в промежутке $[0, \infty)$. В этом случае оценка $\hat{\lambda}_j^* = (d_j + 1)/\kappa_j$, и формулы (7.20), (7.21) остаются работоспособными при любых исходах в каждой из N серий опытов.

7.2.4. Распределение с линейно возрастающей интенсивностью отказов. Байесовская оценка ВБР для этого случая получена в § 3.4. Воспользуемся основными результатами этого параграфа. В соответствии с (3.54) ядро функции правдоподобия для выборки $\tau^{(j)}$ имеет вид

$$l_0(r, z;\ \omega_j, \kappa_j) = a_j(z) r^{b_j(z)} |\ln r|^{d_j}, \qquad (7.22)$$

где

$$a_j(z) = \frac{1}{(z+1)^{d_j}} \prod_{i=1}^{d_j} \left[(z-1) \frac{t_i^{(j)*}}{t_0} + 1 \right],$$

$$b_j(z) = \frac{1}{z+1} \left[(z-1)\kappa_j + 2\omega_j \right]. \tag{7.23}$$

$$\omega_j = \frac{1}{t_0} \sum_{i=1}^{n_j} \tau_i^{(j)},$$

$$\kappa_j = \frac{1}{t_0^2} \sum_{i=1}^{n_j} \tau_i^{(j)2},$$

t_0 – время, в течение которого определяется ВБР объекта.

Рассмотрим сначала случай, когда параметр деградации z считается заданным. Эмпирические байесовские оценки для ВБР будем определять, основываясь на ядре правдоподобия $r^{b_j(z)} | \ln r |^{d_j}$. Окончательные формулы для этих оценок записываются следующим образом:

$$\hat{R}_э^* = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{R}_j^{b_N(z)+1} | \ln \hat{R}_j |^{d_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{R}_j^{b_N(z)} | \ln \hat{R}_j |^{d_N}}, \tag{7.24}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}_э^*} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{R}_j^{b_N(z)+2} | \ln \hat{R}_j |^{d_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{R}_j^{b_N(z)} | \ln \hat{R}_j |^{d_N}} - \hat{R}_э^{*2}, \tag{7.25}$$

где

$$b_N(z) = \frac{1}{z+1} \left[(z-1) \frac{1}{t_0} \sum_{i=1}^{n_N} \tau_i^{(N)} + \frac{2}{t_0^2} \sum_{i=1}^{n_N} \tau_i^{(N)^2} \right].$$

В качестве оценок $\hat{R}_j$ мы рекомендуем байесовские оценки ВБР при линейно возрастающей интенсивности отказов для равномерного априорного распределения в $[0, 1]$. В соответствии с этим, используя функцию $I_L(z, R_н, R_в, m, d)$, получим

$$\hat{R}_j = \frac{I_L(z, 0, 1, 1, d_j)}{I_L(z, 0, 1, 0, d_j)} = \left[1 - \frac{1}{b_j(z) + 2} \right]^{d_j+1}, \tag{7.26}$$

где b_j вычисляется по формуле (7.23).

Рассмотрим более общий случай, когда значение показателя деградации интенсивности отказов z на промежутке $[0, t_0]$ неизвестно. Будем исходить из того, что разработчику известно предельное значение z_M, выше которого этот показатель не поднимается. Для получения эмпирической байесовской оценки мы должны воспользоваться ядром правдоподобия (7.22). Окончательные выражения имеют вид

$$\hat{R}^*_э(t_0) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j a_N(\hat{z}_j)\hat{R}_j^{b_N(\hat{z}_j)+1} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j a_N(\hat{z}_j)\hat{R}_j^{b_N(\hat{z}_j)} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}}, \tag{7.27}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*_э(t_0)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j a_N(\hat{z}_j)\hat{R}_j^{b_N(\hat{z}_j)+2} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j a_N(\hat{z}_j)\hat{R}_j^{b_N(\hat{z}_j)} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}} - \hat{R}^{*2}_э(t_0). \tag{7.28}$$

В качестве оценок $\hat{R}_j$ и $\hat{z}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ мы по-прежнему рекомендуем байесовские оценки, соответствующие случаю тривиальной априорной информации, а именно, показатели R_j и z_j подчиняются равномерным априорным распределениям соответственно в промежутках $[0, 1]$ и $[1, z_M]$. Используя результаты § 3.4, выпишем формулы для получения этих оценок:

$$\hat{R}_j = \frac{1}{\beta_j} \int\limits_1^{z_M} \frac{a_j(z)dz}{[b_j(z)+2]^{d_j+1}},$$

$$\hat{z}_j = \frac{1}{\beta_j} \int\limits_1^{z_M} \frac{z a_j(z)dz}{[b_j(z)+1]^{d_j+1}}, \tag{7.29}$$

где

$$\beta_j = \int\limits_1^{z_M} \frac{a_j(z)dz}{[b_j(z)+1]^{d_j+1}}.$$

Оценки (7.29) имеют по крайней мере два преимущества перед соответствующими оценками максимального правдоподобия. Для получения последних необходимо решить весьма громоздкую систему в общем случае трансцендентных уравнений, в то время как при использовании формул (7.29) следует прибегнуть лишь к методам численного интегрирования достаточно гладких функций. Кроме того, оценки максимального правдоподобия для высоконадежных объектов при $d_j = 0$ приводят к $\hat{R}_j = 1$, $\hat{z}_j = 1$, что делает формулы (7.27) и (7.28) неработоспособными.

7.2.5. Распределение Вейбулла. Данный расчетный случай по общим признакам совпадает с предыдущим. Его изложение мы проведем, используя результаты § 3.5. Для параметрического семейства Вейбулла с функцией распределения $F(t;\ \lambda, \alpha) = 1 - \exp(-\lambda t^\alpha)$ введем новую параметризацию (r, α), задаваемую преобразованием (3.66). Тогда функция правдоподобия запишется в виде (3.67). Опуская промежуточные рассуждения, запишем лишь конечные формулы для оценок ВБР $R(t_0)$.

Случай известного параметра формы α:

$$\hat{R}_э^*(t_0) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{R}_j^{\omega_N(\alpha)+1} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{R}_j^{\omega_N(\alpha)} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}}, \tag{7.30}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}_э^*(t_0)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{R}_j^{\omega_N(\alpha)+2} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{R}_j^{\omega_N(\alpha)} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}} - \hat{R}_э^{*2}(t_0), \tag{7.31}$$

$$\hat{R}_j = \left[1 - \frac{1}{\omega_j + 2}\right]^{d_j+1}, \qquad \omega_j(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_j} \left(\frac{\tau_i^{(j)}}{t_0}\right)^{\alpha}.$$

Случай неизвестного параметра формы α. Будем предполагать, что задано максимальное значение $\alpha_M > \alpha$, и что показатель α равномерно распределен в промежутке $[1, \alpha_M]$. В подавляющем большинстве практических ситуаций $\alpha < 5$, так что с уверенностью можно принять $\alpha_M = 5$. Расчетные формулы для оценки ВБР имеют следующий вид:

$$\hat{R}_э^*(t_0) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\alpha}_j^{d_N} \mu_N^{\hat{\alpha}_j-1} \hat{R}_j^{\omega_N(\hat{\alpha}_j)+1} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\alpha}_j^{d_N} \mu_N^{\hat{\alpha}_j-1} \hat{R}_j^{\omega_N(\hat{\alpha}_j)} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}}, \tag{7.32}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}_э^*(t_0)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\alpha}_j^{d_N} \mu_N^{\hat{\alpha}_j-1} \hat{R}_j^{\omega_N(\hat{\alpha}_j)+2} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j \hat{\alpha}_j^{d_N} \mu_N^{\hat{\alpha}_j-1} \hat{R}_j^{\omega_N(\hat{\alpha}_j)} |\ln \hat{R}_j|^{d_N}} - \hat{R}_э^{*2}(t_0), \tag{7.33}$$

где

$$\hat{R}_j = \frac{1}{\beta_j} \int_1^{\alpha_M} x^{d_j} \mu_j^{x-1} \frac{dx}{[\omega_j(x) + 1]^{d_j+1}},$$

$$\hat{\alpha}_j = \frac{1}{\beta_j} \int_1^{\alpha_M} x^{d_j+1} \mu_j^{x-1} \frac{dx}{\omega_j(x)^{d_j+1}},$$

$$\beta_j = \int_1^{\alpha_M} x^{d_j} \mu_j^{x-1} \frac{dx}{\omega_j(x)^{d_j+1}}, \qquad \mu_j = \prod_{i=1}^{d_j} \frac{t_i^{*(j)}}{t_0},$$

$$\omega_j(x) = \sum_{i=1}^{n_j} \left(\frac{\tau^{(j)}}{t_0}\right)^{x}.$$

§ 7.3. Непараметрические эмпирические байесовские оценки надежности в условиях накопления данных

7.3.1. Характеристика задачи. Одной из важных современных тенденций развития производства является создание разнообразных информационных банков данных, в которых последовательно накапливается интересующая широкий круг специалистов информация о существующих разработках. Эта информация специальным образом систематизируется и в любой момент доступна пользователю информационной системы, в состав которой входит банк данных. Целесообразность внедрения такого подхода при решении задач обеспечения надежности была обоснована

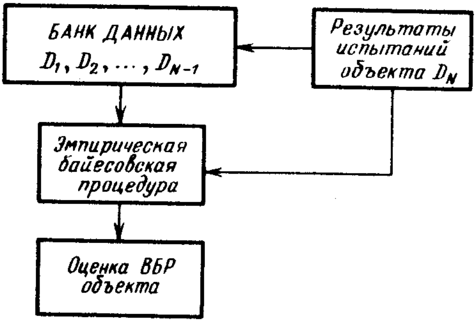


Рис. 7.2. Схема решения задачи

Ю.К. Беляевым [4]. В этой работе получен новый тип множительных оценок ВБР в условиях накопления однородных данных, т.е. в предположении, что экспериментальные данные каждой новой порции подчиняются одному и тому же закону распределения.

Ниже предпринята попытка оценки ВБР, исходя из неоднородных порций данных, которые будем обозначать $D_1, D_2, \ldots, D_N$. Решение задачи основано на эмпирическом байесовском подходе, схема использования которого представлена на рис. 7.2.

Предположим, что ставится задача оценки ВБР объекта по результатам его испытаний $D_{\text{об}}$. Разработчик располагает банком данных, в котором содержатся результаты испытаний объектов-аналогов. Используя эмпирический байесовский подход, мы будем искать оценки ВБР по результатам испытаний $D_{\text{об}}$ с учетом априорной информации, хранящейся в банке данных. В зависимости от количества имеющихся порций данных будем обозначать $D_N = D_{\text{об}}$, а порции данных, хранящиеся в банке, пронумеруем в последовательности их появления $D_1, D_2, \ldots, D_{N-1}$. Задача заключается в поиске оценки ВБР $\hat{R}_э^* = \hat{R}_э^*(D_N;\, D_1, D_2, \ldots, D_{N-1})$.

Рассмотрим возможный вид представления порции данных. В [4] для цензурированных выборок продолжительностей испытаний порцию данных D_j предлагается представить в виде следующей таблицы:

$$D_j = \begin{bmatrix} s_1^{(j)} & s_2^{(j)} & \ldots & s_{n_j}^{(j)} \\ d_1^{(j)} & d_2^{(j)} & \ldots & d_{n_j}^{(j)} \\ k_1^{(j)} & k_2^{(j)} & \ldots & k_{n_j}^{(j)} \end{bmatrix} .$$

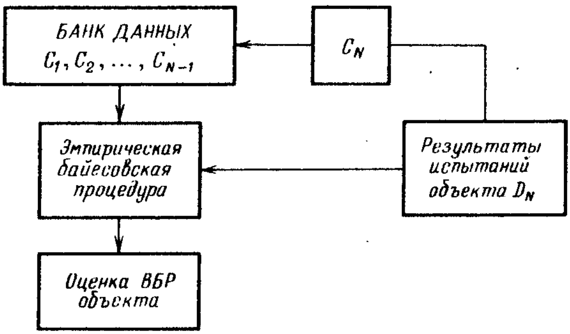


Рис. 7.3. Модифицированная схема решения задачи

В первой строке последовательно в порядке возрастания записываются продолжительности испытаний, зафиксированные в процессе экспериментальной отработки; $s_i^{(j)}$ может быть либо наработкой до отказа, либо наработкой, в течение которой изделие находилось в работоспособном состоянии, и затем испытание было прекращено. Во второй строке в i-м столбце записывается число отказов $d_i^{(j)}$, которые соответствуют наработке $s_i^{(j)}$. В третьей строке в i-м столбце записывается число изделий $k_i^{(j)}$, снятых с испытаний в момент $s_i^{(j)}$ до наступления отказа. Такая форма записи обобщает представление любой цензурированной выборки. Будем считать эту форму основной.

На практике наряду с рассмотренным способом представления информации о надежности может существовать другой, когда в банке данных хранятся непосредственно оценки надежности. В этом случае j-ю порцию данных будем обозначать C_j. Содержимое C_j составляют два числа: точечная оценка ВБР j-го аналога $\hat{R}_j$ и погрешность этой оценки $\sigma_{\hat{R}_j}$, либо совокупность $\hat{R}_j$ и нижней доверительной границы $\underline{R}_{j\gamma}$. Для определенности примем, что $C_j = (\hat{R}_j, \sigma_{\hat{R}_j})$. Схема получения оценки $\hat{R}_э^*$ применительно к этому случаю будет несколько видоизменена (рис. 7.3). Ясно, что переход $D_N \to C_N$ связан с потерей информации.

Задача получения оценки ВБР объекта будет решаться ниже в предположении, что функция распределения времени безотказной работы $F(t)$ принадлежит классу стареющих распределений S_0. Идея решения заключается в построении удобной для получения оценки аналитической замены функции $F(t)$ с помощью функции распределения $\tilde{F}(t) \in S_0$.

7.3.2. Решение задачи для формы представления данных D. Будем использовать аппроксимацию неизвестной функции распределения $F(t)$ с помощью двухпараметрического кусочно-линейного приближения функции ресурса $\Lambda(t) = -\ln[1 - F(t)]$ следующего вида:

$$\tilde{\Lambda}(t) = \chi(t_0 - t)\alpha t + \chi(t - t_0)[\theta t - (\theta - \alpha)t_0], \qquad (7.34)$$

где t_0 – момент времени, для которого определяется оценка ВБР, θ и α –

параметры. Вид приближения $\widetilde{\Lambda}(t;\ \alpha, \theta)$ изображен на рис. 5.1. Параметры α и θ определяются двумя условиями:

(1) в точке t_0, для которой рассчитывается оценка ВБР, функции $F(t)$ и $\widetilde{F}(t) = 1 - \exp[-\widetilde{\Lambda}(t)]$ совпадают;

(2) аппроксимирующая функция распределения $\widetilde{F}(t) = 1 - \exp[-\widetilde{\Lambda}(t)]$ принадлежит классу стареющих распределений.

По аналогии с § 5.1 запишем условия для параметров α и θ:

$$\alpha = -\frac{1}{t_0} \ln R, \tag{7.35}$$

где $R = 1 - F(t_0)$ – неизвестное значение ВБР и

$$\theta \geqslant \alpha. \tag{7.36}$$

С помощью ранее полученного выражения (5.26) запишем функцию правдоподобия $l(\alpha, \theta \mid D_j)$:

$$l(\alpha, \theta \mid D_j) = K(D_j) \alpha^{r_j} \theta^{u_j} e^{-(\alpha \kappa_j + \theta \mu_j)}. \tag{7.37}$$

Расшифруем смысл достаточных статистик функции правдоподобия (7.37): r_j – число отказов в таблице D_j, наблюдаемых до момента t_0, u_j – число отказов после момента t_0, κ_j – суммарная наработка при испытаниях до момента t_0, μ_j – то же после t_0, $K(D_j)$ – функция данных, не зависящая от параметров α и θ. Расчет указанных статистик производится с использованием данных таблицы D_j по следующим формулам:

$$r_j = \sum_{i=1}^{m_j} d_i^{(j)}, \qquad u_j = \sum_{i=m_j+1}^{n_j} d_i^{(j)}, \tag{7.38}$$

$$\kappa_j = \sum_{i=1}^{m_j} (d_i^{(j)} + k_i^{(j)}) s_i^{(j)} + t_0 \sum_{i=m_j+1}^{n_j} (d_i^{(j)} + k_i^{(j)}), \tag{7.39}$$

$$\mu_j = \sum_{i=m_j+1}^{n_j} (d_i^{(j)} + k_i^{(j)}) (s_i^{(j)} - t_0), \tag{7.40}$$

где m_j – количество элементов выборки $s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, \ldots, s_{n_j}^{(j)}$, удовлетворяющих условию $s_i^{(j)} \leqslant t_0$, определяется по формуле

$$m_j = \sum_{i=1}^{n_j} \chi(t_0 - s_i^{(j)}).$$

Теперь, имея полностью определенное ядро правдоподобия (7.37), мы можем искать эмпирическую байесовскую оценку ВБР, следуя общему подходу, который изложен в предыдущем параграфе. Показатель $R = R(t_0)$ выразим через $\widetilde{\Lambda}(t;\ \alpha,\ \theta)$. Подставив в (7.34) вместо t значение t_0, получим

$$R = R(t_0) = \exp[-\widetilde{\Lambda}(t_0;\ \alpha, \theta)] = e^{-\alpha t_0}. \tag{7.41}$$

Воспользовавшись общими выражениями (7.15) и (7.16), выпишем формулы для оценки ВБР:

$$\hat{R}^*_э = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^{N} n_j \hat{\alpha}_j^{r_N} \theta_j^{u_N} e^{-[\hat{\alpha}_j(\kappa_N + t_0) + \hat{\theta}_j \mu_N]}, \tag{7.42}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*_э} = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^{N} n_j \hat{\alpha}_j^{r_N} \theta_j^{u_N} e^{-[\hat{\alpha}_j(\kappa_N + 2t_0) + \hat{\theta}_j \mu_N]} - \hat{R}^{*2}_э, \tag{7.43}$$

где

$$B = \sum_{j=1}^{N} n_j \hat{\alpha}_j^{r_N} \hat{\theta}_j^{u_N} e^{-(\hat{\alpha}_j \kappa_N + \hat{\theta}_j \mu_N)}. \tag{7.44}$$

Для применения выражений (7.42)–(7.44) необходимо знать оценки $(\hat{\alpha}_j, \hat{\theta}_j)$, полученные с помощью данных D_j. В предыдущем параграфе было показано, что оценки максимального правдоподобия для этих целей могут оказаться неработоспособными. Вследствие этого было рекомендовано использование байесовских оценок, соответствующих неинформативному априорному распределению. Используем эти рекомендации для получения оценок $(\hat{\theta}_j, \hat{\alpha}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Найдем неинформативное априорное распределение для параметров α, θ. Будем исходить из равномерного априорного распределения для $R = \exp(-\alpha t_0)$ в промежутке $[0, 1]$. Используя однозначное преобразование (7.35), для маргинальной априорной плотности $h_1(\alpha)$ параметра α запишем

$$h_1(\alpha) = t_0 e^{-\alpha t_0}, \qquad 0 \leqslant \alpha < \infty. \tag{7.45}$$

Данное выражение является частным случаем (5.30) при $R_н = 0$ и $R_в = 1$. Условную априорную плотность $h_2(\theta \mid \alpha)$ определим, исходя из неравенств (7.36), считая, что $h_2(\theta \mid \alpha)$, как и $h_1(\alpha)$, принадлежит классу экспоненциальных распределений:

$$h_2(\theta \mid \alpha) = t_0 e^{-(\theta - \alpha) t_0}, \qquad \alpha \leqslant \theta < \infty.$$

Теперь нетрудно записать совместную априорную плотность параметров α и θ:

$$h(\alpha, \theta) = h_1(\alpha) h_2(\theta \mid \alpha) = t_0^2 e^{-\theta t_0}, \quad 0 \leqslant \alpha < \infty, \quad \alpha \leqslant \theta < \infty. \tag{7.46}$$

Дальнейшие рассуждения проведем в полном соответствии с общей байесовской схемой. Совмещая (7.37) и (7.46), найдем апостериорное распределение параметров α и θ при данных D_j:

$$\text{h}(\alpha, \theta \mid D_j) = \frac{1}{\beta_j} \alpha^{r_j} \theta^{u_j} e^{-[\alpha \kappa_j + \theta(\mu_j + t_0)]}, \quad 0 \leqslant \alpha < \infty, \quad \alpha \leqslant \theta < \infty, \tag{7.47}$$

где

$$\beta_j = \int_0^\infty d\alpha \int_\alpha^\infty \alpha^{r_j} \theta^{u_j} \exp\{-[\alpha \kappa_j + \theta(\mu_j + t_0)]\} d\theta. \tag{7.48}$$

Затем определим байесовские точечные оценки $\hat{\theta}$ и $\hat{\alpha}$ в виде соответствующих апостериорных средних

$$\hat{\alpha}_j = \int_0^\infty \int_\alpha^\infty \alpha \text{h}(\alpha, \theta \mid D_j) d\alpha\, d\theta, \qquad \hat{\theta}_j = \int_0^\infty \int_\alpha^\infty \theta \text{h}(\alpha, \theta \mid D_j) d\alpha\, d\theta. \tag{7.49}$$

Вычислив интегралы (7.49) для функции $\hbar(\alpha, \theta \mid D_j)$ вида (7.47) и интеграл (7.48), запишем окончательные формулы для искомых оценок:

$$\hat{\alpha}_j = \frac{1}{t_0\beta_j} \sum_{i=0}^{u_j} \frac{(u_j+r_j+1-i)!}{(u_j-i)!} \cdot \frac{1}{(\omega_{1j}+1)^{i+1}(\omega_j+1)^{u_j+r_j+2-i}}, \tag{7.50}$$

$$\hat{\theta}_j = \frac{u_j+1}{t_0\beta_j} \sum_{i=0}^{u_j+1} \frac{(u_j+r_j+1-i)!}{(u_j+1-i)!} \cdot \frac{1}{(\omega_{1j}+1)^{i+1}(\omega_j+1)^{u_j+r_j+2-i}}, \tag{7.51}$$

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{u_j} \frac{(u_j+r_j-i)!}{(u_j-i)!} \cdot \frac{1}{(\omega_{1j}+1)^{i+1}(\omega_j+1)^{u_j+r_j+1-i}}. \tag{7.52}$$

Отметим в заключение, что на практике существуют ситуации, когда при статистическом анализе каждой серии испытаний разработчик располагает нетривиальной априорной информацией, т.е. может указать промежуток априорной неопределенности $[R_{\text{н}j}, R_{\text{в}j}]$ такой, что $R_j \in [R_{\text{н}j}, R_{\text{в}j}]$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Тогда набор данных D_j следует пополнить двумя числами $R_{\text{н}j}$ и $R_{\text{в}j}$. (Ясно, что в некоторых случаях $R_{\text{н}j} = 0$, $R_{\text{в}j} = 1$, т.е. априорная информация отсутствует). Выражения для оценок $\hat{\alpha}_j$ и $\hat{\theta}_j$ в этом общем случае имеют следующий вид:

$$\hat{\alpha}_j = \frac{1}{t_0\beta_j} \sum_{i=1}^{u_j} \frac{1}{(u_j-i)!} \cdot \frac{1}{(\omega_{1j}+1)^{i+1}} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{u_j+r_j+1-i} \frac{(u_j+r_j+1-i)!}{(u_j+r_j+1-i-k)!} \cdot \frac{1}{(\omega_j+1)^{k+1}} \times$$
$$\times \left(R_{\text{в}j}^{\omega_j+1} |\ln R_{\text{в}j}|^{u_j+r_j+1-i-k} - R_{\text{н}j}^{\omega_j+1} |\ln R_{\text{н}j}|^{u_j+r_j+1-i-k}\right), \tag{7.53}$$

$$\hat{\theta}_j = \frac{u_j+1}{t_0\beta_j} \sum_{i=0}^{u_j+1} \frac{1}{(u_j+1-i)!} \times$$
$$\times \frac{1}{(\omega_{1j}+1)^{i+1}} \sum_{k=0}^{u_j+r_j+1-i} \frac{(u_j+r_j+1-i)!}{(u_j+r_j+1-i-k)!} \cdot \frac{1}{(\omega_j+1)^{k+1}} \times$$
$$\times \left(R_{\text{в}j}^{\omega_j+1} |\ln R_{\text{в}j}|^{u_j+r_j+1-i-k} - R_{\text{н}j}^{\omega_j+1} |\ln R_{\text{н}j}|^{u_j+r_j+1-i-k}\right), \tag{7.54}$$

$$\beta_j = \sum_{i=0}^{u_j} \frac{1}{(u_j-i)!} \cdot \frac{1}{(\omega_{1j}+1)^{i+1}} \sum_{k=0}^{u_j+r_j-i} \frac{(u_j+r_j-i)!}{(u_j+r_j-i-k)!} \times$$
$$\times \frac{1}{(\omega_j+1)^{k+1}} \left(R_{\text{в}j}^{\omega_j+1} |\ln R_{\text{в}j}|^{u_j+r_j-i-k} -\right.$$
$$\left. - R_{\text{н}j}^{\omega_j+1} |\ln R_{\text{н}j}|^{u_j+r_j-i-k}\right), \tag{7.55}$$

где с помощью ω_{1j} и ω_j обозначены следующие безразмерные статистики: $\omega_{1j} = \mu_j/t_0$, $\omega_j = (\kappa_j + \mu_j)/t_0$, которые имеют смысл соответственно суммарной относительной наработки в j-й серии после момента t_0 и общей суммарной наработки при испытаниях. Ранее полученные выражения (7.50) – (7.52) следуют соответственно из (7.53) – (7.55), если в последних положить $R_{нj} = 0$, $R_{вj} = 1$.

7.3.3. Решение задачи для формы представления данных C. Поскольку содержащаяся в C_j информация относится непосредственно к показателю надежности R_j, мы должны строить эмпирическую байесовскую процедуру, используя в качестве случайного параметра неизвестное значение R_j. Поступим следующим образом: запишем совместную априорную плотность $h(\alpha, \theta)$ в виде

$$h(\alpha, \theta) = h_1(\alpha) h_2(\theta \mid \alpha) = h_1(\alpha) t_0 e^{-(\theta - \alpha) t_0}, \quad 0 \leqslant \alpha < \infty, \ \alpha \leqslant \theta < \infty,$$

считая $h_1(\alpha)$ неизвестной. Воспользовавшись правдоподобием (7.37), с помощью теоремы Байеса перейдем к апостериорной плотности этих параметров:

$$\mathfrak{h}(\alpha, \theta \mid D_j) \backsim \alpha^{r_j} \theta^{u_j} e^{-(\alpha \kappa_j + \theta \mu_j)} h_1(\alpha) e^{-(\theta - \alpha) t_0}. \tag{7.56}$$

Теперь учтем, что неизвестная ВБР $R = R(t_0) = \exp(-\alpha t_0)$ определяется только параметром α. Вследствие этого из совместной плотности $\mathfrak{h}(\alpha, \theta \mid D_j)$ получим маргинальную апостериорную плотность

$$\mathfrak{h}_1(\alpha \mid D_j) = \int_{\alpha}^{\infty} \mathfrak{h}(\alpha, \theta \mid D_j) d\theta \backsim$$

$$\backsim \alpha^{r_j} e^{-\alpha(\kappa_j + \mu_j)} \sum_{i=0}^{u_j} \frac{1}{(u_j - i)!} \cdot \frac{\alpha^{u_j - i}}{(\mu_j + t_0)^{i+1}} h_1(\alpha), \quad 0 \leqslant \alpha < \infty, \tag{7.57}$$

и затем перейдем к апостериорной плотности неизвестной ВБР R, используя зависимость $\alpha(R) = -\ln R / t_0$:

$$\mathfrak{h}_R(x \mid D_j) = \mathfrak{h}(\alpha(x) \mid D_j) \mid \alpha'(x) \mid \backsim [\alpha(x)]^{r_j} e^{-\alpha(x)(\kappa_j + \mu_j)} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{u_j} \frac{1}{(u_j - i)!} \cdot \frac{[\alpha(x)]^{u_j - i}}{(\mu_j + t_0)^{i+1}} \{ h_1(\alpha(x)) \mid \alpha'(x) \mid \}. \tag{7.58}$$

Выражение в фигурных скобках соотношения (7.58) есть по определению маргинальная априорная плотность $h_R(x)$ показателя R, которая по смыслу задачи является неизвестной. После упрощающих преобразований получим

$$\mathfrak{h}_R(x \mid D_j) \backsim h_R(x) x^{\omega_j} \sum_{i=0}^{u_j} \frac{1}{(u_j - i)!} \cdot \frac{|\ln x|^{r_j + u_j - i}}{(\omega_{1j} + 1)^{i+1}}. \tag{7.59}$$

Знание апостериорной плотности (7.59) для N-й серии испытаний с результатами D_N позволяет записать интересующую нас точечную оценку ВБР в виде

$$\hat{R}_э^* = \frac{\sum_{j=1}^{N} n_j \hat{R}_j I_0(\hat{R}_j; r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N})}{\sum_{j=1}^{N} n_j I_0(\hat{R}_j; r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N})},$$

где

$$l_0(x;\ r, u, \omega, \omega_1) = x^{\omega} \sum_{i=0}^{u} \frac{1}{(u-i)!} \cdot \frac{|\ln x|^{r+u-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}} . \tag{7.60}$$

При использовании формулы для $\hat{R}_э^*$ остаются невыясненными два вопроса: что использовать в качестве оценки $\hat{R}_N$ и чем заменить неизвестные объемы выборок n_j, с помощью которых в свое время были найдены оценки $\hat{R}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N-1)$. Отвечая на первый вопрос, мы по-прежнему будем руководствоваться рекомендациями § 7.2 и выберем в качестве оценки $\hat{R}_N$ байесовскую оценку ВБР, найденную по известным данным D_N. Для этого воспользуемся апостериорной плотностью (7.59). Если предположить, что задан промежуток априорной неопределенности $[R_{нN}, R_{вN}]$, то оценки $\hat{R}_N$ и $\sigma_{\hat{R}_N}$ могут быть подсчитаны по формулам, аналогичным (5.73), (5.74):

$$\hat{R}_N = \frac{I_1(\omega_N, \omega_{1N}, r_N + u_N, u_N)}{I_0(\omega_N, \omega_{1N}, r_N + u_N, u_N)} , \tag{7.61}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}_N} = \frac{I_2(\omega_N, \omega_{1N}, r_N + u_N, u_N)}{I_0(\omega_N, \omega_{1N}, r_N + u_N, u_N)} - \hat{R}^2_N, \tag{7.62}$$

где

$$I_m(\omega, \omega_1, n, k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(n-i)!}{(k-i)!} \cdot \frac{1}{(\omega_1+1)^{i+1}} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{(n-i-j)!} \times$$

$$\times \frac{1}{(\omega+m+1)^{j+1}} (R_{вN}^{\omega+m+1} |\ln R_{вN}|^{n-i-j} -$$

$$- R_{нN}^{\omega+m+1} |\ln R_{нN}|^{n-i-j}). \tag{7.63}$$

В более простом случае, когда априорная информация в виде промежутка $[R_{нN}, R_{вN}]$ отсутствует, функция $I_m(\omega, \omega_1, n, k)$ будет иметь более простой вид:

$$I_m(\omega, \omega_1, n, k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(n-i)!}{(k-i)!} \cdot \frac{1}{(\omega_1+1)^{i+1}} \cdot \frac{1}{(\omega+m+1)^{n-i+1}} . \tag{7.64}$$

Расчет оценок $\hat{R}_N$ и $\sigma_{\hat{R}_N}$ в этом случае следует по-прежнему производить с помощью формул (7.61) и (7.62), но использовать для этого функцию (7.64).

Перейдем ко второму вопросу: чем заменить неизвестные объемы выборок n_j? Напомним, что эти величины были введены в общую эмпирическую байесовскую процедуру в качестве весовых коэффициентов, отражающих значимость каждой оценки при аппроксимации апостериорного распределения. Значимость полагалась тем выше, чем больший объем выборки использовался для оценки. Поскольку точность полученной оценки является своего рода эквивалентом объема выборки, в качестве характеристики значимости j-й оценки будем использовать величину

$$\nu_j = \frac{1/\sigma_{\hat{R}_j}}{\dfrac{1}{\sigma_{\hat{R}_1}} + \dfrac{1}{\sigma_{\hat{R}_2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sigma_{\hat{R}_N}}}, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.65}$$

Простым обоснованием этого является тот факт, что для большинства оценок справедливо утверждение $\sigma_{\hat{R}_j} \sim n_j^{-1}$.

Окончательные выражения для эмпирической байесовской оценки ВБР имеют следующий вид:

$$\hat{R}_э^* = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \nu_j \hat{R}_j l_0(\hat{R}_j;\ r_N, r_N, \omega_N, \omega_{1N})}{\sum\limits_{j=1}^{N} \nu_j l_0(\hat{R}_j;\ r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N})}, \tag{7.66}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}_э^*} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \nu_j \hat{R}_j^2 l_0(\hat{R}_j;\ r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N})}{\sum\limits_{j=1}^{N} \nu_j l_0(\hat{R}_j;\ r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N})} - \hat{R}_э^{*2}, \tag{7.67}$$

где функция $l_0(x;\ r, u, \omega, \omega_1)$ задается формулой (7.60).

7.3.4. Сравнительный анализ оценок. Прежде всего ясно, что оценка ВБР, полученная в соответствии со второй схемой, является более общей, так как данные D_j могут быть сведены к данным C_j согласно формулам (7.61) и (7.62) при $N = j$. Использование этого преобразования позволяет также производить оценивание ВБР при смешанной схеме, когда в банке данных содержатся как таблицы D_j, так и данные C_j. Дело в том, что оценка ВБР для какого-либо j-го изделия не всегда может быть получена с помощью данных D_j, для этого может существовать другой источник информации. Таким образом, вторая схема допускает совместную обработку данных по надежности, полученных по различным планам. Отметим еще один важный аспект. При построении процедуры согласно второй схеме существует возможность использования непрерывного приближения априорной плотности $h_R(x)$ с помощью аппроксимации Парзена (7.7). Это в свою очередь позволяет находить нижнюю доверительную границу ВБР согласно уравнению (7.9). Построение способа определения нижней доверительной границы ВБР является дальнейшим развитием предлагаемого метода.

7.3.5. Исследование достоверности оценок ВБР. Достоверность оценки $\hat{R}_э^*$, полученной в соответствии с предложенным методом, исследовалась с помощью статистического моделирования. Последовательно моделировались выборки объемом 20, 40, 60, 80, 100 значений для случайной величины с функцией распределения Вейбулла

$$F(t) = F(t;\ \sigma, \alpha) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\alpha}\right] \tag{7.68}$$

Таблица 7.1

Сравнение эмпирической байесовской оценки ВБР с истинным значением при неоднородных априорных данных

N	$n_N = 20$	$n_N = 40$	$n_N = 60$	$n_N = 80$	$n_N = 100$
$\alpha_N = 1;\ R(t_0) = 0{,}7516$					
2	0,7139	0,7415	0,7328	0,7509	0,7524
4	0,7318	0,7418	0,7240	0,7418	0,7449
6	0,7094	0,7218	0,7443	0,7530	0,7518
8	0,6988	0,7610	0,7415	0,7488	0,7557
$\alpha_N = 2;\ R(t_0) = 0{,}9216$					
2	0,9248	0,9251	0,9230	0,9209	0,9219
4	0,9236	0,9249	0,9235	0,9187	0,9207
6	0,9254	0,9263	0,9224	0,9238	0,9230
8	0,9270	0,9259	0,9244	0,9244	0,9238
$\alpha_N = 3;\ R(t_0) = 0{,}9769$					
2	0,9731	0,9740	0,9779	0,9744	0,9773
4	0,9729	0,9735	0,9735	0,9731	0,9761
6	0,9722	0,9746	0,9760	0,9753	0,9762
8	0,9754	0,9709	0,9722	0,9733	0,9752

Таблица 7.2

Сравнение эмпирической байесовской оценки ВБР с истинным значением при однородных априорных данных

N	$n_N = 20$	$n_N = 40$	$n_N = 60$	$n_N = 80$	$n_N = 100$
$\alpha_N = 1;\ R(t_0) = 0{,}7516$					
2	0,7229	0,7433	0,7324	0,7552	0,7508
4	0,7408	0,7441	0,7380	0,7499	0,7510
6	0,7551	0,7480	0,7421	0,7508	0,7512
8	0,7499	0,7500	0,7498	0,7521	0,7509
$\alpha_N = 2;\ R(t_0) = 0{,}9216$					
2	0,9241	0,9188	0,9234	0,9229	0,9201
4	0,9244	0,9212	0,9231	0,9215	0,9220
6	0,9230	0,9209	0,9212	0,9210	0,9221
8	0,9209	0,9219	0,9208	0,9218	0,9213
$\alpha_N = 3;\ R(t_0) = 0{,}9769$					
2	0,9740	0,9751	0,9788	0,9753	0,9761
4	0,9737	0,9744	0,9760	0,9780	0,9772
6	0,9777	0,9754	0,9774	0,9761	0,9766
8	0,9752	0,9766	0,9772	0,9767	0,9773

при определенном значении параметра формы $\alpha = \alpha_N$. Цензурирование справа осуществлялось случайным числом, имеющим равномерное распределение в промежутке $[k_1\sigma, k_2\sigma]$. С помощью полученных данных образовывалась таблица D_N. Для получения набора данных $C_j = (\hat{R}_j, \sigma_{\hat{R}_j})$, $j = 1, 2, \ldots, N-1$, моделировались аналогичные выборки объемом 40 значений при различных значениях параметра формы α_j. Этот параметр выбирался случайным образом из промежутка $[0{,}8\,\alpha_N, 1{,}2\,\alpha_N]$. Таким образом обеспечивалась вторая схема, как результат преобразований первой, при неоднородных данных $D_1, D_2, \ldots, D_N$. Результаты моделирования при $t_0 = 100$ с, $\sigma = 350$ с, $k_1 = 0{,}75$, $k_2 = 2{,}0$ для различных N представлены в табл. 7.1. Сравнение эмпирической точечной байесовской оценки $\hat{R}_3^*$ с истинным значением ВБР позволяет сделать следующие выводы:

(1) с увеличением объма выборки n_N оценка $\hat{R}_3^*$ приближается к истинному значению ВБР;

(2) при увеличении количества предшествующих данных степень близости оценки $\hat{R}_3^*$ к истинному значению уменьшается.

В табл. 7.2 представлены аналогичные результаты моделирования для случая, когда данные $C_1, C_2, \ldots, C_{N-1}$ образовались с помощью моделирования однородных выборок, т.е. параметр α при моделировании данных $D_1, D_2, \ldots, D_N$ выбирался одним и тем же. Здесь отмечается свойство, противоположное приведенному выше выводу (2): с увеличением N точность воспроизведения истинного значения ВБР увеличивается.

Отмеченные особенности согласуются с качественным представлением о свойствах эмпирических байесовских оценок. В самом деле, в процессе объединения неоднородных данных, поскольку влияние априорной ин-

Таблица 7.3

Сравнение эмпирических байесовских оценок $\hat{R}_3^*$ с байесовскими оценками в отсутствие априорной информации ($N = 0$) для распределения Вейбулла при $\alpha_N = 3$ ($R(t_0) = 0{,}9769$)

N	n_N				
	20	40	60	80	100
	Однородные данные				
0	0,9732	0,9740	0,9753	0,9787	0,9755
2	0,9740	0,9751	0,9788	0,9753	0,9761
4	0,9737	0,9744	0,9760	0,9780	0,9772
	Неоднородные данные				
0	0,9732	0,9740	0,9753	0,9787	0,9755
2	0,9731	0,9740	0,9779	0,9744	0,9773
4	0,9729	0,9749	0,9735	0,9731	0,9761

формации при малых объемах выборки n_N велико, происходит искажение апостериорного распределения. В то же время, если предшествующие данные и D_N однородны, происходит пополнение выборки D_N, что приводит к увеличению точности оценки.

Однако и в первом, и во втором случаях априорная информация позволяет увеличивать точность получения оценок по сравнению с ситуацией, когда оценивание ВБР производится только по выборке D_N. Этот факт иллюстрируется табл. 7.3.

Сделанные выводы подтверждают работоспособность предлагаемого метода эмпирического байесовского оценивания и выигрыш в качестве оценки за счет использования априорных данных.

Теоретическое исследование качества эмпирических байесовских оценок в зависимости от свойств априорных данных затруднено вследствие сложности структуры построения непараметрических оценок. В процессе обширного статистического эксперимента обнаружено, что использование в качестве априорной информации неоднородных порций данных может приводить к смещению эмпирических байесовских оценок. Это смещение уменьшается с увеличением объемов испытаний исследуемого объекта при неизменной структуре данных об испытаниях аналогов.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ИДЕАЛЬНОЙ МОДЕЛИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ

§ 8.1. Постановка и общее решение задачи

В настоящей и последующей главах исследованы методы расчета ВБР технического объекта на основе параметрической модели работоспособности, существо которой заключается в формализации условий нормального (безотказного) функционирования объекта с помощью системы функциональных неравенств вида

$$Z_j(\zeta, t) = \varphi_j(X_1(\zeta, t), \ldots, X_N(\zeta, t)) > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, M, \tag{8.1}$$

где $X_j(\zeta, t)$ – первичная случайная переменная, зависящая от многомерной координаты ζ и времени t, Z_j – переменная состояния, $\varphi_j(\cdot)$ – функция работоспособности. В качестве показателя надежности R в общем случае используется вероятность

$$R = R(\tau) = P\{Z_j(\zeta, t) > 0, \ j = 1, 2, \ldots, M, \ \zeta \in R^k, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau\}. \tag{8.2}$$

Актуальность данного подхода для технических объектов обоснована в многочисленных работах [7, 9, 11, 12, 20, 30, 38]. Результаты, изложенные в главах 8–10, являются дальнейшим развитием традиционных методов оценки ВБР технических объектов в условиях неопределенности относительно исходных данных и самой модели работоспособности.

