Сучасний Підручник

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Сучасний Підручник

*С. М. Шульга, О. В. Багацька, О. Ю. Бутрим,
М. М. Колчигін, О. О. Третьяков*

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ВИДАВНИЦ
РАНО

УДК 531/534(0.75)
ББК 22.21я73
Т33

Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1.4/18-Г-1472.1 від 06.09.2007)

(Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено)

А в т о р и:
С. М. Шульга, доктор фізико-математичних наук, професор;
О. В. Багацька, кандидат фізико-математичних наук, доцент;
О. Ю. Бутрим, кандидат фізико-математичних наук, доцент;
М. М. Колчигін, доктор фізико-математичних наук, професор;
О. О. Третьяков, доктор фізико-математичних наук, професор

Р е ц е н з е н т и:
Л. М. Литвиненко, доктор фізико-математичних наук,
професор; академік НАН України,
директор Радіоастрономічного інституту НАН України;
М. О. Азаренков, доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України, зав. кафедри матеріалів
реакторобудування фізико-технічного факультету
Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна

ISBN 978–966–672–128–3

ЗМІСТ

ВСТУП

Яка фундаментальна проблема природознавства розв'язується в курсі теоретичної механіки?
Яка теоретична модель реальних фізичних об'єктів вивчається в теоретичній механіці?
Яке місце посідає теоретична механіка в університетському курсі теоретичної фізики?

Усе, що реально існує у світі, — елементарні частинки, різні поля, атоми й молекули, зірки й галактики, являють собою єдину матеріальну систему, яка перебуває в стані безперервної зміни та руху. Форми такого руху досить численні та різноманітні. Найпростішою формою руху є **механічний рух**, тобто переміщення із часом одних матеріальних тіл відносно інших. І дійсно, в історичному розвитку природознавства раніше за все почала розроблятися теорія простого переміщення — механіка небесних тіл і земних мас.

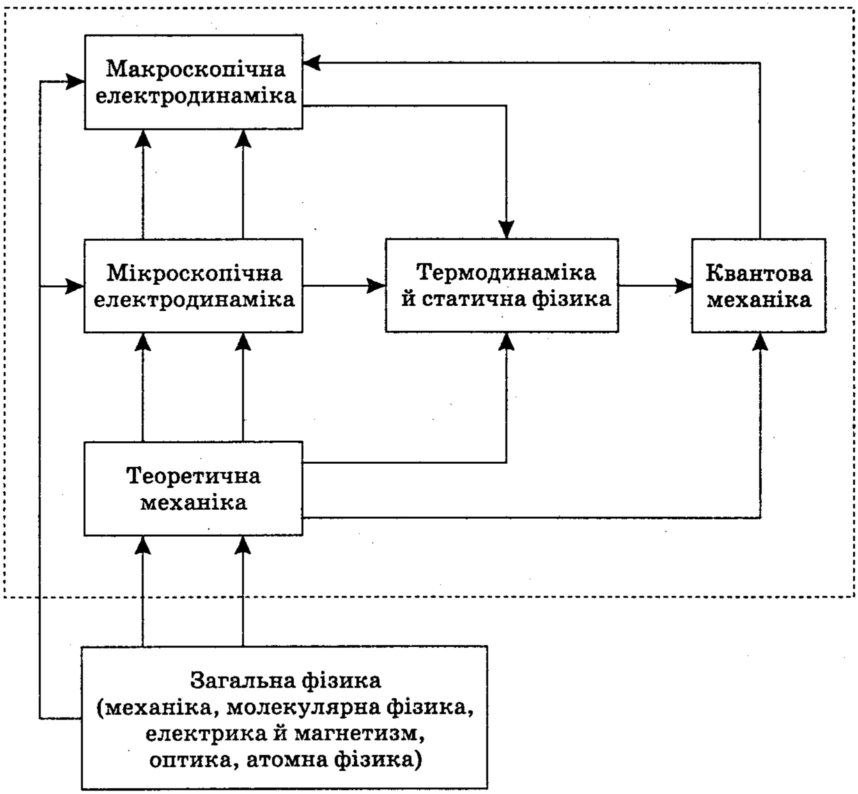
Теоретична механіка вивчає проблеми руху — еволюцію в часі фізичних систем. У цьому й полягає **фундаментальна задача** теоретичної механіки.

В теоретичній механіці вивчаються найпростіші системи, які складаються з великої кількості частинок — **матеріальних точок**, що характеризуються масою m. Розміри, форма частинок (тіл) при цьому вважаються другорядними (в електродинаміці тіло може мати ще одну фундаментальну характеристику e — заряд).

Одна із задач запропонованого підручника полягає у відстеженні прямого зв'язку теоретичної механіки з електродинамікою. Зокрема, буде показано, як за допомогою рівнянь теоретичної механіки можна отримати рівняння Максвелла — основні рівняння електродинаміки. У цьому й полягає відмінність цього курсу від традиційного викладання курсу теоретичної механіки на фізичних і механіко-математичних факультетах.

Для полегшення сприйняття матеріалу перед кожним параграфом наведені питання, що розглядаються, а наприкінці підручника — додатки, які містять необхідні відомості з математики.

Місце теоретичної механіки в університетському курсі фізики



Розділ I
РІВНЯННЯ РУХУ

§ 1. Принцип відносності Ґалілея—Ньютона

Що таке система відліку?
Що таке інерціальна система відліку? Чи розрізняються явища природи в інерціальних системах відліку?
Якою є аксіоматика класичної теорії відносності Ґалілея—Ньютона?
Що таке абсолютний простір? Чи є він пізнаваним?
Що таке відносний простір і чому він є пізнаваним?.
Що таке абсолютний та відносний час?
Як записати класичне перетворення Ґалілея—Ньютона та переконатися, що це перетворення забезпечує виконання обох постулатів Ґалілея—Ньютона?

Еволюція (рух) системи об'єктів відбувається в просторі й часі. Для того, щоб спостерігати та вивчати рух тіл, необхідно спочатку арифметизувати (калібрувати) простір і час і таким чином отримати можливість виражати будь-які просторові й часові співвідношення за допомогою чисел. Для цього треба визначити спосіб вимірювання відстаней між матеріальними тілами та інтервалів між різними моментами часу.

Вимірювання відстаней між тілами можна здійснити за допомогою еталонів довжини. При цьому відстань між двома матеріальними точками буде визначатися числом, яке показує, скільки разів еталон довжини вміщується на відрізку прямої, яка з'єднує ці точки.

Для вимірювання часу необхідно мати будь-який годинник, тобто пристрій, дія якого ґрунтується на використанні деякого періодичного процесу, що проходить рівномірно й незалежно від зовнішніх явищ природи.

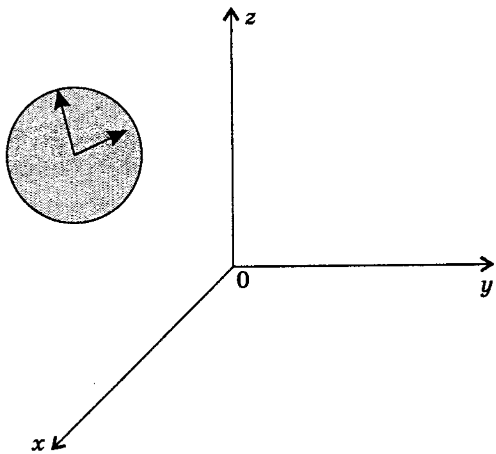


Рис. 1.1

Систему координат, яка тісно пов'язана з деяким тілом (так званим тілом відліку), і годинник, що рухається разом із цим тілом, називають системою відліку (СВ). Це система координат, яка служить для визначення положення тіла в просторі, пов'язана з годинником, що використовується для відліку часу (рис. 1.1). Як систему координат можна обрати будь-які три криволінійні координати, однак найбільш простою та зручною є система прямокутних декартових координат x, y, z із відповідними ортами $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$, $\vec{n}_z$. Домовимось в подальшому використовувати лише правогвинтові системи координат. Це означає, що одиничні вектори $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$, $\vec{n}_z$ мають бути пов'язані співвідношенням $\vec{n}_z = \vec{n}_x \times \vec{n}_y$.

Можна обрати нескінченно багато систем відліку. Як свідчить досвід, закони механічного руху в різних системах відліку мають у загальному випадку різний вигляд. Якщо взяти довільну систему відліку, то закони найпростіших механічних рухів можуть виявитися в ній вельми складними. Тому, природно, постає задача: знайти таку систему відліку, в якій закони механіки мали б найбільш простий вигляд. У такій системі відліку ізольована матеріальна точка (яка не взаємодіє з жодними іншими об'єктами) може необмежено довго перебувати в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху. Інакше кажучи, **інерціальна система відліку** (ІСВ) — це система відліку, в якій виконується перший закон Ньютона: будь-яке тіло перебуває в стані спокою або рухається равномірно прямолінійно, якщо на нього не діють інші сили.

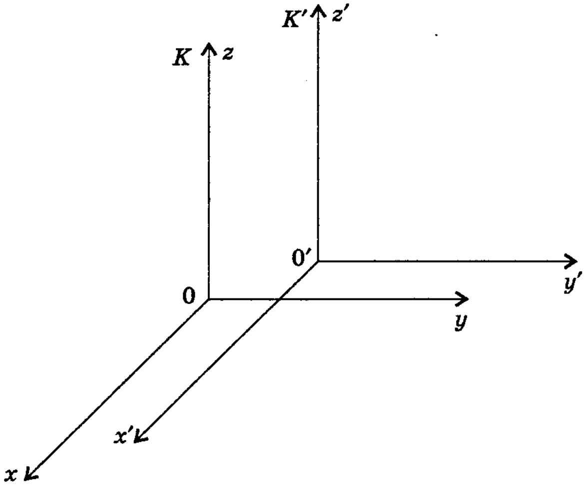


Рис. 1.2

Припустимо, нами обрано деяку систему відліку, яку з певним ступенем точності можна вважати інерціальною. Після того, як такий вибір здійснено, можна вказати безліч твердих тіл, що рухаються відносно обраної системи відліку прямолінійно та рівномірно. Пов'язуючи нові системи відліку з такими тілами, ми можемо тим самим обрати безліч інших інерціальних систем відліку. Отже, ІСВ існує нескінченно багато (рис. 1.2). Математично рух описується однаково в усіх ІСВ. Ця властивість дозволяє описувати рух матеріальних об'єктів одними й тими ж формулами в різних ІСВ.

Аксіоматика теорії відносності Ґалілея—Ньютона

1) **Постулат відносності:** закони механіки повинні бути інваріантними (тобто однаковими, такими, що не змінюють свою форму) в усіх ІСВ. У цьому полягає перевага ІСВ, яка дозволяє порівнювати результати, отримані різними дослідниками. Для такого порівняння необхідно знати закон переходу від однієї ІСВ до іншої.
2) Перехід від однієї ІСВ до іншої відбувається таким чином, що виконується **класичний закон додавання швидкостей** (який буде описано нижче).

Простір і час

Поняття про простір і час у теоретичній механіці корелюють (пов'язані) з повсякденними знаннями (зауважимо, що в класичній механіці **простір і час не пов'язані між собою**).

Простір за своєю суттю може бути як абсолютним, так і відносним. Сформулюємо **властивості абсолютного простору.** Він є:

нескінченним;

тривимірним;

однорідним (його властивості у двох різних точках є однаковими);

ізотропним (його властивості не залежать від напрямку);

абсолютно проникним;

не піддається впливу інших об'єктів;

сам ні на що не впливає.

Абсолютний простір є **непізнаваним**, у ньому неможливо описати рух об'єктів, оскільки він не має вихідної точки відліку.

Відносний простір — це простір, у який занурені матеріальні тіла. Він є **пізнаваним**, оскільки його частини відрізняються через внесені до нього об'єкти.

Аналогічно до простору час також може бути як абсолютним, так і відносним.

Властивості абсолютного часу. Він є:

нескінченним;

однорідним (масштаб часу не змінюється при переході в іншу точку);

одновимірним (описується однією часовою координатою);

анізотропним (тече в одному напрямку);

ні на що не діє;

не піддається впливу інших об'єктів.

Абсолютний час є **непізнаваним**, оскільки в ньому неможливо виміряти часовий інтервал.

Відносний час — це час, у якому відбуваються події з матеріальними тілами. Він є **пізнаваним**, оскільки різні ділянки лінійки часу стають різними.

Нами сформульовані класичні уявлення про простір і час.

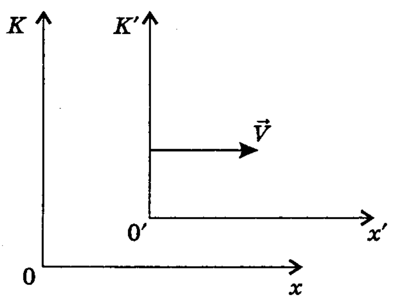


Рис. 1.3

Отримаємо класичні перетворення Ґалілея—Ньютона — закон, за яким, знаючи координати в одній ІСВ, можна одержати координати в іншій ІСВ, тобто правило переходу від однієї ІСВ до іншої. Нехай K і K' — дві ІСВ (рис. 1.3). Система K' рухається відносно K зі швидкістю $\vec{V}$, яка, для визначеності, направлена вздовж осі $0x$. Прямі перетворення Ґалілея—Ньютона дозволяють виразити координати в системі K через координати системи K':

$$\begin{cases} x = x' + Vt', \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{cases} \tag{1.1}$$

Формула $t = t'$ в (1.1) є наслідком абсолютності часу в класичній механіці. Зворотні перетворення координат (K' через K) простіше за все отримати заміною у формулах (1.1) штрихованих координат на нештриховані й заміною знака при швидкості V (оскільки, якщо система K перебуває в стані спокою, а система K' рухається відносно K зі швидкістю $\vec{V}$, то справедливим є і зворотне твердження — можна вважати, що система K' перебуває в стані спокою, а система K рухається відносно неї зі швидкістю $-\vec{V}$):

$$\begin{cases} x' = x - Vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases} \tag{1.2}$$

Формули (1.1) і (1.2) для довільного руху з постійною швидкістю $\vec{V}$ у векторній формі можна записати у вигляді:

для прямого перетворення

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t; \tag{1.3}$$

для зворотного перетворення

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t. \tag{1.4}$$

Подіємо оператором $\dfrac{d}{dt}$ на формули (1.1) і врахуємо властивість абсолютності часу $t = t'$. У результаті одержимо

$$\begin{cases} v_x = v'_x + V, \\ v_y = v'_y, \\ v_z = v'_z. \end{cases} \tag{1.5}$$

Тут $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v'_x = \dfrac{dx'}{dt'}$ — проекції швидкості частинки на осі $0x$ і $0x'$. Зробивши аналогічні викладки для випадків, коли швидкість системи K' відносно K направлена вздовж осей $0y$ і $0z$, можна отримати класичний закон додавання швидкостей у векторній формі

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}\,. \tag{1.6}$$

На прикладі формули другого закону Ньютона перевіримо, чи виконується перший постулат Ґалілея—Ньютона, якщо формула (1.6) є правильною. Відповідно до другого закону Ньютона сила пропорційна зміні швидкості в часі:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{1.7}$$

тут коефіцієнт пропорційності m — маса.

Отримаємо вираз для другого закону Ньютона в системі координат K', яка рухається. Для цього підставимо до (1.7) формули перетворення швидкостей (1.6). Використаємо властивість абсолютності (інваріантності) часу $t = t'$ у різних ІСВ, а також той факт, що $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d\vec{V}}{dt'} \equiv 0$ через те, що система K' рухається відносно K із постійною швидкістю. У результаті одержуємо вираз закону Ньютона в штрихованій системі відліку:

$$\vec{F}' = m\frac{d\vec{v}'}{dt}. \tag{1.8}$$

Із формули (1.8) видно, що другий закон Ньютона записується в різних ІСВ однаково, тобто він є інваріантним відносно перетворення системи координат. Аналогічно можна показати, що всі закони механіки мають один і той самий вигляд в усіх ІСВ.

§ 2. Узагальнені координати

Що таке матеріальна точка? Яка модель реальної фізичної системи використовується в теоретичній механіці?
Як визначається положення фізичної системи у фіксований момент часу? Що таке узагальнені координати та число степенів вільності?
Як визначається механічний стан фізичної системи у фіксований момент часу? Що таке узагальнені швидкості?

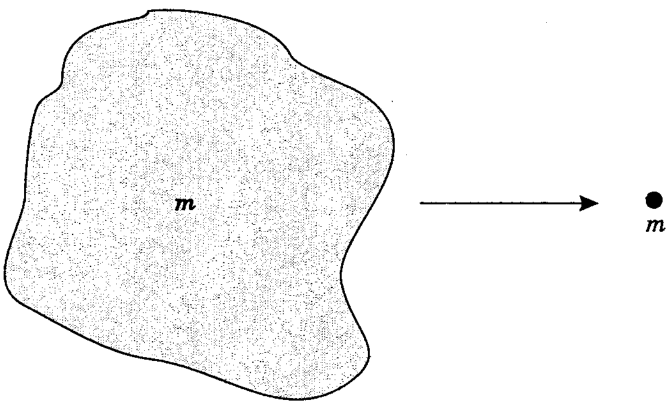


Рис. 2.1

У теоретичній фізиці рух реальних фізичних об'єктів описати досить складно. Необхідно абстрагуватися від не суттєвих при заданому русі властивостей тіла, які можна не враховувати.

У теоретичній механіці вивчають рух тіл, абстрагуючись від складових частин тіла, його внутрішньої будови, форми. Моделюють тіло точкою в геометричному змісті (рис. 2.1). З усіх фізичних властивостей береться до розгляду тільки маса, яку позначають буквою m.

Аналогічно робиться у випадку системи матеріальних об'єктів складної форми, що утворюється з N тіл (рис. 2.2).

Матеріальною точкою зазвичай називають тіло нескінченно малих розмірів порівняно з просторовими співвідношеннями (наприклад, розмірами області руху), які відіграють суттєву роль у даному русі. Можливість розглядати будь-яке конкретне тіло у вигляді матеріальної точки (тобто абстрагуватися від його форми, структури, об'єму тощо) повністю визначається характером руху даного тіла, а саме, тим, як і в якій просторовій області відбувається рух. Наприклад, якщо розглядати рух Землі відносно Сонця (абстрагуючись від їхні обертання навколо власних осей як від несуттєвих деталей), то і Землю, і Сонце можна вважати матеріальними точками, оскільки їх розміри є малими порівняно з відстанню між їхніми центрами, яка становить приблизно $1{,}5\cdot10^{11}$ м (радіус Сонця — близько $7\cdot10^{8}$ м, радіус Землі — $6\cdot10^{6}$ м).

Прикладом системи матеріальних точок можна вважати Сонце й планети Сонячної системи. При розв'язанні задач молекулярної фізики достатньо розріджений газ також можна розглядати як систему матеріальних точок.

Характерно, що, називаючи в усіх наведених вище прикладах ті чи інші реальні тіла матеріальними точками і вивчаючи тільки механічний рух цих тіл, ми зовсім не цікавимось їхньою внутрішньою структурою. Звідси випливає, що під матеріальною точкою в класичній механіці розуміють безструктурну точкову частинку, яка має масу, енергію, імпульс, але позбавлена внутрішніх структурних характеристик (наприклад, моменту інерції тощо).

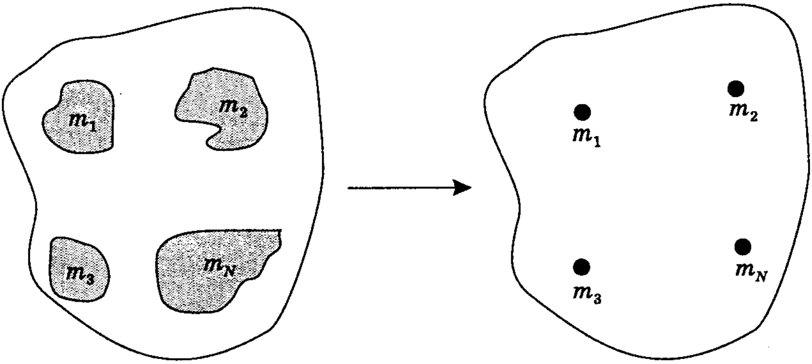


Рис. 2.2

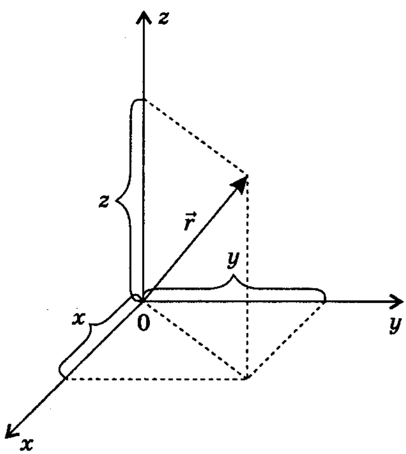


Рис. 2.3

Як описати **положення** точки відносно початку системи координат у фіксований момент часу t_f? У тривимірному просторі положення матеріальної точки задається трьома числами x, y, z — проекціями радіус-вектора $\vec{r} = (x, y, z)$ на осі координат $0x, 0y, 0z$ (рис. 2.3). Координати є незалежними одна від одної, але під час руху матеріальної точки залежать від часу t як від параметра. Для описання системи N матеріальних точок треба задати відповідну кількість координат:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \\ \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{r}_N = (x_N, y_N, z_N). \end{cases} \tag{2.1}$$

Отже, для визначення **положення** системи, що складається з N частинок, у фіксований момент часу необхідно задати положення всіх матеріальних точок, які до неї входять — x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,..., x_N, y_N, z_N — загалом, $3N$ координат.

Загальна кількість $3N$ незалежних координат називається **числом степенів вільності системи.**

Зручно перепозначити декартові координати таким чином:

$$\begin{cases} x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\dots,\ x_N,\quad y_N,\quad z_N \\ \Updownarrow\quad \Updownarrow\quad \Updownarrow\quad \Updownarrow\quad \Updownarrow\quad \Updownarrow\qquad \Updownarrow\qquad \Updownarrow\qquad \Updownarrow \\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\dots,\ q_{3N-2},\ q_{3N-1},\ q_{3N}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Координати x, y, z залежать від часу t, через це і величини q є функціями часу, $q = q(t)$. Простір є тривимірним, тому для N частинок ми отримуємо $S = 3N$ незалежних координат

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_S), \quad S = 3N. \tag{2.3}$$

У нашому конкретному випадку q має зміст координат (довжин). У подальшому для величин q залишимо лише одну ознаку — **незалежність між собою.** У теоретичній механіці можна підібрати будь-який набір незалежних змінних із будь-якою розмірністю (це може бути площа, кут тощо), за допомогою якого зручно описувати положення системи:

$$q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_S(t)). \tag{2.4}$$

Таким чином, **узагальнені координати** — це незалежні між собою змінні, що в загальному випадку залежать від часу й дозволяють у кожному конкретному випадку зручно описувати положення системи тіл.

Припустимо, що відома кількість незалежних змінних, які характеризують положення системи у фіксований момент часу. Чи можна визначити, як у подальшому буде відбуватися рух системи? Звісно, ні. Необхідно знати також і швидкості всіх частинок системи.

Введемо поняття узагальненої швидкості за аналогією із визначенням швидкості в декартовій системі координат.

Узагальнена швидкість — це похідна за часом від узагальненої координати:

$$\dot{q}(t) \equiv \frac{dq}{dt} \tag{2.5}$$

(домовимось похідну за часом від фізичної величини позначати крапкою над її буквеним позначенням).

Для системи з N частинок узагальнені швидкості записуються у вигляді:

$$\dot{q}(t) = \left(\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_S(t)\right), \quad S = 3N\,. \tag{2.6}$$

Зазвичай залежність від часу t мається на увазі, але не пишеться явно.

Два набори значень узагальнених координат $q \equiv q(t)$ та узагальнених швидкостей $\dot{q} \equiv \dot{q}(t)$ визначають механічний **стан системи** у фіксований момент часу.

Теоретична механіка вивчає проблеми руху, безперервну зміну станів системи. Тому необхідно з'єднати разом $q, \dot{q}$ в одному рівнянні руху $f(q, \dot{q},) = 0$. Це рівняння дозволить визначати стан системи в будь-який момент часу.

§ 3. Принцип найменшої дії за Гамільтоном

Як сформулювати аксіоматику принципу найменшої дії (ПНД)?

Як отримати диференціальне рівняння руху (рівняння Лаґранжа) з ПНД?

У чому полягає властивість адитивності функції Лаґранжа?

