М. І. ШКІЛЬ

Математичний аналіз

$$\lim \int \frac{d}{dx}$$

ЧАСТИНА

1

3700-17

517(075)
Ш66

М. І. ШКІЛЬ

Математичний аналіз

У двох частинах

ЧАСТИНА
1

Затверджено Міністерством освіти і науки України

Підручник для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів

3-тє видання, перероблене і доповнене

КИЇВ
«ВИЩА ШКОЛА»
2005

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Ш66

Гриф надано Міністерством освіти і науки України (лист від 23 червня 2004 р. № 1/11-3052)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Автору за підручник «Математичний аналіз» у двох частинах (К.: Вища шк., 1978. — Ч. 1; 1981. — Ч. 2) присуджено Державну премію України в галузі науки і техніки 1996 року

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *І. О. Шевчук* (Київський національний університет імені Тараса Шевченка); д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. П. Яковець* (Ніжинський державний педагогічний університет імені Миколи Гоголя); д-р пед. наук, проф. *З. І. Слєпкань* (Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова); д-р пед. наук, проф. *Н. М. Шунда* (Вінницький державний педагогічний університет імені М. Коцюбинського)

Редактор *Т. М. Глушко*

Шкіль М. І.

Ш66 Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 1. — 3-тє вид., перероб. і допов. — К.: Вища шк., 2005. — 447 с.: іл.

ISBN 966-642-284-0 (ч. 1)

ISBN 966-642-285-9

Розглянуто такі поняття, як функція, границя і неперервність, а також диференціальне та інтегральне числення. Викладені математичні поняття пов'язано з фізикою, на конкретних прикладах показано застосування методу математичного аналізу під час розв'язування задач із фізики, механіки, техніки. Третє видання (2-ге вид. — 1995 р.) перероблене і доповнене з урахуванням змін у навчальних програмах і державних освітніх стандартів з математики. Вивчення наближених формул супроводжується структурними схемами відповідних алгоритмів.

Для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 966-642-284-0 (ч. 1)
ISBN 966-642-285-9

ТБ ВНТУ м. Вінниця б/о

© Видавниче об'єднання «Вища школа», 1978
© М. І. Шкіль, 2005, із змінами

Вступ до математичного аналізу

РОЗДІЛ 1

1.1 ПРО ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКИ. ПРЕДМЕТ І МЕТОД МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Кожна наука досліджує певні аспекти матеріального світу. Так, фізика вивчає основні властивості та форми руху матерії, хімія — будову й властивості речовин; астрономія — будову й розвиток небесних тіл і Всесвіту; геометрія — просторові форми і співвідношення тіл. У всіх цих науках доводиться мати справу з найрізноманітнішими величинами. Наприклад, у фізиці користуються такими величинами, як густина, маса, температура тіла, теплоємність, сила струму та ін.; у хімії — валентність, атомна маса, моль та ін.; у геометрії — довжина відрізка, площа та об'єм тіл тощо.

Незважаючи на відмінність цих величин, вони мають одну спільну властивість: їх можна виміряти, взявши за одиницю виміру довільну величину тієї самої природи, що й розглядувана величина. Тоді відношення конкретної величини до одиниці виміру дає абстрактне число, яке називають *значенням вимірюваної величини*.

Отже, абстрагуючись від індивідуальних особливостей конкретних величин і беручи до уваги їхню спільну властивість (їхні значення), дістанемо величину взагалі (без конкретного змісту), яка може набувати довільних числових значень. Таку величину називають *числовою*, або *математичною*.

Вивченням математичних величин і займається математика[1].

Таким чином, математика в явищах, процесах, тілах вивчає найзагальніші властивості їх, не розглядаючи при цьому решту властивостей, тобто абстрагуючись від тих, які не мають істотного значення для розглядуваного випадку. Абстракція[2] виокремлює загальні, найголовніші ознаки предмета вивчення. Без неї неможлива наука, неможливі пізнання природи й логічне мислення взагалі.

У математиці абстракція відіграє надзвичайно важливу роль. Так, у геометрії розглядають лише форму тіл, їхнє положення або співвідношення між окремими їхніми елементами і зовсім ігнорують усі інші властивості (масу, колір, матеріал тощо), тобто абстрагуються від них; в арифметиці

---

[1] Слово «математика» походить від грец. *mathema*, що означає «наука», «знання».
[2] Слово «абстракція» походить від лат. *abctractio*, що означає «відокремлення».

розглядають натуральні числа, не цікавлячись при цьому самими об'єктами лічби. Більшість основних фундаментальних понять математики, таких як точка, пряма, площина, коло, трикутник, число, функція та ін., виникли внаслідок абстрагування від об'єктів реального світу.

Цю універсальність, абстрактність математики деякі філософи намагаються витлумачити як відірваність її від природи, від об'єктивної дійсності, практики і життя. Вони вважають, що математика є вільним витвором людського розуму незалежно від досвіду, тобто можна вивести всі її теорії апріорно, не вдаючись до досвіду, який дістаємо із навколишнього світу.

Про те, що математичні поняття, теорії, методи виникають під впливом життєвої практики людства, свідчить хоча б такий факт. Відомо, що окремі ідеї вищої математики зародилися ще в працях Архімеда[1], який винайшов способи обчислення площ і об'ємів, та в працях Аполлонія[2], який вивчав конічні перерізи. Проте ці нові ідеї змінних величин не знайшли тоді в математиці подальшого розвитку. І тільки в XVII—XVIII ст. бурхливий розвиток промисловості, мореплавства, астрономії, природознавства висунув на перший план такі математичні проблеми, як вивчення рухів, процесів, обчислення площ та об'ємів тіл. Ці завдання не могла розв'язати математика того часу, яка оперувала тільки сталими величинами. Тому потрібно було шукати нові методи вивчення таких понять, як швидкість, прискорення. Для вивчення цих проблем Рене Декарт[3] запровадив у математиці змінну величину.

У природі та різних науках про неї існують величини, які за певних умов мають те саме значення. Такі величини називають *сталими*. Якщо значення величини змінюється, то таку величину називають *змінною*.

❑ **Приклад**

1. Нехай R — радіус кола, а l — довжина кола. Як відомо, довжина кола виражається формулою

$$l = 2\pi R. \tag{1}$$

Якщо в цій формулі змінювати радіус кола R, то змінюватиметься й довжина кола l, а число π, яке виражає відношення довжини кола до його діаметра, залишиться сталим.

Отже, у цьому прикладі маємо справу зі змінними величинами R і l та сталою величиною π, причому вона залишається сталою за будь-яких умов.

Величини, які залишаються сталими за будь-яких умов, називають *абсолютно сталими*.

❑ **Приклад**

2. Нехай під поршнем циліндра знаходиться певна маса газу (ідеального), температура якого не змінюється. За законом Бойля — Маріотта об'єм V і тиск p цієї маси

---

[1] *Архімед* (287—212 р. до н. е.) — давньогрецький учений.

[2] *Аполлоній Пергський* (262—190 р. до н. е.) — давньогрецький математик.

[3] *Декарт Р.* (1596—1650) — французький математик і філософ.

газу пов'язані співвідношенням

$$pV = C = \text{const}. \tag{2}$$

У цій рівності при зміні, наприклад, об'єму V змінюватиметься й тиск p. Величина C за тієї самої температури залишиться сталою. Проте якщо змінювати температуру газу, то змінюватиметься й C.

Сталі величини, які в умовах певної задачі залишаються незмінними, але за зміни умови задачі можуть змінюватися, називають *параметрами.*

Отже, в законі Бойля — Маріотта стала величина C є параметром. Прикладами сталих величин параметрів можуть бути ще такі величини, як коефіцієнт тертя, показник заломлення світла тощо.

Зауважимо, що та сама величина в одній задачі може бути сталою, а в іншій — змінною. Так, температура кипіння води є сталою величиною, якщо кипіння її відбувається в тому самому місці і за тих самих атмосферних умов. Проте температура кипіння стане величиною змінною, якщо кипіння відбуватиметься в різних місцях або за різних атмосферних умов.

Оскільки в природі та повсякденному житті є сталі й змінні величини, то в математиці вивчають два види величин: сталі й змінні. Сталі величини є предметом вивчення елементарної математики.

Під *елементарною математикою* розуміють методи, поняття, теорії, що були створені до початку XVII ст. Окремі розділи елементарної математики сягають давніх часів. Так, геометрію систематизував Евклід у своїй праці «Початки» понад дві тисячі років тому.

Математичні дисципліни, що виникли в XVII—XVIII ст., називають *вищою математикою.* Характерною особливістю вищої математики є те, що вона вивчає змінні величини. Хоча слід зауважити, що окремі ідеї та методи вищої математики розглядалися ще в працях Архімеда.

Поділ математики на елементарну й вищу досить умовний. Не можна назвати критерій, за яким те чи те математичне поняття, ту чи ту теорему, те чи те правило слід віднести до елементарної чи до вищої математики. Проте такий поділ математики на дві частини має певні підстави. По-перше, елементарна математика вивчає переважно сталі величини й фігури; по-друге, елементарна алгебра й елементарна геометрія будують свої теорії відокремлено. Синтетичний метод, яким користується геометрія, не пов'язується з методами алгебри.

Основним об'єктом вищої математики є змінні величини, сталі величини мають другорядне значення. Декартова ідея координат виявилася тим загальним принципом, за яким геометричні теореми доводяться засобами алгебри, а алгебраїчні питання перекладаються на мову геометрії. Завдяки наочності геометричних уявлень полегшується дослідження їх, вдається відкривати нові властивості, теореми тощо.

Як відомо, змінні величини, що спостерігаються у певному явищі чи процесі, змінюються не незалежно одна від одної, а перебувають у тісному зв'язку, в певних залежностях. При цьому зміна одних величин зумовлює зміни інших. Так, у прикладі 1 величини R і l пов'язані між собою формулою (1), причому довжина кола l змінюється залежно від зміни радіуса R.

Можна навести приклади складнішої залежності, коли є більше ніж дві змінні величини.

❑ **Приклади**

3. Позначимо основу, висоту й площу трикутника відповідно через a, h і S. Тоді

$$S = \frac{1}{2}ah. \tag{3}$$

Тут маємо три величини. Якщо величинам a і h надавати довільних додатних значень, то величина S змінюватиметься залежно від зміни a і h.

4. Нехай під поршнем циліндра знаходиться 1 моль ідеального газу. Якщо температура цієї маси газу змінюється, то, як відомо, об'єм V і тиск p пов'язані з абсолютною температурою T законом Клапейрона — Менделєєва

$$pV = RT, \tag{4}$$

де величина R — стала (абсолютно стала), а решта величин можуть змінюватися. Зокрема, при зміні об'єму V і температури T змінюється й тиск p.

5. Нехай на прямій розміщено n матеріальних точок $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$, ..., $A_n(x_n)$ з однаковими масами. Тоді, як відомо, абсцису x центра мас системи цих точок визначають за формулою

$$x = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n}. \tag{5}$$

Отже, тут маємо $n+1$ величин, що зв'язані формулою (5), причому кожна з величин $x_1, x_2, ..., x_n$ може набувати довільних дійсних значень. При цьому величина x щоразу визначатиметься заданою системою n дійсних чисел.

Надалі розглядатимемо простіший випадок залежностей, а саме: залежності між двома змінними величинами. Якщо в таких залежностях абстрагуватися від конкретного змісту величин, то дістанемо залежності між математичними величинами. Такі залежності називають *функціональними*.

У функціональних залежностях змінні величини відіграють неоднакову роль. Одні змінюються довільно, а інші — залежно від зміни перших.

Змінні величини, значення яких в умовах певної задачі можуть вибиратися довільно, називають *незалежними змінними*, або *аргументами*.

Змінну величину, значення якої залежить від зміни значень аргументу, називають *залежною змінною*, або *функцією*[1].

Якщо є одна незалежна змінна, то функцію називають функцією однієї змінної, якщо дві — то функцією двох змінних тощо.

Так, у прикладі 1 змінна R є аргументом, а l — функцією. У прикладі 2 V — аргумент, p — функція, причому в обох прикладах l і p є функціями однієї змінної. У прикладі 3 a, h — аргументи, S — функція. У прикладі 4 V, T — аргументи, p — функція. Тут уже S і p є функціями двох змінних. У прикладі 5 $x_1, ..., x_n$ — аргументи, x — функція, і оскільки незалежних змінних є n, то x є функцією n змінних.

---

[1] Слово «функція» походить від лат. *functio*, що означає «діяльність», «виконання».

Функції і є предметом вивчення математичного аналізу. Проте щоб вивчати функції, потрібно мати метод дослідження.

Яким основним методом користується математичний аналіз при вивченні функцій і дослідженні їхніх властивостей?

Щоб відповісти на це запитання, розглянемо такі дві задачі, одна з яких належить до механіки, а друга — до геометрії.

Задача 1. **Знаходження швидкості вільнопадаючої матеріальної точки**

Нехай у середовищі без опору вільно падає матеріальна точка M. Тоді шлях s, який пройшла точка за час t (відлік часу відбувається на початку падіння), виражається формулою

$$s = \frac{gt^2}{2}, \tag{6}$$

де g — прискорення сили тяжіння $\left(g \approx 9{,}8 \text{ м/с}^2\right)$.

У цьому випадку точка M здійснює нерівномірний рух (за однакові проміжки часу вона проходить різні відрізки шляху). Розв'язати задачу про знаходження швидкості у певний момент часу відомими зі шкільного курсу фізики елементарними засобами неможливо. Тому зробимо так.

Крім часу t розглядатимемо деякий наступний, близький до нього час $t+\Delta t$ (Δt називають *приростом часу*). Шлях, пройдений точкою за час $t+\Delta t$, позначимо через $s+\Delta s$ (Δs називають *приростом шляху*). Тоді з формули (6) маємо

$$\Delta s = \frac{g}{2}\left(2t\Delta t + \Delta t^2\right).$$

Якщо шлях Δs поділити на час Δt, то дістанемо значення середньої швидкості $v_{\text{с}}$:

$$v_{\text{с}} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t. \tag{7}$$

Як бачимо, середня швидкість $v_{\text{с}}$ змінюється зі зміною величини Δt; що менше Δt, а отже, час $t+\Delta t$ ближче знаходиться до часу t, то середня швидкість точніше характеризує швидкість точки M у момент часу t. Тому природно за швидкість v у певний момент часу t прийняти границю $v_{\text{с}}$, коли Δt наближається (прямує) до нуля, тобто

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{с}}, \tag{8}$$

звідси $v = gt$.

Аналогічно обчислюється швидкість v і в загальному випадку, якщо матеріальна точка під дією деякої сили рухається прямолінійно. Тоді

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{с}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{9}$$

де Δs — шлях, пройдений точкою за час Δt.

Задача про обчислення швидкості рухомої точки у певний момент часу є однією з основних задач, які привели до виникнення математичного аналізу. Під час розв'язання цієї задачі маємо справу з функцією $s = \frac{gt^2}{2}$, і це невипадково. Адже функції, як уже зазначалося, становлять предмет вивчення математичного аналізу. Для розв'язання поставленої задачі було використано поняття границі. І це також невипадково. Метод границь є основним методом розв'язання задач математичного аналізу.

З а д а ч а 2. **Обчислення площі під дугою параболи**

Обчислимо площу фігури, яка розміщена під дугою параболи $y = x^2$, $x \geq 0$ і обмежена знизу відрізком осі абсцис, а справа відрізком прямої $x = h$ (рис. 1). Для обчислення площі цієї фігури застосуємо метод математичного аналізу, в основі якого лежить граничний перехід.

Для цього розіб'ємо відрізок $OA = h$ на n рівних частин точками $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{h}{n}$, $x_2 = \frac{2h}{n}, \ldots,$ $x_{n-1} = \frac{n-1}{n}h$, $x_n = h$ і через кожну точку поділу проведемо пряму, паралельну осі Oy. Тоді розглядувана фігура OAM розіб'ється на n часткових фігур, площу яких ще не можна обчислити. Замість цих часткових фігур побудуємо так звані вихідні прямокутники: прямокутники, основою яких є довжина частинного відрізка, на які розбили відрізок OA, а за висоту — значення функції в правому кінці частинного відрізка (на рис. 1 ці прямокутники заштриховано).

Обчислимо суму площ вихідних прямокутників. Позначивши цю площу через s_n, дістанемо

$$s_n = y_1(x_1 - x_0) + y_2(x_2 - x_0) + \ldots + y_n(x_n - x_{n-1}), \qquad (10)$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — значення функції $y = x^2$ відповідно в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Підставимо у формулу (10) значення $y_k = \frac{kh}{n}$ і значення різниці

$$x_k - x_{k-1} = \frac{h}{n}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Матимемо

$$S_n = \frac{h^3}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right). \qquad (11)$$

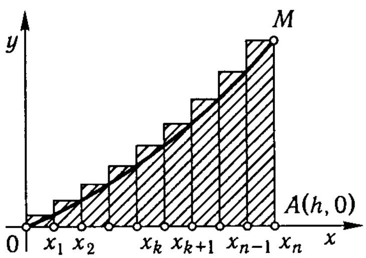


Рис. 1

Виведемо формулу для суми

$$\sigma = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Для цього замінимо в рівності

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

послідовно n на $n-1$, на $n-2$ і т. д., аж до 1. Дістанемо рівності

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1;$$

$$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1;$$

$$(n-1)^3 = (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$2^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1.$$

Після почленного додавання знайдемо

$$(n+1)^3 = 1 + 3\sigma + 3\frac{(n+1)}{2} + n, \tag{12}$$

звідси

$$\sigma = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Отже,

$$s_n = \frac{h^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right). \tag{13}$$

Якщо число n поділок відрізка OA необмежено збільшувати, то заштрихована фігура мало відрізнятиметься від фігури OAM. Тому природно площу цієї фігури визначити як границю послідовності площ s_n, коли число n прямує до нескінченності, тобто покласти за означенням

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{14}$$

Із рівності (13) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{h^3}{3}.$$

Остаточно шукана площа

$$S = \frac{h^3}{3}.$$

Отже, розв'язано й другу задачу, яка також відіграла вирішальну роль у виникненні математичного аналізу.

Задачу 2 вперше поставив і розв'язав Архімед понад дві тисячі років тому. Проте розв'язання цієї задачі в загальному випадку, коли фігура OAM обмежена зверху кривою $y = x^m$, де m — довільне натуральне число, було дано лише в XVII ст. французьким математиком Ферма[1].

Зауважимо, що для розв'язання задачі 2, яка за змістом відрізняється від задачі 1, застосовано поняття границі. І це, як уже наголошувалося, невипадково. Майже всі основні задачі математичного аналізу розв'язуються за допомогою граничного переходу. Ось чому без ґрунтовного й осмисленого засвоєння такого фундаментального поняття, як границя, неможливо вивчати питання математичного аналізу. Проте, перш ніж докладно з'ясовувати суть і значення понять «функція» і «границя», зупинимося на такому фундаментальному понятті сучасної математики, як множина.

[1] *Ферма П.* (1601—1665) — французький математик.

1.2 МНОЖИНА

У математиці всі поняття поділяють на дві категорії: *основні* (*первісні*) й *похідні*.

Похідні поняття означаються за допомогою первісних. Так, поняття «ромб» означається за допомогою простішого поняття «чотирикутник»; «чотирикутник» — за допомогою поняття «багатокутник»; «багатокутник» означається через поняття «замкнена ламана лінія»; «замкнена ламана лінія» означається як «плоска фігура», що утворена замкненим рядом прямолінійних відрізків; «прямолінійний відрізок» — за допомогою поняття «пряма».

Проте є й такі поняття, для яких не існує найпростішого поняття, за допомогою якого воно може бути означеним. Такі поняття називають первісними, вони не означаються.

У наведеному прикладі первісним поняттям є поняття прямої. У геометрії первісним є ще поняття точки і площини.

Множина є також поняттям первісним. Під множиною розуміють сукупність об'єктів, які об'єднано в цю сукупність за допомогою певної ознаки. Так, можна говорити про множину парних чисел, множину натуральних чисел, множину студентів певного курсу тощо.

Множина вважається заданою, якщо задано характеристику її об'єктів (елементів), за допомогою якої про кожну річ можна сказати, належить вона цій множині чи ні.

Так, множина парних чисел характеризується тим, що кожний її елемент ділиться на число 2. Тому число 5 не є елементом цієї множини, а число 6, наприклад, належить цій множині.

Множини позначають великими буквами латинського і грецького алфавітів, а їх елементи — малими буквами.

Якщо A — множина, x — її елемент, то це символічно записують

$$x \in A$$

і читають: «x належить A».

Символічний запис

$$x \notin A$$

означає, що «x не належить A».

Так, якщо A є множиною натуральних чисел, що діляться на 5, то $15 \in A$, тоді як $9 \notin A$.

Якщо можна виписати всі елементи множини, то ці елементи записують підряд і ставлять фігурні дужки.

Наприклад: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Якщо будь-який елемент множини позначено, наприклад, буквою x, то записують

$$A = \{x\}.$$

Якщо всі елементи множини виписати не можна, але можна вказати правило, за яким утворюються наступні елементи цієї множини, то у фігурних дужках записують кілька її елементів. Так, множину натуральних чисел можна записати так:

$$N = \{1, 2, ..., n, ...\}.$$

Нехай маємо дві множини A і B. Якщо кожний елемент множини B належить множині A, то B називають *підмножиною* множини A. Її записують

$$B \subset A, \text{ або } A \supset B$$

і читають: «B міститься в A», або «A містить в собі B».

Наприклад, кожний елемент множини B, елементами якої є парні додатні числа, належить також і множині натуральних чисел, тобто B є підмножиною множини

$$N = \{1, 2, ..., n, ...\}.$$

Очевидно, будь-яка множина $A \supset A$.

Якщо кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A, то множини A і B називають *рівними,* і це записують так: $A = B$.

Інакше кажучи, множина $A = B$, якщо $A \supset B$, а $B \supset A$, тобто ці множини мають ті самі елементи.

Якщо множина містить безліч елементів, то її називають *нескінченною,* у протилежному випадку множину називають *скінченною.*

Якщо у множині немає жодного елемента, то її називають *порожньою.* Так, множина з дійсних коренів рівняння

$$x^2 + 4 = 0$$

є порожньою.

Порожню множину позначають символом $\varnothing$.

Нехай маємо дві множини A і B. Якщо кожному елементу множини A поставлено у відповідність один елемент множини B так, що кожний елемент із множини B при цьому є відповідним одному і тільки одному елементу з множини A, то кажуть, що між множинами A і B існує взаємно однозначна відповідність.

Наприклад, якщо між учнями в класі розподілено стільці так, що кожний учень має стілець і більше вільних стільців немає, то можна сказати, що між множиною учнів і множиною стільців цього класу існує взаємно однозначна відповідність. Якщо у класі за кожним столом сидять по два учні, то між множиною учнів і множиною столів цього класу не існує взаємно однозначної відповідності.

Для множини введено такі операції.

Об'єднання множин. Нехай маємо дві множини A і B. Тоді множину C, що містить усі елементи множин A і B і не містить інших елементів, називають *об'єднанням* (*сумою*) множин A і B і записують $C = A \bigcup B$. Якщо є спільний елемент множин A і B, то у C він входить один раз.

❑ **Приклади**

1. Нехай $A = \{2, 4, 6 ..., 2n, ...\}$, $B = \{1, 3, 5 ..., 2n+1, ...\}$. Тоді $C = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$.

2. Нехай A — множина дійсних чисел x, що задовольняють нерівність $0 \le x \le 3$, а B — множина дійсних чисел x, що задовольняють нерівність $1 \le x \le 4$. Тоді C є множина $0 \le x \le 4$.

Легко довести такі властивості.

1°. $A \bigcup B = B \bigcup A$ — переставна властивість.

2°. $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$ — сполучна властивість.

Отже, для операції об'єднання множин справедливі ті самі властивості, що й для дії додавання чисел в арифметиці. Тому тут уживають термін «сума» множин. Проте операція об'єднання множин має й такі властивості, яких дія додавання чисел не має. Так, якщо $B \subset A$, то $A \bigcup B = A$, зокрема $A \bigcup A = A$, що при додаванні чисел не виконується.

Якщо задано множини A_α, де знак α може пробігати як скінченну, так і нескінченну множину значень, то об'єднання позначають так:

$$\bigcup_\alpha A_\alpha.$$

Переріз множин. Нехай маємо дві множини A і B. Тоді множину C, що містить усі спільні елементи множин A і B і не містить інших елементів, називають *перерізом* (*добутком*) множин A і B та записують $C = A \bigcap B$.

❑ **Приклади**

3. Нехай A є множиною дійсних чисел x, що задовольняють нерівності $0 \le x \le 1$, а B — множина дійсних чисел x, що задовольняють нерівності $0 \le x \le 2$. Тоді C є множиною $0 \le x \le 1$.

4. Нехай A — множина прямокутників, а B — множина квадратів. Тоді C є множиною квадратів.

5. Нехай маємо множини $A_n = (x)$, де x — дійсні числа, що задовольняють нерівності $0 \le x \le \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$. Довести, що переріз

$$\bigcap_n A_n = \{0\}.$$

Доведення. За означенням множин A_n маємо, що число 0 є спільним елементом усіх множин. Покажемо, що множини A_n не мають інших спільних елементів. Справді, будь-яке число $x < 0$ не належить жодній множині A_n. Візьмемо число $x > 0$. Яким би малим не було число x, завжди можна підібрати натуральне число n_0 таке, що $\frac{1}{n_0} < x$, а отже, $x \notin A_{n_0}$. Тому $x \notin \bigcap_n A_n$.

Якщо маємо деякі множини A_α, то переріз цих множин позначають так:

$$\bigcap_n A_\alpha.$$

Операція перерізу множин має такі властивості.

1°. $A \bigcap B = B \bigcap A$ — переставна властивість.

2°. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — сполучна властивість.

3°. $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$ — розподільна (дистрибутивна) властивість.

Перші дві властивості очевидні. Доведемо третю властивість.

Нехай $x \in (A \cup B) \cap C$. Тоді $x \in A \cup B$ і $x \in C$. Оскільки $x \in A \cup B$, то $x \in A$, або $x \in B$. Якщо $x \in A$, то $x \in A \cap C$, але тоді $x \in A \cap C \cup B \cap C$. Якщо $x \in B$, то $x \in B \cap C$, але тоді $x \in A \cap C \cup B \cap C$.

Отже, якщо $x \in (A \cup B) \cap C$, то $x \in A \cap C \cup B \cap C$. Це означає, що $(A \cup B) \cap C \subset A \cap C \cup B \cap C$.

Нехай $x \in A \cap C \cup B \cap C$. Тоді $x \in A \cap C$, або $x \in B \cap C$. Якщо $x \in A \cap C$, то $x \in A$ і $x \in C$.

Оскільки $x \in A$, то $x \in A \cup B$. Тоді $x \in (A \cup B) \cap C$.

Якщо $x \in B \cap C$, то $x \in B$ і $x \in C$. Тоді $x \in A \cup B$, отже, $x \in (A \cup B) \cap C$.

Таким чином, $A \cap C \cup B \cap C \subset (A \cup B) \cap C$. Отже, $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$.

Різниця множин. Нехай маємо дві множини A і B. Тоді множину C, що містить усі ті елементи множини A, які не належать множині B, і не містить інших елементів, називають *різницею множин A і B* та записують

$$C = A \setminus B.$$

❑ **Приклад**

6. Нехай A — множина дійсних чисел, що задовольняють нерівності $0 \le x \le 2$, а B — множина дійсних чисел A, що задовольняють нерівності $1 \le x \le 3$. Тоді C є множиною $0 \le x < 1$.

Для операції віднімання множин виконується розподільна властивість множення щодо віднімання:

$$(A \setminus B) \cap C = A \cap C \setminus B \cap C.$$

Справді, нехай x — довільний елемент множини $(A \setminus B) \cap C$. Тоді $x \in (A \setminus B) \cap C$, тому $x \in A \setminus B$ і $x \in C$; $x \in A, x \notin B$. Звідси $x \in A \cap C$. Оскільки $x \notin B$, то $x \notin B \cap C$, а отже, $x \in A \cap C \setminus B \cap C$.

Таким чином, $(A \setminus B) \cap C \subset A \cap C \setminus B \cap C$.

Нехай x — довільний елемент множини $A \cap C \setminus B \cap C$. Тоді $x \in A \cap C \setminus B \cap C$, тому $x \in A \cap C$ і $x \notin B \cap C$, тобто $x \in A$ і $x \in C, x \notin B$, а отже, $x \in A \setminus B$ і $x \in C$. Отже, $x \in (A \setminus B) \cap C$.

Таким чином, $A \cap C \setminus B \cap C \subset (A \setminus B) \cap C$. Тому $(A \setminus B) \cap C = A \cap C \setminus B \cap C$.

1.3
МНОЖИНА ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

До основних понять математичного аналізу, крім понять функція і границя, належить поняття про *дійсне число.*

Не викладатимемо тут строгу теорію дійсного числа, а спинимося лише на деяких відомостях із цієї теорії, які потрібні для викладу наступного матеріалу. Якщо читач забажає вивчити теорію дійсних чисел ґрунтовніше, то можна порекомендувати підручники [1] і [2].

Множина дійсних чисел складається з раціональних та ірраціональних чисел.

Раціональними числами називають числа, які зображують у вигляді нескоротного дробу $\frac{p}{q}$, де p — ціле число, не виключаючи й нуль, а q — натуральне число.

Наприклад, число 2 можна записати у вигляді $2=\frac{2}{1}$, тут $p=2$, $q=1$, у числі $-\frac{5}{3}$ $p=-5$, $q=3$ тощо.

Усі раціональні числа утворюють множину, яку називають *множиною раціональних чисел.* Множина раціональних чисел має такі властивості.

1°. Для будь-яких двох раціональних чисел a і b виконується одне і тільки одне з трьох співвідношень:

$$\text{або } a=b, \text{ або } a<b, \text{ або } a>b,$$

причому якщо $a<b$ і $b<c$, де c також раціональне число, то $a<c$.

Цю властивість називають властивістю *впорядкованості.*

2°. Якщо числа a і b — раціональні, то сума, різниця, добуток, частка їх (остання за умови, що дільник не дорівнює нулю) є також раціональними числами.

3°. Між двома різними раціональними числами c і b існує проміжне раціональне число. Цю властивість називають властивістю *щільності.*

Перші дві властивості очевидні.

Доведемо третю властивість. Нехай $a<b$. Тоді, згідно з властивістю 2°, число $r=\frac{a+b}{2}$, яке є середнім арифметичним чисел a і b, задовольняє нерівність

$$a-r=\frac{a-b}{2}<0,\ \ b-r=\frac{b-a}{2}>0.$$

Отже, $a<r<b$.

Взявши середнє арифметичне чисел r і a, знайдемо число r_1, яке задовольняє нерівність

$$a<r_1<r,$$

тобто $a<r_1<b$.

Процес побудови чисел $r, r_1, \ldots$ можна продовжити до нескінченності.

Таким чином, між будь-якими раціональними числами a і b міститься не тільки одне, а нескінченна множина різних раціональних чисел. Властивість доведено.

4°. Кожне раціональне число на прямій може бути зображене як певна точка цієї прямої.

Візьмемо горизонтальну пряму l і на ній довільну точку O (рис. 2). Точку O називатимемо *точкою відліку* на прямій l. Припустимо, що точка відліку O є зображенням раціонального числа 0. Точка O поділяє пряму l на два промені. Один із цих променів вважають *додатним*, а другий — *від'ємним*. Додатним вважають той промінь, що виходить з точки O і напрямлений вправо. Візьмемо на цій прямій праворуч від точки O ще будь-яку точку і припустимо, що ця точка є зображенням числа 1. Відрізок прямої l з кінцями в точках O і 1 є одиницею довжини. Цей відрізок називають ще *масштабом*.

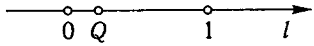


Рис. 2

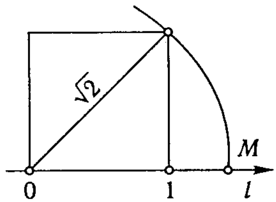


Рис. 3

Пряму, на якій вибрано нульову точку, додатний напрямок і задано масштаб, називають *числовою прямою*, або *числовою віссю*.

Щоб знайти зображення на числовій осі цілого числа m, потрібно одиницю довжини відкласти m разів від нульової точки праворуч, якщо $m>0$, і ліворуч, якщо $m<0$.

Кінцева точка відрізка, який при цьому утворюється, й буде зображенням цілого числа m.

Для знаходження на числовій осі точки, яка відповідає раціональному числу $\frac{p}{q}$, потрібно поділити одиницю довжини на q рівних частин (нехай q-та частина є відрізком OQ). Тоді, відкладаючи на числовій осі від точки O відрізок OQ p разів вправо, коли $p>0$, або вліво, коли $p<0$, дістанемо точку. Цю точку числової осі і вважають зображенням числа $\frac{p}{q}$. Точки l, які є зображеннями раціональних чисел, називають *раціональними точками*, а самі раціональні числа — *абсцисами* відповідних раціональних точок. Отже, кожному раціональному числу на прямій l відповідає точка. Властивість 4° доведено.

Однак виникає запитання: чи кожна точка прямої l є раціональною, або, чи кожній точці прямої l відповідає раціональне число? Щоб відповісти на це запитання, розглянемо такий приклад.

На прямій l побудуємо квадрат, сторона якого дорівнює 1 (рис. 3). Тоді, провівши дугу кола з центром у точці O і радіусом $OM=\sqrt{2}$, дістанемо точку M, абсциса якої дорівнює $\sqrt{2}$. Покажемо, що число $\sqrt{2}$ не є раціональним. Припустимо супротивне, нехай $\sqrt{2}$ є числом раціональним. Тоді його можна зобразити у вигляді нескоротного дробу

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}.$$

Піднісши до квадрата обидві частини попередньої рівності, дістанемо

$$p^2=2q^2. \tag{15}$$

Звідси випливає, що число p^2 парне. Отже, й число p парне (квадрат непарного числа — число непарне). Тому p можна записати у вигляді

$$p = 2k,$$

де k — ціле число. Тоді з формули (15) випливає, що

$$q^2 = 2k^2.$$

Таким чином, число q^2 парне. Тому й q парне, його можна записати у вигляді

$$q = 2m,$$

де m — ціле число.

Згідно з доведеним, дріб $\frac{p}{q} = \frac{2k}{2m}$ є скоротним, а за припущенням він нескоротний. Зайшли у суперечність.

Отже, $\sqrt{2}$ не є раціональним числом, тому точка M прямої l не є раціональною.

Цим самим доведено, що між множиною раціональних чисел і множиною точок прямої не існує взаємно однозначної відповідності. На прямій крім раціональних є ще й інші точки.

Нераціональні точки прямої l називають *ірраціональними*[1] *точками,* а числа, що їм відповідають, — *ірраціональними числами.*

Отже, $\sqrt{2}$ є ірраціональним числом. Можна було б показати, що $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ та інші є ірраціональними числами. Числа π, $\lg 2$, $\lg 3$ — також ірраціональні.

Таким чином, якщо користуватися тільки множиною раціональних чисел, то її недостатньо, щоб розв'язувати навіть прості й водночас життєво потрібні задачі, такі як вимірювання довжини відрізків, розв'язання рівнянь виду $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 3 = 0$, встановлення взаємно однозначної відповідності між числами і точками прямої, знаходження логарифмів чисел і т. д.

Тому множину раціональних чисел було розширено, доповнено множиною ірраціональних чисел.

Доведемо, що кожному ірраціональному числу α на числовій осі відповідає лише одна точка. Для цього застосуємо аксіому Кантора[2].

Аксіома Кантора. Нехай дано послідовність відрізків $[A_n B_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, що лежать на одній прямій.

Якщо

1) $[A_1 B_1] \supset [A_2 B_2] \supset \ldots \supset [A_n B_n] \supset \ldots$, тобто кожний наступний відрізок міститься у попередньому,

---

[1] Слово «ірраціональний» походить від префікса *ir*, що означає «не», і латинського слова *rationalis*, що означає «розумний», «доцільний», «відносний».

[2] *Кантор Г.* (1845—1918) — німецький математик.

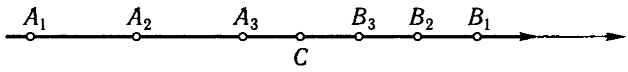


Рис. 4

2) довжина відрізка $[A_nB_n]$ прямує до нуля при $n \to \infty$, то існує єдина точка C, спільна для всіх відрізків $[A_nB_n], n = 1, 2, \ldots$, тобто $C \in [A_nB_n]$ (рис. 4).

В и п а д о к 1. Нехай число $\alpha > 0$.

Це число можна записати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу

$$\alpha = r, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots .$$

Розглянемо дві послідовності раціональних чисел:

$$\overset{-}{\alpha}_n = r, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

і

$$\overset{+}{\alpha}_n = r, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}(\alpha_n + 1), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Ці послідовності збігаються до числа α. Тоді відрізки $\left[A_{\overset{-}{\alpha}_n} B_{\overset{+}{\alpha}_n}\right]$, де $A_{\overset{-}{\alpha}_n}, B_{\overset{+}{\alpha}_n}$ — точки прямої, що відповідають раціональним числам $\overset{-}{\alpha}_n$ і $\overset{+}{\alpha}_n$, задовольняють умови аксіоми Кантора. Справді,

1) $\left[A_{\overset{-}{\alpha}_1} B_{\overset{+}{\alpha}_1}\right] \supset \left[A_{\overset{-}{\alpha}_2} B_{\overset{+}{\alpha}_2}\right] \supset \ldots \left[A_{\overset{-}{\alpha}_n} B_{\overset{+}{\alpha}_n}\right] \supset \cdots;$

2) довжина відрізка $\left[A_{\overset{-}{\alpha}_n} B_{\overset{+}{\alpha}_n}\right]$ дорівнює 10^{-n}. Доведемо, що 10^{-n} прямує до нуля при $n \to \infty$.

Очевидною є нерівність

$$10^n > 2^n$$

або

$$\frac{1}{10^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Скориставшись формулою бінома Ньютона, отримаємо

$$2^n = (1+1)^n = 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} + \ldots + 1 > n.$$

Звідси

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}.$$

НТБ ВНТУ
м.Вінниця 6/017

За аксіомою Архімеда (див. с. 21) для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число n_0 таке, що при $n \geq n_0$ правильною є нерівність

$$n > \frac{1}{\varepsilon}, \ n \geq n_0$$

або

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \ n \geq n_0.$$

Тоді, згідно з попередніми міркуваннями, отримаємо нерівність

$$\frac{1}{10^n} < \varepsilon, \ n \geq n_0.$$

Оскільки

$$\overset{-}{\alpha}_n < \alpha < \overset{+}{\alpha}_n, n = 1, 2, \ldots,$$

то за аксіомою Кантора на прямій існує єдина точка A_α, спільна для всіх відрізків $\left[A_{\overset{-}{\alpha}_n} B_{\overset{+}{\alpha}_n} \right]$, $n = 1, 2, \ldots$.

Точку A_α вважають зображенням ірраціонального числа α.

В и п а д о к 2. Нехай число $\alpha < 0$.

Тоді це число α зображуватиме на прямій точку A_α, яка лежить зліва від точки відліку O і віддалена від неї на відстань, що дорівнює довжині відрізка $[OA_\alpha]$.

Сукупність раціональних та ірраціональних чисел називають *множиною дійсних чисел.* Множина дійсних чисел, як і множина раціональних чисел, є упорядкованою і щільною. Крім цього, на відміну від множини раціональних чисел між множиною дійсних чисел і множиною точок прямої l існує взаємно однозначна відповідність: кожному дійсному числу на прямій відповідає одна й тільки одна точка, і, навпаки, кожній точці прямої l відповідає одне й тільки одне дійсне число.

Оскільки між множиною дійсних чисел і множиною точок числової осі існує взаємно однозначна відповідність, то точки числової осі ототожнюються з відповідними дійсними числами. Так, замість того, щоб сказати: «Точка, яка відповідає числу α», кажуть: «Точка α»; або замість того, щоб сказати: «Число α більше (менше) за число β», кажуть: «Точка α лежить на числовій осі праворуч (ліворуч) від точки β»; або замість речення: «Число α дорівнює числу β» кажуть: «Точка α збігається з точкою β». У результаті такого ототожнення дійсних чисел із точками числової осі низка математичних понять дістає просту наочну геометричну інтерпретацію, а це, у свою чергу, сприяє кращому їх розумінню і засвоєнню.

1.4
ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИНИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Сформулюємо властивості множини дійсних чисел у вигляді аксіом, як це зроблено, наприклад, у [2].

Властивість упорядкованості. Для будь-яких двох чисел a і b визначено співвідношення порядку, тобто для двох будь-яких дійсних чисел a і b виконується одне й тільки одне із співвідношень: або $a<b$, або $a=b$, або $a>b$, при цьому, якщо $a<b$ і $b<c$, де c — дійсне число, то $a<c$.

Останню властивість називають *властивістю транзитивності* дійсних чисел.

Запис $a<b$ рівнозначний запису $b>a$. Запис $a \geq b$ $(b \leq a)$ означає, що або $a=b$, або $a>b$. Наприклад, можна записати $3 \geq 3$, $5 \geq 1$.

Властивості операції додавання. Для будь-якої впорядкованої пари дійсних чисел a і b існує єдине число, яке називають їхньою *сумою* і позначають $a+b$, причому виконуються такі властивості.

1°. Для будь-якої пари чисел a і b

$$a+b=b+a.$$

Цю властивість називають *переставним*, або *комутативним*, *законом додавання.*

2°. Для будь-яких чисел a, b, c

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Цю властивість називають *сполучним*, або *асоціативним*, *законом додавання.*

3°. Існує число, яке позначають через 0 і називають *нулем*, таке, що для будь-якого числа a

$$a+0=a.$$

Наслідок 1. Число, що має властивість нуля, єдине. Припустимо, що існує два нулі 0 і $0'$. Тоді $0+0'=0$ і $0'+0=0'$. Внаслідок властивості $1°$ ліві частини однакові, отже, $0=0'$.

4°. Для будь-якого числа a існує число, яке позначають $-a$ і називають *протилежним* числу a, таке, що

$$a+(-a)=0.$$

Наслідок 2. Число, протилежне певному числу a, єдине. Нехай числа b і c є протилежними числу a, тобто $a+b=0$ і $a+c=0$. Тоді $(a+b)+c=c$, звідси $(a+c)+b=c$; але $a+c=0$, тому $b=c$.

Наслідок 3. Для будь-якого числа a

$$-(-a)=a.$$

Справді, з рівності $a+(-a)=0$ маємо $-a+a=0$. Це означає, що $a=-(-a)$.

5°. Якщо $a < b$, то для будь-якого числа c

$$a + c < b + c.$$

Наслідок 4. Якщо $a < b$, то $-a > -b$, зокрема, якщо $a > 0$, то $-a < 0$, а якщо $a < 0$, то $-a > 0$.

Справді, з нерівності $a < b$ випливає, що $b + (-a) > 0$. Тому $-a = -a + b + (-b) = (b + (-a)) + (-b) > 0 + (-b) = -b$. Отже, $-a > -b$.

Число $a > 0$ називають *додатним*, число $a < 0$ — *від'ємним*.

Наслідок 5. Якщо $a < b$ і $c < d$, то

$$a + c < b + d,$$

тобто можна виконувати почленне додавання нерівностей одного знака.

Справді, якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + c$ і $c + b < d + b$, а отже, з властивості 1° випливає, що $a + c < b + d$.

Для будь-якої впорядкованої пари чисел a і b число $a + (-b)$ називається *різницею* чисел a і b та позначається $a - b$, тобто, за означенням,

$$a - b = a + (-b).$$

Очевидно, що $a - a = 0$, оскільки $a - a = a + (-a) = 0$.

Наслідок 6. Для будь-яких чисел a і b

$$-a - b = -(a + b).$$

Справді, $a + b + (-a - b) = (a - a) + (b - b) = 0$.

Наслідок 7. Якщо $a < b, c \geq d$, то $a - c < b - d$. Справді, оскільки $c \geq d$, $-c \leq d$. Додаючи почленно нерівності $a < b$ і $-c \leq d$, маємо $a - c < b - d$.

Властивості операції множення. Для будь-якої впорядкованої пари чисел a і b існує єдине число, яке називають *добутком* їх (позначають ab), причому виконуються такі властивості.

1°. Для будь-якої пари чисел a і b

$$ab = ba.$$

Цю властивість називають *переставним,* або *комутативним, законом множення.*

2°. Для будь-яких a, b, c

$$a(bc) = (ab)c.$$

Цю властивість називають *сполучним,* або *асоціативним, законом множення.*

3°. Існує число, яке позначають 1 і називають «одиницею», таке, що $1 \neq 0$, і для будь-якого числа a

$$a \cdot 1 = a.$$

4°. Для будь-якого числа $a \neq 0$ існує число, яке позначають $\frac{1}{a}$ і називають *оберненим* до a, таке, що

$$a\frac{1}{a} = 1.$$

Єдиність одиниці й числа, оберненого цьому, доводиться аналогічно доведенню єдиності нуля та єдиності протилежного числа при додаванні.

5°. Якщо $a<b$ і $c>0$, то $ac<bc$. Якщо $a<b$ і $c<0$, то $ac>bc$.

Наслідок 8. $1>0$. Справді, якщо $1<0$, то $-1>0$. Помножимо нерівність $1<0$ на додатне число -1:

$$1\cdot(-1)<0.$$

Проте $1\cdot(-1)=(-1)\cdot 1=(-1)$. Отже, $-1<0$. Це суперечить нерівності $1<0$.

Для будь-якої впорядкованої пари чисел a і b, $b\neq 0$, число $a\cdot\frac{1}{b}$ називають *часткою від ділення* a на b і позначають $\frac{a}{b}$, тобто, за означенням,

$$\frac{a}{b}=a\frac{1}{b}.$$

Зв'язок операцій додавання і множення. Для будь-яких чисел a, b, c

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Цю властивість називають *розподільною,* або *дистрибутивним законом множення відносно додавання.*

Наслідок 9. Для будь-яких чисел a, b і c

$$a(b-c)=ab-ac.$$

Справді,

$$a(b-c)=a(b-c)+ac-ac=a(b-c+c)-ac=ab-ac.$$

Наслідок 10. Для будь-якого числа a

$$a\cdot 0=0.$$

Справді, візьмемо будь-яке число b, тоді $b-b=0$. Отже,

$$a\cdot 0=a(b-b)=ab-ab=0.$$

Наслідок 11. Для будь-яких чисел a і b

$$(-a)b=-ab,\ \ (-a)(-b)=ab,$$

зокрема,

$$(-1)a=-a.$$

Справді,

$$(-a)b=(-a)b+ab-ab=(-a+a)b-ab=-ab;$$

$$(-a)(-b)=-a(-b)=(-1)(a(-b))=(-1)(-ab)=-(-ab)=ab.$$

Аксіома Архімеда. Яке б не було число a, існує таке ціле додатне число n, що $n>a$. Звідси випливає, що які б не були числа $a>0$ і b, існує ціле додатне число n таке, що $na>b$, тобто, додаючи число a досить велике число разів, дістанемо число, яке буде більшим від числа b.

Справді, оскільки $a \neq 0$, то існує $\frac{b}{a}$, але тоді за аксіомою Архімеда знайдеться $n > \frac{b}{a}$, звідси $na > b$.

Ця властивість має просту геометричну інтерпретацію: якщо є два відрізки завдовжки a і b, $0 < a < b$, то, відкладаючи послідовно менший відрізок на більшому, через скінченне число кроків можна вийти за межі більшого відрізка.

6°. ***Властивість неперервності множини дійсних чисел.*** Нехай задано два дійсні числа a і b, $a \le b$. Тоді сукупність усіх дійсних чисел x, що задовольняють нерівності $a \le x \le b$, називають *числовим відрізком,* або *сегментом,* і позначають $[a; b]$. Число a називають *лівим*, а b — *правим* кінцем відрізка $[a; b]$. Якщо $a = b$, то відрізок $[a; b]$ містить тільки одну точку. Число $b - a$ називають *довжиною відрізка* $[a; b]$.

Систему числових відрізків

$$[a_1; b_1],\ [a_2; b_2], \dots,\ [a_n; b_n], \dots$$

називають *системою вкладених відрізків*, якщо

$$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le \dots \le b_n \le b_{n-1} \le \dots \le b_2 \le b_1.$$

Принцип вкладених відрізків. Для будь-якої системи вкладених відрізків існує хоча б одне число, яке належить усім відрізкам цієї системи.

Цю властивість дійсних чисел називають *неперервністю множини дійсних чисел у розумінні Кантора.*

Означення. Множину елементів, що задовольняють властивості 1°—6°, називають *множиною дійсних чисел*, а кожний елемент цієї множини — *дійсним числом.*

Побудову теорії дійсних чисел на основі наведених шести властивостей називають *аксіоматичною*, а властивості 1°—6° — *аксіомами дійсних чисел.*

Означення. Нехай задано систему відрізків $[a_n; b_n]$, $n = 1, 2, \dots$. Вважатимемо, що довжина цих відрізків прямує до нуля зі зростанням n, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число n_ε, що для всіх $n \ge n_\varepsilon$ виконується нерівність $b_n - a_n < \varepsilon$.

❑ **Приклад**

1. Нехай маємо систему відрізків $[0; 1]$, $\left[0; \frac{1}{2}\right], \dots, \left[0; \frac{1}{n}\right], \dots$. Тоді $b_n - a_n = \frac{1}{n}$, і для того щоб $b_n - a_n < \varepsilon$, або $\frac{1}{n} < \varepsilon$, потрібно, щоб $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Теорема. Будь-яка система вкладених відрізків, довжина яких зі зростанням n прямує до нуля, має тільки одне число, яке належить усім відрізкам.

Доведення. Припустимо, що система вкладених відрізків має два числа x, y такі, що $x \neq y$, наприклад, $x < y$.

За умовою теореми для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число n_ε таке, що при $n \geq n_\varepsilon$

$$b_n - a_n < \varepsilon.$$

За припущенням $a_n \leq x \leq b_n$ і $a_n \leq y \leq b_n$. Тоді $y - x \leq b_n - a_n < \varepsilon$ при $n \geq n_\varepsilon$, тобто

$$y - x < \varepsilon.$$

Якщо покласти $\varepsilon = y - x$, то зайдемо у суперечність: $\varepsilon < \varepsilon$. Теорему доведено.

1.5
МОДУЛЬ ДІЙСНОГО ЧИСЛА

У математичному аналізі досить часто користуються поняттям модуля дійсного числа.

Означення. *Модулем дійсного числа a* називають число a, якщо $a \geq 0$, і протилежне йому число $-a$, якщо $a < 0$.

Модуль числа a позначають символом $|a|$ і читають «модуль числа a». Отже, за означенням

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0; \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Таким чином, щоб знайти $|a|$, слід спочатку встановити знак числа a, після чого за формулою (16) визначити $|a|$. Наприклад,

$$|1| = 1; \ |-1| = -(-1) = 1; \ |0| = 0;$$

$$|\pi - 3{,}14| = \pi - 3{,}14; \ |3{,}14 - \pi| = -(3{,}14 - \pi) = \pi - 3{,}14;$$

$$\left|\lg\frac{3}{4}\right| = -\lg\frac{3}{4} = \lg\frac{4}{3}.$$

З геометричного погляду модуль числа a означає відстань точки числової осі з абсцисою a до точки відліку 0. Справді, якщо $a > 0$, то відповідна точка A числової осі (рис. 5) лежить праворуч від точки 0 на відстані $a = |a|$. Якщо $a < 0$, то точка A знаходиться на числовій осі ліворуч від точки 0 на відстані $-a = |a|$.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що $|b - a|$ є відстанню між точками B і A числової осі, абсциси яких дорівнюють відповідно b і a.

На основі геометричного змісту модуля дійсного числа можна довести такі властивості:

1°. $|a| = |-a|$.

2°. Якщо $|a| \leq b$, то $-b \leq a \leq b$.

3°. Якщо $|a| \geq b$, то $a \geq b$, або $a \leq -b$.

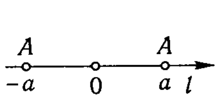


Рис. 5

Так, нерівність $|a| \leq b$ означає, що точка A з абсцисою a знаходиться від точки відліку 0 на відстані, яка не більша за b, тобто це ті точки числової осі, абсциси яких задовольняють нерівності $-b \le a \le b$.

❑ **Приклади**

1. Розв'язати нерівність $|x| \le 5$.

Розв'язання. Використовуючи властивість 2°, маємо $-5 \le x \le 5$.

2. Розв'язати нерівність $|x-3| < 4$.

Розв'язання. На основі властивості 2° дістанемо $-4 < x-3 < 4$ або $-1 < x < 7$.

3. Розв'язати рівняння $|x| = 5$.

Розв'язання. За властивістю 1° знаходимо $x = \pm 5$.

4. Розв'язати нерівність $|x| > 5$.

Розв'язання. На основі властивості 3° робимо висновок: $x > 5$ або $x < -5$.

Зазначимо, що для властивостей 2° і 3° виконуються обернені твердження

2′. Якщо $-b \le a \le b$, то $|a| \le b$.

3′. Якщо $a \ge b$ або $a \le -b$, то $|a| \ge b$.

Доведемо твердження 2′. Оскільки $a \le b$ і $a \ge -b$, то з нерівності $a \ge -b$ випливає, що $-a \le b$, але в нерівностях $a \le b$, $-a \le b$ хоча б одне з чисел a, $-a$ збігається з $|a|$.

Розглянемо теореми, що виражають властивості модуля дійсного числа.

Теорема 1. Модуль суми скінченного числа дійсних чисел $a_1, \ldots, a_n$ не перевищує суми модулів цих чисел

$$|a_1 + \ldots + a_n| \le |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

Доведення. Доведемо цю теорему для суми двох чисел. Оскільки модуль дійсного числа є числом невід'ємним, то виконуються нерівності

$$-|a_1| \le a_1 \le |a_1|; \quad -|a_2| \le a_2 \le |a_2|.$$

Додаючи почленно ці нерівності, дістаємо

$$-(|a_1| + |a_2|) \le a_1 + a_2 \le |a_1| + |a_2|$$

або, використавши властивість 2°, матимемо

$$|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|.$$

Застосувавши метод математичної індукції, можна довести теорему 1 і для випадку $n \ge 3$ доданків. Зокрема, для $n = 3$

$$|a_1 + a_2 + a_3| \le |a_1| + |a_2 + a_3| \le |a_1| + |a_2| + |a_3|.$$

Теорема 2. Модуль різниці не менший за різницю модулів зменшуваного і від'ємника, тобто

$$|a-b| \ge |a| - |b|.$$

Доведення. Запишемо число a так:

$$a=b+(a-b).$$

На основі теореми 1

$$|a|\le|b|+|a-b|,$$

звідси дістаємо доводжувану нерівність.

Теорема 3. Модуль добутку скінченного числа співмножників $a_1, ...,$ a_n дорівнює добутку модулів цих співмножників:

$$|a_1 \ldots a_n|=|a_1|\ldots|a_n|.$$

Доведення. Припустимо, що $n=2$.

Якщо $a_1 \ge 0,\ a_2 \ge 0,$ то $a_1a_2 \ge 0,$ отже,

$$|a_1a_2|=|a_1||a_2|.$$

Якщо $a_1 < 0,\ a_2 > 0,$ то $a_1a_2 < 0,$ отже,

$$|a_1a_2|=-a_1a_2.$$

Крім того, $|a_1||a_2|=-a_1a_2$, тому

$$|a_1a_2|=|a_1||a_2|.$$

Якщо $a_1 < 0,\ a_2 < 0,$ то $a_1a_2 > 0,$ і $|a_1a_2|=a_1a_2$. Крім того, $|a_1||a_2|=$ $=(-a_1)(-a_2)=a_1a_2=|a_1a_2|.$

Випадок $a_1 > 0,\ a_2 < 0$ досліджується аналогічно.

Усі випадки доведено. Отже, теорему 3 для двох співмножників доведено, загальний випадок цієї теореми доводиться методом математичної індукції.

Теорема 4. Модуль частки дорівнює частці від ділення модуля діленого на модуль дільника:

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},$$

якщо $b \ne 0$.

Доведення. Зобразимо число a так: $a=\frac{a}{b}b.$

Тоді за попередньою теоремою

$$|a|=\left|\frac{a}{b}\right|\cdot|b|,$$

звідси дістаємо доводжувану рівність.

❑ **Приклади**

5. Довести, що $\sqrt{a^2}=|a|.$

Доведення. Корінь парного степеня з додатного числа, як відомо, має два дійсних значення: одне — додатне, інше — від'ємне (протилежне першому значенню). Додатне значення кореня парного степеня називають *арифметичним*.

У математиці під коренем парного степеня на множині дійсних чисел завжди розуміють арифметичне значення цього кореня. Тому, якщо $a \geq 0$, то $\sqrt{a^2} = a$; якщо $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$. Отже,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0; \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Права частина останньої рівності дорівнює $|a|$. Таким чином,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

6. Розв'язати нерівність $x^2 - 4 \leq 0$.

Розв'язання. Задану нерівність можна записати так: $x^2 \leq 4$. Добувши корінь квадратний з обох частин цієї нерівності, дістанемо $|x| \leq 2$, або $-2 \leq x \leq 2$.

7. Розв'язати нерівність $x^2 < 4x + 12$.

Розв'язання. Задану нерівність можна записати так: $x^2 - 4x - 12 < 0$. Виокремивши повний квадрат у лівій частині цієї нерівності, матимемо $(x-2)^2 < 16$. Добувши корінь квадратний з обох частин нерівності, дістанемо $|x-2| < 4$ або $-4 < x - 2 < 4$, звідси $-2 < x < 6$.

4. Розв'язати нерівність $\left|x^2 - x - 2\right| > x^2 - x - 2$.

Розв'язання. $|a| > a$ тоді і тільки тоді, коли $a < 0$. Отже, задану нерівність задовольнятимуть усі ті значення x, які задовольняють нерівність $x^2 - x - 2 < 0$, або $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}$. Тоді $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$, звідси $-\frac{3}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$; $-1 < x < 2$.

5. Знайти дійсні корені рівняння $|\sin x| = \sin x + 3$.

Розв'язання. 1) Нехай $\sin x > 0$. Тоді $|\sin x| = \sin x$ і задане рівняння запишеться так: $\sin x = \sin x + 3$. Звідси $3 = 0$. Зайшли у суперечність.

2) Нехай $\sin x < 0$. Тоді $|\sin x| = -\sin x$, і, отже, задане рівняння набирає вигляду $-\sin x = \sin x + 3$ або $\sin x = -\frac{3}{2} < -1$.

Оскільки синус не може набирати значень, менших за -1, то зайшли у суперечність.

Таким чином, задане рівняння дійсних коренів не має. Множина дійсних коренів цього рівняння є порожньою множиною.

6. Довести нерівність $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$, де a і b — довільні дійсні числа.

Доведення. Згідно з теоремою 2, справджуються нерівності

$$|a - b| \geq |a| - |b| \text{ і } |b - a| \geq |b| - |a|.$$

Їх можна записати у вигляді

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$$

або

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|.$$

1.6
ТОЧКОВІ МНОЖИНИ

Як уже зазначалося, між множиною дійсних чисел і множиною точок числової осі існує взаємно однозначна відповідність. Тому для більшої наочності в математичному аналізі часто користуються множинами точок, розміщених на числовій осі. Такі множини називають *точковими.*

Із точкових множин найчастіше мають справу з такими множинами.

1. Множина точок x, які задовольняють нерівності

$$a \le x \le b,$$

де a і b — довільні точки числової осі.

Таку множину точок називають *відрізком,* або *сегментом,* і позначають $[a; b]$. Точку a при цьому називають лівим кінцем, а точку b — правим кінцем відрізка $[a; b]$. Так, $[1; 2]$ є множиною точок числової осі, що знаходяться між точками 1 і 2, включаючи і самі ці точки.

Відрізку $[a; b]$ у множині дійсних чисел відповідають усі числа, що знаходяться між числами a і b, включаючи і самі ці числа. Таку множину дійсних чисел також називають відрізком, або сегментом.

2. Множина точок x, які задовольняють нерівності

$$a < x < b.$$

Таку множину називають *інтервалом* і позначають символом $(a; b)$. Точки a і b при цьому називають відповідно лівим і правим кінцем інтервалу.

Інтервал $(a; b)$ відрізняється від відрізка $[a; b]$ тим, що інтервалу кінці не належать. Так, $(1; 2)$ означає множину точок числової осі, що знаходяться між точками 1 і 2.

Інтервалу $(a; b)$ у множині дійсних чисел відповідають усі числа, що знаходяться між числами a і b, не включаючи останніх. Таку множину чисел також називатимемо *інтервалом.*

Число $b - a$ називають *довжиною* відрізка $[a; b]$. Це число називають і довжиною інтервалу $(a; b)$. Наприклад, відрізок $[1; 2]$ та інтервал $(1; 2)$ мають однакову довжину, що дорівнює $2 - 1 = 1$.

3. Множина точок x числової осі, які задовольняють нерівності

а) $a < x \le b$; б) $a \le x < b$.

Такі множини точок називають відповідно *півінтервалом* і *піввідрізком* і позначають $(a; b]$, $[a; b)$.

Зауважимо, що інтервали, півінтервали і піввідрізки можуть бути й нескінченними. Зокрема, всі точки числової осі позначають символом $(-\infty; +\infty)$ і цю множину називають *нескінченним інтервалом.* Знаки $-\infty$, $+\infty$, які читають «мінус нескінченність», «плюс нескінченність», не є числами. Їх називають *невластивими числами.* Для них на числовій осі не можна вказати відповідних точок, тому їх називають ще й *невластивими точками.*

Якщо у півінтервалах, піввідрізках один із кінців є невластивою точкою, то пишуть $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$, $[a; +\infty)$, $(a; +\infty)$, що означає відповідно $x \le b$, $x < b$, $x \ge a$, $x > a$.

Відрізки, піввідрізки, інтервали, півінтервали (скінченні й нескінченні) називають *проміжком* і позначають символом $\langle a; b \rangle$.

Нехай a — довільне дійсне число. Тоді інтервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$ — будь-яке дійсне число, називають ε-околом точки a. Точка a, що лежить всередині цього інтервалу, називають *центром околу*, а число ε — *радіусом околу*, тобто ε-окіл числа a — це множина всіх дійсних чисел x, які задовольняють нерівність

$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon, \text{ або } |x-a| < \varepsilon.$$

Так, множина точок x, які задовольняють нерівність $|x-2| < 1$, є околом точки 2 радіуса 1.

❑ **Приклади**

1. Знайти множину всіх дійсних чисел x, при яких аналітичні вирази а) $\sqrt{1-x^2}$, б) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, в) $\sqrt{x-1}$ мають дійсні значення.

Розв'язання. а) Для того щоб вираз $\sqrt{1-x^2}$ мав дійсні значення, потрібно, щоб підкореневий вираз $1-x^2 \ge 0$ або $x^2 \le 1$. Добувши корінь квадратний з обох частин останньої нерівності, дістанемо

$$|x| \le 1,$$

або $-1 \le x \le 1$.

Отже, множиною чисел, за яких вираз $\sqrt{1-x^2}$ має дійсні значення, є відрізок $[-1; 1]$;

б) вираз $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ набуватиме дійсних значень, якщо $1-x^2 > 0$. Звідси

$$-1 < x < 1.$$

Отже, шуканою множиною є інтервал $(-1; 1)$;

в) вираз $\sqrt{x-1}$ набуває дійсних значень при $x \ge 1$, тобто при $x \in [1; +\infty)$.

2. Визначити множини, задані нерівностями:

а) $|x-3| \le 2$; б) $|x+2| \ge 4$; в) $|x-1| < 2$; г) $|x-5| > 2$.

а) $| x - 3 | < 2$; б) $| x + 2 | > 4$; в) $| x - 1 | < 2$; г) $| x - 5 | > 2$.

Розв'язання. а) Задану нерівність можна записати $-2 \le x-3 \le 2$ або $1 \le x \le 5$. Отже, маємо відрізок $[1; 5]$;

б) задану нерівність запишемо у вигляді двох нерівностей: $x+2 \ge 4$ або $x+2 \le -4$. Звідси знаходимо $x \ge 2$ або $x \le -6$. Маємо піввідрізок $[2; +\infty)$, або півінтервал $(-\infty; -6]$;

в) скориставшись властивістю модуля дійсного числа, запишемо $-2 < x-1 < 2$, або $-1 < x < 3$. Отже, дістаємо інтервал $(-1; 3)$;

г) з цієї нерівності випливає, що $x-5 > 2$ або $x-5 < -2$.

Маємо півінтервал $(7; +\infty)$ або півінтервал $(-\infty; 3)$.

3. Із інтервалу $(-4; 5)$ вилучено два відрізки $[-2; 0]$ і $[1; 3]$. Які проміжки залишились?

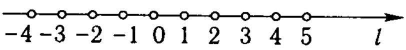


Рис. 6

Розв'язання. Згідно з рис. 6, якщо з інтервалу $(-4; 5)$ вилучити відрізки $[-2; 0]$ і $[1; 3]$, то залишаються такі інтервали: $(-4; -2)$; $(0; 1)$; $(3; 5)$.

1.7
МЕЖІ ЧИСЛОВИХ МНОЖИН

Нехай маємо деяку скінченну або нескінченну числову (точкову) множину A, довільний елемент якої позначено через x. Таку множину можна записати у вигляді $A=\{x\}$.

Означення. Множину A називають *обмеженою зверху*, якщо існує таке дійсне число M, що для всіх чисел $x \in A$ справджується нерівність $x \le M$.

Число M при цьому називають *верхньою межею множини A*.

❑ **Приклади**

1. Розглянемо множину

$$A=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}.$$

Ця множина обмежена зверху, оскільки всі її елементи (числа) не перевищують, наприклад, числа 1. Отже, за число M можна взяти $M=1$.

2. Нехай A є множиною всіх правильних дробів $\frac{p}{q}$, де p і q — натуральні числа і $p<q$.

Тоді така множина є обмеженою зверху, наприклад, числом 1 або будь-яким числом, більшим за 1.

3. Розглянемо множину натурального ряду чисел

$$\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Ця множина не обмежена зверху, оскільки, яке б не було число M, у множині натурального ряду чисел знайдеться таке число n, що $n>M$.

Аналогічно означається обмеженість числової множини знизу, а саме, числову множину $A=\{x\}$ називають *обмеженою знизу*, якщо існує таке дійсне число m, що для всіх $x \in A$ справджується нерівність $x \ge m$. Число m при цьому називають *нижньою межею множини A*.

Так, у попередніх перших двох прикладах числові множини обмежені знизу. За число m можна взяти, наприклад, число 0 або будь-яке інше число, менше за нуль. У третьому прикладі за нижню межу можна взяти, наприклад, число 1 або будь-яке інше число, менше за одиницю. Отже, множина натуральних чисел обмежена знизу.

Проте є числові множини, необмежені знизу. Прикладом такої множини може бути множина всіх цілих від'ємних чисел.

Можуть бути множини, які обмежені одночасно і зверху, і знизу, як у прикладах 1 і 2. Можуть бути множини, які необмежені ні зверху, ні знизу. Так, множина всіх дійсних чисел необмежена ні зверху, ні знизу.

Попередні приклади показують, що обмежена зверху (знизу) множина A може бути водночас необмеженою знизу (зверху).

Якщо числова множина необмежена зверху (знизу), то за її верхню (нижню межу) беруть невластиве число $+\infty$ $(-\infty)$. При цьому вважають, що $-\infty<+\infty$ і $-\infty<\alpha<+\infty$, де α — будь-яке дійсне число.

Для обмеженої зверху (знизу) множини існує нескінченна множина верхніх (нижніх) меж, оскільки будь-яке число $M'>M$ і будь-яке число

$m' < m$, де M і m — відповідно верхня (нижня) межа, буде верхньою (нижньою) межею числової множини. З усіх верхніх (нижніх) меж числової множини особливий інтерес у математиці становить *найменша* (*найбільша*) верхня (нижня) межа.

Найменшу верхню межу числової множини $A = \{x\}$ називають *точною верхньою межею,* або *верхньою гранню,* цієї множини і позначають символом

$$\beta = \sup\{x\},$$

sup — від латинського слова *supremum*, що означає «найвище».

Найбільшу нижню межу числової множини $A = \{x\}$ називають *точною нижньою межею,* або *нижньою гранню,* цієї множини і позначають символом

$$\alpha = \inf\{x\},$$

inf — від латинського слова *infimum*, що означає «найнижче».

Число β, яке є точною верхньою межею множини $A = \{x\}$, має такі дві характеристичні властивості.

1°. Для всіх $x \in A$ справджується нерівність

$$x \leq \beta.$$

2°. Для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує хоча б одне число (елемент) $x' \in A$ таке, що $x' > \beta - \varepsilon$.

Справедливість першої властивості випливає з того, що β є верхньою межею множини A. Щодо другої властивості, то її справедливість випливає з того, що β є найменшою верхньою межею (у протилежному випадку знайшлося б число $\beta - \varepsilon$, менше за β, яке було б верхньою межею множини A).

Цими двома властивостями цілком характеризується точна верхня межа.

Аналогічно точна нижня межа α характеризується такими двома властивостями:

1°. Для всіх $x \in A$ справджується нерівність $x \geq \alpha$.

2°. Для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує хоча б одне число (елемент) $x'' \in A$ таке, що $x'' < \alpha + \varepsilon$.

Якщо множина має найбільше (найменше) число, то вона має і точну верхню (нижню) межу, яка й дорівнює найбільшому (найменшому) числу цієї множини. Не слід ототожнювати точну верхню (нижню) межу з найбільшим (найменшим) елементом множини. Найбільше (найменше) число, крім згаданих властивостей, має задовольняти ще таку умову: воно має належати цій множині, тоді як точна верхня (нижня) межа множини може й не належати цій множині.

Так, множина усіх правильних додатних дробів $\frac{p}{q}$ має верхню $\beta = 1$ і нижню грань $\alpha = 0$, які цій множині не належать.

Нехай $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\right\}$. Ця множина має нижню грань $\alpha = 0$.

Справді, всі числа множини A більші за 0; для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число n, що

$$\frac{1}{2^n} < \alpha + \varepsilon$$

$$\left(\text{для цього достатньо взяти } n > \frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}\right).$$

Отже, числа $\alpha = 0$ є нижньою гранню цієї множини, і це число не належить цій множині.

Наведемо ще одну властивість точної верхньої межі, а саме, якщо елементи x деякої числової множини A задовольняють нерівність $x \le M$, то й $\sup\{x\} \le M$. Це випливає з того, що число M є однією з верхніх меж для множини A, а $\sup\{x\} \le M$ є найменшою верхньою межею, тому це число не може бути більшим за M.

Аналогічно, якщо $x \ge m$, то $\inf\{x\} \ge m$.

Якщо числова множина $A = \{x\}$ не є обмеженою зверху (знизу), то за означенням вважають $\sup\{x\} = +\infty$ $(\inf\{x\} = -\infty)$.

Якщо числова множина A обмежена зверху і знизу, то її називають *обмеженою.*

Прикладом такої множини може бути множина $A = \left\{\frac{p}{q}\right\}$ усіх правильних дробів.

Виникає запитання: чи для будь-якої множини, обмеженої зверху (знизу), існує точна верхня (нижня) межа? Адже для обмеженої зверху (знизу) множини верхніх (нижніх) меж є нескінченна множина, а серед нескінченної множини чисел не завжди знайдеться найменше (найбільше) число. На це запитання дає відповідь така теорема.

Теорема. Якщо непорожня числова множина $A = \{x\}$ обмежена зверху (знизу), то вона має точну верхню (нижню) межу.

Доведення. Нехай A — непорожня, обмежена зверху множина. Це означає, що існує хоча б один елемент $a \in A$, а також число b таке, що для всіх $x \in A$ справджується нерівність $x \le b$. Тому відрізок $[a; b]$ містить хоча б один елемент множини A, наприклад a. Поділимо відрізок $[a; b]$ точкою $\frac{a+b}{2}$ навпіл. Дістанемо лівий відрізок $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ і правий $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$. Якщо правий відрізок має хоча б одну точку множини A, то позначимо його через $[a_1; b_1]$, у протилежному випадку через $[a_1; b_1]$ позначимо лівий відрізок. В обох випадках $[a_1; b_1]$ містить точки з множини A і для всіх $x \in A$ справджується нерівність $x \le b_1$. Аналогічно тому, як з відрізка $[a; b]$ дістали $[a_1; b_1]$, так із відрізка $[a_1; b_1]$ дістанемо $[a_2; b_2]$ і т. д. Внаслідок цього матимемо послідовність вкладених відрізків $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$, причому довжина n-го відрізка $a_n - b_n = \frac{b-a}{2^n}$ прямує до нуля при зростанні n.

Справді, яке б не було число $\varepsilon > 0$, згідно з властивістю Архімеда, знайдеться таке натуральне число n_0, що при $n \ge n_0$ виконуватиметься нерівність

$n > \frac{b-a}{\varepsilon}$ і, отже, $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Оскільки $2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \ldots > n$, то $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$. Тоді $\frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Це означає, що довжини відрізків при зростанні n прямують до нуля. Отже, ця послідовність відрізків має одну спільну точку, яку позначимо через β.

Покажемо, що $\sup A = \beta$. Для цього спочатку доведемо, що $x \leq \beta$, де x — будь-який елемент, що належить A.

Припустимо супротивне. Нехай існує хоча б один елемент $x_0 \in A$ і такий, що $x_0 > \beta$.

Довжина відрізка $[a_n; b_n]$ при зростанні n прямує до нуля, тому існує таке число n_0, що $b_{n_0} - a_{n_0} < x_0 - \beta$, звідси $b_{n_0} < x_0 - \left(\beta - a_{n_0}\right)$, а оскільки $\beta \in [a_n; b_n]$, то $\beta - a_{n_0} \geq 0$. Отже, $b_{n_0} < x_0$; числа $x \in A$ задовольняють нерівність $x \leq b_n$ для всіх $n = 1, 2, \ldots$. Тому такого x_0 не існує.

Доведемо, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує така точка $x_\varepsilon \in A$, що $x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$.

Нехай ε — фіксоване число. Виберемо n_0 таке, щоб $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$.

Тоді існує $x \in A$ таке, що $x \in \left[a_{n_0}; b_{n_0}\right]$ і $x \leq \beta$. Тому $a_{n_0} \leq x \leq \beta \leq b_{n_0}$. Звідси $\beta - x \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$, отже, $x > \beta - \varepsilon$.

Доведено, що $\beta = \sup A$.

Нехай тепер A є множиною, обмеженою знизу, тобто для всіх $x \in A$ справджується нерівність $x \geq m$. Тоді $-x \leq -m$.

Отже, множина $B = \{-x\}$ є обмеженою зверху, а тому, згідно з доведеним, для множини $B = \{-x\}$ існує $\sup\{-x\}$. Покажемо, що

$$\inf\{x\} = -\sup\{-x\}.$$

Позначимо $\sup\{-x\} = \beta$. Тоді число β має задовольняти умови: 1) усі числа $-x \leq \beta$ або $x \geq -\beta$; 2) для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує хоча б одне число $-x'$ таке, що $-x' > \beta - \varepsilon$ або $x' < -\beta + \varepsilon$.

Отже, число $-\beta$ задовольняє обидві властивості точної нижньої межі для множини $A = \{x\}$. Тому множина A має точну нижню межу, яка дорівнює

$$\inf\{x\} = -\beta = -\sup\{-x\}.$$

Теорему доведено.

❑ **Приклади**

4. Дано дві числові множини $X = \{x\}$ і $Y = \{y\}$, обмежені зверху. Елементами множини $Z = \{z\}$ є числа $z = x + y$. Довести, що

$$\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

Розв'язання. Позначимо $\sup\{x\} = \beta_1$, $\sup\{y\} = \beta_2$. Тоді, згідно з властивостями точної верхньої межі, справджуються нерівності: для всіх $x \in X$ $x \leq \beta_1$ і для всіх

$y \in Y$ $y \leq \beta_2$. Додавши почленно ці нерівності, маємо $x+y \leq \beta_1+\beta_2$. Отже, для кожного елемента $z=x+y \in Z$ виконується нерівність $z \leq \beta_1+\beta_2$. Оскільки β_1 є точною верхньою межею, то для будь-якого додатного числа, наприклад $\frac{\varepsilon}{2}$, де $\varepsilon>0$, у множині X знайдеться хоча б одне число $x' \in X$ таке, що $x'>\beta_1-\frac{\varepsilon}{2}$.

Аналогічно у множині Y знайдеться хоча б одне число $y' \in Y$ таке, що $y'>\beta_2-\frac{\varepsilon}{2}$. Тоді, додавши почленно дві останні нерівності, дістанемо $x'+y'>\beta_1+\beta_2-\varepsilon$. Отже, у множині Z є число $z'=x'+y'$, для якого справджується нерівність $z'>\beta_1+\beta_2-\varepsilon$.

Таким чином, число $\beta_1+\beta_2$ задовольняє обидві властивості точної верхньої межі.

5. Дано дві обмежені числові множини $X=\{x\}$ і $Y=\{y\}$. Елементами множини $Z=\{z\}$ є числа $z=y-x$. Довести, що

$$1)\ \sup\{z\}=\sup\{y\}-\inf\{x\};\quad 2)\ \inf\{z\}=\inf\{y\}-\sup\{x\}.$$

Розв'язання. Позначимо $\sup\{y\}=\beta$, а $\inf\{x\}=\alpha$. Тоді для кожного $y \in Y$ і для кожного $x \in X$ справджуються нерівності: $y \leq \beta$ і $x \geq \alpha$. Кожне число $y-x \leq \beta-\alpha$. Оскільки число β є верхньою точною межею множини Y, то для будь-якого числа, наприклад $\frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon>0$, у множині Y знайдеться хоча б одне число $y' \in Y$ таке, що $y'>\beta-\frac{\varepsilon}{2}$. Аналогічно у множині X знайдеться хоча б одне число $x' \in X$ таке, що $x'<\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$. Тоді, віднімаючи від попередньої нерівності останню, отримаємо: $y'-x'>$ $>\beta-\alpha-\varepsilon$. Отже, число $\beta-\alpha$ задовольняє обидві властивості верхньої точної межі. Тому

$$\sup\{z\}=\sup\{y\}-\inf\{x\}.$$

2) Нехай $\inf\{y\}=\alpha_1$, а $\sup\{x\}=\beta_1$. Тоді для всіх $x \in X$ і всіх $y \in Y$ справджуються нерівності $y \geq \alpha_1$ і $x \leq \beta_1$. Віднімаючи від першої нерівності другу, маємо $y-x \geq \alpha_1-\beta_1$. Оскільки α_1 є точною нижньою межею множини Y, то в цій множині знайдеться хоча б одне число y'' таке, що $y''<\alpha_1+\frac{\varepsilon}{2}$, де $\varepsilon>0$ — довільне число. Аналогічно у множині X знайдеться число x'' таке, що $x''>\beta_1-\frac{\varepsilon}{2}$. Тоді, віднімаючи від попередньої нерівності останню, маємо $y''-x''<\alpha_1-\beta_1+\varepsilon$.

Таким чином, число $\alpha_1-\beta_1$ задовольняє обидві властивості точної нижньої межі. Тому

$$\inf\{z\}=\inf\{y\}-\sup\{x\}.$$

6. Нехай $Z=\{x+y\}$ є множиною усіх сум $x+y$, де $x \in X$, $y \in Y$; x, y — дійсні числа; X, Y — множини, обмежені знизу. Довести, що $\inf\{z\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

7. Нехай $Z=\{xy\}$ є множиною усіх добутків xy, де $x \in X$, $y \in Y$, причому $x \geq 0$, $y \geq 0$. Довести рівності: а) $\inf\{z\}=\inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$; б) $\sup\{z\}=\sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

Задачі 6 і 7 пропонуємо розв'язати самостійно.

1.8
ДЕЯКІ ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ЛОГІКИ. ЛОГІЧНІ СИМВОЛИ

Висловлення. У математиці при розгляді того чи іншого питання мають справу з різними висловленнями. Наприклад, «число $\sqrt{2}$ не є раціональним», «число 3 не ділиться на 2», «модуль дійсного числа є числом невід'ємним», «сума кутів трикутника дорівнює 180°» тощо. Ці всі висловлення є правильними. Такі висловлення називають *істинними*. Неправильні висловлення, такі як «число 2 більше ніж число 3», «число 5 ділиться на 3», «діаметр кола більший, ніж його довжина» тощо, називають *хибними*. Надалі висловлення позначатимемо рукописними буквами латинського алфавіту $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ тощо.

Проте при записуванні того чи того висловлення крім букв у математиці користуються ще різними знаками, наприклад $\geq$, $\leq$ тощо.

Так, висловлення «число 5 більше ніж число 4» можна записати: $5>4$.

Кожне висловлення виражається у вигляді речення, але не кожне речення є висловленням у математичному розумінні. Так, твердження «рівняння $x^2-2=0$ не має коренів», «відрізок AB більший, ніж відрізок CO» тощо. У першому випадку розглядуване речення не є висловленням, оскільки нічого не сказано, яких значень може набувати буква x (у множині раціональних чисел рівняння $x^2-2=0$ справді не має коренів, а у множині дійсних чисел воно має два корені $\pm\sqrt{2}$). У другому реченні не сказано, про які відрізки йдеться (відрізок AB справді може бути більшим, ніж відрізок CO, але він може бути й меншим, ніж CO, і, нарешті, дорівнювати CO). Отже, не можна сказати, істинне чи хибне твердження ці речення виражають.

Надалі користуватимемося такими законами.

1. *Кожне висловлення є або істинним, або хибним* (закон виключеного третього).

2. *Ніяке висловлення не може бути одночасно істинним і хибним* (закон суперечливості).

3. *Речення, на яке не можна однозначно дати відповідь, істинне воно чи хибне, не є висловленням.*

Заперечення. Якщо дано деяке висловлення $\mathcal{A}$, то з нього можна дістати нове висловлення, заперечуючи задане, тобто стверджуючи, що $\mathcal{A}$ не справджується. Наприклад, нехай $\mathcal{A}$ означає: «Число 13 ділиться на число 3». Заперечуючи це висловлення, матимемо нове висловлення: «Число 13 не ділиться на число 3». Заперечення висловлення $\mathcal{A}$ позначають символом $\neg\mathcal{A}$ або $\overline{\mathcal{A}}$ і читають «заперечення висловлення $\mathcal{A}$ або «не $\mathcal{A}$».

Висловлення $\neg\mathcal{A}$ може бути істинним або хибним, а саме: якщо висловлення $\mathcal{A}$ істинне, то висловлення $\neg\mathcal{A}$ хибне; якщо висловлення $\mathcal{A}$ хибне, то $\neg\mathcal{A}$ істинне. Так, нехай висловлення $\mathcal{A}$ означає: «Діаметр будь-якого кола більший, ніж його радіус». Маємо істинне висловлення. Тоді $\neg\mathcal{A}$ є хибне: «Не в будь-якому колі діаметр більший, ніж радіус». Нехай висловлення $\mathcal{A}$ означає: «Квадрат дійсного числа a є числом від'ємним». Маємо хибне висловлення. Тоді висловлення $\neg\mathcal{A}$: «Квадрат дійсного числа не є числом від'ємним» — істинне.

З наведених прикладів випливає простий спосіб побудови заперечення висловлення $\mathcal{A}$, а саме: якщо висловлення $\mathcal{A}$ виражається реченням, в якому присудок не містить частки «не», то для побудови висловлення $\neg\mathcal{A}$

достатньо перед присудком поставити частку «не». Якщо висловлення A містить перед присудком частку «не», то в $\neg A$ цю частку потрібно опустити. Так, нехай висловлення A означає: «Число 2 не ділиться на число 3». Тоді $\neg A$ є: «Число 2 ділиться на число 3».

Оскільки $\neg A$ є висловленням, можна будувати висловлення, яке є запереченням заперечення A. Таке висловлення називають *подвійним запереченням* і позначають $\neg\neg A$. Заперечуючи двічі висловлення A, дістанемо те саме висловлення A, тобто $\neg\neg A = A$. Звідси випливає, що подвійне заперечення істинне тоді і тільки тоді, коли істинне висловлення A. Якщо висловлення A хибне, то й $\neg\neg A$ хибне. Це правило називають *законом заперечення заперечення.*

Квантори. У математиці при формулюванні означень і теорем часто доводиться користуватися висловленнями, що містять слова і групи слів, такі як «всі», «кожний», «будь-який», «хоча б один» «знайдеться», «існує», «випливає» тощо. Побудова висловлення, що є запереченням висловлення, яке містить одне зі згаданих слів, викликає певні труднощі. Наприклад, нехай висловлення A означає: «Кожне ціле число є додатним». Будуючи заперечення цього висловлення: «Кожне ціле число є від'ємним», припускаються помилки. Правильним у цьому випадку буде таке: «Хоча б одне ціле число є від'ємним», іншими словами: «Знайдеться (існує) у множині цілих чисел хоча б одне ціле число, яке не є додатним».

Запишемо ці висловлення так:

$A = \{$кожне ціле число є додатним$\}$,

$\neg A = \{$хоча б одне ціле число є від'ємним$\}$.

Якщо у цих висловленнях відкинути початкові слова «кожне», «хоча б одне», то висловлення A буде таким: «... ціле число є додатним», а його заперечення $\neg A$ — «... ціле число є недодатним», тобто друга частина висловлення просто заміниться її запереченням, але при цьому слово «кожне» у висловленні A замінено словами «хоча б одне» або словами «знайдеться», «існує» у виразі $\neg A$.

Отже, якщо висловлення A починається зі слів «усі», «кожний», «будь-який», «всякий» тощо, то для побудови його заперечення потрібно або, нічого не змінюючи, поставити заперечення «не» перед цими словами, або поставити заперечення «не» після цих слів, тоді ці слова потрібно обов'язково замінити словами «хоча б один», «знайдеться», «існує» тощо.

Справедливе й обернене твердження; якщо на початку висловлення є слова «хоча б один», «знайдеться», «існує», то, ставлячи заперечення «не» після цих слів, потрібно їх замінити словами «всі», «кожний», «будь-який», «всякий».

Для того щоб легше було формулювати висловлення, у математиці застосовують спеціальні знаки (символи) $\forall, \exists$, які називають *кванторами.* Знак $\forall$ називають *квантором загальності*, він означає: «всі», «кожний», «будь-який», «всякий»; знак $\exists$ — *квантором існування*, означає: «існує», «знайдеться», «який-небудь», «хоча б один».

Якщо, наприклад, через **R** позначити множину всіх дійсних чисел, то означення обмеженої зверху числової множини за допомогою цих кванторів можна записати так:

числова множина $A=\{x\}$ називається обмеженою зверху, якщо $\exists M \in \mathbf{R}$ таке, що $\forall x,\ x\in A$ і виконується нерівність $x\le M$.

Позначимо через $\mathcal{P}(x)$ деяке висловлення (істинне чи хибне), яке сформульовано для будь-якого елемента x із деякої множини A. Тоді за допомогою квантора $\forall$ це висловлення формулюють так:

$$(\forall x)\mathcal{P}(x),$$

тобто для будь-якого $x\in A$ висловлення $\mathcal{P}(x)$ є справедливим.

Сформулюємо заперечення цього висловлення. Це можна зробити двома способами:

1) перед усім висловленням поставити знак заперечення:

$$\neg(\forall x)\mathcal{P}(x),$$

тобто твердження про те, що висловлення $\mathcal{P}(x)$ справедливе для всіх $x\in A$, не виконується;

2) поставити знак заперечення після $\forall x$, але квантор загальності обов'язково замінити на квантор існування $\exists$:

$$(\exists x)(\neg\mathcal{P}(x)),$$

тобто у множині A знайдеться елемент x (хоча б один) такий, що для нього не виконується $\mathcal{P}(x)$.

❑ **Приклад**

1. Нехай висловлення $(\forall x)(E(x))$ означає: множина $E=\{x\}$ обмежена зверху, тобто «існує дійсне число M таке, що для всіх $x\in E$ справджується нерівність $x\le M$».

Тоді висловлення

$$(\exists x)(\neg E(x))$$

означає, що множина E необмежена, тобто «у множині E знайдеться хоча б один елемент x такий, що $x>M$, яким би не було число M».

Нехай маємо висловлення $(\exists x)(\mathcal{P}(x))$.

Тоді заперечення його можна сформулювати так:

1) знак $\neg$ можна поставити перед усім висловленням:

$$\neg(\exists x)(\mathcal{P}(x)),$$

тобто «не існує у множині жодного елемента, для якого справджується твердження $\mathcal{P}(x)$»;

2) знак $\neg$ можна поставити після $\exists x$, але тоді квантор $\exists$ потрібно замінити на квантор $\forall$:

$$(\forall x)(\neg\mathcal{P}(x)),$$

тобто «для будь-якого елемента з множини E твердження $\mathcal{P}(x)$ не справджується».

❑ **Приклад**

2. Нехай висловлення

$$(\exists x)(\mathcal{P}(x))$$

означає: «У множині дійсних чисел існує число x таке, що $|x|=1$». Це висловлення істинне, такими числами є $x=1$, $x=-1$.

Запишемо висловлення, яке є запереченням:

$$(\forall x)(\neg\mathcal{P}(x)),$$

тобто «для будь-якого дійсного числа x його модуль не дорівнює одиниці». Це висловлення хибне. Заперечення в цьому випадку можна записати й так:

$$\neg(\exists x)(\mathcal{P}(x)),$$

тобто «не існує у множині дійсних чисел жодного числа, модуль якого дорівнює одиниці». Це висловлення також хибне.

Імплікація. Нехай маємо два висловлення $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$.

Кажуть, що висловлення (твердження) $\mathcal{B}$ випливає (є наслідком) із висловлення $\mathcal{A}$ і записують $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$, якщо $\mathcal{B}$ справджується щоразу, якщо справджується висловлення $\mathcal{A}$.

Символічний запис $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ називають *імплікацією* і читають «якщо $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}$».

Якщо для двох висловлень одночасно істинні дві імплікації $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ називають *еквівалентними* і записують це так: $\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}$.

❑ **Приклади**

3. «Якщо в прямокутному трикутнику один із гострих кутів дорівнює $45°$, то цей трикутник є рівнобедреним». Позначимо тут умову через $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A}=\{\text{в прямокутному трикутнику один гострий кут дорівнює } 45°\},$$

а висновок — через $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}=\{\text{трикутник рівнобедрений}\}.$$

Тоді умову й висновок цієї теореми можна записати

$$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}.$$

Зазначимо, що обернена теорема не справджується (не будь-який рівнобедрений трикутник є прямокутним), тобто імплікація $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}$ не справджується.

4. «Якщо число m ділиться на 4, то воно ділиться й на 2».

Позначимо умову теореми через $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}=\{\text{число } m \text{ ділиться на } 4\},$$

а висновок — через $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}=\{\text{число } m \text{ ділиться на } 2\}.$$

Отже, тут із $\mathcal{A}$ випливає $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}.$$

Обернена теорема не справджується (не кожне число, яке ділиться на 2, ділиться на 4).

Імплікація $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ не справджується.

5. «Якщо непорожня числова множина $E=\{x\}$ обмежена зверху, то для неї існує точна верхня межа».

Нехай $\mathcal{A}$ — умова теореми,

$$\mathcal{A}=\{\text{непорожня множина } E=\{x\} \text{ обмежена зверху}\},$$

$\mathcal{B}$ — висновок,

$$\mathcal{B}=\{\text{існує точна верхня межа}\}.$$

Тоді цю теорему можна записати так:

$$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}.$$

Обернена теорема: «Якщо числова множина $E=\{x\}$ має точну верхню межу, то дана множина є обмеженою зверху» — справедлива.

Отже, тут імплікація $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}$ справджується.

Тому в цьому випадку теорему можна записати так:

$$\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}.$$

Розглянемо останній приклад докладніше.

Нехай **R** — множина дійсних чисел і M число, яке обмежує множину E зверху, тобто для всіх $x\in E$ справджується нерівність $x\le M$, а β — верхня точна межа множини E.

Тоді умову $\mathcal{A}$ можна записати у вигляді

$$\mathcal{A}:(\forall x\in E)(\exists M\in\mathbf{R}):x\le M,$$

а висновок $\mathcal{B}$ — у вигляді

$$\mathcal{B}:(\forall x\in E)(\forall\varepsilon>0)(\exists\beta\in\mathbf{R}):x\le\beta;$$
$$(\exists x'\in E):x'>\beta-\varepsilon.$$

Необхідні, достатні, необхідні й достатні умови. Якщо деякий факт або подія не можуть виконуватися без певної умови, то цю умову називають *необхідною.* Наприклад, щоб число ділилося на 4, необхідно, щоб воно ділилося на 2. Однак якщо ця умова й виконується, то події (факти) можуть і не виконуватися. Так, не кожне число, яке ділиться на 2, ділиться на 4 (число 6 ділиться на 2, але не ділиться на 4).

Отже, необхідна умова це така умова, без якої подія (факт) не може виконуватися, але й за якої певна подія чи факт також можуть не виконуватися.

Наведемо ще такий приклад. Для того щоб дві прямі в площині були паралельні, необхідно, щоб при перетині цих прямих третьою прямою відповідні кути були рівні.

Це така необхідна умова, за якої подія (факт) обов'язково відбуватиметься. Про такі умови кажуть, що вони є *необхідними й достатніми.*

Крім необхідних та необхідних і достатніх умов існують ще так звані достатні умови.

Якщо деяка подія (факт) за певної умови обов'язково виконується, то цю умову називають *достатньою.*

Наприклад:

1) щоб діагоналі чотирикутника були рівні, достатньо, щоб цей чотирикутник був прямокутником. Це справді так. У прямокутника діагоналі

рівні. Однак ця умова тільки достатня, вона не є необхідною (діагоналі можуть бути рівними і в рівнобічній трапеції);

2) щоб два трикутники мали однакову площу, достатньо, щоб вони були рівні між собою. Справді, якщо два трикутники рівні, то їхні площі однакові. Проте однакові площі мають не тільки рівні трикутники (площі трикутників будуть однакові кожного разу, коли добутки їхніх основ на висоту рівні). Отже, ця умова не є необхідною, а лише достатньою.

У математиці суть кожної теореми полягає в тому, що задається деяка властивість $\mathcal{A}$ (умова теореми) і з неї виводиться властивість $\mathcal{B}$ (висновок теореми). Наприклад, «середня лінія трапеції дорівнює півсумі основ». Тут умова: чотирикутник є трапецією. Висновок: середня лінія чотирикутника дорівнює півсумі основ. Введемо позначення: нехай Q — довільна трапеція. Тоді умову $\mathcal{A}$ і висновок $\mathcal{B}$ можна записати так:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}\{\text{чотирикутник } Q \text{ є трапецією}\};$$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}$ {середня лінія чотирикутника дорівнює півсумі основ}, а саму теорему запишемо у вигляді

$$(\forall Q)(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}),$$

тобто для будь-якого чотирикутника Q з $\mathcal{A}$ випливає $\mathcal{B}$.

Отже, через те що $\mathcal{B}$ випливає з $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ є достатньою умовою для $\mathcal{B}$, а $\mathcal{B}$ є необхідною умовою для $\mathcal{A}$.

Для наведеного прикладу умова «Чотирикутник Q є трапецією» є достатньою умовою того, щоб середня лінія чотирикутника дорівнювала півсумі основ, а умова «Середня лінія чотирикутника дорівнює півсумі основ» є необхідною умовою того, щоб чотирикутник Q був трапецією.

Зауважимо, що коли теорему записано у вигляді $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, то її, крім того що $\mathcal{A}$ є достатньою умовою для $\mathcal{B}$, можна прочитати ще так:

1) $\mathcal{B}$ є необхідною умовою для $\mathcal{A}$;

2) $\mathcal{A}$ може виконуватися тільки тоді, коли справджується $\mathcal{B}$;

3) для виконання $\mathcal{A}$ вимагається виконання умови $\mathcal{B}$.

❑ **Приклад**

6. Нехай задано умови $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$.

$\mathcal{A} = \{\text{число } x \text{ ділиться на } 3\}$,

$\mathcal{B} = \{\text{сума цифр ділиться на } 3\}$.

Тоді справедлива теорема: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, яку можна сформулювати так: «Для подільності числа x на 3 необхідно, щоб сума його цифр ділилася на 3», або «Число x ділиться на 3 тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3», а також «Для подільності числа x на число 3 потрібно, щоб сума його цифр ділилася на 3».

Як зазначалося, якщо теорема $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ виконується, то обернена їй теорема $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ справджується не завжди. Проте в наведеному прикладі обернена теорема (якщо в числі сума цифр ділиться на 3, то це число ділиться на 3) справедлива, тобто тут $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.

Отже, $\mathcal{B}$ є не тільки необхідною, а й достатньою умовою для $\mathcal{A}$. Так само й умова $\mathcal{A}$ є для $\mathcal{B}$ і необхідною, і достатньою, тобто з одного висловлення випливає друге. У цьому випадку кажуть, що кожна з умов є необхідною і достатньою для існування другої і записують:

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}.$$

Цей запис читається так:

1) для того щоб виконувалось $\mathcal{A}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалося $\mathcal{B}$;

2) $\mathcal{A}$ виконується тоді і тільки тоді, коли виконується $\mathcal{B}$;

3) $\mathcal{A}$ існує тоді і тільки тоді, коли існує $\mathcal{B}$.

Усі ці формулювання виражають той самий факт, а саме: умова $\mathcal{B}$ є необхідною і достатньою для існування $\mathcal{A}$. У кожному з цих формулювань $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ можна поміняти місцями, і тоді $\mathcal{A}$ стає необхідною і достатньою умовою для існування $\mathcal{B}$.

Зауважимо, що дуже часто термін «умова» замінюють словом «ознака». Тоді замість того, щоб сказати «необхідна умова», говорять «необхідна ознака», замість «достатня умова» — «достатня ознака», замість «необхідна й достатня умова» — «необхідна й достатня ознака», в останньому випадку ще кажуть «критерій».

❑ **Приклади**

Наведемо теореми, в яких є необхідні й достатні умови.

7. «Для того щоб трикутник був прямокутним, необхідно й достатньо, щоб сума двох його кутів дорівнювала третьому куту». Введемо позначення:

$$\mathcal{A} = \{\text{у трикутнику сума двох кутів дорівнює третьому}\};$$
$$\mathcal{B} = \{\text{трикутник прямокутний}\}.$$

Тоді цю теорему можна записати так:

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}.$$

8. «Для того щоб дві прямі, що лежать в одній площині, були паралельні, необхідно й достатньо, щоб при перетині цих прямих третьою відповідні кути були рівні».

Нехай

$$\mathcal{A} = \{\text{відповідні кути рівні}\};$$
$$\mathcal{B} = \{\text{прямі паралельні}\}.$$

Тоді

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}.$$

9. «Для того щоб $a^2 = 0$, необхідно й достатньо, щоб число $a = 0$».

Позначимо:

$$\mathcal{A} = \{\text{число } a = 0\};$$
$$\mathcal{B} = \left\{\text{число } a^2 = 0\right\}.$$

Тоді

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}.$$

Диз'юнкція і кон'юнкція. Нехай маємо деякі два висловлення, які позначимо через $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$.

Тоді символічний запис $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ означає: виконується хоча б одне з висловлень $\mathcal{A},\mathcal{B}$. Висловлення $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ називають *диз'юнкцією* висловлень $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Іноді запис $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ читають так: «$\mathcal{A}$ або $\mathcal{B}$».

З означення диз'юнкції випливає, що висловлення $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ істинне, якщо істинне хоча б одне з висловлень. Зокрема, якщо $\mathcal{A}$ істинне, то істинним є і диз'юнкція $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$.

Якщо обидва висловлення $\mathcal{A},\mathcal{B}$ хибні, то хибним є й висловлення $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$.

Слід мати на увазі, що в математиці зв'язка «або» ніколи не стосується подій (фактів), які обов'язково виключають одна одну. «$\mathcal{A}$ або $\mathcal{B}$» зовсім не виключає одночасного існування $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$.

Так, якщо $\mathcal{A}$ означає, що число $x\geq 0$, а $\mathcal{B}$ означає $x\leq 0$, то виконується $\mathcal{A}$ або $\mathcal{B}$. Ці два висловлення не виключають одне одного, оскільки може бути $x=0$.

Якщо $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ справджуються одночасно, то це записують $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ і читають «$\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$». Висловлення $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ називають *кон'юнкцією*. Кон'юнкція $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ є висловленням, яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинними є висловлення $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, і хибним у решті випадків.

❑ **Приклади**

10. Запишемо за допомогою символів умову того, що число $\beta=\sup E$:

$$(\beta=\sup E):(\forall x\in E)(x\leq\beta)\wedge(\forall\varepsilon>0)(\exists x'\in E)(x'>\beta-\varepsilon).$$

11. Нехай умова $\mathcal{A}$ означає:

$$\mathcal{A}=\{|x|\geq b\}.$$

Тоді, позначивши

$$\mathcal{B}=\{x\geq b\},\quad \mathcal{C}=\{x\leq -b\},$$

дістанемо висловлення, яке символічно можна записати у вигляді

$$\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}\vee\mathcal{C}.$$

Функція, границя і неперервність

РОЗДІЛ 2

2.1 ФУНКЦІЯ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ І МНОЖИНА ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ

У попередньому розділі було наведено приклади змінних величин, пов'язаних між собою функціональними залежностями. Наведемо ще приклади таких залежностей.

❑ **Приклади**

1. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно і рівномірно зі сталою швидкістю v. Тоді, як відомо, шлях s, пройдений точкою за час t, обчислюється за формулою

$$s = vt. \qquad (1)$$

Звідси випливає, що шлях s залежить від часу t. Якщо t змінюється, то змінюватиметься й s, і що більше часу точка рухається, то довшим буде шлях.

Проте характер зміни величин t і s неоднаковий: t може набувати довільних додатних значень, тоді як зміна шляху s обумовлюється зміною t. Отже, t є незалежною змінною, а s — залежною.

2. Нехай у провіднику проходить струм. За законом Ома залежність між силою струму I, електрорушійною силою E і опором провідника R виражається формулою

$$I = \frac{E}{R}. \qquad (2)$$

Припускаючи, що опір провідника R — величина стала, маємо, що зі зміною електрорушійної сили E змінюється й сила струму в провіднику. Зокрема, що більша електрорушійна сила E, то більша й сила струму I в провіднику.

У формулі (2) величина E змінюється довільно, вона може набувати довільних додатних значень, тоді як величина I змінюється залежно від зміни E.

Отже, тут E — незалежна змінна, а I — залежна.

3. Нехай m_1 і m_2 маси двох матеріальних точок, r — відстань між ними, k — гравітаційна стала. За законом всесвітнього тяжіння Ньютона, сила F взаємодії між цими точками виражається формулою

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (3)$$

Звідси випливає, що більша відстань r між точками, то сила F взаємодії менша, і навпаки, що менша відстань r, то з більшою силою F точки притягуються одна до одної.

Отже, величини r і F є змінними, причому r є незалежною, а F — залежною змінною.

4. Нехай a — довжина сторони квадрата, а S — його площа. Тоді

$$S = a^2. \qquad (4)$$

Отже, якщо змінюється довжина a сторони квадрата, то змінюється і його площа, причому, якщо довжину сторони a збільшити у 2 рази, то площа квадрата збільшиться у 4, якщо a збільшити у 3 рази, то S збільшиться у 9 разів тощо.

Тут a є незалежною, а S — залежною змінною.

Прикладів змінних величин, пов'язаних між собою певними залежностями, можна було б навести ще багато. Абстрагуючись у цих залежностях від конкретного змісту величин, матимемо залежності між так званими *математичними величинами.* Такі залежності називаються функціональними.

У функціональних залежностях обов'язково є принаймні дві змінні величини. Одна з них змінюється довільно, її називають незалежною змінною, або аргументом. Друга величина змінюється із зміною першої.

Величина, яка змінюється залежно від зміни інших величин, називається залежною змінною, або функцією.

Зазначимо, що в розглянутих прикладах для кожного значення незалежної змінної можна вказати конкретне значення залежної змінної. Саме такі залежні величини називають функціями.

Проте є й такі величини, що залежать від інших величин, але про їхнє числове значення нічого не можна сказати, якщо незалежним змінним надавати певних значень. Наприклад, залежність між урожайністю зернової культури й кількістю опадів. Такі величини не є функціями.

Отже, нехай маємо дві змінні величини: x і y.

Тоді змінну величину y називатимемо функцією змінної величини x, якщо кожному значенню величини x відповідатиме одне значення величини y.

Таке означення функції слід роз'яснити. Річ у тому, що термін «змінна» інтуїтивно викликає уявлення про якийсь змінний процес, що відбувається у часі й просторі, тоді як останні не є істотними у понятті про функцію. Можна було б в означенні функції обійти слово «змінна», а функцію y означати як величину, коли кожному значенню величини x відповідає одне значення величини y. При такому означенні був би врахований той окремий випадок, коли величина y при кожному значенні x набуває того самого значення, тобто є сталою. Однак знову залишається не з'ясованим, що таке «величина». Це поняття, в свою чергу, також потребує роз'яснення.

Тому дамо означення функції, яке сформулювали *М. І. Лобачевський*[1] і *П. Діріхле*[2].

Означення. Нехай маємо множину X дійсних чисел. Якщо кожному числу $x \in X$ за певним правилом або законом поставлено у відповідність одне дійсне число y з множини $Y(y \in Y)$, то говорять, що на множині X визначено функцію і записують $y = f(x)$.

---

[1] *Лобачевський М. І.* (1792—1856) — російський математик, основоположник неевклідової геометрії.

[2] *Діріхле П.* (1805—1859) — німецький математик.

При цьому множину X називають *областю визначення*, або *областю існування*, функції; x називають *аргументом*, або незалежною змінною; y називають залежною змінною, або *функцією*; $f(x)$ називають *значенням функції* в точці x; Y — множина, до якої належить значення функції. Множину Y усіх значень функції, яких вона набуває при $x \in X$, називають *областю значень функції*, або *множиною значень функції*.

Як уже зазначалося, те, що y є функцією x, символічно записують $y = f(x)$ і читають «ігрек дорівнює еф від ікс»: f — перша буква від латинського слова *function*, що означає «функція».

Для позначення функції іноді вживають інші букви: F, φ, ψ тощо.

Різні букви вживають, зокрема, тоді, коли розглядають кілька функцій від того самого аргументу.

В основу наведеного означення покладено закон відповідності між елементами двох множин. За цим означенням функцію задано кожного разу, коли виконуються такі умови:

1) задано множину X, що є областю визначення функції;

2) існує закон (правило), за яким для кожного дійсного числа $x \in X$ можна вказати цілком певне (одне) значення y, із множини Y.