В настоящей главе будем использовать статический вариант показателя (8.2), рассматривая состояние объекта в фиксированный момент времени t_0 и для фиксированной точки объекта ζ_0 с наиболее опасными условиями функционирования. В реальных практических ситуациях для механических объектов вектор первичных переменных $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ образуют физико-механические характеристики, геометрические параметры и нагрузочные факторы. По этим переменным, как правило, существует весьма достоверная статистическая информация, позволяющая установить плотность распределения $f_X(x; \theta)$ по крайней мере с точностью до вектора параметров θ. На практике часто используют нормальный закон, тогда в качестве вектора параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ используется множество математических ожиданий переменных m_i, средних квадратических отклонений σ_i и коэффициентов корреляции ρ_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, N, i < j)$. Дело в том, что в реальных ситуациях погрешности модели работоспособности (8.1) и исходных данных в виде параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ могут быть настолько большими, что выигрыш в точности определения ВБР за исчет использования более точных (отличных от гауссова) вероятностных распределений не принесет никакого эффекта. Поэтому автором принято другое направление усовершенствования существующих методов – разработка способов оценки ВБР с учетом возможных погрешностей исходных данных и модели работоспособности, используя при этом нормальное распределение для аппроксимации $f_X(x;\ \theta)$. Разумеется, идеальным выходом из существующего положения было бы решение задачи одновременного учета всех перечисленных видов погрешностей. Однако такая задача становится исключительно сложной и громоздкой и выходит за рамки инженерных методов.

В настоящем разделе решается более простая задача оценки ВБР объекта с учетом неопределенности назначения исходных данных в предположении, что модель работоспособности не содержит погрешности. В следующих главах рассмотрена более общая задача, учитывающая оба вида погрешности. Методическую основу решения задачи составляет байесовский подход и принципиальная концепция о том, что результаты эксперимента являются единственной реальной информацией для принятия решения.

В соответствии с видом модели работоспособности (8.1) и общим выражением (8.2) ВБР запишем в виде N-мерного интеграла

$$R = R_X(\theta) = \underset{\left\{\substack{\varphi_j(x) > 0 \\ j = 1,\ 2, \ldots, M}\right\}}{\int \overset{N}{\ldots} \int} f_X(x; \theta)\, dx_1 \ldots dx_N. \tag{8.3}$$

Существует другая возможность определения показателя R. Для этого необходимо, выполнив преобразование $X \to Z$, найти плотность распределения $f_Z(z;\ \vartheta)$ вектора переменных состояния Z, где $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ $\ldots, \vartheta_l)$ – вектор параметров, и далее вычислить M-мерный интеграл

$$R = R_Z(\vartheta) = \int_0^\infty \overset{M}{\ldots} \int_0^\infty f_Z(z;\ \vartheta)\, dz_1 \ldots dz_M. \tag{8.4}$$

Поскольку преобразование $f_X(x;\ \theta) \to f_Z(z;\ \vartheta)$ однозначно, вектор ϑ однозначно определяется вектором θ. Если параметр θ или ϑ задан, то ВБР полностью определяется выражениями (8.3) или (8.4). Мы будем рассматривать задачу оценки ВБР при условии, что значения всех или части параметров неизвестны однозначно; вместо значений параметров θ_i заданы промежутки их неопределенности $[\theta_i',\ \theta_i'']$ или в общем случае известно априорное распределение $h_\theta(\theta)$.

8.1.1. Постановка задачи. Задача определения оценок ВБР решается ниже при следующих предположениях:

(1) модель работоспособности вида (8.1) известна и является идеальной, т.е. не содержит ошибок;

(2) заданы удовлетворительные с позиций инженерной точности приближения для плотностей распределений вероятностей $f_X(x;\ \theta)$ и $f_Z(z;\ \vartheta)$, причем значения параметров θ и ϑ неизвестны;

(3) для вектора параметров θ (или ϑ) задана априорная плотность $h_\theta(\theta)$ (или $h_\vartheta(\vartheta)$);

(4) при испытаниях объекта фиксируются значения первичных переменных, совокупность которых будем обозначать $\underset{\sim}{x} = \{x_{ij}\}$, где $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N$ – номер переменной, $j = 1, 2, \ldots, n$ – номер опыта.

Под термином "фиксируется в опыте" будем понимать следующее: значение параметра может быть измерено в опыте либо заранее полагается, что в опыте параметр примет определенное значение.

Задача заключается в определении точечной байесовской оценки ВБР $\hat{R}^*$, апостериорного среднего квадратического отклонения $\sigma_{\hat{R}^*}$ и байесовской нижней доверительной границы $\underline{R}^*_\gamma$ при заданном уровне доверия γ. Общее решение рассмотрим в двух вариантах: в первом варианте задана априорная плотность $h_\theta(\theta)$ вектора параметров для первичных переменных X, во втором – $h_\vartheta(\vartheta)$ для вектора параметров переменных состояния Z.

8.1.2. Последовательность решения задачи для варианта 1. Исходя из выборки результатов эксперимента $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, запишем функцию правдоподобия для известной плотности $f_X(x;\theta)$. Поскольку данные $\underset{\sim}{x}$ являются нецензурированными,

$$l_X(\theta \mid \underset{\sim}{x}) = \prod_{j=1}^{n} f_X(x_j;\theta). \tag{8.5}$$

В дальнейшем будем следовать традиционной байесовской схеме. Воспользовавшись теоремой Байеса, получим апостериорную плотность параметра θ:

$$\hbar_\theta(\theta \mid \underset{\sim}{x}) \backsim h_\theta(\theta) l_X(\theta \mid \underset{\sim}{x}).$$

Теперь в соответствии со стандартной байесовской схемой может быть найдена точечная оценка

$$\hat{\theta}^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} \{ G(\hat{\theta}) \},$$

где $G(\hat{\theta})$ – функция среднего апостериорного риска. В частности, если выбрана квадратичная функция потерь, то

$$\hat{\theta}_i^* = \int_\Theta \theta_i \hbar_\theta(\theta \mid \underset{\sim}{x}) d\theta, \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{8.6}$$

Заметим, что байесовская оценка $\hat{\theta}^*$ определяется выборкой $\underset{\sim}{x}$, априорной плотностью $h_\theta(\theta)$ и видом распределения $f_X(x;\theta)$. Байесовская оценка ВБР с помощью полученной оценки (8.6) может быть найдена как $\hat{R}^* = R_X(\hat{\theta}^*)$, причем вид данной зависимости устанавливается с помощью интеграла (8.3). Оценка $R_X(\hat{\theta}^*)$, вообще говоря, может быть смещенной. Поэтому более предпочтительной является оценка вида

$$\hat{R}^* = \arg \min_{\hat{R}} \int_\Theta L(R(\theta), \hat{R}) \hbar_\theta(\theta \mid \underset{\sim}{x}) d\theta, \tag{8.7}$$

где $L(R(\theta), \hat{R})$ – функция потерь. Для квадратичной функции потерь имеем

$$\hat{R}^* = \int_\Theta R_X(\theta) \hbar_\theta(\theta \mid \underset{\sim}{x}) d\theta. \tag{8.8}$$

Сопоставляя выражения (8.8) и (8.3), приходим к выводу, что расчет оценки $\hat{R}^*$ связан с вычислением $(N + k)$-мерного интеграла. Погрешность определения оценки (8.8) может быть представлена с помощью апостериорного среднего квадратического отклонения функции $R_X(\theta)$. Рассмотренный подход позволяет получить также байесовскую нижнюю доверительную границу $\underline{R}_\gamma^*$ ВБР при заданном уровне доверия γ. Для этого необходимо решить уравнение

$$\int\limits_{R_X(\theta) \geq \underline{R}_\gamma^*} \mathrm{h}(\theta \mid \underset{\sim}{x})\, d\theta = \gamma. \tag{8.9}$$

8.1.3. Последовательность решения задачи для варианта 2. Пусть задана априорная плотность $h(\vartheta)$ параметров распределения вероятностей переменной состояния $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_M)$. Наличие системы функций работоспособности $\varphi_j(\cdot)$ (см. допущение (1)) позволяет, имея выборку $\underset{\sim}{x}$, получить множество экспериментальных значений переменных состояния $\{z_{ji}\} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ (i – номер опыта, j – номер переменной), причем $z_{ji} = \varphi_j(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, M$. Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны приведенным выше для варианта 1. Так, для апостериорной плотности параметра ϑ будем иметь

$$\mathrm{h}(\vartheta \mid \underset{\sim}{z}) \backsim h(\vartheta) l_Z(\vartheta \mid \underset{\sim}{z}), \tag{8.10}$$

где

$$l_Z(\vartheta \mid \underset{\sim}{z}) = \prod_{i=1}^{n} f_Z(z_i; \theta). \tag{8.11}$$

При нахождении оценок ВБР следует воспользоваться общим интегралом (8.4). Это можно сделать с помощью одного из двух способов: через апостериорную оценку $\hat{\vartheta}^*$ или непосредственно, оценивая функционал $R_Z(\vartheta)$. Для первого способа при квадратичной функции потерь имеем $\hat{R}^* = R_Z(\hat{\vartheta}^*)$, причем

$$\hat{\vartheta}_j^* = \int\limits_{\Theta_Z} \vartheta_j \mathrm{h}(\vartheta \mid \underset{\sim}{z})\, d\vartheta, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

где Θ_Z – область изменения вектора параметров ϑ. Для второго способа

$$\hat{R}^* = \int\limits_{\Theta_Z} R_Z(\vartheta)\, \mathrm{h}(\vartheta \mid \underset{\sim}{z})\, d\vartheta = \int\limits_{\Theta_Z} \mathrm{h}(\vartheta \mid \underset{\sim}{z})\, d\vartheta \int\limits_0^\infty \overset{M}{\ldots} \int\limits_0^\infty f_Z(z; \vartheta)\, dz. \tag{8.12}$$

Выражение для апостериорной дисперсии ВБР, которая служит характеристикой точности определения оценки (8.12), может быть представлено с помощью аналогичного интеграла

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \int\limits_{\Theta_Z} R_Z^2(\vartheta)\, \mathrm{h}(\vartheta \mid \underset{\sim}{z})\, d\vartheta - \hat{R}^{*2}. \tag{8.13}$$

Уравнение для определения байесовской нижней доверительной границы в случае задания априорной плотности $h(\vartheta)$ аналогично уравнению (8.9):

$$\int\limits_{R_Z(\vartheta) \geq \underline{R}_\gamma^*} \mathrm{h}(\vartheta \mid \underset{\sim}{z})\, d\vartheta = \gamma. \tag{8.14}$$

Сравнивая изложенные расчетные варианты, отметим, что отвечающие им оценки совпадают лишь в том случае, когда между $h_0(\theta)$ и $h(\vartheta)$ существует соответствие, адекватно отражающее зависимость $\vartheta = \vartheta(\theta)$. В то же время эти оценки отличны друг от друга, если априорная информация по параметрам θ и ϑ устанавливается независимо, исходя из различных априорных соображений. Вопрос о том, в каком виде ($h_\theta(\theta)$ или $h(\vartheta)$) задавать априорное распределение лучше, по-видимому, не имеет однозначного решения. С одной стороны, поскольку $h_\theta(\theta)$ задает априорное распределение для параметров, характеризующих первичные переменные, разнообразной априорной информации больше, чем для $h(\vartheta)$. С другой стороны, расчетная схема при использовании $h(\vartheta)$ проще, так как размерность вектора ϑ, как правило, существенно меньше размерности вектора θ. Мы предпочтем вторую расчетную схему, предполагая, что априорную плотность $h(\vartheta)$ можно получить с помощью плотности $h_\theta(\theta)$.

В двух последующих параграфах решается задача оценки ВБР технического устройства, модель работоспособности которого представлена одним неравенством вида (8.1) для гауссова распределения переменной состояния. Решение проводится в порядке восхождения от простого к сложному: сначала рассмотрен более простой случай известной дисперсии переменной состояния Z, затем общий случай всех неизвестных параметров.

§ 8.2. Оценки вероятности безотказной работы при известной дисперсии переменной состояния

Пусть ВБР объекта определяется одной переменной состояния, подчиняющейся нормальному закону с плотностью $f_Z(z;\ m_Z, \sigma_Z)$. Тогда в соответствии с общим выражением (8.2) имеем

$$R = R(m_Z, \sigma_Z) = \Phi\left(\frac{m_Z}{\sigma_Z}\right), \tag{8.15}$$

где $\Phi(u)$ – функция Лапласа. Рассматриваемый случай может служить приближенным описанием одномерной модели работоспособности вида $Z = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_N) > 0$, когда используется нормальная аппроксимация распределения вероятностей переменной состояния Z, а параметры m_Z и σ_Z определяются приближенно с помощью одного из методов, описанных в [38]. Например, значения m_Z и σ_Z могут быть приближенно найдены с помощью формул

$$m_Z \cong \varphi(m_X) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N}\sum \frac{\partial^2 \varphi(m_X)}{\partial m_i \partial m_j} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j, \tag{8.16}$$

$$\sigma_Z^2 \cong [\varphi(m_X) - m_Z]^2 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N}\sum \left\{ \frac{\partial \varphi(m_X)}{\partial m_i} \cdot \frac{\partial \varphi(m_X)}{\partial m_j} + \right.$$

$$\left. + [\varphi(m_X) - m_Z] \frac{\partial^2 \varphi(m_X)}{\partial m_i \partial m_j} \right\} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j, \tag{8.17}$$

где $m_X = (m_1, \ldots, m_N)$ – вектор математических ожиданий первичных переменных X, $\sigma_X = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ – вектор средних квадратических отклонений X, $\tilde{\rho}_X = \{\rho_{ij}\}_{N\times N}$ – матрица коэффициентов корреляции вектора X. Совокупность $(m_X, \sigma_X, \tilde{\rho}_X)$ образует вектор параметров θ.

В настоящем параграфе рассматривается частный случай известной дисперсии переменной состояния, т.е. предполагается, что параметр σ_Z задан точно, а относительно m_Z априорно известен промежуток неопределенности $[a_1, a_2]$, на котором задано априорное распределение с плотностью $h(\vartheta)$. В соответствии с ранее введенным обозначением примем $\vartheta = m_Z$. В большинстве практических ситуаций затруднительно обосновать вид плотности $h(\vartheta)$ на промежутке $[a_1, a_2]$. Поэтому, следуя правилу Джеффриса, зададим равномерное априорное распределение

$$h(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leqslant \vartheta \leqslant a_2, \\ 0, \quad \vartheta < a_1, & \vartheta > a_2. \end{cases} \tag{8.18}$$

Теперь, поскольку параметр σ_Z априорно фиксирован, плотность распределения переменной состояния Z запишется в виде

$$f_Z(z; \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Z}\; e^{-(z-\vartheta)^2/(2\sigma_Z^2)}. \tag{8.19}$$

Воспользуемся общей последовательностью, описанной в п. 8.1.3. Сначала найдем функцию правдоподобия. Пусть $\underset{\sim}{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ – выборка результатов независимых испытаний, причем согласно предположениям (1) и (4) $z_i = \varphi(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В соответствии с общим выражением для функции правдоподобия (8.5) получим

$$l(\vartheta \,|\, \underset{\sim}{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_Z^n}\; \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_Z^2}\,(n\nu_2 - 2n\nu_1\vartheta + n\vartheta^2)\right] \backsim$$

$$\backsim \exp\left[-\frac{n}{2\sigma_Z^2}\,(\vartheta^2 - 2\nu_1\vartheta)\right], \tag{8.20}$$

где $\nu_k = (z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k)/n$ – статистический k-й начальный момент. Соотношение (8.20) позволяет записать сопряженную с ядром правдоподобия априорную плотность распределения

$$h(\vartheta) = h(\vartheta; \alpha_1, \alpha_2) \backsim \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_Z^2}\,(\alpha_2\vartheta^2 - \alpha_1\vartheta)\right], \tag{8.21}$$

которая зависит от двух параметров. Используя соотношения (8.20) и (8.21), с помощью теоремы Байеса для апостериорной плотности $\hbar(\vartheta \,|\, \underset{\sim}{z})$ получим

$$\hbar(\vartheta \,|\, \underset{\sim}{z}) \backsim \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_Z^2}\,(\alpha_2'\vartheta^2 - \alpha_1'\vartheta)\right], \tag{8.22}$$

где $\alpha_1' = \alpha_1 - 2\nu_1 n$, $\alpha_2' = \alpha_2 + n$. Если задаться промежутком априорной неопределенности $[a_1, a_2]$ и положить $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то априорная плотность (8.21) преобразуется в равномерную (8.18), которой будет соответствовать апостериорная плотность

$$\text{ћ}(\vartheta \mid \underset{\sim}{z}) \backsim \exp\left[-\frac{n}{2\sigma_Z^2}\ (\vartheta^2 - 2\nu_1\vartheta)\right], \quad a_1 \leqslant \vartheta \leqslant a_2. \tag{8.23}$$

Из полученных апостериорных распределений (8.22) и (8.23) при проведении практических расчетов предпочтение, по-видимому, следует отдать последнему, так как выбор параметров α_1 и α_2 может вызвать серьезные затруднения.

Байесовскую апостериорную оценку $\hat{\vartheta}^*$ определим как апостериорное математическое ожидание. Конечное выражение получается в результате весьма громоздких преобразований и имеет вид

$$\hat{\vartheta}^* = \nu_1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}} \cdot \frac{e^{-u_1^2/2} - e^{-u_2^2/2}}{\Phi(u_2) - \Phi(u_1)}, \tag{8.24}$$

где $u_k = (a_k - \nu_1)\sqrt{n}/\sigma_Z$, $k = 1, 2$.

Исследуем полученную оценку. Прежде всего при $n \to \infty$ имеем $\hat{\vartheta}^* \to \nu_1$, т.е. байесовская оценка асимптотически сходится к оценке максимального правдоподобия. Рассмотрим симметричный априорный промежуток $[\vartheta_0 - u,\ \vartheta_0 + u]$, где ϑ_0 – центр промежутка. В этом случае $u_1 = (\vartheta_0 - u - \nu_1)\sqrt{n}/\sigma_Z$, $u_2 = (\vartheta_0 + u - \nu_1)\sqrt{n}/\sigma_Z$. Если выборочное среднее ν_1 близко к ϑ_0, т.е. результаты эксперимента хорошо согласуются с априорными представлениями, то $|u_1| \cong |u_2|$ и $\hat{\vartheta}^* \cong \nu_1$. Пусть теперь $u \to \infty$, что соответствует случаю отсутствия априорной информации о параметре ϑ. Тогда при любом n имеем $|u_k| \to \infty$, и поэтому $\hat{\vartheta}^* \to \nu_1$, т.е. байесовская оценка в асимптотике опять совпадает с выборочным средним.

Определим апостериорную дисперсию параметра ϑ. Для этого, исходя из апостериорной плотности (8.23), запишем

$$\sigma^2_{\hat{\vartheta}^*} = \int_\Theta \vartheta^2 \text{ћ}(\vartheta \mid \underset{\sim}{z})\, d\vartheta - \hat{\vartheta}^{*2}.$$

После проведения необходимых вычислений окончательно будем иметь

$$\sigma^2_{\hat{\vartheta}^*} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\Phi(u_2) - \Phi(u_1)} \left\{ \sqrt{2\pi}\left(\nu_1^2 + \frac{\sigma_Z^2}{n}\right)[\Phi(u_2) - \Phi(u_1)] + \right.$$

$$\left. + 2\nu_1 \frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}} (e^{-u_1^2/2} - e^{-u_2^2/2}) + \frac{\sigma_Z^2}{n} (u_1 e^{-u_1^2/2} - u_2 e^{-u_2^2/2}) \right\}. \tag{8.25}$$

Предельный переход при $n \to \infty$ позволяет установить, что $\sigma_{\hat{\vartheta}^*} \to 0$.

Приближенные точечная оценка ВБР и апостериорная дисперсия этой оценки могут быть найдены с помощью теоремы Крамера [27], в соответствии с которой

$$\begin{aligned} \hat{R}^* &= \Phi\left(\frac{\hat{\vartheta}^*}{\sigma_Z}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \sigma^2_{\hat{R}^*} &= \frac{1}{2\pi\sigma_Z^2} \exp\left(-\frac{\hat{\vartheta}^{*2}}{\sigma_Z^2}\right) \sigma^2_{\hat{\vartheta}^*} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \end{aligned} \tag{8.26}$$

При практическом использовании зависимостей (8.26) следует отбросить члены $O(1/n)$ и $O(1/n^{3/2})$, что, вообще говоря, можно сделать только при больших n.

Оценки ВБР могут быть получены точно путем использования общих выражений (8.12)–(8.14). Конечные выражения для $\hat{R}^*$ и $\sigma^2_{\hat{R}^*}$ имеют вид

$$\hat{R}^* = \frac{U_1}{\Phi(u_2) - \Phi(u_1)}, \qquad \sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{U_2}{\Phi(u_2) - \Phi(u_1)} - \hat{R}^{*2}, \tag{8.27}$$

где

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_1}^{u_2} \Phi^k\left(\frac{u}{\sqrt{n}} + \frac{\nu_1}{\sigma_Z}\right) e^{-u^2/2}\, du.$$

Очевидным недостатком общей расчетной схемы является непредставимость интегралов U_1 и U_2 в конечном виде и, следовательно, необходимость использования методов численного интегрирования. Многочисленные расчеты показали практическое совпадение точных и приближенных формул при $n \geqslant 20$.

Рассмотрим теперь задачу определения байесовской нижней доверительной границы ВБР. Принципиально задача сводится к решению уравнения (8.14) для апостериорной плотности вида (8.23). Однако вследствие монотонности функции Лапласа ее решение можно свести к следующей более простой процедуре. Определим байесовскую нижнюю доверительную границу $\underline{\vartheta}_\gamma$ параметра ϑ. Для этого достаточно решить уравнение

$$\int_{\underline{\vartheta}_\gamma}^{a_2} \hbar(\vartheta \mid \underset{\sim}{z})\, d\vartheta - \gamma = 0,$$

которое в конечном виде записывается следующим образом:

$$\Phi(u_2)(1-\gamma) + \gamma\Phi(u_1) - \Phi\left(\frac{\underline{\vartheta}_\gamma - \nu_1}{\sigma_Z/\sqrt{n}}\right) = 0. \tag{8.28}$$

Теперь искомая оценка может быть получена с помощью простой формулы

$$\underline{R}^*_\gamma = \Phi\left(\frac{\underline{\vartheta}_\gamma}{\sigma_Z}\right). \tag{8.29}$$

§ 8.3. Общие оценки вероятности безотказной работы для одномерной модели работоспособности

8.3.1. Формулировка задачи. В настоящем параграфе проведено обобщение предыдущего результата на случай, когда информация о параметрах m_Z и σ_Z носит неопределенный характер. В соответствии с принятыми в разделе обозначениями положим $\vartheta_1 = m_Z$, $\vartheta_2 = \sigma_Z$ и представим каждый параметр в виде суммы $\vartheta_k = \vartheta_{k0} + \epsilon_k$, $k = 1, 2$, где ϑ_{k0} имеет смысл некоторого теоретического значения параметра, которое в байесовской процедуре считается заданным, ϵ_k – неопределенные в байесовском смысле отклонения от теоретического значения. Будем считать, что заданы априорные плотности распределения $h_1(\epsilon_1)$ и $h_2(\epsilon_2)$. Для целей практического применения рассматриваемой процедуры полезным является использование равномерных априорных распределений:

$$h_k(\epsilon_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon_k'' - \epsilon_k'}, & \epsilon_k' \leqslant \epsilon_k \leqslant \epsilon_k'', \\ 0, \quad \epsilon_k < \epsilon_k', & \epsilon_k > \epsilon_k''. \end{cases} \tag{8.30}$$

Задача байесовского оценивания ВБР может быть сформулирована следующим образом. ВБР представляется в виде функции от введенных величин ϵ_1 и ϵ_2:

$$R = R(\epsilon_1,\ \epsilon_2) = \Phi\left(\frac{\vartheta_{10} + \epsilon_1}{\vartheta_{20} + \epsilon_2}\right). \tag{8.31}$$

Относительно параметров ϵ_1 и ϵ_2 задана априорная информация в виде совместной априорной плотности распределения $h(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Проведено n опытов, в ходе которых прямо или косвенно определяются значения переменной состояния Z. Эти значения образуют выборку $\underset{\sim}{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Задача заключается в определении байесовских оценок ВБР в виде точечной оценки $\hat{R}^*$, апостериорного среднего квадратического отклонения $\sigma_{\hat{R}^*}$ и байесовской нижней доверительной границы $\underline{R}_\gamma^*$. Для решения задачи используем традиционную байесовскую процедуру.

Запишем функцию правдоподобия $l(\epsilon_1, \epsilon_2 \mid \underset{\sim}{z})$. В соответствии с принятой параметризацией плотность распределения переменной состояния имеет вид

$$f(z; \epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\vartheta_{20} + \epsilon_2)} \exp\left[-\frac{(z - \vartheta_{10} - \epsilon_1)^2}{2(\vartheta_{20} + \epsilon_2)^2}\right]. \tag{8.32}$$

Воспользовавшись общим выражением (8.11), получим

$$l(\epsilon_1, \epsilon_2 \mid \underset{\sim}{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{(\vartheta_{20} + \epsilon_2)^n} \exp\left\{-\frac{n}{2(\vartheta_{20} + \epsilon_2)^2}[\nu_2 - \right.$$

$$\left. - 2\nu_1(\vartheta_{10} + \epsilon_1) + (\vartheta_{10} + \epsilon_1)^2]\right\}. \tag{8.33}$$

Для получения оценок ВБР будем основываться на априорных распределениях $h_1(\epsilon_1)$ и $h_2(\epsilon_2)$ вида (8.30), т.е. будем полагать, что множество $\mathrm{E} = [\epsilon_1', \epsilon_1''] \times [\epsilon_2', \epsilon_2'']$ является областью неопределенности параметров ϵ_1 и ϵ_2. Для апостериорной плотности параметров ϵ_1 и ϵ_2 согласно теореме Байеса справедливо соотношение

$$\mathrm{h}(\epsilon_1, \epsilon_2 \mid \underset{\sim}{z}) \backsim \frac{1}{(\vartheta_{20} + \epsilon_2)^n} \exp\left[-\frac{\nu_2 - 2\nu_1(\vartheta_{10} + \epsilon_1) + (\vartheta_{10} + \epsilon_1)^2}{2(\vartheta_{20} + \epsilon_2)^2/n}\right],$$

$$(\epsilon_1,\ \epsilon_2) \in \mathrm{E}. \tag{8.34}$$

Будем различать упрощенную и основную схемы решения задачи. Выбор схемы связан с видом функции потерь, применяемой в байесовской процедуре. В соответствии с упрощенной схемой функцию потерь выбираем по каждому параметру в отдельности. Основная схема (более громоздкая) предполагает использование функции потерь для ВБР $R(\epsilon_1, \epsilon_2)$.

8.3.2. *Упрощенная схема решения* предполагает первоначальный поиск оценок параметров ϵ_1 и ϵ_2, с помощью которых определяются оценки ВБР. Оценку каждого из параметров будем проводить, минимизируя функцию апостериорного риска для квадратичных потерь, т.е.

$$\hat{\epsilon}_j^* = \arg\min_{\hat{\epsilon}_j} \int_{\epsilon_j'}^{\epsilon_j''} (\epsilon_j - \hat{\epsilon}_j)^2\, \hbar_j(\epsilon_j \,|\, \underset{\sim}{z})\, d\epsilon_j, \qquad j = 1, 2, \tag{8.35}$$

где маргинальные апостериорные плотности получаются из совместной известным способом:

$$\hbar_1(\epsilon_1 \,|\, \underset{\sim}{z}) \backsim \int_{\epsilon_2'}^{\epsilon_2''} \hbar(\epsilon_1, \epsilon_2 \,|\, \underset{\sim}{z})\, d\epsilon_2, \qquad \epsilon_1' \leqslant \epsilon_1 \leqslant \epsilon_1'', \tag{8.36}$$

$$\hbar_2(\epsilon_2 \,|\, \underset{\sim}{z}) \backsim \int_{\epsilon_1'}^{\epsilon_1''} \hbar(\epsilon_1, \epsilon_2 \,|\, \underset{\sim}{z})\, d\epsilon_1, \qquad \epsilon_2' \leqslant \epsilon_2 \leqslant \epsilon_2''. \tag{8.37}$$

Решение задачи (8.35), как известно [44], следующее:

$$\hat{\epsilon}_j^* = \int_{\epsilon_j'}^{\epsilon_j''} \epsilon_j \hbar(\epsilon_j \,|\, \underset{\sim}{z})\, d\epsilon_j, \qquad j = 1, 2. \tag{8.38}$$

Громоздкий вид соотношения (8.34) не позволяет надеяться на простые конечные результаты. Дело в том, что ядро апостериорной плотности $\hbar(\epsilon_1, \epsilon_2 \,|\, \underset{\sim}{z})$, задаваемое правой частью соотношения (8.34), не удается в конечном виде проинтегрировать ни по одному из параметров. Использование функции Лапласа $\Phi(u)$ позволяет свести окончательные выражения для оценок $\hat{\epsilon}_j^*$ к одномерным интегралам и представить в виде

$$\hat{\epsilon}_1^* = \frac{1}{\beta} \int_{\vartheta_2'}^{\vartheta_2''} \frac{1}{y^{n-1}} \exp\left[-\frac{n(\nu_2 - \nu_1^2)}{2y^2} \right] \Big\{ [\Phi(u_2(y)) - \Phi(u_1(y))] \times$$
$$\times (\nu_1 - \vartheta_{10}) + \frac{y}{\sqrt{2\pi n}} \left[\exp\left(-\frac{u_1^2(y)}{2} \right) - \exp\left(-\frac{u_2^2(y)}{2} \right) \right] \Big\} dy, \tag{8.39}$$

$$\hat{\epsilon}_2^* = \frac{1}{\beta} \int_{\vartheta_2'}^{\vartheta_2''} \frac{y - \vartheta_{20}}{y^{n-1}} \exp\left[-\frac{n(\nu_2 - \nu_1^2)}{2y^2} \right] [\Phi(u_2(y)) - \Phi(u_1(y))]\, dy, \tag{8.40}$$

где

$$\beta = \int_{\vartheta_2'}^{\vartheta_2''} \frac{1}{y^{n-1}} \exp\left[-\frac{n(\nu_2 - \nu_1^2)}{2y^2} \right] [\Phi(u_2(y)) - \Phi(u_1(y))]\, dy, \tag{8.41}$$

$$\vartheta_2' = \vartheta_{20} + \epsilon_2', \qquad \vartheta_2'' = \vartheta_{20} + \epsilon_2'',$$

$$u_1(y) = \frac{\sqrt{n}}{y}(\vartheta_{10} + \epsilon_1' - \nu_1), \qquad u_2(y) = \frac{\sqrt{n}}{y}(\vartheta_{10} + \epsilon_1'' - \nu_1).$$

Анализируя выражение (8.39), замечаем, что при $\nu_1 = \vartheta_{10}$ байесовская оценка $\hat{\epsilon}_1^*$ равна нулю. Этот факт имеет логическое объяснение. В самом деле, если выборочное среднее ν_1 совпадает с предполагаемым теоретическим значением математического ожидания m_z (центром промежутка априорной неопределенности), то значение поправки, роль которой играет ϵ_1, должно равняться нулю.

Определим теперь апостериорные дисперсии $\sigma^2_{\hat{\epsilon}_1^*}$ и $\sigma^2_{\hat{\epsilon}_2^*}$ соответственно параметров ϵ_1 и ϵ_2. Воспользуемся общим выражением

$$\sigma^2_{\hat{\epsilon}_j^*} = \iint\limits_{E} \epsilon_j^2 \mathrm{h}(\epsilon_1, \epsilon_2 \mid \underset{\sim}{z}) d\epsilon_1 d\epsilon_2 - \hat{\epsilon}_j^{*2}, \quad j = 1, 2.$$

Конечные формулы для искомых дисперсий также удается записать с помощью одномерных интегралов, которые имеют весьма громоздкий вид:

$$\sigma^2_{\hat{\epsilon}_1^*} = \frac{1}{\beta} \int\limits_{\vartheta_2'}^{\vartheta_2''} \frac{1}{y^{n-1}} \exp\left[-\frac{n(\nu_2 - \nu_1^2)}{2y^2}\right] \left\{ \left[(\nu_1 - \vartheta_{10})^2 + \frac{y^2}{n}\right] \times \right.$$

$$\times [\Phi(u_2(y)) - \Phi(u_1(y))] + \frac{\sqrt{2}\,y}{\sqrt{\pi n}} (\nu_1 - \vartheta_{10}) \left[\exp\left(-\frac{u_1^2(y)}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{u_2^2(y)}{2}\right)\right] + \left.\left[u_1(y) \exp\left(-\frac{u_1^2(y)}{2}\right) - u_2(y) \exp\left(-\frac{u_2^2(y)}{2}\right)\right]\right\} dy - \hat{\epsilon}_1^{*2}, \tag{8.42}$$

$$\sigma^2_{\hat{\epsilon}_2^*} = \frac{1}{\beta} \int\limits_{\vartheta_2'}^{\vartheta_2''} \frac{(y - \vartheta_{20})^2}{y^{n-1}} \exp\left[-\frac{n(\nu_2 - \nu_1^2)}{2y^2}\right] [\Phi(u_2(y)) - \Phi(u_1(y))]\, dy - \hat{\epsilon}_2^{*2}. \tag{8.43}$$

Конечной целью рассматриваемой процедуры является получение точечной байесовской оценки ВБР и апостериорной дисперсии ВБР $\sigma^2_{\hat{R}^*}$. Будем использовать упомянутую в § 8.2 теорему Крамера для функции статистических оценок. Применительно к данному случаю эта теорема дает

$$\hat{R}^* = \Phi\left(\frac{\vartheta_{10} + \hat{\epsilon}_1^*}{\vartheta_{20} + \hat{\epsilon}_2^*}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{8.44}$$

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \frac{1}{2\pi(\vartheta_{20} + \hat{\epsilon}_2^*)} \exp\left[-\left(\frac{\vartheta_{10} + \hat{\epsilon}_1^*}{\vartheta_{20} + \hat{\epsilon}_2^*}\right)^2\right] \left\{ \sigma^2_{\hat{\epsilon}_1^*} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\vartheta_{10} + \hat{\epsilon}_1^*}{\vartheta_{20} + \hat{\epsilon}_2^*}\right) \sigma^2_{\hat{\epsilon}_2^*} - 2\, \frac{\vartheta_{10} + \hat{\epsilon}_1^*}{(\vartheta_{20} + \hat{\epsilon}_2^*)^2} K_{\epsilon_1 \epsilon_2} \right\} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \tag{8.45}$$

где $K_{\epsilon_1 \epsilon_2}$ – апостериорный корреляционный момент между случайными величинами ϵ_1 и ϵ_2. Эту числовую характеристику определяет интеграл

$$K_{\epsilon_1 \epsilon_2} = \iint\limits_{E} \epsilon_1 \epsilon_2 \mathrm{h}(\epsilon_1, \epsilon_2 \mid \underset{\sim}{z}) d\epsilon_1 d\epsilon_2 - \hat{\epsilon}_1^* \hat{\epsilon}_2^*.$$

В конечном итоге выражение для $K_{\epsilon_1 \epsilon_2}$ имеет вид

$$K_{\epsilon_1 \epsilon_2} = \frac{1}{\beta} \int\limits_{\vartheta_2'}^{v_2''} \frac{y - \vartheta_{20}}{y^{n-1}} \exp\left[- \frac{n(\nu_2 - \nu_1^2)}{2y^2} \right] \Big\{ [\Phi(u_2(y)) -$$

$$- \Phi(u_1(y))] (\nu_1 - \vartheta_{10}) + \frac{y}{\sqrt{2\pi n}} \left[\exp\left(- \frac{u_1^2(y)}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(- \frac{u_2^2(y)}{2} \right) \right] \Big\} dy - \hat{\epsilon}_1^* \hat{\epsilon}_2^* . \qquad (8.46)$$

Таким образом, определение оценок $\hat{R}^*$ и $\sigma^2_{\hat{R}^*}$ предполагает нахождение численными методами шести одномерных интегралов, задаваемых выражениями (8.39)–(8.43), (8.46), и последующее использование конечных соотношений (8.44), (8.45). Значение байесовской нижней доверительной границы может быть найдено приближенно, путем аппроксимации апостериорного распределения ВБР бета-распределением Be(a, b) с параметрами

$$a = \hat{R}^* \left[\frac{\hat{R}^*(1 - \hat{R}^*)}{\sigma^2_{\hat{R}^*}} - 1 \right], \qquad b = (1 - \hat{R}^*) \left[\frac{\hat{R}^*(1 - \hat{R}^*)}{\sigma^2_{\hat{R}^*}} - 1 \right].$$

В дальнейшем нужно либо решить трансцендентное уравнение

$$\int\limits_0^{\underline{R}^*_\gamma} x^{a-1} (1 - x)^{b-1} dx = (1 - \gamma) B(a, b),$$

либо воспользоваться конечным выражением

$$\underline{R}^*_\gamma = \left(1 + \frac{b}{a} F_{1-\gamma; 2b; 2a} \right)^{-1},$$

где $F_{\alpha; \delta_1, \delta_2}$ – α-я процентиль F-распределения с δ_1 и δ_2 степенями свободы.

Отметим, что описанная выше вычислительная процедура не представляет особых затруднений, так как численные машинные методы одномерного интегрирования и решения трансцендентных уравнений развиты достаточно хорошо.

8.3.3. *Основная расчетная схема* предполагает использование квадратичной функции потерь $L(\hat{R}, R) = [R(\epsilon_1, \epsilon_2) - \hat{R}]^2$, что приводит к байесовской оценке ВБР вида

$$\hat{R}^* = \iint\limits_E R(\epsilon_1, \epsilon_2) \mathrm{h}(\epsilon_1, \epsilon_2 \mid \underset{\sim}{z}) d\epsilon_1 d\epsilon_2 .$$

Наиболее удобным в вычислительном отношении является следующее представление этого интеграла:

$$\hat{R}^* = \left(\frac{n}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\beta} \int\limits_{\vartheta_1'}^{\vartheta_1''} \int\limits_{\vartheta_2'}^{\vartheta_2''} \Phi\left(\frac{x}{y} \right) \frac{1}{y^n} \exp\left(- \frac{\nu_2 - 2\nu_1 x + x^2}{2y^2/n} \right) dx\, dy, \qquad (8.47)$$

где $\vartheta_k' = \vartheta_{k0} + \epsilon_k'$, $\vartheta_k'' = \vartheta_{k0} + \epsilon_k''$, $k = 1, 2$. Апостериорная дисперсия определяется с помощью аналогичного интеграла

$$\sigma^2_{\hat{R}^*} = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\beta} \int_{\vartheta'_1}^{\vartheta''_1} \int_{\vartheta'_2}^{\vartheta''_2} \Phi^2\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{y^n} \exp\left(-\frac{\nu_2 - 2\nu_1 x + x^2}{2y^2/n}\right) dx\, dy - \hat{R}^{*2}. \tag{8.48}$$

Как видно из выражений (8.47), (8.48), для вычисления байесовских оценок не удается избежать применения двойного численного интегрирования. Обнадеживает тот факт, что промежутки интегрирования $[\vartheta'_1, \vartheta''_1]$ и $[\vartheta'_2, \vartheta''_2]$ в практических ситуациях малы, а подынтегральная функция изменяется внутри этих промежутков достаточно плавно. Это дает основание применить простейший метод численного интегрирования по прямоугольной решетке. В случае больших промежутков следует прибегнуть к более сложным кубатурным формулам.

При определении байесовской нижней доверительной границы ВБР приходится столкнуться с еще большими вычислительными трудностями. Определение $\underline{R}^*_\gamma$ предполагает решение следующего уравнения:

$$\iint_{\Omega(\underline{R}^*_\gamma)} \hbar(\epsilon_1, \epsilon_2 \mid z) d\epsilon_1 d\epsilon_2 - \gamma = 0, \tag{8.49}$$

где область интегрирования $\Omega(\underline{R}^*_\gamma)$ является пересечением множества $E = [\epsilon'_1, \epsilon''_1] \times [\epsilon'_2, \epsilon''_2]$ с множеством значений параметров ϵ_1 и ϵ_2, для которых выполняется неравенство $R(\epsilon_1, \epsilon_2) \geqslant \underline{R}^*_\gamma$, т.е. $\underline{R}^*_\gamma$ входит в область интегрирования. С помощью новых переменных $x = \vartheta_{10} + \epsilon_1$ и $y = \vartheta_{20} + \epsilon_2$ уравнение (8.49) преобразуется к виду

$$\iint_{\Omega(\underline{R}^*_\gamma)} \frac{1}{y^n} \exp\left(-\frac{\nu_2 - 2\nu_1 x + x^2}{2y^2/n}\right) dx\,dy - \gamma\beta = 0. \tag{8.50}$$

Идея решения уравнения (8.50) состоит в использовании одного из

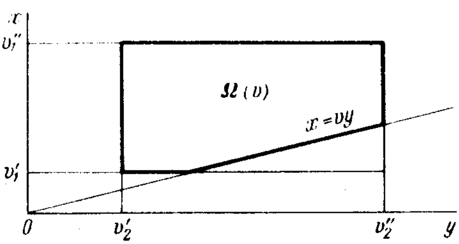


Рис. 8.1. Область интегрирования для решения уравнения (8.51)

стандартных численных методов решения уравнений вида $F(u) = 0$, причем для каждого значения u вычисление интеграла производится не по всему прямоугольнику $[\vartheta'_1, \vartheta''_1] \times [\vartheta'_2, \vartheta''_2]$, а только по той его части, для которой выполняется условие $\Phi(x/y) \geqslant u$. Учитывая монотонность функции Лапласа, прибегнем к следующему упрощению. Вместо уравнения (8.50) будем решать уравнение относительно квантили нормального распределения $v = \Phi^{-1}(\underline{R}^*_\gamma)$, которая соответствует неизвестной вероятности $\underline{R}^*_\gamma$. Поскольку из неравенства $\Phi(x/y) \geqslant \Phi(v)$ вытекает, что $x/y \geqslant v$, уравнение (8.50) будет равносильно следующему:

$$\iint\limits_{\Omega(v)} \frac{1}{y^n} \exp\left(-\frac{v_2 - 2v_1 x + x^2}{2y^2/n}\right) dx\,dy - \gamma\beta = 0, \tag{8.51}$$

в котором область $\Omega(v)$ является пересечением прямоугольника $[\vartheta_1', \vartheta_1''] \times [\vartheta_2', \vartheta_2'']$ и области значений x и y, удовлетворяющей неравенству $x \geqslant vy$ (рис. 8.1). Теперь уравнение (8.51) формально можно представить в виде $F(v) = 0$ и решить одним из стандартных методов. Следует лишь учесть, что неизвестное значение v содержится в промежутке $[\vartheta_1'/\vartheta_2'', \vartheta_1''/\vartheta_2']$, в чем нетрудно убедиться непосредственно из рис. 8.1. После решения уравнения (8.51) искомая оценка $\underline{R}_\gamma^*$ определится с помощью формулы $\underline{R}_\gamma^* = \Phi(v)$.