В основі аксіоматики теоретичної фізики лежить **принцип найменшої дії (ПНД) за Гамільтоном.**

Аксіоматика ПНД

1. Стан будь-якої фізичної системи у фіксований момент часу визначається **функцією Лаґранжа** L, яка залежить лише від узагальнених координат $q(t)$, узагальнених швидкостей $\dot{q}(t)$ і в загальному випадку від часу t.

$$L(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_S, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots, \dot{q}_S, t) \equiv L(q(t), \dot{q}(t), t) \equiv L(q, \dot{q}, t). \quad (3.1)$$

Для кожної конкретної задачі функція $L(q, \dot{q}, t)$ підлягає визначенню. У межах цього параграфу буде отримано тільки рівняння для функції L.

2. Поняття про **функціонал дії за Гамільтоном.**

Введемо функціонал дії таким чином (зауважимо, що функціонал дії часто називають просто дією):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt. \quad (3.2)$$

Тут t_1, t_2 — фіксовані моменти часу. В математиці функціоналом називається операція, аргументом якої є функція, а результатом — число (на відміну від звичайної функції, у якої і аргумент, і результат є числами). Таким чином, інтеграл у скінченних межах, що стоїть у формулі (3.2), є функціоналом. Під дією S розуміють міру руху за траєкторією з визначеного (початкового) положення системи, яке вона займає в початковий момент часу t_1, до визначеного (кінцевого) положення системи в момент часу t_2 (рис. 3.1). Виникає питання: як буде рухатися механічна система, за якою з траєкторій S, S_1, S_2,... при фіксованих положеннях системи в точках I і II? Підкреслимо, що тут мається на увазі траєкторія в просторі координат і часу — у так званому **конфігураційному просторі.** Яка з цих траєкторій є істинною? У нашому випадку положення системи в моменти часу t_1 і t_2 є фіксованими, тому в цих положеннях варіації координат (відхилення) дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} \delta q(t_1) &= 0, \\ \delta q(t_2) &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

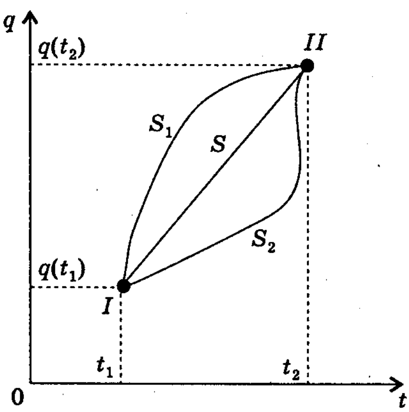


Рис. 3.1

Покажемо, у чому полягає відмінність між диференціалом функції dq та її варіацією δq. Під варіацією функції $q(t)$

розуміють такий її малий приріст (відхилення) δq, який не пов'язаний із приростом аргументу часу t (тобто отриманий при незмінному t), а обумовлений варіюванням самої функції $q(t)$ до близької до неї функції $q'(t)$. Із рис. 3.2 зрозуміло, у чому полягає різниця між dq і δq.

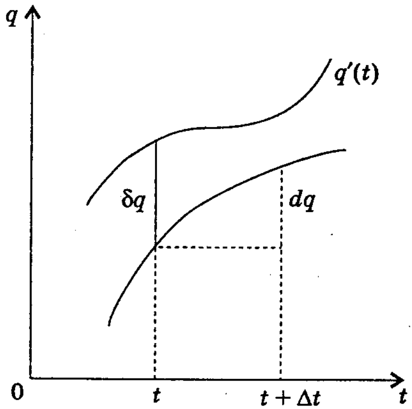


Рис. 3.2

У запропонованому курсі теоретичної механіки постулюємо*, що перехід системи з початкового (у момент часу t_1) до кінцевого (у момент часу t_2) стану має відбуватися таким чином, щоб функціонал дії (3.2) мав мінімальне значення. Як відомо, для звичайної функції умовою екстремуму є рівність нулю її похідної; аналогічно для функціонала є необхідною рівність нулю його варіації:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = 0. \quad (3.4)$$

Формули (3.2) і (3.4) являють собою інтегральну постановку задачі про рух матеріальних об'єктів. (У Додатку 1 розглянуто конкретний приклад того, що функціонал дії має мінімум при

* Для цього існує чіткий математичний доказ, який виходить за межі цього курсу.

русі за істинною траєкторією для випадку руху тіла під дією сили тяжіння.)

Розглянемо умову мінімуму функціонала дії (3.4) з урахуванням початкових умов (3.3). Нашою метою є отримання диференціального рівняння Лаґранжа для функції L, виходячи з ПНД. Для цього будемо вимагати, щоб функція L була диференційовною. Крім цього, для спрощення викладок будемо розглядати рух матеріальної точки для однієї просторової координати q. Із математичного аналізу відомо, що для диференційовних функцій можна змінити порядок слідування операцій варіювання та інтегрування. Тоді варіація δS дорівнює

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q,\dot{q},t)dt. \tag{3.5}$$

Визначимо варіацію L за допомогою розкладання в ряд Тейлора, обмеживщись лінійними членами

$$\delta L(q,\dot{q},t) = L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) - L(q,\dot{q},t) =$$

$$= L(q,\dot{q},t) + \delta q\frac{\partial L}{\partial q} + \delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \ldots - L(q,\dot{q},t), \tag{3.6}$$

тоді

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q,\dot{q},t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\,dt. \tag{3.7}$$

Знайдемо другий інтеграл за частинами:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\,dt = \left|\delta\dot{q} = \delta\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q\right| = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\delta q =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dt.$$

Об'єднуючи обидва інтеграли у формулі (3.7) і враховуючи той факт, що варіація функціонала дії має дорівнювати нулю, отримаємо:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial q}\delta q\,dt+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\,dt=$$

$$=\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q(t_2)-\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right]\delta q\,dt=0. \qquad (3.8)$$

Виходячи з початкових умов (3.3), перші два доданки у формулі (3.8) дорівнюють нулю. Через те, що при русі за траєкторією варіація координати δq і диференціал за часом dt можуть бути довільними, рівність нулю δS можлива за умови, що підінтегральний вираз у квадратних дужках (3.8) тотожно дорівнює нулю:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}=0\,. \qquad (3.9)$$

Отриманий вираз називається **рівнянням Лаґранжа.** Воно є основним диференціальним рівнянням руху — рівнянням руху за істинною траєкторією. Як видно з формули (3.9), рівняння Лаґранжа являє собою диференціальне рівняння другого порядку.

Узагальнимо це рівняння на випадок S координат

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad i=1,2,\ldots,S\,. \qquad (3.10)$$

Для його повного розв'язання необхідно задати $2S$ початкових умов:

$$\begin{cases} q_i(t)\big|_{t=t_0}=q_i^{(0)}; \\ \dot q_i(t)\big|_{t=t_0}=\dot q_i^{(0)}; \end{cases} \quad i=1,2,\ldots,S. \qquad (3.11)$$

На цьому етапі функція L ще не відома (її визначення наводиться в наступному параграфі).

§ 4. Функція Лаґранжа вільної частинки

Загальні властивості функції Лаґранжа, її адитивність і неоднозначність визначення.
Якою є загальна постановка задачі про рух у теоретичній механіці? Як записати функцію Лаґранжа для найпростішого випадку вільної частинки?
Від яких змінних і чому не може залежати функція Лаґранжа вільної частинки? Від яких змінних вона має залежати і яким чином?
Якою є розмірність функції Лаґранжа?
Як визначається швидкість і квадрат швидкості частинки? Як вони перетворюються при переході від однієї ІСВ до іншої?
Як записати функцію Лаґранжа для довільної сукупності невзаємодіючих частинок?

На основі ПНД можна показати, що **функція Лаґранжа визначена неоднозначно**. Доведемо цей важливий для подальшого розгляду факт.

Нехай ми маємо функціонал дії, визначений за формулою (3.2)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt,$$

варіація якого, згідно з ПНД, дорівнює нулю: $\delta S = 0$. Чи можуть існувати дві різні функції Лаґранжа, які забезпечують виконання умови (3.4)? На яку величину вони можуть відрізнятися в загальному випадку?

Припустимо, що дві функції Лаґранжа L і L' відрізняються на повну похідну за часом від деякої функції f, яка залежить від координати q і часу t:

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t). \tag{4.1}$$

Тоді функціонал дії S', що побудований для функції L', дорівнюватиме:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt + \int_{t_1}^{t_2} df(q,t) =$$
$$= S + f(q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} \equiv S + \text{const}.$$

Варіація функціонала дії S'

$$\delta S' = \delta(S + \text{const}) = \delta S, \tag{4.2}$$

оскільки $\delta(\text{const}) = 0$. Із формул (4.2) і (3.4) випливає, що $\delta S' = \delta S \equiv 0$. Зауважимо, що функція f у цьому доведенні була довільною функцією, яка в загальному випадку залежить від координати й часу. Звідси можна зробити важливий висновок: **дві функції Лаґранжа, що відрізняються одна від одної на повну похідну від довільної функції координат і часу, приводять до одного й того ж рівняння руху.** Тобто у виборі функцій Лаґранжа L є свобода, що матиме суттєве значення при записі рівнянь руху в різних ІСВ.

Розглянемо приклад замкненої системи, тобто системи, яка не взаємодіє з оточуючим простором (рис. 4.1). Нехай ця система характеризується своєю власною функцією Лаґранжа L_{A+B}. Розділимо цю систему на дві підсистеми A і B, після цього подумки розсунемо їх на визначену кінцеву відстань l (рис. 4.2).

Чим більшою є відстань між цими частинами, тим меншою буде взаємодія між ними. При граничному значенні $l \to \infty$ вона дорівнюватиме нулю. Цілісна система, що описується загальною функцією Лаґранжа L_{A+B}, характеризуватиметься сумою двох функцій L_A і L_B:

$$L_{A+B} = L_A + L_B. \tag{4.3}$$

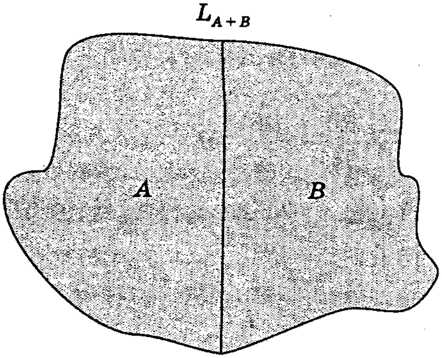


Рис. 4.1

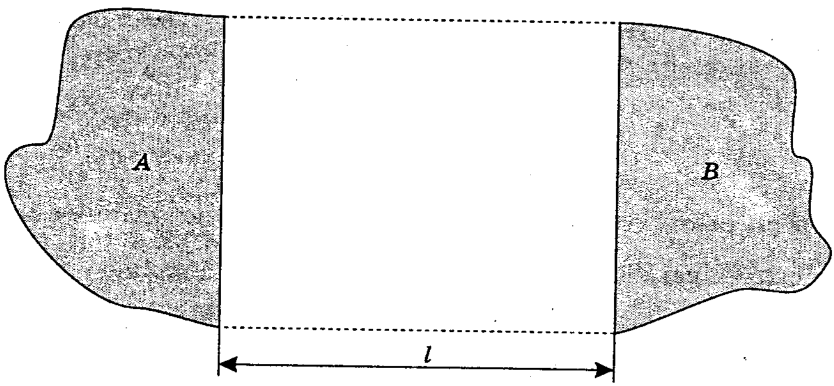


Рис. 4.2

Повна функція Лаґранжа системи дорівнює сумі функцій Лаґранжа її окремих частин за відсутності взаємодії між підсистемами. Ця властивість називається властивістю **адитивності** функції Лаґранжа. Термін «адитивність» походить від англійського слова «*addition*», що означає додавання.

З однорідності рівняння (3.10) випливає, що функція Лаґранжа в ньому визначена з точністю до довільного множника. Це є наслідком того, що при русі системи $\delta S = 0$.

В обох постановках задачі про рух матеріальних тіл у теоретичній механіці, як в інтегральній, коли необхідно розв'язувати варіаційну задачу (3.4) з умовами вигляду (3.3), так і в диференціальній, коли треба розв'язувати диференціальне рівняння з початковими умовами

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \\ q_i(t)\big|_{t=t_0} = q_i^{(0)}, \qquad i = 1,2,\ldots,S, \\ \dot{q}_i(t)\big|_{t=t_0} = \dot{q}_i^{(0)}, \end{cases} \tag{4.4}$$

фігурує функція Лаґранжа L — так званий «паспорт» стану системи.

Перед тим як перейти до визначення L, сформулюємо її основні властивості.

1) Вона визначена не однозначно, а з точністю до повної похідної за часом від довільної функції координат і часу:

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}f(q,t).$$

При цьому доданок $\dfrac{d}{dt}f(q,t)$ пов'язаний з існуванням нескінченної кількості ІСВ.

2) Функцію L можна домножити на константу:

$$L'(q,\dot{q},t) = \text{const}\cdot L(q,\dot{q},t),$$

при цьому рівняння Лаґранжа (3.10) не зміниться.

3) Для системи, яка складається з двох частин, що не взаємодіють

$$\text{const}\cdot L_{A+B} = \text{const}\cdot L_A + \text{const}\cdot L_B.$$

Тут свобода при обиранні константи пов'язана з адитивністю функції Лаґранжа.

Знайдемо функцію Лаґранжа L для найпростішого випадку — вільної частинки.

Вільна частинка — це частинка, на яку не діють сили. Вона може або перебувати в стані спокою, або рухатися прямолінійно й рівномірно.

Для зручності від узагальнених координат у функції Лаґранжа перейдемо до декартових координат:

$$L(q,\dot{q},t)=L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t).$$

Визначимо, від чого **не залежить** функція Лаґранжа. Для цього скористаємось властивостями простору й часу. Природно, функція L має не залежати:

від координат, тому що це суперечить властивості **однорідності простору;**

від часу, оскільки це суперечить властивості **однорідності часу;**

від напрямку вектора швидкості $\vec{v}$ — це суперечить властивості **ізотропії простору.**

Звідси випливає, що функція Лаґранжа вільної частинки **може залежати** лише від абсолютного значення швидкості або від квадрата швидкості.

Будемо шукати функцію $L(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ у вигляді:

$$L=a\vec{v}^2, \tag{4.5}$$

де a — коефіцієнт пропорційності, а $\vec{v}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$.

Із теорії відносності Ґалілея—Ньютона відомо, що рух відбувається однаково в різних ІСВ. При переході від однієї ІСВ до іншої виконується класичний закон додавання швидкостей:

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{V}, \quad \vec{V}=\text{const}.$$

Виходячи з формули (4.5), $L\sim\vec{v}^2$. Знайдемо квадрат швидкості, використовуючи класичний закон додавання швидкостей:

$$\vec{v}^2=\vec{v}\cdot\vec{v}= \ =(\vec{v}'+\vec{V})\cdot(\vec{v}'+\vec{V})=\vec{v}'^2+2\vec{v}'\cdot\vec{V}+\vec{V}^2.$$

За визначенням $\vec{v}'=\dfrac{d\vec{r}'}{dt}$, тому $\vec{v}^2$ можна переписати у вигляді

$$\vec{v}^2=\vec{v}'^2+\frac{d}{dt}F(\vec{r}',t),$$

де $F(\vec{r}',t)=(2\vec{r}'\cdot\vec{V}+\vec{V}^2t)$.

Використовуючи перехід від штрихованої системи координат до нештрихованої (1.4) ($\vec{r}'=\vec{r}-\vec{V}t$), маємо

$$\vec{v}^2=\vec{v}'^2+\frac{d}{dt}f(\vec{r},t).$$

Тут $f(\vec{r},t)$ виходить із виразу для $F(\vec{r}',t)$ після підставлення згаданого виразу (1.4) для $\vec{r}'$ через $\vec{r}$. Тоді формула (4.5) матиме вигляд:

$$L=a\vec{v}^2=a\vec{v}'^2+a\frac{d}{dt}f\left(\vec{r},t\right).$$

Із останньої формули видно, що функція Лаґранжа визначена з точністю до доданка, що є повною похідною від функції координат і часу, який, згідно з властивістю функції Лаґранжа (4.1), можна відкинути. Таким чином, функція Лаґранжа вільної частинки є квадратичною функцією швидкості в будь-якій ІСВ:

$$L=a\vec{v}^2.$$

Із курсу загальної фізики відомий вираз для кінетичної енергії $T=m\vec{v}^2/2$, яка є квадратичною функцією швидкості. Порівнявши ці дві формули, оберемо в (4.5) $a=m/2$, де m — маса частинки, і запишемо остаточний вираз для функції Лаґранжа вільної частинки:

$$L=\frac{m}{2}\vec{v}^2. \tag{4.6}$$

Для всіх об'єктів теоретичної механіки $m\geq 0$. Якщо маса тіла була б від'ємною, це суперечило б ПНД. Справді, підставимо (4.6) у визначення функціонала дії (3.2). Тоді

$$S=\frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2}\vec{v}^2dt. \tag{4.7}$$

Доведемо, що маса тіла не може бути від'ємною. Припустимо, що $m<0$. При достатньо швидкому зміненні $\vec{r}$ у часі (швидкому русі) величина $\vec{v}^2 = \left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)^2$ може бути як завгодно великою. При $m < 0$ функціонал дії (4.7) може набувати як завгодно великого за абсолютною величиною значення. При цьому він буде від'ємним, тобто S не буде мати мінімуму, а це суперечить ПНД. Звідси випливає, що маса тіла може бути лише невід'ємною величиною $m \geq 0$.

Для всіх реальних об'єктів класичної теоретичної механіки $m > 0$. Хоча в релятивістській механіці (механіці великих швидкостей) є частинки, які мають нульову масу покою (наприклад, фотон, маса покою якого $m_0 = 0$).

Розглянемо систему, що складається з **N невзаємодіючих частинок.** Функція Лаґранжа i-ої окремої частинки матиме вигляд:

$$L_i = m_i \vec{v}_i^{\,2} / 2 .$$

Із принципу адитивності випливає, що результуюча функція Лаґранжа для системи невзаємодіючих частинок запишеться як сума функцій Лаґранжа всіх частинок системи:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} . \tag{4.8}$$

§ 5. Функція Лаґранжа системи взаємодіючих частинок

Що таке замкнена система взаємодіючих частинок? Який вигляд і чому повинна мати функція Лаґранжа для цієї фізичної системи?
Як проявляє себе абсолютність часу при записі функції Лаґранжа системи взаємодіючих частинок?
Як записати рівняння Ньютона для цієї системи? Що таке сила і від яких змінних вона залежить у класичній механіці?
Як зміниться функція Лаґранжа при заміні декартових координат на узагальнені координати?
Від яких змінних і чому залежить функція Лаґранжа незамкненої системи?
Як записати вирази для елемента довжини й квадрата швидкості в різних ортогональних системах координат?

Розглянемо систему матеріальних об'єктів, що взаємодіють один з одним, але при цьому будемо вважати, що ця система не взаємодіє з жодними сторонніми об'єктами (рис. 5.1). Така система називається **замкненою**. Отже, частинки взаємодіють між собою. Як це має відбитися на записі функції Лаґранжа?

За визначенням (3.1) функція Лаґранжа залежить від координат, швидкостей і, у загальному випадку, часу. У декартовій системі координат

$$L = L\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N, t\right).$$

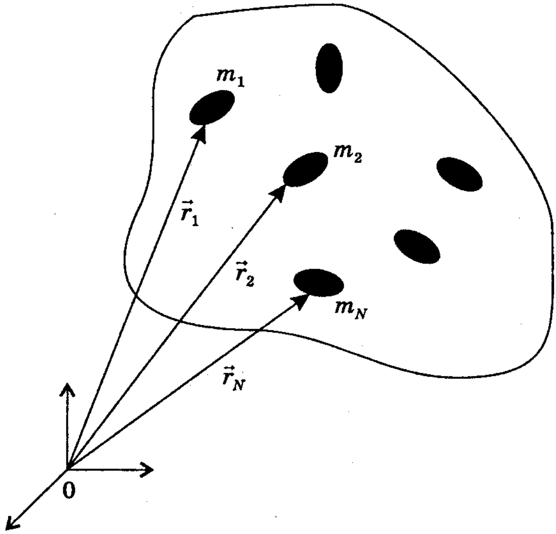


Рис. 5.1

Для системи частинок, що не взаємодіють, функція Лаґранжа є сумою кінетичних енергій усіх частинок системи, які залежать лише від швидкостей

$$L \cong T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 . \tag{5.1}$$

Виходячи з принципу адитивності, взаємодія між частинками може бути описана додаванням до функції L частинок, що не взаємодіють, певної функції координат (яка залежить від характеру взаємодії). Позначимо її $-U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$.

Тоді функція Лаґранжа системи взаємодіючих частинок буде записана у вигляді:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N). \tag{5.2}$$

Оскільки $T = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^2 / 2$ — кінетична енергія системи, а $-U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ додається до неї, то U також має розмірність енергії. Насправді, ця величина відповідає потенціальній енергії системи. Таким чином, для системи взаємодіючих частинок функція Лаґранжа являє собою різницю між кінетичною та потенціальною енергіями системи:

$$L = T - U\,. \tag{5.3}$$

Потенціальна енергія залежить лише від положення всіх матеріальних об'єктів системи у фіксований момент часу. Це означає, що зміна положення однієї з них **миттєво відбивається** на всіх інших (швидкість розповсюдження взаємодії в класичній механіці є нескінченною). Це пов'язано з **абсолютністю часу** та принципом відносності Ґалілея—Ньютона. Якби швидкість розповсюдження взаємодії була б скінченною, ця швидкість була б різною в різних ІСВ, тому що з абсолютності часу для різних ІСВ випливає звичайне правило додавання швидкостей: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$. Але тоді закони руху були б різними в різних ІСВ, що суперечить принципу відносності Ґалілея—Ньютона.

Час у формулу (5.3) не входить явно (хоча і координати, і швидкості можуть явно залежати від часу), оскільки для замкненої системи це суперечило б властивості абсолютності часу.

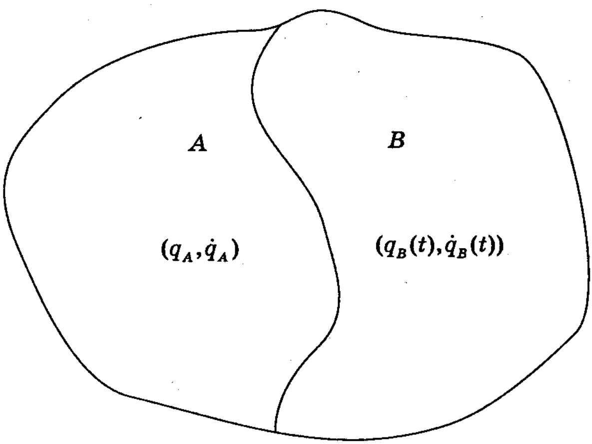


Рис. 5.2

З'ясуємо, від яких змінних може залежати функція Лаґранжа незамкненої системи (системи, що взаємодіє з іншою системою або з іншими об'єктами). Розглянемо незамкнену систему A, яка взаємодіє із системою B. Система A рухається в заданому зовнішньому полі системи B.

Будемо вважати, що сукупна система $A+B$ є замкненою (такою, що не взаємодіє з оточуючим середовищем поза замкненою кривою, яка охоплює систему $A+B$). Нехай також координати та швидкості системи B задані в явному вигляді як функції часу, тобто $q_B(t)$ і $\dot{q}_B(t)$ відомі (рис. 5.2). Необхідно знайти величини, які характеризують рух системи A, а саме, координати q_A і швидкості $\dot{q}_A$.

Для визначення функції Лаґранжа L_A системи A скористаємось функцією Лаґранжа L сукупної системи $A+B$:

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t)) - U(q_A, q_B(t)), \tag{5.4}$$

де T_A і T_B — кінетичні енергії систем A і B, а U — загальна потенціальна енергія системи $A+B$. Підставивши до формули (5.4) явні вирази $q_B = q_B(t), \dot{q}_B = \dot{q}_B(t)$, отримаємо, що кінетична енергія $T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ залежить лише від часу. Природно, вона може бути представлена у вигляді повної похідної від деякої функції часу (її первісної):

$$T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t)) \equiv \frac{d}{dt} F(t).$$

Оскільки функція Лаґранжа визначена з точністю до доданку, який є повною похідною від функції координат і часу (4.1) (або тільки часу в нашому випадку), то $T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ можна випустити.

Отже, функція Лаґранжа незамкненої системи L_A матиме вигляд

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)) \equiv T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, t). \tag{5.5}$$

Тут нами враховано явну залежність $q_B = q_B(t)$.

Таким чином, рух системи в зовнішньому полі описується функцією Лаґранжа звичайного типу лише з тією відмінністю, що потенціальна енергія тепер може явно залежати від часу. Через це і функція Лаґранжа для незамкнених систем буде явно залежати від часу. Отже, функція Лаґранжа:

$L = L(q,\dot{q})$ — для замкнених систем;

$L = L(q,\dot{q},t)$ — для незамкнених систем.