Буква f, що застосовується для позначення функції, характеризує те правило, за яким кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність елемент $y \in Y$. Букву f називають ще *характеристикою*.

Наприклад, якщо функцію задано формулою

$$y = \sqrt{x}, \text{ де } x \in [0; +\infty),$$

то характеристика f показує, що значення y можна дістати, якщо при певному значенні $x \in X$ над цим числом виконати дію добування квадратного кореня. Якщо розглянути функцію $y = 3x^2$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, то тут f показує, що над кожним $x \in X$ потрібно виконати дію піднесення до другого степеня й утворений результат помножити на 3.

Отже, якщо функцію $y = f(x)$ задано формулою, то сукупність усіх тих дій (операцій), що потрібно виконати в певному порядку над незалежною змінною x і сталими, щоб дістати певне значення y, і є характеристикою функції.

Як уже зазначалося, під символом $f(x)$ розуміють значення функції $y = f(x)$ у точці x. Проте надалі для скорочення запису символ $f(x)$ називатимемо також *функцією*.

Зауважимо, що в означенні поняття функції можна схилятися до більш загальної точки зору, а саме: припустити, що кожному значенню $x \in X$ за певним правилом відповідає, наприклад, не одне, а кілька, навіть нескінченна множина значень y. У цьому випадку функцію називають багатозначною (на відміну від однозначної функції, означення якої було наведено).

Так, розглянемо рівняння кола $x^2 + y^2 = 1$. Розв'язуючи його відносно y, дістанемо:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Звідси кожному значенню $x \in [-1;1]$, крім $x = \pm 1$, відповідатиме два різні (протилежні за знаком) значення y. Отже, рівняння $x^2 + y^2 = 1$ на інтервалі $(-1;1)$ задає багатозначну (двозначну) функцію $y = f(x)$.

Розглянемо ще приклад.

Нехай маємо рівняння бісектрис координатних кутів $|y| - |x| = 0$. Розв'язуючи це рівняння відносно y, маємо

$$y = \pm x.$$

Звідси кожному значенню $x \in (-\infty; +\infty)$, крім $x = 0$, за допомогою наведеного рівняння ставиться у відповідність два різних за знаком значення y. Отже, тут також маємо справу з двозначною функцією.

У курсі математичного аналізу при вивченні функції дійсної змінної багатозначних функцій не розглядають. Тому надалі, якщо не буде зазначено окремо, під функцією розумітимемо однозначну функцію.

Нехай функцію $y = f(x)$ задано на множині X, тобто X є областю визначення функції. Тоді число $y_0 = f(x_0)$, де $x_0 \in X$, називають значенням функції при $x = x_0$. Число $f(x_0)$ називають ще *значенням функції в точці* x_0.

Якщо функцію задано формулою, то, щоб знайти її значення при $x = x_0$, потрібно спочатку визначити, чи належить x_0 області визначення, а потім у цю формулу замість x підставити x_0 і виконати певні дії над числом x_0.

❑ **Приклади**

5. Нехай функцію $y = f(x)$ задано формулою $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Знайти $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f(1)$.

Розв'язання. Підставляємо замість x відповідно значення: -1; 0; $\dfrac{1}{2}$; 1. Дістанемо:

$$f(-1) = \frac{-1+1}{-1-1} = \frac{0}{-2} = 0; \quad f(0) = \frac{0+1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3; \quad f(1) = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0}.$$

В останньому випадку маємо дію ділення на нуль, яка неможлива. Тому кажуть, що функція при $x = 1$ або в точці 1 не визначена (не існує).

6. Дано функцію $y = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Знайти $f(-1)$, $f(0)$, $f(a+b)$, де a, b — дійсні числа.

Розв'язання. Підставимо замість x значення: -2, -1, $a+b$. Матимемо:

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 1}{\sqrt{(-2)^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}; \quad f(-1) = \frac{(-1)^2 - 1}{\sqrt{(-1)^2 + 1}} = 0;$$

$$f(0)=\frac{0^2-1}{\sqrt{0^2+1}}=-1;\quad f(a+b)=\frac{(a+b)^2-1}{\sqrt{(a+b)^2+1}}.$$

7. Дано функцію $y=|x|-x$. Знайти $f(a)$, де a — будь-яке дійсне число.

Р о з в ' я з а н н я. Підставимо замість x число a. Матимемо:

$$f(a)=\begin{cases}0, & \text{якщо } a\ge 0;\\ -2a, & \text{якщо } a<0.\end{cases}$$

8. Нехай функція $y=f(x)$ має вигляд $y=\sin^2 x$. Знайти: $f(2x)$, $f\left(\frac{x}{2}\right)$, $f\left(x^2\right)$, $(f(x))^2$.

Р о з в ' я з а н н я. Функція $y=f(2x)$ відрізняється від функції $y=f(x)$ тільки тим, що її аргументом є не x, а $2x$. Характеристика f залишається та сама, що й у функції $y=f(x)$. Отже, якщо у формулу для $f(x)$ замість x підставимо $2x$, то дістанемо шукану формулу для функції $y=f(2x)$:

$$f(2x)=\sin^2 2x.$$

Аналогічно

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\sin^2\frac{x}{2};\quad f\left(x^2\right)\sin^2 x^2.$$

Щодо функції $y=(f(x))^2$, то вона утворюється з функції $y=f(x)$ за допомогою піднесення її значень до квадрата, тобто

$$(f(x))^2=\left(\sin^2 x\right)^2=\sin^4 x.$$

2.2
СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЇ

У попередньому параграфі вже зазначалося, що функцію задано, якщо: 1) задано область X визначення функції, тобто множину зміни аргументу x; 2) задано закон (правило), за яким встановлюється відповідність між елементами $x\in X$ та елементами $y\in Y$.

Припускаючи, що множина X відома, розглянемо способи, за допомогою яких можна задавати закон (правило) відповідності між згаданими елементами, тобто сформулюємо способи задання функцій.

Аналітичний спосіб. Це є спосіб, коли функціональну залежність між x і y можна виразити за допомогою деякого аналітичного виразу або формули. Формула вказує, які дії (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування, знаходження значень тригонометричних функцій тощо) і в якому порядку потрібно виконати над сталими числами й аргументом x, щоб для кожного його значення дістати цілком певне одне значення y.

Приклади функцій, які наведено в попередньому параграфі, і є аналітично заданими функціями.

Іноді функцію можна задати кількома формулами. Так,

$$y=|x|=\begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0; \\ -x, \text{ якщо } x<0. \end{cases} \qquad (5)$$

Цю функцію задано двома формулами: для $x \geq 0$ — формулою $y=x$, а для $x<0$ — формулою $y=-x$.

Функцію

$$y=\begin{cases} 3^x, \text{ якщо } x<0; \\ x, \text{ якщо } 0 \leq x \leq 1; \\ x^2, \text{ якщо } x>1 \end{cases} \qquad (6)$$

задано трьома формулами.

Зазначимо, що як у першому, так і в другому випадку маємо одну функцію, а не дві чи три. Функції виду (5) і (6) відрізняються від функцій, розглянутих у попередньому параграфі, тим, що вони на різних проміжках задаються різними формулами.

Математичний аналіз в основному вивчає функції, які задано аналітично. І в цьому випадку під областю визначення функції розуміють область існування відповідного аналітичного виразу, тобто сукупність допустимих дійсних значень x, за яких даний аналітичний вираз набуває дійсних значень.

Проте у тих випадках, коли величини, що містяться в аналітичному виразі, мають певний фізичний або геометричний зміст, область визначення функції може не збігатися з областю існування аналітичного виразу.

❑ **Приклади**

1. Якщо через x позначити радіус круга, а через y — його площу, то матимемо функціональну залежність, яка виражається формулою

$$y=\pi x^2.$$

Тут областю визначення функції є множина всіх додатних дійсних чисел, а областю існування аналітичного виразу — вся множина дійсних чисел.

2. Нехай t — час вільного падіння тіла, а s — шлях, пройдений тілом за цей час. Як відомо, між s і t існує функціональна залежність

$$s=\frac{gt^2}{2},$$

де g — прискорення вільного падіння. Тоді областю визначення функції є відрізок $[0; t_1]$, де t_1 — час падіння тіла. Областю існування аналітичного виразу, як і в попередньому прикладі, є множина всіх дійсних чисел, тобто інтервал $(-\infty; +\infty)$.

Із попередніх прикладів дістаємо, що область існування аналітичного виразу ширша, ніж область визначення функції.

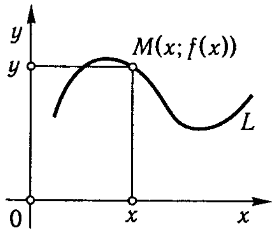


Рис. 7

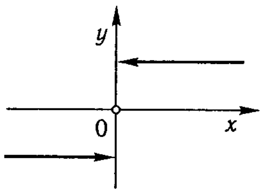


Рис. 8

Проте надалі, якщо не буде зазначено окремо, під областю визначення функції розумітимемо область існування аналітичного виразу.

Словесний спосіб. Часто закон відповідності між елементами двох множин описують за допомогою слів. Такий спосіб задавання функції називають *словесним*. Прикладом такої функції може бути функція $y = \operatorname{sign} x$[1].

Ця функція задається так:

$$y = \operatorname{sign} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x > 0; \\ 0, \text{ якщо } x = 1; \\ -1, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Тут кожному числу $x > 0$ ставиться у відповідність число 1, числу $x = 0$ число нуль і кожному числу $x < 0$ — число -1.

Отже, кожному дійсному числу ставиться у відповідність одне дійсне число.

Наведемо ще кілька прикладів.

Нехай X є множиною усіх дійсних чисел. Тоді кожному дійсному числу $x \in X$ поставимо у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує x. Таку функцію позначають через $y = E(x)$ і називають «функцією антьє», що означає «цілий».

Легко знайти числові значення цієї функції. Так, $E(0) = 0$, $E(1) = 1$, $E(0{,}5) = 0$, $E(\pi) = 3$, $E(-1{,}1) = -2$ тощо. Функцію антьє позначають ще $[x]$.

Прикладом словесно заданої функції може бути функція Діріхле $\mathcal{D}(x)$, у якій закон відповідності описується так: кожному раціональному числу ставиться у відповідність число 1 і кожному ірраціональному числу — число 0. Отже,

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \text{ – раціональне число;} \\ 0, \text{ якщо } x \text{ – ірраціональне число.} \end{cases}$$

Графічний спосіб. Функцію можна задати також графічно.

Візьмемо прямокутну систему координат (рис. 7). Тоді для кожного значення x, яке належить області визначення функції, в площині xOy можна побудувати точку M із координатами $x, f(x)$. Сукупність точок $M(x, f(x))$ називають *геометричним зображенням*, або *графіком*, функції $y = f(x)$. У загальному випадку це буде певна лінія (крива). На рис. 7 її позначено буквою L.

Рівність $y = f(x)$ при цьому називають *рівнянням кривої*, що є графіком функції. Так, графік функції $\operatorname{sign} x$ зображено на рис. 8, а графік функції $y = E(x)$ — на рис. 9.

[1] Від лат. *signum* («сигнум»), що означає «знак».

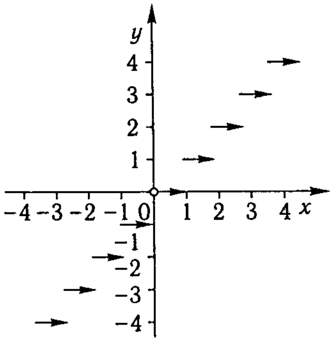


Рис. 9

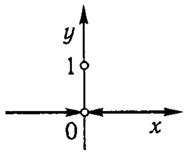


Рис. 10

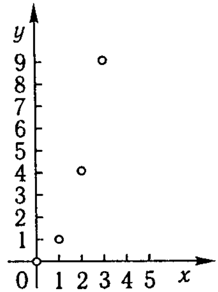


Рис. 11

Знаючи графік функції $y = f(x)$, можна для будь-якого значення $x_0 \in X$, де X — область визначення функції, знайти число $f(x_0)$. Для цього досить на числовій осі через точку x_0 провести пряму, паралельну осі Oy. Ордината точки перетину дорівнює $f(x_0)$. Таким чином, кожному значенню $x \in X$ ставитиметься у відповідність одне число $y \in Y$, а це означає, що y є функцією від x.

Функція вважається заданою графічно, якщо задано її графік.

Прикладом графічного задання функцій, з якими мають справу під час експериментальних досліджень, можуть бути, наприклад, покази барографа, яким користуються для вимірювання атмосферного тиску на різних висотах. За допомогою цього приладу на рухомій стрічці записують у вигляді кривої зміну тиску залежно від зміни висоти. В результаті дістають функцію, задану графічно.

Як уже зазначалося, графіком функції $y = f(x)$ у загальному випадку є крива, іноді — пряма. Графік функції може складатися також і з окремих точок. Наприклад, графіком функції $y = \sqrt{-x^2}$ на площині є тільки одна точка з координатами $(0, 0)$, графік функції $y = E\left(2^{-|x|}\right)$ містить усі точки осі абсцис, крім точки $(0, 0)$, а також точку $(0, 1)$. Графік цієї функції зображено на рис. 10.

Якщо розглянути функцію, областю визначення якої є множина всіх натуральних чисел, наприклад $y = n^2$, то графік такої функції є сукупністю окремих точок (рис. 11).

Слід зазначити, що не будь-яка лінія на площині є графіком функції. Графіком функції є тільки та лінія, яку кожна пряма, паралельна осі Oy, перетинає лише в одній точці.

Табличний спосіб. Під час експериментальних досліджень та спостережень залежність між величинами часто подають у вигляді таблиць. Такий спосіб задання функції, за якого різним значенням аргументу відповідають певні значення функції, називають *табличним*.

Прикладами табличного задання функції можуть бути таблиці десяткових логарифмів, таблиці значень тригонометричних функцій тощо.

Найчастіше табличним заданням функцій користуються в техніці та природознавстві, а саме тоді, коли закон залежності між величинами існує, але невідомий. У цьому випадку проводять експеримент, за допомогою якого дістають ряд значень аргументу та відповідних значень функції. Здобуті результати записують у вигляді таблиць.

Наприклад, відомо, що ріст будь-якої рослини змінюється залежно від часу. Вибравши для експерименту певну рослину і вимірюючи її довжину в різні моменти часу, дістанемо для окремих значень часу t відповідні значення довжини l цієї рослини. Ці дані можна записати у вигляді таблиці. Такі таблиці не будуть точно відображати функціональну залежність, тому що під час вимірювань, хочемо ми того чи ні, матимуть місце похибки, які залежать, зокрема, від точності вимірювальних приладів. У цьому полягає недолік табличного задання функції. Крім того, недолік табличного способу полягає ще й у тому, що в таблиці можна знайти не всі, а лише окремі значення функції.

Проте табличний спосіб зручний тим, що без будь-яких обчислень маємо окремі значення функції, а це дуже важливо. Іноді навіть функції, задані іншими способами, наприклад аналітично, подають у вигляді таблиць. Такі таблиці широко використовують на практиці, при технічних розрахунках. Вони є в різних технічних довідниках.

Крім цього, за допомогою таблиць методом лінійної інтерполяції можна, хоча й наближено, знайти ті значення функції, яких немає в таблиці; й, нарешті, за табличного задання легко будувати графік функції, особливо тоді, коли його будують за допомогою точок.

❑ **Приклади**

3. Чи тотожні такі функції:

а) $f(x)=\lg x^2$ і $\varphi(x)=2\lg x$;

б) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ і $\varphi(x)=x+1$;

в) $f(x)=\lg x^2$ і $\varphi(x)=2\lg x$ (у проміжку $(0;+\infty)$);

г) $f(x)=1$ і $\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$?

Р о з в ' я з а н н я. Функції у прикладах а) і б) не тотожні, оскільки вони мають різні області визначення. Так, областю визначення функції $\lg x^2$ є $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, а областю визначення функції $2\lg x$ — $(0;+\infty)$. Областю визначення функції $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ є $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, а областю визначення функції $x+1$ — $(-\infty;+\infty)$.

Функції в) тотожні, тобто це та сама функція; в інтервалі $(0;+\infty)$ функції $\lg x^2$ і $2\lg x$ збігаються: $\lg x^2=2\lg x$.

Функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ також тотожні, оскільки в них та сама область визначення, а саме $(-\infty;+\infty)$, і вони рівні:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

4. Знайти область визначення функцій:

а) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$; б) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$;

в) $y=\sqrt{\cos x-1}$; г) $y=\lg\sin x$;

д) $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$; е) $y=\lg_2\lg_3\lg_4 x$.

Розв'язання: а) область визначення заданої функції складається з тих спільних значень x, для яких обидва доданки набувають дійсних значень. Для цього мають одночасно виконуватися нерівності

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ 4-x\geq 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці нерівності, дістанемо $x\geq 1$ і $x\leq 4$.

Отже, областю визначення цієї функції є відрізок $[1;4]$;

б) функція визначена за тих значень x, за яких виконується нерівність

$$x^2-x-2>0.$$

Цю нерівність можна записати ще так:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{9}{4}.$$

Добувши корінь квадратний з обох частин, маємо

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|>\frac{3}{2}.$$

Звідси $x-\frac{1}{2}>\frac{3}{2}$ або $x-\frac{1}{2}<-\frac{3}{2}$. З першої нерівності дістанемо $x>2$, а з другої — $x<-1$.

Отже, областю визначення є множина

$$(-\infty;-1)\cup(2;+\infty);$$

в) функція існуватиме тоді, коли $\cos x\geq 1$. Проте функція $\cos x$ не може набувати значень, більших за 1. Тому залишається

$$\cos x=1.$$

Розв'язуючи це рівняння, маємо $x=2k\pi$, де k — ціле число.

Отже, тут область визначення функції складається з окремих точок

$$x=2k\pi,\quad k=0,\ \pm1;\ \pm2;\ldots;$$

г) функція існуватиме, якщо

$$\sin x>0.$$

Звідси знаходимо $2k\pi<x<\pi(2k+1)$, де k — ціле число;

д) задана функція існуватиме за умови, що $|x|>x$.

Остання нерівність справджується при всіх дійсних від'ємних числах. Отже, областю визначення заданої функції є інтервал $(-\infty;0)$;

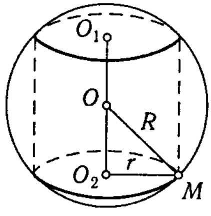


Рис. 12

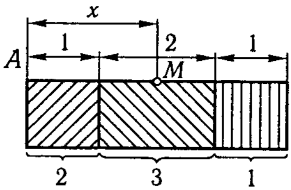


Рис. 13

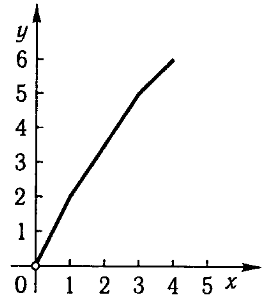


Рис. 14

е) функція існуватиме за умови, що x задовольняє нерівність

$$\log_3 \log_4 x > 0,$$

звідси $\log_4 x > 1$, або $x > 4$.

Тому областю визначення цієї функції є півінтервал $(4; +\infty)$.

5. У кулю з радіусом R (рис. 12) вписано циліндр. Визначити об'єм V цього циліндра як функцію його висоти і знайти область визначення цієї функції та область існування відповідного аналітичного виразу.

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо висоту циліндра O_1O_2 через x. Тоді об'єм циліндра $V = \pi r^2 x$, де r — радіус основи циліндра $(r = O_2M)$. З ΔO_2OM дістанемо

$$r^2 = R^2 - \frac{x^2}{4}.$$

Отже, об'єм V як функція висоти x виражається формулою

$$V = \frac{1}{4}\pi\left(4R^2 - x^2\right)x.$$

Оскільки висота x і об'єм V не можуть бути від'ємними числами, x має задовольняти систему нерівностей

$$\begin{cases} x > 0; \\ 4R^2 - x^2 > 0. \end{cases}$$

Звідси $0 < x < 2R$.

Отже, областю визначення цієї функції є інтервал $(0; 2R)$. Аналітичний вираз $\frac{1}{4}\pi\left(4R^2 - x^2\right)$ набуває дійсних значень за будь-якого дійсного значення x, тому областю існування цього виразу є всі дійсні числа, тобто інтервал $(-\infty; +\infty)$.

6. З трьох відрізків, довжини яких дорівнюють відповідно 1; 2; 1 од. вим., а маси яких — 2; 3; 1 од. маси, складено брусок (рис. 13). Маса змінного відрізка AM завдовжки x є функцією від x. Знайти область визначення цієї функції; записати її аналітично і побудувати графік.

Р о з в ' я з а н н я. За умовою задачі на одиницю довжини на кожному з відрізків відповідно припадає 2, $\frac{3}{2}$, 1 одиниць маси, наприклад грамів. Тому, позначивши через $f(x)$ масу змінного відрізка AM, маємо

$$f(x)=\begin{cases}2x, \text{ якщо } 0\le x\le 1;\\ 2+\frac{3}{2}(x-1), \text{ якщо } 1<x\le 3;\\ 2+x, \text{ якщо } 3<x\le 4.\end{cases}$$

Отже, областю визначення функції є відрізок $[0;4]$.

Графік цієї функції зображено на рис. 14.

7. Знайти множину значень функції: а) $y=\frac{x}{1+x^2}$; б) $y=\frac{1}{2-\cos 3x}$.

Р о з в ' я з а н н я: а) розв'яжемо задану рівність відносно x:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y}.$$

Тоді x набуватиме дійсних значень за умови, що $1-4y^2\ge 0$, або $-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}$.

Отже, множиною значень заданої функції є відрізок $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$;

б) розв'яжемо задану рівність відносно $\cos 3x$:

$$\cos 3x=\frac{2y-1}{y}.$$

Оскільки $-1\le\cos 3x\le 1$, то

$$-1\le\frac{2y-1}{y}\le 1.$$

Звідси, враховуючи, що $y>0$, маємо $\frac{1}{3}\le y\le 1$. Отже, множиною значень цієї функції є відрізок $\left[\frac{1}{3};\ 1\right]$.

2.3 ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Функції, задані аналітично, можуть бути утворені з невеликої кількості функцій, які називають *основними елементарними функціями*.

До основних елементарних функцій належать такі:

степенева $y=x^{\alpha}$ (α — дійсне число);

показникова $y=a^x$ $(a>0, a\ne 1)$;

логарифмічна $y=\log_a x\,(a>0, a\ne 1)$;

тригонометрична $y=\sin x$;

обернені тригонометричні $y=\arcsin x$, $y=\operatorname{arctg} x$;

стала $y=C$.

Утворення решти функцій за допомогою основних елементарних функцій можливе двома способами:

1) за допомогою арифметичних дій додавання, віднімання, множення, ділення над основними елементарними функціями та числами. Наприклад,

$$y=\frac{x^2+\sin x-2^x}{\arcsin x+5\lg x};$$

2) за допомогою суперпозиції кількох основних елементарних функцій. За такого задання функції аргумент основної елементарної функції є, в свою чергу, основною елементарною функцією або функцією, яку виражено через основні елементарні функції. Наприклад:

а) нехай маємо функцію $y=a^{x^3}$. Якщо ввести позначення $u=x^3$, то дістанемо показникову функцію $y=a^u$. Проте на відміну від функції $y=a^x$, де x — незалежна змінна, у функції $y=a^u$ аргумент є, в свою чергу, функцією від $x\left(u=x^3\right)$;

б) розглянемо функцію $y=\sin^2 x$. Якщо ввести позначення $u=\sin x$, то дістанемо степеневу функцію $y=u^2$, і тут також аргумент u є функцією від x.

Функцію, утворену за допомогою суперпозиції основних елементарних функцій, називають *складеною функцією*, або *функцією від функції*.

Означення 1. Нехай функцію $y=f(u)$ визначено на множині U, а функцію $u=\varphi(x)$ — на множині X, причому множина значень функції $u=\varphi(x)\in U$. Тоді кажуть, що на множині X визначено складену функцію $y=f(\varphi(x))$. Її ще називають суперпозицією функції f і φ (суперпозиція від латинських слів — *super* — над і *positio* — положення — буквально розміщення над чимось, накладання).

Складену функцію записують ще так: $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$. Функцію $y=f(u)$ називають *зовнішньою*, а функцію $u=\varphi(x)$ — *внутрішньою*.

Означення 2. Функцію, виражену одним аналітичним виразом через основні елементарні функції, над якими виконується скінченне число таких операцій, як додавання, віднімання, множення, ділення та суперпозиції, називають *елементарною функцією*.

Розглянуті в попередніх прикладах функції є елементарними. Елементарною є також функція $y=\cos x$, оскільки її можна зобразити у вигляді $y=\sin u$, $u=\frac{\pi}{2}-x$. Функція $y=|x|$ є також елементарною, її можна записати однією формулою $y=\sqrt{x^2}$.

Залежно від виразів, що зображують елементарну функцію, останні поділяють на такі типи.

1. Цілі раціональні функції

$$y=a_0+a_1x+...+a_nx^n,$$

де a_0, $a_1,...,$ a_n — дійсні числа. Таку функцію називають ще *багаточленом*, а числа a_0, $a_1,...,$ a_n — *коефіцієнтами багаточлена*.

2. Дробово-раціональні функції

$$y=\frac{a_0+a_1x+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+...+b_mx^m},$$

де $a_0,\ a_1,...,\ a_n,\ b_0,\ b_1,...,\ b_m$ — дійсні числа, а n, m — будь-які натуральні числа.

3. Ірраціональні функції. Це такі функції, в яких над аргументом виконується дія добування кореня. Наприклад,

$$y=\sqrt{x},\ \ y=x+2\sqrt[3]{1-x}.$$

Цілі раціональні, дробово-раціональні та ірраціональні функції ще називають *явними алгебраїчними функціями* (вони задані алгебраїчними рівняннями, які розв'язані відносно y).

4. Алгебраїчні функції. Існують функції, які задані алгебраїчними рівняннями, не розв'язаними відносно y. Їх називають *неявними алгебраїчними*. Загальний вигляд цих функцій такий:

$$p_0(x)y^n+p_1(x)y^{n-1}+...+p_{n-1}(x)y+p_n(x)=0,$$

де n — натуральне число, а $p_0(x),...,\ p_n(x)$ — цілі раціональні функції.

Наприклад,

$$y^5+y-x=0,$$

тут $p_0(x)=p_4(x)=1;\ p_1(x)=p_2(x)=p_3(x)=0;\ p_5(x)=-x.$

Явні та неявні алгебраїчні функції називають просто *алгебраїчними.*

Усі інші функції називають *трансцендентними*[1]. Так, усі тригонометричні функції (прямі й обернені), показникова функція a^x, логарифмічна $\log_a x$ є прикладами елементарних трансцендентних функцій.

2.4 ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ

Розглянемо функцію $y=f(x)$, область визначення та множину значень якої позначимо відповідно через X і Y. Тоді будь-якому значенню $x_0\in X$ відповідатиме одне значення $y_0\in Y$, яке дорівнює $f(x_0)$. Отже, рівняння

$$f(x)=y \tag{8}$$

при $y=y_0\in Y$ має хоч один корінь (таким коренем є, зокрема, x_0). Інакше кажучи, рівняння (8) кожному $y_0\in Y$ ставить у відповідність одне або

[1] Слово «трансцендентний» походить від лат. *transcendo*, що означає «переступаю», «той, що виходить за межі чогось».

кілька значень $x_0 \in X$. Якщо при цьому кожному $y_0 \in Y$ відповідає тільки одне значення $x_0 \in X$, то кажуть, що на множині Y задано функцію $x = \varphi(y)$. Функцію $x = \varphi(y)$ називають *оберненою функцією* до функції $y = f(x)$, а $y = f(x)$ — *прямою функцією*.

❑ **Приклади**

1. Розглянемо функцію

$$y = x + 1. \tag{9}$$

Тут $X = (-\infty; +\infty)$, $Y = (-\infty; +\infty)$.

Із рівняння (9) знаходимо

$$x = y - 1. \tag{10}$$

Рівняння (9) або (10) кожному $y \in (-\infty; +\infty)$ ставить у відповідність тільки одне значення x. Отже, функція $y = x + 1$ має обернену функцію $x = y - 1$.

2. Нехай

$$y = x^2. \tag{11}$$

Розв'язавши рівняння (11) відносно x, дістанемо

$$x = \pm\sqrt{y}.$$

Звідси кожному $y \in (0; +\infty)$ відповідає два значення x. Тому функція $y = x^2$ оберненої не має.

3. Розглянемо функцію

$$y = x^2 \tag{12}$$

з областю визначення $X = [0; +\infty)$. Розв'язуючи рівняння (12) відносно x, маємо

$$x = \sqrt{y}. \tag{13}$$

Для кожного $y \in [0; +\infty)$ із формули (13) дістанемо тільки одне значення x.

Отже, функція (12) має обернену функцію, яка дорівнює $x = \sqrt{y}$.

Якщо розглянути функцію

$$y = x^2. \tag{14}$$

де $x \in (-\infty; 0]$, то така функція має обернену функцію $x = -\sqrt{y}$.

4. Функція $y = |x|$ на області її визначення оберненої не має, оскільки тут кожному значенню $y \in (0; +\infty)$ відповідає два значення $x = \pm y$.

5. Функція $y = \sin x$ також оберненої не має, оскільки кожному значенню $y \in [-1; 1]$ відповідає нескінченна множина значень $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 15). Кожна пряма, яка знаходиться між прямими $y = 1$ та $y = -1$ і проходить паралельно осі Ox, перетинає синусоїду в нескінченній множині точок.

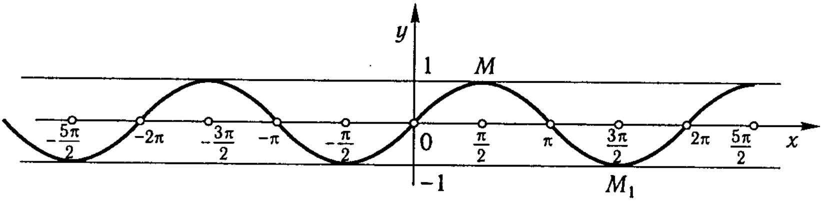


Рис. 15

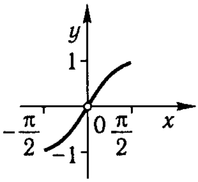


Рис. 16

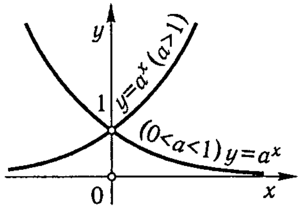


Рис. 17

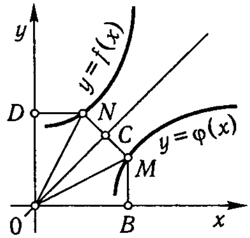


Рис. 18

Проте якщо взяти функцію

$$y=\sin x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right],\tag{15}$$

то така функція має обернену, оскільки кожному значенню $y\in[-1;\,1]$ відповідає тільки одне значення $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 16).

Обернену функцію до функції (15) позначають спеціальним символом

$$x=\arcsin y.\tag{16}$$

6. Показникова функція $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ має обернену функцію, оскільки кожному значенню $y\in(0;+\infty)$ відповідає одне значення $x\in(-\infty;+\infty)$ (рис. 17).

Обернену функцію до показникової називають *логарифмічною функцією* і позначають

$$x=\lg_a y.$$

В оберненій функції $x=\varphi(y)$ за незалежну змінну беруть y, тому областю визначення її є множина значень прямої функції $y=f(x)$, а множиною значень — область визначення функції $y=f(x)$.

Графік оберненої функції $x=\varphi(y)$ збігається з графіком прямої функції $y=f(x)$, але при цьому для функції $y=f(x)$ значення незалежної змінної відкладають вздовж осі абсцис, а для функції $x=\varphi(y)$ — вздовж осі ординат. Щоб уникнути цієї незручності, в оберненій функції $x=\varphi(y)$ незалежну змінну також позначають через x і під час побудови графіка значення x відкладають, як і для прямої функції, вздовж осі абсцис. Тоді, звісно, графік функції $y=\varphi(x)$ стає відмінним від графіка функції $y=f(x)$. Можна показати, що графік функції $y=\varphi(x)$ є лінією, симетричною графіку функції $y=f(x)$ відносно бісектриси першого і третього координатних кутів. Справді, нехай графіки функцій $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ (на рис. 18) і точки M і N, що лежать на кривих, заданих рівняннями $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$, мають відповідно координати $M(f(x);\varphi(x))$, $N(\varphi(x);f(x))$.

Покажемо, що точки M і N симетричні відносно бісектриси. Для цього доведемо, що трикутник ONM є рівнобедреним, а відрізок ОС — бісектрисою.

Розглянемо допоміжні прямокутні трикутники OMB і ODN. У них за означенням функцій $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ маємо $OB=OD$ і $MB=ND$.

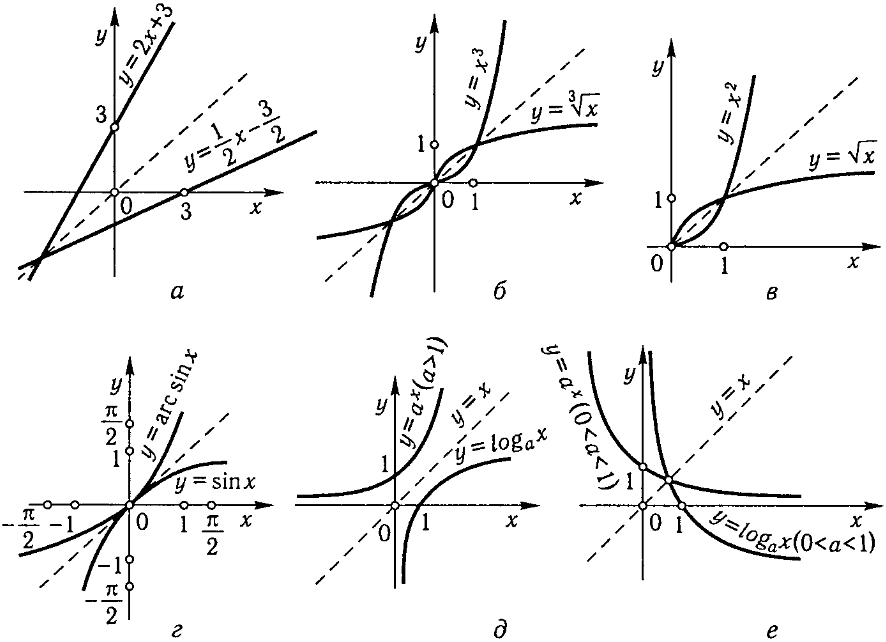


Рис. 19

Отже, трикутники рівні. Звідси $ON = OM$, $\angle DON = \angle MOB$, отже, $\angle NOC = \angle COM$. Тому $\triangle NOM$ — рівнобедрений, а OC — його бісектриса.

Із доведеного твердження випливає досить простий спосіб побудови графіка оберненої функції, якщо відомо графік прямої функції: потрібно графік прямої функції $y = f(x)$ повернути навколо бісектриси першого і третього координатних кутів на 180°. Оскільки функції $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ — взаємно обернені, цей спосіб можна застосувати і до побудови графіка функції $y = f(x)$, якщо відомо графік функції $y = \varphi(x)$.

❑ **Приклад**

7. Побудувати графіки функцій:

а) $y = 2x + 3$ і $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$;

б) $y = x^3$ і $y = \sqrt[3]{x}$;

в) $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$, і $y = \sqrt{x}$;

г) $y = \sin x$, де $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, і $y = \arcsin x$;

д) $y = a^x$ і $y = \log_a x$.

Ці графіки зображено на рис. 19, *а—е*.

2.5
ОКРЕМІ КЛАСИ ФУНКЦІЙ

Монотонні функції. Нехай функцію $y=f(x)$ задано на деякому проміжку $\langle a;b\rangle$. Як і раніше, під проміжком розумітимемо або інтервал (скінченний чи нескінченний), або відрізок, або півінтервал, або піввідрізок.

Означення 1. Якщо для кожної пари точок x_1, x_2 є $\langle a;b\rangle$ при $x_2>x_1$ виконуються нерівності:

1) $f(x_2)>f(x_1)$, то функцію $f(x)$ називають *зростаючою* на проміжку $\langle a;b\rangle$;

2) $f(x_2)\geq f(x_1)$, то функцію $f(x)$ називають *неспадною* на проміжку $\langle a;b\rangle$;

3) $f(x_2)<f(x_1)$, то функцію $f(x)$ називають *спадною* на проміжку $\langle a;b\rangle$;

4) $f(x_2)\leq f(x_1)$, то функцію $f(x)$ називають *незростаючою* на проміжку $\langle a;b\rangle$.

Зростаючі, неспадні, спадні та незростаючі функції називають *монотонними.*

❑ **Приклади**

1. Нехай $f(x)=x^3$, $x\in(-\infty;+\infty)$. Якщо $x_2>x_1$, то можна довести, що $x_2^3>x_1^3$. Отже, функція x^3 є зростаючою в інтервалі $(-\infty;+\infty)$.

2. Нехай $f(x)=x^{2k+1}$, де k — ціле додатне число і $x\in(-\infty;+\infty)$.

Якщо $x_2>x_1\geq 0$, то можна довести, що й $x_2^{2k+1}>x_1^{2k+1}$.

Якщо $x_1<x_2<0$, то $-x_1$, $-x_2$ є додатними числами і $-x_1>-x_2$. Звідси

$$(-x_1)^{2k+1}>(-x_2)^{2k+1},\ \text{або}\ -x_1^{2k+1}>-x_2^{2k+2}.$$

Помноживши обидві частини останньої нерівності на -1, матимемо

$$x_2^{2k+1}>x_1^{2k+1}.$$

Можливий ще такий випадок: $x_1<0$, а $x_2\geq 0$. Тоді

$$x_1^{2k+1}<0\ \ x_2^{2k+1}\geq 0.$$

Отже, в усіх випадках $f(x_2)>f(x_1)$ при $x_2>x_1$. Тому (за означенням) функція x^{2k+1} є зростаючою на проміжку $(-\infty;+\infty)$.

3. Нехай $f(x)=a^x$, де $a>1$. Як відомо зі шкільного курсу «Алгебра і початки аналізу», при $x_2>x_1$, де x_2 і x_1 — довільні дійсні числа $x_1, x_2\in(-\infty;+\infty)$, маємо $a^{x_2}>a^{x_1}$. Отже, показникова функція при $a>1$ є зростаючою в інтервалі $(-\infty;+\infty)$.

Якщо $0<a<1$, то $a^{x_2}<a^{x_1}$. Показникова функція a^x при $0<a<1$ є спадною.

4. Розглянемо логарифмічну функцію $y=\log_a x$, де $x\in(0;+\infty)$. При $a>1$ маємо $\log_a x_2>\log_a x_1$, якщо $x_2>x_1$. Якщо $0<a<1$, то $\log_a x_2<\log_a x_1$ для $x_2>x_1$.

Отже, логарифмічна функція у випадку $a>1$ є зростаючою, а у випадку $0<a<1$ — спадною в інтервалі $(0;+\infty)$.

5. Нехай $f(x)=\frac{1}{x}$. Для $x_2>x_1>0$ справджується нерівність

$$\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}.$$

Справді,

$$\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0.$$

Оскільки $x_1-x_2<0$, а $x_1x_2>0$, де x_1 і x_2 — одного знака.

Отже, функція $\frac{1}{x}$ в інтервалі $(0;+\infty)$ є спадною. Вона буде спадною і в інтервалі $(-\infty;0)$. Доведемо це для більш загального випадку.

Розглянемо такий приклад.

Візьмемо функцію $y=\frac{1}{x^{2k+1}}$, де k — довільне ціле додатне число. Покажемо, що ця функція в кожному з інтервалів $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$ є спадною.

Справді, якщо $x_2>x_1>0$, то й

$$x_2^{2k+1}>x_1^{2k+1}.$$

Звідси

$$\frac{1}{x_2^{2k+1}}<\frac{1}{x_1^{2k+1}}.$$

Нехай тепер $x_2<x_1<0$. Тоді числа $-x_1$, $-x_2$ додатні й $-x_1>-x_2$. Нерівність не порушиться, якщо її обидві частини піднести до цілого додатного степеня $2k+1$:

$$(-x_1)^{2k+1}>(-x_2)^{2k+1}$$

або

$$-x_1^{2k+1}>-x_2^{2k+1}.$$

Помноживши обидві частини цієї нерівності на -1, матимемо

$$x_1^{2k+1}<x_2^{2k+1}.$$

Звідси

$$\frac{1}{x_2^{2k+1}}<\frac{1}{x_1^{2k+1}}.$$

6. Нехай $f(x)$ на проміжку $\langle a;b\rangle$ є сталою функцією — функцією, яка для будь-якого значення $x\in\langle a;b\rangle$ дорівнює тому самому числу, наприклад C. Отже, $f(x_2)=f(x_1)=C$, тому стала функція є неспадною і незростаючою.

7. Нехай

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{ якщо } 0<x\le 1;\\ 1, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$$

Отже, задана функція є незростаючою в інтервалі $(0;+\infty)$.

8. На піввідрізку $(1; +\infty]$ розглянемо функцію

$$y = \frac{1}{E(x)},$$

де $E(x)$ — функція антьє. Ця функція є незростаючою.

Зауважимо, що будь-яка зростаюча функція є одночасно й неспадною, а будь-яка спадна функція є й незростаючою.

Проте є й *немонотонні* функції. Наприклад, функція $y = x^2$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ не є монотонною (в інтервалі $(-\infty; 0)$ вона спадає, а в інтервалі $(0; +\infty)$ — зростає). Немонотонними є функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Парні та непарні функції. Нехай функцію $y = f(x)$ задано в проміжку $\langle a; b \rangle$, який є симетричним відносно початку координат. Це може бути або нескінченний інтервал $(-\infty; +\infty)$, або скінченний інтервал $(-a; a)$, або відрізок $[-a; a]$, де a — будь-яке дійсне число.

Означення. Функцію $y = f(x)$, визначену на одному із зазначених вище проміжків, називають:

1) *парною*, якщо для будь-якого $x \in \langle a; b \rangle$ виконується рівність

$$f(-x) = f(x);$$

2) *непарною*, якщо для будь-якого $x \in \langle a; b \rangle$ виконується рівність

$$f(-x) = -f(x).$$

Ці означення можна поширити на випадок, коли функцію $y = f(x)$ задано на довільній точковій множині E, симетричній відносно початку координат.

❑ **Приклади**

9. Нехай $f(x) = x^{2k}$, де k — натуральне число, і x є $(-\infty; +\infty)$. Тоді

$$f(-x) = (-x)^{2k} = x^{2k} = f(x).$$

Отже, функція $y = x^{2k}$, задана в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, є парною.

10. Нехай $f(x) = |x|$ і $x \in (-\infty; +\infty)$. Оскільки

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x),$$

то за означенням функція $y = |x|$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, є парною.

11. Нехай $f(x) = \cos x$ і $x \in (-\infty; +\infty)$. Відомо, що $\cos(-x) = \cos x$.

Отже, $\cos x$ є парною функцією.

12. Нехай $f(x) = x^{2k+1}$, де k — натуральне число. Для будь-якого $x \in (-\infty; +\infty)$ маємо

$$f(-x) = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -f(x).$$

Отже, функція $y = x^{2k+1}$ є непарною.

13. Нехай $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$. Довести, що ця функція в області її визначення є непарною.

Знайдемо спочатку область визначення функції. Розв'яжемо нерівність $\frac{1+x}{1-x}>0$. Ця нерівність виконується у двох випадках:

$$1)\ \begin{cases}1+x>0,\\ 1-x>0;\end{cases}\quad 2)\ \begin{cases}1+x<0,\\ 1-x<0.\end{cases}$$

Розв'язуючи систему нерівностей 1), дістаємо $-1<x<1$.

Система нерівностей 2) суперечлива.

Таким чином, областю визначення функції є інтервал $(-1;1)$, симетричний відносно початку координат.

Знайдемо

$$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}=\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1+x}{1-x}=-f(x).$$

Задана функція — непарна.

14. Нехай $f(x)=\sin x$, де $x\in(-\infty;+\infty)$.

Згідно з відомою властивістю цієї функції

$$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x).$$

Отже, $\sin x$ є непарною функцією в інтервалі $(-\infty;+\infty)$.

15. Нехай $f(x)=\arcsin x$. Цю функцію визначено на відрізку $[-1;1]$, симетричному відносно початку координат. Оскільки

$$f(-x)=\arcsin(-x)=-\arcsin x=-f(x),$$

функція $\arcsin x$ є непарною.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Справді, нехай $f(x)$ є парною функцією. Тоді точки графіка цієї функції з абсцисами x і $-x$ мають однакові ординати, а отже, ці точки знаходяться на однаковій відстані від осі ординат і від осі абсцис, тому вони симетричні відносно осі ординат.

Міркуючи аналогічно, можна довести, що коли $f(x)$ є непарною функцією, то її графік симетричний відносно початку координат.

Зауважимо, що при побудові графіка функції (парної або непарної) не потрібно будувати їх для від'ємних значень аргументу, досить побудувати його для $x\geq 0$, для $x<0$ частину побудованого графіка у випадку парної функції дзеркально відобразити відносно осі ординат, а у випадку непарної функції виконати подвійне дзеркальне відображення відносно обох координатних осей.

❑ **Вправи**

1. Довести, що сума й різниця двох парних (непарних) функцій є функцією парною (непарною).

2. Довести, що: 1) добуток двох парних або непарних функцій є функцією парною; 2) добуток парної функції на непарну є функцією непарною.

3. Довести, що будь-яку функцію $y=f(x)$, задану на деякому симетричному проміжку відносно початку координат, можна зобразити на цьому проміжку у вигляді суми парної і непарної функцій.

Періодичні функції.

Означення. Функцію $y=f(x)$, визначену на всій числовій осі, називають *періодичною*, якщо існує число $T\neq 0$ таке, що для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$ виконується тотожність

$$f(x+T)\equiv f(x).$$

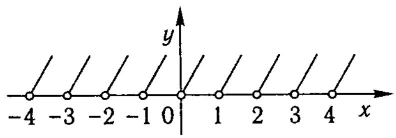


Рис. 20

Число T при цьому називають *періодом функції* $f(x)$, а саму функцію — *T-періодичною.*

Якщо число T є періодом функції $f(x)$, то й число $-T$ є також періодом $f(x)$. Справді, скориставшись означенням періодичної функції, дістанемо

$$f(x-T)=f((x-T)+T)=f(x).$$

Можна було б довести й більш загальне твердження, а саме: якщо T є періодом T-періодичної функції $f(x)$, то число $\pm nT$, де n — будь-яке натуральне число, також є періодом функції. Тому часто періодом періодичної функції називають найменше число з усіх додатних періодів. Якщо користуватися цим означенням періоду, то не будь-яка періодична функція може мати період. Так, нехай $f(x)$ є сталою функцією, заданою на всій числовій осі. Тоді така функція є періодичною і її періодом є будь-яке дійсне число. Для функції Діріхле, наприклад, періодом є будь-яке раціональне число.

Щоб побудувати графік T-періодичної функції, очевидно, достатньо його побудувати на відрізку, який дорівнює довжині періоду, тобто на відрізку $[x; x+T]$, де x — довільна точка числової осі, а потім, зсуваючи побудовану частину графіка вздовж осі абсцис праворуч і ліворуч на відстань T, $2T$, $3T$ тощо, дістанемо графік функції на всій множині, де задано функцію.

Наприклад, тригонометричні функції $\sin x$, $\cos x$ є періодичними (вони мають період 2π); функція $f(x)=x-E(x)$, де $E(x)$ — функція антьє є періодичною, і її період дорівнює 1. Графік цієї функції зображено на рис. 20.

Вище було дано означення періодичної функції, областю визначення якої є множина всіх дійсних чисел **R**. Якщо функцію $y=f(x)$ визначено на деякій множині $D\subset\mathbf{R}$, то її називають *періодичною на цій множині*, якщо існує число $\omega\neq 0$ таке, що для всіх чисел $x\in D$ числа $x+\omega\in D$ і виконується рівність

$$f(x+\omega)=f(x).$$

Наприклад, функція $y=\operatorname{tg} x$, визначена для всіх чисел $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, є періодичною з періодом $\omega=\pi$. При цьому число π є найменшим додатним періодом цієї функції.

❑ **Приклади**

16. Довести, що коли $f(x)$ — періодична функція з періодом T, то функція $f(ax+b)$, де $a>0$, є періодичною з періодом $\frac{T}{a}$.

Розв'язання. Якщо T — період функції $f(x)$, то

$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f((ax+b)+T)=f(ax+b).$$

Покажемо, що $\frac{T}{a}$ є найменшим додатним періодом. Візьмемо інший період, наприклад T_1, функції $f(ax+b)$. Тоді

$$f(a(x+T_1)+b)=f(ax+b).$$

Для довільної точки $x\in(-\infty;+\infty)$ покладемо

$$x'=\frac{x-b}{a}.$$

Тоді

$$f(ax'+b)=f\left(a\frac{x-b}{a}+b\right)=f(x)=f(a(x'+T_1)+b)=f(ax'+b+aT_1)=f(x+aT_1).$$

Звідси $aT_1\geq T$, або $T_1\geq\frac{T}{a}$.

Отже, число $\frac{T}{a}$ є найменшим періодом функції $f(ax+b)$.

Зокрема, якщо розглянути функцію $y=A\sin(\omega x+\varphi)$, де A, ω, φ — сталі, то періодом цієї функції є число $\frac{2\pi}{\omega}$.

Зауважимо, що функцію $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ у фізиці називають *гармонікою*; число $|A|$ — *амплітудою*, ω — *циклічною частотою*, а φ — *початковою фазою гармоніки*. Так, якщо $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$, то амплітуда дорівнює 2, частота — 3, а початкова фаза $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

17. Знайти період функцій: а) $y=\operatorname{tg}2x$; б) $y=\sin\frac{x}{2}$; в) $y=\sin2\pi$; г) $y=\sin^2x$; д) $y=|\cos x|$.

Розв'язання. а) Функція $\operatorname{tg}x$ має період π, тому функція $\operatorname{tg}2x$ має період $T=\frac{\pi}{2}$; б) функція $\sin x$ має період 2π, тому $\sin\frac{x}{2}$ має період 4π; в) функція $\sin2\pi x$ має період $T=1$; г) функцію $\sin^2x$ можна записати у вигляді

$$\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos2x),$$

звідси випливає, що періодом $\sin^2x$ є число π;

д) функцію $|\cos x|$ подамо у такому вигляді

$$|\cos x|=\sqrt{\cos^2x}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos2x)}.$$

Звідси випливає, що періодом функції $|\cos x|$ є число π.

18. Довести, що функція $\sin x^2$ не є періодичною.

Р о з в ' я з а н н я. Розв'язуватимемо методом від супротивного. Припустимо, що $\sin x^2$ має період T. Отже, матимемо тотожність

$$\sin(x+T)^2 \equiv \sin x^2.$$

Аргументи синусів за деякого цілого k і будь-якого $x \in (-\infty; +\infty)$ задовольняють рівність

$$x^2 + 2xT + T^2 \pm x^2 = 2k\pi.$$

Ця рівність несправедлива, оскільки в правій частині число k може бути тільки цілим, а в лівій частині маємо лінійну або квадратичну функцію, аргумент якої x може набувати довільних дійсних значень.

Числова послідовність. Розглянемо натуральний ряд чисел 1, 2, 3, ..., n, ... Припустимо, що на цій множині задано деяку функцію, позначимо її $y = f(n)$. Отже, маємо функцію, областю визначення якої є натуральний ряд чисел. Таку функцію $y = f(n)$ називають *функцією натурального аргументу* і позначають y_n. Індекс n вказує на те, що функція $y_n = f(n)$ залежить від аргументу, який набуває значень із множини натуральних чисел. Кожному значенню n за певним правилом ставиться у відповідність дійсне число y_n.

Надаючи n значень 1, 2, ..., n, ..., дістанемо числа

$$y_1,\ y_2, \dots,\ y_n, \dots, \tag{18}$$

які занумеровано за допомогою чисел натурального ряду.

Означення. Сукупність чисел (18), які є значенням функції $y_n = f(n)$ натурального аргументу і які записано в порядку зростання аргументу, називають *числовою послідовністю.*

Числа $y_1,\ y_2, \dots,\ y_n, \dots$ називають *членами послідовності* відповідно першим, другим і т. д.; y_n — називають n-м, або загальним, членом послідовності.

Числову послідовність записують або у вигляді ряду чисел (18), або у вигляді $\{y_n\}$. Іноді її записують ще так:

$$y_n = f(n), \ \ n = 1, 2, \dots .$$

Зауважимо, що коли в числовій послідовності члени міняти місцями, то діставатимемо все нові й нові послідовності. Для кожної з них встановлено порядок слідування її членів, тобто для кожного n-го члена послідовності y_{n+1}, що йде за членом y_n, а y_n передує члену y_{n+1}. Щодо самих чисел, то y_{n+1} може бути більшим, меншим або дорівнювати y_n.

Числова послідовність є окремим випадком функціональної залежності, а саме, коли областю визначення функції є натуральний ряд чисел. Тому способи задання числової послідовності ті самі, що й функції.

Числова послідовність вважається *заданою*, якщо вказано закон або правило, за яким кожному натуральному числу n ставиться у відповідність одне дійсне число y_n.

Числову послідовність можна, зокрема, задати за допомогою формули (однієї або кількох). При цьому загальний член послідовності записується у вигляді певної формули. Якщо задано загальний член, то, надаючи n значень 1, 2, ..., можна дістати будь-який член послідовності.

❑ **Приклади**

19. Нехай $y_n = n^2$. Відповідна числова послідовність має вигляд

$$1,\ 4,\ 9, \ldots,\ n^2, \ldots .$$

20. Нехай $y_n = \frac{1}{n}$. Ця функція задає послідовність $1,\ \frac{1}{2}, \ldots,\ \frac{1}{n}, \ldots$.

21. Якщо $y_n = (-1)^n$, то маємо послідовність $-1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots$.

22. При $y_n = 1$ дістанемо послідовність $1,\ 1, \ldots,\ 1, \ldots$.

Як уже зазначалося, для задання послідовності потрібно знати правило, за яким кожному значенню n ставиться у відповідність дійсне число y_n. Таке правило може бути задане формулою, як у наведених прикладах. Проте є й інші способи задання послідовностей.

Візьмемо, наприклад, за y_n n-ну цифру розвинення числа π у нескінченний десятковий дріб. Матимемо послідовність

$$3, 1, 4, 1, \ldots .$$

Тут правило відповідності задано словесно.

Іноді при заданні послідовності задається її перший член і правило утворення n-го члена за допомогою попередніх членів. Такий спосіб називають *рекурентним* (від лат. *recurrens*, що означає «зворотний»).

Наприклад, нехай перший член послідовності дорівнює 2, а кожний наступний дорівнює попередньому, помноженому на 10. Тоді $y_n = 10y_{n-1}$, $y_1 = 2$.

Серед числових послідовностей в окремий клас виокремлюють так звані *монотонні послідовності*, що об'єднують зростаючі, спадні, неспадні, незростаючі послідовності.

Означення 1. Послідовність $\{y_n\}$ називають *зростаючою*, якщо кожний її наступний член більший за попередній, тобто $y_{n+1} > y_n$ для кожного n.

❑ **Приклад**

23. У послідовності $1,\ 4,\ 9, \ldots,\ n^2, \ldots$ кожний наступний член більший за попередній. Отже, задана послідовність є зростаючою.

Означення 2. Послідовність $\{y_n\}$ називають *неспадною*, якщо $y_{n+1} \ge y_n$ для кожного n.

❑ **Приклад**

24. Якщо покласти $y_n = E\left(\sqrt{n}\right)$, де E означає функцію антьє, то дістанемо неспадну послідовність

$$1, 1, 1, 2, 2, \ldots .$$

Означення 3. Послідовність $\{y_n\}$ називають *спадною*, якщо $y_{n+1} < y_n$ для кожного n.

❑ **Приклад**

25. Послідовність $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ є спадною.

Означення 4. Послідовність $\{y_n\}$ називають *незростаючою*, якщо $y_{n+1} \geq y_n$ для кожного n.

❑ **Приклад**

26. Якщо взяти $y_n = \frac{1}{E\left(\sqrt{n}\right)}$, то дістанемо незростаючу послідовність.

Для подальшого вивчення числових послідовностей потрібно ввести такі арифметичні операції над числовими послідовностями, як додавання, віднімання, множення та ділення.

Нехай маємо дві послідовності

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{19}$$

і

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots . \tag{20}$$

Додавання, віднімання і множення послідовностей (19), (20) виконуються додаванням, відніманням або множенням відповідних членів цих послідовностей.

Якщо всі $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то частка від ділення послідовності (19) на послідовність (20) означається як послідовність

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, \tag{21}$$

члени якої

$$z_n = \frac{x_n}{y_n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Символічно ці дії позначаються так:

$$\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\};$$

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n y_n\};$$

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

❑ **Приклад**

27. При діленні послідовності $1, 2, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$ на послідовність $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$ дістанемо послідовність

$$1, 4, \ldots, 2^{2n-2}, \ldots .$$

Означення 5. Числову послідовність $\{y_n\}$ називають *обмеженою*, якщо існує дійсне число $M>0$ таке, що для всіх $n=1, 2, \ldots$ виконується нерівність $|y_n|<M$. У протилежному випадку послідовність називають *необмеженою*.

❑ **Приклади**

28. Нехай $y_n=(-1)^n$. Тоді $|y_n|=1$. Отже, послідовність $\{(-1)^n\}$ є обмеженою (за число M можна взяти будь-яке число, більше за одиницю).

29. Нехай $y_n=\frac{n}{2n+1}$. Тоді $|y_n|=\frac{n}{2n+1}<1$. Отже, і ця послідовність є обмеженою.

30. Розглянемо послідовність $\{(-1)^n n\}$. Тут $|y_n|=n$. Яке б число M не взяли, знайдеться таке натуральне число, наприклад n_0, що $|y_{n_0}|>M$. Отже, задана послідовність не є обмеженою.

Слід зазначити, що обмежена послідовність не є обов'язково монотонною, і навпаки, не всяка монотонна послідовність є обмеженою. Так, послідовність $\{(-1)^n\}$ є обмеженою, але не є монотонною. Послідовність $\{n\}$ є монотонною, але не є обмеженою. Послідовність $\{(-1)^n n\}$ є і необмеженою, і немонотонною, тоді як послідовність $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ є й обмеженою, й монотонною.

2.6
ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Поняття про границю функції є одним із основних понять математичного аналізу. Його вивчення почнемо з найпростішого випадку функціональної залежності, а саме, з функції від натурального аргументу або, що те саме, з числової послідовності.

Розглянемо спочатку кілька прикладів.

❑ **Приклади**

1. Нехай маємо функцію $y_n=\frac{1}{n}$, $n=1, 2, \ldots$.

Значення цієї функції, або члени послідовності

$$1,\ \frac{1}{2}, \ldots,\ \frac{1}{n}, \ldots,$$

при зростанні аргументу n спадають і наближаються до числа нуль, залишаючись при цьому більшими за нуль.

2. Нехай послідовність задано формулою $y_n=\frac{n-1}{n}$, $n=1, 2, \ldots$.Члени цієї послідовності

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3}, \ldots,\ \frac{n-1}{n}, \ldots \tag{23}$$

при зростанні аргументу (номера) n зростають і наближаються до одиниці, залишаючись при цьому меншими за одиницю.

3. Нехай послідовність задано функцією $y_n = \dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.
Члени послідовності

$$0,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4}, \ldots \tag{24}$$

при парному n зменшуються за модулем і наближаються до числа нуль, а при непарному n дорівнюють нулю.

Якщо взяти послідовність $\left\{(-1)^n\right\}$, то її члени до жодного числа не наближаються (вони дорівнюють то -1, то $+1$).

Члени послідовності $\left\{n^2\right\}$ також не наближаються до жодного числа.

Для перших трьох прикладів характерною ознакою є те, що члени послідовності при зростанні їхнього номера наближаються до сталого числа, а в прикладі 3 окремі члени навіть дорівнюють цьому числу. При цьому модуль різниці між членами послідовності (починаючи з певного і для всіх наступних) і числом стає як завгодно малим. Зокрема, яке б додатне число не взяли (позначимо його через ε), то обов'язково знайдеться такий член послідовності, починаючи з якого для всіх наступних її членів модуль різниці між цими членами послідовності й відповідним числом буде меншим за число ε.

Розглянемо, наприклад, послідовність (23). Задамо довільне додатне число ε. Покажемо, що знайдеться такий номер N, що для всіх y_n, в яких $n > N$, виконується нерівність

$$|y_n - 1| < \varepsilon. \tag{25}$$

Підставляючи в нерівність (25) значення y_n і враховуючи при цьому те, що $|y_n - 1| = \frac{1}{n}$, дістаємо

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

або

$$n > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{26}$$

Отже, нерівність (25) виконується для всіх членів послідовності (23), номери яких задовольняють нерівність (26).

Тому за число N можна взяти число $\frac{1}{\varepsilon}$, якщо воно ціле, або число $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Так, при $\varepsilon = \frac{1}{9999}$ $N = 9999$, при $\varepsilon = 0{,}0001$ $N = 10\,000$.

Як бачимо, число N залежить від ε. Тому кажуть, що N є функцією від ε, і позначають $N = N(\varepsilon)$, або $N = N_\varepsilon$. Очевидно, чим менше ε, тим більшим має бути N. Для цього прикладу такі значення:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
N	1	10	1000	10 000	100 000

Сформулюємо означення границі числової послідовності.

Нехай маємо функцію натурального аргументу $y_n = f(n)$, $n = 1, 2, ...$, значення якої запишемо у вигляді послідовності

$$y_1,\ y_2, ...,\ y_n, ... \tag{27}$$

Означення. Число a називається *границею функції* $y_n = f(n)$, $n = 1, 2, ...$, або *послідовності* $y_1,\ y_2, ...,\ y_n, ...$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|y_n - a| < \varepsilon. \tag{28}$$

Той факт, що a є границею послідовності (27), символічно записують так:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a, \text{ або } y_n \to a \quad (n \to \infty)$$

(lim — від лат. *limes* — «границя»).

Надалі користуватимемося першим позначенням.

Отже, в розглянутих прикладах 1—3 границі послідовностей (22)—(24) дорівнюють відповідно 0, 1, 0.

❑ **Приклади**

4. Показати, що границя функції $y_n = \frac{3n+1}{2n-1}$, $n = 1, 2, ...$ або послідовності $\frac{4}{1}, \frac{7}{3}, ..., \frac{3n+1}{2n-1}, ...$ дорівнює $\frac{3}{2}$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з означенням границі, покажемо, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$\left|y_n - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon. \tag{29}$$

Справді, підставивши в задану нерівність значення y_n, дістанемо

$$\left|y_n - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2(2n-1)}.$$

Для того щоб виконувалась нерівність (29), потрібно, щоб

$$\frac{1}{2(2n-1)} < \varepsilon, \text{ або } n > \frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

Отже, існує число $N = E\left(\frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}\right)$ таке, що при $n > N$ виконується нерівність (29). Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

5. Показати, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+n-1} = 2.$

Р о з в ' я з а н н я. Справді, при $n \geq 3$

$$\left|\frac{2n^2+3}{n^2+n-1}-2\right|=\frac{2n-5}{n^2+n-1}<\frac{2}{n}.$$

Тому $\left|\frac{2n^2+3}{n^2+n-1}-2\right|$ буде меншим за ε, якщо $\frac{2}{n}<\varepsilon$ або $n>\frac{2}{\varepsilon}$. Отже, $N=E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$.

6. Показати, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, де $a>1$.

Р о з в ' я з а н н я. Доведемо спочатку допоміжну нерівність (нерівність Бернуллі[1]). Якщо n — натуральне число більше за одиницю і $\gamma>1$, то

$$\gamma^n>1+n(\gamma-1). \tag{30}$$

Справді, поклавши $\gamma=1+\lambda$, де $\lambda>0$, і використавши формулу бінома Ньютона, дістанемо

$$(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\ldots+\lambda^n,$$

звідси

$$(1+\lambda)^n>1+n\lambda$$

або

$$\gamma^n>1+n(\gamma-1).$$

Беручи у нерівності (30) $\gamma=a^{\frac{1}{n}}$, матимемо

$$n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)<a-1$$

або

$$a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{a-1}{n}.$$

Отже, нерівність $\left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|<\varepsilon$ виконуватиметься, якщо $\frac{a-1}{n}<\varepsilon$ або

$$n>N=E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right).$$

7. Показати, що границя сталої послідовності $y_n=a$, $n=1,2,\ldots$ дорівнює числу a.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай маємо сталу послідовність

$$a,\ \ a,\ \ a,\ldots,\ \ a,\ldots.$$

Тоді $|y_n-a|=0$, $n=1,2,\ldots$.

Тому, яке б число $\varepsilon>0$ не взяли, для всіх $n=1,2,\ldots$ виконуватиметься нерівність $|y_n-a|=0<\varepsilon$.

Отже, за число N можна взяти будь-яке натуральне число, зокрема числа 1, 2 тощо.

Слід зауважити, що коли числова послідовність має границю, то число N не єдине. Будь-яке число, більше за N, відповідає означенню границі числової послідовності.

---

[1] *Бернуллі Я.* (1654—1703) — швейцарський математик.

8. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1.$

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $y_n=\dfrac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Тоді

$$|y_n-1|=\frac{1}{n+1}.$$

Для того щоб $|y_n-1|<\varepsilon$, потрібно, щоб виконувалася нерівність

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon \text{ або } n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Отже, якщо $0<\varepsilon<1$, то число $N=E\left(\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$. Якщо $\varepsilon\ge 1$, то $E\left(\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\le 0$. Тому за число N можна взяти будь-яке натуральне число, зокрема числа 1, 2 тощо.

Зауважимо, що в цьому прикладі число N можна знайти простіше. Справді, для всіх $n=1,2,\dots$ маємо

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

Розв'язавши нерівність $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ і взявши $N=E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, дістанемо, що при $n>N=E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ виконуватиметься нерівність $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$.

9. Показати, що послідовність із загальним членом $y_n=(-1)^n$ не має границі.

Р о з в ' я з а н н я. Розв'язуватимемо методом від супротивного.

Нехай задана послідовність має границю, яка дорівнює числу a. Отже, яке б не задали додатне число ε, наприклад число $\dfrac{1}{2}\left(\varepsilon=\dfrac{1}{2}\right)$, то існує таке N, що при $n>N$ виконується нерівність

$$|y_n-a|<\frac{1}{2}.$$

Оскільки y_n при непарному n набуває значення -1, а при парному n — значення 1, виконуються нерівності

$$|(-1)-a|<\frac{1}{2},\ |1-a|<\frac{1}{2}.$$

Тоді матимемо

$$2=|1-(-1)|=|(a-(-1))+(1-a)|\le|(-1)-a|+|1-a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Отже, зайшли у суперечність.

Розглянемо геометричну ілюстрацію того факту, що a є границею числової послідовності $\{y_n\}$. Візьмемо на числовій осі (рис. 21) точку з абсцисою a і відкладатимемо точки з абсцисами y_1, $y_2, \dots$, y_n. Тоді нерівність (28) означатиме, що відстань між точкою y_n при $n>N$ і точкою a має бути меншою за ε. Отже, всі члени послідовності $\{y_n\}$, починаючи з y_{N+1}, мають знаходитися в інтервалі $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$. Інтервал $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ є ε-околом точки a.

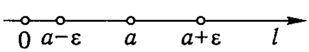


Рис. 21

Таким чином, якщо число a є границею послідовності $\{y_n\}$, то всі члени послідовності, номери яких $n>N$, знаходяться в довільному ε-околі точки a. Щодо членів послідовності $\{y_n\}$, номери яких $n \le N$, то про їх розміщення на числовій осі нічого не можна сказати, вони можуть знаходитися як усередині ε-околу точки a, так і поза ним. Проте у будь-якому випадку поза довільним ε-околом точки a може бути розміщене тільки скінченне число членів послідовності.

Справедливе й обернене твердження: якщо, починаючи з певного номера і для всіх наступних номерів члени послідовності $\{y_n\}$ знаходяться в довільному ε-околі точки a, то a є границею цієї послідовності.

2.7
ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Числову послідовність називають *збіжною*, якщо вона має границю. У протилежному випадку числову послідовність називають *розбіжною*.

Збіжні числові послідовності мають низку властивостей, які сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ і $a>p\,(a<q)$, то й члени послідовності $\{y_n\}$, починаючи з певного номера і для всіх наступних номерів, будуть більші за p (менші за q).

Доведення. Розглянемо випадок $a>p$ (випадок $a<q$ досліджується аналогічно). Як відомо, між двома дійсними числами, зокрема числами p і a, є нескінченна множина дійсних чисел. Підберемо додатне число $\varepsilon>0$ настільки мале, щоб число $a-\varepsilon$ знаходилося між числами p і a, тобто $p<a-\varepsilon<a$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то існує таке число N, що для всіх $n>N$ виконується нерівність

$$|y_n - a| < \varepsilon, \text{ або } a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon.$$

Проте $a-\varepsilon>p$. Отже, $y_n>p$ для всіх $n>N$.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Члени послідовності $\{y_n\}$, яка має границю, відмінну від нуля, починаючи з певного номера, мають знак цієї границі.

Справді, нехай $a>0$. Поклавши в попередній теоремі $p=0$, дістанемо $y_n>0$ для всіх $n>N$.

Наслідок 2. Якщо границя послідовності $\{y_n\}$ відмінна від нуля, то члени цієї послідовності, починаючи з певного номера, більші за модулем від деякого додатного числа r.

Справді, нехай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Припустимо, що $a>0$. Тоді, поклавши $r=p$, де $0<p<a$, згідно з доведеною теоремою 1, маємо, що для $n>N$

$y_n > r$ або $|y_n| > r$. Якщо $a < 0$, то, поклавши $r = |q|$, де $a < q < 0$, дістанемо $y_n < q$, $n > N$. Звідси

$$-y_n > -q = |q|,$$

тобто $|y_n| > r$, $n > N$.

Теорема 2. Послідовність $\{y_n\}$, яка має границю, є обмеженою.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Тоді, задавши довільне додатне число ε, наприклад $\varepsilon = 1$, матимемо нерівність

$$|y_n - a| < 1, \quad n > N.$$

Запишемо y_n у вигляді

$$y_n = a - (a - y_n),$$

тоді

$$|y_n| \le |a| + |y_n - a| < |a| + 1 = M'.$$

Отже, значення y_n для всіх $n = N+1, N+2, \ldots$ менші за модулем, ніж M'.

Розглянемо скінченну множину чисел

$$|y_1|, \ |y_2|, \ldots, \ |y_N|, \ M'.$$

Позначимо найбільше число через M''. Згідно з попередньою нерівністю

$$|y_n| \le M'', \quad n = 1, 2, \ldots$$

або, поклавши $M = M'' + 1$, матимемо

$$|y_n| < M, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Теорему доведено.

Слід зауважити, що обернене до цієї теореми твердження не виконується. Так, послідовність $y_n = (-1)^n$, $n = 1, \ 2, \ldots$, є обмеженою, $|y_n| = 1$, але вона не має границі.

Теорема 3. Послідовність може мати тільки одну границю.

Доведення. Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Покажемо, що $a = b$. Згідно з означенням границі виконуються нерівності

$$|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > N_1;$$

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > N_2,$$

де ε — будь-яке додатне число. Візьмемо натуральне число N, більше за N_1 і N_2. Для $n > N$ одночасно виконуються нерівності

$$|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ і } \ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді

$$|a-b|=|(y_n-b)+(a-y_n)|\le|y_n-b|+|y_n-a|<\varepsilon.$$

Отже,

$$|a-b|<\varepsilon.$$

У лівій частині цієї нерівності маємо невід'ємне число; оскільки це число менше за будь-яке, зокрема як завгодно мале додатне число ε, то

$$|a-b|=0.$$

Звідси $a=b$.

Теорему доведено.

Н а с л і д о к. Якщо дві послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ при всіх n набувають однакових значень і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$, то $a=b$.

Т е о р е м а 4. Якщо дві послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ за кожного значення n задовольняють нерівність $x_n\ge y_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$, то $a\ge b$.

Д о в е д е н н я. Припустимо супротивне. Нехай $a<b$. Візьмемо число r, яке задовольняє нерівності $a<r<b$. Тоді за теоремою 1 існує таке число, наприклад N_1, що для всіх $n>N_1$ виконується нерівність $x_n<r$. Існує також число, наприклад N_2, що для всіх $n>N_2$ виконується нерівність $y_n>r$.

Отже, для всіх $n>N$, де N — число, більше за N_1 і N_2, виконуються нерівності

$$r>x_n,\ r<y_n.$$

Звідси для $n>N$ маємо $x_n<y_n$. Отже, зайшли у суперечність.

Теорему доведено.

Слід зауважити, що коли члени послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, які мають границі, задовольняють при всіх n строгу нерівність $x_n>y_n$, то звідси не випливає строга нерівність така, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n>\lim_{n\to\infty} y_n,$$

а, як і раніше, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\ge\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Наприклад, нехай $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n+1}$. При всіх $n=1,\ 2,\ldots,$ $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$, але

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Т е о р е м а 5 (про границю проміжної змінної). Нехай члени послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ при всіх значеннях $n=1,2,\ldots$ задовольняють нерівності $x_n\le y_n\le z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$.

Доведення. Оскільки a є границею x_n, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число, наприклад N_1, що для всіх $n > N_1$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ або

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Аналогічно існує таке число, наприклад N_2, що при $n > N_2$

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Вибравши число N, більше за N_1 і N_2, і використавши умову теореми і попередні нерівності, дістанемо

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \text{ при } n > N.$$

Теорему доведено.

Теорема 6. Якщо послідовність $\{y_n\}$ збігається, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число N таке, що для всіх $n > N$, $m > N$ виконується нерівність

$$|y_n - y_m| < \varepsilon.$$

Доведення. Нехай послідовність $\{y_n\}$ збігається, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число N таке, що при $n > N$ виконується нерівність

$$|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Візьмемо число $m > N$. Тоді

$$|y_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

З попередніх нерівностей випливає

$$|y_n - y_m| = |(y_n - a) + (a - y_m)| \le |y_n - a| + |y_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорему доведено.

Теорема 7 (обернена теорема до теореми 6). Якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число N таке, що для всіх $n > N$ і $m > N$ виконується нерівність

$$|y_n - y_m| < \varepsilon, \tag{31}$$

то числова послідовність $\{y_n\}$ збігається.

Не зупиняючись на доведенні цієї теореми, зауважимо лише, що ознака (31), або, як її ще називають, *критерій Коші*[1], дає змогу дослідити на

[1] *Коші О.* (1789—1857) — французький математик.

збіжність чи розбіжність числову послідовність за допомогою членів самої послідовності.

Теорема 8. Якщо послідовність $\{y_n\}$ є збіжною і має границю — число a, то послідовність $\{y_n\}$, утворена з модулів членів цієї послідовності, є також збіжною і має границю — число $|a|$.

Доведення. Нехай $\{y_n\}$ збігається, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що при $n > N$ виконується нерівність

$$|y_n - a| < \varepsilon, \quad n > N.$$

Тоді, скориставшись нерівністю $\big||y_n| - |a|\big| \le |y_n - a|$, яка є правильною для всіх $n = 1, 2, ...$, робимо висновок, що

$$\big||y_n| - |a|\big| < \varepsilon, \quad n > N.$$

З останньої нерівності випливає

$$\lim_{n\to\infty} |y_n| = |a|.$$

Теорему доведено.

Попередню рівність можна записати ще в такому вигляді:

$$\lim_{n\to\infty} |y_n| = \left|\lim_{n\to\infty} y_n\right|.$$

Тому теорему 8 називають про перехід до границі під знаком модуля.

2.8
НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ТА НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Серед функцій натурального аргументу особливе місце посідають так звані *нескінченно малі* й *нескінченно великі функції.*

Означення. Послідовність $y_n = f(n)$, $n = 1, 2, ...$, називають *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, а саму функцію $y_n = f(n)$ при цьому — *нескінченно малою величиною.*

Наприклад, послідовності $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\right\}$ є нескінченно малими.

Якщо в нерівності (28) покласти $a = 0$, то дістанемо нерівність $|y_n| < \varepsilon$, $n > N$. Тому нескінченно малу числову послідовність можна означити ще так.

Числову послідовність $\{y_n\}$ називають *нескінченно малою*, якщо для будь-якого додатного числа ε існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|y_n| < \varepsilon$.

Отже, члени послідовності $\{y_n\}$, починаючи з певного номера і для всіх наступних номерів, стають за модулем як завгодно малими.

Проте не слід плутати нескінченно малу числову послідовність із досить малим числом. Окремі члени нескінченно малої числової послідовності можуть бути досить великими.

Так, послідовність $\left\{\frac{10^{10}n}{n^2+1}\right\}$ є нескінченно малою, оскільки $\left\{\frac{10^{10}n}{n^2+1}\right\} < \varepsilon$ при n, більшому, наприклад, за число $\frac{10^{10}}{\varepsilon}$. Проте окремі значення $\frac{10^{10}}{2}$, $\frac{10^{10}\cdot 2}{5}$, $\frac{10^{10}\cdot 3}{10}$ не є малими числами.

Нескінченно малі функції позначають через α_n, β_n, $\gamma_n, \dots$.

Наступні теореми встановлюють тісний зв'язок між функцією y_n, яка має границю, і нескінченно малою функцією.

Теорема 1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то функція $\alpha_n = y_n - a$ є нескінченно малою.

Доведення. Яке б не було число $\varepsilon > 0$, знайдеться таке N, що для всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|y_n - a| < \varepsilon$ або $|\alpha_n| < \varepsilon$, $n > N$. Це й означає, що α_n є нескінченно малою функцією.

Справедлива й обернена теорема.

Теорема 2. Якщо різниця між y_n і числом a є нескінченно малою функцією, то a є границею функції y_n.

Доведення. Позначимо через $\alpha_n = y_n - a$. Тоді $y_n - a$ є нескінченно малою функцією. Отже, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$, або $|y_n - a| < \varepsilon$.

Отже, згідно з означенням границі маємо

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Теорему доведено.

Доведені теореми дають змогу дати друге означення границі послідовності.

Означення. Число a називають *границею числової послідовності* $\{y_n\}$, якщо різниця між y_n і числом a є нескінченно малою функцією, тобто

$$y_n - a = \alpha_n, \ n = 1, 2, \dots .$$

Нескінченно малі функції (послідовності) мають такі властивості.

1°. Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій є функцією нескінченно малою.

Доведення. Для простоти доведення припустимо, що маємо дві нескінченно малі функції α_n і β_n. Потрібно показати, що функція $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ є також нескінченно малою. Для цього задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Унаслідок того що α_n є нескінченно малою функцією, то для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ існує таке число N_1, що для всіх $n > N_1$ виконуватиметься нерівність $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Існує також і число N_2 таке, що для всіх $n > N_2$ виконуватиметься нерівність $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Візьмемо число N, яке більше за числа N_1 і N_2. Тоді для всіх $n > N$ одночасно виконуються обидві нерівності:

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ і } |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{32}$$

Використавши властивість модуля суми, дістанемо

$$|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

Згідно з нерівностями (32), матимемо

$$|\gamma_n| < \varepsilon, \quad n > N.$$

Використавши метод математичної індукції, можна довести справедливість цієї властивості й для будь-якого скінченного числа нескінченно малих функцій.

2°. Добуток нескінченно малої числової послідовності на послідовність обмежену є нескінченно малою числовою послідовністю.

Доведення. Нехай $\{y_n\}$ — обмежена послідовність, а $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала. Покажемо, що $\{\beta_n\} = \{y_n \cdot \alpha_n\}$ є нескінченно малою числовою послідовністю.

Оскільки $\{y_n\}$ є обмеженою послідовністю, то існує таке число M, що для всіх n справджується нерівність

$$|y_n| < M.$$

Оскільки $\{\alpha_n\}$ нескінченно мала послідовність, то яке б число не взяли, зокрема $\frac{\varepsilon}{M}$, де $\varepsilon > 0$, знайдеться таке число N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Тоді

$$|\beta_n| = |y_n| \cdot |\alpha_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \quad n > N.$$

Із нерівності $|\beta_n| < \varepsilon$, $n > N$ випливає справедливість висловленого твердження.

Перейдемо до розгляду нескінченно великих числових послідовностей.

Означення. Послідовність $\{y_n\}$ називають *нескінченно великою*, якщо, яке б не було число $M > 0$, існує таке число $N = N(M)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|y_n| > M.$$

Це записують як

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

(y_n при цьому називають нескінченно великою функцією).

Наприклад, послідовності $\left\{(-1)^n n\right\}$, $\left\{n^2\right\}$, $\left\{a^n\right\}$, $a>1$ є нескінченно великими.

Доведемо, наприклад, що $\left\{a^n\right\}$, $a>1$ є нескінченно великою послідовністю. Для цього задамо довільне додатне число M. Потрібно показати, що знайдеться таке число N, що для всіх $n>N$ виконується нерівність

$$\left|a^n\right| > M.$$

Справді, ця нерівність виконується, якщо

$$n\lg a > \lg M,$$

звідси

$$n > \frac{\lg M}{\lg a}.$$

Отже, за число N можна взяти число $E\left(\dfrac{\lg M}{\lg a}\right)$.

Слід зауважити, що необмежена числова послідовність може й не бути нескінченно великою. Так, числова послідовність $\{y_n\}$, де

$$y_n \begin{cases} 1, \text{ якщо } n = 2k; \\ n!, \text{ якщо } n = 2k+1,\ k = 0, 1 \ldots \end{cases}$$

є необмеженою і не є нескінченно великою.

Якщо члени нескінченно великої послідовності, починаючи з певного n і для всіх наступних його значень, є додатними, то цей факт символічно записують так:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

Якщо члени нескінченно великої послідовності $\{y_n\}$, починаючи з певного n і для всіх наступних його значень, від'ємні, то це записують так:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$

Наприклад, $y_n = 1000 - n$ є нескінченно великою послідовністю і, починаючи з $n = 1001$ і для всіх $n > 1001$, набуває від'ємних значень. Тому

$$\lim_{n\to\infty} (1000 - n) = -\infty.$$

Члени послідовності $\{a^n\}, a>1,$ для всіх $n=1, 2, \ldots$ — додатні. Тому

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

Існує тісний зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими числовими послідовностями. Цей зв'язок встановлюють такі теореми.

Теорема 3. Якщо $\{y_n\}$ є нескінченно великою числовою послідовністю, то послідовність $\{\alpha_n\}=\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ є нескінченно малою.

Доведення. Оскільки $\{y_n\}$ є нескінченно великою послідовністю, то, яке б не було число $M>0$, існує таке число N, що для всіх $n>N$ виконується нерівність $|y_n|>M$. Нехай $M=\frac{1}{\varepsilon}$, де ε — довільне додатне число. Тоді $|y_n|>\frac{1}{\varepsilon}$, $n>N$ або $|\alpha_n|<\varepsilon$, $n>N$.

Теорему доведено.

Обернена теорема. Якщо $\{\alpha_n\}$ є нескінченно малою числовою послідовністю і для всіх $n=1, 2, \ldots$ $\alpha_n \neq 0$, то послідовність $\{y_n\}=\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ є нескінченно великою.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню попередньої.

2.9
ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ

Знаходження границі числової послідовності на основі тільки означення границі часто викликає певні труднощі, тому що потрібно наперед знати число, «підозріле» на границю, і не кожного разу за цим числом $\varepsilon>0$ можна знайти число N.

Тому на практиці для знаходження границі числових послідовностей користуються такими теоремами.

Теорема 1. Нехай x_n і y_n мають відповідно границі a і b. Тоді сума x_n+y_n має границю, яка дорівнює $a+b$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Доведення. Якщо a і b є відповідно границями x_n і y_n, то

$$x_n = a+\alpha_n, \quad y_n = b+\beta_n,$$

де α_n і b_n — нескінченно малі функції.

Додавши почленно ці рівності, дістанемо

$$x_n + y_n = a+b+\alpha_n+\beta_n.$$

Отже, функцію $x_n + y_n$ подано у вигляді суми сталого числа $a+b$ і нескінченно малої функції $\alpha_n + \beta_n$. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$ і дорівнює $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорему доведено.

Т е о р е м а 2. Нехай x_n і y_n мають відповідно границі a і b. Тоді й добуток їх має границю, яка дорівнює ab, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Д о в е д е н н я. Функції x_n і y_n, згідно з умовою теореми, можна подати у вигляді

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

де α_n і β_n — нескінченно малі функції. Тоді

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

У цій рівності сума останніх трьох доданків є нескінченно малою функцією. Тому

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що теореми 1 і 2 справедливі й для більш як двох доданків (множників).

Із теореми 2 випливають такі наслідки:

1. Сталий множник можна виносити за знак границі. Справді, нехай $x_n = c$, а y_n має границю. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = c \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і k — натуральне число, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^k\right) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k = a^k.$$

Т е о р е м а 3. Нехай x_n і y_n мають скінченні границі, які дорівнюють відповідно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причому $b \neq 0$, $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то тоді відношення їх $\dfrac{x_n}{y_n}$ має скінченну границю, яка дорівнює $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то, як відомо, знайдеться таке число N, що при $n > N$ виконується нерівність

$$|y_n| > r > 0,$$

де r — число.

Надалі обмежимося тими значеннями функції y_n, які задовольняють попередню нерівність. Тоді

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n),$$

де α_n, β_n — нескінченно малі функції.

Доведемо, що функція, яка становить праву частину попередньої рівності, є нескінченно малою. Справді,

$$\frac{1}{|by_n|} < \frac{1}{|b|r}, \; n > N.$$

Отже, послідовність $\left\{\dfrac{1}{by_n}\right\}$ є обмеженою. Функція $b\alpha_n - a\alpha_n$ є нескінченно малою.

Таким чином, функція $\gamma_n = \dfrac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)$ є нескінченно малою. Тому

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \gamma_n.$$

Теорему доведено.

Теорема 4. Якщо y_n має скінченну границю $a \geq 0$, то й степінь $y_n^{\frac{1}{k}}$, де k — натуральне число, має скінченну границю, яка дорівнює $a^{\frac{1}{k}}$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $a > 0$. Використавши відому формулу, матимемо

$$\sqrt[k]{y_n} - \sqrt[k]{a} = \frac{y_n - a}{\left(\sqrt[k]{y_n}\right)^{k-1} + \ldots + \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}}.$$

Функція, яка становить праву частину цієї рівності, є нескінченно малою.

Справді, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, тому $y_n - a$ є нескінченно малою функцією.

Послідовність

$$\left\{\frac{1}{\left(\sqrt[k]{y_n}\right)^{k-1} + \ldots + \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}}\right\}$$

є обмеженою (існує таке N, що для всіх $n > N$ $y_n > r > 0$), а отже,

$$\left(\sqrt[k]{y_n}\right)^m > \left(\sqrt[k]{r}\right)^m,$$

де m — будь-яке натуральне число.

Нехай $a = 0$. Тоді

$$\left|\sqrt[k]{y_n} - \sqrt[k]{a}\right| = \sqrt[k]{|y_n|}.$$

Проте y_n у цьому випадку є нескінченно малою функцією. Тому, яке б не було число $\varepsilon > 0$, існує таке натуральне число N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|y_n| < \varepsilon^k.$$

Отже, $\left|\sqrt[k]{y_n}\right| < \varepsilon$, $n > N$.

Теорему доведено.

❑ **Приклади**

1. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sin n^2 + a^{\frac{1}{n}}\right)$, де $a > 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Використаємо теорему про границю суми. Для цього слід встановити, чи існують границі доданків. Послідовності $\{n\}$ і $\{n!\}$ є нескінченно великими. Тому послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ — нескінченно малі, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0$. Послідовність $\left(\sin n^2\right)$ є обмеженою, $\left|\sin n^2\right| \le 1$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sin n^2 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Як бачимо, границі доданків існують. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sin n^2 + a^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sin n^2 + \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

2. Знайти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^n}}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Для знаходження цієї границі використаємо теорему про границю частки. Для цього окремо знайдемо границю чисельника і знаменника

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}\right)=\frac{3}{2}.$$

Отже, границя функції, яка становить чисельник, і границя функції, яка становить знаменник заданого дробу, існують, причому границя знаменника не дорівнює нулю. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\frac{4}{3}.$$

2.10 НЕВИЗНАЧЕНІ ВИРАЗИ

У попередньому параграфі було доведено основні теореми про границі для випадку, коли функції x_n і y_n мають скінченні границі, причому при доведенні теореми про границю частки припускали, що границя дільника не дорівнює нулю.

Розглянемо випадок, коли $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ є нескінченно великими числовими послідовностями, тобто

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\infty.$$

Арифметична сума нескінченно великих числових послідовностей, якщо члени цих послідовностей мають той самий знак, є також нескінченно великою послідовністю. Тоді добуток цих послідовностей є також нескінченно великою числовою послідовністю.

Проте нічого конкретного в загальному випадку не можна сказати про частку від ділення та різницю цих послідовностей.

❑ **Приклади**

1. Нехай $x_n=n^2$, $y_n=n$, $n=1,2,\ldots$. Обидві послідовності є нескінченно великими $\left(\lim_{n\to\infty}x_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}y_n=\infty\right)$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

Отже, у цьому випадку послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ не має скінченної границі, а є нескінченно великою послідовністю.

2. Нехай $x_n=2n$, $y_n=n$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=2.$$

Отже, границя відношення цих двох нескінченно великих числових послідовностей існує і дорівнює 2.

3. Нехай $x_n = n,\ y_n = n^2$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Отже, в цьому випадку послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ нескінченно мала.

4. Нехай $x_n = (-1)^n n,\ y_n = n$. Тоді

$$\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n.$$

Отже, у цьому випадку послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ не має границі.

Таким чином, якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ є нескінченно великими, то частка від ділення їх залежно від закону зміни може бути різною, щоразу потрібно досліджувати відношення $\frac{x_n}{y_n}$. Тому говорять, що відношення $\frac{x_n}{y_n}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, є невизначеністю. Цю невизначеність символічно позначають так: $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Сказане тут про частку стосується й різниці двох нескінченно великих числових послідовностей, якщо члени цих послідовностей мають той самий знак.

Так, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то різницю $x_n - y_n$ називають *невизначеністю виду* $(\infty - \infty)$.

Аналогічний факт маємо у випадку відношення двох нескінченно малих числових послідовностей. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то частка від ділення $\frac{x_n}{y_n}$ може також бути різною. Цю невизначеність називають невизначеністю виду $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Існують також інші види невизначеності. Зокрема, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то добуток цих величин є невизначеністю $(0\cdot\infty)$.

❑ **Приклади**

5. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. Тут маємо невизначеність виду $(\infty - \infty)$. Для її розкриття позбавимося ірраціональності в чисельнику. Матимемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

6. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+3)}{n^4+2n+3}$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо невизначеність виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для розкриття її поділимо чисельник і знаменник на n^4. Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+3)}{n^4+2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}{1+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^4}}.$$

Границі чисельника і знаменника існують і дорівнюють одиниці. Тому, застосувавши теорему про границю частки, матимемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}{1+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^4}} = 1.$$

2.11 ІСНУВАННЯ ГРАНИЦІ МОНОТОННОЇ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Основні теореми про границі дають змогу встановлювати існування і знаходити числове значення границі заданої числової послідовності за допомогою границь інших числових послідовностей, певним чином пов'язаних із розглядуваною. Проте ці теореми можна використати не завжди. Тому доводиться застосовувати інші способи, зокрема використовувати ознаки збіжності числових послідовностей.

Т е о р е м а. Якщо послідовність

$$y_1,\ y_2, \dots,\ y_n, \dots \tag{33}$$

є монотонно неспадною (незростаючою) й обмеженою зверху (знизу), то вона збіжна.

Д о в е д е н н я. Нехай послідовність (33) незростаюча, тобто $y_1 \ge y_2 \ge$ $\ge \dots \ge y_n \ge \dots$, і нехай вона обмежена знизу, тобто існує таке число m, що

$$y_n \ge m,\ n = 1, 2, \dots .$$

Тоді множина значень функції y_n має нижню грань, яку позначимо через a. Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Оскільки a є нижньою гранню множини значень функції y_n, то для всіх її значень виконується нерівність $y_n \ge a$.

Проте, згідно з властивостями нижньої грані, яке б не було додатне число $\varepsilon > 0$, знайдеться таке натуральне число N, що

$$y_N < a + \varepsilon.$$

Беручи до уваги, що послідовність незростаюча, дістаємо нерівності

$$a \le y_n < a+\varepsilon, \quad n \ge N$$

або

$$a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon, \quad n \ge N.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Теорему доведено.

Слід зауважити, що ця теорема дає ознаку, за якою можна встановити існування границі числової послідовності, але вона не дає методу знаходження числового значення границі.

Зауваження

1. Якщо числова послідовність $\{y_n\}$ монотонна і необмежена, то вона є нескінченно великою.

Нехай, наприклад, $\{y_n\}$ — монотонно незростаюча і необмежена знизу числова послідовність. Тоді, яке б не взяли число $E>0$, знайдеться таке число N, що $y_N < E$. Проте $y_N \ge y_{N+1} \ge \ldots$. Тому $y_n < E, \quad n \ge N$.

А це означає, що $\{y_n\}$ є числовою послідовністю, члени якої, починаючи з деякого n і при всіх наступних його значеннях, набувають від'ємних значень. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$

2. Умова монотонності в розглянутій теоремі є обов'язковою. Не будь-яка обмежена числова послідовність $\{y_n\}$ має границю. Так, послідовність $\{(-1)^n\}$ обмежена і зверху, і знизу, але границі не має.

❑ **Приклади**

1. Нехай числову послідовність задано формулою

$$y_n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \ldots + \frac{1}{1+2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Довести, що послідовність збігається, тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Розв'язання. Числова послідовність $\{y_n\}$ є зростаючою. Справді,

$$y_{n+1} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \ldots + \frac{1}{1+2^n} + \frac{1}{1+2^{n+1}} > y_n.$$

Крім того, послідовність $\{y_n\}$ обмежена зверху, оскільки

$$y_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Отже, згідно з попередньою теоремою, задана послідовність має границю.

2. Довести, що послідовність, загальний член якої

$$y_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

має границю.

Р о з в ' я з а н н я. Задана послідовність є зростаючою. Справді,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{(n+2)!} > y_n.$$

Крім того, вона обмежена зверху. В правій частині рівності (34) у кожному доданку, починаючи з другого, замінимо у знаменнику множники, більші за 2, числом 2. Матимемо

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Отже, $y_n < 1$. Тому послідовність $\{y_n\}$ має границю.

3. Показати, що числова послідовність

$$y_n = \frac{c^n}{n!}, \quad c > 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

має границю, яка дорівнює нулю.

Р о з в ' я з а н н я. Послідовність $\{y_n\}$, починаючи з певного значення n і для всіх наступних значень, є спадною, оскільки

$$y_{n+1} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c^n}{n!}\frac{c}{(n+1)} = y_n \frac{c}{n+1} \tag{35}$$

або

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{c}{n+1}.$$

Звідси як тільки $n > c - 1$, то $y_{n+1} < y_n$.

Крім того, послідовність $\{y_n\}$ є обмеженою знизу, оскільки члени цієї послідовності більші, наприклад за нуль.

Отже, існує границя заданої послідовності, причому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0.$$

Справді, нехай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Тоді й $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1} = a$. Знайдемо границі числових послідовностей лівої і правої частин рівності (35):

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} y_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n+1} \tag{36}$$

або

$$a = a\cdot 0.$$

Остання рівність можлива при $a = 0$.

2.12
ЧИСЛО e

Розглянемо послідовність із загальним членом

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n = 1, 2, \dots . \tag{37}$$

Доведемо, що така послідовність збіжна.

Спочатку покажемо, що ця послідовність зростаюча, тобто

$$y_{n+1} > y_n, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Справді, застосувавши до виразу, що становить праву частину рівності (37), біном Ньютона, дістанемо

$$y_n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n}$$

або

$$y_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \tag{38}$$

Знайдемо

$$y_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \tag{39}$$

У правій частині цієї рівності маємо $n+2$ додатних доданки, тоді як у рівності (38) доданків $n+1$. Крім цього, кожний доданок, починаючи з третього, більший за відповідний доданок правої частини рівності (38), а перші два доданки рівні. Тому $y_{n+1} > y_n$.

Крім цього, послідовність $\{y_n\}$ обмежена зверху. Якщо в правій частині рівності (38) кожний вираз у круглих дужках замінити на одиницю, матимемо

$$y_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Застосувавши до правої частини останньої нерівності ті самі міркування, що й при розв'язуванні прикладу 2, п. 2.11, дістанемо

$$y_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Отже,

$$y_n < 3, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Тому існує границя послідовності $\{y_n\}$. Позначають її буквою е

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Число е у вищій математиці відіграє надзвичайно важливу роль. Так, розглядають логарифми при основі е. Ці логарифми називають *натуральними* і позначають символом $\ln c$ (c — розглядуване число). Способи обчислення натуральних логарифмів чисел подано в теорії рядів. Знаючи натуральний логарифм числа, досить просто знайти логарифми цього числа за інших основ, зокрема десятковий логарифм. При цьому використовують модуль переходу

$$\lg c = M \ln c,$$

де M — модуль переходу, $M = \lg \mathrm{e}$.

Справді, число c можна, за означенням логарифма, подати у вигляді

$$c = \mathrm{e}^{\ln c}.$$

Тоді

$$\lg c = \ln c \cdot \lg \mathrm{e}.$$

Зауважимо, що в теорії математичного аналізу доводиться, що число е — ірраціональне. Існують також способи, за допомогою яких можна наближено обчислити число е, зокрема, з точністю до 0,0001:

$$\mathrm{e} = 2{,}7182.$$

2.13
ГРАНИЧНІ ТОЧКИ. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО — ВЕЙЄРШТРАССА

Означення. Точку (число) a називають граничною точкою числової послідовності $\{y_n\}$, якщо в будь-якому досить малому її околі міститься нескінченна множина членів цієї послідовності.

Граничні точки числової послідовності ще називають частковими границями. Останню термінологію не використовуватимемо.

❑ **Приклади**

1. Довести, що послідовність $y_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ має граничні точки $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

Розв'язання. Доведемо, наприклад, що a_1 є граничною точкою цієї послідовності. Для цього візьмемо окіл $(1-\delta; 1+\delta)$ ($\delta > 0$ — довільне мале число) точки $a_1 = 1$. У цьому околі містяться всі члени послідовності з парними номерами. А їх є нескінченна множина.

Отже, згідно з наведеним означенням точка $a_1 = 1$ є граничною точкою розглядуваної послідовності.

Аналогічно доводиться, що точка $a_2 = -1$ є граничною точкою цієї послідовності.

2. Довести, що числова послідовність $y_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ має граничну точку $a = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Візьмемо окіл $(-\delta; \delta)$ ($\delta > 0$ — досить мале число) точки $a = 0$. Тоді за аксіомою Архімеда знайдеться натуральне число n_0 таке, що

$$n_0 > \frac{1}{\delta}.$$

Тоді виконуються нерівності

$$0 < \frac{1}{n} < \delta, \quad n \geq n_0.$$

Отже, нескінченна множина $\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+2}, \ldots$ членів розглядуваної послідовності знаходиться в околі $(-\delta; \delta)$. Точка $a = 0$ є граничною.

Не кожна числова послідовність має граничну точку. Так, числові послідовності

$$1, 2, \ldots, n, \ldots;$$

$$1, 3, \ldots, 2n-1, \ldots$$

граничних точок не мають.

Однак правильною є теорема.

Теорема (Больцано — Вейєрштрасса)[1]. Всяка обмежена числова послідовність має принаймні одну граничну точку.

Д о в е д е н н я. Нехай послідовність $\{y_n\}$ є обмеженою. Тоді існує відрізок $[a; b]$ такий, що всі члени послідовності $\{y_n\}$ містяться в цьому відрізку. Поділимо відрізок $[a; b]$ навпіл точкою $\frac{a+b}{2}$. Отримаємо два відрізки $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ і $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$. Хоча один із цих відрізків містить нескінченну множину членів послідовності $\{y_n\}$. Позначимо через $[a_1; b_1]$ той відрізок, якому належить нескінченна множина послідовності. Якщо обидва відрізки містять нескінченну множину членів послідовності, то через $[a_1; b_1]$ позначимо один із них. Тепер відрізок $[a_1; b_1]$ точкою $\frac{a_1+b_1}{2}$ поділимо навпіл і повторимо попередні міркування. Отримаємо відрізок $[a_2; b_2]$, який містить у собі нескінченну множину членів послідовності. Процес побудови відрізків продовжимо необмежено. В результаті дістанемо послідовність відрізків $[a_n; b_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, кожний із яких містить нескінченну множину членів послідовності й кожний наступний відрізок

[1] *Больцано Б.* (1781—1848) — чеський математик. *Вейєрштрасс К.* (1815—1897) — німецький математик.

вміщується у попередньому

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots .$$

Довжина відрізка $[a_n; b_n]$ згідно з його побудовою дорівнює

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

і прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже, за аксіомою Кантора побудована система відрізків має одну спільну точку $c \in [a_n; b_n]$, $n = 1, 2, \dots$.

Доведемо, що точка c є граничною точкою для послідовності $\{y_n\}$.

Для цього візьмемо окіл $\left(c - \frac{\delta}{2}; c + \frac{\delta}{2}\right)$ точки c, довжина якого дорівнює δ, де $\delta > 0$ — як завгодно мале число. Тоді, оскільки довжина відрізків $[a_n; b_n]$, $n = 1, 2, \dots$ прямує до нуля, то знайдеться натуральне число n_0 таке, що довжина відрізка $\left[a_{n_0}; b_{n_0}\right]$ буде меншою за δ, тобто

$$b_{n_0} - a_{n_0} < \delta.$$

Цим доведено, що відрізок $\left[a_{n_0}; b_{n_0}\right]$, який за побудовою містить нескінченну множину членів послідовності $\{y_n\}$, вміщається в інтервалі $\left(c - \frac{\delta}{2}; c + \frac{\delta}{2}\right) \supset \left[a_{n_0}; b_{n_0}\right]$. Тому в цьому інтервалі знаходиться нескінченна множина членів послідовності $\{y_n\}$.

Отже, точка c є граничною точкою послідовності $\{y_n\}$.

Теорему доведено.

Із цієї теореми випливає дуже важливий наслідок, яким надалі часто користуватимемося. Щоб сформулювати цей наслідок, введемо поняття підпослідовності послідовності $\{y_n\}$. Для цього з послідовності $\{y_n\}$ виокремимо нескінченну множину її членів із номерами

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots .$$

Отримаємо нову послідовність

$$y_{n_1}, \; y_{n_2}, \dots, \; y_{n_k}, \dots ,$$

яку називають *підпослідовністю послідовності* $\{y_n\}$.

❑ **Приклад**

Розглянемо послідовність

$$-1, \; 1, \; -1, \dots, \; (-1)^n, \dots .$$

Випишемо окремо члени цієї послідовності з непарними номерами й окремо — з парними. Отримаємо дві підпослідовності:

$$-1, -1, ..., -1, ... ;$$

$$1, 1, ..., 1, ...$$

Н а с л і д о к. Із всякої обмеженої послідовності можна виокремити збіжну підпослідовність.

Справді, нехай маємо обмежену послідовність $\{y_n\}$. Тоді вона має хоча б одну граничну точку c. Побудуємо Канторову систему відрізків

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset ... \supset [a_k; b_k] \supset ...,$$

яка містить точку c. Оскільки c є граничною точкою послідовності $\{y_n\}$, то будь-який відрізок $[a_n; b_n]$ містить нескінченну множину членів $\{y_n\}$. Нехай y_{n_1} — перший член послідовності $\{y_n\}$, який знаходиться у відрізку $[a_1; b_1]$; y_{n_2} — перший член послідовності, який іде за y_{n_1} і який знаходиться у відрізку $[a_2; b_2]$ і т. д.; y_{n_k} — перший член послідовності $\{y_n\}$, який іде за $y_{n_{k-1}}$ і який знаходиться у відрізку $[a_k; b_k]$. Тоді маємо підпослідовність

$$y_{n_1},\ y_{n_2}, ...,\ y_{n_k}, ... ,$$

члени якої задовольняють нерівності

$$a_k \le y_{n_k} \le b_k,\ \ k = 1, 2, ...$$

І оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$, то $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = c$.

Доведемо теорему, яка дає можливість сформулювати означення границі числової послідовності через граничну точку.

Т е о р е м а. Для того щоб послідовність $\{y_n\}$ збігалася, необхідно і достатньо, щоб вона була обмежена і мала одну граничну точку.

Д о в е д е н н я н е о б х і д н о с т і. Нехай послідовність збігається, тобто $\lim\limits_{k\to\infty} y_n = a$. Тоді раніше (теорема 2 цього параграфа) було доведено, що послідовність $\{y_n\}$ є обмеженою. Залишається довести, що послідовність має одну граничну точку.

Насамперед доведемо, що число a, яке є границею послідовності $\{y_n\}$, є й граничною точкою цієї послідовності. Для цього розглянемо ε-окіл точки: $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ — довільне як завгодно мале число). Згідно з означенням границі в цьому околі знаходиться нескінченна множина членів послідовності. Отже, число a є граничною точкою послідовності.

Оскільки поза межами інтервалу $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ може знаходитися лише скінченне число членів послідовності $\{y_n\}$, то інших граничних точок, відмінних від a, немає.

Необхідність доведено.

Д о в е д е н н я   д о с т а т н о с т і. Нехай послідовність $\{y_n\}$ обмежена

$$|y_n| < M, \ \ n = 1, 2, ...$$

і має лише одну граничну точку, яку позначимо через a. Доведемо, що послідовність збігається, тобто

$$\lim_{n \to \infty} y_n = a.$$

Якщо a єдина гранична точка послідовності $\{y_n\}$, то поза інтервалом $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, а саме на відрізках $[-M; a - \varepsilon]$ і $[a + \varepsilon; M]$ може знаходитися лише скінченне число членів послідовності. Серед цих членів виберемо той член послідовності, у якого номер найбільший. Позначимо цей номер через N. Тоді всі члени послідовності y_n, у яких номери $n > N$ знаходитимуться в інтервалі $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, тобто

$$|y_n - a| < \varepsilon, \ \ n > N.$$

Теорему доведено.

Оскільки умови цієї теореми є необхідними і достатніми, то їх можна покласти в означення границі числової послідовності, а саме.

Числову послідовність $\{y_n\}$ називають збіжною до числа $a\left(\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a\right)$, якщо вона обмежена і має єдину граничну точку a.