§ 8.4. Примеры расчета оценок вероятности безотказной работы

В настоящем параграфе изложены примеры, иллюстрирующие особенности байесовских процедур оценивания ВБР при неопределенных исходных данных.

8.4.1. Расчет оценок ВБР несущей конструкции. Рассмотрим стержневую конструкцию, изображенную на рис. 8.2. Эта конструкция выбрана по той

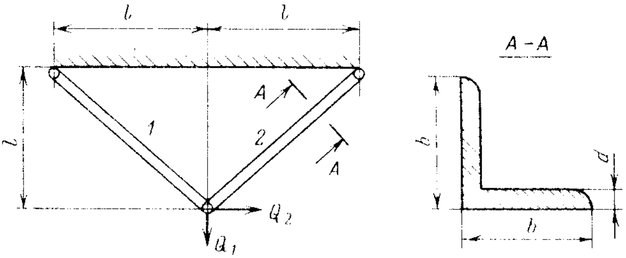


Рис. 8.2. Элемент конструкции, подверженный статическому нагружению

причине, что ее модель работоспособности ввиду простоты, по-видимому, не содержит погрешности. Оба стержня имеют уголковый профиль по ГОСТ 8509-72 (№ 5) и изготовлены из стали 45Х. Соотношение действующих сил таково, что первый стержень испытывает растяжение, второй – сжатие. Система условий работоспособности включает [6]:

условие прочности стержня *1*:

$$Z_1 = \varphi_1(\sigma_\text{т}, F_1, Q_1, Q_2) = \sigma_\text{т} F_1 - \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}} > 0; \tag{8.52}$$

условие сохранения общей устойчивости стержня *2*:

$$Z_2 = \varphi_2(l, E_2, J_2, Q_1, Q_2) = \frac{\pi^2 E_2 J_2}{l^2} - \frac{Q_2 - Q_1}{\sqrt{2}} > 0; \tag{8.53}$$

Таблица 8.1

Исходные данные для расчета проектной оценки ВБР

Первичная переменная X_i	Q_1, Н	Q_2, Н	$F_1 = F_2$, м^2	J_2, м^4	E_2, Н/м^2	μ_2	d_2, м	b_2, м	l, м	$\sigma_т$, Н/м^2
Математическое ожидание m_i	$6{,}5 \cdot 10^4$	$2{,}7 \cdot 10^5$	$4{,}8 \cdot 10^{-4}$	$1{,}12 \cdot 10^{-7}$	$2{,}06 \cdot 10^{11}$	0,26	$5 \cdot 10^{-3}$	$4{,}5 \cdot 10^{-2}$	1	$8{,}34 \cdot 10^8$
Среднее квадратическое отклонение σ_i	$0{,}975 \cdot 10^4$	$4{,}05 \cdot 10^4$	$2{,}4 \cdot 10^{-5}$	$5{,}6 \cdot 10^{-9}$	$2{,}06 \cdot 10^{10}$	0,026	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$2{,}25 \cdot 10^{-3}$	0,05	$8{,}34 \cdot 10^7$

условие сохранения местной устойчивости стержня 2:

$$Z_3 = \varphi_3(E_2, \mu_2, d_2, b_2, F_2, Q_1, Q_2) = $$
$$= \frac{3{,}6 \cdot E_2 F_2}{12 \cdot (1 - \mu_2^2)} \left(\frac{d_2}{b_2}\right)^2 - \frac{Q_2 - Q_1}{\sqrt{2}} > 0. \qquad (8.54)$$

В неравенствах (8.52)–(8.54) приняты следующие обозначения: F – площадь поперечного сечения, J – момент инерции поперечного сечения, μ – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости, $\sigma_т$ – предел текучести материала, индексы 1 и 2 соответствуют номерам стержней. Расчет проектного (априорного) значения ВБР производился с помощью формулы (8.15), причем числовые характеристики m_Z и σ_Z были найдены в соответствии с выражениями (8.16) и (8.17). Исходные данные, принятые для расчета надежности конструкции, содержатся в табл. 8.1. Аргументы функций работоспособности и переменные состояния полагались независимыми. Результаты расчета ВБР помещены в табл. 8.2. ВБР всей конструкции как произведение вероятностей выполнения каждого условия работоспособности составила $R_c = 0{,}9628$.

Оценки ВБР при заданных дисперсиях переменных состояния определялись с помощью методики § 8.2. При получении байесовских оценок вероятностей выполнения каждого условия в качестве единственного параметра ϑ использовалось математическое ожидание соответствующей переменной состояния. Была принята следующая априорная информация:

для первого условия

$\vartheta \in [1{,}58 \cdot 10^5\,Н,\ 1{,}68 \cdot 10^5\,Н]$, $\quad \sigma_Z = 0{,}536 \cdot 10^5\,Н$;

для второго условия

$\vartheta \in [0{,}880 \cdot 10^5\,Н,\ 0{,}885 \cdot 10^5\,Н]$, $\quad \sigma_Z = 0{,}451 \cdot 10^5\,Н$;

для третьего условия

$\vartheta \in [2{,}35 \cdot 10^5\,Н,\ 2{,}61 \cdot 10^5\,Н]$, $\quad \sigma_Z = 0{,}738 \cdot 10^5\,Н$.

В процессе 12 независимых испытаний измерялись значения аргументов функций работоспособности, по которым определялась статистика ν_1. Результаты эксперимента в виде достаточной статистики ν_1 по каждой переменной состояния помещены в табл. 8.3. Были выполнены два расчета. Первый соответствовал приближенной методике, основанной на формулах (8.24)–(8.26). Результаты расчета помещены в табл. 8.3. Оценки байесовских нижних доверительных границ для вероятностей выполнения каждого условия работоспособности определялись с помощью аппроксимации апостериорных распределений бета-распределениями. Второй вариант расчета следовал точным интегральным соотношениям (8.27)–(8.29). Численное интегрирование и решение трансцендентного уравнения (8.28) производились соответственно с помощью подпрограмм QUANC8 и ZEROIN, взятых из [65]. Результаты расчета содержатся в табл. 8.4. Как следует из сравнения помещенных в табл. 8.3 и 8.4 данных, методики приближенного и точного оценивания дают практически одинаковые результаты. Расчет нижней доверительной границы ВБР всей конструкции производился с помощью подхода, предложенного в [59]. В результате получена оценка $R^*_{0,9} = 0{,}9630$.

Таблица 8.2

Результаты расчета проектной оценки ВБР

Номер условия работоспособности	m_{z_j}, Н	σ_{z_j}, Н	R_j
1	$1{,}64 \cdot 10^5$	$0{,}536 \cdot 10^5$	0,9990
2	$0{,}828 \cdot 10^5$	$0{,}451 \cdot 10^5$	0,9641
3	$2{,}48 \cdot 10^5$	$0{,}738 \cdot 10^5$	0,9997

Таблица 8.3

Байесовские оценки ВБР при известной дисперсии (приближенная методика)

Номер условия работоспособности j	Значение статистики ν_1, Н	$\hat{R}_j^*$	$\sigma_{\hat{R}_j^*}$	$\underline{R}^*_{0,9j}$
1	$1{,}42 \cdot 10^5$	0,9987	0,000519	0,9984
2	$0{,}852 \cdot 10^5$	0,9668	0,002590	0,9633
3	$2{,}07 \cdot 10^5$	0,9995	0,000152	0,9993

Таблица 8.4

Байесовские оценки ВБР при известной дисперсии (точная методика)

Номер условия работоспособности j	Значение статистики ν_1, Н	$\hat{R}_j^*$	$\sigma_{\hat{R}_j^*}$	$\underline{R}^*_{0,9j}$
1	$1{,}42 \cdot 10^5$	0,9988	0,000592	0,9984
2	$0{,}852 \cdot 10^5$	0,9667	0,002640	0,9631
3	$2{,}07 \cdot 10^5$	0,9994	0,001460	0,9992

Таблица 8.5

Априорная информация для расчета ВБР по методике § 8.3

Номер условия работоспособности	θ_{1a}, Н	$c_1' = -c_1''$, Н	θ_{2a}, Н	$c_2' = -c_2''$, Н
1	$1{,}64 \cdot 10^5$	$-1{,}3 \cdot 10^4$	$0{,}536 \cdot 10^5$	$-1{,}5 \cdot 10^4$
2	$0{,}828 \cdot 10^5$	$-2{,}7 \cdot 10^4$	$0{,}451 \cdot 10^5$	$-4{,}2 \cdot 10^4$
3	$2{,}48 \cdot 10^5$	$-1{,}3 \cdot 10^3$	$0{,}738 \cdot 10^5$	$-2{,}5 \cdot 10^4$

Таблица 8.6

Байесовские оценки ВБР при неизвестной дисперсии переменной состояния (упрощенная схема)

Номер условия работоспособности	ν_1, Н	$(\nu_2 - \nu_1^2)^{1/2}$, Н	$\hat{R}_j^*$	$\sigma_{\hat{R}_j^*}$	$\underline{R}_{0,9j}^*$
1	$1,023 \cdot 10^5$	$0,583 \cdot 10^5$	0,9970	0,000534	0,9964
2	$0,852 \cdot 10^5$	$0,458 \cdot 10^5$	0,9721	0,007200	0,9703
3	$2,07 \cdot 10^5$	$1,204 \cdot 10^5$	0,9996	0,000163	0,9992

Таблица 8.7

Байесовские оценки ВБР при неизвестной дисперсии переменной состояния (основная схема)

Номер условия работоспособности	$\hat{R}_j^*$	$\sigma_{\hat{R}_j^*}$	$\underline{R}_{0,9j}^*$
1	0,9980	0,000495	0,9974
2	0,9708	0,006800	0,9605
3	0,9995	0,000179	0,9993

Оценки ВБР при неизвестной дисперсии переменной состояния определялись по методике § 8.3 в соответствии с упрощенной и основной схемами. Использованная в расчетах априорная информация помещена в табл. 8.5. Экспериментальные данные в виде статистик ν_1 и ν_2 содержатся в табл. 8.6. Результаты расчетов по упрощенной схеме, которые сводились к использованию выражений (8.39) – (8.46), приведены в табл.8.6. Результаты расчетов ВБР, выполненных в соответствии с основной расчетной схемой, помещены в табл. 8.7. Вычисление двойных интегралов производилось с помощью двукратного обращения к упомянутой выше подпрограмме QUANC8. Как и в предыдущем случае, отмечается удовлетворительное совпадение результатов приближенного и точного оценивания. Значение байесовской нижней доверительной границы для всей конструкции составило $\underline{R}_{0,9}^* = 0,9603$.

Числовые данные примеров демонстрируют эволюцию оценки надежности после проведения испытаний.

8.4.2. Расчетный случай "нагрузка – несущая способность" при неопределенном коэффициенте корреляции. Ниже приведены результаты работы [62], в которой исследована ВБР механического объекта с моделью работоспособности вида "нагрузка – несущая способность". В реальных практических ситуациях при оценке надежности информация о коэффициенте корреляции обычно является неполной. В то же время коэффициент корреляции оказывает существенное влияние на величину ВБР.

Постановка задачи. Рассматривается элемент конструкции с несущей способностью U и действующей нагрузкой S, подчиняющимися гауссову распределению с неизвестным коэффициентом корреляции ρ. В качестве ВБР используется следующая вероятность:

$$R = P\{U > S\}. \tag{8.55}$$

Предполагается, что маргинальные числовые характеристики переменных U и S известны. Это позволяет записать вероятность (8.55) в виде функции от коэффициента корреляции:

$$R = R(\rho) = \Phi\left(\frac{\eta - 1}{\sqrt{v_U^2\eta^2 + v_S^2 - 2\rho v_U v_S \eta}}\right), \tag{8.56}$$

где v_U, v_S – коэффициенты вариации соответственно несущей способности и нагрузки, $\eta = m_U/m_S$ – коэффициент запаса прочности.

Будем считать, что задан промежуток априорной неопределенности $[a, b]$ такой, что $\rho \in [a, b]$. На практике часто удается установить, что коэффициент корреляции положителен, вследствие чего можно принять $\rho \in [0, 1]$, либо отрицателен, тогда $\rho \in [-1, 0]$. Если же известно, что между U и S существует слабая стохастическая зависимость, то можно принять $\rho \in [-0{,}5; 0{,}5]$. Примем равномерную плотность $h(\rho)$ на $[a, b]$.

Задача состоит в получении байесовской оценки R^* для вероятности (8.56) при заданной априорной плотности $h(\rho)$, определенной на $[a, b]$.

Байесовские оценки ВБР. Следуя общей схеме байесовского оценивания, точечная априорная оценка ВБР может быть записана в виде

$$R^* = \frac{1}{b - a}\int_a^b R(\rho)d\rho. \tag{8.57}$$

Здесь удается получить окончательную формулу в аналитическом виде

$$R^* = \frac{(\eta - 1)^2}{(b - a)\eta v_U v_S}(F(v) - F(w)), \tag{8.58}$$

где

$$v = \frac{\eta - 1}{(v_U^2\eta^2 + v_S^2 - 2a v_U v_S \eta)^{1/2}}, \qquad w = \frac{\eta - 1}{(v_U^2\eta^2 + v_S^2 - 2b v_U v_S \eta)^{1/2}},$$

$$F(x) = \frac{1}{2x^2}\Phi(x) + \frac{1}{2x}\kappa(x) - \frac{1}{2}(1 - \Phi(x)),$$

$$\kappa(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Апостериорная оценка ВБР $\hat{R}^*$ для рассматриваемого равномерного априорного закона распределения записывается следующим образом:

$$\hat{R}^* = \frac{1}{\beta}\int_a^b \frac{R(\rho)}{(1 - \rho^2)^{n/2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}\left[\frac{\omega_U^2}{\sigma_U^2} - 2\rho\frac{\omega_{US}}{\sigma_U\sigma_S} + \frac{\omega_S^2}{\sigma_S^2}\right]\right\}d\rho. \tag{8.59}$$

где β – постоянный коэффициент, имеющий вид

$$\beta = \int_a^b \frac{1}{(1-x^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-x^2)}\left(\frac{\omega_U^2}{\sigma_U^2} - 2x\frac{\omega_{US}}{\sigma_U\sigma_S} + \frac{\omega_S^2}{\sigma_S^2}\right)\right\} dx,$$

вероятность $R(\rho)$ определяется по формуле (8.56), а достаточные статистики ω_U^2, ω_S^2 и ω_{US} – при помощи следующих выражений:

$$\omega_U^2 = \sum_{i=1}^n (u_i - m_U)^2, \qquad \omega_S^2 = \sum_{i=1}^n (s_i - m_S)^2,$$

$$\omega_{US} = \sum_{i=1}^n (u_i - m_U)(s_i - m_S),$$

(u_i, s_i) – множество пар экспериментальных значений U и S.

В отличие от аналитической процедуры вычисления априорной оценки ВБР (8.58), апостериорная оценка (8.59) может быть найдена приближенно с использованием одного из методов численного интегрирования.

Сравнительный анализ различных оценок. При определении априорной оценки ВБР на практике часто используются следующие формулы:

$$R_0 = \Phi\left(\frac{\eta - 1}{\sqrt{v_U^2\eta^2 + v_S^2}}\right), \tag{8.60}$$

$$R_{\text{ск}} = \Phi\left(\frac{\eta - 1}{\sqrt{v_U^2\eta^2 + v_S^2 - 2\rho_{\text{ск}} v_U v_S \eta}}\right). \tag{8.61}$$

При получении оценки R_0 полагают $\rho = 0$; оценка $R_{\text{ск}}$ найдена в предположении, что коэффициент корреляции равен середине промежутка априорной неопределенности: $\rho = \rho_{\text{ск}} = (a + b)/2$. В [62] проведено численное сравнение оценок R_0 и $R_{\text{ск}}$ с априорной байесовской оценкой ВБР R^* вида (8.58). Расчеты производились для $v_U = v_S = 0{,}1$, различных коэффициентов запаса прочности $\eta = 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4$ и для различных длин промежутков неопределенности $J = b - a = 0; 0{,}2;\ 0{,}4; \ldots ;\ 1{,}8;\ 2{,}0$.

На рис. 8.3 изображена зависимость относительного отличия априорной баейсовской оценки от оценки ВБР с нулевой корреляцией $(R^* - R_0)/R_0$

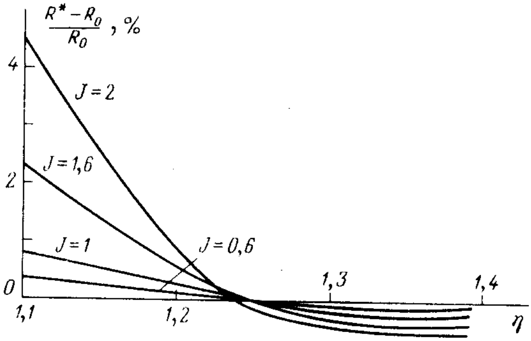


Рис. 8.3. Относительное различие R^* и $R_0 = R_{\text{ск}}$ при симметричном промежутке неопределенности

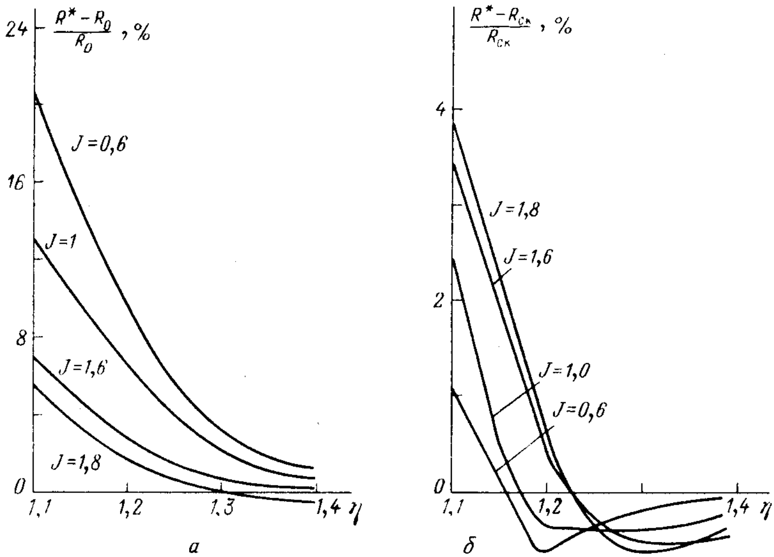


Рис. 8.4. Относительное различие между R^* и R_0 (*а*) и между R^* и $R_{ск}$ (*б*) при асимметричном промежутке неопределенности

для промежутка неопределенности $[-a, a]$, когда R_0 и $R_{ск}$ совпадают. С увеличением коэффициента запаса прочности η эта относительная величина существенно уменьшается. Например, при максимальном интервале неопределенности ($J = 2$) $(R^* - R_0)/R_0$ достигает $\approx 4{,}3\,\%$, а при уменьшении интервала вдвое ($J = 1$) она составляет около 0,7 %. Следует отметить еще одно важное свойство, заключающееся в том, что при $\eta < 1{,}25$ для всех J баейсовская оценка R^* всегда больше оценки R_0, а при $\eta > 1{,}25$ $R^* < R_0$.

На рис. 8.4 представлены закономерности изменения относительного различия всех трех рассматриваемых оценок ВБР для асимметричного промежутка неопределенности при фиксированной верхней границе промежутка ($b = 1$). Из графиков видно, что наиболее грубой оценкой ВБР является R_0, использование которой допустимо лишь при больших коэффициентах запаса прочности ($\eta > 1{,}4$). Оценка $R_{ск}$ близка к R^*, уже начиная с $\eta = 1{,}3$.

Апостериорные байесовские оценки проиллюстрированы с помощью числового примера [62]. В качестве исходных данных в расчетах были приняты следующие значения безразмерных коэффициентов: $v_U = v_S = 0{,}1$ и $\eta = 1{,}3$, а $\rho \in [-0{,}8;\ 0{,}8]$. В этом случае априорная баейсовская оценка ВБР составляет $R^* = 0{,}906214$.

При определении апостериорной оценки (8.59) целесообразно перейти к следующим статистикам: $\epsilon_U^2 = \omega_U^2/\sigma_U^2$, $\epsilon_S^2 = \omega_S^2/\sigma_S^2$, $\epsilon_{US} = \omega_{US}/\sigma_U\sigma_S$. Расчеты проводились для следующих гипотетических результатов испытаний. Было проведено 10 испытаний, в результате которых измерялись значения U и S. Причем результаты испытаний таковы, что им соответствуют маргинальные статистики $\epsilon_U^2 = 9{,}5$ и $\epsilon_S^2 = 10{,}2$. Рассматривались три случая: $\epsilon_{US}^{(+)} = 5$ (положительная корреляция), $\epsilon_{US}^{(0)} = 0$ (отсутствие корреляции),

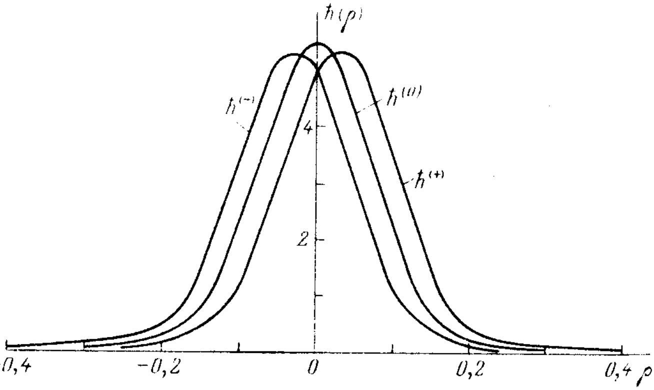


Рис. 8.5. Апостериорные плотности для коэффициента корреляции

$\epsilon_{US}^{(-)} = -5$ (отрицательная корреляция). Для этих случаев на рис. 8.5 построены апостериорные плотности $\hbar_+(\rho)$, $\hbar_0(\rho)$ и $\hbar_-(\rho)$. Из рис. 8.5 видно, что для положительной корреляции апостериорная плотность смещается вправо, а для $\epsilon_{US}^{(-)}$ – наоборот, влево. Соответствующие апостериорные байесовские оценки ВБР равны $\hat{R}_+^* = 0{,}902966$, $\hat{R}_0^* = 0{,}90016$, $\hat{R}_-^* = 0{,}89694$.

Приведенные выше результаты позволяют более корректно по сравнению с существующими подходами производить априорную оценку вероятности безотказной работы в условиях неопределенности относительно корреляции между нагрузкой и несущей способностью, а также уточнять эту оценку по результатам испытаний.

§ 8.5. Статистическая оптимизация конструкций с использованием байесовского подхода

Хорошо известны постановки и решения задач вероятностного оптимального проектирования [20, 21, 38, 40]. Существенным отличием предлагаемой постановки от известных решений является то, что процесс оптимизации учитывает не только проектные оценки надежности, но и результаты последующего эксперимента. В пользу такого подхода говорит само содержание проектирования. Выбор проектных параметров осуществляется с помощью существующих моделей работоспособности типа (8.1), опыта разработчика и априорной статистической информации о нагрузках, физико-механических характеристиках и геометрических параметрах. Затем производится эксперимент, в ходе которого подтверждается принципиальная работоспособность объекта, уточняется оценка его надежности и вносятся изменения в проект с целью удовлетворения требований по надежности. Важным звеном в цепи этих мероприятий является объединение проектной (априорной) и экспериментальной информации о надежности. Для этих целей мы рекомендуем использовать байесовский подход. Ниже рассмотрено одно из возможных направлений байесовской статистической оптимизации.

8.5.1. Формулировка задачи. Пусть структура объекта определена и задача заключается в выборе значений управляемых параметров, образующих вектор ω, которые обеспечивают экстремальное значение какого-либо показателя качества. Обычно управляемыми параметрами являются номинальные значения (или математические ожидания) и разбросы (или средние квадратические отклонения) некоторых геометрических параметров. Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что разработчик не может варьировать нагрузками, а материал выбран из более общих соображений. На практике чаще всего разработчик может выбирать номинальные значения геометрических параметров, в то время как их разбросы задаются соответствующими руководящими документами (ГОСТ, отраслевыми стандартами и нормалями). Таким образом, на практике задача оптимального проектирования в большинстве случаев состоит в выборе значений математических ожиданий определенной части размеров, которые и образуют вектор ω.

Рассматриваемая оптимизационная задача включает три составные части:

(1) модель надежности, которая сводится к установлению зависимости байесовской оценки ВБР $\hat{R}^*$ (или $\underline{R}^*_\gamma$) от вектора управляемых параметров ω, в дальнейшем будем записывать $\hat{R}^*(\omega)$;

(2) технико-экономический показатель (вес или стоимость) в виде функции $S = S(\omega)$ (показателей может быть в общем случае несколько);

(3) дополнительные ограничения вида $\psi_l(\omega) \leqslant 0$ ($l = 1, 2, \ldots, L$), обеспечивающие физическую реализуемость проекта и установившиеся нормы и соотношения проектирования.

Возможны две формулировки задачи, когда выбирается один критерий оптимизации:

(1) прямая задача:

$$\begin{aligned} &\hat{R}^*(\omega) \to \max, \\ &S(\omega) \leqslant S_0, \\ &\psi_l(\omega) \leqslant 0, \quad l = 1, 2, \ldots, L; \end{aligned} \tag{8.62}$$

(2) обратная задача:

$$\begin{aligned} &S(\omega) \to \min, \\ &\hat{R}^*(\omega) \geqslant R_{\text{тр}}, \\ &\psi_l(\omega) \leqslant 0, \quad l = 1, 2, \ldots, L. \end{aligned} \tag{8.63}$$

В прямой задаче мы предполагаем заданным некоторое пороговое значение технико-экономического показателя S_0, в обратной – требуемое, согласно техническому заданию, значение ВБР $R_{\text{тр}}$.

Технико-экономический показатель обычно выбирается в виде стоимости, в менее общем случае – в виде массы объекта, и запись функции $S(\omega)$ не представляет каких-либо видимых затруднений. Основная сложность заключается в установлении зависимости $\hat{R}^*$ от вектора ω. Проанализируем, каким образом можно ввести в байесовскую схему (например, описанную в § 8.3) вектор управляемых параметров ω.

Из общих рассуждений § 8.1 вытекает, что байесовская оценка ВБР определяется:

(1) выборкой результатов испытаний $\underset{\sim}{x}$ в виде значений вектора первичных переменных X;

(2) видом плотности распределения $f_X(x;\theta)$;

(3) видом функций работоспособности $\varphi_j(\cdot)$, $j = 1, 2, \ldots, M$;

(4) априорной плотностью $h(\theta)$ вектора параметров θ.

Вектор управляемых параметров ω естественным образом включается в байесовскую схему в связи с априорной плотностью $h(\theta)$, как некоторое подмножество из множества α_θ, с помощью которого параметризована априорная плотность $h(\theta;\, \alpha_\theta)$, $\alpha_\theta \in \mathrm{A}$. В самом деле, пусть, к примеру, векторный параметр θ включает в себя математические ожидания m_i всех (на практике только части) первичных переменных, т.е. $\theta = (m_1, m_2, \ldots, m_N)$. Априорная плотность распределения $h(\theta;\ \alpha_\theta)$ является равномерной, причем каждый из параметров $\theta_i = m_i$ распределен внутри промежутка $\mu_i = [m_i', m_i'']$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Промежуток μ_i определим с помощью среднего значения m_{i0} и относительной длины χ_i, так что $m_i' = m_{i0}(1 - \chi_i/2)$, $m_i'' = m_{i0}(1 + \chi_i/2)$. Совокупность m_{i0}, χ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и образует в данном случае вектор параметров α_θ. Величина χ_i определяет степень неопределенности – невозможности обеспечить на практике теоретическое значение m_{i0}. В свою очередь m_{i0} – это то номинальное значение i-й первичной переменной (как мы уже отмечали, геометрического параметра), которое разработчик должен выбрать в процессе решения оптимизационной задачи, т.е. $\omega = (m_{10}, m_{20}, \ldots, m_{N0})$. Включая ω как подмножество из α_θ в байесовскую процедуру, мы получаем зависимость оценок ВБР $\hat{R}^*$ или $\underline{R}_\gamma^*$ от вектора управляемых параметров ω.

Последовательность решения оптимизационной задачи выглядит следующим образом. Сначала до проведения испытаний задача (8.62) или (8.63) решается в предположении отсутствия экспериментальных данных. Затем по мере накопления экспериментальных данных $\underset{\sim}{x}$ производится повторное решение задачи, которое позволит скорректировать найденное априорно значение вектора управляемых параметров ω.

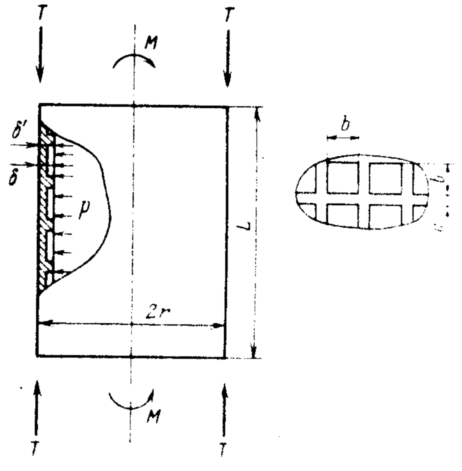
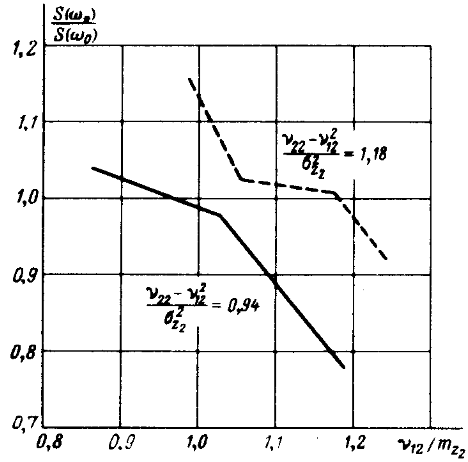


Рис. 8.6. Вид и схема нагружения цилиндрической оболочки

8.5.2. Пример решения оптимизационной задачи. Рассматривалась задача выбора оптимальных проектных параметров цилиндрической оболочки вафельного типа, изображенной на рис. 8.6. В качестве управляемых параметров были выбраны математические ожидания следующих первичных переменных: δ', δ, c, b. Оболочка нагружена осевой сжимающей силой T, изгибающим моментом M и избыточным давлением p.

Рис. 8.7. Зависимость оптимальной массы конструкции от результатов испытаний



В качестве целевой функции примем массу оболочки

$$S(\omega) = S(\delta_0', \delta_0, c_0, b_0) =$$

$$= \rho\{2\pi r[\alpha\delta_0 + c_0 h N_\text{к}] +$$

$$+ N_\text{п} c_0 h(h - c_0 N_\text{к})\},$$

где ρ – плотность материала, индекс 0 обозначает математическое ожидание, $h = \delta_0' - \delta_0$, $N_\text{к} = [L/(b_0 + c_0)]$, $N_\text{п} = [2\pi r/(b_0 + c_0)]$, $[A]$ означает целую часть A.

Показатель надежности определяется в виде вероятности выполнения следующей системы условий работоспособности [31], состоящей из условия прочности

$$Z_1 = \sigma_\text{в} - \frac{\pi r N}{\delta + c(\delta' - \delta)/b} > 0, \quad N = T + \frac{M}{2r} - \pi r^2 p,$$

условия общей устойчивости

$$Z_2 = 2\pi k E\delta^2 \left[1 + \varphi'(\psi' - 1)^2 \left(\frac{0,4}{\sqrt[3]{\varphi'}} + \frac{1,3}{\sqrt{\psi'}} - 0,54\right)\right] - N > 0,$$

условия местной устойчивости

$$Z_3 = 12\pi E \frac{r^2\delta^3}{b - c}[1 + 0,16\varphi'(\psi' - 1)] - N > 0,$$

где $\varphi' = 2\pi c/\delta$, $\psi' = \delta'/\delta$, k – коэффициент устойчивости, $\sigma_\text{в}$ – предел прочности, E – модуль упругости. Судя по выписанной модели работоспособности, вектор первичных переменных образует совокупность следующих величин $(M, T, p, r, L, \delta', \delta, c, b, \sigma_\text{в}, E, k)$.

Расчет проектной оценки ВБР $\hat{R}^*$ производился с помощью линеаризации функций работоспособности. Результаты оптимизации при использовании проектной оценки ВБР в задаче (8.62) состояли в следующем. Из начальной точки $\omega_0 = (8,3,100,4)$ мм, соответствующей массе $S(\omega_0) = 330,2$ кг и $R(\omega_0) = 0,9983$, траектория поиска привела в точку $\omega_* = (7,3;\ 2,8;\ 150;\ 3,1)$ мм, для которой $S(\omega_*) = 291$ кг при $R_\text{тр} = 0,99$. Заметим, что если в качестве $R_\text{тр}$ принять значение проектной оценки ВБР, т.е. $R_\text{тр} = R(\omega_0) = 0,9983$, то $S(\omega_*) = 319,4$ кг. Как видно, выигрыш в массе за счет оптимизации составляет более 10 кг.

Статистическая оптимизация производилась в соответствии с методикой расчета $\hat{R}^*(\omega)$ § 8.3 в предположении, что интервалы неопределенности составляют 5 %-ный промежуток относительно проектных значений m_{z_j} и

σ_{z_j}. Результаты эксперимента моделировались на ЭВМ в соответствии с принятыми законами распределения первичных переменных. На рис. 8.7 изображены зависимости $S(\omega_*)$ от результатов испытаний, представленных достаточными статистиками ν_2 и ν_1. Были сделаны следующие выводы: (1) с возрастанием статистики ν_{2j} (выборочной дисперсии) уменьшается оценка $\underline{R}^*_\gamma$, что приводит к увеличению $S(\omega_*)$; (2) если статистика ν_{1j} превышает m_{z_j}, то $S(\omega_*)$ меньше значения целевой функции при проектной оптимизации, в противном случае, наоборот, значение целевой функции увеличивается. Для оптимизации был использован алгоритм случайного поиска в сочетании с методом непрерывных штрафных функций. Задача оптимизации для одной выборки $\underset{\sim}{x}$ на ЭВМ ЕС-1045 решается более двух часов. Специфика данного расчетного примера состояла в том, что наиболее опасным оказалось второе условие работоспособности, так что ВБР оболочки практически полностью определялась вероятностью выполнения второго условия. В этой связи на результаты оптимизации существенное влияние оказывали лишь достаточные статистики ν_1 и ν_2 по второй переменной состояния. Эти статистики обозначены на рис. 8.7 соответственно ν_{12} и ν_{22} и определялись по формулам

$$\nu_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(x_i), \quad \nu_{22} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_2^2(x_i).$$

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ С ПОГРЕШНОСТЬЮ: АПРИОРНЫЕ БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ

§ 9.1. Традиционная и байесовская интерпретации погрешности модели работоспособности

Настоящая глава является развитием предыдущей и рассматривает более общую ситуацию, когда теоретическая модель работоспособности содержит погрешность, обусловленную несовершенством используемых для ее построения физических теорий. Такое положение является характерным для большинства объектов техники, при разработке которых основную роль играет экспериментальная отработка. В главе предложен метод байесовского статистического анализа объектов техники, целью которого является оценивание ВБР этих объектов и погрешности используемых в расчетах математических моделей. Материалы главы включают общую постановку и характеристику задачи, а также ее решение для доэкспериментальной стадии разработки и анализа объектов техники.

Основу реальной *модели работоспособности* составляют принятые в соответствующей отрасли знаний математические модели функционирования в виде конечных аналитических соотношений или систем дифференциальных уравнений. Любая математическая модель является лишь более или менее полным формализованным описанием процессов и явлений, происходящих в исследуемом объекте. Вследствие этого модель работоспособности с неизбежностью содержит погрешность, которая в конечном итоге приводит к методической ошибке в определении ВБР.

Разработчик технического устройства нередко имеет лишь очень ориентировочное представление о погрешности модели функционирования. В частности, при проектировании элементов несущих конструкций и ряда других объектов техники применяют так называемые *коэффициенты безопасности*, назначение которых заключается в выполнении двойной задачи. По мнению С.П. Королева [26], коэффициент безопасности призван, с одной стороны, учесть случайный разброс параметров объекта, с другой — компенсировать несовершенство расчетной методики, а следовательно, и модели работоспособности. Если при исследовании работоспособности объекта мы используем представление его параметров в виде случайных величин или процессов, то первый аспект коэффициента безопасности становится ненужным. В то же время второй остается и, по-видимому, полностью обусловливает достоверность модели работоспособности.

Значение коэффициента безопасности выбирается таким образом, чтобы завысить расчетную нагрузку или, что то же самое, занизить полученную теоретическим путем функциональную способность объекта. В результате спроектированные конструкции нередко обладают чрезмерно большим весом и излишне материалоемки. Характерной особенностью принятого в настоящее время способа учета погрешности модели является тот факт, что представление об этой погрешности (в виде коэффициента безопасности) не изменяется в процессе жизненного цикла объекта. В то же время при разработке и эксплуатации проводятся испытания, дающие информацию (прямую или косвенную) о его реальной функциональной способности. Эта информация может служить основой для пересмотра принятого априорного представления о погрешности модели.

Исходя из логики и содержания процесса создания и эксплуатации объектов техники, оценка погрешности модели функционирования и работоспособности должна носить динамический характер, т.е. изменяться в соответствии с вновь полученной экспериментальной информацией. Очевидно, что и оценка ВБР должна "отслеживать" эволюцию представления о погрешности модели работоспособности. На первоначальном этапе жизненного цикла объекта, когда отсутствуют экспериментальные данные, ВБР оценивается, исходя из априорного представления о погрешности модели. Данное представление может носить очень ориентировочный характер. В процессе экспериментальной отработки это представление становится более определенным, что приводит к увеличению достоверности оценки ВБР.

Рассмотренная схема адекватна байесовской процедуре получения статистического вывода. Применение байесовского подхода к решению данной задачи позволяет преодолеть отмеченные выше недостатки традиционного способа учета погрешности модели. В силу оптимальности байесовских решающих правил получаемые в результате этого подхода оценки ВБР будут наилучшими в смысле максимизации некоторой функции полезности и использования всей имеющейся информации.

В настоящей и последующей главах предлагается метод оценки ВБР технического объекта с учетом погрешности модели его работоспособности, а также метод статистического оценивания самой погрешности по результатам испытаний и априорной информации. Все рассуждения проведены для случая, когда модель работоспособности состоит из одного функционального неравенства. Подобное упрощение вызвано следующими обстоятельствами. Во-первых, оно не является принципиальным, а служит целям более ясного идейного представления метода, свободного от излишне громоздких математических построений. Во-вторых, такой подход позволяет исследовать модели работоспособности, состоящие из многих некоррелированных условий работоспособности. Предположение о некоррелированности в данном случае может быть оправдано, поскольку, если используются грубые (неточные) модели работоспособности, вряд ли имеет смысл учитывать такие "тонкие" их свойства, как корреляция.

Дадим байесовское определение *погрешности модели работоспособности* и исследуем его отличие от традиционного. Пусть модель работоспособности имеет вид неравенства

$$\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_N) > 0, \tag{9.1}$$

где $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ – вектор первичных переменных, которые могут быть случайными величинами, процессами или полями. *Функция работоспособности* $\varphi(\cdot)$ является, как правило, записанным специальным образом конечным результатом решения некоторой модельной задачи, описывающей процесс нормального функционирования объекта. Например, для тонкостенного стержня длиной l с минимальным моментом инерции поперечного сечения J, подверженного воздействию осевой сжимающей силы T, теоретическая модель работоспособности вида (9.1) может быть записана следующим образом:

$$\frac{\pi^2 EJ}{\mu^2 l^2} - T > 0, \tag{9.2}$$

где E – модуль упругости материала, μ – постоянная, зависящая от способа заделки стержня. Величина

$$T_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{\mu^2 l^2} \tag{9.3}$$

называется критической силой потери устойчивости (по Эйлеру) и характеризует функциональную способность стержня противодействовать нагрузке T. Вектор первичных переменных X составляют T, E, J, l.

Поскольку первичные переменные являются случайными, условие (9.1) для некоторой реализации X может не выполняться. Это событие квалифицируется как отказ. Вероятность выполнения неравенства (9.1) в течение заданного времени τ (или в заданный момент времени t) расценивается как вероятность безотказной работы.

При проведении расчетов параметров элементов конструкций, не связанных с вероятностными представлениями, вводят коэффициент безопасности η, компенсирующий погрешность теоретической модели. Для рассматриваемого примера, в частности, расчет параметров производится для силы ηT при $\eta > 1$, т.е. из условия $T_{\text{кр}} = \eta T$. Условием работоспособности в данном случае является неравенство

$$\frac{T_{\text{кр}}}{\eta} - T > 0. \tag{9.4}$$

Эта модель работоспособности, в отличие от (9.2), учитывает погрешность, которая возникает вследствие неточности формулы (9.3).

Форма представления модели работоспособности (9.4) является в определенном смысле условной. С таким же успехом вместо коэффициента η мы могли бы ввести $\zeta = \eta^{-1}$, что привело бы к изменению вида неравенства (9.4). Для целей дальнейшего анализа представляется необходимым упорядочить способ задания погрешности модели с помощью величины ϵ, линейной по отношению к правой части неравенства (9.1). Существо учета погрешности в этом случае не изменится, а способ построения статистических оценок ошибки модели и ВБР упростится.

В соответствии с введенным предположением вместо условия работоспособности (9.1) запишем

$$\varphi(X) + \epsilon > 0. \tag{9.5}$$

Величину ϵ будем называть *аддитивной погрешностью* модели работоспособности. Эта величина является агрегированным представлением большого числа неучтенных в теоретической модели случайных и неслучайных факторов. По этой причине будем считать ϵ случайной величиной.