Розглянемо одну частинку, яка перебуває в полі зовнішньої сили. Її функція Лаґранжа має вигляд (див. формулу (5.2)):

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r}), \tag{5.6}$$

а рівняння Лаґранжа (3.9) у декартовій системі координат

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \tag{5.7}$$

або (використовуючи формули Додатку 2)

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{\vec{v}} L = \operatorname{grad}_{\vec{r}} L\,. \tag{5.8}$$

Підставимо у формулу (5.8) функцію Лаґранжа (5.6) й отримаємо:

$$\frac{d}{dt}m\vec{v} = -\operatorname{grad}_{\vec{r}} U(\vec{r})\,. \tag{5.9}$$

Величина ліворуч у формулі (5.9) — зміна класичного імпульсу в часі $\frac{d}{dt}\vec{p}$, яка, згідно з другим законом Ньютона, дорівнює силі, що діє на частинку. Отже, сила визначається таким чином:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}_{\vec{r}} U(\vec{r}) \equiv -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\,. \tag{5.10}$$

Із цієї формули стає зрозуміло, що сила нерозривно пов'язана з потенціальною енергією.

Розглянемо найпростіший випадок — однорідне поле сил, тобто таке поле сил, в усіх точках якого на частинку діє постійна сила $\vec{F}$.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \text{const}\,.$$

Із формули (5.10) після інтегрування за $\vec{r}$ випливає, що потенціальна енергія в такому полі дорівнює взятому із зворотним знаком скалярному добутку (див. Додаток 2) сили на радіус-вектор:

$$U = -\vec{F}\cdot\vec{r}\,. \tag{5.11}$$

У декартовій системі координат

$$\vec{F} = \vec{n}_x F_x + \vec{n}_y F_y + \vec{n}_z F_z\,,\ \ \vec{r} = \vec{n}_x x + \vec{n}_y y + \vec{n}_z z\,,$$

тому потенціальна енергія має такий вигляд:

$$U = -xF_x - yF_y - zF_z\,. \tag{5.12}$$

Нагадаємо, що в декартовій системі координат кінетична енергія є квадратичною функцією швидкості (див. (5.1)). Покажемо, що при переході до узагальнених координат кінетична енергія може також залежати і від координат (цю залежність можна простежити у формулі (5.5)), залишаючись при цьому квадратичною функцією швидкості.

Нехай декартова координата i-ої частинки є функцією узагальнених координат: $x_i = f_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$. Функція Лаґранжа в декартовій системі координат — квадратична функція швидкості $v_i^2 \equiv \dot{x}_i^2$

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2 - U(x_i, t)\,. \tag{5.13}$$

Повна похідна від координати x_i за часом находиться так:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\,.$$

Через те, що результат підсумовування не залежить від індексу цього підсумовування, індекс може бути позначений будь-якою буквою.

$$\dot{x}_i = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\,.$$

Квадрат швидкості отримаємо таким чином:

$$\dot{x}_i^2=\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\cdot\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\equiv\sum_{j,k}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k,$$

при цьому функція Лаґранжа з формули (5.13) буде, як і раніше, квадратичною функцією узагальнених швидкостей:

$$L=\sum_{j,k}a_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k-U\big(f_i(q_1,q_2,\dots,q_N),t\big), \tag{5.14}$$

а функція $a_{jk}(q)=\dfrac{1}{2}\sum_i m_i\dfrac{\partial f_i}{\partial q_j}\cdot\dfrac{\partial f_i}{\partial q_k}$ — функцією узагальнених координат.

Можна показати, що в класичній механіці всі рухи є оборотними, тобто при зміні знака в часу $t\to -t$ потенціальна енергія U не зміниться, а швидкість при $t\to -t$ змінить знак на протилежний ($\vec{v}=\left.\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t\to -t}=-\vec{v}$). При цьому кінетична енергія T не зміниться, оскільки $T\sim\vec{v}^2$.

Звідси випливає, що зміна знака часу не змінює функцію Лаґранжа $L=T-U$. Тобто, у теоретичній механіці можна розв'язувати задачі як у прямому напрямку перебігу часу, так і у зворотному.

Елементарний інтервал у декартовій системі координат, як відомо, визначається так: $dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Унормуємо довжину dl на елементарний інтервал часу dt.

$$\frac{dl}{dt}=\sqrt{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\equiv v. \tag{5.15}$$

Значення швидкості визначається як відношення величини нескінченно малого переміщення до часу, за який це переміщення відбулося. Це є наслідком наших уявлень про простір і час у класичній механіці. Час у класичній механіці тече однаково в усіх ІСВ: $dt=dt'$. Довжини елементарних інтервалів у просторі також є інваріантними при переході від однієї ІСВ до іншої: $dl=dl'$, тобто $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}$.

Геометрія, у якій квадрат елементарного інтервалу визначається таким чином:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad (5.16)$$

називається евклідовою.

Через те, що кінетична енергія $T \sim v^2$, для її визначення достатньо знайти квадрат елемента довжини дуги dl^2 в різних системах відліку й унормувати його на dt^2 (докладніше про рух у різних системах координат розповідається в Додатку 3):

а) у декартовій системі координат

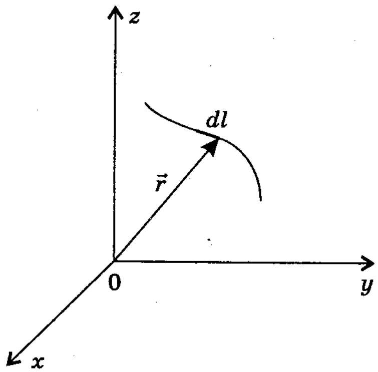


Рис. 5.3

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2; \\ v^2 &= \frac{dl^2}{dt^2} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2; \end{aligned} \qquad (5.17)$$

б) у циліндричній системі координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dl^2 &= d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2; \\ v^2 &= \frac{dl^2}{dt^2} = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2; \end{aligned} \qquad (5.18)$$

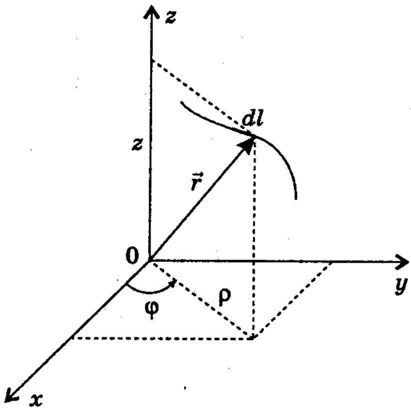


Рис. 5.4

в) у сферичній системі координат

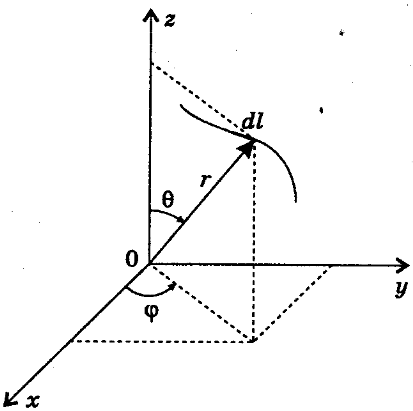


Рис. 5.5

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta; \end{cases}$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2; \qquad (5.19)$$

$$v^2 = \frac{dl^2}{dt^2} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2.$$

Розділ II
ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

§ 6. Енергія системи

Що таке інтеграли руху? Скільки їх має замкнена система?
Яким є походження законів збереження? У чому полягає відмінна властивість збереження величин у теоретичній механіці?
Яку величину, що зберігається, породжує однорідність часу?
Як визначити енергію замкненої системи? Звідки з'являється її адитивність?
Що таке консервативна система? Як знайти її енергію?

Як було показано раніше, механічний стан системи з N частинок у фіксований момент часу визначається набором S узагальнених координат і S узагальнених швидкостей. При русі замкненої системи $2S$ її величин $q_i, \dot{q}_i$ $(i=1,2,3,\ldots,S)$ змінюються із часом. Однак існують такі функції координат і швидкостей $f_0(q_i(t),\dot{q}_i(t))$, які зберігають при русі сталі значення, що залежать лише від початкових умов. Такі функції називаються **інтегралами руху.**

Загальна кількість їх менша або дорівнює $2S(6N)$, де S — кількість степенів вільності, а $6N$ — загальна кількість координат і швидкостей системи. При цьому **максимальне** число інтегралів руху $2S$ існує в такої замкненої системи, для якої можливе повне розділення змінних у диференціальних рівняннях руху (3.10) з початковими умовами (3.11).

Загальний розв'язок задачі руху (3.10):

$$\begin{cases} q_i = q_i(t,C_1,C_2,\ldots,C_{2S}), & i=1,2,\ldots,S, \\ \dot{q}_i = \dot{q}_i(t,C_1,C_2,\ldots,C_{2S}), & i=1,2,\ldots,S, \end{cases} \tag{6.1}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_{2S}$ — довільні сталі величини, які визначаються з початкових умов (3.11).

Розв'язуємо систему (6.1) відносно C_j, тобто знаходимо в початковий момент часу $C_{j0} = C_j\left(t_0, q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \ldots, q_S^{(0)}, \dot{q}_1^{(0)}, \dot{q}_2^{(0)}, \ldots, \dot{q}_S^{(0)}\right)$, $j = 1, 2, \ldots, 2S$. Тим самим визначимо інтеграли руху C_{j0}.

Серед інтегралів руху C_{j0} є головні, які мають найважливіше світоглядне значення, що пов'язане з основними властивостями простору й часу — однорідністю та ізотропією.

Як відомо, для замкненої системи функція Лаґранжа не залежить від часу явно $L = L(q_i, \dot{q}_i)$, оскільки час є однорідним. Звідси випливає перший інтеграл руху, пов'язаний з **однорідністю часу**, який називається **енергією.**

Візьмемо повну похідну від L за часом:

$$\frac{d}{dt}L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}}{dt} =$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i. \tag{6.2}$$

Двома крапками позначена друга похідна від координат за часом. Відзначимо також, що до правої частини формули (6.2) не входить частинна похідна від функції Лаґранжа за часом $\frac{\partial L}{\partial t}$, оскільки L не залежить від часу явно.

Скористаймося рівнянням (3.10) у вигляді $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ та об'єднаємо в останньому виразі (6.2) дві суми в одну

$$\frac{d}{dt}L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right] \equiv \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\,.$$

Остаточно одержимо, що

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L(q_i(t), \dot{q}_i(t))\right] \equiv 0\,. \tag{6.3}$$

Через те, що повна похідна за часом від величини, яка стоїть у квадратних дужках у (6.3), дорівнює нулю, ця величина не залежить від часу і є першим інтегралом руху — **енергією замкненої системи**

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i(t), \dot{q}_i(t)). \qquad (6.4)$$

Енергія замкнених систем залишається постійною, оскільки функція Лаґранжа для таких систем не залежить явно від часу $L \neq L(t)$.

Функція Лаґранжа складається з двох частин: кінетичної енергії, яка залежить лише від квадрата швидкостей частинок системи, і потенціальної енергії, що залежить лише від координат:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) = T - U. \qquad (6.5)$$

Використовуючи вираз (6.5), розглянемо $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$ із виразу (6.4) для кожної частинки в декартовій системі координат. У результаті отримаємо:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \vec{v}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i} \vec{v}_i = \sum_i m \vec{v}_i^2 = 2T.$$

В останньому співвідношенні враховано, що похідна за швидкістю від потенціальної енергії дорівнює нулю. Використаємо останній результат і формулу (6.4) для отримання іншого виразу для повної енергії механічної системи:

$$E = 2T - L = 2T - (T - U) = T + U. \qquad (6.6)$$

Якщо застосувати термінологію загальної фізики, то повна енергія системи є сумою двох енергій — кінетичної T і потенціальної U.

Закон збереження повної механічної енергії виконується не лише для замкнених систем. Він також є справедливим для так званої **консервативної системи** — системи, яка перебуває в постійному зовнішньому полі (і в цьому випадку функція Лаґранжа явно від часу не залежить).

Закон збереження енергії у формі (6.6) для консервативної системи слід розуміти і як закон перетворення механічної енергії, оскільки в процесі руху такої системи відбувається безперервне перетворення її кінетичної енергії на потенціальну й назад.

Енергія системи є величиною адитивною. Ця властивість пов'язана з адитивністю функції Лаґранжа (за відсутності взаємодії між частинами системи), яка входить у визначення енергії (6.4). Якщо знехтувати взаємодією частинок, то повну енергію (6.6) замкненої системи й системи, що перебуває в потенціальному силовому полі, можна представити у вигляді

$$E=\sum_{i=1}^{N}E_i,\quad E_i=\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^{\,2}+U^{(e)}\left(\vec{r}_i\right), \tag{6.7}$$

де E_i — механічна енергія окремої частинки, а $U^{(e)}\left(\vec{r}_i\right)$ — енергія зовнішнього поля, яке діє на i-у частинку.

§ 7. Імпульс механічної системи

Як відбивається властивість однорідності простору на функції Лаґранжа замкненої системи?
Як отримати закон збереження імпульсу? У чому полягає відмінність властивостей адитивності імпульсу й енергії?
Як визначається сила через функцію Лаґранжа? Як показати, що третій закон Ньютона є наслідком однорідності простору?
Як визначається узагальнений імпульс? Що таке узагальнена сила?

Закони збереження мають за першооснову властивості симетрії простору й часу. З однорідності часу, як показано раніше, випливає закон збереження енергії.

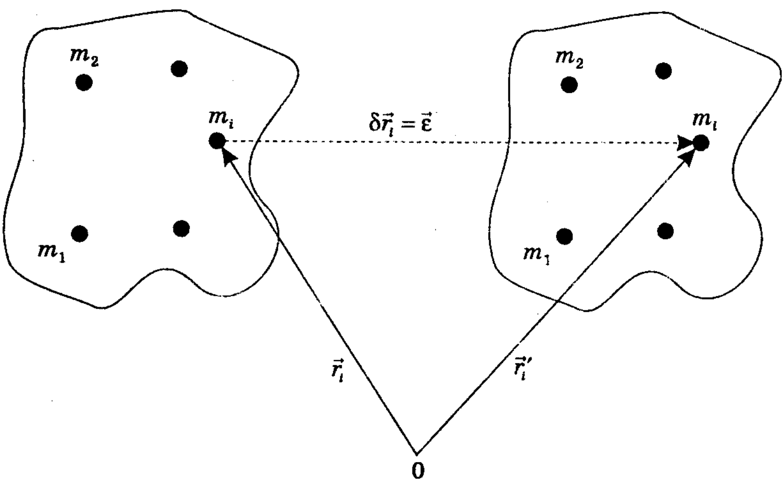


Рис. 7.1

З'ясуємо, який закон збереження випливає з **однорідності простору.**

Нехай замкнена система характеризується функцією Лаґранжа вигляду $L \equiv L(\vec{r}_i, \vec{v}_i)$. У силу однорідності простору потенціальна енергія (отже, і функція Лаґранжа) замкненої системи залежить від відстаней між частинками системи $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ і не зміниться за будь-якого паралельного перенесення системи в просторі як єдиного цілого. Під паралельним перенесенням системи (рис. 7.1) будемо розуміти таке перетворення, за якого всі частинки системи зміщуються на той самий відрізок $\delta\vec{r}_i = \vec{\varepsilon}$, а їхні радіус-вектори перетворюються за законом:

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i \equiv \vec{r}_i + \vec{\varepsilon}. \tag{7.1}$$

Вважатимемо, що відбувається перенесення системи на нескінченно малий вектор $\vec{\varepsilon}$ (природно, сума нескінченно малих перенесень дасть скінченний вектор перенесення). При цьому через однорідність простору функція Лаґранжа не має змінитися, тобто її варіація для всіх частинок має дорівнювати нулю: $\delta L \equiv 0$. Знайдемо варіацію функції L за всіма частинками системи

$$\delta L(\vec{r}_i, \vec{v}_i) = L(\vec{r}_i + \delta\vec{r}_i, \vec{v}_i) - L(\vec{r}_i, \vec{v}_i). \tag{7.2}$$

Розкладемо функцію Лаґранжа у (7.2) у ряд за малим параметром $\delta\vec{r}_i$ та обмежимося двома доданками:

$$\delta L(\vec{r}_i, \vec{v}_i) = L(\vec{r}_i, \vec{v}_i) + \sum_i \frac{\partial L(\vec{r}_i, \vec{v}_i)}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i + \ldots - L(\vec{r}_i, \vec{v}_i).$$

Через те що $\delta L \equiv 0$, і для всіх перенесень $\delta\vec{r}_i = \vec{\varepsilon}$, для замкненої механічної системи, яка розглядається, отримаємо

$$\vec{\varepsilon}\sum_i \frac{\partial L(\vec{r}_i, \vec{v}_i)}{\partial \vec{r}_i} \equiv 0. \tag{7.3}$$

На початку нашого розгляду ми припустили, що $\vec{\varepsilon} \neq 0$, тому в останньому співвідношенні нулю дорівнює сума. У результаті одержимо важливий проміжний результат:

$$\sum_i \frac{\partial L(\vec{r}_i, \vec{v}_i)}{\partial \vec{r}_i} \equiv 0. \tag{7.4}$$

Використовуючи рівняння Лаґранжа (3.10), записане в декартовій системі координат $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$, тотожність (7.4) перепишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) \equiv 0. \tag{7.5}$$

Рівняння (7.5) показує, що в процесі руху в замкненій механічній системі зберігається векторна величина, яка називається **імпульсом системи**:

$$\vec{P} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}. \tag{7.6}$$

Функція Лаґранжа для замкненої системи визначається співвідношенням (5.2). Підставивши цей вираз у (7.6), отримаємо добре відому формулу для механічного імпульсу:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}. \tag{7.7}$$

Через те, що векторна рівність (7.7) еквівалентна трьом скалярним

$$\begin{cases} P_x = \sum_i m_i \dot{x}_i = \text{const}, \\ P_y = \sum_i m_i \dot{y}_i = \text{const}, \\ P_z = \sum_i m_i \dot{z}_i = \text{const}, \end{cases} \tag{7.8}$$

можна сказати, що з однорідністю простору пов'язані три інтеграли руху замкненої механічної системи (7.7).

За відсутності зовнішнього поля є справедливими рівності (7.8), тобто всі три компоненти вектора імпульсу зберігаються. Окремі компоненти імпульсу можуть зберігатися і за наявності зовнішнього поля, якщо потенціальна енергія цього поля не залежить від деякої координати. При паралельному перенесенні системи вздовж відповідних осей механічні властивості простору не змінюються, простір залишається однорідним. Наприклад, в однорідному полі, направленому вздовж осі $0x$, зберігаються компоненти імпульсу вздовж осей $0y$ і $0z$.

Адитивність вектора імпульсу очевидна, виходячи з його визначення (7.6): його визначено через функцію Лаґранжа, а функція Лаґранжа є адитивною.

Однак, на відміну від енергії, імпульс довільної системи дорівнює сумі імпульсів окремих частинок:

$$\vec{P}=\sum_i \vec{p}_i, \quad \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i. \tag{7.9}$$

Це твердження є справедливим незалежно від того, чи можна знехтувати взаємодією між окремими частинками системи.

Закон збереження механічного імпульсу (7.7) є окремим випадком загального закону збереження та перетворення кількості руху матерії, який стверджує, що кількість руху (імпульс) будь-якої форми матерії не виникає з нічого й не зникає, а переходить у кількість руху інших форм або видів матерії.

Розглянемо, наприклад, замкнену (у механічному змісті) систему заряджених частинок, що рухаються. Як свідчить досвід, механічний імпульс такої системи не зберігається. Це пов'язано з тим, що під час руху заряджених частинок виникає електромагнітне поле, і частина механічного імпульсу переходить в імпульс електромагнітного поля. Отже, коли ми стикаємося з незбереженням імпульсу замкненої механічної системи, причина зникнення механічного імпульсу пов'язана з перетворенням деякої його частини на імпульс інших форм руху матерії (або з помилковістю припущення про замкненість досліджуваної системи).

Покажемо, що третій закон Ньютона прямо пов'язаний із законом збереження імпульсу. Уважніше розглянемо формулу (7.4). Підставивши до неї функцію Лаґранжа для системи взаємодіючих частинок (5.2) і використавши вираз для сили (5.10), отримаємо, що векторна сума всіх внутрішніх сил, які діють у механічній системі, дорівнює нулю:

$$\sum_{i,j}\vec{F}_{ij}=0,\quad i\neq j. \tag{7.10}$$

Тут $\vec{F}_{ij}$ — сила, що діє з боку i-ої частинки на j-у частинку. Підсумовування відбувається за обома індексами по всіх частинках, які входять до системи. У випадку системи з двох частинок із вищевказаного отримуємо, що

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}, \tag{7.11}$$

тобто закон рівності дії та протидії. Тому формула (7.10) є узагальненням третього закону механіки на випадок системи, що складається з багатьох частинок.

Введемо поняття **узагальненого імпульсу.** У довільній системі координат узагальнений імпульс визначимо за аналогією з імпульсом у декартовій системі координат (7.6). Для цього у формулі (7.6) замінимо швидкість $\vec{v}_i$ на узагальнену швидкість $\dot{q}_i$ та отримаємо

$$P=\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i},\quad i=1,2,\ldots,S, \tag{7.12}$$

де S — кількість степенів вільності ($S=3N$, N — кількість частинок), а величини

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} \tag{7.13}$$

називаються узагальненими імпульсами частинок, відповідними до i-ої координати.

Узагальнений імпульс є скалярною величиною та має розмірність звичайного класичного імпульсу $\left[\text{кг}\times\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right]$, якщо узагальнена координата має розмірність довжини. Якщо q_i є безрозмірною, наприклад, кутова змінна, то узагальнений імпульс має розмірність $\left[\text{кг}\times\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}}\right]$. Як буде показано далі, це розмірність моменту імпульсу.

Скористаємось виразом (7.13) у рівнянні руху (3.10). Тоді отримаємо, що похідна від узагальненого імпульсу за часом буде дорівнювати

$$\frac{d}{dt}p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{7.14}$$

тобто можна ввести поняття **узагальненої сили:**

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{7.15}$$

У цих позначеннях рівняння Лаґранжа (3.10) матиме такий вигляд:

$$\dot{p}_i = F_i. \tag{7.16}$$

§ 8. Центр інерції

Як, виходячи із закону перетворення імпульсу, при переході з однієї ІСВ до іншої знайти таку ІСВ, у якій дана механічна система перебуває в стані спокою?
Що таке центр інерції даної механічної системи? У якому змісті механічну систему можна трактувати як матеріальну точку? Поняття адитивності маси.
Що таке внутрішня енергія системи? Як перетворюється енергія системи при переході від однієї ІСВ до іншої?

У довільному русі механічної системи завжди можна виділити два суттєві елементи: рух системи як єдиного цілого й відносний рух частинок системи. Для найбільш повного дослідження еволюції такої системи вивчимо її рух одночасно відносно двох систем відліку: нерухомої системи відліку K (іноді кажуть «лабораторної» системи) і рухомої K', пов'язаної з будь-якою точкою $0'$, що розташована всередині досліджуваної механічної системи. Нехай обидві системи є інерціальними, нехай також одна система, наприклад, K', рухається відносно K зі швидкістю $\vec{V}$. При цьому швидкості $\vec{v}_i$ і $\vec{v}_i'$ i-ої частинки в цих системах пов'язані формулою (1.6): $\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$. Тому зв'язок між векторами імпульсів $\vec{P}$ і $\vec{P}'$ у цих системах відліку дається формулою, яку можна отримати з (7.7):

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i' + \vec{V} \sum_i m_i \tag{8.1}$$

або

$$\vec{P} = \vec{P}' + \mu \vec{V}, \tag{8.2}$$

де

$$\mu = \sum_i m_i \tag{8.3}$$

— повна маса механічної системи.