2.14
КРИТЕРІЙ КОШІ

Як уже зазначалося в п. 2.7, умову (31) називають критерієм Коші про збіжність числової послідовності. Наведемо формулювання цього критерію.

Т е о р е м а. Для того щоб послідовність $\{y_n\}$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існувало натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$ і $m > N$ виконувалася нерівність

$$|y_n - y_m| < \varepsilon. \tag{31}$$

Доведення необхідності наведено при доведенні теореми 6 п. 2.7.

Д о в е д е н н я   д о с т а т н о с т і. Нехай умова (31) виконується. Доведемо, що послідовність $\{y_n\}$ є збіжною. Для цього спочатку доведемо, що при виконанні умови (31) послідовність $\{y_n\}$ є обмеженою.

Справді, покладемо $\varepsilon = 1$. Тоді існує натуральне число N таке, що для всіх $n > N$ і $m > N$ виконується нерівність

$$|y_n - y_m| < 1.$$

Поклавши у цій нерівності $m = N+1$ і беручи $n = N+2, N+3, ..., N+p, ...$, отримаємо низку нерівностей

$$|y_{N+p} - y_{N+1}| < 1, \quad p = 2, 3, ...$$

Далі скористаємося відомою нерівністю

$$|y_{N+p}| - |y_{N+1}| < |y_{N+p} - y_N| < 1.$$

Звідси отримуємо нерівність

$$|y_{N+p}| < |y_{N+1}| + 1, \quad p = 2, 3, ...$$

Позначимо $|y_{N+1}| + 1$ через M' і розглянемо скінченну множину чисел

$$|y_1|, \ |y_2|, ..., \ |y_N|, \ M'.$$

Серед цієї множини чисел є найбільше число. Позначимо його через M''. Тоді, поклавши $M = M'' + 1$, матимемо

$$|y_n| < M, \quad n = 1, 2, ...$$

Цим самим доведено обмеженість послідовності $\{y_n\}$.

Тоді згідно з теоремою Больцано — Вейєрштрасса послідовність $\{y_n\}$ має, принаймні, одну граничну точку. Позначимо її через a. Доведемо, що при виконанні умови (31) послідовність $\{y_n\}$ інших граничних точок, відмінних від a, не має. Припустимо супротивне. Нехай послідовність $\{y_n\}$ має ще граничну точку $a' \neq a$. Тоді візьмемо околи цих точок $(a-\delta; a+\delta)$, $(a'-\delta'; a'+\delta')$ $(\delta > 0; \delta' > 0)$ настільки малими, щоб їхній переріз $(a-\delta; a+\delta) \cap (a'-\delta'; a'+\delta') = \varnothing$. Інакше кажучи, вибрані околи не перетинаються — не мають спільних точок. Позначимо довжину інтервалу, що знаходиться між цими околами, через $\varepsilon_0 > 0$.

Оскільки a і a' граничні точки послідовності $\{y_n\}$, то у побудованих околах знаходиться нескінченна множина членів цієї послідовності. Тому існують члени послідовності, наприклад, $y_n \in (a-\delta; a+\delta)$ і $y_m \in (a'-\delta'; a'+\delta')$, номери яких задовольняють нерівності $n > N$ і $m > N$ і відстань між якими

$$|y_n - y_m| \geq \varepsilon_0.$$

Остання нерівність суперечить умові теореми.

Отже, послідовність $\{y_n\}$ обмежена і має лише одну граничну точку a. Тому послідовність $\{y_n\}$ є збіжною і її границя

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що умову критерію Коші, очевидно, можна сформулювати ще так: для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число N, що нерівність

$$\left|y_{n+p} - y_n\right| < \varepsilon$$

виконується для всіх $n > N$ і будь-якого натурального числа $p = 1, 2, \ldots$.

У такому формулюванні критерій Коші використовують найчастіше.

❑ **Приклад**

Користуючись критерієм Коші, довести, що послідовність

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

є розбіжною.

Р о з в ' я з а н н я. Користуватимемося формулюванням критерію Коші. Тоді у цьому випадку, поклавши $p = n$, матимемо

$$\left|y_{n+n} - y_n\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Отже, якщо вибирати $0 < \varepsilon \le \frac{1}{2}$, то при $p = n$ умова Коші не виконується. А вона, щоб послідовність збігалася, має виконуватися для всіх значень $p = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Розглядувана послідовність є розбіжною.

2.15
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ НЕПЕРЕРВНОГО АРГУМЕНТУ

У попередніх параграфах було розглянуто поняття про границю числової послідовності, або границю функції натурального аргументу. В цих функціях аргумент змінюється розривно (дискретно), набуваючи значень $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Тепер розглянемо функції виду $y = f(x)$, де аргумент змінюється неперервно (пробігає всі точки певного проміжку, крім, можливо, однієї внутрішньої точки, тобто точки, що не є одним із кінців проміжку, якщо останні йому належать).

Отже, нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $\langle a; b\rangle$, за винятком, можливо, внутрішньої точки $x_0 \in \langle a; b\rangle$. Надаватимемо аргументу x значень із проміжку, які близькі до x_0, але $x \ne x_0$ (під терміном «близькі точки» розуміємо точки, відстань між якими є досить малою).

Тоді може статися, що значення функції досить мало відрізнятимуться від деякого числа A. У цьому випадку число A називають *границею функції* $f(x)$ у точці x_0.

Означення. Число A називають *границею функції* $f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, яке залежить від $\varepsilon(\delta - \delta(\varepsilon))$, що для всіх $x_0 \in \langle a; b\rangle$, які задовольняють нерівність

$$0 < |x - x_0| < \delta, \tag{40}$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{41}$$

Той факт, що A є границею $f(x)$ у точці x_0, записують так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

або

$$f(x) \to A \ (x \to x_0).$$

Отже, на відміну від числової послідовності, де за даним ε знаходили число N, тут слід за даним ε знайти додатне число δ таке, щоб із нерівностей (40) випливала нерівність (41).

❑ **Приклади**

1. Довести, що $\lim\limits_{x \to 1}(2x+1) = 3$.

Р о з в ' я з а н н я. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Підставляючи у нерівність (41) замість $f(x)$ і A їхні значення, дістанемо

$$|(2x+1) - 3| < \varepsilon. \tag{42}$$

Ліву частину цієї нерівності можна записати так:

$$|(2x+1) - 3| = 2|x - 1|.$$

Тоді нерівність (42) можна записати у вигляді $2|x-1| < \varepsilon$, звідси

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{43}$$

Отже, щоб виконувалася нерівність (42), потрібно, щоб значення x задовольняли нерівність (43). Інакше кажучи, з нерівності (43) випливає нерівність (42) і навпаки.

Прийнявши $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, дістанемо, що з нерівностей $0 < |x-1| < \delta$ випливає нерівність

$$|(2x+1) - 3| < \varepsilon.$$

Отже, за даним ε знайшли $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тому, згідно з означенням,

$$\lim_{x \to 1}(2x+1) = 3.$$

2. Довести, що

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{3}{5}.$$

Яким має бути δ, щоб для значень x, які задовольняють нерівності $0<|x-2|<\delta$, виконувалася б нерівність

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|<0{,}001?$$

Р о з в ' я з а н н я. Задамо довільне число $\varepsilon>0$ і покажемо, що існує таке число δ, що з нерівностей $0<|x-2|<\delta$ випливає нерівність

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon. \tag{44}$$

Справді, ліву частину останньої нерівності можна записати так

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|=\frac{2|x-2||x+2|}{5\left(x^2+1\right)}.$$

Тут x розглядається поблизу точки $x=2$, тому можна вважати, що $0<x<3$. Отже,

$$\frac{2|x-2||x+2|}{5\left(x^2+1\right)}<\frac{10|x-2|}{5}=2|x-2|. \tag{45}$$

Якщо

$$2|x-2|<\varepsilon$$

або

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{46}$$

то виконуватиметься нерівність (44).

Таким чином, якщо $0<\varepsilon<2$, то $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$; якщо $\varepsilon\geq 2$, то, згідно з вибором інтервалу для $0<x<3$, за число δ можна взяти число $\delta=1$. Тому $\delta=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Поклавши $\varepsilon=0{,}001$, дістанемо

$$\delta=0{,}0005.$$

Розглянемо дуже важливий приклад, який широко застосовують при знаходженні границь функцій. Подамо його у вигляді теореми.

Т е о р е м а (перша важлива границя). Виконується рівність

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{47}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $x>0$.

Розглядатимемо x поблизу нуля, тому припустимо, що $0<x<\frac{\pi}{2}$.

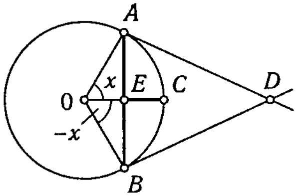


Рис. 22

Тепер покажемо, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що з нерівності

$$|x| < \delta$$

випливає нерівність

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Доведемо спочатку допоміжні нерівності, а саме, покажемо, що при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ справджуються нерівності

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Візьмемо коло з центром у довільній точці O і радіусом, що дорівнює одиниці (рис. 22), а також $\angle AOC$, радіанна міра якого x. Побудуємо $\angle COB$, який симетричний $\angle AOC$ і дорівнює $-x$. Тоді

$$AB < \cup AB < AD + DB$$

або

$$AE < \cup AC < AD,$$

де AD і DB — довжини відрізків дотичних, проведених до кола відповідно в точках A і B.

Поділивши всі члени цієї нерівності на радіус кола, що дорівнює 1, дістанемо

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Оскільки $\sin x > 0$, то, поділивши всі члени останньої нерівності на $\sin x$, матимемо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

або

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Візьмемо рівності

$$1 = 1 = 1.$$

Віднявши почленно від цих рівностей попередні нерівності, матимемо

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

або

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x.$$

Отже,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Ураховуючи, що $x > 0$, дістаємо

$$-x < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Ці нерівності можна записати у вигляді

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|.$$

Отже, якщо $|x| < \varepsilon$, то

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Тому, взявши $\delta = \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ (якщо $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$, то можна взяти $\delta = \frac{\pi}{2}$), дістанемо, що з нерівності $|x| < \delta$ випливає нерівність

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Нехай тепер $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Введемо нову змінну $x' > 0$ таку, що

$$x = -x'.$$

Тоді, згідно з доведеним,

$$\lim_{x' \to 0} \frac{\sin x'}{x'} = 1.$$

Підставимо в цю рівність $-x$ замість x'

$$\lim_{x' \to 0} \frac{\sin x'}{x'} = \lim_{-x \to 0} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Теорему доведено.

Рівність (47) можна записати ще й так:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

де α може бути функцією від x, але такою, що $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$ (точка x_0 визначається умовою задачі).

❑ **Приклад**

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Позначимо: $\alpha = 3x$. Тоді при $x \to 0$ (тут $x_0 = 0$) і $\alpha \to 0$. Якби в знаменнику було $3x$, то границя попереднього виразу дорівнювала б 1. Тому, домноживши чисельник і знаменник на 3, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin(3x)}{3x} = 3.$$

(Нижче буде доведено, що сталий множник можна виносити за знак границі.)

У попередніх прикладах розглядалися випадки, коли функція $f(x)$ у точці x_0 мала границю. Можна навести приклади, коли $f(x)$ у точці x_0 границі не має. Візьмемо, наприклад, функцію Діріхле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x - \text{раціональне число;} \\ 0, \text{ якщо } x - \text{ірраціональне число.} \end{cases}$$

Припустимо, що $\mathcal{D}(x)$ в точці x_0 має границю A, тобто

$$\lim_{x\to x_0} \mathcal{D}(x) = A.$$

Тоді, згідно з означенням границі, для будь-якого додатного числа, зокрема для числа $\frac{1}{3}$, існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, виконується нерівність

$$|\mathcal{D}(x) - A| < \frac{1}{3}. \tag{48}$$

Точки x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, знаходяться в інтервалі $(x_0 - \delta;\, x_0 + \delta)$. У цьому інтервалі містяться як раціональні, так й ірраціональні числа, які не дорівнюють x_0. Нехай x_1 — раціональне число, $x_1 \neq x_0$, а x_2 — ірраціональне число, $x_2 \neq x_0$, які належать зазначеному вище інтервалу. Тоді, згідно з нерівністю (48), справджуються такі нерівності:

$$|1 - A| < \frac{1}{3};\ \ |A| < \frac{1}{3}.$$

Отже,

$$1 = |(1 - A) + A| \le |1 - A| + |A| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

тобто

$$1 < \frac{2}{3}.$$

Таким чином, зайшли у суперечність. Отже, в точці x_0 функція $\mathcal{D}(x)$ границі не має.

Подамо геометричну ілюстрацію того факту, що число A є границею функції $f(x)$ у точці x_0. Візьмемо прямокутну систему координат і на координатних осях побудуємо точки x_0, $x_0-\delta$, $x_0+\delta$, A, $A-\varepsilon$, $A+\varepsilon$ (рис. 23).

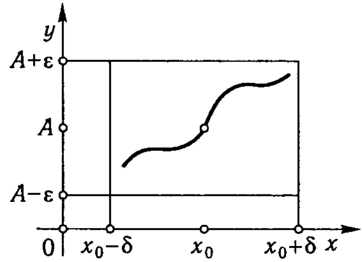


Рис. 23

Якщо A є границею $f(x)$ у точці x_0, то на осі Ox знайдеться такий інтервал $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, що коли x надавати значень із цього інтервалу, крім $x=x_0$, то значення функції не вийдуть із інтервалу $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$.

Множина точок площини, що знаходяться між прямими $y=A-\varepsilon$ і $y=A+\varepsilon$, називається ε-смугою точки A.

Отже, якщо A є границею функції $f(x)$ у точці x_0, то графік функції для всіх $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, має лежати у ε-смузі точки A, якою б вузькою вона не була.

2.16 ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ, ЯКА МАЄ ГРАНИЦЮ В ТОЧЦІ

Функція, для якої існує границя в точці, має низку властивостей. Сформулюємо їх у вигляді теорем.

Теорема 1. Якщо границя функції $y=f(x)$ у точці x_0 додатна (від'ємна), то знайдеться такий окіл (інтервал) точки x_0, що для всіх значень x із цього околу (крім, можливо, точки x_0) значення функції будуть додатними (від'ємними).

Доведення. Нехай $f(x)$ у точці x_0 має границю, яка дорівнює числу A, і нехай, наприклад, $A<0$.

Візьмемо додатне число $\varepsilon=-\frac{A}{2}$. Тоді для цього числа знайдеться таке число $\delta>0$, що з нерівності $|x-x_0|<\delta$, $x \neq x_0$ дістанемо нерівність

$$|f(x)-A|<-\frac{A}{2}.$$

Запишемо цю нерівність без знака модуля

$$\frac{3}{2}A<f(x)<\frac{A}{2}.$$

Оскільки $A<0$, з останніх нерівностей і випливає справедливість теореми.

Теорема 2. Якщо функція $y=f(x)$ у точці x_0 має границю, то існує окіл точки x_0 такий, що для всіх значень x із цього околу, крім, можливо, $x=x_0$, множина значень $f(x)$ є обмеженою.

Доведення. Нехай границя функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює A. Тоді, взявши $\varepsilon = 1$, маємо, що для цього числа існує таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ справджується нерівність

$$|f(x) - A| < 1.$$

Проте

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|.$$

Ця нерівність і доводить теорему.

Теорема 3. Функція $y = f(x)$ у певній точці x_0 не може мати двох різних границь.

Доведення. Доведемо цю теорему методом від супротивного. Припустимо, що $f(x)$ у точці x_0 має дві різні границі, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$, причому $A \neq B$.

Тоді для числа $\frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta_1 > 0$, що з нерівності $|x - x_0| < \delta_1$, $x \neq x_0$ випливає нерівність

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{49}$$

Так само для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ існує, наприклад, число δ_2 таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta_2$, $x \neq x_0$, справджується нерівність

$$|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{50}$$

Візьмемо число δ, менше за числа δ_1 і δ_2. Тоді для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, виконуватимуться одночасно нерівності (49) і (50). Отже, надалі розглядатимемо ті значення x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$. Для таких x маємо

$$|A - B| = |(A - f(x)) + (f(x) - B)| \leq$$

$$\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже,

$$|A - B| < \varepsilon. \tag{51}$$

Оскільки ε може бути як завгодно малим додатним числом, то з нерівності (51) випливає, що $A = B$, а це суперечить припущенню. Теорему доведено.

2.17
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ. НЕВЛАСНІ ГРАНИЦІ

У попередньому параграфі було введено поняття про границю функції неперервного аргументу, коли останній наближається до фіксованої точки x_0. Припустимо, що функцію $y=f(x)$ визначено, наприклад, на множині всіх додатних дійсних чисел, і нехай аргумент x необмежено зростає. Це записують так: $x \to +\infty$.

Тоді при необмеженому зростанні x значення функції можуть наближатись як завгодно близько до деякого числа A. У цьому випадку число A називають границею функції при $x \to +\infty$.

Означення. Число A називають *границею функції* $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число M, що з нерівності $x > M$ випливає нерівність $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Той факт, що A є границею $f(x)$ при $x \to +\infty$, записують так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A. \tag{52}$$

Аналогічно означається границя функції неперервного аргументу при $x \to -\infty$.

Означення. Число B називають *границею функції* $y=f(x)$ при $x \to -\infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке від'ємне число E, що для всіх $x < E$ виконується нерівність

$$|f(x)-B| < \varepsilon. \tag{53}$$

Записують це так:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = B.$$

Дамо означення границі функції при $|x| \to +\infty$.

Означення. Число C називають *границею функції* $y=f(x)$ при $|x| \to +\infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що при $|x| > M$ справджується нерівність $|f(x)-C| < \varepsilon$.

Записують це так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = C.$$

❑ **Приклади**

1. Нехай $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Довести, що $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Тоді

$$|f(x)-0| = \frac{1}{x^2} < \varepsilon.$$

Ця нерівність рівносильна нерівності $|x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Отже, беручи $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, маємо, що з нерівності $|x| > M$ випливає нерівність $\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

2. Нехай $f(x) = 2^x$. Довести, що $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$.

Розв'язання. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Нерівність $\left|2^x - 0\right| = 2^x < \varepsilon$ рівносильна нерівності

$$x < \log_2 \varepsilon.$$

Отже, взявши $E = \log_2 \varepsilon$, якщо $0 < \varepsilon < 1$, дістаємо, що з нерівності $x < E$ випливає нерівність $2^x < \varepsilon$. Якщо $\varepsilon \geq 1$, то за число ε можна взяти будь-яке від'ємне число.

Як і функція натурального аргументу, функція $y = f(x)$ неперервного аргументу при $x \to x_0$ може необмежено зростати (значення її будуть більші за будь-яке як завгодно велике додатне число) або необмежено спадати (значення її і надалі залишатимуться меншими за будь-яке досить мале від'ємне число). У цьому випадку кажуть, що $f(x)$ при $x \to x_0$ має невласну границю $+\infty$ або $-\infty$.

Отже, нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $\langle a; b \rangle$, крім, можливо, внутрішньої точки $x_0 \in \langle a; b \rangle$.

Означення. Якщо для будь-якого додатного числа M існує таке додатне число δ, що з нерівності $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ випливає нерівність $f(x) > M$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ має невласну границю $+\infty$, і записують $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Аналогічно дається означення невласної границі $-\infty$.

❑ **Приклад**

3. Нехай $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$. Довести, що $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

Розв'язання. Візьмемо довільне додатне число M. Тоді нерівність $2^{\frac{1}{x}} > M$ рівносильна нерівності $x < \log_2 \frac{1}{M}$.

Отже, з нерівностей

$$0 < x < \log_2 \frac{1}{M}$$

випливає нерівність

$$2^{\frac{1}{x}} > M.$$

Тому

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

2.18
ОЗНАЧЕННЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАНИЦІ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$, крім, можливо, внутрішньої точки $x_0 \in \langle a; b\rangle$. Тоді з проміжку $\langle a; b\rangle$ можна завжди вилучити послідовність точок, відмінних від x_0, яка збігається до x_0. Справді, візьмемо, наприклад, інтервал $\left(x_0 - \frac{1}{n_0}; x_0 + \frac{1}{n_0}\right)$, де n_0 — натуральне число таке, що інтервал $\left(x_0 - \frac{1}{n_0}; x_0 + \frac{1}{n_0}\right)$ міститься у проміжку $\langle a; b\rangle$. У кожному інтервалі $\left(x_0 - \frac{1}{n_0 + k}; x_0 + \frac{1}{n_0 + k}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ візьмемо по одній точці, яка не збігається з x_0. Тоді матимемо послідовність точок x_0, x_1, $x_2, \ldots,$ $x_k, \ldots,$ де $x_k \neq x_0$, $k = 0,$ $1,$ $2, \ldots,$ яка збігається до x_0. Справді,

$$x_0 - \frac{1}{n_0 + k} < x_k < x_0 + \frac{1}{n_0 + k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Як бачимо,

$$\lim_{k \to \infty}\left(x_0 - \frac{1}{n_0 + k}\right) = \lim_{k \to \infty}\left(x_0 + \frac{1}{n_0 + k}\right) = x_0,$$

тому

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_0.$$

Отже, з проміжку $\langle a; b\rangle$ завжди можна вилучити послідовність $\{x\}$, $x_n \neq x_0$, $n = 1,$ $2, \ldots,$ яка збігається до x_0, причому таких послідовностей можна виокремити безліч. Якщо, наприклад, $x_0 = 0$, то такими послідовностями є послідовності, загальні члени яких дорівнюють $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n^2}, \ldots .$

Побудуємо для кожної послідовності точок x_1, $x_2, \ldots,$ $x_n, \ldots,$ яка збігається до x_0, $x_n \neq x_0$, $n = 1,$ $2, \ldots,$ відповідну послідовність значень функції $y = f(x)$

$$f(x_1), \; f(x_2), \ldots, \; f(x_n), \ldots .$$

Може статися, що коли всі можливі послідовності $\{x_n\}$ збігаються до точки x_0, то послідовності $\{f(x_n)\}$ збігаються до числа A. Таке число A називають *границею функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0.

Означення 2. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0, якщо якою б не була послідовність точок $\{x_n\}$, що належить проміжку

$\langle a;b\rangle$ і збігається до x_0, $x_n \neq x_0$, $n=1, 2, \ldots$, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A. Записують це так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Доведемо, що означення границі функції, подане в термінах «ε, δ», і наведене тільки що означення еквівалентні, тобто якщо число A є границею функції в точці x_0 у термінах «ε, δ», то зі збіжності послідовності $\{x_n\}$ до x_0, $x_n \neq x_0$, $n=1, 2, \ldots$ випливає збіжність послідовності $\{f(x_n)\}$ до A, і навпаки.

Отже, нехай A є границею $f(x)$ у точці x_0 за першим означенням, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що з нерівності

$$0 < |x - x_0| < \delta \tag{54}$$

випливає нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{55}$$

Оскільки послідовність $\{x_n\}$ збігається до x_0, то яке б не було наперед задане число, зокрема число δ, знайдеться таке число N, що для всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність

$$|x_n - x_0| < \delta.$$

З останньої нерівності, згідно з формулою (55), випливає нерівність

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon, \quad n > N,$$

а це означає, що

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Доведемо тепер обернене твердження: якщо A є границею функції $y = f(x)$ у точці x_0 за другим означенням, то A є границею $f(x)$ за першим означенням.

Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що A не є границею функції $f(x)$ за першим означенням.

Тоді існує число $\varepsilon_0 > 0$ таке, що при будь-якому $\delta > 0$ знайдеться хоча б одне число $x' \in \langle a; b\rangle$, що задовольняє нерівності

$$0 < |x' - x_0| < \delta,$$

і таке, що

$$|f(x') - A| \geq \varepsilon_0. \tag{56}$$

Візьмемо послідовність чисел $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0, ...,\ \delta_n > 0, ...$, яка збігається до нуля, наприклад послідовність $1,\ \frac{1}{2}, ...,\ \frac{1}{n}, ...$. Тоді для кожного значення існуватимуть відповідно точки $x_1,\ x_2, ...,\ x_n, ...$, які задовольняють нерівності

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n},\quad n = 1, 2, ..., \tag{57}$$

тоді як

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0. \tag{58}$$

Із нерівностей (57) маємо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_n \neq x_0,\ n = 1, 2, ...$.

Отже, згідно з другим означенням,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Тому для $n > n_{\varepsilon_0}$ маємо $|f(x_n) - A| < \varepsilon_0$, що суперечить умові (58).

Таким чином, якщо A є границею функції $y = f(x)$ у точці x_0 за другими означеннями, то A є границею функції і за першим означенням.

Доведена еквівалентність обох означень границі функції неперервного аргументу дає змогу перенести всі теореми про числові послідовності на функції неперервного аргументу. Це, зокрема, основні теореми про границі.

Теорема 1. Границя суми скінченного числа функцій дорівнює сумі границь функцій, якщо вони існують у цій точці.

Теорема 2. Границя добутку скінченного числа функцій дорівнює добутку границь функцій, якщо вони існують у цій точці.

Теорема 3. Границя частки дорівнює частці від ділення границі чисельника на границю знаменника, якщо існують границі чисельника і знаменника у цій точці, й границя знаменника не дорівнює нулю.

Доведення теореми 3. Нехай існують границі

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f_2(x) = B \neq 0. \tag{59}$$

Потрібно довести, що існує границя частки $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ при $x \to x_0$ і

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim f(x)} = \frac{A}{B}. \tag{60}$$

Справді, оскільки виконуються умови формули (59), то для кожної послідовності точок $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \ldots$, справедливі рівності

$$\lim_{x_n \to x_0} f_1(x_n) = A, \quad \lim_{x_n \to x_0} f_2(x_n) = B.$$

Згідно з теоремою 3 п. 9, виконується рівність

$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{f_1(x_n)}{f_2(x_n)} = \frac{A}{B}.$$

Звідси та з означення 2 випливає, що справджується рівність (60).

❑ **Приклади**

1. Знайти $\lim\limits_{x \to 4}\left(2(x+3) - \dfrac{x}{x-2}\right)$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x \to 4} 2(x+3) = 14;$$

$$\lim_{x \to 4}\left(-\frac{x}{x-2}\right) = -2.$$

Отже, існують границі доданків. Тому

$$\lim_{x \to 4}\left(2(x+3) - \frac{x}{x-2}\right) = 14 - 2 = 12.$$

2. Знайти $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$.

Розв'язання. Знайдемо окремо границю чисельника і границю знаменника, використавши теореми 1 і 2:

$$\lim_{x \to 1}\left(2x^3 - 2x^2 + x - 1\right) = 0;$$

$$\lim_{x \to 1}\left(x^3 - x^2 + 3x - 3\right) = 0.$$

Отже, границі чисельника й знаменника існують, але границя знаменника дорівнює нулю. Тому тут не можна безпосередньо використати теорему про границю частки. Спочатку потрібно виконати деяке перетворення над дробом, а саме: скоротити дріб на вираз $(x-1)$. При цьому слід мати на увазі, що вираз $(x-1)$ на нуль не перетворюється, оскільки $x \to 1$, але, згідно з означенням границі, $x \neq 1$. Тоді

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(2x^2 + 1\right)}{(x-1)\left(x^2 + 3\right)} = \frac{3}{4}.$$

Розглянемо наступний важливий приклад. Подамо його у вигляді теореми.

Теорема (друга важлива границя). Виконується рівність

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}. \tag{61}$$

Доведення. Спочатку доведемо рівність

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e},$$

тобто розглянемо випадок, коли x прямує до нуля, залишаючись строго додатним. Вважатимемо, що $0 < x \le 1$. Для кожного $x \in (0;1]$ існує натуральне число $n = n(x)$ таке, що виконуються нерівності

$$\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}.$$

Тоді виконуються й такі нерівності:

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+x \le 1+\frac{1}{n}.$$

Внаслідок того що $n+1 > \frac{1}{x} \ge n,$ можна записати нерівності

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{x}} \le (1+x)^{\frac{1}{x}} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

або

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Якщо $x \to 0$, де $x > 0$, то $n \to \infty$, а при $n \to \infty$ виконуються рівності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e}.$$

Згідно з теоремою про границю проміжної змінної, функція $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$, де $x > 0$, має границю, що дорівнює числу e:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Розглянемо випадок, коли $x \to 0$ і $x < 0$.

Введемо нову змінну z за формулою

$$1 + x = \frac{1}{1+z}$$

або

$$z = \frac{-x}{1+x}.$$

Отже, якщо $x < 0$, то $z > 0$ і $\lim z = 0$ при $x \to 0$. Тоді виконуються рівності

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{1+z}\right)^{\frac{1+z}{-z}} = (1+z)^{1+\frac{1}{z}} = (1+z)^{\frac{1}{z}}(1+z).$$

Звідси дістанемо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to 0}\left((1+z)^{\frac{1}{z}}(1+z)\right) = \mathrm{e}.$$

Теорему доведено.

Рівність (61) можна записати ще так:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{e}.$$

Тут, на відміну від попередньої формули, α може бути функцією від x, але такою, що $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0$, причому x_0 може бути і невластивим числом ($+\infty$ або $-\infty$).

❑ **Приклади**

3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо вираз $(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$ так:

$$(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x} = \left((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\cos x}.$$

Тоді, ввівши позначення $\alpha = \sin x$, дістанемо

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

причому $\lim\limits_{x\to 0} \alpha = 0$. Тому

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \mathrm{e}.$$

Щодо $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$, то можна довести, що

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x} = \mathrm{e}$.

4. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)^{2x}$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо вираз $\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)^{2x}$ так:

$$\left(\frac{1+x}{x-1}\right)^{2x}=\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{4x}{x-1}}.$$

Тоді, позначивши через $\alpha=\dfrac{2}{x-1}$, дістанемо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{1-\frac{1}{x}}=4.$$

Отже,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{x-1}\right)^{2x}=e^4.$$

2.19
ПРАВОСТОРОННЯ Й ЛІВОСТОРОННЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

Для подальшого викладу теорії границь потрібно ввести до розгляду поняття правосторонньої та лівосторонньої границь функції.

Припустимо, що функцію $y=f(x)$ визначено на деякому проміжку $\langle a;b\rangle$, крім, можливо, внутрішньої точки $x_0\in\langle a;b\rangle$.

Означення. Число A називають *правосторонньою границею* функції $y=f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує додатне число δ таке, що для всіх $x_0\in\langle a;b\rangle$, які задовольняють нерівності

$$x_0<x<x_0+\delta, \tag{62}$$

виконується нерівність

$$|f(x)-A|<\varepsilon. \tag{63}$$

Це записують як

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}}f(x)=A=f(x_0+0).$$

Означення. Число B називають *лівосторонньою границею* функції $y=f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta>0$, що для всіх $x_0\in\langle a;b\rangle$, які задовольняють нерівності

$$x_0-\delta<x<x_0, \tag{64}$$

виконується нерівність

$$|f(x)-B|<\varepsilon. \tag{65}$$

Це записують

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>x_0)}} f(x)=B=f(x_0-0).$$

Отже, для лівосторонньої границі аргумент береться поблизу точки x_0, але $x<x_0$, тоді як для правосторонньої границі x береться поблизу точки x_0, але $x>x_0$. Зокрема, якщо функція визначена на інтервалі $(a;b)$ чи на відрізку $[a;b]$, то у точці a можна розглядати тільки правосторонню границю, а в точці b — лівосторонню.

❑ **Приклади**

1. Довести, що функція

$$y=\begin{cases} x+1 \text{ при } 0\le x<1; \\ 3x+2 \text{ при } 1\le x\le 3\end{cases}$$

у точці $x=1$ має правосторонню границю, яка дорівнює 5, і лівосторонню, яка дорівнює 2.

Р о з в ' я з а н н я. Цю функцію задано на відрізку $[0;3]$. Знайдемо спочатку правосторонню границю функції $f(x)$ у точці $x=1$. У цьому випадку $x>1$, тому

$$f(x)=3x+2.$$

Візьмемо довільне число $\varepsilon>0$. Підставляючи в нерівність (63) замість $f(x)$ і A їхні значення, дістанемо

$$|(3x+2)-5|<\varepsilon.$$

Ліву частину останньої нерівності запишемо у вигляді

$$|(3x+2)-5|=3|x-1|=3(x-1).$$

Отже, для того щоб виконувалася нерівність (63), необхідно й достатньо, щоб

$$3(x-1)<\varepsilon, \text{ або } 1<x<1+\frac{\varepsilon}{3},$$

звідси $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. Тоді $f(1+0)=5$.

Знайдемо лівосторонню границю цієї функції в точці $x=1$. Згідно з означенням лівосторонньої границі, $x<1$, тому $f(x)=x+1$. Візьмемо довільне число $\varepsilon>0$. Тоді

$$|(x+1)-2|=|x-1|=1-x.$$

Отже, для того щоб виконувалася нерівність (65), необхідно і достатньо, щоб

$$1-x<\varepsilon, \text{ або } 1-\varepsilon<x<1.$$

Таким чином, існує таке число $\delta=\varepsilon$, що з нерівностей $1-\delta<x<1$ випливає нерівність $|f(x)-2|<\varepsilon$. Тому

$$f(1-0)=2.$$

У цьому випадку функція має правосторонню й лівосторонню границі в точці $x=1$, причому границі різні.

2. Знайти правосторонню й лівосторонню границі функції

$$y=\frac{x^2-1}{x-1}$$

у точці $x=1$.

Р о з в ' я з а н н я. Використаємо той факт, що для правосторонньої й лівосторонньої границь $x\neq x_0$, тобто $x\neq 1$. Тоді функцію $y=f(x)$ можна записати так:

$$y=x+1.$$

Отже, існують лівостороння й правостороння границі заданої функції в точці $x=1$ і вони дорівнюють 2:

$$f(1-0)=f(1+0)=2.$$

3. Знайти лівосторонню й правосторонню границі функції $y=2^{\frac{1}{x}}$ у точці $x=0$.

Р о з в ' я з а н н я. Задана функція в точці $x=0$ правосторонньої границі не має. Ця функція необмежено зростає при $x\to 0$ і $x>0$, тому $f(0+0)=+\infty$.

Якщо $x\to 0$ і $x<0$, то $\frac{1}{x}\to-\infty$, тому $f(0-0)=0$.

Із наведених прикладів можна зробити такі висновки:

1) функція в точці може мати правосторонню й лівосторонню границі, причому вони різні; 2) функція в точці має границі, і вони рівні між собою; 3) хоча б одна з границь у точці не існує.

Можна довести, що коли функція в точці має границю, то вона має в цій точці правосторонню й лівосторонню границі, і вони дорівнюють границі функції в точці.

Справедливе й обернене твердження: якщо функція $y=f(x)$ у точці x_0 має лівосторонню й правосторонню границі й вони рівні між собою, то ця функція в точці x_0 має границю, яка дорівнює спільному значенню лівосторонньої й правосторонньої границь.

2.20 НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ТА НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ крім, можливо, точки $x\in(a;b)$.

Означення. Функцію $y=f(x)$ називають *нескінченно малою в точці* x_0, якщо існує границя функції в цій точці, і ця границя дорівнює нулю.

Нескінченно малу функцію в точці ще називають *нескінченно малою величиною.*

❑ **Приклади**

1. Нехай $y=(1-x)^n$. Тоді $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^n=0$. Отже, функція $y=(1-x)^n$ у точці $x=1$ є нескінченно малою.

2. Нехай $y=2^{-\frac{1}{x^2}}$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0} 2^{-\frac{1}{x^2}}=0$. Отже, задана функція в точці $x=0$ є нескінченно малою.

Зауважимо, що розглядувана функція $y=f(x)$ може бути нескінченно малою в заданій точці й не буде нескінченно малою в іншій точці. Може статися, що функція є нескінченно малою в кількох точках. Так, функція $y=x(x-1)(x-2)$ є нескінченно малою в точках 0, 1, 2.

Означення. Функцію $y=f(x)$ називають *нескінченно малою в точці* x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для всіх $x\in(a;b)$, $x\neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність

$$|f(x)|<\varepsilon.$$

Оскільки число ε може бути як завгодно малим, то з попередньої нерівності випливає, що значення нескінченно малої функції поблизу заданої точки x_0 є за модулем як завгодно малими. Не слід плутати нескінченну малу функцію в точці з досить малим числом. Значення нескінченно малої функції можуть бути за певних значень x як завгодно великими числами.

Наприклад, функція $y=x^2$ у точці $x=0$ є нескінченно малою, але її значення за досить великих за модулем значень x є також як завгодно великими.

Аналогічно можна означити нескінченно малу функцію на нескінченності.

Означення. Функцію $y=f(x)$ називають *нескінченно малою на нескінченності,* $x\to\infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $M>0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x|>M$, виконується нерівність

$$|f(x)|<\varepsilon.$$

Розглянемо функцію $y=\frac{1}{x^2}$. Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$. Отже, функція $y=\frac{1}{x^2}$ на нескінченності $x\to\infty$ є нескінченно малою.

Графік нескінченно малої функції на нескінченності за досить великих значень x за модулем проходить дуже близько до осі абсцис.

У цьому випадку кажуть, що крива, яка є графіком нескінченно малої функції, на нескінченності *асимптотично наближається* до осі абсцис. Прикладом такої кривої може бути гіпербола, що є графіком функції $y=\frac{1}{x}$.

Нескінченно малі функції, як і нескінченно малі числові послідовності, мають властивості, які подамо у вигляді теорем.

Теорема 1. Сума двох нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією у цій точці.

Цю теорему пропонуємо читачеві довести самостійно.

Теорема 2. Добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є функцією нескінченно малою у заданій точці.

Доведення. Нехай $\alpha(x)$ у точці x_0 є нескінченно малою, а $f(x)$ — обмеженою. Тоді існує окіл $0<|x-x_0|<\delta_1$ точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу справджується нерівність

$$|f(x)|<M, \tag{66}$$

де $M>0$.

Візьмемо число $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}$, де ε — довільне додатне число. Внаслідок того що $\alpha(x)$ є нескінченно малою в точці x_0, то існує таке число δ_2, що для всіх $x\neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta_2$, виконується нерівність

$$|\alpha(x)|<\varepsilon_1. \tag{67}$$

Нехай δ — число, менше за числа δ_1 і δ_2. Тоді для всіх $x\neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$, виконуються нерівності (66) і (67). Отже, для всіх $x\neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність

$$|\alpha(x)\ f(x)|<M\varepsilon_1=\varepsilon.$$

Теорему доведено.

Із теореми 2 як наслідок випливає, що добуток двох нескінченно малих функцій є функцією нескінченно малою у заданій точці.

Зауважимо, що теореми 1, 2 можна узагальнити й на випадок більше ніж два доданки (множники).

Теорема 3. Для того щоб функція $y=f(x)$ у точці $x_0\in\langle a;b\rangle$ мала границею число A, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x_0)-A$ була нескінченно малою функцією в цій точці.

Доведення необхідності. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Тоді для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta>0$, що для всіх $x\in\langle a;b\rangle$, $x\neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Позначивши $\alpha(x)=f(x)-A$, дістанемо, що $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Доведення достатності. Нехай $\alpha(x)=f(x)-A$ є нескінченно малою в точці x_0, тобто $|\alpha(x)|<\varepsilon$, або $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Отже, тоді A є границею $f(x)$ у точці x_0.

Теорему доведено.

На основі цієї теореми можна дати таке означення границі функції в точці.

Означення. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ *у точці* $x_0 \in (a; b)$, якщо різниця між функцією і числом A є нескінченно малою функцією в цій точці.

Звідси випливає, що поблизу точки x_0 справджується рівність

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де A — границя функції $f(x)$ у точці x_0, $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція в точці x_0.

Користуючись цим означенням границі функції, а також властивостями нескінченно малої функції, можна досить легко довести основні теореми про границі.

Теорема 4. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ у точці x_0 мають границі, то сума і добуток цих функцій також мають у цій точці границю, причому справджуються рівності

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} \varphi(x)$$

і

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} \varphi(x).$$

Пропонуємо довести цю теорему самостійно.

Теорема 5. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ у точці x_0 мають границі й $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0$, то й функція $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ має в цій точці границю, яка дорівнює

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B \neq 0$. Тоді

$$\begin{aligned} f(x) &= A + \alpha(x); \\ \varphi(x) &= B + \beta(x), \end{aligned} \tag{68}$$

де $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — нескінченно малі функції в точці x_0.

Візьмемо таке число $\delta_1 > 0$, щоб для всіх $x \in \langle a; b \rangle$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta_1$, виконувалися рівності (68). Для таких значень x маємо

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{A}{B} = \frac{\alpha(x)B - \beta(x)A}{\varphi(x)B}. \tag{69}$$

Згідно з теоремами 1 і 2, функція $\alpha(x)B-\beta(x)A$ є нескінченно малою в точці x_0, а за умовою теореми $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B\neq 0$. Нехай, наприклад, $B>0$ (випадок $B<0$ досліджується аналогічно). Тоді, згідно з теоремою 1, п. 2.16, існує таке число $\delta_2>0$, що для всіх $x\in\langle a;b\rangle$, $x\neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta_2$, виконується нерівність

$$\varphi(x)\geq r>0, \tag{70}$$

де r — дійсне число.

Отже, функція $\dfrac{1}{\varphi(x)B}$ є обмеженою

$$\left|\frac{1}{\varphi(x)B}\right|<\frac{1}{rB}. \tag{71}$$

Візьмемо число δ менше за числа δ_1 і δ_2. Тоді для всіх $x\in\langle a;b\rangle$, $x\neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність

$$\left|\frac{\alpha(x)B-\beta(x)A}{\varphi(x)B}\right|<\varepsilon,$$

де $\varepsilon>0$ — довільне число, або

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}-\frac{A}{B}\right|<\varepsilon. \tag{72}$$

Звідси випливає справедливість теореми 5.

Розглянемо нескінченно великі функції.

Означення. Функцію $y=f(x)$ у точці $x_0\in(a;b)$ називають *нескінченно великою*, якщо

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty.$$

Нескінченно велику функцію в точці ще називають *нескінченно великою величиною.*

Наприклад, функція $y=\dfrac{1}{x}$ у точці $x=0$ нескінченно велика.

Скориставшись означенням невласної границі, нескінченну велику функцію можна означити ще так.

Означення. Функцію $y=f(x)$ у точці $x_0\in(a;b)$ називають *нескінченно великою*, якщо для будь-якого числа $M>0$ існує таке число $\delta>0$, що для всіх $x\in(a;b)$, $x\neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність

$$|f(x)|>M.$$

Звідси випливає, що значення нескінченно великої функції поблизу точки x_0 є за модулем як завгодно великими, більшими за будь-яке наперед задане додатне число.

Нескінченно малі й нескінченно великі функції аналогічно до нескінченно малих і нескінченно великих числових послідовностей тісно пов'язані між собою.

Теорема 6. Якщо $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією в точці x_0 й $\alpha(x)$ поблизу x_0 не дорівнює нулю, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою в цій точці. Якщо $f(x)$ у точці x_0 є нескінченно великою, то функція $\frac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою у цій точці.

Доведення. Нехай, наприклад, $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією в точці x_0. Візьмемо довільне число $M > 0$. Тоді для числа $\varepsilon = \frac{1}{M}$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Згідно з умовою теореми, $\alpha(x)$ поблизу x_0 не дорівнює нулю. Не зменшуючи загальності, можна припустити, що $\alpha(x) \neq 0$ для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, $(x \neq x_0)$. Тоді для цих значень x можна розглядати функцію $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$, яка задовольняє нерівність

$$|f(x)| > M.$$

Першу частину теореми доведено. Друга частина теореми доводиться аналогічно.

2.21 ПОРІВНЯННЯ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ ВЕЛИЧИН. НЕВИЗНАЧЕНІ ВИРАЗИ

Іноді доводиться розглядати не одну, а кілька нескінченно малих функцій у заданій точці. Такі функції порівнюють між собою за допомогою границі відношення їх, і залежно від того, як поводить себе таке відношення поблизу заданої точки, нескінченно малим величинам дають певну назву.

Подамо ряд означень. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими функціями в точці x_0, причому x_0 може бути і невласною точкою.

Означення 1. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою вищого порядку мализни*, ніж $\beta(x)$. При цьому $\beta(x)$ називають *нескінченно малою нижчого порядку мализни*, ніж $\alpha(x)$.

❑ **Приклади**

1. Нехай $\alpha(x)=(x-1)^2$, $\beta(x)=x-1$. Тоді $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ у точці $x=1$ є нескінченно малими функціями. Знайдемо

$$\lim_{x\to1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to1}(x-1)=0.$$

Отже, $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$.

2. Нехай $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, а $\beta(x)=\dfrac{1}{x+1}$. Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}\beta(x)=0,$$

тобто $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ на нескінченності є нескінченно малими функціями. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}=0.$$

Отже, функція $\dfrac{1}{x^2+1}$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\dfrac{1}{x+1}$, при $x\to\infty$, або, що те саме, $\dfrac{1}{x+1}$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\dfrac{1}{x+1}$, при $x\to\infty$.

Означення 2. Якщо $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, де c — відмінне від нуля число, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ у точці x_0 називають *нескінченно малими однакового порядку мализни.* Якщо при цьому $c=1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ у точці x_0 називають *еквівалентними* і записують $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

❑ **Приклади**

3. Нехай $\alpha(x)=x^2-2x$, а $\beta(x)=x-2$. Функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ у точці $x=2$ нескінченно малі. Тоді маємо

$$\lim_{x\to2}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x=2.$$

Отже, функції x^2-2x і $x-2$ нескінченно малі однакового порядку мализни в точці $x=2$.

4. Нехай $\alpha(x)=\dfrac{1}{2x^2+x+1}$, а $\beta(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$. Тоді $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0$ і $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\beta(x)=0$.

Тепер знаходимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Отже, функції $\dfrac{x^2+1}{2x^2+x+1}$ і $\dfrac{1}{x^2+1}$ на нескінченності однакового порядку мализни.

5. Нехай $\alpha(x)=\sin x, \beta(x)=x$. Функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ у точці $x=0$ нескінченно малі. Оскільки $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, то $\sin x$ і x є еквівалентними величинами, тобто $\sin x \sim x$.

6. Нехай $\alpha(x)=\operatorname{tg}x$, а $\beta(x)=x$. Функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ в точці $x=0$ є нескінченно малими функціями. Оскільки

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\right)=1,$$

то $\operatorname{tg}x \sim x$.

7. Нехай $\alpha(x)=\sqrt[n]{1+x}-1$, а $\beta(x)=\frac{1}{n}x$, де n — натуральне число. Тоді $\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)= = \lim\limits_{x\to0}\beta(x)=0$.

Отже, $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ в точці $x=0$ нескінченно малі функції. Знайдемо

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}.$$

Позначимо: $1+x=z^n$. Звідси $x=z^n-1$. Якщо $x\to0$, то $z\to1$. Тоді

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{\frac{1}{n}\left(z^n-1\right)}=\lim_{z\to1}\frac{1}{\left(z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+1\right)\frac{1}{n}}=1.$$

Отже, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

Можна було б довести, що в точці $x=0$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad e^x\sim x;$$

$$a^x-1\sim x\ln a.$$

Для нескінченно малих еквівалентних величин справедливі такі теореми.

Теорема 1. Для того щоб нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ у точці були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб різниця цих функцій у цій точці була нескінченно малою функцією вищого порядку мализни, ніж $\alpha(x)$ і $\beta(x)$.

Доведення необхідності. Нехай у точці x_0 маємо $\alpha(x)\sim\beta(x)$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Тоді

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right)=0.$$

Отже, $\alpha(x)-\beta(x)$ є нескінченно малою функцією вищого порядку мализни, ніж $\beta(x)$. Аналогічно можна показати, що $\alpha(x)-\beta(x)$ є нескінченно малою функцією вищого порядку мализни, ніж $\alpha(x)$.

Доведення достатності. Позначимо: $\gamma(x)=\alpha(x)-\beta(x)$. Нехай $\gamma(x)$ нескінченно мала функція вищого порядку мализни, ніж $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, тоді справджуються рівності

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=0;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}=0.$$

У другу рівність підставимо значення $\gamma(x)$. Дістанемо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right)=0,$$

звідси

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо в точці x_0 $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$, $\beta(x)\sim\beta'(x)$ існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha^1(x)}{\beta(x)}$, то виконується рівність

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}.$$

Доведення. Очевидно, справедливою є рівність

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{\alpha(x)}{\alpha'(x)}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}. \tag{73}$$

За умовою теореми

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha'(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}=1.$$

Якщо $\beta(x)\sim\beta'(x)$, то $\beta'(x)\sim\beta(x)$.

Із рівності (73) дістаємо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}.$$

Теорему доведено.

Цю теорему часто використовують для обчислення границь.

❑ **Приклад**

8. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосувати тут теорему про границю частки не можна, оскільки границя знаменника дорівнює нулю. Застосуємо теорему 2. У точці $x=0$ $\sin x\sim x$, а $\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{3}x}=3.$$

Означення 3. Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі функції в точці x_0 і

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c,$$

де k — фіксоване число, а число $c\neq 0$, то функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою порядку* k відносно $\beta(x)$.

❑ **Приклади**

9. Нехай $\alpha(x)=1-\cos x$, а $\beta(x)=x$. У точці $x=0$ функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими. Тоді знаходимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Отже, функція $1-\cos x$ у точці $x=0$ є нескінченно малою другого порядку відносно x.

10. Встановити порядок мализни відносно x функції $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$.

Р о з в ' я з а н н я. Функція $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ у точці $x=0$ еквівалентна функції $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}$. Тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{3}\neq 0.$$

Отже, функція $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ відносно x є нескінченно малою порядку $\frac{1}{3}$.

Користуючись еквівалентними нескінченно малими функціями, можна вивести за досить малих за модулем значень x низку наближених формул:

$$\sin x\approx x,\quad \operatorname{tg}x\approx x,\quad \ln(1+x)\approx x,\quad \sqrt[n]{x+1}\approx 1+\frac{1}{n}x. \tag{74}$$

Справді, якщо в заданій точці $x_0=0$ маємо $\alpha(x)\sim\beta(x)$, то з теореми 1 випливає, що функція $\gamma(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ є нескінченно малою вищого порядку мализни, ніж, наприклад, $\beta(x)$.

Тоді

$$\alpha(x)=\beta(x)+\gamma(x).$$

Нехтуючи $\gamma(x)$, для досить малих за модулем значень x дістанемо наближену рівність

$$\alpha(x) \approx \beta(x), \tag{75}$$

причому отримана похибка буде меншою, ніж $\beta(x)$ ($\gamma(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$).

Формули (74) випливають із формули (75).

❑ **Приклад**

11. Знайти наближені значення: а) $\sin 2°$; б) $\sqrt{1{,}0005}$; в) $\ln 1{,}001$.

Розв'язання. а) Переведемо градусну міру в радіанну. Відомо, що $1°$ відповідає числу $\frac{\pi}{180}$, тоді $2°$ відповідатиме числу $\frac{\pi}{90}$. Отже, $\sin 2° \approx \frac{\pi}{90}$.

б) $\sqrt{1{,}0005} = \sqrt{1+0{,}0005} \approx 1 + \frac{1}{2}0{,}0005$. Отже, $\sqrt{1{,}0005} \approx 1{,}00025$.

в) $\ln 1{,}001 = \ln(1+0{,}001) \approx 0{,}001$.

Нехай маємо дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ у точці x_0. Тоді відношення $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ поблизу точки x_0 може поводити себе по-різному, а саме, може існувати границя цього відношення при $x \to x_0$. Отже, функція $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ у досить малому околі точки x_0 є обмеженою. Може бути й так, що

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty.$$

Функція $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ поблизу точки x_0 не є обмеженою; і може статися, що $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x \to x_0$ ні до якої границі не наближається.

Наприклад, якщо $\alpha(x) = (x-1)\mathcal{D}(x)$, $\mathcal{D}(x)$ — функція Діріхле, а $\beta(x) = x - 1$, то

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mathcal{D}(x).$$

Було доведено, що $\mathcal{D}(x)$ не має границі в жодній точці.

Відношення $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ у випадку, коли $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі функції в точці x_0, називають невизначеністю виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, або невизначеним виразом $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Існують також інші види невизначеностей: $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, (∞^0), $(\infty - \infty)$, (0^0), (1^∞).

Невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ означає, що маємо відношення двох функцій $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, де функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ у точці x_0 є нескінченно великими. Невизначеність $(0\cdot\infty)$ означає, що маємо добуток деяких двох функцій, одна з яких у точці x_0 є нескінченно малою, а друга — нескінченно великою. Аналогічно може бути з'ясовано зміст інших видів невизначеностей.

Слід зауважити, що з невизначеностями найчастіше маємо справу при обчисленні границь функцій. Оскільки до них безпосередньо не можна застосовувати основні теореми про границі, то над цими виразами (функціями) доводиться виконувати різні перетворення (спрощення) з тим, щоб останні звести до таких, до яких можна вже застосувати основні теореми про границі. Загального способу, за допомогою якого можна було б розкрити невизначеність (знайти границю), поки що немає. Проте до окремих видів невизначеностей можна дати деякі вказівки. Так, при розкритті невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ доцільно в чисельнику і знаменнику виокремити різницю $x-x_0$ і поділити на неї (скоротити). Тут x_0 — точка, в якій знаходиться границя функції. Скорочувати на величину $x-x_0$ можна, оскільки $x \to x_0$, але, згідно з означенням границі функції, $x \neq x_0$. Виокремити різницю $x-x_0$ можна різними методами, найчастіше групуванням членів і винесенням спільного множника за дужки. У тих випадках, коли для функцій, що містяться в чисельнику і в знаменнику виразу, можна знайти еквівалентні їм величини, застосовують теорему 2.

У розділі «Диференціальне числення» буде подано більш загальний метод розкриття невизначеностей $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а також показано, як решта невизначеностей зводиться до останніх.

2.22
НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ

У попередніх параграфах під час розгляду границі функції в точці нас не цікавило, чи є функція в розглядуваній точці визначеною, чи ні. Обов'язковим було тільки те, щоб функція $y=f(x)$ була визначеною в досить малому околі точки x_0, крім, можливо, точки x_0.

Розглянемо випадок, коли функція $y=f(x)$ визначена в усіх точках деякого інтервалу $(a;b)$. Візьмемо з цього інтервалу довільну точку $x_0 \in (a;b)$ і надаватимемо x значень, які близькі до x_0. Тоді постає запитання: чи будуть значення функції близькі до значення функції в точці x_0, тобто до числа $f(x_0)$? Це буде очевидно, тоді і тільки тоді, коли функція $f(x)$ у точці x_0 матиме границю, яка дорівнює $f(x_0)$.

Означення 1. Функцію $y=f(x)$ називають *неперервною в точці* $x_0 \in (a;b)$, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в точці x_0.

Отже, функція $y = f(x)$ у точці x_0 буде неперервною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) функція $y = f(x)$ визначена в околі точки x_0;

2) існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ функції в точці x_0;

3) границя функції дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{76}$$

Разом усі ці умови є необхідними й достатніми для того, щоб функція $f(x)$ була неперервною в точці x_0.

❑ **Приклади**

1. Показати, що степенева функція $y = x^n$, де n — ціле додатне число, неперервна в будь-якій точці числової осі.

Розв'язання. Степеневу функцію при цілому додатному показнику визначено на всій числовій осі. Візьмемо довільну точку $x_0 \in (-\infty; +\infty)$. Тоді $f(x_0) = x_0^n$.

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \lim_{x \to x_0} \overbrace{(x\,x \ldots x)}^{n} = x_0^n.$$

Отже, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Тому функція x^n є неперервною в будь-якій точці $x_0 \in (-\infty; +\infty)$.

2. Довести, що багаточлен

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

є функцією, неперервною в будь-якій точці числової осі.

Розв'язання. Задана функція визначена в усіх точках числової осі, тобто при $x_0 \in (-\infty; +\infty)$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in (-\infty; +\infty)$. Тоді

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n.$$

Використавши основні теореми про границі, матимемо

$$\lim_{x \to x_0} \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\right) = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n.$$

Отже,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Тому багаточлен є функцією неперервною в будь-якій точці числової осі.

3. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, \text{ якщо } x \neq 0; \\ 0, \text{ якщо } x = 0 \end{cases}$$

в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Задану функцію визначено в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, зокрема $f(0) = 0$. У точці $x = 0$ ця функція не має границі. Справді, при $x>0$

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1;$$

при $x<0$

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1.$$

Тут правостороння границя дорівнює 1, а лівостороння дорівнює -1. Отже, задана функція в точці $x=0$ не є неперервною.

На практиці під час дослідження функцій на неперервність користуються ознаками, які безпосередньо випливають із співвідношення (76), а саме:

для того щоб функція $f(x)$ була неперервною в точці x_0, потрібно щоб:

1) $f(x)$ була визначеною в околі точки x_0;

2) існувала лівостороння границя функції в точці, тобто існувало число $f(x_0-0)$;

3) існувала правостороння границя функції — число $f(x_0+0)$;

4) лівостороння й правостороння границі були рівні

$$f(x_0-0)=f(x_0+0);$$

5) правостороння й лівостороння границі в точці x_0 дорівнювали значенню функції в цій точці, тобто

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується в точці, яка є внутрішньою точкою проміжку, в якому визначена функція, то функцію в цій точці називають *розривною*.

❑ **Приклад**

4. Дослідити на неперервність функцію антьє $y=E(x)$ у точці $x=1$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо розглянуті ознаки:

1) знайдемо значення функції $E(x)$ у точці $x=1$; маємо $E(1)=1$;

2) знайдемо лівосторонню границю: якщо $x\to 1, x<1$, то x знаходиться поблизу точки $x=1$, але $x<1$; отже, $E(1-0)=0$;

3) знайдемо правосторонню границю: якщо $x\to 1$, $x>1$, то x знаходиться поблизу 1, але $x>1$; отже, $E(1+0)=1$.

Як бачимо, перші три умови неперервності функції в точці виконуються, але не виконуються останні умови. Таким чином, функція $y=E(x)$ у точці $x=1$ розривна. Аналогічно можна було б довести, що $E(x)$ розривна в будь-якій точці $x=k$, де k — ціле число.

У решті точок вона неперервна.

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0, то роль границі функції у цій точці x_0 відіграє число $f(x_0)$. Тому, використавши означення границі функції у точці, можна дати таке означення неперервності функції у точці.

***Означення* 2.** Функцію $y=f(x)$ називають *неперервною в точці* x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta>0$, що для всіх $x\in(a;b)$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Це означення неперервності функції належить Коші. Зауважимо, що на відміну від означення границі тут не ставимо умову, щоб $|x-x_0|>0$, оскільки $f(x)$ у точці x_0 визначена, а нерівність $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ при $x=x_0$ справджується.

❑ **Приклад**

5. Користуючись наведеним означенням, показати, що функція $y=\sin x$ неперервна в кожній точці числової осі.

Р о з в ' я з а н н я. Візьмемо довільну точку $x_0\in(-\infty;+\infty)$. Тоді для будь-якого числа $\varepsilon>0$ має існувати таке число $\delta>0$, щоб нерівність

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon \tag{77}$$

виконувалася для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$.

Покажемо, що таке число δ існує. Для цього ліву частину нерівності (77) запишемо у вигляді

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|.$$

Значення x розглядаються поблизу точки x_0. Тому, згідно з п. 2.15, маємо

$$\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le\frac{|x-x_0|}{2}.$$

Отже, $|\sin x-\sin x_0|\le|x-x_0|$.

Таким чином, для того щоб виконувалася нерівність (77), достатньо, щоб $|x-x_0|<\varepsilon$. Поклавши $\delta=\varepsilon$, впевнюємося, що з нерівності $|x-x_0|<\delta$ випливає нерівність $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$.

Це й доводить неперервність функції $\sin x$ у довільній точці числової осі.

На практиці під час дослідження функцій на неперервність часто користуються означенням неперервності функції, яке ґрунтується на понятті приросту функції в точці.

Нехай функція $f(x)$ визначена в усіх точках деякого інтервалу $(a;b)$.

Візьмемо дві довільні точки з цього інтервалу x_0 і $x_0+\Delta x$, де $\Delta x=x-x_0$. Тоді число Δx називають *приростом аргументу*, а число $\Delta y=f(x_0+x)-f(x_0)$ — приростом функції $f(x)$ у точці x_0. Часто приріст функції позначають $\Delta f(x_0)$.

Так, нехай $y=x^2$. Знайдемо приріст цієї функції в точці x_0.

Використавши означення приросту функції, дістанемо

$$\Delta y = \left(x_0 + \Delta x\right)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Означення 3. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною в точці* x_0, якщо

$$\lim_{x\to 0} \Delta y = 0.$$

Наприклад, функція $y = x^2$ неперервна в довільній точці, тому що

$$\lim_{x\to 0} \Delta y = \lim_{x\to 0}\left(2x_0\Delta x + \Delta x^2\right) = 0.$$

Наведені три означення неперервності функції в точці є еквівалентними між собою в тому розумінні, що коли функція $f(x)$ неперервна в точці за яким-небудь одним означенням, то вона неперервна й за рештою означень, і навпаки.

Еквівалентність перших двох означень очевидна. Доведемо, що еквівалентні друге й третє означення.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці $x_0 \in (a; b)$ за третім означенням, тобто, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, або $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right) = 0$. Нехай $x_0 + \Delta x = x$. Тоді

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0.$$

Ця рівність означає, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Останні нерівності виражають неперервність функції в точці x_0 за означенням Коші.

Нехай функція $f(x)$ неперервна за означенням Коші в точці $x \in (a; b)$. Тоді, поклавши $x = x_0 + \Delta x$, бачимо, що з нерівності $|\Delta x| < \delta$ випливає нерівність $|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon$, або $|\Delta y| < \varepsilon$, а це означає, що

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

❑ **Приклад**

6. Користуючись третім означенням неперервності функції в точці, показати, що показникова функція $y = a^x$ неперервна в довільній точці $x_0 \in (-\infty; +\infty)$ (у п. 2.29 буде встановлено, що областю визначення показникової функції є множина усіх дійсних чисел).

Р о з в ' я з а н н я. Візьмемо довільну точку $x_0 \in (-\infty; +\infty)$ і знайдемо приріст функції a^x у точці x_0:

$$\Delta y = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

Задача буде розв'язаною, якщо показати, що $\lim\limits_{x \to 0} a^{\Delta x} = 1$.

Розглянемо спочатку випадок $a > 1$. Тоді $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Очевидно, що $\lim\limits_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$, оскільки

$$\lim_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Оскільки $\Delta x \to 0$, то завжди можна вибрати таке натуральне число n, що $-\frac{1}{n} < \Delta x < \frac{1}{n}$. Отже,

$$a^{-\frac{1}{n}} < a^{\Delta x} < a^{\frac{1}{n}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = 1.$$

Якщо $0 < a < 1$, то, поклавши $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{b^{\Delta x}} = 1.$$

Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} a^{x_0}\left(a^{\Delta x} - 1\right) = 0.$$

Отже, показникова функція неперервна в довільній точці $x_0 \in (-\infty; +\infty)$.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною на інтервалі* $(a; b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Отже, з розглянутих прикладів випливає, що степенева функція $y = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ багаточлен, функція $y = \sin x$ та показникова функція $y = a^x$ є функціями неперервними на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Зауважимо, що поняттям неперервності функції часто користуються при знаходженні границі функції, а саме, якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0, то, як це випливає з (76), для знаходження $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ досить знайти $f(x_0)$.

2.23
НЕПЕРЕРВНІСТЬ СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай маємо складену функцію $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, де $x\in X$, $u\in U$. При дослідженні цих функцій на неперервність часто користуються такою теоремою.

Теорема. Якщо функція $u=\varphi(x)$ неперервна в точці $x_0\in X$, а функція $y=f(u)$ неперервна в точці $u_0=\varphi(x_0)$, то й функція $y=f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.

Доведення. Використаємо означення неперервності функції в точці за Коші. Для цього потрібно довести, що для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta>0$, що для всіх $x\in X$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$, справджується нерівність $|f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))|<\varepsilon$.

Справді, дано, що зовнішня функція $f(u)$ неперервна в точці $u_0\in U$. Тому для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке число, наприклад, $\delta_1>0$, що з нерівності $|u-u_0|<\delta_1$ випливає нерівність $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$. Крім того, функція $u=\varphi(x)$ неперервна в точці x_0. Тому для будь-якого наперед заданого числа, зокрема числа δ_1, існує число $\delta>0$ таке, що з нерівності $|x-x_0|<\delta$ випливає нерівність $|\varphi(u)-\varphi(u_0)|<\delta_1$. Звідси маємо

$$|f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))|<\varepsilon.$$

Теорему доведено.

❑ **Приклади**

1. Довести, що функція $y=\sin^2 x$ є неперервною в будь-якій точці числової осі.

Розв'язання. Функція $y=\sin^2 x$ є складеною. Її можна записати у вигляді $y=u^2$, $u=\sin x$. Було доведено, що функція $\sin x$ є неперервною в довільній точці $x_0\in(-\infty;+\infty)$. Функція u^2 також є неперервною в будь-якій точці, зокрема вона неперервна в точці $u_0=\sin x_0$. Тому за попередньою теоремою складена функція $y=\sin^2 x$ є неперервною в точці x_0.

2. Довести, що функція $y=a^{x^2+x+1}$ є неперервною на всій числовій осі.

Розв'язання. Функцію можна записати у вигляді $y=a^u$, де $u=x^2+x+1$. Внутрішньою функцією тут є багаточлен, а зовнішньою — показникова функція. Обидві функції є неперервними на всій числовій осі. Тому й складена функція $y=a^{x^2+x+1}$ є неперервною в будь-якій точці числової осі.

2.24
РАЦІОНАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ НАД НЕПЕРЕРВНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Як уже зазначалося, в математичному аналізі вивчаються елементарні функції, тобто функції, які утворюються за допомогою суперпозиції та застосування раціональних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) над основними елементарними функціями.

Функції, утворені суперпозицією основних елементарних функцій, як це випливає з попереднього параграфа, є неперервними. Виникає запитання: чи будуть неперервними функції, утворені застосуванням раціональних операцій над основними елементарними функціями? На це запитання дають відповідь такі теореми.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ є неперервними в точці x_0, то в цій точці будуть неперервними функції $f(x) \pm \varphi(x)$; $f(x) \cdot \varphi(x)$.

Теорема 2. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ є неперервними в точці x_0 і $\varphi(x_0) \neq 0$, то в точці x_0 є неперервною також і функція $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Доведення теореми 2. Застосуємо перше означення неперервності функції в точці. Введемо позначення $F(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$. Оскільки $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \neq 0.$$

Тому

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = F(x_0).$$

Отже, границя функції $F(x)$ при $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в точці x_0, а це означає, що $F(x)$ неперервна в точці x. Теорему доведено.

❑ **Приклади**

1. Дослідити на неперервність функцію $y = \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Функцію $\operatorname{tg} x$ можна записати у вигляді $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Функції $\sin x$ і $\cos x$ є неперервними для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

Раніше було доведено, що функція $\sin x$ неперервна для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

Зобразимо функцію $\cos x$ як складену функцію $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ або $\cos x = \sin u$, $u = \dfrac{\pi}{2} + x$.

Функція u є неперервною при будь-якому x як сума двох неперервних функцій. Тому й функція $\cos x = \sin u$, згідно з теоремою про неперервність складеної функції, є неперервною на всій числовій осі. Отже, функція $\operatorname{tg} x$ буде неперервною (на основі теореми 2) в усіх точках числової осі, де $\cos x \neq 0$, тобто в усіх точках, де $x \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, k — ціле число.

2. Дослідити на неперервність раціональну функцію

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}.$$

Розв'язання. У чисельнику й знаменнику маємо багаточлени, які є неперервними функціями на всій числовій осі. Тому й раціональна функція є неперервною в усіх точках числової осі, крім тих точок, де знаменник перетворюється на нуль.

2.25
ОДНОСТОРОННЯ НЕПЕРЕРВНІСТЬ. ТОЧКИ РОЗРИВУ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Якщо функцію $y = f(x)$ визначено на відрізку $[a; b]$, то в точках a і b можна ставити питання тільки про односторонню неперервність, а саме, в точці a — про неперервність справа, а в точці b — зліва. Тому постає питання про введення таких понять, як неперервність функції в точці зліва і справа.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною в точці* $x_0 \in \langle a; b\rangle$ зліва, якщо виконуються умови:

1) $f(x)$ визначена в точці x_0 (існує число $f(x_0)$);

2) в точці x_0 існує лівостороння границя функції;

3) лівостороння границя функції дорівнює значенню функції в точці x_0.

Отже, якщо $f(x)$ неперервна в точці x_0 зліва, то виконується співвідношення

$$f(x_0 - 0) = f(x_0), \tag{78}$$

де $f(x_0 - 0)$ — лівостороння границя функції в точці x_0.

❑ **Приклади**

1. Дослідити функцію

$$y = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}, \text{ якщо } x \neq 0; \\ 0, \text{ якщо } x = 0, \end{cases}$$

на лівосторонню неперервність в точці $x = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Перевіримо виконання наведених умов.

Перша умова виконується: $f(0) = 0$.

Знайдемо лівосторонню границю:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} 2^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0-0).$$

Друга умова виконується. Виконується також і третя умова:

$$f(0-0) = f(0).$$

Тому задана функція в точці $x = 0$ є неперервною зліва.

2. Дослідити на лівосторонню неперервність функцію антьє $y = E(x)$ у точці $x = k$, де k — ціле число.

Р о з в ' я з а н н я. Тут $E(k) = k$.

Знаходимо лівосторонню границю в точці $x = k$:

$$\lim_{\substack{x\to k\\(x<k)}} E(x) = k - 1.$$

Отже, перші дві умови лівосторонньої неперервності функції виконуються, а третя — не виконується. Тому задана функція не є неперервною зліва в точках $x = k$, $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$.

Означення. Функцію $y=f(x)$ називають *неперервною в точці* $x_0 \in \langle a;b \rangle$ справа, якщо виконуються умови:

1) $f(x)$ визначена в точці x_0 (існує число $f(x_0)$);
2) у точці x_0 існує правостороння границя функції;
3) правостороння границя функції дорівнює значенню функції її точці x_0.

Отже, для неперервної функції справа має виконуватися співвідношення

$$f(x_0+0)=f(x_0), \tag{79}$$

де $f(x_0+0)$ — правостороння границя функції $f(x)$ в точці x_0.

❑ **Приклади**

3. Дослідити на правосторонню неперервність функцію антьє $y=E(x)$ у точці $x=k$, де k —ціле число.

Розв'язання. У точці $x=k$ значення функції дорівнює $E(k)=k$.

Знаходимо правосторонню границю

$$\lim_{\substack{x\to k \\ (x>k)}} yE(x)=k.$$

Отже, всі умови неперервності функції $E(x)$ справа в точці $x=k$ виконуються. Тому задана функція є неперервною в розглядуваній точці справа.

4. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2^x}, \text{якщо } x\neq 0; \\ 0, \text{якщо } x=0, \end{cases}$$

не є неперервною справа в точці $x=0$.

Це справді так, тому що задана функція в точці $x=0$ не має правосторонньої границі

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ (x>0)}} f(x)=+\infty.$$

Очевидно, коли функція неперервна в точці, то вона в цій точці є неперервною і зліва, і справа. Проте є функції, наприклад функція антьє, які неперервні тільки з одного боку.

Теорема. Для того щоб функція $y=f(x)$ була неперервна в певній точці, необхідно і достатньо, щоб вона була в цій точці неперервна і справа, і зліва.

Цю теорему пропонуємо довести самостійно.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в усіх точках деякого проміжку $\langle a;b \rangle$, крім, можливо, внутрішньої точки $x_0 \in \langle a;b \rangle$.

Означення. Якщо функція $y=f(x)$ у точці x_0 не є неперервною, то точку x_0 називають *точкою розриву функції* $f(x)$, а саму функцію — *розривною в точці* x_0.

Отже, за означенням, будь-яка внутрішня точка проміжку $\langle a;b \rangle$, де визначена функція $y=f(x)$, крім, можливо, розглядуваної точки, є точкою розриву функції, якщо в цій точці порушується хоча б одна з трьох умов неперервності.

Тому залежно від того, яка з цих умов не виконується, точки розриву поділяють на два роди.

Означення. Точку розриву x_0 функції $f(x)$ називають *точкою розриву першого роду*, якщо в цій точці існують скінченні лівостороння й правостороння границі. Якщо вони рівні між собою, то точку x_0 називають *точкою усувного розриву.*

Означення. Точку розриву x_0 функції $f(x)$ називають *точкою розриву другого роду*, якщо в цій точці не існує жодної з односторонніх границь.

❑ **Приклади**

5. Знайти точки розриву функції $y=\operatorname{tg}x$ і визначити, якого роду розриву ці точки.

Р о з в ' я з а н н я. Встановлено, що функція $\operatorname{tg}x$ є неперервною в усіх точках числової осі, крім точок $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, де k — ціле число. У цих точках функція не визначена. Отже, $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ є точками розриву для $\operatorname{tg}x$. Точки $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ є точками розриву другого роду.

6. Знайти точки розриву функції

$$y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, \text{ якщо } x\neq 0;\\ 0, \text{ якщо } x=0\end{cases}$$

і визначити якого вони роду.

Р о з в ' я з а н н я. Було показано, що в точці $x=0$ існують правостороння границя цієї функції $f(0+0)=1$ і лівостороння границя $f(0-0)=-1$. Ці границі неоднакові. Отже, $x=0$ для заданої функції є точкою розриву першого роду.

У решті точок числової осі задана функція є неперервною.

7. Знайти точки розриву функції $y=2^{-\frac{1}{x^2}}$ і встановити їх характер.

Р о з в ' я з а н н я. Функція $2^{-\frac{1}{x^2}}$ є складеною. Її можна розглядати як функцію 2^u, де $u=-\frac{1}{x^2}$. Внутрішня функція є неперервною всюди, крім точки $x=0$. Зовнішня функція 2^u є показниковою функцією, яка неперервна на всій числовій осі. Тому й складена функція $2^{-\frac{1}{x^2}}$ є неперервною на всій числовій осі, крім точки $x=0$.

Отже, для функції 2^u точкою розриву є точка $x=0$.

У цьому випадку існують обидві односторонні границі й вони рівні між собою.

Точка $x=0$ є точкою усувного розриву для функції $2^{-\frac{1}{x^2}}$.

Розрив функції названо *усувним* тому, що можна так довизначити функцію $f(x)$ у точці x_0, що «довизначена» функція $F(x)$ стане неперервною в точці $x=0$.

Для цього покладають

$$F(x)=\begin{cases} f(x), \text{ якщо } x \neq x_0; \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), \text{ якщо } x = x_0. \end{cases}$$

❑ **Приклади**

8. Довизначити функцію $y=\dfrac{\sin x}{x}$ у точці $x=0$ так, щоб довизначена функція $F(x)$ в усіх точках, крім $x=0$, збігалася з $f(x)$, а в точці $x=0$ була неперервною.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

шуканою є функція

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ якщо } x \neq 0; \\ 1, \text{ якщо } x=0. \end{cases}$$

9. Функція $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ не визначена в точці $x=1$. Довизначити її так у точці $x=1$, щоб довизначена функція в цій точці була неперервною.

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо границю заданої функції в точці $x=1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

(скорочувати на $x-1$ можна, тому що $x-1\neq 0$).

Тоді шуканою є функція

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, \text{ якщо } x \neq 1; \\ 2, \text{ якщо } x=1, \end{cases}$$

або $F(x)=x+1$.

10. Для функції $y=\dfrac{|x|}{x}$ точка $x=0$ є точкою розриву. Чи можна усунути цей розрив?

Р о з в ' я з а н н я. Не можна, оскільки в точці $x=0$ задана функція не має границі. Існують обидві односторонні границі, але вони не рівні між собою.

2.26
ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ, ЗАДАНОЇ НА ВІДРІЗКУ

Функцію $f(x)$ називають *неперервною на відрізку* $[a;b]$, якщо вона неперервна в кожній точці цього відрізка (неперервність на кінцях відрізка розглядається як одностороння неперервність).

Неперервна на відрізку функція має ряд властивостей. Сформулюємо ці властивості у вигляді теорем.

Т е о р е м а 1 (Вейєрштрасса). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то вона на цьому відрізку є обмеженою.*

Доведення. Доведемо теорему методом від супротивного. Для цього припустимо, що функція $f(x)$ не є обмеженою на відрізку $[a; b]$. З цього припущення випливає, що для будь-якого натурального числа n існує точка $x_n \in [a; b]$ така, що

$$|f(x_n)| > n.$$

Тоді отримаємо послідовність точок $x_1, \ldots, x_n, \ldots,$ яка є обмеженою. Згідно з наслідком 3 теореми Больцано — Вейєрштрасса з послідовності $\{x_n\}$ можна виокремити збіжну послідовність $\{x_{n_k}\}$, яка збігається,

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0,$$

і $x_0 \in [a; b]$.

Тоді оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то існує границя

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

Отже, послідовність $\{f(x_n)\}$ є обмеженою. А за нашим припущенням, підпослідовність $\{f(x_{n_k})\}$ є необмеженою

$$|f(x_{n_k})| > n_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Зайшли у суперечність.

Теорему доведено.

Наголосимо, що обидві умови в теоремі є суттєвими. Так, функція $\frac{1}{x}$ на інтервалі $(0; 1)$ є неперервною, але не є обмеженою (функція $\frac{1}{x}$ необмежено зростає при $x \to 0$).

Функція

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ якщо } x \in (0; 1]; \\ 0, \text{ якщо } x = 0, \end{cases}$$

задана на відрізку $[0; 1]$, проте ця функція не є обмеженою на відрізку $[0; 1]$ (у точці $x_0 = 0$ вона розривна).

Існують функції, які задані на інтервалі й не є неперервними на цьому інтервалі, але є обмеженими на ньому. Так, функція

$$y = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 0 < x \le \frac{1}{2}; \\ 1, \text{ якщо } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Тут $|f(x)| \le 1$ для всіх $x \in (0; 1)$, хоча в точці $x = \frac{1}{2}$ функція розривна.

Перш ніж сформулювати другу теорему, дамо таке означення.

Нехай маємо функцію $y=f(x)$, задану на деякій точковій множині $E=\{x\}$.

Означення. Значення функції $f(c)$, $c\in E$ називають найбільшим (найменшим) на множині E, якщо для будь-якого $x\in E$ справджується нерівність

$$f(x)\le f(c)\left(f(x)\ge f(c)\right).$$

Так, функція $y=1-|x|$, визначена в інтервалі $(-\infty;+\infty)$, у точці $x=0$ набуває найбільшого значення $f(0)=1$. Функція $y=|x|$ у точці $x=0$ набуває свого найменшого значення $f(0)=0$.

Функція $y=\sin x$, де $x\in(-\infty;+\infty)$, у нескінченній множині точок $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, k — ціле число набуває свого найбільшого значення, і в нескінченній множині точок $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m$, де m — ціле число набуває свого найменшого значення.

Проте є функції, серед множини значень яких немає найбільшого (найменшого) значення.

Наприклад, функції $y=x$, де $x\in(a;b)$; $y=a^x$, де $x\in(-\infty;+\infty)$.

Теорема 2 (Вейєрштрасса). Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найбільше й найменше значення.

Доведення. Доведемо, що при виконанні умов теореми існує точка $c\in[a;b]$, в якій значення $f(c)$ функції є найбільшим.

Доведення другої частини виконується аналогічно першій.

Оскільки функція неперервна на відрізку, то за попередньою теоремою множина її значень є обмеженою, зокрема обмеженою зверху. Тоді існує верхня грань множини значень функції. Позначимо її через M

$$\sup_{x\in[a;b]} f(x)=M$$

і покажемо, що існує точка $c\in[a;b]$, в якій $f(c)=M$.

Справді, згідно з означенням верхньої грані для всіх $x\in[a;b]$ виконується нерівність

$$f(x)\le M.$$

Проте для довільного числа $\varepsilon>0$ знайдеться точка $x_\varepsilon\in[a;b]$ така, що виконуватимуться нерівності

$$M-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\le M.$$

Надаючи числу ε значень $1, \frac{1}{2},\ldots, \frac{1}{n},\ldots$ отримаємо обмежену послідовність точок $x_1, x_2,\ldots, x_n,\ldots$ $(x_n\in[a;b])$, для яких виконуються нерівності

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)<M+\frac{1}{n},\quad n=1,2,\ldots$$

або

$$|f(x_n)-M|<\frac{1}{n},\quad n=1,2,\ldots .$$

Оскільки послідовність точок $\{x_n\}$ обмежена, то з неї можна виокремити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=c\in[a;b].$$

Тоді існує границя

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=f(c).$$

Підставляючи в попередню нерівність замість n число n_k, отримуємо

$$\left|f\left(x_{n_k}\right)-M\right|<\frac{1}{n_k},\quad k=1,2,\ldots .$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $k\to\infty$, отримуємо

$$f(c)=M.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що властивість, сформульована теоремою 2, як і властивість, сформульована теоремою 1, не поширюється на неперервні функції, задані на інтервалі, півінтервалі та піввідрізку. Наприклад, функція $y=\frac{1}{x}$ є неперервною в інтервалі $(0;1)$, проте вона не має ні найбільшого, ні найменшого значень.

Теорема 3 (Больцано — Коші). Якщо функція $y=f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$ і на кінцях відрізка значення цієї функції протилежні за знаком, то існує хоча б одна точка $c\in(a;b)$ така, що $f(c)=0$.

Точку, в якій функція дорівнює нулю, називають *нулем функції*.

Отже, теорема 3 стверджує існування хоча б одного нуля для неперервної функції, заданої на відрізку, яка на його кінцях набуває значень, протилежних за знаком.

Доведення. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $f(a)<0$, $f(b)>0$. Поділимо відрізок $[a;b]$ точкою $\frac{a+b}{2}$ навпіл. Тоді може статися, що $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$. Отже, теорему можна вважати доведеною.

Якщо $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, тоді число $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ або більше, або менше за нуль. Позначимо через $[a_1;b_1]$ ту половину відрізка $[a;b]$, в якому $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$.

З відрізком $[a_1;b_1]$ проробимо ті самі операції, що й з відрізком $[a;b]$. Тоді може статися, що $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$. Отже, у цьому випадку теорему можна вважати доведеною. Якщо $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$, то з двох відрізків $\left[a_1;\frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2};b_1\right]$ розглядатимемо і позначимо його через $[a_2;b_2]$, де $f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$.

Продовжуючи цей процес, то або знайдемо точку, в якій функція дорівнює нулю, або процес побудови відрізків буде нескінченним. Якщо матиме місце перший випадок, то теорему можна вважати доведеною, якщо — другий, то дістанемо послідовність вкладених відрізків

$$[a;b]\supset[a_1;b_1]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\ldots,$$

довжини яких зі зростанням номера прямують до нуля

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0(n\to 0).$$

Отже, маємо Канторову систему відрізків $[a_n;b_n]$, $n=1,2,\ldots$.

Ця система відрізків має одну спільну точку

$$c=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Доведемо, що $f(c)=0$. Справді, згідно з побудовою відрізків $[a_n;b_n]$, $n=1,2,\ldots$ правильними є нерівності

$$f(a_n)<0,\ \ f(b_n)>0,\ \ n=1,2,\ldots .$$

Переходячи в цих нерівностях до границі при $n\to\infty$ і враховуючи, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, отримуємо

$$f(c)\le 0,\ \ f(c)\ge 0.$$

Звідси випливає рівність

$$f(c)=0.$$

Теорему доведено.

Теорема 4 (Больцано—Коші). Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях відрізка її значення $f(a)\neq f(b)$, то для будь-якого числа C, що знаходиться між $f(a)$ і $f(b)$, існує хоча б одна точка $c\in(a;b)$ така, що $f(c)=C$.

Доведення. Цю теорему можна довести, посилаючись на теорему 3. Справді, нехай $f(a)<C<f(b)$. Тоді функція

$$F(x)=C-f(x),$$

будучи неперервною на відрізку $[a;b]$ (як різниця двох неперервних функцій), на кінцях відрізка має різні за знаками значення:

$$F(a)=C-f(a)>0;\quad F(b)=C-f(b)<0.$$

Отже, за теоремою 3 існує хоча б одна точка $c\in(a;\,b)$, у якій $F(c)=0$ або $C-f(c)=0$, звідси $f(c)=C$.

З теореми 4 випливає такий наслідок.

Н а с л і д о к. Якщо $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ неперервна і не є тотожно сталою функцією на цьому відрізку, то множиною всіх значень $f(x)$ є відрізок $[m;M]$, де m, M — відповідно найменше і найбільше значення функції на відрізку $[a;b]$.

Справді, за теоремою 2 на відрізку $[a;b]$ існують точки $c_1\in[a;b]$ і $c_2\in[a;b]$, у яких значення неперервної функції є відповідно найбільшими й найменшими серед усієї множини значень функції. Нехай $a\le c_1\le c_2\le b$ і нехай $m=f(c_1)$ — найменше значення, а $M=f(c_2)$ — найбільше значення функції. Оскільки $f(x)\ne\text{const}$, маємо $m<M$.

Проте за теоремою 4 кожне число C, яке задовольняє нерівність $m<C<M$, є значенням неперервної функції $f(x)$.

Отже, множиною всіх значень неперервної на відрізку $[a;b]$ функції є відрізок $[m;M]$.

Спираючись на цей наслідок або на теорему 4, можна стверджувати, що графіком неперервної на відрізку $[a;b]$ функції є суцільна лінія.

Справді, яку б не провели пряму $y=C$, де $m\le C\le M$, то остання матиме хоча б одну спільну точку з графіком функції (рис. 24).

Теорему 4 ще називають *теоремою про проміжне значення неперервної функції.*

Рівномірна неперервність функції. Нехай функція $y=f(x)$ є неперервною на деякому проміжку $\langle a;b\rangle$. Тоді для кожної точки, наприклад, $x_0\in\langle a;b\rangle$, згідно з означенням неперервності Коші, для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta>0$, що як тільки $x\in\langle a;b\rangle$ і $|x-x_0|<\delta$, то

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Відомо, що δ залежить від числа ε. Проте це число залежатиме ще й від розглядуваної точки x_0, тобто $\delta=\delta(\varepsilon_0,x_0)$. Для кожної точки проміжку $\langle a;b\rangle$ за заданим ε можна вказати своє число δ.

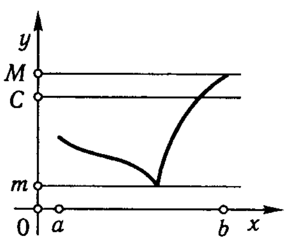


Рис. 24

Якби точок було скінченне число, то для того самого ε із скінченного числа відповідних цим точкам чисел δ можна було б вибрати найменше. Це число підходило б для всіх розглядуваних точок x_0 і x заданої множини. Проте у проміжку $\langle a;b\rangle$ міститься нескінченна множина точок, тому цим точкам при тому самому ε відповідатиме нескінченна множина чисел δ, серед яких можуть бути і як завгодно малі. Отже, якщо функція неперервна на проміжку $\langle a;b\rangle$, то постає питання: чи існує при заданому ε таке число δ, яке б підходило для всіх точок $x_0 \in \langle a;b\rangle$?

Означення. Якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$, яке залежить від ε і не залежить від точок проміжку і таке, що для всіх точок x_0 і x цього проміжку з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то функцію $f(x)$ називають *рівномірно неперервною на проміжку* $\langle a;b\rangle$.

Тут x і x_0 — довільні точки проміжку. Тому їх можна позначити відповідно через x' і x'', підпорядкувавши умові $|x' - x''| < \delta$. Тоді означення рівномірної неперервності можна сформулювати ще й так.

Означення. Функцію $y = f(x)$, задану на проміжку $\langle a;b\rangle$, називають *рівномірно неперервною на цьому проміжку*, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, яке залежить від ε і не залежить від точок проміжку і таке, що для будь-яких x' і x'' із проміжку $\langle a;b\rangle$ з нерівності $|x' - x''| < \delta$ випливає нерівність

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

❑ **Приклади**

1. Довести, що функція $y = x$ є рівномірно неперервною в інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Розв'язання. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Нехай $\delta = \varepsilon$, тоді дістанемо, що з нерівності $|x' - x''| < \delta$ випливає нерівність $|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \varepsilon$.

Отже, число $\delta = \varepsilon$ залежить тільки від ε і не залежить від точок розглядуваного інтервалу. Функція є рівномірно неперервною.

2. Довести, що функція $y = \sqrt{x}$ на піввідрізку $[1; +\infty)$ є рівномірно неперервною.

Розв'язання. Візьмемо число $\varepsilon > 0$ і покладемо $\delta = 2\varepsilon$. Тоді з нерівності $|x' - x''| < \delta$ випливає нерівність

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \le \frac{1}{2}|x' - x''| < \frac{1}{2}2\varepsilon = \varepsilon.$$

Отже, задана функція рівномірно неперервна.

3. Довести, що функція $y = \frac{1}{x}$, задана в інтервалі $(0;1)$, не є рівномірно неперервною.

Розв'язання. Розглядувана функція є неперервною (як частка від ділення двох неперервних функцій). Візьмемо точки

$$x' = \frac{1}{2n}, \quad x'' = \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Тоді

$$|x' - x''| = \frac{1}{2n}$$

і, отже, відстань між цими точками завдяки необмеженому зростанню n може бути як завгодно малою.

Для будь-якого числа $\varepsilon \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ не існує числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такого, що з нерівності $|x' - x''| < \delta$ випливала б нерівність

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Справді, оскільки

$$|x' - x''| = \frac{1}{2n},$$

при $n > \frac{1}{2\delta}$ маємо

$$|x' - x''| < \delta,$$

причому $x' \in (0; 1)$ і $x'' \in (0; 1)$, але $|f(x') - f(x'')| = n > \varepsilon$.

Отже, не будь-яка неперервна в інтервалі функція є на ньому рівномірно неперервною. Проте справедлива така теорема.

Теорема 5 (Кантора). Функція, неперервна на відрізку, є на цьому відрізку *рівномірно неперервною.*

Доведення. Доводитимемо теорему методом від супротивного. Для цього припустимо, що неперервна на відрізку $[a; b]$ не є на цьому відрізку рівномірно неперервною. Це означає, що не для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що з нерівності $|x' - x''| < \delta$ ($x' - x''$ — довільні точки відрізка $[a; b]$) випливає нерівність

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Отже, існує таке число $\varepsilon_0 > 0$, що яким би малим не було число $\delta > 0$, знайдуться точки x', x'' із відрізка $[a; b]$, відстань між якими

$$|x' - x''| < \delta,$$

проте

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0.$$

За число δ вибиратимемо числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Тоді для кожного числа $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, знайдуться точки $x'_n \in [a; b]$, $x''_n \in [a; b]$ такі, що відстань між ними

$$|x' - x''| < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

але виконується нерівність

$$\left|f\left(x'_n\right) - f\left(x''_n\right)\right| \geq \varepsilon_0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Послідовності точок $\left\{x'_n\right\}$, $\left\{x''_n\right\}$ обмежені, тож із них можна виокремити збіжні послідовності $\left\{x'_{n_k}\right\}$, $\left\{x''_{n_k}\right\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Нехай послідовність $\left\{x'_{n_k}\right\}$ збігається до числа c

$$\lim_{k \to \infty} x'_{n_k} = c,$$

де $c \in [a; b]$.

Тоді, внаслідок того що

$$\left|x'_{n_k} - x''_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то і підпослідовність $\left\{x''_{n_k}\right\}$ також збігається до числа c:

$$\lim_{k \to \infty} x''_{n_k} = c.$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці c, то правильними є рівності

$$\lim_{n_k \to \infty} \left(x'_{n_k}\right) = f(c);$$

$$\lim_{n_k \to \infty} \left(x''_{n_k}\right) = f(c).$$

З останніх нерівностей випливає, що для будь-якого додатного числа, наприклад $\frac{\varepsilon_0}{2}$, знайдуться натуральні числа N_1, N_2 такі, що виконуватимуться нерівності

$$\left|f\left(x'_{n_k}\right) - f(c)\right| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad n_k > N_1;$$

$$\left|f\left(x''_{n_k}\right) - f(c)\right| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad n_k > N_2.$$

Візьмемо натуральне число N більше за N_1, N_2. Тоді при $n_k > N$ виконуватимуться наведені нерівності. При $n_k > N$ отримуємо

$$\left|f\left(x'_{n_k}\right) - f\left(x''_{n_k}\right)\right| = \left|\left(f\left(x'_{n_k}\right) - f(c)\right) + \left(f(c) - f\left(x''_{n_k}\right)\right)\right| \le$$

$$\le \left|f\left(x'_{n_k}\right) - f(c)\right| + \left|f\left(x''_{n_k}\right) - f(c)\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0, \quad n_k > N.$$

Тоді, за нашим припущенням, має бути

$$\left|f\left(x'_{n_k}\right)-f\left(x''_{n_k}\right)\right|\geq \varepsilon_0,\quad n=1,2,\dots,$$

в тому числі й при $n_k > N$. Зайшли у суперечність.

Отже, припущення, що неперервна функція на відрізку $[a;b]$ не є рівномірно неперервною, неправильне.

Теорему доведено.

2.27 ТЕОРЕМА ПРО ІСНУВАННЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ОБЕРНЕНОЇ ФУНКЦІЇ

У п. 2.4 було розглянуто питання про обернену функцію і на конкретних прикладах показано, що не всяка функція $y=f(x)$ має обернену. Доведемо теорему, яка дає достатні умови існування та неперервності оберненої функції.

Теорема. Якщо функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$ і є на ньому неперервною і зростаючою (спадною), то для цієї функції на відрізку $[f(a);f(b)]$ $([f(b);f(a)])$ існує обернена функція $x=\varphi(y)$, яка на відрізку $[f(a);f(b)]$ $([f(b);f(a)])$ є також неперервною і зростаючою (спадною).

Д о в е д е н н я. Розглянемо випадок, коли функція $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ є зростаючою. Випадок, коли $f(x)$ є спадною, доводиться аналогічно.

Нехай $A=f(a)$, $B=f(b)$ (рис. 25). Тоді за теоремою про проміжне значення неперервної функції для будь-якого числа C, що знаходиться між числами A і B, на відрізку $[a;b]$ існує хоча б одна точка c така, що $f(c)=C$. Оскільки $f(x)$ є зростаючою, то іншої точки $c'\neq c$, яка б належала відрізку $[a;b]$ і в якій би $f(c')=C$, не існує.

Отже, кожному числу $C\in[A;B]$ за певним правилом відповідає тільки одна точка з відрізка $[a;b]$, а це означає, що на відрізку $[A;B]$ задана обернена функція $x=\varphi(y)$.

Доведемо, що функція $x=\varphi(y)$ є неперервною в точці $C\in[A;B]$. Використаємо означення неперервності за Коші. Візьмемо досить мале додатне число ε таке, щоб точки $c-\varepsilon$ і $c+\varepsilon$ належали відрізку $[a;b]$. Нехай $f(c-\varepsilon)=C_1$; $f(c+\varepsilon)=C_2$. Позначимо

$$C-C_1=\delta_1;\quad C_2-C=\delta_2.$$

Звідси

$$C_1=C-\delta_1;\quad C_2=C+\delta_2,$$

де $\delta_1>0$, $\delta_2>0$. Менше з двох чисел δ_1, δ_2 позначимо через δ.

Тоді для кожного числа $y \in [A; B]$, яке задовольняє нерівність

$$|y - C| < \delta,$$

справджується нерівність

$$|x - c| < \varepsilon.$$

Отже, функція $x = \varphi(y)$ у точці $C \in [A; B]$ є неперервною. Точка C є довільною точкою відрізка $[A; B]$, тому $\varphi(y)$ є неперервною на всьому відрізку.

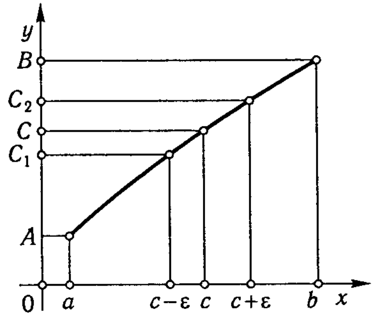


Рис. 25

Доведемо, що $\varphi(y)$ на відрізку $[A; B]$ є зростаючою. Припустимо супротивне. Нехай для точок $y_1 \in [A; B]$ і $y_2 \in [A; B]$, які задовольняють нерівність $y_1 < y_2$, виконується нерівність $\varphi(y_1) \geq \varphi(y_2)$ або $x_1 \geq x_2$. Проте оскільки функція $f(x)$ є зростаючою, то $f(x_1) \geq f(x_2)$ або $y_1 \geq y_2$.

Зайшли у суперечність.

Теорему доведено.

Н а с л і д о к. Нехай функція $y = f(x)$ визначена, неперервна і є зростаючою (спадною) на скінченному або нескінченному проміжку $\langle a; b \rangle$.

Тоді обернена функція $x = \varphi(y)$ існує (визначена), неперервна і є зростаючою (спадною) в проміжку $\langle A; B \rangle$, де $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x > a)}} f(x)$, $B = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ (x < b)}} f(x)$ у випадку зростання функції $f(x)$ і $A = \lim\limits_{x < b} f(x)$, $B = \lim\limits_{x > b} f(x)$ у випадку спадання функції.

Справді, нехай $f(x)$ на проміжку $\langle a; b \rangle$ є зростаючою. Тоді на будь-якому скінченному відрізку $[a_1; b_1] \subset \langle a; b \rangle$ виконуються всі умови попередньої теореми. Отже, на відрізку $[A_1; B_1]$, де $A_1 = f(a_1)$, $B_1 = f(b_1)$, існує неперервна і зростаюча, обернена до $f(x)$ функція $x = \varphi(y)$. Оскільки пряма функція $y = f(x)$ є монотонною (за припущенням зростаючою), то можна було б довести, що існують скінченні або нескінченні границі

$$A = \lim_{\substack{a_1 \to a \\ (a_1 > a)}} f(a_1), \quad B = \lim_{\substack{b_1 \to b \\ (b_1 < b)}} f(b_1).$$

Випадок, коли $f(x)$ є спадною, доводиться аналогічно.

2.28
ОБЕРНЕНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ДЕЯКИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Функція, обернена до степеневої функції. Розглянемо степеневу функцію з натуральним показником $y = x^n$. Вона визначена, неперервна в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ і при непарному $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots$ є зростаючою в цьому інтервалі, причому

$$\lim_{x\to-\infty} x^{2k-1} = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} x^{2k-1} = +\infty.$$

Згідно з наслідком п. 2.27, в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ існує функція, обернена до функції $y = x^{2k-1}$, яка є неперервною і зростаючою. Функцію, обернену до функції $y = x^{2k-1}$, позначають так:

$$y = \sqrt[2k-1]{x}, \quad k \geq 2.$$

Наприклад, функція, обернена до функції $y = x^3$, є $y = \sqrt[3]{x}$, а обернена до функції $y = x^5$, є $y = \sqrt[5]{x}$.

Графіки функцій $y = x^3$ і $y = x^5$ та графіки обернених функцій $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$ зображено на рис. 26, *а*.

Розглянемо степеневу функцію з парним показником $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$. Така функція в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ не є монотонною, вона в інтервалі $(-\infty; 0)$ спадає, в інтервалі $(0; +\infty)$ зростає. Отже, теорему з п. 2.27 застосувати не можна. Проте якщо розглянути піввідрізок $[0; +\infty)$, то на ньому функція x^{2k} є зростаючою й неперервною. Тоді, згідно з наслідком

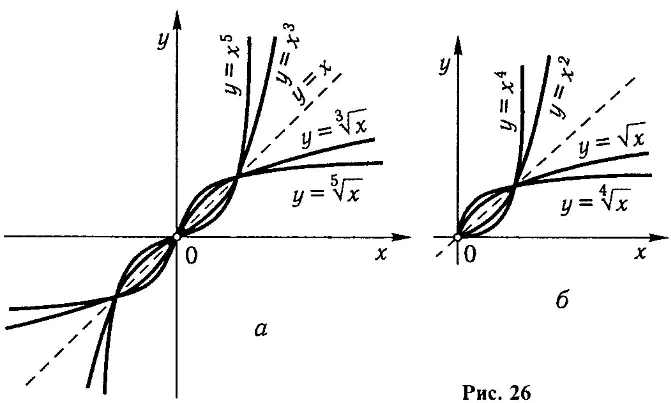


Рис. 26

п. 2.27, на піввідрізку $[0;+\infty)$ (тут $f(a)=f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$) існує функція, обернена до функції $y=x^{2k}$, яка також є неперервною і зростаючою на піввідрізку $[0;+\infty)$.

Функцію, обернену до функції $y=x^{2k}$, позначають так:

$$y=\sqrt[2k]{x},\quad k\geq 1.$$

Наприклад, якщо задано функції $y=x^2$ і $y=x^4$, то на піввідрізку $[0;+\infty)$ оберненими до них є функції $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$.

Графіки цих функцій побудовано на рис. 26, *б*.

Функція, обернена до показникової функції. Як відомо, показникова функція $y=a^x$ визначена і є монотонною в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ (при $a>1$ вона є зростаючою, а при $0<a<1$ — спадною). Було доведено, що a^x є неперервною в області її визначення. Нехай, наприклад, $a>1$. Тоді a^x є зростаючою функцією і

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0,\quad \lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty.$$

Отже, і в цьому випадку в інтервалі $(0;+\infty)$ існує функція, обернена до показникової, яка також є неперервною і зростаючою.

Функцію, обернену до показникової, називають *логарифмічною* і позначають

$$y=\log_a x.$$

Графіки показникової і логарифмічної функцій зображено на рис. 19, *д*, *е*.

Обернені тригонометричні функції. ***Функція, обернена до sin x.*** Розглянемо функцію $y=\sin x$. Ця функція визначена і неперервна в інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Проте в цьому інтервалі вона не є монотонною, отже, оберненої вона не має. Проте на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ для всіх $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функція $\sin x$ пробігає всю множину значень (відрізок $[-1;1]$) і є на цьому відрізку неперервною і зростаючою. Тому за теоремою з п. 2.27 на відрізку $[-1;1]$ існує функція, обернена до функції $y=\sin x$, яка на цьому відрізку є також неперервною і зростаючою. Цю обернену функцію позначають

$$y=\arcsin x.$$

Графіки функцій $y=\sin x$ і $y=\arcsin x$ зображено на рис. 19, *г*.

Функція, обернена до функції cos x. Функція $y=\cos x$ визначена й неперервна в інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Проте в цьому інтервалі функція $\cos x$ не є монотонною (вона періодична з періодом 2π), тому функції, оберненої до неї, не існує. Якщо $\cos x$ розглядати тільки на відрізку $[0;\pi]$, то на ньому функція $\cos x$ пробігає всю свою множину значень (відрізок $[-1;1]$) і є неперервною та спадною. Тому $\cos x$ на відрізку $[0;\pi]$ має обернену

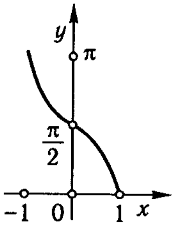


Рис. 27

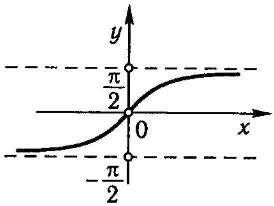


Рис. 28

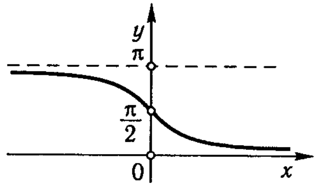


Рис. 29

функцію, яка визначена на відрізку $[-1;1]$, є на цьому відрізку неперервною і спадною. Цю обернену функцію позначають так:

$$y=\arccos x.$$

Графік функції $y=\arccos x$ зображено на рис. 27.

Функція, обернена до функції tgx. Розглянемо функцію $y=\operatorname{tg}x$, де $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. У цьому інтервалі функція $\operatorname{tg}x$ є неперервною, зростаючою, причому

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ \left(x>-\frac{\pi}{2}\right)}}\operatorname{tg}x=-\infty,\quad \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ \left(x<\frac{\pi}{2}\right)}}\operatorname{tg}x=+\infty.$$

Отже, в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ існує неперервна і зростаюча функція, обернена до функції $y=\operatorname{tg}x$. Цю обернену функцію позначають так:

$$y=\operatorname{arctg}x.$$

Графік функції $y=\operatorname{arctg}x$ зображено на рис. 28.

Функція, обернена до функції ctgx. Розглянемо функцію $y=\operatorname{ctg}x$ в інтервалі $(0;\pi)$. У ньому $\operatorname{ctg}x$ є неперервною і спадною функцією, причому

$$\lim_{\substack{x\to0\\ (x>0)}}\operatorname{ctg}x=+\infty,\quad \lim_{\substack{x\to\pi\\ (x<\pi)}}\operatorname{ctg}x=-\infty.$$

Отже, в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ існує неперервна і спадна функція, обернена до функції $y=\operatorname{ctg}x$. Її записують так:

$$y=\operatorname{arcctg}x.$$

Графік функції $y=\operatorname{arcctg}x$ зображено на рис. 29.

2.29
СТЕПІНЬ З ДІЙСНИМ ПОКАЗНИКОМ. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ

Нехай задано довільне дійсне число $a > 0$. Тоді в шкільному курсі математики вводиться поняття степеня a^r, де r — раціональне число. Нагадаємо, як це робиться.

Якщо $r = n \geq 1$ — натуральне число, то за означенням під a^n розуміють

$$a^1 = a, \quad a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ разів}} \ (n \geq 2), \quad a^0 = 1;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Цим самим визначено функцію $a^n \ (a > 0)$ на множині Z усіх цілих чисел.

Степінь $a^{\frac{1}{n}}$, $n \geq 2$ означається як арифметичне значення кореня n-го степеня (існування якого доведено в п. 2.28) із $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Тоді якщо $\frac{p}{q} (q > 0)$ — невід'ємне раціональне число, то за означенням приймають

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

І, нарешті, степінь $a^{-\frac{p}{q}}$ означають так

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Цим самим функцію a^x визначено, згідно з наведеними означеннями, на множині Q всіх раціональних чисел.

У шкільному курсі математики доводиться також рівність

$$a^{r_1 + r_2} = a^{r_1} a^{r_2},$$

де r_1 і r_2 — довільні раціональні числа із множини Q. Там само доводиться, що при будь-яких $r_1 < r_2$; $a^{r_1} < a^{r_2} \ (r_1, r_2 \in Q, a > 1)$.

З'ясовується, що поняття степеня можна поширити і на той випадок, коли показник є ірраціональним числом, ввівши при цьому відповідне означення. Тоді функція a^x стає визначальною на множині R усіх дійсних чисел.