С помощью рассмотренного примера покажем идентичность аддитивной погрешности модели и коэффициента безопасности. Поскольку последний по определению является неслучайным, вместо ϵ при проведении сравнения будем использовать некоторое предельно возможное значение, которое в реальных ситуациях практически никогда не может быть превышено. В математической статистике для этих целей используется квантиль ϵ_p распределения $f_\epsilon(\epsilon)$, задаваемая соотношением

$$\int_{-\infty}^{\epsilon_p} f_\epsilon(\epsilon)\, d\epsilon = p,$$

которая соответствует большой вероятности p. Используя ϵ_p, от неравенства (9.5) перейдем к соответствующему (но, вообще говоря, не равносильному) неслучайному неравенству

$$\varphi(\boldsymbol{m}_X) + \epsilon_p > 0, \tag{9.6}$$

где $\boldsymbol{m}_X$ – математическое ожидание случайного вектора. Для условия работоспособности (9.2) неравенство (9.6) будет иметь вид

$$T_{\text{кр}} - T + \epsilon_p > 0. \tag{9.7}$$

Преобразовав условие работоспособности (9.4), записанное через коэффициент безопасности η, к эквивалентному виду

$$(T_{\text{кр}} - T) - T_{\text{кр}} \frac{\eta - 1}{\eta} > 0,$$

убеждаемся, что ϵ_p однозначно определяется через η:

$$\epsilon_p = - T_{\text{кр}} \frac{\eta - 1}{\eta}. \tag{9.8}$$

Важно заметить, что поскольку $\eta > 1$, из равенства (9.8) следует $\epsilon_p < 0$, т.е. аддитивная ошибка, равно как и коэффициент безопасности, занижает несущую способность элемента конструкции, найденную теоретическим путем по формуле Эйлера.

Обсудим теперь возможные способы назначения ϵ_p. Если выбор коэффициента безопасности строго обоснован, то ϵ_p определяется однозначно, например, с помощью формул типа (9.8). Но дело в том, что η часто выбирают из очень общих соображений, вообще говоря, далеких от реальных соотношений между истинным и теоретическим значениями функциональной способности исследуемого конкретного объекта. Представление об ошибке теоретической модели, как правило, носит неопределенный характер. Часто, к примеру, известно лишь, что расчетное значение завышает или, наоборот, занижает истинную величину функциональной способности. Иногда можно говорить, что максимальная погрешность составляет какой-либо процент от расчетного значения и может быть как отрицательной, так и положительной. Поэтому представляется разумным в общем случае задавать погрешность ϵ_p не в виде определенного значения, как в (9.8), а с помощью некоторого промежутка неопределенности $E_\epsilon = [a_\epsilon, b_\epsilon]$, считая, что $\epsilon_p \in E_\epsilon$. Таким образом, если раньше, основываясь на коэффициенте безопасности и соотношениях вида (9.8), мы использовали категорические утверждения типа: предельная погрешность ϵ_p составляет -12Н, но теперь возможно одно из более неопределенных и в то же время более гибких утверждений, например, ϵ_p содержится в промежутке $[-12\text{Н}, 0]$. При этом разработчик, исходя из собственного опыта, может располагать более "тонкой" информацией, характеризующей шансы для ϵ_p принадлежать различным интервалам в E_ϵ.

Используя терминологию байесовского подхода, в дальнейшем будем говорить: при анализе погрешности модели работоспособности разработчик назначает априорное распределение $h(\epsilon_p)$, $\epsilon_p \in E_\epsilon$. Таким образом, вместо строго определенного числа для ϵ_p, используя байесовскую методологию, мы имеем некоторую ее окрестность ("размазанное" представление числа). Точки этой окрестности могут иметь различную вероятностную значимость, соответствующую априорной плотности $h(\epsilon_p)$. Заметим, что детерминированная форма задания ϵ_p в виде числа ϵ_p' является предельным случаем байесовской, когда вероятностная значимость $\epsilon_p' \in E_\epsilon$ равна единице, а априорная плотность $h(\epsilon_p)$ вырождается в дельта-функцию.

Байесовская форма задания погрешности модели работоспособности имеет ряд преимуществ. Во-первых, она в большей степени соответствует имеющейся информации о характере неточности модели, т.е. неопределенному характеру этой модели. Во-вторых, при назначении E_ϵ и $h(\epsilon_p)$ снижается ответственность лица, принимающего решение. Здесь ответственность понимается в двойном смысле. С одной стороны, объект должен быть достаточно надежным, с другой – конструкция не должна быть перетяжеленной или излишне материалоемкой вследствие чрезмерно высокой надежности. Обычная трактовка ответственности включает первый аспект, забывая о важности второго.

Третье, самое важное преимущество байесовской формы представления погрешности заключается в возможности уточнения этого представления по мере получения экспериментальных данных. Механизм этого уточнения предполагает использование теоремы Байеса.

Наконец, байесовская методология привлекательна еще в одном смысле. Окончательная оценка ВБР с учетом погрешности модели работоспособности всегда будет оптимальной с точки зрения минимума выбранной функции потерь. Иначе говоря, выбирая соответствующим образом функцию потерь, мы можем достигать желаемого качества оценки ВБР. Например, если отказ объекта связан с человеческими жертвами или потерей дорогостоящего оборудования, то для оценки надежности этого объекта следует использовать наиболее пессимистическую оценку. Это соответствует функции потерь, имеющей свойство – завышение хуже, чем занижение.

В заключение этих общих рассуждений отметим, что оценивание аддитивной ошибки модели только с помощью одной числовой характеристики положения, в качестве которой мы использовали квантиль ϵ_p, является очень грубым приближением желаемого результата. Более полное решение задачи предполагает использование других числовых характеристик. В дальнейшем рассматриваются расчетные случаи, использующие две числовые характеристики, которым соответствуют два параметра плотности распределения аддитивной погрешности ϵ.

§ 9.2. Задача оценки аддитивной погрешности модели работоспособности при определении вероятности безотказной работы

Будем считать, что работоспособное состояние объекта описывается моделью работоспособности с аддитивной случайной погрешностью ϵ следующего вида:

$$\psi(X, \epsilon) = \varphi(X) + \epsilon > 0, \tag{9.9}$$

где $\varphi(\cdot)$ – теоретическая функция работоспособности, а функцию $\psi(\cdot)$ будем называть *обобщенной функцией работоспособности*. По аналогии с переменной состояния $Z = \varphi(X)$ назовем $W = \psi(X, \epsilon)$ *обобщенной переменной состояния*. Связь между W и Z в соответствии с (9.9) осуществляется с помощью линейного преобразования.

$$W = Z + \epsilon. \tag{9.10}$$

Переменные W и Z могут быть случайными полями, процессами и величинами. Для описания аддитивной погрешности ϵ примем модель случайной величиной и в дальнейшем будем считать, что ϵ подчиняется некоторому распределению вероятностей с плотностью $f_\epsilon(\epsilon) = f_\epsilon(\epsilon; \theta)$, где θ – вектор параметров.

Если Z является случайной величиной, то в качестве ВБР будем использовать вероятность

$$R_0 = P\{W > 0\}. \tag{9.11}$$

Этот показатель используется для характеристики надежности объекта в начальный или некоторый фиксированный момент времени, соответствующий экстремальным условиям эксплуатации.

В более общем случае Z является случайным процессом, и в качестве ВБР используется вероятность

$$R_\tau = R(\tau) = P\{W(t) > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau\}. \tag{9.12}$$

Общая задача состоит в оценке погрешности ϵ и ВБР вида (9.11) или (9.12) при следующих исходных допущениях:

(1) Теоретическая функция работоспособности $\varphi(X)$ считается известной.

(2) Заданы значения элементов множества числовых характеристик κ_X вектора первичных переменных X. Если вектор X состоит только из случайных величин, то κ_X образуют математические ожидания, средние квадратические отклонения, коэффициенты корреляции и, возможно, моментные числовые характеристики более высокого порядка. Если же некоторые компоненты вектора X являются случайными процессами,

то в κ_X дополнительно входят параметры соответствующих корреляционных функций.

(3) Известны виды вероятностных характеристик, необходимых для расчета ВБР. В частности, при расчете R_0 необходимо знать вид плотности или функции распределения переменной состояния Z. Для расчета R_τ, вообще говоря, следует знать бесконечномерную плотность распределения ординаты процесса $Z(t)$. В предположении гауссовости и стационарности $Z(t)$ и пуассоновского характера потока пересечений процессом $W(t)$ нулевого уровня достаточно ограничиться знанием одномерной плотности распределения ординаты процесса $Z(t)$ и корреляционной функции процесса.

(4) Задана плотность распределения $f_\epsilon(\epsilon;\theta)$ аддитивной ошибки ϵ, и известна априорная плотность $h(\theta)$ вектора параметров θ.

(5) Могут быть проведены испытания, дающие информацию (прямую или косвенную) относительно значений аддитивной погрешности модели ϵ. Проводимые испытания имеют две разновидности. Первая связана с установлением реальных уровней функциональной способности объекта. При этих испытаниях фиксируются значения переменной состояния Z в момент отказа (когда $W = 0$), откуда определяются эмпирические значения величины ϵ. Вторая разновидность включает функциональные испытания, проводимые в эксплуатационных условиях или близких к ним. В результате этих испытаний можно получить цензурированные данные для ϵ, так как не все опыты оканчиваются событием $W = 0$.

В рамках допущений (1)–(4) решается задача определения априорной оценки ВБР. Допущение (5) позволяет находить апостериорную оценку. Общая последовательность решения задачи может быть представлена с помощью трех этапов.

Этап 1. Определение условной ВБР $R = R(\theta)$, зависящей от вектора параметров, которые характеризуют аддитивную ошибку ϵ. Методическим обеспечением этого этапа являются допущения (1)–(4).

Этап 2. Определение априорной оценки ВБР, исходя из априорного распределения $h(\theta)$ и некоторой функции потерь $L(\hat{R}, R)$. Методическим обеспечением этого этапа является допущение (4). Оценка ВБР ищется в виде точечной оценки R^*, минимизирующей априорный байесовский риск, и априорной байесовской нижней доверительной границы $\underline{R}_\gamma^*$ при заданном уровне доверия γ.

Этап 3. Определение апостериорной оценки ВБР по результатам описанного в допущении (5) эксперимента. На этом этапе используется теорема Байеса, позволяющая установить апостериорную плотность распределения вектора θ. Как и на предыдущем этапе, представление о ВБР складывается на основе точечной апостериорной оценки $\hat{R}^*$, минимизирующей апостериорный байесовский риск, и апостериорной байесовской нижней доверительной границы $\underline{\hat{R}}_\gamma^*$.

Заметим, что первый этап свободен от использования принципов байесовской методологии. Он будет рассмотрен в следующем § 9.3. Двум другим этапам посвящены §§ 9.4, 10.2.

§ 9.3. Условные оценки вероятности безотказной работы

В настоящем параграфе рассмотрены вопросы определения оценок ВБР, которые зависят от неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ распределения аддитивной погрешности ϵ. Эти оценки в дальнейшем будем называть *условными*, т.е. известными при условии задания параметров. Сначала введем и обоснуем два расчетных случая для распределения вероятностей погрешности ϵ, а затем для каждого случая запишем условные оценки ВБР вида (9.11) и (9.12).

9.3.1. *Расчетный случай обобщенной экспоненциальной ошибки* задается плотностью распределения $f_\epsilon(\epsilon;\ \theta)$ следующего вида:

$$f_\epsilon(\epsilon;\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_2 - \theta_1} \exp\left(-\dfrac{\epsilon}{\theta_1}\right), & \epsilon < 0, \\ \dfrac{1}{\theta_2 - \theta_1} \exp\left(-\dfrac{\epsilon}{\theta_2}\right), & \epsilon \geqslant 0 \quad (\theta_1 \leqslant 0,\ \theta_2 \geqslant 0). \end{cases} \tag{9.13}$$

Выбор плотности (9.13) в качестве вероятностной характеристики погрешности ϵ вызван следующими причинами. Плотность (9.13) соответствует ситуации, когда теоретическая модель работоспособности может приводить как к занижению, так и к завышению реальной функциональной способности объекта. Мы предполагаем также, что теоретическая модель не имеет

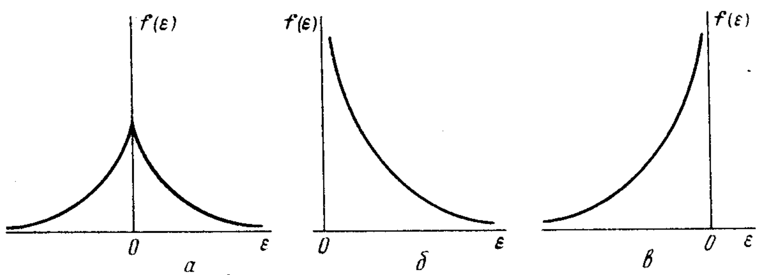


Рис. 9.1. Плотность распределения обобщенной экспоненциальной ошибки

систематической погрешности. Вследствие этого в качестве $f_\epsilon(\epsilon)$ выбрана плотность, имеющая моду в точке $\epsilon = 0$. Плотность (9.13) в общем случае не является симметричной, что позволяет с помощью параметров θ_1 и θ_2 характеризовать значимость соответственно отрицательной и положительной ошибок модели. Вид плотности (9.13) представлен на рис. 9.1, *а*.

Частные виды плотности (9.13) описывают случаи односторонней ошибки (см. рис. 9.1, *б* и *в*). Так, для частного случая отрицательной аддитивной ошибки $\theta_2 = 0$ плотность распределения $f_\epsilon(\epsilon)$ становится однопараметрической и имеет вид

$$f_\epsilon(\epsilon;\theta) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\theta} \exp\left(-\dfrac{\epsilon}{\theta}\right), & \epsilon \leqslant 0, \\ 0, \ \epsilon > 0 \ (\theta = \theta_1 \leqslant 0). \end{cases} \tag{9.14}$$

Распределение (9.14) следует использовать в том случае, когда достоверно известно, что теоретическая модель завышает истинную функциональную способность объекта. Экспоненциальный характер распределения ϵ говорит о том, что используемая теоретическая модель функционирования достаточно хорошо приближает реальные свойства объекта, так как вероятность попадания погрешности ϵ в область малых по абсолютной величине значений выше, чем в область больших.

Для противоположного частного случая, когда достоверно известно, что теоретическая модель работоспособности занижает истинную функциональную способность объекта, плотность распределения $f_\epsilon(\epsilon)$ имеет вид

$$f_\epsilon(\epsilon;\theta) = \begin{cases} 0, & \epsilon < 0, \\ \dfrac{1}{\theta}\exp\left(-\dfrac{\epsilon}{\theta}\right), & \epsilon \geqslant 0 \quad (\theta = \theta_2 \geqslant 0). \end{cases} \tag{9.15}$$

9.3.2. *Расчетный случай гауссовой ошибки* задается плотностью распределения $f_\epsilon(\epsilon)$ вида

$$f_\epsilon(\epsilon;\epsilon_0,\sigma_\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon}\, e^{-\frac{(\epsilon-\epsilon_0)^2}{2\sigma_\epsilon^2}} \tag{9.16}$$

Применение этого расчетного случая оправдано в условиях большого числа неучтенных факторов теоретической модели, которые действуют по аддитивной схеме. В этой ситуации вступает в действие центральная предельная теорема, приводящая к нормальному распределению ошибки. Распределение (9.16) допускает наличие систематической погрешности ϵ_0. Если таковая отсутствует, мы полагаем в (9.16) $\epsilon_0 = 0$, что обеспечивает ошибке ϵ свойство гауссовой симметричности.

9.3.3. Условные оценки ВБР для фиксированного момента времени. Исходя из предположений (3), (4), считаем, что плотности распределения переменной состояния Z и аддитивной погрешности модели ϵ заданы, т.е. известны виды плотностей $f_Z(z;\ \kappa_Z)$ и $f_\epsilon(\epsilon;\ \theta)$, причем вектор θ неизвестен, а параметры, входящие в множество κ_Z, могут быть найдены в силу предположений (1) и (2). Задача приближенного определения κ_Z рассматривается ниже в п. 9.3.4.

Предполагая независимость переменной состояния Z и погрешности ϵ, искомую вероятность R_0 в обшем случае запишем с помощью интеграла

$$R_0 = P\{Z + \epsilon > 0\} = \iint\limits_{(z+\epsilon>0)} f_Z(z;\kappa_Z) f_\epsilon(\epsilon;\theta)\,dz\,d\epsilon. \tag{9.17}$$

Ниже рассмотрен случай гауссова распределения переменной состояния Z, в соответствии с которым множество κ_Z состоит из математического ожидания $m_Z = E[Z]$ и среднего квадратического отклонения $\sigma_Z = E[(Z - m_Z)^2]^{1/2}$. Поскольку по допущению m_Z и σ_Z известны, в дальнейшем будем подчеркивать зависимость ВБР только от θ. Пусть сначала погрешность ϵ является обобщенной экспоненциальной. Перепишем интеграл (9.17) в виде

$$R_0 = \iint\limits_{\omega_1} f_Z(z) f_\epsilon(\epsilon)\,dz\,d\epsilon + \iint\limits_{\omega_2} f_Z(z) f_\epsilon(\epsilon)\,dz\,d\epsilon, \tag{9.18}$$

где $\omega_1 = \{0 \leqslant z < \infty, -z \leqslant \epsilon \leqslant 0\}$, $\omega_2 = \{(0 < z < \infty, 0 \leqslant \epsilon < \infty) \cup \cup (-\infty < z < 0, -z \leqslant \epsilon < \infty)\}$. После подстановки (9.13) в (9.18) и интегрирования для гауссовой плотности $f_Z(z)$ окончательно получим

$$R_0 = R_0(\theta_1, \theta_2) = \Phi\left(\frac{m_Z}{\sigma_Z}\right) + \Delta R_1(\theta_1, \theta_2) + \Delta R_2(\theta_1, \theta_2), \qquad (9.19)$$

где

$$\Delta R_1(\theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \Phi\left(\frac{m_Z + \dfrac{\sigma_Z^2}{\theta_1}}{\sigma_Z}\right) \exp\left(\frac{m_Z}{\theta_1} + \frac{\sigma_Z^2}{2\theta_1^2}\right) \leqslant 0, \qquad (9.20)$$

$$\Delta R_2(\theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_2}{\theta_2 - \theta_1}\left[1 - \Phi\left(\frac{m_Z + \dfrac{\sigma_Z^2}{\theta_2}}{\sigma_Z}\right)\right] \exp\left(\frac{m_Z}{\theta_2} + \frac{\sigma_Z^2}{2\theta_2^2}\right) \geqslant 0. \qquad (9.21)$$

Исследуем полученное выражение (9.19). Во-первых, при $\theta_1 = 0$ имеем $\Delta R_1 = 0$, и выражение (9.19) соответствует случаю положительной аддитивной ошибки. Аналогично, при $\theta_2 = 0$ получим $\Delta R_2 = 0$, и (9.19) характеризует случай отрицательной аддитивной ошибки. Во-вторых, используя предельные переходы, убеждаемся, что при $|\theta_1| \to \infty$ и любом θ_2 имеем $\Delta R_1 \to \Phi(m_Z/\sigma_Z)$ и $\Delta R_2 \to 0$, т.е. в этом случае $R_0 = 0$, и бесконечная отрицательная ошибка приводит к нулевому значению ВБР. Аналогично, при $\theta_2 \to \infty$ и любом θ_1 получим $\Delta R_1 = 0$ и $\Delta R_2 = 1 - \Phi(m_Z/\sigma_Z)$, откуда $R_0 = 1$, т.е. бесконечная положительная ошибка приводит к абсолютной надежности. Сделанные выводы легко интерпретируются в рамках рассматриваемой модели. Кроме того, они убеждают, что θ_1 и θ_2 в формуле (9.19) играют роль характеристик значимости соответственно отрицательной и положительной ошибок. Это, однако, не означает, что при $|\theta_1| = |\theta_2|$ мы должны получить $R_0 = \Phi(m_Z/\sigma_Z)$. Дело в том, что уже только факт наличия случайной аддитивной погрешности приводит к увеличению дисперсии переменной состояния, т.е. $\sigma_W > \sigma_Z$, откуда следует $R_0 < \Phi(m_Z/\sigma_Z)$.

Для расчетного случая гауссовой аддитивной ошибки получить выражение для условной оценки ВБР несложно, так как при нормальном распределении Z и ϵ обобщенная переменная состояния W также имеет гауссову плотность распределения с параметрами $m_W = m_Z + \epsilon_0$ и $\sigma_W^2 = \sigma_Z^2 + \sigma_\epsilon^2$. Поэтому окончательное выражение для R_0 может быть записано следующим образом:

$$R_0 = P\{W > 0\} = \Phi\left(\frac{m_Z + \epsilon_0}{\sqrt{\sigma_Z^2 + \sigma_\epsilon^2}}\right). \qquad (9.22)$$

Для ряда теоретических моделей работоспособности можно априорно допустить отсутствие систематической погрешности. Тогда

$$R_0 = \Phi\left(\frac{m_Z}{\sqrt{\sigma_Z^2 + \sigma_\epsilon^2}}\right). \qquad (9.23)$$

Из выражения (9.23) следует, что даже в случае симметричной погрешности ϵ уточненная оценка надежности ниже теоретической. И только при $\sigma_\epsilon = 0$ эти оценки совпадают.

9.3.4. Задача определения m_Z и σ_Z. Решение этой задачи обеспечивается допущениями (1) и (2). В общем случае функция $\varphi(\cdot)$ является нелинейной, что затрудняет получение точных значений числовых характеристик переменной состояния Z. Регулярное приближенное решение может быть получено с помощью приближенного представления функции $\varphi(\cdot)$. Одним из возможных способов является следующий. Для определения $m_Z = E[\varphi(X)]$ приблизим функцию $\varphi(X)$ отрезком ряда Тейлора. Если ограничиться членами второго порядка малости, то приближенную формулу для m_Z запишем в виде

$$m_Z \cong \varphi(m_X) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N} \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial m_i \partial m_j} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j, \tag{9.24}$$

где

$$m_X = (m_1, m_2, \ldots, m_N), \quad m_i = E[X_i], \quad \sigma_i^2 = E[X_i^2] - m_i^2,$$

$$\rho_{ij} = \frac{E[X_i X_j] - m_i m_j}{\sigma_i \sigma_j}.$$

Эти величины по допущению составляют априорную информацию. Для определения σ_Z^2 отрезком ряда Тейлора приближенно заменяется функция $(\varphi(X) - m_Z)^2$. Если ограничиться разложением до второго порядка малости включительно, то выражение для дисперсии переменной состояния запишется в виде

$$\sigma_Z^2 = [\varphi(m_X) - m_Z]^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N} \sum \left[\frac{\partial \varphi}{\partial m_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial m_j} + \right.$$
$$\left. + (\varphi(m_X) - m_Z)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial m_i \partial m_j} \right] \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j. \tag{9.25}$$

Более подробно вопрос получения числовых характеристик переменных состояния с помощью различных приближений функций работоспособности изложен в [38].

9.3.5. Переменные во времени условные оценки ВБР. Рассмотрим задачу определения ВБР R_τ вида (9.12), предполагая, что переменная состояния $Z(t)$ является стационарным случайным процессом, а выбросы $W(t)$ за нулевой уровень – редкие события, т.е. надежность объекта высока. К данной задаче приводят многочисленные практические ситуации, когда объект подвергается непродолжительным по времени случайным стационарным нагрузкам при неизменном значении несущей способности.

Задача определения условной оценки ВБР $R_\tau = R_\tau(\theta)$ в общем случае может быть решена в следующей последовательности. Вначале фиксируем, т.е. примем неслучайной, значение аддитивной погрешности модели ϵ и найдем вероятность $r_\tau(\epsilon)$ невыброса переменной состояния за уровень $(-\epsilon)$:

$$r_\tau(\epsilon) = P\{Z(t) > -\epsilon, \ 0 \leqslant t \leqslant \tau\}. \tag{9.26}$$

Для определения $r_\tau(\epsilon)$ будем использовать способ, основанный на приближенном определении вероятности редкого выброса стационарного процесса $Z(t)$ за уровень $(-\epsilon)$ через среднее число выбросов в единицу времени $\nu(\epsilon)$ [7]. Если обозначить через $q_\tau^{(k)}(\epsilon)$ вероятность k пересечений в одну сторону (т.е. либо с положительной, либо с отрицательной производной) уровня $(-\epsilon)$, то вероятность хотя бы одного выброса запишется так:

$$q_\tau(\epsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} q_\tau^{(k)}(\epsilon). \tag{9.27}$$

Среднее число выбросов за время τ можно представить как математическое ожидание дискретной случайной величины количества выбросов:

$$N_\tau(\epsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} k q_\tau^{(k)}(\epsilon). \tag{9.28}$$

Предположение о редком выбросе процесса $Z(t)$ равносильно допущению о том, что вероятности двух и более выбросов пренебрежимо малы по сравнению с вероятностью одного выброса. Отсюда, отбрасывая в формулах (9.27) и (9.28) все члены, начиная со второго, будем иметь $q_\tau(\epsilon) = q_\tau^{(1)}(\epsilon)$ и $N_\tau(\epsilon) = q_\tau^{(1)}(\epsilon)$, или $q_\tau(\epsilon) = N_\tau(\epsilon)$. Для вероятности (9.26) вследствие этого запишем

$$r_\tau(\epsilon) = 1 - q_\tau(\epsilon) = 1 - N_\tau(\epsilon).$$

Поскольку процесс $Z(t)$ является стационарным, среднее число выбросов в единицу времени $\nu(\epsilon)$ не зависит от текущего времени, т.е. $N_\tau(\epsilon) = \tau\nu(\epsilon)$. Вследствие этого для вероятности $r_\tau(\epsilon)$ будем иметь следующее приближенное выражение:

$$r_\tau(\epsilon) \cong 1 - \nu(\epsilon)\tau. \tag{9.29}$$

Из формулы (9.28) видно, что $N_\tau(\epsilon) \geqslant q_\tau(\epsilon)$, откуда следует $r_\tau(\epsilon) \geqslant 1 - \nu(\epsilon)\tau$, т.е. величина $1 - \nu(\epsilon)\tau$ для $r_\tau(\epsilon)$ является оценкой снизу. Этот факт свидетельствует в пользу практической приемлемости приближенного выражения (9.29), так как сделанные с его помощью выводы "идут в запас надежности".

Для определения среднего числа выбросов процесса $Z(t)$ в единицу времени за уровень $(-\epsilon)$ воспользуемся известной формулой Райса [28]. Ограничиваясь в дальнейшем случаем гауссова стационарного случайного процесса, запишем выражение для $\nu(\epsilon)$:

$$\nu(\epsilon) = \frac{a_Z}{\sigma_Z}\exp\left[-\frac{(-\epsilon - m_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right], \tag{9.30}$$

где

$$a_Z = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\left.\frac{d^2 K_Z(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}}. \tag{9.31}$$

Корреляционная функция переменной состояния $K_Z(\tau)$ определяется, исходя из начальных допущений (1) и (2), подобно m_Z и σ_Z. Подставляя выражение (9.30) в (9.29), запишем окончательное соотношение для вероятности невыброса процесса $Z(t)$ за фиксированный уровень $(-\epsilon)$:

$$r_\tau(\epsilon) = 1 - \frac{a_Z \tau}{\sigma_Z} \exp\left[-\frac{(\epsilon + m_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right]. \tag{9.32}$$

Возвращаясь к исходной ситуации, когда аддитивная ошибка считается случайной, искомую условную оценку ВБР $R_\tau(\theta)$ определим, вычислив математическое ожидание $r_\tau(\epsilon)$ по множеству возможных значений переменной $\epsilon \in \mathrm{E}$:

$$R_\tau(\theta) = \int_{\mathrm{E}} r_\tau(\epsilon) f_\epsilon(\epsilon; \theta)\, d\epsilon,$$

или, более подробно,

$$R_\tau(\theta) = 1 - \frac{a_Z \tau}{\sigma_Z} \int_{\mathrm{E}} f_\epsilon(\epsilon; \theta) \exp\left[-\frac{(\epsilon + m_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] d\epsilon. \tag{9.33}$$

Полученное выражение (9.33) позволяет найти условные оценки ВБР для двух выбранных расчетных случаев аддитивной погрешности ϵ.

Случай обобщенной экспоненциальной погрешности ϵ сводится к подстановке плотности (9.13) в интеграл соотношения (9.33), что приводит к следующему выражению:

$$R_\tau(\theta_1, \theta_2) = 1 - \frac{a_Z \tau}{\sigma_Z} \left\{ \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{\epsilon}{\theta_1} - \frac{(\epsilon + m_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] d\epsilon + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\epsilon}{\theta_2} - \frac{(\epsilon + m_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] \right\} d\epsilon. \tag{9.34}$$

С помощью прямых вычислений убеждаемся в справедливости следующих соотношений:

$$\int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{\epsilon}{\theta_1} - \frac{(\epsilon + m_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] d\epsilon =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \sigma_Z \exp\left(\frac{m_Z}{\theta_1} + \frac{\sigma_Z^2}{2\theta_1^2}\right) \Phi\left(\frac{m_Z + \dfrac{\sigma_Z^2}{\theta_1}}{\sigma_Z}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{\epsilon}{\theta_2} - \frac{(\epsilon + m_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] d\epsilon =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \sigma_Z \exp\left(\frac{m_Z}{\theta_2} - \frac{\sigma_Z^2}{2\theta_2^2}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{m_Z + \dfrac{\sigma_Z^2}{\theta_2}}{\sigma_Z}\right)\right].$$

После подстановки этих интегралов в выражение (9.34) запишем окончательную формулу для $R_\tau(\theta_1, \theta_2)$:

$$R_\tau(\theta_1,\theta_2) = 1 - \frac{2\pi a_Z \tau}{\theta_2 - \theta_1}\left\{\exp\left(\frac{m_Z}{\theta_1} + \frac{\sigma_Z^2}{2\theta_1^2}\right)\Phi\left(\frac{m_Z + \frac{\sigma_Z^2}{\theta_1}}{\sigma_Z}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(\frac{m_Z}{\theta_2} + \frac{\sigma_Z^2}{2\theta_2^2}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{m_Z + \frac{\sigma_Z^2}{\theta_2}}{\sigma_Z}\right)\right]\right\}. \qquad (9.35)$$

Исследуем полученное выражение (9.35). Во-первых, при $\theta_2 \to 0+0$ имеем

$$\exp\left(\frac{m_Z}{\theta_2} + \frac{\sigma_Z^2}{2\theta_2^2}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{m_Z + \frac{\sigma_Z^2}{\theta_2}}{\sigma_Z}\right)\right] \to 0,$$

откуда следует оценка ВБР для случая отрицательной аддитивной ошибки модели:

$$R_\tau(\theta_1, 0) = 1 + \frac{\sqrt{2\pi}\, a_Z \tau}{\theta_1} \exp\left(\frac{m_Z}{\theta_1} + \frac{\sigma_Z^2}{2\theta_1^2}\right)\Phi\left(\frac{m_Z + \frac{\sigma_Z^2}{\theta_1}}{\sigma_Z}\right). \qquad (9.36)$$

По аналогии для положительной ошибки будем иметь

$$R_\tau(0, \theta_2) = 1 - \frac{\sqrt{2\pi}\, a_Z \tau}{\theta_2} \exp\left(\frac{m_Z}{\theta_2} + \frac{\sigma_Z^2}{2\theta_2^2}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{m_Z + \frac{\sigma_Z^2}{\theta_2}}{\sigma_Z}\right)\right]. \qquad (9.37)$$

Во-вторых, необходимо исследовать область применения выражения (9.36). Дело в том, что оно является приближенным и справедливо лишь для случая, когда выброс процесса является редким событием. В то же время при увеличении $|\theta_1|$ это свойство может нарушиться. Представим (9.36) в виде

$$R_\tau(\theta_1, 0) = \left(1 - \frac{a_Z \tau}{\sigma_Z} e^{-\frac{m_Z^2}{2\sigma_Z^2}}\right) + \Delta R_\tau(\theta_1), \qquad (9.38)$$

где выражение в круглых скобках суть теоретическая вероятность невыброса в предположении нулевой ошибки, а $\Delta R_\tau(\theta_1)$ – поправка за счет существования аддитивной ошибки модели работоспособности,

$$\Delta R_\tau(\theta_1) = a_Z \tau \left[\frac{1}{\sigma_Z} e^{-\frac{m_Z^2}{2\sigma_Z^2}} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\theta_1} e^{\frac{m_Z}{\theta_1} + \frac{\sigma_Z^2}{2\theta_1^2}} \Phi\left(\frac{m_Z + \frac{\sigma_Z^2}{\theta_1}}{\sigma_Z}\right)\right]. \qquad (9.39)$$

Исследуем поправку $\Delta R_\tau(\theta_1)$. Найдем предел $\Delta R_\tau(\theta_1)$ при $\theta_1 \to 0-0$. Предварительно с помощью правила Лопиталя определим предел второго слагаемого $y(\theta_1)$:

$$\lim_{\theta_1 \to 0-0} y(\theta_1) = \lim_{\theta_1 \to 0-0} \frac{\sqrt{2\pi}}{\theta_1} \exp\left(\frac{m_Z}{\theta_1} + \frac{\sigma_Z^2}{2\theta_1^2}\right) \Phi\left(\frac{m_Z + \dfrac{\sigma_Z^2}{\theta_1}}{\sigma_Z}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_Z} e^{-\frac{m_Z^2}{2\sigma_Z^2}}.$$

Сравнивая полученное значение предела с первым слагаемым формулы (9.39), убеждаемся, что $\Delta R_\tau(\theta_1) \to 0$ при $\theta_1 \to 0-0$. Этот факт имеет достаточно убедительную интерпретацию: если среднее значение ошибки стремится к нулю, то условная оценка ВБР стремится к своему теоретическому значению R_τ. В то же время при $\theta_1 \to -\infty$ имеем $y(\theta_1) \to 0$ и $R_\tau(\theta_1) \to 1$. Это противоречит логике, так как при увеличении абсолютной величины средней ошибки в данной ситуации оценка ВБР должна уменьшаться и в пределе становится равной нулю. Причина указанного противоречия кроется в приближенности формулы (9.32), которая, исходя из основных предположений, использованных при ее выводе, может применяться для расчета больших вероятностей $(R_\tau(\theta_1) \geqslant 0{,}9)$.

Установим область значений параметра θ_1, при которых могут быть использованы формулы (9.35) и (9.36). Исходим из того, что при известных m_Z и σ_Z абсолютная величина ошибки ϵ удовлетворяет условию $r_\tau(\epsilon) \geqslant$ $\geqslant 0{,}9$, или, используя (9.32),

$$\frac{a_Z\tau}{\sigma_Z} \exp\left[-\frac{(\epsilon + m_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] \leqslant 0{,}1.$$

Решая это неравенство для случая пересечения процессом $Z(t)$ уровня $(-\epsilon)$ сверху вниз, получим

$$\epsilon \geqslant -m_Z + \sigma_Z \sqrt{-2\ln\frac{0{,}1\sigma_Z}{a_Z\tau}} = \epsilon_*.$$

Предельное значение для θ_1 определим из условия того, что вероятность выполнения этого неравенства совпадает с вероятностью практически достоверного события, т.е.

$$\int_{\epsilon_*}^{0} -\frac{1}{\theta_1} e^{-\epsilon/\theta_1} d\epsilon = 0{,}99 \Rightarrow \theta_{1*} = \frac{\epsilon_*}{\ln 0{,}01}.$$

Окончательно интервал значений θ_1, для которых могут быть использованы формулы (9.35) и (9.36), составляет

$$\frac{-m_Z + \sigma_Z\sqrt{-2\cdot\ln\dfrac{0{,}1\sigma_Z}{a_Z\tau}}}{\ln 0{,}01} \leqslant \theta_1 \leqslant 0.$$

Это условие следует учитывать при выборе априорного распределения для θ_1.

Случай *гауссовой аддитивной погрешности* более прост. Условная оценка ВБР зависит в данном случае от параметров ϵ_0 и σ_ϵ (соответственно систематической погрешности и среднего квадратического отклонения погрешности). Для определения $R_\tau(\epsilon_0, \sigma_\epsilon)$ будем использовать не общее выражение (9.33), а более простые соображения. Поскольку $R_\tau(\epsilon_0, \sigma_\epsilon) = P\{Z(t) + \epsilon > 0, 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$, при гауссовом распределении $Z(t)$ и ϵ их сумма также имеет гауссово распределение с математическим ожиданием $m_Z + \epsilon_0$ и корреляционной функцией $K_W(\tau) = \sigma_\epsilon^2 + K_Z(\tau)$, где $K_Z(\tau)$ – корреляционная функция процесса $Z(t)$. Используя для определения вероятности $R_\tau(\epsilon_0, \sigma_\epsilon) = P\{W(t) > 0, 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$ подход, приводящий к формуле (9.32), получим

$$R_\tau(\epsilon_0, \sigma_\epsilon) = 1 - \frac{a_W \tau}{\sigma_W} \exp\left(-\frac{m_W^2}{2\sigma_W^2}\right),$$

где

$$a_W = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{d^2 K_W(\tau)}{d\tau^2}}\bigg|_{\tau=0}.$$

Нетрудно убедиться, что $a_W = a_Z$. Поэтому окончательное выражение для $R_\tau(\epsilon_0, \sigma_\epsilon)$ записывается следующим образом:

$$R_\tau(\epsilon_0, \sigma_\epsilon) = 1 - \frac{a_Z \tau}{\sqrt{\sigma_Z^2 + \sigma_\epsilon^2}} \exp\left[-\frac{(m_Z + \epsilon_0)^2}{2(\sigma_Z^2 + \sigma_\epsilon^2)}\right]. \tag{9.40}$$

9.3.6. Способ определения числовых характеристик m_Z, σ_Z и a_Z. Будем исходить из допущений (1) и (2). Вектор первичных переменных X представим в виде случайных процессов $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_K(t)\}$ и случайный величин $\zeta = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_L\}$, $K + L = N$. Ограничимся случаем, когда только действующие на объект нагрузки являются случайными процессами, а физико-механические характеристики не зависят от времени. Анализ большого числа условий работоспособности для несущих конструкций и изделий механического типа показывает, что нагрузочные факторы входят в функцию работоспособности аддитивно в виде некоторой обобщенной нагрузки $S(t) = a_1\xi_1(t) + \ldots + a_K\xi_K(t)$, где a_j – неслучайные постоянные. Кроме того, любую функцию работоспособности можно представить в виде

$$\varphi(\xi(t), \zeta) = Q(\zeta) - S(\xi(t)), \tag{9.41}$$

где Q зависит только от физико-механических характеристик и геометрических параметров объекта и называется *несущей способностью*. Теоретическая модель объекта, по существу, сводится к установлению зависимости $Q(\zeta)$.

Пусть в соответствии с допущением (2) для вектора первичных переменных заданы числовые характеристики, порядок которых ограничим рамками линейной корреляционной теории. Для случайного вектора ζ заданы математические ожидания m_{ζ_i}, средние квадратические отклонения σ_{ζ_i} и корреляционная матрица $\tilde{\rho}_\zeta = (\rho_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, L$; $j = 1, 2, \ldots, L$. Для векторного случайного процесса $\xi(t)$ заданы математические ожидания m_{ξ_i}, авто-$(K_i(\tau))$ и взаимно-$(K_{ij}(\tau))$ корреляционные функции, $i = 1, 2, \ldots, K$; $j = 1, 2, \ldots, K$. Задача определения m_Z, σ_Z и a_Z с помощью указанной совокупности исходных данных может быть решена в следующей последовательности.

Шаг 1. Определяем математическое ожидание m_Q и среднее квадратическое отклонение σ_Q несущей способности Q. Для этого используем формулы (9.24) и (9.25) для $\varphi = Q$.

Шаг 2. Определяем математическое ожидание m_S и корреляционную функцию $K_S(\tau)$ обобщенной нагрузки $S(t)$:

$$m_S = \sum_{i=1}^{K} a_i m_{\xi_i}, \quad K_S(\tau) = \sum_{i=1}^{K} a_i^2 K_i(\tau) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant K} \sum a_i a_j K_{ij}(\tau). \tag{9.42}$$

Эти формулы приведены, в частности, в [43].

Шаг 3. Исходя из соотношения (9.41), находим математическое ожидание $m_Z = m_Q - m_S$ и корреляционную функцию $K_Z(\tau)$ переменной состояния $Z(t) = Q - S(t)$:

$$K_Z(\tau) = \sigma_Q^2 + K_S(\tau). \tag{9.43}$$

К формуле (9.43) приводят следующие рассуждения. По определению корреляционной функции имеем

$$K_Z(\tau) = E[(Z(t) - m_Z)(Z(t+\tau) - m_Z)] = E[(\mathring{Q} - \mathring{S}(t))(\mathring{Q} - \mathring{S}(t+\tau))],$$

где $\mathring{Q} = Q - m_Q$, $\mathring{S}(t) = S(t) - m_S$. Учитывая независимость Q и $S(t)$, получаем

$$K_Z(\tau) = E[\mathring{Q}^2] + E[\mathring{S}(t)\mathring{S}(t+\tau)] = \sigma_Q^2 + K_S(\tau).$$

Дисперсия процесса $Z(t)$ по определению равна

$$\sigma_Z^2 = K_Z(0) = \sigma_Q^2 + K_S(0) = \sigma_Q^2 + \sigma_S^2.$$

Шаг 4. Исходя из формулы (9.31), с учетом (9.43) определяем

$$a_Z = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-K_Z''(0)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-K_S''(0)}.$$

Описанная процедура является замкнутой.

§ 9.4. Байесовское оценивание вероятности безотказной работы в отсутствии экспериментальных данных

9.4.1. Общая процедура байесовского оценивания. Существо байесовского оценивания применительно к данной задаче заключается в приписывании неизвестному параметру θ аддитивной погрешности ϵ некоторого априорного распределения $h(\theta)$, которое характеризует степень неопределенности информации о погрешности модели. Для реализации байесовской процедуры получения оценки ВБР необходимы:

а) априорная плотность распределения $h(\theta)$, $\theta \in \Theta$;

б) функциональная зависимость между вектором параметров θ и ВБР в виде $R = R(\theta)$;

в) функция потерь $L(\hat{R}, R)$, которая по смыслу характеризует потери, возникающие в результате замены истинного значения ВБР его оценкой $\hat{R}$.