Завжди існує така система відліку K'_C, у якій повний імпульс механічної системи перетворюється на нуль $\vec{P}' = 0$ (рис. 8.1). При цьому формула (8.2) матиме такий вигляд:

$$\vec{P} = \mu \vec{V}_C. \tag{8.4}$$

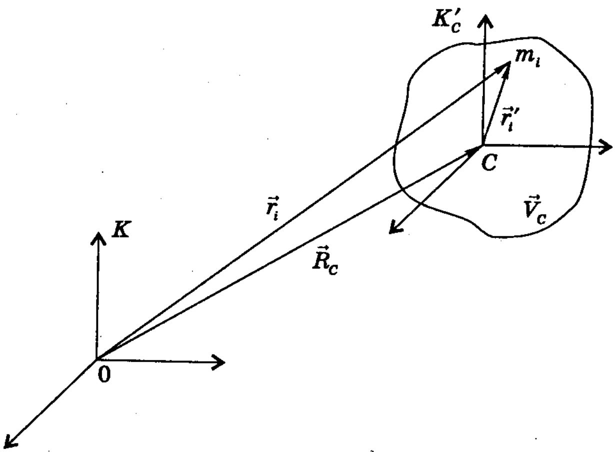


Рис. 8.1

Ця система відліку визначається тільки вектором швидкості $\vec{V}_C$. Початок відліку такої «супроводжуючої» ІСВ зручно пов'язати з точкою C, яку називають **центром інерції** або **центром мас** механічної системи. Рухому систему відліку K'_C, пов'язану з цією точкою, називають системою центра мас. Оскільки імпульс механічної системи $\vec{P}'$ у досліджуваній системі дорівнює нулю, можна стверджувати, що механічна система перебуває в стані спокою в даній системі відліку. Зрозуміло, що швидкість $\vec{V}_C$ центра інерції визначається формулою

$$\vec{V}_C = \frac{\vec{P}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{8.5}$$

і має зміст швидкості руху механічної системи як цілого (швидкості поступального руху). Формула (8.4) визначає вектор імпульсу $\vec{P}$ відносно нерухомої (лабораторної) системи відліку K. Зв'язок між імпульсом $\vec{P}$ і швидкістю $\vec{V}_C$ руху системи як цілого у формулі (8.4) такий самий, як між імпульсом і швидкістю окремої матеріальної точки. Ця властивість дозволяє трактувати рівність (8.3) як твердження про **адитивність маси в класичній механіці.** (Щоправда, у ядерній фізиці маса не має властивості адитивності: маса атомного ядра не дорівнює сумі мас нуклонів, що його складають, для атомних ядер має місце дефект мас.)

Перепишемо вираз (8.5) у вигляді диференціального рівняння (з урахуванням формул $\vec{V}_C = \dfrac{d\vec{R}_C}{dt}, \vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$)

$$\frac{d\vec{R}_C}{dt} = \frac{1}{\mu}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}. \tag{8.6}$$

Проінтегруємо рівняння (8.6) та отримаємо явний вираз для радіус-вектора центра інерції в нерухомій системі відліку:

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}. \tag{8.7}$$

Сталу інтегрування в (8.7) при цьому обрано так, щоб радіус-вектор точки C у системі K'_C перетворювався на нуль, якщо прийняти $\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0$ (рис. 8.1).

Продиференціюємо формулу (8.5) за часом, у результаті отримаємо

$$\mu \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}. \tag{8.8}$$

Права частина рівняння (8.8), згідно з другим законом Ньютона, дорівнює сумі всіх зовнішніх сил, які діють на систему, тому перепишемо (8.8) так:

$$\mu \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}. \tag{8.9}$$

Останнє рівняння називається **теоремою про рух центра інерції**, яка стверджує, що центр інерції механічної системи рухається як деяка фіктивна матеріальна точка, у якій зосереджена вся маса μ системи, і до якої прикладаються всі зовнішні сили, що діють на систему. Прикладом такого руху є рух снаряда, який вибухає в повітрі. При цьому центр інерції (мас) його уламків рухається так, якби снаряд продовжував рухатися як єдине ціле.

Якщо система є замкненою, то в рівнянні (8.9) $\sum_i \vec{F}_i^{(e)} = 0$, і після інтегрування ми отримуємо:

$$\vec{V}_C = \mathrm{const}, \quad \vec{R}_C(t) = \vec{V}_C t + \vec{R}_{C_0}(t). \tag{8.10}$$

Остання формула описує рівномірний і прямолінійний рух.

Таким чином, закон **збереження імпульсу для замкнених систем** можна сформулювати так: центр інерції замкненої механічної системи рухається прямолінійно й рівномірно.

Формула (8.10) являє собою узагальнення закону інерції Ґалілея—Ньютона, отримане для матеріальної точки (1.3). Звідси випливає, що при дослідженні механічних властивостей замкнених систем природно користуватися такою системою відліку, у якій центр її інерції перебуває в стані спокою. Тим самим виключається з розгляду рівномірний і прямолінійний рух системи як цілого.

Із поняттям центра інерції механічної системи прямо пов'язане питання про її повну енергію. Розглянемо механічну систему, що перебуває в стані спокою як ціле в системі K'. Енергія такої системи, яка дорівнює сумі кінетичної енергії відносного руху її частинок і потенціальної енергії їх взаємодії, називається **внутрішньою енергією** E_{in} зазначеної системи (індекс «*in*» походить від англійського слова «*internal*» — внутрішній):

$$E_{in} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i'^2 + U. \tag{8.11}$$

Знайдемо повну енергію системи, яка рухається як ціле зі швидкістю $\vec{V}_C$ відносно системи K. Швидкості частинок у цих системах відліку пов'язані відповідно до класичного закону додавання швидкостей: $\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}_C$. Тоді повну енергію в K можна записати так:

$$E = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,2} + U = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}_C)^2 + U =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i'^{\,2} + U + \vec{V}_C \sum_i m_i \vec{v}_i' + \frac{1}{2}\mu \vec{V}_C^2 =$$
$$= E_{in} + \vec{V}_C \vec{P}' + \frac{1}{2}\mu \vec{V}_C^2. \qquad (8.12)$$

Це і є закон перетворення енергії при переході від однієї інерціальної системи до іншої. Якщо в системі координат, яка рухається, центр її інерції перебуває в стані спокою, тобто $\vec{P}' = 0$, то повна енергія дорівнює сумі внутрішньої енергії та енергії її поступального руху зі швидкістю $\vec{V}_C$.

§ 9. Момент імпульсу

Як відображається властивість ізотропії простору на функції Лаґранжа замкненої механічної системи? Як знайти її варіацію при повороті на заданий кут?
Що таке момент імпульсу механічної системи? Чи є обмеження на властивості його адитивності?
Як залежить момент імпульсу від вибору початку системи координат ІСВ? Як змінюється момент імпульсу при переході від однієї ІСВ до іншої?
Як змінюється вигляд закону збереження моменту імпульсу за умови впливу зовнішнього поля на систему?

Закон збереження моменту імпульсу для замкнених механічних систем є наслідком ізотропії простору, через що механічні властивості замкненої системи (і, зокрема, її потенціальна енергія) не змінюються при повороті системи на будь-який кут як єдиного цілого відносно довільного напрямку в просторі. Це перетворення механічної системи є аналогічним до обертання абсолютно твердого тіла (системи матеріальних точок, відстань між якими в процесі руху зберігається) відносно закріпленої осі. Обертальним рухом твердого тіла називається такий рух, за якого залишаються нерухомими всі точки прямої, так званої осі обертання.

Розглянемо обертання твердого тіла відносно нерухомої осі, яку візьмемо за вісь $0z$ нерухомої системи координат $0xyz$ (рис. 9.1). При обертанні твердого тіла відносно осі $0z$ усі його точки переміщуються по колах із центрами, які лежать на осі обертання. Тому положення довільної точки тіла, що обертається, можна однозначно визначити за допомогою кута повороту φ площини

$0ABC$ відносно площини $x0z$. Отже, закон обертання тіла (або системи точок) відносно нерухомої осі можна записати у вигляді $\varphi = \varphi(t)$. Припустимо, що відбувається нескінченно малий поворот системи на кут $\delta\varphi$. Визначимо, який приріст отримає радіус-вектор $\vec{r}_i$, наприклад, точки B. Нехай точка B за час δt зайняла положення B_1. Із рис. 9.1 бачимо, що з точністю до нескінченно малих величин вищого порядку модуль приросту вектора $\vec{r}_i$ за час δt дорівнює

$$|\delta\vec{r}_i| = r_i \sin\theta\delta\varphi\,. \tag{9.1}$$

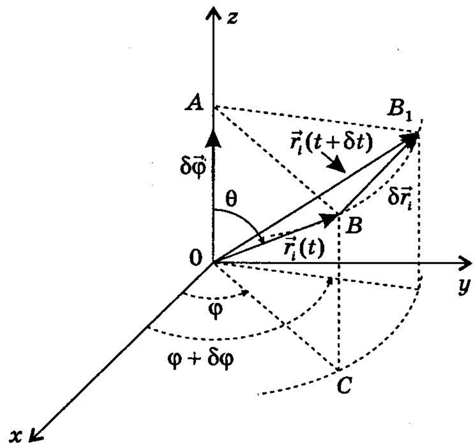


Рис. 9.1.

Права частина цієї формули є виразом для модуля векторного добутку двох векторів $\vec{r}_i$ і $\delta\vec{\varphi}$, якщо нескінченно малий поворот розглядати як вектор. Домовмося нескінченно малий поворот тіла відносно осі обертання, що проходить через точку 0, представляти вектором

$$\delta\vec{\varphi} = \delta\varphi\vec{n}_z\,. \tag{9.2}$$

Довжина вектора $\delta\vec{\varphi}$ дорівнює куту повороту $\delta\varphi$, а його напрямок задається вектором $\vec{n}_z$ — ортом осі $0z$ (у нашому випадку осі обертання). При цьому вектори $\delta\vec{\varphi}$ (тобто $\vec{n}_z$), $\vec{r}_i$ і $\delta\vec{r}_i$ утворюють праву трійку векторів. Таким чином, виходячи з формули (9.1), радіус-вектор точки B при нескінченно малому повороті на кут $\delta\vec{\varphi}$ набуває приріст

$$\delta\vec{r}_i = \left[\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i\right]. \tag{9.3}$$

Границю відношення $\dfrac{\delta\vec{\varphi}}{\delta t}$ при $\delta t \to 0$ називають **миттєвою кутовою швидкістю обертання**

$$\vec{\omega} = \frac{\delta\vec{\varphi}}{\delta t}. \tag{9.4}$$

При повороті системи як цілого змінюються не лише радіус-вектори $\vec{r}_i$, а й швидкості $\vec{v}_i$ частинок системи ($\vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}_i$), при цьому, відповідно до формули (9.3), перетворення для швидкостей матимуть вигляд

$$\delta\vec{v}_i = \left[\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_i\right]. \tag{9.5}$$

Розглянемо замкнену систему. Функція Лаґранжа для неї не залежить від часу і має вигляд $L = L(\vec{r}_i, \vec{v}_i)$. Із властивості ізотропії простору випливає, що функція Лаґранжа не повинна змінюватися при нескінченно малому повороті системи як цілого на кут $\delta\vec{\varphi}$, тобто її варіація при цьому дорівнюватиме нулю:

$$\delta L(\vec{r}_i, \vec{v}_i) = 0. \tag{9.6}$$

Знайдемо варіацію функції L, як і раніше, за допомогою розкладання її в ряд Тейлора:

$$\delta L\left(\vec{r}_i, \vec{v}_i\right) = L\left(\vec{r}_i + \delta\vec{r}_i, \vec{v}_i + \delta\vec{v}_i\right) - L\left(\vec{r}_i, \vec{v}_i\right) =$$
$$= L\left(\vec{r}_i, \vec{v}_i\right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\delta\vec{v}_i + \ldots - L\left(\vec{r}_i, \vec{v}_i\right).$$

Перший і останній доданки в цій формулі взаємно знищуються. У результаті отримуємо

$$\delta L\left(\vec{r}_i, \vec{v}_i\right) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\delta\vec{v}_i. \tag{9.7}$$

Далі використаємо формули (7.13) і (7.14) в декартовій системі координат:

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \quad \dot{\vec{p}}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}, \tag{9.8}$$

а також формули (9.3) і (9.5) для приросту радіус-вектора та швидкості частинок при нескінченно малому повороті $\delta\vec{\varphi}$. Зі співвідношення (9.7) з урахуванням (9.6) отримаємо, що варіація функції Лаґранжа дорівнює

$$\delta L(\vec{r}_i, \vec{v}_i) = \sum_i \dot{\vec{p}}_i [\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i] + \sum_i \vec{p}_i [\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_i] = 0 . \tag{9.9}$$

Далі відповідно до правил векторної алгебри зробимо циклічну перестановку в змішаному добутку векторів (див. Додаток 2) і запишемо рівняння (9.9) у зручному для аналізу вигляді

$$\sum_i \delta\vec{\varphi} \left\{ [\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i] + [\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i] \right\} = 0 . \tag{9.10}$$

Винесемо постійний вектор $\delta\vec{\varphi}$ за знак суми. Хоча він і нескінченно малий, але все ж таки скінчений за величиною, тому нулю дорівнює сума. Вираз, що стоїть під знаком суми, є повною похідною за часом від векторного добутку радіус-вектора на імпульс, а саме,

$$\frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = 0 . \tag{9.11}$$

Рівняння (9.11) показує, що в процесі руху замкненої механічної системи зберігається векторна величина

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i], \tag{9.12}$$

яка називається **моментом імпульсу** (або механічним моментом) системи. Якщо ввести поняття моменту імпульсу однієї матеріальної точки

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{p}_i], \tag{9.13}$$

то сукупний момент імпульсу системи дорівнюватиме

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i \,. \qquad (9.14)$$

Адитивність моменту імпульсу випливає з його визначень (9.12) і (9.14). На відміну від енергії момент імпульсу системи дорівнює сумі моментів імпульсів окремих частинок незалежно від того, чи можна знехтувати взаємодією між окремими частинками системи, оскільки момент імпульсу визначається лише через імпульс частинок системи (див. (9.12)). До визначення моменту імпульсу механічної системи (9.12) входять також радіус-вектори частинок системи, тому, на відміну від імпульсу системи, значення вектора $\vec{M}$ у загальному випадку залежить від вибору початку координат у межах тієї самої системи відліку.

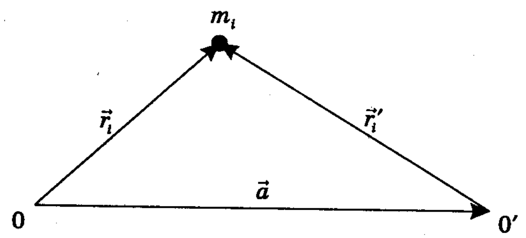


Рис. 9.2

Припустімо, що початок координат зміщенний із точки 0 до точки $0'$ на вектор $\vec{a}$ (рис. 9.2). При цьому радіус-вектори $\vec{r}_i$ і $\vec{r}_i'$ тієї самої частинки відносно точок 0 і $0'$ пов'язані співвідношенням $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{a}$. Підставимо цей вираз до визначення (9.12) і в результаті отримаємо, що момент імпульсу $\vec{M}_0$, визначений у системі координат із початком 0, дорівнює

$$\vec{M}_0 = \sum_i \left[\vec{r}_i' \times \vec{p}_i\right] + \left[\vec{a} \times \sum_i \vec{p}_i\right] \qquad (9.15)$$

або

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{0'} + \left[\vec{a} \times \vec{P}\right]. \qquad (9.16)$$

Тут $\vec{M}_{0'}$ — момент імпульсу в тій самій системі координат із початком у точці $0'$, $\vec{P}$ — повний імпульс (7.9).

З останнього співвідношення (9.16) видно, що тільки для системи, що перебуває в стані спокою як ціле, для якої $\vec{P}=0$, момент імпульсу не залежить від вибору початку відліку. Тому в задачах із визначення вектора $\vec{M}$, якщо використовується не та система відліку, у якій імпульс дорівнює нулю, необхідно чітко вказувати початок координат. При цьому все одно для замкнених систем виконується закон збереження моменту імпульсу. Це пов'язано з тим, що для таких систем виконується закон збереження імпульсу, тобто якщо зберігається $\vec{M}_{0'}$, то при незмінному $\vec{P}$ в рівнянні (9.16) зберігається і $\vec{M}_0$.

З'ясуємо, як перетворюється механічний момент імпульсу $\vec{M}$ при переході з нерухомої системи відліку K до рухомої K', що пов'язана з будь-якою точкою $0'$, яка розташована всередині досліджуваної механічної системи. Нехай одна система, наприклад, K', рухається відносно K із постійною швидкістю $\vec{V}$. При цьому швидкості $\vec{v}_i$ і $\vec{v}_i'$ частинок у даних системах пов'язані формулою (1.6): $\vec{v}_i=\vec{v}_i'+\vec{V}$. Зв'язок між моментами імпульсів у системах відліку K і K' дається формулами, які можна отримати з (9.12),

$$\vec{M}=\sum_i\left[\vec{r}_i\times\vec{p}_i\right]=\sum_i m_i\left[\vec{r}_i\times(\vec{v}_i'+\vec{V})\right]=\sum_i m_i\left[\vec{r}_i\times\vec{v}_i'\right]+\sum_i m_i\left[\vec{r}_i\times\vec{V}\right]. \quad (9.17)$$

Перша сума являє собою момент імпульсу $\vec{M}'$ в системі K'. Другу суму перетворимо так:

$$\sum_i m_i\left[\vec{r}_i\times\vec{V}\right]=\frac{\sum_i m_i}{\sum_i m_i}\sum_i m_i\left[\vec{r}_i\times\vec{V}\right].$$

Далі, скориставшись визначеннями (8.3) і (8.7), із рівняння (9.17) остаточно отримуємо

$$\vec{M}=\vec{M}'+\mu\left[\vec{R}_C\times\vec{V}\right], \quad (9.18)$$

де μ — повна маса механічної системи, а $\vec{R}_C$ — радіус-вектор її центра інерції. Остання формула описує закон перетворення моменту імпульсу при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

Якщо система K' являє собою таку систему відліку, що пов'язана з деякою точкою C цієї системи, відносно якої дана механічна система перебуває в стані спокою як ціле, то $\vec{V}$ є швидкість центра інерції $\vec{V}_C$ механічної системи, а величина $\vec{P}_C = \mu\vec{V}_C$ — її повний імпульс відносно нерухомої системи відліку.

Тоді (9.18) запишемо у вигляді

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{M}_C, \tag{9.19}$$

де вектор

$$\vec{M}_C = \left[\vec{R}_C \times \vec{P}_C\right] \tag{9.20}$$

називається механічним моментом системи, що пов'язаний із її поступальним рухом (рухом системи як цілого).

Із закону збереження моменту імпульсу (9.12) у векторній формі випливає, що під час руху замкненої системи три проекції цього вектора на осі координат залишаються сталими

$$\begin{cases} M_x = \sum_i m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) = \text{const}, \\ M_y = \sum_i m_i(z_i\dot{x}_i - \dot{z}_i x_i) = \text{const}, \\ M_z = \sum_i m_i(x_i\dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) = \text{const}. \end{cases} \tag{9.21}$$

Таким чином, крім інтегралів енергії (6.4) (наслідок однорідності часу), трьох проекцій імпульсу (7.8) (наслідок однорідності простору), замкнена механічна система має ще три перші інтеграли руху (9.21), які випливають з ізотропності простору. Отже, загалом у замкненої системи існують сім інтегралів руху, які пов'язані з однорідністю часу, однорідністю простору та ізотропією простору.

Закон збереження трьох компонентів моменту імпульсу (відносно довільного початку координат) має місце тільки для замкненої системи. У більш обмеженому вигляді він є справедливим і для систем, що перебувають у зовнішньому полі. Очевидно, що завжди зберігається проекція моменту імпульсу на вісь, відносно якої зовнішнє поле є симетричним, і тому механічні властивості системи не змінюються за будь-якого повороту навколо цієї осі. При цьому момент імпульсу має бути обов'язково визначений відносно початку координат, що лежить на цій самій осі. До таких полів можна зарахувати такі:

1. Поле із центральною симетрією — поле, у якому потенціальна енергія залежить лише від відстані до центра симетрії. При русі в такому полі зберігається проекція моменту імпульсу на будь-яку вісь, що проходить через центр симетрії поля. Інакше кажучи, зберігається вектор $\vec{M}$ відносно центра поля.
2. Однорідне поле вздовж будь-якої осі, наприклад, осі $0z$, у якому зберігається проекція M_z моменту імпульсу.

Скористаймося формулою (9.21)

$$M_z = \sum_i m_i(x_i\dot{y}_i - \dot{x}_i y_i). \tag{9.22}$$

Запишемо цей вираз у циліндричній системі координат (рис. 5.4) за допомогою формул зв'язку (див. Додаток 3): $x_i = \rho_i \cos\varphi_i$, $y_i = \rho_i \sin\varphi_i$. Отримуємо

$$M_z = \sum_i m_i \rho_i^2 \dot{\varphi}_i . \tag{9.23}$$

Функція Лаґранжа для системи матеріальних точок (5.2) у циліндричній системі координат представляється таким чином (див. формулу (5.18) для квадрата швидкості в циліндричній системі координат):

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2\dot{\varphi}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) - U . \tag{9.24}$$

Якщо взяти частинну похідну за $\dot{\varphi}_i$ від функції Лаґранжа (9.24), отримаємо той самий результат, що і в рівнянні (9.23). Тобто, проекцію моменту імпульсу на вісь симетрії зовнішнього поля $0z$ можна визначити за формулою:

$$M_z = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} . \tag{9.25}$$

Розділ III
КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ

§ 10. Рівняння Гамільтона

Як записати рівняння Лаґранжа? Що означає перехід від рівняння Лаґранжа до рівнянь Гамільтона?
Як пов'язана функція Гамільтона з функцією Лаґранжа? Як отримати рівняння Гамільтона? Чому рівняння Гамільтона називаються канонічними?
Як отримати закон збереження енергії за допомогою функції Гамільтона?

Раніше ми розглядали рівняння руху, записані у вигляді другого закону Ньютона (1.7) і рівняння Лаґранжа (3.10). Вони є диференціальними рівняннями другого порядку. З математики відомо, що будь-яку систему S диференціальних рівнянь другого порядку можна замінити на рівнозначну систему $2S$ рівнянь першого порядку.

Рівняння руху механічної системи, що записані у формі диференціальних рівнянь першого порядку, називають **канонічними рівняннями руху.** Їх зазвичай називають рівняннями Гамільтона за ім'ям ученого, який уперше запропонував новий спосіб описання руху механічної системи, що суттєво відрізняється від методу Лаґранжа.

Рух механічної системи із S степенями вільності, що описується рівнянням Лаґранжа (3.10) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, передбачає завдання в початкові моменти часу $2S$ початкових умов $q_i(0) = q_i^{(0)}$ і $\dot{q}_i(0) = \dot{q}_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, S)$. Тобто незалежними змінними при такому описі руху крім узагальнених координат q_i виступають і узагальнені швидкості $\dot{q}_i$. Такий опис руху механічних систем не єдиний.

У методі Гамільтона як незалежні змінні розглядаються S узагальнених координат $q_1, q_2, \ldots, q_S$ і S узагальнених імпульсів $p_1, p_2, \ldots, p_S$, які визначаються рівністю (7.13).

Для геометричної інтерпретації руху системи вводиться поняття про так званий **фазовий простір.** Під фазовим простором розуміємо $2S$-вимірний простір, по осях якого відкладаються значення S узагальнених координат q_i і S узагальнених імпульсів p_i. Кожній точці фазового простору відповідатиме певний стан системи. Під час руху ця точка описуватиме у фазовому просторі фазову траєкторію.

Рівняння руху в термінах узагальнених координат і узагальнених імпульсів можна записати за допомогою перетворення, яке в математиці називається **перетворенням Лежандра.** У нашому випадку перетворення Лежандра від змінних q_i, $\dot{q}_i$ до нових змінних q_i, p_i полягає в наступному.

Запишемо повний диференціал від функції Лаґранжа $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ як функції узагальнених координат, узагальнених швидкостей і часу:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt . \tag{10.1}$$

Припустимо, у системі немає дисипативних сил (прикладом дисипативної сили є сила тертя), тобто система перебуває лише в потенціальному полі. Тоді в рівнянні (10.1) можна зробити такі заміни:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \to p_i, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} \to \dot{p}_i$$

відповідно до формул (7.13) і (7.14). Після цього (10.1) матиме вигляд

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt . \tag{10.2}$$

Далі скористаймося очевидною рівністю

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i$$

і перепишемо (10.2)

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

або

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_{(i)} \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \qquad (10.3)$$

У правій частині формули (10.3) стоять диференціали dq_i, dp_i і dt. Це означає, що величина, яка стоїть під знаком диференціала у лівій частині рівності (10.3), являє собою деяку функцію узагальнених координат, узагальнених імпульсів і часу. Позначимо її через H, а саме,

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_S; p_1, p_2, \ldots, p_S, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L . \qquad (10.4)$$

Цю функцію, яка, згідно з рівнянням (6.4), є енергією системи E, називають **функцією Гамільтона,** або **гамільтоніаном** механічної системи. Якщо функція Лаґранжа (лаґранжіан) системи явно від часу не залежить, тобто система є замкненою, її енергія зберігається.