Отже, нехай задано довільне ірраціональне число $\alpha \in R$. Тоді в будь-якому околі точки α є як раціональні, так й ірраціональні числа. Візьмемо довільну послідовність раціональних чисел r_n $(n = 1, 2, \dots)$, які належать розглядуваному околу і таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$. Це завжди можна зробити, причому таких послідовностей можна побудувати скільки завгодно (див. п. 2.20).

Правильною є теорема.

Теорема. Які б не були дві послідовності раціональних чисел $\{r_n\}$ і $\{r'_n\}$, збіжні до числа α, відповідні послідовності $\{a^{r_n}\}$, $\{a^{r'_n}\}$, $(a > 0)$ є збіжними і їх границі рівні між собою, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n}. \tag{80}$$

Доведення. Доведемо, що зі збіжності послідовності $\{r_n\}$ випливає збіжність послідовності $\{a^{r_n}\}$.

Випадок $a > 1$.

Розглянемо спочатку випадок $a > 1$. Оскільки послідовність збіжна, то вона є обмеженою, тобто існує раціональне число M таке, що $|r_n| < M$, $n = 1, 2, \dots$.

Тоді рівності

$$a^{r_n} - a^{r_m} = a^{r_m}\left(a^{r_n - r_m} - 1\right);$$

$$a^{r_m} - a^{r_n} = a^{r_n}\left(a^{r_m - r_n} - 1\right)$$

можна записати у вигляді однієї нерівності

$$\left|a^{r_n} - a^{r_m}\right| < a^M\left(a^{|r_n - r_m|} - 1\right). \tag{81}$$

До послідовності $\{r_n\}$ застосуємо критерій Коші про збіжність числової послідовності. Згідно з цим критерієм для будь-якого додатного числа, наприклад $\frac{1}{p}$, де p — натуральне число, знайдеться натуральне число N таке, що для всіх $n > N$ і $m > N$ виконується нерівність

$$|r_n - r_m| < \frac{1}{p}.$$

Тоді нерівність (81) набирає вигляду

$$\left|a^{r_n} - a^{r_m}\right| < a^M\left(a^{\frac{1}{p}} - 1\right),\ n, m > N. \tag{82}$$

До різниці $a^{\frac{1}{p}} - 1$ застосуємо нерівність Бернуллі (п. 2.6). Отримуємо

$$a^{\frac{1}{p}} - 1 < \frac{a-1}{p}.$$

Згідно з аксіомою Архімеда, число p можна вибрати таким, щоб виконувалася нерівність

$$p > \frac{a^{M}(a-1)}{\varepsilon}, \tag{83}$$

де $\varepsilon > 0$ — будь-яке дійсне число.

Отже, нехай число p задовольняє нерівність (83), тоді нерівність (82) можна записати у вигляді

$$\left|a^{r_n} - a^{r_m}\right| < \varepsilon \tag{84}$$

для всіх $n > N$ і $m > N$.

З формули (84) випливає, що послідовність $\left\{a^{r_n}\right\}$ задовольняє умову критерія Коші про збіжність числової послідовності. Цим самим доведено, що послідовність $\left\{a^{r_n}\right\}$ є збіжною.

Позначимо її границю

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = A. \tag{85}$$

Аналогічно до попереднього можна довести, що зі збіжності деякої іншої послідовності $\{r_n'\}$ до числа $\alpha\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = \alpha\right)$ випливає збіжність послідовності $\left\{a^{r_n'}\right\}$. Позначимо

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n'} = B$$

і доведемо, що $A = B$.

Для цього розглянемо такі рівності:

$$a^{r_n} - a^{r_n'} = a^{r_n'}\left(a^{r_n - r_n'} - 1\right);$$

$$a^{r_n'} - a^{r_n} = a^{r_n}\left(a^{r_n' - r_n} - 1\right).$$

Оскільки послідовності $\{r_n\}$ і $\{r_n'\}$ збіжні, то вони є обмеженими. Отже, існує раціональне число r

$$a^{r_n} \le a^{|r_n|} < a^{r};$$

$$a^{r_n'} \le a^{|r_n'|} < a^{r}. \tag{86}$$

Тому від рівностей (86) можна перейти до такої нерівності

$$\left|a^{r_n} - a^{r'_n}\right| < a^r\left(a^{\left|r_n - r'_n\right|} - 1\right). \tag{87}$$

Оскільки послідовності $\{r_n\}$ і $\{r'_n\}$ збігаються до того самого числа α, то можна довести, що існує натуральне число N' таке, що для всіх $n > N'$ виконується нерівність

$$\left|r_n - r'_n\right| < \frac{1}{k},$$

де k — будь-яке натуральне число.

Тоді нерівність (87) можна записати ще так:

$$\left|a^{r_n} - a^{r'_n}\right| < a^r\left(a^{\frac{1}{k}} - 1\right), n > N'.$$

Підсилимо останню нерівність нерівністю Бернуллі. Матимемо

$$\left|a^{r_n} - a^{r'_n}\right| < a^r\,\frac{a-1}{k}. \tag{88}$$

За аксіомою Архімеда існує натуральне число k таке, що

$$k > \frac{a^r\,(a-1)}{\eta},$$

де η — довільне дійсне число. При такому вибраному числу k нерівність (88) набирає вигляду

$$\left|a^{r_n} - a^{r'_n}\right| < \eta, \quad n > N'. \tag{89}$$

Оскільки число $\eta > 0$ — довільне, зокрема може бути і як завгодно малим, то з нерівності (89) випливає

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{r_n} - a^{r'_n}\right) = 0.$$

Звідси

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n}.$$

Для випадку $a > 1$ теорему доведено.

В и п а д о к $0 < a < 1$. Цей випадок зводиться до попереднього. Справді, правильною є рівність

$$a^{r_n} = \frac{1}{b^{r_n}},$$

де $b=\frac{1}{a}>1$. І, отже, за доведеним вище

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n}}.$$

В и п а д о к $a=1$. У цьому випадку

$$a^{r_n} = (1)^{r_n} = 1, n=1, 2, \ldots .$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = 1.$$

Теорему доведено.

З доведеної теореми та наведених означень можна сформулювати означення.

Означення. Нехай задано деяке дійсне число $a>0$. Функцію a^x, визначену для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$, називають показниковою функцією з основою a.

Оскільки за означенням $1^x=1$ для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$, то цей випадок нічого нового не вносить. Тому припускається, що показникова функція a^x визначається для $a>0$ і $a\neq1$.

Диференціальне числення функції однієї змінної

РОЗДІЛ 3

3.1 ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

3.1.1 ЗАДАЧА ПРО МИТТЄВУ ШВИДКІСТЬ

У п. 1.1 уже йшлося про поняття миттєвої швидкості змінного руху. Розглянемо це поняття докладніше.

Візьмемо спочатку випадок рівномірного прямолінійного руху. Відомо, що закон (залежність довжини шляху s від часу t) рівномірного руху виражається лінійною функцією

$$s = at + b, \tag{1}$$

де a і b — сталі числа.

Розглянемо два різні моменти часу: t і $t + \Delta t$, де $\Delta t > 0$ — приріст часу. Довжину шляху, який матеріальна точка проходить за час Δt, позначимо через Δs — приріст довжини шляху. Згідно з рівністю (1),

$$\Delta s = a(t + \Delta t) + b - (at + b) = a\Delta t.$$

Знайдемо відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{a\Delta t}{\Delta t} = a.$$

Проте $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ є середньою швидкістю v_c. Отже, для рівномірного руху

$$v_c = a, \tag{2}$$

тобто середня швидкість є сталою і не залежить від часу Δt. Вона залишається тією самою в будь-які моменти часу, тому природно середню швидкість для рівномірного руху прийняти за миттєву швидкість або за швидкість у певний момент часу. Оскільки в будь-які моменти часу миттєва швидкість однакова, то її називають швидкістю рівномірного руху.

Розглянемо випадок нерівномірного руху. Для цього візьмемо приклад нерівномірного руху, розглянутий у п. 1.1. Як у попередньому прикладі, ставимо задачу про обчислення швидкості, коли точка, рухаючись, у момент часу t займе положення M (рис. 30).

Надалі користуватимемося означенням.

Означення. Швидкістю v рухомої точки в момент часу t називають границю середньої швидкості v_c на проміжку часу Δt, коли Δt прямує до нуля. У розглядуваному прикладі

$$s = \frac{gt^2}{2}, \quad \Delta s = g\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}. \tag{3}$$

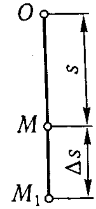


Рис. 30

Тоді

$$v_c = gt + \frac{g\Delta t}{2}. \tag{4}$$

Отже, згідно з наведеним вище означенням знаходимо

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = gt. \tag{5}$$

Розглянемо загальний випадок. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно, а закон руху її задається деякою функцією $f(t)$

$$s = f(t). \tag{6}$$

Поставимо задачу: знайти швидкість точки в момент часу t. Використаємо наведене означення. Тоді швидкість v точки, яка рухається за законом (6), у момент часу t визначається співвідношенням

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c.$$

Підставляючи у це рівняння значення $v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, дістанемо формулу для знаходження швидкості v:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{7}$$

Знайдемо приріст шляху Δs. Надамо часу t приріст Δt. Тоді з (6) дістанемо вираз для приросту шляху

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t). \tag{8}$$

Підставивши у (7) значення Δs, матимемо остаточно таку формулу:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{9}$$

Зазначимо, що формула (9) дає змогу знайти швидкість у момент часу t тільки тоді, коли існує границя цього відношення. Якщо границя цього відношення за певного значення t не існує, то кажуть, що рухома точка в цей момент часу швидкості не має.

❑ **Приклади**

1. Нехай точка рухається рівномірно прискорено з прискоренням a і початковою швидкістю v_0. Знайти її швидкість у момент часу t.

Р о з в ' я з а н н я. Відомо, що залежність шляху від часу за рівномірно прискореного руху виражається формулою

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{10}$$

Знайдемо приріст шляху Δs. Маємо

$$\Delta s = v_0 (t + \Delta t) + \frac{a(t + \Delta t)^2}{2} - \left(v_0 t + \frac{at^2}{2} \right).$$

Спростивши вираз у правій частині цієї рівності, дістанемо

$$\Delta s = v_0 \Delta t + at\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2},$$

тоді

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0 + at + \frac{a\Delta t}{2}.$$

Знайдемо границю цього виразу при $\Delta t \to 0$. Дістанемо формулу

$$v = v_0 + at, \tag{11}$$

відому з курсу фізики для середньої школи.

2. Нехай точка рухається так, що закон її руху виражено формулою

$$s = t^3 - 5t + t + 2.$$

Знайти: 1) середню швидкість точки на проміжку від $t_1 = 5$ до $t_2 = 10$ с; 2) швидкість точки на початку і в кінці цього проміжку.

Р о з в ' я з а н н я. Як і в першому прикладі, знайдемо приріст шляху Δs. Для цього розглянемо два моменти часу: t і $t + \Delta t$. Маємо

$$\Delta s = (t + \Delta t)^3 - 5(t + \Delta t)^2 + (t + \Delta t) + 2 - \left(t^3 - 5t^2 + t + 2\right)$$

або

$$\Delta s = 3t\Delta t^2 + 3t^2\Delta t + \Delta t^3 - 10t\Delta t - 5\Delta t^2 + \Delta t.$$

Обчислимо середню швидкість на проміжку Δt

$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3t\Delta t + 3t^2 + \Delta t^2 - 10t - 5\Delta t + 1. \tag{12}$$

Підставивши значення $t = t_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$, знайдемо середню швидкість на проміжку від $t_1 = 5$ до $t_2 = 10$ с:

$$v_c = 101 \text{ м/с}.$$

Знайдемо швидкість у будь-який момент часу t. Для цього обчислимо границю виразу (12) при $\Delta t \to 0$. Дістанемо

$$v = 3t^2 - 10t + 1. \tag{13}$$

Підставивши у формулу (13) окремі значення часу t, щоразу діставатимемо відповідні значення швидкості. Зокрема, підставивши в (13) значення $t = t_1 = 5$ с та $t = t_2 = 10$ с, матимемо

$$v = 26(\text{м/с}); \; v = 201(\text{м/с}).$$

3.1.2
ЗАДАЧА ПРО ГУСТИНУ НЕОДНОРІДНОГО СТРИЖНЯ

Нехай дано деякий неоднорідний стрижень завдовжки l. Нагадаємо, що матеріальне тіло називають *неоднорідним*, якщо його густина не є сталою, а змінюється від точки до точки.

Візьмемо на стрижні (рис. 31) довільну точку M, відстань якої від точки O дорівнює x. Нехай маса m частини відрізка OM відома і є деякою функцією $m(x)$:

$$m = m(x), \; 0 \le x \le l. \tag{14}$$

Поставимо задачу: знайти густину стрижня в будь-якій точці M. Як у задачі про миттєву швидкість, крім точки M розглянемо деяку точку M_1, відстань якої від точки O позначимо через $x + \Delta x$, де Δx — приріст x. Нехай

$$\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$$

є масою відрізка MM_1, а Δm — приростом маси. Тоді величину

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x} \tag{15}$$

називають *середньою лінійною густиною* стрижня на проміжку Δx і позначають ρ_c:

$$\rho_c = \frac{\Delta m}{\Delta x}. \tag{16}$$

Означення. Границю середньої густини на проміжку Δx

$$\lim_{\Delta x \to 0} \rho_c = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} \tag{17}$$

називають *лінійною густиною* стрижня в цій точці.

Отже, якщо густину стрижня в цій точці позначити ρ, то, згідно з означенням, матимемо

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}. \tag{18}$$

Підставивши значення Δm, дістанемо формулу для обчислення густини стрижня в цій точці:

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}. \tag{19}$$

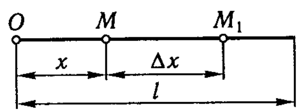


Рис. 31

❑ **Приклад**

3. Обчислити густину лінійного стрижня в точці, яка знаходиться від початку стрижня на відстані $x = 15$ см, якщо відомо, що маса m змінного стрижня OM (див. рис. 31) дорівнює

$$m = x^4. \qquad (20)$$

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося формулою (19). Для цього спочатку знайдемо середню густину цього стрижня на проміжку Δx. Використовуючи формули (15) і (20), дістанемо

$$\rho_c = \frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = 4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x\Delta x^2 + \Delta x^3. \qquad (21)$$

Обчисливши границю при $\Delta x \to 0$, маємо

$$\rho = 4x^3.$$

Підставивши значення $x = 15$, знаходимо

$$\rho = 13\,500\left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right). \qquad (22)$$

3.1.3
ЗАДАЧА ПРО ВЕЛИЧИНУ СИЛИ ЗМІННОГО СТРУМУ, ЯКИЙ ПРОХОДИТЬ ПО ПРОВІДНИКУ

Нехай по провіднику за час t через поперечний переріз проходить кількість електрики q, яка з часом змінюється, і ця зміна задається функцією

$$q = q(t). \qquad (23)$$

Потрібно знайти силу струму, який проходить через провідник, у момент часу t.

Для розв'язання цієї задачі застосуємо той самий спосіб, що й для розв'язання двох попередніх. Розглянемо крім моменту часу t момент часу $t + \Delta t$, де $\Delta t > 0$ — приріст часу. Знайдемо приріст кількості електрики

$$\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t).$$

Відношення

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}$$

називають середньою силою струму за проміжок часу Δt і позначають I_c:

$$I_c = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}. \qquad (24)$$

Означення. Границю середньої сили струму за проміжок часу Δt

$$\lim_{\Delta t \to 0} I_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad (25)$$

називають *силою струму* в заданий момент часу.

Отже, якщо через I позначити силу струму в момент часу t, то для її обчислення маємо формулу

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} I_c$$

або

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}. \qquad (26)$$

❑ **Приклад**

4. Нехай у момент часу t через поперечний переріз провідника проходить кількість електрики

$$q = \sqrt{2+t}. \qquad (27)$$

Знайти силу струму в момент $t = 2$ с.

Р о з в ' я з а н н я. За формулою (24) знаходимо середню силу струму за проміжок часу Δt:

$$I_c = \frac{\sqrt{2+t+\Delta t} - \sqrt{2+t}}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{2+t+\Delta t} + \sqrt{2+t}}.$$

Обчисливши границю цього виразу при $\Delta t \to 0$, знайдемо силу струму в довільний момент часу t:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+t+\Delta t} + \sqrt{2+t}} = \frac{1}{2\sqrt{2+t}}. \qquad (28)$$

Підставивши у формулу (28) значення $t = 2$, дістанемо відповідь

$$I = \frac{1}{4}.$$

3.1.4
ЗАДАЧА ПРО ДОТИЧНУ ДО КРИВОЇ

У шкільному курсі математики поняття дотичної до кривої у певній точці означалося як пряма, що має з колом одну спільну точку. Проте це означення є окремим випадком, його не можна поширити, наприклад на незамкнені криві. Справді, розглянемо параболу, рівняння якої $y = x^2$ (рис. 32). Прямі (вісь абсцис і вісь ординат) мають із кривою в точці O по одній спільній точці. Отже, кожна з них, згідно з означенням, має бути дотичною до кривої в точці O, тоді як вісь ординат не є дотичною до параболи в точці O.

Розглянемо ще один приклад. Нехай розглядувана крива є синусоїдою $y = \sin x$ (див. рис. 15). Тоді пряма $y = 1$ має із заданою кривою безліч спільних точок (а не одну!), і вона є дотичною до заданої кривої, наприклад, у точці M.

Це саме стосується й прямої $y = -1$, яка є дотичною до кривої, наприклад, у точці M_1 і має безліч спільних точок із кривою.

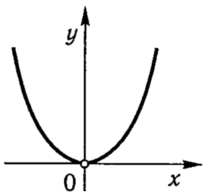


Рис. 32

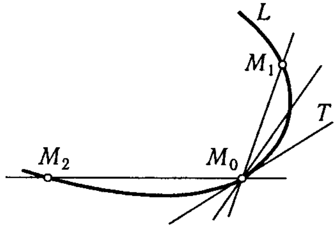


Рис. 33

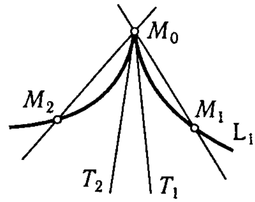


Рис. 34

Тому потрібно дати загальне означення дотичної, яке б підходило як до замкнених, так і до незамкнених кривих.

Отже, нехай маємо деяку довільну криву L (рис. 33). Візьмемо на цій кривій дві точки M_0 та M_1 і через них проведемо пряму M_0M_1, яку називатимемо *січною*. Якщо точка M_1 переміщатиметься вздовж кривої, то січна M_0M_1 обертатиметься навколо точки M_0. Нехай M_1, рухаючись уздовж кривої, наближається до точки M_0. Тоді довжина відрізка M_1M_0 прямує до нуля, а січна M_0M_1 може наближатися при цьому до деякої прямої M_0T. Якщо величина кута M_1M_0T прямує до нуля, то пряму M_0T називають *граничним положенням* січної M_0M_1.

Отже, можна дати таке означення.

Означення. *Дотичною до кривої* L у точці M_0 називають граничне положення M_0T січної M_0M_1, якщо точка M_1 прямує вздовж кривої до точки M_0.

Зауважимо, що з якого б боку (справа чи зліва) точка M_1 не наближалася вздовж кривої до точки M_0, січна M_0M_1 при цьому має наближатися до того самого її граничного положення (до тієї самої прямої). Тільки в цьому випадку кажуть, що в точці M_0 крива має дотичну. Не будь-яка крива в розглядуваній точці має дотичну. Граничне положення січної може не існувати.

Як випливає з рис. 33, з якого б боку точка M_1 (зліва точка M_2) по кривій не прямувала б до точки M_0, січна M_0M_1, обертаючись навколо точки M_0, при цьому наближається до тієї самої прямої M_0T.

Якщо січна M_0M_1 наближається до різних прямих (рис. 34) залежно від того, з якого боку $M_1 \to M_0$, то кажуть, що в цій точці дотичної до кривої не існує. Так, дотична до кривої L_1 у точці M_0 не існує, тому що коли точка $M_1 \to M_0$ знаходиться справа від M_0, то січна M_0M_1 наближається до прямої M_0T_1, а коли точка $M_2 \to M_0$ знаходиться зліва, то січна M_2M_0 наближається до прямої M_0T_2.

Розглянемо випадок, коли крива задана в декартовій системі координат рівнянням

$$y = f(x), \tag{29}$$

де $f(x)$ — неперервна функція на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$. Нехай графік цієї функції (крива L) має вигляд, який зображено на рис. 35. Візьмемо на кривій точку $M_0(x_0, y_0)$ і застосуємо наведене вище означення дотичної до цієї кривої в точці M_0. Візьмемо на кривій ще точку M_1. Позначимо її координати через $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$. Через точки M_0 і M_1 проведемо січну M_0M_1. Кут, який утворює січна M_0M_1 з додатним напрямком осі Ox, позначимо через β. Тоді

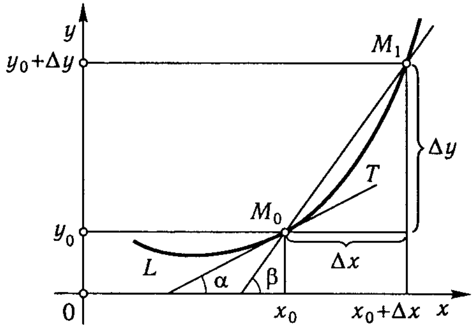


Рис. 35

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{30}$$

Нехай точка M_1 прямує вздовж кривої до точки M_0. Тоді координати точки M_1 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ наближатимуться як завгодно близько відповідно до координат точки $M_0(x_0, y_0)$, тобто

$$\lim_{M_1 \to M_0}(x_0 + \Delta x) = x_0, \quad \lim_{M_1 \to M_0}(y_0 + \Delta y) = y_0. \tag{31}$$

Із співвідношень (31) випливає, що $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, якщо точка $M_1 \to M_0$.

Нехай тепер $\Delta x \to 0$. Тоді й $\Delta y \to 0$ (внаслідок неперервності функції $f(x)$), а отже, точка $M_1 \to M_0$.

Таким чином, у цьому випадку умови $\Delta x \to 0$ необхідно і достатньо, щоб $M_1 \to M_0$.

Припустимо, що розглядувана крива в точці M_0 має дотичну M_0T.

Нехай $\Delta x \to 0$. Тоді точка M_1 наближається вздовж кривої до точки M_0, а січна M_0M_1, обертаючись навколо точки M_0, наближається до свого граничного положення — прямої M_0T, яка, згідно з припущенням, і є дотичною до кривої в точці M_0.

Позначимо кут, утворений цією дотичною з додатним напрямком осі Ox, через α. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то кут β прямує до кута α. Отже, внаслідок неперервності тангенса, $\operatorname{tg}\beta \underset{\Delta x \to 0}{\to} \operatorname{tg}\alpha$, проте $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Отже, маємо співвідношення

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{32}$$

Теорему доведено.

Теорема. Якщо крива $y = f(x)$, де функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $\langle a; b\rangle$, має в точці M_0 дотичну, яка не паралельна осі Oy, то кутовий коефіцієнт дотичної визначається співвідношенням

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Справедлива й обернена теорема.

Теорема. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k, \tag{33}$$

то в точці M_0 існує дотична до кривої $y = f(x)$ і її кутовий коефіцієнт дорівнює k.

Доведення. Нехай існує границя (33). Тоді рівняння прямої можемо записати у вигляді

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{34}$$

Рівняння (34) задає пряму, що проходить через точку M_0. Покажемо, що ця пряма і є дотичною до кривої $y = f(x)$ у точці M_0.

Справді, якщо $\Delta x \to 0$, то точка M_1 прямує вздовж кривої до точки M_0, а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = k.$$

Отже, існує границя кутового коефіцієнта січної M_0M_1 при $\Delta x \to 0$, яка дорівнює k. Пряма (34), де кутовий коефіцієнт k визначається співвідношенням (33), є дотичною в точці M_0 до кривої (29).

Теорему доведено.

Із доведених теорем випливає такий критерій існування дотичної до кривої $y = f(x)$.

Для того щоб крива $y = f(x)$, де функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $\langle a; b\rangle$, мала в точці M_0 дотичну, необхідно і достатньо, щоб існувала границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

При виконанні цієї умови пряма (34), в якій k визначається співвідношенням (33), і є дотичною до кривої в точці M_0.

Якщо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty,$$

то крива в точці M_0 має дотичну, паралельну осі Oy.

❑ **Приклади**

5. Довести, що дотичною до параболи $y=x^2$ у точці $M_0(0;0)$ є вісь абсцис.

Р о з в ' я з а н н я. Визначимо спочатку кутовий коефіцієнт дотичної, користуючись співвідношенням (33). Для цього знаходимо приріст функції $f(x)=x^2$ у точці $x_0=0$. Нагадаємо, що приріст Δy визначається формулою

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0), \tag{35}$$

де $\Delta x = x - x_0$ — приріст аргументу. В цьому випадку

$$\Delta y = \Delta x^2.$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x$$

і

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0.$$

Отже, кутовий коефіцієнт k дотичної до параболи $y=x^2$ у точці $M_0(0;0)$ існує і дорівнює нулю, тобто $k=0$.

Підставляючи значення $x_0=0, y_0=0, k=0$ в (34), дістаємо рівняння дотичної

$$y=0. \tag{36}$$

Це рівняння є рівнянням осі абсцис.

6. Знайти рівняння дотичної до синусоїди $y=\sin x$ у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. Як у попередньому прикладі, знайдемо спочатку кутовий коефіцієнт дотичної, користуючись співвідношенням (33). Для цього знайдемо

$$\Delta y = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\sin\frac{\pi}{2} = -2\sin^2\frac{\Delta x}{2}.$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{-2\sin^2\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\frac{\Delta x}{2}\right)=0.$$

Отже, кутовий коефіцієнт k дотичної до синусоїди в точці $M_0\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ існує і дорівнює нулю, $k=0$.

Підставивши значення $x_0=\frac{\pi}{2}$, $y_0=1$, $k=0$ в (34), матимемо рівняння дотичної $y-1=0$, тобто пряма $y=1$ є дотичною до синусоїди $y=\sin x$ у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.

7. Нехай криву задано рівнянням

$$y=|\sin x|. \tag{37}$$

Довести, що крива в точках із абсцисами $x=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$ і ординатою $y=0$ дотичної не має.

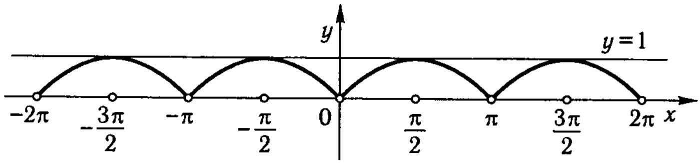


Рис. 36

Розв'язання. Візьмемо для простоти на кривій точку O з координатами $x = 0$, $y = 0$ (рис. 36).

Користуючись формулою (35), знаходимо приріст функції $|\sin x|$ у точці $x_0 = 0$:

$$\Delta y = |\sin \Delta x|.$$

Покажемо, що відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$ границі не має. Справді, якщо $\Delta x \to 0$ і $\Delta x > 0$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Якщо $\Delta x \to 0$ і $\Delta x < 0$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 00)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 00)}} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{-\sin \Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Правостороння і лівостороння границі в точці $x = 0$ різні (у прикладах 5 і 6 границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не залежить від того, чи $\Delta x > 0$ чи $\Delta x < 0$). Тому відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ границі не має, а отже, не існує кутового коефіцієнта дотичної до кривої (37) у точці з координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Тому задана крива в точці O дотичної не має.

Аналогічно можна довести, що крива не має дотичної в решті точок, абсциси яких дорівнюють $x = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, ...$, а ординати $y = 0$.

Зазначимо, що проведене аналітичне дослідження не суперечить геометричному зображенню кривої (37). Згідно з рис. 36, у розглядуваних точках не можна провести дотичну до заданої кривої. Про такі точки кажуть, що крива в цих точках зазнає *злому*.

Незважаючи на те що задачі 3.1.1—3.1.4 різні за своїм змістом, розв'язуються вони тим самим способом. Справді, якщо в кожній із цих задач незалежну змінну позначити через x, а залежну змінну — через y, то відповідь на поставлене в задачі запитання знайдемо за допомогою граничного переходу у відношенні $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, тобто за допомогою границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{38}$$

Оскільки за допомогою границі можна розв'язувати такі досить важливі задачі з механіки, фізики, геометрії, то доцільно всебічно вивчити цю границю, зокрема вказати способи її обчислення. При цьому потрібно величини x і y розглядати абстрактно, не вкладаючи в них конкретного змісту, тоді й границя (38) буде абстрактною величиною. Цю границю в математиці називають *похідною*.

3.2 ПОХІДНА. МЕХАНІЧНИЙ І ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Нехай функція $y = f(x)$ задана на деякому інтервалі $(a; b)$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in (a; b)$ і надамо x_0 довільного приросту Δx (число Δx може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб точки x_0 і $x_0 + \Delta x$ належали інтервалу $(a; b)$. Обчислимо в точці x_0 приріст функції Δy

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення. Якщо існує границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx за умови, що Δx прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то цю границю називають *похідною функції* $f(x)$ *у точці* $x = x_0$ і позначають символом

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 00)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{39}$$

Для похідної застосовують також позначення: $\frac{dy}{dx}$ або $\frac{df(x_0)}{dx}$ (Лейбніц)[1], Dy або $Df(x_0)$ (Коші). Надалі користуватимемося позначенням (39), яке вперше запропонував французький математик Лагранж[2], причому термін «похідна» ввів саме він.

Якщо функція $f(x)$ має похідну в кожній точці x інтервалу $(a; b)$, то похідну позначатимемо y' або $f'(x)$.

---

[1] *Лейбніц Г.* (1646—1716) — німецький математик.

[2] *Лагранж Ж.* (1736—1813) — французький математик.

Таким чином, якщо x_0 — фіксована точка інтервалу $(a;b)$, то похідна $f'(x_0)$, якщо вона існує, є числом. Якщо похідна існує в кожній точці $x \in (a;b)$, то $f'(x)$ є функцією від x.

Можна з'ясувати механічний зміст похідної, а саме, величина швидкості v у певний момент часу t дорівнює похідній пройденого шляху s по часу t, тобто

$$v = s',$$

якщо $s = f(t)$, то $v = f'(t)$ (див. задачу 3.1.1). Геометричний зміст похідної випливає із задачі 3.1.4. Справді, нехай x і y — координати точки, що належить кривій $y = f(x)$. Тоді похідна $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту $\operatorname{tg}\alpha$ дотичної, проведеної до кривої в точці з координатами

$$x_0,\ y_0 = f(x_0).$$

З означення похідної випливає правило її знаходження.

Правило знаходження похідної. Щоб знайти похідну функції $f(x)$ у точці x_0, потрібно:

1) значенню x_0 надати довільного приросту Δx, тобто ввести до розгляду точку $x_0 + \Delta x$;

2) знайти приріст Δy функції в точці x_0;

3) знайти відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

4) знайти границю (якщо вона існує) відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Якщо границя існує, то вона і є похідною $f'(x_0)$.

Оскільки в п. 1) ніяких обчислень немає, то при знаходженні похідної починають п. 2); п. 1) — 4) називають *кроками*.

Зауважимо, що коли похідну потрібно знайти в будь-якій точці $x \in (a;b)$, то правило залишається те саме, тільки замість x_0 скрізь беремо x.

❑ **Приклади**

1. Знайти похідну функції $y = x^2$ у точці $x_0 = 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Користуємося наведеним правилом. Знаходимо приріст Δy функції x^2 у точці $x_0 = 1$:

$$\Delta y = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + \Delta x^2.$$

Знаходимо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

і границю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

Отже, похідна функції x^2 у точці $x_0=1$ існує і дорівнює 2:

$$f'(1)=2.$$

2. Знайти похідну функції $y=x^3+x^2+4x+1$ у точці $x_0=0$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо приріст Δy у точці $x_0=0$

$$\Delta y=\Delta x^3+\Delta x^2+4\Delta x.$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x^3+\Delta x^2+4\Delta x}{\Delta x}=\Delta x^2+\Delta x+4.$$

Знайдемо границю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x^2+\Delta x+4\right)=4.$$

Отже, похідна функції $y=x^3+x^2+4x+1$ у точці $x_0=0$ існує і дорівнює 4, тобто

$$f'(0)=4.$$

3. Знайти похідну функції

$$y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x\neq 0;\\ 0, \text{ якщо } x=0\end{cases}\tag{40}$$

у точці $x_0=0$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо приріст Δy у точці $x_0=0$:

$$\Delta y=\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Знайдемо границю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\right)=0.$$

Отже, похідна функції (40) у точці $x_0=0$ існує і дорівнює нулю:

$$f'(0)=0.$$

4. Довести, що функція

$$y=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x\neq 0;\\ 0, \text{ якщо } x=0,\end{cases}\tag{41}$$

у точці $x_0=0$ похідної не має.

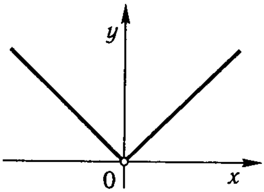


Рис. 37

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо приріст функції

$$\Delta y = \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Покажемо, що функція $\sin\frac{1}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ границі не має.

Справді, візьмемо дві послідовності точок $\Delta x_n = \frac{1}{\pi n}$ і $\Delta x_n' = \frac{2}{\pi(2n+1)}$, де $n = 1, 2, \ldots$. Ці послідовності збігаються до нуля, причому $\Delta x_n \neq 0, \Delta x_n' \neq 0$. Знайдемо значення функції $\sin\frac{1}{\Delta x}$ у точках Δx_n, $\Delta x_n'$:

$$\sin\frac{1}{\Delta x_n} = \sin n\pi = 0;\ \sin\frac{1}{\Delta x_n'} = \sin\frac{\pi}{2}(2\pi+1) = \pm 1.$$

Останні рівності й доводять той факт, що функція $\sin\frac{1}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ границі не має.

Отже, похідна функції (41) у точці $x_0 = 0$ не існує.

5. Довести, що функція $y = |x|$ у точці $x_0 = 0$ похідної не має.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо приріст заданої функції в точці $x_0 = 0$. Маємо

$$\Delta y = |\Delta x|.$$

Знайдемо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{якщо } \Delta x > 0; \\ -1, \text{якщо } \Delta x < 0. \end{cases} \tag{42}$$

Звідси випливає, що відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ границі не має. Це відношення має правосторонню границю, яка дорівнює 1, і лівосторонню, яка дорівнює -1, але ці границі не рівні між собою.

Зазначимо, що згідно з графіком функції $y = |x|$ (рис. 37), у точці O (0; 0) провести дотичну не можна. У цій точці крива, яка є графіком заданої функції, має злом.

Перейдемо до розгляду так званих односторонніх похідних.

Нехай Δx наближається до нуля праворуч, тобто $\Delta x \to 0$, але $\Delta x > 0$. Якщо існує границя

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то цю границю називають *правосторонньою похідною* в точці x_0 і позначають

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 + 0).$$

Аналогічно, якщо існує границя

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то цю границю називають *лівосторонньою похідною* в точці x_0 і позначають

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 - 0).$$

Так, у прикладі 5 правостороння похідна в точці x_0 дорівнює 1, а лівостороння — -1.

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a; b]$, то під похідною в точці a розуміють правосторонню похідну, а в точці b — лівосторонню.

Якщо у внутрішній точці $x_0 \in \langle a; b \rangle$ функція $f(x)$ має похідну, то в цій точці $f(x)$ має односторонні (правосторонню й лівосторонню) похідні, які дорівнюють похідній у цій точці. Проте, як це випливає з розглянутого прикладу, обернене твердження не виконується.

Якщо функція $f(x)$ у внутрішній точці $x_0 \in \langle a; b \rangle$ має односторонню похідну (одну або обидві), то кажуть, що крива, яка є графіком цієї функції, в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ має односторонню дотичну, відповідно праву або ліву.

У прикладі 5 права дотична у точці (0; 0) збігається з прямою $y = x$, а ліва — з прямою $y = -x$.

Якщо в точці $x_0 \in \langle a; b \rangle$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty,$$

то це невластиве число називають *нескінченною похідною функції* $f(x)$ у точці x_0.

Аналогічно означаються односторонні нескінченні похідні.

Якщо в точці $x_0 \in \langle a; b \rangle$ функція $f(x)$ має нескінченну похідну, то, як уже зазначалося, дотична до кривої, що є графіком функції, в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ паралельна осі Oy.

Надалі, якщо не буде зроблено застереження, то під словом «похідна» розумітимемо скінченну похідну.

Означення 1. Функцію $f(x)$ в точці x_0 називають *диференційовною*[1], якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Якщо функція $f(x)$ є диференційовною в кожній точці деякого інтервалу $(a; b)$, то її називають *диференційовною на цьому інтервалі.*

---

[1] Слово «диференціал» походить від лат. *differentia*, що означає «різниця».

Природно поставити запитання: який зв'язок існує між неперервністю функції в точці й диференційовністю її в цій точці? Зокрема, якщо функція неперервна в точці, то чи буде вона в цій точці диференційовною? Щоб дати відповідь, звернемося до прикладів 4 і 5.

Функція (41) у точці $x=0$ є неперервною. Справді, границя приросту функції в точці $x=0$ дорівнює нулю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\right)=0.$$

Проте задана функція в точці $x=0$, як це вже доведено, похідної не має. Отже, функція (41) в точці $x=0$ не є диференційовною. Функція $y=|x|$ у точці $x=0$ є неперервною, тому що

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

проте вона не є в точці $x=0$ диференційовною.

Отже, не будь-яка неперервна функція в точці є в цій точці диференційовною.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ у точці x_0 диференційовна, то вона в цій точці *неперервна.*

Доведення. Нехай $f(x)$ у точці x_0 має похідну $f'(x_0)$, тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Запишемо приріст функції Δy в точці x_0 у вигляді

$$\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x.$$

Тоді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Отже, границя приросту функції в точці x_0 дорівнює нулю. Тому функція $f(x)$ в точці x_0 є неперервною.

Теорему доведено.

З цієї теореми і розглянутих прикладів випливає, що неперервність функції в точці є тільки необхідною умовою диференційовності функції в цій точці.

3.3
ПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ. ПОХІДНА ОБЕРНЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Розглянемо приклади на знаходження похідної, а саме, виведемо формули для похідних елементарних функцій, причому, на відміну від попередніх прикладів, знаходитимемо похідну в довільній точці x. Формули для похідних елементарних функцій записують в окрему таблицю, яку називають *таблицею похідних*.

Похідна сталої функції $y = C = \mathrm{const}$. Нехай на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$ задано сталу функцію

$$y = C = \mathrm{const}.$$

Тоді значення цієї функції в точках x і $x + \Delta x$ рівні між собою за будь-якого $x \in \langle a;\, b\rangle$. Тому приріст $\Delta y = 0$, а отже, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$

Перейшовши до границі в останній рівності при $\Delta x \to 0$, маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Як бачимо, границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ існує і дорівнює нулю. Тому існує й похідна цієї функції в довільній точці x, яка також дорівнює нулю, тобто якщо $y = C = \mathrm{const}$, то $y' = 0$.

Похідна сталої функції дорівнює нулю.

Отже, якщо $y = 2$, то $y' = 0$; якщо $y = \ln 3$, то $y' = 0$; якщо $y = \arcsin 0{,}1$, то $y' = 0$.

Похідна степеневої функції $y = x^{\mu}$.

1. В и п а д о к   н а т у р а л ь н о г о   п о к а з н и к а. Нехай $\mu = n$, де n — натуральне число. Тоді функція x^n визначена на всій числовій осі. Отже, візьмемо довільну точку x і надамо їй приросту Δx. Тоді функція x^n матиме приріст Δy:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n.$$

Розкриємо $(x + \Delta x)^n$ за формулою бінома Ньютона

$$\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\Delta x^3 + \ldots + \Delta x^n.$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^{n-1}.$$

Знайшовши границю цього відношення при $\Delta x \to 0$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Отже, похідна y' від степеневої функції $y = x^n$ із натуральним показником у довільній точці $x \in (-\infty;\, +\infty)$ існує і дорівнює $y' = nx^{n-1}$.

Так, нехай $y = x$, тоді $y' = 1$; нехай $y = x^2$, тоді $y' = 2x$; нехай $y = x^{100}$, тоді $y' = 100x^{99}$.

2. В и п а д о к д о в і л ь н о г о п о к а з н и к а. Нехай μ є довільним дійсним числом. Тоді область визначення функції залежить від числа μ.

Нехай $\langle a; b\rangle$ — область визначення функції x^{μ}. Візьмемо довільне $x \in (a; b)$, але $x \neq 0$ (випадок $x = 0$ розглянемо окремо). Тоді приріст функції

$$\Delta y = (x + \Delta x)^{\mu} - x^{\mu} = x^{\mu}\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1\right).$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^{\mu}\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1\right)}{\Delta x}.$$

Виконавши перетворення в правій частині рівності, дістанемо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\mu-1}\frac{(1+\alpha)^{\mu} - 1}{\alpha}, \tag{43}$$

де $\alpha = \frac{\Delta x}{x}$.

Знайдемо границю відношення (43) при $\Delta x \to 0$. Зауважимо, що коли $\Delta x \to 0$, то й $\alpha \to 0$. Тому

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha \to 0} x^{\mu-1}\frac{(1+\alpha)^{\mu} - 1}{\alpha}. \tag{44}$$

Знайдемо окремо

$$\lim_{\alpha \to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu} - 1}{\alpha}.$$

Для цього введемо позначення

$$(1+\alpha)^{\mu} - 1 = \beta,$$

причому $\beta \to 0$, якщо $\alpha \to 0$. Тоді

$$(1+\alpha)^{\mu} = 1 + \beta,$$

звідси

$$\mu \ln(1+\alpha) = \ln(1+\beta).$$

Тоді

$$\frac{(1+\alpha)^{\mu} - 1}{\alpha} = \mu\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Внаслідок неперервності логарифмічної функції маємо рівності:

$$\lim_{\beta\to 0} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)} = \lim_{\beta\to 0} \frac{1}{\ln(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}} = \frac{1}{\ln e} = 1;$$

$$\lim_{\alpha\to 0} = \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Отже,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha} = \mu.$$

Повертаючись до співвідношення (44), маємо

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu x^{\mu-1},$$

тобто, якщо $y = x^{\mu}$ і $x \neq 0$, то

$$y' = \mu x^{\mu-1}. \tag{45}$$

Розглянемо випадок, коли $x = 0$. Якщо $\mu < 0$, то точка $x = 0$ не входить до області визначення функції x^{μ}. Тому розглядатимемо $\mu > 0$ і $\mu \neq 1$. Знайдемо приріст функції Δy у точці $x = 0$

$$\Delta y = \Delta x^{\mu}.$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x^{\mu-1}.$$

Звідси випливає, що при $\mu > 1$ границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, існує і дорівнює нулю

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Якщо $0 < \mu < 1$, то границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не існує, тобто у випадку $0 < \mu < 1$ функція x^{μ} у точці $x = 0$ похідної не має.

Проте якщо у формулі (45) покласти $x = 0$, то дістанемо той самий результат.

Отже, для похідної степеневої функції маємо таке правило: похідна степеневої функції дорівнює показнику, помноженому на цю функцію з показником, на одиницю меншим.

Наприклад:

нехай $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$, тоді $y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$;

нехай $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, тоді $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

нехай $y=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$, тоді $y'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Похідна показникової функції. Нехай маємо показникову функцію $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$. Знайдемо у довільній точці $x\in(-\infty;+\infty)$ приріст Δy

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x\left(a^{\Delta x}-1\right).$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\frac{\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}.$$

Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x\to 0$. Маємо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a^x\frac{\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}.$$

Оскільки a^x від Δx не залежить (є сталою відносно Δx), то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^x=a^x$. Щодо другого співмножника, то можна довести, що

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a.$$

Отже,

$$\lim_{\Delta x\to 0}a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Таким чином, похідна показникової функції a^x існує в довільній точці $x\in(-\infty;+\infty)$ і дорівнює

$$y'=a^x\ln a.$$

Зокрема, якщо $y=e^x$, то $y'=e^x$; якщо $y=2^x$, то $y'=2^x\ln 2$; якщо $y=10^x$, то $y'=10^x\ln 10$.

Похідні тригонометричних функцій.

1. $y=\sin x$. Знайдемо приріст функції $\sin x$ у довільній точці $x\in(-\infty;+\infty)$:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Знайдемо границю при $\Delta x \to 0$. Внаслідок неперервності функції $\cos x$ маємо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=\cos x.$$

Щодо другого множника, то, позначивши $\frac{\Delta x}{2}=\alpha$, маємо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Тому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)=\cos x.$$

Отже, похідна функції $\sin x$ існує в довільній точці $x\in(-\infty;+\infty)$ і дорівнює $\cos x$, тобто

$$y'=\cos x.$$

2. $y = \cos x$. Аналогічно доводиться, що для функції $\cos x$ у довільній точці $x\in(-\infty;+\infty)$ існує похідна і дорівнює $-\sin x$, тобто

$$y'=-\sin x.$$

3. $y = \operatorname{tg} x$. Візьмемо точку x таку, що $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$. Знайдемо приріст Δy

$$\Delta y=\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)}-\frac{\sin x}{\cos x}=$$

$$=\frac{\sin(x+\Delta x)\cos x-\sin x\cos(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)\cos x}=\frac{\sin\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cos x}.$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\cos(x+\Delta x)\cos x}.$$

Обчислимо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\cos(x+\Delta x)\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

Отже, похідна функції $\operatorname{tg} x$ існує і дорівнює

$$y'=\sec^2 x.$$

4. $\boldsymbol{y = \operatorname{ctg} x}$**.** Аналогічно доводиться, що похідна функції $y=\operatorname{ctg} x$ існує в точці x, де $k\pi < x < (k+1)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ і дорівнює

$$y'=-\operatorname{cosec}^2 x.$$

Перш ніж вивести формули похідних обернених тригонометричних функцій, а також логарифмічної функції, доведемо теорему про похідну оберненої функції.

Теорема. Нехай функція $y=f(x)$ задовольняє всі умови теореми про існування оберненої функції і в точці x_0 має похідну $f'(x_0)\neq 0$. Тоді обернена до неї функція $x=\varphi(y)$ у точці $y_0=f(x_0)$ має також похідну, яка дорівнює

$$\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доведення. Надамо y_0 приросту Δy. Тоді функція $x=\varphi(y)$ дістане приріст Δx, причому, внаслідок монотонності функції $\varphi(y)$ матимемо $\Delta x\neq 0$, якщо $\Delta y\neq 0$. Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна записати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Перейдемо в цій рівності до границі при $\Delta y\to 0$. Внаслідок неперервності оберненої функції Δx також прямуватиме до нуля. Отже,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

За умовою теореми $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ існує і дорівнює $f'(x_0)$. Тому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Отже, існує похідна функції $x=\varphi(y)$ у точці $y_0 = f(x_0)$, яка дорівнює

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{46}$$

Теорему доведено.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в довільній точці $f'(x) \neq 0$, то формула (46) виконується для точок x:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

або

$$x' = \frac{1}{y'}. \tag{47}$$

У формулі (47) похідні знаходяться за різними змінними: x' — це похідна x по y, а y' — похідна y по x. Тому щоб не плутати, за якими змінними знаходяться похідні, формулу (47) записують так:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{48}$$

Нижній індекс показує, за якою змінною знаходиться похідна. Щоб зручніше було користуватися формулою (48), поміняємо в ній місцями x і y. Тоді остаточно матимемо таку формулу для похідної оберненої функції:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \tag{49}$$

Похідні обернених тригонометричних функцій. Нехай маємо обернену функцію $y = \arcsin x$, де $-1 < x < 1$, $-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}$.

Тоді, згідно з означенням функції $\arcsin x$, маємо

$$x = \sin y,$$

причому похідна $(\sin y)'_y = \cos y$ при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ не дорівнює нулю. Тому для знаходження похідної $\arcsin x$ можна скористатися формулою (49). Дістаємо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}.$$

Оскільки $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то $\cos y$ набуває тільки додатних значень. Тоді можна записати

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

Отже, остаточно маємо формулу

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Зауважимо, що точки $x = \pm 1$ не розглядатимемо, оскільки при $x = \pm 1$ дістаємо $\arcsin x = \pm\frac{\pi}{2}$, а за цих значень $x'_y = \cos y = 0$.

Аналогічно можна вивести формулу похідних обернених тригонометричних функцій $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ (пропонуємо читачеві вивести ці формули самостійно):

1) $y = \arccos x$, де $x \in (-1; 1)$, $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

2) $y = \operatorname{arctg} x$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, $y' = \frac{1}{1+x^2}$;

3) $\operatorname{arccotg} x$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Похідна логарифмічної функції. Нехай маємо логарифмічну функцію $y = \log_a x$, де $x > 0$. Згідно з означенням логарифмічної функції, $x = a^y$. Оскільки $x'_y = a^y \ln a \neq 0$, то можна скористатися формулою (49):

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a^e}{x}.$$

Таблиця 1. **Основна таблиця похідних**

y	y'	y	y'
c	0	$\cos x$	$-\sin x$
x^μ	$\mu x^{\mu-1}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{cosec}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
x	1		
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$
e^x	e^x		
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Отже, маємо формулу похідної логарифмічної функції

$$y' = \frac{\log_a^e}{x}.$$

Зокрема, якщо $y = \ln x$, то $y' = \frac{1}{x}$.

Випишемо всі формули похідних у вигляді таблиці (табл. 1).

Користуючись цією таблицею, а також теоремами наступного параграфа, можна, не застосовуючи означення похідної, знаходити похідні функцій, що утворені за допомогою арифметичних операцій та суперпозиції над основними елементарними функціями.

3.4
ПОХІДНА СУМИ, ДОБУТКУ, ЧАСТКИ. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Доведемо теореми, які дають основні правила знаходження похідних функцій.

Похідна суми.

Теорема 1. Якщо функції $f_1(x), f_2(x)$ у точці x мають похідні, то функція $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ також у цій точці має похідну y', причому

$$y' = f_1'(x) \pm f_2'(x).$$

Доведення. Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції $f_1(x), f_2(x)$ матимуть прирости $\Delta f_1(x), \Delta f_2(x)$, а функція y матиме приріст

$$\Delta y = \Delta f_1(x) \pm \Delta f_2(x).$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}.$$

Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$. Внаслідок того що $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у точці x, згідно з умовою теореми, мають похідну, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} = f_1'(x), \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_2'(x).$$

Тому

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_1'(x) \pm f_2'(x).$$

Отже, згідно з означенням похідної, в точці x існує похідна функції y і вона дорівнює

$$y'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x). \tag{50}$$

Теорему доведено.

Цю теорему можна узагальнити для будь-якої скінченної суми диференційовних функцій. Тоді теорема 1 формулюється так:

похідна суми скінченного числа функцій дорівнює сумі похідних цих функцій, якщо похідні цих функцій існують, тобто

$$\left(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\right)' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x). \tag{51}$$

❑ **Приклади**

1. Знайти похідну функції

$$y = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + 5.$$

Р о з в ' я з а н н я. За формулою (51) маємо

$$y' = (\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + 5)' = (\sin x)' + (\cos x)' + (\operatorname{tg} x)' + (5)'.$$

Знаючи похідну кожної функції, дістаємо

$$y' = \cos x - \sin x + \sec^2 x.$$

2. Знайти похідну функції

$$y = e^x - \ln x + \arcsin x + \sqrt[3]{x}.$$

Р о з в ' я з а н н я. $y' = \left(e^x - \ln x + \arcsin x + \sqrt[3]{x}\right)' = \left(e^x\right)' - (\ln x)' + (\arcsin x)' + \left(\sqrt[3]{x}\right)' = e^x -$
$- \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

Похідна добутку.

Т е о р е м а 2. Якщо функції $f_1(x)$, $f_2(x)$ у точці x мають похідні, то в цій точці функція $f_1(x) f_2'(x)$ також має похідну y', причому

$$y' = f_1(x) f_2'(x) + f_1'(x) f_2(x). \tag{52}$$

Д о в е д е н н я. Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції $f_1(x)$, $f_2(x)$ матимуть приріст $\Delta f_1(x)$, $\Delta f_2(x)$, а функція y матиме приріст Δy:

$$\Delta y = \left(f_1(x) + \Delta f_1(x)\right)\left(f_2(x) + \Delta f_2(x)\right) - f_1(x) f_2(x) =$$

$$= f_1(x)\Delta f_2(x) + f_2(x)\Delta f_1(x) + \Delta f_1(x)\Delta f_2(x).$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f_1(x)\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} + f_2(x)\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x}\Delta f_2(x).$$

Перейдемо в цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$. За умовою теореми

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}=f_2'(x),\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x}=f_1'(x),$$

а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f_2(x)=0$, бо $f_2(x)$ неперервна в точці x.

Отже,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f_1(x)f_2'(x)+f_2(x)f_1'(x).$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що коли один співмножник, наприклад $f_1(x)=C=\text{const}$, то $f_1'(x)=0$ і формула (52) набирає вигляду $y'=Cf_2'(x)$, тобто якщо в добутку один множник сталий, то похідна такого добутку дорівнює цьому сталому множнику, помноженому на похідну від змінного множника.

Цю теорему, скориставшись методом індукції, можна узагальнити і на випадок n множників. Зокрема, для похідної добутку трьох функцій маємо

$$(f_1(x)f_2(x)f_3(x))'=f_1(x)f_2(x)f_3'(x)+$$

$$+f_1(x)f_3(x)f_2'(x)+f_2(x)f_3(x)f_1'(x). \qquad (53)$$

❑ **Приклади**

3. Знайти похідну функції $y=2^x\sin x$.

Р о з в ' я з а н н я. За формулою (52) маємо

$$y'=2^x(\sin x)'+\sin x\left(2^x\right)'=2^x\cos x+\sin x\cdot 2^x\ln 2.$$

4. Знайти похідну функції

$$y'=10\operatorname{ctg}x+5\ln x+2\sqrt[4]{x}+6\arccos x.$$

Р о з в ' я з а н н я.

$$y'=10(\operatorname{ctg}x)'+5(\ln x)'+2\left(\sqrt[4]{x}\right)'+6(\arccos x)'=$$

$$=-10\operatorname{cosec}^2 x+\frac{5}{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}-\frac{6}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. Знайти похідну функції $y=10^x\lg x\operatorname{arcctg}x$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$y'=10^x\lg x(\operatorname{arcctg}x)'+10^x\operatorname{arcctg}x(\lg x)'+$$

$$+\lg x\operatorname{arcctg}x\left(10^x\right)'=-\frac{10^x\lg x}{1+x^2}+\frac{10^x\operatorname{arcctg}x\lg e}{x}+\lg x\operatorname{arcctg}x\cdot 10^x\cdot\ln 10.$$

Похідна частки.

Теорема 3. Якщо функції $f_1(x)$, $f_2(x)$ у точці x мають похідні й $f_2(x) \neq 0$, то функція $y = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ також у точці x має похідну y', причому

$$y' = \frac{f_2(x) f_1'(x) - f_1(x) f_2'(x)_1}{(f_2(x))^2}. \tag{54}$$

Доведення. Надамо x приросту Δx. Тоді функції $f_1(x)$, $f_2(x)$ матимуть відповідно прирости $\Delta f_1(x)$ і $\Delta f_2(x)$, а функція y — приріст Δy:

$$\Delta y = \frac{f_1(x) + \Delta f_1(x)}{f_2(x) + \Delta f_2(x)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} =$$

$$= \frac{f_2(x)\Delta f_1(x) - f_1(x)\Delta f_2(x)}{(f_2(x) + \Delta f_2(x)) f_2(x)}.$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_2(x)\dfrac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} - f_1(x)\dfrac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}}{(f_2(x) + \Delta f_2(x)) f_2(x)}.$$

За умовою теореми 3 функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у точці $x = 0$ мають похідні, а це означає, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} = f_1'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_2'(x),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f_2(x) = 0,$$

тому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_2(x) f_1'(x) - f_1(x) f_2'(x)}{(f_2(x))^2}.$$

З останньої рівності випливає формула (54).

Теорему доведено.

❑ **Приклади**

6. Знайти похідну функції $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^4 + 2}$.

Р о з в ' я з а н н я. За формулою (54) маємо

$$y' = \frac{\left(x^4+2\right)\left(x^2+1\right)' - \left(x^2+1\right)\left(x^4+2\right)'}{\left(x^4+2\right)^2} =$$

$$= \frac{2x\left(x^4+2\right) - 4x^3\left(x^2+1\right)}{\left(x^4+2\right)^2} = \frac{2x\left(2-x^4-2x^2\right)}{\left(x^4+2\right)^2}.$$

7. Користуючись формулою (54), знайти похідну функцій

$$y = \operatorname{tg} x; \quad y = \operatorname{ctg} x.$$

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо похідну функції $\operatorname{tg} x$ (похідна $\operatorname{ctg} x$ знаходиться аналогічно). Запишемо $\operatorname{tg} x$ у вигляді

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Згідно з формулою (54), дістанемо

$$y' = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

8. Вивести формулу для похідної функції

$$y = \frac{C}{f(x)},$$

де $C = \text{const}$, а $f(x) \neq 0$ і в точці x має похідну.

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося формулою (54), вважаючи, що $f_1(x) = C$, $f_2(x) = f(x)$.

Маємо

$$y' = \frac{f(x)C' - Cf'(x)}{(f(x))^2} = -\frac{Cf'(x)}{(f(x))^2}. \tag{55}$$

Це і є шукана формула.

9. Знайти похідну функції $y = \sec x$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо $\sec x$ у вигляді

$$y = \frac{1}{\cos x}.$$

Скориставшись формулою (55), маємо

$$y' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x.$$

Аналогічно можна довести, що похідна функції

$$y = \operatorname{cosec} x$$

дорівнює

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x.$$

Похідна складеної функції.

Правило знаходження похідної складеної функції дає така теорема.

Теорема 4. Нехай маємо складену функцію $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ і нехай:

зовнішня функція $f(u)$ в точці $u_0 = \varphi(x_0)$ має похідну (за u), $y'_u = f'_u(u_0)$;

внутрішня функція $u = \varphi(x)$ у точці x_0 має похідну (за x), $u'_x = \varphi'_u(x_0)$.

Тоді складена функція $y = (\varphi(x))$ у точці x_0 також має похідну (за x), яка дорівнює добутку похідної зовнішньої функції $f(u)$ і похідної внутрішньої функції $\varphi(x)$, тобто

$$f'_x(\varphi(x_0)) = f'_u(u_0)\varphi'(x_0)$$

або

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{56}$$

Перш ніж доводити теорему, виведемо допоміжну формулу для приросту диференційовної функції.

Нехай функція $y = F(x)$ у точці x_0 диференційовна, тобто в точці x_0 існує похідна $F'(x_0)$. Користуючись означенням похідної, маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x_0).$$

Тоді існує окіл точки $\Delta x = 0$ такий, що для всіх значень Δx із цього околу крім $\Delta x = 0$ справджується рівність

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Помноживши обидві частини останньої рівності на Δx, $\Delta x \neq 0$, дістаємо формулу для приросту диференційовної функції

$$\Delta y = F'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \tag{57}$$

Зауваження. Формулу (57) виведено в припущенні, що $\Delta x \to 0$, але $\Delta x \neq 0$. Проте якщо на нескінченно малу функцію $\alpha(\Delta x)$, яку в точці $\Delta x = 0$ не визначено, накласти умову, щоб вона при $\Delta x = 0$ була неперервною, то слід вважати, що

$$\alpha(0) = 0.$$

Отже, надалі припускатимемо, що $\alpha(\Delta x)$ у точці $\Delta x = 0$ дорівнює нулю. Тоді при $\alpha(0) = 0$ формула буде справедливою й для $\Delta x = 0$.

Доведення теореми 4. Скористаємося спочатку тим, що функція $f(u)$ в точці $u_0 = \varphi(x_0)$ має похідну y'_u, а отже, вона в цій точці диференційовна. Тоді приріст Δy за формулою (57) можна записати так:

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u.$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (58)$$

Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$. Оскільки функція $u = \varphi(x)$ у точці x_0 має похідну, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x_0) = u'_x.$$

Щодо $\alpha(\Delta u)$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u) = 0,$$

тому що при $\Delta x \to 0$ маємо $\Delta u \to 0$ і $\alpha(\Delta u) \to 0$. При цьому не виключено, що коли $\Delta x \to 0$, то Δu може дорівнювати нулю. Згідно з наведеним зауваженням, вважатимемо, що $\alpha(\Delta u) = 0$ при $\Delta u = 0$.

Отже, з (58) дістаємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u u'_x$$

або

$$y' = f'(u_0)u'(x_0).$$

Теорему доведено.

Теорема 4 дає правило знаходження похідної складеної функції, а саме: щоб знайти похідну складеної функції, потрібно знайти похідну зовнішньої функції за зовнішнім аргументом і результат помножити на похідну внутрішньої функції за внутрішнім аргументом.

Зауважимо, що цю теорему можна узагальнити й на той випадок, коли аргумент внутрішньої функції є, у свою чергу, функцією від іншого аргументу. Так, якщо маємо функцію $y = f(u)$, де $u = f(v)$, $v = \varphi(x)$, і кожна з цих функцій у відповідних точках має похідні, то функція y має похідну за x, яка дорівнює

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x.$$

❑ **Приклади**

10. Знайти похідну функції $y = \sin x^2$.

Розв'язання. Введемо позначення: $u = x^2$. Тоді матимемо складену функцію $y = \sin u, u = x^2$. Зовнішня функція $\sin u$ і внутрішня x^2 задовольняють умови теореми 4 для довільного значення $x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, скориставшись формулою (56), дістанемо

$$y'_x = y'_u u'_x = \cos u \cdot 2x.$$

Підставивши замість u значення x^2, остаточно матимемо

$$y' = 2x\cos x^2.$$

11. Знайти похідну функції $y = \sin^2 x$.

Розв'язання. Введемо позначення: $u = \sin x$. Тоді матимемо складену функцію $y = u^2, u = \sin x$. Тут зовнішньою є степенева функція u^2, а внутрішньою — тригонометрична функція $\sin x$.

Тому

$$y'_x = 2u\cos x$$

або

$$y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

12. Знайти похідну функції $y = e^{\operatorname{tg}^2 x}$.

Розв'язання. Введемо позначення $v = \operatorname{tg} x$, $u = v^2$. Тоді матимемо складену функцію виду $y = e^u$, $u = v^2$, $v = \operatorname{tg} x$. Отже,

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = e^u \cdot 2v\sec^2 x.$$

Підставляючи сюди значення величин u і v, дістанемо

$$y' = 2e^{\operatorname{tg}^2 x}\operatorname{tg} x \sec^2 x.$$

13. Знайти похідну функції

$$y = \operatorname{ctg}^3 \sqrt[4]{\ln(\sin x + 2)}. \qquad (59)$$

Розв'язання. Зауважимо, що під час знаходження похідних складених функцій позначення для внутрішніх функцій вводять тільки на початку, щоб з'ясувати формулу (56), а коли остання вже міцно засвоєна, то вводити допоміжні букви, замість яких у кінцевий результат так чи інакше доводиться підставляти їхні значення, немає потреби.

Знайдемо похідну функції (59), не вводячи допоміжних позначень. Маємо

$$y' = \left(\operatorname{ctg}^3 \sqrt[4]{\ln(\sin x + 2)}\right)' = -3\operatorname{ctg}^2 \sqrt[4]{\ln(\sin x + 2)} \times$$

$$\times \operatorname{cosec}^2 \sqrt[4]{\ln(\sin x + 2)} \left(\sqrt[4]{\ln(\sin x + 2)}\right)' = -3\operatorname{ctg}^2 \sqrt[4]{\ln(\sin x + 2)} \times$$

$$\times \operatorname{cosec}^2 \sqrt[4]{\ln(\sin x + 2)} \frac{1}{4\sqrt[4]{\ln^3(\sin x + 2)}} \left(\ln(\sin x + 2)\right)' =$$

$$= -\frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2 \sqrt[4]{\ln^3(\sin x + 2)} \operatorname{cosec}^2 \sqrt[4]{\ln(\sin x + 2)} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt[4]{\ln^3(\sin x + 2)}} \frac{1}{\sin x + 2} (\sin x + 2)' =$$

$$= \frac{-3\operatorname{ctg}^2 \sqrt[4]{\ln(\sin x + 2)} \operatorname{cosec}^2 \sqrt[4]{\ln(\sin x + 2)} \cos x}{4(\sin x + 2)\sqrt[4]{\ln^3(\sin x + 2)}}.$$

14. Вивести формулу для знаходження похідної степенево-показникової функції

$$y = u^{v},\ u > 0,$$

де u і v — функції від x, що мають похідні в цій точці x.

Р о з в ' я з а н н я. Прологарифмувавши при основі e обидві частини рівності (60), маємо

$$\ln y = v \ln u, \qquad (61)$$

звідси

$$y = \mathrm{e}^{v \ln u}.$$

Отже, похідна функції y за x існує і дорівнює

$$y' = \mathrm{e}^{v\ln u}(v \ln u)' = \mathrm{e}^{v\ln u}\left(v(\ln u)'_x\right) + \ln u (v)'_x = \mathrm{e}^{v\ln u}\left(\frac{v u'_x}{u} + v'_x \ln u\right).$$

Проте $\mathrm{e}^{v\ln u} = u^{v}$, тому дістанемо

$$y'_x = v u^{v-1} u'_x + u^{v} \ln u v'_x. \qquad (62)$$

Наприклад, нехай $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$, тоді

$$y' = \operatorname{ctg} x (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x - 1} \sec^2 x - (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} \ln \operatorname{tg} x \operatorname{cosec}^2 x.$$

15. Користуючись формулою (56), знайти похідну степеневої функції $y = x^{\mu}$, де μ — довільне дійсне число, а $x > 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо функцію $y = x^{\mu}$ у вигляді

$$y = \mathrm{e}^{\mu \ln x}.$$

Тоді

$$y'_x = \mathrm{e}^{\mu \ln x}(\mu \ln x)'_x = \mu \mathrm{e}^{\mu \ln x}\frac{1}{x} = \mu x^{\mu - 1}.$$

Дістали відому формулу для похідної степеневої функції.

Метод знаходження похідних, за яким було розв'язано приклади 10 і 11, називають *методом логарифмічного диференціювання*. Його застосовують також для знаходження похідних окремих ірраціональних функцій.

❑ **Приклад**

16. Знайти похідну функції $y = \sqrt[5]{\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Прологарифмуємо за основою e ліву і праву частини цієї рівності. Маємо

$$\ln y = -\frac{1}{5}\ln\left(\sqrt{x}+1\right).$$

Продиференціювавши ліву й праву частини останньої рівності, знайдемо

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{10}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}}$$

або

$$y'=-\frac{1}{10\sqrt{x}\sqrt[5]{\left(\sqrt{x}+1\right)^6}}.$$

3.5
ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Розглянемо докладніше поняття диференційовності функції в точці. З'ясовується, що можна дати друге означення диференційовної функції в точці, еквівалентне означенню 1, наведеному в п. 3.2.

Означення 2. Функцію $y=f(x)$ називають *диференційовною в точці* x_0, якщо її приріст у цій точці можна записати у вигляді

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{63}$$

де $A=A(x_0)$ — число, а $\alpha(\Delta x)$ прямує до нуля, коли приріст Δx прямує до нуля.

Раніше було доведено, якщо функція в точці має похідну, то її приріст Δy можна зобразити у вигляді (57) або у вигляді (63), де число A дорівнює похідній цієї функції в точці.

Отже, якщо функція диференційовна в точці за означенням 1, то вона диференційовна й за означенням 2.

Нехай функція диференційовна за означенням 2. Доведемо, що тоді вона диференційовна й за означенням 1. Інакше кажучи, потрібно довести твердження: якщо для функції $y=f(x)$ у точці x_0 справджується рівність (63), то $f(x)$ у точці x_0 має похідну, яка дорівнює числу A.

Поділимо обидві частини рівності (63) на приріст $\Delta x\neq 0$. Матимемо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x).$$

Перейдемо до границі при $\Delta x\to 0$. Беручи до уваги, що

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0,$$

дістанемо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A.$$

Отже, існує похідна функції $f(x)$ у точці x_0, яка дорівнює числу A:

$$f'(x_0)=A.$$

Таким чином, якщо функція $y = f(x)$ у точці x_0 диференційовна, то її приріст Δy у цій точці можна записати так:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \tag{64}$$

Зазначимо, що доданки в рівності (64) відіграють неоднакову роль. Так, другий доданок $\alpha(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ є величиною вищого порядку мализни, ніж Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Перший доданок $f'(x_0)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ і $f'(x_0) \neq 0$ є величиною однакового порядку мализни з Δx.

Крім того, другий доданок у рівності (64) при $\Delta x \to 0$ і $f'(x_0) \neq 0$ є величиною вищого порядку мализни, ніж перший:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x_0)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x_0)} = 0.$$

Отже, перший доданок $f'(x_0)\Delta x$ у рівності (64) є головною частиною приросту функції.

Означення. Добуток $f'(x_0)\Delta x$ називають *диференціалом функції в точці* x_0 і позначають символом dy або $df(x_0)$:

$$dy = f'(x_0)\Delta x, \ \ df(x_0) = f'(x_0)\Delta x. \tag{65}$$

Зазначимо, що диференціал має дві властивості.

1°. Диференціал є головною частиною приросту функції (різниця між приростом функції і диференціалом при $\Delta x \to 0$ є величиною вищого порядку мализни, ніж Δx).

2°. Диференціал у розглядуваній точці x_0 є лінійною функцією від Δx.

Операцію знаходження диференціала функції називають *диференціюванням функції.* Оскільки диференціал відрізняється від похідної тільки множником Δx, операцію знаходження похідної функції також називають *диференціюванням функції.*

Диференціалом аргументу називають його приріст

$$\Delta x = dx.$$

Тоді формула для диференціала функції набирає вигляду

$$dy = f'(x_0)dx,$$

або

$$dy = y'dx. \tag{66}$$

Звідси маємо

$$y' = \frac{dy}{dx}. \tag{67}$$

Ця рівність читається так: «ігрек штрих дорівнює dy по dx».

Таким чином, дістали ще одне позначення похідної, яке є відношенням двох диференціалів: диференціала функції до диференціала аргументу.

Користуючись співвідношенням (66), складемо *таблицю диференціалів елементарних функцій:*

1. $y = C = \text{const}, \; dy = 0.$
2. $y = x^{\mu}, \; dy = \mu x^{\mu-1}dx.$
3. $y = x, \; dy = dx.$
4. $y = \dfrac{1}{x}, \; dy = -\dfrac{1}{x^2}dx.$
5. $y = \sqrt{x}, \; dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx.$
6. $y = \sqrt[n]{x}, \; dy = \dfrac{dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$
7. $y = a^x, \; dy = a^x \ln a dx.$
8. $y = \mathrm{e}^x, \; dy = \mathrm{e}^x dx.$
9. $y = \lg_a x, \; dy = \dfrac{\lg_a \mathrm{e} dx}{x}.$
10. $y = \ln x, \; dy = \dfrac{dx}{x}.$
11. $y = \sin x, \; dy = \cos x dx.$
12. $y = \cos x, \; dy = -\sin x dx.$
13. $y = \operatorname{tg} x, \; dy = \sec^2 x dx.$
14. $y = \operatorname{ctg} x, \; dy = \operatorname{cosec}^2 x dx.$
15. $y = \arcsin x, \; dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
16. $y = \arccos x, \; dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
17. $y = \operatorname{arctg} x, \; dy = \dfrac{dx}{1+x^2}.$
18. $y = \operatorname{arcctg} x, \; dy = -\dfrac{dx}{1+x^2}.$

❑ **Приклади**

1. Знайти диференціал функції $y = \sin x$ у точці $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо відповідну формулу з попередньої таблиці. Маємо

$$dy = \cos x dx.$$

Підставивши замість x число $\frac{\pi}{4}$, матимемо

$$dy = \frac{\sqrt{2}}{2}dx.$$

2. Знайти диференціал функції $y = \sin^2\sqrt{x} + e^{\mathrm{tg}\,x}$ у довільній точці x.

Р о з в ' я з а н н я: $dy = y'dx = \left(\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} + e^{\mathrm{tg}\,x}\sec^2 x\right)dx.$

Якщо u і v — диференційовні функції в точці, то для диференціалів, як і для похідних, можна вивести такі формули:

1. $d(Cu) = Cdu \quad (C = \mathrm{const})$.
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
3. $d(uv) = vdu + udv$.
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Доведемо, наприклад, формулу 3. Для цього застосуємо означення диференціала

$$d(uv) = (uv)'dx = (vu' + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv.$$

Формули 1—4 називають *правилами диференціювання функції.*

Виведемо формулу для диференціала складеної функції $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, де $f(u)$ і $\varphi(x)$ за припущенням є диференційовними функціями відповідно в точках u і x.

Згідно з припущенням, складена функція $f(\varphi(x))$ у точці x має похідну $f'_x(\varphi(x))$, а отже, вона має й диференціал dy:

$$dy = f'_x(\varphi(x))dx.$$

Оскільки

$$f'_x(\varphi(x)) = f'_u(u)u'_x,$$

то

$$dy = f'_u(u)u'_x dx,$$

$$u'_x dx = du.$$

Тому

$$dy = f'_u(u)du.$$

Опустивши в похідній $f'_u(u)$ індекс u, дістанемо

$$dy = f'(u)du. \tag{68}$$

Отже, навіть у випадку, коли функція складена, зовнішній вигляд диференціала не змінюється.

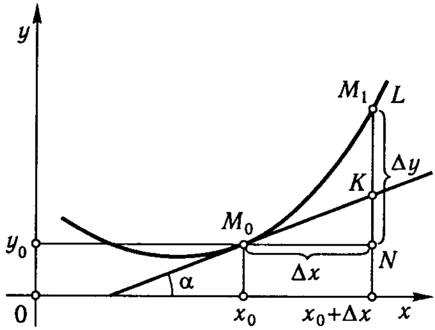


Рис. 38

Цю властивість диференціала називають *властивістю інваріантності* (*незмінності*). Проте слід мати на увазі, що існує внутрішня відмінність формули (68) від формули (66). Якщо у формулі (66) dx є приростом незалежної змінної, $dx = \Delta x$, отже, він є сталою величиною, то у формулі (68) $du = \varphi'(x)dx$.

Диференціалу функції, так само як і похідній, можна дати геометричне й механічне тлумачення.

Розглянемо спочатку геометричний зміст диференціала.

Нехай графік диференційовної функції $f(x)$ має вигляд, зображений на рис. 38 (крива L).

Візьмемо на кривій L точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

У точці M_0 проведемо дотичну до кривої L. Тоді з $\triangle M_0KN$ знайдемо відрізок KN:

$$KN = \operatorname{tg}\alpha dx = f'(x_0)\Delta x$$

або

$$KN = dy. \tag{69}$$

Рівність (69) характеризує геометричний зміст диференціала: диференціал функції в точці x_0 дорівнює приросту ординати, дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0))$, коли незалежна змінна дістає приріст Δx.

З'ясуємо механічний зміст диференціала функції. Припустимо, що матеріальна точка рухається за відомим законом

$$s = f(t),$$

де $f(t)$ — диференційовна функція за деякого значення часу $t = t_0$. Тоді функція $f(t)$ має диференціал $ds = f'(t_0)\Delta t$. Проте $f'(t_0)$ дорівнює швидкості

$$v = f'(t_0).$$

Тому

$$ds = v\Delta t.$$

Добуток $v\Delta t$ виражає шлях, який точка проходить за час Δt, рухаючись зі сталою швидкістю v.

Отже, механічне тлумачення диференціала функції таке: диференціал функції виражає той шлях, який точка пройшла б за час Δt, якби вона рухалася прямолінійно й рівномірно зі сталою швидкістю $v = f'(t_0)$.

Диференціал функції часто застосовують за наближених обчислень. При цьому користуються тим, що dy є головною частиною приросту функції у точці, тому

$$\Delta y \approx dy.$$

Підставляючи значення Δy і dy, дістанемо наближену рівність

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{70}$$

Це і є та формула, якою користуються при наближених обчисленнях.

❑ **Приклади**

3. Знайти наближене значення $\sqrt{1{,}001}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x}$. Нехай $x_0=1, \Delta x=0{,}001$. Тоді $\sqrt{1{,}001}$ можна зобразити так:

$$\sqrt{1{,}001}=\sqrt{x_0+\Delta x}.$$

Отже, можна використати формулу (70). Для цього потрібно знайти $f(x_0)=f(1)$ і $f'(x_0)=f'(1)$. Маємо

$$f(1)=\sqrt{1}=1;\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}};\ f'(1)=\frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\sqrt{1{,}001}\approx 1+\frac{1}{2}0{,}001=1{,}0005.$$

4. Знайти наближено значення $\sin 30°1'$.

Розв'язання. Нехай $f(x)=\sin x$. Переведемо градусну міру кута в радіанну:

$$30° \sim \frac{\pi}{6};\ 1' \sim \frac{\pi}{180\cdot 60}.$$

Ввівши позначення $x_0=\frac{\pi}{6}$ і $\Delta x=\frac{\pi}{180\cdot 60}$, дістанемо

$$f(x_0)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};\ f'(x)=\cos x,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже,

$$\sin 30°1' \approx \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180\cdot 60}.$$

Можна було б, використовуючи формулу (70), дістати наближені формули для окремих елементарних функцій. Зокрема, якщо покласти $x_0=0$ й обмежитися малими значеннями x, то

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x.$$

Беручи за $f(x)$ різні елементарні функції, щоразу діставатимемо відповідну, наближену формулу.

Так, для функцій $\sqrt[n]{1+x}$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\ln(1+x)$, e^x маємо

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x;$$

$$\sin x \approx x;$$

$$\operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\ln(1+x) \approx x;$$

$$e^x \approx 1+x.$$

3.6 ПАРАМЕТРИЧНЕ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЙ. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНО ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо спочатку кілька прикладів.

Рівняння кола. Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R має вигляд

$$x^2+y^2=R^2.$$

Проте якщо на колі взяти довільну точку $M(x,y)$ (рис. 39) і через t позначити величину кута, який утворює радіус-вектор OM із додатним напрямком осі Ox, матимемо

$$x = R\cos t,\ \ y = R\sin t, \tag{71}$$

де $0 \le t \le 2\pi$.

Піднісши тут обидві частини до квадрата і почленно додавши отримані рівності, дістанемо відоме рівняння кола.

Отже, рівняння (71) можна також розглядати як рівняння кола.

На відміну від декартового задання, рівняння (71) називають *параметричним заданням кола*, а величину t при цьому — *параметром*.

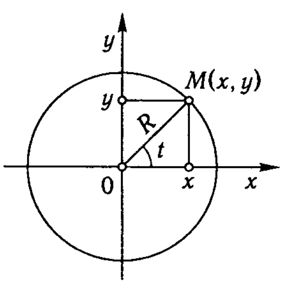


Рис. 39

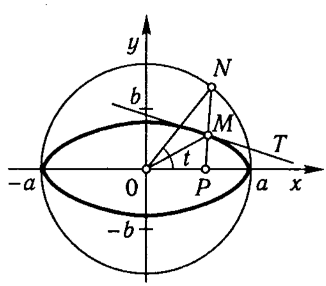


Рис. 40

Рівняння еліпса. У декартовій системі координат рівняння еліпса записують так:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(рис. 40). Можна вивести параметричне рівняння еліпса

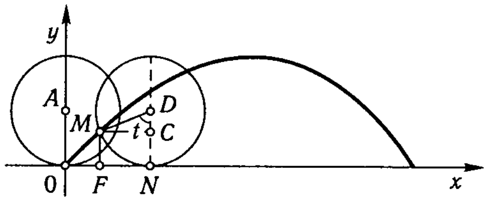


Рис. 41

$$y=b\sin t,\ \ x=a\cos t, \tag{72}$$

де $0\le t\le 2\pi$.

Рівняння циклоїди. Нехай уздовж прямої Ox (рис. 41) зліва направо без ковзання котиться коло радіуса a з центром у точці A. Криву, яку описує будь-яка точка кола, називають *циклоїдою.* Виведемо параметричні рівняння циклоїди.

Вивчимо, наприклад, рух точки O за один оберт. Розглянемо нове положення кола, де точкою дотику до прямої Ox є точка N. Довжина відрізка ON дорівнює відстані, яку точка дотику пройде вздовж прямої Ox. За цей самий час точка O, рухаючись по колу, займе положення M, і оскільки коло котиться без ковзання, то шлях, пройдений точкою вздовж кола $(\cup MN)$, і шлях вздовж прямої (ON) рівні між собою:

$$\cup MN=ON.$$

Введемо позначення: x і y — координати точки M; t — величина $\angle MDC$. Тоді

$$x=OF=ON-FN=at-a\sin t=a(1-\sin t);$$

$$y=FM\ =NC=ND-CD=a-a\cos t=a(1-\cos t).$$

Отже, параметричні рівняння циклоїди мають вигляд

$$x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t); \tag{73}$$

$$0\le t\le 2\pi.$$

Якщо t змінюватиметься від $-\infty$ до $+\infty$, то дістанемо криву, що має нескінченну множину віток циклоїди.

Розглянуті рівняння кола, еліпса й циклоїди показують, що крива на площині може бути задана параметричними рівняннями, які в загальному випадку записують так:

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ \alpha\le t\le\beta, \tag{74}$$

де $\varphi(t),\psi(t)$ — неперервні функції аргументу (параметра) t, задані на відрізку $[\alpha;\beta]$.

Якщо припустити, що $\varphi(t)$ має обернену функцію $t=\omega(x)$, то, підставивши значення t у друге рівняння (74), дістанемо

$$y=\psi(\omega(x))=f(x),$$

а це й є звичайне декартове задання кривої у явному вигляді. Зазначимо, що коли криву задано у вигляді $y=f(x)$, то, поклавши $x=t$, матимемо параметричне задання

$$x=t,\ \ y=f(t).$$

Таким чином, дістали новий, більш загальний спосіб функціональної залежності між змінними величинами x і y, а саме такий спосіб, коли змінні x і y є функціями допоміжної змінної t, яку називають *параметром.*

Означення. Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ від тієї самої допоміжної змінної $t\in[\alpha;\beta]$ називають *параметричним заданням функції.* Допоміжну змінну t при цьому називають *параметром.*

Зрозуміло, що ту саму функцію параметрично можна задати різними способами, і щоразу зміст параметра t буде інший.

Припустимо, що функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ — диференційовні в кожній точці t інтервалу $(\alpha;\beta)$ і для цих значень t функція $\varphi(t)$ така, що похідна не дорівнює нулю: $\varphi'(t)\neq 0$. Тоді в цьому інтервалі вона зберігає сталий знак.

Нехай, наприклад, $\varphi'(t)>0$ для всіх $t\in(\alpha;\beta)$.

Тоді функція $x=\varphi(t)$ в інтервалі $(\alpha;\beta)$ є зростаючою і, отже, для неї в інтервалі $(\varphi(\alpha);\varphi(\beta))$ існує обернена функція $t=\omega(x)$, яка є зростаючою в цьому інтервалі. В інтервалі $(\varphi(\alpha);\varphi(\beta))$ визначено складену функцію

$$y=\psi(\omega(x)),$$

яка в точці $x\in(\varphi(\alpha);\varphi(\beta))$ має похідну

$$y'_x(x)=y'_t(t)t'_x(x).$$

Використавши формулу для похідної оберненої функції і формулу (67), дістанемо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{75}$$

Це і є формула похідної функції, заданої параметрично. Зазначимо, що формулу (75) ще записують так:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \tag{76}$$

Випадок $\varphi'(t)<0$ для всіх $t\in(\alpha;\beta)$ досліджують аналогічно.

❑ **Приклади**

1. Знайти похідну функції, заданої параметрично,

$$x = te^{t^2}, \ y = \ln t + t^{t^3}$$

у точці $t = 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо y'_t і x'_t:

$$y'_t = \frac{1}{t} + t^3 t^{t^3 - 1} + t^{t^2} \ln t 3t^2, \ y'_t(1) = 2;$$

$$x'_t = e^{t^2} + e^{t^2} 2t, \ x'(1) = 3e \neq 0.$$

Тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \frac{2}{3e}.$$

2. Вивести рівняння дотичної до циклоїди в точці, яка відповідає значенню параметра $t = \pi$.

Р о з в ' я з а н н я. Рівняння дотичної в декартовій системі координат має вигляд

$$y - y_0 = y'_x(x - x_0),$$

де x_0, y_0 — координати точки кривої, через яку проходить дотична. Користуючись параметричними рівняннями циклоїди (73), знаходимо

$$x_0 = a\pi, \ y_0 = 2a.$$

Щоб знайти y'_x, використаємо формулу (76)

$$y'_t = a \sin t, \ y'(\pi) = 0;$$

$$x'_t = a(1 - \cos t), \ x'_t(\pi) = 2a.$$

Тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = 0.$$

Отже, дістаємо рівняння дотичної

$$y - 2a = 0 \text{ або } y = 2a.$$

3.7
ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай функція $f(x)$ задана в інтервалі $(a; b)$ і нехай в цьому інтервалі вона має похідну $f'(x)$. Тоді може статися випадок, що $f'(x)$, будучи функцією від x, у деякій точці $x_0 \in (a; b)$, а, можливо, і в усіх точках цього інтервалу, у свою чергу, має похідну. Цю похідну називають *похідною другого порядку*, або *другою похідною* функції $f(x)$ у точці x_0.

Похідну другого порядку позначають одним із таких символів:

$$y''; \ f''(x_0); \ \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}; \ \frac{d^2 y}{dx^2}; \ D^2 y; \ D^2 f(x_0).$$

Отже, за означенням похідна другого порядку це є похідна першого порядку похідної першого порядку, тобто

$$y'' = (y')'.$$

Звідси випливає правило знаходження похідної другого порядку: щоб знайти похідну другого порядку функції $y = f(x)$, потрібно знайти спочатку похідну першого порядку y' цієї функції, а потім знайти ще похідну першого порядку похідної y'. Інакше кажучи, щоб знайти y'', потрібно функцію продиференціювати двічі.

❑ **Приклади**

1. Знайти y'' функції $y = x^3 + 5x^2 + 4x + 3$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо y':

$$y' = 3x^2 + 10x + 4.$$

Для знаходження y'' цей результат диференціюємо ще раз. Маємо

$$y'' = 6x + 10.$$

2. Знайти похідну другого порядку функції

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

де g — прискорення вільного падіння.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$s' = gt.$$

Тоді

$$s'' = g.$$

Отже, тут похідна другого порядку від шляху за часом дорівнює прискоренню вільного падіння. Це не випадково. Якщо рух матеріальної точки відбувається за законом

$$s = f(t),$$

то s', як було з'ясовано, дорівнює швидкості точки у певний момент часу

$$s' = v.$$

Тоді прискорення a визначають як похідну першого порядку швидкості, тобто

$$a = v',$$

але $v' = s'$, тому

$$a = s''.$$

Отже, похідній другого порядку можна дати механічну інтерпретацію, а саме: її можна тлумачити як величину, що дорівнює прискоренню рухомої точки в певний момент часу.

3. З яким прискоренням рухається точка в момент часу $t = 10$ с, якщо $s = t^3 - 10t^2 + t + 5$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо

$$s' = 3t^2 - 20t + 1; \quad s'' = 6t - 20.$$

У другу похідну підставимо значення $t = 10$. Дістанемо

$$a = 40\left(\text{м/с}^2\right).$$

Аналогічно визначенню похідної другого порядку визначають і похідну третього порядку.

Нехай у кожній точці інтервалу $(a; b)$ існує похідна другого порядку $f''(x)$. Отже, $f''(x)$ є функцією від x. Припустимо, що $f''(x)$ у деякій точці $x \in (a; b)$ має похідну першого порядку.

Похідну першого порядку похідної другого порядку називають *похідною третього порядку*, або *третьою похідною*, в точці й позначають одним із символів

$$y'''; \; f'''(x_0); \; \frac{d^3y}{dx^3}; \; \frac{d^3f(x_0)}{dx^3}; \; D^3y; \; D^3f(x_0).$$

Отже, за означенням

$$y''' = (y'')'.$$

Звідси випливає також правило знаходження похідної третього порядку: щоб знайти похідну третього порядку, потрібно функцію послідовно тричі продиференціювати.

❑ **Приклад**

4. Знайти похідну третього порядку функції $y = e^{x^2}$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо

$$y' = 2e^{x^2}x.$$

Цей результат ще раз диференціюємо. Маємо

$$y'' = 4e^{x^2}x^2 + 2e^{x^2}.$$

Продиференціювавши ще раз, знаходимо похідну третього порядку

$$y''' = 8e^{x^2}x^3 + 8e^{x^2}x + 4e^{x^2}x = 4xe^{x^2}\left(2x^2 + 3\right).$$

Від похідної третього порядку можна перейти до похідної четвертого порядку, а від похідної четвертого порядку — до похідної п'ятого порядку і т. д. Взагалі, якщо припустити, що вже визначено похідну $(n-1)$-го порядку $y^{(n-1)}$ функції, яка існує в кожній точці інтервалу $(a; b)$, то можна дати означення похідної n-го порядку функції $f(x)$ у точці $x_0 \in (a; b)$.

Означення. Похідну першого порядку, якщо вона існує, похідної $(n-1)$-го порядку називають похідною n-го порядку, або n-ю похідною, і позначають одним із символів:

$$y^{(n)}; \; f^{(n)}(x_0); \; \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}; \; \frac{d^{(n)}f(x_0)}{dx^{(n)}}; \; D^{(n)}y; \; D^{(n)}f(x_0).$$

Отже, згідно з означенням похідної n-го порядку, маємо рівність

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Звідси й випливає правило знаходження похідної n-го порядку, а саме, щоб знайти похідну n-го порядку, потрібно функцію $y = f(x)$ продиференціювати послідовно n разів.

Зауважимо, що похідні від першого до четвертого порядків позначають так: y', y'', y''', y^{IV} або $f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), f^{IV}(x_0)$. Похідні п'ятого, шостого… і n-го порядку: $y^{(5)}, y^{(6)}, y^{(7)}, ..., y^{(n)}$ або $f^{(5)}(x_0)$, $f^{(6)}(x_0), ...,$ $f^{(n)}(x_0)$.

❑ **Приклади**

5. Знайти похідну шостого порядку функції $y = x^6 + 5x^5 + 4x^4$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо послідовно похідні:

$$y' = 6x^5 + 25x^4 + 16x^3;\ y^{IV} = 360x^2 + 600x + 96;$$

$$y'' = 30x^4 + 100x^3 + 48x^2;\ y^{(5)} = 720x + 600;$$

$$y''' = 120x^3 + 300x^2 + 96x;\ y^{(6)} = 720.$$

6. Знайти похідну n-го порядку функції

$$y = \ln\left(x^2 + x - 2\right).$$

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо y':

$$y' = \frac{2x+1}{x^2 + x - 2}.$$

Для спрощення наступних викладок вираз у правій частині запишемо так:

$$y' = \frac{(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = (x-1)^{-1} + (x+2)^{-1}.$$

Тоді

$$y'' = -1(x-1)^{-2} - 1(x+2)^{-2};$$

$$y''' = 1\cdot 2(x-1)^{-3} + 1\cdot 2(x+2)^{-3};$$

$$y^{IV} = -1\cdot 2\cdot 3(x-1)^{-4} - 1\cdot 2\cdot 3(x+2)^{-4}.$$

Звідси легко помітити закон утворення наступних похідних і, зокрема, похідної n-го порядку

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left((x-1)^{-n} + (x+2)^{-n}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x-1)^{-n}} + \frac{1}{(x+2)^{-n}}\right).$$

В окремих випадках можна вивести формулу, яка дає змогу безпосередньо знайти похідну n-го порядку і, отже, при цьому не потрібно знаходити всі попередні похідні.

❑ **Приклади**

Знайти похідну n-го порядку функцій:

7. $y = x^{\mu}$.

Тут $y' = \mu x^{\mu-1}$, $y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, ... і т. д. Отже,

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-(n-1))x^{\mu-n}. \tag{77}$$

Це і є формула похідної n-го порядку степеневої функції $y = x^{\mu}$. Зокрема, якщо $\mu = n$, то

$$y^{(n)} = n!$$

Так, якщо $y = x^{10}$, то $y^{(10)} = 10!$, якщо $y = \sqrt{x}$, то

$$y^{(5)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{2}-4\right)x^{\frac{1}{2}-5} = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}}.$$

8. $y = \ln x$.

Спочатку знаходимо

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Тепер до функції $y' = x^{-1}$ можна застосувати формулу (77), але замість n взяти $n-1$, а замість μ — -1. Матимемо

$$y^{n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n}}.$$

9. $y = a^{x}$.

Маємо

$$y' = a^{x}\ln a,\ \ y'' = a^{x}\ln^{2} a, \dots .$$

Отже,

$$y^{(n)} = a^{x}\ln^{n} a.$$

Зокрема, якщо $y = \mathrm{e}^{x}$, то

$$y^{(n)} = \mathrm{e}^{x}.$$

10. $y = \sin x$.

Знаходимо y':

$$y' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Тоді

$$y'' = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\left(\frac{\pi}{2}+x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)$$

або

$$y'' = \sin\left(2\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Аналогічно

$$y''' = \sin\left(3\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Застосувавши метод індукції, дістанемо загальну формулу

$$y^{(n)} = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Так, похідною 10-го порядку $\sin x$ є

$$y^{(10)} = \sin\left(10\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(5\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

11. $y = \cos x$.
Пропонуємо читачеві довести самостійно, що

$$y^{(n)} = \cos\left(n\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Можна довести і такі формули:

1) якщо $y = Cf(x)$, де $C = \text{const}$, а $f(x)$ має в деякому околі точки x похідні до n-го порядку, то

$$y^{(n)} = Cf^{(n)}(x);$$

2) якщо $y = (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))$, де функції $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, у точці x і деякому її околі мають похідну до n-го порядку, то

$$y^{(n)} = f_1^{(n)}(x) \pm f_2^{(n)}(x) \pm \ldots \pm f_k^{(n)}(x).$$

Складніше вивести формулу для похідної n-го порядку добутку двох функцій $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у точці x і в деякому її околі мають похідні до n-го порядку включно, то виконується так звана формула Лейбніца

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_1^{(n-k)}(x) f_2^{(k)}(x), \tag{78}$$

де C_n^k — число комбінацій із n елементів по k,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

При цьому вважають, що

$$f_1^{(0)}(x) \equiv f_1(x); \; f_2^{(0)}(x) \equiv f_2(x).$$

❑ **Приклад**

12. За допомогою формули Лейбніца знайти похідну десятого порядку функції $y = x^5 e^x$.

Розв'язання. Введемо позначення: $f_1(x) = x^5$; $f_2(x) = e^x$.

Тоді за формулою (78)

$$y^{(10)}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\left(x^5\right)^{(10-k)}\left(e^x\right)^{k}=C_{10}^{0}\left(x^5\right)^{(10)}\left(e^x\right)^{(0)}+$$

$$+C_{10}^{1}\left(x^5\right)^{(9)}\left(e^x\right)'+C_{10}^{2}\left(x^5\right)^{(8)}\left(e^x\right)''+C_{10}^{3}\left(x^5\right)^{(7)}\left(e^x\right)'''+C_{10}^{4}\left(x^5\right)^{(6)}\left(e^x\right)^{\mathrm{IV}}+$$

$$+C_{10}^{5}\left(x^5\right)^{(5)}\left(e^x\right)^{(5)}+C_{10}^{6}\left(x^5\right)^{\mathrm{IV}}\left(e^x\right)^{(6)}+$$

$$+C_{10}^{7}\left(x^5\right)'''\left(e^x\right)^{(7)}+C_{10}^{8}\left(x^5\right)''\left(e^x\right)^{(8)}+C_{10}^{9}\left(x^5\right)'\left(e^x\right)^{(9)}+C_{10}^{10}\left(x^5\right)^{(0)}\left(e^x\right)^{(10)}.$$

Оскільки

$$\left(e^x\right)^{(k)}=e^x,\ k=0,1,\ldots,10,$$

$$\left(x^5\right)^{(10)}=\left(x^5\right)^{(9)}=\left(x^5\right)^{(8)}=\left(x^5\right)^{(7)}=\left(x^5\right)^{(6)}=0,$$

то

$$y^{(10)}=\left(30\,240+25\,200x+7200x^2+900x^3+50x^4\right)e^x.$$

Формулу (78) приймаємо без доведення.

3.8
ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в інтервалі $(a;b)$ і є диференційовною в цьому інтервалі. Тоді для такої функції в кожній точці інтервалу існує диференціал

$$dy=f'(x)dx.$$

Надалі диференціал dy називатимемо *диференціалом першого порядку*, або *першим диференціалом функції* $f(x)$.

Тоді диференціал першого порядку є функцією від x і, отже, якщо задана функція $f'(x)dx$, $dx=\mathrm{const}$, є, у свою чергу, диференційовною в інтервалі $(a;b)$, то вона, або, що те саме, dy, має диференціал. Цей диференціал називають *диференціалом другого порядку*, або *другим диференціалом функції* $f(x)$, і позначають d^2y.

Отже, за означенням

$$d^2y=d(dy).$$

Підставимо в цю рівність значення dy, матимемо

$$d^2y=d\left(f'(x)dx\right)=\left(f'(x)dx\right)'dx.$$

Оскільки dx є приростом аргументу і є величиною сталою, то його можна виносити за знак операції диференціювання. Отже, дістаємо формулу для диференціала другого порядку

$$d^2y = f''(x)dx^2, \; dx^2 = dxdx. \tag{79}$$

Аналогічно означається диференціал третього порядку.

Справді, згідно з формулою (79), d^2y є функцією від x, і ця функція в інтервалі $(a;b)$ диференційовна, оскільки права частина рівності (79), за припущенням, має похідну. Тому для d^2y існує диференціал $d\left(d^2y\right)$.

Диференціал $d\left(d^2y\right)$ називають *диференціалом третього порядку,* або *третім диференціалом функції* $f(x)$, і позначають

$$d^3y = d\left(d^2y\right).$$

Підставивши в цю рівність значення d^2y і врахувавши, що $dx^2 = \text{const}$, дістанемо формулу для диференціала третього порядку

$$d^3y = f'''(x)dx^3; \; dx^3 = dxdxdx. \tag{80}$$

Аналогічно означаються диференціали четвертого, п'ятого і т. д. порядків.

Взагалі, якщо для функції $f(x)$ уже означений диференціал $(n-1)$-го порядку ($(n-1)$-й диференціал $d^{n-1}y$), то диференціалом n-го порядку, або n-м диференціалом функції $f(x)$, називають диференціал першого порядку диференціала $(n-1)$-го порядку. Диференціал n-го порядку позначають символом d^ny.

Отже, згідно з означенням

$$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right).$$

Використовуючи формулу диференціала першого порядку, можна методом математичної індукції вивести формулу для $d^{n-1}y$:

$$d^{n-1}y = f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}.$$

Підставивши значення $d^{n-1}y$ у рівність $d^ny = d\left(d^{n-1}y\right)$, дістанемо формулу для диференціала n-го порядку

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n,$$

$$dx^n = \underbrace{dxdx \ldots dx}_{n \text{ разів}}. \tag{81}$$

❑ **Приклад**

1. Знайти диференціали вищих порядків функцій:

а) $y=4^{-x^2}$ (знайти d^2y); б) $y=\sqrt{\ln^2 x-4}$ (знайти d^2y); в) $y=\sin^2 x$ (знайти $d^n y$).

Розв'язання.

а) Знаходимо похідні y' і y'':

$$y'=-2x\cdot 4^{-x^2}\ln 4;$$

$$y''=-2\ln 4\left(4^{-x^2}-2x^2 4^{-x^2}\ln 4\right)=-2\ln 4\cdot 4^{-x^2}\left(1-2x^2\ln 4\right).$$

Тоді

$$d^2y=-2\ln 4\cdot 4^{-x^2}\left(1-2\ln 4\cdot x^2\right)dx^2;$$

б) знаходимо послідовно y' і y'':

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\ln^2 x-4}}2\ln x\ \frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x-4}};$$

$$y''=\frac{x\sqrt{\ln^2 x-4}\,\frac{1}{x}-\ln x\left(\sqrt{\ln^2 x-4}+x\frac{2\ln x\ \frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln^2 x-4}}\right)}{x^2\left(\ln^2 x-4\right)}=$$

$$=\frac{\ln^2 x-4-\ln x\left(\ln^2 x-4+\ln x\right)}{x^2\left(\ln^2 x-4\right)\sqrt{\ln^2 x-4}}=-\frac{\ln^3 x-4\ln x+4}{x^2\left(\ln^2 x-4\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Тоді

$$d^2y=-\frac{\ln^3 x-4\ln x+4}{x^2\left(\ln^2 x-4\right)^{\frac{3}{2}}}dx^2;$$

в) виведемо формулу n-ї похідної функції $y=\sin^2 x$. Для цього знайдемо y', y'' ..., $y^{(n)}$:

$$y'=2\sin x\cos x=\sin 2x;$$

$$y''=2\cos 2x=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right);$$

$$y'''=2^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=2^2\sin\left(2\ \frac{\pi}{2}+2x\right).$$

Отже,

$$y^{(n)}=2^{n-1}\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}+2x\right),$$

тоді

$$d^n y=2^{(n-1)}\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}+2x\right)dx^n.$$

При розгляді диференціала першого порядку було доведено його інваріантну властивість: форма диференціала не змінюється і тоді, коли аргумент функції $f(x)$ є, у свою чергу, деякою функцією від t:

$$x = \varphi(t).$$

Виявляється, що диференціали вищих порядків такої властивості не мають. Покажемо це на прикладі диференціала другого порядку.

Нехай складена функція $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$, де функції $f(x)$ і $\varphi(t)$ мають похідні за своїми аргументами до другого порядку включно. Тоді $f(x)$ має диференціал:

$$dy = f'(x)dx,$$

де $f'(x)$ — похідна за аргументом x, а $dx = \varphi'(t)dt$.

Знайдемо d^2y. Згідно з означенням,

$$d^2y = d(f'(x)dx).$$

Оскільки диференціал першого порядку має інваріантну властивість, то

$$d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) =$$

$$= (f'(x))'_x\, dx^2 + f'(x)d^2x = f''_{x^2}(x)dx^2 + f'_x(x)d^2x.$$

Тут через $f'_x(x)$, $f''_{x^2}(x)$ позначено відповідно похідні першого й другого порядків функції $f(x)$ за аргументом x.

Остаточно дістанемо рівність

$$d^2y = f''_{x^2}(x)dx^2 + f'_x(x)\varphi''(t)dt^2. \tag{82}$$

Порівнюючи формули (79) і (82), бачимо, що формула диференціала другого порядку змінюється. У формулі (82) є новий доданок $f'_x(x)\varphi''(t)dt^2$.

Отже, диференціал другого порядку інваріантної властивості не має.

Проте якщо функція $x = \varphi(t)$ така, що в розглядуваному інтервалі $\varphi''(t) = 0$, то, як це випливає з формули (82), форма диференціала другого порядку зберігається. Зокрема, якщо $\varphi(t)$ є лінійною функцією

$$\varphi(t) = at + b,$$

де a і b — сталі, то $\varphi''(t) = 0$, а отже, диференціал другого порядку зберігає свою форму, тобто має *інваріантну властивість*.

Зауважимо, що з формул (79)—(81) можна дістати такі рівності:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},\ f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Отже, маємо нове позначення похідних вищих порядків

$$y' = \frac{dy}{dx}; \ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}; \ y''' = \frac{d^3y}{dx^3}; \ \dots; \ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Користуючись цими позначеннями, можна вивести формули для похідних вищих порядків функції, заданої параметрично. Наприклад, виведемо формулу для похідної другого порядку.

Нехай функцію y задано параметричними рівняннями

$$x = x(t), \ y = y(t), \ t_0 < t < t_1$$

і нехай функції $x(t), y(t)$ в інтервалі $(t_0; t_1)$ мають похідні до другого порядку і $x'(t) \neq 0$.

Раніше було доведено, що $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Знаходимо

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{dt}{dx}.$$

Отже, продиференціювавши дріб $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ за змінною t і підставивши значення

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'(t)},$$

матимемо формулу для похідної другого порядку

$$y''_{x^2} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}. \tag{83}$$

❑ **Приклад**

2. Знайти похідну другого порядку функції y, якщо функцію y задано параметрично

$$x = a(\cos t + t\sin t); \ y = a(\sin t - t\cos t).$$

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо спочатку похідні $x'_t, x''_{t^2}, y'_t, y''_{t^2}$:

$$x'(t) = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t;$$

$$x''(t) = a(\cos t - t\sin t);$$

$$y'(t) = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t;$$

$$y''(t) = a(\sin t + t\cos t).$$

Підставивши значення похідних у формулу (83), дістанемо

$$y''_{x^2}=\frac{a^2t\cos t(\sin t+t\cos t)-a^2t\sin t(\cos t-t\sin t)}{a^3t^3\cos^3 t}=\frac{t^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}{at^3\cos^3 t}=\frac{1}{at\cos^3 t}.$$

Наприкінці зробимо таке зауваження. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$. Тоді, якщо ця функція диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і має односторонні похідні в точках a і b (у точці a — правосторонню, в точці b — лівосторонню), то її називають *диференційовною* на відрізку $[a; b]$. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(a; b)$ має похідні до другого порядку включно, а похідна $f'(x)$ у точках a і b має односторонні похідні (односторонні похідні другого порядку функції $f(x)$), то функцію $f(x)$ називають *двічі диференційовною* на відрізку $[a; b]$. Міркуючи аналогічно, можна прийти до поняття n-разів диференційовної функції на відрізку $[a; b]$. Саме n-разів диференційовною на $[a; b]$ розуміють таку функію $f(x)$, яка в інтервалі $(a; b)$ має похідні до порядку n включно, а в точках a і b вона має відповідно односторонні похідні до порядку n включно.

3.9 ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

У курсі математичного аналізу одне з центральних місць займають так звані теореми про середнє значення диференціального числення. До таких теорем належать теореми Ролля[1], Лагранжа й Коші. В усіх цих теоремах ідеться про те, що коли функція та її похідна першого порядку задовольняють певні умови, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться точка, в якій функція має певні властивості (про які йдеться в теоремі). Тому ці теореми називають *теоремами про середнє*.

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови:

1) визначена й неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$;

3) на кінцях відрізка набуває значень $f(a)=f(b)$.

Тоді знайдеться хоча б одна точка $c\in(a;b)$, в якій $f'(c)=0$.

Доведення. *Випадок 1*. Функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ є сталою:

$$f(x)=\text{const}.$$

Тоді $f'(x)=0$, тобто в кожній точці $x\in(a;b)$ похідна дорівнює нулю, а тому за точку c можна взяти будь-яку точку інтервалу, і для цієї точки теорема буде справедливою.