В соответствии с постановкой задачи нас будут интересовать точечная оценка R^* и байесовская нижняя доверительная граница $\underline{R}_\gamma^*$ ВБР с уровнем доверия γ. Точечная оценка определяется путем минимизации функции среднего априорного риска:

$$R^* = \arg\min_{\hat{R}} \int_{\Theta} L(\hat{R}, R(\theta)) h(\theta) d\theta. \tag{9.44}$$

Для определения $\underline{R}^*_\gamma$ необходимо решить уравнение

$$\int_{\underline{R}^*_\gamma \leqslant R(\theta) \leqslant 1} h(\theta) d\theta = \gamma. \tag{9.45}$$

Выбор функции потерь $L(\hat{R}, R)$ произведем в соответствии с широко распространенным в теории надежности правилом: завышение оцениваемого показателя хуже его занижения. Отражением этого правила в теории байесовского оценивания может служить функция потерь, введенная в [147]:

$$L(\hat{R}, R(\theta)) = \begin{cases} K_1(\hat{R} - R(\theta))^2, & \text{если} \quad \hat{R} \leqslant R(\theta), \\ K_1(\hat{R} - R(\theta))^2 + K_2(\hat{R} - R(\theta)), & \text{если} \quad \hat{R} > R(\theta). \end{cases} \tag{9.46}$$

Функция потерь (9.46) не очень удобна при проведении практических расчетов, но обладает рядом достоинств. Задаваясь различным соотношением коэффициентов K_1 и K_2, мы можем регулировать степень нежелательности завышения оценкой $\hat{R}$ истинного значения ВБР и его занижения. Так, при $K_1 = 0$ и $K_2 = 1$ превышение оценкой ВБР ее истинного значения исключается. При $K_2 = 0$ функция (9.46) трансформируется в квадратичную. Последнюю мы будем использовать наиболее часто в последующих выводах.

Из трех перечисленных аспектов остался невыясненным вопрос выбора априорной плотности $h(\theta)$. Как отмечалось ранее, существуют три разновидности $h(\theta)$:

а) априорные распределения, основанные на прежних эмпирических данных;

б) субъективные априорные, характеризующие неформализованный опыт разработчика;

в) априорные распределения, описывающие отсутствие знаний о параметре.

Несомненно, что первый вид априорного распределения имеет преимущества над остальными, поскольку базируется на фактических данных, характеризующих состояние информации о параметрах ошибки теоретической модели. Однако при наличии большого числа данных о расхождении между истинной и теоретической моделями работоспособности разработчик с помощью различного рода эмпирических коэффициентов модифицирует теоретическую модель, приближая ее к реальной. После этого исчезает потребность в построении по этим данным априорного распределения $h(\theta)$. К сожалению, данная ситуация является сколь желаемой, столь же и редкой.

В большинстве случаев разработчик располагает существенно малым числом данных о погрешности модели работоспособности, т.е. выборками, на основании которых невозможно получение достоверной оценки априорного распределения. Тем не менее эти данные формируют у разработчика определенное мнение о погрешности модели работоспособности, которое он постарается выразить количественно, в частности, с помощью коэффициента безопасности. Именно в такой ситуации существует возможность построения априорного распределения. Изучим особенности построения априорного распределения на конкретном примере с условием работоспособности (9.7). Из соображений удобства дальнейших рассуждений перейдем к его безразмерной форме

$$\left(\frac{T_{\text{кр}}(X)}{A} - \frac{T}{A}\right) + \frac{\epsilon}{A} > 0,$$

где $A = E[T_{\text{кр}}(X)]$ – неслучайное значение средней несущей способности. Всегда в дальнейшем будем считать, что общий вид условия работоспособности

$$\varphi(X) + \epsilon > 0$$

носит безразмерный характер, а ϵ – относительная ошибка теоретической модели.

Пусть разработчик твердо знает, что предельное значение коэффициента безопасности равно η. Согласно соотношению (9.8) соответствующая квантиль относительной ошибки составляет $\epsilon_p = -(\eta - 1)/\eta$. Более соответствует фактическому состоянию информации о погрешности модели задание промежутка априорной неопределенности для коэффициента безопасности в виде $[1, \eta]$, т.е. утверждение носит менее категоричный характер: коэффициент безопасности принимает некоторое значение из промежутка. Соответствующий промежуток для квантили ϵ_p равен $E_\epsilon = [-(\eta - 1)/\eta, 0]$. Теперь возможно привлечение более тонкой информации. Разработчик должен оценить шансы принятия величиной погрешности тех или иных значений из промежутка E_ϵ, т.е. задать априорное распределение $h(\theta)$, например, в одном из трех видов, представленных на рис. 9.2. В первом случае имеем равномерное априорное распределение, во втором преимущество отдается значениям параметра ошибки, близким к предельному,

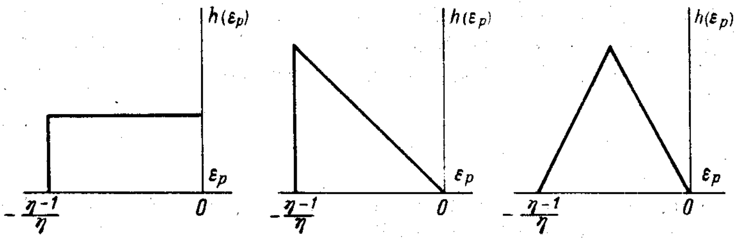


Рис. 9.2. Виды априорной плотности для квантили аддитивной погрешности модели

в третьем – близким к среднему. Подчеркнем еще раз, что построение априорной плотности в общем случае следует неформальным представлениям разработчика.

В рассматриваемой ситуации $\eta > 1$, что соответствует отрицательной аддитивной ошибке ϵ, для которой мы использовали плотность распределения (9.14) с параметром θ_1, имеющим смысл средней ошибки. Переход от $h(\epsilon_p)$ к $h(\theta_1)$ осуществить нетрудно, учитывая линейную зависимость между этими характеристиками:

$$\theta_1 = k\epsilon_p,$$

в которой коэффициент k определяется условием

$$\int_{-\epsilon_p}^{0} f_\epsilon(\epsilon;\ \theta_1)d\epsilon = p \Rightarrow k = -\frac{1}{\ln(1-p)}.$$

В частности, если $\eta = 1{,}2$ и в соответствии с этим принято равномерное априорное распределение для ϵ_p в промежутке $E_\epsilon = [-0{,}01667;\ 0]$, то при $p = 0{,}99$ параметр θ_1 равномерно распределен в промежутке $E_\theta = [-0{,}0362;\ 0]$, т.е. предельное значение средней относительной отрицательной погрешности модели составляет 3,62 %.

Разработчику, лишенному какой-либо информации о характеристике погрешности, для построения априорного распределения можно рекомендовать проведение хотя бы нескольких испытаний, в ходе которых фиксируются значения погрешностей $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m$. Даже при малом m можно найти несмещенную оценку средней ошибки $\hat{\theta}_1$ и принять ее в качестве опорного значения при построении априорной плотности $h(\theta_1)$. В качестве промежутка E_ϵ можно выбрать доверительный интервал для θ_1 и задать на нем равномерное априорное распределение. Заметим, что при таком подходе выбор априорного распределения формализуется и разработчик избавляется от необходимости принимать волевое решение.

В заключение рассмотрения этого вопроса исследуем возможность использования неинформативных (или несобственных) априорных распределений, характеризующих полное отсутствие знания о величине погрешности. Для неинформативной априорной плотности согласно [149] справедливо соотношение

$$\int_{\Theta} h(\theta)d\theta = \infty.$$

Исследуем возможность получения содержательного вывода о ВБР для случая гауссовой аддитивной ошибки с нулевой систематической составляющей, когда единственным параметром ошибки является σ_ϵ и условная оценка ВБР имеет вид (9.23). В соответствии с теорией Джеффриса [149] абсолютное незнание в отношении σ_ϵ описывается плотностью распределения

$$h(\sigma_\epsilon) \propto \frac{1}{\sigma_\epsilon}, \quad 0 \leqslant \sigma_\epsilon < \infty.$$

Использование квадратичной функции потерь приводит в данном случае к следующей байесовской оценке ВБР:

$$R^* = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \Phi\left(\frac{m_Z}{\sqrt{\sigma_Z^2 + \sigma_\epsilon^2}}\right)\frac{d\sigma_\epsilon}{\sigma_\epsilon}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\sigma_\epsilon}{\sigma_\epsilon}}.$$

Анализ полученного выражения показывает, что величина R^* сводится к неопределенности типа ∞/∞. Следовательно, использование неинформативных априорных распределений приводит к неопределенному суждению о ВБР. Сделанный вывод, однако, не означает, что несобственные априорные не могут быть использованы для получения содержательного вывода о надежности при наличии экспериментальных данных.

9.4.2. Оценки ВБР для фиксированного момента времени. Рассмотрение данного вопроса проведем отдельно для обобщенной экспоненциальной и гауссовой ошибок модели работоспособности.

Пусть ошибка ϵ подчиняется распределению с плотностью (9.13) и известны априорные плотности распределения $h_1(\theta_1)$, $\theta_1 \in \Theta_1 = [\theta_1', \theta_1''] \subset (-\infty, 0]$ и $h_2(\theta_2)$, $\theta_2 \in \Theta_2 = [\theta_2', \theta_2''] \subset [0, \infty)$; предполагаем априорную независимость θ_1 и θ_2. В соответствии с общим выражением (9.44) для квадратичной функции потерь будем иметь

$$R_0^* = \int\limits_{\Theta_1 \times \Theta_2}\int R_0(\theta_1, \theta_2) h_1(\theta_1) h_2(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \tag{9.47}$$

Обозначив

$$u = u(x) = \frac{1}{\sigma_Z}\left(m_Z + \frac{\sigma_Z^2}{x}\right), \quad v = v(x) = \frac{m_Z}{x} + \frac{\sigma_Z^2}{2x^2}, \tag{9.48}$$

интеграл (9.47) перепишем в виде

$$R_0^* = \Phi\left(\frac{m_Z}{\sigma_Z}\right) + \int\limits_{\Theta_1} \theta_1 \Phi(u(\theta_1)) e^{v(\theta_1)} U_1(\theta_1) h_1(\theta_1) d\theta_1 +$$

$$+ \int\limits_{\Theta_2} \theta_2 [1 - \Phi(u(\theta_2))] e^{v(\theta_2)} U_2(\theta_2) h_2(\theta_2) d\theta_2, \tag{9.49}$$

где

$$U_1(\theta_1) = \int\limits_{\Theta_2} \frac{h_2(\theta_2)}{\theta_2 - \theta_1} d\theta_2, \quad U_2(\theta_2) = \int\limits_{\Theta_1} \frac{h_1(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} d\theta_1. \tag{9.50}$$

Формула (9.49) является окончательной для использования в вычислительном алгоритме. Функции $U_1(\theta_1)$ и $U_2(\theta_2)$ могут быть легко записаны с помощью аналитических выражений для любой из априорных плотностей, рассмотренных ранее. В частности, для равномерных $h_1(\theta_1)$ и $h_2(\theta_2)$ получим

$$U_1(\theta_1) = \ln \frac{\theta_2'' - \theta_1}{\theta_2' - \theta_1} \geqslant 0, \quad \theta_1 \in \Theta_1, \tag{9.51}$$

$$U_2(\theta_2) = \ln \frac{\theta_2 - \theta_1'}{\theta_2 - \theta_1''} \geqslant 0, \quad \theta_2 \in \Theta_2, \tag{9.52}$$

причем функции $U_1(\theta_1)$ и $U_2(\theta_2)$ обращаются в нуль, когда вырождаются соответственно $h_2(\theta_2)$ и $h_1(\theta_1)$. Это приводит к нулевому значению соответствующего слагаемого в формуле (9.49).

Процедура вычисления R_0^* для функции потерь (9.46) выглядит значительно сложнее и сводится к непосредственному решению следующей задачи:

$$R_0^* = \arg\min_{\hat{R}} \int\limits_{\Theta_1 \times \Theta_2}\int F(\theta_1, \theta_2; \hat{R}) d\theta_1 d\theta_2, \tag{9.53}$$

где

$$F(\theta_1, \theta_2; x) = \begin{cases} K_1(x - R_0(\theta_1, \theta_2))^2 h_1(\theta_1) h_2(\theta_2), & x \leqslant R_0(\theta_1, \theta_2), \\ [K_1(x - R_0(\theta_1, \theta_2))^2 + \\ + K_2(x - R_0(\theta_1, \theta_2))] h_1(\theta_1) h_2(\theta_2), & x > R_0(\theta_1, \theta_2), \end{cases} \tag{9.54}$$

а $R_0(\theta_1, \theta_2)$ задается соотношением (9.19). Избавиться от двойного интегрирования в данном случае не удается. Облегчает процедуру интегрирования тот факт, что область $\Theta_1 \times \Theta_2$ – прямоугольник, а размеры его сторон невелики.

Для определения $\underline{R}^*_{0\gamma}$ мы не будем обращаться к общему уравнению (9.45), так как в данном случае оно приводит к очень громоздкой вычислительной процедуре. Воспользуемся следующими простыми рассуждениями. Найдем два значения $\underline{\theta}_1 \in \Theta_1$ и $\underline{\theta}_2 \in \Theta_2$ такие, что

$$P\{\theta_1 > \underline{\theta}_1, \theta_2 > \underline{\theta}_2\} = \int_{\underline{\theta}_1}^{\theta_1''} \int_{\underline{\theta}_2}^{\theta_2''} h_1(\theta_1) h_2(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \gamma, \tag{9.55}$$

где γ – доверительная вероятность. Поскольку $R_0(\theta_1, \theta_2)$ согласно (9.19) является монотонно возрастающей функцией обоих аргументов, имеем

$$P\{R_0(\theta_1, \theta_2) > R_0(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2)\} = P\{\theta_1 > \underline{\theta}_1, \theta_2 > \underline{\theta}_2\}.$$

Таким образом, при известных $\underline{\theta}_1$, $\underline{\theta}_2$ байесовскую нижнюю доверительную границу $\underline{R}^*_{0\gamma}$ можно определить в следующем виде:

$$\underline{R}^*_{0\gamma} = R_0(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2). \tag{9.56}$$

Условие (9.55) не дает возможности однозначного определения значений $\underline{\theta}_1$ и $\underline{\theta}_2$. Положим дополнительно одинаковую вероятность для событий $\{\theta_1 > \underline{\theta}_1\}$ и $\{\theta_2 > \underline{\theta}_2\}$:

$$\int_{\underline{\theta}_1}^{\theta_1''} h_1(\theta_1) d\theta_1 = \int_{\underline{\theta}_2}^{\theta_2''} h_2(\theta_2) d\theta_2. \tag{9.57}$$

Рассмотрев (9.55) и (9.57) совместно, найдем

$$\int_{\underline{\theta}_1}^{\theta_1''} h_1(\theta_1) d\theta_1 = \gamma^{1/2}, \qquad \int_{\underline{\theta}_2}^{\theta_2''} h_2(\theta_2) d\theta_2 = \gamma^{1/2}. \tag{9.58}$$

Окончательно получаем, что $\underline{\theta}_1$ и $\underline{\theta}_2$ являются квантилями вероятности $1-\gamma^{1/2}$ априорных распределений соответственно с плотностями $h_1(\theta_1)$ и $h_2(\theta_2)$. Для равномерных априорных $h_1(\theta_1)$ и $h_2(\theta_2)$ имеем следуюдующую простую формулу для определения $\underline{\theta}_1$ и $\underline{\theta}_2$:

$$\underline{\theta}_k = \theta_k'' - \gamma^{1/2}(\theta_k'' - \theta_k'), \qquad k = 1, 2. \tag{9.59}$$

Таким образом, процедура нахождения $\underline{R}^*_{0\gamma}$ сводится к вычислению функции (9.19) для значений $\underline{\theta}_1$ и $\underline{\theta}_2$, определяемых соотношениями (9.58) или в частном случае (9.59).

Для случая гауссовой ошибки модели ϵ справедливы все приведенные выше рассуждения и формулы, стоит только положить $\theta_1 = \epsilon_0$ и $\theta_2 = \sigma_\epsilon$, а вместо $R_0(\theta_1, \theta_2)$ использовать $R_0(\epsilon_0, \sigma_\epsilon)$, задаваемую формулой (9.22). Такую же преемственность будут иметь все последующие рассуждения. Поэтому в дальнейшем ограничимся только первой моделью аддитивной погрешности ϵ.

9.4.3. Оценки ВБР в течение времени τ. Оставим в силе все допущения п. 9.4.2 относительно априорной плотности $h(\theta_1, \theta_2) = h_1(\theta_1)h_2(\theta_2)$, $\theta_1 \in \Theta_1$, $\theta_2 \in \Theta_2$. Выражение для априорной точечной оценки ВБР R^*_τ запишем в соответствии с общим подходом (9.44) для условной оценки ВБР вида (9.35). В предположении квадратичной функции потерь

$$R_\tau^* = 1 - \sqrt{2\pi}\, a_Z \tau \int_{\Theta_1 \times \Theta_2}\!\!\int \{\Phi(u(\theta_1))e^{v(\theta_1)} +$$

$$+ [1 - \Phi(u(\theta_2))]\} \frac{h_1(\theta_1)h_2(\theta_2)}{\theta_2 - \theta_1} d\theta_1 d\theta_2. \qquad (9.60)$$

Использование функций $U_1(\theta_1)$ и $U_2(\theta_2)$, которые ранее были введены с помощью выражений (9.50), позволяет записать R_τ^* с помощью одномерного интеграла

$$R_\tau^* = 1 - \sqrt{2\pi}\, a_Z \tau \{ \int_{\Theta_1} \Phi(u(\theta_1))e^{v(\theta_1)} h_1(\theta_1) U_1(\theta_1) d\theta_1 +$$

$$+ \int_{\Theta_2} [1 - \Phi(u(\theta_2))] e^{v(\theta_2)} h_2(\theta_2) U_2(\theta_2) d\theta_2 \}. \qquad (9.61)$$

Учитывая малость областей Θ_1 и Θ_2, для R_τ^* можно получить приближенную формулу. Для этого используем приближение

$$F(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \{ \Phi(u(\theta_1))e^{v(\theta_1)} + [1 - \Phi(u(\theta_2))]e^{v(\theta_2)} \} \cong$$

$$\cong F(\theta_{10}, \theta_{20}) + F'_{\theta_1}(\theta_{10}, \theta_{20})(\theta_1 - \theta_{10}) + F'_{\theta_2}(\theta_{10}, \theta_{20})(\theta_2 - \theta_{20}),$$

где θ_{i0} – априорное м.о. параметра θ_i, с помощью которого запишем

$$R_\tau^* \cong 1 - \frac{\sqrt{2\pi}\, a_Z \tau}{\theta_{20} - \theta_{10}} \{\Phi(u(\theta_{10}))e^{v(\theta_{10})} + [1 - \Phi(u(\theta_{20}))]e^{v(\theta_{20})}\}. \quad (9.62)$$

Судя по выражению (9.62), полученная приближенная оценка зависит от априорных средних θ_{10} и θ_{20} соответственно параметров θ_1 и θ_2. Формула (9.62), равно как и точное выражение (9.61), имеют правильную интерпретацию: $|\theta_{10}|\uparrow \Rightarrow R_\tau^*\downarrow$, $\theta_{20}\uparrow \Rightarrow R_\tau^*\uparrow$.

Для функции потерь вида (9.46) процедура оценки ВБР получается более громоздкой:

$$R_\tau^* = \arg\min_{\hat R} \int_{\Theta_1 \times \Theta_2}\!\!\int Y(\theta_1, \theta_2; \hat R) d\theta_1 d\theta_2,$$

где

$$Y(\theta_1, \theta_2; y) = \begin{cases} K_1[y - R_\tau(\theta_1, \theta_2)]^2 h_1(\theta_1)h_2(\theta_2), & y \leqslant R_\tau(\theta_1, \theta_2), \\ [K_1(y - R_\tau(\theta_1, \theta_2))^2 + \\ + K_2(y - R_\tau(\theta_1, \theta_2))] h_1(\theta_1)h_2(\theta_2), & y > R_\tau(\theta_1, \theta_2). \end{cases}$$

Для определения байесовской нижней доверительной границы ВБР используем подход п. 9.4.2, согласно которому

$$\underline{R}_{\tau\gamma}^* = R_\tau(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2),$$

где $\underline{\theta}_1$ и $\underline{\theta}_2$ определяются соотношениями (9.58), а в случае равномерных априорных – конечной формулой (9.59).

9.4.4. Байесовские оценки ВБР, учитывающие неопределенность исходных данных. Как следует из полученных в п. 9.4.2 выражений, байесовские оценки ВБР для фиксированного момента времени зависят от m_Z и σ_Z, которые являются параметрами распределения переменной состояния Z и определяются с помощью множества числовых характеристик κ_X вектора первичных переменных X по формулам (9.24), (9.25). Очень часто в практических ситуациях приходится иметь дело с исходными данными, несущими в себе элемент неопределенности. В частности, если в рамках линейной корреляционной теории κ_X состоит из м.о. первичных переменных (характеризующих номинальные значения), с.к.о. (характеризующих разбросы) и коэффициентов корреляции (характеризующих связи между переменными), то относительно последних известны, как правило, очень ориентировочные значения. Например, часто можно лишь утверждать, что коэффициент корреляции положителен и никакой другой информации нет. Аналогичное положение может иметь место также с характеристиками разброса. Адекватной формой представления указанных исходных данных являются промежутки неопределенности K_i с априорными распределениями $h(\kappa_i)$ на них, причем, как правило, $h(\kappa_i)$ будут иметь вид априорных плотностей. Если известно, что значение какого-либо параметра κ_k определено однозначно и равно $\kappa_k^{(0)}$, то для него принимаем априорную плотность в виде дельта-функции $h_k(\kappa_k) = \delta(\kappa_k - \kappa_k^{(0)})$, соответственно промежуток K_k стягивается в точку $\kappa_k^{(0)}$. Таким образом, форма представления множества κ_X с помощью априорных распределений является обшей для строго определенных и неопределенных исходных данных. Ниже предлагается способ учета неопределенности исходных данных при оценивании ВБР по модели работоспособности с аддитивной погрешностью.

Полученные в п. 9.4.2 выражения для байесовской оценки ВБР зависят от математического ожидания m_Z и среднего квадратического отклонения σ_Z: $R_0 = R_0(m_Z, \sigma_Z)$. В свою очередь с помощью формул (9.24) и (9.25) имеем

$$m_Z = p(\kappa_X), \quad \sigma_Z = q(\kappa_X). \tag{9.63}$$

Будем считать заданной априорную плотность $h_i(\kappa_i)$ для каждой числовой характеристики $\kappa_i \in K_i$. В практических ситуациях для невырожденных в точку промежутков K_i можно принять априорные плотности $h_i(\kappa_i)$ равномерными. Будем полагать также независимость κ_i, т.е.

$$h(\kappa_X) = \prod_{i=1}^{m} h_i(\kappa_i), \quad \kappa_X \in K = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_m. \tag{9.64}$$

В принятых допущениях можно сформулировать задачу определения байесовской оценки R_0^{**}, оптимальной в смысле минимума априорного риска (вторая звездочка появляется за счет повторной оптимальности по области K). Задача заключается в нахождении оценки R_0^{**}, обеспечивающей минимум априорного риска

$$G(\hat{R}_0) = \int_K L(\hat{R}_0, R_0^*(p(\kappa_X), q(\kappa_X))h(\kappa_X)d\kappa_X \tag{9.65}$$

при заданной априорной плотности $h(\kappa_X)$ и функции потерь L. Если в (9.65) используется квадратичная функция потерь, то

$$R_0^{**} = \int_K R_0^*(p(\kappa_X), q(\kappa_X))h(\kappa_X)d\kappa_X. \tag{9.66}$$

Сложность многомерного интегрирования практически исключает возможность использования выражения (9.66) в конкретных приложениях. Упрощение может быть достигнуто, если, исходя из $h(\kappa_X)$ и преобразований $p(\kappa_X)$ и $q(\kappa_X)$, перейти к априорной плотности для m_Z и σ_Z. Эта задача может быть решена приближенно следующим образом.

Ввиду малости промежутков K_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) представим $p(\kappa_X)$ и $q(\kappa_X)$ с помощью линейных отрезков разложения Тейлора

$$m_Z = p(\kappa_X) \cong p(\kappa_X^{(0)}) + \sum_{i=1}^{m} p_i'(\kappa_X^{(0)})(\kappa_i - \kappa_i^{(0)}),$$

$$\sigma_Z = q(\kappa_X) \cong q(\kappa_X^{(0)}) + \sum_{i=1}^{m} q_i'(\kappa_X^{(0)})(\kappa_i - \kappa_i^{(0)}).$$

Отсюда найдем математические ожидания $m_Z^{(0)}$, $\sigma_Z^{(0)}$ и дисперсии s_m^2, s_σ^2 соответственно параметров m_Z и σ_Z:

$$m_Z^{(0)} = p(\kappa_X^{(0)}), \quad \sigma_Z^{(0)} = q(\kappa_X^{(0)}), \tag{9.67}$$

$$s_m^2 = \sum_{i=1}^{m} p_i'^2(\kappa_X^{(0)})\sigma_{\kappa_i}^2, \quad s_\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} q_i'^2(\kappa_X^{(0)})\sigma_{\kappa_i}^2, \tag{9.68}$$

где

$$\kappa_i^{(0)} = \int_{\mathrm{K}_i} \kappa_i h_i(\kappa_i) d\kappa_i, \quad \sigma_{\kappa_i}^2 = \int_{\mathrm{K}_i} \kappa_i^2 h_i(\kappa_i) d\kappa_i - \kappa_i^{(0)2}.$$

В дальнейшем аппроксимируем априорные плотности $h_m(m_Z)$ и $h_\sigma(\sigma_Z)$ соответственно параметров m_Z и σ_Z некоторым двупараметрическим семейством. При большой размерности κ_Z, учитывая соображения центральной предельной теоремы, можно использовать нормальную аппроксимацию для $h_m(m_Z)$ и $h_\sigma(\sigma_Z)$. Изложенный подход позволяет вместо m-мерного интеграла (9.66) для определения R_0^{**} использовать двумерный интеграл, с помощью которого будем иметь

$$R_0^{**} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} R_0^*(m_Z, \sigma_Z) h_m(m_Z) h_\sigma(\sigma_Z) dm_Z d\sigma_Z. \tag{9.69}$$

Наконец, вместо интеграла (9.69) можно использовать его оценку, которую получим, приблизив $R_0^*(m_Z, \sigma_Z)$ под знаком интеграла отрезком ряда Тейлора с сохранением членов до второго порядка малости включительно:

$$R_0^{**} \cong R_0^*(m_Z^{(0)}, \sigma_Z^{(0)}) + a_2 s_m^2 + b_2 s_\sigma^2,$$

где

$$a_2 = \frac{\partial^2 R_0^*(m_Z^{(0)}, \sigma_Z^{(0)})}{\partial m_Z^{(0)2}}, \quad b_2 = \frac{\partial^2 R_0^*(m_Z^{(0)}, \sigma_Z^{(0)})}{\partial \sigma_Z^{(0)2}}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы для ситуации, когда ВБР зависит от времени, а в качестве оценки используется R_T^*, определение которой производится в соответствии с п. 9.4.3.

9.4.5. Численный пример. Для численного примера выберем важный для работоспособности разнообразных датчиков механического и гидравлического типа элемент – витую цилиндрическую пружину. Примем, что пружина подвержена воздействию центрально приложенной статической силы T (растягивающей или сжимающей). Сечение пружины работает на кручение.

причем максимальное касательное напряжение вычисляется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_к}{W_к},$$

где $M_к$ – крутящий момент, $W_к$ – момент сопротивления сечения пружины кручению. Для $M_к$ в [6] предлагается следующая формула:

$$M_к = \frac{kTD}{2},$$

в которой D – средний диаметр пружины, а k – коэффициент, учитывающий кривизну витков и форму сечения. В дальнейшем примем, что пружина изготовлена из круглой проволоки при индексе $c = D/d$ (d – диаметр проволоки), большем 4. В этом случае для поправочного коэффициента в [6] рекомендуется зависимость

$$k = \frac{4c-1}{4c+1} + \frac{0{,}615}{c}.$$

Учитывая изложенные соображения, условие работоспособности запишем в виде

$$\varphi(T, \tau_т, D, d) = \tau_т - \tau_{\max}(T, d, D) > 0, \tag{9.70}$$

где $\tau_т$ – предел текучести материала, а $\tau_{\max}$ вычисляется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{8}{\pi} T\left(\frac{4D-d}{4D+d} \cdot \frac{D}{d^3} + 0{,}615 \cdot \frac{1}{d^2}\right).$$

Как видно из представленной модели работоспособности, вектор первичных переменных X образуют следующие случайные величины: T, $\tau_т$, D, d.

Из соображений удобства расчетов перейдем к безразмерному аналогу условия работоспособности (9.70). Для этого разделим все члены неравенства (9.70) на число $A = E[\tau_т]$. Получим следующее выражение для теоретической переменной состояния:

$$Z = \frac{\tau_т}{A} - \frac{\tau_{\max}(T, d, D)}{A}.$$

Все дальнейшие расчеты проведем в соответствии с пп. 9.4.1, 9.4.2. В качестве материала пружины принимаем сталь 50ХВА. Числовые характеристики для расчетов ВБР (множество κ_X) приведены в табл. 9.1. По этим данным с помощью формул (9.24), (9.25) при $\rho_{ij} = 0$ получаем $m_Z = 1{,}488 \cdot 10^{-1}$, $\sigma_Z = 0{,}5109 \cdot 10^{-1}$. Если ВБР пружины рассчитывать

Таблица 9.1

Исходные данные для расчета ВБР витой пружины

X_i	T, Н	$\tau_т$, Н/м²	D, м	d, м
m_i	$0{,}5 \cdot 10^3$	$0{,}95 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-3}$
σ_i	10	$0{,}95 \cdot 10^7$	10^{-3}	$0{,}667 \cdot 10^{-4}$

только, исходя из теоретической модели, то значение ВБР составит R = = 0,9982.

Получим теперь априорную байесовскую оценку с учетом погрешности модели. Пусть достоверно известно, что аддитивная ошибка модели приводит к завышению несущей способности пружины. Это соответствует расчетному случаю с отрицательной аддитивной погрешностью, плотность распределения которой имеет вид (9.14), в котором параметр θ имеет смысл среднего значения ошибки. Установим промежуток априорной неопределенности для θ, воспользовавшись рекомендациями п. 9.4.1. Исходя из того, что при статическом нагружении следует использовать коэффициент безопасности η = 1,3 [6], определим предельное значение аддитивной ошибки $\epsilon_p = -(\eta - 1)/\eta = -0{,}23$. С помощью рекомендаций п. 9.4.1 найдем предельное значение средней ошибки (при p = 0,99):

$$\theta_{\text{п}} = -\frac{\epsilon_p}{\ln(1-p)} \approx -0{,}05.$$

Учитывая гипотетический неформальный опыт, примем в качестве промежутка априорной неопределенности $E_\theta = [-0{,}05;\ -0{,}01]$ и будем считать, что θ имеет равномерное априорное распределение в E_θ. Принятое априорное распределение соответствует ситуации, когда разработчик полагает, что средняя ошибка модели находится в пределах от -5% до -1%, и не может отдать предпочтение какому-либо значению из этого

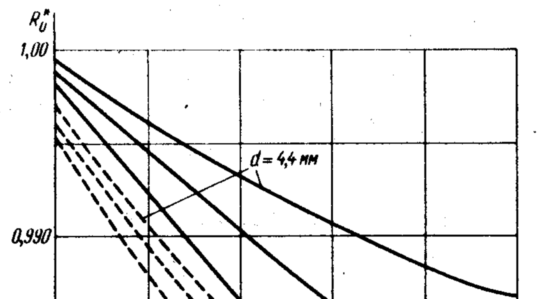


Рис. 9.3. Зависимость точечной оценки ВБР от величины предельного значения средней ошибки модели работоспособности (сплошная линия – без учета погрешностей исходных данных, штриховая – с учетом погрешностей)

промежутка. Выбрав квадратичную функцию потерь, точечную оценку ВБР определим по формуле (9.49) при $\theta_1 = \theta$ и $\theta_2 = 0$. Получим $R_0^* = 0{,}9778$. Столь существенное уменьшение оценки ВБР по сравнению с теоретической объясняется тем, что по сделанному допущению теоретическая модель работоспособности всегда завышает реальную несущую способность. На рис. 9.3 представлена зависимость априорной оценки ВБР от левой границы θ' промежутка неопределенности для θ при $\theta'' = 0$ и различных значениях математического ожидания диаметра проволоки d. Из рисунка видно, что с увеличением абсолютной величины θ' оценка ВБР падает. В то же время, увеличивая диаметр проволоки, можно обеспечить любое требуемое значение ВБР. На том же рис. 9.3 пунктирной линией представлены оценки ВБР, учитывающие неопределенность исходных данных. При расчетах мы принимали, что значение математического ожидания нагрузки $m_т$ и ее разброс $\sigma_т$ имеют симметричный 10%-ный промежуток неопределенности. Отмечается уменьшение оценки ВБР вследствие наличия указанной неопределенности.

При значениях числовых характеристик теоретической переменной состояния $m_Z = 0{,}1488$ и $\sigma_Z = 0{,}05109$ были проведены многочисленные расчеты априорных оценок ВБР для различных промежутков априорной неопределенности $\Theta_1 = [\theta_1', \theta_1'']$ и $\Theta_2 = [\theta_2', \theta_2'']$. В табл. 9.2. приведены результаты расчетов оценок ВБР R_0^* и $\underline{R}_{0\gamma}^*$, соответствующие случаю $\theta_1'' = \theta_2' = 0$ при различных значениях θ_1' и θ_2'' (значения $\underline{R}_{0\gamma}^*$ указаны в скобках). Из таблицы видно, что с расширением промежутка априорной неопределенности для отрицательной ошибки оценка ВБР уменьшается. В то же время расширение промежутка неопределенности для положительной ошибки приводит к увеличению байесовской оценки ВБР. Сделанные выводы совпадают с предполагаемым качественным характером зависимости ВБР от величины и знака погрешности теоретической модели работоспособности.

Таблица 9.2

Априорные оценки ВБР при $\theta_1'' = \theta_2' = 0$

θ_2''	θ_1'			
	−0,06	−0,04	−0,02	0,00
0,06	0,9746 (0,8966)	0,9904 (0,9555)	0,9978 (0,9908)	0,9993 (0,9987)
0,04	0,9715 (0,8948)	0,9889 (0,9544)	0,9974 (0,9904)	0,9991 (0,9986)
0,02	0,9670 (0,8930)	0,9867 (0,9533)	0,9966 (0,9900)	0,9988 (0,9984)
0,00	0,9599 (0,8920)	0,9826 (0,9526)	0,9951 (0,9897)	0,9982 (0,9982)

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ С ПОГРЕШНОСТЬЮ: АПОСТЕРИОРНЫЕ БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ

§ 10.1. Функция правдоподобия для результатов независимых испытаний

Настоящая глава является продолжением главы 9 и обобщением ее результатов на случай апостериорного оценивания, когда известны экспериментальные данные о параметрах исследуемого объекта. В практике создания объектов техники обычно проводятся испытания двух видов: исследовательские и функциональные. Целью первых является установление фактических уровней функциональной способности объекта путем проведения испытаний в лабораторных или стендовых условиях. Вторые служат целям проверки работоспособности в эксплуатационных условиях или близких к ним. В рассматриваемой ниже задаче происходит объединение результатов испытаний указанных видов с целью уточнения оценки погрешности теоретической модели работоспособности и вероятности безотказной работы. Решение задачи следует общей схеме байесовского статистического оценивания, включающей определение функции правдоподобия, построение апостериорного распределения и нахождение соответствующей оценки, исходя из выбранной функции потерь. В конце главы приводятся примеры использования предложенных процедур байесовского апостериорного оценивания при решении ряда прикладных задач.

10.1.1. Функция правдоподобия для результатов исследовательских испытаний. Существо исследовательских испытаний состоит в том, что каждый опыт проводится до отказа, в результате чего выясняется фактический уровень функциональной способности объекта. Если испытания проводятся при постоянно возрастающей нагрузке, то значение нагрузки, вызвавшей отказ, принимается в качестве истинного значения функциональной способности.

Возвратимся к примеру § 9.1. Задачей исследовательских испытаний на примере тонкостенного стержня является получение эмпирической информации, позволяющей уточнить формулу Эйлера (9.3). Пусть первый поставленный на испытание элемент имеет модуль упругости E_1, длину l_1 и момент инерции J_1. Нагрузку, приведшую к отказу, обозначим T_1^*. Значение T_1^* является фактическим уровнем несущей способности для первого опыта. В то же время теоретическое значение несущей способности определяется по формуле (9.3) и в первом опыте равно

$$T_{\text{кр}1} = \frac{\pi^2 E_1 J_1}{\mu^2 l_1^2}.$$

Ясно, что разность $T_1^* - T_{\text{кр}1}$ определяет погрешность формулы Эйлера для первого опыта. Если использовать относительную аддитивную погрешность ϵ и обобщенную модель работоспособности вида (9.5), то факт возникновения отказа в первом опыте формально запишется следующим образом:

$$\frac{T_{\text{кр}1}}{A} - \frac{T_1^*}{A} + \epsilon_1 = 0,$$

где $A = E[T_{\text{кр}}]$, и экспериментальное значение относительной аддитивной погрешности ϵ в первом опыте однозначно определится этим выражением, т.е. $\epsilon_1 = -(T_{\text{кр}1} - T_1^*)/A$. Аналогично определяется значение ϵ_j для каждого исследовательского испытания.

В общем случае для обобщенной модели работоспособности вида $\varphi(X) + \epsilon > 0$ значение аддитивной погрешности ϵ_j определяется выражением

$$\epsilon_j = -\varphi(x_j), \tag{10.1}$$

где x_j – реализация вектора первичных переменных, которая фиксируется в j-м опыте. Если механизм получения x_j следует схеме независимых испытаний, а случайная величина аддитивной погрешности ϵ подчиняется вероятностному распределению с плотностью $f_\epsilon(\epsilon;\theta)$, то функция правдоподобия согласно [23] имеет вид

$$l_{\text{и}}(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}) = \prod_{j=1}^{n_{\text{и}}} f(\epsilon_j;\theta), \tag{10.2}$$

где $\underset{\sim}{\epsilon}$ – совокупность всех значений ϵ_j $(j = 1, 2, \ldots, n_{\text{и}})$.

Запишем конечные выражения для двух введенных в § 9.3 расчетных случаев.

Случай обобщенной экспоненциальной ошибки:

$$l_{\text{и}}(\theta_1, \theta_2 \mid \underset{\sim}{\epsilon}) = \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^{n_{\text{и}}}} \exp\left[-\left(\frac{\omega_1}{\theta_1} + \frac{\omega_2}{\theta_2}\right)\right]. \tag{10.3}$$

Здесь статистики ω_1 и ω_2 вычисляются по формулам

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{k_{\text{и}}} \xi_i, \quad \omega_2 = \sum_{i=1}^{l_{\text{и}}} \zeta_i,$$

а совокупности $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_{\text{и}}})$ и $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{l_{\text{и}}})$ соответственно образуются отрицательными и положительными элементами выборки $\underset{\sim}{\epsilon}$, причем $k_{\text{и}} + l_{\text{и}} = n_{\text{и}}$.

Случай гауссовой ошибки без систематического смещения:

$$l_{\text{и}}(\sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{\epsilon}) = \frac{1}{(2\pi)^{n_{\text{и}}/2}\,\sigma_\epsilon^{n_{\text{и}}}} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right), \tag{10.4}$$

где

$$s^2 = \sum_{j=1}^{n_{\text{и}}} \epsilon_j^2.$$

10.1.2. Функция правдоподобия для результатов функциональных испытаний. Отличительной особенностью функциональных испытаний является то, что они проводятся в условиях, совпадающих с эксплуатационными или близкими к ним. Вследствие этого, как правило, не удается в каждом испытании зафиксировать факт отказа. В результате каждого испытания может наблюдаться одно из трех событий: A_1 – работоспособное состояние объекта, A_2 – отказ, A_3 – неработоспособное состояние объекта. Отметим, что события A_3 и A_2 не являются совпадающими. Отказ наблюдается, когда действующая нагрузка становится равной функциональной способности (в этом случае обобщенная переменная состояния W принимает нулевое значение). В то же время неработоспособное состояние соответствует ситуации, при которой нагрузка выше функциональной способности; обобщенная переменная состояния в этом случае будет отрицательной.

Предположим, что в j-м опыте фиксируется некоторая реализация вектора первичных переменных x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Каждый элемент из x_j может быть либо измерен в опыте, либо его значение мы принимаем равным расчетному. Это позволяет расчетным путем в соответствии с принятой теоретической моделью работоспособности определить значение Z. Эмпирическое значение теоретической переменной состояния для каждого из трех возможных видов исходов опыта будем обозначать: для A_1 – z_j' ($j = 1, 2, \ldots, r$), для A_2 – z_j^* ($j = 1, 2, \ldots, d$), для A_3 – z_j'' ($j = 1, 2, \ldots, s$). Эти данные дают количественную информацию о значении аддитивной погрешности ϵ для каждого из опытов. В самом деле, пусть в j-м опыте наблюдается работоспособное состояние (событие A_1), т.е. обобщенная переменная состояния $W_j > 0$. Поскольку всегда $W = Z + \epsilon$, из условия $W_j > 0$ имеем $\epsilon_j > -z_j'$. Полная характеристика всех исходов опыта представлена в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Характеристика функционального испытания

Эмпирическая информация	Результат j-го испытания		
	A_1	A_2	A_3
Качественная информация об испытании	$W_j > 0$	$W_j = 0$	$W_j < 0$
Количественная информация, полученная с помощью теоретической модели	$z_j' = \varphi(x_j)$	$z_j^* = \varphi(x_j)$	$z_j'' = \varphi(x_j)$
Количественная информация относительно аддитивной ошибки	$\epsilon_j > -z_j'$	$\epsilon_j = -z_j^*$	$\epsilon_j < -z_j''$

Результаты функциональных испытаний представим в виде множества $\underset{\sim}{z}$, включающего $\underset{\sim}{z}' = (z_1', \ldots, z_r'),\ \underset{\sim}{z}^* = (z_1^*, \ldots, z_d^*),\ \underset{\sim}{z}'' = (z_1'', \ldots, z_s'')$. Если эти испытания рассматривать как экспериментальное исследование аддитивной погрешности ϵ, то вектор $\underset{\sim}{z}$ можно считать цензурированной слева и справа выборкой случайной величины ϵ. При известной плотности распределения $f_\epsilon(\epsilon;\ \theta)$ функцию правдоподобия для выборки $\underset{\sim}{z}$ в соответствии с [23] запишем следующим образом:

$$l_\Phi(\theta \mid \underset{\sim}{z}) = \prod_{j=1}^{r} \int_{-z_j'}^{\infty} f_\epsilon(\epsilon;\theta)\,d\epsilon \prod_{j=1}^{d} f_\epsilon(-z_j^*;\theta) \prod_{j=1}^{s} \int_{-\infty}^{-z_j''} f_\epsilon(\epsilon;\theta)\,d\epsilon,$$

или

$$l_\Phi(\theta \mid \underset{\sim}{z}) = \prod_{j=1}^{r} [1 - F_\epsilon(-z_j';\theta)] \prod_{j=1}^{d} f_\epsilon(-z_j^*;\theta) \prod_{j=1}^{s} F_\epsilon(-z_j'';\theta), \qquad (10.5)$$

где $F_\epsilon(\epsilon;\ \theta)$ – функция распределения, соответствующая $f_\epsilon(\epsilon;\ \theta)$.