Запишемо повний диференціал від функції Гамільтона (10.4) як функції узагальнених координат, узагальнених імпульсів і часу:

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt . \qquad (10.5)$$

Порівнюючи вирази (10.5) і (10.3), прирівняємо коефіцієнти при однакових диференціалах і отримаємо рівняння

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, S) \qquad (10.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \qquad (10.7)$$

Рівняння (10.6) і є рівняннями Гамільтона — рівнянням руху механічної системи в змінних q_i і p_i. Вони являють собою систему $2S$ диференціальних рівнянь першого порядку відносно

$2S$ невідомих функцій $q_i(t)$ і $p_i(t)$. Примітною є майже повна симетричність рівнянь Гамільтона відносно змінних q_i і p_i.

Рівняння (10.7) у методі Гамільтона вказує на те, що гамільтоніан системи залежить або не залежить явно від часу одночасно з її лаґранжіаном. Якщо гамільтоніан системи явно не залежить від часу, то із цього випливає збереження її повної енергії. Насправді, запишемо повну похідну за часом від функції Гамільтона

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)$$

або

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right). \qquad (10.8)$$

Після підставляння похідних $\dot{q}_i$ і $\dot{p}_i$ із канонічних рівнянь (10.6) до співвідношення (10.8) два доданки під знаком суми взаємно знищуються, і виходить, що

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (10.9)$$

Звідси видно, що в разі, коли функція Гамільтона явно від часу не залежить (тобто $\partial H/\partial t=0$), має місце закон збереження енергії:

$$H(q_1,q_2,\ldots,q_S;p_1,p_2,\ldots,p_S)=E. \qquad (10.10)$$

Розглянемо найпростіший приклад отримання функції Гамільтона й канонічних рівнянь руху. Функція Лаґранжа для однієї частинки маси m, що рухається в полі $U=U(\vec{r})$, у декартовій системі координат має вигляд

$$L=\frac{1}{2}m\vec{v}^2-U(\vec{r})=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-U(x,y,z). \qquad (10.11)$$

Скористаймося визначенням функції Гамільтона (10.4) для однієї частинки. При цьому величина

$$p\dot{q}-L\equiv\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}\vec{v}-L=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\dot{y}+\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}\dot{z}-L$$

дорівнює

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\vec{v} - L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x,y,z)\,. \qquad (10.12)$$

Різниця, яка стоїть у рівнянні (10.12), поки що не є гамільтоніаном системи: у (10.12) необхідно виразити швидкості $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ через імпульси p_x, p_y, p_z. Відповідно до (7.13), $p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, (q = x,y,z)$. Звідси $p_q = m\dot{q}, (q = x,y,z)$, а швидкості дорівнюватимуть

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \dot{z} = \frac{p_z}{m}\,. \qquad (10.13)$$

Тому функцію Гамільтона для частинки, яка рухається в потенціальному полі $U(\vec{r})$, можна остаточно переписати у вигляді:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x,y,z)\,. \qquad (10.14)$$

Канонічні рівняння руху (10.6) при цьому запишуться так:

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ \dot{p}_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ \dot{p}_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \qquad (10.15)$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m},\ \dot{y} = \frac{p_y}{m},\ \dot{z} = \frac{p_z}{m}\,. \qquad (10.16)$$

§ 11. Рівняння Гамільтона—Якобі

Як визначаються компоненти імпульсу через дію як функцію узагальнених координат і часу?
Як отримати рівняння Гамільтона—Якобі в загальному випадку?
Як знайти явну залежність від часу для дії у випадку замкненої системи? Що таке укорочена дія? Як записати рівняння Гамільтона—Якобі для замкненої системи?
Рівняння Гамільтона—Якобі для однієї частинки у зовнішньому полі.

При формулюванні принципу Гамільтона (див. § 3) було введено поняття про дію механічної системи (3.2) як про інтеграл:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)dt, \ i = 1,2,\dots,S, \tag{11.1}$$

що залежить від вигляду конфігураційних траєкторій системи (див. Додаток 1), які починаються та закінчуються в моменти часу t_1 і t_2. При варіюванні дії порівнювалися значення інтеграла для близьких траєкторій у випадку, коли початкове й кінцеве положення системи були фіксовані, тобто при $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Істинному руху системи відповідала траєкторія, для якої інтеграл S є мінімальним, а саме, $\delta S = 0$.

Розглянемо поняття дії в іншому аспекті. Припустимо, що система за час $t_2 - t_1$ може перейти з конфігурації (положення) A до конфігурації B або C (рис. 11.1), при цьому обидва рухи є істинними (тобто задовольняють рівнянню Лаґранжа (3.10)). Така ситуація виникає, наприклад, у наступній задачі. Два однакових тіла кидають із точки 0 із початковими швидкостями $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ під кутами α_1 і α_2 до горизонту, причому $v_1 \sin\alpha_1 = v_2 \sin\alpha_2$ (рис. 11.2). Для такої простої ситуації можна показати, що за один і той самий проміжок часу перше тіло досягне точки x_B, а друге x_C.

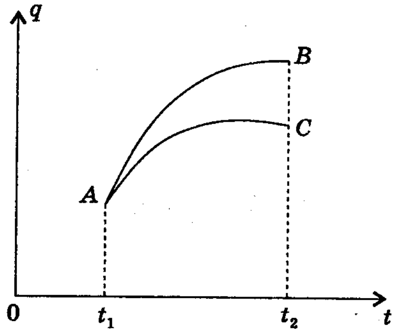


Рис. 11.1

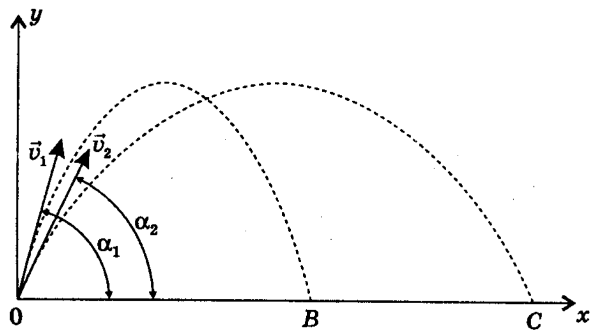


Рис. 11.2

Можливість постановки подібних задач свідчить про те, що дію механічної системи S слід розглядати як функцію координат q, які описують кінцеву конфігурацію (стан) системи в момент часу t.

Розглянемо варіаційну задачу для дії S, яка характеризує рух за істинними траєкторіями в дещо відмінному від попереднього формулюванні. Порівняємо значення функціонала S для близьких траєкторій руху системи, які мають у початковий момент часу t_1 спільний початок (точка A, для якої $\delta q_i(t_1)=0$), але приходять у момент часу t_2 до різних положень. При цьому $\delta q_i(t_2)\neq 0$, тобто $S=S(q_i(t_2))$. Інакше кажучи, будемо розглядати інтеграл дії для істинних траєкторій як функцію координат на верхній межі інтегрування. Варіація дії для системи при переході від траєкторії AB до близької до неї траєкторії AC визначається виразом (див. (3.8)):

$$\delta S=\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i(t)\Big|_{t_1}^{t_2}+\sum_i\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\delta q_i dt .$$

Присутні тут інтеграли перетворюються на нуль, оскільки обидві траєкторії є істинними і, як наслідок, виконується рівняння Лаґранжа (3.10). У першій сумі врахуємо, що $\delta q_i(t_1)=0$, а значення $\delta q_i(t_2)$ позначимо для загальності $\delta q_i(t)=\delta q_i$. У результаті отримаємо

$$\delta S=\sum_i p_i\delta q_i . \tag{11.2}$$

У формулі (11.2) ми скористалися визначенням узагальненого імпульсу (7.13). У той же час, оскільки в рамках цієї варіаційної задачі $S=S(q_i)$, варіацію S за визначенням можна записати так:

$$\delta S=\sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\delta q_i . \tag{11.3}$$

Із двох останніх виразів випливає, що частинні похідні від дії S за узагальненими координатами дорівнюють відповідним узагальненим імпульсам

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i},\quad i=1,2,\ldots,S . \tag{11.4}$$

Наведемо ще одне формулювання варіаційної задачі. Виявляється, можна розглядати переходи системи з тієї самої початкової конфігурації (у момент часу t_1) в ту саму кінцеву конфігурацію B, але за різні проміжки часу $t_2'-t_1$ і $t_2''-t_1$. (див. рис. 11.3).

Прикладом, що ілюструє можливість таких переходів, є вільне падіння тіла в полі тяжіння Землі. Залежно від початкової швидкості тіла воно падає з тієї самої висоти за різні проміжки часу. Природно, дію S у цьому разі можна розуміти як явну функцію часу t, тобто $S = S(t)$.

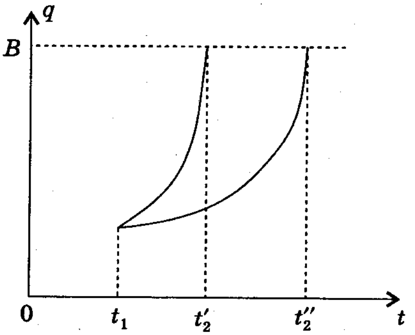


Рис. 11.3

Два останні приклади постановки варіаційних задач показують, що в самому загальному випадку дію механічної системи слід розглядати як явну функцію координат q_i і часу t — $S = S(q_i, t)$. Тоді дію можна представити у вигляді невизначеного інтеграла (верхня межа інтегрування не є фіксованою):

$$S = \int_{t_1}^{t} L\big(q(t'), \dot{q}(t'), t'\big) dt'. \tag{11.5}$$

Із цього визначення дії випливає, що її повна похідна за часом уздовж істинної траєкторії системи дорівнює

$$\frac{dS}{dt} = L. \tag{11.6}$$

Ту саму похідну, ураховуючи залежність дії від координат і часу, а також формулу (11.4), можна знайти так:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i. \tag{11.7}$$

Порівнюючи дві останні формули, знаходимо

$$L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i \tag{11.8}$$

або

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i - L = 0 . \tag{11.9}$$

Скориставшись визначенням функції Гамільтона (10.4), остаточно отримуємо:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 . \tag{11.10}$$

Вираз (11.10) називається **рівнянням Гамільтона—Якобі.**

Гамільтоніан H у формулі (11.10) є функцією координат, імпульсів і часу $H(p_i, q_i, t)$. Якщо замінити узагальнені імпульси p_i на частинні похідні $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ відповідно до (11.4), отримаємо рівняння

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_S}; q_1, q_2 \ldots, q_S, t\right) = 0 , \tag{11.11}$$

якому має відповідати функціонал дії $S(q_1, q_2 \ldots, q_S, t)$. Це рівняння першого порядку в частинних похідних зазвичай називають рівнянням Гамільтона—Якобі.

Розглянемо одну частинку маси m, яка рухається в потенціальному полі $U(\vec{r})$. Тоді, скориставшись виразом (10.4) для функції Гамільтона та формулою зв'язку імпульсів із дією (11.4), рівняння (11.11) у декартовій системі координат можна записати так:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + U(\vec{r}) = 0 . \tag{11.12}$$

Підставивши (11.10) до (11.7) і врахувавши (11.6), одержимо, що диференціал дії дорівнює

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt , \tag{11.13}$$

звідки

$$S = \int_{t_0}^{t} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt , \qquad (11.14)$$

де t_0 — початковий момент часу.

Розглянемо консервативну систему (тобто систему, у якій є справедливим закон збереження енергії). У цьому разі функція Гамільтона явно не залежить від часу, а сам гамільтоніан збігається з повною енергією системи

$$H(p_i, q_i) = E = \mathrm{const} .$$

Замінюючи в (11.12) функцію Гамільтона на сталу E, отримуємо рівняння:

$$S(q_1, q_2 \ldots, q_S, t) = S_0(q_1, q_2 \ldots, q_S) - E \cdot (t - t_0) , \qquad (11.15)$$

у якому

$$S_0(q_1, q_2 \ldots, q_S) = \int \sum_i p_i dq_i , \qquad (11.16)$$

а інтегрування здійснюється вздовж конфігураційної траєкторії системи (траєкторії в координатах (q, t)). Функцію $S_0(q_1, q_2 \ldots, q_S)$ називають **укороченою дією.**

Підставимо вираз для дії (11.15), який отримано для консервативної системи, до рівняння (11.10) і, як результат, матимемо рівняння Гамільтона—Якобі для укороченої дії:

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_S; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_S} \right) = E . \qquad (11.17)$$

Формули (11.4) і (11.10) для консервативної системи набувають вигляду

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, S), \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E . \qquad (11.18)$$

Останнє зі співвідношень (11.18) показує, що енергія E і час t для консервативної системи складають таку ж канонічну пару величин, як і пари p_i, q_i. Ця властивість відіграє значну роль у релятивістській механіці (механіці великих швидкостей), де час має рівні права з просторовими координатами.

Важливе значення рівняння Гамільтона—Якобі (11.13) полягає в тому, що воно показує зв'язок між класичною механікою частинки та хвилевим процесом, який відіграє значну роль у поясненні хвилевих властивостей мікрочастинок у квантовій механіці (у теорії корпускулярно-хвилевого дуалізму).

Дослідимо цю аналогію на прикладі частинки, яка рухається в стаціонарному полі $U(\vec{r})$. Її функцію дії можна представити у вигляді (див. (11.15)):

$$S(\vec{r},t)=S_0(\vec{r})-E\cdot t\,. \tag{11.19}$$

У формулі (11.19) обрано $t_0=0$.

Назвемо **поверхнею рівної дії** геометричне місце точок простору, в яких дія частинки має деяке стале значення, а саме:

$$S(\vec{r},t)=S_0(\vec{r})-E\cdot t=\text{const}\,. \tag{11.20}$$

З останнього виразу видно, що поверхні рівної дії переміщуються із часом у просторі, збігаючись у кожний момент часу з деякими поверхнями укороченої дії $S_0(\vec{r})=\text{const}$ (рис. 11.4). Таким чином, рух поверхні $S(\vec{r},t)=\text{const}$ подібний до розповсюдження фронту деякої хвилі. Швидкість цієї хвилі є різною для різних точок поверхні $S(\vec{r},t)=\text{const}$ і визначається співвідношенням

$$u=\frac{dl}{dt}, \tag{11.21}$$

де dl — відстань, яку проходить хвиля за час dt у напрямку, перпендикулярному до поверхні S.

Представимо рівність (11.20) при русі за лінією l у вигляді

$$S_0(\vec{r}(l))-E\cdot t=\text{const} \tag{11.22}$$

і продиференціюємо її за часом. Як результат отримаємо:

$$\frac{\partial S_0}{\partial\vec{r}}\frac{\partial\vec{r}}{\partial l}\frac{dl}{dt}-E=0\,, \tag{11.23}$$

одиничний вектор, дотичний до l, визначається тут як $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial l}$.

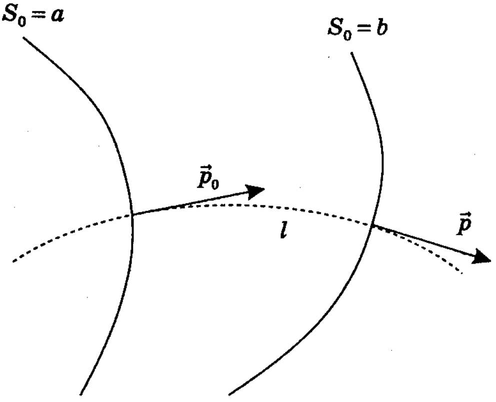


Рис. 11.4

З іншого боку, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial l} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, а $\frac{\partial S_0}{\partial \vec{r}} \equiv \text{grad} S_0 = \vec{p}$ (див. формули (5.7) і (11.18)). Із рівняння (11.23) з урахуванням (11.21) знаходимо:

$$u = \frac{dl}{dt} = \frac{E}{p} = \frac{E}{mv}. \tag{11.24}$$

Під час руху поверхні рівної дії S кожна її точка переміщується за лінією, перпендикулярною до поверхонь S і S_0, тобто за кривою з дотичною, що направлена в кожній її точці в напрямку вектора імпульсу частинки $\vec{p}$.

Отже, траєкторія частинки збігається з кривою, яку описує при переміщенні поверхні рівної дії S будь-яка з її точок. Цей факт указує на те, що рух класичної частинки за траєкторією є аналогічним розповсюдженню світлових променів у геометричній оптиці. Так само, як і траєкторія класичної частинки, світловий промінь під час руху в неоднорідному середовищі розповсюджується вздовж кривої, яку описує при своєму переміщенні в просторі будь-яка точка поверхні рівної фази (або фронту електромагнітної хвилі).

Розділ IV
ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ РУХУ

§ 12. Одновимірний рух

Як із закону збереження енергії отримати закон руху матеріальної точки?
Як провести графічний аналіз руху механічної системи?
Який рух називають фінітним та інфінітним?

Задачею про одновимірний рух у теоретичній механіці заведено називати задачу про рух консервативної системи з одним степенем вільності. Розв'язати задачу руху означає знайти зв'язок між координатою, швидкістю та часом. Повну енергію одновимірної консервативної системи можна представити у вигляді

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = \text{const}, \tag{12.1}$$

де перший доданок є кінетичною енергією, а $U(x)$ — потенціальною енергією системи в зовнішньому силовому полі. Тут x — деякий параметр (координата), що описує її положення в просторі. Прикладом такого руху може служити прямолінійний рух вільної матеріальної точки масою m в однорідному полі сили тяжіння Землі.

Одновимірною також можна вважати задачу про рух плоского математичного маятника — частинки маси m на підвісі постійної довжини l у полі тяжіння Землі (рис. 12.1). Повна енергія такої замкненої системи зберігається, і її можна представити у вигляді, аналогічному до (12.1):

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi, \tag{12.2}$$

якщо потенціальну енергію відлічувати від горизонтальної прямої, яка проходить через точку підвісу (формула (12.2) випливає з (12.1) шляхом переходу від декартової системи координат до циліндричної за формулами (5.18)).

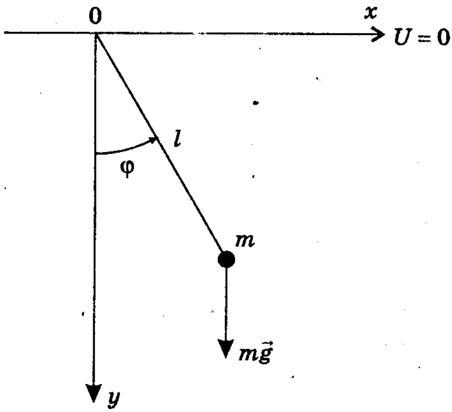


Рис. 12.1

У загальному випадку під x і m не обов'язково розуміються декартова координата й маса частинки. Додатний параметр, що стоїть у виразі для кінетичної енергії при квадраті похідної за часом, називається **кінематичним параметром** системи. У рівнянні (12.1) ним є маса m, а для плоского маятника в (12.2) — ml^2.

Для отримання аналітичного розв'язку одновимірної задачі немає необхідності звертатися до відповідного розв'язання диференціального рівняння руху, а можна виходити з першого інтеграла руху (закону збереження енергії (12.1)). Розглядаючи (12.1) як диференціальне рівняння першого порядку відносно $\dfrac{dx}{dt}$ і розділяючи в ньому змінні, знаходимо

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}, \tag{12.3}$$

звідси після інтегрування маємо

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} = F(x,E). \tag{12.4}$$

Через початкові значення координати $x_0 = x(t_0)$ і швидкості $v_0 = \dot{x}(t_0)$ можна виразити довільні сталі інтегрування, а також визначити повну енергію:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + U(x_0). \tag{12.5}$$

Вираз (12.4) є загальним розв'язком задачі про одновимірний рух механічної системи в зовнішньому силовому полі, у якому вона має потенціальну енергію $U(x)$. Однак закон збереження енергії (12.1) дозволяє визначити багато закономірностей поведінки одновимірної системи в заданому полі $U(x)$ без звертання до загального розв'язку (12.4). Таке якісне дослідження одновимірного руху можна провести за допомогою графічного аналізу повної та потенціальної енергії системи.

При цьому зазвичай цікавляться такими питаннями руху системи:

1. За яких значень повної енергії E у полі $U(x)$ в принципі можливий (припустимий із закону збереження енергії) рух?
2. У яких областях зміни незалежної змінної (так званих **дозволених областях**) можливий рух системи?
3. Який характер має рух у кожній із дозволених областей?

Для отримання відповіді на перші два питання запишемо (12.1) у вигляді

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - U(x) \geq 0, \tag{12.6}$$

оскільки кінетична енергія — невід'ємна величина. Таким чином, у класично дозволеній області потенціальна енергія має бути меншою за повну енергію (або рівною до неї):

$$U(x) \leq E. \tag{12.7}$$

Точки, в яких потенціальна енергія системи дорівнює повній енергії

$$U(x) = E, \tag{12.8}$$

називаються **точками зупинки** системи, або **поворотними точками**, тому що в цих точках (згідно з рівнянням (12.6)) швидкість системи змінює свій знак, проходячи через нульове значення. Вказані точки є граничними точками, що відокремлюють класично дозволені області від заборонених областей, у яких умова (12.7) не виконується.

Одновимірний рух системи може відбуватися лише за таких значень повної енергії E, за яких є хоча б одна дозволена область, яка не зводиться до точки.

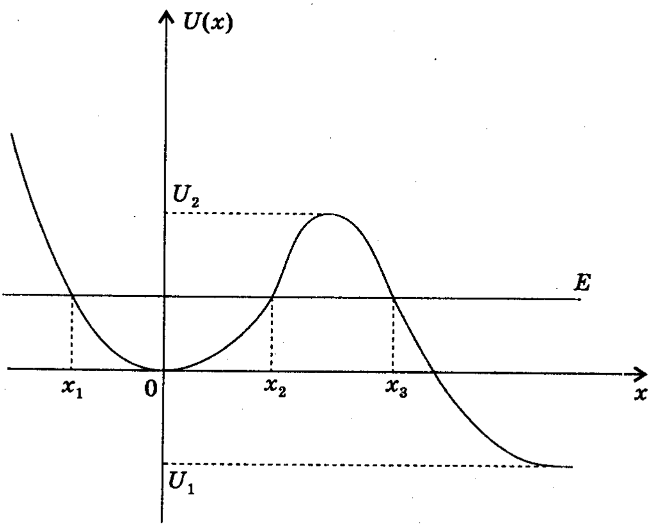


Рис. 12.2

Нехай залежність $U(x)$ для деякої системи має вигляд, наведений на рис. 12.2. Різні значення повної енергії можна представити прямими паралельними осі абсцис. Із рис. 12.2 видно, що рух системи можливий тільки за $E > U_1 = U_{(+\infty)}$, оскільки при цьому є, як мінімум, одна класично дозволена область.

Розглянемо одне із значень повної енергії E, яке міститься між нулем і $U_2 = U_{\max}$. Відповідно до (12.7), при заданому значенні E у механічної системи є дві дозволені області (x_1, x_2),

$(x_3,+\infty)$ і дві заборонені області $(-\infty,x_1)$, (x_2,x_3). Дозволену область (x_1,x_2) називають **потенціальною ямою**, а заборонену область (x_2,x_3) — **потенціальним бар'єром.**

Рух механічної системи при заданому значенні E може відбуватися тільки в одній із дозволених областей: (x_1,x_2) або $(x_3,+\infty)$. Перехід системи з області (x_1,x_2) до області $(x_3,+\infty)$ можливий лише в разі надання їй додаткової кінетичної енергії $\Delta T \geq U_2 - E$, яка дозволить їй здолати потенціальний бар'єр. Підбар'єрні переходи класичних об'єктів, які підпорядковуються законам збереження енергії, суворо заборонені без надавання ним необхідної додаткової кінетичної енергії. Однак такі переходи виявляються можливими для мікрооб'єктів (електронів, протонів тощо), які мають хвилеві властивості. Це явище вивчається у квантовій механіці й називається **тунельним ефектом.**

Якщо дозволена область руху обмежена двома поворотними точками (потенціальна яма (x_1,x_2)), то рух відбувається в обмеженій області простору, і тому його називають **фінітним** (тобто скінченним). Рух системи в області, не обмеженій з обох боків або обмеженій з одного боку (наприклад, рух в області $(x_3,+\infty)$), називають **інфінітним**, оскільки частинка при цьому може уходити в нескінченність. У цьому випадку система рухається в напрямку мінімуму потенціальної енергії, який лежить на нескінченності.

Одновимірний фінітний рух у потенціальній ямі має коливальний характер: система здійснює рух, що періодично повторюється, між поворотними точками x_1 і x_2. **Періодом** T цього коливання називається час, необхідний для здійснення одного повного коливання, або час, за який система пройде від точки x_1 до x_2 і назад. Згідно з рівнянням (12.4), цей час дорівнює

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}, \qquad (12.9)$$

де $x_1 = x_1(E)$ і $x_2 = x_2(E)$ — корені рівняння (12.8) при заданому значенні E. Період коливань у загальному випадку є функцією її повної енергії і, як наслідок, повністю визначається початковими умовами. Існує єдина одновимірна механічна система, період якої не залежить від повної енергії (отже, і від початкових умов) — лінійний гармонічний осцилятор. Про цю систему мова буде йти в наступному параграфі.