Випадок 2. Функція $f(x)$ не є тотожно сталою на відрізку $[a;b]$. Оскільки $f(x)$ за умовою теореми є неперервною, то вона на відрізку $[a;b]$ набу-

[1] *Ролль М.* (1652—1719) — французький математик.

ває найбільшого і найменшого значень. Позначимо найбільше значення через M, а найменше — через m. Зрозуміло, що в розглядуваному випадку $m < M$.

Оскільки $f(a) = f(b)$, то хоча б одне з чисел m або M досягається функцією в інтервалі $(a; b)$.

Нехай, наприклад, число m досягається функцією в інтервалі $(a; b)$, тобто існує хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій

$$f(c) = m.$$

Покажемо, що $f'(c) = 0$.

Справді, внаслідок того що m є найменшим значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, то це число буде найменшим і серед значень функції, які вона набуває для всіх x із деякого досить малого околу точки c. Позначимо цей окіл через $(c-\delta; c+\delta) \subset (a; b)$, $\delta > 0$.

Тоді для всіх $x \in (c-\delta; c+\delta)$ справджуватимуться нерівності

$$f(x) - f(c) \geq 0 \text{ при } x > c;$$

$$f(x) - f(c) \geq 0 \text{ при } x < c.$$

Розглянемо відношення

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Для цього відношення справедливі нерівності

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{при } x > c;$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad \text{при } x < c,$$

причому $x \in (c-\delta; c+\delta)$.

Згідно з умовою тереми, в точці $x = c$ існує похідна $f'(c)$.

Тоді в цій точці існують права похідна $f'(c+0)$ і ліва похідна $f'(c-0)$, причому справджуються рівності

$$f'(c+0) = f'(c-0) = f'(c).$$

Тоді існують границі

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c+0) \geq 0;$$

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c-0) \leq 0.$$

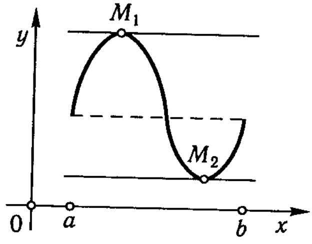


Рис. 42

Тому з останніх нерівностей і попередніх рівностей дістанемо такі нерівності:

$$f'(c) \geq 0, \; f'(c) \leq 0.$$

Звідси випливає, що $f'(c)=0$.

Теорему доведено.

З'ясуємо геометричний зміст теореми Ролля. Якщо $f(x)$ задовольняє умови теореми Ролля, то: 1) графік функції є суцільною лінією ($f(x)$ є неперервною на відрізку); 2) у кожній точці кривої можна провести дотичну; 3) крайні точки графіка знаходяться на однаковій відстані від осі Ox.

Тоді на основі висновку теореми, $f'(c)=0$, на графіку функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична паралельна осі Ox (рис. 42).

Зазначимо також, що на кривій може бути й більше ніж одна точка, в якій дотична до кривої паралельна осі Ox (на рис. 42 це точки M_1 і M_2). Адже в теоремі Ролля йдеться про існування хоча б однієї точки. Отже, таких точок може бути й більше.

Слід звернути увагу також на те, що всі три умови теореми Ролля є істотними для її справедливості. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то теорема перестає бути правильною.

Так, функція $f(x)=x-E(x)$, де $E(x)$ — функція антьє, всередині інтервалу $(0;1)$ диференційовна (при $x\in(0;1)$ $f(x)\equiv x$, $f'(x)=1$); на кінцях відрізка $[0;1]$ набуває однакових значень $f(0)=f(1)=0$. Проте на графіку функції немає жодної точки, в якій дотична була б паралельна осі Ox (див. рис. 19). Це тому, що в точці $x=1$ (на кінці відрізка) $f(x)$ не є неперервною.

Функція $y=1-|x|$ на відрізку $[-1;1]$ є неперервною і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(0)=f(1)=0$, але у внутрішній точці $x=0$ цього відрізка $f(x)$ не диференційовна. Тому й висновок теореми Ролля не виконується (рис. 43).

Функція $y=\ln x$ на відрізку $[1;\,\mathrm{e}]$ неперервна і диференційовна, але $f(1)=\ln 1=0$, $f(\mathrm{e})=\ln \mathrm{e}=1$. Отже, $f(1)\neq f(\mathrm{e})$. Висновок теореми Ролля також не виконується (рис. 44).

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$:

1) задана і неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$, тоді в інтервалі $(a;b)$ знайдеться хоча б одна точка c, $a<c<b$, в якій справджується рівність

$$\frac{f(b)-f(b)}{b-a}=f'(c). \tag{84}$$

Доведення. Розглянемо таку функцію:

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(b)}{b-a}x.$$

Функція $F(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля.

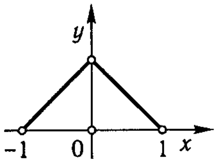


Рис. 43

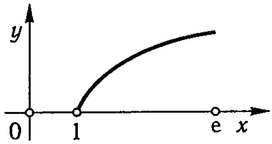


Рис. 44

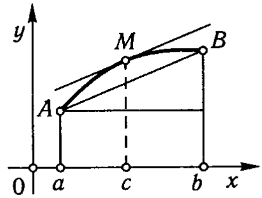


Рис. 45

Справді, $F(x)$ на відрізку $[a;b]$ є неперервною (як різниця двох неперервних функцій); $F(x)$ в інтервалі $(a;b)$ має похідну

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(b)}{b-a};$$

$$F(a)=F(b)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

Отже, існує точка $c\in(a;b)$, в якій $F'(c)=0$ або

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(b)}{b-a}=0,$$

звідси

$$\frac{f(b)-f(b)}{b-a}=f'(c).$$

Теорему доведено.

Як теоремі Ролля, так і теоремі Лагранжа можна дати геометричну інтерпретацію.

Справді, нехай графік функції $f(x)$ зображено на рис. 45. Тоді відношення

$$\frac{f(b)-f(b)}{b-a}$$

є кутовим коефіцієнтом січної AB, а $f'(c)$ — кутовим коефіцієнтом дотичної, проведеної до графіка функції в точці з абсцисою c. Обидва кутові коефіцієнти рівні. Отже, дотична й січна AB паралельні. Тому висновок теореми Лагранжа можна сформулювати так: на дузі AB знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до кривої паралельна хорді AB.

Рівність (84) можна записати в іншому вигляді. Для цього скористаємося тим, що

$$a<c<b,$$

звідси

$$0<c-a<b-a,$$

або, поділивши всі члени нерівностей на $b-a>0$, дістанемо

$$0<\frac{c-a}{b-a}<1.$$

Введемо позначення

$$\frac{c-a}{b-a}=\theta,\ 0<\theta<1,$$

тоді

$$c=a+\theta(b-a),$$

де $0<\theta<1$.

Отже, рівність (84) можна записати у вигляді

$$\frac{f(b)-f(b)}{b-a}=f'(a+\theta(b-a))$$

або

$$f(b)-f(b)=f'(a+\theta(b-a))(b-a). \tag{85}$$

Розглянемо відрізок $[x_0;x_0+\Delta x]$, де x_0 і $x_0+\Delta x$ належать відрізку $[a;b]$. Тоді на відрізку $[x_0;x_0+\Delta x]$ виконуються умови теореми Лагранжа і, беручи до уваги рівність (85), можемо записати рівність

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x.$$

Проте вираз у лівій частині цієї рівності є не що інше, як приріст Δy функції в точці x_0.

Отже,

$$\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x, \tag{86}$$

де $0<\theta<1$.

Раніше було виведено наближену формулу

$$\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x.$$

При цьому відносна похибка прямує до нуля тільки при $\Delta x\to 0$.

Формула (86) виражає точне значення приросту функції Δy у точці x_0 для будь-якого скінченного значення приросту аргументу Δx. Звідси походить і назва формули (86): *формула скінченних приростів*.

Хоча у формулі (86) число θ, як правило, невідоме (тільки в окремих випадках можна вказати його значення), використання цієї формули у математичному аналізі надзвичайно широке.

Наслідки з теореми Лагранжа

Наслідок 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $\langle a;b\rangle$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$ і $f'(x)=0$ при будь-якому $x\in(a;b)$, то $f(x)$ на цьому проміжку є сталою.

Справді, візьмемо з проміжку дві довільні точки $x_1<x_2$. Тоді функція $f(x)$ на відрізку $[x_1;x_2]$ задовольняє умови теореми Лагранжа і вико-

нується рівність

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),$$

$$x_1<c<x_2.$$

Проте $f'(x)$ при будь-якому $x\in(a;b)$, зокрема й при $x=c$, дорівнює нулю. Тоді з попередньої рівності випливає, що

$$f(x_2)-f(x_1)=0$$

або

$$f(x_2)=f(x_1).$$

Оскільки x_1 і x_2 — довільні точки проміжку $\langle a;b\rangle$ і функція $f(x)$ у цих точках набуває однакових значень, то $f(x)$ є сталою.

Вище було доведено, що коли $f(x)$ на заданому проміжку є сталою, то $f(x)$ має на цьому проміжку похідну $f'(x)$ і $f'(x)=0$. З наслідку 1 випливає, що справедливе й обернене твердження.

Тому можна сформулювати такий критерій (необхідну і достатню ознаку) сталості функції, заданої на проміжку $\langle a;b\rangle$.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $\langle a;b\rangle$ і диференційовною в інтервалі $(a;b)$. Для того щоб функція була сталою на проміжку $\langle a;b\rangle$, необхідно і достатньо, щоб $f'(x)=0$ для всіх $x\in(a;b)$.

Наслідок 2. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на проміжку $\langle a;b\rangle$, диференційовні в інтервалі $(a;b)$ і при будь-якому $x\in(a;b)$ $f'(x)=\varphi'(x)$, то різниця $f(x)-\varphi(x)$ є функцією сталою на цьому проміжку.

Справді, позначимо різницю $f(x)-\varphi(x)$ через $F(x)$

$$F(x)=f(x)-\varphi(x).$$

Тоді функція $F(x)$ на інтервалі $(a;b)$ має похідну

$$F'(x)=f'(x)-\varphi'(x).$$

Проте $f'(x)\equiv\varphi'(x)$, тому $F'(x)\equiv 0$. Звідси випливає, що $F(x)=C=\text{const}$ або $f(x)-\varphi(x)=C$.

❑ **Приклади**

1. Довести, що функції

$$f_1(x)=\operatorname{arctg}x,\quad f_2(x)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ тотожно рівні між собою.

Розв'язання. Знайдемо похідні цих функцій

$$f_1'(x)=\frac{1}{1+x^2};$$

$$f_2'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\,\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Отже, похідні $f_1'(x)$ і $f_2'(x)$ рівні між собою. Тому, згідно з наслідком 2,

$$\operatorname{arctg} x=\arcsin x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Нехай тут $x=0$. Тоді $C=0$.

Остаточно маємо

$$\operatorname{arctg} x=\arcsin x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

2. Довести, що для будь-якого $x\in[-1;1]$ виконується рівність

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Позначимо ліву частину рівності через $F(x)$:

$$F(x)=\arcsin x+\arccos x.$$

Тоді функція $F(x)$ при $x\in(-1;1)$ має похідну

$$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Отже, $F(x)=C=\mathrm{const}$ для будь-якого $x\in(-1;1)$, тобто

$$\arcsin x+\arccos x=C.$$

Нехай тут $x=0$. Тоді $C=\frac{\pi}{2}$, тому

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

Безпосередньою підстановкою впевнюємося, що задана рівність справедлива й при $x\pm1$.

Наслідок 3. Якщо функція $f(x)$ диференційовна в інтервалі $(a;b)$, то в цьому інтервалі похідна $f'(x)$ не може мати точок розриву першого роду.

Справді, нехай у точці $x_0\in(a;b)$ існують лівостороння $f'(x_0-0)$ і правостороння $f'(x_0+0)$ границі похідної $f'(x)$.

Тоді, якщо $x\in(a;x_0)$, то за формулою Ланграна (85) отримуємо

$$f(x)-f(x_0)=f'(c_1)(x-x_0),$$

де $x<c_1<x_0$.

Скориставшись означенням похідної та попередньою рівністю, знаходимо

$$f'(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x<x_0)}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}}f'(c_1)=f'(x_0-0).$$

Якщо $x\in(x_0;b)$, то, міркуючи аналогічно до попереднього, маємо

$$f(x)-f(x_0)=f'(c_2)\cdot(x-x_0),$$

де $x<c_2<x_0$.

Звідси

$$f'(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}}f'(c_2)=f'(x_0+0).$$

Отже,

$$f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0).$$

Звідси випливає, що похідна $f'(x)$ є функцією неперервною в точці x_0, якщо тільки $f'(x)$ визначена в точці x_0 і в цій точці має лівосторонню і правосторонню похідні.

Теорема Коші. Нехай:

1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задані й неперервні на відрізку $[a;b]$;

2) диференційовні в інтервалі $(a;b)$;

3) похідна $\varphi'(x)$ в інтервалі $(a;b)$ не дорівнює нулю. Тоді в інтервалі $(a;b)$ знайдеться така точка c, що виконується рівність

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \qquad (87)$$

Доведення. Розглянемо таку функцію:

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi(x).$$

Цю функцію можна розглядати на відрізку $[a;b]$, оскільки $\varphi(b)\neq\varphi(a)$. У протилежному випадку в інтервалі $(a;b)$ знайдеться хоча б одна точка, в якій $\varphi'(x)=0$, а дано, що $\varphi'(x)\neq 0$ для всіх $x\in(a;b)$.

Функція $F(x)$ на відрізку $[a;b]$ задовольняє всі умови теореми Ролля. Тому існує така точка $c\in(a;b)$, що

$$F'(c)=0,$$

або

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)=0.$$

Звідси

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що з теореми Коші можна дістати теорему Лагранжа як окремий випадок.

Справді, поклавши у формулі (87) $\varphi(x)\equiv x$, дістанемо формулу (84).

Приклади

3. Довести, що рівняння $3x^5+15x-8=0$ має тільки один дійсний корінь.

Розв'язання. Позначимо ліву частину цього рівняння через $f(x)$:

$$f(x)=3x^2+15x-8.$$

Оскільки розглядуваний багаточлен є неперервною функцією на всій числовій осі, то цей багаточлен має хоча б один нуль. Доведемо це твердження.

Розглянемо відрізок $[-M;M]$, де M — досить велике додатне число. Тоді функція $f(x)$ як багаточлен непарного степеня на кінцях відрізка має значення, протилежні за знаком

$$f(-M)<0,\ f(M)>0.$$

Отже, за теоремою Больцано — Коші всередині відрізка $[-M;M]$ є хоча б одна точка $x=c$, $c\in(-M;M)$ така, що

$$f(c)=0.$$

Ця рівність свідчить про те, що $x=c$ є коренем заданого рівняння.

Доведемо, що $f(x)$ не може мати двох дійсних коренів. Припустимо супротивне. Нехай $f(x)$ має два корені (нулі) x_1 і x_2:

$$f(x_1)=f(x_2)=0,$$

причому вважатимемо, що $x_1<x_2$.

Тоді $f(x)$ на відрізку $[x_1;x_2]$ задовольняє всі умови теореми Ролля. Отже, існує точка $c\in(x_1;x_2)$, в якій виконується рівність $f'(c)=0$.

Знайдемо похідну $f'(x)$:

$$f'(x)=15x^4+15=15\left(x^4+1\right).$$

Як бачимо, $f'(x)\neq 0$ в жодній точці числової осі, включаючи й інтервал $(x_1;x_2)$. Зайшли у суперечність.

4. Застосувати формулу Лагранжа до функції $y=\ln x$ на відрізку [1; e] і знайти у формулі Лагранжа

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

число c.

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{x},$$

тоді

$$\ln e-\ln 1=\frac{1}{c}(e-1),$$

звідси

$$c=e-1.$$

5. Довести нерівність

$$\operatorname{arctg} x_2-\operatorname{arctg} x_1<x_2-x_1,$$

де $x_2>x_1$.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо функцію $f(x)=\operatorname{arctg} x$, і до неї на відрізку $[x_1; x_2]$ застосуємо формулу Лагранжа:

$$\operatorname{arctg} x_2-\operatorname{arctg} x_1=\frac{1}{1+c^2}(x_2-x_1).$$

Ураховуючи, що

$$0<\frac{1}{1+c^2}<1$$

і

$$x_2-x_1>0,$$

маємо

$$\frac{1}{1+c^2}(x_2-x_1)<x_2-x_1.$$

Отже,

$$\operatorname{arctg} x_2-\operatorname{arctg} x_1<x_2-x_1.$$

6. Користуючись ознакою сталості функції, довести рівність

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg} x,\ \ 0\le x<+\infty.$$

Р о з в ' я з а н н я. Введемо позначення

$$f_1(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2};\ \ f_2(x)=2\operatorname{arctg} x.$$

Тоді

$$f_1'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(1-x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\frac{\left(1+x^2\right)(-2x)-\left(1-x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2}{1+x^2};$$

$$f_2'(x)=\frac{2}{1+x^2}.$$

Отже,

$$f_1(x)=f_2(x)+C,\ \text{ де }\ C=\text{const},$$

тобто

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg}x+C.$$

Підставивши сюди $x=0$, матимемо $C=0$.
Тому

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg}x.$$

7. Перевірити, що функції $f(x)=x^2-2x+3$ і $\varphi(x)=x^3-7x^2+20x-5$ задовольняють умови теореми Коші на відрізку $[1;4]$; знайти відповідне значення c.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $f(x)$ і $\varphi(x)$ є багаточленом, то вони неперервні на всій числовій осі, а отже, й на відрізку $[1;4]$.

Знайдемо похідні:

$$f'(x)=2x-2;\ \varphi'(x)=3x^2-14x+20.$$

За будь-якого $x\in(1;4)$ існують похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$, причому $\varphi'(x)\neq 0$. Як бачимо, умови теореми Коші виконуються. Тому можна застосувати формулу Коші

$$\frac{f(4)-f(1)}{\varphi(4)-\varphi(1)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Отже,

$$\frac{11-2}{27-9}=\frac{2c-2}{3c^2-14c+20},\ 1<c<4.$$

Звідси знаходимо $c_1=2, c_2=4$. Із цих двох значень тільки $c_1=2$ є внутрішньою точкою інтервалу $(1;4)$.

3.10 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Під час дослідження низки теоретичних питань, а також під час розв'язування окремих практичних задач, зокрема, при наближених обчисленнях, велике значення має так звана формула Тейлора[1].

Формула Тейлора для багаточлена. Нехай задано багаточлен

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — дійсні числа, які називають *коефіцієнтами* багаточлена.

Виразимо коефіцієнти заданого багаточлена через значення багаточлена $P(x)$ та його похідні до n-го порядку включно в точці $x=0$.

З цією метою послідовно диференціюватимемо багаточлен $P(x)$ n разів

$$P'(x)=1a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1};$$

[1] *Тейлор Б.* (1685—1731) — англійський математик.

$$P''(x)=2\cdot 1\cdot a_2+3\cdot 2a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2};$$

$$P'''(x)=3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\ldots+(n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4}+$$
$$+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P^{(n-1)}(x)=(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1a_{n-1}+n(n-1)\ldots 2a_nx;$$

$$P^{(n)}(x)=n!a_n.$$

Підставляючи в ці рівності $x=0$, дістаємо

$$a_0=P(0);$$

$$a_1=\frac{P'(0)}{1!};$$

$$a_2=\frac{P''(0)}{2!};$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1}=\frac{P^{(n-1)}(0)}{(n-1)};$$

$$a_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Тоді багаточлен $P(x)$ набирає вигляду

$$P(x)=P(0)+\frac{P'(0)}{1!}x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{P^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{88}$$

Може статися, що багаточлен $P(x)$ буде записаний за степенями різниці $x-x_0$, де x_0 — дійсне число, тобто

$$P(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+A_n(x-x_0)^n,$$

де $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ — дійсні числа. Тоді, так само як і в попередньому випадку, багаточлен $P(x)$ можна записати так:

$$P(x)=P(x_0)+\frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$

$$+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{89}$$

Як бачимо, формулу (88) можна дістати з формули (89) при $x_0 = 0$.

Формулу (89), а також формулу (88) називають *формулою Тейлора для багаточлена*.

❑ **Приклади**

1. Записати багаточлен $x^4 - 5x^3 - 3x + 4$ за степенями двочлена $x - 4$.

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо багаточлен через $P(x)$:

$$P(x) = x^4 - 5x^3 - 3x + 4.$$

Знайдемо похідні $P(x)$ у точці $x_0 = 4$ до четвертого порядку включно:

$$P'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 3;\ P'(4) = 4 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 - 3 = 13;$$

$$P''(x) = 12x^2 - 30x;\ P''(4) = 12 \cdot 4^2 - 30 \cdot 4 = 72;$$

$$P'''(x) = 24x - 30;\ P'''(4) = 24 \cdot 4 - 30 = 66;$$

$$P^{(IV)}(x) = 24;\ P^{(IV)}(4) = 24.$$

Підставивши значення $P(4) = -72, P'(4), P''(4), P'''(4), P^{(IV)}(4)$ у формулу (89), дістанемо

$$x^4 - 5x^3 - 3x + 4 = -72 + 13(x-4) + 36(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4.$$

2. Записати функцію $f(x) = \left(x^3 - 3x + 1\right)^3$ за степенями x, користуючись формулою Тейлора.

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо значення $f(x)$ і її послідовних похідних у точці $x = 0$:

$$f(0) = 1;$$

$$f'(x) = 3\left(x^2 - 3x + 1\right)^2 (2x - 3);\ f'(0) = 3(-3) = -9;$$

$$f''(x) = 30\left(x^2 - 3x + 1\right)\left(x^2 - 3x + 2\right);\ f''(0) = 60;$$

$$f'''(x) = 30(2x - 3)\left(2x^2 - 6x + 3\right);\ f'''(0) = -270;$$

$$f^{(IV)}(x) = 360\left(x^2 - 3x + 2\right);\ f^{(IV)}(0) = 720;$$

$$f^{(5)}(x) = 360(2x - 3);\ f^{(5)}(0) = -1080;$$

$$f^{(6)}(x) = 720;\ f^{(6)}(0) = 720.$$

За формулою (88) маємо

$$\left(x^2 - 3x + 1\right)^3 = x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1.$$

3. Обчислити значення багаточлена

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 10$$

при $x = 2{,}01$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо заданий багаточлен за степенями різниці $x-2$. Для цього обчислимо значення багаточлена і послідовних похідних від нього в точці $x_0=2$:

$$P(2)=36;$$

$$P'(x)=5x^4-8x^3+9x^2+2x-1,\ P'(2)=55;$$

$$P''(x)=20x^3-24x^2+18x+2,\ P''(2)=102;$$

$$P'''(x)=60x^2-48x+18,\ P'''(2)=162;$$

$$P^{(\mathrm{IV})}(x)=120x-48,\ P^{(\mathrm{IV})}(2)=192;$$

$$P^{(5)}(x)=120,\ P^{(5)}(2)=120.$$

Значення $P(2), P'(2), ..., P^{(5)}(2)$ підставимо у формулу (89). Дістанемо

$$P(x)=36+55(x-2)+51(x-2)^2+27(x-2)^3+8(x-2)^4+(x-2)^5.$$

Підставивши замість x його значення 2,01 і врахувавши, що $x-2=0{,}01$, знайдемо

$$P(2{,}01)=36+55\cdot 0{,}01+51\cdot 0{,}01^2+27\cdot 0{,}01^3+8\cdot 0{,}01^4+0{,}01^5=36{,}5551301201.$$

Формула Тейлора для довільної функції. Візьмемо довільну функцію $f(x)$ (необов'язково багаточлен), яка в околі деякої точки $x_0\in(a;b)$ має похідні до n-го порядку включно. Тоді для такої функції можна побудувати багаточлен

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$

$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (90)$$

Цей багаточлен називають *багаточленом Тейлора для функції* $f(x)$. Розглянемо різницю

$$r_n(x)=f(x)-P_n(x).$$

Оскільки $P_n(x)$ залежить від n, то й $r_n(x)$ залежить від n. Тоді

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x)$$

або

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x). \qquad (91)$$

Формулу (91) називають *формулою Тейлора для функції* $f(x)$, а функцію $r_n(x)$ — *додатковим членом формули Тейлора*.

Отже, формула Тейлора (91) відрізняється від формули Тейлора (89) для багаточлена тим, що формула (91) містить додатковий член $r_n(x)$.

Наступна теорема дає змогу записати $r_n(x)$ через похідну $(n+1)$-го порядку від функції $f(x)$.

Теорема. Якщо $f(x)$ на відрізку $[x_0-h;\, x_0+h]$, $h>0$, має неперервні похідні до $(n+1)$-го порядку включно, то додатковий член $r_n(x)$ у формулі Тейлора для цієї функції можна записати у вигляді

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{92}$$

де $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

Доведення. Розглянемо відрізок $[x_0;\, h]$ (для відрізка $[-h;\, x_0]$ доведення аналогічне). Візьмемо довільно фіксовану точку $x\in[x_0;\, h]$ і для кожного $t\in[x_0;\, x]$ розглядатимемо функцію

$$\varphi(t)=f(x)-\left(f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right).$$

Функція $\varphi(t)$ на відрізку $[x_0;\, x]$ має похідну

$$\varphi'(t)=-\left(f'(t)+f''(t)(x-t)-f'(t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-f''(t)(x-t)^2+\ldots\right.$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2}+$$
$$\left.+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right).$$

Після спрощення маємо

$$\varphi'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \tag{93}$$

Крім функції $\varphi(t)$ на відрізку $[x_0;\, x]$ розглянемо також функцію

$$\psi(t)=(x-t)^{n+1}.$$

Знайдемо похідну

$$\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n.$$

До функцій $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ застосуємо на відрізку $[x_0; x]$ теорему Коші:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},\ c = x_0 + \theta(x-x_0), \tag{94}$$

$$0 < \theta < 1.$$

Для цього знайдемо величини, що містяться в цій формулі,

$$\varphi(x) = 0;$$

$$\varphi(x_0) = r_n(x);$$

$$\psi(x) = 0;$$

$$\psi(x_0) = (x-x_0)^{n+1};$$

$$\varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n;$$

$$\psi'(c) = -(n+1)(x-c)^n.$$

Підставляючи ці значення у формулу (94), маємо

$$\frac{-r_n(x)}{-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{-n!(n+1)(x-c)^n}.$$

Отже,

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

$$c = x_0 + \theta(x-x_0),\ 0 < \theta < 1. \tag{95}$$

Теорему доведено.

Підставляючи значення $r_n(x)$ з рівності (95) у рівність (91), дістаємо формулу

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{96}$$

яка справедлива для будь-якого $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $h > 0$.

8 5-336

Формулу (96) називають *формулою Тейлора із додатковим членом у формі Лагранжа*.

Якщо у формулі Тейлора (96) покласти $x_0 = 0$, то дістанемо так звану *формулу Маклорена*[1]:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (97)$$

Поклавши $\psi(t) = x - t$, знайдемо додатковий член $r_n(x)$ у такому вигляді:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}; \qquad (98)$$

$$c = x_0 + \theta(x - x_0).$$

Цей додатковий член називають *додатковим членом формули Тейлора у вигляді Коші*.

❑ **Приклади**

4. Вивести формулу Тейлора за степенями x для функцій: а) e^x; б) $\sin x$; в) $\cos x$; г) $(1+x)^m$, де m — будь-яке дійсне число.

Р о з в ' я з а н н я.

а) Скористаємося формулою (97). Для цього спочатку від функції $f(x) = e^x$ знайдемо відповідні похідні в точці x:

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = e^x.$$

Тоді

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^0 = 1;$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{x\theta}.$$

Підставивши ці значення у формулу (97), матимемо формулу Тейлора (Маклорена) для функції e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{x\theta}}{(n+1)!}, \; 0 < \theta < 1; \qquad (99)$$

б) $f(x) = \sin x$. Тоді

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), \; k = 1, 2, \ldots.$$

Звідси

$$f'(0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$f''(0) = \sin\pi = 0;$$

$$f'''(0) = \sin\frac{3}{2}\pi = -1;$$

$$f^{(IV)}(0) = \sin 2\pi = 0;$$

[1] *Маклорен К.* (1800—1879) — шотландський математик.

$$f^{(5)}(0)=\sin\frac{5}{2}\pi=1;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(2n-1)}(0)=\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{n-1};$$

$$f^{(2n)}(0)=\sin n\pi=0;$$

$$f^{(2n+1)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Ураховуючи, що $f(0)=\sin 0=0$, маємо формулу Тейлора для $\sin x$:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{\sin\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}; \tag{100}$$

в) нехай $f(x)=\cos x$. Тоді

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),\ k=1,2,\dots.$$

Звідси

$$f'(0)=\cos\frac{\pi}{2}=0;$$

$$f''(0)=\cos\pi=-1;$$

$$f'''(0)=\cos\frac{3}{2}\pi=0;$$

$$f^{(IV)}(0)=\cos 2\pi=1;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(2n-2)}(0)=\cos(n-1)\pi=(-1)^{n-1};$$

$$f^{(2n-1)}(0)=\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}=0;$$

$$f^{(2n)}(\theta)=\cos(\theta x+n\pi).$$

Підставляючи ці значення, а також значення $f(0)=\cos 0=1$ в (97), маємо формулу Тейлора для $\cos x$:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\frac{\cos(\theta x+n\pi)}{(2n)!}x^{2n}; \tag{101}$$

г) нехай $f(x)=(1+x)^m$. Тоді

$$f^{(k)}=m(m-1)(m-2)\dots(m-(k-1))(1+x)^{m-k},\ k=1,2,\dots.$$

Підставляючи $x=0$, дістанемо

$$f'(0)=m;\ f''(0)=m(m-1);\ \dots;$$

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\dots(m-n+1).$$

Знайдемо $f^{(n+1)}(\theta x)$:

$$f^{(n+1)}(\theta x)=m(m-1)(m-2)\dots(m-n)(1+\theta x)^{m+1-n},$$

$$f(0)=1.$$

Отже, формула Тейлора для функції $(1+x)^m$ має вигляд

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{m(m-1)\dots(m-n)(1+\theta x)^{m-n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (102)$$

5. Скільки потрібно взяти членів у формулі Тейлора для функції e^x, щоб дістати багаточлен, який зображав би цю функцію на відрізку $[-1;1]$ з точністю до 0,001?

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося формулою Тейлора (99). Якщо в цій формулі відкинути додатковий член, то дістанемо таку наближену формулу:

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}.$$

При цьому похибка за модулем дорівнює

$$|r_n(x)|=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Звідси, беручи до уваги, що $|x|\le 1$ і $0<\theta<1$, матимемо нерівність

$$|r_n(x)|<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Таким чином, якщо виконуватиметься нерівність

$$\frac{3}{(n+1)!}\le 0{,}001, \qquad (103)$$

то й виконуватиметься нерівність

$$|r_n(x)|\le 0{,}001.$$

Для виконання нерівності (103) достатньо взяти $n\ge 6$, оскільки $7!=5040$, а отже,

$$\frac{3}{5040}<\frac{3}{3000}=0{,}001.$$

Таким чином, якщо у формулі Тейлора взяти $n=6$, то дістанемо наближену формулу

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}. \qquad (104)$$

Багаточлен у правій частині цієї формули є шуканим.

Зокрема, якщо у формулі (104) покласти $x=1$, то дістанемо наближену формулу для числа e:

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}.$$

Після відповідних обчислень матимемо $e\approx 2{,}718$.

6. Обчислити з точністю до 10^{-5} наближене значення $\cos 5°$.

Р о з в ' я з а н н я. Спочатку переведемо градусну міру кута в радіанну:

$$5°=\frac{\pi}{180}5=\frac{\pi}{36}.$$

Тоді, підставляючи в формулу (101) замість x його значення $\frac{\pi}{36}$, дістанемо

$$\cos 5° = \cos\frac{\pi}{36} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n-2} + r_{2n}(x).$$

Оскільки

$$\frac{\pi^2}{2\cdot 36^2} \approx 0{,}003808, \quad \text{а} \quad \frac{\pi^4}{4\cdot 36^4} \approx 2{,}4\cdot 10^{-6},$$

то у формулі Тейлора можна взяти тільки два члени

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

При цьому похибка оцінюється нерівністю

$$|r_{2n}(x)| = \left|\frac{\cos\theta x}{4!}x^4\right| \le \frac{x^4}{4!} < 2{,}5\cdot 10^{-6}.$$

Отже, $\cos 5°$ з точністю до 10^{-5} дорівнює

$$\cos 5° \approx 1 - 0{,}003808 \approx 0{,}99619.$$

3.11
ЗРОСТАННЯ, СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ. ЕКСТРЕМАЛЬНІ ТОЧКИ

Дамо низку означень. Для цього припустимо, що функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$, а x_0 є внутрішньою точкою цього проміжку.

Означення. Функцію $f(x)$ називають *зростаючою в точці* x_0, якщо існує окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta), \delta>0$, точки x_0, який міститься в проміжку $\langle a; b\rangle$ і такий, що $f(x)<f(x_0)$, для всіх $x\in(x_0-\delta; x_0)$ і $f(x)>f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0; x_0+\delta)$.

❑ **Приклади**

1. Довести, що функція x^3 є зростаючою в точці $x_0=0$.

Розв'язання. Функція $f(x)=x^3$ визначена на всій числовій осі, тобто $x\in(-\infty; +\infty)$. Візьмемо деякий інтервал, наприклад, $(-1; 1)$, в якому міститься точка $x_0=0$ і який є околом цієї точки $(\delta=1)$. Тоді для кожного $x\in(-1; 0)$ маємо $f(x)<0$, а для кожного $x\in(0; 1)$ маємо $f(x)>0$. Оскільки $f(0)=0$, то задачу розв'язано.

2. Довести, що функція $\sin x$ в точці $x_0=0$ є зростаючою.

Розв'язання. Візьмемо інтервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, який містить точку $x=0$. Тоді для кожного $x\in\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ $\sin x<0$, а для кожного $x\in\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x>0$. У точці $x_0=0$ $\sin 0=0$.

Означення. Функцію $f(x)$ називають *спадною в точці* x_0, якщо існує окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, $\delta>0$ точки x_0, який міститься в проміжку $\langle a; b\rangle$ і такий, що $f(x)>f(x_0)$, для будь-якого $x\in(x_0-\delta; x_0)$ і $f(x)<f(x_0)$ для будь-якого $x\in(x_0; x_0+\delta)$.

❑ **Приклади**

3. Довести, що функція $\sin x$ у точці $x=\pi$ є спадною.

Розв'язання. Візьмемо інтервал $(0;2\pi)$, який містить точку π і який є околом цієї точки $(\delta=\pi)$. Тоді для всіх $x\in(0;\pi)$ функція $\sin x>0$, а для $x\in(x;2\pi)$ $\sin x<0$. У точці $x=\pi$ маємо $\sin x=0$.

4. Довести, що функція $\frac{1}{x}$ у точці $x=1$ є спадною.

Розв'язання. За окіл точки $x=1$ візьмемо інтервал $(0;2)$. Тоді для всіх $x\in(0;1)$ маємо $f(x)=\frac{1}{x}>1=f(1)$, а для всіх $x\in(1;2)$ маємо $f(x)<1$.

Означення. Якщо існує окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, $\delta>0$ точки x_0, який міститься у проміжку $\langle a;b\rangle$ і такий, що $f(x)<f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$, $x\neq x_0$, то точку x_0 називають *точкою максимуму функції* $f(x)$, а саме число $f(x_0)$ — *максимумом функції* $f(x)$ у точці x_0.

❑ **Приклади**

5. Довести, що точка $x=0$ є точкою максимуму функції $\cos x$.

Розв'язання. Візьмемо інтервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, який є околом точки $x=0$. Оскільки $f(x)=\cos x$ у точці $x=0$ дорівнює одиниці, а для всіх $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $x\neq0$, маємо $\cos x<1$, то $x=0$ є точкою максимуму функції $\cos x$. Число 1 є максимумом функції $\cos x$.

6. Довести, що точка $x=0$ є точкою максимуму функції

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Розв'язання. Візьмемо інтервал $(-1;1)$, який є околом точки $x=0$, $\delta=1$. Тоді $f(0)=1$, а для всіх $x\in(-1;1)$, $x\neq0$, маємо $f(x)<1$. Отже, точка $x=0$ є точкою максимуму функції $\frac{1}{1+x^2}$, а число 1 є максимумом заданої функції.

Означення. Якщо існує окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ точки x_0, який міститься в проміжку $\langle a;b\rangle$ і такий, що $f(x)>f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$, $x_0\neq x_0$, то точку x_0 називають *точкою мінімуму функції* $f(x)$, а саме число $f(x_0)$ — *мінімумом функції* $f(x)$ у точці x_0.

❑ **Приклади**

7. Нехай $f(x)=x^2$. Довести, що точка $x=0$ є точкою мінімуму заданої функції.

Розв'язання. Візьмемо інтервал $(-1;1)$, який є околом точки $x=0$. Тоді $f(0)=0$, але для всіх $x\in(-1;1)$, $x\neq0$ маємо $x^2>0$. Тому точка $x=0$ є точкою мінімуму функції x^2, а число $f(0)=0$ є мінімумом заданої функції.

8. Довести, що точка $x=1$ є точкою мінімуму функції

$$f(x)=|x-1|.$$

Розв'язання. Візьмемо за окіл точки $x=1$ інтервал $(0;2)$, $\delta=1$. Тоді в кожній точці цього інтервалу маємо $f(x)>0$, а в точці $x=1$ — $f(1)=0$.

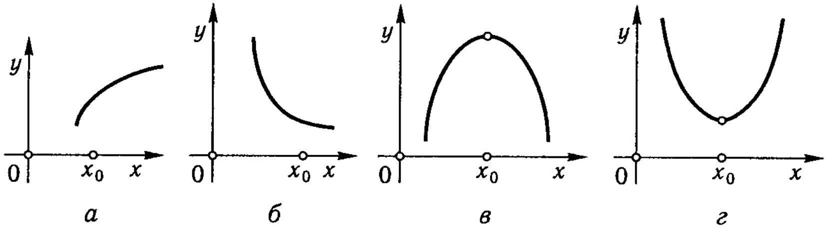


Рис. 46

Отже, $x=1$ є точкою мінімуму функції $y=|x-1|$, а число 0 є мінімумом заданої функції.

Точки максимуму й мінімуму функції називають ще *екстремальними точками,* а максимум і мінімум — *екстремумом*[1] функції.

Графік функції поблизу точок зростання (спадання) та екстремальних точок зображено на рис. 46, *а—г.*

Означення. Якщо функція є зростаючою (спадною) в кожній точці інтервалу $(a;b)$, то її називають *зростаючою* (*спадною*) *в цьому інтервалі.*

Так, функція x^3 є зростаючою в інтервалі $(-\infty;+\infty)$, а функція $\frac{1}{x}$ є спадною у півінтервалі $(0;+\infty]$. Проте є функції, для яких у розглядуваному проміжку є як точки зростання, так і точки спадання, а також екстремальні точки. Прикладом такої функції може бути функція $\sin x$. Ця функція, наприклад, в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ зростає, а в інтервалі $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right)$ спадає. Точки $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$ є точками екстремуму.

Можна довести, що останнє означення й означення зростаючої (спадної) функції, наведене в п. 2.5, еквівалентні.

Для диференційовної функції існують прості достатні ознаки зростання (спадання) її в точці.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ у внутрішній точці x_0 проміжку $\langle a;b\rangle$ має похідну $f'(x_0)$ і $f'(x_0)>0$ $(f'(x_0)<0)$, то функція $f(x)$ у точці x_0 є зростаючою (спадною).

Доведення. Розглянемо випадок, коли $f'(x_0)>0$. Доведемо, що функція $f(x)$ в точці x_0 є зростаючою.

Скористаємось означенням похідної

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

де $\Delta x = x - x_0$.

[1] Слово «екстремум» походить від лат. *extremum*, що означає «крайній».

З попередньої рівності та умови теореми випливає нерівність

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

При цьому знайдеться окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ точки x_0 такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, крім, можливо, точки $x = x_0$, виконується нерівність

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Нехай $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, тобто $x < x_0$. Тоді з попередньої нерівності дістаємо, що й $f(x) < f(x_0)$.

Нехай $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, тобто $x > x_0$. З тієї самої нерівності випливає

$$f(x) > f(x_0).$$

Отже, існує окіл точки x_0, а саме: інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ $f(x) < f(x_0)$, а для всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $f(x) > f(x_0)$. Це означає, що в точці x_0 функція є зростаючою.

Аналогічно доводиться випадок, коли $f'(x_0) < 0$.

Теорему доведено.

❑ **Приклади**

9. Довести, що функція $y = \operatorname{arctg} x$ є зростаючою в інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо похідну функції $\operatorname{arctg} x$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

У кожній точці $x \in (-\infty; +\infty)$ $f'(x) > 0$.

Отже, за попередньою теоремою робимо висновок, що функція $\operatorname{arctg} x$ є зростаючою в кожній точці цього інтервалу.

10. Довести, що показникова функція a^x, $a > 0$, $a \neq 1$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ при $0 < a < 1$ є спадною, а при $a > 1$ — зростаючою.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо похідну функції $f(x) = a^x$:

$$f'(x) = a^x \ln a.$$

Внаслідок того що $\ln a < 0$ при $0 < a < 1$, то $f'(x) < 0$.

Отже, при $0 < a < 1$ функція a^x є спадною.

Якщо $a > 1$, то $\ln a > 0$ і тому $f'(x) > 0$. Таким чином, a^x у цьому випадку є зростаючою.

11. Знайти інтервали зростання і спадання функцій:

а) $f(x) = x^3 + 2x - 5$; б) $f(x) = \ln(1 + x^2)$;

в) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Знаходимо похідну

$$f'(x)=3x^2+2.$$

При будь-якому $x\in(-\infty;+\infty)$ $f'(x)>0$.

Отже, функція $f(x)=x^3+2x-5$ для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$ є зростаючою;

б) знаходимо похідну

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}.$$

При $x>0$ $f'(x)>0$, а при $x<0$ $f'(x)<0$.

Отже, в інтервалі $(-\infty;0)$ функція $\ln\left(1+x^2\right)$ спадає, а в інтервалі $(0;+\infty)$ — зростає.

Зазначимо, що точка $x=0$ при цьому є точкою мінімуму заданої функції.

Зауваження. Якщо в інтервалі $(a;x_0)$ функція $f(x)$ спадає, а в інтервалі $(x_0;b)$ зростає (a, b — довільні дійсні числа) і в точці x_0 функція $f(x)$ є визначеною, то x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$. Якщо в інтервалі $(a;x_0)$ функція $f(x)$ зростає, а в інтервалі $(x_0;b)$ спадає і в точці x_0 функція $f(x)$ визначена, то x_0 є точкою максимуму цієї функції.

Пропонуємо ці два твердження довести самостійно;

в) знайдемо похідну

$$f'(x)=2\frac{\left(1+x^2\right)-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=2\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Знайдемо точки, в яких $f'(x)>0$. Це є всі точки, де $1-x^2>0$. Розв'яжемо цю нерівність:

$$x^2<1,\ |x|<1 \text{ або } -1<x<1.$$

Отже, в інтервалі $(-1;1)$ функція зростає. Тоді в інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(1;+\infty)$ функція спадає.

Беручи до уваги попереднє зауваження, робимо висновок, що точка $x=-1$ є точкою мінімуму, а точка $x=1$ — точкою максимуму заданої функції, при цьому мінімум функції дорівнює $f(-1)=-1$, а максимум $f(1)=1$.

3.12
ЛОКАЛЬНИЙ ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ

Доведемо теореми, за допомогою яких можна знаходити екстремальні точки, а отже, й екстремум функції, тобто ці теореми дадуть змогу провести дослідження функції на екстремум.

Спочатку зауважимо, що екстремальні точки, як випливає з означення, це такі точки, в яких функція набуває відповідно найбільшого чи найменшого значення порівняно зі значеннями функції, яких вона набуває в точках, досить близьких до екстремальної точки. Такий екстремум називають *локальним*[1].

---

[1] Слово «локальний» походить від лат. *lokalis*, що означає «місцевий».

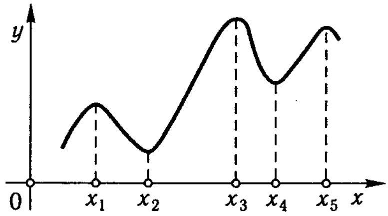


Рис. 47

Отже, не слід плутати локальний максимум (мінімум) із найбільшим (найменшим) значенням функції, якого вона набуває (досягає) на проміжку. Локальних максимумів і локальних мінімумів функція може мати кілька, тоді як найбільше значення (його ще називають абсолютним максимумом), якщо воно існує, є єдиним. Це саме стосується й найменшого значення (абсолютного мінімуму) функції. Окремий локальний мінімум може бути більшим за окремий локальний максимум, як це видно, наприклад, із рис. 47. Функція, графік якої зображено на рис. 47, у точці x_4 має мінімум, більший за максимум, який вона набуває в точці x_1.

Розглянемо питання про необхідні умови існування екстремуму функції в точці, а також про достатні умови його існування. При цьому обмежуватимемося лише тим випадком, коли функція $f(x)$ є неперервною в точці.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ у внутрішній точці x_0 проміжку $\langle a; b\rangle$ має екстремум, то в цій точці похідна $f'(x_0)$, якщо вона існує, дорівнює нулю.

Доведення. Доводитимемо теорему від супротивного.

Нехай у точці $x_0 \in \langle a; b\rangle$, яка є екстремальною точкою для $f(x)$, існує похідна $f'(x_0)$ і $f'(x_0) \neq 0$. Припустимо, що $f'(x_0) > 0$. Тоді за доведеною теоремою $f(x)$ у точці x_0 зростає. Отже, x_0 не є екстремальною точкою. Якщо $f'(x_0) < 0$, то $f(x)$ у точці x_0 спадає. Отже, зайшли у суперечність. Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що коли в точці x_0 існує похідна $f'(x_0) \neq 0$, то $f(x)$ у точці x_0 екстремуму мати не може.

Звідси дістаємо таку необхідну умову існування екстремуму:

екстремум може існувати тільки в тих точках, де похідна дорівнює нулю або не існує.

Внутрішню точка x_0 проміжку $\langle a; b\rangle$ називають *стаціонарною* точкою функції $f(x)$, якщо в цій точці $f'(x_0) = 0$. Стаціонарні точки і точки, в яких похідна не існує, називають *критичними точками* функції.

Отже, згідно з попередніми міркуваннями, функція може мати екстремум тільки в критичних точках, оскільки тільки критичні точки можуть бути екстремальними.

Проте не слід вважати, що функція щоразу в критичній точці має екстремум, оскільки в критичній точці виконується тільки необхідна умова існування екстремуму. Критичні точки можуть бути точками, в яких функція зростає або спадає.

❑ **Приклади**

1. Нехай $f(x)=x^3$. Тоді $f'(x)=3x^2$. У точці $x=0$ похідна $f'(0)$ дорівнює нулю. Отже, необхідна умова існування екстремуму виконується. Проте задана функція в точці $x=0$ екстремуму не має, вона в цій точці зростає.

2. Нехай $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Тоді $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Похідної $f'(x)$ у точці $x=0$ не існує. Проте в точці $x=0$ функція зростає. Отже, $x=0$ не є екстремальною точкою заданої функції.

З наведених прикладів випливає, що критичні точки функції не обов'язково є екстремальними. Вони є екстремальними, якщо в цих точках виконуються достатні умови існування екстремуму. Доведемо таку теорему.

Теорема 2. Нехай x_0 є критичною точкою функції $f(x)$ і нехай існує окіл точки $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, в якому $f(x)$ має похідну $f'(x)$, крім, можливо, точки x_0. Тоді:

1) якщо в інтервалі $(x_0-\delta;x_0)$ похідна $f'(x)>0$, а в інтервалі $(x_0;x_0+\delta)$, похідна $f'(x)<0$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$;

2) якщо в інтервалі $(x_0-\delta;x_0)$ $f'(x)<0$, а в інтервалі $(x_0;x_0+\delta)$ $f'(x)>0$, то x_0 є точкою мінімуму функції;

3) якщо в обох інтервалах $(x_0-\delta;x_0)$ і $(x_0;x_0+\delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак (набуває або тільки додатних, або тільки від'ємних значень), то x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Доведення: 1) Нехай $f'(x)>0$ в інтервалі $(x_0-\delta;x_0)$, а в інтервалі $(x_0;x_0+\delta)$ $f'(x)<0$. Тоді для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0)$ функція $f(x)$ зростає, а для всіх $x\in(x_0;x_0+\delta)$ $f(x)$ спадає. Тоді при $x_0-\delta<x<x_0$ справджується нерівність $f(x)<f(x_0)$, а при $x_0<x<x_0+\delta$ — нерівність $f(x)<f(x_0)$.

Отже, існує окіл точки x_0, а саме, інтервал $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ такий, що для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$, крім $x=x_0$, значення функції $f(x)$ менші за значення функції в точці x_0, а це й означає, що x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.

2) Нехай в інтервалі $(x_0-\delta;x_0)$ похідна $f'(x)<0$, а в інтервалі $(x_0;x_0+\delta)$ похідна $f'(x)>0$. Тоді для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0)$ функція $f(x)$ спадає, тобто $f(x)>f(x_0)$, і для всіх $x\in(x_0;x_0+\delta)$ функція $f(x)$ зростає, тобто $f(x)>f(x_0)$. Отже, інтервал $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ має ту властивість, що функція $f(x)$ при $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, крім точок $x=x_0$, набуває значень, більших за $f(x_0)$, а це й означає, що x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

3) Нехай в інтервалах $(x_0-\delta;x_0)$, $(x_0;x_0+\delta)$ похідна $f'(x)>0$. Тоді функція $f(x)$ у цих інтервалах зростає і при $x_0-\delta<x<x_0$ виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$, а при $x_0<x<x_0+\delta$ нерівність $f(x)>f(x_0)$.

Отже, функція $f(x)$ у точці x_0 зростає, тобто x_0 не є екстремальною точкою.

Якщо $f'(x)$ в обох інтервалах $(x_0-\delta;x_0)$ і $(x_0;x_0+\delta)$ набуває від'ємних значень, то, міркуючи аналогічно, можна показати, що $f(x)$ у точці x_0 спадає.

Теорему доведено.

Із теорем 1 і 2 випливає *правило дослідження функції на екстремум.*

Перше правило. Щоб дослідити функцію $f(x)$ на екстремум, потрібно:

1) знайти стаціонарні точки заданої функції. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x)=0$, причому з коренів цього рівняння вибрати тільки дійсні й ті, які є внутрішніми точками області визначення функції;

2) знайти точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує (функція $f(x)$ у цих точках існує). Якщо функція $f(x)$ критичних точок не має, то вона не має й екстремальних точок. Така функція не має екстремуму. Якщо критичні точки є, то їх потрібно далі досліджувати, тобто перевіряти достатні умові, які будуть наведені далі;

3) у кожній критичній точці перевірити зміну знака похідної першого порядку. Якщо $f'(x)$ при переході через критичну точку (зліва направо) змінює знак «+» на «–», то ця точка є точкою максимуму. Якщо $f'(x)$ змінює знак «–» на «+», то ця критична точка є точкою мінімуму. Якщо при переході через критичну точку знак похідної не змінюється, то розглядувана критична точка не є екстремальною точкою заданої функції.

❑ **Приклад**

3. Дослідити на екстремум функції: 1) $f(x)=x^3$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; 3) $f(x)=x^2$; 4) $f(x)=|x|$.

Розв'язання.

1) Використаємо наведене правило. Знайдемо похідну першого порядку $f'(x)=3x^2$. Розв'яжемо рівняння $f'(x)=0$, $3x^2=0$, звідси дістаємо одну стаціонарну точку $x=0$. Точок, у яких $f'(x)$ не існує, немає. Отже, маємо тільки одну критичну точку $x=0$. Перевіряємо, чи є зміна знака похідної першого порядку. Оскільки $3x^2>0$ для всіх $x\neq 0$, то $f'(x)$ не змінює знак при переході через критичну точку $x=0$. Отже, $x=0$ не є екстремальною точкою. Функція x^3 екстремуму не має.

2) Знаходимо похідну

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Функція $y=\sqrt[3]{x}$ стаціонарних точок не має, бо $f'(x)$ у жодній точці не дорівнює нулю. Проте є одна точка $x=0$, в якій похідна $f'(x)$ не існує. Отже, $x=0$ є критичною точкою заданої функції, але $f'(x)>0$ для всіх $x\neq 0$. Тому $x=0$ не є екстремальною точкою. Функція $y=\sqrt[3]{x}$ екстремуму не має.

3) Знаходимо $f'(x)=2x$. Прирівнюємо похідну до нуля і розв'язуємо рівняння $2x=0$.

Звідси дістаємо одну стаціонарну точку $x=0$. Точок, в яких $f'(x)$ не існує, немає. Отже, єдиною критичною точкою для функції $y=x^2$ є точка $x=0$.

Перевіряємо достатні умови. Для цього візьмемо поблизу $x=0$ від'ємне значення x, наприклад $x=-h$, де $h>0$ — дійсне число, й обчислимо похідну $f'(-h)=-2h$. Оскільки $h>0$, то $-2h<0$. Отже, зліва від критичної точки похідна $f'(x)$ має від'ємний знак.

Обчислимо $f'(x)$ у точці $x=h$. Маємо $f'(h)=2h>0$.

Отже, праворуч від критичної точки похідна $f'(x)$ має додатний знак.

Таким чином, похідна $f'(x)$ при переході через критичну точку змінює знак «–» на «+». Звідси $x=0$ є точкою мінімуму, а сама функція в точці $x=0$ має мінімум. Щоб знайти цей мінімум, потрібно знайти значення функції в цій точці: $f(0)=0$.

4) Стаціонарних точок задана функція не має, оскільки

$$f'(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x>0;\\ -1, \text{ якщо } x<0,\end{cases}$$

а в точці $x=0$ похідна не існує. Тому критичною точкою для цієї функції є тільки одна точка $x=0$. Оскільки зліва від $x=0$ похідна $f'(x)<0$, а справа $f'(x)>0$, то $x=0$ є точкою мінімуму, а сам мінімум функції дорівнює $f(0)=0$.

Зауважимо, що питання перевірки достатніх умов у випадку, коли функція має скінченну множину критичних точок, можна дещо спростити. Справді, нехай $x_1, x_2, ..., x_k$ критичні точки функції $f(x)$, які пронумеровано в порядку зростання їх, тобто

$$x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k.$$

Розглянемо інтервали

$$(a; x_1),\ (x_1, x_2), ...(x_{k-1}; x_k), (x_k; b),$$

де числа a і b належать області визначення функції (вони можуть бути і невластивими). Тоді в кожному з інтервалів немає екстремальних точок. Отже, в цих інтервалах похідна $f'(x)$ має сталий знак. Обчисливши похідну в будь-якій точці інтервалу, можна дістати знак похідної в усьому інтервалі.

❑ **Приклад**

4. Дослідити на екстремум функцію $f(x)=(x+1)^2(x-2)^3$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо

$$f'(x)=2(x+1)(x-2)^3+3(x+1)^2(x-2)^2=$$
$$=(x+1)(x-2)^2(2x-4+3x+3)=(x+1)(x-2)^2(5x-1).$$

Розв'язуємо рівняння $f'(x)=0$:

$$(x+1)(x-2)^2(5x-1)=0.$$

Звідси дістаємо стаціонарні точки: $x_1=-1, x_2=\frac{1}{5}, x_3=2.$

Точок, в яких похідна не існує, не має. Отже, стаціонарні точки є єдиними критичними точками заданої функції. Розглянемо інтервали

$$(-\infty;-1),\ \left(-1;\frac{1}{5}\right),\ \left(\frac{1}{5};2\right),\ (2;+\infty).$$

Для визначення знака похідної обчислимо останню в довільних точках, які належать цим інтервалам. Візьмемо, наприклад, точки $-2, 0, 1, 3$.

Тоді

$$f'(-2) = -4^2(-11) > 0,\ (+)$$

$$f'(0) = -4 < 0,\ (-)$$

$$f'(1) = 8 > 0,\ (+)$$

$$f'(3) = 4 \cdot 14 > 0.\ (+)$$

Отже, при переході через точку $x_1 = -1$ похідна змінює знак «+» на «–». У цій точці функція має максимум, який дорівнює $f(-1) = -27$.

При переході через точку $x_2 = \frac{1}{5}$ похідна змінює знак «–» на «+». У цій точці функція має мінімум, який дорівнює

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{324}{125}.$$

При переході через критичну точку $x_3 = 2$ похідна знак не змінює. Точка $x_3 = 2$ не є екстремальною для заданої функції.

Виявляється, що в окремих випадках можна застосувати простіше правило дослідження функції на екстремум, використавши похідну другого порядку. Доведемо таку теорему.

Теорема 3. Нехай точка x_0 є стаціонарною для функції $f(x)$ і нехай у цій точці існує похідна другого порядку $f''(x_0)$, яка не дорівнює нулю, $f''(x_0) \neq 0$. Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 є точкою мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.

Доведення. За умовою теореми, x_0 є стаціонарною точкою для $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$. Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$, то це означає, що похідна $f'(x)$, будучи функцією від x, у точці x_0 зростає, а отже, існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) < f'(x_0)$, а для всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ — нерівність $f'(x) > f'(x_0)$. Проте $f'(x_0) = 0$. Тому при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, а при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ — нерівність $f'(x) > 0$. Таким чином, похідна першого порядку $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак «–» на «+». Тоді за теоремою 2 точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Аналогічно доводиться, що коли в стаціонарній точці x_0 друга похідна $f''(x_0) < 0$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.

Теорему доведено.

На основі цієї теореми можна сформулювати друге правило дослідження функції на екстремум.

Друге правило. Щоб дослідити функцію на екстремум, потрібно:

1) знайти стаціонарні точки заданої функції;

2) знайти похідну другого порядку в стаціонарній точці. Якщо в стаціонарній точці x_0 $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 є екстремальною точкою для функції

$f(x)$, а саме точкою мінімуму, якщо $f''(x_0)>0$, і точкою максимуму, якщо $f''(x_0)<0$.

❑ **Приклад**

5. Користуючись другим правилом, дослідити функції на екстремум:

1) $f(x)=x^3-x^2$; 2) $f(x)=2x^3-15x^2-84x+8$;

3) $f(x)=\sqrt{e^{x^2}+1}$.

Р о з в ' я з а н н я.

1) Знаходимо похідну $f'(x)=3x^2-2x$. Прирівнюємо похідну $f'(x)$ до нуля і розв'язуємо рівняння

$$3x^2-2x=0,\ x(3x-2)=0,\ x_1=0,\ x_2=\frac{2}{3}.$$

Дістаємо стаціонарні точки: $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$.

Знаходимо похідну другого порядку

$$f''(x)=6x-2.$$

Підставляємо у вираз для $f''(x)$ значення x_1 і x_2:

$$f''(0)=-2<0,\ f''\left(\frac{2}{3}\right)=6\frac{2}{3}-2=2>0.$$

Отже, $x_1=0$ є точкою максимуму, а $x_2=\frac{2}{3}$ — точкою мінімуму функції $y=x^3-x^2$, причому максимум і мінімум відповідно дорівнюють $f(0)=0$ і $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{27}$.

2) Знаходимо похідну першого порядку

$$f'(x)=6x^2-30x-84.$$

Прирівнюємо похідну до нуля і розв'язуємо рівняння

$$6x^2-30x-84=0.$$

Звідси знаходимо стаціонарні точки:

$$x_1=7;\ x_2=-2.$$

Знаходимо похідну другого порядку

$$f''(x)=12x-30.$$

Тоді $f''(7)=54>0, f''(-2)=-54<0$.

Отже, в точці $x_1=7$ функція має мінімум $f(7)=-629$, а в точці $x_2=-2$ — максимум $f(-2)=100$.

3) Знаходимо похідну першого порядку

$$f'(x)=\frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+1}}.$$

Прирівнюємо похідну до нуля

$$\frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+1}}=0.$$

Дістаємо стаціонарну точку $x=0$.

Знайдемо похідну другого порядку

$$f''(x)=\frac{\sqrt{e^{x^2}+1}\left(e^{x^2}+2x^2e^{x^2}\right)-xe^{x^2}\frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+1}}}{e^{x^2}+1}.$$

Підставивши сюди $x=0$, знаходимо

$$f''(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}>0.$$

Отже, в точці $x=0$ функція має мінімум, який дорівнює $f(0)=\sqrt{2}$.

Друге правило дослідження функції на екстремум простіше, ніж перше. Однак це правило застосовується до вужчого класу функцій. Його, зокрема, не можна застосувати при дослідженні на екстремум до тих точок, в яких похідна першого порядку не існує, а також до стаціонарних точок, в яких похідна другого порядку дорівнює нулю. У цих випадках слід застосовувати перше правило.

Проте іноді випадок, коли в стаціонарній точці похідна другого порядку дорівнює нулю, можна дослідити за допомогою похідних вищих порядків.

Справді, нехай x_0 є стаціонарною точкою для функції $f(x)$. Припустимо, що в цій точці існують неперервні похідні до n-го порядку включно. Нехай у точці x_0 не тільки $f'(x_0)=0$, а й усі похідні до $(n-1)$-го порядку дорівнюють нулю, тобто виконуються рівності

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Проте

$$f^{(n)}_{(x_0)}\neq 0.$$

Скориставшись формулою Тейлора, можна записати рівність

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$0<\theta<1.$$

Внаслідок неперервності похідної n-го порядку в точці x_0 робимо висновок, що в малому околі точки x_0 знак $f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))$ збігається зі знаком $f^{(n)}(x_0)$. Тому вираз у правій частині попередньої рівності, як при $x < x_0$, так і при $x > x_0$, матиме сталий знак, якщо n — число парне, і набуває двох значень, протилежних за знаком, якщо n — непарне. Звідси дістаємо таке правило:

якщо в стаціонарній точці x_0 перша відмінна від нуля похідна функції є похідною парного порядку, то x_0 є екстремальною точкою, а саме точкою максимуму при $f^{(n)}(x_0) < 0$ і точкою мінімуму при $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Якщо в стаціонарній точці x_0 перша відмінна від нуля похідна функції є похідною непарного порядку, то x_0 не є екстремальною точкою для функції $f(x)$.

Зауважимо, що з цього правила при $n = 2$ випливає друге правило дослідження функції на екстремум.

❑ **Приклади**

6. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = x^4$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо

$$f'(x) = 4x^3.$$

Прирівнюємо цю похідну до нуля

$$4x^3 = 0.$$

Звідси дістаємо одну стаціонарну точку $x = 0$.

Точок, в яких похідна першого порядку не існує, немає.

Знаходимо похідну другого порядку

$$f''(x) = 12x^2.$$

Підставивши значення $x = 0$, знаходимо $f''(0) = 0$.

Отже, друге правило тут застосувати не можна.

Знаходимо похідну третього порядку

$$f'''(x) = 24x.$$

Підставивши $x = 0$, матимемо $f'''(0) = 0$.

Знаходимо наступну похідну

$$f^{(IV)}(x) = 24 \neq 0.$$

Отже,

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0,$$

але $f^{(IV)}(0) \neq 0$.

Перша, відмінна від нуля похідна, є похідною парного порядку. Таким чином, у точці $x = 0$ функція $y = x^4$ має екстремум. Оскільки $f^{(IV)}(0) = 24 > 0$, то в цій точці функція має мінімум $f(0) = 0$.

7. Дослідити в точці $x = 0$ на екстремум функцію

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x.$$

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x.$$

Підставляємо в першу похідну $x=0$:

$$f'(0)=1-1-2\cdot 0=0.$$

Отже, $x=0$ є стаціонарною точкою заданої функції.

Знаходимо другу похідну

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x.$$

Звідси

$$f''(0)=0.$$

Далі

$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x.$$

Підставивши сюди $x=0$, знайдемо $f'''(0)=0$.

Знайшовши $f^{(IV)}(x)$,

$$f^{(IV)}(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x,$$

матимемо

$$f^{(IV)}(x)=4\neq 0.$$

Отже, як і в попередньому прикладі, перша відмінна від нуля похідна в стаціонарній точці є похідною парного порядку. Тому $x=0$ є екстремальною точкою.

Оскільки $f^{(IV)}(0)>0$, то $x=0$ є точкою мінімуму заданої функції, і цей мінімум дорівнює $f(0)=4$.

8. Дослідити на екстремум у точці $x=0$ функцію $f(x)=x^5$.

Р о з в ' я з а н н я. Точка $x=0$ є стаціонарною точкою заданої функції, тому що в ній $f'(x)=5x^4$ дорівнює нулю.

Знаходимо послідовно похідні до 5-го порядку включно

$$f'(x)=5x^4;$$

$$f''(x)=5\cdot 4x^3;$$

$$f'''(x)=5\cdot 4\cdot 3x^2;$$

$$f^{(IV)}(x)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x;$$

$$f^{(5)}(x)=5!$$

Звідси

$$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=f^{(IV)}(0)=0,$$

але

$$f^{(5)}(0) = 5! \neq 0.$$

Отже, першою, відмінною від нуля, похідною функції є похідна непарного (п'ятого) порядку. Тому стаціонарна точка $x = 0$ для функції $y = x^5$ не є екстремальною.

9. Дослідити на екстремум у точці $x = 0$ функцію $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3}$.

Розв'язання. Знаходимо

$$f'(x) = \cos x - 1 + x^2.$$

Обчислюємо значення $f'(x)$ у точці $x = 0$:

$$f'(0) = 0.$$

Знаходимо

$$f''(x) = -\sin x + 2x.$$

У точці $x = 0$

$$f''(0) = 0.$$

Знаходимо

$$f'''(x) = -\cos x + 2.$$

Підставивши значення $x = 0$, дістанемо

$$f'''(0) = 1 \neq 0.$$

Отже, перша, відмінна від нуля, похідна є похідною непарного (третього) порядку. Тому $x = 0$ не є екстремальною точкою для заданої функції.

Слід зазначити, що третє правило можна застосувати до більшого числа функцій, ніж друге. Проте і його не завжди можна застосувати. Зокрема, тоді, коли похідна будь-якого порядку в стаціонарній точці дорівнює нулю. Третє правило «перестає працювати», і функцію досліджують на екстремум за першим правилом. Наприклад, можна показати, що функція

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ якщо } x \neq 0; \\ 0, \text{ якщо } x = 0 \end{cases}$$

в точці $x = 0$ має похідну будь-якого порядку, і ця похідна дорівнює нулю. (Пропонуємо цей приклад розв'язати самостійно.)

3.13 ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШОГО І НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ

Нехай на відрізку $[a; b]$ задано неперервну функцію $f(x)$. Тоді за другою теоремою Вейєрштрасса така функція на цьому відрізку досягає свого найбільшого і свого найменшого значень. Проте теорема Вейєрштрасса не дає способу знаходження тих точок відрізка $[a; b]$, в яких функція дорівнює своєму найбільшому (найменшому) значенню. Теорема тільки стверджує, що такі точки існують. Це можуть бути як внутрішні точки відрізка, так і його кінці. Графік неперервної функції, яка у внутрішній точці c_1 відрізка $[a; b]$ набуває найбільшого значення, а у внутрішній точці c_2 — найменшого значення, зображено на рис. 48.

Графік функції, яка на кінцях відрізка набуває найменшого і найбільшого значень, зображено на рис. 49.

Проте може бути й так, що одне із значень функція набуває у внутрішній точці відрізка, а друге — на одному з кінців. Графік неперервної функції, яка в лівому кінці відрізка (в точці a) набуває найменшого значення, а у внутрішній точці (в точці c) — найбільшого значення, зображено на рис. 50.

Якщо функція набуває найбільшого (найменшого) значення у внутрішніх точках відрізка, то це найбільше (найменше) значення є одночасно і локальним максимумом (мінімумом) заданої функції. Звідси випливає спосіб знаходження точок, в яких функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Щоб знайти найбільше (найменше) значення неперервної функції на відрізку $[a; b]$, потрібно знайти всі локальні максимуми (мінімуми) і порівняти їх із значеннями функції, які вона набуває на кінцях відрізка. Найбільше (найменше) число серед цих чисел і буде найбільшим (найменшим) значенням функції, заданої на відрізку $[a; b]$.

Оскільки неперервна функція обов'язково набуває свого найбільшого (найменшого) значення і воно може досягатися тільки в критичних точках і на кінцях відрізка, то немає потреби перевіряти достатні умови існування екстремуму функції в критичних точках. Досить тільки обчислити значення функції в цих точках і порівняти їх зі значеннями функції на кінцях відрізка, тобто з числами $f(a)$ і $f(b)$. Найбільше і найменше з усіх цих чисел, очевидно, й буде відповідно найбільшим і найменшим значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Якщо між точками (кінцями) a і b знаходиться тільки одна критична точка $x \in (a; b)$ і в цій точці функція має максимум (мінімум), то можна стверджувати, що цей максимум (мінімум) і є найбільшим (найменшим) значенням функції на відрізку $[a; b]$. При цьому потрібно дослідити відразу критичну точку на екстремум, тобто встановити, це точка максимуму чи мінімуму. Значення функції в цій точці й буде відповідно найбільшим (найменшим) значенням функції. Слід наголосити, що все сказане справедливе не тільки для відрізка $[a; b]$, а й для інтервалу $(a; b)$ і для нескінченного проміжку.

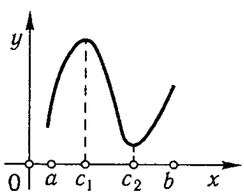


Рис. 48

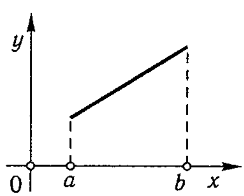


Рис. 49

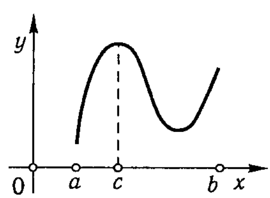


Рис. 50

❑ **Приклад**

1. Знайти найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ на відрізку $\left[-2;\frac{5}{2}\right]$;

2) $f(x)=x^2\ln x$ на відрізку $[1;e]$;

3) $f(x)=\sin^2 x$ на відрізку $[0;\pi]$.

Розв'язання.

1) Знаходимо стаціонарні точки. Для цього знайдемо похідну

$$f'(x)=6x^2-6x-12.$$

Прирівнявши цю похідну до нуля і розв'язавши рівняння

$$6x^2-6x-12=0,$$

дістаємо стаціонарні точки: $x_1=-1$, $x_2=2$. Точок, в яких похідна не існує, немає.

Обчислюємо значення функції в точках x_1, x_2, а також на кінцях відрізка, тобто в точках $x_3=-2$, $x_4=\frac{5}{2}$:

$$f(-1)=8;\ f(2)=-19;\ f(-2)=-3;\ f\left(\frac{5}{2}\right)=-16\frac{1}{2}.$$

Отже, найбільше значення $f(-1)=8$, найменше — $f(2)=-19$.

Знайдемо похідну $f'(x)=2x\ln x+x$.

2) Знаходимо стаціонарні точки, розв'язавши рівняння

$$f'(x)=2x\ln x+x=0.$$

Коренями цього рівняння є числа $x_1=0, x_2=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Проте ці точки не належать відрізку $[1;e]$. Тому серед внутрішніх точок цього відрізка критичних точок немає. Обчислюємо значення функції на кінцях відрізка

$$f(1)=0,\ f(e)=2e.$$

Отже, найменше значення функції дорівнює нулю, а найбільше — $2e$.

3) Знаходимо стаціонарні точки з рівняння

$$f'(x)=0,\ \sin 2x=0.$$

Маємо

$$x=\frac{\pi}{2}k,\ k=0;\pm1;\pm2;\ldots.$$

Потрібно взяти такі точки, які б належали відрізку $[0;\pi]$. Це $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$, $x_3=\pi$.

Отже, маємо тільки одну стаціонарну точку $x_2=\frac{\pi}{2}$. Точки x_1 і x_2 збігаються з кінцями. Обчислюємо значення функції в цих точках:

$$f(0)=f(\pi)=0;\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Найменше значення функції дорівнює нулю, найбільше — одиниці.

Розглянемо кілька практичних задач, розв'язування яких зводиться до знаходження відповідно найбільшого чи найменшого значення певної функції.

Задача 1. Нехай маємо квадратний лист заліза зі стороною a. У кожному куті його потрібно вирізати такі квадрати, щоб після згинання країв можна було б отримати ящик найбільшої місткості.

Розв'язання. Позначимо через x довжину сторони того квадрата, який потрібно вирізати (рис. 51), а через V — об'єм отриманого ящика. Тоді V буде функцією від x:

$$V(x)=(a-2x)^2 x.$$

При цьому x змінюється на відрізку $\left[0; \frac{a}{2}\right]$. Оскільки $V(x)$ є неперервною функцією на відрізку $\left[0; \frac{a}{2}\right]$, то вона набуває на цьому відрізку найбільшого значення. На кінцях відрізка $V(x)$ не може набувати найбільшого значення, оскільки в цих точках $V=0$.

Отже, шукана точка знаходиться серед внутрішніх точок відрізка. Знайдемо цю точку. Для цього знайдемо спочатку похідну

$$V'(x)=-4(a-2x)x+(a-2x)^2=(a-2x)(a-6x).$$

Прирівнюємо похідну до нуля

$$(a-2x)(a-6x)=0.$$

Звідси маємо корені: $x_1=\frac{a}{2}, x_2=\frac{a}{6}$. Точка x_1 не є стаціонарною, тому що це кінець відрізка, на якому розглядається функція $V(x)$. Точка x_2 є внутрішньою точкою заданого відрізка. Отже, x_2 є стаціонарною точкою. Покажемо, що x_2 є екстремальною точкою. Знайдемо похідну другого порядку від функції $V(x)$

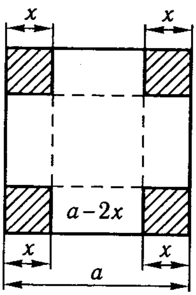


Рис. 51

$$V''(x)=-2(a-6x)-6(a-2x).$$

Підставимо $x=\frac{a}{6}$:

$$V''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0.$$

Отже, $x_2=-\frac{a}{6}$ є точкою максимуму. У ній функція $V(x)$ набуває найбільшого значення, яке дорівнює

$$V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2}{27}a^3.$$

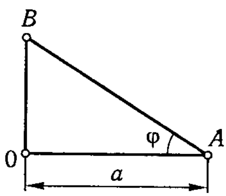


Рис. 52

Задача 2. Нехай електрична лампочка рухається (наприклад, на блоці) вздовж вертикальної прямої OB (рис. 52). На якій відстані від горизонтальної площини потрібно її розмістити, щоб у точці A цієї площини освітлення було найбільшим $(OA=a)$?

Р о з в ' я з а н н я. З курсу фізики відомо, що освітленість I прямо пропорційна до $\sin\varphi$ і обернено пропорційна до квадрата відстані $AB = r$, тобто $I = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$, де k — коефіцієнт пропорційності, який залежить від сили світла лампочки.

За незалежну змінну вважатимемо висоту $x = OB$. Тоді

$$\sin\varphi = \frac{x}{r},\ r = \sqrt{x^2 + a^2},\ 0 < x < \infty.$$

Отже,

$$I(x) = k\frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Знаходимо похідну

$$I'(x) = k\frac{a^2 - 2x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Прирівнюємо похідну до нуля

$$k\frac{a^2 - 2x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Звідси знаходимо стаціонарну точку

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Оскільки функція $I(x)$ має тільки одну стаціонарну точку (критичних точок не має), а в умові задачі сказано, що існує положення лампочки, за якого освітлення в точці A найбільше, то x_1 є шуканою точкою.

Задача 3. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом $V = 32\,\text{м}^3$ так, щоб на облицювання стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо довжину сторони основи через x, а довжину висоти — через y. Тоді

$$V(x, y) = x^2 y = 32.$$

Площа бічної поверхні басейну разом із площею дна дорівнює

$$S = x^2 + 4xy.$$

Знайшовши з попередньої рівності y і підставивши його значення в останню рівність, дістанемо таку функцію від x:

$$S(x) = x^2 + \frac{128}{x}.$$

Знайдемо похідну

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}.$$

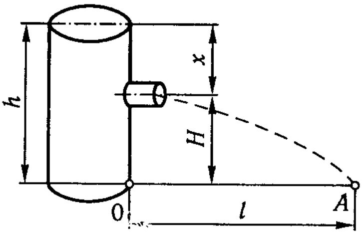


Рис. 53

Прирівняємо її до нуля

$$2x - \frac{128}{x^2} = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, дістанемо стаціонарну точку

$$x_1 = 4.$$

Оскільки існує тільки одна стаціонарна точка, то знайдена точка і є точкою мінімуму.

Отже, найменші розміри басейну заданого об'єму $V = 32\,\text{м}^3$ такі:

$$x = 4\,\text{м}, \quad y = 2\,\text{м}.$$

Задача 4. Посудина з вертикальною стінкою і висотою h стоїть на горизонтальній площині (рис. 53). На якій глибині потрібно розмістити отвір, щоб дальність вильоту води з отвору була найбільшою (швидкість рідини, що витікає за законом Торрічеллі, дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x — глибина розміщення отвору, g — прискорення сили тяжіння)?

Розв'язання. Позначимо через H відстань отвору в посудині від горизонтальної площини, а через l — відстань точки A від стінки посудини. Тоді

$$l = vt,$$

де t — час вильоту води з отвору на площину (в точку A). З курсу фізики відомо, що

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

або

$$t = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}.$$

Тоді

$$l(x) = \sqrt{2gx}\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} = 2\sqrt{x(h-x)},$$

$$0 < x < h.$$

Знайдемо похідну

$$l'(x) = \frac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}.$$

Прирівнюємо її до нуля

$$\frac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}} = 0.$$

Звідси знаходимо стаціонарну точку

$$x = \frac{h}{2}.$$

Оскільки це єдина стаціонарна точка, то вона і є шуканою.

3.14
ОПУКЛІСТЬ І ВГНУТІСТЬ КРИВИХ. ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ

Нехай криву задано рівнянням

$$y = f(x),$$

де $f(x)$ є неперервною функцією на проміжку $\langle a; b\rangle$ і має неперервну похідну $f'(x)$ в інтервалі $(a; b)$. Тоді в кожній точці такої кривої можна провести дотичну. Такі криві ще називають *гладкими*.

Візьмемо на кривій довільну точку $M_0(x_0; y_0)$, де $x_0 \in (a; b)$, $y_0 = f(x_0)$.

Означення. Якщо існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset \langle a; b\rangle$ точки x_0 такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ відповідні точки кривої лежать над дотичною, проведеною до кривої в точці M_0, то криву в точці M_0 називають *вгнутою догори* (рис. 54).

Означення. Якщо існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset \langle a; b\rangle$ точки x_0 такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, відповідні точки кривої лежать під дотичною, проведеною до кривої в точці M_0, то криву в точці називають *вгнутою донизу* (рис. 55).

Означення. Точку M_0 називають ***точкою перегину*** кривої, якщо існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset \langle a; b\rangle$ точки x_0 такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ крива вгнута по один бік, а для всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ крива вгнута по другий бік (рис. 56, *а*, *б*).

❑ **Приклади**

1. Криву задано рівнянням $y = 2^x$. У кожній своїй точці крива вгнута догори (рис. 57).

2. Криву задано рівнянням $y = \lg x$. У кожній своїй точці крива вгнута донизу (рис. 58).

3. Криву задано рівнянням $y = x^3$. Точка (0; 0) є точкою перегину цієї кривої (див. рис. 19, *б*).

4. Криву задано рівнянням $y = \sin x$. Кожна точка $(k\pi, 0), k = 0, \pm 1, \ldots$ для цієї кривої є точкою перегину (див. рис. 15).

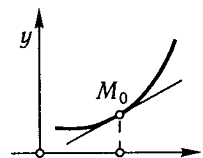


Рис. 54

Якщо крива, задана рівнянням $y = f(x)$, в кожній точці деякого інтервалу вгнута догори, то її називають *вгнутою* на цьому інтервалі. І якщо крива в кожній точці інтервалу вгнута донизу, то її називають *опуклою* на цьому інтервалі.

Отже, крива, зображена на рис. 57, є вгнутою. Крива, зображена на рис. 58, є опуклою.

Крива, зображена на рис. 15, у кожному з інтервалів $(2k\pi; (2k+1)\pi)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ є опуклою, а в кожному з інтервалів $((2k+1)\pi : 2(k+1)\pi)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ — вгнутою.

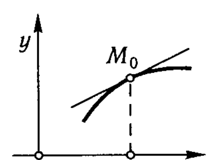


Рис. 55

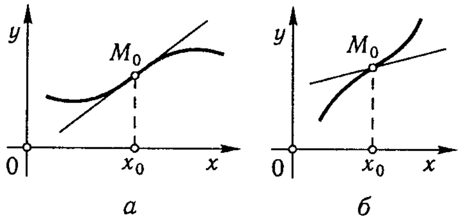


Рис. 56

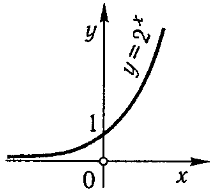


Рис. 57

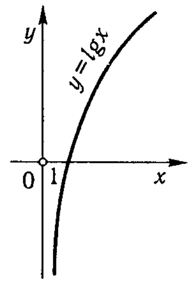


Рис. 58

Точку перегину кривої ще визначають як таку, в якій крива змінює свій вид угнутості.

Не будь-яка крива має точки перегину. Так, криві, зображені на рис. 57 і 58, точок перегину не мають. Іноді крива може мати тільки одну точку перегину (див. рис. 19, *б*), а іноді кілька точок перегину, навіть нескінченну множину. Синусоїда, наприклад, має нескінченну множину точок перегину.

Поставимо задачу: знайти точки вгнутості кривої та точки перегину, якщо вони існують. Доведемо таку теорему.

Теорема. Нехай крива задана рівнянням $y=f(x)$ і нехай існує окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)\subset\langle a;b\rangle$ точки x_0 такий, що функція $f(x)$ при кожному $x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)$ має похідні до другого порядку включно, причому $f''(x)$ у точці x_0 є неперервною функцією. Тоді, якщо $f''(x_0)>0$, то крива в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ вгнута догори. Якщо $f''(x_0)<0$, то крива в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ вгнута донизу.

Доведення. Доведемо теорему для випадку $f''(x_0)>0$. Випадок $f''(x_0)<0$ доводиться аналогічно.

Оскільки функція $f(x)$ у точці x_0 за умовою теореми диференційовна, то крива $y=f(x)$ у точці $M_0(x_0, f(x_0))$ має дотичну. Позначимо через x і y координати точки дотичної, проведеної до кривої в точці $M_0(x_0, f(x_0))$. Тоді рівняння дотичної має вигляд

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \tag{105}$$

За умовою теореми $f(x)$ в інтервалі $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ має похідні до другого порядку включно, тому за формулою Тейлора цю функцію можна записати так:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+$$
$$+\frac{1}{2}f''(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^2, \tag{106}$$
$$0<\theta<1.$$

Нехай число $\delta > 0$ досить мале. Тоді x знаходиться близько до x_0. Внаслідок того що $f''(x)$ неперервна в точці x_0 і $f''(x_0) > 0$, то можна стверджувати, що $f''(x_0 + \theta(x - x_0)) > 0$.

Віднявши почленно від рівності (106) рівність (105), матимемо

$$f(x) - y = \frac{1}{2} f''(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^2,$$

звідси

$$f(x) - y > 0,$$

тобто ординати точок кривої поблизу точки x_0 більші, ніж відповідні ординати точок дотичної. Це й означає, що крива лежить над дотичною, проведеною до кривої в точці M_0.

Теорему доведено.

З доведеної теореми випливає, що коли крива, задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ — визначена і має неперервні похідні до другого порядку включно на деякому інтервалі $(a; b)$, і в кожній точці цього інтервалу $f''(x) > 0$, то задана крива на цьому інтервалі вгнута. Якщо $f''(x) < 0$, то крива на заданому інтервалі опукла. Інакше кажучи, якщо $f''(x) \neq 0$ при $x \in (a; b)$, то крива не має точок перегину. Отже, точка $M_0(x_0, f(x_0))$ може бути точкою перегину кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$, якщо $f''(x_0) = 0$ або $f''(x)$ у точці x_0 не існує, але $f'(x_0)$ існує. Надалі розглядатимемо випадок, коли $f''(x)$ існує в усіх точках інтервалу $(a; b)$.

Тоді корені рівняння $f''(x) = 0$ можуть бути абсцисами точок перегину кривої. Проте не кожного разу, коли в точці x_0 похідна $f''(x_0) = 0$, x_0 є абсцисою точки перегину. Те, що похідна другого порядку дорівнює у цій точці нулю, є тільки необхідною умовою того, щоб x_0 була абсцисою точки перегину кривої, але не достатньою.

❑ **Приклади**

5. Нехай маємо криву, задану рівнянням $y = x^4$. Тоді $f''(x) = 12x^2$. Як бачимо, $f''(0) = 0$, але $x = 0$ не є абсцисою точки перегину кривої. Задана крива взагалі не має точок перегину.

6. Нехай крива задана рівнянням $y = x^3$. Тоді $f''(x) = 6x$ і $f''(0) = 0$. Точка (0; 0) є точкою перегину.

Отже, точки, в яких $f''(x)$ дорівнює нулю, можуть бути абсцисами точок перегину, а можуть і не бути. Для того щоб x_0, в якій $f''(x_0) = 0$, була абсцисою точки перегину, потрібно, щоб у цій точці виконувалися достатні умови, а саме: якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$.

Якщо зміни знака не відбувається, то $M_0(x_0, f(x_0))$ не є точкою перегину.

Наприклад, нехай існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 такий, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f''(x) > 0$, а при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f''(x_0) < 0$. Тоді за попередньою теоремою крива в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ є вгнутою, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ — опуклою, тобто крива, проходячи через точку $M_0(x_0, f(x_0))$, змінює вгнутість. Тоді $M_0(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину.

Якщо існує окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0 такий, що $f''(x)$ у цьому околі має той самий знак, то крива на основі попередньої теореми буде в цьому інтервалі або опуклою (якщо $f''(x)<0$), або вгнутою (якщо $f''(x)>0$).

Отже, сформулюємо правило знаходження точки перегину кривої, заданої рівнянням $y=f(x)$.

Для того щоб знайти точки перегину кривої, заданої рівнянням $y=f(x)$, потрібно:

1) знайти для функції $f(x)$ похідну другого порядку $f''(x)$ і прирівняти її до нуля $f''(x)=0$. Із коренів цього рівняння вибрати тільки ті, які належать області визначення функції;

2) в околі кожного вибраного таким чином кореня визначити знак похідної другого порядку $f''(x)$ спочатку при значеннях x, менших за розглядуваний корінь, а потім при значеннях x, більших за цей корінь. Якщо при переході x через вибраний корінь x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину заданої кривої. Якщо при переході x через x_0 знак похідної другого порядку не змінюється, то $M_0(x_0, f(x_0))$ не є точкою перегину кривої.

Зокрема, якщо при переході x через x_0 функція $f''(x)$ змінює знак «+» на «–», то крива при проходженні через точку перегину $M_0(x_0, f(x_0))$ змінює відповідно свій вигляд із угнутості на опуклість. Якщо $f''(x)$ при переході через x_0 змінює знак «–» на «+», то крива при проходженні через точку перегину $M_0(x_0, f(x_0))$ змінює відповідно свій вигляд з опуклості на вгнутість.

Зазначимо, що правило знаходження точок перегину аналогічне першому правилу знаходження екстремальних точок. Відмінність полягає тільки в тому, що при знаходженні екстремальних точок перевіряють зміну знака похідної першого порядку, а при знаходженні точок перегину — зміну знака похідної другого порядку.

❑ **Приклад**

7. Знайти інтервали вгнутості й опуклості та точки перегину кривих, які задані рівняннями: а) $y=3x^4-8x^3+6x^2+12$; б) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; в) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Знаходимо похідні першого та другого порядків

$$y'=12x^3-24x^2+12x;$$

$$y''=12\left(3x^2-4x+1\right).$$

Прирівнюємо y'' до нуля

$$3x^2-4x+1=0.$$

Звідси знаходимо корені $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=1$.

Отже, в інтервалах $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ і $(1; +\infty)$ похідна $y'' > 0$, а в інтервалі $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ похідна $y'' < 0$. Тому в інтервалах $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, $(1; +\infty)$ крива вгнута, а в інтервалі $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ крива опукла. Точки $\left(\frac{1}{3}; \frac{335}{27}\right)$ і $(1;\ 13)$ є точками перегину кривої;

б) знаходимо похідні

$$y' = \frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2};$$

$$y'' = \frac{-\left(1+x^2\right)^2 2x - \left(1-x^2\right)2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Прирівнюємо похідну y'' до нуля

$$x\left(x^2-3\right) = 0,$$

звідси $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}$.

Досліджуємо зміну знака y'' при переході через кожний корінь. Оскільки

$$\frac{2}{\left(1+x^2\right)^3} > 0$$

при будь-якому $x \in (-\infty; +\infty)$, то знак похідної y'' визначатиметься функцією $\varphi(x) = x\left(x^2-3\right)$.

Знайдемо $\varphi\left(-\sqrt{3}-h\right)$, де $h > 0$ є досить малим числом. Маємо

$$\varphi\left(-\sqrt{3}-h\right) = -\left(\sqrt{3}+h\right)\left(\left(\sqrt{3}+h\right)^2-3\right) < 0.$$

Тепер знайдемо

$$\varphi\left(-\sqrt{3}+h\right) = \left(-\sqrt{3}+h\right)\left(\left(-\sqrt{3}+h\right)^2-3\right) > 0.$$

Отже, відбулася зміна знака з «–» на «+». Точка $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ є точкою перегину.

При переході через точку $x_2 = 0$ y'' змінює знак «+» на «–». Точка $(0;\ 0)$ є точкою перегину.

При переході через точку $x_3 = \sqrt{3}$ також відбувається зміна знака y'' «–» на «+». Точка $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ є точкою перегину.

Маючи точки перегину та знаючи зміну знака y'', можна записати інтервали вгнутості та опуклості кривої.

У цьому разі в інтервалах $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$ і $\left(0; \sqrt{3}\right)$ крива опукла, в інтервалах $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$ і $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ — крива вгнута;

в) знаходимо похідні

$$y' = \frac{x \cdot 2\ln x \frac{1}{x} - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2\ln - \ln^2 x}{x^2};$$

$$y'' = \frac{x^2\left(2\frac{1}{x} - 2\ln x \frac{1}{x}\right) - 2x\left(2\ln x - \ln^2 x\right)}{x^4} = \frac{2 - 6\ln + 2\ln^2 x}{x^3}.$$

Прирівнюємо y'' до нуля

$$\ln^2 x - 3\ln x + 1 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$\ln x = \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \ln x = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

звідси

$$x_1 = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}},\ x_2 = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

Легко перевірити, що y'' змінює знак «+» на «–» при переході через точку x_1 і з «–» на «+» при переході через точку x_2. Отже, в інтервалах $(0; x_1)$ і $(x_2; +\infty)$ крива опукла, а в інтервалі $(x_1; x_2)$ крива вгнута.

Точки $\left(x_1, \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}{4x_1}\right)$, $\left(x_2, \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{4x_2}\right)$ є точками перегину кривої.

Було докладно розглянуто випадок, коли крива задана рівнянням $y = f(x)$. Проте питання дослідження кривої на вгнутість, опуклість і точки перегину можна вивчити і для інших способів задання кривих, наприклад для параметричного задання.

Справді, нехай крива задана рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),$$

де функції $x(t)$, $y(t)$ — неперервні й мають неперервні похідні до другого порядку включно на деякому інтервалі $(\alpha; \beta)$, причому $x'(t) \neq 0$ при будь-якому $t \in (\alpha; \beta)$.

Тоді

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Знайдемо похідну другого порядку від y по x

$$y''_{x^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}.$$

Помножимо чисельник і знаменник на x'

$$y''_{x^2}=\frac{x'(x'y''-y'x'')}{x'^4}.$$

У всіх точках інтервалу, де $y''_{x^2}>0$, або $x'(x'y''-y'x'')>0$, крива буде вгнутою. В решті точок інтервалу $(\alpha;\beta)$ крива буде опуклою. Корені рівняння $x'(x'y''-y'x'')=0$ можуть визначити точки перегину кривої.

❑ **Приклад**

8. Дослідити на вгнутість, опуклість і точки перегину криву, задану рівняннями $x=t^2, y=3t+t^3$.

Розв'язання. Тут функції $x=t^2, y=3t+t^3$ задані на нескінченному інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Знаходимо відповідні похідні:

$$x'=2t,\ x''=2;\ y'=3+3t^2,\ y''=6t.$$

Оскільки x' у точці $t=0$ дорівнює нулю, розглянемо окремо два інтервали: $(-\infty;0),(0;+\infty)$.

Нехай $t\in(-\infty;0)$. Тоді

$$x'(x'y''-y'x'')=2t\left(2t\cdot 6t-\left(3+3t^2\right)2\right)=12t\left(t^2-1\right).$$

Розв'язуємо нерівність

$$12t\left(t^2-1\right)>0.$$

Оскільки $t<0$, то ця нерівність справедлива, якщо $t^2-1<0$.

Звідси $|t|<1$ або $t>-1$.

Отже, в інтервалі $(-1;0)$ крива вгнута, а в інтервалі $(-\infty;-1)$ — опукла. При $t=-1$ маємо точку перегину, а саме точка з координатами $x=(-1)$, $y=y(-1)$ є точкою перегину: $x(-1)=1, y(-1)=-4$. Точка $M_0(1;-4)$ — точка перегину кривої.

Нехай $t\in(0;+\infty)$. Розв'яжемо нерівність

$$12t\left(t^2-1\right)>0.$$

Оскільки $12t>0$, то ця нерівність справедлива при $t^2-1>0$ або $t>1$.

Отже, в інтервалі $(1;+\infty)$ крива вгнута, а в інтервалі $(0;1)$ — опукла. Тоді при $t=1$ маємо точку перегину. Обчислимо $x(1), y(1)$:

$$x(1)=1,\ y(1)=4.$$

Точка $M_1(1;4)$ є точкою перегину кривої.

Інтервали вгнутості: $(-1;0),(1;+\infty)$. Інтервали опуклості: $(-\infty;-1),(0;1)$.

3.15 АСИМПТОТИ КРИВИХ

Нехай крива задана рівнянням $y=f(x)$, де $f(x)$ є неперервною функцією на відрізку $[a;b]$. Тоді ця крива всіма своїми точками знаходиться в замкненому прямокутнику R: $[a:b;-M;M]$, де M є найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

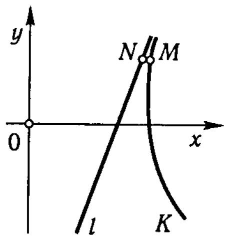


Рис. 59

Якщо функцію $f(x)$ задано на нескінченному проміжку або якщо проміжок скінченний, але містить точки розриву другого роду заданої функції, то криву не завжди можна розмістити в прямокутнику. Тоді крива або окремі її вітки йдуть у нескінченність.

При цьому може статися, що крива на нескінченності наближається до деякої прямої. Таку пряму називають *асимптотою кривої*.

Розглянемо довільну криву K (рис. 59). ***Означення.*** Пряму l називають *асимптотою кривої* K, якщо відстань точки M кривої K до прямої l (до точки N) прямує до нуля, коли точка M по кривій рухається в нескінченність, тобто

$$\lim_{M\to\infty} \overline{MN} = 0.$$

Зазначимо, що не кожна крива з нескінченними вітками має асимптоту. Так, парабола $y = x^2$ асимптот не має, а гіпербола $y = \frac{1}{x}$ має дві асимптоти (осі Ox і Oy). Для кривої $y = \lg x$ асимптотою є вісь Oy.

Знайдемо необхідні і достатні умови для того, щоб крива мала асимптоту, і виведемо рівняння асимптоти.

Для цього припустимо спочатку, що криву K задано параметрично:

$$x = x(t),\ \ y = y(t),$$

де функції $x(t), y(t)$ задані на деякому скінченному або нескінченному проміжку $\langle\alpha; \beta\rangle$. Вважатимемо, що β є таке число (воно може бути й невластиве), що коли $t \to \beta$, то точка M по кривій рухається у нескінченність.

Надалі розрізнятимемо *похилі* й *вертикальні асимптоти*.

Випадок похилої асимптоти. Нехай крива K має похилу асимптоту (до похилих асимптот належать також і горизонтальні асимптоти). Тоді рівняння прямої l можна записати у вигляді

$$y - kx - b = 0. \tag{107}$$

Знайдемо відстань d точки M кривої K до цієї прямої

$$d = \frac{|y(t) - kx(t) - b|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Якщо l є асимптотою кривої K, то

$$\lim_{t\to\beta} d = 0$$

або

$$\lim_{t\to\beta}\big(y(t) - kx(t) - b\big) = 0. \tag{108}$$

Отже, умова (108) є необхідною для того, щоб пряма (107) була похилою асимптотою кривої K.

Умова (108) є й достатньою умовою.

З умови (108) можна дістати формули для кутового коефіцієнта k і вільного члена b.

Справді, оскільки l є похилою асимптотою, то $\lim\limits_{t\to\beta} x(t)=\infty$. Тому умову (108) можна записати ще так:

$$\lim_{t\to\beta} x(t)\left(\frac{y(t)}{x(t)}-k-\frac{b}{x(t)}\right)=0,$$

або

$$\lim_{t\to\beta}\left(\frac{y(t)}{x(t)}-k-\frac{b}{x(t)}\right)=0.$$

Оскільки

$$\lim_{t\to\beta}\frac{b}{x(t)}=0,$$

то

$$k=\lim_{t\to\beta}\frac{y(t)}{x(t)}.$$

З умови (108) випливає

$$b=\lim_{t\to\beta}\big(y(t)-kx(t)\big).$$

Отже, доходимо такого висновку: для того щоб пряма (107) була похилою асимптотою кривої, заданої рівнянням $x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ t\in\langle\alpha;\beta\rangle$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися співвідношення

$$k=\lim_{t\to\beta}\frac{y(t)}{x(t)};\ \ b=\lim_{t\to\beta}\big(y(t)-kx(t)\big). \tag{109}$$

Якщо хоча б одна з границь у формулах (109) не існує, то крива асимптоти не має.

Випадок вертикальної асимптоти. Нехай крива задана параметрично: $x=x(t)$, $y=y(t)$, де $t\in\langle\alpha;\beta\rangle$. Нехай при $t\to\beta$ крива має вертикальну асимптоту

$$x=a. \tag{110}$$

Тоді

$$\lim_{t\to\beta} x(t)=a,\ \ \lim_{t\to\beta} y(t)=\infty. \tag{111}$$

Можна довести й обернене твердження: якщо виконуються співвідношення (111), то крива має вертикальну асимптоту, задану рівнянням (110).

❑ **Приклад**

1. Знайти асимптоти кривих, заданих рівняннями:

1) $x=\dfrac{1}{t}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$; 2) $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

Р о з в ' я з а н н я: 1) знаходимо спочатку похилу асимптоту. Для цього визначаємо ті значення параметра t, за яких $\lim x(t)=\infty$.

Тільки при $t=0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}=\infty.$$

Отже, $\beta=0$.

Скористаємося формулами (109):

$$\lim_{t\to\beta}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{1+t}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t+1}=0.$$

Отже, $k=0$.

Знаходимо

$$\lim_{t\to\beta}\left(y(t)-kx(t)\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{1+t}-0\cdot\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t+1}=0.$$

Таким чином, рівнянням похилої асимптоти є

$$y=0,$$

тобто вісь абсцис є асимптотою.

Знаходимо вертикальну асимптоту. Для цього знайдемо таке значення параметра $t=T'$, що $\lim\limits_{t\to T'}y(t)=\infty$.

Тут $T'=-1$. Тоді

$$\lim_{t\to T'}x(t)=\lim_{t\to -1}\frac{1}{t}=-1.$$

Отже, $x=-1$ є вертикальною асимптотою;

2) знаходимо похилу асимптоту. Тут $\beta=-1$.

Тоді

$$\lim_{t\to -1}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to -1}\frac{3at^2}{3at}=\lim_{t\to -1}t=-1.$$

Отже, $k=-1$.

Знаходимо границю

$$\lim_{t\to -1}\left(y(t)-kx(t)\right)=\lim_{t\to -1}\left(\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+t^3}\right)=\lim_{t\to -1}\frac{3at}{t^2-t+1}=-a.$$

Отже, $b=-a$.

Рівнянням асимптоти є

$$y+x+a=0.$$

Вертикальних асимптот задана крива не має.

Розглянемо випадок, коли крива задана рівнянням $y=f(x)$. Таке задання кривої можна звести до параметричного, поклавши $x=t$. Дістанемо параметричне задання

$$x=t;\ y=f(t).$$

Отже, у випадку похилої асимптоти $x \to \pm\infty$. Тому формули (109) набирають вигляду

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right), \tag{112}$$

причому запис $x \to \pm\infty$ означає, що потрібно окремо розглядати $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

Щодо вертикальної асимптоти, то її рівняння має вигляд $x = a$, причому a це така точка, що

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Згідно з цією рівністю, точка a є для функції $f(x)$ точкою розриву другого роду.

Отже, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то крива $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту, рівняння якої $x = a$.

❑ **Приклад**

2. Знайти асимптоти кривих, заданих рівняннями

1) $y = \frac{2x}{x-1}$; 2) $y = \frac{1}{2x^2+x+1}$; 3) $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Знаходимо границю

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0.$$

Отже, при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$ маємо $k = 0$.

Знаходимо границю

$$\lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x-1} = 2.$$

Отже, $b = 2$.

Рівнянням асимптоти є

$$y - 2 = 0.$$

Щоб знайти вертикальну асимптоту, обчислимо границю

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x}{x-1} = \infty.$$

Рівняння $x = 1$ є рівнянням вертикальної асимптоти.

2) Знаходимо границі

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\left(2x^2+x+1\right)x} = 0;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x^2+x+1} = 0.$$

Отже, $k = b = 0$. Рівнянням асимптоти є $y = 0$.

Оскільки квадратний тричлен $2x^2 + x + 1$ не має дійсних коренів, то функція y всюди неперервна, а отже крива вертикальних асимптот не має.

3) Знаходимо границі

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1;$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = 1.$$

Отже, $k = b = 1$. Рівнянням асимптоти є

$$y - x - 1 = 0.$$

Для функції $xe^{\frac{1}{x}}$ точка $x = 0$ є точкою розриву. Маємо

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Отже, $x = 0$ є вертикальною асимптотою.

3.16
ПРАВИЛА ЛОПІТАЛЯ

Розглянемо застосування похідних до розкриття невизначеностей, які були розглянуті в п. 2.20.

Невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Доведемо так звану теорему Лопіталя[1].

Теорема 1. Нехай для функцій $f(x)$ і $g(x)$ виконуються умови: 1) функції визначені на півінтервалі $(a; b]$ і $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$; 2) в інтервалі $(a; b)$ $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні, причому $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$; 3) існує (скінченна або нескінченна) границя

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Тоді існує границя відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$, яка дорівнює також числу k:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

[1] *Лопіталь Г.* (1661—1704) — французький математик.

Висновок цієї теореми читають ще так: границя відношення функцій дорівнює границі відношення похідних цих функцій. Цю теорему називають *першим правилом Лопіталя.*

Д о в е д е н н я. За умовою теореми функції $f(x)$ і $g(x)$ у кожній точці інтервалу $(a;b)$ мають похідні. Отже, в цьому інтервалі вони неперервні. У точці $x=a$ існують границі: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Тому в точці $x=a$ довизначимо $f(x)$ і $g(x)$ так, щоб вони в цій точці були неперервними. Нехай

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=0;$$

$$g(a)=\lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Отже, тепер $f(x)$ і $g(x)$ є неперервними на будь-якому відрізку $[a;x]$, де $a<x<b$. Оскільки $g'(x)\neq 0$ при $x\in(a;b)$, то до функцій $f(x)$ і $g(x)$ можна застосувати теорему Коші на відрізку $[a;x]$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\ a<c<x.$$

Проте $f(a)=g(a)=0$, тому

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Якщо $x\to a$, то й $c\to a$. Із попередньої рівності дістанемо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=k.$$

Теорему доведено.

Може статися, що крім рівностей

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$$

виконуються також рівності $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\lim\limits_{x\to a} g'(x)=0$.

Нехай

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=k.$$

Застосовуючи доведену теорему двічі, дістанемо рівність

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=k.$$

Взагалі, цей спосіб можна застосовувати доти, доки не дістанемо відношення $\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, яке при $x\to a$ має певну границю. Тоді й

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Зауваження

1. Слід застерегти читача від неправильного висновку, який можна зробити у випадку, коли відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to a$ не має границі. З того що

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

не існує, не випливає, що й

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

не існує. Остання границя може існувати і тоді, коли відношення похідних при $x\to a$ границі не має.

Так, нехай $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, а $g(x)=x$.

Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Проте

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x\sin\frac{1}{x}-x^2\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{1}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

Можна показати, що $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to 0$ до жодної границі не наближається.

2. Теорема 1 при виконанні її умов справджується і тоді, коли точка a є невластивою, тобто $a=\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Справді, застосувавши підстановку $x=\frac{1}{t}$, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Т е о р е м а 2. Нехай для функцій $f(x)$ і $g(x)$ виконуються умови:
1) функції визначені на півінтервалі $(a;b]$ і при цьому

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to a} g(x)=+\infty;$$

2) функції диференційовні в інтервалі $(a;b)$ і при цьому

$$g'(x)\neq 0, \quad x\in(a;b);$$

3) існує (скінченна або нескінченна) границя

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k.$$

Тоді й

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k.$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо спочатку випадок, коли k є скінченним числом. Оскільки функція $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to a$ має скінченну границю k, то можна стверджувати, що існує число $\delta>0$ таке, що для всіх $x\in(a;\,a+\delta)\subset(a;\,b]$ виконуються нерівності

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<k+\frac{\varepsilon}{2}, \tag{113}$$

де $\varepsilon>0$ — довільне число.

Нехай x_0 і x — довільні точки інтервалу $(a;\,a+\delta)$. Тоді на відрізку $[x_0;x]$ виконується теорема Коші

$$\frac{f(x)-x(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Оскільки точка $c\in(a;\,a+\delta)$, то до правої, а отже, і до лівої частини можна застосувати нерівності (113), тобто

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}<k+\frac{\varepsilon}{2}$$

або

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}<k+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Припускаючи, що x знаходиться в околі точки a, і враховуючи умову теореми 1, можна скласти такі нерівності:

$$\left|\frac{f(x_0)}{f(x)}\right|<1, \quad \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<1.$$

Поділивши всі члени попередніх нерівностей на вираз

$$\frac{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}},$$

дістанемо нерівності

$$\left(k-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}<\frac{f(x)}{g(x)}<\left(k+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}.$$

Тут при $x \to a$ права частина наближається до $k+\frac{\varepsilon}{2}$, а ліва — до $k-\frac{\varepsilon}{2}$. Тоді $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ має границю, яка дорівнює k:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Для скінченного k теорему доведено. Нехай тепер k є невластивим числом, тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty.$$

Тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0.$$

$f'(x)\neq 0$, принаймні для x, що належать досить малому околу точки a.