Функция правдоподобия для расчетного случая обобщенной экспоненциальной ошибки. Выражение для плотности $f_\epsilon(\epsilon;\theta)$ было ранее записано в виде (9.13), а соответствующая функция распределения может быть представлена следующим образом:

$$F_\epsilon(\epsilon;\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} -\dfrac{\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\exp\left(-\dfrac{\epsilon}{\theta_1}\right), & \epsilon < 0, \\[2ex] 1 - \dfrac{\theta_2}{\theta_2-\theta_1}\exp\left(-\dfrac{\epsilon}{\theta_2}\right), & \epsilon \geqslant 0. \end{cases} \qquad (10.6)$$

Представим каждый из векторов $\underset{\sim}{z}', \underset{\sim}{z}^*, \underset{\sim}{z}''$ в виде объединения двух векторов, соответственно состоящих из отрицательных и неотрицательных компонент: $\underset{\sim}{z}' = \{\underset{\sim}{\xi}', \underset{\sim}{\zeta}'\}$, $\underset{\sim}{z}^* = \{\underset{\sim}{\xi}^*, \underset{\sim}{\zeta}^*\}$, $\underset{\sim}{z}'' = \{\underset{\sim}{\xi}'', \underset{\sim}{\zeta}''\}$. Размерности новых вектсров обозначим соответственно r_- и r_+ для $\underset{\sim}{\xi}'$ и $\underset{\sim}{\zeta}'$, d_- и d_+ для $\underset{\sim}{\xi}^*$ и $\underset{\sim}{\zeta}^*$, s_- и s_+ для $\underset{\sim}{\xi}''$ и $\underset{\sim}{\zeta}''$. Ясно, что выборка $\underset{\sim}{\xi} = \{\underset{\sim}{\xi}', \underset{\sim}{\xi}^*, \underset{\sim}{\xi}''\}$ имеет размерность $m_- = r_- + d_- + s_-$, а выборка $\underset{\sim}{\zeta} = \{\underset{\sim}{\zeta}', \underset{\sim}{\zeta}^*, \underset{\sim}{\zeta}''\}$ – размерность $m_+ = r_+ + d_+ + s_+$. Функция правдоподобия (10.5) после ряда очевидных преобразований запишется окончательно следующим образом:

$$l_\Phi(\theta_1, \theta_2 \mid \underset{\sim}{z}) = Q(\theta_1, \theta_2; d, r_-, s_+) P(\theta_1, \theta_2; \omega_1, \omega_2) \times$$

$$\times R_+(\theta_1, \theta_2; \underset{\sim}{\zeta}') S_-(\theta_1, \theta_2; \underset{\sim}{\xi}''), \qquad (10.7)$$

где

$$Q(\theta_1, \theta_2;\ d, r_-, s_+) = \frac{|\theta_1|^{s_+}\theta_2^{r_-}}{(\theta_2-\theta_1)^{d+r_-+s_+}}, \qquad (10.8)$$

$$P(\theta_1, \theta_2; \omega_1, \omega_2) = \exp\left(\frac{\omega_1}{\theta_1} + \frac{\omega_2}{\theta_2}\right). \qquad (10.9)$$

$$\omega_1 = \sum_{j=1}^{d_+} \zeta_j^* + \sum_{j=1}^{s_+} \zeta_j'', \ \omega_2 = \sum_{j=1}^{d_-} \xi_j^* + \sum_{j=1}^{r_-} \xi_j',$$

$$R_+(\theta_1, \theta_2; \zeta') = \prod_{j=1}^{r_+} \left[1 + \frac{\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \exp\left(\frac{\zeta_j'}{\theta_1}\right)\right], \tag{10.10}$$

$$S_-(\theta_1, \theta_2, \underset{\sim}{\xi}'') = \prod_{j=1}^{s_-} \left[1 - \frac{\theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \exp\left(\frac{\xi_j''}{\theta_2}\right)\right]. \tag{10.11}$$

Отметим одну интересную особенность полученной функции правдоподобия. Для этого рассмотрим частный случай обобщенной экспоненциальной ошибки, для которого $\theta_2 = 0$, вследствие чего всегда $\epsilon < 0$. Функция распределения (10.6) в этом случае имеет вид

$$F_\epsilon(\epsilon; \theta_1, 0) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{\epsilon}{\theta_1}\right), \epsilon < 0, \\ 1, \epsilon \geqslant 0. \end{cases} \tag{10.12}$$

Если предположение $\epsilon < 0$ верно, то наблюдаемые в опыте значения z_j' и z_j^* должны быть всегда неотрицательными. В самом деле, поскольку $W = Z + \epsilon$ и $W > 0$, при $\epsilon \leqslant 0$ получим $z_j' > 0$. Аналогично, при $W = 0$ и $\epsilon \leqslant 0$ получим $z_j^* \geqslant 0$. Для неработоспособного состояния ($W < 0$) значения z_j'' могут быть как отрицательными, так и положительными. Но для отрицательных значений z_j'' в соответствии с (10.12) имеем $F_\epsilon(-z_j''; \theta_1, 0) = 1$, т.е. отрицательные значения z_j'' для функции правдоподобия являются неинформативными. Сделанный вывод имеет очевидное логическое объяснение. Если $\epsilon \leqslant 0$, т.е. теоретическая модель завышает истинную функциональную способность, то при $Z < 0$ всегда $W < 0$. Таким образом, даже не проводя испытаний, мы смогли бы записать большое число отрицательных значений z_j'' и утверждать, что при всех этих значениях в опытах будут реализовываться неработоспособные состояния. Другими словами, без проведения испытаний мы смогли бы найти их исходы и использовать их в функции правдоподобия. Однако этого не происходит, так как в силу условия $F_\epsilon(-z_j''; \theta_1, 0) = 1 \ \forall z_j'' < 0$ функция правдоподобия не реагирует на отрицательные значения z_j''. Это замечательное свойство рассматриваемой байесовской процедуры свидетельствует в пользу ее правильности.

Функция правдоподобия для гауссовой ошибки без систематического смещения. Здесь допускаются как положительные, так и отрицательные значения теоретической переменной состояния. Окончательное выражение для функции правдоподобия имеет вид

$$l_\Phi(\sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{z}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \cdot \frac{1}{\sigma_\epsilon^d} \exp\left(-\frac{\omega^{*2}}{2\sigma_\epsilon^2}\right) \prod_{j=1}^{s} \left[1 - \Phi\left(\frac{z_j''}{\sigma_\epsilon}\right)\right] \prod_{j=1}^{r} \Phi\left(\frac{z_j'}{\sigma_\epsilon}\right), \tag{10.13}$$

где $\omega^{*2} = \sum_{j=1}^{d} z_j^{*2}$.

§ 10.2. Апостериорное распределение параметров ошибки теоретической модели работоспособности

В общем случае апостериорное распределение вектора θ определяется с помощью теоремы Байеса. В настоящем параграфе подробно исследуются различные, представляющие практический интерес вопросы получения апостериорных плотностей. Отдельно рассмотрены плотности $\hbar_и(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon})$ и $\hbar_ф(\theta \mid \underset{\sim}{z})$, которые характеризуют соответственно исследовательские и функциональные испытания, а также плотность распределения $\hbar(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}, \underset{\sim}{z})$, соответствующая совокупности испытаний обоих видов. Изучена возможность использования несобственных априорных распределений Джеффриса. Отдельно рассмотрена дискретная форма представления априорного и апостериорного распределения.

10.2.1. Апостериорное распределение параметров погрешности ϵ для исследовательских испытаний. В соответствии с теоремой Байеса

$$\hbar_и(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}) \backsim h_и(\theta) l_и(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}). \tag{10.14}$$

Для расчетного случая обобщенной экспоненциальной ошибки ϵ с функцией правдоподобия (10.3) апостериорная плотность согласно (10.14) записывается следующим образом:

$$\hbar_и(\theta_1, \theta_2 \mid \underset{\sim}{\epsilon}) = \frac{1}{\beta_и} \cdot \frac{h_1(\theta_1) h_2(\theta_2)}{(\theta_2 - \theta_1)^{n_и}} \exp\left[-\left(\frac{\omega_1}{\theta_1} + \frac{\omega_2}{\theta_2}\right)\right], \quad \theta_1 \in \Theta_1, \theta_2 \in \Theta_2, \tag{10.15}$$

где нормирующий множитель $\beta_и$ определяется интегралом

$$\beta_и = \iint\limits_{\Theta_1 \times \Theta_2} \frac{h_1(\theta_1) h_2(\theta_2)}{(\theta_2 - \theta_1)^{n_и}} \exp\left[-\left(\frac{\omega_1}{\theta_1} + \frac{\omega_2}{\theta_2}\right)\right] d\theta_1 d\theta_2. \tag{10.16}$$

Для вычисления интеграла (10.16) даже при равномерных априорных $h_1(\theta_1)$ и $h_2(\theta_2)$ необходимо прибегнуть к численным методам.

Рассмотрим возможность использования несобственных априорных $h_1(\theta_1)$ и $h_2(\theta_2)$ для получения $\hbar_и(\theta_1, \theta_2 \mid \underset{\sim}{\epsilon})$. Судя по теории Джеффриса [149], отсутствию информации о параметрах θ_1 и θ_2 соответствуют следующие априорные плотности:

$$h_1(\theta_1) \backsim -\frac{1}{\theta_1}, \theta_1 \in (-\infty, 0], \quad h_2(\theta_2) \backsim \frac{1}{\theta_2}, \quad \theta_2 \in [0, \infty). \tag{10.17}$$

Подставляя (10.17) в (10.15), получим

$$\hbar_и(\theta_1, \theta_2 \mid \underset{\sim}{\epsilon}) \backsim \frac{1}{|\theta_1| \theta_2 (\theta_2 - \theta_1)^{n_и}} \exp\left[-\left(\frac{\omega_1}{\theta_1} + \frac{\omega_2}{\theta_2}\right)\right], \quad -\infty < \theta_1 \leqslant 0, 0 \leqslant \theta_2 < \infty. \tag{10.18}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\beta_и = \int_{-\infty}^{0} d\theta_1 \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\theta_1\theta_2(\theta_2-\theta_1)^{n_и}} \exp\left[-\left(\frac{\omega_1}{\theta_1} + \frac{\omega_2}{\theta_2}\right)\right] d\theta_2 < \infty.$$

Следовательно, несмотря на то, что априорные плотности распределения являются несобственными, апостериорная плотность (10.18) является собственной и может служить основой для получения содержательного вывода о ВБР и величине погрешности.

Для расчетного случая гауссовой аддитивной ошибки без смещения апостериорная плотность имеет вид

$$\hbar_и(\sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{\epsilon}) = \frac{1}{\beta_и} \cdot \frac{h(\sigma_\epsilon)}{\sigma_\epsilon^{n_и}} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right), \quad \sigma_\epsilon \in \mathrm{E}_\sigma \subset [0, \infty), \tag{10.19}$$

где

$$\beta_и = \int_0^\infty \frac{h(\sigma_\epsilon)}{\sigma_\epsilon^{n_и}} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right) d\sigma_\epsilon.$$

Использование несобственной априорной плотности $h(\sigma_\epsilon) \backsim \sigma_\epsilon^{-1}$ приводит к собственной апостериорной, для которой

$$\hbar_и(\sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{\epsilon}) \backsim \frac{1}{\sigma_\epsilon^{n_и + 1}} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right), \quad \sigma_\epsilon \in [0, \infty). \tag{10.20}$$

Как видно из полученных выше соотношений, апостериорные плотности параметров аддитивной погрешности модели работоспособности имеют одинаковую структуру, причем для вычисления нормирующего множителя необходимо использование процедур численного интегрирования.

10.2.2. Апостериорное распределение параметров погрешности ϵ для функциональных испытаний. При заданной априорной плотности $h(\theta)$ и известной функции правдоподобия $l_ф(\theta \mid \underset{\sim}{z})$ для апостериорной плотности, соответствующей результатам функциональных испытаний, с помощью теоремы Байеса запишем

$$\hbar_ф(\theta \mid \underset{\sim}{z}) \backsim h(\theta) l_ф(\theta \mid \underset{\sim}{z}), \quad \theta \in \Theta. \tag{10.21}$$

Все дальнейшие рассуждения, связанные с получением конкретных выражений для апостериорной плотности, замыкаются на переборе возможных комбинаций $h(\theta)$ и $l_ф(\theta \mid \underset{\sim}{z})$ в правой части соотношения (10.21).

В частности, для расчетного случая обобщенной экспоненциальной погрешности с функцией правдоподобия (10.11) будем иметь

$$\begin{gathered} \hbar_ф(\theta_1, \theta_2 \mid \underset{\sim}{z}) \backsim \\ \backsim h_1(\theta_1) h_2(\theta_2) Q(\theta_1, \theta_2; d, r_-, s_+) P(\theta_1, \theta_2; \omega_1, \omega_2) \times \\ \times R_+(\theta_1, \theta_2; \zeta') S_-(\theta_1, \theta_2; \xi''), \\ \theta_1 \in \Theta_1, \ \theta_2 \in \Theta_2. \end{gathered} \tag{10.22}$$

Причем для несобственной априорной плотности $h(\theta_1, \theta_2) \backsim -\theta_1^{-1}\theta_2^{-1}$

это соотношение преобразуется следующим образом:

$$\hbar_\Phi(\theta_1, \theta_2 \mid \underset{\sim}{z}) \backsim$$
$$\backsim -\theta_1^{-1}\theta_2^{-1} Q(\theta_1, \theta_2; d, r_-, s_+) P(\theta_1, \theta_2; \omega_1, \omega_2) \times$$
$$\times R_+(\theta_1; \theta_2; \underset{\sim}{\zeta}') S_-(\theta_1, \theta_2; \xi''),$$
$$\theta_1 \in (-\infty, 0], \; \theta_2 \in [0, \infty). \qquad (10.23)$$

Исследуем возможность использования (10.23) в практических расчетах. Апостериорная плотность (10.23) является собственной, если

$$\int_{-\infty}^{0} d\theta_1 \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\mid \theta_1 \mid \theta_2} l_\Phi(\theta_1, \theta_2 \mid \underset{\sim}{z}) d\theta_2 < \infty. \qquad (10.24)$$

Анализируя выражения (10.8)–(10.11), убеждаемся, что условие (10.24) выполняется в том и только в том случае, когда хотя бы одно из чисел d, r_-, s_+ не равно нулю. При условии $d = r_- = s_+ = 0$ использовать апостериорную плотность (10.23) для получения содержательного вывода о ВБР невозможно.

Для расчетного случая гауссовой погрешности ϵ имеем

$$\hbar_\Phi(\sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{z}) \backsim \frac{h(\sigma_\epsilon)}{\sigma_\epsilon^d} \exp\left(-\frac{\omega^{*2}}{2\sigma_\epsilon^2}\right) \prod_{j=1}^{s} \left[1 - \Phi\left(\frac{z_j''}{\sigma_\epsilon}\right)\right] \prod_{j=1}^{r} \Phi\left(\frac{z_j'}{\sigma_\epsilon}\right),$$
$$\sigma_\epsilon \in \mathrm{E}_\sigma \subset [0, \infty). \qquad (10.25)$$

При несобственной априорной $h(\sigma_\epsilon) \backsim \sigma_\epsilon^{-1}$, $0 \leqslant \sigma_\epsilon < \infty$, соотношение (10.25) преобразуется:

$$\hbar_\Phi(\sigma_\epsilon \mid z) \backsim \frac{1}{\sigma_\epsilon^{d+1}} \exp\left(-\frac{\omega^{*2}}{2\sigma_\epsilon^2}\right) \prod_{j=1}^{s} \left[1 - \Phi\left(\frac{z_j''}{\sigma_\epsilon}\right)\right] \prod_{j=1}^{r} \Phi\left(\frac{z_j'}{\sigma_\epsilon}\right). \qquad (10.26)$$

Как видно из соотношения (10.26), апостериорная плотность $\hbar_\Phi(\sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{z})$ является собственной, когда хотя бы одно из чисел d или s не равно нулю.

10.2.3. Апостериорное распределение параметров погрешности ϵ по совокупности результатов исследовательских и функциональных испытаний. Если исследователь имеет возможность провести испытания двух указанных видов, то для построения апостериорной плотности, характеризующей состояние информации после окончания последнего испытания, можно использовать последовательную байесовскую процедуру. Суть этой процедуры состоит в следующем. На первом этапе, включающем исследовательские испытания, в полном соответствии с рекомендациями п. 10.2.1 определяется апостериорная плотность распределения

$$\hbar_и(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}) \backsim h(\theta) l_и(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}). \qquad (10.27)$$

Если вслед за исследовательскими проводятся функциональные испытания, то в качестве априорной плотности при определении $\hbar_\Phi(\theta \mid \underset{\sim}{z})$ более разумно использовать не $h(\theta)$, а $\hbar_и(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon})$. Тогда

$$\hbar_\Phi(\theta \mid \underset{\sim}{z}) \backsim \hbar_и(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}) l_\Phi(\theta \mid \underset{\sim}{z}). \qquad (10.28)$$

Апостериорную плотность $\hbar_\Phi(\theta \mid \underset{\sim}{z})$ следует считать окончательной для всей двухэтапной последовательности испытаний. Этот факт учтем, обозначив с помощью $\hbar(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}, \underset{\sim}{z})$ результирующую апостериорную плотность параметра θ. Подставив соотношение (10.27) в (10.28), в окончательном виде запишем

$$\hbar(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}, \underset{\sim}{z}) \propto h(\theta) l_{\text{и}}(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}) l_{\Phi}(\theta \mid \underset{\sim}{z}). \tag{10.29}$$

Произведение $l(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}, \underset{\sim}{z}) = l_{\text{и}}(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}) l_{\Phi}(\theta \mid \underset{\sim}{z})$ будем называть совокупной функцией правдоподобия. Используя выражения (10.2) и (10.5), для $l(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}, \underset{\sim}{z})$ получим

$$l(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}, \underset{\sim}{z}) =$$

$$= \prod_{j=1}^{r} [1 - F_\epsilon(-z_j'; \theta)] \prod_{j=1}^{d} f_\epsilon(-z_j^*; \theta) \prod_{j=1}^{n_{\text{и}}} f_\epsilon(\epsilon_j; \theta) \prod_{j=1}^{s} F_\epsilon(-z_j''; \theta), \ \theta \in \Theta. \tag{10.30}$$

Вспомним теперь, что в соответствии с выражением (10.1) для элементов выборки исследовательских испытаний имеем $\epsilon_j = -\varphi(x_j)$, $j = 1, \ldots, n_{\text{и}}$. Кроме того, в табл. 10.1 указано $z_j^* = -\varphi(x_j)$. Таким образом, ϵ_j и $-z_j^*$ имеют одинаковый смысл значений теоретической переменной состояния Z в момент возникновения отказа, т.е. когда действующая нагрузка становится равной функциональной способности. Отсюда можно сделать важный практический вывод: если результаты исследовательских испытаний объединить с результатами функциональных испытаний, в которых произошел отказ, то совокупная функция правдоподобия $l(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}, \underset{\sim}{z})$ совпадает с функциональной $l_{\Phi}(\theta \mid \underset{\sim}{z})$. Этот вывод позволяет использовать результаты п. 10.2.2 для определения апостериорной плотности $\hbar(\theta \mid \underset{\sim}{\epsilon}, \underset{\sim}{z})$. Для этого в выборку $\underset{\sim}{z}^*$ следует включить взятые с обратным знаком элементы выборки $\underset{\sim}{\epsilon}$, так что в дальнейшем будем считать $\underset{\sim}{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_d^*, -\epsilon_1, -\epsilon_2, \ldots, -\epsilon_{n_{\text{и}}})$. Подобный прием может быть использован и в том случае, когда при исследовательских испытаниях по каким-либо причинам допускается недостижение предельного состояния.

В заключение отметим, что апостериорная плотность распределения является исчерпывающей характеристикой погрешности модели работоспособности. Однако вследствие сложившейся в настоящее время практики делать заключение о свойствах объекта с помощью числовых критериев, знания апостериорной плотности недостаточно для оценивания ВБР объекта и величины погрешности теоретической модели работоспособности. В § 10.3 на основании полученных выше апостериорных плотностей будут найдены соответствующие числовые оценки. Более наглядный способ анализа свойств объекта дает дискретное представление априорных распределений, которое рассматривается ниже.

10.2.4. Дискретное апостериорное распределение ВБР. Используя дискретные априорные распределения параметров ошибки ϵ, найдем соответствующие апостериорные распределения ВБР. Ограничимся рассмотрением случая обобщенной экспоненциальной ошибки ϵ, подчиняющейся распределению вероятностей с плотностью (9.13). Пусть θ_1 и θ_2 имеют априорные распределения соответственно (p_{1i}, θ_{1i}), $i = 1, 2, \ldots, m$, и (p_{2k}, θ_{2k}), $k = 1, 2, \ldots, l$, причем $p_{1i} = P\{\theta_1 = \theta_{1i}\}$, $p_{2k} = P\{\theta_2 = \theta_{2k}\}$. Зная эти распределения, с помощью соотношения (9.19) можно установить априорное распределение для ВБР (p_{R_j}, R_j), $j = 1, 2, \ldots, mk$, где $R_j = R(\theta_{1i}, \theta_{1k})$, $p_{R_j} = p_{1i}p_{1k}$. Соответствие между индексом j и парой индексов (i, k) устанавливается с помощью соотношения $R_{j-1} \leqslant \leqslant R_j$, т.е. для того чтобы записать ряд распределения для ВБР R, необходимо произвести вычисления $R_{ik} = R(\theta_{1i}, \theta_{2k})$ для всех возможных пар (i, k), упорядочить полученные значения по возрастанию и пронумеровать от 1 до mk. После этого каждому значению R_j приписывается соответствующая вероятность $p_{1i}p_{2k}$. Здесь и далее полагаем, что среди R_j нет повторяющихся значений.

Используя функцию правдоподобия (10.11), с помощью теоремы Байеса в дискретном представлении найдем апостериорные вероятности $\tilde{p}_{R_j} = P\{R = R_j \mid \underset{\sim}{z}\}$:

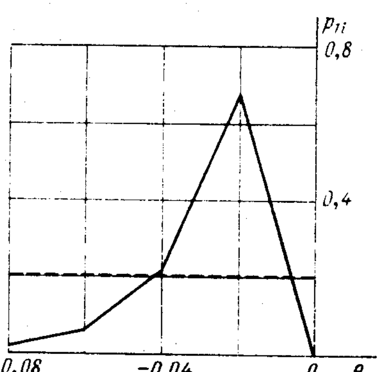
$$\tilde{p}_{R_j} = \frac{p_{R_j} l_\Phi(\theta_{1i}, \theta_{2k} \mid \underset{\sim}{z})}{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{l} p_{1i}p_{2k} l_\Phi(\theta_{1i}, \theta_{2k} \mid \underset{\sim}{z})}, \quad j = 1, 2, \ldots, mk, \tag{10.31}$$

где соответствие между j и парой индексов (i, k) устанавливается с помощью описанной выше процедуры. Ряд распределения $(\tilde{p}_{R_j}, R_j)$, $j = 1, 2, \ldots, mk$, является исчерпывающей характеристикой ВБР и более нагляден при проведении прикладного анализа по сравнению с непрерывной апостериорной плотностью. Кроме того, он свободен от известного произвола, связанного с выбором функции потерь.

Численный пример. Система автоматического регулирования описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dY}{dt} + Y^2 = (\lambda + 1)^2, \quad Y(0) = 0, \tag{10.32}$$

где λ – случайная величина, подчиняющаяся нормальному распределению



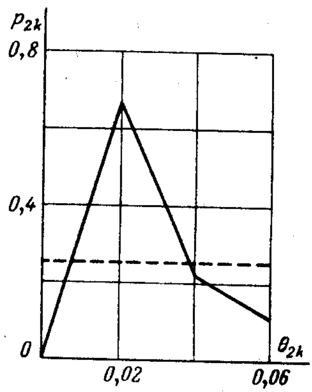


Рис. 10.1. Распределение вероятностей параметра θ_1

Рис. 10.2. Распределение вероятностей параметра θ_2

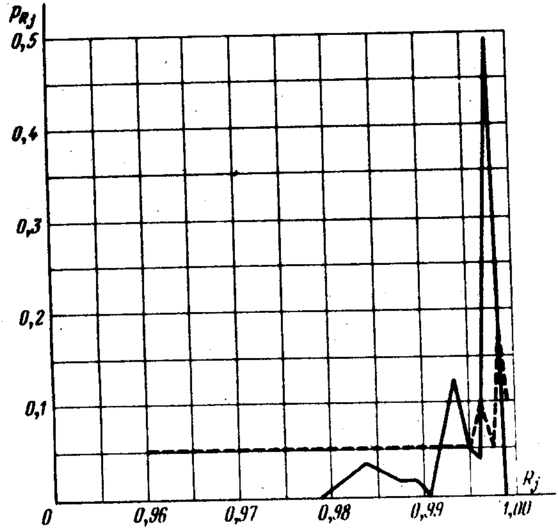


Рис. 10.3. Распределение вероятностей для ВБР

с математическим ожиданием 0 и дисперсией 0,01. Система считается работоспособной, если в момент $t = 1$ переменная Y больше значения $y_0 = 0{,}42$.

Теоретическая модель объекта (10.32) содержит аддитивную погрешность ϵ, которую можно описать обобщенным экспоненциальным распределением (9.13), причем параметры θ_1 и θ_2 содержатся в промежутках $\Theta_1 = [-0{,}08;\ 0]$, $\Theta_2 = [0;\ 0{,}06]$. Априорные распределения для θ_1 и θ_2 представлены на рис. 10.1 и 10.2 пунктирными линиями. В качестве ВБР объекта принимаем вероятность $R = P\{Z + \epsilon > 0\}$, где $Z = Y(1) - y_0$. Используя интерполяционный метод [64], получим $E[Y(1)] = 0{,}7622$, $D[Y(1)] = 0{,}01381$, откуда $m_Z = 0{,}3422$, $\sigma_Z = 0{,}1175$.

В процессе проведения семи испытаний были зафиксированы следующие значения теоретической переменной состояния: $\underset{\sim}{z}' = (0{,}2663;\ 0{,}4309;\ 0{,}3567;\ 0{,}5783;\ 0{,}2619;\ 0{,}3385;\ 0{,}4851)$, $\underset{\sim}{z}^* = \phi$, $\underset{\sim}{z}'' = \phi$. На рис. 10.1 – 10.3 представлены апостериорные распределения параметров ошибки θ_1 и θ_2, а также ВБР R. Как видно из рисунков, результаты эксперимента существенно корректируют априорные распределения (которые представлены пунктирными линиями).

§ 10.3. Байесовские апостериорные оценки

Процедура апостериорной оценки ВБР практически совпадает с процедурой априорного байесовского оценивания, описанной в § 9.4. Отличие заключается в том, что вместо априорной плотности $h(\theta)$ мы должны использовать апостериорную $\bar{h}(\theta \mid \underset{\sim}{z})$, которая получена по результатам совокупного эксперимента, включающего исследовательские и функциональные испытания. Материал настоящего параграфа излагается в следующей последовательности. Сначала рассмотрено получение оценок параметров аддитивной погрешности ϵ, а затем соответствующих оценок ВБР.

10.3.1. Апостериорные оценки погрешности теоретической модели работоспособности. Наша задача заключается в получении апостериорной оценки средней ошибки $\epsilon_0 = E[\epsilon]$ теоретической модели работоспособности для случая обобщенной экспоненциальной ошибки и оценки σ_ϵ для гауссовой ошибки без систематического смещения.

Расчетный случай обобщенной экспоненциальной ошибки. Получим зависимость $\epsilon_0 = \epsilon_0(\theta_1, \theta_2)$. С помощью (9.13) нетрудно вычислить

$$\epsilon_0 = E[\epsilon] = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon f_\epsilon(\epsilon; \theta_1, \theta_2) d\epsilon = \theta_1 + \theta_2. \tag{10.33}$$

Ввиду линейности зависимости (10.33) найдем сначала оценки параметров θ_1 и θ_2 в виде $\hat{\theta}_1^*$ и $\hat{\theta}_2^*$, а затем, суммируя их, определим оценку $\hat{\epsilon}_0^*$. Оценки $\hat{\theta}_1^*$ и $\hat{\theta}_2^*$ определим как соответствующие апостериорные средние по формулам

$$\hat{\theta}_1^* = \iint_{\Theta_1 \times \Theta_2} \theta_1 \hbar(\theta_1, \theta_2 | \underset{\sim}{z}) d\theta_1 d\theta_2, \tag{10.34}$$

$$\hat{\theta}_2^* = \iint_{\Theta_1 \times \Theta_2} \theta_2 \hbar(\theta_1, \theta_2 | \underset{\sim}{z}) d\theta_1 d\theta_2, \tag{10.35}$$

где $\hbar(\theta_1, \theta_2 | \underset{\sim}{z})$ определяется соотношением (10.22) в предположении, что выборка $\underset{\sim}{z}$ включает результаты исследовательских и функциональных испытаний. Упрощение интегралов (10.34) и (10.35) в общем случае невозможно, и для проведения практических расчетов необходимо прибегнуть к численному двумерному интегрированию.

Существует возможность определить точность оценки $\hat{\epsilon}_0^* = \hat{\theta}_1^* + \hat{\theta}_2^*$ в виде апостериорного среднего квадратического отклонения $\sigma_{\hat{\epsilon}_0^*} = \{D[\epsilon]\}^{1/2}$ с помощью следующей формулы:

$$\sigma^2_{\hat{\epsilon}_0^*} = D[\theta_1] + D[\theta_2] + 2K[\theta_1, \theta_2], \tag{10.36}$$

где

$$D[\theta_i] = \iint_{\Theta_1 \times \Theta_2} \theta_i^2 \hbar(\theta_1, \theta_2 | \underset{\sim}{z}) d\theta_1 d\theta_2 - \hat{\theta}_i^{*2}, \quad i = 1, 2,$$

$$K[\theta_1, \theta_2] = \iint_{\Theta_1 \times \Theta_2} \theta_1 \theta_2 \hbar(\theta_1, \theta_2 | \underset{\sim}{z}) d\theta_1 d\theta_2 - \hat{\theta}_1^* \hat{\theta}_2^*.$$

Расчетный случай гауссовой погрешности модели работоспособности сводится к аналогичным (но одномерным) интегралам, с помощью которых определяются оценка $\hat{\sigma}_\epsilon^*$ и ее погрешность в виде апостериорной дисперсии $D[\sigma_\epsilon]$:

$$\hat{\sigma}_\epsilon^* = \int_0^\infty \sigma_\epsilon \hbar(\sigma_\epsilon | \underset{\sim}{z}) d\sigma_\epsilon, \tag{10.37}$$

$$D[\sigma_\epsilon] = \int_0^\infty \sigma_\epsilon^2 \hbar(\sigma_\epsilon | \underset{\sim}{z}) d\sigma_\epsilon - \hat{\sigma}_\epsilon^{*2}, \tag{10.38}$$

где $\hbar(\sigma_\epsilon | \underset{\sim}{z})$ определяется соотношением (10.25) в предположении, что выборка $\underset{\sim}{z}$ включает результаты исследовательских и функциональных испытаний.

10.3.2. Оценки ВБР при фиксированных параметрах теоретической переменной состояния. Для получения оценок ВБР в случае обобщенной экспоненциальной погрешности ϵ будем исходить из условной оценки ВБР $R(\theta_1, \theta_2)$, которая определяется по формулам (9.19) для фиксированного момента времени и (9.35) для произвольного момента времени. Апостериорная плотность $\hbar(\theta_1, \theta_2|\underset{\sim}{z})$ определяется либо выражением (10.22) для собственных априорных распределений, либо выражением (10.23) для несобственных. При этом предполагается, что выборка $\underset{\sim}{z}$ включает результаты исследовательских и функциональных испытаний.

Для квадратичной функции потерь имеем следующий интеграл, позволяющий вычислить оценку ВБР $\hat{R}^*$:

$$\hat{R}^* = \iint_{\Theta_1 \times \Theta_2} R(\theta_1, \theta_2)\hbar(\theta_1, \theta_2|\underset{\sim}{z})d\theta_1 d\theta_2. \tag{10.39}$$

При использовании функции потерь вида (9.46) для определения оценки $\hat{R}^*$ имеем оптимизационную задачу, аналогичную (9.53):

$$\hat{R}^* = \arg \min_{x \in [0,1]} \iint_{\Theta_1 \times \Theta_2} F(\theta_1, \theta_2; x)d\theta_1 d\theta_2, \tag{10.40}$$

где

$$F(\theta_1, \theta_2; x) =$$

$$= \begin{cases} K_1[x - R(\theta_1, \theta_2)]^2\hbar(\theta_1, \theta_2|\underset{\sim}{z}), & x \leqslant R(\theta_1, \theta_2), \\ [K_1(x - R(\theta_1, \theta_2))^2 + K_2(x - R(\theta_1, \theta_2))]\hbar(\theta_1, \theta_2|\underset{\sim}{z}), & x > R(\theta_1, \theta_2). \end{cases}$$

Байесовская нижняя доверительная граница $\underline{R}^*_\gamma$ по аналогии с подходом п. 9.4.2 определится следующим образом:

$$\underline{R}^*_\gamma = R(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2), \tag{10.41}$$

где для определения $\underline{\theta}_1$ и $\underline{\theta}_2$ необходимо решить два трансцендентных уравнения:

$$\begin{aligned} &\int_{\underline{\theta}_1}^{\theta_1''} \int_{\theta_2'}^{\theta_2''} \hbar(\theta_1, \theta_2|\underset{\sim}{z})d\theta_1 d\theta_2 - \gamma^{1/2} = 0, \\ &\int_{\theta_1'}^{\theta_1''} \int_{\underline{\theta}_2}^{\theta_2''} \hbar(\theta_1, \theta_2|\underset{\sim}{z})d\theta_1 d\theta_2 - \gamma^{1/2} = 0. \end{aligned} \tag{10.42}$$

Случай гауссовой погрешности в вычислительном отношении более прост. Точечная оценка $\hat{R}^*$ определяется с помощью одномерного интеграла

$$\hat{R}^* = \int_{\sigma_\epsilon'}^{\sigma_\epsilon''} R(\sigma_\epsilon)\hbar(\sigma_\epsilon|\underset{\sim}{z})d\sigma_\epsilon \tag{10.43}$$

для квадратичной функции потерь либо путем решения следующей минимизационной задачи:

$$\hat{R}^* = \arg \min_{x \in [0,1]} \int_{\sigma'_\epsilon}^{\sigma''_\epsilon} F(\sigma_\epsilon ; x) d\sigma_\epsilon , \tag{10.44}$$

где

$$F(\sigma_\epsilon ; x) = \begin{cases} K_1(x - R(\sigma_\epsilon))^2 \hbar(\sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{z}), & x \leqslant R(\sigma_\epsilon), \\ [K_1(x - R(\sigma_\epsilon))^2 + K_2(x - R(\sigma_\epsilon))] \hbar(\sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{z}), & x > R(\sigma_\epsilon). \end{cases} \tag{10.45}$$

В соотношениях (10.43) – (10.45) $R(\sigma_\epsilon)$ определяется формулой (9.23) для ВБР в фиксированный момент времени t_0 или формулой (9.40) для ВБР в течение времени τ. Для апостериорной плотности $\hbar(\sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{z})$ следует воспользоваться выражением (10.25), считая, что выборка $\underset{\sim}{z}$ включает результаты исследовательских и функциональных испытаний.

Байесовскую нижнюю доверительную границу ВБР $\underline{R}^*_\gamma$ при заданном уровне доверия γ определим с помощью обычного подхода, в соответствии с которым

$$\underline{\hat{R}}^* = R(\underline{\sigma}_\epsilon), \tag{10.46}$$

а для определения $\underline{\sigma}_\epsilon$ необходимо решить уравнение

$$\int_{\underline{\sigma}_\epsilon}^{\sigma''_\epsilon} \hbar(\sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{z}) d\sigma_\epsilon - \gamma = 0. \tag{10.47}$$

10.3.3. Исследование достоверности байесовских оценок. С целью выяснения качества предлагаемого выше способа оценивания ВБР на базе рассмотренного в п. 9.4.5 расчетного примера были проведены многочисленные расчеты оценок ВБР при различных объемах выборок в широком диапазоне исходных априорных данных. Вычисления производились с помощью специальной программы на ЭВМ ЕС.

Исследование апостериорных байесовских оценок ВБР производилось с помощью выборок значений теоретической переменной состояния Z, которые моделировались специальным алгоритмом. Существо алгоритма сводится к следующему. Для каждого j-го испытания генерируются два числа: z_j, подчиняющееся нормальному закону с параметрами m_Z и σ_Z, и ϵ_j, следующее распределению вероятностей с плотностью $f_\epsilon(\epsilon; \theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$, задаваемой выражением (9.13). Величины $\theta_1^{(0)}$ и $\theta_2^{(0)}$ имеют смысл истинных значений параметров θ_1 и θ_2, которые в исследуемых байесовских процедурах задаются с помощью промежутков неопределенности Θ_1 и Θ_2. Принятые при моделировании значения $m_Z, \sigma_Z, \theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}$ однозначно определяют истинное значение ВБР R. Для каждой j-й случайной пробы определяем значение обобщенной переменной состояния $w_j = z_j + \epsilon_j$. Задавшись некоторым значением погрешности δ фиксирования обобщенной переменной состояния, каждый j-й опыт причисляем к одному из трех типов исходов: работоспособное состояние, если $w_j > \delta$; отказ, если $|w_j| < \delta$; неработоспособное состояние, если $w_j < -\delta$. Согласно типу исхода j-го опыта соответствующее значение z_j включается в $\underset{\sim}{z}'$ для первого исхода, в $\underset{\sim}{z}^*$ для второго и в $\underset{\sim}{z}''$ для третьего. Полученные в результате данные образуют совокупную выборку гипотетического эксперимента для объекта, истинное значение ВБР которого равно R.

Таблица 10.2

Байесовские точечные оценки ВБР

$\theta'_1;\theta''_2$	$n=0$	$n=50$	$n=100$
−0,06; 0,06	0,9746	0,9725	0,9684
−0,06; 0,04	0,9715	0,9710	0,9675
−0,06; 0,02	0,9670	0,9693	0,9864
−0,06; 0,00	0,9599	0,9672	0,9650
−0,04; 0,06	0,9904	0,9821	0,9769
−0,04; 0,04	0,9889	0,9803	0,9753
−0,04; 0,02	0,9867	0,9776	0,9729
−0,04; 0,00	0,9826	0,9736	0,9695
−0,02; 0,06	0,9978	0,9950	0,9904
−0,02; 0,04	0,9974	0,9944	0,9936
−0,02; 0,02	0,9966	0,9936	0,9874

Таблица 10.3

Апостериорные точечные оценки ВБР

$\theta'_1;\theta''_2$	$n=20$	$n=40$	$n=60$	$n=80$
−0,06; 0,06	0,9860	0,9719	0,9787	0,9640
−0,06; 0,04	0,9849	0.9704	0,9780	0,9625
−0,04; 0,06	0,9923	0,9827	0,9825	0,9772
−0,04; 0,04	0,9912	0,9809	0,9836	0,9752

В табл. 10.2 приведены байесовские точечные оценки ВБР, полученные при различных промежутках априорной неопределенности $\Theta_1 = [\theta'_1, \theta''_1]$ и $\Theta_2 = [\theta'_2, \theta''_2]$ для объемов выборки $n = 0, 50, 100$. С целью изучения динамики апостериорного байесовского оценивания ВБР в табл. 10.3 помещены оценки ВБР для большего числа выборок. При моделировании было принято $m_Z = 0{,}1488$, $\sigma_Z = 0{,}05109$, $\theta_1^{(0)} = -0{,}04$, $\theta_2^{(0)} = 0{,}02$, что соответствует значению ВБР $R = 0{,}9639$. Как следует из анализа табл. 10.2 и 10.3, с увеличением объема выборки байесовская точечная оценка приближается к истинному значению ВБР. Данная закономерность является общей. Она проявляется в большей степени для тех расчетных вариантов, в которых промежуток неопределенности выбран более удачно. Как следует из данных табл. 10.3, закономерность приближения апостериорной оценки ВБР к ее истинному значению немонотонна, что объясняется случайностью моделируемых выборок.

10.3.4. Байесовские оценки ВБР для неопределенных параметров теоретической переменной состояния. Ниже приведено развитие предыдущих результатов на случай, когда исходные данные заданы с погрешностями и по результатам испытаний эти данные уточняются. Существенным для рассматриваемой задачи является то, что уточнение исходных данных производится только по результатам функциональных испытаний. Для исследовательских испытаний характерно искусственное создание нагрузок, приводящих к достижению объектом предельного состояния, и, как следствие, отказа. Поэтому наблюдаемое в опыте значение нагрузки нельзя считать элементом выборки реальных нагрузок.