§ 13. Вільні малі коливання одновимірної механічної системи

Що таке лінійний гармонічний осцилятор?
Що таке вільні коливання системи? Як дати визначення амплітуди, фази та власної частоти коливань?
Як визначається повна енергія гармонічних власних коливань?

Малі (лінійні) коливання є достатньо поширеним типом руху механічної системи. Такий рух виникає при малих відхиленнях системи від положення її стійкої рівноваги. Теорія малих коливань застосовується не лише для описання руху механічних систем, а і в акустиці, теорії електричних кіл тощо.

Почнемо розгляд малих коливань із простого випадку замкненої механічної системи з одним степенем вільності. Як показано в § 5, лаґранжіан такої системи можна представити у вигляді

$$L = T(q,\dot{q}) - U(q),\ T = \frac{1}{2} f(q)\dot{q}^2, \tag{13.1}$$

де q — узагальнена координата, $\dot{q}$ — узагальнена швидкість, $T(q,\dot{q})$ — кінетична енергія системи, $U(q)$ — внутрішня потенціальна енергія системи, а $f(q)$ — деяка додатна функція. Стану стійкої рівноваги відповідає таке положення системи q_0, у якому її потенціальна енергія має мінімальне значення. При відхиленнях системи від положення рівноваги q_0 виникає сила $F = -\dfrac{dU}{dq}$, яка намагається повернути систему до вихідного положення рівноваги. Система, що отримала в початковий момент часу t_0 достатньо мале відхилення $q-q_0$ і достатньо малу початкову швидкість $\dot{q}_0$, за будь-якого $t \geq t_0$ не вийде із меж околу точки q_0, при цьому узагальнена швидкість $\dot{q}$ системи також буде достатньо малою.

Перетворимо лаґранжіан (13.1) системи до більш простого вигляду. Для цього введемо новий незалежний параметр x, який називається зміщенням системи, і його похідну за часом $\dot{x}$:

$$x = q - q_0, \quad \dot{x} = \dot{q}. \tag{13.2}$$

Розкладемо функцію Лаґранжа (13.1) з урахуванням (13.2) в ряд Тейлора за степенями x і $\dot{x}$ із точністю до величин другого порядку малості.

Розкладання потенціальної енергії системи $U(q)$ за степенями зміщення x у зазначеному наближенні має вигляд:

$$U(q) \simeq U(q_0) + \left(\frac{dU}{dq}\right)_{q=q_0} \cdot x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q=q_0} \cdot x^2. \tag{13.3}$$

Якщо прийняти $U(q_0)=0$ (домовимося відлічувати потенціальну енергію від її мінімального значення) і врахувати, що узагальнена сила, що діє в положенні рівноваги (мінімумі потенціальної енергії), дорівнює нулю, тобто $\left(\frac{dU}{dq}\right)_{q=q_0} = 0$, то отримаємо

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \tag{13.4}$$

де

$$k = \left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q=q_0} > 0. \tag{13.5}$$

Сталу k із формули (13.5) називають **силовим коефіцієнтом** або **динамічним параметром** коливальної системи. Значення k є додатною величиною, оскільки при $q = q_0$ потенціальна енергія має мінімум.

Кінетичну енергію в цьому ж наближенні можна представити такою формулою:

$$T \approx \frac{1}{2} m\dot{x}^2, \tag{13.6}$$

де величину

$$m = f(q_0) \tag{13.7}$$

називають **кінематичним параметром** системи, який збігається з масою лише тоді, коли x — декартова координата.

Отже, лаґранжіан одновимірної системи (13.1), що здійснює малі коливання поблизу положення стійкої рівноваги, із точністю до величин другого порядку малості за x і $\dot{x}$ можна представити у вигляді

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \tag{13.8}$$

Скориставшись лаґранжіаном (13.8) і рівнянням руху (3.9) у формі $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, можна отримати таке диференціальне рівняння руху системи поблизу положення стійкої рівноваги q_0:

$$m\ddot{x} = -kx \tag{13.9}$$

або

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{13.10}$$

де введено позначення

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{13.11}$$

Рівняння (13.10) є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами, тому коливання механічної системи, що описуються рівнянням (13.10), називаються **лінійними**, а механічна система з лаґранжіаном вигляду (13.8) — **лінійним гармонічним осцилятором.** Крім того, рівняння (13.10) є однорідним. Коливання системи, які описуються однорідними рівняннями, називаються **власними** або **вільними** коливаннями.

Узагальнену силу $F=-\dfrac{dU}{dx}=-kx$, яка виникає при відхиленні системи від положення стійкої рівноваги й намагається повернути її до положення рівноваги, називають **узагальненою квазіпружною силою.**

У ролі квазіпружної сили можуть виступати різні сили, наприклад, у пружинному маятнику такою силою є сила пружної деформації пружини, а в математичному маятнику — складова сили тяжіння.

Незалежними розв'язаннями однорідного лінійного диференціального рівняння (13.10) є функції $\cos\omega_0 t$ і $\sin\omega_0 t$ або $e^{i\omega_0 t}$ і $e^{-i\omega_0 t}$, тому загальний розв'язок (13.10) можна представити двома способами:

$$x(t)=A_1\cos\omega_0 t+A_2\sin\omega_0 t \tag{13.12}$$

або

$$x(t)=C_1 e^{i\omega_0 t}+C_2 e^{-i\omega_0 t}, \tag{13.13}$$

де довільні сталі A_1 і A_2 — дійсні величини, а C_1 і C_2 — комплексні. Зауважимо, що C_1 і C_2 є комплексно спряженими величинами, тобто $C_2=C_1^*$. Представляючи ці константи у вигляді

$$C_1=\frac{a}{2}e^{i\alpha},\ C_2=\frac{a}{2}e^{-i\alpha}, \tag{13.14}$$

(тут a і α — нові дійсні константи), можна отримати третю форму розв'язку рівняння (13.10):

$$x(t)=a\cos(\omega_0 t+\alpha). \tag{13.15}$$

Вираз (13.15) показує, що поблизу положення стійкої рівноваги механічна система здійснює гармонічний коливальний рух. Максимальне відхилення a від положення рівноваги називається **амплітудою** коливання, аргумент косинуса — його фазою, а стала α —

початковою фазою. Сталі a і α знаходимо з розв'язку (13.15), виходячи з початкових умов для координати $x(0) = x_0$ і швидкості $\dot{x}(0) = v_0$, за формулами

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}. \tag{13.16}$$

Сталу ω_0, яка визначається згідно з (13.11) кінематичними й динамічними властивостями самої системи, називають **власною частотою** коливань. Власна частота ω_0 **не залежить від початкових умов** руху системи. Зазначена властивість є наслідком малості коливань. Вона не буде виконуватися, якщо в розкладанні лаґранжіана (13.1) враховувати члени більш високого порядку відносно x і $\dot{x}$.

У багатьох випадках зміщення системи $x(t)$ зручно представляти у вигляді дійсної частини комплексної величини:

$$x(t) = \mathrm{Re}\{A e^{i\omega_0 t}\}, \tag{13.17}$$

де $A = a e^{i\alpha}$ — **комплексна амплітуда коливань** (її модуль збігається з дійсною амплітудою a, а аргумент — із початковою фазою α). Комплексне представлення коливань (13.17) зручно тим, що багато математичних операцій з експоненціальними функціями здійснюються простіше, ніж із тригонометричними (диференціювання та інтегрування не змінюють вигляду експоненціальних функцій). Однак необхідно пам'ятати, що таке представлення коливань дає правильні результати лише для лінійних операцій (додавання, множення на постійний коефіцієнт, диференціювання, інтегрування). При цьому часто в записі (13.17) випускають знак узяття дійсної частини Re, переходячи до дійсних частин лише в остаточних результатах. В усіх випадках, коли необхідно здійснювати нелінійну операцію (наприклад, піднесення зміщення $x(t)$ у квадрат), необхідно переходити до представлення коливань у тригонометричній формі (13.15).

Повна енергія системи, яка складається із суми кінетичної та потенціальної енергій, зберігається:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}. \tag{13.18}$$

Підставлення до рівняння (13.18) розв'язку (13.15) і виразу $\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$, який можна отримати з (13.15) шляхом диференціювання за часом, показує, що

$$E = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2}, \tag{13.19}$$

тобто повна енергія системи є пропорціональною квадрату амплітуди коливань.

§ 14. Вимушені коливання гармонічного осцилятора

Як називаються коливання системи, що перебувають під дією зовнішнього поля? Що таке вимушуюча сила? Розглянути випадок постійної вимушуючої сили. Розглянути випадок періодичної в часі вимушуючої сили. Що таке резонанс?

Власні коливання лінійного гармонічного осцилятора, розглянуті раніше, відбуваються за відсутності зовнішніх полів і сил, що діють на систему з боку оточуючого середовища.

Коливання в системі, на яку діє деяке зовнішнє поле, називають **вимушеними**.

За наявності зовнішнього поля до власної потенціальної енергії системи $kx^2/2$ додається потенціальна енергія $U^{(e)}(q,t)$, пов'язана із цим полем. Будемо вважати, що зовнішнє поле також є достатньо слабким, тому коливання системи можна, як і раніше, вважати малими. Аналогічно до (13.3) розкладемо зовнішню потенціальну енергію за малим параметром x. У результаті отримаємо

$$U^{(e)}(q,t) \simeq U^{(e)}(q_0,t) + \left(\frac{dU^{(e)}}{dq}\right)_{q=q_0} \cdot x. \tag{14.1}$$

Тут перший член $U^{(e)}(q_0,t)$ можна представити у вигляді повної похідної за часом від деякої функції часу і, як наслідок, під час підставлення до функції Лаґранжа його можна буде випустити (див. § 4). Другий доданок (14.1) являє собою силу $-\left(\frac{dU^{(e)}}{dq}\right)_{q=q_0}$, яка діє на систему в положенні рівноваги з боку змінного зовнішнього поля. Цю силу називають **збурювальною,** або **вимушуючою.** Вона є заданою функцією часу, тобто

$$-\left(\frac{dU^{(e)}}{dq}\right)_{q=q_0}=F(t). \tag{14.2}$$

Таким чином, за наявності змінного зовнішнього поля лаґранжіан гармонічного осцилятора матиме вигляд:

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}+xF(t)=\frac{m}{2}(\dot{x}^2-\omega_0^2x^2)+xF(t), \tag{14.3}$$

де $\omega_0=\sqrt{k/m}$ — частота вільних коливань осцилятора.

Використовуючи рівняння Лаґранжа, отримаємо, що рівнянням руху в даному випадку є неоднорідне лінійне диференціальне рівняння:

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\frac{1}{m}F(t). \tag{14.4}$$

Його загальний розв'язок складається з двох доданків: $x=x_0+x_1$, де x_0 — загальний розв'язок однорідного рівняння (13.10), що описує вільні коливання осцилятора, а x_1 — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (14.4), що характеризує вимушені коливання системи. Розв'язок x_0 відомий, отже, нам необхідно знайти частинний інтеграл x_1 рівняння (14.4). Вигляд цього інтеграла залежить у кожному конкретному випадку від вигляду вимушуючої сили $F(t)$.

Розглянемо спочатку випадок, коли вимушуюча сила є постійною, а саме, $F(t)=P$. Така ситуація має місце для пружинного маятника. Частинний інтеграл рівняння (14.4) в цьому випадку можна представити як $x_1=P/m\omega_0^2$, а його загальний розв'язок записати у вигляді

$$x(t)=a\cos(\omega_0 t+\alpha)+\frac{P}{m\omega_0^2}. \tag{14.5}$$

Таким чином, єдина зміна, яку дія постійної вимушуючої сили вносить до характеру малих коливань одновимірної системи, проявляється в зміщенні центра коливань на постійну величину $x_{зм} = P/m\omega_0^2$. Величина $x_{зм}$ називається **статичним зміщенням положення рівноваги.**

Практично важливішим є випадок, коли вимушуюча сила — періодична функція часу

$$F(t) = F_0 \cos(\gamma t + \beta), \tag{14.6}$$

де F_0, γ — амплітуда й частота вимушуючої сили, а β — її початкова фаза. Рівняння руху (14.4) в цьому разі буде таким:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\gamma t + \beta). \tag{14.7}$$

Частинний розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді

$$x_1 = B\cos(\gamma t + \beta). \tag{14.8}$$

При підставленні цього розв'язку до рівняння (14.7) останнє має перетворюватися на тотожність, тобто

$$(\omega_0^2 - \gamma^2)B\cos(\gamma t + \beta) \equiv \frac{F_0}{m}\cos(\gamma t + \beta). \tag{14.9}$$

Звідси можна визначити константу B

$$B = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}. \tag{14.10}$$

Додаючи до частинного розв'язку (14.8) загальний розв'язок рівняння (13.15), отримуємо закон руху коливань осцилятора

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta), \tag{14.11}$$

у якому довільні сталі a і α визначаються з початкових умов руху системи.

Отже, під дією періодичної вимушуючої сили одновимірна система здійснює рух поблизу положення стійкої рівноваги, який являє собою суперпозицію (накладення) двох гармонічних коливань. Одне з коливань є власним коливанням із частотою ω_0, друге — вимушеним із частотою вимушуючої сили γ.

Енергія системи, яка здійснює вимушені коливання, не зберігається. У процесі вимушених коливань відбувається безперервний обмін енергією між системою, що коливається, і джерелом вимушуючої сили, при цьому сумарна енергія такої системи (система, що коливається, разом із полем зовнішньої сили) залишається незмінною (підкреслимо, що в системі немає сил тертя).

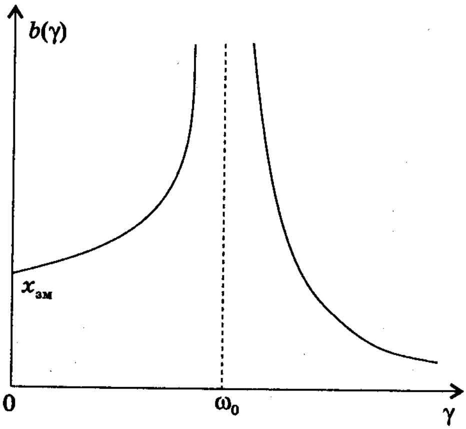


Рис. 14.1

Величину

$$b(\gamma) = \frac{F_0}{\left|m(\omega_0^2 - \gamma^2)\right|}, \tag{14.12}$$

яка входить до закону коливань осцилятора (14.11), називають **амплітудою вимушених коливань**. За рис. 14.1 для функції $b = b(\gamma)$ видно, що при збігу частоти вимушуючих коливань із власною частотою системи $\gamma = \omega_0$ амплітуда вимушених коливань наближається до нескінченності. Це явище має назву **резонансу**. Для випадку резонансу $(\gamma = \omega_0)$ розв'язок рівняння (14.1) використовувати не можна, оскільки перестають виконуватися вихідні умови малості коливань.

Для того щоб отримати загальний розв'язок рівняння (14.7), справедливий при $\gamma = \omega_0$, слід відзначити, що в розв'язку (14.11) константи a і α є довільними. Їх можна обрати таким чином, щоб загальний розв'язок мав вигляд:

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}\left[\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)\right]. \quad (14.13)$$

При $\gamma \to \omega_0$ другий доданок у правій частині виразу (14.13) дає невизначеність вигляду $0/0$. Розкривши цю невизначеність за правилом Лопіталя, отримаємо

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin(\omega_0 t + \beta) \quad (14.14)$$

або

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\cos(\omega_0 t + \beta - \frac{\pi}{2}). \quad (14.15)$$

Таким чином, при резонансі амплітуда вимушених коливань зростає за лінійним законом ($\sim t$) доти, доки коливання не перестануть бути малими, і вся теорія, що викладається, перестане бути застосовною. Крім того, із рівняння (14.15) видно, що вимушені коливання виявляться зсунутими за фазою відносно вимушуючої сили на кут $\pi/2$.

Розділ V
ПРИНЦИП ВІДНОСНОСТІ ЕЙНШТЕЙНА

§ 15. Кінематика спеціальної теорії відносності

Як класичні уявлення про простір і час відбиваються на уявленні про взаємодію між частинками в класичній механіці?
Яке протиріччя між експериментом і теорією примусило переглянути уявлення про простір і час?
Який експеримент принципово суперечить другому постулату класичної теоретичної механіки — закону додавання швидкостей?

Як відомо з рівняння (5.2), класична функція Лаґранжа системи N **взаємодіючих** частинок записується у вигляді:

$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2-U\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N\right), \tag{15.1}$$

де $U\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N\right)$ — потенціальна енергія системи, яка залежить лише від положення (координат) частинок системи. Класичний спосіб описання взаємодії частинок спирається на припущення про миттєве розповсюдження взаємодії між компонентами системи. Зміна положення будь-якої частинки має миттєво відбитися на інших частинках системи.

Однак експерименти доводять, що миттєвих взаємодій у природі не існує. Тому класична механіка, яка ґрунтується на перетвореннях Ґалілея—Ньютона, містить деяку неточність. Завжди існує проміжок часу, за який одне тіло «відчуває» зміну положення іншого тіла. Якщо подумки поділити відстань між тілами на цей проміжок часу, то отримаємо «швидкість розповсюдження взаємодії». Цю швидкість називають максимальною швидкістю розповсюдження взаємодій. Очевидно, що наявність максимальної швидкості розповсюдження взаємодій означає, що рух тіл зі швидкістю, більшою за цю, у природі є неможливим. Насправді, якщо такий рух мав би місце, то із його допомогою можна було б здійснювати взаємодію між об'єктами зі швидкістю, яка перевищує найбільшу (максимальну) швидкість розповсюдження взаємодій. Максимальна швидкість розповсюдження взаємодій є швидкістю розповсюдження світла у вакуумі, позначається буквою c і дорівнює $c \cong 3\times10^8$ м/с.

Об'єднання класичного принципу відносності та скінченності швидкості розповсюдження взаємодій (на відміну від принципу відносності Ґалілея—Ньютона, який базується на нескінченній швидкості розповсюдження взаємодій) називається **принципом відносності Ейнштейна**. Він спирається на два постулати:

1. Закони теоретичної фізики є інваріантними (однаковими) в усіх інерціальних системах відліку.
2. Швидкість світла є інваріантною (постійною) в усіх інерціальних системах відліку й дорівнює $c \cong 3\times10^8$ м/с.

Теорію, що побудовано на основі принципу відносності Ейнштейна, називають спеціальною теорією відносності (для стислості, СТВ), а теоретичну механіку, яка на ній ґрунтується — **релятивістською.**

Час у класичній механіці є **абсолютним**, тобто інтервали часу є однаковими (інваріантними) незалежно від вибору ІСВ. Інакше кажучи, якщо дві події відбуваються одночасно для якогось спостерігача, вони є одночасними для будь-якого іншого, отже, проміжок часу між подіями є **однаковим** в усіх ІСВ.

Однак твердження про інваріантність (абсолютність) часу суперечить принципу відносності Ейнштейна: з абсолютності часу в класичній механіці випливає закон додавання швидкостей (1.6). Цей закон має бути застосовним і для швидкості розповсюдження взаємодій. Звідси випливало б, що швидкість світла є різною в різних ІСВ. Однак експерименти підтверджують принципи відносності Ейнштейна.

Прикладом такого експерименту може бути дослід **Майкельсона***, який доводить, що швидкість світла не залежить від напрямку його розповсюдження (згідно ж із класичною теорією, яка ґрунтується на законі додавання швидкостей (1.6), швидкість світла c має бути різною в напрямку руху Землі та в протилежному напрямку).

Таким чином, із принципу відносності Ейнштейна має випливати, що **час неабсолютний**, тобто він не є інваріантом у різних ІСВ.

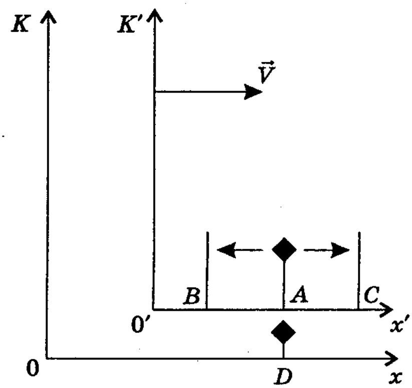


Рис. 15.1

Розглянемо інший приклад (див. рис. 15.1). Нехай є дві інерціальні системи відліку K і K', які рухаються одна відносно іншої із постійною швидкістю $\vec{V}$, що орієнтована вздовж однаково направлених осей $0x$ і $0'x'$. Припустимо, що з точки A в системі K', яка рухається, уздовж осі $0'x'$ посилаються сигнали (наприклад, сигнал від спалаху світла) в напрямку точок B і C. При цьому вважається, що відрізки AB і AC є однаковими. Через інваріантність швидкості світла спостерігач, який перебуває в системі відліку K', що рухається, побачить прихід світла до точок B і C одночасно. Легко зрозуміти, що в нерухомій системі K

* § 35, 102, 103 у книзі: Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 4: Оптика.— М.: Наука, 1980.— 752 с.

прихід сигналу до точок B і C для спостерігача, який перебуває в точці D, буде неодночасним. Насправді, швидкість світла відносно системи K згідно з принципом відносності Ейнштейна також дорівнює c. Проте через те, що точка B рухається назустріч надісланому сигналу (відносно системи K), а точка C — від сигналу, то до точки B сигнал прийде раніше, ніж до точки C. Цей експеримент доводить той факт, що проміжок часу між двома подіями у двох різних ІСВ не є інваріантом.

Те ж саме стосується і просторових інтервалів: у класичній механіці простір є **абсолютним**, тобто просторові співвідношення між різними подіями не залежать від того, у якій системі відліку вони розглядаються, а в спеціальній теорії відносності простір є **відносним**, тобто відстані між точками, у яких відбуваються події, залежать від вибору ІСВ. Інакше кажучи, дві події можуть відбуватися в тій самій точці простру, якщо їх розглядати в одній ІСВ, і в різних точках, якщо розглядати в іншій ІСВ.

§ 16. Чотиривимірний просторово-часовий континуум. Інтервал

Сформулювати сучасні фізичні уявлення про простір і час.
Якою є математична модель просторово-часового континуума?
Що таке подія, матеріальна точка, процес, світова лінія?
Як визначається інтервал між тією ж самою парою подій у двох ІСВ?
Що таке елементарний інтервал? Довести, що інтервал між двома подіями є інваріантом в різних ІСВ.
Що таке часоподібні та просторовоподібні інтервали? Як на цих поняттях відбивається властивість інваріантності інтервалу?

Класичне уявлення про простір і час полягає в тому, що простір і час є абсолютним, а просторові і часові співвідношення — незалежними між собою.

Сучасні уявлення про простір і час, сформульовані, виходячи з принципів відносності Ейнштейна, ґрунтуються на властивостях відносності як простору, так і часу. Простір і час представляються у вигляді єдиної «субстанції», об'єднаної в так званий **просторово-часовий континуум** (ПЧК).

Сформулюємо основні фізичні уявлення про ПЧК, який об'єднує в собі простір і час.

Відносний простір:

є вмістилищем матеріальних тіл;

тривимірний;

нескінченний;

однорідний;

ізотропний;

не діє на матеріальні тіла та не піддається впливу цих тіл.

Часовий (відносний) підпростір:

одновимірний;

нескінченний;

однорідний;

є вмістилищем подій.

Математичну модель ПЧК можна описати сукупністю чотирьох (уявних) ортогональних координат.

Із матеріальними тілами в ПЧК відбуваються **події**, які визначаються місцем, де вони відбуваються, і часом, коли вони відбулися. У чотиривимірному уявному просторі події ставиться у відповідність **світова точка**, що має чотири координати (x, y, z, t).