За першою теоремою Лопіталя

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0.$$

Звідси

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty.$$

Теорему доведено.

Слід зазначити, що зауваження, зроблені до теореми 1, справедливі щодо теореми 2. Зокрема, теорема 2 виконується і для випадку, коли a є невластивою точкою, тобто $+\infty$ або $-\infty$.

Зробимо ще таке зауваження. Читач уже знає, що крім невизначеностей $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ є ще й невизначеності $(0\cdot\infty)$; $(\infty-\infty)$; $\left(1^{\infty}\right)$; $\left(0^{0}\right)$; $\left(\infty^{0}\right)$. Проте вони легко зводяться до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Справді, нехай маємо невизначеність $(0\cdot\infty)$. Інакше кажучи, нехай маємо функції $f(x)$ і $g(x)$ такі, що $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Тоді добуток $f(x)g(x)$ можна подати у вигляді частки

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}.$$

У правій частині маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Якщо маємо невизначеність $(\infty-\infty)$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то різницю $f(x)-g(x)$ можна записати так:

$$f(x)-g(x)=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\dfrac{1}{g(x)}}.$$

У правій частині маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Якщо маємо степінь $(f(x))^{g(x)}$ і $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, тобто невизначеність $\left(0^{0}\right)$, то її розкривають так.

Припускаючи, що $f(x)>0$, вираз $(f(x))^{g(x)}$ записують у вигляді

$$(f(x))^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}.$$

У показнику при $x\to a$ маємо невизначеність $(0\cdot\infty)$, яка зводиться до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Аналогічно розкриваються невизначеності $\left(1^{\infty}\right)$ і $\left(\infty^{0}\right)$.

❑ **Приклад**

1. Користуючись теоремами Лопіталя, знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^n$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x-\sec x)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов теорем Лопіталя для першого прикладу. Для решти прикладів пропонуємо умови теорем перевірити самостійно.

1) Нехай $f(x)=\ln x$, $g(x)=x-1$.

Розглядатимемо півінтервал $(1;b]$, де $b>1$ — довільне число. Тоді $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$. Знаходимо похідні: $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=1\neq 0$ за будь-якого $x\in(1;b]$. Тоді

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

Отже, виконуються всі три умови першої теореми Лопіталя. Тому

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

2) У цьому прикладі також маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Використавши першу теорему Лопіталя, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

3) Маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Використовуємо другу теорему Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0.$$

4) Маємо невизначеність $(0\cdot\infty)$. Зводимо її до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для цього запишемо $(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ у вигляді

$$(1-x)\operatorname{tg} x\frac{\pi x}{2}=\frac{1-x}{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}}=\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}.$$

Отже, дістали невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Тому

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg} x\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

5) Маємо невизначеність $(0\cdot\infty)$. Запишемо добуток $e^{-x}x^n$ так:

$$e^{-x}x^n=\frac{x^n}{e^x}.$$

Дістали невизначеність $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$. Тому

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^n = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x}.$$

Під знаком границі в правій частині останньої рівності знову маємо випадок, коли чисельник і знаменник прямують до $+\infty$, тобто маємо ту саму невизначеність $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$. Застосувавши n разів друге правило Лопіталя, дістанемо

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^n = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

6) Маємо невизначеність $\left(1^\infty\right)$. Тоді

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{tg} x \ln\sin x}.$$

Знайдемо границю показника

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ln\sin x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\operatorname{cosec}^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\operatorname{cosec}^2 x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Тому

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

7) Маємо невизначеність $(\infty - \infty)$. Запишемо

$$\operatorname{tg} x - \sec x = \frac{\sin x - 1}{\cos x}.$$

Дістали невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Отже,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \sec x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

8) Маємо невизначеність $\left(\infty^0\right)$. Запишемо

$$(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \ln(\ln\operatorname{ctg} x)}.$$

Знайдемо границю показника

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x \ln(\ln\operatorname{ctg} x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\ln\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{\ln\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\operatorname{cosec}^2 x}{-\operatorname{cosec}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{ctg} x \ln\operatorname{ctg} x} = 0.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0} (\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

3.17
ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Тоді відомо, що графіком цієї функції є деяка лінія. Виникає запитання: як побудувати цей графік? Одним із наближених методів побудови графіка функції є метод (якщо його можна так назвати) побудови за точками. При цьому на площині xOy будується кілька точок, координати яких задовольняють рівняння $y = f(x)$, а потім ці точки сполучають плавною лінією. Зрозуміло, що більше таких точок буде нанесено на площину, то побудована лінія точніше відображатиме графік функції $y = f(x)$. Проте при такому методі побудови графіка не відбивається справжня поведінка функції. Так, нехай графік функції є суцільною лінією (рис. 60), а пунктирна лінія — це лінія, утворена після сполучення семи точок площини xOy. Як бачимо, побудований і справжній графіки тієї самої функції значно відрізняються. Крім цього, при побудові графіка за точками невідомо, в який бік напрямлена вгнутість кривої при переході від однієї точки до іншої. Інакше кажучи, метод побудови графіка за точками не дає змоги виявити точок перегину кривої.

Отже, якби можна було знайти екстремальні точки та точки перегину кривої, можна було б точніше побудувати графік функції.

Перш ніж будувати графік функції, потрібно провести дослідження функції, а саме:

1. *Знайти область визначення функції.* Це дає змогу визначити ті точки осі абсцис, над якими (чи під якими) пройде графік функції, а над якими ні.

2. *Знайти точки перетину графіка з координатними осями.* Для цього потрібно розв'язати дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y = f(x), \\ x = 0 \end{cases}.$$

Перша система дає точки перетину з віссю Ox, а друга — з віссю Oy.

3. *Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.* Розв'язання цього питання полегшить побудову графіка в тому розумінні, що побудову доведеться виконувати не в усій області визначення функції, а тільки в її частині. Так, якщо $f(x)$ є періодичною функцією з періодом $T > 0$, то достатньо побудувати графік на відрізку числової осі, довжина якого дорівнює T, а потім цю частину графіка повторити на кожному відрізку довжини T. Якщо функція парна, то *графік* функції симетричний відносно осі Oy, якщо непарна — то відносно початку координат. Тому достатньо побудувати графік тільки при $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити його і на від'ємні x.

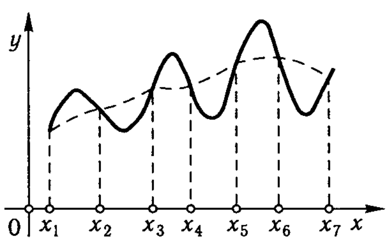


Рис. 60

4. *Знайти точки розриву функції та дослідити їх характер.* Знання характеру точок розриву допоможе встановити вигляд графіка функції поблизу цих точок.

5. *Знайти значення функції на кінцях відрізків, де визначена функція.* Якщо областю визначення функції є інтервал (півінтервал) або кілька інтервалів (півінтервалів), то потрібно знайти граничне значення функції, коли x наближається до одного з кінців розглядуваних проміжків.

6. *Знайти інтервали монотонності функцій.* Тоді знатимемо, де функція зростає, а де спадає.

7. *Знайти екстремальні точки й побудувати їх на площині.*

8. *Знайти інтервали вгнутості та опуклості кривої, яка є графіком функції.*

9. *Знайти точки перегину і побудувати їх на площині.*

10. *Знайти асимптоти графіка функції.*

11. На основі проведеного дослідження *побудувати графік функції.*

❑ **Приклади**

1. Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

1) $y=2x^4-x^2+1$; **2)** $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$;

3) $y=\ln\sin x$.

Розв'язання.

1) Досліджуємо функцію за наведеною схемою.

1. Функція є багаточленом, областю визначення якого є вся множина дійсних чисел, тобто інтервал $(-\infty;+\infty)$.

2. Знаходимо точки перетину графіка з координатними осями. При перетині з віссю Ox $(y=0)$ маємо

$$2x^4-x^2+1=0.$$

Це рівняння дійсних коренів не має, тобто крива осі Ox не перетинає. Для знаходження точок перетину графіка з віссю Oy покладемо $x=0$. Маємо $y=1$. Отже, в точці $M_1(0;1)$ графік функції перетинає вісь Oy.

3. Функція не періодична, але парна. Тому досліджуватимемо задану функцію тільки при $x\geq 0$.

4. Багаточлен є функцією неперервною на всій числовій осі. Точок розриву немає.

5. Досліджуємо функцію на кінцях інтервалів. У точці $x=0$ маємо $y=1$. Знаходимо $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^4-x^2+1\right)=+\infty$.

6. Для знаходження інтервалів монотонності потрібно розв'язати нерівності $y'>0$, $y'<0$. У точках, де $y'>0$, функція зростає, а де $y'<0$, — спадає. Знаходимо y':

$$y'=8x^3-2x=2x\left(4x^2-1\right),\ x\left(4x^2-1\right)>0.$$

Оскільки $x>0$, то має виконуватися нерівність $4x^2-1>0$. Звідси

$$x^2>\frac{1}{4},\ x>\frac{1}{2}.$$

Отже, в інтервалі $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ функція зростає, а в інтервалі $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ — спадає.

7. Досліджуємо функцію на екстремум. Прирівняємо першу похідну до нуля

$$x\left(4x^2-1\right)=0.$$

Дістаємо такі стаціонарні точки: $x_1=0$; $x_2=\frac{1}{2}$ (від'ємних значень x не розглядаємо). Точок, в яких y' не існує, немає.

Знайдемо y'':

$$y''=24x^2-2=2\left(12x^2-1\right).$$

Тоді $f''(0)=-2<0, f''\left(\frac{1}{2}\right)=4>0$. Отже, $x_1=0$ є точкою максимуму, а $x_2=\frac{1}{2}$ — точкою мінімуму, причому

$$y_{\max}=f(0)=1,\ y_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}.$$

Наносимо точки $M_1(0,1), M_2\left(\frac{1}{2},\frac{7}{8}\right)$ на площину xOy.

8. Знаходимо інтервали вгнутості та опуклості графіка. Розв'язуємо нерівність $y''>0$:

$$2\left(12x^2-1\right)>0,\ 12x^2-1>0,\ x^2>\frac{1}{12},\ x>\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

В інтервалі $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}};+\infty\right)$ крива вгнута, а в інтервалі $\left(0;\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ — опукла.

9. Знаходимо точки перегину. Для цього другу похідну прирівнюємо до нуля

$$2\left(12x^2-1\right)=0.$$

Беремо додатний корінь $x_3=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

При переході x через точку x_3, як це випливає з попереднього пункта, y'' змінює знак з «–» на «+». Отже, x_3 є абсцисою точки перегину. Знайдемо $f(x_3)=\frac{67}{72}$. Точка $M_3\left(\frac{1}{2\sqrt{3}};\frac{67}{72}\right)$ є точкою перегину кривої.

10. Знаходимо асимптоти. Вертикальних асимптот крива не має, оскільки $f(x)$ не має точок розриву. З'ясуємо, чи є похилі асимптоти. Знаходимо границю

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-x^2+1}{x}.$$

Застосуємо друге правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-x^2+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(8x^3-2x\right)=+\infty.$$

Отже, крива не має і похилих асимптот.

11. Графік заданої функції зображено на рис. 61.

2) 1. Знаходимо область визначення функції. Задана функція дробово-раціональна, тому вона не визначена в тих точках, де знаменник дорівнює нулю:

$$x^2-1=0,$$

звідси $x=\pm 1$.

Отже, областю визначення функції є об'єднання множин $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Визначимо точки перетину графіка з осями координат. Нехай $y=0$, тоді $x=0$. Нехай $x=0$, тоді $y=0$.

Отже, графік перетинає координатні осі в точці $O(0;0)$, тобто графік проходить через початок координат.

3. Функція не періодична. Проте вона є непарною, тому розглядатимемо тільки $x\ge 0$.

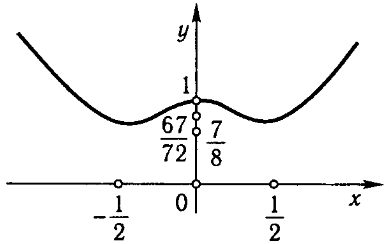


Рис. 61

4. Чисельником і знаменником є багаточлени, які неперервні на всій числовій осі. Тому точкою розриву при $x\ge 0$ є тільки одна точка $x=1$. Дослідимо її характер. Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\(x<1)}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\(x<1)}}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\(x>1)}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\(x>1)}}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty.$$

Отже, $x=1$ є точкою розриву другого роду. Пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою.

5. Досліджуємо функцію на кінцях проміжків, де вона визначена. В точці $x=1$ її вже дослідили. Тепер знайдемо

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x}=+\infty.$$

6. Знайдемо y':

$$y'=\frac{\left(x^2-1\right)3x^2-x^3 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Розв'яжемо нерівність $y'>0$:

$$\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}>0.$$

Скоротивши на додатний множник, дістанемо

$$x^2-3>0,$$

звідси $x>\sqrt{3}$.

Отже, в інтервалі $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ функція зростає, а в інтервалах $(0;1)$ і $\left(1;\sqrt{3}\right)$ — спадає.

7. Знайдемо екстремальні точки. Розв'яжемо рівняння $y'=0$:

$$\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=0.$$

Звідси знайдемо стаціонарні точки: $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$.

При переході x через точку x_1 похідна y' знак не змінює, а при переході x через точку x_2 похідна y' змінює знак «–» на «+». Тому x_1 не є екстремальною точкою, а x_2 є точкою мінімуму

$$y_{\min} = f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

8. Знаходимо інтервали вгнутості та опуклості графіка функції. Знайдемо y'':

$$y'' = \frac{\left(x^2-1\right)^2\left(4x^3-6x\right)-\left(x^4-3x^2\right)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Розв'яжемо нерівність $y'' > 0$:

$$\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3} > 0.$$

Скоротивши на додатний множник $\dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$, дістанемо

$$\frac{1}{x^2-1} > 0.$$

Ця нерівність виконується при $x > 1$. Отже, в інтервалі $(1; +\infty)$ крива вгнута, а в інтервалі $(0; 1)$ — опукла.

9. Знаходимо точки перегину. Розв'язуємо рівняння $y'' = 0$:

$$\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3} = 0.$$

Звідси $x_3 = 0$.

При проходженні x через точку $x = 0$ похідна y'' змінює знак «+» на «–». Точка $O(0, 0)$ є точкою перегину.

10. Знаходимо похилі асимптоти. Обчислюємо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\left(x^2-1\right)x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Отже, $k = 1$, $b = 0$.

Рівняння похилої асимптоти: $y = x$.

11. Будуємо графік функції (рис. 62).

3) 1. Функція існує при всіх x, що задовольняють нерівність

$$\sin x > 0.$$

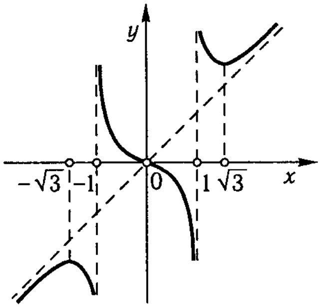


Рис. 62

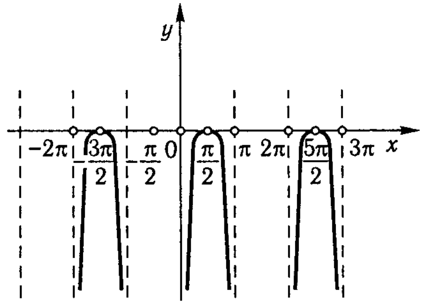


Рис. 63

Звідси

$$k\pi < x < (2k+1)\pi;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

2. Нехай $y = 0$, тоді $\ln \sin x = 0$ або $\sin x = 1$. Звідси маємо такі точки перетину графіка з віссю Ox:

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

З віссю Oy графік не перетинається, оскільки $x = 0$ не належить області визначення функції.

3. Внутрішня функція періодична з періодом 2π, але оскільки на відрізку $[\pi; 2\pi]$ зовнішню функцію не визначено, то розглядатимемо тільки інтервал $(0; \pi)$.

4. Точки $x = 0, x = \pi$ є точками розриву другого роду:

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\(x>0)}} y = \lim_{\substack{x\to 0+\\(x>0)}} \ln \sin x = -\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to \pi\to 0\\(x<\pi)}} y = \lim_{\substack{x\to \pi-0\\(x<\pi)}} \ln \sin x = -\infty.$$

Отже, прямі $x = 0, x = \pi$ є вертикальними асимптотами графіка функції.

5. У попередньому пункті досліджено поведінку функції на кінцях інтервалу $(0; \pi)$.

6. Для визначення інтервалів монотонності знаходимо y':

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{ctg} x > 0$, при $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ $\operatorname{ctg} x < 0$.

Отже, в інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функція зростає, а в інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ — спадає.

7. Розв'язуємо рівняння $y' = 0$:

$$\operatorname{ctg} x = 0.$$

Звідси знаходимо стаціонарну точку $x_1 = \frac{\pi}{2}$. При переході x через цю точку y' змінює знак «+» на «–». Тому $x_1 = \frac{\pi}{2}$ є точкою максимуму і

$$y_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln \sin \frac{\pi}{2} = 0.$$

8. Знаходимо y'':

$$y'' = -\text{cosec}^2 x.$$

В інтервалі $(0; \pi)$ $y'' < 0$. Отже, в цьому інтервалі крива опукла.
9. Точок перегину немає, оскільки $y'' \neq 0$ в інтервалі $(0; \pi)$.
10. Похилих асимптот також немає.
11. Будуємо графік функції (рис. 63).

3.18
НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Розглянемо деякі методи наближеного розв'язування рівнянь вигляду

$$f(x) = 0, \tag{114}$$

де $f(x)$ — функція, неперервна на відрізку $[a; b]$. Нагадаємо, що коренем рівняння (114) називають будь-яке дійсне число ξ таке, що

$$f(\xi) = 0.$$

Одним із методів знаходження коренів рівняння (114) є графічний метод, коли будують графік функції $y = f(x)$, а потім знаходять абсциси точок перетину графіка з віссю Ox. Ці абсциси і є коренями рівняння (114). На практиці часто рівняння (114) замінюють еквівалентним йому рівнянням

$$f_1(x) = f_2(x),$$

де $f_1(x) - f_2(x) = f(x)$. При цьому $f_1(x)$ і $f_2(x)$ функції, графіки яких простіші, ніж графік функції $f(x)$. Тоді абсциси точок перетину графіків функцій $f_1(x), f_2(x)$ є коренями рівняння (114).

❑ **Приклад**

1. Знайти корені рівняння $x^4 - x - 1 = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо це рівняння так:

$$x^4 = x + 1.$$

Нехай $f_1(x) = x^4, f_2(x) = x + 1$. Будуємо графіки функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ (рис. 64). Точки x_1 і x_2 є коренями розглядуваного рівняння.

Проте графічним методом тільки в окремих простіших випадках вдається знайти корені рівняння. Тому здебільшого користуються іншими методами, які ми зараз розглянемо.

Далі припускатимемо, що:

1) $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ неперервна разом із похідними $f'(x)$ і $f''(x)$;

2) $f(x)$ на кінцях відрізка $[a; b]$ набуває значень, протилежних за знаком: $f(a)f(b) < 0$;

3) похідні $f'(x)$ і $f''(x)$ на відрізку $[a; b]$ зберігають сталий знак.

Тоді з умов 1) і 2) випливає, що $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ має хоча б один нуль (корінь), і з того, що $f'(x)$ зберігає сталий знак, випливає, що $f(x)$

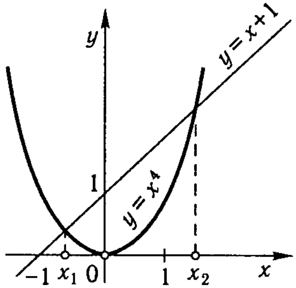


Рис. 64

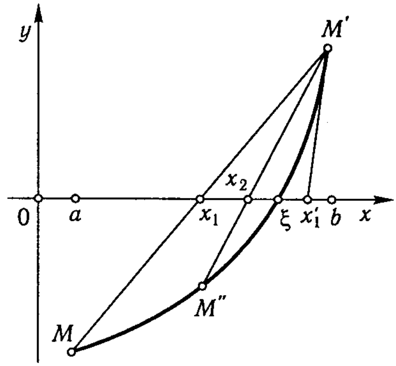


Рис. 65

на відрізку $[a; b]$ має тільки один корінь. Такий корінь називають *ізольованим.* Далі розглядатимемо тільки ізольовані корені.

Метод хорд. Припустимо, що відрізок $[a; b]$, в якому міститься корінь ξ, $a < \xi < b$, досить малий. Цього завжди можна досягти, якщо заданий відрізок поділити навпіл. У цьому випадку вважають, що приріст функції прямо пропорційний до приросту аргументу, тобто виконується така наближена рівність:

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{f(b)-f(a)} \simeq \frac{\xi-a}{b-a}.$$

Проте $f(\xi)=0$, тому

$$\xi \simeq a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

Отже, за наближене значення кореня ξ можна взяти число

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}. \qquad (115)$$

Це правило має просту геометричну інтерпретацію. Нехай графіком функції $f(x)$ є дуга MM' (рис. 65). Замінимо дугу MM' хордою MM'. Тоді x_1 є абсцисою точки перетину хорди MM' з віссю Ox. За цього методу замість абсциси точки перетину графіка функції потрібно взяти абсцису точки перетину хорди (січної, яка сполучає кінці графіка) з віссю Ox.

Тому цей метод дістав назву *метод хорд*.

Число x_1 називають *першим наближенням шуканого кореня* ξ. Щоб дістати друге наближення x_2, замінимо у формулі (115) число a на число x_1, припускаючи, що $f(x)$ на кінцях відрізка $[x_1; b]$ має протилежні знаки. Дістанемо

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1) f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}.$$

Число x_2 знаходиться між x_1 і ξ (див. рис. 65).

Процес побудови точок $x_1, x_2, \ldots$ можна необмежено продовжувати, внаслідок чого дістанемо зростаючу послідовність точок

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi,$$

де

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \tag{116}$$

Послідовність точок $\{x_n\}$ є монотонно зростаючою і обмеженою зверху числом ξ. Тому така послідовність є збіжною. Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

Справді, нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Доведемо, що $\alpha = \xi$.

Перейшовши в рівності (116) до границі й скориставшись при цьому тим, що $f(x)$ неперервна, а отже, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha)$, дістанемо

$$\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)(b - \alpha)}{f(b) - f(\alpha)}.$$

Звідси $f(\alpha) = 0$. Отже, α є коренем рівняння (114). Проте за припущенням в інтервалі $(a; b)$ є тільки один корінь. Тому

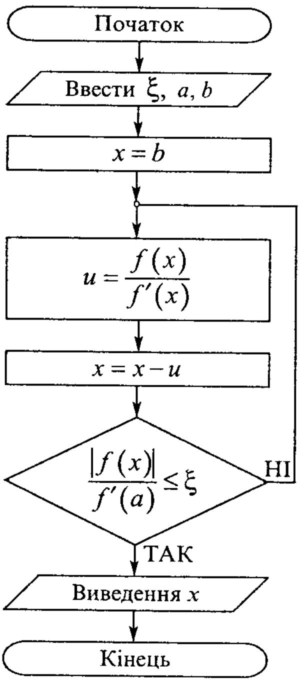
$$\alpha = \xi.$$

Знайдемо оцінку для відхилення n-наближення x_n від точного значення кореня α. Для цього до різниці

$$f(x_n) - f(\alpha) = f(x_n)$$

застосуємо формулу Лагранжа. Матимемо

$$f(x_n) = f'(c)(x_n - \alpha), \; x_n < c < \alpha.$$



Структурна схема алгоритму знаходження кореня рівняння методом хорд за формулою (116)

Звідси дістаємо таку оцінку:

$$|x_n - \alpha| \le \frac{|f(x_n)|}{m},$$

де $m = \min\limits_{\alpha \le x \le b} |f'(x)|$.

❑ **Приклад**

2. Методом хорд знайти з точністю до 10^{-4} дійсний корінь рівняння

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0.$$

Р о з в ' я з а н н я. Введемо позначення

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5.$$

Розглянемо відрізок $[1; 2]$. Знайдемо

$$f(1) = -3 < 0, \ f(2) = 1 > 0.$$

Отже, на відрізку $[1; 2]$ є хоча б один дійсний корінь. Покажемо, що тільки один корінь. Знайдемо $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3.$$

Як бачимо, $f'(x) > 0$ для будь-якого $x \in (-\infty; +\infty)$. Тому графік функції $f(x)$ тільки один раз перетинає вісь Ox.

Знаходимо перше наближення

$$x_1 = 1 - \frac{-3}{4} = 1,75.$$

Оскільки $f(1,75) = -0,5156 < 0$, а $f(2) = 1 > 0$, то шуканий корінь ξ задовольняє нерівність $1,75 < \xi < 2$.

Знаходимо друге наближення

$$x_2 = 1,75 + \frac{0,5156}{1,5156} 0,25 = 1,8350.$$

Тут $f(1,8350) = -0,05059 < 0$, а $f(2) = 1 > 0$, тому

$$1,835 < \xi < 2.$$

Звузимо інтервал, щоб процес швидше збігався. Для цього обчислимо $f(1,9) = 0,339 > 0$, тому

$$1,835 < \xi < 1,9.$$

Застосуємо до інтервалу $(1,835; 1,9)$ метод хорд. Маємо

$$x_3 = 1,835 - \frac{-0,05059}{0,339 + 0,05059} 0,065 = 1,8434.$$

Подальші підрахунки дають такі числа:

$$x_4 = 1,8437; \ x_5 = 1,8438.$$

Оскільки $f(1{,}8437)<0$, а $f(1{,}8438)>0$, то шуканий корінь з точністю до 10^{-4} дорівнює

$$\xi \approx 1{,}8438.$$

Метод дотичних (метод Ньютона). Проведемо в точці M' (див. рис. 65) односторонню дотичну. Знайдемо абсцису точки перетину дотичної з віссю Ox. Для цього запишемо рівняння дотичної в точці $M'(b, f(b))$:

$$y - f(b) = f'(b)(x-b).$$

Нехай $y=0$. Тоді

$$x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{117}$$

Число x_1' можна взяти за наближене значення кореня.

Цей метод називають *методом дотичних* (дуга кривої MM' замінюється дотичною, проведеною в одному з кінців дуги).

Застосовуючи метод дотичних $n+1$ разів, дістанемо таку формулу:

$$x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n')}{f'(x_n')}. \tag{118}$$

Тут також можна показати, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \xi$.

Як і для методу хорд, виводиться оцінка

$$|x_n - \alpha| \le \frac{|f(x_n)|}{m},$$

де

$$m = \min_{a\le x\le b} |f'(x)|.$$

❑ **Приклад**

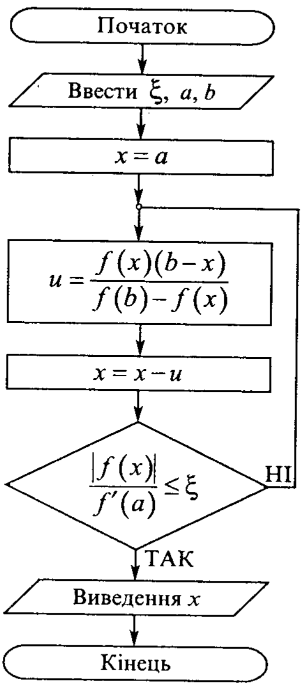
3. Візьмемо те саме рівняння, що й у попередньому прикладі. Знайдемо наближене значення кореня цього рівняння методом дотичних. Обидві похідні

$$f'(x)=3x^2-4x+3, \quad f''(x)=6x-4$$

в інтервалі $(1; 2)$ зберігають знак (строго додатні). Тому за вихідну точку можна взяти правий кінець $x_0 = 2$.

За формулою (117) перше наближення

$$x_1' = 2 - \frac{1}{7} = 1{,}857.$$



Структурна схема алгоритму знаходження кореня рівняння методом дотичних за формулою (118)

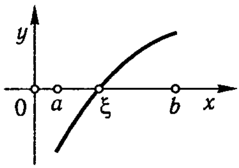


Рис. 66

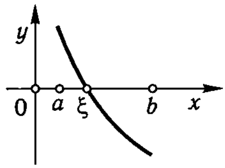


Рис. 67

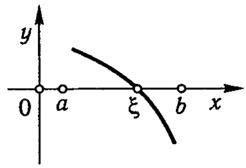


Рис. 68

Друге наближення обчислимо за формулою (118). Маємо

$$x_2' = 1{,}857 - \frac{f(1{,}857)}{f'(1{,}857)} = 1{,}857 - \frac{0{,}0779}{5{,}9275} = 1{,}8439.$$

Третє наближення

$$x_3' = 1{,}8439 - \frac{f(1{,}8439)}{f'(1{,}8439)} = 1{,}8438.$$

Як бачимо, вже третє наближення дає ту точність, яка вимагається в задачі.

Наприкінці зауважимо, що під час знаходження наближених значень коренів і методом хорд, і методом дотичних було розглянуто тільки один із чотирьох можливих випадків, а саме той, коли:

1) $f'(x) > 0$ і $f''(x) > 0$ (рис. 65). Проте можуть бути ще такі три випадки:

2) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$;

3) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$;

4) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

Для кожного випадку розміщення кривої показано відповідно на рис. 66—68. Можна довести, що й наближення, знайдені методом хорд і методом дотичних, збігаються до кореня ξ.

Невизначений інтеграл

РОЗДІЛ 4

4.1 ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основна задача диференціального числення полягає в тому, щоб від заданої функції $f(x)$ знайти її похідну $f'(x)$.

Якщо, наприклад, відомо закон прямолінійного руху точки $s = f(t)$ і потрібно знайти швидкість v та прискорення a у певний момент часу t, то ці задачі розв'язуються за допомогою похідних $v = f'(t); a = v' = f''(t)$. Якщо відоме рівняння кривої $y = f(x)$, а потрібно знайти рівняння дотичної до цієї кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$, то задача розв'язується також за допомогою похідної. Рівняння дотичної має вигляд $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Проте на практиці доводиться частіше розв'язувати обернені задачі, коли відоме прискорення як функція часу $a = a(t)$, і потрібно знайти швидкість v у момент часу t та пройдений шлях s точкою за час t, яка рухається прямолінійно; або, знаючи в кожній точці кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кривої, знайти рівняння кривої.

Отже, в першому випадку за відомою функцією $a = a(t)$ потрібно знайти функцію $v = v(t)$, для якої $a(t)$ є похідною, а потім за функцією $v(t)$ знайти функцію $s = s(t)$, для якої $v(t)$ є похідною.

У другому випадку за кутовим коефіцієнтом $k = f'(x)$ потрібно знайти криву $y = f(x)$ таку, щоб кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до цієї кривої в точці $(x, f(x))$, дорівнював би $f'(x)$.

Отже, з суто математичної точки зору дістаємо таку задачу.

На деякому проміжку $\langle a; b\rangle$ задано функцію $f(x)$. Потрібно знайти таку функцію $F(x)$, щоб похідна $F'(x)$ у кожній внутрішній точці проміжку $\langle a; b\rangle$ дорівнювала б $f(x)$, тобто $F'(x) \equiv f(x)$.

Означення. Функцію $F(x)$ на проміжку $\langle a; b\rangle$ називають *первісною* для функції $f(x)$, якщо $F(x)$ на проміжку $\langle a; b\rangle$ є неперервною, а в кожній внутрішній точці проміжку $\langle a; b\rangle$ $F(x)$ є диференційовною і

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

❑ **Приклади**

1. Нехай $f(x) \equiv 1$. Тоді в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ первісною для такої функції буде функція $F(x) = x$. Справді, в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ функція $F(x)$ є неперервною і диференційовною, причому $F'(x) = 1$.

2. Нехай $f(x)=\mathrm{e}^x$. Тоді в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ первісною є функція $F(x)=\mathrm{e}^x$. Справді, функція e^x є неперервною в цьому інтервалі й диференційовною, причому $F'(x)=\mathrm{e}^x$. Отже, виконується співвідношення (1).

Зауважимо, що коли проміжком $\langle a;b\rangle$ є інтервал (скінченний або нескінченний) $(a;b)$, то з того, що $F(x)$ є диференційовною, випливає, що $F(x)$ в інтервалі є і неперервною. Тому немає потреби досліджувати функцію $F(x)$ на неперервність.

Якщо $\langle a;b\rangle$ є відрізком, півінтервалом або піввідрізком, що важливо для застосувань, то $F(x)$ потрібно досліджувати на неперервність у кінцевих точках. При цьому може бути і так, що $f(x)$, первісна якої знаходиться, в кінцях відрізка не визначена. В означенні первісної функції вимагається тільки, щоб $f(x)$ існувала у внутрішніх точках, проміжку $\langle a;b\rangle$.

❑ **Приклади**

3. Очевидно, функція $F(x)=2\sqrt{x}$ у напіввідрізку $[0;+\infty)$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, хоча $f(x)$ у точці $x=0$ не визначено.

Справді, функція $2\sqrt{x}$ у точці $x=0$ є неперервною, а в кожній внутрішній точці інтервалу $(0;+\infty)$ вона є диференційовною і

$$\left(2\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4. Функція

$$F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ при } x>0;\\ 0 \text{ при } x=0\end{cases}$$

в напіввідрізку $[0;+\infty)$ є первісною для функції

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Справді, $F(x)$ у точці $x=0$ є неперервною. Це випливає з того, що

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} F(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0=F(0).$$

У решті точок інтервалу $(0;+\infty)$ функція $F(x)$ диференційовна і

$$F'(x)=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\equiv f(x).$$

У зв'язку з уведенням до розгляду первісних функцій виникає низка запитань:

1) чи для всякої функції $f(x)$ на заданому проміжку $\langle a;b\rangle$ існує первісна функція $F(x)$?

2) якщо $f(x)$ має первісну, то скільки цих первісних: одна, дві чи безліч?

3) якщо $F(x)$ і $\Phi(x)$ — дві первісні функції для функції $f(x)$, то як вони відрізняються між собою, тобто, яка функція є різницею функцій $F(x)-\Phi(x)$?

4) нехай $f(x)$ — елементарна функція. Чи буде первісна функція $F(x)$ також елементарною? Чи, можливо, $F(x)$ належатиме до іншого класу функцій?

Відповідь на перше запитання дає така теорема.

Теорема 1. Будь-яка неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ має первісну.

Доведення цієї теореми буде подано в наступному розділі.

Отже, з цієї теореми дістаємо, що клас функцій, які мають первісну функцію, ширший, ніж клас диференційовних функцій (будь-яка диференційовна функція є й неперервною, тоді як не будь-яка неперервна функція є диференційовною).

Щоб відповісти на друге запитання, доведемо таку теорему.

Теорема 2. Якщо на проміжку $\langle a; b\rangle$ функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то на цьому проміжку первісною для $f(x)$ буде також функція $F(x)+C$, де C — довільне стале число.

Доведення. Нехай $F(x)$ є первісною для $f(x)$. Тоді справедлива рівність $F'(x)=f(x)$.

Проте

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

І оскільки функція $F(x)+C$ є неперервною на проміжку $\langle a; b\rangle$, то теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що коли $f(x)$ має на заданому проміжку первісну функцію $F(x)$, то цих первісних безліч. Надаючи C довільних числових значень, щоразу діставатимемо первісну функцію.

Відповідь на третє запитання дає така теорема.

Теорема 3. Будь-які дві первісні функції для тієї самої функції відрізняються одна від одної на сталу величину.

Доведення. Нехай $F(x)$ і $\Phi(x)$ на проміжку $\langle a;b\rangle$ є первісними функціями для функції $f(x)$. Тоді для всіх $x\in(a;b)$ виконуються рівності

$$F'(x)\equiv f(x),\ \Phi'(x)\equiv f(x).$$

Отже,

$$F'(x)=\Phi'(x).$$

Якщо похідні функцій рівні, то самі функції відрізняються одна від одної на сталу величину (див. наслідок 2 із теореми Лагранжа).

$$\Phi(x)-F(x)=C.$$

Теорему доведено.

Із попередньої рівності випливає, що

$$\Phi(x)=F(x)+C. \tag{2}$$

Звідси дістаємо досить важливий висновок: якщо $F(x)$ на проміжку $\langle a;b\rangle$ є первісною функцією для $f(x)$, то будь-яка інша первісна функція для $f(x)$ зображується у вигляді (2).

Інакше кажучи, якщо $F(x)$ — первісна функція для $f(x)$, то множина всіх первісних функцій для функції $f(x)$ записується рівністю (2), в якій C — довільне стале число.

Означення. Множину всіх первісних функцій для функції $f(x)$ називають *невизначеним інтегралом* і позначають

$$\int f(x)dx.$$

При цьому $f(x)$ називають *підінтегральною функцією*, а $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом.*

Отже, якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \tag{3}$$

Ліва частина рівності (3) читається так: «Інтеграл еф від ікс де ікс».

Операцію знаходження невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ називають *інтегруванням* цієї функції.

Розділ математичного аналізу, в якому вивчають способи інтегрування функцій, називають *інтегральним численням.*

❑ **Приклад**

5. Знайти невизначений інтеграл для функцій

1) $f(x)\equiv 1$; 2) $f(x)=e^x$; 3) $f(x)=\sin x$; 4) $f(x)=x$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Оскільки первісною функцією для функції $f(x)\equiv 1$ є функція $F(x)=x$, то

$$\int 1dx = x+C.$$

2) Первісною функцією для функції e^x є функція e^x. Тому

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

3) Для функції $\sin x$ первісною є функція $\cos x$. Тому

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

4) Первісною для функції x є функція $\frac{x^2}{2}$. Отже,

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}+C.$$

Оскільки та сама функція може мати нескінченну множину первісних функцій, то під час розв'язування практичних задач виникає проблема вибору тієї первісної функції, яка задовольняє умову поставленої задачі.

Нехай, наприклад, потрібно за певним прискоренням $a=a(t)$ знайти швидкість $v=v(t)$ у певний момент часу. Вже зазначалося, що $v'(t)=a(t)$. Отже, $v(t)$ є первісною для функції $a(t)$.

Тому

$$v(t)=F(t)+C,$$

де $F(t)$ також одна з первісних для функції $a(t)$, C — довільне стале число.

Щоб знайти це число, потрібно скористатись додатковою умовою. Такою умовою є так звана *початкова умова:* задається значення швидкості в початковий момент часу $v(0)=v_0$. Підставляючи в попередню рівність значення $t=0$, дістанемо

$$v_0=F(0)+C,$$

звідси $C=v_0-F(0)$.

Отже, остаточно

$$v(t)=v_0+F(t)-F(0).$$

Відповідаючи на четверте запитання, зазначимо, що не завжди первісна функція елементарної функції $f(x)$ є також елементарною. Так, для елементарних функцій

$$e^{-x^2},\ \frac{1}{\ln x},\ \frac{\cos x}{x},\ \frac{\sin x}{x},\ \sin x^2,\ \cos x^2,\ \sqrt{1+x^3}$$

первісні функції існують, але вони не є елементарними. Первісні для цих функцій належать до так званих *вищих трансцендентних функцій.* У такому випадку кажуть, що невизначені інтеграли

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int\frac{1}{\ln x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\sin x^2dx,\ \int\cos x^2dx,\ \int\sqrt{1+x^3}\,dx$$

не існують у скінченному вигляді.

Той факт, що при інтегруванні елементарної функції можна вийти з класу елементарних функцій, не є дивним. Адже операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання і часто обернена операція потребує розширення класу (множини) тих елементів, у яких виконується пряма операція. Так, наприклад, нехай у множині натуральних чисел розглядається операція додавання. Оберненою є операція віднімання. Ця операція приводить до необхідності поряд із натуральними числами ввести цілі від'ємні числа. Оберненою операцією до операції множення у множині натуральних чисел є операція ділення. Ця операція приводить до необхідності введення до розгляду нових — раціональних чисел. Операція добування кореня, яка є оберненою до операції піднесення до степеня, приводить до ірраціональних і уявних чисел.

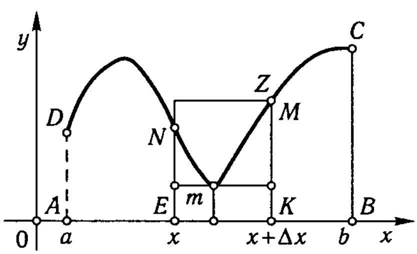


Рис. 69

Дамо геометричну інтерпретацію первісної функції. Нехай функція $f(x)\geq 0$ неперервна на відрізку $[a;b]$ (рис. 69).

Розглянемо фігуру $ABCD$, обмежену графіком неперервної функції $f(x)$, двома прямими $x=a$ і $x=b$ та відрізком осі Ox. Таку фігуру називають *криволінійною трапецією.*

Позначимо через P площу цієї трапеції. У наступному розділі дамо означення площі і доведемо, що криволінійна трапеція має площу, а зараз користуватимемося інтуїтивним поняттям про площу плоскої фігури.

Розглянемо змінну фігуру $AEND$, де точка x — довільна, $a \le x \le b$. Позначимо через $P(x)$ площу фігури $AEND$. Надамо x деякого довільного приросту $\Delta x > 0, x+\Delta x \le b$. Тоді функція $P(x)$ дістане деякий приріст, який позначимо через $\Delta P(x)$. Нехай m і M відповідно найменше і найбільше значення $f(x)$ на відрізку $[x; x+\Delta x]$. Побудуємо два прямокутники з висотами m і M та основою Δx. Згідно з рис. 69, фігура $EKZN$, площу якої позначено через $\Delta P(x)$, знаходиться між побудованими прямокутниками, і площі цих фігур задовольняють нерівності

$$m\Delta x < \Delta P(x) < M\Delta x.$$

Звідси

$$m < \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} < M.$$

Перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$ і врахувавши, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} M = f(x)$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Проте

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = P'(x).$$

Отже,

$$P'(x) = f(x).$$

Із цієї рівності випливає, що $P(x)$ є первісною функцією для функції $f(x)$. Тому первісну функцію можна інтерпретувати як змінну площу $P(x)$ криволінійної трапеції.

Усі первісні функції пов'язані співвідношенням

$$P(x) = F(x) + C,$$

де $F(x)$ також первісна функція для $f(x)$, а C — довільне стале число.

Поклавши в попередній рівності $x=a$ і врахувавши, що $P(a)=0$ (див. рис. 69), маємо

$$C = -F(a),$$

тому $P(x) = F(x) - F(a)$.

Вважаючи, що $x=b$, дістаємо таку формулу для обчислення площі криволінійної трапеції:

$$P = F(b) - F(a). \tag{4}$$

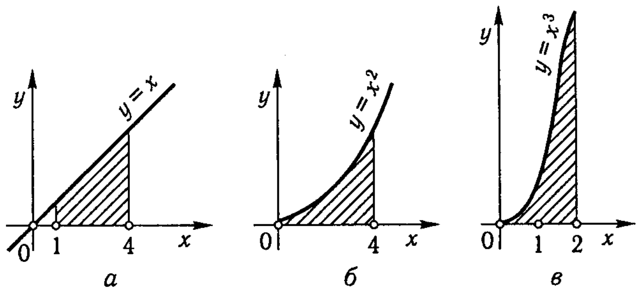


Рис. 70

❑ **Приклад**

6. Користуючись формулою (4), обчислити площу криволінійних фігур, зображених відповідно на рис. 70, *а—в*.

Р о з в ' я з а н н я:

а) первісною функцією для функції x є функція $F(x)=\frac{x^2}{2}$. Тому площа заданої фігури

$$P=F(4)-F(1)=\frac{4^2}{2}-\frac{1^2}{2}=\frac{16}{2}-\frac{1}{2}=\frac{15}{2}.$$

Зауважимо, що фігура на рис. 70, *а* є звичайною трапецією. Її площа, як відомо, дорівнює добутку півсуми основ на висоту, тобто

$$\frac{1+4}{2}3=\frac{15}{2}.$$

Дістали той самий результат;

б) однією з первісних функцій для функції x^2 є функція $F(x)=\frac{x^3}{3}$. Тому

$$P=F(4)-F(0)=\frac{4^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{64}{3};$$

в) первісною функцією для функції x^3 є функція $F(x)=\frac{x^4}{4}$, тому

$$P=F(2)-F(0)=\frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4}=4.$$

4.2
ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

В л а с т и в і с т ь 1°. Послідовне виконання операції диференціювання та інтегрування в будь-якому порядку з точністю до довільної сталої приводить до початкової функції.

Д о в е д е н н я. Нехай маємо функцію $f(x)$, яка має первісну. Запишемо для неї невизначений інтеграл або, інакше кажучи, проінтегруємо її

$$\int f(x)dx.$$

Тоді за означенням первісної функції маємо

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x).$$

Нехай $F'(x)$ — похідна функції $F(x)$. Тоді $F(x)$ є первісною функцією для функції $F'(x)$. Отже,

$$\int F'(x)dx=F(x)+C.$$

Властивість доведено.

Попередні рівності можна відповідно записати ще в такому вигляді:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx;$$

$$\int\left(dF(x)\right)=F(x)+C.$$

Отже, розглядувану властивість можна сформулювати ще так: операції диференціювання та інтегрування з точністю до сталої є взаємно оберненими.

Звідси дістаємо просте правило перевірки того, чи правильно знайдено первісну функцію (невизначений інтеграл) для цієї функції. Для цього потрібно знайдену функцію продиференціювати. Якщо дістанемо підінтегральну функцію, то первісну функцію знайдено правильно.

Властивість 2°. Якщо число $a\neq 0$, то

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx. \tag{5}$$

Доведення. Знайдемо похідну функції від правої частини попередньої рівності. Маємо

$$\frac{d}{dx}\left(a\int f(x)dx\right)=a\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=af(x).$$

Отже, $a\int f(x)dx$ є первісною функцією для функції $af(x)$, що й потрібно було довести.

Властивість 2° формулюють ще так: сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла.

Властивість 3°.

$$\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx. \tag{6}$$

Доведення. Знайдемо похідну функції, що становить праву частину цієї рівності. Маємо

$$\frac{d}{dx}\left(\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\right)=\frac{d}{dx}\left(\int f_1(x)dx\right)\pm\frac{d}{dx}\left(\int f_2(x)dx\right)=f_1(x)\pm f_2(x).$$

Отже, $\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$ є первісною функцією для функції $f_1(x)\pm$ $\pm f_2(x)$.

Цю властивість формулюють ще так: невизначений інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) невизначених інтегралів від кожної функції.

Зауваження. В обох частинах рівностей (5) і (6) є невизначені інтеграли. Кожний з них містить довільну сталу. Тому ці рівності слід розуміти як такі, що різниця між лівою і правою частинами є сталою величиною (числом).

Властивості 2° і 3° використовують безпосередньо для знаходження невизначених інтегралів.

Таблиця основних інтегралів. У розділі «Диференціальне числення» було вміщено основну таблицю похідних. Оскільки операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання, то можна для кожної функції (похідної) написати їй відповідну первісну функцію (невизначений інтеграл). Тоді дістанемо таку таблицю інтегралів:

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

2. $\int 1 \cdot dx = x + C.$

3. $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \ (\mu \neq -1).$

4. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

5. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C.$

6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C; \ \int e^x dx = e^x + C.$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

10. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

11. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$

12. $\int \dfrac{1}{a^2+x^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C.$

13. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C.$

14. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

15. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

16. $\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

17. $\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

18. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

19. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

Зауваження. У правій частині рівності **4** маємо функцію $\ln|x|+C$. Покажемо, що похідна цієї функції в кожній точці, крім точки $x=0$, дорівнює $\frac{1}{x}$.

Справді, якщо $x>0$, то $\ln|x| = \ln x$, і

$$(\ln|x|+C)' = (\ln(x)+C)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Якщо $x<0$, то $\ln|x| = \ln(-x)$, і

$$(\ln|x|+C)' = (\ln(-x)+C)' = (\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Отже, формула **4** справедлива для $x \in (-\infty; 0)$ і для $x \in (0; +\infty)$.

❑ **Приклад**

1. Знайти інтеграли:

1) $\int\left(x^4-3x^2+x-5\right)dx$; 2) $\int\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}dx$, де $x>0$;

3) $\int\left(10^{-x}+\frac{x^2+2}{1+x^2}\right)dx$; 4) $\int\frac{x^2+2}{x^2-1}dx$; 5) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

6) $\int\operatorname{ctg}^2 x dx$; 7) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Р о з в ' я з а н н я.

1) $\int\left(x^4-3x^2+x-5\right)dx = \int x^4dx - 3\int x^2dx + \int xdx - 5\int dx = \frac{x^5}{5} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + C.$

2) Запишемо підінтегральну функцію так:

$$\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}.$$

Тоді

$$\int\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx =$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx + 4\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}} + C.$$

Оскільки функція

$$F(x)=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+8x^{\frac{1}{2}}$$

є неперервною на піввідрізку $[0;+\infty)$, а в інтервалі $(0;+\infty)$ похідна $F'(x)$ дорівнює підінтегральній функції $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}$, то $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на піввідрізку $[0;+\infty)$.

3) Запишемо підінтегральну функцію так:

$$10^{-x}+\frac{x^2+2}{1+x^2}=(0{,}1)^x+1+\frac{1}{1+x^2}.$$

Тоді

$$\int\left(10^{-x}+\frac{x^2+2}{1+x^2}\right)dx=\int\left((0{,}1)^x+1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\int(0{,}1)^x dx+\int 1\cdot dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{(0{,}1)^x}{\ln 0{,}1}+x+\operatorname{arctg}x+C.$$

4) Підінтегральну функцію можна записати у вигляді

$$\frac{x^2+2}{x^2-1}=1+\frac{3}{x^2-1}.$$

Тоді

$$\int\frac{x^2+2}{x^2-1}dx=\int\left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)dx=\int 1\cdot dx+3\int\frac{dx}{x^2-1}=x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

5) Запишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

6) $\int\operatorname{ctg}^2 x dx=\int\left(\operatorname{cosec}^2 x-1\right)dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int 1\cdot dx=-\operatorname{ctg}x-x+C.$

7) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}=\int\frac{dx}{3\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.$

4.3 МЕТОД ПІДСТАНОВКИ

Усі методи інтегрування функцій зводять невизначений інтеграл до інтеграла, який знаходиться в основній таблиці інтегралів або, як ще кажуть, до табличного інтеграла. Одним із найпоширеніших методів є так званий метод підстановки. В основі цього методу лежить така теорема.

Теорема. Нехай функція $G(t)$ на проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$ є первісною для функції $g(t)$, тобто $\int g(t)dt=G(t)+C$, і нехай $t=\omega(x)$ диференційовна функція в деякому проміжку $\langle a; b\rangle$, значення якої при $x \in \langle a : b\rangle$ належать проміжку $(\alpha; \beta\rangle$. Тоді виконується рівність

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C.$$

Доведення. Введемо позначення $t = \omega(x)$. Тоді, скориставшись тим, що $G'(t) = g(t)$, а також використавши правило диференціювання складеної функції, дістанемо

$$\frac{d}{dx}G(\omega(x)) = \frac{d}{dt}(G(t))\frac{dt}{dx} = G'(t)\omega'(x) = g(t)\omega'(x) = g(\omega(x))\omega'(x),$$

а це й означає, що функція $G(\omega(x))$ є первісною для функції $g(\omega(x))\omega'(x)$.

Теорему доведено.

З'ясуємо докладніше зміст цієї теореми.

Нехай потрібно знайти невизначений інтеграл

$$\int f(x)dx,$$

який не є табличним. Припускатимемо, що від функції можна «відділити» функцію $t = \omega(x)$ таку, що підінтегральний вираз запишеться у вигляді

$$f(x)dx = g(\omega(x))\omega'(x)dx = g(t)dt.$$

Тоді теорема стверджує, що

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt, \tag{7}$$

і якщо інтеграл у правій частині цієї рівності є табличним або легко зводиться до табличного, то для нього можна написати первісну функцію $G(t)$ або, що те саме, $G(\omega(x))$. Тоді й $\int f(x)dx = G(\omega(x)) + C$.

Звернемо увагу на те, що за t потрібно вибирати таку функцію $t = \omega(x)$, щоб: 1) під інтегралом був явний диференціал від $\omega(x)$ $(\omega'(x)dx)$ або якщо цього диференціала немає, то його можна легко утворити за допомогою множення або ділення на стале число, відмінне від нуля; 2) інтеграл $\int g(t)dt$ був би табличним.

Якщо одночасно ці два пункти не виконуються, то інтеграл потрібно знаходити іншими методами.

❑ **Приклад**

1. Користуючись методом підстановки, знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \cos^3 xdx$; 2) $\int \frac{\ln xdx}{x}$; 3) $\int e^{x^2} xdx$;

4) $\int \sin mxdx,\ m \neq 0$; 5) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

Розв'язання.

1) Запишемо інтеграл у вигляді

$$\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 x \cos xdx = \int\left(1 - \sin^2 x\right)\cos xdx =$$
$$= \int\left(\cos x - \sin^2 x \cos x\right)dx = \int \cos xdx - \int \sin^2 x \cos xdx = \sin x - \int \sin^2 x \cos xdx.$$

У другому інтегралі введемо позначення

$$t = \sin x.$$

Тоді $dt = \cos x dx$. Добуток $\cos x dx$ є під інтегралом, тому

$$\int \cos^3 x dx = \sin x - \int t^2 dt = \sin x - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

2) Застосуємо підстановку $t = \ln x$.

Тоді $dt = \frac{1}{x} dx$. Під інтегралом є диференціал функції $\ln x$. Отже,

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \frac{1}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

3) Введемо підстановку $t = x^2$.

Тоді $dt = 2x dx$. Під інтегралом є добуток $x dx$. Для повного диференціала не вистачає множника 2, але тоді підінтегральний вираз можна помножити і поділити на 2, потім $\frac{1}{2}$ слід винести за знак невизначеного інтеграла. Дістанемо

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} 2x dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

4) Якщо в інтегралі застосувати підстановку

$$t = mx,$$

то $dt = m dx$. Тоді

$$\int \sin mx dx = \frac{1}{m} \int \sin mx \cdot m dx = \frac{1}{m} \int \sin t dt = \frac{-1}{m} \cos t + C = \frac{-1}{m} \cos mx + C.$$

5) Застосуємо підстановку $t = x^2$, $dt = 2x dx$.

Тоді

$$\int \frac{x dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + \left(x^2\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

6) Запишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)} \right).$$

Тоді

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{(x-a)(x+a)} \right) dx = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{(x-a)} - \int \frac{dx}{(x+a)} \right).$$

Зауважимо, що диференціал dx не зміниться, якщо до x додати або відняти стале число. Тому попередні інтеграли можна записати ще так:

$$\int \frac{dx}{(x-a)} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln|x-a| + C_1;$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_2 = \ln|x+a| + C_2.$$

Тоді

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + \frac{1}{2a} (C_1 - C_2) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$C = \frac{1}{2a} (C_1 - C_2).$$

Дістали табличний інтеграл 15.

Зазначимо, що користуючись методом підстановки, не обов'язково щоразу писати букву t. Покажемо це на прикладах.

❑ **Приклад**

2. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 3) $\int\frac{dx}{\sin x}$; 4) $\int\frac{dx}{\cos x}$.

Р о з в ' я з а н н я.

1) $$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{a}dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,$$

тут $t=\frac{x}{a}$.

2) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,$$

тут $t=\frac{x}{a}$.

Дістали табличний інтеграл 13.

3) Запишемо інтеграл у вигляді

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C,$$

тут $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

4) $$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|\operatorname{tg}x\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C,$$

тут $t=x+\frac{\pi}{2}$.

При знаходженні невизначених інтегралів часто користуються формулою

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

де $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на деякому проміжку; a, b — числа. (Пропонуємо довести цю формулу самостійно.)

❑ **Приклад**

3. Знайти невизначений інтеграл $\int\sin(5x+1)dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки первісною для функції $\sin x$ є функція $-\cos x$, то, згідно з наведеною формулою, дістанемо

$$\int\sin(5x+1)dx=-\frac{1}{5}\cos(5x+1)+C.$$

Іноді під час знаходження невизначених інтегралів користуються безпосередньо підстановкою

$$x = \varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ — диференційовна функція на певному проміжку і $\varphi'(t) \neq 0$. Тоді $\varphi(t)$ має обернену функцію $t = \omega(x)$, приходимо до попередньої підстановки.

Інтеграл у цьому випадку записується так:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt.$$

Як приклади на цю формулу розглянемо тригонометричні підстановки.

❑ **Приклад**

4. Знайти інтеграли:

1) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$; 2) $\int \sqrt{a^2 + x^2}dx$.

Розв'язання. 1) Застосуємо тригонометричну підстановку $x = a\sin t$, $dx = a\cos t dt$. Тоді

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t dt\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\int \cos 2t d(2t)\right) = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C.$$

Підставивши значення $t = \arcsin\frac{x}{a}$, дістанемо

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right) + C = \frac{a}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C.$$

2) Застосуємо тригонометричну підстановку $x = a\,\mathrm{tg}\, t$, $dx = a\sec^2 t dt$. Тоді

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = a^2 \int \sec^3 t dt.$$

Інтеграл $\int \sec^3 t dt$ знайдемо далі (див. приклад 7 п. 4.4).

4.4
ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Розглянемо дві функції $u = \varphi(x)$, $v = g(x)$, які на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$ є неперервними й мають неперервні похідні першого порядку $\varphi'(x)$, $g'(x)$. Тоді функції u і v мають диференціали $du = \varphi'(x)dx$, $dv = g'(x)dx$, причому виконується рівність

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Внаслідок рівності диференціалів невизначені інтеграли відрізнятимуться тільки на сталу величину. Отже, маємо рівність із точністю до сталої

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu,$$

але $\int d(uv) = uv + C$. Тому дістанемо таку формулу:

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (8)$$

Зазначимо, що у формулі (8) не пишемо сталу, адже стала міститься в інтегралі $\int v du$, а сума двох сталих є сталою.

Формулу (8) називають *формулою інтегрування частинами.* З'ясуємо докладніше зміст цієї формули. Нехай потрібно знайти інтеграл

$$\int f(x) dx.$$

Позначимо деякий аналітичний вираз, який входить до функції $f(x)$, через $u = \varphi(x)$. Тоді решту підінтегрального виразу позначимо через dv:

$$dv = \frac{f(x) dx}{\varphi(x)}. \qquad (9)$$

Інакше кажучи, запишемо підінтегральний вираз у вигляді

$$f(x) dx = u dv.$$

Якщо при цьому диференціал (9) є такий, що невизначений інтеграл

$$v = \int \frac{f(x) dx}{\varphi(x)}$$

знаходиться простіше, або є табличним, або зводиться до табличного, і при цьому інтеграл

$$\int v du = \int v \varphi'(x) dx$$

також знаходиться, то формула (8) дає змогу знайти інтеграл $\int f(x) dx$.

❑ **Приклад**

1. Знайти невизначені інтеграли, користуючись методом інтегрування частинами:

1) $\int x \sin x dx$; 2) $\int x \ln x dx$;

3) $\int \arcsin x dx$; 4) $\int \ln^2 x dx$;

5) $\int e^{ax} \sin bx dx$; 6) $\int e^{ax} \cos bx dx$;

7) $\int \sec^3 t dt$.

Розв'язання.

1) Введемо позначення $u = x$, тоді $dv = \sin x dx$. Заданий інтеграл запишемо у вигляді

$$\int x \sin x dx = uv - \int v du.$$

У правій частині невідомими є функція v і диференціал du. Знайдемо їх. Із рівності $dv = \sin x dx$ знаходимо

$$v = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Сталу при знаходженні v не пишемо. Її напишемо при знаходженні інтеграла $\int v du$. Оскільки u є відомою функцією, $u = x$, то $du = u' dx = dx$.

Отже,

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Якби за u взяли, наприклад, функцію $u = \sin x$, то приклад не розв'язали б. Справді, нехай $u = \sin x$. Тоді

$$dv = xdx.$$

Звідси

$$v = \int xdx = \frac{x^2}{2},$$

а

$$du = \cos xdx.$$

Отже,

$$\int x\sin xdx = \frac{1}{2}x^2\sin x - \frac{1}{2}\int x^2\cos xdx.$$

У правій частині дістали невизначений інтеграл, який є складнішим, ніж заданий інтеграл.

Отже, під час користування формулами інтегрування частинами потрібно вміло вибирати вираз для $u = \varphi(x)$.

2) Введемо позначення

$$u = \ln x, \ dv = xdx.$$

Звідси

$$du = \frac{1}{x}dx, \ v = \int xdx = \frac{x^2}{2}.$$

Тоді

$$\int x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

3) Введемо позначення $u = \arcsin x$, $dv = dx$, звідси

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \ v = x.$$

Тоді

$$\int \arcsin xdx = x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

4) Нехай $u = \ln^2 x, dv = dx.$

Тоді $du = 2\ln x\frac{1}{x}dx, dv = \int dx = x.$

Отже,

$$\int \ln^2 xdx = x\ln^2 x - \int x\cdot 2\ln x\frac{1}{x}dx = x\ln^2 x - 2\int \ln xdx.$$

Невизначений інтеграл $\int \ln xdx$ також інтегруватимемо частинами.

Нехай $u = \ln x; dv = dx.$

Тоді

$$du = \frac{1}{x}dx; \ v = \int dx = x.$$

Отже,

$$\int \ln xdx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$$

Остаточно знаходимо

$$\int \ln^2 xdx = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C.$$

5) Позначимо в цьому інтегралі

$$u = e^{ax}, \ dv = \sin bxdx.$$

Тоді

$$du = ae^{ax}dx,\ v = \frac{1}{b}\int \sin bx d(bx) = -\frac{\cos bx}{b}.$$

Отже,

$$\int e^{ax}\sin bx dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx. \qquad (10)$$

Інтеграл у правій частині цієї рівності також знаходитимемо за частинами. Введемо позначення

$$u = e^{ax},\ dv = \cos bx dx.$$

Маємо

$$du = ae^{ax}dx,\ v = \int \cos bx dx = \frac{1}{b}\int \cos bx d(bx) = \frac{\sin bx}{b}.$$

Скориставшись формулою (8), знайдемо

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx. \qquad (11)$$

Підставивши значення цього інтеграла в рівність (10), дістанемо

$$\int e^{ax}\sin bx dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{ae^{ax}\sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx dx.$$

У правій частині цієї рівності маємо той самий інтеграл, що й у лівій. Тому, розв'язуючи цю рівність відносно інтеграла, знаходимо

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{b^2 + a^2} + C. \qquad (12)$$

6) Щоб знайти заданий інтеграл, скористаємося рівністю (11). Підставимо в цю рівність значення інтеграла з (12). Маємо

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{b^2 + a^2} + C.$$

7) Запишемо заданий інтеграл у вигляді

$$\int \sec^3 t dt = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \int \frac{(\sin^2 t + \cos^2 t)}{\cos^3 t} dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt + \int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Інтеграл $\int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt$ знаходимо частинами. Для цього введемо позначення

$$u = \sin t;\ dv = \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt.$$

Тоді

$$du = \cos t dt;\ v = \int \frac{\sin t}{\cos^3 t} = \frac{1}{2\cos^2 t}.$$

За формулою (8) дістанемо

$$\int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt = \frac{\sin t}{2\cos^2 t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos t} = \frac{\sin t}{2\cos^2 t} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Остаточно маємо

$$\int \sec^3 t dt = \frac{\sin t}{2\cos^2 t} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Слід зазначити, що існують окремі класи функцій, невизначені інтеграли від яких знаходяться методом інтегрування частинами. Це такі інтеграли, як

$$\int x^k \ln^m x dx;\ \int x^k \sin bx dx;\ \int x^k \cos bx dx;\ \int x^k e^{ax} dx,$$

а також інтеграли від обернених тригонометричних функцій тощо.

Знайдемо інтеграл, який застосовуватимемо далі,

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+h^2\right)^n},\ n=1,2,3,...,$$

де $h>0$ — дійсне число. Зазначимо, що при $n=1$ маємо табличний інтеграл. Тому вважатимемо, що $n \geq 2$. Позначимо цей інтеграл

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+h^2\right)^n}.$$

Тоді

$$I_n = \frac{1}{h^2}\int \frac{h^2 dx}{\left(x^2+h^2\right)^n}.$$

Додамо і віднімемо в чисельнику x^2. Дістанемо

$$I_n = \frac{1}{h^2}\int \frac{\left(x^2+h^2\right)-x^2}{\left(x^2+h^2\right)^n}dx =$$

$$= \frac{1}{h^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+h^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{h^2}\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2+h^2\right)^n} = \frac{1}{h^2} I_{n-1} - \frac{1}{h^2}\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2+h^2\right)^n}. \quad (13)$$

До інтеграла, який знаходиться в правій частині цієї рівності, застосуємо формулу інтегрування частинами. Введемо позначення: $u = x;\ dv = \frac{xdx}{\left(x^2+h^2\right)^n}$.

Звідси знаходимо

$$du = dx;$$

$$v = \int \frac{xdx}{\left(x^2+h^2\right)^n} = \frac{1}{2}\int \left(x^2+h^2\right)^{-n} d\left(x^2+h^2\right) = \frac{\left(x^2+h^2\right)^{1-n}}{2(1-n)} = \frac{1}{2(1-n)\left(x^2+h^2\right)^{n-1}}.$$

Тоді

$$\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2+h^2\right)^n} = \frac{x}{2(1-n)\left(x^2+h^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{\left(x^2+h^2\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{x}{2(1-n)\left(x^2+h^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}.$$

Підставивши значення цього інтеграла в (13), маємо

$$I_n = \frac{1}{h^2} I_{n-1} - \frac{1}{h^2}\left(\frac{x}{2(1-n)\left(x^2+h^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1} \right)$$

або

$$I_n = \frac{x}{2h^2(n-1)\left(x^2+h^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)h^2} I_{n-1},\ n = 2, 3, \dots .$$

Підставивши у цій рівності замість n $n+1$, дістанемо рекурентну формулу

$$I_{n+1} = \frac{x}{2nh^2\left(x^2+h^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2nh^2} I_n,\ n = 1, 2, 3, \dots . \tag{14}$$

Формула (14) зводить знаходження інтеграла J_{n+1} до знаходження інтеграла I_n. Знаючи, зокрема, I_1, за цією формулою можна знайти

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2+h^2\right)^2} = \frac{x}{2h^2\left(x^2+h^2\right)} + \frac{1}{2h^2} I_1 = \frac{x}{2h^2\left(x^2+h^2\right)} + \frac{1}{2h^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{h} + C.$$

Знаючи I_2, знайдемо I_3:

$$I_3 = \frac{x}{4h^2\left(x^2+h^2\right)^2} + \frac{3}{4h^3} I_2 = \frac{x}{4h^2\left(x^2+h^2\right)} + \frac{3x}{8h^4\left(x^2+h^2\right)} + \frac{3}{8h^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{h} + C.$$

4.5 ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Загальні зауваження. Розглянемо окремий клас функцій, невизначені інтеграли від яких беруться у скінченному вигляді (є елементарними функціями), та вкажемо метод їх знаходження. До таких функцій належать *раціональні функції.*

Як відомо, клас раціональних функцій поділяється на цілі раціональні або багаточлени, і дробово-раціональні функції, які є відношенням двох багаточленів.

Нехай маємо цілу раціональну функцію

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \tag{15}$$

де $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ — дійсні числа. Тоді невизначений інтеграл від $P(x)$ існує і є також цілою раціональною функцією. Справді,

$$\int P(x)dx = \int\left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n\right)dx = a_0\int x^n dx + a_1\int x^{n-1}dx + \dots +$$

$$+ \dots + a_{n-1}\int xdx + a_n\int dx = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \dots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_nx + a_{n+1}$$

(довільну сталу позначимо через a_{n+1}). У правій частині цієї рівності є багаточлен степеня $n+1$.

Розглянемо дробово-раціональну функцію

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{16}$$

де $P(x)$ — багаточлен (15) степеня n, а $Q(x)$ — багаточлен степеня m, який має вигляд

$$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m, \tag{17}$$

де $b_i, i=0,1,...,m$ — дійсні числа.

Отже, дробово-раціональні функції виражаються *алгебраїчними дробами.*

Алгебраїчний дріб (16) називають *правильним*, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника $(n<m)$. У протилежному випадку, коли $n\geq m$, алгебраїчний дріб називають *неправильним.*

Якщо дріб (16) неправильний, то за допомогою ділення багаточлена $P(x)$ на багаточлен $Q(x)$ з нього можна вилучити цілу частину, а саме багаточлен $M(x)=c_0x^k+c_1x^{k-1}+...+c_k$. Тоді можна записати

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+R(x).$$

Тут $M(x)$ — багаточлен (ціла частина), а $R(x)$ — остача;

$$R(x)=\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

де $P_1(x)$ — багаточлен степеня, меншого за степінь багаточлена $Q(x)$, тобто $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ є правильним алгебраїчним дробом.

Отже, невизначений інтеграл від неправильного дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дорівнює

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int M(x)dx+\int\frac{P_1(x)}{Q(x)}dx.$$

Остання рівність доводить, що інтегрування неправильного алгебраїчного дробу зводиться до інтегрування правильного дробу. Якщо зможемо інтегрувати правильні алгебраїчні дроби, то цим самим проінтегруємо і будь-який алгебраїчний дріб.

Далі доведемо, що задачу інтегрування правильного дробу можна звести до інтегрування функції, яка є скінченною сумою так званих простих дробів:

$$1)\ \frac{A}{x-a};\ 2)\ \frac{A}{(x-a)^\alpha};\ 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ 4)\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$

де A, M, N, a, p, q, $\alpha\geq 2$; $k\geq 2$ — дійсні числа, причому в останніх двох випадках дискримінант квадратного тричлена від'ємний: $\frac{p^2}{4}-q<0.$

Інтегрування простих алгебраїчних дробів

1) $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^{\alpha}}dx = A\int (x-a)^{-\alpha}dx = A\int (x-a)^{-\alpha}dx(x-a) = \frac{A(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+C =$

$= \frac{A}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}+C.$

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$

У чисельнику додамо і віднімемо число $\frac{Mp}{2}$. Матимемо

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\left(Mx+\frac{Mp}{2}\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx +$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}.$$

Тоді в першому інтегралі у чисельнику $2x+p$ є похідною знаменника. Отже,

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+h^2},$$

$$h = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}} > 0.$$

Прийшли до табличних інтегралів. Таким чином, остаточно знаходимо

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{h}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{h}+C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

У першому інтегралі опущено знак модуля, оскільки $x^2+px+q>0$.

4) $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx.$

Як і в попередньому випадку, в чисельнику додамо і віднімемо число $\frac{Mp}{2}$. Матимемо

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{\left(Mx+\frac{Mp}{2}\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx =$$

$$= \int \frac{Mx+\frac{Mp}{2}}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx + \int \frac{\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \left(x^2+px+q\right)^{-k} d\left(x^2+px+q\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+h^2\right)^k} =$$

$$= \frac{M}{2(1-k)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+h^2\right)^k},$$

$$h^2 = q-\frac{p^2}{4}.$$

Інтеграл $\int \frac{dt}{\left(t^2+h^2\right)^k}$, $t = x+\frac{p}{2}$ знаходиться за рекурентною формулою (14) попереднього параграфа.

Отже, невизначений інтеграл від кожного простого алгебраїчного дробу знаходиться і виражається через елементарні функції.

Деякі відомості з теорії комплексних чисел. Комплексні числа виникають під час розв'язування алгебраїчних рівнянь. Ці задачі зумовлюють виконання операції добування кореня (вона є оберненою до операції піднесення до степеня) над дійсними числами. В результаті з'являються числа виду $b\sqrt{-1}$, де b — дійсне число, або більш загального виду $a+b\sqrt{-1}$, де a — дійсне число.

Ввівши позначення

$$\sqrt{-1} = i,$$

дістанемо число $\alpha = a+ib$.

Числа такого виду, де a, b — дійсні числа, називають *комплексними*. При цьому a називають *дійсною частиною* комплексного числа, b — *коефіцієнтом при уявній частині.*

Комплексне число $a-ib$ називають *спряженим* до числа $a+ib$. У свою чергу, комплексне число $a+ib$ є спряженням до числа $a-ib$. Якщо $\alpha=a+ib$ — комплексне число, то спряжене число $a-ib$ позначають $\bar{\alpha}=a-ib$.

Два комплексні числа $\alpha_1=a_1+ib_1, \alpha_2=a_2+ib_2$ називають *рівними,* якщо рівні їхні дійсні частини та коефіцієнт при уявних частинах, тобто

$$a_1=a_2, \ b_1=b_2.$$

Над комплексними числами виконують операції додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня.

Сумою двох комплексних чисел $\alpha_1=a_1+ib_1$ і $\alpha_2=a_2+ib_2$ називають комплексне число $\alpha=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$ і записують $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$.

Різницею $\alpha_1-\alpha_2$ двох комплексних чисел називають комплексне число $\alpha=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$ і записують $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$.

Добутком двох комплексних чисел $\alpha_1=a_1+ib_1$ і $\alpha_2=a_2+ib_2$ називають комплексне число

$$\alpha=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$$

і записують $\alpha=\alpha_1\alpha_2$.

Часткою $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ двох комплексних чисел $\alpha_1=a_1+ib_1, \alpha_2=a_2+ib_2\neq 0$ називають число

$$\alpha=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

З формул суми, різниці, добутку та частки двох комплексних чисел випливає, що дії над комплексними числами виконуються за загальними алгебраїчними правилами раціональних операцій над буквенними виразами із заміною i^2 на -1.

Справедливими є такі рівності:

1) $\overline{\alpha_1+\alpha_2}=\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2$;

2) $\overline{\alpha_1\alpha_2}=\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2$;

3) $\overline{\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}=\dfrac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2}$.

Перевіримо, наприклад, рівність 3). Запишемо числа α_1 і α_2 у вигляді $\alpha_1=a_1+ib_1$, $\alpha_2=a_2+ib_2$. Тоді

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}=\overline{\left(\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}\right)}=\overline{\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Знайдемо
$$\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2}=\frac{a_1-ib_1}{a_2-ib_2}=\frac{(a_1-ib_1)(a_2+ib_2)}{a_2^2-i^2b_2^2}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Отже,
$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}=\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2}.$$

Допоміжні теореми. Розглянемо дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, причому вважатимемо, що цей дріб правильний. Нехай багаточлен $Q(x)$ має дійсний корінь $x=a$ кратності $\alpha\geq1$. Тоді цей багаточлен за відомою теоремою Безу[1] можна записати так:
$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}Q_1(x),$$
де $Q_1(x)$ — багаточлен степеня, нижчого за $Q(x)$ і $Q_1(a)\neq0$.

Т е о р е м а 1. Існують число A та багаточлен $P_1(x)$, степінь якого менший від степеня багаточлена $(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)$, такі, що виконується рівність
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}. \tag{18}$$

Д о в е д е н н я. Нехай виконується рівність (18). Тоді, помноживши обидві частини її на багаточлен $Q(x)$, дістаємо таку рівність:
$$P(x)-AQ_1(x)=P_1(x)(x-a). \tag{19}$$

Якщо $x=a$, то
$$A=\frac{P(a)}{Q_1(a)} \tag{20}$$
і багаточлен $P(x)-\frac{P(a)}{Q_1(a)}Q_1(x)=0.$

Отже, за теоремою Безу цей багаточлен ділиться на $x-a$.

Поділивши обидві частини рівності (19) на $x-a$, матимемо
$$P_1(x)=\frac{P(x)-AQ_1(x)}{x-a}. \tag{21}$$

З рівності (19) випливає, що степінь багаточлена $P_1(x)$ принаймні на одиницю менший від степеня багаточлена $P(x)$. Проте степінь багаточлена $P(x)$ менший від степеня багаточлена $Q(x)$ і степінь багаточлена

---
[1] *Безу Е.* (1730—1783) — французький математик.

$AQ_1(x)$ також менший від степеня багаточлена $Q(x)$. Тому степінь багаточлена $P_1(x)$, як це випливає з рівності (21), принаймні, на дві одиниці менший від степеня багаточлена $(x-a)^{\alpha} Q_1(x) = Q(x)$, або степінь багаточлена $P_1(x)$ принаймні менший на одну одиницю від степеня багаточлена $(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)$.

Отже, якщо виконується рівність (18), то число A і багаточлен $P_1(x)$ визначаються однозначно за формулами (20) і (21), причому $P_1(x)$ має степінь, менший ніж степінь багаточлена $(x-Q)^{\alpha-1} Q_1(x)$. Це означає, що алгебраїчний дріб

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)}$$

є правильним.

Легко довести й обернене твердження: якщо число A та багаточлен $P_1(x)$ визначаються відповідно формулами (20) і (21), то виконується рівність (18).

Справді, підставимо з рівності (21) значення $P_1(x)$ у вираз

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)}.$$

Матимемо

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^{\alpha} Q_1(x)} =$$

$$= \frac{AQ_1(x) + P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^{\alpha} Q_1(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Теорему доведено.

Нехай багаточлен $Q(x)$ має комплексний корінь $z = a + bi$ кратності k. Тоді можна довести, що спряжене число $\overline{z} = a - bi$ буде також коренем багаточлена $Q(x)$ тієї самої кратності k.

Справді, нехай z є коренем багаточлена $Q(x)$, тобто

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Тоді, замінивши комплексні числа в цій рівності на спряжені й урахувавши, що коефіцієнти багаточлена дійсні числа, маємо $a_0 \overline{z}^{n-1} + a_1 \overline{z}^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \overline{z} + a_n = 0$.

Доведемо, що кратність кореня $\overline{z}$ збігається з кратністю кореня z.

Очевидно, $\overline{z} \neq z$ (у протилежному випадку z — дійсний корінь). Тоді, якщо z корінь багаточлена $Q(x)$, то

$$Q(x) = (x-z) Q_1(x),$$

де $Q_1(x)$ — багаточлен степеня $n-1$.

Підставимо $x = \bar{z}$. Дістанемо $(\bar{z} - z)Q_1(\bar{z}) = 0$, оскільки $Q(\bar{z}) = 0$. Звідси

$$Q_1(\bar{z}) = 0.$$

Отже, багаточлен $Q_1(x)$ ділиться на $x - \bar{z}$, тому

$$Q(x) = (x - z)(x - \bar{z})Q_2(x),$$

де $Q_2(x)$ — багаточлен степеня $n-2$.

З попередньої рівності випливає, що $Q_2(x)$ ділиться на $x - z$ і на $x - \bar{z}$, тому

$$Q(x) = (x - z)^2 (x - \bar{z})^2 Q_4(x),$$

де $Q_4(x)$ — багаточлен степеня $n-4$.

Через k кроків дістанемо рівність

$$Q(x) = (x - z)^k (x - \bar{z})^k Q_{2k}(x), \tag{22}$$

де $Q_{2k}(z) \neq 0, Q_{2k}(\bar{z}) \neq 0$.

Звідси випливає, що z і $\bar{z}$ — корені багаточлена кратності k, що й потрібно було довести.

З рівності (22) випливає, що $Q(x)$ ділиться на багаточлен

$$((x - z)(x - \bar{z}))^k = \left(x^2 + px + q\right)^k,$$

де $p = -2a, q = a^2 - b^2$.

Дискримінант квадратного тричлена від'ємний

$$\frac{p^2}{4} - q = -b^2 < 0.$$

Отже, $Q(x)$ можна записати у вигляді

$$Q(x) = \left(x^2 + px + q\right)^k \tilde{Q}_1(x),$$

де $\tilde{Q}_1(z) \neq 0,\ \tilde{Q}_1(\bar{z}) \neq 0$.

Теорема 2. Якщо $x = a + bi$ — комплексний корінь багаточлена $Q(x)$ кратності k і дріб $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильний, то існують числа M, N і багаточлен $\tilde{P}_1(x)$, степінь якого менший за степінь багаточлена $\left(x^2 + px + q\right)^{k-1} \tilde{Q}_1(x)$, такі, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^k} + \frac{\tilde{P}_1(x)}{\left(x^2 + px + q\right)^{k-1} \tilde{Q}_1(x)}.$$

Доведення. Помножимо обидві частини попередньої рівності на багаточлен $Q(x)$:

$$P(x) = (Mx + N)\tilde{Q}_1(x) + \left(x^2 + px + q\right)\tilde{P}_1(x). \tag{23}$$

Підставивши у цю рівність замість x корені z і $\bar{z}$ багаточлена $Q(x)$ і беручи до уваги, що тоді $x^2+px+q=0$, дістанемо

$$P(z)=(Mz+N)\tilde{Q}_1(z);\quad P(\bar{z})=(M\bar{z}+N)\tilde{Q}_1(\bar{z}),$$

звідси

$$Mz+N=\frac{P(z)}{\tilde{Q}(z)};\quad M\bar{z}+N=\frac{P(\bar{z})}{\tilde{Q}(\bar{z})}.$$

Оскільки багаточлени $P(x)$ і $\tilde{Q}_1(x)$ мають дійсні коефіцієнти, то числа $\frac{P(z)}{\tilde{Q}_1(z)}, \frac{P(\bar{z})}{\tilde{Q}_1(\bar{z})}$ взаємно спряжені. Тому можна записати

$$\frac{P(z)}{\tilde{Q}_1(z)}=\alpha+\beta i,\ \frac{P(\bar{z})}{\tilde{Q}_1(\bar{z})}=\alpha-\beta i.$$

Тоді для знаходження чисел M і N маємо таку систему рівнянь

$$Mz+N=\alpha+\beta i,\ M\bar{z}+N=\alpha-\beta i,$$

звідси

$$M(z-\bar{z})=2\beta i$$

або $2biM=2\beta i$. Тоді $M=\frac{\beta}{b}$. Знаючи M, з одного із попередніх рівнянь визначимо

$$N=\alpha+\beta i-Mz=\alpha+\beta i-\frac{\beta}{b}(a+bi)=\alpha-\frac{\beta a}{b}.$$

Знайшовши числа M і N, з рівності (23) можна визначити багаточлен

$$\tilde{P}_1(x)=\frac{P(x)-(Mx+N)\tilde{Q}_1(x)}{x^2+px+q}.$$

Доведення того факту, що степінь багаточлена $\tilde{P}_1(x)$ менший за степінь багаточлена $\left(x^2+px+q\right)^{k-1}\tilde{Q}_1(x)$, проводиться аналогічно теоремі 1.

Теорему доведено.

Зображення правильного алгебраїчного дробу за допомогою простих дробів. Нехай маємо правильний алгебраїчний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Припустимо, що коефіцієнт за найвищого степеня багаточлена $Q(x)$ дорівнює одиниці. В протилежному випадку, поділивши чисельник і знаменник на b_0, дістанемо, що старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

Нехай багаточлен $Q(x)$ має дійсні корені $a_1, a_2, ..., a_r$ відповідно кратності $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ і комплексні корені $z_1, z_2, ..., z_s$ відповідно кратності $k_1, k_2, ..., k_s$. Тоді багаточлен $Q(x)$ розкладається на прості множники виду

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}...(x-a_r)^{\alpha_r}\times$$
$$\times\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{k_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{k_2}...\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{k_s}.$$

Далі, застосувавши теорему 1, можна записати таку рівність:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}Q_1(x)}.$$

Якщо при цьому $\alpha_1 \geq 2$, то до правильного алгебраїчного дробу

$$\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}Q_1(x)}$$

можна знову застосувати теорему 1. Цим самим виокремимо простий дріб

$$\frac{A_{\alpha_1-1}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}$$

і т. д., доти, доки множник $x-a_1$ не зникне в розкладі багаточлена $Q(x)$.

Отже, множнику $(x-a_1)^{\alpha_1}$ відповідатиме така сума з α_1 простих дробів:

$$\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}. \tag{24}$$

Ці самі міркування можна застосувати до решти дійсних коренів багаточлена $Q(x)$. Кожному з них відповідатиме сума простих дробів виду (24). Вичерпавши всі дійсні корені, в знаменнику залишаться тільки множники з квадратних тричленів у відповідних степенях. Тоді, за теоремою 2, кожному такому множнику відповідатиме сума простих дробів

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+p_1x+q_1)^k},\quad k>1.$$

Отже, прийшли до такої теореми.

Теорема 3. Будь-який правильний алгебраїчний дріб можна записати у вигляді суми простих алгебраїчних дробів:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_2}+\frac{A_2^{(2)}}{(x-a_2)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_2}^{(2)}}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+$$

$$+\frac{A_1^{(r)}}{x-a_r}+\frac{A_2^{(r)}}{(x-a_r)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_r}^{(r)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}}+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{M_{k_1}^{(1)}x+N_{k_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}}+\ldots+\frac{M_1^{(s)}x+N_1^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{M_2^{(s)}x+N_2^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\ldots+\frac{M_{k_s}^{(s)}x+N_{k_s}^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{k_s}}. \tag{25}$$

Із теореми 3 випливає важливий наслідок.

Н а с л і д о к. Невизначений інтеграл від раціональної функції виражається у скінченному вигляді, тобто є елементарною функцією; і ця елементарна функція в загальному випадку є сумою раціональних функцій, логарифмів і арктангенсів.

Метод невизначених коефіцієнтів. У формулі (25) є невідомі коефіцієнти (числа $A_1^{(1)}, ..., A_{\alpha_1}^{(1)}$ і т. д.). Їх можна визначити за допомогою відповідних виведених формул. Проте такий спосіб є громіздким. Тому при знаходженні конкретних невизначених інтегралів користуються так званим методом невизначених коефіцієнтів. Зміст цього методу такий.

Знаючи розклад знаменника (багаточлена $Q(x)$) на прості множники, записують заданий правильний алгебраїчний дріб через прості дроби у вигляді рівності (25). Потім праву частину цієї рівності зводять до спільного знаменника. Спільним знаменником є багаточлен $Q(x)$ (у лівій частині знаменником є також $Q(x)$). Відкидаючи зліва і справа знаменник, дістають рівність двох багаточленів $(n-1)$-го степеня. В лівій частині це багаточлен $P(x)$, а в правій — багаточлен, який є сумою чисельників у рівності (25), помножених відповідно на додаткові множники. Відомо, що два багаточлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти за однакових степенів рівні між собою. Прирівнюючи в утвореній рівності (тотожності) коефіцієнти за однакових степенів x, дістають алгебраїчну систему з n рівнянь, з якої й визначають невідомі коефіцієнти.

❑ **Приклад**

1. Знайти невизначені інтеграли від раціональних функцій:

1) $\int \frac{x^5+x^4-2}{x^4-8x^2+16}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; 3) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

Р о з в ' я з а н н я.

1) Дріб $\frac{x^5+x^4-2}{x^4-8x^2+16}$ є неправильним. Виокремлюємо цілу частину (для цього поділимо чисельник на знаменник)

$$\begin{array}{r|l} x^5+x^4-2 & x^4-8x^2+16 \\ \cline{2-2} -\;x^5-8x^3+16x & x+1 \\ \cline{1-1} \\ x^4-8x^3-16x-2 & \\ -\;x^4-8x^2+16 & \\ \cline{1-1} 8x^3+8x^2-16x-18 & \end{array}$$

Отже, заданий дріб набирає вигляду

$$\frac{x^5+x^4-2}{x^4-8x^2+16}=x+1+\frac{8x^3+8x^2-16x-18}{x^4-8x^2+16}.$$

Тоді

$$\int\frac{x^5+x^4-2}{x^4-8x^2+16}dx=\int\left(x+1+\frac{8x^3+8x^2-16x-18}{x^4-8x^2+16}\right)dx=$$

$$=\int(x+1)dx+2\int\frac{4x^3+4x^2-8x-9}{x^4-8x^2+16}dx=\frac{x^2}{2}+x+2\int\frac{4x^3+4x^2-8x-9}{x^4-8x^2+16}dx.$$

Інтеграл $\int\frac{4x^3+4x^2-8x+9}{x^4-8x^2+16}dx$ береться від правильного алгебраїчного дробу. Випишемо цей дріб окремо

$$\frac{4x^3+4x^2-8x+9}{x^4-8x^2+16}.$$

Знаменник дробу розкладемо на прості множники

$$x^4-8x^2+16=\left(x^2-4\right)^2=(x-2)^2(x+2)^2.$$

Тоді заданий дріб набирає вигляду

$$\frac{4x^3+4x^2-8x+9}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}.$$

Зводимо дроби правої частини до спільного знаменника, ним є багаточлен $(x-2)^2(x+2)^2$. Відкидаючи спільний знаменник в обох частинах, маємо

$$4x^3+4x^2-8x+9=A(x+2)^2+B(x-2)(x+2)^2+C(x-2)^2+D(x+2)(x-2)^2.$$

Записавши багаточлен правої частини цієї рівності за спадними степенями x, дістанемо

$$4x^3+4x^2-8x+9=(B+D)x^3+(A+2B+C-2D)x^2+$$
$$+(4A-4B-4C-4D)x+(4A-8B+4C+8D).$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових степенів x, маємо таку систему 4-х рівнянь із чотирма невідомими:

$$\begin{cases}B+D=4;\\ A+2B+C-2D=4;\\ 4A-4B-4C-4D=-8;\\ 4A-8B+4C+8D=9.\end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, маємо

$$A=\frac{13}{12};\ B=\frac{71}{24};\ C=-\frac{11}{12};\ D=\frac{25}{24}.$$

Тоді задану підінтегральну функцію можна виразити через прості дроби:

$$\frac{4x^3+x^2-8x+9}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{\frac{13}{12}}{(x-2)^2}+\frac{\frac{71}{24}}{x-2}+\frac{-\frac{11}{12}}{(x+2)^2}+\frac{\frac{25}{24}}{x+2}.$$

Знаходимо інтеграл

$$\int\frac{4x^3+x^2-8x+9}{(x-2)^2(x+2)^2}dx=\int\frac{\frac{13}{12}}{(x-2)^2}dx+\int\frac{\frac{71}{24}}{x-2}dx+\int\frac{-\frac{11}{12}}{(x+2)^2}dx+\int\frac{\frac{25}{24}}{x+2}dx=$$

$$=\frac{13}{12}\int(x-2)^{-2}d(x-2)+\frac{71}{24}\int\frac{d(x-2)}{x-2}-\frac{11}{12}\int(x+2)^{-2}d(x+2)+\frac{25}{24}\int\frac{d(x+2)}{x+2}=$$

$$=-\frac{13}{12(x-2)}+\frac{71}{24}\ln|x-2|+\frac{11}{12(x+2)}+\frac{25}{24}\ln|x+2|+C.$$

Отже, шуканий інтеграл дорівнює

$$\int\frac{x^5+x^4-2}{x^4-8x^2+16}dx=\frac{x^2}{2}+x-\frac{13}{6(x-2)}+\frac{71}{12}\ln|x-2|+\frac{11}{6(x+2)}+\frac{25}{12}\ln|x+2|+C.$$

2) Дріб $\frac{1}{x^3+1}$ є правильним; знаменник його розкладається на прості множники $x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$. Дискримінант квадратного тричлена від'ємний: $\frac{p^2}{4}-q=$ $=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$. Тоді заданий дріб через прості алгебраїчні дроби запишемо так:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x^2-x+1}.$$

Звідси дістанемо таку тотожність: $1=A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1)$. Прирівнюючи коефіцієнти при x^2, x, x^0 (x^0 — вільний член), матимемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}A+B=0;\\-A+B+C=0;\\A+C=1.\end{cases}$$

Звідси

$$A=\frac{1}{3};\; B=-\frac{1}{3};\; C=\frac{2}{3}.$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}.$$

У чисельнику першого інтегралу маємо вираз $2x-1$, який є похідною знаменника $\left(x^2-x+1\right)'=2x-1$. Тому зробимо підстановку $t=x^2-x+1$.

Другий інтеграл знайдемо, виокремивши із знаменника повний квадрат. Маємо

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x^2-x-1\right)}{x^2-x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x-1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

3) Дріб

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

є правильним, причому знаменник уже розкладено на прості множники. Тоді цей дріб через прості дроби можна записати так:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+3)^3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{K}{x+3}.$$

Виконавши відповідні перетворення в правій частині, маємо

$$x \equiv A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+3)^3 + C(x+1)(x+2)(x+3)^2 +$$
$$+D(x+1)(x+2)^2 + E(x+1)(x+2)^2(x+3) + K(x+1)(x+2)^2(x+3)^3. \qquad (26)$$

Для визначення коефіцієнтів можна, як і в попередніх прикладах, прирівняти коефіцієнти за однакових степенів x. Проте їх можна обчислити простіше. Для цього попередню рівність розглянемо як тотожність, тобто рівність, що справедлива за будь-якого дійсного значення x. Тому, надаючи x довільних значень (стільки, скільки невідомих), дістаємо систему алгебраїчних рівнянь, з якої й визначають шукані коефіцієнти. Виявляється, що x доцільно надавати значень, які є коренями багаточлена, який знаходиться у знаменнику. Тоді щоразу утворюється рівняння з одним невідомим. Так, у розглядуваному прикладі коренями багаточлена є $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$.

Підставимо у рівність (26) замість x відповідно числа -1, -2 і -3. Матимемо

$$-1 = A \cdot 8,\ A = -\frac{1}{8};$$
$$-2 = -B,\ B = 2;$$
$$-3 = -2D,\ D = \frac{3}{2}.$$

Більше коренів не вистачає. Тому надалі можна надавати x довільних значень, відмінних від x_1, x_2, x_3. Дістанемо систему трьох рівнянь із трьома невідомими. Проте можна зробити інакше. Підставимо у рівність (26) значення знайдених коефіцієнтів

$$x = -\frac{1}{8}(x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+3)^3 + C(x+1)(x+2)(x+3)^2 +$$
$$+\frac{3}{2}(x+1)(x+2)^2 + E(x+1)(x+2)^2(x+3) + K(x+1)(x+2)^2(x+3)^3.$$

Продиференціюємо ліву й праву частини цієї тотожності

$$1 = -\frac{1}{4}(x+2)(x+3)^3 - \frac{3}{8}(x+2)^2(x+3)^2 + 2(x+3)^3 +$$
$$+6(x+1)(x+3)^2 + C\left((x+2)(x+3)^3 + (x+1)(x+3)^3 + 3(x+1)(x+2)(x+3)^2\right) +$$
$$+\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3(x+1)(x+2) + E\left((x+2)^2(x+3) + 2(x+1)(x+2)(x+3) + (x+1)(x+2)^2\right) +$$
$$+K\left((x+2)^2(x+3)^2 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^2 + 2(x+1)(x+2)^2(x+3)\right);$$

$$1 = \frac{1}{8}\left(2(x+2)(x+3)^3 + 3(x+2)^2(x+3)^2\right) + 2\left((x+3)^3 + 3(x+1)(x+3)^2\right) +$$
$$+C\left((x+2)(x+3)^3 + (x+1)(x+3)^3 + 3(x+1)(x+2)(x+3)^2\right) +$$
$$+\frac{3}{2}\left((x+2)^2 + 2(x+1)(x+2)\right) + E\left((x+2)^2(x+3) + 2(x+1)(x+2)(x+3) + (x+1)(x+2)^2\right) +$$
$$+K\left((x+2)^2(x+3)^2 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^2 + 2(x+1)(x+2)^2(x+3)\right).$$

Підставимо значення $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$. Матимемо

$$C = -5,\ E = \frac{13}{14},\ K = \frac{41}{8}.$$

Тоді

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \int \left(\frac{-\frac{1}{8}}{x+1} + \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{-5}{x+2} + \frac{3}{2(x+3)^3} + \frac{\frac{13}{14}}{(x+3)^2} + \frac{\frac{41}{8}}{x+3} \right) dx =$$
$$= -\frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{2}{x+2} - 5\ln|x+2| - \frac{3}{4(x+3)^2} - \frac{13}{4(x+3)} + \frac{41}{8}\ln|x+3| + C.$$

Вилучення раціональної частини (метод Остроградського[1]). Видатний математик М. В. Остроградський запропонував досить оригінальний метод, за допомогою якого інтегрування правильного алгебраїчного дробу значно спрощується.

Не вдаватимемося до строгого й докладного викладу цього методу, а розглянемо лише практичний бік питання.

Якщо проаналізувати невизначені інтеграли від другого й четвертого простих алгебраїчних дробів, то можна помітити, що вони містять раціональні функції. Так, для першого дробу раціональна функція має вигляд

$$\frac{-A}{\alpha-1}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}.$$

Невизначений інтеграл від четвертого простого дробу має вигляд

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\frac{M'x+N'}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+D\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}},$$

де M', N', D — деякі сталі числа. До інтеграла з правої частини цієї рівності можна застосувати попередню формулу і також виокремити раціональну частину і т. д. Зрештою дістанемо таку рівність:

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\frac{R(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+E\int\frac{dx}{x^2+px+q},$$

де $R(x)$ — багаточлен степеня, нижчого від степеня багаточлена в знаменнику, а E — деяке стале число.

Отже, якщо $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильний алгебраїчний дріб, знаменник якого $Q(x)$ розкладено на прості множники

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}\left(x^2+p_1x+q\right)^{s_1}\dots\left(x^2+p_{s_k}x+q_{s_k}\right)^{s_k},$$

то матимемо так звану *формулу Остроградського*

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \tag{27}$$

У цій формулі $Q_1(x)$ містить ті самі множники, що й $Q(x)$, тільки в степені, на одиницю меншому; $Q_2(x)$ — багаточлен, який містить прості множники в першому степені $(Q(x)=Q_1(x)Q_2(x))$; $P_1(x)$ і $P_2(x)$ — багаточлен степеня, нижчого за відповідні степені багаточленів $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$.

Для практичного застосування формули Остроградського багаточлени $P_1(x)$ і $P_2(x)$ потрібно записати з деякими коефіцієнтами, поки що невизначеними. Потім диференціюванням лівої й правої частин дістанемо

[1] *Остроградський М. В.* (1801—1862) — український математик.

такі рівності:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1'(x)-\dfrac{P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

або

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1'(x)Q_2(x)-\dfrac{P_1(x)Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}}{Q(x)}+\frac{P_2(x)Q_1(x)}{Q(x)}.$$

Порівнюючи чисельники, матимемо

$$P(x)=P_1'(x)Q_2(x)+P_2(x)Q_1(x)-\frac{P_1(x)Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}$$

(можна показати, що $\dfrac{P_1(x)Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}$ є багаточленом).

Прирівнюючи в попередній тотожності коефіцієнти за однакових степенів x, дістанемо систему рівнянь, з якої визначають коефіцієнти багаточленів $P_1(x)$ і $P_2(x)$.

❑ **Приклад**

2. Користуючись формулою Остроградського, знайти інтеграл

$$\int\frac{dx}{\left(x^4-1\right)^2}.$$

Розв'язання. Багаточлен $Q(x)=\left(x^4-1\right)^2$ розкладається на прості множники

$$Q(x)=(x-1)^2(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2;$$

$$Q_1(x)=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right);$$

$$Q_2(x)=Q_1(x).$$

Тоді заданий інтеграл за формулою (27) можна записати так:

$$\int\frac{dx}{\left(x^4-1\right)^2}=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4-1}+\int\frac{Ex^3+Kx^2+Zx+H}{x^4-1}dx,$$

де A, B, C, D, E, K, Z, H — невідомі коефіцієнти.

Продиференціюємо ліву і праву частини цієї рівності

$$\frac{1}{\left(x^4-1\right)^2}=\frac{\left(x^4-1\right)^2\left(3Ax^2+2Bx+C\right)-\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)4x^3}{\left(x^4-1\right)^2}+\frac{Ex^3+Kx^2+Zx+H}{x^4-1}.$$

Звідси

$$1=\left(x^4-1\right)\left(3Ax^2+2Bx+C\right)-4x^3\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)+\left(x^4-1\right)\left(Ex^3+Kx^2+Zx+H\right).$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

при x^7 $\quad E=0;$

при x^6 $\quad -A+K=0;$

при x^5 $\quad -2B+Z=0;$

при x^4 $\quad -3C+H=0;$

при x^3 $\quad -4D-E=0;$

при x^2 $\quad 3A-K=0;$

при x^1 $\quad -2B-Z=0;$

при x^0 $\quad -C-H=1.$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо

$$Z=B=A=K=E=D=0;\ C=-\frac{1}{4};\ H=-\frac{3}{4}.$$

Тому

$$\int\frac{dx}{\left(x^4-1\right)^2}=\frac{-x}{4\left(x^4-1\right)}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^4-1}.$$

Знайдемо інтеграл $\int\frac{dx}{x^4-1}$. Для цього підінтегральну функцію можна записати через прості дроби або зробити простіше. Справді,

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right).$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{\left(x^4-1\right)^2}=\frac{-x}{4\left(x^4-1\right)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C.$$

4.6 ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ПРОСТІШИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Інтеграли від ірраціональних функцій, як правило, у скінченному вигляді не беруться. Проте можна вказати деякі окремі типи ірраціональних функцій, інтеграли від яких є елементарними функціями. Для таких інтегралів можна застосувати підстановки, які зводять невизначений інтеграл від ірраціональної функції до невизначеного інтегралу від раціональної функції відносно деякої нової змінної. Такий метод інтегрування ірраціональних функцій називають *методом раціоналізації*.

1. Розглянемо невизначений інтеграл від такої функції

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+k}}\right)dx, \tag{28}$$

де R — раціональна функція двох аргументів x і

$$z=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+k}}.$$

Припустимо, що число $ak-bc\neq 0$ (коефіцієнти не пропорційні). Тоді з попередньої рівності маємо

$$x=\frac{b-kz^n}{cz^n-a}.$$

Отже, x є раціональною функцією від z. Знайдемо

$$dx=\frac{-nkz^{n-1}\left(cz^n-a\right)-cnz^{n-1}\left(b-kz^n\right)}{\left(cz^n-a\right)^2}dz.$$

Коефіцієнт при dz є також раціональною функцією від z. Тому, якщо в підінтегральний вираз

$$R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+k}}\right)dx$$

підставимо значення x, $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+k}}$, dx, дістанемо інтеграл від раціональної функції відносно z:

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+k}}\right)dx=\int -R\left(\frac{b-kz^n}{cz^n-a},z\right)\frac{nz^{n-1}\left(k\left(cz^n-a\right)-c\left(b-kz^n\right)\right)}{\left(cz^n-a\right)^2}dz=\int r(z)dz,$$

де $r(z)$ — раціональна функція від z.

Отже, інтеграл від ірраціональної функції зведено до інтеграла від раціональної функції, а інтеграл від раціональної функції, як це випливає з попереднього параграфа, є елементарною функцією.

Знайшовши інтеграл $\int r(z)dz$, тим самим знайдемо і заданий інтеграл, тільки в останньому потрібно зробити заміну — замість z підставити його значення.

❑ **Приклад**

1. Знайти інтеграл $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Зробимо підстановку

$$z=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Тоді

$$x=-\frac{z^2+1}{z^2-1};$$

$$dx=-\frac{\left(z^2-1\right)2z-\left(z^2+1\right)2z}{\left(z^2-1\right)^2}dz=\frac{4z}{\left(z^2-1\right)^2}dz.$$

Підставляємо ці значення під інтеграл

$$\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x}=-4\int z\frac{z}{\left(z^2-1\right)^2}\frac{z^2-1}{z^2+1}dz=-4\int\frac{z^2}{\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)}dz.$$

Підінтегральну функцію можна записати так:

$$\frac{z^2}{\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2-1}+\frac{1}{z^2+1}\right).$$

Тоді

$$\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x}=-2\left(\int\frac{dz}{z^2-1}+\int\frac{dz}{z^2+1}\right)=\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-2\operatorname{arctg}z+C=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

2. До першого типу зводиться також невизначений інтеграл виду

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+k}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+k}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+k}\right)^{\frac{m_r}{n_r}}\right)dx, \qquad (29)$$

де R означає раціональну функцію від аргументів

$$x,\ z_1=\left(\frac{ax+b}{cx+k}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ z_2=\left(\frac{ax+b}{cx+k}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\ z_r=\left(\frac{ax+b}{cx+k}\right)^{\frac{m_r}{n_r}}.$$

Нехай найменшим спільним кратним чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$ є число n. Тоді кожне число $n_k=\frac{n}{s_k}$, де s_k — ціле число $k=1,\ldots,r$.

Отже, інтеграл можна записати так:

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+k}\right)^{\frac{m_1 s_1}{n}},\left(\frac{ax+b}{cx+k}\right)^{\frac{m_2 s_2}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+k}\right)^{\frac{m_r s_r}{n}}\right)dx.$$

Тоді, застосувавши підстановку

$$z^n=\frac{ax+b}{cx+k},$$

дістанемо інтеграл від раціональної функції відносно z.

❑ **Приклад**

2. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{(x+1)^{2/3}-(x+1)^{1/2}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Найменшим спільним кратним чисел 2 і 3 є число 6. Застосуємо підстановку

$$z^6=x+1,\ x=z^6-1,\ dx=6z^5dz.$$

Отже, інтеграл набирає вигляду

$$\int\frac{dx}{(x+1)^{2/3}-(x+1)^{1/2}}=6\int\frac{z^5dz}{z^4-z^3}=6\int\frac{z^2dz}{z-1}=6\int\frac{\left(z^2-1\right)+1}{z-1}dz=6\int(z+1)dz+6\int\frac{dz}{z-1}=$$

$$=6\left(\frac{z^2}{2}+z\right)+6\ln|z-1|+C=6\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}}{2}+\sqrt[6]{x+1}\right)+\ln\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right|+C.$$

3. Окремим випадком інтеграла виду (29) є такий інтеграл:

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_r}{n_r}}\right)dx.$$

Цей інтеграл також раціоналізується підстановкою

$$z^n = x,$$

де n — найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$.

❑ **Приклад**

3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо підстановку

$$z^{12} = x.$$

Тоді $dx = 12z^{11}dx$.