Рассмотрим ситуацию, когда ВБР оценивается в фиксированный момент времени. Пусть в соответствии с п. 10.3.2 по результатам исследовательских и функциональных испытаний найдена байесовская оценка $\hat{R}_0^*$. Полученная оценка зависит от математического ожидания m_Z и среднего квадратического отклонения σ_Z, т.е. $\hat{R}_0^* = \hat{R}_0^*(m_Z, \sigma_Z)$. Это справедливо, поскольку условная оценка ВБР $R(\theta_1, \theta_2)$ параметризована с помощью m_Z и σ_Z. Ввиду наличия неопределенности исходных данных параметры m_Z и σ_Z также являются неопределенными. Причем эта неопределенность выражается с помощью априорных плотностей $h_m(m_Z)$, $h_\sigma(\sigma_Z)$. Один из возможных способов получения $h_m(m_Z)$ и $h_\sigma(\sigma_Z)$ приведен в п. 9.4.4.

Задачу оценки ВБР для случая, когда характеристики неопределенности, связанные с погрешностями исходных данных, уточняются по результатам функциональных испытаний, будем решать в следующей последовательности:

(1) исходя из априорных плотностей $h_m(m_Z)$ и $h_\sigma(\sigma_Z)$ и количественных результатов функциональных испытаний $\underset{\sim}{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, с помощью теоремы Байеса находим соответствующую апостериорную плотность $\hbar_{m\sigma}(m_Z, \sigma_Z | \underset{\sim}{z})$;

(2) выбрав некоторую функцию потерь, путем минимизации соответствующего апостериорного риска находим байесовскую оценку $\hat{R}_0^{**}$ функции $\hat{R}_0^*(m_Z, \sigma_Z)$.

Для определения апостериорной плотности $\hbar_{m\sigma}(m_Z, \sigma_Z | \underset{\sim}{z})$ используем известное байесовское решение [44], основанное на априорных плотностях, сопряженных с ядром гауссова правдоподобия. Вместо параметров m_Z и σ_Z с целью использования приведенной в [44] процедуры будем использовать параметры m_Z и $c_Z = \sigma_Z^{-2}$. В качестве априорной плотности для m_Z и c_Z используется гамма-нормальная плотность

$$h(m_Z, c_Z) = h_c(c_Z) h_m(m_Z | c_Z), \tag{10.48}$$

где

$$h_c(c_Z) = h_c(c_Z; s'^2, \nu') = \left(\frac{\nu' s'^2}{2}\right)^{\nu'/2} \frac{c_Z^{\nu'/2-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2}\nu' s'^2 c_Z\right),$$

$$c_Z > 0, \qquad \nu' > 0, \tag{10.49}$$

$$h_m(m_Z | c_Z) = h_m\left(m_Z; m', \frac{1}{c_Z n'}\right) =$$

$$= \frac{(c_Z n')^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} c_Z n' (m_Z - m')^2\right]. \tag{10.50}$$

Параметры совместной плотности (10.48) определяются с помощью найденных ранее числовых характеристик (см. выражения (9.67) и (9.68)) путем приравнивания теоретических моментов распределений (10.49) и (10.50) соответствующим расчетным значениям:

$$m' = m_Z^{(0)}, \qquad n' = \frac{[\sigma_Z^{(0)}]^2}{s_m^2}, \tag{10.51}$$

$$s'^2 = [\sigma_Z^{(0)}], \qquad \nu' = \frac{[\sigma_Z^{(0)}]^2}{2s_\sigma^2}. \tag{10.52}$$

Достаточную статистику в данном случае образуют следующие величины [44]:

$$n, \qquad \hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i, \qquad \hat{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \hat{m})^2. \tag{10.53}$$

Апостериорная плотность параметров m_Z и σ_Z имеет такой же вид, как и (10.48), но вместо n', m', ν' и $\nu' s'^2$ соответственно используются

$$n'' = n' + n, \qquad m'' = \frac{n'm' + n\hat{m}}{n' + n}, \qquad \nu'' = \nu' + n, \tag{10.54}$$

$$\nu'' s''^2 = \nu' s'^2 + n'm'^2 + n\hat{D} + n\hat{m}^2 - n''m''^2. \tag{10.55}$$

С помощью приведенных выражений можно найти, в частности, апостериорные средние $\hat{m}_Z^{(0)}$ и $\hat{\sigma}_Z^{(0)}$ и дисперсии $\hat{s}_m^2$ и $\hat{s}_\sigma^2$ соответственно параметров m_Z и σ_Z, которые уточняют априорные оценки (9.67) и (9.68) за счет результатов эксперимента:

$$\hat{m}_Z^{(0)} = \frac{n'm_Z^{(0)} + n\hat{m}}{n' + n}, \qquad \hat{\sigma}_Z^{(0)} = s'', \tag{10.56}$$

$$\hat{s}_m^2 = \frac{\hat{\sigma}_Z^{(0)2}}{n' + n}, \qquad \hat{s}_\sigma^2 = \frac{s''^2}{2\nu''}. \tag{10.57}$$

Итак, в результате подхода, использующего сопряженные априорные, мы получили совместную плотность распределения $\hbar_{m\sigma}(m_Z, \ \sigma_Z | \underset{\sim}{z})$, которая записывается с помощью формул (10.48)–(10.50), причем вместо каждого параметра с одним штрихом необходимо подставить обозначенные теми же символами параметры с двумя штрихами. Последние вычисляются по формулам (10.51)–(10.57) с помощью априорных данных и результатов эксперимента.

Вторая часть задачи, связанная с определением окончательной байесовской оценки ВБР $\hat{R}_0^{**}$, которая учитывает новую экспериментальную информацию для уточнения исходной информации о числовых характеристиках первичных переменных, решается в принципе аналогично п. 9.4.4. Наиболее простым способом получения $\hat{R}_0^{**}$ является подстановка в $\hat{R}_0^*$ апостериорных точечных оценок, которые определяются по формулам (10.56), т.е.

$$\hat{R}_0^{**} \cong \hat{R}_0^*(\hat{m}_Z^{(0)}, \hat{\sigma}_Z^{(0)}). \tag{10.58}$$

Точное решение может быть получено в виде

$$\hat{R}_0^{**} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dm_Z \int\limits_0^{\infty} \hat{R}_0^*(m_Z, \sigma_Z) \hbar_{m\sigma}(m_Z, \sigma_Z | \underset{\sim}{z}) d\sigma_Z . \qquad (10.59)$$

Чтобы избежать необходимости двумерного численного интегрирования, представим $\hat{R}_0^*(m_Z, \sigma_Z)$ в подынтегральной функции (10.59) в виде отрезка ряда Тейлора относительно $\hat{m}_Z^{(0)}$ и $\hat{\sigma}_Z^{(0)}$. Ограничиваясь членами второго порядка малости, получим

$$\hat{R}_0^{**} \cong \hat{R}_0^*(\hat{m}_Z^{(0)}, \hat{\sigma}_Z^{(0)}) + a_2^* \hat{s}_m^2 + b_2^* \hat{s}_\sigma^2 , \qquad (10.60)$$

где

$$a_2^* = \frac{\partial^2 \hat{R}_0^*(\hat{m}_Z^{(0)}, \hat{\sigma}_Z^{(0)})}{\partial \hat{m}_Z^{(0)2}}, \qquad b_2^* = \frac{\partial^2 \hat{R}_0^*(\hat{m}_Z^{(0)}, \hat{\sigma}_Z^{(0)})}{\partial \hat{\sigma}_Z^{(0)2}} .$$

§ 10.4. Процедура контроля работоспособности по определяющему параметру

В настоящем параграфе приведен пример решения одной прикладной задачи, связанной с контролем работоспособности объекта на основании результатов измерения определяющего параметра. Основная часть используемых в этой области процедур диагностики основана на бинарном представлении результатов контроля [29], когда в каждом испытании фиксируется факт попадания определяющего параметра в допустимую область или выхода параметра из этой области. В первом случае объект признается работоспособным, во втором – нет. Имея несомненное достоинство простоты и оперативности, данный подход нельзя признать достаточно гибким, так как результаты испытаний, при которых значения определяющего параметра располагаются в непосредственной опасной близости к границе допустимой области, признаются в такой же мере успешными, как и результаты испытаний, при которых определяющий параметр расположен далеко от границы. Кроме того, контроль достижения требуемого уровня надежности при описанной схеме осуществить удается далеко не всегда (например, в случае малого числа успешных испытаний). Ниже сформулирована и решена для одного расчетного случая задача контроля работоспособности, позволяющая сделать вывод о достижении заданного уровня надежности. Материалы настоящего параграфа частично основаны на результатах предыдущего и существенно используют понятие коэффициента запаса работоспособности.

10.4.1. Постановка задачи. Пусть Y – единственный определяющий параметр объекта, а U – его допустимое значение. Будем считать, что Y и U являются случайными величинами, имеющими гауссово распределение вероятностей с параметрами соответственно m_Y, σ_Y и m_U, σ_U. Значения этих параметров оцениваются предварительно при проектных исследованиях объекта. Поэтому до начала испытаний известны некоторые априорные оценки $m_Y^{(0)}$, $\sigma_Y^{(0)}$ и $m_U^{(0)}$, $\sigma_U^{(0)}$. Поскольку эти оценки в общем случае являются весьма грубыми, будем считать, что заданы также соответствующие интервалы априорной неопределенности: для математических ожиданий – $[m'_Y, m''_Y]$ и $[m'_U, m''_U]$, для коэффициентов вариации v_Y и v_U случайных величин Y и U – соответственно $[v'_Y, v''_Y]$ и $[v'_U, v''_U]$. Каждый интервал будем задавать с помощью величины Δ, равной половине длины этого интервала, т.е. будем считать известными

$$\Delta_Y = \frac{m''_Y - m'_Y}{2}, \quad \Delta_U = \frac{m''_U - m'_U}{2},$$

$$\Delta_1 = \frac{v''_Y - v'_Y}{2}, \quad \Delta_2 = \frac{v''_U - v'_U}{2}.$$

Итак, до начала испытаний нам известны $\{m_Y^{(0)}, \Delta_Y\}$, $\{v_Y^{(0)}, \Delta_1\}$, $\{m_U^{(0)}, \Delta_U\}$, $\{v_U^{(0)}, \Delta_2\}$, причем $v_Y^{(0)} = \sigma_Y^{(0)}/m_Y^{(0)}$, $v_U^{(0)} = \sigma_U^{(0)}/m_U^{(0)}$.

В процессе экспериментальной отработки проводится n независимых испытаний с доработками, в ходе которых фиксируются значения определяющего параметра Y и допустимого значения U. Для каждого j-го этапа испытаний, состоящего в осуществлении j испытаний, результаты измерений образуют выборки $\underset{\sim}{y}^{(j)} = (y_1, y_2, \ldots, y_j)$ и $\underset{\sim}{u}^{(j)} = (u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_j)$, так что общая совокупность результатов n испытаний записывается в виде $\{\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{u}\}$, где $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}^{(n)}$, $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}^{(n)}$.

Будем считать, что задана требуемая вероятность $R_{\text{тр}}$ выполнения условия работоспособности $Y > U$. Задача заключается в построении процедуры контроля выполнения условия

$$\hat{R}_j = \hat{R}_j(\underset{\sim}{y}^{(j)}, \underset{\sim}{u}^{(j)}) \geqslant R_{\text{тр}} \tag{10.61}$$

для каждого j-го этапа испытаний и получения заключения о выполнении требования по надежности по совокупности всех n испытаний.

10.4.2. Решение задачи в общем случае. С целью более лаконичной записи процедуры контроля введем в рассмотрение так называемый коэффициент запаса работоспособности $g = m_Y/m_U$. Вероятность выполнения условия $Y > U$ при известных значениях v_Y и v_U запишется следующим образом:

$$R = P\{Y - U > 0\} = \Phi\left(\frac{g - 1}{\sqrt{g^2 v_Y^2 + v_U^2}}\right),$$

что позволяет из условия

$$\Phi\left(\frac{g - 1}{\sqrt{g^2 v_Y^2 + v_U^2}}\right) = R_{\text{тр}}$$

найти наименьшее значение коэффициента g, обеспечивающее выполнение требования по надежности:

$$g_{\text{тр}} = g_{\text{тр}}(v_U, v_Y) = \frac{1 + [1 - (1 - v_U^2)(1 - z_{\text{тр}} v_Y^2)]^{1/2}}{1 - z_{\text{тр}} v_Y^2}, \tag{10.62}$$

где $z_{\text{тр}}$ – квантиль нормального распределения вероятности $R_{\text{тр}}$.

Идея построения процедуры контроля состоит в получении апостериорной байесовской нижней γ-доверительной границы $\underline{g}_\gamma = \underline{g}_\gamma(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{y})$ и сравнении ее с $g_{\text{тр}}$. Правомочность этого приема обосновывается путем следующих рассуждений. Примем в условии (10.61) в качестве оценки $\hat{R}_j$ байесовскую нижнюю доверительную границу $\underline{R}^*_\gamma$ и предположим вначале, что коэффициенты вариации v_U и v_Y известны. Ввиду монотонности функции

$$R(g; v_U, v_Y) = \Phi\left(\frac{g-1}{\sqrt{g^2 v_Y^2 + v_U^2}}\right) \tag{10.63}$$

по переменной g справедливо следующее соотношение:

$$P\{\underline{R}^*_\gamma \geqslant R_{\text{тр}}\} = P\{R(\underline{g}_\gamma; v_U, v_Y) \geqslant R(g_{\text{тр}}, v_U, v_Y)\}. \tag{10.64}$$

Поскольку рассматриваются апостериорные вероятности, вместо значений v_U и v_Y следует использовать их апостериорные оценки $\hat{v}_U$ и $\hat{v}_Y$. Отсюда следует, что условие обеспечения надежности (10.61) выполняется, если справедливо следующее неравенство для оценки коэффициента запаса работоспособности:

$$\underline{g}_\gamma(\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{u}) \geqslant g_{\text{тр}}(\hat{v}_U, \hat{v}_Y), \tag{10.65}$$

где $g_{\text{тр}}(v_U, v_Y)$ определяется формулой (10.62), и задача заключается в определении байесовской нижней доверительной границы $\underline{g}_\gamma$ для коэффициента запаса работоспособности.

Для определения $\underline{g}_\gamma$ найдем апостериорную плотность $\hbar(m_Y, m_U | \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{y})$ и в дальнейшем воспользуемся байесовской процедурой оценки функции двух случайных величин m_Y и m_U вида $g = m_Y/m_U$. По допущению Y и U подчиняются гауссову распределению, вследствие чего ядро функции правдоподобия $l_0(m_Y, m_U | \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{y})$ при известных σ_Y и σ_U запишется следующим образом:

$$l_0(m_Y, m_U | \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{y}) = \exp\left[-\frac{n}{2\sigma_U^2}(m_U^2 - 2\bar{u}m_U) - \frac{n}{2\sigma_Y^2}(m_Y^2 - 2\bar{y}m_Y)\right],$$

где $\bar{u}$ и $\bar{y}$ – соответственно выборочные средние для U и Y. Принимая равномерные априорные распределения для m_Y и m_U в их промежутках априорной неопределенности, получим следующее соотношение для апостериорной плотности параметров m_Y и m_U:

$$\hbar(m_Y, m_U | \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{y}) \backsim a_0(m_Y, m_U) = \exp\left[-\frac{n}{2\sigma_U^2}(m_U^2 - 2\bar{u}m_U) -\right.$$

$$\left. - \frac{n}{2\sigma_Y^2}(m_Y^2 - 2\bar{y}m_Y)\right], \quad m'_U \leqslant m_U \leqslant m''_U, \quad m'_Y \leqslant m_Y \leqslant m''_Y. \tag{10.66}$$

Следуя концепции байесовского доверительного оценивания, значение $\underline{g}_\gamma$ определим с помощью следующего уравнения:

$$\iint\limits_{\Omega(\underline{g}_\gamma)} a_0(m_Y, m_U)\,dm_Y dm_U = \gamma \int\limits_{m'_U}^{m''_U} dm_U \int\limits_{m'_Y}^{m''_Y} a_0(m_Y, m_U)\,dm_Y, \tag{10.67}$$

где область $\Omega(\underline{g}_\gamma)$, в которую входит неизвестная граница $\underline{g}_\gamma$, является пересечением областей $\omega_1(\underline{g}_\gamma) = \{(m_Y, m_U): m_Y \geqslant \underline{g}_\gamma m_U\}$ и $\omega_2 = [m'_U \leqslant m_U \leqslant m''_U, m'_Y \leqslant m_Y \leqslant m''_Y]$. Значения дисперсий σ_Y^2 и σ_U^2 заменяются соответствующими апостериорными оценками.

Изложенная процедура контроля является алгоритмической и не может быть сведена к простым аналитическим расчетам. Заметное упрощение достигается для расчетного случая с постоянным неслучайным допустимым значением.

10.4.3. Расчетный случай неслучайного допустимого значения. Предположим, что Y подчиняется нормальному закону с параметрами m_Y и σ_Y, а допустимое значение U всегда принимает неслучайное значение u. Вероятность выполнения условия работоспособности в этом расчетном случае имеет вид

$$R = P\left\{\frac{Y}{u} > 1\right\} = \Phi\left(\frac{g-1}{\sigma_Y/u}\right). \tag{10.68}$$

Значение коэффициента запаса работоспособности, обеспечивающее выполнение требования по надежности $R_{\text{тр}}$, определяется в соответствии с (10.68) с помощью формулы

$$g_{\text{тр}} = z_{\text{тр}}\frac{\sigma_Y}{u} + 1, \tag{10.69}$$

где $z_{\text{тр}}$ – квантиль нормального распределения вероятности $R_{\text{тр}}$. В дальнейшем поступим так же, как в п. 10.4.3: по результатам испытаний $\underset{\sim}{y}$ оценим нижнюю доверительную границу $\underline{g}_\gamma$ для коэффициента $g = m_Y/u$ и будем контролировать выполнение требования по надежности с помощью условия $\underline{g}_\gamma \geqslant g_{\text{тр}}$.

Для построения байесовской апостериорной оценки для $g = m_Y/u$ воспользуемся известным решением, основанным на сопряженных априорных [44]. Как и в предыдущем п. 10.4.2, будем считать, что заданы абсолютные погрешности Δ_m и Δ_σ априорного распределения параметров m_Y и σ_Y, т. е. примем для m_Y промежуток априорной неопределенности $[m'_Y, m''_Y]$, где $m'_Y = m_Y^{(0)} - \Delta_m$, $m''_Y = m_Y^{(0)} + \Delta_m$, а для σ_Y – $[\sigma'_Y, \sigma''_Y]$, где $\sigma'_Y = \sigma_Y^{(0)} - \Delta_\sigma$, $\sigma''_Y = \sigma_Y^{(0)} + \Delta_\sigma$. Согласно [44] априорное распределение для m_Y и $c_Y = \sigma_Y^{-2}$ имеет вид

$$h(m_Y, c_Y) = h_c(c_Y)h_m(m_Y \mid c_Y), \tag{10.70}$$

где

$$h_c(c_Y) = h_c(c_Y; s'^2, \nu') = \left(\frac{\nu' s'^2}{2}\right)^{\nu'/2} \frac{c_Y^{\nu'/2-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right)} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\nu' s'^2 c_Y\right), \qquad c_Y > 0, \quad \nu' > 0. \tag{10.71}$$

$$h_m(m_Y \mid c_Y) = \frac{(c_Y n')^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} c_Y n'(m_Y - m')^2\right]. \qquad (10.72)$$

Параметры плотностей (10.71) и (10.72) определяются через априорно известные числовые характеристики $m_Y^{(0)}$, Δ_m, $\sigma_Y^{(0)}$, Δ_σ по аналогии с формулами (10.51) и (10.52):

$$m' = m_Y^{(0)}, \qquad n' = \frac{9\,\sigma_Y^{(0)2}}{\Delta_m^2}, \qquad (10.73)$$

$$s'^2 = \sigma_Y^{(0)2}, \qquad \nu' = \frac{9\,\sigma_Y^{(0)2}}{2\,\Delta_\sigma^2}. \qquad (10.74)$$

Для определения $\underline{g}_\gamma = \underline{m}_{Y\gamma}/u$ необходимо знать апостериорную плотность $\hbar_m(m_Y/\hat{c}_Y)$, где $\hat{c}_Y$ – апостериорная оценка параметра c_Y. Согласно теории сопряженных априорных распределений для гауссова случая [44] искомая апостериорная плотность определится выражением (10.72), но с другими параметрами, т. е.

$$\hbar_m(m_Y \mid \hat{c}_Y) = \left(\frac{\hat{c}_Y n''}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \hat{c}_Y n''(m_Y - m'')^2\right], \qquad (10.75)$$

где

$$n'' = n' + n, \qquad m'' = \frac{n'm' + n\hat{m}}{n' + n},$$

$$\hat{c}_Y = \left[\frac{\nu' + n}{\nu's'^2 + n'm'^2 + n\hat{D} + n\hat{m}^2 - n''m''}\right]^{-1},$$

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad \hat{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{m})^2.$$

Согласно концепции байесовского доверительного оценивания нижняя граница $\underline{m}_Y$ с уровнем доверия γ определится уравнением

$$\int_{\underline{m}_\gamma}^{\infty} \hbar_m(m_Y \mid \hat{c}_Y)\,dm_Y = \gamma.$$

Произведя необходимые вычисления, окончательно получим

$$\underline{g}_\gamma = \frac{m''}{u} - z_{1-\gamma} \cdot \frac{1}{u\hat{c}_Y n''}. \qquad (10.76)$$

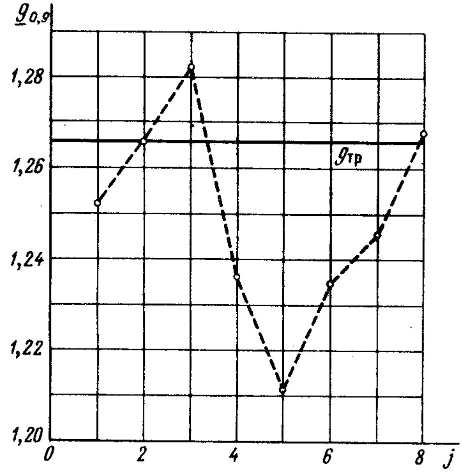


Рис. 10.4. **Изменение оценки коэффициента запаса работоспособности в ходе экспериментальной отработки**

что позволяет производить контроль достижения уровня надежности $R_{тр}$ с помощью условия $\underline{g}_\gamma > g_{тр}$.

Численный пример. Пусть требуемый уровень выполнения условия работоспособности составляет $R_{тр} = 0{,}99$ при допустимом значении параметра $u = 3{,}5$. Из априорных соображений известны $m_Y^{(0)} = 4{,}72$, $\Delta_m = 0{,}8$, $\sigma_Y^{(0)} = 0{,}4$, $\Delta_\sigma = 0{,}1$. Требуемое значение коэффициента запаса работоспособности составляет $g_{тр} = 1{,}266$. Как видно из условий примера, при проектных разработках заданная ВБР обеспечивается, так как $m_Y/u = 1{,}349 > g_{тр}$.

В процессе проведения экспериментальной отработки первые пять испытаний продемонстрировали следующие значения определяющего параметра Y: $y_1 = 4{,}85$, $y_2 = 4{,}90$, $y_3 = 5{,}08$, $y_4 = 3{,}60$, $y_5 = 3{,}85$. На рис. 10.4 изображена эмпирическая кривая изменения оценки $\underline{g}_{0,9}$. Как видно из графика, после четвертого опыта условие выполнения требований по надежности было нарушено. Это повлекло за собой определенную доработку, в результате чего экспериментальные данные последующих трех опытов составили $y_6 = 5{,}26$, $y_7 = 4{,}94$, $y_8 = 5{,}08$, и кривая $\underline{g}_{0,9}(j)$ возвратилась в область требуемой надежности.

§ 10.5 Статистическое обоснование коэффициента безопасности

Как было отмечено еще в главе 9, основная масса инженерных методик расчета конструкций и разнообразных технических устройств существенно использует понятие коэффициента безопасности, не учитывая случайную природу параметров объекта. Значения коэффициентов безопасности выбираются, как правило, из широких диапазонов, которые на практике часто не связаны с реальными особенностями конкретных объектов.

Если использовать методы вероятностного проектирования, т. е. выбирать параметры объекта, исходя из требуемой вероятности его безотказной работы, то отмеченный недостаток устраняется, так как понятие коэффициента безопасности при вероятностном проектировании не употребляется. Примером тому могут служить расчетные задачи в главах 8–10. Тем не менее в силу большой инерционности существующих детерминистических подходов к проектированию, в частности элементов конструкций, на практике еще долго будут использовать коэффициенты безопасности. Поэтому важной задачей является разработка метода статистического обоснования значений коэффициентов безопасности, применяемых при расчетах конкретных объектов. Данный метод в первую очередь должен учитывать требуемый уровень ВБР, вероятностные характеристики параметров исследуемого объекта и экспериментальные данные, позволяющие верифицировать модель работоспособности объекта.

В настоящем параграфе для типовой инженерной методики сформулирована задача статистического обоснования коэффициента безопасности и получено ее решение для случая граусcова распределения переменной состояния.

10.5.1. Постановка задачи Пусть $Q = \varphi(X)$ – несущая способность объекта, представленная в виде функции от независимых первичных переменных $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, в число которых, в частности для элементов конструкций, входят механические характеристики и геометрические параметры. Обозначим с помощью S действующую нагрузку. Объект считается работоспособным, если выполняется условие $\varphi(X) \geqslant S$. Входящие в это неравенство величины являются случайными, поэтому неравенство носит вероятностный характер.

При выборе параметров объекта в детерминистическом подходе используют математические ожидания (средние значения) m_Q и m_S соответствующих случайных переменных Q и S. При этом используют условие $m_Q = \eta m_S$, т. е. среднее значение нагрузки увеличивают в η раз с целью компенсировать многочисленные случайные факторы и несовершенство теоретической модели $Q = \varphi(X)$, приводящей к расчетному значению несущей способности m_Q. Таким образом, коэффициент безопасности имеет смысл отношения м.о. несущей способности, полученной теоретическим путем, к м.о. действующей нагрузки, т. е. $\eta = m_Q / m_S$.

Используя введенную в главе 9 модель работоспособности с аддитивной ошибкой, условие работоспособности запишем в виде

$$Q + m_Q\epsilon - S > 0. \tag{10.77}$$

Здесь ϵ имеет смысл относительной аддитивной ошибки теоретической зависимости $Q = \varphi(X)$ и подчиняется известному распределению вероятностей $f_\epsilon(\epsilon;\ \theta)$. Параметр θ, вообще говоря, неизвестен, но задана априорная плотность $h(\theta)$, концентрирующая в себе совокупность информации об ошибке ϵ. Предполагается также, что известны распределения вероятностей случайных величин Q и S.

В процессе разработки объекта существует возможность проведения эксперимента, в ходе которого устанавливается фактический уровень несущей способности. Предположим, что в каждом из n независимых опытов объект доводят до разрушения, т. е. до состояния, когда приложенная нагрузка становится равной фактической (а не расчетной) несущей способности. В каждом j-м опыте измеряются значения разрушающей нагрузки s_j^* и всех первичных параметров, входящих в вектор x_j. Последнее позволяет вычислить теоретическое значение несущей способности $q_j = \varphi(x_j)$. Поскольку в опыте наблюдается отказ, т. е. выполняется условие $q_j + m_Q \epsilon_j - s_j^* = 0$, существует возможность определения фактического значения относительной ошибки ϵ_j:

$$\epsilon_j = \frac{s_j^* - q_j}{m_Q}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.78}$$

Задача заключается в нахождении апостериорных оценок коэффициента безопасности η, исходя из описанной совокупности исходных данных и требуемого значения $R_{\text{тр}}$ вероятности выполнения условия (10.77).

10.5.2. Случай гауссовых распределений. Предположим, что $Q \sim N(m_Q, \sigma_Q)$, $S \sim N(m_S, \sigma_S)$ и $\epsilon \sim N(m_\epsilon, \sigma_\epsilon)$, причем известны отношения $v_Q = \sigma_Q / m_Q$ и $v_S = \sigma_S / m_S$, называемые коэффициентами вариации соответственно теоретической несущей способности Q и нагрузки S. Числовые характеристики m_ϵ и σ_ϵ не заданы, но известны промежутки их априорной неопределенности соответственно $[a, b]$ и $[c, d]$, причем $m_\epsilon \sim U(a, b)$, $\sigma_\epsilon \sim U(c, d)$.

Для гауссовых величин Q, S и ϵ вероятность выполнения условия работоспособности (10.77) запишется следующим образом:

$$R = \Phi\left(\frac{m_Q - m_S + m_Q \cdot m_\epsilon}{\sqrt{\sigma_Q^2 + \sigma_S^2 + m_Q^2 \sigma_\epsilon^2}}\right).$$

Эту вероятность несложно представить в виде функции от коэффициента безопасности η, зависящей также от параметров m_ϵ, σ_ϵ, v_Q и v_S:

$$R(\eta) = \Phi\left(\frac{\eta(1 + m_\epsilon) - 1}{\sqrt{v_Q^2 \eta^2 + v_S^2 + \eta^2 \sigma_\epsilon^2}}\right). \tag{10.79}$$

Приравняв $R(\eta) = R_{\text{тр}}$, из выражения (10.79) получим уравнение для определения коэффициента безопасности, соответствующего требуемому уровню ВБР:

$$\eta(1 + m_\epsilon) - 1 = z_{\text{тр}}(v_Q^2 \eta^2 + v_S^2 + \eta^2 \sigma_\epsilon^2)^{1/2},$$

где $z_{\text{тр}}$ – квантиль нормального распределения вероятности $R_{\text{тр}}$. В области $\eta > 1$ это уравнение имеет единственный корень

$$\eta = \frac{(1+m_\epsilon)^2 + z_{\text{тр}}[v_Q^2 + v_S^2 - z_{\text{тр}}^2 v_Q^2 v_S^2 + (1 - z_{\text{тр}}^2 v_S^2)\sigma_\epsilon^2 + m_\epsilon v_S^2]^{1/2}}{(1 + m_\epsilon)^2 - z_{\text{тр}}^2 (v_Q^2 + \sigma_\epsilon^2)}. \tag{10.80}$$

Поскольку коэффициенты вариации v_Q и v_S известны, в дальнейшем будем подчеркивать зависимость коэффициента безопасности от параметров ошибки модели, т. е. $\eta = \eta(m_\epsilon, \sigma_\epsilon)$.

Процедура оценки коэффициента η в дальнейшем следует стандартной схеме байесовского оценивания. Основываясь на выборке результатов испытаний $\underset{\sim}{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$, каждый из которых определяется по формуле (10.78), и используя предположение $\epsilon \sim N(m_\epsilon, \sigma_\epsilon)$, запишем функцию правдоподобия

$$l(m_\epsilon, \sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{\epsilon}) = l(m_\epsilon, \sigma_\epsilon; \nu_1, \nu_2) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\sigma_\epsilon^n} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma_\epsilon^2}(\nu_2 - 2m_\epsilon\nu_1 + m_\epsilon^2)\right],$$

$\nu_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j^k \quad (k = 1, 2)$ – статистика испытаний.

Поскольку параметры m_ϵ и σ_ϵ имеют равномерные априорные распределения соответственно на промежутках $[a, b]$ и $[c, d]$, для апостериор-

Таблица 10.4

Байесовские оценки коэффициента безопасности

ν_1	$R_{\text{тр}} = 0,99$	$R_{\text{тр}} = 0,999$	$R_{\text{тр}} = 0,9999$
–0,09	1,2445 0,0131 1,2613	1,3412 0,0202 1,3670	1,4304 0,0275 1,4657
–0,06	1,2318 0,0133 1,2488	1,3231 0,0203 1,3490	1,4072 0,0276 1,4425
–0,03	1,2186 0,0124 1,2345	1,3043 0,0187 1,3283	1,3830 0,0255 1,4156
0	1,2065 0,0115 1,2213	1,2872 0,0174 1,3095	1,3610 0,0236 1,3911
0,03	1,1955 0,0108 1,2093	1,2715 0,0163 1,2923	1,3409 0,0220 1,3691
0,06	1,1854 0,0098 1,1980	1,2573 0,0150 1,2765	1,3227 0,0202 1,3485
0,09	1,1763 0,0094 1,1883	1,2444 0,0141 1,2624	1,3061 0,0190 1,3305

ной плотности $\hbar(m_\epsilon, \sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{\epsilon})$ справедливо соотношение

$$\hbar(m_\epsilon, \sigma_\epsilon \mid \underset{\sim}{\epsilon}) \backsim a_0(m_\epsilon, \sigma_\epsilon) = \frac{n}{\sigma_\epsilon^n} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma_\epsilon^2}(\nu_2 - 2m_\epsilon\nu_1 + m_\epsilon^2)\right], \quad m_\epsilon \in [a, b], \quad \sigma_\epsilon \in [c, d]. \tag{10.81}$$

Используя квадратичную функцию потерь, точечную апостериорную оценку η найдем в виде

$$\hat{\eta}^* = \frac{1}{\beta} \int_a^b \int_c^d \eta(m_\epsilon, \sigma_\epsilon) a_0(m_\epsilon, \sigma_\epsilon) dm_\epsilon d\sigma_\epsilon, \tag{10.82}$$

где

$$\beta = \int_a^b \int_c^d a_0(m_\epsilon, \sigma_\epsilon) dm_\epsilon d\sigma_\epsilon.$$

Для апостериорной дисперсии аналогично будем иметь

$$\sigma^2_{\hat{\eta}^*} = \frac{1}{\beta} \int_a^b \int_c^d \eta^2(m_\epsilon, \sigma_\epsilon) a_0(m_\epsilon, \sigma_\epsilon) dm_\epsilon d\sigma_\epsilon - \hat{\eta}^{*2}. \tag{10.83}$$

В качестве некоторой гарантированной оценки коэффициента безопасности может служить верхняя γ-доверительная граница величины η, которая определяется, согласно концепции бейесовского доверительного оценивания, из уравнения

$$\iint_{\Theta(\bar{\eta}_\gamma^*)} a_0(m_\epsilon, \sigma_\epsilon) dm_\epsilon d\sigma_\epsilon = \gamma\beta, \tag{10.84}$$

в котором неизвестная оценка входит в область интегрирования. Последняя является пересечением прямоугольника $[a, b] \times [c, d]$ и множества значений m_ϵ и σ_ϵ, определяемых неравенством $\eta(m_\epsilon, \sigma_\epsilon) \leqslant \bar{\eta}_\gamma^*$.

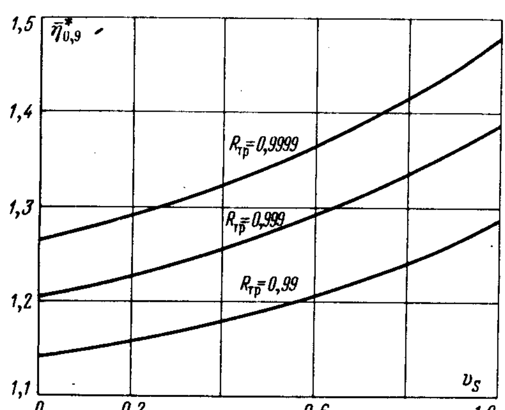


Рис. 10.5. Зависимость оценки коэффициента безопасности от коэффициента вариации нагрузки

Расчет с помощью соотношений (10.82) – (10.84) предполагает использование методов двумерного численного интегрирования и решения трансцендентных уравнений.

10.5.3. Вычислительный анализ полученных оценок. С целью выяснения влияния различных факторов на закономерности изменения оценок коэффициента безопасности были проведены многочисленные расчеты по формулам (10.82) – (10.84) в широком диапазоне исходных данных. В табл. 10.4 представлен фрагмент результатов расчетов при $v_Q = v_S = 0{,}05$, $s_\epsilon = (\nu_2 - \nu_1^2)^{1/2} = 0{,}03$ и следующей априорной информации: $m_\epsilon \in [-0{,}10;\ 0{,}10]$, $\sigma_\epsilon \in [0{,}01;\ 0{,}06]$. Для каждого значения варьируемого параметра определялись три оценки $\hat{\eta}^*$, $\sigma_{\hat{\eta}^*}$ и $\overline{\eta}^*_{0,9}$, которые помещены в таблице последовательно одна под другой. По данным таблицы прослеживается отчетливая закономерность: с увеличением статистики ν_1 значение коэффициента безопасности уменьшается. Эта закономерность легко интерпретируется логически. В самом деле, ν_1 имеет смысл выборочной средней для относительной погрешности ϵ. Факт $\nu_1 < 0$ говорит о том, что в экспериментальных данных $\underset{\sim}{\epsilon}$ преобладают отрицательные значения ϵ_j, для которых в эксперименте реализуется событие $s_j^* < q_j$, т. е. фактическая несущая способность s_j^* меньше теоретической q_j. Другими словами, судя по эксперименту, теоретическая модель $Q = \varphi(X)$ приводит к завышенному представлению о несущей способности. В альтернативной ситуации, когда $\nu_1 > 0$, при проведении эксперимента преобладают события $s_j^* > q_j$, т. е. в этом случае теоретическая модель преимущественно занижает истинную несущую способность. Ясно, что для того чтобы компенсировать погрешность модели в первой ситуации, необходимо выбрать большее значение коэффициента безопасности.

Закономерность изменения оценки $\overline{\eta}^*_{0,9}$ от коэффициента вариации нагрузки v_S представлена на рис. 10.5. Дело в том, что наличие случайного разброса нагрузки и факторов несущей способности является вторым источником введения коэффициента безопасности. Случайный характер нагрузки достаточно хорошо описывает коэффициент вариации. С его увеличением значение коэффициента безопасности, очевидно, должно возрастать. Количественный характер этой закономерности иллюстрируется рис. 10.5.

Отметим еще одну особенность, обнаруженную при проведении вычислительного эксперимента. В том случае, когда эмпирические данные, выраженные в статистиках ν_1 и s_ϵ, находятся вблизи середин соответствующих промежутков неопределенности $[a, b]$ и $[c, d]$, увеличение длины этих промежутков не приводит к заметному изменению оценок коэффициента безопасности. Отсюда следует очевидная практическая рекомендация: не следует стремиться к выбору узких промежутков априорной неопределенности для параметров погрешности теоретической модели работоспособности. Руководствуясь этим соображением, мы, кроме того, имеем больше шансов не наблюдать результаты эксперимента, противоречащие априорной информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Математическая теория надежности. – М.: Сов. радио, 1969. – 488 с.
2. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. – М.: Наука, 1984. – 328 с.
3. *Беляев Ю.К.* Статистические методы обработки результатов испытания на надежность. – М.: Знание, 1982. – С. 3–66.
4. *Беляев Ю.К.* Множительные оценки вероятности безотказной работы // Изв. АН СССР. Технич. киберн. – 1985. – № 4. – С. 45–59.
5. *Бернулли Я.* О законе больших чисел. М.: Наука, 1986. – 176 с.
6. *Биргер И.А., Шор Б.Ф., Иосилевич Г.Б.* Расчет на прочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1979. – 704 с.
7. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1982. – 350 с.
8. *Бруевич Н.Г., Мильграм Ю.Г.* К вопросу об определении вероятности безотказной работы изделия на основе накопленного опыта и самообучения // Основные вопросы теории и практики надежности. – М.: Сов. радио, 1975. – С. 7–26.
9. *Бруевич Н.Г., Сергеев В.В.* Основы нелинейной теории точности и надежности устройств. – М.: Наука, 1976. – 136 с.
10. *Вальд А.* Статистические решающие функции // Позиционные игры. – М.: Наука, 1976. – С. 300–522.
11. *Волков Л.И., Шишкевич А.М.* Надежность летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1975. – 293 с.
12. *Гладкий В.Ф.* Вероятностные методы проектирования конструкции летательного аппарата. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
13. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 400 с.
14. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
15. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. – М.: Мир, 1974. – 492 с.
16. *Девятиреков И.П.* Огрубленные байесовские оценки // Труды 4-й Всесоюзной школы-семинара по адаптивным системам. – Алма-Ата, 1978. – С. 70–75.
17. *Закс Ш.* Теория статистических выводов. – М.: Мир, 1975. – 776 с.
18. *Зельнер А.* Байесовские методы в эконометрии. – М.: Статистика, 1980. – 438 с.
19. *Илюхин В.П.* Оценивание априорного распределения в задачах статистических решений // Математическая статистика и ее применение. – 1979. – № 5. – С. 114–126.
20. *Иыуду К.А.* Оптимизация устройств автоматики по критерию надежности. – М.: Сов. радио, 1962. – 194 с.
21. *Капур К., Ламберсон Л.* Надежность и проектирование систем. – М.: Мир, 1980. – 604 с.
22. *Карташев Г.Д.* Принципы расходования ресурса и их использование для оценки надежности. – М.: Знание, 1984. – С. 3–82.

23. *Кендалл М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 900 с.
24. *Козлов Б.А., Ушаков И.А.* Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. – М.: Сов. радио, 1975. – 472 с.
25. *Кокс Д., Хинкли Д.* Теоретическая статистика. – М.: Мир, 1978. – 560 с.
26. *Королев С.П.* Основы проектирования баллистических ракет дальнего действия // Творческое наследие академика С.П. Королева. – М.: Наука, 1980. – С. 208–290.
27. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
28. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969. – 400 с.
29. *Кринецкий Е.И., Пискунов В.А.* Контроль работоспособности летательных аппаратов. – М.: МАИ, 1983. – 78 с.
30. *Кузнецов А.А.* Надежность конструкций баллистических ракет. – М.: Машиностроение, 1978. – 256 с.
31. *Лизин В.Т., Пяткин В.А.* Проектирование тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1985. – 344 с.
32. *Лимер Э.Э.* Статистический анализ неэкспериментальных данных. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 381 с.
33. *Ллойд Д., Липов М.* Надежность. – М.: Сов. радио, 1964. – 686 с.
34. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностранной лит., 1962. – 720 с.
35. *Мардиа К., Земроч П.* Таблицы F-распределений и распределений, связанных с ними. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
36. *Митрофанов В.Б.* Об одном алгоритме многомерного случайного поиска. – М.: ИПУ АН СССР, 1974. – 38 с.
37. *Нейман Д.* Два прорыва в теории выбора статистических решений // Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. – М.: Мир, 1964. – Т. 8, № 2. – С. 113–140.
38. *Никозаков Д.Д., Перлик В.И., Кукушкин В.И.* Статистическая оптимизация конструкций летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1977. – 240 с.
39. *Пенская М.Я.* Об оценках априорной плотности // Статистические методы. – Пермь, 1982. – С. 115–124.
40. *Перлик В.И., Савчук В.П., Харитонова Г.Г.* Оптимальное вероятностное проектирование конструкций летательных аппаратов // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1984. – № 2. – С. 59–63.
41. *Полляк Ю.Г.* Вероятностное моделирование на ЭВМ. – М.: Сов. радио, 1971. – 360 с.
42. *Половко А.М.* Основы теории надежности. – М.: Наука, 1964. – 342 с.
43. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций. – М.: Физматгиз, 1971. – 883 с.
44. *Райфа Г., Шлейфер Р.* Прикладная теория статистических решений. – М.: Статистика, 1977. – 360 с.
45. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применение. – М.: Наука, 1968. – 548 с.
46. *Репин В.Г., Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. – М.: Сов. радио, 1977. – 432 с.
47. *Савчук В.П.* Байесовская оценка надежности при линейной функции интенсивности отказов // Надежность и контроль качества. – 1982. – № 11. – С. 19–25.
48. *Савчук В.П.* Байесовские оценки вероятности безотказной работы изделий с возрастающей функцией интенсивности отказов // Надежность и контроль качества. – 1983. – № 9. – С. 40–45.
49. *Савчук В.П.* Приближенное байесовское оценивание вероятности безотказной работы для класса стареющих распределений // Изв. АН СССР. Технич. киберн. – 1985. – № 6. – С. 38–43.
50. *Савчук В.П.* Оценка надежности невосстанавливаемых технических устройств с возрастающей функцией интенсивности отказов // Надежность и долговечность машин и сооружений, № 8. – Киев: Наук. думка, 1985. – С. 35–43.
51. *Савчук В.П.* Использование байесовского подхода в теории форсированных испытаний на надежность // Надежность и контроль качества. – 1985. – № 2. – С. 46–51.