Фізичним процесом (рухом) у ПЧК називають безперервну зміну подій, які відбуваються з матеріальними тілами. Траєкторія, що описує такий рух, називається **світовою лінією.**

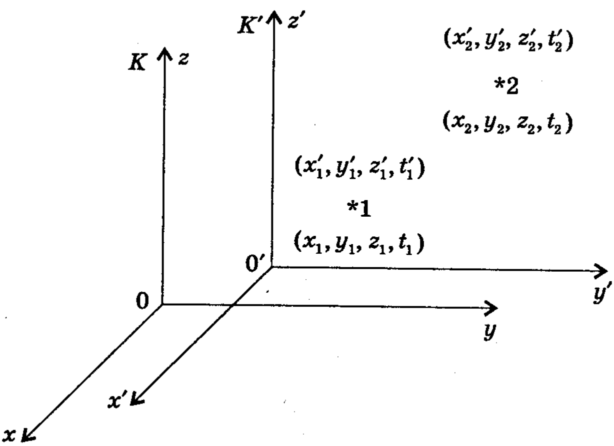


Рис. 16.1

Розглянемо дві ІСВ K і K' (рис. 16.1), які рухаються одна відносно іншої з постійною швидкістю $\vec{V}$, і скористаймося властивістю інваріантності швидкості світла c. У системі K будь-яку подію будемо характеризувати чотирма нештрихованими координатами (x, y, z, t), а в системі K' — штрихованими координатами (x', y', z', t'). Нехай в K у момент часу t_1 у точці з координатами x_1, y_1, z_1 відбувається подія (у конфігураційному просторі (див. § 3) вона має координати (x_1, y_1, z_1, t_1)), наприклад, спалах світла. Назвемо її подією 1. Подією 2 назвемо прихід світла до точки 2 з координатами в конфігураційному просторі (x_2, y_2, z_2, t_2). Світло розповсюджується зі швидкістю c, тому відстань, яку воно пройшло між вказаними подіями, дорівнюватиме $c(t_2 - t_1)$. Цю ж відстань можна представити інакше: $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. Тому запишемо таке співвідношення для координат у конфігураційному просторі x, y, z, t системи K:

$$c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2=0.$$

Зовсім аналогічно, якщо розглядати ті ж дві події в системі K' і скористатися сталістю швидкості світла c в ІСВ, маємо:

$$c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2=0.$$

Таким чином, із факту сталості швидкості світла виходить, що величина $c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$ не залежить від вибору системи координат, тобто, на відміну від просторового або часового інтервалу, які залежать від вибору ІСВ, ця комбінація просторових і часових інтервалів є інваріантом у СТВ.

Якщо в системі K розглядаються дві **довільні** події (не обов'язково пов'язані з розповсюдженням світла) з координатами (x_1, y_1, z_1, t_1) і (x_2, y_2, z_2, t_2) відповідно, то величину

$$s_{12}=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2} \qquad (16.1)$$

називають **інтервалом** між цими подіями.

Уведемо для зручності такі позначення:

$$\begin{cases} l_{12}=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2; \\ t_{12}=t_2-t_1; \end{cases} \qquad (16.2)$$

тоді інтервал у системі K стисло запишеться таким чином:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}\,. \tag{16.3}$$

Аналогічно запишемо інтервал в інерціальній системі K':

$$s'_{12} = \sqrt{c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}}\,, \tag{16.4}$$

де

$$\begin{cases} l'^2_{12} = \left(x'_2 - x'_1\right)^2 + \left(y'_2 - y'_1\right)^2 + \left(z'_2 - z'_1\right)^2; \\ t'_{12} = t'_2 - t'_1. \end{cases} \tag{16.5}$$

Визначимо, як пов'язані інтервали у двох інерціальних системах відліку. Для цього введемо поняття елементарного інтервалу й розглянемо дві близькі події 1 і 2, які відрізняються одна від одної на нескінченно малі інтервали (диференціали) як за часом, так і за координатами. В інерціальній системі K можна записати

$$\begin{cases} t_2 = t_1 + dt; \\ x_2 = x_1 + dx; \\ y_2 = y_1 + dy; \\ z_2 = z_1 + dz. \end{cases} \tag{16.6}$$

Аналогічно в системі K':

$$\begin{cases} t'_2 = t'_1 + dt'; \\ x'_2 = x'_1 + dx'; \\ y'_2 = y'_1 + dy'; \\ z'_2 = z'_1 + dz'. \end{cases} \tag{16.7}$$

Введемо до розгляду ds і ds' — елементарні інтервали (нескінченно малі величини) в чотиривимірному просторі, по осях якого відкладаються координати і час. Елементарні інтервали у двох системах відліку можна визначити з формул (16.1) і (16.4):

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\,, \tag{16.8}$$

$$ds' = \sqrt{c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2}\,. \tag{16.9}$$

Швидкість світла є інваріантом у системах K і K'. Дві нескінченно малі величини одного порядку мають бути пропорційними одна одній. Уведемо коефіцієнт пропорційності a й запишемо таке співвідношення:

$$ds = a ds'. \tag{16.10}$$

Величина a не має залежати:

а) від координат, оскільки це суперечить властивості однорідності простору;

б) від часу, тому що це суперечить властивості однорідності часу;

в) від напрямку швидкості $\vec{V}$ — це суперечить властивості ізотропії простору.

Таким чином, за методом виключення доходимо висновку, що величина a може залежати лише від модуля швидкості $|\vec{V}| \equiv V$.

Розглянемо три системи відліку K, K_1 і K_2. Нехай V_1 і V_2 — абсолютні величини швидкостей систем K_1 і K_2 відносно системи K. Тоді, скориставшись формулою (16.10), зв'язок між елементарними інтервалами в системах K, K_1 і K, K_2 можна представити так:

$$ds = a(V_1) ds_1, \tag{16.11}$$

$$ds = a(V_2) ds_2. \tag{16.12}$$

Нехай далі V_{12} — модуль відносної швидкості між системами K_1 і K_2. Зв'язок між елементарними інтервалами в системах K_1 і K_2 дорівнюватиме

$$ds_1 = a(V_{12}) ds_2. \tag{16.13}$$

Прирівнявши праві частини співвідношень (16.11) і (16.12), отримуємо:

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{a(V_2)}{a(V_1)}. \tag{16.14}$$

Із формули (16.13) знайдемо відношення інтервалів

$$\frac{ds_1}{ds_2} = a(V_{12}). \tag{16.15}$$

Із рівності лівих частин двох останніх виразів виходить, що

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \tag{16.16}$$

Зрозуміло, що модуль V_{12} (який входить до правої частини (16.16)) у загальному випадку має залежати не лише від модулів векторів $\vec{V}_1$ і $\vec{V}_2$, а й кута γ між цими векторами. Але до лівої частини рівняння (16.16) кут не входить взагалі. Звідси випливає, що остання рівність буде виконуватися завжди лише в тому випадку, якщо a буде сталою величиною, при цьому рівною одиниці, що є наслідком тієї ж рівності (16.16).

Отже, ми отримуємо дуже важливий результат — нескінченно малий (елементарний) інтервал між подіями є однаковим (інваріантним) в усіх інерціальних системах відліку:

$$ds = ds'. \tag{16.17}$$

Із рівності елементарних інтервалів випливає також рівність скінченних інтервалів, оскільки сума нескінченно малих величин дорівнює скінченній величині,

$$s = s'. \tag{16.18}$$

Інваріантність (абсолютність) інтервалу в спеціальній теорії відносності Ейнштейна відіграє таку ж важливу роль, як абсолютність часу $t = t'$ в класичній механіці. Інваріантність інтервалу (16.18) в різних ІСВ є **математичним відображенням сталої швидкості світла** в будь-яких ІСВ.

Зауважимо, що існує суттєва різниця у вигляді квадратичної форми в класичній теорії та спеціальній теорії відносності. У класичній теоретичній механіці є інваріантним квадрат довжини елементарного інтервалу відносно різних ІСВ (див. § 5):

$$dl^2 = dl'^2, \tag{16.19}$$

де

$$dl^2 = +dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{16.20}$$

Усі елементи квадратичної форми входять до рівності (16.20) зі знаком плюс. Геометрія, яка базується на співвідношенні (16.20), називається евклідовою.

Розглянемо квадрат інтервалу в релятивістській механіці (16.8). Уведемо нову вісь часу $\tau = ict$, де $i^2 = -1$. Тоді квадрат елементарного інтервалу запишеться так:

$$ds^2 = -d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (16.21)$$

Геометрія, в основі якої лежить квадратична форма вигляду (16.21), має назву псевдоевклідової.

Повернімося до визначення інтервалу у двох ІСВ у позначеннях (16.3) і (16.4). Через його інваріантність (див. (16.18)) маємо

$$s_{12}^2 = s'^2_{12} \qquad (16.22)$$

або

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}. \qquad (16.23)$$

Постає питання: чи існує така система K', у якій обидві події відбуваються в одній точці простору, тобто $l'_{12} = 0$? У цьому випадку

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12}. \qquad (16.24)$$

Праворуч у рівнянні (16.24) стоїть додатна величина, отже, додатною є і ліва частина цього виразу, тоді і $s_{12}^2 > 0$. Виходить, що інтервал s_{12} — дійсна величина. Дійсні інтервали називаються **часоподібними**. Час, який пройде в системі K' між подіями, що відбулися в одній точці, знайдемо з формули (16.24):

$$t'_{12} = t'_2 - t'_1 = \frac{\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}}{c} = \frac{s_{12}}{c}. \qquad (16.25)$$

Якщо дві події відбуваються з тим самим тілом, то інтервал між ними завжди часоподібний, оскільки шлях, який проходить тіло між двома подіями, не може бути більшим за ct_{12} через те, що швидкість руху тіла не може бути більшою за швидкість світла c, тобто завжди $l_{12} < ct_{12}$.

З'ясуємо тепер, чи існує така система K', у якій дві події відбуваються в той самий час? Як і раніше, для аналізу скористаємось формулою (16.23). У ній необхідно обрати $t'_{12} = 0$. У цьому випадку отримаємо:

$$s_{12}^2 = -l'^2_{12} < 0, \qquad (16.26)$$

отже, інтервал $s_{12} = \sqrt{-l'^2_{12}}$ — уявна величина. Уявні інтервали називаються **просторовоподібними.** Якщо інтервал між двома подіями просторовоподібний, то можна знайти таку систему відліку, у якій обидві події відбуваються в той самий час. Відстань між точками, де відбулися ці події, згідно з (16.23), дорівнює

$$l'_{12} = \sqrt{-c^2t_{12}^2 + l_{12}^2} = is_{12}. \qquad (16.27)$$

З інваріантності інтервалу випливає, що властивість інтервалу бути часоподібним або просторовоподібним не залежить від системи відліку.

Розглянемо чотиривимірну систему координат x, y, z, t. Оберемо деяку подію 0 із нульовими координатами й проаналізуємо, у якому відношенні до даної події 0 перебувають усі інші події.

Для зручності обмежимося розглядом однієї просторової координати x і часової координати t (рис. 16.2). Рівномірний рух частинки зі швидкістю v, що проходить через точку 0 з координатами $x = 0$ і $t = 0$, буде характеризуватися рівнянням $x = vt$, яке описує пряму лінію, нахилену до осі $0t$ під кутом α, таким, що $\mathrm{tg}\,\alpha = v$. Через те, що максимальна швидкість дорівнює швидкості світла c, максимально можливий кут між цією прямою та віссю часу визначатиметься рівністю $\mathrm{tg}\,\alpha = c$. Побудуємо прямі $x = \pm ct$ на рис. 16.2, що зображують розповсюдження сигналів із максимально можливою швидкістю (c) у двох протилежних напрямках, які проходять через подію 0. Усі лінії, що зображують рух матеріальних тіл (частинок), можуть розташовуватися тільки в секторах $a0b$ і $c0d$. Розглянемо події, усі світові точки яких розташовані в секторі $a0b$. У цьому секторі $c^2t^2 - x^2 > 0$, тому інтервали в цій області між будь-якою подією і подією 0 є часоподібними. У цій області $t > 0$ і, отже, усі події тут відбуваються після події 0. Таким чином, усі події області $a0b$ є майбутніми по відношенню до події 0, при цьому в усіх системах відліку. Тому цю область називають **абсолютно майбутньою** по відношенню до події 0.

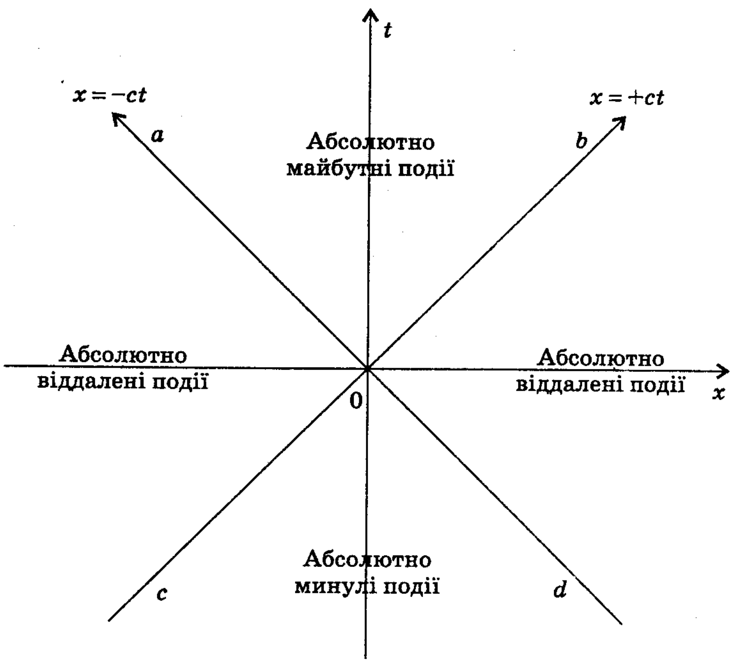


Рис. 16.2

Аналогічно область $c0d$ називають **абсолютно минулою** по відношенню події 0. Тут усі події в усіх системах відліку відбуваються до події 0.

Далі розглянемо області $a0c$ і $b0d$. У цих областях інтервал між будь-якою подією та подією 0 — просторовоподібний: $c^2t^2 - x^2 < 0$. У будь-якій системі відліку буде виконуватися умова $x^2 > 0$, тобто ці події завжди рознесені в просторі, при цьому можна обрати такі ІСВ, у яких величина ct буде більшою, меншою або дорівнюватиме нулю, якби тільки виконувалася нерівність $c^2t^2 < x^2$. Таким чином, поняття «одночасно», «раніше» і «пізніше» для цих подій є відносними. Тому ці області можна назвати абсолютно віддаленими по відношенню до події 0. Ці події не можуть бути причинно пов'язані з подією 0.

Якби ми розглядали всі три просторові координати x, y, z, то замість двох прямих, що перетинаються, на рисунку отримали б конус, вісь якого збігалася б з віссю часу. Цей конус називають **світловим конусом.**

Дві події причинно пов'язані між собою, якщо інтервал s між ними часоподібний. Це пояснюється тим, що жодна взаємодія між тілами не може відбуватися зі швидкостями, які перевищують максимальну швидкість розповсюдження взаємодій c. Саме для таких подій мають абсолютний зміст поняття «раніше», «пізніше», а це, у свою чергу, є необхідною умовою для того, щоб мали зміст поняття причини й наслідку.

§ 17. Перетворення Лоренца

Яка геометрія лежить в основі класичної теорії відносності Ґалілея—Ньютона? Які незалежні перетворення простору залишають інваріантною довжину відрізка?
Яка геометрія лежить в основі спеціальної теорії відносності Ейнштейна? Які незалежні перетворення ПЧК залишають інваріантним інтервал?
Як вивести перетворення Лоренца як результат обертання ПЧК у площині $x0\tau$?
Як отримати класичні перетворення Ґалілея—Ньютона як граничний випадок перетворення Лоренца? Якому значенню граничної швидкості передачі взаємодії вони відповідають?

Перетворення Лоренца визначають формули перетворень координат і часу при переході від однієї ІСВ до іншої.

У класичній механіці Ґалілея—Ньютона такі перетворення ґрунтувалися на абсолютності часу $t = t'$ та інваріантності квадратичної форми (основи евклідової геометрії) $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ при переході з ІСВ K до ІСВ K'.

Просторові перетворення евклідової геометрії залишають інваріантною довжину відрізка $l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Такими просторовими перетвореннями є лише паралельні перенесення та обертання системи координат. Виявляється, що загалом таких перетворень шість: три паралельні перенесення вздовж осей $0x$, $0y$, $0z$ і три обертання в площинах $x0y$, $y0z$, $x0z$.

У спеціальній теорії відносності Ейнштейна величиною, яка зберігається (є інваріантом) при перетворенні однієї ІСВ на іншу, є інтервал $s = s'$. Математично квадрат інтервалу записується у вигляді: $s^2 = -\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2$, де $\tau = ict$ (псевдоевклідова геометрія). Виникає питання: які та скільки перетворень, у результаті яких інтервал залишається інваріантом, можливі в чотиривимірному просторі, що утворює просторово-часовий континуум? Таких «просторових» перетворень десять: чотири паралельні перенесення вздовж осей $0x$, $0y$, $0z$, 0τ, які не викликають інтересу через те, що приводять лише до просторового перенесення початку координат і зміни початку відліку часу, і шість обертань у площинах $x0y$, $y0z$, $x0z$, $x0\tau$, $y0\tau$, $z0\tau$. Обертання в площинах $x0y$, $y0z$, $x0z$ перетворюють лише просторові координати, не торкаючись часових. Лише повороти в площинах $x0\tau$, $y0\tau$, $z0\tau$ можуть дати можливість отримати необхідні перетворення Лоренца.

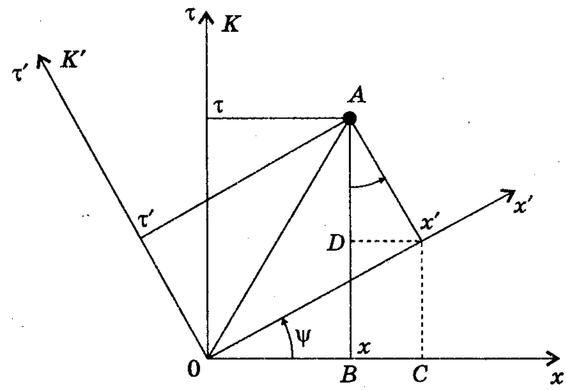


Рис. 17.1

Розглянемо поворот у площині $x0\tau$, вважаючи при цьому, що координати y і z не змінюються (рис. 17.1). Це перетворення має залишати незмінним інтервал $s = \sqrt{-\tau^2 - x^2}$ — «відстань» від точки A до 0. Отримаємо зв'язок між старою нештрихованою системою координат $x0\tau$ і новою штрихованою — $x'0\tau'$. Уведемо кут повороту ψ. Знайдемо зв'язок координат точки A у двох координатних системах.

Із рис. 17.1 видно, що $x = 0C - BC = x'\cos\psi - \tau'\sin\psi$, а $\tau = BD + AD = x'\sin\psi + \tau'\cos\psi$. Запишемо дві останні формули у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = x'\cos\psi - \tau'\sin\psi; \\ \tau = x'\sin\psi + \tau'\cos\psi. \end{cases} \tag{17.1}$$

За допомогою простої перевірки можна переконатися, що при такому перетворенні інтервал є інваріантним: $\sqrt{-\tau^2 - x^2} = \sqrt{-\tau'^2 - x'^2}$. Виключимо кут ψ із формул (17.1). Для цього розглянемо в системі K рух початку координат системи K'. У цьому випадку $x' = 0$, і формули (17.1) набудуть вигляду

$$\begin{cases} x = -\tau'\sin\psi; \\ \tau = \tau'\cos\psi. \end{cases} \tag{17.2}$$

Розділивши в цій системі перше рівняння на друге, отримуємо

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{x}{\tau}$$

або, скориставшись формулою $\tau = ict$,

$$\operatorname{tg}\psi = i\frac{x}{ct}. \tag{17.3}$$

Але зважаючи на те, що відношення $\frac{x}{t}$ є швидкість V руху системи K' відносно K, остаточно маємо

$$\operatorname{tg}\psi = i\frac{V}{c}. \tag{17.4}$$

Скористаємось відомими формулами тригонометрії:

$$\sin\psi = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}}, \quad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}}.$$

Тоді з урахуванням співвідношення (17.4):

$$\sin\psi = \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Підставивши останні формули до системи (17.1), отримуємо

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - i\dfrac{V}{c}\tau'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \\ y = y';\; z = z'; \\ \tau = \dfrac{\tau' + i\dfrac{V}{c}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{cases} \tag{17.5}$$

Це і є прямі перетворення Лоренца (ППЛ) в термінах «часу» τ, τ'. Зворотні перетворення Лоренца (ЗПЛ) можна одержати заміною швидкості $V \to -V$ і штрихованих координат на нештриховані, оскільки якщо система K' рухається відносно K зі швидкістю V, то і система K рухається відносно K' зі швидкістю $-V$. Зворотні перетворення Лоренца мають вигляд:

$$x' = \frac{x + i\dfrac{V}{c}\tau'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\; y' = y;\; z' = z;\; \tau' = \frac{\tau - i\dfrac{V}{c}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{17.6}$$

Далі знайдемо перетворення Лоренца в реальному часі t, t', скориставшись у формулах (17.5) і (17.6) раніше введеними позначеннями $\tau = ict$, $\tau' = ict'$.

Отже, прямі перетворення Лоренца матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \\ y = y';\; z = z'; \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{cases} \tag{17.7}$$

Зворотні перетворення Лоренца, як і раніше, отримуються заміною $V \to -V$ і штрихованих координат на нештриховані:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,;\; y' = y\,;\; z' = z\,;\; t' = \frac{t - \dfrac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \qquad (17.8)$$

Формули (17.7) підтверджують той факт, що швидкість світла c є гранично можливою швидкістю, оскільки при $V > c$ підкореневий вираз стає від'ємним, а координати й час — чисто уявними.

Класичні перетворення Ґалілея—Ньютона (1.1)

$$\begin{cases} x = x' + Vt'; \\ y = y';\; z = z'; \\ t = t', \end{cases}$$

які ґрунтуються на миттєвості (із нескінченною швидкістю) передачі взаємодії між об'єктами системи, випливають із формул (17.7) за допомогою граничного переходу $c \to \infty$.

§ 18. Кінематичні ефекти спеціальної теорії відносності

Як визначити дві події, що відбуваються одночасно в ІСВ K?
Чи будуть ці ж події відбуватися одночасно в ІСВ K'?
Як виглядає спостереження спалаху світла в системі координат K', що рухається?
Як здійснюється вимірювання довжини відрізка у нерухомій системі відліку?
Що таке лоренцеве скорочення довжини?
Як ставиться задача про час у рухомій і нерухомій системах відліку?
Як знайти уповільнення часу рухомого годинника відносно нерухомого?

Як відомо, подія в ІСВ характеризується трьома просторовими координатами й часом. Першу подію в системі K визначимо як x_1, y_1, z_1, t_1, а другу — x_2, y_2, z_2, t_2. Нехай у цій ІСВ дві події відбуваються одночасно, тобто $t_1 = t_2 = t_0$. Чи будуть ці події відбуватися одночасно в системі K', що рухається зі швидкістю V уздовж осі $0x$ щодо системи K?

Скористаємось зворотними перетвореннями Лоренца (17.8) для часу, при цьому в системі координат K' цим подіям поставимо у відповідність штриховані координати:

$$t'_2 = \frac{t_2 - \dfrac{V}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t'_1 = \frac{t_1 - \dfrac{V}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Знайдемо різницю $t'_2 - t'_1$ за умови одночасності подій у системі K $t_1 = t_2 = t_0$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{V}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (18.1)$$

Зауважимо, що $x_2 \neq x_1$, тому $t'_2 \neq t'_1$, тобто події, які розглядаються, у системі K' відбуваються не одночасно. У цьому й полягає **відносність одночасності просторово віддалених подій.**

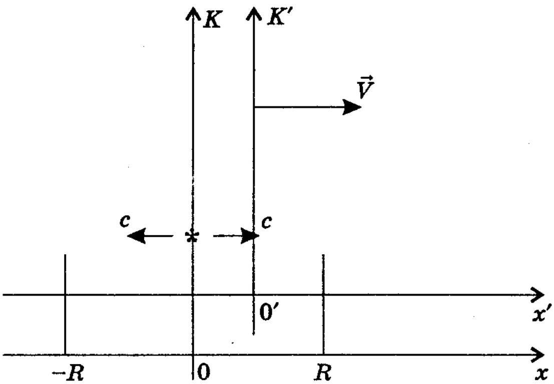


Рис. 18.1

Розглянемо розповсюдження світлового сигналу в нерухомій системі відліку K. Нехай світло випромінюється з точки 0 у визначений момент часу. В точках $x_1 = R$ і $x_2 = -R$ установлені приймачі світлового сигналу (рис. 18.1). Світло досягне точок $\pm R$ у той самий момент часу $t_1 = t_2$ в системі K. Однак у системі K', яка рухається зі швидкістю V праворуч відносно K, за формулою (18.1) отримаємо

$$t'_2 - t'_1 = \frac{V}{c^2}\frac{2R}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} > 0.$$

Таким чином, про одночасність двох подій у цьому випадку можна говорити лише в нерухомій системі відліку.