Маємо

$$\int \frac{dx}{-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}} = 12\int \frac{z^{11}dz}{-2z^6+z^4+z^3} = 12\int \frac{z^8 dz}{-2z^3+z+1}.$$

Під інтегралом маємо неправильний алгебраїчний дріб. Вилучимо цілу частину

$$12\int \frac{z^8 dz}{-2z^3+z+1} = 12\int\left(-\frac{1}{2}z^5 - \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4}z^3 - \frac{1}{8}z - \frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{8}z^2+\frac{3}{8}z+\frac{1}{4}}{-2z^3+z+1}\right)dz =$$

$$= 12\left(-\frac{z^6}{12} - \frac{z^4}{16} - \frac{z^3}{12} - \frac{z^2}{16} - \frac{z}{4}\right) + \frac{3}{2}\int \frac{3z^2 3z+2}{-2z^3+z+1}dz =$$

$$= -z^6 - \frac{3}{4}z^4 - z^3 - \frac{3}{4}z^2 - 3z + \frac{3}{2}\int \frac{3z^2 3z+2}{-2z^3+z+1}dz.$$

Дріб, що знаходиться під інтегралом, виразимо через прості дроби. Для цього знаменник розкладемо на прості множники

$$-2z^3+z+1 = (1-z)\left(2z^2+2z+1\right).$$

Тоді

$$\frac{3z^2+3z+2}{-2z^3+z+1} = \frac{A}{1-z} + \frac{Bz+D}{2z^2+2z+1}.$$

Звівши у правій частині до спільного знаменника і відкинувши знаменники в отриманій рівності, дістанемо таку рівність:

$$3z^2+3z+2 = A\left(2z^2+2z+1\right) + (Bz+D)(1-z).$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових степенів z, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2A - B = 3; \\ 2A + B - D = 3; \\ A + D = 2. \end{cases}$$

Звідси знаходимо

$$A=\frac{8}{5};\ B=\frac{1}{5};\ D=\frac{2}{5}.$$

Тоді

$$\int\frac{3z^2+3z+2}{-2z^3+z+1}dz=\frac{8}{5}\int\frac{dz}{1-z}+\frac{1}{5}\int\frac{z+2}{2z^2+2z+1}dz=-\frac{8}{5}\int\frac{d(1-z)}{1-z}+\frac{1}{20}\int\frac{4z+8}{2z^2+2z+1}dz=$$

$$=-\frac{8}{5}\ln|1-z|+\frac{1}{20}\int\frac{(4z+2)+6}{2z^2+2z+1}dz=-\frac{8}{5}\ln|1-z|+\frac{1}{20}\int\frac{d\left(2z^2+2z+1\right)}{2z^2+2z+1}+\frac{3}{10}\int\frac{dz}{2z^2+2z+1}=$$

$$=-\frac{8}{5}\ln|1-z|+\frac{1}{20}\ln\left(2z^2+2z+1\right)+\frac{3}{20}\int\frac{d\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=$$

$$=-\frac{8}{5}\ln|1-z|+\frac{1}{20}\ln\left(2z^2+2z+1\right)+\frac{3}{10}\operatorname{arctg}(2z+1)+C.$$

Отже, заданий інтеграл дорівнює

$$\int\frac{dx}{-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}=-\sqrt{x}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}-\frac{3}{4}\sqrt[6]{x}-3\sqrt[12]{x}-\frac{12}{5}\ln\left|1-\sqrt[12]{x}\right|+$$

$$+\frac{3}{40}\ln\left(2\sqrt[6]{x}+2\sqrt[12]{x}+1\right)+\frac{9}{20}\operatorname{arctg}\left(2\sqrt[12]{x}+1\right)+C.$$

4.7
ІНТЕГРАЛ ВІД БІНОМНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛА

Біномним диференціалом називають вираз

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,$$

де a, b — довільні дійсні числа; m, n, p — раціональні числа.

П. Л. Чебишов[1] довів, що інтеграл від біномного диференціала береться в скінченному вигляді тільки у таких трьох випадках.

Випадок 1. Число p — ціле число. Тоді, якщо позначити через λ найменше спільне кратне знаменників дробів m і n, то за допомогою підстановки $x=z^\lambda$ інтеграл $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ раціоналізується, і приходимо до третього випадку з попереднього параграфа.

❑ **Приклад**

1. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}$.

Розв'язання. Зробивши підстановку $x=z^{12}$ (тут $p=-3$), дістанемо

$$\int\frac{12z^{11}dz}{z^4\left(1+z^3\right)^3}$$

від раціональної функції.

---

[1] *Чебишов П. Л.* (1821—1894) — російський математик.

Випадок 2. Число p — дробове, $p=\frac{r}{s}$, але $\frac{m+1}{n}$ — ціле. Тоді інтеграл раціоналізується підстановкою

$$a+bx^n=z^s.$$

Справді, застосуємо підстановку $t=x^n$, $x=t^{\frac{1}{n}}$, $dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$. Тоді інтеграл запишеться у вигляді

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{1}{n}\int(a+bt)^p t^q dt,$$

де $q=\frac{m+1}{n}-1$.

Отже, якщо число $\frac{m+1}{n}$ — ціле, то підстановка

$$a+bt=z^s$$

або $a+bx^n=z^s$ раціоналізує інтеграл.

❑ **Приклад**

2. Знайти інтеграл $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. Під інтегралом маємо біномний диференціал. Тут $p=\frac{1}{3}$, $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$. Випадок 1 не підходить, оскільки p — дробове число. Розглянемо число $\frac{m+1}{n}=$
$=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$ — ціле.

Отже, маємо випадок 2. Застосовуємо підстановку

$$1+\sqrt[4]{x}=z^3.$$

Тоді

$$x=\left(z^3-1\right)^4;\ dx=12\left(z^3-1\right)^3z^2dz.$$

Таким чином,

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int\frac{\left(z^3-1\right)^3z^3}{\left(z^3-1\right)^2}dz=12\int z^3\left(z^3-1\right)dz=$$

$$=12\int\left(z^6-z^3\right)dz=\frac{12}{7}z^7-3z^4+C=\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C.$$

Випадок 3. Числа p і $\frac{m+1}{n}$ — дробові, але число $\frac{m+1}{n}+p$ — ціле. У цьому випадку інтеграл раціоналізується підстановкою

$$a+bx^n=x^nz^s.$$

Справді, інтеграл $\frac{1}{n}\int (a+bt)^p\, t^q dt$ можна записати ще так:

$$\frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{q+p} dt.$$

Тоді, якщо число $\frac{m+1}{n}+p$ ціле, то й число $q+p$ також ціле. Отже, підстановка $\frac{a+bt}{t}=z^s$, або $a+bx^n=x^n z^s$, раціоналізує інтеграл.

❑ **Приклад**

3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо інтеграл від біномного диференціала:

$$m=0;\ n=2;\ p=-\frac{1}{2}.$$

Випадок 1 не підходить, оскільки p — дробове число. Розглянемо число $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{2}$, воно дробове. Отже, випадок 2 також не підходить. Беремо число $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$, воно ціле. Тому маємо випадок 3. Застосовуємо підстановку

$$x^2+a^2=x^2z^2.$$

Тоді

$$\sqrt{x^2+a^2}=xz,\ 2xdx=2xz^2dx+2x^2zdz;$$

$$dx=\frac{xzdz}{\left(1-z^2\right)}.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{xzdz}{\left(1-z^2\right)xz}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2}}-1}{\sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2}}+1}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}-x}{\sqrt{x^2+a^2}+x}\right|+C=\ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}}+C=\ln\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)^2}{x^2+a^2-x^2}}+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

Дістали табличний інтеграл.

Якщо жоден з трьох випадків не виконується, то, як довів П. Л. Чебишов, інтеграл від біномного диференціала у скінченному вигляді не береться. Такий інтеграл є вищою трансцендентною функцією.

Так, інтеграл $\int\sqrt{1+x^3}dx$ у скінченному вигляді не береться. Справді, тут $m=0$, $n=3$, $p=\frac{1}{2}$ — дробове. Число $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{3}$ — дробове, число $\frac{m+1}{n}+p=\frac{5}{6}$ — дробове. Отже, немає елементарної функції, через яку заданий інтеграл виражається в скінченному вигляді.

4.8
ПІДСТАНОВКИ ЕЙЛЕРА

Підстановки Ейлера[1] застосовують при знаходженні інтегралів виду

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \tag{30}$$

де R — раціональна функція від двох аргументів x і $t=\sqrt{ax^2+bx+c}$. При цьому вважають, що квадратний тричлен не має однакових коренів (корінь зникає, під інтегралом буде раціональна функція).

Є три підстановки Ейлера.

Першу підстановку Ейлера застосовують тоді, коли $a>0$, і вона має вигляд

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-\sqrt{a}x.$$

У правій частині цієї рівності можна брати також $z+\sqrt{a}x$. Піднесемо обидві частини попередньої рівності до квадрата

$$ax^2+bx+c=z^2-2\sqrt{a}zx+ax^2.$$

Звідси

$$x=\frac{z^2-c}{b+2\sqrt{a}z}.$$

Як бачимо, x є раціональною функцією від z. Знайдемо

$$dx=\frac{2\left(b+2\sqrt{a}z\right)z-2\left(z^2-c\right)\sqrt{a}}{\left(b+2\sqrt{a}z\right)^2}dz.$$

Отже, і коефіцієнт при dz є раціональною функцією від z. Тоді

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-\sqrt{a}x=z-\sqrt{a}\,\frac{z^2-c}{b+2\sqrt{a}z}=\frac{\sqrt{a}z^2+bz+\sqrt{a}c}{b+2\sqrt{a}z}$$

є також раціональною функцією від z.

Тому, підставляючи в інтеграл значення x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$, dx, матимемо інтеграл від раціональної функції відносно z:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$

$$=\int 2R\left(\frac{z^2-c}{b+2\sqrt{a}z}, \frac{\sqrt{a}z^2+bz+\sqrt{a}c}{b+2\sqrt{a}z}\right)\frac{\left(b+2\sqrt{a}z\right)z-\left(z^2-c\right)\sqrt{a}}{\left(b+2\sqrt{a}z\right)^2}dz=\int r(z)dz.$$

Знайшовши інтеграл $\int r(z)dz$ і підставивши в здобутий результат значення

$$z=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x,$$

знайдемо вихідний інтеграл.

[1] *Ейлер Л.* (1707—1783) — швейцарський математик.

❑ **Приклад**

1. Знайти інтеграл $\int\sqrt{x^2-2x-1}dx$.

Розв'язання. Тут $a=1>0$. Застосуємо підстановку

$$\sqrt{x^2-2x-1}=z-x.$$

Підносимо до квадрата обидві частини попередньої рівності. Маємо

$$x^2-2x-1=z^2-2xz+x^2$$

або

$$x=\frac{z^2+1}{2(z-1)}.$$

Тоді

$$dx=\frac{1}{2}\frac{(z-1)2z-\left(z^2+1\right)}{(z-1)^2}dz=\frac{1}{2}\frac{z^2-2z-1}{(z-1)^2}dz.$$

Знаходимо

$$\sqrt{x^2-2x-1}=z-x=z-\frac{z^2+1}{2(z-1)}=\frac{z^2-2z-1}{2(z-1)}.$$

Підставивши значення $\sqrt{x^2-2x-1}$ та dx в інтеграл, дістанемо

$$\int\sqrt{x^2-2x-1}dx=\int\frac{z^2-2z-1}{2(z-1)}\frac{1}{2}\frac{z^2-2z-1}{(z-1)^2}dz=\frac{1}{4}\int\frac{\left(z^2-2z-1\right)^2}{(z-1)^3}dz.$$

Маємо інтеграл від раціональної функції відносно z. Застосувавши до цього інтеграла метод інтегрування раціональних функцій, матимемо

$$\frac{1}{4}\int\frac{\left(z^2-2z-1\right)^2}{(z-1)^3}dz=\frac{(z-1)^2}{8}-\frac{1}{2(z-1)^2}-\ln|z-1|+C.$$

Підставивши значення

$$z=\sqrt{x^2-2x-1}+x,$$

знайдемо заданий інтеграл.

Другу підстановку Ейлера застосовують тоді, коли в квадратному тричлені $c>0$. Підстановка має вигляд

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=zx+\sqrt{c}$$

(можна брати $-\sqrt{c}$).

Піднісши обидві частини цієї рівності до квадрата, дістанемо

$$ax^2+bx+c=z^2x^2+2zx\sqrt{c}+c,$$

звідси

$$x=\frac{2\sqrt{c}z-b}{a-z^2}.$$

Тоді

$$dx=\frac{\left(a-z^2\right)2\sqrt{c}+\left(2\sqrt{c}z-b\right)2z}{\left(a-z^2\right)^2}dz=2\frac{\sqrt{c}z^2-bz+a\sqrt{c}}{\left(a-z^2\right)^2}dz.$$

Знайдемо

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=zx+\sqrt{c}=z\frac{2\sqrt{c}z-b}{a-z^2}+\sqrt{c}=\frac{\sqrt{c}z^2-bz+a\sqrt{c}}{a-z^2}.$$

Отже, всі величини x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$, dx раціонально виражаються через z. Тому, підставивши їхні значення у заданий інтеграл, матимемо інтеграл від раціональної функції відносно z.

❑ **Приклад**

2. Знайти $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{9+4x-x^2}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Тут $c=9>0$. Застосовуємо другу підстановку Ейлера

$$\sqrt{9+4x-x^2}=zx+\sqrt{9}=zx+3.$$

Піднісши обидві частини цієї рівності до квадрата, матимемо

$$9+4x-x^2=z^2x^2+6zx+9.$$

Звідси

$$x=\frac{4-6z}{z^2+1}.$$

Тоді

$$dx=\frac{-6\left(z^2+1\right)-(4-6z)2z}{\left(z^2+1\right)^2}dz=2\frac{3z^2-4z-3}{\left(z^2+1\right)^2}dz;$$

$$\sqrt{9+4x-x^2}=zx+3=z\frac{4-6z}{z^2+1}+3=\frac{-3z^2+4z+3}{z^2+1};$$

$$x-2=\frac{4-6z}{z^2+1}-2=\frac{-2z^2-6z+2}{z^2+1}.$$

Підставляємо знайдені величини в інтеграл

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{9+4x-x^2}}=\int\frac{dz}{z^2+3z-1}.$$

Цей інтеграл знаходимо, виокремивши з квадратного тричлена повний квадрат:

$$\int\frac{dz}{z^2+3z-1}=\int\frac{d\left(z+\frac{3}{2}\right)}{\left(z+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}}=\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{z+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}{z+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2z+3-\sqrt{13}}{2z+3+\sqrt{13}}\right|+C.$$

Підставивши значення $z=\frac{\sqrt{9+4x-x^2}-3}{x}$, знайдемо заданий інтеграл.

Зауважимо, що випадки $a>0$ і $c>0$ можуть бути зведені один до одного заміною $x=\frac{1}{t}$.

Третю підстановку Ейлера застосовують тоді, коли квадратний тричлен ax^2+bx+c має дійсні й різні корені. Нехай α і β — дійсні корені цього тричлена $(\alpha \neq \beta)$. Тоді квадратний тричлен розкладається на лінійні множники і його можна записати у вигляді

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Застосуємо підстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z(x-\alpha)$$

(можна застосовувати підстановку $\sqrt{ax^2+bx+c}=z(x-\beta)$). Маємо

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=z^2(x-\alpha)^2$$

або

$$a(x-\beta)=z^2(x-\alpha).$$

Звідси

$$x=\frac{a\beta-\alpha z^2}{a-z^2};$$

$$dx=\frac{-2\alpha z\left(a-z^2\right)+2z\left(a\beta-\alpha z^2\right)}{\left(a-z^2\right)^2}dz=\frac{-2\alpha az+2a\beta z}{\left(a-z^2\right)^2}dz=\frac{2az(\beta-\alpha)}{\left(a-z^2\right)^2}dz.$$

Тоді

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z(x-\alpha)=z\left(\frac{a\beta-\alpha z^2}{a-z^2}-\alpha\right)=\frac{za(\beta-\alpha)}{a-z^2}.$$

Отже, всі величини x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$, dx виражаються раціонально через z. Тому, підставляючи їхні значення в інтеграл, дістанемо інтеграл від раціональної функції відносно z.

❑ **Приклад**

3. Знайти інтеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{\left(7x-10-x^2\right)^3}}$.

Р о з в ' я з а н н я. У цьому випадку $a=-1<0$, $c=-10<0$. Отже, ні першу, ні другу підстановку Ейлера застосувати не можна. Проте квадратний тричлен $-x^2+7x-10$ має дійсні корені $\alpha=2$, $\beta=5$. Тому можна застосувати третю підстановку Ейлера

$$\sqrt{7x-10-x^2}=\sqrt{(x-2)(5-x)}=z(x-2).$$

Звідси знаходимо

$$x=\frac{5+2z^2}{1+z^2};\ dx=-\frac{6zdz}{\left(1+z^2\right)^2};$$

$$\left(\sqrt{7x-10-x^2}\right)^3=z^3(x-2)^3=z^3\left(\frac{5+2z^2}{1+z^2}-2\right)^3=\frac{27z^3}{\left(1+z^2\right)^3}.$$

Тоді

$$\int \frac{xdx}{\left(\sqrt{7x-10-x^2}\right)^3} = -\frac{6}{27}\int \frac{5+2z^2}{z^2}dz = -\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{z}+2z\right)+C,$$

де $z = \dfrac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$.

Доведемо, що за допомогою першої і третьої підстановок Ейлера інтеграл (30) завжди можна раціоналізувати (звести до інтеграла від раціональної функції). Справді, коефіцієнт a у квадратному тричлені може бути або додатним $(a>0)$, або від'ємним $(a<0)$. Якщо $a=0$, то інтеграл (30) має вигляд

$$\int R\left(x, \sqrt{bx+c}\right)dx,$$

і він, як це зазначено в п. 4.6, раціоналізується.

Нехай $a>0$. Тоді інтеграл (30) раціоналізується першою підстановкою Ейлера.

Нехай $a<0$. Тоді, якщо квадратний тричлен має дійсні корені, то інтеграл раціоналізується третьою підстановкою Ейлера. Якщо $a<0$ і квадратний тричлен ax^2+bx+c має комплексні корені, то квадратний тричлен набуває за будь-якого x від'ємних значень. Справді, при $a \neq 0$ квадратний тричлен можна записати у такому вигляді:

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left((2ax+b)^2+4ac-b^2\right).$$

Якщо корені комплексні, то $4ac-b^2>0$. Отже, при $a<0$ з попередньої рівності випливає, що $ax^2+bx+c<0$. Проте $\sqrt{ax^2+bx+c}$ тоді не має дійсних значень, а математичний аналіз вивчає тільки дійсні функції.

Зауважимо, що підстановки Ейлера мають переважно теоретичне значення. За їх допомогою доводиться, що інтеграл вигляду (30) можна раціоналізувати і звести до інтеграла від раціональної функції. Оскільки останні виражаються через елементарні функції, то інтеграли виду (30) виражаються через елементарні функції.

Проте у разі застосування підстановок Ейлера доводиться проводити багато громіздких обчислень. Тому на практиці здебільшого застосовують різні штучні способи знаходження інтегралів виду (30). Розглянемо такі інтеграли.

1. Інтеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ знаходять за допомогою виокремлення повного квадрата з квадратного тричлена. В результаті дістанемо табличний інтеграл.

❑ **Приклад**

4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Цей інтеграл записуємо у вигляді

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}}.$$

Маємо табличний інтеграл. Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}\right|+C.$$

2. Інтеграл

$$\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де k — довільне дійсне число, знаходиться за допомогою підстановки

$$z = \frac{1}{x-k}.$$

❑ **Приклад**

5. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо підстановку

$$z = \frac{1}{x+1}.$$

Звідси

$$x = \frac{1}{z}-1.$$

Тоді

$$dx = -\frac{1}{z^2}dz,$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2+\frac{1}{z}-1+1} = \frac{\sqrt{z^2-z+1}}{z}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -\int \frac{zdz}{z^2\frac{1}{z}\sqrt{z^2-z+1}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-z+1}} =$$

$$= -\int \frac{d\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left|z-\frac{1}{2}+\sqrt{z^2-z+1}\right|+C;$$

$$z = \frac{1}{x+1}.$$

3. Розглянемо інтеграл $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, де $P(x)$ — багаточлен степеня n. Можна довести, що такий інтеграл дорівнює

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + D\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{31}$$

де $Q(x)$ — багаточлен степеня на одиницю меншого, ніж степінь багаточлена $P(x)$, а D — число.

Коефіцієнти багаточлена $Q(x)$ і число D визначають методом невизначених коефіцієнтів.

❑ **Приклад**

6. Знайти інтеграл $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

Розв'язання. Використаємо формулу (31). Для цього інтеграл запишемо у вигляді

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx.$$

Отже, в чисельнику маємо багаточлен другого степеня. Тому за формулою (31) цей інтеграл можна записати так:

$$\int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+a^2} + D\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Щоб визначити коефіцієнти A, B, D, продиференціюємо ліву й праву частини попередньої тотожності:

$$\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} = A\sqrt{x^2+a^2} + \frac{(Ax+B)x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{D}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Звідси дістаємо

$$x^2+a^2 = A\left(x^2+a^2\right) + (Ax+B)x + D.$$

Прирівнюючи тут коефіцієнти за однакових степенів x, матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2A = 1; \\ B = 0; \\ Aa^2 + D = a^2. \end{cases}$$

Звідси

$$A = \frac{1}{2};\ B = 0;\ D = \frac{1}{2}a^2.$$

Тоді

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

4.9
ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Оскільки тригонометричні функції $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ раціонально виражаються через функції $\sin x$ і $\cos x$, надалі розглядатимемо невизначені інтеграли від функцій, які залежать тільки від $\sin x$ і $\cos x$. При цьому матимемо справу з інтегралом виду

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx, \tag{32}$$

де R — раціональна функція двох аргументів $u = \sin x$ і $v = \cos x$.

Інтеграли виду (32) завжди можна раціоналізувати (звести до інтеграла від раціональної функції) за допомогою так званої *універсальної підстановки*

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Справді, з попередньої рівності знаходимо

$$dz = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx.$$

Проте $\sec^2\frac{x}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$. Тому

$$dz = \frac{1}{2}\left(1 + z^2\right)dx.$$

Звідси

$$dx = \frac{2dz}{1 + z^2}.$$

Як бачимо, dx є раціональною функцією від z. Доведемо, що $\sin x$ і $\cos x$ також раціонально виражаються через z. Для цього $\sin x$ і $\cos x$ виразимо через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Отже,

$$\sin x = \frac{2z}{1 + z^2}; \ \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}.$$

Тому, підставляючи в (32) значення $\sin x$, $\cos x$, dx через z, дістанемо інтеграл від раціональної функції

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2z}{1 + z^2}, \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right)\frac{1}{1 + z^2}\,dz = \int r(z)\,dz.$$

❑ **Приклад**

1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Розв'язання. Підставляючи замість $\sin x$, $\cos x$ і dx їхні значення через z, маємо

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = 2\int \frac{dz}{\left(1+z^2\right)\left(\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 2\int \frac{dz}{2z+1-z^2} =$$

$$= -2\int \frac{dz}{(z-1)^2-2} = -2\int \frac{d(z-1)}{(z-1)^2-2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-1-\sqrt{2}}{z-1+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z+\sqrt{2}-1}{z-\sqrt{2}+1}\right| + C.$$

Підставляючи $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{2}+1}\right| + C.$$

Хоча універсальна підстановка завжди раціоналізує інтеграл виду (32), проте в застосуваннях вона часто буває громіздкою. Тому на практиці, знаходячи такі інтеграли, користуються тими підстановками, які швидше і простіше дають змогу знайти розглядуваний інтеграл. При цьому можемо мати такі випадки.

1. Випадок, коли

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

застосовують підстановку

$$z = \cos x.$$

2. Випадок, коли

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

застосовують підстановку

$$z = \sin x.$$

3. Випадок, коли

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

застосовують підстановку

$$z = \operatorname{tg} x \text{ або } z = \operatorname{ctg} x.$$

❑ **Приклад**

2. Знайти інтеграли

1) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$; 2) $\int \cos^5 x dx$; 3) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

Розв'язання.

1) При заміні $\sin x$ на $-\sin x$ підінтегральна функція змінює знак на протилежний. Застосовуємо підстановку

$$z = \cos x.$$

Тоді $dz = -\sin x dx$, а інтеграл можна записати так:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{\sin^2 x(-\sin x)}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^4 x} d\cos x =$$

$$= -\int \frac{\left(1-z^2\right)}{z^4} dz = -\int \left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^2}\right) dz = \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{z} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

2) При заміні $\cos x$ на $-\cos x$ підінтегральна функція змінює знак на протилежний. Застосовуємо підстановку

$$z = \sin x, \quad dz = \cos x dx.$$

Інтеграл запишемо у вигляді

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 d(\sin x) =$$

$$= \int \left(1-z^2\right)^2 dz = \int \left(1-2z^2+z^4\right) dz = z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

3) При заміні $\sin x$ на $-\sin x$ і $\cos x$ на $-\cos x$ підінтегральна функція не змінює знак. Застосовуємо підстановку

$$z = \operatorname{tg} x.$$

Тоді

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \int \operatorname{tg}^3 x d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^3 x dx =$$

$$= \int z^3 dz - \int \operatorname{tg} x \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \frac{z^4}{4} - \int \operatorname{tg} x d\operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg} x dx = \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2} - \ln|\cos x| + C.$$

Розглянемо окремі випадки.

1°. Нехай маємо інтеграл виду

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m \geq 0, \quad n \geq 0.$$

Якщо один із показників число непарне, то застосовують ті самі підстановки, що й у випадках 1 і 2. Якщо обидва показники числа парні, то при цьому використовують формули

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

❑ **Приклад**

3. Знайти інтеграл $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосовуємо розглянуті підстановки. Маємо

$$\int \sin^4 x \cos^4 x dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 2x)^2 (1+\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(1-\cos^2 2x\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int \sin^4 2x dx = \frac{1}{16}\int \left(\sin^2 2x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{64}\int (1-\cos 4x)^2 dx = \frac{1}{64}\int \left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{64}\left(\int dx - 2\int \cos 4x dx + \int \cos^2 4x dx\right) = \frac{1}{64}\left(x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 8x) dx\right) =$$

$$= \frac{1}{64}\left(x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x\right) + C = \frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x\right) + C.$$

2°. Нехай маємо інтеграли

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}dx, \quad \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx,$$

де $m > 0$, $n > 0$.

Якщо одне з чисел m або n — непарне, то при знаходженні цих інтегралів застосовують ті самі підстановки, що й у випадках 1 і 2. Якщо m і n — парні, то застосовують ті самі підстановки, що й у випадку 3 ($z = \operatorname{tg} x$ або $z = \operatorname{ctg} x$).

Проте такі інтеграли при натуральних числах m і n краще знаходити частинами. Тоді кожний показник можна зменшити на дві одиниці. Розглянемо вираз

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx = \int \frac{\sin^{m-1} x \sin x}{\cos^n x}dx = -\int \sin^{m-1} x \frac{d\cos x}{\cos^n x}.$$

Нехай

$$u = \sin^{m-1} x, \quad dv = \frac{d\cos x}{\cos^n x}, \quad n > 1.$$

Тоді

$$du = (m-1)\sin^{m-2} x \cos x dx, \quad v = \frac{-1}{(n-1)\cos^{n-1} x}.$$

Отже,

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx = -\frac{\sin^{m-1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{n-2} x}dx.$$

❑ **Приклад**

4. Знайти інтеграл $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай

$$u = \sin^3 x, \quad dv = \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}.$$

Тоді

$$du = 3\sin^2 x \cos x dx, \quad v = \frac{1}{2\cos^2 x}.$$

Тому

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}dx = \frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx = \frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x} - \frac{3}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x\right) + C.$$

3°. Розглянемо інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x},$$

де m і n — натуральні числа.

Якщо число $m+n$ — парне, то застосовують підстановку $z=\operatorname{tg} x$ або $z=\operatorname{ctg} x$. Якщо число $m+n$ непарне, то досить ефективним є спосіб введення до чисельника множника $1=\sin^2 x+\cos^2 x$. Внаслідок цього дріб під інтегралом розбивається на два дроби з меншими показниками у знаменнику.

❑ **Приклад**

5. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sin^5 x}$.

Р о з в ' я з а н н я. Цей інтеграл можна записати так:

$$\int\frac{dx}{\sin^5 x}=\int\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin^5 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^3 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^5 x}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^3 x}+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^5 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x}dx+\int\cos x\frac{d(\sin x)}{\sin^5 x}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin x}+\int\cos x\frac{d(\sin x)}{\sin^3 x}+\int\cos x\frac{d(\sin x)}{\sin^5 x}=$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{-\sin x}{\sin^2 x}dx-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{1}{4}\int\frac{-\sin x}{\sin^4 x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sin^3 x}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{1}{4}\left(\int\frac{dx}{\sin x}+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\left(\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{\cos x}{4\sin^4 x}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{-\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{-\sin x}{\sin^2 x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}+C.$$

4°. Нехай маємо інтеграли:

1) $\int\sin mx\cos nx dx$; 2) $\int\cos mx\cos nx dx$; 3) $\int\sin mx\sin nx dx$.

Ці інтеграли знаходяться за такими формулами:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x);$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x);$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x).$$

❑ **Приклад**

6. Знайти інтеграли:

1) $\int\sin 4x\cos 2x dx$;

2) $\int \cos x \cos 3x dx$;

3) $\int \sin x \sin 3x dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосовуємо попередні формули:

$$1)\ \int \sin 4x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x + \sin 2x) dx = \frac{1}{12}\int \sin 6x d(6x) +$$

$$+\frac{1}{4}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C;$$

$$2)\ \int \cos x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x + \cos 2x) dx = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

$$3)\ \int \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x) dx = \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) -$$

$$-\frac{1}{8}\int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

5°. Розглянемо інтеграл $\int \sin^r x \cos x^s dx$, де r і s — довільні раціональні числа. Зробимо підстановку $z = \sin x$. Тоді $dz = \cos x dx$.

Звідси

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Отже, інтеграл набирає вигляду

$$\int \sin^r x \cos^s x dx = \int z^r \left(1-z^2\right)^{\frac{s-1}{2}} dz.$$

Маємо інтеграл від біномного диференціала. Тут $m = r$, $n = 2$, $p = \frac{s-1}{2}$.

Отже, такий інтеграл береться в скінченному вигляді в трьох випадках:

1) $\frac{s-1}{2}$ — ціле число;

2) $\frac{m+1}{n} = \frac{r+1}{2}$ — ціле число;

3) $\frac{m+1}{n} + p = \frac{r+s}{2}$ — ціле число.

❑ **Приклад**

7. Знайти інтеграл $\int \sqrt{\sin x} dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Перевіряємо зазначені вище випадки. Тут

$\frac{s-1}{2} = -\frac{1}{2}$ — дробове число;

$\frac{r+1}{2} = \frac{3}{4}$ — дробове число;

$\frac{r+s}{2} = \frac{1}{4}$ — дробове число.

Отже, заданий інтеграл не береться у скінченному вигляді.

Визначений інтеграл

РОЗДІЛ

5

5.1 ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. Задача про площу криволінійної трапеції. Криволінійна трапеція — це фігура, яка в загальному випадку відмінна від багатокутника. Тому потрібно дати означення площі такої фігури, показати, що площа криволінійної трапеції за таким означенням існує, а потім розглянути спосіб обчислення цієї площі.

Нехай маємо криволінійну трапецію (рис. 71), яка зверху обмежена графіком неперервної і невід'ємної функції $y = f(x)$, заданої на відрізку $[a; b]$.

Поділимо відрізок $[a; b]$ (основу трапеції) на n довільних частин за допомогою точок $x_0,\ x_1, ...,\ x_k,\ x_{k+1}, ...,\ x_n$ так, щоб справджувалися нерівності

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < x_n = b.$$

Через кожну точку поділу проведемо прямі, паралельні осі Oy. Тоді криволінійна трапеція розіб'ється на n окремих криволінійних трапецій. Розглянемо одну з таких трапецій, наприклад, ту, в основі якої лежить відрізок $[x_k; x_{k+1}]$.

Оскільки функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, то вона є неперервною і на кожному окремому відрізку, зокрема на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$. Тоді за теоремою Вейєрштрасса $f(x)$ на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ набуває свого найменшого і найбільшого значень. Нехай це будуть відповідно числа m_k і M_k. Тоді на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ знайдуться точки $c'_k,\ c''_k,\ x_k \le c'_k \le x_{k+1}$, $x_k \le c''_k \le x_{k+1}$ такі, що $m_k = f(c'_k);\ \ M_k = f(c''_k)$.

На кожному з відрізків $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, ...,\ n-1$ побудуємо два прямокутники, основи яких збігаються з відрізком $[x_k; x_{k+1}]$, а висоти є ординатами точок кривої $y = f(x)$, абсциси яких дорівнюють $c'_k,\ c''_k$.

Прямокутники, довжина висот яких дорівнює m_k, називатимемо *вхідними,* а прямокутники, висоти яких дорівнюють M_k, $k = 0,\ 1, ...,\ n-1$, — *вихідними* (на рис. 71 вхідні прямокутники заштриховано).

Позначимо через $\underline{S}$ суму площ вхідних прямокутників, а через $\bar{S}$ — суму площ вихідних прямокутників. Тоді за побудовою цих прямокутників маємо

$$\underline{S} = f(c_0')(x_1 - x_0) + f(c_1')(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_{n-1}')(x_n - x_{n-1});$$

$$\overline{S} = f(c_0'')(x_1 - x_0) + f(c_1'')(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_{n-1}'')(x_n - x_{n-1})$$

або

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k')(x_{k+1} - x_k);$$

$$\overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k'')(x_{k+1} - x_k).$$

Зрозуміло, що суми $\underline{S}$ і $\overline{S}$ для того самого розбиття відрізка $[a; b]$ на частини є сталими числами. Проте якщо розбиття (сукупність точок x_0, $x_1, \ldots, x_n$) змінювати, то змінюватимуться $\underline{S}$ і $\overline{S}$. Отже, якщо сукупність точок x_0, $x_1, \ldots, x_n$ позначити буквою T і називати *розбиттям відрізка*, то $\underline{S}$ і $\overline{S}$ залежатимуть від T:

$$\underline{S} = \underline{S}(T), \ \overline{S} = \overline{S}(T).$$

Нехай $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ є довжиною відрізка $[x_k; x_{k+1}]$, а λ — найбільше з чисел Δx_k, $\lambda = \max \Delta x_k$, $0 \le k \le n-1$.

Тоді число λ залежить від T: $\lambda = \lambda(T)$. Надалі розглядатимемо такі T-розбиття відрізка $[a; b]$ на частини, щоб $\lambda(T) \to 0$.

Означення. Якщо величини $\underline{S}(T)$, $\overline{S}(T)$ при $\lambda(T) \to 0$ мають границі й ці границі рівні між собою

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \underline{S}(T) = \lim_{\lambda(T) \to 0} \overline{S}(T) = S, \tag{1}$$

то криволінійну трапецію називають *квадровною фігурою*, а число S при цьому — *площею криволінійної трапеції.*

Якщо границі величини $\underline{S}(T)$ і $\overline{S}(T)$ при $\lambda(T) \to 0$ різні або хоча б одна з цих границь не існує, то кажуть, що фігура не має площі, тобто фігура є неквадровною.

У наступному параграфі доведемо, що криволінійна трапеція є фігурою квадровною, тобто для неї виконуються співвідношення (1), і подамо спосіб обчислення її площі.

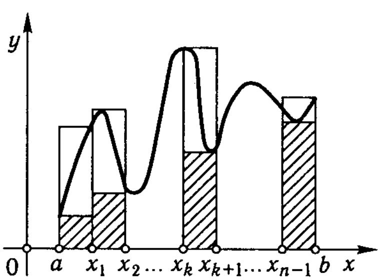


Рис. 71

❑ **Приклад**

Знайти площу під параболою $y = x^2$ (див. рис. 1).

Р о з в ' я з а н н я. Цю задачу було розглянуто в розд. 1, де зазначалося, що коли відрізок $[0; h]$ розбити на n рівних частин точками $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{h}{n}$, $x_2 = \frac{2h}{n}, \ldots$, $x_{n-1} = \frac{(n-1)h}{n}$, $x_n = h$, то сума площ вихідних прямокутників дорівнює

$$\overline{S}=\frac{h^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Можна показати, що сума $\underline{S}$ площ вхідних прямокутників (прямокутників, висоти яких збігаються з лівими ординатами) дорівнює

$$\underline{S}=\frac{h^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

Тоді

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}=\lim_{n\to\infty}\underline{S}=\lim_{n\to\infty}\frac{h^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{h^3}{3};$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}=\lim_{n\to\infty}\overline{S}=\lim_{n\to\infty}\frac{h^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{h^3}{3}.$$

Отже,

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}=\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}=\frac{h^3}{3}.$$

Згідно з наведеним означенням, фігура, зображена на рис. 1, є квадровною і її площа S дорівнює

$$S=\frac{h^3}{3}.$$

Повернемося до криволінійної трапеції (див. рис. 71). Крім сум $\underline{S}$ і $\overline{S}$ розглянемо суму

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(c_k)\Delta x_k, \tag{2}$$

де c_k — довільна точка відрізка $[x_k;\,x_{k+1}]$; $x_k\le c_k\le x_{k+1}$, $k=0,1,\ldots,\ n-1$.

Очевидно, сума (2) виражає суму площ прямокутників, що знаходяться між вхідними та вихідними прямокутниками. Тому справедливі нерівності

$$\underline{S}\le\sigma\le\overline{S}. \tag{3}$$

Нехай криволінійна трапеція є квадровною фігурою, тобто

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}=\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}=S.$$

Тоді з нерівностей (3) випливає, що й

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma=S.$$

Отже, за площу криволінійної трапеції можна взяти границю суми (2) при $\lambda(T)\to 0$.

Суму (2) називають *інтегральною сумою* для функції $f(x)$.

Отже, задача про площу криволінійної трапеції зводиться до встановлення існування або неіснування границі інтегральної суми.

Задача про обчислення шляху за відомою швидкістю. Нехай точка M рухається прямолінійно з відомою в кожний момент часу швидкістю $v = f(t)$. Потрібно визначити той шлях s, який точка пройде за проміжок часу від $t = \alpha$ до $t = \beta$.

Якщо точка M рухається з постійною швидкістю $v = \text{const}$, тобто рух відбувається рівномірно, то пройдений шлях за проміжок часу від $t = \alpha$ до $t = \beta$ дорівнює

$$s = v(\beta - \alpha).$$

Проте якщо швидкість не є сталою, тобто рух нерівномірний, то обчислити пройдений шлях за попередньою формулою вже не можна.

Тому застосуємо метод, подібний до методу знаходження площі криволінійної трапеції. Для цього відрізок $[\alpha; \beta]$ поділимо на n довільних частин точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

Розглянемо будь-який окремий відрізок, наприклад відрізок $[t_k; t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, \; n-1$. Припустимо, що відрізок $[t_k; t_{k+1}]$ настільки малий, що швидкість $v = f(t)$ при переході від точки до точки мало змінюється. Отже, її можна вважати сталою, нехай вона дорівнює, наприклад, $f(\tilde{t}_k)$, де $\tilde{t}_k$ — довільна точка відрізка $[t_k; t_{k+1}]$, $t_k \le \tilde{t}_k \le t_{k+1}$. Тоді шлях Δs_k, пройдений точкою M за час $t_{k+1} - t_k = \Delta t_k$, наближено дорівнюватиме

$$\Delta s_k \approx f(\tilde{t}_k)\Delta t_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Додавши почленно ці наближені рівності, знайдемо наближене значення шляху s

$$s \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{t}_k)\Delta t_k.$$

Як бачимо, в правій частині цієї наближеної рівності є інтегральна сума, побудована для функції $f(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$.

Отже, якщо взяти за

$$\lambda = \max \Delta t_k, \quad 0 \le k \le n-1,$$

то природно за шлях s прийняти границю інтегральної суми

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{t}_k)\Delta t_k$$

за умови, що ця границя існує.

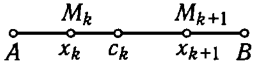


Рис. 72

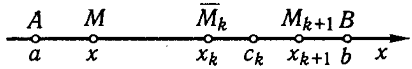


Рис. 73

Задача про обчислення маси лінійного стрижня за відомою густиною. Нехай маємо прямолінійний стрижень AB (рис. 72), густина якого змінюється від точки до точки і є відомою функцією

$$\rho = \rho(x), \quad a \le x \le b.$$

Якби густина була сталою $\rho = \text{const}$ (тіло зі сталою густиною називають *однорідним*), то маса m такого стрижня, як відомо, дорівнює добутку густини на довжину стрижня. У цьому випадку

$$m = \rho(b-a).$$

Якщо ρ не є сталою, то за попередньою формулою вже не можна обчислити густину стрижня. Тому, як і в попередній задачі, поділимо відрізок $[a; b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Нехай відрізок $[x_k; x_{k+1}]$ настільки малий, що густина $\rho = \rho(x)$ на ньому мало змінюється. Тоді можна вважати, що ця густина дорівнює $\rho = \rho(c_k)$, де c_k — довільна точка на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$, $x_k \le c_k \le x_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, \ n-1$ (див. рис. 72). Маса відрізка $M_k M_{k+1}$, яку позначимо через Δm_k, наближено дорівнює

$$\Delta m_k = \rho(c_k)\Delta x_k, \ \ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \ \ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

а маса всього стрижня

$$m \approx \sum_{k=0}^{n-1} \rho(c_k)\Delta x_k.$$

Отже, природно взяти за точне значення маси границю

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(c_k)\Delta x_k;$$

$$\lambda = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k.$$

Задача про роботу змінної сили. Якщо на точку M, що рухається прямолінійно (рис. 73), діє стала сила F і її напрямок збігається з напрямком руху точки, то робота W, виконана цією силою, дорівнює

$$W = Fs,$$

де s — шлях, пройдений точкою M.

Проте здебільшого величина сили не є сталою. Вона змінюється неперервно від точки до точки, і користуватися попередньою формулою для обчислення роботи вже не можна.

Отже, нехай величина сили F є функцією від x

$$F = F(x)$$

і нехай під дією цієї сили точка M перемістилася з точки A до точки B, пройшовши відстань $b-a$.

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n довільних частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Поділимо відрізок $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots,\ n-1$. Припускатимемо, що цей відрізок настільки малий, що $F(x)$ на ньому мало змінюється. Тоді можна вважати, що величина сили дорівнює значенню $F(x)$ у деякій довільно вибраній точці $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$, а саме, $F = F(c_k)$. Отже, робота, виконана сталою силою $F(c_k)$ при переміщенні точки M уздовж прямої з положення M_k у положення M_{k+1}, наближено дорівнює

$$\Delta W_k \approx F(c_k)\Delta x_k; \ \ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k;$$

$$k = 0, 1, \ldots,\ n-1.$$

Тоді вся робота, виконана силою F при переміщенні точки вздовж прямої з положення A в положення B, наближено дорівнює

$$W \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(c_k)\Delta x_k.$$

Зрозуміло, що меншими будуть довжини окремих відрізків (числа Δx_k), то сума в правій частині попередньої рівності точніше визначатиме значення роботи, як її інтуїтивно уявляємо. Тому природно за роботу W прийняти

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(c_k)\Delta x_k;$$

$$\lambda = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k,$$

якщо така границя існує.

Цим самим дано означення роботи змінної сили F, яку вона виконує при переміщенні точки M уздовж прямої від точки A до точки B.

5.2
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. КРИТЕРІЙ ІНТЕГРОВНОСТІ. КЛАСИ ІНТЕГРОВНИХ ФУНКЦІЙ

1. Визначений інтеграл. У попередньому параграфі було розглянуто низку задач, розв'язання яких зводиться до знаходження границі інтегральної суми. Отже, виникає потреба у всебічному вивченні інтегральних сум.

Зокрема, потрібно з'ясувати, що слід розуміти під границею інтегральної суми; для яких функцій границя інтегральної суми існує і як цю границю знайти.

Отже, нехай на відрізку $[a;b]$ задано функцію $f(x)$ (необов'язково неперервну). Розіб'ємо (поділимо) відрізок $[a;b]$ на n довільних частин за допомогою точок

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Сукупність точок $x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n$ позначатимемо буквою T і називатимемо *Т-розбиттям* відрізка $[a;b]$. На кожному окремому відрізку $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0,\ 1, \ldots,\ n-1$ виберемо довільно по одній точці $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$ (точки c_k називають проміжними точками). Нехай λ — найбільша довжина серед довжин окремих відрізків, тобто

$$\lambda = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k;\ \ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k;$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Зрозуміло, що для різних розбиттів відрізка $[a;b]$ на частини число λ буде різним. Отже, λ залежить від T-розбиття

$$\lambda = \lambda(T).$$

Надалі розглядатимемо тільки такі T-розбиття, для яких $\lambda(T) \to 0$.

Побудуємо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k. \tag{4}$$

Цю суму називають *інтегральною сумою* для функції $f(x)$, складеної для T-розбиття відрізка $[a;b]$ на частини при такому виборі точок $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Означення. Число I називають границею інтегральної суми $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k$ при $\lambda(T) \to 0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що як тільки $\lambda(T) < \delta$, то за будь-якого T-розбиття відрізка $[a;b]$ на частини і будь-якого вибору точок c_k справджується нерівність

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

і символічно записують так:

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = I. \qquad (5)$$

Границю інтегральної суми (число I) називають *визначеним інтегралом функції* $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

(читається: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»).

Число a називають *нижньою межею інтегрування*, b — *верхньою межею*, $f(x)$ — *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом*, відрізок $[a;b]$ — *проміжком інтегрування*.

Отже, згідно з означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є границею (якщо вона існує!) інтегральної суми, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k. \qquad (6)$$

Якщо визначений інтеграл існує, то функцію $f(x)$ називають *інтегровною на відрізку* $[a;b]$ за Ріманом[1], а сам інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ — *інтегралом Рімана*.

Так, функція $f(x)$, яка є сталою $(f(x)\equiv C)$ на відрізку $[a;b]$, є інтегровною і

$$\int_a^b Cdx = C(b-a).$$

Справді, в цьому випадку для будь-якого T-розбиття

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} C\Delta x_k = C\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = C(b-a).$$

Тому

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma = \lim_{\lambda(T)\to 0} C(b-a) = C(b-a).$$

Проте не всяка функція, задана на відрізку $[a;b]$, є інтегровною на ньому. Так, якщо $f(x)$ не є обмеженою на відрізку $[a;b]$, то вона не є інтегровною на цьому відрізку. Інакше кажучи, обмеженість функції на відрізку є необхідною умовою її інтегровності.

[1] *Ріман Г.* (1826—1866) — німецький математик.

Справді, нехай $f(x)$ не є обмеженою на $[a; b]$. Тоді вона не буде обмеженою хоча б на одному з окремих відрізків T-розбиття. Нехай це буде відрізок $[x_k; x_{k+1}]$. Тоді інтегральну суму для цього T-розбиття можна записати так:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{i-1} f(c_k)\Delta x_k + \sum_{k=i+1}^{n-1} C\Delta x_k + f(c_i)\Delta x_i.$$

Позначимо

$$A = \sum_{k=0}^{i-1} f(c_k)\Delta x_k + \sum_{k=i+1}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k,$$

тоді

$$\sigma = A + f(c_i)\Delta x_i.$$

Оскільки $f(x)$ не є обмеженою на відрізку $[x_i;\ x_{i+1}]$, то точку $c_i \in [x_i; x_{i+1}]$ можна вибрати так, щоб

$$|f(c_i)\Delta x_i| > |A| + \frac{1}{\lambda(T)}.$$

Тоді

$$|\sigma| = |A + |f(c_i)\Delta x_i| > |f(c_i)\Delta x_i| - |A| > \frac{1}{\lambda(T)}.$$

Звідси випливає, що при $\lambda(T) \to 0$ сума $\sigma \to \infty$.

Отже, тільки обмежені функції на цьому відрізку можуть бути інтегровними. Тому надалі розглядатимемо тільки обмежені функції. Проте не всяка й обмежена функція є інтегровною. Так, функція Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x - \text{раціональне число;} \\ 0, \text{ якщо } x - \text{ірраціональне число} \end{cases}$$

на відрізку $[0; 1]$ є обмеженою

$$|D(x)| \le 1,$$

але не інтегровною. Справді, побудуємо довільне T-розбиття відрізка $[0; 1]$ на частини. Тоді якщо за проміжні точки c_k взяти раціональні точки, то $\sigma = 1$. Якщо за c_k взяти ірраціональні точки, то $\sigma = 0$, а це й означає, що інтегральна сума, побудована для функції $D(x)$, до жодної границі не прямує.

2. **Суми Дарбу[1] та їх властивості.** Нехай на відрізку $[a; b]$ задана обмежена функція $f(x)$. Тоді вона буде обмеженою і на будь-якому окремому відрізку $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Отже, множина значень функції, яких

[1] *Дарбу Г.* (1842—1917) — французький математик.

вона набуває на кожному з відрізків $[x_k; x_{k+1}]$, має точну нижню і точну верхню межі. Нехай

$$\inf_{x\in[x_k;\, x_{k+1}]} f(x) = m_k;$$

$$\sup_{x\in[x_k;\, x_{k+1}]} f(x) = M_k.$$

Побудуємо такі суми:

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k; \quad \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Суми $\underline{S}$ і $\overline{S}$ називають відповідно *нижньою* і *верхньою* сумою Дарбу.

Зрозуміло, що суми Дарбу залежать від T-розбиття

$$\underline{S} = \underline{S}(T); \quad \overline{S} = \overline{S}(T)$$

і не залежать від вибору проміжних точок c_k.

В окремому випадку, коли функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, числа m_k і M_k $(k = 0, 1, ..., n-1)$ відповідно збігаються з найменшим і найбільшим значеннями функції, яких вона досягає на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$. Тоді суми Дарбу в цьому випадку є найменшою і найбільшою серед множини значень інтегральної суми, які відповідають такому T-розбиттю відрізка $[a;b]$ на частини.

У загальному випадку, згідно з означенням сум Дарбу, маємо нерівності

$$m_k \le f(c_k) \le M_k, \ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Помноживши всі члени цих нерівностей на число $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0$ і почленно додавши їх, отримаємо

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S}.$$

У цих нерівностях суми Дарбу для того самого T-розбиття є *сталими числами*, тоді як інтегральна сума σ є змінною, вона залежить ще й від вибору проміжних точок $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$, $(k = 0, 1, ..., n-1)$. Оскільки точки c_k вибираються довільно, то їх можна так підібрати, що значення $f(c_k)$ буде як завгодно близьким до m_k, а також і до M_k. Отже, інтегральну суму σ можна зробити як завгодно близькою до сум Дарбу $\underline{S}$ або $\overline{S}$. За такого вибору проміжних точок c_k $(k = 0, 1, ..., n-1)$ і враховуючи при цьому попередні нерівності, можна стверджувати: за такого T-розбиття відрізка $[a;b]$ на частини суми Дарбу $\underline{S}$ і $\overline{S}$ є точними відповідно нижньою і верхньою межами для множини значень інтегральної суми σ.

Суми Дарбу мають такі властивості.

В л а с т и в і с т ь 1°. Для T-розбиття правильною є нерівність:

$$\underline{S} \le \overline{S}.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки для того самого T-розбиття відрізка $[a;b]$ на частини $m_k \le M_k$, $(k = 0, 1, ..., n-1)$, то

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \underline{S}.$$

Властивість 1° доведено.

В л а с т и в і с т ь 2°. Якщо до точок поділу відрізка $[a;b]$ на частини приєднати нові точки поділу, то нижня сума Дарбу може від цього лише збільшитися, а верхня сума Дарбу — лише зменшитися.

Д о в е д е н н я. Для спрощення припускатимемо, що до цього T-розбиття додається ще одна точка поділу x'. Нехай ця точка припадає на відрізок $[x_i; x_{i+1}]$, тобто знаходиться між точками x_i і x_{i+1}:

$$x_i < x' < x_{i+1}.$$

Доведемо, що нижня сума Дарбу $\underline{S}'$, побудована для нового розбиття, задовольняє нерівність

$$\underline{S}' \ge \underline{S}.$$

Легко помітити, що сума $\underline{S}'$ відрізняється від суми $\underline{S}$ тим, що в сумі $\underline{S}$ відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ відповідав доданок

$$m_i(x_{i+1} - x_i),$$

а в сумі $\underline{S}'$ цьому відрізку відповідають два доданки

$$\overline{m}_i(x' - x_i) + \overline{\overline{m}}_i(x_{i+1} - x'),$$

де $\overline{m}_i$, $\overline{\overline{m}}_i$ — нижні точні межі множини значень функції $f(x)$ відповідно на відрізках $[x_i; x']$ і $[x'; x_{i+1}]$.

Оскільки ці відрізки є частинами відрізка $[x_i; x_{i+1}]$, то правильними є нерівності

$$m_i \le \overline{m}_i;$$

$$m_i \le \overline{\overline{m}}_i.$$

Тому

$$\overline{m}_i(x' - x_i) + \overline{\overline{m}}_i(x_{i+1} - x') \ge m_i(x' - x_i + x_{i+1} - x') = m_i(x_{i+1} - x_i).$$

Звідси випливає, що $\underline{S}' \ge \underline{S}$.

Аналогічно доводиться, що верхня сума Дарбу $\overline{S}'$ для нового розбиття задовольняє нерівність $\overline{S}' \le \overline{S}$.

Властивість 3°. Кожна нижня сума Дарбу не більша за кожну верхню суму Дарбу, які відповідають навіть різним розбиттям відрізка $[a; b]$ на частини.

Доведення. Утворимо довільне T_1-розбиття відрізка $[a; b]$ на частини і для нього побудуємо нижню і верхню суми Дарбу $\underline{S}^{(1)}$ і $\overline{S}^{(1)}$.

Візьмемо інше T_2-розбиття відрізка $[a; b]$ на частини, яке не пов'язане з T_1 -розбиттям. Побудуємо для T_2-розбиття нижню і верхню суми Дарбу. Позначимо їх $\underline{S}^{(2)}$ і $\overline{S}^{(2)}$.

Об'єднавши точки поділу T_1-розбиття і T_2-розбиття, отримаємо деяке нове розбиття. Позначимо його як T_3-розбиття. Нехай $\underline{S}^{(3)}$ і $\overline{S}^{(3)}$ — нижня і верхня суми Дарбу для T_3-розбиття.

Якщо T_3-розбиття розглядати як таке, що утворилося з T_1-розбиття поєднанням точок T_2-розбиття, то внаслідок властивостей 1°–2° отримаємо нерівності

$$\underline{S}^{(1)} \le \underline{S}^{(3)} \le \overline{S}^{(3)} \le \overline{S}^{(1)}. \qquad \text{(a)}$$

Якщо T_3-розбиття розглядати як таке, що утворилося з T_2-розбиття приєднанням точок T_1-розбиття, то матимемо нерівності

$$\underline{S}^{(2)} \le \underline{S}^{(3)} \le \overline{S}^{(3)} \le \overline{S}^{(2)}. \qquad \text{(б)}$$

Із нерівностей (а) і (б) отримуємо нерівності

$$\underline{S}^{(1)} \le \overline{S}^{(2)}, \ \underline{S}^{(2)} \le \overline{S}^{(1)}.$$

Властивість доведено.

Із властивості 3° випливає, що множина значень $\{\underline{S}\}$ нижніх сум Дарбу обмежена зверху. За верхню межу можна взяти будь-яку верхню суму Дарбу $\overline{S}$. Отже, існує точна верхня межа для множини значень нижніх сум Дарбу. Позначимо її через

$$\underline{I} = \sup\{\underline{S}\}.$$

Тоді згідно з властивістю точної верхньої межі виконується нерівність

$$\underline{I} \le \overline{S},$$

з якого б T-розбиття не бралася верхня сума Дарбу. Тоді з попередньої нерівності випливає, що множина значень $\{\overline{S}\}$ верхніх сум Дарбу обмежена знизу. Отже, існує точна нижня межа множини $\{\overline{S}\}$. Позначимо її через

$$\overline{I} = \inf\{\overline{S}\}.$$

Тоді з попередніх міркувань можна зробити висновок, що виконуються нерівності

$$\underline{S} \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S} \tag{7}$$

для будь-яких значень нижньої $\underline{S}$ та верхньої $\overline{S}$ сум Дарбу.

Числа $\underline{I}$, $\overline{I}$ називають відповідно нижнім та верхнім інтегралом Дарбу.

3. Критерій інтегровності функцій. Правильною є теорема.

Теорема. Для того щоб функція $f(x)$ була інтегровною на відрізку $[a;b]$, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\overline{S} - \underline{S}\right) = 0. \tag{8}$$

Зазначимо, що в умові (8) границя «на мові $\varepsilon-\delta$» розуміється так: для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що як тільки $\lambda < \delta$, то

$$\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon.$$

Доведення необхідності. Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, тобто існує границя (5). Тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що як тільки $\lambda < \delta$, то справджуються нерівності

$$I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$$

для довільного вибору проміжних точок $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$.

Оскільки $\underline{S}$ і $\overline{S}$ для T-розбиття є відповідно точною нижньою і верхньою межами для множини значень інтегральної суми σ, то правильними є нерівності

$$I - \varepsilon \le \underline{S} \le \overline{S} \le I + \varepsilon,$$

звідси

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S} = I, \quad \lim_{\lambda\to 0}\overline{S} = I.$$

З останніх рівностей випливає умова (8).

Доведення достатності. Нехай виконується умова (8). Тоді з цієї умови, а також із нерівностей (7) отримаємо

$$\underline{I} = \overline{I},$$

звідси

$$\underline{S} \le I \le \overline{S},$$

де I спільне значення $\underline{I}$ та $\overline{I}$.

Проте для того самого T-розбиття, для якого побудовані нижня $\underline{S}$ і верхня $\overline{S}$ суми Дарбу інтегральна сума σ також задовольняє нерівності

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S}.$$

Тоді, згідно з умовою (8), при $\lambda<\delta$ суми Дарбу за модулем відрізняються між собою менше ніж ε. Тому з попередніх нерівностей випливає

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

тобто число I є границею інтегральної суми σ.

Достатність доведено.

4. Класи інтегровних функцій. Наступні теореми 1—3 встановлюють класи тих функцій, які є інтегровними на заданому відрізку $[a;b]$.

Теорема 1. Будь-яка неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ є інтегровною на ньому.

Доведення. Оскільки $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона буде неперервною і на кожному окремому відрізку $[x_k;x_{k+1}]$. Тому за теоремою Вейєрштрасса $f(x)$ на кожному відрізку $[x_k;x_{k+1}]$ набуватиме свого найменшого і найбільшого значень. Ці значення збігаються відповідно з точною нижньою і з точною верхньою межами множини значень функції $f(x)$. Отже, існують точки $c_k' \in [x_k;x_{k+1}]$ і $c_k'' \in [x_k;x_{k+1}]$ такі, що

$$m_k = f(c_k'),\ M_k = f(c_k'').$$

Тоді

$$\underline{S} - \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(f(c_k'') - f(c_k'))\Delta x_k.$$

Оскільки $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то за теоремою Кантора вона є також рівномірно неперервною на ньому. Тому для числа $\frac{\varepsilon}{b-a}$, де $\varepsilon>0$ — довільне число, знайдеться число $\delta>0$ таке, що як тільки $|x'-x''|<\delta$, то

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

де x', x'' — довільні точки відрізка $[a;b]$. Надалі розглядатимемо такі T-розбиття відрізка $[a;b]$ на частини, щоб $\lambda=\lambda(T)<\delta$.

Тоді

$$\overline{S} - \underline{S} < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Отже,

$$\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon.$$

Ця нерівність означає, що

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0.$$

Теорему доведено.

З доведеної теореми випливає, що для неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k$$

існує.

Можна було б довести, що нижня і верхня суми Дарбу, побудовані для довільної обмеженої функції, також мають границі при $\lambda(T) \to 0$. Тоді для неперервної функції, як випливає з доведеного,

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \overline{S} = \lim_{\lambda(T)\to 0} \underline{S}.$$

Оскільки для будь-якого T-розбиття

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S},$$

то

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \overline{S} = \lim_{\lambda(T)\to 0} \underline{S} = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma = \int_a^b f(x)dx.$$

Зауважимо, що для неперервної функції інтеграл $\int_a^b f(x)d$ називають інтегралом Коші.

Припустимо, що неперервна функція $f(x)$ набуває на відрізку $[a;b]$ невід'ємних значень $(f(x) \ge 0)$. Тоді фігура (див. рис. 71) є криволінійною трапецією. Отже, останні рівності доводять надзвичайно важливе твердження: криволінійна трапеція є квадровною фігурою і її площа

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Тому визначений інтеграл можна геометрично інтерпретувати як число, що виражає площу криволінійної трапеції.

Тепер зрозуміло, що задачі, розглянуті в попередньому параграфі, розв'язуються за допомогою визначеного інтеграла. Так, шлях s, пройдений точкою за проміжок часу від $t = \alpha$ до $t = \beta$, дорівнює

$$s = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

Маса прямолінійного стрижня виражається визначеним інтегралом

$$m = \int_a^b \rho(x)dx.$$

Роботу, виконану змінною силою, також обчислюють визначеним інтегралом

$$W = \int_a^b F(x)dx.$$

Усі ці формули свідчать про те, що визначений інтеграл має багатогранне застосування в геометрії, механіці та фізиці.

Теорема 2. Будь-яка монотонна й обмежена на відрізку $[a; b]$ функція є інтегровною на ньому.

Доведення. Нехай $f(x)$ задано на відрізку $[a; b]$ і є на ньому обмеженою і неспадною (випадок сталої функції виключається, оскільки така функція є неперервною, а отже, інтегровною).

Побудуємо суми Дарбу

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k;$$

$$\overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\Delta x_k.$$

Тоді

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)\Delta x_k.$$

Розглядатимемо такі T-розбиття відрізка $[a; b]$ на частини, що $\lambda(T) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, де $\varepsilon > 0$ — довільне число.

Тоді

$$\overline{S} - \underline{S} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \left(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1})\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \left(f(b) - f(a)\right) = \varepsilon.$$

Отже,

$$\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon,$$

а це й доводить, що

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \left(\overline{S} - \underline{S}\right) = 0.$$

Випадок незростаючої функції доводиться аналогічно. Надалі розглядатимемо тільки неперервні функції.

Теорема 3. Будь-яка обмежена на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$, яка має скінченне число точок розриву, є інтегровною на цьому відрізку.

Цю теорему приймемо без доведення, відсилаючи читача до підручника [1].

5.3 ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Перш ніж сформулювати першу властивість визначеного інтеграла введемо поняття про напрямлений відрізок.

Під напрямленим відрізком $[a;b]$, розуміють множину значень x, що задовольняють нерівності відповідно

$$a \le x \le b \text{ або } a \ge x \ge b$$

і ці числа (точки) впорядковані від a до b, тобто в порядку зростання, якщо $a < b$, або спадання, якщо $a > b$.

Отже, розрізняють відрізки $[a;b]$ і $[b;a]$: вони співпадають між собою як числові множини і відрізняються за напрямком.

Визначений інтеграл, розглядуваний у попередніх параграфах, належить до напрямленого відрізка $[a;b]$, у якому $a < b$. Аналогічно до розглядуваного випадку можна ввести поняття визначеного інтеграла за напрямленим відрізком $[a;b]$, де $a > b$. (Пропонуємо зробити це самостійно.)

Визначений інтеграл має низку властивостей.

Властивість 1°. Якщо існує визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

то існує також визначений інтеграл

$$\int_b^a f(x)dx,$$

і при цьому виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Це співвідношення можна розглядати як додаткове означення інтеграла для випадку, коли верхня межа інтегрування менша від нижньої. Можна дати деяке обґрунтування поширення інтеграла на цей випадок.

Справді, нехай $a < b$.

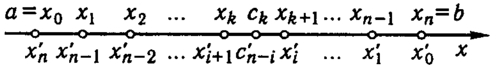


Рис. 74

Побудуємо інтегральну суму для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1}-x_k).$$

Цю суму побудовано для T-розбиття:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_k<\ldots<x_n=b.$$

Розглянемо тепер T'-розбиття цього відрізка у напрямку від b до a:

$$b=x'_0>x'_1>\ldots>x'_i>x'_{i+1}>\ldots>x'_n=a$$

(рис. 74).

Побудуємо для цього розбиття інтегральну суму

$$\sigma'=\sum_{i=0}^{n-1} f(c'_i)(x'_{i+1}-x'_i).$$

Оскільки існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, то він не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини, ні від вибору проміжних точок c_k. Тому вважатимемо, що точки x_k, $k=0,1,\ldots,\ n-1$ T-розбиття збігаються відповідно з точками x_{n-i}, $i=0,1,\ldots,\ n-1$ T-розбиття, а точки c_k — з точками c_{n-i}.

Тоді інтегральну суму σ' можна записати у такому вигляді:

$$\sigma'=\sum_{i=0}^{n-1} f(c'_i)(x'_{i+1}-x'_i)=\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_k-x_{k+1})=-\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1}-x_k)=-\sigma.$$

Звідси

$$\lim_{\lambda(T')\to 0}\sigma'=\lim_{\lambda(T)\to 0}(-\sigma)=-\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma=-\int_a^b f(x)dx.$$

Властивість 1° коротко читають так: якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі, то знак інтеграла змінюється на протилежний.

Властивість 2°. Визначений інтеграл з однаковими межами дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

Цю властивість можна також розглядати як додаткове означення.

В л а с т и в і с т ь 3°. Якщо існує інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

то існує також інтеграл

$$\int_a^b Cf(x)dx,$$

де C — довільне число, і виконується рівність

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

Д о в е д е н н я. Запишемо інтегральну суму для визначеного інтеграла, який міститься в лівій частині останньої рівності

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} Cf(c_k)\Delta x_k = C\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = C\sigma,$$

де σ — інтегральна сума функції $f(x)$. Тоді, перейшовши до границі в попередній рівності, матимемо

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma' = \lim_{\lambda(T)\to 0}(C\sigma) = C\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma = C\int_a^b f(x)dx.$$

Властивість доведено.

Властивість 3° коротко читають так: сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

В л а с т и в і с т ь 4°. Якщо існують інтеграли

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{і} \quad \int_a^b \varphi(x)dx,$$

то існує інтеграл

$$\int_a^b (f(x)\pm\varphi(x))dx,$$

причому

$$\int_a^b (f(x)\pm\varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Д о в е д е н н я. Запишемо інтегральну суму для інтеграла з лівої частини останньої рівності

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1}(f(c_k)\pm\varphi(c_k))\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=0}^{n-1}\varphi(c_k)\Delta x_k.$$

Тоді, перейшовши до границі при $\lambda(T)\to 0$, дістанемо

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma' = \lim_{\lambda(T)\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=0}^{n-1}\varphi(c_k)\Delta x_k\right).$$

Тут під знаком границі є інтегральні суми для функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$.

Оскільки ці функції за умовою інтегровні, то

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma' = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \pm$$

$$\pm\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Властивість доведено.

Властивість 4° коротко читають так: визначений інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів від цих функцій.

Цю властивість можна узагальнити і на той випадок, коли маємо n інтегровних на відрізку $[a;b]$ функцій. Тоді

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

Властивість 5°. Якщо для функції $f(x)$ існують інтеграли

$$\int_a^b f(x)dx,\ \int_a^c f(x)dx,\ \int_c^b f(x)dx,$$

то виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доведення. Припустимо, що $a<b$. Тоді можуть бути два випадки: 1) точка c знаходиться між точками a і b $(a<c<b)$; 2) точка c знаходиться за точкою b $(a<b<c)$.

Розглянемо спочатку випадок 1). Оскільки існує $\int_a^b f(x)dx$, то він не залежить від розбиття відрізка $[a;b]$ на частини. Тому розглядатимемо такі розбиття, де точка c є однією з точок поділу

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i = c < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Тоді інтегральну суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k$$

можна розбити на дві суми

$$\sigma = \sum_{k=0}^{i} f(c_k)\Delta x_k + \sum_{k=i+1}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k.$$

Перша сума у цій рівності є інтегральною сумою функції $f(x)$, побудованої на відрізку $[a;c]$, а друга — інтегральною сумою функції $f(x)$, побудованої на відрізку $[c;b]$, а за умовою інтеграли існують, то, перейшовши до границі в попередній рівності, дістанемо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Розглянемо випадок 2) $a<b<c$. За доведеним можна записати таку рівність:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k.$$

Інтегральну суму під знаком границі розіб'ємо на дві інтегральні суми функції $f(x)$, одну з яких побудовано на відрізку $[a;b]$, а іншу — на $[b;c]$. Тоді

$$\sum_a^b f(c_k)\Delta x_k = \sum_a^c f(c_k)\Delta x_k - \sum_b^c f(c_k)\Delta x_k.$$

Перейшовши до границі при $\lambda(T)\to 0$ і врахувавши, що існують границі сум із правої частини попередньої рівності, матимемо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx.$$

Помінявши місцями межі в останньому інтегралі, дістанемо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Властивість доведено. Цю властивість можна узагальнити і на той випадок, коли основний відрізок $[a;b]$ розбито точками $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ на m частин. Тоді, якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{m-1}}^{c_m} f(x)dx + \int_{c_m}^{b} f(x)dx.$$

Властивість 6°. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтегровні на відрізку $[a;b]$ і для кожного $x\in[a;b]$

$$f(x)\le\varphi(x),$$

то виконується нерівність

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Доведення. Побудуємо інтегральні суми для функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k,$$

$$\sigma'=\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(c_k)\Delta x_k.$$

Тоді, згідно з нерівністю $f(x)\le\varphi(x)$, маємо

$$\sigma\le\sigma'.$$

Перейшовши до границі при $\lambda(T)\to 0$ і врахувавши, що границі обох частин нерівностей існують, матимемо

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Властивість доведено.

З властивості 6° випливає, що коли в обох частинах нерівності є інтегровні функції, то таку нерівність можна почленно інтегрувати. Зокрема, якщо $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і на цьому відрізку

$$f(x)\ge 0,$$

то й

$$\int_a^b f(x)dx\ge 0.$$

Якщо $f(x)\le 0$, то й $\int_a^b f(x)dx\le 0.$

Властивість 7°. Якщо функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a;b]$, то на ньому є інтегровною також функція $|f(x)|$, і справджується нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx.$$

Доведення. Доведемо спочатку, що $|f(x)|$ є інтегровною на відрізку $[a;b]$. Для цього використаємо критерій інтегровності. Запишемо різницю $\overline{S}-\underline{S}$ сум Дарбу для функції $f(x)$:

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\Delta x_k.$$

Різницю M_k-m_k називають коливанням функції $f(x)$ на відрізку $[x_k;x_{k+1}]$ і позначають $\omega_k(f)$. Тоді

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f)\Delta x_k.$$

Позначимо коливання функції $|f(x)|$ (воно існує, оскільки функція $|f(x)|$ є обмеженою) на відрізку $[x_k;x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,\ n-1$ через

$$\omega_k(|f|)=\sup_{x\in[x_k;\,x_{k+1}]}|f(x)|-\inf_{x\in[x_k;\,x_{k+1}]}|f(x)|.$$

Доведемо, що $\omega_k(|f|)\le\omega_k(f),\ k=0,1,\ldots,n-1$.

Справді, виконуються нерівності

$$\big||f(x_k')|-|f(x_k'')|\big|\le|f(x_k')-f(x_k'')|\le\omega_k(f)$$

для будь-яких x_k', $x_k''\in[x_k;x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,\ n-1$. Тоді виконується й така нерівність:

$$\sup_{x_k',\,x_k''\in[x_k;\,x_{k+1}]}\big||f(x_k')|-|f(x_k'')|\big|\le\omega_k(f).$$

Проте

$$\sup_{x_k',\,x_k''\in[x_k;\,x_{k+1}]}\big||f(x_k')|-|f(x_k'')|\big|=\omega_k(|f|),$$

$$k=0,1,\ldots,n-1,$$

тому й $\omega_k(|f|)\le\omega_k(f)$.

Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(|f|)\Delta x_k\le\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f)\Delta x_k.$$

Проте остання сума при $\lambda(T)\to0$, внаслідок інтегровності функції $f(x)$, прямує до нуля. Тоді й сума в лівій частині попередньої нерівності при $\lambda(T)\to0$ також прямує до нуля.

Отже, з інтегровності $f(x)$ випливає інтегровність $|f(x)|$, а оскільки для будь-якого $x \in [a;b]$

$$f(x) \leq |f(x)|, \ f(x) \geq -|f(x)|,$$

то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx;$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq -\int_a^b |f(x)|dx.$$

Об'єднуючи ці дві нерівності в одну, дістанемо

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

5.4 ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і для будь-якого $x \in [a;b]$ справджуються нерівності

$$m \leq f(x) \leq M,$$

де m, M — числа, то виконуються нерівності

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{9}$$

Доведення. Користуючись властивістю 6° визначеного інтеграла й умовою теореми, можна записати такі нерівності:

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx,$$

але

$$\int_a^b mdx = m(b-a), \ \int_a^b Mdx = M(b-a).$$

Підставляючи в останні нерівності значення цих інтегралів, дістанемо нерівність (9).

Теорему доведено.

Якщо члени нерівностей (9) поділити на число $b-a$ і позначити

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu,$$

то матимемо таку рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$

де $m \le \mu \le M$.

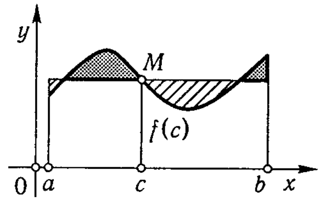


Рис. 75

Наслідок. Якщо $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ є неперервною, то існує точка $c \in (a;b)$ така, що виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \qquad (10)$$

Справді, за теоремою Вейєрштрасса неперервна на відрізку $[a;b]$ функція набуває свого найменшого значення m і найбільшого значення M. Тоді за теоремою про проміжне значення неперервної функції існує хоча б одна точка $c \in (a;b)$, в якій функція дорівнює числу μ.

Цей наслідок називають ще *теоремою про середнє значення інтеграла від неперервної функції*. Геометричне тлумачення цієї теореми зображено на рис. 75. Справді, якщо $f(x) > 0$ і є неперервною, то в лівій частині рівності (10) інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ виражає площу криволінійної трапеції. Добуток $f(c)(b-a)$ є площею прямокутника з основою $b-a$ і висотою $f(c)$.

Отже, рівність (10) стверджує той факт, що на кривій, яка є графіком функції $f(x)$, знайдеться хоча б одна точка M така, що площа криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника з тією самою основою і висотою, яка дорівнює ординаті точки M.

Теорема 2. Нехай на відрізку $[a;b]$ визначені й неперервні функції $f(x)$, $g(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a;b]$ не змінює знак ($g(x) \ge 0$ або $g(x) \le 0$), тоді існує таке число $c \in (a;b)$, що

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx. \qquad (11)$$

Доведення. Припустимо, що $g(x)$ на відрізку $[a;b]$ набуває невід'ємних значень. Тоді

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x),$$

де m, M — відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Функція $f(x)g(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Отже, така функція є інтегровною на відрізку $[a;b]$. З попередніх нерівностей матимемо нерівності

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx.$$

Якщо $\int_a^b g(x)dx = 0$, то рівність (11) справджується, оскільки в цьому випадку

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Тому рівність (11) за будь-якого $f(c)$ є справедливою.

Нехай $\int_a^b g(x)dx > 0$. Тоді, поділивши всі члени попередньої нерівності на $\int_a^b g(x)dx$, матимемо

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M.$$

Позначивши

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu,$$

дістанемо рівність

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx,$$

де $m \le \mu \le M$.

Оскільки $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, то існує така точка $c \in (a;b)$, що $f(c) = \mu$. Теорему доведено.

Зауважимо, що теорема 1 є окремим випадком теореми 2. Справді, припустивши в теоремі 2, що $g(x) \equiv 1$, матимемо теорему 1.

Попередній наслідок називають інтегральною теоремою про середнє. Така назва пояснюється тим, що стверджується існування точки, яка знаходиться всередині інтервалу $(a;\, b)$, і в якій визначений інтеграл має властивість (10).

Теорему 2 називають *узагальненою теоремою про середнє.*

Наприкінці зазначимо, що було розглянуто випадок $a < b$. Проте теореми залишаються справедливими й для випадку $a > b$.

5.5 ПОХІДНА ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ЗА ВЕРХНЬОЮ ЗМІННОЮ МЕЖЕЮ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦА

У цьому параграфі доведемо одну з основних теорем інтегрального числення, а саме: будь-яка неперервна на відрізку $[a;\, b]$ функція має первісну.

Нехай на відрізку $[a;\, b]$ задано інтегровну функцію $f(x)$. Тоді можна довести, що вона є інтегровною й на будь-якому відрізку $[a;\, x]$, де $a \le x \le b$. Отже, існує визначений інтеграл

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

(Оскільки визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування, то щоб не плутати з верхньою межею, через t позначено змінну інтегрування.) Заданий інтеграл називають *визначеним інтегралом зі змінною верхньою межею.* Очевидно, він є функцією від x. Позначимо його

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{12}$$

Доведемо таку лему.

Лема. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$, то функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ є неперервною на цьому відрізку.

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка відрізка $[a; b]$. Надамо x_0 довільного приросту h такого, щоб $x_0 + h \in [a; b]$. Знайдемо приріст функції $\Phi(x)$ у точці x_0

$$\Delta\Phi(x_0) = \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt.$$

Застосуємо до першого інтеграла властивість 5° визначеного інтеграла. Матимемо

$$\Delta\Phi(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

Оскільки функція $f(x)$ є обмеженою на відрізку $[a;b]$, то вона буде обмеженою і на будь-якому відрізку, що міститься в $[a;b]$. Зокрема, буде обмеженою й на відрізку $[x_0;x_0+h]$:

$$m' \le f(x) \le M'; \ x \in [x_0;x_0+h].$$

Тому до попереднього інтеграла можна застосувати теорему про середнє:

$$\Delta\Phi(x_0) = \mu h,$$

де $m' \le \mu \le M'$, і якщо $h \to 0$, то з цієї рівності випливає, що

$$\lim_{h\to 0} \Delta\Phi(x_0) = 0.$$

Це означає, що функція $\Phi(x)$ є неперервною в точці x_0. Оскільки x_0 — довільна точка відрізка $[a;\, b]$, то $\Phi(x)$ є неперервною в кожній точці цього відрізка.

Лему доведено.

Основна теорема інтегрального числення

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;\, b]$, то функція $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ є диференційовною в кожній точці цього відрізка і похідна $\Phi'(x)$ дорівнює

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Доведення. Нехай x — довільна точка відрізка $[a;\, b]$, а h настільки малий приріст x, що $x+h \in [a;\, b]$. Тоді

$$\Delta\Phi(x) = \int\limits_0^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt.$$

Внаслідок того що $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, вона є неперервною й на відрізку $[x;\, x+h]$. Тому до останнього інтеграла можна застосувати формулу (10). Маємо

$$\Delta\Phi(x) = f(c)h,$$

де точка $c \in (x;\, x_0+h)$.

Знайдемо

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f\left(\lim_{h\to 0} c\right).$$

Якщо $h \to 0$, то $c \to x$, тому

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{h} = f(x).$$

Отже, існує границя відношення приросту функції $\Phi(x)$ до приросту аргументу h при $h \to 0$. Таку границю, як відомо, називають *похідною* і позначають

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Теорему доведено.

Цю теорему читають ще так.

Якщо $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, то похідна визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею за верхньою межею дорівнює підінтегральній функції, в якій замість змінної інтегрування береться верхня межа

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

З доведеної теореми випливає важливий наслідок.

Наслідок. Для всякої неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ існує первісна функція, й однією з первісних функцій є визначений інтеграл (12) із змінною верхньою межею.

Справді, оскільки $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона є інтегровною на відрізку $[a; b]$, а отже, і на будь-якому відрізку $[a; x]$, $a \le x \le b$. Тоді, згідно з лемою, можна зробити висновок, що функція $\Phi(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, а з попередньої теореми випливає, що $\Phi(x)$ має похідну в інтервалі $(a; b)$.

Теорема 2. Для всякої неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ правильною є так звана формула Ньютона — Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{13}$$

де $F(x)$ — одна з первісних функцій для функції $f(x)$.

Доведення. Оскільки функція (12) є первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, то правильною є рівність

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C,$$

де $F(x)$ — одна з первісних функцій для $f(x)$, а C — довільна стала. Підставимо в цю рівність $x = a$. Маємо

$$0 = F(a) + C,$$

звідси

$$C = -F(a).$$

Тоді

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Нехай у цій рівності $x = b$. Тоді дістанемо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(тут замість t взяли x). Теорему доведено.

Формула (13) виражає зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами, вона дає також змогу у випадку неперервної функції $f(x)$ досить просто обчислювати визначений інтеграл. Справді, якщо для $f(x)$ відома будь-яка первісна функція $F(x)$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює різниці двох значень первісної: при $x = a$ і при $x = b$. Зокрема, для всіх функцій, невизначені інтеграли від яких беруться у скінченному вигляді, можна визначені інтеграли знаходити за формулою (13).

Різницю з правої частини формули Ньютона — Лейбніца записують ще так:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

і тоді формула набирає вигляду

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{14}$$

❑ **Приклад**

1. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$;

3) $\int_1^2 x \ln x dx$; 4) $\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Підінтегральні функції в кожному визначеному інтегралі є функціями неперервними на відповідних відрізках. Тому для їх обчислення можна застосовувати формулу Ньютона — Лейбніца.

1) Однією з первісних функцій для функції $\frac{1}{1+x^2}$ є $\operatorname{arctg} x$. Тому

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

2) Первісною функцією для функції $\cos x$ є функція $F(x) = \sin x$. Тому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

3) Знайдемо будь-яку первісну для функції $f(x) = x \ln x$. Інакше кажучи, знайдемо невизначений інтеграл (з точністю до довільної сталої)

$$\int x \ln dx.$$

Знайдемо цей інтеграл, користуючись формулою інтегрування частинами: $u = \ln x$, $dv = xdx$, $du = \frac{1}{x}dx$; $v = \frac{x^2}{2}$.

Маємо

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} = F(x).$$

Тоді

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left(\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}2^2 \ln 2 - \frac{1}{4}2^2 - \frac{1}{2}1^2 \ln 1 + \frac{1}{4}1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

4) Знайдемо будь-яку первісну $F(x)$ для підінтегральної функції

$$f(x) = \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1};$$

$$F(x) = \int \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1}dx = \int\left(2x^2 - 3\right)dx = \frac{2x^3}{3} - 3x.$$

Отже,

$$\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1}dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - 3x\right)\Big|_2^3 = \frac{2}{3}3^3 - 3\cdot 3 - \frac{2}{3}2^3 + 3\cdot 2 = \frac{29}{3}.$$

5.6
ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ. ФОРМУЛА ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

При вивченні невизначеного інтеграла було розглянуто один з найефективніших методів інтегрування функцій — метод підстановки. Цим методом користуються також при обчисленні визначених інтегралів. Проте для визначеного інтеграла цей метод потрібно обґрунтувати. Доведемо таку теорему.

Теорема. Нехай виконуються умови:

1) $f(x)$ є неперервною функцією на відрізку $[a; b]$;

2) функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha; \beta]$;

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і значення функції $x = \varphi(t)$ не виходять за межі відрізка $[a; b]$ при $t \in [\alpha; \beta]$.

Тоді справджується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (15)$$

Доведення. Спочатку зазначимо, що в обох частинах рівності (15) інтеграли існують, оскільки підінтегральні функції неперервні на відповідних відрізках. Введемо допоміжні функції

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u)du, \quad x = \varphi(t);$$

$$I(t) = \int_\alpha^t f(\varphi(u))\varphi'(u)du, \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Можна показати, що $\Phi(x)$ і $I(t)$ мають по t похідні, знайдемо їх. Функція $\Phi(x)$ є складеною. Продиференціюємо її:

$$\frac{d\Phi(x)}{dt}=\frac{d\Phi(x)}{dx}\frac{dx}{dt}=f(x)\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Аналогічно

$$\frac{dI}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\int_{\alpha}^{t}f(\varphi(u))\varphi'(u)du\right)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Отже, похідні від функції $\Phi(x)$ і $I(t)$ рівні між собою. Тому самі функції відрізняються одна від одної на сталу величину

$$\Phi(\varphi(t))-I(t)=C.$$

Попередня рівність справедлива для будь-якого $t\in[\alpha;\beta]$.

Нехай $t=\alpha$. Маємо

$$\Phi(\varphi(\alpha))-I(\alpha)=C.$$

Як бачимо,

$$\Phi(\varphi(\alpha))=\Phi(a)=0;$$
$$I(\alpha)=0.$$

Отже, $C=0$. Тому

$$\Phi(\varphi(t))=I(t).$$

Поклавши $t=\beta$ і врахувавши, що $\Phi(\varphi(\beta))=\Phi(b)$, дістанемо формулу (15).

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо при знаходженні невизначеного інтеграла методом підстановки у первісній функції доводилося від змінної t повертатися до змінної x (робити підстановку $t=\omega(x)$), то при обчисленні визначеного інтеграла робити таку заміну немає потреби. Якщо вдається обчислити інтеграл, який є у правій частині формули (15), то цим самим обчислено (знайдено число) й інтеграл лівої частини формули (15). На практиці, як і при обчисленні невизначеного інтеграла, найчастіше користуються підстановками виду $t=\omega(x)$. При цьому на функцію $\omega(x)$ накладаються умови, щоб: 1) $\omega(x)$ мала на відрізку $[a;b]$ неперервну похідну; 2) на відрізку $[a;b]$ була строго монотонною. Тоді така функція має обернену функцію $x=\varphi(t)$, і маємо підстановку, про яку йдеться в теоремі. При цьому межі для t знаходять з рівності $t=\omega(x)$. Тоді $\omega(a)$ є нижньою межею за t, а $\omega(b)$ — верхньою.

Розглянемо окремий випадок формули (15), а саме інтеграл $\int_{-a}^{a}f(x)dx$. Тоді цей інтеграл можна записати так:

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx.$$

У першому інтегралі застосуємо підстановку

$$x=-t.$$

Очевидно, функція $\varphi(t) = -t$ на відрізку $[0; a]$ задовольняє умови попередньої теореми. Отже,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Визначений інтеграл не залежить від того, якою буквою позначити змінну інтегрування. Тому в першому інтегралі замість t візьмемо x. Матимемо

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} (f(-x)dx + f(x))dx.$$

Припустимо, що функція $f(x)$ на відрізку $[-a; a]$ є парною, тобто $f(-x) = f(x)$. Тоді з попередньої рівності дістанемо

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx. \quad (16)$$

Якщо $f(x)$ на відрізку $[-a; a]$ є непарною, $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \quad (17)$$

Формулами (16) і (17) дуже часто користуються для знаходження визначених інтегралів.

❑ **Приклад**

1. Обчислити інтеграли

1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; 3) $\int\limits_{0}^{4} x\sqrt{x^2 + 9}dx$;

4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; 5) $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$; 6) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$; 7) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x^3 dx$.

Розв'язання.

1) У заданому інтегралі застосуємо підстановку $t = \cos x$, де $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Тоді на цьому відрізку $\cos x$ змінюється монотонно (спадає), а отже, можна визначити межі за t. Для цього в попередній рівності покладемо $x = 0$. Матимемо нижню межу $t = 1$. Якщо $x = \frac{\pi}{2}$, то матимемо верхню межу $t = 0$. Складемо таку таблицю

x	$\frac{\pi}{2}$	0
t	0	1

Знаходимо

$$dt = -\sin x dx.$$

Тоді

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx = -\int_1^0 t^2 dt = -\frac{t^3}{3}\bigg|_1^0 = \frac{1}{3}.$$

2) Застосовуємо підстановку $t = e^x$ або $x = \ln t$.
Тоді межі за t:

x	0	1
t	1	e

Знаходимо

$$dx = \frac{dt}{t}.$$

Отже,

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_1^e \frac{dt}{t\left(t + \frac{1}{t}\right)} = \int_0^e \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t\big|_1^e = \operatorname{arctg} e - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}.$$

3) Застосовуємо підстановку $t = x^2 + 9$.
Знайдемо межі за t:

x	0	4
t	9	25

Знаходимо

$$dt = 2xdx.$$

Отже,

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2 + 9}dx = \frac{1}{2}\int_9^{25} \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\bigg|_9^{25} = \frac{98}{3}.$$

4) Застосуємо формулу

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Тоді

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx.$$

Нехай $t = 2x$.
Тоді межі за t:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	π

Знайдемо

$$dt = 2dx.$$

Отже,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos t dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin t\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

5) Застосуємо підстановку $t = 1 + \ln x$.
Знайдемо межі за t:

x	1	e^2
t	1	3

Знаходимо

$$dt = \frac{1}{x}dx.$$

Отже,

$$\int_0^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^3 = 2\left(\sqrt{3}-1\right).$$

6) Оскільки функція $f(x) = |\sin x|$ парна, то

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

7) Оскільки функція $\sin x^3$ непарна, то

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x^3 dx = 0.$$

Звертаємо увагу, що в цьому прикладі первісна для функції $\sin x^3$ не є елементарною функцією. Тому скористатися формулою Ньютона — Лейбніца для обчислення цього інтегралу практично неможливо.

При обчисленні визначених інтегралів часто користуються формулою інтегрування частинами, яка має вигляд

$$\int_a^b u(x)dv(x) = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x). \tag{18}$$

Виведемо цю формулу. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ і мають неперервні похідні $u'(x)$ і $v'(x)$.

Знайдемо похідну добутку

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right) = u(x)\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\frac{du(x)}{dx}.$$

Тоді функція $u(x)v(x)$ є первісною для функції

$$u(x)\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\frac{du(x)}{dx}.$$

За формулою Ньютона — Лейбніца маємо таку рівність:

$$\int_a^b \left(u(x)\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\frac{du(x)}{dx} \right) dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b.$$

До інтеграла з лівої частини цієї рівності застосуємо властивість 4° визначеного інтеграла

$$\int_a^b u(x)\frac{dv(x)}{dx}dx + \int_a^b v(x)\frac{du(x)}{dx}dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b$$

або

$$\int_a^b u(x)dv(x) + \int_a^b v(x)du(x) = (u(x)v(x))\Big|_a^b.$$

Звідси випливає формула (18).

❑ **Приклад**

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$; 2) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$;

3) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x} dx$.

Розв'язання.

1) Введемо позначення $u = \arcsin x$, $dv = dx$.

Тоді

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad v = x.$$

Застосуємо формулу (18)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = x \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \int_0^{\frac{1}{2}} d\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

2) Позначимо $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = xdx$.

Тоді

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Отже,

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

3) Нехай $u = x^2$, $dv = \cos x dx$.

Тоді

$$du = 2xdx, \quad v = \sin x.$$

Отже,

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \sin x dx = -2\int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

До цього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами.
Нехай $u = x$, $dv = \sin x dx$.
Тоді

$$du = dx, \quad v = -\cos x;$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Отже,

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = -2\pi.$$

4) У цьому інтегралі застосуємо спочатку підстановку $t = \sqrt{x}$.
Тоді

$$x = t^2, \quad dx = 2tdt.$$

Дістанемо

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt.$$

До останнього інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами.
Нехай $u = t$, $dv = \sin t dt$.
Тоді

$$du = t, \quad v = -\cos t.$$

Отже, маємо

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 2\left(-t \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \right) = 2 \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Розглянемо ще приклад на застосування формули інтегрування частинами.

❑ **Приклад**

3. Обчислити інтеграл $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо заданий інтеграл

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx.$$

Нехай $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x dx$.
Тоді

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, \quad v = -\cos x.$$

Отже,

$$I_n = \sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 xdx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} xdx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx;$$

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Звідси

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{19}$$

Дістали рекурентну формулу. Знаючи інтеграл

$$J_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} xdx,$$

за допомогою цієї формули можна обчислити інтеграл I_n.

Розглянемо спочатку випадок парного $n = 2m$ ($m \geq 0$ — ціле число). Нехай $m = 0$. Тоді

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Користуючись формулою (19), знайдемо

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}.$$

Тоді

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2};$$

$$I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2}$$

і т. д. За допомогою методу індукції можна довести, що

$$I_{2m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 ... (2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6 ... 2m}\frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Так,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 xdx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{\pi}{2} = \frac{105}{256}\pi.$$

Нехай n — непарне число, $n = 2m+1$. Тоді

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

За формулою (19) знаходимо

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{1\cdot 3};$$

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5};$$

$$I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

і т. д. Скориставшись методом індукції, можна довести, що

$$I_{2m+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6 ... 2m}{1\cdot 3\cdot 5 ... (2m+1)}. \tag{21}$$

Так, за формулою (21)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} = \frac{128}{315}.$$

Користуючись формулами (20) і (21), можна вивести так звану *формулу Валліса*[1] для обчислення числа π. Ця формула має вигляд

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\cdot 4\cdot 6 ... 2n)^2}{(1\cdot 3\cdot 5 ... (2n-1))^2 (2n+1)}. \tag{22}$$

Виведемо цю формулу і знайдемо

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(1\cdot 3\cdot 5 ... (2n-1))^2 (2n+1)}{(2\cdot 4\cdot 6 ... 2n)^2} \frac{\pi}{2}$$

або

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(2\cdot 4\cdot 6 ... 2n)^2}{(1\cdot 3\cdot 5 ... (2n-1))^2 (2n+1)} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}. \tag{23}$$

Тоді

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (1 - \sin x) dx.$$

Оскільки при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ функція $0 < \sin x < 1$, то $\sin^n x(1 - \sin x) > 0$. Тому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(1 - \sin x) dx > 0.$$

Отже,

$$I_n > I_{n+1},$$

зокрема

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}.$$

Поділимо всі члени нерівностей на I_{2n+1}. Маємо

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{J_{2n-1}}{I_{2n+1}}. \tag{24}$$

[1] *Валліс Дж.* (1616—1703) — англійський математик.

Користуючись формулою (21), знаходимо

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}.$$

Тоді, перейшовши в нерівностях (24) до границі при $n \to \infty$ і врахувавши, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1,$$

маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

Тоді з формули (23) дістанемо формулу (22).

5.7 НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Невласні інтеграли з нескінченними межами. Раніше було розглянуто визначений інтеграл на скінченному відрізку $[a; b]$. Проте іноді потрібно розглядати інтеграли на нескінченних проміжках $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; +\infty)$. Зрозуміло, що безпосередньо поняття визначеного інтеграла поширити на ці випадки неможливо, не можна побудувати інтегральні суми. Тому потрібно шукати інші методи та вводити нові означення визначеного інтеграла у кожному з цих випадків.

Отже, нехай функція $f(x)$ визначена, наприклад, на проміжку $[a; +\infty)$ і нехай $f(x)$ є інтегровною на будь-якому відрізку $[a; b]$ ($b > a$ — довільне дійсне число). Тоді існує визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

який є функцією верхньої межі (a — стале число):

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Означення 7. Якщо існує границя (скінченна або нескінченна) інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ функції $F(b)$ при $b \to +\infty$, то цю границю називають *інтегралом функції* $f(x)$ від a до $+\infty$ і позначають

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{25}$$

У випадку, коли границя (25) є числом скінченним, інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають *збіжним*, а саму функцію $f(x)$ — *інтегровною на проміжку* $[a; +\infty)$.

Якщо границя (25) є невластивим числом ($+\infty$ або $-\infty$) або її зовсім не існує, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають *розбіжним*.

Інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ на відміну від розглянутого визначеного інтеграла на скінченному відрізку називають *невласним інтегралом*.

❑ **Приклад**

1. Дослідити на збіжність (розбіжність) такі інтеграли:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \neq 1$; 3) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ $(a > 0)$.

Р о з в ' я з а н н я.

1) Знайдемо визначений інтеграл

$$\int\limits_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^b = \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} b - \frac{\pi}{4}.$$

Маємо

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} b - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, заданий інтеграл збігається і дорівнює

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

2) Обчислимо визначений інтеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \int\limits_a^b x^{-\alpha} dx = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \Bigg|_a^b = \frac{1}{(1-\alpha)} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right).$$

Тоді

$$\lim_{b \to \infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{(1-\alpha)} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}, \text{ якщо } \alpha > 1; \\ \infty, \qquad\qquad \text{якщо } \alpha < 1. \end{cases}$$

Отже, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ збігається при $\alpha > 1$ і дорівнює

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}.$$

Якщо $\alpha < 1$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ розбігається.

3) Знаходимо $$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}.$$

Тоді $$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln\frac{b}{a} = +\infty.$$

Інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ розбігається.

Отже, об'єднуючи приклади 2) і 3), робимо висновок, що $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ збігається у випадку $\alpha > 1$ (функція $\frac{1}{x^\alpha}$ при цьому є інтегровною на проміжку $[a; +\infty)$ і розбігається для всіх $\alpha \le 1$).

Аналогічно визначають невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx.$

Справді, нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; b]$ і є інтегровною на будь-якому відрізку $[a; b]$, де a — довільне дійсне число. Тоді визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ є функцією нижньої межі

$$\Phi(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Означення 2. Якщо існує границя (скінченна або нескінченна) інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ (функції $\Phi(a)$) при $a \to -\infty$, то цю границю називають *інтегралом функції* $f(x)$ від $-\infty$ до b і записують

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{+\infty} f(x)dx. \qquad (26)$$

У випадку, коли границя (26) є скінченним числом, інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ називають *збіжним,* а саму функцію $f(x)$ — *інтегровною на проміжку* $(-\infty; b]$. Якщо границя (26) є невластивим числом або зовсім не існує, то інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ називають *розбіжним.*

❑ **Приклад**

2. Дослідити на збіжність (розбіжність) інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{1+x^2}.$

Р о з в ' я з а н н я. Обчислимо визначений інтеграл

$$\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_a^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} a.$$

Знайдемо

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} a\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi.$$

Отже, інтеграл $\int_{-\infty}^{b} \frac{dx}{1+x^2}$ збігається і дорівнює

$$\int_{-\infty}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3}{4}\pi.$$

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$ й інтегровна на будь-якому відрізку $[a; b]$ (a і b — довільні дійсні числа), то за означенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{27}$$

де c — довільне дійсне число.

При цьому, якщо інтеграли в правій частині рівності (27) збігаються, то інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *збіжним*. Якщо хоча б один з інтегралів правої частини рівності (27) розбігається, то невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *розбіжним*.

❑ **Приклад**

3. Дослідити на збіжність інтеграли

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Р о з в ' я з а н н я.

1) Проміжок $(-\infty; +\infty)$ розіб'ємо точкою $x=1$ на два проміжки $(-\infty; 1]$ і $[1; +\infty)$. Тоді, згідно з (27), якщо існують інтеграли

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{1+x^2},\quad \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

можна записати таку рівність:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}. \tag{28}$$

Інтеграли в правій частині рівності (28) існують. Тому існує

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

2) Згідно з рівністю (27), заданий інтеграл записуємо у вигляді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+5} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5},$$

якщо інтеграли у правій частині цієї рівності існують.

Знаходимо

$$\int_a^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_a^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Big|_a^0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a+1}{2}.$$

Тоді

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Обчислимо

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Big|_0^b = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b+1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2};$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b+1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Отже, обидва інтеграли існують. Тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+5} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Питання про збіжність (розбіжність) невласних інтегралів розв'язується за допомогою первісної функції для підінтегральної функції. Так, якщо первісна функція $F(x)$ для функції $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$, а сама функція $f(x)$ є неперервною на будь-якому відрізку $[a;b]$ (b — довільне дійсне число), то можна застосувати формулу Ньютона — Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Оскільки $F(a)$ стале число, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ існує тоді і тільки тоді, коли існує границя

$$\lim_{b\to+\infty} F(b).$$

Якщо цю границю позначити

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty),$$

то дістанемо узагальнену формулу Ньютона — Лейбніца для невласного інтеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}. \tag{29}$$

Аналогічні формули можна записати і для решти невласних інтегралів, ввівши відповідні позначення

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}, \tag{30}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}. \tag{31}$$

❑ **Приклад**

4. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$; 2) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{b} e^{px}dx,\quad p\neq 0.$

Розв'язання.

1) Знаходимо первісну функцію $F(x)$ для функції $\frac{1}{x\ln^3 x}$

$$F(x)=-\frac{1}{2\ln^2 x}.$$

Тоді

$$F(+\infty)=\lim_{b\to+\infty}F(b)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 b}\right)=0.$$

Отже,

$$\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=F(+\infty)-F\left(e^2\right)=0-\left(-\frac{1}{2\ln^2 e^2}\right)=\frac{1}{8}.$$

2) Знаходимо первісну функції $F(x)$ для підінтегральної

$$F(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}.$$

Тоді

$$\lim_{b\to+\infty}F(b)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{b^2-3}}\right)=0=F(+\infty).$$

Отже,

$$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}}=F(+\infty)-F(2)=0+\frac{1}{\sqrt{2^2-3}}=1.$$

3) Первісною функцією для e^{px} є функція

$$F(x)=\frac{1}{p}e^{px}.$$

Тоді

$$\lim_{a\to-\infty}F(a)=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{p}e^{pa}=\begin{cases}+\infty, \text{ якщо } p<0;\\ 0, \text{ якщо } p>0.\end{cases}$$

Отже, у випадку $p>0$ інтеграл збігається і дорівнює

$$\int\limits_{-\infty}^{b} e^{px}dx=F(b)-F(-\infty)=\frac{1}{p}e^{pb}.$$

У випадку $p<0$ інтеграл розбігається

$$\int\limits_{-\infty}^{b} e^{px}dx=\infty.$$

Іноді питання про збіжність (розбіжність) невласного інтеграла можна розв'язати, не знаходячи первісної для підінтегральної функції. При цьому користуються так званими *ознаками збіжності невласних інтегралів*. Розглянемо одну з таких ознак.

Теорема 1. 1) Якщо при досить великому $a>0$ функція $f(x)$ на проміжку $[a;+\infty)$ набуває додатних значень та існують числа $\alpha>1$ і $M>0$

такі, що при всіх $x \in [a; +\infty)$ справджується нерівність

$$f(x) \leq \frac{M}{x^{\alpha}}, \tag{32}$$

то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

2) Якщо для всіх $x \in [a; +\infty)$ справджується нерівність

$$f(x) \geq \frac{M}{x}, \tag{33}$$

то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Доведення. Оскільки $f(x) > 0$ для всіх $x \in [a; +\infty)$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ є монотонно зростаючою функцією при $b \to +\infty$.

Проте якщо виконується нерівність (32), то за властивістю 6° визначеного інтеграла маємо

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b \frac{M}{x^{\alpha}}dx = M\int\limits_a^b \frac{dx}{x^{\alpha}} < M\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

Інтеграл у правій частині цієї нерівності збігається при $\alpha > 1$. Тому існує

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Якщо виконується нерівність (33), то оскільки інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{Mdx}{x}$ є розбіжним, то розбіжним є й інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Теорему доведено.

Цю теорему називають ще *ознакою Коші*.

❑ **Приклад**

5. Дослідити на збіжність такі невласні інтеграли:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{2x^4 + x^3 + 2x + 1}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$; 3) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - 1}}$, $a > 1$.

Розв'язання.

1) Підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^2}{2x^4 + x^3 + 2x + 1}$ при $x \geq 1$ задовольняє нерівність

$$\frac{x^2}{2x^4 + x^3 + 2x + 1} \leq \frac{x^2}{2x^4} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2}.$$

Отже, за доведеною теоремою невласний інтеграл збігається (тут $M = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2 > 1$).

2) Підінтегральна функція

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$$

при $x \geq 1$ задовольняє нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається (тут $M=1$, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$).

3) Підінтегральна функція неперервна і додатна при $x \geq a$, причому справджується така нерівність:

$$\frac{x}{\sqrt{x^4-1}} \geq \frac{x}{\sqrt{x^4}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Отже, невласний інтеграл розбігається.

Невласні інтеграли від необмежених функцій. Відомо, що необхідною умовою інтегровності функції на відрізку $[a; b]$ є її обмеженість. Проте іноді доводиться розглядати інтеграл від функції, яка майже на всьому відрізку є обмеженою і стає необмеженою поблизу деякої точки, наприклад поблизу однієї чи обох меж. Тоді природно поширити поняття визначеного інтеграла і на такі функції, ввівши при цьому додаткові означення. Інтеграли від необмежених функцій також називають *невласними*.

Отже, нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a; b]$, крім, можливо, кінців, і є необмеженою, наприклад поблизу точки $x = a$, зокрема на відрізку $[a; a+\varepsilon]$, де $\varepsilon > 0$ — довільне як завгодно мале число. Проте нехай $f(x)$ є обмеженою й інтегровною на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon; b]$. Точку a в цьому випадку називають *особливою*.

Означення 4. Якщо існує границя (скінченна або нескінченна) визначеного інтеграла $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$, то цю границю називають *невласним інтегралом функції* $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{34}$$

Якщо границя (34) існує, то невласний інтеграл називають *збіжним*, якщо границя (34) є невластивим числом або зовсім не існує, то невласний інтеграл називають *розбіжним*.

❑ **Приклад**

6. Розглянемо інтеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$, $\alpha \neq 1$.

Тут підінтегральна функція є обмеженою й інтегровною на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon; b]$, $0 < \varepsilon < b-a$ і стає необмеженою на відрізку $[a; a+\varepsilon]$ при $\varepsilon \to 0$.

Обчислимо

$$\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}=\int_{a+\varepsilon}^{b}(x-a)^{-\alpha}\,d(x-a)=\frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}\Bigg|_{a+\varepsilon}^{b}=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right).$$

Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}}, & \text{якщо } 0<\alpha<1;\\ \infty, & \text{якщо } \alpha>1.\end{cases}$$

Отже, інтеграл при $0<\alpha<1$ збігається і дорівнює

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}=\frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}},$$

і розбігається при $\alpha>1$.

Можна довести, що цей інтеграл розбігається також і при $\alpha=1$.

Нехай функція $f(x)$ є обмеженою й інтегровною на будь-якому відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<(b-a)$, і є необмеженою на відрізку $[b-\varepsilon;b]$.

Означення 5. Границю (скінченну або нескінченну) визначеного інтеграла $\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx$ при $\varepsilon\to 0$ називають *невласним інтегралом функції* $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і записують

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx. \tag{35}$$

Якщо границя (35) є скінченним числом, то сам невласний інтеграл $\int_{a}^{b}f(x)dx$ називають *збіжним*. Якщо границя є невластивим числом або зовсім не існує, то невласний інтеграл називають *розбіжним*.

❑ **Приклад**

7. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{0}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}$ при $x\to R$ стає необмеженою. Проте вона є обмеженою й інтегровною на будь-якому відрізку $[0;R-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<R$.

Обчислюємо інтеграл

$$\int_{0}^{R-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_{0}^{R-\varepsilon}=\arcsin\left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right)-\arcsin 0=\arcsin\left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right).$$

Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{R-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right)=\arcsin\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{R-\varepsilon}{R}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

Отже,
$$\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{\pi}{2}$$
інтеграл збігається.