52. *Савчук В.П.* Байесовские оценки надежности для биномиальных испытаний в условиях частичной априорной определенности // Надежность и контроль качества. – 1986. – № 1. – С. 8–16.
53. *Савчук В.П.* Байесовское оценивание надежности технического устройства на основе модели работоспособности с погрешностью // Изв. АН СССР. Технич. киберн. – 1986. – № 1. – С. 60–65.
54. *Савчук В.П.* Определение надежности деталей машин по совокупности проектной и экспериментальной информации // Надежность и контроль качества. – 1986. – № 5. – С. 11–18.
55. *Савчук В.П.* Байесовские условно минимаксные оценки надежности технических систем // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 8. – С. 156–162.
56. *Савчук В.П.* Байесовские оценки вероятности безотказной работы для ограниченно стареющих распределений // Изв. АН СССР. Технич. киберн. – 1987. – № 6.
57. *Савчук В.П.* Приближенные непараметрические эмпирические байесовские оценки вероятности безотказной работы в условиях накопления данных // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 2.
58. *Судаков Р.С.* Непараметрические методы в задачах испытаний систем // Надежность и контроль качества. – 1983. – № 9. – С. 12–21.
59. *Тескин О.И.* Многомерные задачи контроля и планирования объемов испытаний на надежность по одному контрольному уровню // Испытания технических систем и их элементов. – М.: Знание, 1980. – С. 60–98.
60. *Уилкс С.* Математическая статистика. – М.: Наука, 1967. – 632 с.
61. *Ушаков И.А.* Методы расчета эффективности систем на этапе проектирования. – М.: Знание, 1983. – 92 с.
62. *Харитонова Г.Г.* Байесовская оценка вероятности безотказной работы в условиях неопределенности исходных данных // Надежность и контроль качества. – 1986. – № 11. – С. 24–29.
63. *Червоный А.А., Лукьященко В.И., Котин В.А.* Надежность сложных технических систем. – М.: Машиностроение, 1976. – 288 с.
64. *Чернецкий В.И.* Анализ точности нелинейных систем управления. – М.: Машиностроение, 1968. – 246 с.
65. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 279 с.
66. *Aitchison J.* Two paper on the comparison of Bayesian and frequentist approaches to statistical problems of prediction // J. Royal Stat. Soc., Ser. B. – 1964. – V. 26, № 2. – P. 161–175.
67. *Akaike H.* An objective use of Bayesian models // Ann. Inst. Statist. Math. – 1977. – V. 29, part A. – P. 9–20.
68. *Akaike H.* A new look at the Bayes procedure // Biometrika. – 1978. – V. 65, № 6. – P. 53–59.
69. *Akaike H.* Likelihood and the Bayesian procedure // Trab. Estadist. y Invest. Oper. – 1980. – V. 21. – P. 143–166.
70. *Ando A., Kaufman G.M.* Bayesian analysis of the independent multinormal process – neither mean nor precision known // J. Amer. Statist. Assoc. – 1965. – V. 60, № 3. – P. 345–358.
71. *Babillis R.A., Smith A.M.* Application of Bayesian statistics in reliability measurements // Proc. Ann. R & M Conf. – 1965. – V. 4. – P. 357–365.
72. *Balaban H.S.* A Bayesian approach for designing component life tests // Proc. 1967 Ann. Symp. Rel. – Washington, D.C., 1967. – P. 59–74.
73. *Bancroft G.A., Dunsmore I.R.* Predictive distributions in life tests under competing causes of failure // Biometrika. – 1978. – V. 63, № 2. – P. 195–217.
74. *Barlow R.E.* A Bayes explanation of an apparent failure rate paradox // IEEE Transaction Reliab. – 1985. – V. R – 34, № 2. – P. 107–108.
75. *Basu D.* Randomization analysis of experimental data: the Fisher randomization // J. Amer. Statist. Assoc. – 1980. – V. 75, № 371. – P. 575–595.
76. *Bayes T.* An essay towards solving a problem in the doctrine of chances (with a bibliographical note by G.A. Barnard) // Biometrika. – 1958. – V. 45, № 2. – P. 293–315.
77. *Bennett G.K.* Basic concepts of empirical Bayes methods with some results for the Weibull distribution // The Theory and Application of Reliability. – New York: Acad. Press, 1981. – V. 1. – P. 181–202.

78. *Bennett G.K., Martz H.F.* A continuous empirical Bayes smoothing technique // Biometrika. – 1972. – V. 59. – P. 361–368.
79. *Bennett G.K., Martz H.F.* An empirical Bayes estimator for the scale parameter of the two-parameter Weibull distribution // Nav. Res. Log. Quar. – 1973. – V. 20, № 4. – P. 387–393.
80. *Berk R.H.* Limiting behavior of posterior distributions when the model is incorrect // Ann. Math. Statist. – 1966. – V. 37, № 1. – P. 51–58.
81. *Bernardo J.M.* Reference posterior distributions for Bayesian inference // J. Royal Statist. Soc., Ser. B. – 1979. – V. 41, № 2. – P. 113–147.
82. *Bhaltacharya S.K.* Bayesian approach to the life testing and reliability estimation // J. Amer. Statist. Assoc. – 1967. – V. 62, № 1. – P. 48–62.
83. *Bickel P.J., Yahow J.A.* Asymptotically pointwise optimal procedures in sequential analysis // Proc. Fifth Berkley Symp. Math. Statist. Prob. – 1965. – V. 1. – P. 401–413.
84. *Bland R.P.* On the definition of unbiasedness for estimating parameters which are random variables // Commun. Statist. Simula. Computa. – 1981. – V. B10, № 4. – P. 435–436.
85. *Boole G.* Studies in logic and probability. – London: Walts, 1953.
86. *Box G.E., Tico G.C.* A further look at robustness via Bayes theorem // Biometrika. – 1962. – V. 49, № 4. – P. 419–433.
87. *Breipohl A.M., Priorie R.R., Zimmer W.J.* A consideration of the Bayesian approach in reliability evaluation // IEEE Trans. Reliab. – 1965. – V. R–14, № 1. – P. 107–113.
88. *Bury K.V.* Bayesian decision analysis of the hazard rate for a two-parameter Weibull process // IEEE Trans. Reliab. – 1972. – V. R – 21, № 2. – P. 159–169.
89. *Buers J.K., Skeith R.W., Springer M.D.* Bayesian confidence limits for the reliability of mixed cascade and parallel independent exponential subsystems // IEEE Trans. Reliab. – 1974. – V. R – 23, № 1. – P. 104–108.
90. *Cambell G., Hollander M.* Prediction intervals with Dirichlet process prior distribution // Canad. J. Statist. – 1982. – V. 10, № 2. – P. 103–111.
91. *Canavas G.C.* A Bayesian approach to parameter and reliability estimation in the Poisson distribution // IEEE Trans. Reliab. – 1972. – V. R – 21, № 1. – P. 52–56.
92. *Canavas G.C.* An empirical Bayes approach for the Poisson life distribution // IEEE Trans. Reliab. – 1973. – V. R – 22, № 1. – P. 91–96.
93. *Cole P.V.Z.* A Bayesian reliability assessment of complex systems for binomial sampling // IEEE Trans. Reliab. – 1975. – V. R – 24, № 1. – P. 114–117.
94. *Colombo A.G., Costantini D., Jaarsma R.J.* Bayes nonparametric estimation of time-dependent failure rate // IEEE Trans. Reliab. – 1985. – V. R – 34, № 2. – P. 109–113.
95. *Convert P.G.* Entropie et theoreme de Bayes en theorie de l'estimation // Rev. Techn. Thonson. – 1967. – V. 14, № 1. – P. 5–17.
96. *Cornfield T.* The Bayesian outlook and its application // Review Int. Stat. Inst. – 1967. – V. 35, № 1. – P. 34–39.
97. *Couture D.J., Martz H.F.* Empirical Bayes estimation in the Weibull distribution // IEEE Trans. Reliab. – 1972. – V. R – 21, № 1. – P. 75–83.
98. *Cox R.T.* The algebra of probable inference. – Baltimore, Md.: J. Hopkins Press, 1961. – 224 p.
99. *Crellin G.L.* The philosophy and mathematics of Bayes equation // IEEE Trans. Reliab. – 1972. – V. R – 21, № 3. – P. 131–135.
100. *Dalal S.R.* A note on adequacy of mixtures of Dirichlet processes // Sankhya, A. – 1978. – V. 40, № 1. – P. 185–191.
101. *Dalal S.R., Hall G.T.* On approximating parametric Bayes models // Ann. Statist. – 1980. – V. 8, № 5. – P. 664–672.
102. *Dalal S.R., Phadia E.C.* Nonparametric Bayes inference for concordance in bivariate distributions // Commun. Statist. Theor. Meth. – 1983. – V. 12, № 8. – P. 947–963.
103. *Dawid A.P.* On the limiting normality of posterior distributions // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1970. – V. 67, № 7. – P. 625–633.
104. *Dawid A.P., Guttman J.* Conjugate Bayesian inference for structural models // Commun. Statist. – 1981. – V. A10, № 8. – P. 739–748.

105. *Dawid A.P., Stone M., Zidek J.V.* Marginalization paradoxes in Bayesian and statistical inference // J. Royal Statist. Soc. B. – 1974. – V. 35, № 2. – P. 189–223.
106. *Deely J.J., Lindley D.V.* Bayes empirical Bayes // J. Amer. Stat. Assoc. – 1981. – V. 76, № 376. – P. 833–941.
107. *Deely J.J., Tierney M.S., Zimmer W.J.* On the usefulness of the maximum entropy principle in the Bayesian estimation of reliability // IEEE Trans. Reliab. – 1970. – V. R – 19, № 1. – P. 110–115.
108. *De Finetti B.* Bayesianism: its role for both the foundations and applications of statistics // Internat. Statist. Rev. – 1974. – V. 42, № 1. – P. 117–130.
109. *De Finetti B.* Probability, induction and statistics. – London: Wiley, 1972. – 240 p.
110. *De Groot M.H., Rao M.M.* Bayes estimation with convex loss // Ann. Math. Statist. – 1963. – V. 34, № 6. – P. 839–846.
111. *Diaz T.* Bayesian detection of the change of scale parameter in sequences of independent gamma random variables // J. Econom. – 1982. – V. 19. – P. 23–29.
112. *Doksum K.* Tailfree and neutral random probabilities and their posterior distributions // Ann. Probability. – 1974. – V. 2. – P. 183–201.
113. *Drake A.W.* Bayesian statistics for the reliability engineer // Proc. Ann. Symp. Reliability. – 1966. – P. 315–320.
114. *Dunsmore I.R.* The Bayesian predictive distribution in life testing models // Technometrics. – 1974. – V. 16, № 3. – P. 455–460.
115. *Dykstra R.L., Loud P.* A Bayesian nonparametric approach to reliability // Ann. Statist. – 1981. – V. 9, № 2. – P. 356–367.
116. *Easterling R.G.* A personal view of the Bayesian controversy on reliability and statistics // IEEE Trans. Reliab. – 1972. – V. R – 21, № 3. – P. 186–194.
117. *Edwards A.W.E.* Commentary on the arguments of Thomas Bayes // Scand. J. Statist. – 1978. – V. 5, № 2. – P. 116–118.
118. *El-Sayyad G.M.* Estimation of the parameter of an exponential distribution // J. Royal Statist. Soc., Ser. B. – 1967. – V. 29, № 4. – P. 525–532.
119. *Evans R.A.* Prior knowledge, engineers versus statisticians // IEEE Trans. Reliab. – 1969. – V. R – 18, № 2. – P. 143.
120. *Evans R.A.* The principle of minimum information // IEEE Trans. Reliab. – 1969. – V. R – 18, № 1. – P. 87–90.
121. *Evans R.A.* Data we will never get // IEEE Trans. Reliab. – 1971. – V. R – 20, № 1. – P. 20.
122. *Evans R.A.* Bayes: in theory and practice // The theory and applications of reliability. V. 2. – New York: Acad. Press Inc., 1977. – P. 50–54.
123. *Evans I.G., Nigm A.M.* Bayesian prediction for two-parameter Weibull lifetime models // Commun. Statist. Theor. Meth. – 1980. – V. A9, № 6. – P. 649–658.
124. *Fellenberg B., Pilz J.* On the choice of prior distribution for Bayesian reliability analysis // Freiberger Forsch. – 1985. – D170. – P. 49–68.
125. *Ferguson T.S.* Bayesian analysis of some nonparametric problems // Ann. Statist. – 1973. – V. 1, № 2. – P. 209–230.
126. *Ferguson T.S.* Prior distribution on space of probability measures // Ann. Statist. – 1974. – V. 2, № 5. – P. 615–629.
127. *Ferguson T.S.* Sequental estimation with Dirichlet process priors // Statistical desision theory and related topics. V. 1. – Acad. Press Inc., 1982. – P. 385–401.
128. *Ferguson T.S., Phadia E.G.* Bayesian nonparametric estimation based on censored data // Ann. Statist. – 1979. – V. 7, № 1. – P. 163–186.
129. *Fisher R.A.* Statistical methods and scientific inference. – Edinburgh: Oliver I Boyd, 1959.
130. *Fisher R.A.* The logic of inductive inference (with discussions) // J. Royal. Statist. Soc. – 1935. – V. 98, № 1. – P. 39–82.
131. *Freedman D.A.* On the asymptotic behavior of Bayes' estimation in the discrete case // Ann. Math. Statist. – 1963. – V. 34, № 12. – P. 1386–1403.
132. *Girshick M.A., Savage L.G.* Bayes and minimax estimates for quadratic loss function // Proc. Second Berkley Symp. Math. Statist. Prob. 1951. V. 1. – P. 53–74.
133. *Good I.J.* The estimation of probabilities. An essay on modern Bayesian methods. – Wiley, 1965, 110 p.

134. *Good I.J.* Probability and the wieghting of evidence. – London: Griffin, 1950. – 168 p.
135. *Good I.J.* Some hystory of the hierarchical Bayesian methodology // Trab. Estadist. Invest. Oper. – 1980. – V. 31, № 1. – P. 489–504.
136. *Guild R.D.* Bayesian MFR life test sampling plans // J. Quality Technology. – 1973. – V. 5, № 1. – P. 11–15.
137. *Guttman I., Tiao G.C.* A Bayesian approach to some best population problems // Ann. Math. Statist. – 1964. – V. 35, № 7. – P. 825–835.
138. *Hamilton C.W., Drenna J.E.* Research towards a Bayesian procedure for calculating system reliability // Aerospace Ann. of R & M. – 1964. – P. 614–620.
139. *Harris B., Singpurwalla N.* Life distributions derived from stochastic hazard functions // IEEE Trans. Reliab. – 1968. – V. R – 17, № 1. – P. 70–79.
140. *Harris B.* A survey of statistical methods in systems reliability using Bernoulli sampling of components // Proc. Conf. Theory and Appl. of Reliab. Emphasis Bayesian and Nonparametr. Meth. – New York, 1976. – P. 86–98.
141. *Hartigan J.A.* Invariant prior distributions // Ann. Math. Statist. – 1964. – V. 36, № 7. – P. 836–845.
142. *Hartigan J.A.* Bayes Theory. – New York: Springer-Verlag, 1983. – 140 p.
143. *Higgins J.J., Tsokos C.P.* On the behavior of some quantities used in Bayesian reliability demonstration tests//IEEE Trans. Reliab. – 1976. – V. R – 25, № 2. – P. 261–264.
144. *Higgins J.J., Tsokos C.P.* Sensitivity of Bayes estimates of reciprocal MTBF and reliability to an incorrect failure model // IEEE Trans. Reliab. – 1977. – V. R – 26, № 4. – P. 286–289.
145. *Higgins J.J., Tsokos C.P.* Comparison of Bayesian estimates of failure intensity for fitted priors of life data // The Theory and Applications of Reliability. V. 2. – New York: Acad. Press, 1977. – P. 75–92.
146. *Higgins J.J., Tsokos C.P.* Modified method-of-moments in empirical Bayes estimation // IEEE Trans. Reliab. – 1979. – V. R – 28, № 1. – P. 27–31.
147. *Higgins J.J., Tsokos C.P.* A study of the effect of the loss function on Bayes estimation of failure intensity, MTBF, and reliability // Appl. Math. Comput. – 1980. – V. 6. – P. 145–166.
148. *Jaynes E.T.* Prior probabilities // IEEE Trans. Syst. Sci. Cybernetics. – 1968. – V. SSC – 4, № 3. – P. 227–241.
149. *Jeffreys H.* Theory of Probability. – 3rd ed. – Oxford: Clarendon Press, 1961. – 240 p.
150. *Jeffreys H.* Theory of Probability. – Oxford: Clarendon, 1966. – 428 p.
151. *Joglekar A.M.* Reliability demonstration based on prior distribution – sensitivity analysis and multy sample plans // Proc. 1975. Ann. Rel. & Maint. Symp. – Washington, D.C., 1975. – P. 251–252.
152. *Johnson R.A.* Asymptotic expansions associated with posterior distributions // Ann. Math. Statist. – 1970. – V. 41, № 10. – P. 851–864.
153. *Kalbfleisch J.D.* Non-parametric Bayesian analysis of survival time data // J. Royal Stat. Soc. B. – 1978. – V. 40, № 2. – P. 214–221.
154. *Kamat S.J.* Bayesian estimation of system reliability for Weibull distribution using Monte Carlo simulation // The Theory and Applications of Reliability with Emphasis on Bayesian and Nonparametric Methods. V. 2. – New York: Academic Press, 1977. – P. 123–131.
155. *Kaplan E.L., Meier P.* Nonparametric estimation from incomplete observations // J. Amer. Statist. Assoc. – 1958. – V. 53. – P. 457–481.
156. *Keynes J.M.* A treatise on probability. – N.Y.: Harper & Row, 1921.
157. *Koopman B.O.* The bases of probability // Bull. Amer. Math. Soc. – 1940. – V. 46. – P. 763–774.
158. *Korwar R., Hollander M.* Empirical Bayes estimation of a distribution function // Ann. Statist. – 1976. – V. 4, № 3. – P. 581–588.
159. *Le Cam L.* On some asymptotic properties of maximum likelyhood estimates and related Bayes' estimates // Univ. Calif. Publ. Statist. – 1953. – V. 1, № 11. – P. 277–330.
160. *Lemon G.H.* An empirical Bayes approach to reliability // IEEE Trans. Reliab. – 1972. – V. R – 21. – P. 155–158.
161. *Levy L.L., Moore A.H.* A Monte-Carlo technique for obtaining system reliability confidence limits from component test data // IEEE Trans. Reliab. – 1967. – V. R – 16, № 1. – P. 69–72.

162. *Lientz B.P.* Modified Bayesian procedures in reliability testing // The theory and application of reliability with emphasis on Bayesian and nonparametric methods. V. 2. – New York: Academic Press, 1977. – P. 163–171.
163. *Lin C.Y., Schick G.L.* On-line (Console-Aided) assessment of prior distributions for reliability problems // Proc. Ann. R & M Conf.. – 1970. – V. 9. – P. 13–19.
164. *Lindley D.V.* The use of prior probability distributions in statistical inference and desisions // Fourth Berkley Symp. Math. Statist. Prob., 1961. – V. 1. – P. 453–468.
165. *Lindley D.V.* Making desisions. – London: Wiley Intersc., 1971. – 242 p.
166. *Lindley D.V.* Bayesian statistics, a review. – Philadelfia: SIAM, 1972. – 68 p.
167. *Lindley D.V.* The future of statistics a Bayesian 21st century // Appl. Probabil. – 1975. – Suppl. 7. – P. 106–115.
168. *Lindley D.V.* The Bayesian approach // Scand. J. Statist. – 1978. – V. 5, № 1. – P. 1–26.
169. *Ling K.D., Leong C.Y.* Bayesian predictive distributions for samples from exponential distributions // Tamkang J. Math. – 1977. – V. 8, № 1. – P. 11–16.
170. *Lingappaiah G.S.* Bayesian approach to the prediction problem in the exponential polulation // IEEE Trans. Reliab. – 1978. – V. R – 27, № 2. – P. 222–225.
171. *Lingappaiah G.S.* Bayesian approach to the prediction problem in complete and censored samples from the gamma and exponential population // Commun. Statist. Theor. Meth. – 1979. – V. A8, № 14. – P. 1403–1423.
172. *Littlewood B., Verrall J.L.* A Bayesian reliability model with a stochastically monotone failure rate // IEEE Trans. Reliab. – 1974. – V. R – 23, № 1. – P. 108–114.
173. *Lochner R.H., Basu A.P.* Bayesian analysis of the two-sample problem with incomplete data // J. Amer. Statist. Assoc. – 1972. – V. 67, № 3. – P. 432–438.
174. *Lochner R.H., Basu A.P.* A generalized Dirichlet distribution in Bayesian life testing // J. Royal Statist. Soc. B. – 1975. – V. 37, № 1. – P. 103–113.
175. *Lochner R.H., Basu A.P.* A Bayesian approach for testing increasing failure rate // The theory and application of reliability. V. 1. – New York: Acad. Press, 1977. – P. 67–83.
176. *Lwin T., Singh N.* Bayesian analysis of the gamma distribution model in reliability estimation // IEEE Trans. Reliab. – 1974, V. R – 23, № 3. – P. 314–319.
177. *Mann N.R.* Computer-aided selection of prior distribution for generating Monte Carlo confidence bounds on system reliability // Nav. Res. Log. Quart. – 1970. – V. 17. – P. 41–54.
178. *Mann N.R., Grubbs F.E.* Approximately optimum confidence bounds on series system reliability for exponential time to failure data // Biometrika. – 1972. – V. 59, № 2. – P. 191–204.
179. *Martz H.F.* Pooling life test data by means of the empirical Bayes method // IEEE Trans. Reliab. – 1975. – V. R – 24. – P. 27–30.
180. *Martz H.F., Lian M.G.* Empirical Bayes estimation of the binomial parameter // Biometrika. – 1975. – V. 62. – P. 517–523.
181. *Martz H.F., Lian M.G.* Bayes and empirical Bayes point and interval estimation of reliability for the Weibull model // The theory and applications of reliability with emphasis on Bayesian and nonparametric methods. V. 1. – New York: Academic Press, 1977. – P. 203–233.
182. *Meeden G., Isaacson D.* Approximate behavior of the posterior distribution for a large observation // Ann. Statist. – 1977. – V. 5, № 5. – P. 899–908.
183. *Moore A.H., Bilikam J.E.* Bayesian estimation of parameters of life distributions and reliability from type II censored samples// IEEE Trans. Reliab. – 1978. – V. R.–27, № 1. – P. 64–67.
184. *Mizes von R.* Mathematical theory of probability and statistics. – New York: Acad. Press, 1964. – 360 p.
185. *Morris C.N.* Parametric empirical Bayes inference: theory and application // J. Amer. Statist. Assoc. – 1983. – V. 78, № 381. – P. 47–55.
186. *Nichols W.G., Tsokos C.P.* Empirical Bayes point estimation in a family of probability distributions // Intern. Stat. Inst. – 1972. – V. 40. – P. 146–161.
187. *O'Bryan T., Susarla V.* An empirical Bayes estimation problem with nonidentical componenets involving normal distributions // Comm. Statist. – 1975. – V. 4. – p. 1033–1042.

188. *Padgett W.J., Tsokos C.P.* Bayes estimation of reliability for the lognormal failure model // The Theory and Applications of Reliability with Emphasis on Bayesian and Nonparametric Methods. V. 2. New York: Acad. Press, 1977. – P.133–161.
189. *Padgett W.J., Wei L.J.* Bayesian lower bounds on reliability for the lognormal model // IEEE Trans. Reliab. – 1978. – V. R–27, № 2. – P. 161–165.
190. *Padgett W.J., Wei L.J.* A Bayesian nonparametric estimator of survival probability assuming increasing failure rate // Commun. Statist. Theor. Meth., 1981. – V. A10, № 1. – P. 49–63.
191. *Papadopoulos A.S.* The Burr distribution as a failure model from a Bayesian approach // IEEE Trans. Reliab. – 1978. – V.R–27, № 3. – P. 369–371.
192. *Papadopoulos A.S., Padgett W.J.* On Bayes estimation for mixture of two exponential-life-distribution from rate-censored samples // IEEE Trans. Reliab. – 1986. – V.R–35, № 1. – P. 102–105.
193. *Papadopoulos A.S., Tsokos C.P.* Bayesian confidence bounds for the Weibull failure model // IEEE Trans. Reliab. – 1975. – V.R –24, № 1. – P. 21–26.
194. *Papadopoulos A.S., Rao A.V.N.* Bayesian confidence bounds for the Poisson failure model // The theory and applications of reliability with emphasis on Bayesian and non-parametric methods. V. 2. – New York: Academic Press, 1977. – P. 107–121.
195. *Parker J.B.* Bayesian prior distributions for multi-component systems // Nav. Res. Log. Quart. – 1972. – V. 19, № 3. – P. 509–515.
196. *Parzon E.* On the estimation of probability density function on mode // Ann. Math. Statist. – 1962. – V. 33. – P. 1065–1075.
197. *Phadia E.G.* A note on empirical Bayes estimation of a distribution function based on censored data // Ann. Statist. – 1980. – V. 8, № 1. – P. 226–229.
198. *Prairie R.R., Zimmer W.J.* The role of the prior distributions in Bayesian decision making for the binomial situation // Ann. Reliab. and Maint. – 1970. – V. 9. – P. 2–12.
199. *Proschan F., Singpurwalla N.D.* Accelerated life testing – a pragmatic Bayesian approach // Optimization in Statist / Ed. by J. Rustagi. – New York: Acad. Press, 1979. – P. 78–90.
200. *Proschan F., Singpurwalla N.D.* A new approach to inference from accelerated life tests // IEEE Trans. Reliab. – 1980. – V.R –29, № 2. – P. 98–102.
201. *Pugh E.L.* The best estimate of reliability in the exponential case // Operation Research.– 1963. – V. 11.– P. 57–61.
202. *Rai K., Susarla V., Ryzin J.V.* Shrinkage estimation in nonparametric Bayesian survival analysis: A simulation study // Commun. Statist. Simula. Comp. – 1980. – V. B9, № 3. – P. 271–298.
203. *Ramsey F.P.* Truth and probability. In the foundations of mathematics and other logical essay. – London: Kegan, 1926. – 208 p.
204. *Robbins H.* Asymptotically subminimax solutions of compound statistical desision problems // Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. and Reliab., 1950. – P. 131–148.
205. *Robbins H.* An empirical Bayes estimation problems // Proc. National. Acad. Sci. USA. – 1980. – V. 77, № 12. – P. 6988–6989.
206. *Robbins H.* An empirical Bayes approach to statistics // Proc. 3rd Berkley Symp. Math. Statist. Probabil. – 1955. – V. 1. – P. 157–164.
207. *Rukhin A.L.* Universal Bayes estimator of a real parameters. Rend. Sem. Mat. Univers// Politechn. Torino. – 1976–1977.–V. 35. – P. 53–59.
208. *Sage A.P., Melsa J.L.* Estimation theory with applications to communications and control. – New York: McGraw-Hill Book Co., 1971. – 284 p.
209. *Sathe Y.S., Varde S.D.* On minimum variance unbiased estimation of reliability // Ann. Math. Statist. – 1969. – V. 40, № 7. – P. 710–714.
210. *Savage L.J.* The foundations of statistics. – New York: Wiley, 1954. – 308 p.
211. *Schafer R.F., Feduccia A.J.* Prior distributions fitted to observed reliability data // IEEE Trans. Reliab. – 1972. – V.R–21, № 2. – P. 148–154.
212. *Schafer R.F., Singpurwalla N.D.* A sequential Bayes procedure for reliability demonstration // Nav. Res. Log. Quart. – 1970. – V. 17, № 1. – P. 55–67.
213. *Schick G.J., Drnas T.M.* Bayesian reliability demonstration // Amer. Inst. Ind. Eng.– 1972. – V. 4, № 4. – P. 92–102.
214. *Schulhof R.J., Lindstrom D.L.* Application of Bayesian statistics in reliability // Ann. Symp. Reliab. – 1966. – P. 684–695.
215. *Schwartz L.* On Bayes procedures // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. – 1965.–Bd 4, № 1. – S. 10–26.

216. *Shimi I.N., Tsokos C.P.* The Bayesian and nonparametric approach to reliability studies: a survey of recent work The theory and applications of reliability with emphasis on Bayesian and nonparametric methods. V. 1. – New York: Academic Press, 1977. – P. 5–47.
217. *Smith D.R.* An analysis regarding the determination of Bayesian confidence limits for the reliability of distribution–free parallel subsystems // The Theory and applications of reliability with emphasis on Bayesian and nonparametric methods. – New York: Acad. Press, 1977. – P. 93–106.
218. *Smith J.Q.* Bayes estimates under bounded loss // Biometrika.–1980.–V. 67, № 3. – P. 629–638.
219. *Soland R.M.* Bayesian analysis of the Weibull process with unknown scale and shape parameters // IEEE Trans. Reliab.– 1968.–V.R–17, № 1. – P. 84–90.
220. *Soland R.M.* Bayesian analysis of the Weibull process with unknown scale and shape parameters // IEEE Trans. Reliab. – 1969. – V.R–18, № 2. – P. 181–184.
221. *Springer M.D., Byers J.K.* Bayesian confidence limits for the reliability of mixed exponential and distribution–free cascade subsystems // IEEE Trans. Reliab. – 1971.– V.R–20, № 1.– P. 24–28.
222. *Springer M.D., Thompson W.E.* Bayesian confidence limits for the product of N binomial parameters // Biometrika. – 1966. – V. 53, № 3.– P. 611–613.
223. *Springer M.D., Thompson W.E.* Bayesian confidence limits for the reliability of cascade exponential subsystems // IEEE Trans. Reliab. – 1967.–V.R –16, № 1.–P. 86–89.
224. *Springer M.D., Thompson W.E.* Bayesian confidence limits for the reliability of redundent systems when tests are terminated at first failure // Technometrics.–1968.–V. 10, № 1.– P. 29–36.
225. *Strasser H.* Consistency of maximum likelihood and Bayes estimates // Ann. Statist. – 1981. – V. 9, № 5. – P. 1107–1113.
226. *Stone M., Dawid A.P.* On Bayesian implications of improper Bayes inference in routine statistical problem // Biometrika. – 1972. – V. 59, № 3. – P. 369–373.
227. *Susarla V., Van Ryzin J.* Empirical Bayes estimation of a distribution survival function from right censored observations // Annals Statist. – 1978. – V. 5, № 4. – P. 740–754.
228. *Susarla V., Van Ryzin J.* Nonparametric Bayesian estimation of survival curves from incomplete observation // J. Amer. Statist. Assoc. – 1976. – V. 71, № 356. – P. 897–902.
229. *Susarla V., Van Ryzin J.* Large sample theory for survival curve estimators under variable censoring Optimizing Methods in Statictics. – New York: Acad. Press, 1979. – P. 16–32.
230. *Thompson W.E., Chang E.Y.* Bayes confidence limits for reliability of redundant systems // Technometrics. – 1975. – V. 17, № 1. – P. 89–93.
231. *Tillman F.A., Hwang C.L., Kuo W., Grosh D.L.* Bayesian reliability and availability – a review // IEEE Trans. Reliab. – 1982. – V. R–31, № 4. – P. 362–372.
232. *Tribus M.* Rational descriptions, decisions and designs. – New York: Pergamon, 1952. – 120 p.
233. *Tsokos C.P.* Bayesian approach to reliability using the Weibull distribution with unknown parameters with simulation // JUSE. – 1972. – V. 19, № 4. – P. 1–12.
234. *Tsokos C.P., Canavas G.C.* Bayesian concepts for the estimation of reliability in the Weibull life-testing model // Int. Stat. Ins. Rev. – 1972. – V. 40. – P. 153–160.
235. *Tsokos C.P., Welch R.L.W.* Robustness of Bayes optimal discriminant procedure with 0–1 loss //Appl. Mathem. Comput. – 1979. – V. 5, № 2. – P. 131–148.
236. *Tummala V.M.R., Sathe P.T.* Minimum expected loss estimator of reliability and parameters of certain life time distributions // IEEE Trans. Reliab. – 1978.– V. R–27, № 4. – P. 283–285.
237. *Varde S.D.* Life testing and reliability estimation for the two parameter exponential distribution // J. Amer. Statist. Assoc. – 1969. – V. 64. – P. 621–631.
238. *Venn J.A.* The logic of chance. – London, 1962.
239. *Wallenius R.T.* Sequential reliability assurance in finite lots // Technometrics. – 1969. – V. 11, № 1. – P. 61–74.
240. *Walker A.M.* On the asymptotic behavior of posterior distributions // J. Royal Statist. Soc. B. – 1969. – V. 31, № 1. – P. 80–88.

241. *Weiler H.* The use of incomplete beta functions for prior distributios in binomial sampling // Technometrics. – 1965. – V. 7, № 3. – P. 335–347.
242. *Wilson M.A.* Experience with Bayesian reliability measurement of large systems // IEEE Trans. Reliab. – 1972. – V. R–21, № 2. – P. 181–185.
243. *Wolf J.E.* Bayesian reliability assessment from test data // Las Vegas, Proc. 1976 Ann. Symp. Rel.. – 1976. – P. 411–419.
244. *Yamato H.* Relations between limiting Bayes estimates and U-statistics for estimable parameters of degrees 2 and 3 // Commun. Statist. Theory Meth. – 1977. – V. A6, № 1. – P. 55–66.
245. *Zacks A.* Bayes estimation of the reliability of series and parallel systems of independent exponential components The theory and applications of reliability with emphasis on Bayesian and nonparametric methods. V. 2. – New York: Academic Press, 1977. – P. 55–74.
246. *Zehniwirth B.* Nonparametric linear Bayes estimation of survival curves from incomplete observations // Comm. Statist. Theor. Meth. – 1985. – V. 14, № 8. – P. 1769–1778.
247. *Zellner A.* Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions // J. Amer. Statist. Assoc. – 1986. – V. 81, № 394. – P. 446–451.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Научное издание

САВЧУК Владимир Павлович

БАЙЕСОВСКИЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ:

Надежность технических объектов

Заведующий редакцией *Л.А. Русаков*
Редактор *В.И. Левантовский*
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*
Технические редакторы *С.В. Геворкян. В.Н. Никитина*
Корректоры *Н.П. Круглова, Т.В. Обод, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 32743

Сдано в набор 10.05.89. Подписано к печати 26.07.89
Формат 60 X 90/16. Бумага книжно-журнальная
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 20,50. Усл.кр.-отт. 20,50. Уч.-изд.л. 23,39
Тираж 4500 экз. Тип. зак. 717 Цена 4 руб.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства "Наука"
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

BAYES METHODS OF STATISTICAL ESTIMATION

by *V.P. SAVCHUK*

ABSTRACT

The book is devoted to the systematic account of the fundamental of the Bayes theory of statistical estimation applied to the analysis of engineering reliability. The trend to use the Bayes approach in different fields of knowledge, observed lately, is evoked by its natural compatibility with any kind of human activity in the process of which one can gain new knowledge or create material objects. At the same time the Bayes theory is characterised by inner logical harmony and simplicity which makes it still more attractive for applied purposes. The application of the Bayes approach in the field of reliability gives the opportunity to save money and time assigned for experiments owing to utilization of relevant prior information instead of the corresponding number of trials.

The subject matter of the book pursues the double aim:

(1) to give an account of the present state of the Bayes theory of statistical estimation applicable to investigation of reliabillity problems;

(2) to demonstrate the possibilities of the Bayes approach for evaluation of survival probability in the reliability calculations which practically cover great variety of the problems of the statistical analysis of engineering reliability.

The distinguishing feature of the book is a close unity of fundamental investigation of the main principles of the Bayes theory with clear trend of its practical applications. Rendering the fundamentals of the Bayes methodology follows classical works by Ramsey, Good, Savage, Jeffreys, De Groot, while its present state is presented by the results received during the last 30 years by the scientists of the USA, Canada and countries of the Western Europe. The greater part of the book comprises the presentation of new and original results of the author, the most significant of which are Bayes quasi-parametric estimators, Bayes relativeminimax estimators under the conditions of a partial prior definiteness, the estimators of survival probability on the basis of the functional models of a survival state with an additive error. The Bayes procedures suggested in the book are distinguished by simple way of representation of prior information and use censored samples that undoubtedly testify to its practical usefulness. The book is illustrated by a great number of examples.

The book is addressed first and foremost to the practising specialists though it also deals with a number of theoretical problems. The book is the most felicitous blend of thorough mathematically strict presentation of the subject matter and its high readability. The materials of the book can be a useful authoritative and fundamental source of reference for training engineers in different fields.

CONTENTS

Bayes procedures. Survival probability estimators for the constant failure rate. Reliability estimators for the linear failure rate. Estimation of reliability for the Weibull distribution of a time to failure. The Bayes estimator of a survival probability from accelerated life tests.

Chapter 4. **Nonparametric Bayes estimation.** Nonparametric Bayes estimators based on the Dirichlet processes. Nonparametric Bayes estimators in which the Dirichlet processes are not used. The nonparametric Bayes approach of quantile estimation for the increasing failure rate.

Chapter 5. **Quasi-parametric Bayes estimators of a survival probability.** The parametric approximations for the distribution class with the increasing failure rate. Posterior distributions of a survival probability for the simpliest distribution function approximation. Bayes estimators of a survival probability for the restricted increasing failure rate distributions.

Chapter 6. **Estimators of a survival probability under the conditions of a partial prior definiteness.** Setting the problem and its general solution. A partial prior definiteness for the Bernoulli trials. A partial prior definiteness for the constant failure rate. Using a prior confidence interval for estimation of a survival probability.

Chapter 7. **Empirical Bayes estimators of reliability.** Setting the problem and the state of the theory of empirical Bayes estimation. Empirical Bayes estimators of a survival probability for the most extended parametrical distributions. Nonparametric empirical Bayes estimators of reliability under conditions of data accumulation.

Chapter 8. **Investigation of engineering reliability on the basis of the ideal model of a survival state.** Setting the problem and its general solution. Survival probability estimators for the known variance of a state variable. General estimators of a survival probability for a unilateral model of a survival state. The instances of the calculation of reliability estimates. The statistical design optimization based on the Bayes approach.

Chapter 9. **The statistical reliability analysis based on the model of a survival state with error (prior Bayes estimators).** Traditional and Bayes interpretations of the error of the survival state model. The problem of estimation of the additive error of the survival state model attached to estimation of a survival probability. The conditional estimators of a survival probability. Bayes estimation of a survival probability under the lack of experimental data.

Chapter 10. **The statistical reliability analysis based on the model of a survival state with error (posterior Bayes estimators).** The likelihood function for independent trials. The posterior distribution of the error parameters of a theoretical survival state model. Bayes posterior estimators. The procedure of a survival control based on a key parameter. Statistical estimation of safety factor.

The bibliography comprises 247 references, 11 of which are the author's works.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА"

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ГОТОВИТСЯ К ИЗДАНИЮ:

Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. **Теория случайных процессов и ее инженерные приложения**. (Аннотированный план на 1990 г., п. 6).

Представляет собой систематическое изложение основ теории случайных процессов под углом зрения ее практических приложений по специальностям: кибернетика, прикладная математика, вычислительная техника, автоматизированные системы управления, автоматизация производственных процессов, теория механизмов, радиотехника, теория надежности и др. Несмотря на разнообразие областей, к которым относятся приложения, все они пронизаны одной единой методической основой. Является продолжением книги авторов "Теория вероятностей и ее инженерные приложения" (1988 г.)

Для инженеров и научных работников разных профилей. Может быть использована студентами и преподавателями вузов.

Предварительные заказы на данную книгу принимаются без ограничений книжными магазинами, распространяющими физико-математическую литературу.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА"

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ГОТОВИТСЯ К ИЗДАНИЮ:

Пастур Л.А., Фиготин А.Л. **Случайные и почти периодические самосопряженные операторы. Общие спектральные свойства и распределение собственных значений.** (Аннотированный план на 1990 г., п. 27).

Спектральная теория дифференциальных и конечно-разностных операторов со случайными эргодическими или почти периодическими коэффициентами является новой, активно развивающейся областью спектрального анализа и математической физики, имеющей многочисленные приложения в теории твердого тела, оптике, механике. Книга посвящена вопросам существенной самосопряженности таких операторов, общей структуре их спектра, доказательству существования нормированной функции распределения собственных значений (интегрированной плотности состояний) и результатам ее изучения, в том числе асимптотического, на различных участках спектра.

Для научных работников, математиков и представителей смежных наук, а также для аспирантов и студентов математических и физических специальностей.

Предварительные заказы на данную книгу принимаются без ограничений всеми книжными магазинами, распространяющими физико-математическую литературу.