Як бачимо, для невласних інтегралів від необмежених функцій питання про їх збіжність (розбіжність) розв'язується за допомогою первісної функції, зокрема, якщо $F(x)$ є первісною функцією на всьому відрізку $[a;b]$ для функції $f(x)$, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається. Справді, за означенням первісної функції $F(x)$ остання є неперервною на всьому відрізку $[a;b]$, зокрема в точках a і b. Тому правостороння границя функції $F(x)$ у точці a дорівнює значенню функції в точці, тобто
$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(a+\varepsilon)=F(a).$$
Аналогічно
$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon)=F(b).$$

Отже, в цьому випадку і для невласного інтеграла справджується формула Ньютона — Лейбніца:
$$\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)=F(x)\Big|_a^b.$$

Так, у попередньому прикладі первісною функцією для функції
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}$$
на відрізку $[-R;R]$, а отже, і на відрізку $[0;R]$ є функція $F(x)=\arcsin\frac{x}{R}$, яка, як відомо, є на цьому відрізку неперервною. Тому при обчисленні інтеграла $\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$ можна користуватися формулою Ньютона — Лейбніца:
$$\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

❑ **Приклад**

8. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Поблизу точки $x=0$ підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ необмежена. Проте функція $F(x)=2\sqrt{x}$ на відрізку $[0;1]$ є первісною для підінтегральної функції. Справді, функція $2\sqrt{x}$ на відрізку $[0;1]$ неперервна, а всередині інтервалу $(0;1)$ похідна

$$\left(2\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Тому відразу застосовуємо формулу Ньютона — Лейбніца

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.$$

Іноді функція $F(x)$ може задовольняти тільки другу умову тому, що для $f(x)$ вона є первісною, а саме, всередині інтервалу $(a;b)$ від $F(x)$ існує похідна $F'(x) \equiv f(x)$. Тоді, якщо на кінцях відрізка $[a;b]$ функція $F(x)$ має граничні значення

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x>a)}} F(x) = F(a+0);$$

$$\lim_{\substack{x \to b \\ (x<b)}} F(x) = F(b-0),$$

то, припустивши

$$F(a) = F(a+0), \ F(b) = F(b+0),$$

знову дістанемо, що на відрізку $[a;b]$ $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$.

Отже, і в цьому випадку для невласного інтеграла зберігається формула Ньютона — Лейбніца.

Зауважимо, що для невласних інтегралів від необмежених функцій, так само як і для невласних інтегралів на нескінченних проміжках, існують теореми, які дають достатні ознаки збіжності (розбіжності). Зокрема, справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ у півінтервалі $(a;b]$ набуває додатних значень і нехай $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x>a)}} f(x) = \infty$. Тоді інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається, якщо існують додатні числа $0 < \alpha < 1$ і $M > 0$, такі, що для всіх $x \in (a;b]$ справджується нерівність

$$f(x) \le \frac{M}{(x-a)^\alpha}.$$

Якщо для всіх $x \in (a;b]$ існує число $\alpha \ge 1$ таке, що

$$f(x) \ge \frac{M}{(x-a)^\alpha},$$

то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається.

Д о в е д е н н я. Доведемо першу частину теореми (другу частину пропонуємо довести самостійно).

Якщо $f(x)$ на півінтервалі $(a;b]$ набуває додатних значень, то інтеграл

$$\varphi(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x),$$

будучи функцією від ε, монотонно зростає при $\varepsilon\to 0$.

З іншого боку, цей інтеграл є обмеженим зверху

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \le \int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{M}{(x-a)^{\alpha}}dx < M\int_{a}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} = M\frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}}.$$

Отже, існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Аналогічну ознаку збіжності можна було б навести і для випадку, коли функція $f(x)$ є необмеженою поблизу точки $x=b$.

❑ **Приклад**

9. Дослідити на збіжність інтеграли:

1) $\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; 2) $\int_1^2\frac{dx}{(x-1)\sqrt{\sin(x-1)}}$; 3) $\int_1^2\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{x^3-1}}dx.$

Р о з в ' я з а н н я.

1) Підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ поблизу точки $x=2$ стає необмеженою. Отже, $x=2$ — особлива точка. Для всіх $x\in(2;3]$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{\sqrt{(x-2)(x+2)}}<\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Отже, згідно з попередньою теоремою, цей інтеграл збігається (тут $\alpha=\frac{1}{2}<1$).

2) Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{(x-1)\sqrt{\sin(x-1)}}$ для всіх $1<x\le 2$ задовольняє нерівність

$$\frac{1}{(x-1)\sqrt{\sin(x-1)}}\ge\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}=\frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Інтеграл розбігається.

3) Підінтегральну функцію можна записати в такому вигляді:

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1+x+x^2}}\frac{1}{\sqrt[5]{x-1}}.$$

Помічаємо, що

$$\lim_{\substack{x\to 1\\(x>1)}} f(x)=+\infty.$$

Отже, точка $x=1$ є особливою. Далі бачимо, що для всіх $x\in(1;2]$ справджується нерівність

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1+x+x^2}}\frac{1}{\sqrt[5]{x-1}}<\frac{2}{\sqrt[5]{3}}\frac{1}{\sqrt[5]{x-1}}.$$

Отже, тут $\alpha=\frac{1}{5}<1$. Тому розглядуваний інтеграл збігається.

Наприкінці зазначимо, що може статися випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ є необмеженою в околі точки $x=c$, яка є внутрішньою точкою інтервалу $(a;b)$.

Тоді інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбивають на два інтеграли:

$$\int\limits_a^c f(x)dx \quad \text{і} \quad \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Якщо при цьому обидва інтеграли збігаються, то й заданий інтеграл збігається, і записують

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Якщо хоча б один з інтегралів у правій частині цієї рівності розбігається, то й заданий інтеграл розбігається.

❑ **Приклад**

10. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

Р о з в ' я з а н н я. При $x\to0$ підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$ необмежена. Невласні інтеграли $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$, $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ розбігаються (для кожного з них $\alpha=\frac{4}{3}>1$). Тому невласний інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ розбіжний.

Якби до заданого інтеграла формально застосували формулу Ньютона — Лейбніца, то дістали б неправильний результат

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-6$$

(формулу Ньютона — Лейбніца виведено в припущенні, що підінтегральна функція є неперервною на відрізку $[a;b]$).

5.8
НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Формула Ньютона — Лейбніца дає змогу обчислити визначений інтеграл від неперервної функції $f(x)$ у тому випадку, коли для $f(x)$ відома первісна функція $F(x)$. Проте вже відомо, що не для всякої елементарної функції $f(x)$ первісна є елементарною. Іноді вона є вищою трансцендентною функцією. Отже, в цих випадках обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ за формулою Ньютона — Лейбніца неможливо, оскільки не існує елементарної первісної функції. Тоді визначений інтеграл обчислюють наближено. І не тільки в цих випадках, а навіть і тоді, коли первісна функція $F(x)$ хоч і є елементарною, але точні числові значення її $F(a)$ та $F(b)$ обчислюються досить громіздко.

В основі наближених методів обчислення визначених інтегралів здебільшого лежить геометричний зміст інтеграла, а саме те, що інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ виражає площу криволінійної трапеції. Тому, якщо можна якимнебудь методом наближено обчислити площу криволінійної трапеції, то знайдене при цьому число береться за наближене значення відповідного визначеного інтеграла.

Формула прямокутників. Нехай маємо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ — неперервна функція на відрізку $[a;b]$.

За означенням визначений інтеграл є границею інтегральної суми

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1}-x_k);$$

$$\lambda = \max(x_{k+1}-x_k),\ 0 \le k \le n-1,$$

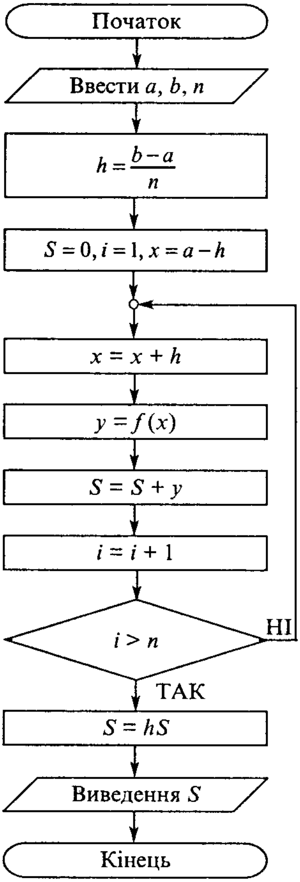
причому ця границя, якщо вона існує, не залежить ні від способу розбиття відрізка на частини, ні від вибору проміжних точок c_k $(x_k \le c_k \le x_{k+1})$. Тому для зручності відрізок $[a;b]$ розіб'ємо на n рівних частин, а за точку c_k візьмемо один із кінців відрізка $[x_k; x_{k+1}]$. Тоді довжина кожного окремого відрізка дорівнює $h = \frac{b-a}{n}$. Дістанемо такі рівності:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n\to\infty} h\left(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right);$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} h\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right).$$

Звідси випливає, що за наближене значення визначеного інтеграла можна взяти інтегральні суми, які містяться під знаком границь. Отже, маємо такі формули:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}); \tag{36}$$



Структурна схема алгоритму наближеного обчислення інтеграла методом прямокутників за формулою (37)

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + ... + y_n), \tag{37}$$

де $y_k = f(x_k), k = 0, 1, ..., n$.

Цим формулам можна дати просту геометричну інтерпретацію. Справді, нехай криволінійна трапеція, площа якої дорівнює визначеному інтегралу $\int_a^b f(x)dx$, має вигляд, зображений на рис. 76.

Тоді в правій частині формул (36) і (37) маємо суму площ прямокутників, основи яких дорівнюють h, а висоти — відповідно значенням функції у точках $x_k = kh$, $x_{k+1} = (k+1)h$, $k = 0, 1, ..., n-1$, $h = \frac{b-a}{n}$. Тому формули (36) і (37) ще називають *формулами прямокутників*, а наближене обчислення визначеного інтеграла за допомогою цих формул називають *способом прямокутників*.

❑ **Приклад**

1. Обчислити наближено за допомогою формул прямокутників визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Р о з в ' я з а н н я. Розіб'ємо відрізок $[0; 1]$ на 10 рівних частин і складемо таблицю (табл. 2).

Тоді, застосовуючи формули (36) і (37), маємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}(1,00 + 0,99 + 0,96 + 0,92 + 0,86 + 0,80 + 0,74 + 0,67 + 0,61 + 0,55) = 0,81;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}(0,99 + 0,96 + 0,92 + 0,86 + 0,80 + 0,74 + 0,67 + 0,61 + 0,55 + 0,5) = 0,76.$$

Т а б л и ц я 2

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y = \frac{1}{1+x^2}$	1,00	0,99	0,96	0,92	0,86	0,80	0,74	0,67	0,61	0,55	0,5

Проте такий інтеграл можна обчислити й за формулою Ньютона — Лейбніца

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}14159}{4} = 0{,}78539.$$

Як бачимо, наближені значення інтеграла, знайдені за допомогою формул прямокутників, відрізняються від точного значення цього інтеграла менше ніж на 0,03.

Знайдемо абсолютну похибку в наближеній формулі (36) у припущенні, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і має на цьому відрізку неперервну похідну $f'(x)$. Тоді $f'(x)$ є обмеженою на відрізку $[a; b]$: $|f'(x)| \le M$.

Запишемо формулу (36) у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

Тоді

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - f(x_k)h\right| = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))dx\right| = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(\xi_k)(x - x_k)\,dx\right| \le$$

$$\le \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(\xi_k)|(x - x_k)dx \le M\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)dx = \frac{M}{2}h^2, \quad x_k < \xi_k < x_{k+1};$$

$$h = \frac{b-a}{n}; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Згідно з цими нерівностями, отримуємо

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))dx\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))dx\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{2}h^2 = \frac{Mh^2}{2}n = \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

Отже, абсолютна похибка Δ у наближеній рівності (36) оцінюється за формулою

$$\Delta \le \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

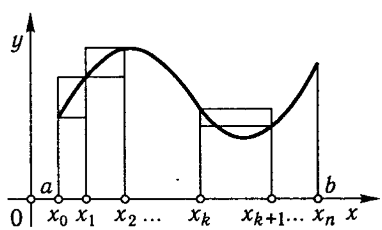


Рис. 76

Формула трапецій. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n рівних частин точками $x_k = kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$; $h = \dfrac{b-a}{n}$ і кожну окрему

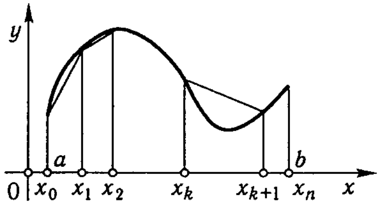


Рис. 77

криволінійну трапецію замінимо звичайною трапецією (рис. 77). Тоді площа кожної такої трапеції, як відомо, дорівнює $\frac{y_k + y_{k+1}}{2}h$, $k = 0, 1, ..., n-1$.

Взявши суму площ цих трапецій, дістанемо таку наближену формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}\right). \quad (38)$$

Оскільки при $f(x) \geq 0$ права частина формули (38) виражає суму площ трапецій, то цю формулу називають *формулою трапецій*. Обчислення визначеного інтеграла за допомогою цієї формули називають *методом трапецій.*

❑ **Приклади**

2. Обчислити методом трапецій визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Р о з в ' я з а н н я. Розіб'ємо відрізок [0; 1] на 10 рівних частин. Тоді за формулою (38) матимемо

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1+0,5}{2} + 0,99 + 0,96 + 0,92 + 0,86 + 0,80 + 0,76 + 0,67 + 0,61 + 0,55\right) = 0,782.$$

Отже, користуючись методом трапецій дістали дві правильні цифри після коми, тоді як методом прямокутників — тільки одну.

3. Обчислити методом прямокутників і методом трапецій інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

Р о з в ' я з а н н я. Як і в попередньому прикладі, розіб'ємо відрізок [0; 1] на 10 рівних частин. Обчислюватимемо до чотирьох знаків після коми.

Складемо таблицю (табл. 3).

Тоді за формулою прямокутників маємо

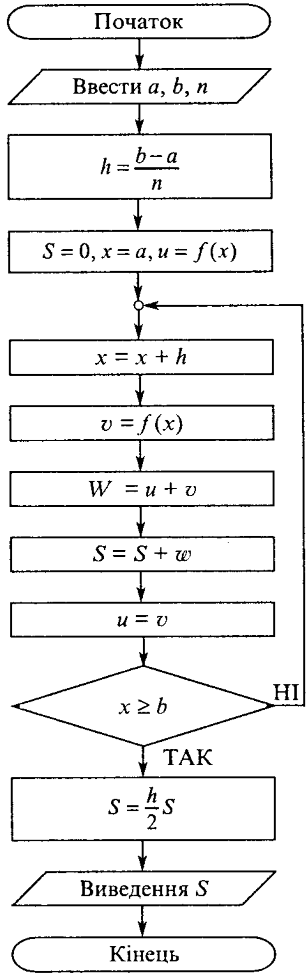
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{10}(1,0000 + 0,9091 + 0,8333 + 0,7692 + 0,7143 + 0,6667 +$$

$$+ 0,6250 + 0,5882 + 0,5556 + 0,5263) \approx 0,7188 \text{ (за формулою (36))};$$

Т а б л и ц я 3

x_k	$y_k = \frac{1}{1+x_k}$	x_k	$y_k = \frac{1}{1+x_k}$
0,0000	1,0000	0,6000	0,6250
0,1000	0,9091	0,7000	0,5882
0,2000	0,8333	0,8000	0,5556
0,3000	0,7692	0,9000	0,5263
0,4000	0,7143	1,0000	0,5000
0,5000	0,667		

Структурна схема алгоритму наближеного обчислення інтеграла методом трапецій за формулою (38)



$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}\approx\frac{1}{10}(0{,}9091+0{,}8333+0{,}7692+0{,}7143+0{,}6667+$$

$$+0{,}6250+0{,}5882+0{,}5556+0{,}5263+0{,}5000)\approx 0{,}6688$$

(за формулою (37)).

За формулою трапецій

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}\approx\frac{1}{10}\left(\frac{1{,}000+0{,}5000}{2}+0{,}9091+0{,}8333+\right.$$

$$+0{,}7692+0{,}7143+0{,}6667+0{,}6250+$$

$$\left.+0{,}5882+0{,}5556+0{,}5263\right)=0{,}6938.$$

Зауважимо, що обчислюючи цей інтеграл за формулою Ньютона — Лейбніца, дістанемо

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2\approx 0{,}69315.$$

Отже, за формулою трапецій дістали три правильні цифри після коми.

Проте зрозуміло, що в розглянутих прикладах можна оцінити похибку завдяки тому, що відоме точне значення визначеного інтеграла, а як оцінити похибку, якщо точне значення визначеного інтеграла невідоме, розглянемо далі.

Оцінка похибки методу трапецій. Розглянемо формулу трапецій при $n=1$, тобто той випадок, коли відрізок $[a;b]$ не поділяється на частини, а криволінійна трапеція замінюється однією прямокутною трапецією.

Тоді від наближеної формули трапецій можна перейти до точної формули, ввівши деякий додатковий член ρ:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\rho. \qquad (39)$$

Потрібно знайти такий вираз для ρ, щоб його можна було оцінити за модулем, оскільки ρ — і є похибкою за методом трапецій, якщо $n=1$.

Припустимо, що $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ має неперервні похідні до другого порядку включно. Тоді інтеграл можна записати так:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)d(x-a).$$

Застосувавши формулу інтегрування частинами, матимемо

$$\int_a^b f(x)dx = f(x)(x-a)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)(x-a)d(x-b) =$$

$$= f(b)(b-a) - \int_a^b f'(x)(x-a)d(x-b).$$

До інтеграла, що міститься в правій частині, знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx = f(b)(b-a) - f'(x)(x-a)(x-b)\Big|_a^b +$$

$$+ \int_a^b (x-b)d\left(f'(x)(x-a)\right) =$$

$$= f(b)(b-a) + \int_a^b (x-b)f'(x)dx + \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx =$$

$$= f(b)(b-a) + (x-b)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(f(a)+f(b)\right)(b-a) + \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx - \int_a^b f(x)dx.$$

У правій частині цієї рівності є такий самий інтеграл, як і в лівій, тільки з протилежним знаком. Тому, перенісши його в ліву частину, матимемо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx. \tag{40}$$

Порівнюючи формули (39) і (40), знаходимо

$$\rho = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx.$$

Застосуємо до цього інтеграла теорему 2 про середнє значення. Це можна зробити, оскільки $f''(x)$ неперервна, а функція $g(x) = (x-a)(x-b)$ не змінює знак на відрізку $[a; b]$.

Отже,

$$\rho=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx=$$

$$=\frac{1}{2}f''(c)\int_a^b\left(x^2-(a+b)x+ab\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}f''(c)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{(a+b)x^2}{2}+abx\right)\Bigg|_a^b=-\frac{f''(c)(b-a)^3}{12},$$

де $a<c<b$.

Якщо відрізок $[a;b]$ розбити на n рівних частин, то для кожного відрізка $[x_k;x_{k+1}]$ матимемо таку рівність:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx=\frac{b-a}{n}\frac{y_k+y_{k+1}}{2}-\frac{(b-a)^3}{12n^3}f''(c_k);$$

$$x_k<c_k<x_{k+1},\quad k=0,1,...,\quad n-1.$$

Додавши почленно n рівностей, дістанемо

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_1}{2}+y_1+y_2+...+y_n\right)-$$

$$-\frac{(b-a)^3}{12n^2}\frac{f''(c_0)+...+f''(c_{n-1})}{n}.$$

Введемо позначення

$$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}\frac{f''(c_0)+f''(c_1)+...+f''(c_{n-1})}{n}.$$

Оскільки $f''(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона на цьому відрізку набуває свого найбільшого значення M і найменшого m:

$$m\le f''(x)\le M.$$

Тоді

$$m\le\frac{f''(c_0)+f''(c_1)+...+f''(c_{n-1})}{n}\le M.$$

Отже, на інтервалі $(a;b)$ знайдеться така точка ξ, що

$$f''(\xi)=\frac{f''(c_0)+f''(c_1)+...+f''(c_{n-1})}{n}.$$

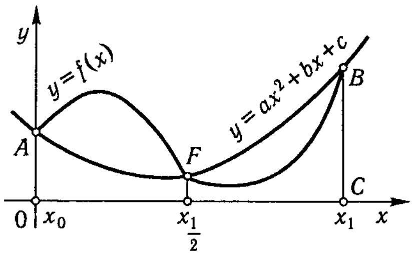


Рис. 78

Тоді для похибки R_n маємо такий вираз:

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \ a < \xi < b.$$

І, нарешті, оскільки $f''(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона на цьому відрізку є обмеженою

$$|f''(x)| \le \overline{M}.$$

Тому остаточно дістаємо таку оцінку для абсолютної похибки методу трапецій:

$$|R_n| = \le \frac{(b-a)^3 \overline{M}}{12n^2}. \tag{41}$$

❑ **Приклад**

4. Оцінити за формулою (41) похибку для інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

Тут

$$f(x) = \frac{1}{1+x}; \ f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Тоді при $x \in [0; 1]$

$$|f''(x)| = \frac{2}{(1+x)^3} \le 2.$$

Отже,

$$|R_n| \le \frac{2}{12 \cdot 10^2} \approx 0{,}0017.$$

Параболічна формула Сімпсона[1]**.** При виведенні формули трапецій в криву, що є графіком функції $f(x)$, вписували ламану і таким чином криву замінювали ламаною. Проте, щоб дістати точніший результат, на практиці криву, що є графіком функції $f(x)$, замінюють іншою кривою, наприклад параболою $y = ax^2 + bx + c$. У результаті дістають нову наближену формулу обчислення визначеного інтеграла.

Отже, нехай маємо криволінійну трапецію (рис. 78) $OABC$ (для простоти замість відрізка $[a; b]$ взяли відрізок $[0; h]$).

Поділимо відрізок $[0; h]$ точкою $x_{\frac{1}{2}}$ навпіл. Крайні точки при цьому позначимо через x_0 і x_1. Нехай F — точка на кривій з абсцисою $x_{\frac{1}{2}}$.

[1] *Сімпсон Т.* (1710—1761) — англійський математик.

Можна довести, що через три точки A, F і B, взяті на кривій, можна провести одну і тільки одну параболу $y = ax^2 + bx + c$ із вертикальною віссю симетрії.

Тоді замість обчислення площі криволінійної трапеції, обчислюватимемо площу P фігури, яка зверху обмежена дугою параболи, тобто обчислимо інтеграл

$$P = \int_0^h \left(ax^2 + bx + c\right)dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + cx\right)\Bigg|_0^h =$$

$$= a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch = \frac{h}{6}\left(2ah^2 + bh + 6c\right).$$

Якщо координати точок A, F, B позначити відповідно через (x_0, y_0), $\left(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}\right)$, (x_1, y_1), то можна довести, що

$$2ah^2 + 3bh + 6c = y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + y_1.$$

Тоді

$$P = \frac{h}{6}\left(y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + y_1\right).$$

Прийнявши число P за наближене значення визначеного інтеграла, дістаємо таку наближену формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + y_1\right).$$

Якщо відрізок $[a; b]$ поділити на n рівних частин і криволінійну трапецію $OABC$ — на n окремих криволінійних трапецій (смужок), то до кожної трапеції можна застосувати попередню формулу. Матимемо

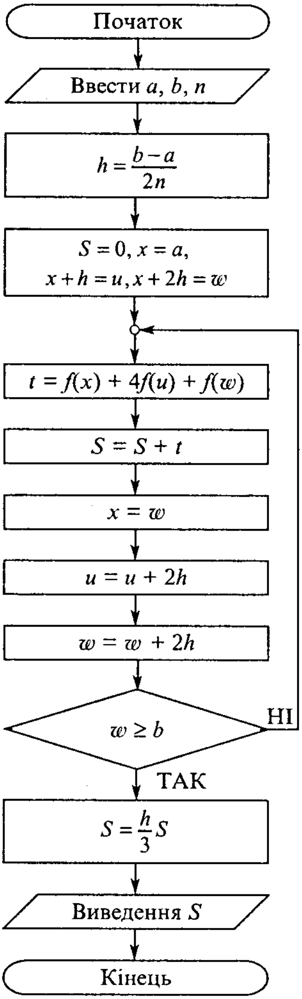
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{6n}\left(y_k + 4y_{k+1} + y_{k+1}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots,\ n-1.$$

Тоді, додавши почленно ці наближені рівності, дістанемо таку формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\Bigg(\left(y_0 + y_n\right) + 4\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \ldots + y_{n-\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ 2\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)\Bigg). \tag{42}$$



Структурна схема алгоритму наближеного обчислення інтеграла методом Сімпсона за формулою (42)

Цю формулу називають *параболічною формулою Сімпсона.* За наближеного обчислення визначеного інтеграла нею користуються найчастіше.

Можна було б вивести оцінку для абсолютної похибки при застосуванні параболічної формули. Не виводячи цієї формули, зазначимо тільки, що коли $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ має неперервні похідні до четвертого порядку включно, то

$$|R_n(x)| \leq \frac{h^5}{180(2n)^4}|f''(c)|, \quad a < c < b.$$

Приклади

5. Користуючись формулою Сімпсона, обчислити наближено визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Таблиця 4

x		y	
x_0	0	y_0	1
$x_{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$4y_{\frac{1}{2}}$	3,76471
x_1	$\frac{1}{2}$	$2y_1$	1,6
$x_{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{4}$	$4y_{\frac{3}{2}}$	2,56
x_2	1	y_2	0,5

Розв'язання. Зазначимо, що при користуванні формулою Сімпсона основний відрізок $[a;b]$ потрібно поділити на $2n$ частин (кожен із n окремих відрізків ще розбивається навпіл).

Нехай $2n = 4$. Тоді складемо таблицю (табл. 4). Отримаємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{12}(1 + 3,76471 + 1,6 + 2,56 + 0,5) = 0,78539\ldots.$$

Усі п'ять знаків точні (див. точне значення цього інтеграла).

Таблиця 5

x	x_0	$x_{\frac{1}{2}}$	x_1	$x_{\frac{3}{2}}$	x_2	$x_{\frac{5}{2}}$	x_3
	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,6

6. Користуючись формулою Сімпсона, обчислити наближено визначений інтеграл $\int\limits_{1,05}^{1,35} f(x)dx$, якщо підінтегральна функція задана таблицею (табл. 5).

Розв'язання. Легко бачити, що відрізок $[1,05; 1,35]$ розбито тут на 6 частин $(n=3)$.

Отже,

$$\int\limits_{1,05}^{1,35} f(x)dx \approx \frac{0,3}{6\cdot 3}(2,36+4,6+4(2,50+3,04+3,98)+2(2,74+3,46)) \approx 0,95.$$

5.9 ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Випадок декартової системи координат. Як уже йшлося, одна із задач, що привели до поняття визначеного інтеграла, це задача про обчислення площі криволінійної трапеції. Отже, якщо маємо фігуру $aABb$ (рис. 79), де криву задано рівнянням $y=f(x)$ і функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ є неперервною і набуває додатних значень, то площа P такої фігури (плоскої області) існує

$$P=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b ydx. \tag{43}$$

Якщо рівняння кривої в декартовій системі координат задано рівнянням $x=\varphi(y)$, де функція $\varphi(y)$, задана на відрізку $[c;k]$, є неперервною і набуває на цьому відрізку додатних значень, то площа такої фігури (рис. 80) дорівнюватиме

$$P=\int\limits_c^k \varphi(y)dy=\int\limits_c^k xdy. \tag{44}$$

Наприклад, площа фігури, зображеної на рис. 81,

$$P=\int\limits_0^1 xdy=\int\limits_0^1 y^2dy=\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}.$$

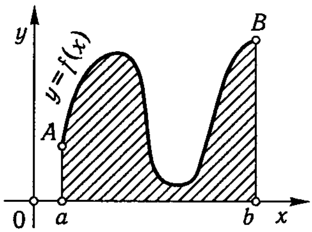


Рис. 79

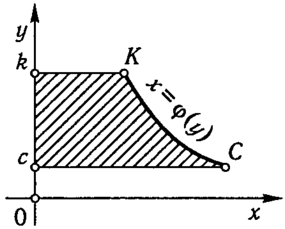


Рис. 80

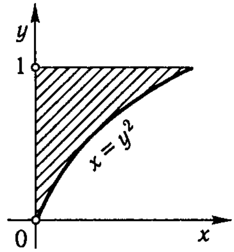


Рис. 81

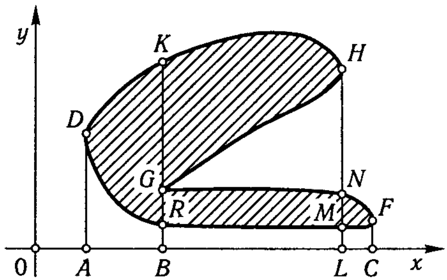


Рис. 82

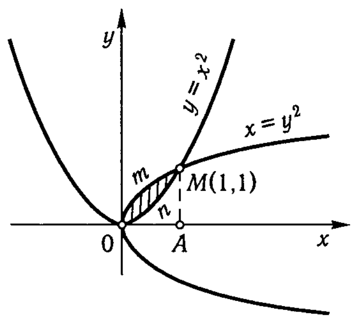


Рис. 83

Часто буває, що фігура, площу якої потрібно обчислити, не є криволінійною трапецією. Проте таку фігуру можна прямими, паралельними осі Oy (Ox), розбити на скінченну суму (різницю) криволінійних трапецій. Тоді площа фігури дорівнюватиме сумі (різниці) площ утворених криволінійних трапецій. Так, фігура $DKHGNFD$, зображена на рис. 82, не є криволінійною трапецією, але прямими BK і LH її можна розбити на частини так, що площа дорівнюватиме алгебраїчній сумі площ фігур, кожна з яких є криволінійною трапецією

$$\text{пл.}\, DKHGNFD = \text{пл.}\, ADKB - \text{пл.}\, ADRB +$$

$$+\text{пл.}\, BKHL + \text{пл.}\, BGHL + \text{пл.}\, BGML -$$

$$- \text{пл.}\, BRML + \text{пл.}\, LNFC - \text{пл.}\, LMFC.$$

❑ **Приклад**

1. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої кривими $y = x^2$ і $x = y^2$.

Розв'язання. Побудуємо ці криві (рис. 83). Шукана площа є різницею площ криволінійних трапецій

$$\text{пл.}\, OmMA - \text{пл.}\, OnMA;$$

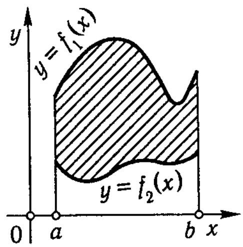


Рис. 84

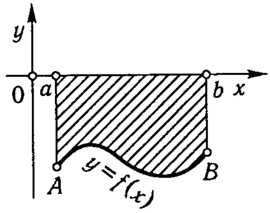


Рис. 85

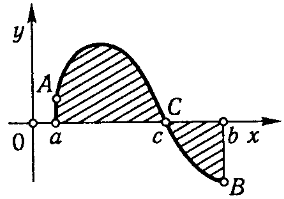


Рис. 86

$$\text{пл.}\, OmMA = \int_0^1 \sqrt{x}dx;$$

$$\text{пл.}\, OnMA = \int_0^1 x^2 dx.$$

Шукана площа дорівнює

$$P = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

У загальному випадку, коли фігура обмежена зверху і знизу кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ (рис. 84), де $f_1(x)$ і $f_2(x)$ — неперервні функції на відрізку $[a; b]$, які набувають додатних значень, то площа P такої фігури виражається формулою

$$P = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx. \tag{45}$$

Може статися так, що функція $f(x)$ для всіх $x \in [a; b]$ набуває тільки від'ємних значень. Тоді крива, задана рівнянням $y = f(x)$, розміщена під віссю Ox (рис. 85). У цьому випадку за площу P фігури $aABb$ природно взяти додатне число

$$P = -\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b ydx. \tag{46}$$

Формули (43) і (46) можна записати у вигляді однієї формули

$$P = \int_a^b |y|dx.$$

Аналогічно й формулу (45) запишемо так:

$$P = \int_a^b |y_1 - y_2|dx. \tag{47}$$

Якщо функцію задано на відрізку $[a;b]$, але на відрізку $[a;c]$ вона набуває додатних значень, а на відрізку $[c;b]$ — від'ємних, і при $x \in [a;b]$ функція $f(x)$ є неперервною, то площа P фігури $aACBb$ (рис. 86) дорівнює

$$P = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx. \tag{48}$$

❑ **Приклади**

2. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = 6x - x^2$ і віссю Ox.

Розв'язання. Рівняння параболи можна записати ще так:

$$y = -(x-3)^2 + 9.$$

Отже, вершина цієї параболи знаходиться в точці $M(3;9)$ і парабола має вигляд, зображений на рис. 87.

Заштрихована фігура є криволінійною трапецією, її площа дорівнює

$$P = \int_0^6 ydx = \int_0^6 \left(6x - x^2\right)dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^6 = 3 \cdot 36 - 72 = 36.$$

3. Знайти площу фігури, обмеженої ланцюговою лінією

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

віссю Ox і прямими $x = 0$, $x = a$.

Розв'язання. Фігура, площу якої потрібно знайти, є криволінійною трапецією і має вигляд, зображений на рис. 88.

Тоді

$$P = \int_0^a ydx = \int_0^a \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a}{2}\left(\int_0^a e^{\frac{x}{a}}dx + \int_0^a e^{-\frac{x}{a}}dx\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^a e^{\frac{x}{a}}d\left(\frac{x}{2}\right) + \int_0^a e^{-\frac{x}{a}}d\left(-\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^2\left(e^2 - 1\right)}{2e}.$$

4. Знайти площу фігури, обмеженої колом $x^2 + y^2 = 4x$ і параболою $y^2 = 2x$.

Розв'язання. Оскільки задана фігура (на рис. 89 її заштриховано) складається з двох однакових фігур, одна з яких розміщена над віссю Ox, а інша — під віссю Ox, то шукана площа, за формулою (45), дорівнює

$$P = 2\int_0^2 \left(\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x}\right)dx = 2\left(\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}dx - \int_0^2 \sqrt{2x}dx\right) =$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}dx - 2\sqrt{2}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = 2\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}dx - \frac{16}{3}. \tag{49}$$

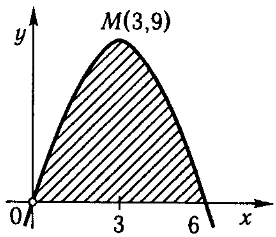


Рис. 87

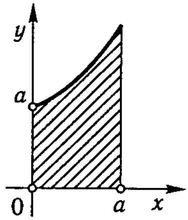


Рис. 88

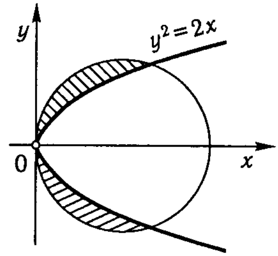


Рис. 89

Перший інтеграл обчислимо окремо. Застосуємо метод підстановки.
Нехай $x = 2 + 2\sin t$, $dx = 2\cos t dt$.
Знаходимо межі за t:

x	0	2
t	$-\frac{\pi}{2}$	0

Тоді

$$\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}dx = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 t dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 + \cos 2t)dt = 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \pi.$$

Отже, згідно з (49),

$$P = 2\pi - \frac{16}{3} = \frac{6\pi - 16}{3}.$$

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x + 1$, $y = \cos x$ і віссю Ox (рис. 90).

Р о з в ' я з а н н я. Функція

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ якщо } -1 \le x \le 0; \\ \cos x, \text{ якщо } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

є неперервною на відрізку $\left[-1; \frac{\pi}{2}\right]$. Отже, задана фігура є квадровною і її площа

$$P = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-1}^{\pi} (x + 1)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{3}{2}.$$

6. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ та її асимптотою.

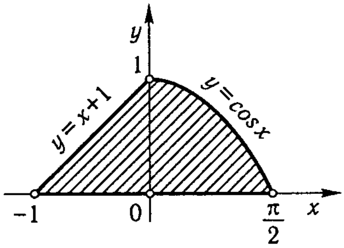


Рис. 90

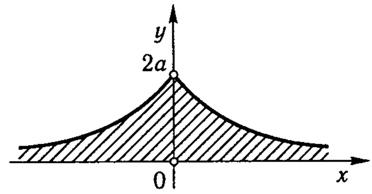


Рис. 91

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо рівняння асимптоти

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{8a^3}{x\left(x^2+4a^2\right)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{8a^3}{x^2+4a^2}=0.$$

Отже, пряма $y=0$ (вісь Ox) є асимптотою. Вертикальних асимптот немає (функція y є неперервною).

Фігура, площу якої потрібно знайти, є необмеженою областю (рис. 91), симетричною відносно осі Oy.

Природно за площу такої фігури взяти невласний інтеграл

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{8a^3}{x^2+4a^2}dx.$$

У цьому випадку невласний інтеграл існує і

$$P=2\int_0^{+\infty}\frac{8a^3}{x^2+4a^2}dx=8a^2\operatorname{arctg}\frac{x}{2a}\bigg|_0^{+\infty}=8a^2\frac{\pi}{2}=4\pi a^2.$$

Параметричне задання кривої. Розглянемо випадок, коли крива, що обмежує криволінійну трапецію зверху, задана параметричними рівняннями

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ \alpha\le t\le\beta,$$

де $x(t),\ y(t)$ — неперервні функції і мають неперервні похідні $x'(t)$ і $y'(t)$ на відрізку $[\alpha;\,\beta]$.

Тоді, якщо $\varphi(t)$ є монотонною і $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b,$ то для обчислення площі криволінійної трапеції достатньо у визначеному інтегралі (43) зробити заміну змінних: $y=y(t),\ \ dx=x'(t)dt.$ Дістанемо таку формулу:

$$P=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt. \tag{50}$$

❑ Приклади

7. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо параметричне рівняння еліпса: $x = a\cos t$; $y = b\sin t$; $0 \le t \le 2\pi$.

Еліпс — це лінія, симетрична відносно обох координатних осей, тому шукана площа дорівнює

$$P = 4\int_0^a y dx$$

або, використавши формулу (50), маємо

$$P = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 4ab\frac{\pi}{4} = \pi ab.$$

Звідси, якщо $b = a = R$, то матимемо формулу для площі круга радіуса R:

$$P = \pi R^2.$$

8. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю Ox і однією дугою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Р о з в ' я з а н н я. Використавши формулу (50), матимемо

$$P = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt = a^2(t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{1}{2}a^2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Задання кривої в полярних координатах. Розглянемо випадок, коли крива, що обмежує зверху криволінійну трапецію, задана рівнянням у полярних координатах

$$\rho = \rho(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta.$$

Нехай така фігура має вигляд, зображений на рис. 92, тобто вона обмежена кривою AB, рівняння якої $\rho = \rho(\theta)$, і двома півпроменями OA і OB, рівняннями яких є $\theta = \alpha$ і $\theta = \beta$. Таку фігуру називають *криволінійним сектором.*

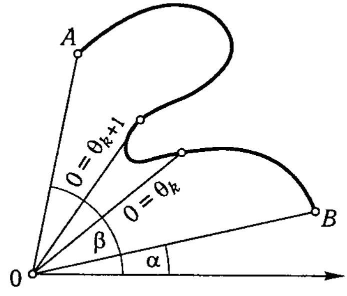


Рис. 92

Припустимо, що функція $\rho(\theta)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ є неперервною. Розіб'ємо відрізок $[\alpha; \beta]$ на n довільних частин точками

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_k < \theta_{k+1} \cdots < \theta_n = \beta.$$

Тоді функція $\rho(\theta)$, будучи неперервною на кожному з відрізків $[\theta_k; \theta_{k+1}]$, набуває на них своїх найменшого і найбільшого значень. Позначимо ці числа відповідно m_k і M_k.

Побудуємо кругові сектори з радіусами m_k і M_k. Площа їх дорівнює

$$\frac{1}{2}m_k^2(\theta_{k+1}-\theta_k), \quad \frac{1}{2}M_k^2(\theta_{k+1}-\theta_k).$$

Позначимо суму площ цих секторів відповідно через

$$\underline{S}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}m_k^2(\theta_{k+1}-\theta_k);$$

$$\overline{S}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}M_k^2(\theta_{k+1}-\theta_k).$$

Як бачимо, $\underline{S}$ і $\overline{S}$ є сумами Дарбу, побудованими на відрізку $[\alpha; \beta]$ для неперервної функції $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$.

Тоді, якщо разом із цими сумами розглянути інтегральну суму

$$\sigma=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\rho^2(c_k)\Delta\theta_k,$$

де $\Delta\theta_k=\theta_{k+1}-\theta_k, \theta_k \le c_k \le \theta_{k+1}$, то ці суми внаслідок неперервності функції $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ при $\lambda=\max\Delta\theta_k \to 0$ мають однакові границі

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}=\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)d\theta.$$

Отже, дістанемо таку формулу для площі криволінійної трапеції:

$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)d\theta. \tag{51}$$

❑ **Приклади**

9. Обчислити площу круга радіуса R.

Розв'язання. Візьмемо за полюс центр кола. Тоді рівняння кола за такого вибору системи координат має вигляд

$$\rho=R, \quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

Отже, скориставшись формулою (51), матимемо

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}R^2d\theta=\frac{1}{2}R^2\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{2}R^2\,\theta\Big|_0^{2\pi}=\pi R^2.$$

10. Знайти площу фігури, яка вирізана з кардіоїди $\rho = 1 + \cos\theta$ колом $\rho = \sqrt{3}\sin\theta$ (на рис. 93 цю фігуру заштриховано).

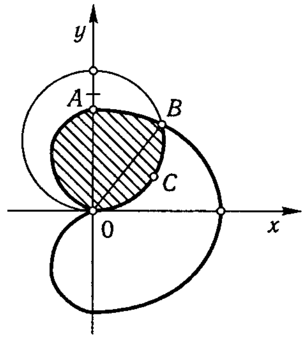


Рис. 93

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо координати точок перетину цих кривих. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3}\sin\theta, \\ \rho = 1 + \cos\theta, \end{cases} \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Звідси

$$1 + \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 0.$$

Це рівняння можна записати ще так:

$$\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} - 2\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0$$

або

$$\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\right) = 0.$$

Отже,

$$\cos\frac{\theta}{2} = 0, \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \pi,$$

$$1 - \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2} = 0, \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Згідно з рис. 93, фігура, пощу якої потрібно знайти, складається з двох фігур: *OCBO* і *OBAO*. У першому випадку кінець радіуса-вектора лежить на колі, у другому — на кардіоїді.

Шукана площа

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{3}\sin\theta\right)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1 + \cos\theta)^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)d\theta =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1 - \cos 2\theta)d\theta + \frac{1}{2}(\theta + 2\sin\theta)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1 + \cos 2\theta)d\theta =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(\pi - \sqrt{3}\right).$$

5.10 ДОВЖИНА ДУГИ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ

У шкільному курсі геометрії питання про довжину дуги розглядається тільки для однієї плоскої кривої — для кола. При цьому процес «вимірювання» довжини кола відмінний від процесу вимірювання прямолінійних відрізків. І це природно. Адже жоден прямолінійний відрізок не може бути суміщений з частиною дуги кола. Це стосується й довільної кривої.

Тому, так само, як і при знаходженні довжини кола, при знаходженні довжини кривої застосовуватимемо граничний перехід.

Для цього спочатку дамо означення довжини плоскої кривої, а потім виведемо формулу для її обчислення.

Нехай плоска крива AB (рис. 94) задана, наприклад, параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \tag{52}$$

де $x(t)$, $y(t)$ — неперервні функції на відрізку $[\alpha; \beta]$, причому точка A відповідає значенню параметра $t = \alpha$, а точка B — значенню параметра $t = \beta$.

Розіб'ємо відрізок $[\alpha; \beta]$ на n довільних частин точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_n = \beta.$$

Сукупність точок $t_0, t_1, \ldots, t_n$ називатимемо T-розбиттям відрізка $[\alpha; \beta]$. Тоді кожному значенню параметра $t = t_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ на кривій AB відповідатиме точка M_k. Сполучимо ці точки відрізками прямої. В результаті в криву AB буде вписано ламану, периметр якої позначимо через

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{M_k M_{k+1}}.$$

Зрозуміло, що периметр P залежить від T-розбиття:

$$P = P(T).$$

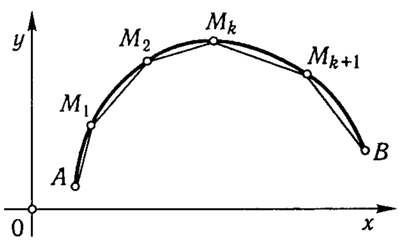


Рис. 94

Найбільшу довжину частинного відрізка $[t_k; t_{k+1}]$ позначимо через $\lambda(T) = \max(t_{k+1} - t_k)$. Тоді, якщо $\lambda(T) \to 0$, то внаслідок неперервності функцій $x(t), y(t)$ найбільша сторона ламаної також наближатиметься до нуля.

Означення. Число S називають *границею периметра* $P = P(T)$ ламаної, вписаної в криву AB при $\lambda(T) \to 0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, яке не залежить від T-розбиття і таке, що як тільки $\lambda(T) < \delta$, то

$$|P(T) - S| < \varepsilon$$

і позначається

$$S = \lim_{\lambda(T)\to 0} P(T). \tag{53}$$

Означення. Якщо існує границя периметра ламаної, вписаної в криву AB при $\lambda(T) \to 0$, то криву AB називають *спрямлюваною*, а саму границю (число S) — *довжиною дуги.*

Зауважимо, що це означення стосується незамкнених кривих (точка A не збігається з точкою B). Випадок замкнених кривих розглядатимемо окремо.

Теорема. Якщо функції $x(t)$, $y(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$ і мають на ньому неперервні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, то крива, задана рівняннями (52), є спрямлюваною і її довжина

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt. \tag{54}$$

Доведення. Розглянемо довільне T-розбиття відрізка $[\alpha;\beta]$. Знайдемо значення периметра $P(T)$ для цього розбиття

$$P(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{M_k M_{k+1}}.$$

Нехай точки M_k, M_{k+1} мають відповідно координати

$$x_k = x(t_k),\ y_k = y(t_k);$$

$$x_{k+1} = x(t_{k+1}),\ y_{k+1} = y(t_{k+1}).$$

Тоді, як відомо, довжина сторони $\overline{M_k M_{k+1}}$

$$\overline{M_k M_{k+1}} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} =$$

$$= \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2}.$$

Оскільки $x(t)$ і $y(t)$ є диференційовними функціями на кожному відрізку $[t_k;\, t_{k+1}]$, то до різниць $x(t_{k+1}) - x(t_k)$ і $y(t_{k+1}) - y(t_k)$ можна застосувати формулу Лагранжа про скінченний приріст. Тоді

$$\overline{M_k M_{k+1}} = \sqrt{x'^2(\tau_k) + y'^2(\tau'_k)}(t_{k+1} - t_k),$$

де точки τ_k, τ'_k знаходяться всередині інтервалу $(t_k; t_{k+1})$.

Тому

$$P(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x'^2(\tau_k) + y'^2(\tau'_k)}\Delta t_k, \quad \text{де } \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Якби функції $x'(t)$ і $y'(t)$ бралися в одній точці τ_k або τ'_k, то в правій частині останньої рівності мали б інтегральну суму, побудовану для неперервної функції

$$f(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$$

на відрізку $[\alpha; \beta]$. Границя такої суми при $\lambda \to 0$ існувала б і дорівнювала визначеному інтегралу (54). Тому введемо в розгляд інтегральну суму

$$\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x'^2(\tau_k) + y'^2(\tau_k)}\Delta t_k$$

і знайдемо модуль різниці

$$|P(T) - \sigma(T)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x'^2(\tau_k) + y'^2(\tau'_k)} - \sqrt{x'^2(\tau_k) + y'^2(\tau_k)} \right| \Delta t_k \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sqrt{x'^2(\tau_k) + y'^2(\tau'_k)} - \sqrt{x'^2(\tau_k) + y'^2(\tau_k)} \right| \Delta t_k.$$

Скориставшись елементарною нерівністю

$$\left| \sqrt{a^2 + b_1^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \right| \le |b_1 - b|$$

(пропонуємо цю нерівність довести самостійно), маємо

$$|P(T) - \sigma(T)| \le \sum_{k=0}^{n-1} |y'(\tau'_k) - y'(\tau_k)| \Delta t_k.$$

Оскільки функція $y'(t)$ неперервна на відрізку $[\alpha; \beta]$, то вона рівномірно неперервна на ньому. Тому для числа $\frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$ $(\varepsilon > 0)$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що як тільки $|t' - t''| < \delta$, то

$$|y'(t') - y'(t'')| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha},$$

де t', t'' — довільні точки відрізка $[\alpha; \beta]$.

Отже, братимемо таке T-розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$, щоб $\lambda(T) < \delta$. Тоді $|\tau_k - \tau'_k| < \delta$.

Тому

$$|y'(\tau_k) - y'(\tau'_k)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}.$$

Отже,

$$|P(T) - \sigma(T)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}(\beta - \alpha) = \varepsilon.$$

Остання нерівність доводить, що існує границя

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} |P(T) - \sigma(T)| = 0.$$

Унаслідок того, що

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(T) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

($\sigma(T)$ — інтегральна сума для підінтегральної функції), то й

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} P(T) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Теорему доведено.

Розглянемо випадок, коли крива AB задана в прямокутних декартових координатах. Нехай крива AB задана рівнянням $y = f(x)$, де функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$. Тоді, якщо $f(x)$ неперервна і має неперервну похідну $f'(x)$ на відрізку $[a; b]$, то крива AB є спрямлюваною і її довжина дорівнює

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{55}$$

Справді, поклавши $x = t$, матимемо параметричне задання кривої

$$x = t, \ y = f(t), \ a \le t \le b,$$

причому функції $x(t)$, $y(t) = f(t)$ неперервні й мають неперервні похідні $x'(t)$, $y'(t) = f'(t)$ на відрізку $[a; b]$. Тому, підставивши у формулу (54) значення $x'^2(t)$, $y'^2(t)$, дістанемо формулу (55).

Якщо крива задана в полярній системі координат рівнянням

$$\rho=\rho(\theta),\ \ \alpha\le\theta\le\beta,$$

і $\rho(\theta)$ є неперервною і має неперервну похідну $\rho'(\theta)$ на відрізку $[\alpha;\ \beta]$, то крива є спрямлюваною і її довжина дорівнює

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta. \tag{56}$$

Це саме так, оскільки, скориставшись формулами

$$x=\rho(\theta)\cos\theta,\ \ y=\rho(\theta)\sin\theta,$$

знайдемо

$$x'^2(\theta)+y'^2(\theta)=\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta).$$

Підставивши значення $x'^2(\theta)+y'^2(\theta)$ у формулу (54), дістанемо формулу (56).

❑ **Приклади**

1. Обчислити довжину однієї вітки циклоїди

$$x=a(t-\sin t);\ \ y=a(1-\cos t),\ \ 0\le t\le 2\pi.$$

Р о з в ' я з а н н я. Користуватимемося формулою (54). Для цього знайдемо

$$x'=a(1-\cos t),\ \ y'=a\sin t;$$

$$x'^2(t)+y'^2(t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Тоді

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

2. Обчислити довжину астроїди (рис. 95)

$$x=\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t.$$

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо

$$x'=-3a\cos^2 t\sin t;$$

$$y'=3a\sin^2 t\cos t;$$

$$x'^2+y'^2=9a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

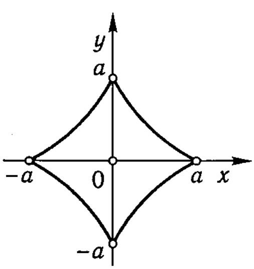


Рис. 95

Оскільки астроїда симетрична відносно координатних осей, то обчислимо довжину вітки, що знаходиться у першому квадранті. При цьому $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ і довжина астроїди дорівнює

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}dt=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt=-3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a.$$

3. Знайти довжину еліпса $x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi.$

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо

$$x' = -a\sin t;\ \ y' = b\cos t;$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2\left(1 - \varepsilon^2\cos^2 t\right),$$

ε — ексцентриситет еліпса,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Тоді довжина еліпса дорівнює

$$S = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,dt. \tag{57}$$

Первісна функція для підінтегральної функції не є елементарною функцією, тобто невизначений інтеграл

$$\int \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$$

не береться в скінченному вигляді. Цей інтеграл називають *еліптичним інтегралом другого роду.*

Застосуємо в інтегралі (57) підстановку

$$t = \frac{\pi}{2} - \tau,\ \ dt = -d\tau.$$

Дістанемо

$$S = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\tau}\,d\tau.$$

Інтеграл

$$E(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\tau}\,d\tau$$

називають *повним еліптичним інтегралом другого роду.*

У математиці розглядають також *еліптичні інтеграли першого роду*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\tau}}$$

й еліптичні інтеграли третього роду

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\tau}\left(1 + h\sin^2\tau\right)},\quad h = -\frac{1}{a}.$$

Часто при розв'язуванні практичних і теоретичних задач доводиться мати справу з еліптичними інтегралами. Тому для цих інтегралів складено спеціальні таблиці, які дають їхнє наближене значення. Отже, для довжини еліпса маємо таку формулу:

$$S = 4aE(\varepsilon).$$

Обчислюючи наближено еліптичний інтеграл $E(\varepsilon)$ для конкретних значень ε, знаходимо наближене значення довжини еліпса.

4. Знайти довжину дуги ланцюгової лінії

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

від точки $(0, a)$ до точки (x, y).

Розв'язання. Скористаємося формулою (55). Для цього знаходимо

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

$$1 + y'^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2.$$

Тоді

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}\right)dt =$$

$$= \frac{a}{2}\left(e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}\right)\Bigg|_0^x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

5. Знайти довжину кола радіуса R.

Розв'язання. Користуватимемося формулою (56). Рівняння кола в полярних координатах у випадку, коли полюс розміщено у центрі кола, має вигляд

$$\rho = R,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Отже, $\rho' = 0$, $\rho^2 + \rho'^2 = R^2$;

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta = 4R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 4R\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R.$$

6. Знайти довжину першого витка архімедової спіралі $\rho = a\theta$.

Розв'язання. Перший виток архімедової спіралі утворюється при зміні полярного кута θ від 0 до 2π. Тому

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta}\,d\theta.$$

Невизначений інтеграл

$$\int \sqrt{1 + x^2}\,dx$$

було знайдено раніше. Він дорівнює

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

Тому

$$S = \frac{1}{2}a\left(\pi\sqrt{4\pi^2+1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right).$$

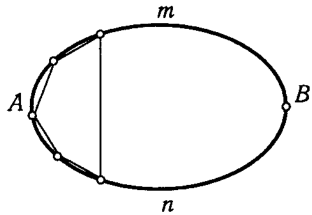


Рис. 96

Розглянемо випадок замкненої кривої (точки A і B збігаються). Означення довжини дуги для замкненої кривої вже не підходить. У цьому випадку ламана, вписана в криву, може стягуватися в точку (рис. 96), а отже, периметр такої ламаної, якщо найбільша сторона прямує до нуля, також прямуватиме до нуля. Якщо крива не є замкненою та коли найбільша сторона прямує до нуля, то ламана щільніше прилягатиме до кривої. Тому природно за довжину кривої взяти границю периметра ламаної, що й було зроблено.

Проте замкнену криву за допомогою довільно вибраних на ній точок A і B можна розглядати як суму двох незамкнених дуг $\cup AmB + \cup BnA$. Тоді, якщо кожна дуга є спрямлюваною, то за довжину замкненої кривої $AnBmA$ береться сума довжин кожної дуги окремо. При цьому доводиться, що сума довжин незамкнених кривих не залежить від вибору на кривій точок A і B.

5.11 ДИФЕРЕНЦІАЛ ДОВЖИНИ ДУГИ. КРИВИНА КРИВОЇ

Нехай крива задана параметричними рівняннями

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ \alpha \le t \le \beta,$$

де, як і раніше, $x(t)$, $y(t)$ — неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$ функції разом із похідними $x'(t)$, $y'(t)$. Візьмемо на кривій (рис. 97) точку M, яка відповідає довільно вибраному значенню параметра t. Тоді дуга AM є спрямлюваною, і її довжина

$$S = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

Оскільки верхня межа в цьому інтегралі є змінною, то інтеграл є функцією верхньої межі t. Отже і S є функцією від t:

$$S = S(t).$$

Знайдемо похідну функції $S(t)$. Похідна цієї функції в точці t існує і

$$S'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$$

або

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}.$$

Звідси

$$dS=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$$

Записуючи x', y' через диференціали,

$$x'=\frac{dx}{dt},\ y'=\frac{dy}{dt},$$

дістанемо таку формулу для диференціала дуги:

$$dS=\sqrt{dx^2+dy^2} \qquad (58)$$

або

$$dS^2=dx^2+dy^2. \qquad (59)$$

Користуючись формулою (59), диференціалу дуги можна надати геометричне тлумачення.

Справді, нехай крива є графіком функції $y=f(x)$, де $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$ разом із похідною $f'(x)$.

Тоді дуга AB (рис. 98) є спрямлюваною. Візьмемо на кривій довільні дві точки $M(x,y)$; $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Позначимо довжину дуги MM' через ΔS і в точці M проведемо дотичну. Тоді dS дорівнює довжині гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами dx і dy. У цьому й полягає геометричний зміст диференціала дуги.

Із рівності (58) можна дістати формулу для диференціала дуги в кожній із систем координат.

1. Якщо крива задана рівнянням в декартовій системі координат $y=f(x)$, то

$$dS=\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

2. Якщо крива задана параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то

$$dS=\sqrt{x'^2+y'^2}dt.$$

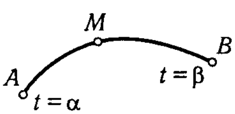


Рис. 97

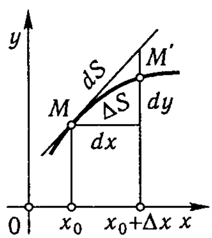


Рис. 98

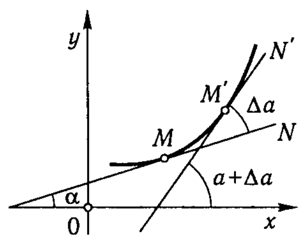


Рис. 99

3. Якщо крива задана в полярних координатах $\rho = \rho(\theta)$, то

$$dS = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta.$$

Оскільки $S(t)$ є монотонно зростаючою функцією $(S'(t) > 0)$, то для функції $s = S(t)$ існує обернена функція $t = \omega(s)$. Тому, підставляючи в рівняння кривої $x = x(t)$, $y = y(t)$ значення *t*, дістанемо рівняння:

$$x = x(\omega(s)) = X(s);$$

$$y = y(\omega(s)) = Y(s);$$

$$0 \le s \le S.$$

Це параметричні рівняння кривої, де за параметр взято вже довжину дуги — геометричну величину, яка цілком зв'язана з кривою.

Розглянемо ще одне поняття, яке характеризує певну геометричну властивість кривої — поняття кривини кривої.

Вивчаючи ту чи ту криву, бачимо, що в різних точках крива має неоднаковий ступінь викривлення. Так, парабола $y = x^2$ поблизу початку координат більше викривлена, ніж у точках, що знаходяться далі від початку координат. Коло в усіх своїх точках має однакове викривлення.

Різні криві також відрізняються одна від одної своїм ступенем викривлення. Так, пряма не має викривлення. Коло малого радіуса більше викривлено, ніж коло великого.

Виникає запитання: що брати за міру кривини кривої в її окремих точках? Щоб відповісти на нього, припустимо, що до кривої в кожній точці можна провести дотичну і що крива є спрямлюваною.

Візьмемо на кривій дві точки M і M' (рис. 99) і проведемо в них дотичні. Нехай дотична MN утворює з додатним напрямком осі Ox кут α, а пряма $M'N'$ — кут $\alpha + \Delta\alpha$.

Довжину дуги MM' позначимо ΔS. Модуль відношення

$$\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}\right|,$$

де $\Delta\alpha$ — величина кута в радіанах, на який повертається дотична, коли точка M' переміститься вздовж кривої в точку M, називають *середньою кривиною дуги* MM'.

Означення. Границю (якщо вона існує) середньої кривини дуги MM' цієї кривої, коли точка M' наближається вздовж кривої до точки M, називають *кривиною кривої* в точці M і позначають

$$K = \lim_{M' \to M}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}\right|. \tag{60}$$

❑ **Приклади**

1. Знайти кривину кола радіуса R у довільній точці.

Розв'язання. Візьмемо на колі дві довільні точки M і M' і проведемо в них дотичні до кола. Відомо, що довжина дуги MM' кола дорівнює

$$\Delta S = R\Delta\alpha.$$

Тому середня кривина

$$\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}\right| = \frac{1}{R}$$

є сталою. Тоді й

$$\lim_{M'\to M}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}\right| = \frac{1}{R}.$$

Отже, кривина кола в кожній точці стала і

$$K = \frac{1}{R}.$$

Звідси випливає, що менший радіус кола, то більша кривина, і, навпаки, що більший радіус кола, то менша його кривина.

2. Знайти кривину прямої.

Розв'язання. У цьому випадку дотична в кожній точці збігається з цією прямою. Тому кут її повороту $\Delta\alpha = 0$.

Середня кривина

$$\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}\right| = 0,$$

а отже, і

$$\lim_{M'\to M}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}\right| = 0.$$

Отже, кривина прямої в кожній точці дорівнює нулю.

Виведемо формулу для обчислення кривини кривої. Для цього припустимо, що крива є графіком функції

$$y = f(x),$$

де функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ має похідні до другого порядку включно.

Скористаємося формулою (60). Очевидно, якщо точка $M' \to M$, то величина довжини дуги $\Delta S \to 0$. Тому формулу (60) можна записати ще так:

$$K = \left|\frac{d\alpha}{dS}\right|. \tag{61}$$

З іншого боку, якщо α — кут, утворений дотичною до кривої в точці $M(x, f(x))$ з додатним напрямком осі Ox, то

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x).$$

Звідси

$$\alpha = \operatorname{arctg} f'(x).$$

Тоді

$$d\alpha = \frac{f''(x)}{1 + f'^2(x)} dx.$$

Підставляючи у формулу (61) значення $d\alpha$ і значення dS, дістанемо таку формулу для кривини кривої:

$$K = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + f'^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{62}$$

З цієї формули легко дістати формулу для кривини кривої, якщо остання задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t)$. Справді, якщо функції $x(t)$, $y(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ мають похідні до другого порядку включно і $x'(t) \neq 0$, то

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)};$$

$$y''_{x^2} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x')^3}.$$

Тоді, підставляючи значення y''_{x^2}, y'_x у формулу (62) відповідно замість $f''(x)$, $f'^2(x)$ дістанемо таку формулу:

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{63}$$

Нарешті, якщо крива задана в полярній системі координат рівнянням

$$\rho = \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

то, поклавши $\theta = t$, матимемо параметричні рівняння кривої

$$x = \rho(\theta)\cos\theta, \ \ y = \rho(\theta)\sin\theta.$$

Знайшовши відповідні похідні й підставивши їх у формулу (63), дістанемо таку формулу для кривини кривої:

$$K = \frac{\left|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''\right|}{\left(\rho^2 + 2\rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{64}$$

Зазначимо, що величину, обернену до кривини кривої в цій точці, називають радіусом кривини кривої і позначають через R:

$$R = \frac{1}{K}.$$

Коло, радіус якого дорівнює радіусу кривини в цій точці і яке дотикається в цій точці до кривої, називають *колом кривини*.

❑ **Приклади**

3. Обчислити кривину параболи $y = x^2$ у точці $(1;1)$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (62). Для цього знайдемо

$$f'(x) = 2x;\ f''(x) = 2;$$

$$f'(1) = 2;\ f''(2) = 2.$$

Тоді

$$K = \frac{2}{\left(1+2^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

4. Знайти кривину і радіус кривини гіпоциклоїди

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$$

у точці, що відповідає значенню $t = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Використаємо формулу (63). Знайдемо

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t;$$

$$y' = 3a\sin^2 t\cos t;$$

$$x'' = -3a\left(\cos^3 t - 2\cos t\sin^2 t\right);$$

$$y'' = 3a\left(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t\right);$$

$$x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3a}{2\sqrt{2}},\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3a}{3\sqrt{2}};$$

$$x''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3a}{\sqrt{2}},\ y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3a}{\sqrt{2}}.$$

Тоді

$$K = \frac{\left|-\frac{3a}{2\sqrt{2}}\frac{3a}{\sqrt{2}} - \frac{3a}{\sqrt{2}}\frac{3a}{2\sqrt{2}}\right|}{\left(\frac{9a^2}{8} + \frac{9a^2}{8}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3a};\ R = \frac{3a}{4}.$$

5. Знайти кривину кардіоїди $\rho = a(1-\cos\theta)$ у довільній точці.
Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо формулу (64). Для цього знаходимо

$$\rho' = a\sin\theta;\ \rho'' = a\cos\theta;$$

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho' = a^2(1-\cos\theta)^2 + 2a^2\sin^2\theta - a^2(1-\cos\theta)\cos\theta =$$

$$= a^2\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + 2\sin^2\theta - \cos\theta + \cos^2\theta\right) = 6a^2\sin^2\frac{\theta}{2};$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta =$$

$$= a^2\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Тоді

$$K = \frac{6a^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{8a^2\sin^3\frac{\theta}{2}} = \frac{3}{4a\sin\frac{\theta}{2}}.$$

5.12 ОБ'ЄМ ТІЛА ОБЕРТАННЯ. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

Об'єм тіла обертання. Нехай на відрізку $[a;b]$ задана невід'ємна і неперервна функція $f(x) \geq 0$. Побудуємо криволінійну трапецію, яку зверху обмежено кривою

$$y = f(x).$$

Обертатимемо криволінійну трапецію $aABb$ навколо осі Ox. Внаслідок цього утвориться тіло (рис. 100), яке називають *тілом обертання.*

Виникає запитання: що розуміти під об'ємом цього тіла та як його обчислити? Адже в елементарній геометрії розглядають тільки простіші тіла обертання, такі як прямий круговий циліндр, конус, куля. І для цих тіл дано означення об'єму та виведено формули для його обчислення.

Дамо означення об'єму тіла. Для цього розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних відрізків точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} \ldots < x_n = b.$$

Через кожну точку поділу проведемо площину, перпендикулярну до осі Ox. Тоді тіло розіб'ється на n окремих тіл. Розглянемо одне з них, наприклад те, яке утворилося внаслідок проведення площин через x_k і x_{k+1}, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Візьмемо на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ довільну точку $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$ і через неї також проведемо площину $x = c_k$. Добуток

$$\pi f^2(c_k)(x_{k+1} - x_k)$$

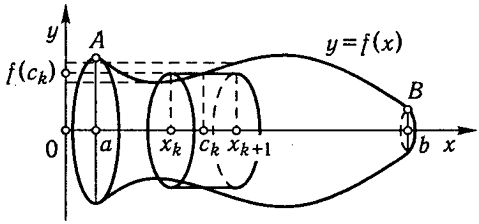


Рис. 100

є об'ємом прямого кругового циліндра, радіус основи якого дорівнює $f(c_k)$, а висота — довжині відрізка $[x_k; x_{k+1}]$. Такі циліндри побудуємо на кожному відрізку і, отже, суму

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi f^2(c_k)(x_{k+1} - x_k) \qquad (65)$$

можна вважати наближеним значенням об'єму розглядуваного тіла. І чим на більше число відрізків розіб'ємо відрізок $[a; b]$ так, щоб довжини їх прямували до нуля, то точніше сума (65) визначатиме об'єми розглядуваного тіла. Тому природно об'єм V тіла обертання означити як границю суми (65), якщо вона існує і не залежить від вибору точок c_k, за умови, що довжини окремих відрізків прямують до нуля.

Сума (65) є інтегральною сумою, побудованою для неперервної на відрізку $[a; b]$ функції

$$F(x) = \pi f^2(x).$$

Тому згадана границя існує і дорівнює визначеному інтегралу

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \pi f^2(c_k)(x_{k+1} - x_k) = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

де λ — найбільша довжина окремих відрізків $[x_k; x_{k+1}]$. Отже, маємо таку формулу для об'єму тіла обертання:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

або

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx. \qquad (66)$$

Якщо фігура зверху і знизу обмежена кривими, заданими рівняннями

$$y = f_1(x), \;\; y = f_2(x),$$

де $f_1(x)$ і $f_2(x)$ — невід'ємні й неперервні функції на відрізку $[a; b]$ і $f_1(x) \geq f_2(x)$, то об'єм тіла, утвореного обертанням цієї фігури навколо осі Ox, виражається формулою

$$V = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx. \qquad (67)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, рівняння якої

$$x = \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ — невід'ємна і неперервна функція на деякому відрізку $[c; k]$, то об'єм тіла, утвореного обертанням цієї трапеції навколо осі Oy, дорівнює

$$V = \pi \int_{c}^{k} x^2 dy. \tag{68}$$

Формули (67) і (68) дістають тим самим способом, що й формулу (66).

❑ **Приклади**

1. Знайти об'єм кулі, радіус якої дорівнює R.

Розв'язання. Кулю можна розглядати як тіло, що утворюється обертанням півкруга навколо осі Ox.

Рівняння верхньої частини півкола має вигляд

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Тому, скориставшись формулою (66), знаходимо

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = 2\pi \int_{0}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{1}{3} x^3\right)\Big|_0^R =$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3\right) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

2. Знайти об'єм кругового конуса, радіус основи якого дорівнює R, а висота дорівнює H.

Розв'язання. Конус можна розглядати як тіло, що утворилося обертанням трикутника OAH (рис. 101) навколо осі Oy.

Рівняння твірної OA конуса має вигляд

$$y = \frac{H}{R} x$$

або

$$x = \frac{R}{H} y.$$

Тому, застосувавши формулу (68), дістанемо

$$V = \pi \int_{0}^{H} x^2 dy = \pi \int_{0}^{H} \frac{R^2}{H^2} y^2 dy =$$

$$= \frac{\pi}{3} \frac{R^2}{H^2} \left(y^3\right)\Big|_0^H = \frac{\pi}{3} \frac{R^2}{H^2} H^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

3. Обчислити об'єм тіла, що утворюється обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої параболами $y = x^2$ і $x = y^2$.

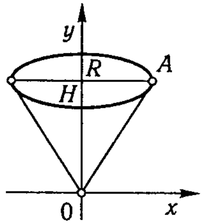


Рис. 101

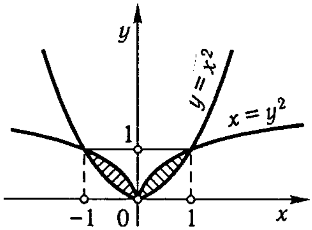


Рис. 102

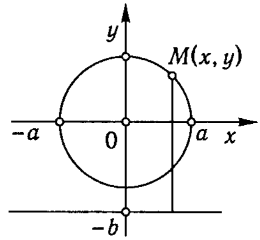


Рис. 103

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі доцільно скористатися формулою

$$V = \int_c^d \left(x_1^2 - x_2^2\right) dx,$$

яка є простим узагальненням формули (68).

Згідно з рис. 102, обидві криві $x = \sqrt{y}$ і $x = y^2$ проходять через точки з координатами $(0; 0)$ і $(1; 1)$, причому $\sqrt{y} \geq y^2$, якщо $0 \leq y \leq 1$. Тому

$$V = \pi \int_0^1 \left(y - y^4\right) dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = 0{,}3\pi.$$

4. Обчислити об'єм тора. (*Тором* називають тіло, утворене обертанням круга радіуса a навколо осі, яка лежить в його площині на відстані b від центра, $b \geq a$. Форму тора має, наприклад, автомобільна шина.)

Розв'язання. Нехай центр кола міститься в початку координат. Тоді, згідно з рис. 103, щоб знайти об'єм заданого тіла, потрібно від об'єму тіла, утвореного обертанням верхньої частини півкруга навколо прямої $y = -b$, відняти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо цієї прямої нижньої частини круга. Відстань довільної точки $M(x, y)$, яка лежить на верхній частині кола, до прямої $y = -b$ дорівнює $b + y$, а відстань відповідної симетричної точки відносно осі Ox, яка лежить на нижній частині кола, дорівнює $b - y$. Тому об'єм V_1 першого тіла, за формулою (66), дорівнює

$$V_1 = \pi \int_{-a}^{a} (b + y)^2 \, dx.$$

Об'єм другого тіла за тією самою формулою є

$$V_2 = \pi \int_{-a}^{a} (b - y)^2 \, dx.$$

Отже, шуканий об'єм

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-a}^{a} \left((b + y)^2 - (b - y)^2 \right) dx = 4\pi b \int_{-a}^{a} y dx.$$

Рівняння верхньої частини кола має вигляд

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Отже,

$$V = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 8\pi b \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Для обчислення останнього інтеграла застосуємо тригонометричну підстановку

$$x = a \sin t.$$

Тоді $dx = a\cos t dt$, а межі за t дорівнюють відповідно 0 і $\frac{\pi}{2}$. Остаточно знаходимо

$$V = 8\pi a^2 b \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4\pi a^2 b \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 a^2 b.$$

Площа поверхні обертання. Перш ніж розглядати це поняття, з'ясуємо: 1) що слід розуміти під площею поверхні обертання? 2) як її обчислити?

Отже, нехай незамкнена спрямлювана крива AB, яка лежить у верхній площині (рис. 104), обертається навколо осі Ox. Поверхню, яка при цьому утворюється, називають *поверхнею обертання.*

Припустимо, що крива AB задана параметричними рівняннями, причому за параметр вибирається довжина дуги.

Отже, нехай рівняння кривої AB мають вигляд

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s),\ 0 \le s \le S,$$

де точці A відповідає значення $s = 0$, а точці B $s = S$.

Надалі припускатимемо, що функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ на відрізку $[0; S]$ неперервні.

Розіб'ємо відрізок $[0; S]$ на n довільних частинних відрізків точками

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k < s_{k+1} < \ldots < s_n = S.$$

Тоді кожному значенню параметра $s = s_k, k = 0, 1, \ldots, n,$ на кривій AB відповідатиме точка M_k $(M_0 = A, M_n = B)$. Сполучимо ці точки відрізками прямих. Внаслідок цього в криву AB впишеться ламана. При обертанні кривої обертатиметься також і вписана в неї ламана. При цьому легко бачити, що кожний відрізок ламаної опише бокову поверхню зрізаного конуса. Площу бокової поверхні кожного такого конуса можна обчислити за відомою формулою з елементарної геометрії.

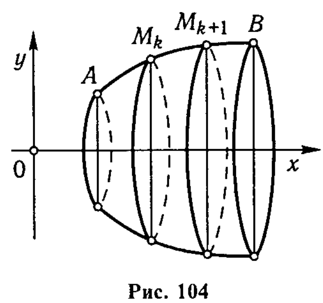


Рис. 104

Справді, нехай декартові координати точки M_k є $x_k = \varphi(s_k),\ y_k = \psi(s_k),\ k = 0, 1, \ldots, n.$ Тоді площа бічної поверхні зрізаного конуса, який утворюється обертанням відрізка (хорди)

$\overline{M_kM_{k+1}}$ навколо осі Ox, дорівнює

$$2\pi\frac{y_k + y_{k+1}}{2}l_k,$$

де l_k — довжина відрізка $\overline{M_kM_{k+1}}$.

Площа бічної поверхні, яка утворюється обертанням ламаної, вписаної в криву AB, дорівнює

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi\frac{y_k + y_{k+1}}{2}l_k. \tag{69}$$

Зрозуміло, чим більше буде точок M_k на кривій AB таких, що довжини $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$ кожної частинної дуги $\cup M_kM_{k+1}$ наближатимуться до нуля, то точніше буде сума (69) давати площу поверхні обертання, як її інтуїтивно уявляємо. Тому природно для площі поверхні обертання дати таке означення.

Означення. Площу поверхні, що утворюється обертанням незамкненої спрямлюваної кривої AB навколо осі Ox, називають *границею*

$$\lim_{\Delta s\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi\frac{y_k + y_{k+1}}{2}l_k, \tag{70}$$

якщо вона існує і не залежить від розбиття відрізка $[0; S]$ на частинні відрізки $[s_k; s_{k+1}]$, $k = 0, 1, ..., n-1$, за умови, що найбільша довжина Δs дуг $\cup M_kM_{k+1}$ прямує до нуля.

Доведемо, що границя (70) існує.

Суму (69) можна записати ще в такому вигляді:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\Delta s_k + \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi\frac{y_k + y_{k+1}}{2}(l_k - \Delta s_k). \tag{71}$$

Покажемо, що

1) $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} 2\pi\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\Delta s_k = 2\pi\int\limits_0^S \psi(s)ds;$

2) $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} 2\pi\frac{y_k + y_{k+1}}{2}(l_k - \Delta s_k) = 0.$

Доведемо спочатку співвідношення 1). Для цього в суму, що знаходиться під знаком границі, поставимо значення y_k, y_{k+1}. Матимемо

$$P_n' = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi\frac{\psi(s_k) + \psi(s_{k+1})}{2}\Delta s_k.$$

Число

$$\frac{\psi(s_k)+\psi(s_{k+1})}{2}$$

є середнім арифметичним чисел $\psi(s_k)$ і $\psi(s_{k+1})$.

Тому, внаслідок того що $\psi(s)$ є неперервною на кожному відрізку $[s_k; s_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, згідно з теоремою про проміжне значення неперервної функції, робимо висновок, що на відрізку $[s_k; s_{k+1}]$ знайдеться така точка $\tau_k \in [s_k; s_{k+1}]$, що

$$\frac{\psi(s_k)+\psi(s_{k+1})}{2} = \psi(\tau_k).$$

Тоді маємо

$$P_n' = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi\psi(\tau_k)\Delta s_k.$$

У правій частині останньої рівності маємо інтегральну суму, побудовану на відрізку $[0; S]$ для неперервної функції

$$\Phi(s) = 2\pi\psi(s).$$

Тому границя такої суми при $\Delta s \to 0$ існує і дорівнює визначеному інтегралу

$$\lim_{\Delta s \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi\psi(\tau_k)\Delta s_k = 2\pi\int_0^S \psi(s)\,ds.$$

Доведемо співвідношення 2).

Справді, оскільки функція $\psi(s)$ неперервна на відрізку $[0; S]$, то вона на ньому обмежена

$$|\psi(s)| < M.$$

Тому маємо таку нерівність:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2}(l_k - \Delta s_k)\right| < 2\pi M \sum_{k=0}^{n-1}(\Delta s_k - l_k) = 2\pi M\left(S - \sum_{k=0}^{n-1} l_k\right).$$

Згідно з припущенням, крива AB є спрямлюваною, а це означає, що

$$\lim_{\Delta s \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} l_k = S.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{\Delta s \to 0} 2\pi M\left(S - \sum_{k=0}^{n-1} l_k\right) = 0.$$

Тоді й

$$\lim_{\Delta s\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}2\pi\frac{y_k+y_{k+1}}{2}\left(l_k-\Delta s_k\right)=0.$$

Співвідношення 2) доведено. Перейшовши у (71) до границі при $\Delta s\to 0$, дістанемо

$$\lim_{\Delta s\to 0}P_n=2\pi\int_0^S\psi(s)ds.$$

Отже, було не лише доведено, що існує площа поверхні обертання в цьому випадку, а й показано, чому вона дорівнює. Справді, якщо через P позначити площу поверхні обертання, то для її обчислення маємо таку формулу:

$$P=2\pi\int_0^S yds. \tag{72}$$

Знаючи, чому дорівнює диференціал дуги ds у різних системах координат, для кожного випадку можна написати формулу для обчислення площі поверхні обертання.

Справді, нехай крива AB задана рівнянням

$$y=f(x),$$

де функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$ і є неперервною на ньому разом із похідною $f'(x)$. Тоді

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx. \tag{73}$$

Якщо крива AB задана параметричними рівняннями

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),$$

де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ задані на відрізку $[\alpha;\beta]$ і є неперервними на ньому разом із похідними $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$, то

$$P=2\pi\int_\alpha^\beta\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt. \tag{74}$$

І, нарешті, якщо крива задана рівнянням в полярних координатах

$$\rho=\rho(\theta),$$

де функція $\rho(\theta)$ задана і неперервна разом із похідною $\rho'(\theta)$ на відрізку $[\theta_1;\theta_2]$, то

$$P=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho(\theta)\sin\theta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta. \tag{75}$$

❑ **Приклади**

5. Знайти площу поверхні кулі радіуса R.

Р о з в ' я з а н н я. Поверхню кулі можна розглядати як поверхню, що утворюється обертанням півкола навколо осі Ox. Запишемо рівняння півкола в полярних координатах

$$\rho = R,\ \ 0 \le \theta \le \pi.$$

Тоді, скориставшись формулою (75), дістанемо

$$P = 2\pi\int_0^{\pi} R^2 \sin\theta d\theta = 2\pi R^2 (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = 4\pi R^2.$$

6. Обчислити площу поверхні тора, утвореного обертанням кола

$$x^2 + (y-b)^2 = R^2,\ \ 0 < R < b,$$

навколо осі Ox.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо рівняння кола параметричними рівняннями

$$x = R\cos t;\ \ y = b + R\sin t;\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Тоді

$$x'(t) = -R\sin t,\ \ y'(t) = R\cos t$$

і

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi} (b + R\sin t)\sqrt{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}\, dt = 2\pi R(bt - R\cos t)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 4\pi R(2b\pi - R + R) = 4\pi^2 bR.$$

7. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y^2 = 4 + x$, що відтинається прямою $x = 2$, навколо осі Ox.

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося формулою (73). Для цього з рівняння кривої знайдемо y:

$$y = \sqrt{4+x}$$

(візьмемо верхню частину параболи). Тоді

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{4+x}};$$

$$y\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{(4+x)\left(1 + \frac{1}{4(4+x)}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{17+4x};$$

$$P = 2\pi\int_{-4}^{2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx = \pi\int_{-4}^{2}\sqrt{17+4x} = \frac{2\pi}{12}\sqrt{(17+4x)^3}\Big|_{-4}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{6}(125-1) = \frac{62}{3}\pi.$$

8. Обчислити площу поверхні еліпсоїда, утвореного обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

навколо осі Ox $(a>b)$.

Р о з в ' я з а н н я. Як і в попередньому прикладі, скористаємося формулою (73). Рівняння верхньої половини еліпса $(y\geq 0)$ запишемо у вигляді

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Звідси знаходимо

$$y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$y\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{\frac{a^4-\left(a^2-b^2\right)x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^4-\left(a^2-b^2\right)x^2}{a^2}}.$$

Тоді

$$P=2\pi\int\limits_{-a}^{a}y\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{4\pi b}{a}\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx=2\pi ab\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right),$$

де величина $\varepsilon=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\dfrac{c}{a}$ є ексцентриситетом еліпса.

5.13 ЗНАХОДЖЕННЯ СТАТИЧНИХ МОМЕНТІВ І КООРДИНАТ ЦЕНТРА МАСИ. ТЕОРЕМИ ГУЛЬДІНА

Нехай точка $M(x, y)$ знаходиться на площині xOy і має масу m. Тоді з фізики відомо, що статичний момент цієї точки відносно деякої прямої (осі) дорівнює добутку маси m на відстань точки до прямої. Якщо за пряму взяти координатні осі й статичні моменти позначити відповідно через K_x і K_y, матимемо

$$K_x=my;\ K_y=mx.$$

Якщо на площині xOy розміщено n матеріальних точок $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$ із масами $m_1, m_2, ..., m_n$, то статичні моменти системи цих точок визначаються як сума статичних моментів кожної точки, тобто

$$K_x=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i,\ K_y=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i.$$

Нехай точки суцільно заповнюють деяку спрямлювальну плоску криву AB (рис. 105).

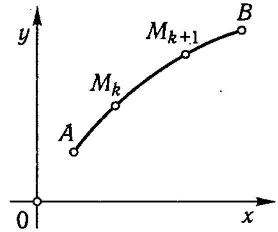


Рис. 105

Поставимо задачу про обчислення статичних моментів K_x, K_y відносно координатних осей розглядуваної кривої (дуги) AB, вздовж якої суцільно розподілена маса. Зрозуміло, що скористатися попередніми формулами в цьому випадку не можна, оскільки точок на кривій є нескінченна множина. Тому потрібно шукати інший спосіб.

Припустимо, що крива AB є однорідною, тобто лінійна густина ρ (маса, що припадає на одиницю довжини дуги) є сталою. Тоді, не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\rho = 1$. У такому випадку маса будь-якої ділянки дуги AB дорівнюватиме довжині дуги цього відрізка кривої AB.

Припускатимемо також, що спрямлювана крива AB задана параметричними рівняннями

$$x = x(s),\ \ y = y(s),$$

де за параметр взято довжину дуги s, $0 \le s \le S$. І нехай функції $x(s)$, $y(s)$ на відрізку $[0; S]$ є неперервними.

Розіб'ємо відрізок $[0; S]$ на n окремих відрізків за допомогою довільно вибраних точок

$$0 \le s_0 < s_1 < \ldots < s_{k-1} < s_k < \ldots < s_n = S.$$

Тоді кожному значенню $s = s_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ на кривій AB відповідатиме точка $M_k\left(x_k, y_k\right)$.

Розглянемо дугу $\cup M_k M_{k+1}$. Припустимо, що точки M_k і M_{k+1} розміщені настільки близько, що масу всієї дуги $\cup M_k M_{k+1}$ можна вважати зосередженою, наприклад, у точці M_k. Унаслідок цього статичний момент дуги $\cup M_k M_{k+1}$ вважатимемо наближено рівним статичному моменту точки M_k. Якщо через $\Delta s_k = s_{k-1} - s_k$ позначити довжину дуги $\cup M_k M_{k+1}$, статичні моменти точки M_k відносно координатних осей відповідно дорівнюватимуть

$$K_x = y_k \Delta s_k;\ \ K_y = x_k \Delta s_k.$$

Статичні моменти системи точок $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots, M_n$ виражатимуться формулами

$$K_x = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta s_k;\ \ K_y = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta s_k.$$

Підставимо в ці формули значення $y_k = y\left(s_k\right)$, $x_k = x\left(s_k\right)$. Маємо

$$K_x = \sum_{k=0}^{n-1} y\left(s_k\right) \Delta s_k,\ \ K_y = \sum_{k=0}^{n-1} x\left(s_k\right) \Delta s_k. \tag{76}$$

Помічаємо, що в правих частинах останніх рівностей є інтегральні суми, побудовані на відрізку $[0; S]$ для неперервних функцій $y = y(s)$, $x = x(s)$. Тому, якщо через λ позначити найбільшу довжину дуг Δs_k ($\lambda = \max \Delta s_k$, $0 \le k \le n-1$), то існують границі зазначених інтегральних сум, коли $\lambda \to 0$ і ці границі дорівнюють визначеним інтегралам

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} y(s)\Delta s_k = \int_0^S y(s)ds;$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} x(s)\Delta s_k = \int_0^S x(s)ds.$$

З іншого боку, якщо $\lambda \to 0$, то різні точки кожного відрізка $M_k M_{k+1}$, на які розбивається крива AB, все менше й менше відрізнятимуться своїми координатами. Тому природно за статичні моменти відносно координатних осей матеріальної дуги $\cup AB$ прийняти попередні границі, тобто покласти

$$K_x = \int_0^S y(s)ds, \ K_y = \int_0^S x(s)ds. \tag{77}$$

Маючи формулу для статичних моментів кривої AB, легко вивести формули для координат центра маси цієї кривої. Справді, нехай точка $C(\bar{x}, \bar{y})$ є центром маси кривої AB. Це означає, що коли в точці $C(\bar{x}, \bar{y})$ зосередити всю масу кривої, яка в цьому випадку дорівнює довжині дуги S, то статичний момент цієї маси збігається зі статичним моментом всієї кривої відносно розглядуваної осі. Внаслідок цього матимемо такі рівності:

$$S\bar{y} = \int_0^S y(s)ds; \ S\bar{x} = \int_0^S x(s)ds.$$

Звідси знаходимо координати центра маси

$$\bar{x} = \frac{\int_0^S x(s)ds}{S}; \ \bar{y} = \frac{\int_0^S y(s)ds}{S}. \tag{78}$$

Зауважимо, що формули (77) і (78) виведені для того випадку, якщо крива AB задана параметричними рівняннями, в яких за параметр береться довжина цієї кривої. Однак крива, як правило, задається одним із таких рівнянь: $y = f(x)$ (декартове задання), $x = x(t)$, $y = y(t)$ (параметричне задання), $\rho = \rho(\theta)$ (полярне задання). Тоді у формулах (77) і (78) потрібно S і ds виразити відповідно через x, t, θ. Так, у випадку задання кривої рівнянням $y = f(x)$, де $a \le x \le b$, дістанемо такі формули:

$$K_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx;$$

$$K_y = \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx;$$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx};$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}.$$

Розглянемо докладніше в (78) другу формулу. Запишемо її у вигляді

$$\bar{y}S = \int_0^S y(s)\,ds.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на 2π

$$2\pi\bar{y}S = 2\pi\int_0^S y(s)\,ds.$$

У правій частині останньої рівності є число, що виражає площу поверхні, яка утворюється обертанням кривої AB навколо осі абсцис. Ліву частину цієї рівності можна розглядати як добуток довжини дуги S кривої AB на довжину кола, радіус якого дорівнює ординаті $\bar{y}$ центра маси.

Отже, довели так звану *теорему Гульдіна*[1].

Перша теорема Гульдіна. Площа поверхні, утворена від обертання плоскої спрямлюваної кривої AB навколо осі, яка її не перетинає і лежить із кривою в одній площині, дорівнює добутку довжини дуги цієї кривої на довжину кола, яке описує центр маси кривої.

Розглянемо задачу про знаходження статичного моменту і координат центра маси плоского матеріального тіла. Нехай це тіло є криволіній-

[1] *Гульдін П.* (1577—1643) — швейцарський математик.

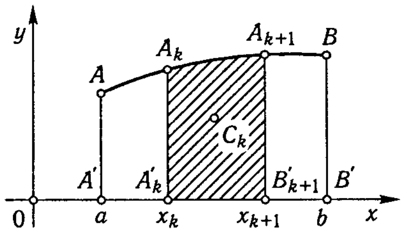


Рис. 106

ною трапецією $A'ABB'$, зображеною на рис. 106, і нехай крива AB задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ є неперервною функцією на відрізку $[a; b]$.

Припустимо, що плоска фігура однорідна і густина $\rho = 1$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n окремих відрізків за допомогою довільно вибраних точок

$$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b.$$

Через кожну таку точку проведемо пряму, паралельну осі Oy. Унаслідок цього криволінійна трапеція розіб'ється на n смуг (окремих криволінійних трапецій). Розглянемо смугу, яка відповідає прямим $x = x_k$ і $x = x_{k+1}$ (на рис. 106 фігура $A_k A_{k+1} B'_{k+1} A'_k$). Вважатимемо, що ця смуга настільки вузька, що її можна вважати прямокутником, висота якого дорівнює $y_k = f(x_k)$. Тоді маса цієї смуги наближено дорівнюватиме площі прямокутника

$$y_k (x_{k+1} - x_k).$$

Припустимо також, що вся маса смуги зосереджена всередині прямокутника (в точці C_k). Знайдемо статистичні моменти точки C_k відносно координатних осей. Для цього зауважимо, що точка C_k знаходиться від осі Ox на відстані $\frac{1}{2} y_k$, а від осі Oy — на відстані $x_k + \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)$. Величиною $\frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)$ можна знехтувати, оскільки це число в припущенні, що точки x_k і x_{k+1} знаходяться близько, дуже мале порівняно з x_k.

Отже, статичні моменти точки C_k відносно координатних осей наближено дорівнюють

$$K_x \approx \frac{1}{2} y_k y_k (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2} f^2(x_k)(x_{k+1} - x_k);$$

$$K_y \approx x_k y_k (x_{k+1} - x_k) = f(x_k) x_k (x_{k+1} - x_k).$$

Тоді, замінивши кожну смугу прямокутниками і припустивши, що маса зосереджена в їх центрі, дістанемо числа

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} f^2(x_k)(x_{k+1} - x_k);$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) x_k (x_{k+1} - x_k),$$

які дають наближене значення статичних моментів розглядуваної плоскої фігури відносно координатних осей. Ці суми щоразу даватимуть точніше значення статичних моментів, якщо точки x_k, $k=0,1,\ldots,n-1$ будуть все ближче і ближче розміщені між собою.

Тому природно покласти за означенням, що

$$K_x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}f^2(x_k)(x_{k+1}-x_k);$$

$$K_y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)x_k(x_{k+1}-x_k),$$

де

$$\lambda = \max_{0\le k\le n-1}(x_{k+1}-x_k).$$

Під знаком границь є інтегральні суми, побудовані на відрізку $[a;b]$ для неперервних функцій

$$\frac{1}{2}(f(x))^2,\ \ f(x)x,$$

тому ці границі дорівнюють визначеним інтегралам

$$K_x = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\,dx;\ K_y = \int_a^b xf(x)dx. \qquad (79)$$

Маючи формули для статичних моментів, легко вивести формули і для координат центра маси розглядуваної плоскої фігури. Справді, нехай точка $C(\bar{x},\bar{y})$ є центром маси фігури $ABB'A'$ і нехай плоска фігура має площу P. Тоді статичні моменти точки $C(\bar{x},\bar{y})$ відносно координатних осей дорівнюють статичним моментам відносно цих осей всієї криволінійної фігури. Тому дістанемо

$$K_x = P\bar{y} = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\,dx,\ K_y = P\bar{x} = \int_a^b xf(x)dx.$$

Звідси знаходимо координати центра маси

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\,dx}{P},\ \ \bar{x} = \frac{\int_a^b f(x)x\,dx}{P}. \qquad (80)$$

Розглянемо першу формулу. Запишемо її так

$$\bar{y}P = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на число 2π, маємо

$$2\pi\bar{y}P = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Помічаємо, що в правій частині останньої рівності є число, яке виражає об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції $ABB'A'$ навколо осі абсцис. У лівій частині попередньої рівності є добуток площі криволінійної трапеції на довжину кола, радіус якого дорівнює ординаті центра маси трапеції.

Отже, доведено так звану *другу теорему Гульдіна.*

Друга теорема Гульдіна. Об'єм тіла обертання плоскої фігури навколо осі, що її не перетинає, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, яке описує центр маси цієї фігури.

У фізиці розглядається таке поняття, як момент інерції точки, системи точок відносно осі.

Так, *моментом інерції точки M*, яка має масу m, відносно прямої (осі) називають добуток маси цієї точки на квадрат відстані точки до прямої.

Моментом інерції системи n матеріальних точок відносно прямої називають суму моментів інерції кожної точки зокрема.

Якщо точки суцільно заповнюють деяку матеріальну плоску однорідну криву AB, то міркуючи так само, як і при виведенні формули для статичних моментів, можна вивести формули і для моментів інерції. Так, якщо за пряму брати відповідно координатні осі, а моменти інерції позначити через I_x та I_y, то справедливі формули

$$I_x = \int_0^S y^2 ds,\ I_y = \int_0^S x^2 ds. \tag{81}$$

Якщо тіло є плоскою криволінійною трапецією, яка суцільно заповнена масою, то моменти інерції такого тіла відносно координатних осей дорівнюють

$$I_x = \frac{1}{4}\int_a^b (f(x))^3\,dx,\ I_y = \int_a^b x^2 f(x)ds. \tag{82}$$

❑ **Приклади**

1. Обчислити статичний момент відносно осі Ox дуги еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, яка розміщена в верхній півплощині (зокрема, півкола $x^2+y^2=a^2$, яке розміщене над віссю Ox).

Розв'язання. Скористаємося формулою

$$K_x = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Із рівняння еліпса знаходимо

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Тоді

$$y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \; y\sqrt{1 + y'^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2},$$

де ε — ексцентриситет еліпса, $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Отже,

$$K_x = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}dx = \frac{2b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}dx =$$

$$= \frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} + \frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right) = b\left(\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

Якщо $a = b$ (маємо півколо), то

$$K_x = \int_{-a}^{a} a dx = 2a^2.$$

2. Знайти координати центра маси першої арки циклоїди

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t), \; 0 \le t \le 2\pi.$$

Розв'язання. Оскільки перша арка циклоїди є лінією, симетричною відносно прямої $x = \pi a$, то центр маси лежить на цій прямій, тобто $x = \pi a$. Знайдемо $\overline{y}$, скориставшись формулою

$$\overline{y} = \frac{\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt}{S}.$$

Знаходимо

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \; y'(t) = a\sin t.$$

Тоді

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 2a\sin\frac{t}{2}, \; 0 \le \frac{t}{2} \le \pi;$$

$$\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = 2a\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = -8a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2} =$$

$$= -8a^2\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{32}{3}a^2.$$

Довжина дуги S арки циклоїди дорівнює $S = 8a$.

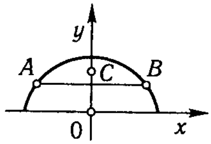


Рис. 107

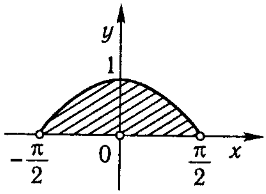


Рис. 108

Отже,

$$\bar{y} = \frac{\frac{32}{3}a^2}{8a} = \frac{4}{3}a.$$

3. Користуючись теоремою Гульдіна, визначити координати центра маси дуги AB (рис. 107) кола радіуса R.

Р о з в ' я з а н н я. Дуга AB симетрична відносно осі Oy. Тому абсциса $\bar{x}$ центра маси дорівнює нулю. Центр маси лежить на осі Oy. Нехай довжина дуги AB дорівнює S, а довжина хорди AB дорівнює h. Тоді від обертання цієї дуги навколо осі Ox утворюється кульовий пояс, площа поверхні якого $P = 2\pi Rh$. За першою теоремою Гульдіна ця площа дорівнює: $P = 2\pi\bar{y}S$. Звідси дістанемо

$$2\pi Rh = 2\pi\bar{y}S$$

або

$$\bar{y} = \frac{Rh}{S}.$$

Зокрема, якщо дуга AB є півколом $(h = 2R, S = \pi R)$, то

$$\bar{y} = \frac{2R}{\pi}.$$

4. Знайти координати центра маси плоскої фігури, яка обмежена косинусоїдою $y = \cos x$ від точки $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ до точки $x_2 = \frac{\pi}{2}$ і віссю абсцис.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки ця фігура (рис. 108) є симетричною відносно осі Oy, то центр маси лежить на осі Oy, тобто $\bar{x} = 0$. Залишилося знайти $\bar{y}$. Скористаємося формулою

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2\,dx}{P}.$$

Обчислимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Обчислимо

$$P = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2(\sin x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Отже,

$$\bar{y} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

5. Знайти момент інерції дуги кола $x^2+y^2=R^2$, яка лежить у першому квадранті, відносно осі Oy.

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося формулою

$$I_y=\int_0^S x^2 ds.$$

Запишемо рівняння кола в полярних координатах, поклавши

$$x=\rho\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\theta.$$

Тоді рівняння кола запишеться так: $\rho=R$. Знайдемо

$$dS=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=Rd\theta.$$

Кут θ змінюється у межах $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

Отже,

$$I_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^3\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}R^3\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi R^3}{4}.$$

5.14
ОБЧИСЛЕННЯ РОБОТИ ТА СИЛИ ТИСКУ

Обчислення механічної роботи. Питання про знаходження роботи W, яка виконується змінною силою $\bar{F}=\bar{F}(x)$ на шляху від точки A до точки B і напрямок якої збігається з напрямком руху матеріальної точки M було розглянуто у п. 5.1 (див. рис. 73). Встановлено, що ця робота дорівнює визначеному інтегралу

$$W=\int_a^b F(x)dx, \tag{83}$$

де $F(x)$ — величина сили $\bar{F}(x)$. Якщо напрямок сили $\bar{F}=\bar{F}(x)$ не збігається з напрямком руху точки і в кожній точці $M=M(x)$, де x — відстань точки M від початкової точки A, кут між ними $\alpha=\alpha(x)\ne\frac{\pi}{2}$, то робота

$$W=\int_a^b F(x)\cos\alpha(x)dx. \tag{84}$$

❑ **Задачі**

1. Обчислити роботу розтягання (або стискання) пружини із закріпленим одним кінцем (рис. 109), якщо величина прикладеної сили змінюється за законом Гука:

$$F=kx.$$

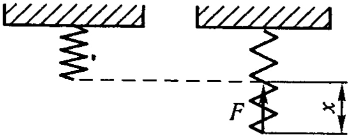


Рис. 109

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо формулу (83). Тут напрямок прикладеної сили збігається з напрямком розтягання пружини, $\alpha = 0$. Маємо

$$W = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2}.$$

Щоб розтягнути, наприклад, пружину на 6 см, потрібно виконати роботу

$$W = \int_0^{0,06} kxdx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,06} = 18\cdot 10^{-4}k.$$

Для визначення коефіцієнта k зробимо припущення, що при $F = 1H$ величина розтягу $x = 2$ см $= 0,02$ м. Тоді $k = 50$. Отже,

$$W = 50\cdot 18\cdot 10^4 = 0,09 \text{ Дж}.$$

2. Електричний заряд E, зосереджений у початку координат, відштовхує заряд e з точки $(a;0)$ у точку $(b;0)$. Знайти роботу W сили відштовхування, яка дорівнює F.

Р о з в ' я з а н н я. За законом Кулона $F = \frac{eE}{x^2}$ (коефіцієнт пропорційності дорівнює 1), де x — відстань між зарядами. Тоді за формулою (83)

$$W = eE\int_a^b \frac{dx}{x^2} = eE\left(-\frac{1}{x}\Big|_a^b\right) = eE\left(\left(\frac{1}{a}\right) - \left(\frac{1}{b}\right)\right).$$

Зазначимо, якщо $b \to +\infty$, то робота W наближається до $\frac{eE}{a}$.

3. *Яку потрібно виконати роботу, щоб тіло масою m підняти з поверхні Землі, радіус якої R, на висоту h? Чому дорівнює робота, якщо тіло віддаляється у нескінченність?*

Р о з в ' я з а н н я. За законом тяжіння Ньютона на тіло масою m діє сила F, яка обернено пропорційна квадрату віддалі тіла від центра Землі й напрямлена до центра Землі O (рис. 110), тобто

$$F = \frac{C}{(R+x)^2}.$$

Тут C — стала, яка визначається з умови, що на поверхні Землі $(x = 0)$ сила F дорівнює силі ваги mg:

$$F = mg = \frac{C}{R^2},$$

звідси

$$C = mgR^2.$$

Тоді, згідно з формулою (84),

$$W = -mgR^2\int_0^h \frac{dx}{(R+x)^2} = mgR^2\frac{1}{R+x}\Big|_0^h = -\frac{mgRh}{R+h}.$$

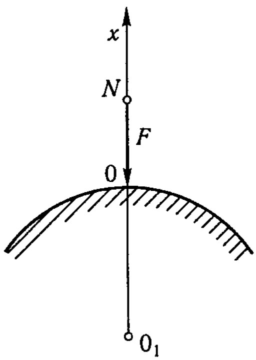


Рис. 110

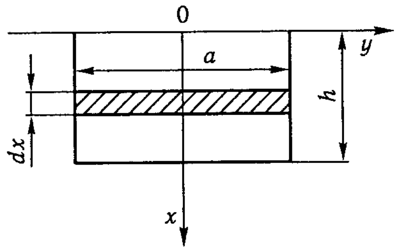


Рис. 111

Тут $\alpha = 180°$, тому $\cos\alpha$ у формулі (84) дорівнює -1.

4. Знайти роботу, потрібну для запуску ракети вагою P із поверхні Землі вертикально вверх на висоту h.

Розв'язання. Позначимо через F силу земного тяжіння. Нехай $m_р$ — маса ракети, $m_з$ — маса Землі. Згідно із законом Ньютона,

$$F = k\frac{m_р m_з}{x^2},$$

де x — віддаль від ракети до центра Землі. Позначимо $k = m_р m_з$. Тоді $F(x) = \frac{k}{x^2}$, $R \le x \le h + R$, де R — радіус Землі. При $x = R$ сила $F(R)$ дорівнює вазі P ракети, тобто

$$P = \frac{k}{R^2},$$

звідси

$$k = PR^2.$$

Отже,

$$F(x) = \frac{PR^2}{x^2}.$$

Тоді

$$W = -\int_R^{R+h} F(x)\,dx =$$

$$= -PR^2\int_R^{R+h}\frac{dx}{x^2} = \left.\frac{PR^2}{x}\right|_R^{R+h} = -\frac{PRh}{R+h}.$$

2. Обчислення сили тиску рідини на занурене в неї тіло.

Задача. Знайти силу тиску води на прямокутні ворота шлюзу, ширина якого $a = 25$ м і глибина $h = 15$ м, якщо верхня грань воріт лежить на поверхні води.

Р о з в ' я з а н н я. За законом Паскаля сила тиску P рідини, густина якої ρ, на площадку S при глибині занурення h дорівнює $\rho g h S$, де $g = 9{,}807$ м/с^2 — прискорення сили тяжіння. Введемо систему координат (рис. 111) і розглянемо елементарну прямокутну площадку, що міститься на глибині x і має основу a. Площа її $dS = adx$, а сила тиску на неї $dP = \rho g x dS$.

Отже, сила тиску води на ворота дорівнює

$$P = \int_0^h \rho g x a dx = a\rho g \frac{h^2}{2}.$$

Оскільки $a = 25$ м, $h = 15$ м, $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, то

$$P = 2{,}7 \cdot 10^7 \text{ Н}.$$

Список рекомендованої літератури

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. — М.: Наука, 1969. — Т. 1—3.
2. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ: В 2 т.— М.: Высш. шк., 1970. — Т. 1—2.
3. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу: В 3 ч. — К.: Вища шк., 1990. — Ч. I—III.

Предметний покажчик

Зміст

Навчальне видання

Шкіль Микола Іванович

Математичний аналіз

У двох частинах

Частина 1

3-тє видання, перероблене і доповнене

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Оправа і титул художника *І. Г. Хорошого*
Художній редактор *Г. С. Муратова*
Технічний редактор *А. І. Омоховська*
Коректори: *Л. М. Байбородіна, В. В. Биченок*
Комп'ютерна верстка *Н. П. Довлетукаєвої*

Підп. до друку 16.08.2005. Формат 60 × 84/$_{16}$. Папір офс. № 1.
Гарнітура Times New Roman. Офс. друк. Ум. друк. арк. 26,04.
Обл.-вид. арк. 26,00. Тираж 5000 пр. Вид. № 10570. Зам. № 5–336

Видавництво «Вища школа», вул. Гоголівська, 7г, м. Київ, 01054

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру
від 04.02.2000 серія ДК № 268

Надруковано з плівок, виготовлених у видавництві «Вища школа»,
у ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»,
вул. Л. Курбаса, 4, м. Біла Церква, 09117

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру
від 14.08.2001 серія ДК № 567