Розглянемо нерухому систему відліку K і систему K', що рухається відносно K зі швидкістю $\vec{V}$, направленою вздовж осі $0x$. Нехай у нерухомій системі відліку перебуває в стані спокою відрізок (стрижень) довільного розміру, орієнтований уздовж осі $0x$ (рис. 18.2). Для вимірювання його довжини в цій нерухомій системі необхідно мати еталон довжини і визначити, скільки еталонів довжини вкладається у вимірюваній величині. Можна прокалібрувати вісь координат на еталон довжини й визначити координати початку і кінця відрізка. Тоді його довжина дорівнюватиме $\Delta x = x_2 - x_1$.

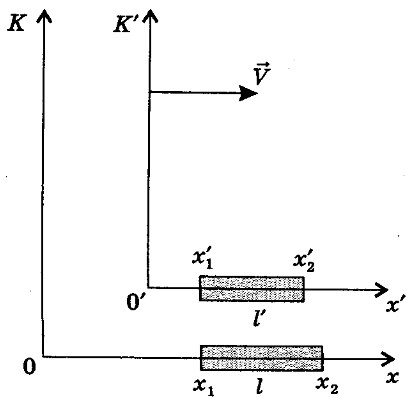


Рис. 18.2

Відрізок, який перебуває в стані спокою в системі K, відносно системи K' є таким, що рухається. Для вимірювання його довжини в системі координат K', що рухається, необхідно виміряти координати його початку й кінця в той самий момент часу $t' = t_2' = t_1'$. Час визначається за годинником у системі K'. Тоді довжина відрізка в системі K' дорівнюватиме $\Delta x' = x_2' - x_1'$. Запишемо прямі перетворення Лоренца (17.7) для координат початку й кінця відрізка в системі K:

$$x_1 = \frac{x_1' + Vt_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \; x_2 = \frac{x_2' + Vt_2'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{18.2}$$

Визначимо довжину відрізка в системі K $\Delta x = x_2 - x_1$ з урахуванням того, що координати x_1' і x_2' вимірюються в K' одночасно $(t_2' = t_1')$. У результаті отримаємо

$$\Delta x = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{18.3}$$

Домовимося **власною довжиною відрізка** вважати його довжину в тій системі відліку, у якій він перебуває в стані спокою. Позначимо її через $l_0 = \Delta x$, а довжину того ж відрізка в системі відліку K', яка рухається, через $l = \Delta x'$. Тоді

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{18.4}$$

Звідси випливає, що найбільшу довжину відрізок має в системі відліку, де він перебуває в стані спокою. Його довжина в системі відліку, що рухається зі швидкістю V, скорочується в $\sqrt{1-V^2/c^2}$ разів. Таке скорочення довжини називається **лоренцевим скороченням.** У випадку $V = 0$, природно, отримуємо $\Delta x = \Delta x'$.

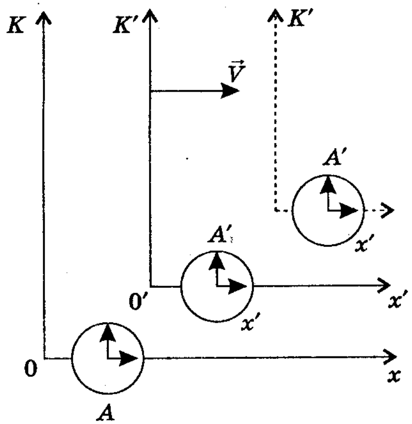


Рис. 18.3

Розглянемо нерухому систему відліку K, пов'язану з годинником A, і систему K', яка рухається з годинником A' (рис. 18.3). Уведемо поняття **власного часу** об'єкта — часу, що відлічується за годинником, який рухається разом з об'єктом. Іншими словами, це час, виміряний за годинником, який перебуває в стані спокою в системі відліку K'. Розглянемо дві події, що відбулися в тій самій точці простору x' системи K' (для зручності обмежимося однією просторовою координатою). У K' час, що минув між цими двома подіями, позначимо як $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Визначимо інтервал часу, який минув між цими ж подіями $\Delta t = t_2 - t_1$, у нерухомій системі K, пов'язаній із годинником A (на рис. 18.3 пунктиром показано систему K' із годинником у момент часу t_2' в точці з координатою x'). Із формул для прямих перетворень Лоренца (17.7) для часу маємо:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Зауважимо, що в цих формулах координату x' в рухомій системі координат K' обрано однаковою. Віднімаючи t_2 із t_1, отримуємо

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (18.5)$$

Позначимо $\Delta t = \tau$, $\Delta t' = \tau_0$, тоді

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (18.6)$$

Ця формула пов'язує власний час τ_0 із часом τ у системі відліку, відносно якої розглядається рух.

Як видно з формул (18.5) або (18.6), власний час рухомого об'єкта завжди менший, ніж відповідний проміжок часу в нерухомій системі. Інакше кажучи, рухомий годинник іде повільніше за нерухомий. Тут має місце **лоренцеве скорочення часу.**

§ 19. Перетворення тривимірного вектора швидкості матеріальної частинки

Як визначаються компоненти тривимірного вектора (3-вектора) швидкості частинки в класичній механіці?
Як перетворюються компоненти тривимірного вектора швидкості частинки при переході від однієї ІСВ до іншої в рамках СТВ?
Переконатися, що формули пертворення 3-вектора швидкості не суперечать сталості швидкості світла в будь-якій ІСВ.
Що таке аберація світла?

Розглянемо матеріальне тіло (частинку), що рухається в нерухомій системі відліку K зі швидкістю $\vec{v}$. У системі K', яка рухається зі швидкістю $\vec{V}$ відносно системи K, частинка має швидкість $\vec{v}'$. Визначимо зв'язок між $\vec{v}$ і $\vec{v}'$.

Як відомо, у класичній механіці простір і час не пов'язані між собою. При цьому при переході від однієї ІСВ до іншої залишаються інваріантними довжини відрізків l й інтервали часу Δt. При русі частинки в будь-якій системі відліку K її швидкість визначають як відношення нескінченно малого переміщення тіла до нескінченно малого проміжку часу, за який це переміщення відбулося:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{n}_x v_x + \vec{n}_y v_y + \vec{n}_z v_z . \qquad (19.1)$$

При цьому компоненти швидкості в декартовій системі координат (проекції вектора швидкості на осі координат) дорівнюють

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \; v_y = \frac{dy}{dt}, \; v_z = \frac{dz}{dt} . \qquad (19.2)$$

Компоненти швидкості частинки в рухомій системі координат K' визначимо аналогічно:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt}, \; v'_y = \frac{dy'}{dt}, \; v'_z = \frac{dz'}{dt}. \tag{19.3}$$

Для отримання формул перетворення швидкості в релятивістському випадку скористаємось перетвореннями Лоренца (17.7), записаними для двох близьких подій (x_1, y_1, z_1, t_1) і ($x_2 = x_1 + dx$, $y_2 = y_1 + dy$, $z_2 = z_1 + dz$, $t_2 = t_1 + dt$). Віднімаючи почленно формули (17.7), записані для першої події з аналогічних формул для другої події, отримаємо перетворення Лоренца в диференціалах

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \; dy = dy', \; dz = dz', \; dt = \frac{dt' + \dfrac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{19.4}$$

Розділимо перші три рівності (19.4) на четверту і, застосувавши позначення (19.2) і (19.3), у результаті отримаємо

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \dfrac{v'_x V}{c^2}}, \; v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \dfrac{v'_x V}{c^2}}, \; v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \dfrac{v'_x V}{c^2}}. \tag{19.5}$$

Формули (19.5) представляють собою закон додавання швидкостей у спеціальній теорії відносності. У граничному випадку нескінченної швидкості передання взаємодій $c \to \infty$ вони переходять у добре відомий закон додавання швидкостей класичної механіки (1.6).

Нагадаємо, що перетворення (19.5) отримані для випадку, коли система K' рухається відносно K зі швидкістю $\vec{V}$, паралельною осям $0x$ і $0x'$ ($\vec{v}$ — швидкість частинки в системі K, $\vec{v}'$ — у K').

Розглянемо окремий випадок руху частинки паралельно осі $0x$. Тоді в системі K проекції швидкості $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$, а в $K' - v_x = v'$, $v'_y = v'_z = 0$. У цьому випадку закон перетворення швидкостей матиме вигляд

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}. \tag{19.6}$$

Проаналізуємо цю формулу, якщо швидкість частинки в системі K' дорівнює швидкості світла: $v' = c$. Маємо

$$v = \frac{c+V}{1+cV/c^2} = c. \qquad (19.7)$$

Бачимо, що сумою двох швидкостей, що менші або дорівнюють швидкості світла, є швидкість, не більша за швидкість світла.

Формула (19.7) доводить факт сталості швидкостей світла в будь-якій інерціальній системі відліку.

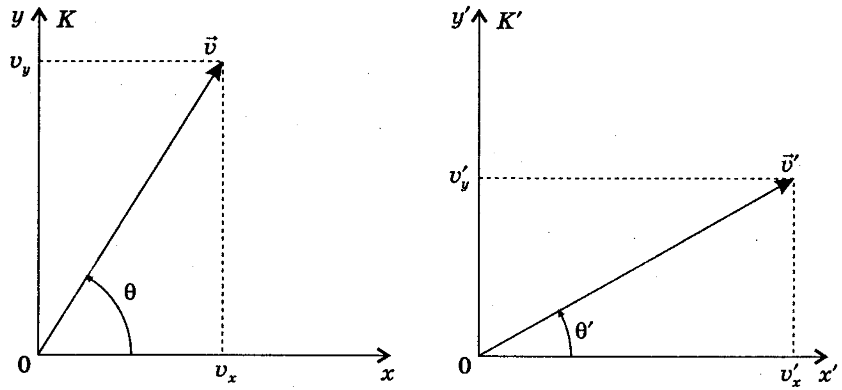


Рис. 19.1

Покажемо, що формули перетворення швидкості (19.5) достатньо точно описують явище **аберації світла** — відхилення світла при переході до іншої системи відліку. Для цього розглянемо двовимірний випадок, коли промінь світла розповсюджується в площині $x0y$ (рис. 19.1). Спочатку швидкості світла в ІСВ K і K' позначимо через $\vec{v}$ і $\vec{v}'$ відповідно, а в остаточних виразах перейдемо до швидкості c. Проекції цих швидкостей у системі K дорівнюють $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$, а в системі $K' - v'_x = v'\cos\theta'$, $v'_y = v'\sin\theta'$ (v і v' — абсолютні значення швидкостей, а θ і θ' — кути, утворені цими швидкостями з осями $0x$ і $0x'$). Із формул (19.5) легко отримати

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-V^2/c^2}}{v'\cos\theta' + V}. \qquad (19.8)$$

Це співвідношення пов'язує кути, під якими розповсюджуються світлові сигнали в двох ІСВ, тобто описує явище аберації світла.

Тепер оберемо v і v' рівними швидкості світла c. Тоді попередня формула (19.8) виглядатиме так:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta'\sqrt{1-V^2/c^2}}{\cos\theta' + V/c}. \tag{19.9}$$

Отримаємо добре відому з класичної фізики наближену формулу для аберації світла. Для цього скористаємось другою з формул (19.5), обравши в ній $v = v' = c$. Для синуса кута θ одержимо

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\dfrac{V}{c}\cos\theta'}. \tag{19.10}$$

У випадку, коли відносна швидкість руху інерціальних систем є малою порівняно зі швидкістю світла, тобто $\dfrac{V}{c} \ll 1$, із рівняння (19.10) випливає

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'}{1+\dfrac{V}{c}\cos\theta'} = \sin\theta'\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta'\right). \tag{19.11}$$

При виведенні (19.11) ми використали розкладання в ряд Тейлора, у якому обмежилися лінійними членами: $\left.\dfrac{1}{1+a}\right|_{a\ll 1} \approx 1-a$.

Введемо кут аберації $\Delta\theta = \theta' - \theta$ та застосуємо формулу для синуса різниці $\theta = \theta' - \Delta\theta$. У результаті ліва частина співвідношення (19.10) перетворюється так:

$$\sin\theta = \sin(\theta' - \Delta\theta) = \sin\theta'\cos\Delta\theta - \sin\Delta\theta\cos\theta'.$$

Кут аберації $\Delta\theta$ зазвичай є дуже незначним за величиною, отже, $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$, а $\cos\Delta\theta \approx 1$. Тоді маємо з попередньої формули

$$\sin\theta = \sin\theta' - \Delta\theta\cos\theta'. \tag{19.12}$$

Після підставлення (19.12) до (19.11) отримаємо відому класичну формулу для аберації світла

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta'. \tag{19.13}$$

§ 20. Матриця перетворень Лоренца

Як записати матрицю перетворень Лоренца? Що таке «німий» індекс, чотиривимірний вектор?
Властивість ортогональності матриці перетворень Лоренца. Що таке транспонована матриця?
Пряме та зворотне перетворення Лоренца в матричній формі.
Інваріантність скалярного добутку довільної пари чотиривимірних векторів. Чотиривимірний тензор другого рангу.

Перепишемо перетворення Лоренца (17.5)

$$x=\frac{x'-i\dfrac{V}{c}\tau'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}};\ y=y';\ z=z';\ \tau=\frac{\tau'+i\dfrac{V}{c}x'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$$

таким чином:

$$x_1=\frac{x_1'-i\dfrac{V}{c}x_4'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}};\ x_2=x_2';\ x_3=x_3';\ x_4=\frac{x_4'+i\dfrac{V}{c}x_1'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}. \qquad (20.1)$$

В останніх формулах ми перепозначили координати світової точки в чотиривимірному просторі $(x,\ y,\ z,\ \tau)$ так:

$$\begin{cases} x\to x_1, \\ y\to x_2, \\ z\to x_3, \\ \tau\to x_4. \end{cases} \qquad (20.2)$$

Формули (20.1) можна переписати в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{-i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x'_1 - i\dfrac{V}{c}x'_4}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \dfrac{i\dfrac{V}{c}x'_1 + x'_4}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{bmatrix} \tag{20.3}$$

Квадратну матрицю в (20.3) позначимо $\alpha_{\mu\nu}$:

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{-i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{bmatrix}. \tag{20.4}$$

Тут перший індекс μ нумерує рядки, а другий ν — стовпці. Домовимося в подальшому вважати, що індекси, позначені грецькими літерами, змінюються від 1 до 4. Тоді рівність (20.3) можна записати у вигляді:

$$x_\mu = \sum_\nu \alpha_{\mu\nu} x'_\nu . \tag{20.5}$$

Підкреслимо, що тут $\mu, \nu = 1,2,3,4$. Для спрощення запису (20.5) у виразі, в якому індекс повторюється, будемо мати на увазі підсумовування за цим індексом, а явний знак суми Σ не використовувати. Ця домовленість називається правилом Ейнштейна. У нашому випадку у (20.5) повторюється індекс ν. Індекс, за яким відбувається підсумовування, називається «німим», оскільки результат підсумовування від нього не залежить. Тому його можна позначити будь-якою літерою. Отже, у більш стислому вигляді рівність (20.5) запишеться так:

$$x_\mu = \alpha_{\mu\nu} x'_\nu . \tag{20.6}$$

Формула (20.6) являє собою пряме перетворення Лоренца.

Аналогічно можна записати квадрат елементарного інтервалу (16.21)

$$ds^2 = -d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \tag{20.7}$$

З урахуванням позначень (20.2) формула (20.7) перепишеться в індексній формі

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2 = -\sum_\mu dx_\mu^2 = -\sum_\mu dx_\mu dx_\mu . \tag{20.8}$$

Індекс μ повторюється. Використовуючи правило Ейнштейна, випускаємо знак Σ й остаточно записуємо

$$ds^2 = -dx_\mu^2 . \tag{20.9}$$

Повернемося до матриці перетворення Лоренца (20.4) і відзначимо її дуже важливу властивість. Матриця $\alpha_{\mu\nu}$ має властивість ортогональності, а саме, сума поелементного добутку будь-якого її стовпця (рядка) **самого на себе** дорівнює 1, у той час як підсумовування поелементного добутку двох будь-яких **різних** стовпців (рядків) дає в результаті 0. Доведемо цю властивість, виходячи з інваріантності інтервалу (16.18). При цьому скористаємось формулою (20.9) для інтервалу скінченної довжини. Маємо

$$x_\mu^2 = x_\mu'^2 \equiv x_\nu'^2 . \tag{20.10}$$

У тотожності (20.10) ми використали властивість «німого» індексу — «німий» індекс μ можна позначити будь-якою літерою, наприклад, ν або λ, оскільки за ним відбувається підсумовування. За допомогою визначення (20.6) перетворимо ліву частину формули (20.10)

$$x_\mu^2 = x_\mu x_\mu = \alpha_{\mu\nu} x'_\nu \alpha_{\mu\lambda} x'_\lambda = \alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\lambda} x'_\nu x'_\lambda = x'^2_\mu \equiv x'^2_\nu \,. \qquad (20.11)$$

Для того щоб виконувалася тотожність

$$\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\lambda} x'_\nu x'_\lambda \equiv x'^2_\nu \,, \qquad (20.12)$$

необхідно, щоб добуток матриць перетворення Лоренца задовільняв такому **співвідношенню ортогональності:**

$$\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}, \qquad (20.13)$$

де $\delta_{\nu\lambda}$ — символ Кронекера:

$$\delta_{\nu\lambda} = \begin{cases} 1, & \nu = \lambda, \\ 0, & \nu \neq \lambda. \end{cases} \qquad (20.14)$$

Таким чином, нами доведена властивість ортогональності матриці перетворення Лоренца за другою парою індексів (за стовпцями). Доказ ортогональності за першою парою індексів (за рядками) відбувається аналогічно. (Властивість ортогональності матриці описано також у Додатку 4.)

Перевіримо властивість ортогональності на конкретних прикладах. Нехай $\nu = \lambda = 1$, тобто в (20.13) розглядається перший стовпець. Наявність індексу μ, що повторюється, указує на підсумовування за цим індексом:

$$\alpha_{\mu 1}\alpha_{\mu 1} = \alpha_{11}\alpha_{11} + \alpha_{21}\alpha_{21} + \alpha_{31}\alpha_{31} + \alpha_{41}\alpha_{41} = 1 \,.$$

Нехай $\nu = 1$, $\lambda = 4$, тобто розглядається перший і четвертий стовпці матриці перетворення Лоренца $\alpha_{\mu\nu}$:

$$\alpha_{\mu 1}\alpha_{\mu 4} = \alpha_{11}\alpha_{14} + \alpha_{21}\alpha_{24} + \alpha_{31}\alpha_{34} + \alpha_{41}\alpha_{44} = 0 \,.$$

У матричній формі можна також записати формулу для зворотного перетворення Лоренца. Для цього спочатку нагадаємо визначення поняття **транспонованої матриці**: матриця називається транспонованою, якщо у вихідній матриці рядки замінити на її стовпці. Математично це можна представити так:

$$\alpha^T_{\mu\nu} \equiv \tilde{\alpha}_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}\,. \tag{20.15}$$

Для прикладу запишемо транспоновану матрицю перетворень Лоренца

$$\alpha^T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{bmatrix} \tag{20.16}$$

Розглянемо пряме перетворення Лоренца у вигляді (20.6). Помножимо його ліву та праву частину на матрицю $\alpha_{\mu\lambda}$. У результаті отримаємо

$$\alpha_{\mu\lambda} x_\mu = \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\mu\nu} x'_\nu\,.$$

Згідно з властивістю ортогональності матриці перетворення Лоренца (20.13), $\alpha_{\mu\lambda} x_\mu = \delta_{\lambda\nu} x'_\nu = x'_\lambda$.

Остаточно маємо

$$x'_\lambda = \alpha_{\mu\lambda} x_\mu \tag{20.17}$$

або з використанням транспонованої матриці

$$x'_\lambda = \alpha^T_{\lambda\mu} x_\mu\,. \tag{20.18}$$

Формули (20.17) і (20.18) являють собою формули зворотного перетворення Лоренца в матричній формі.

Нагадаємо, що в уявному чотиривимірному просторі подія визначається світовою точкою, яка має чотири координати (x, y, z, τ), де $\tau = ict$ — уявна величина. Сукупність цих координат можна розглядати як компоненти чотиривимірного радіус-вектора (4-радіус-вектора). Три просторові координати x, y, z і часову координату τ позначатимемо x_μ, де $\mu = 1,2,3,4$ (див. (20.2)). Квадрат довжини 4-радіус-вектора дається виразом

$$x_\mu^2 = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, \tag{20.19}$$

а сама довжина дорівнює

$$x_\mu = \sqrt{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2} \tag{20.20}$$

і збігається з інтервалом s у просторово-часовому континуумі (див. § 16). Оскільки інтервал є інваріантною величиною, то довжина 4-радіус-вектора не змінюється за будь-яких поворотів чотиривимірної системи координат (при перетвореннях Лоренца).

Чотиривимірним вектором (4-вектором) (не лише таким, що описує координатні залежності) називається сукупність чотирьох величин $A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, які при перетворенні чотиривимірної системи координат перетворюються як компоненти (координати) чотиривимірного радіус-вектора x_μ:

$$A_1 = \frac{A_1' - i\frac{V}{c}A_4'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \; A_2 = A_2'; \; A_3 = A_3'; \; A_4 = \frac{A_4' + i\frac{V}{c}A_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{20.21}$$

або в матричній формі

$$A_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu'. \tag{20.22}$$

4-вектори мають важливу властивість: добуток двох векторів є скаляром та інваріантом відносно перетворень Лоренца. Доведемо цю властивість. Нехай є два довільні 4-вектори A_μ, B_μ. Утворимо їх скалярний добуток і скористаємось формулою перетворення Лоренца (20.22), а також властивістю ортогональності матриці Лоренца (20.13)

$$A_\mu B_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu' \alpha_{\mu\lambda} B'_\lambda = \alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\lambda} A_\nu' B_\lambda' = \delta_{\nu\lambda} A_\nu' B_\lambda' = A_\nu' B_\nu',$$

тобто маємо

$$A_\mu B_\mu = A'_\mu B'_\mu. \tag{20.23}$$

В останньому виразі ми зробили заміну «німого» індексу $\nu \to \mu$ (за ним відбувається підсумовування). Таким чином, скалярний добуток двох довільних 4-векторів є інваріантним відносно перетворень Лоренца. У випадку, коли $A_\mu = B_\mu$, ми приходимо до відомої формули про інваріантність квадрата 4-вектора $A_\mu^2 = A'^2_\mu$.

За аналогією із 4-радіус-вектором перші три компоненти 4-вектора A_1, A_2, A_3 називають просторовими, а четверту A_4 — часовою, вважаючи її уявною величиною. Тоді квадрат 4-вектора можна подати так:

$$A_\mu^2 = -A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 + |A_4|^2, \tag{20.24}$$

а сам вектор має вигляд

$$A_\mu = \left(\vec{A}, A_4\right), \tag{20.25}$$

де $\vec{A} = \left(A_1, A_2, A_3\right)$ є тривимірним вектором.

Із рівняння (20.24) видно, що квадрат довжини 4-вектора може бути додатним, від'ємним і рівним нулю. У рамках термінології для інтервалів, що введено в § 16, 4-вектор будемо називати:

$$\begin{cases} \text{часоподібним, якщо } A_\mu^2 > 0; \\ \text{просторовоподібним, якщо } A_\mu^2 < 0; \\ \text{нульовим, якщо } A_\mu^2 = 0. \end{cases}$$

За аналогією із 4-вектором дамо визначення чотиривимірного тензора (4-тензора). 4-тензором другого рангу в чотиривимірному просторі називається сукупність $16\left(4^2\right)$ величин, які при перетворенні системи координат перетворюються як добутки компонент (координат) двох 4-векторов, тобто за законом

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\sigma}A'_{\lambda\sigma}. \tag{20.26}$$

4-тензор другого рангу можна представити у вигляді матриці (4×4), яка задовольняє визначеним властивостям координатних перетворень. Наприклад, матриця перетворень Лоренца є тензором другого рангу.

Для того щоб визначити, чи є матриця $A_{\mu\nu}$ тензором, необхідно перевірити інваріантність такого функціонала

$$F = A_{\mu\nu}B_{\mu}C_{\nu} \tag{20.27}$$

відносно перетворень Лоренца. Функціонал F — скаляр, оскільки утворений скалярним добутком вектора $A_{\mu\nu}B_{\mu}$ на вектор C_{ν}. Підставимо до формули для функціонала (20.27) визначення 4-тензора другого рангу (20.26)

$$F = A_{\mu\nu}B_{\mu}C_{\nu} = \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\sigma}A'_{\lambda\sigma}B_{\mu}C_{\nu} =$$
$$= \alpha_{\mu\lambda}B_{\mu}\alpha_{\nu\sigma}C_{\nu}A'_{\lambda\sigma} = B'_{\lambda}C'_{\sigma}A'_{\lambda\sigma} = A'_{\lambda\sigma}B'_{\lambda}C'_{\sigma} \equiv F'.$$

Тим самим показано, що функціонал (20.27) є інваріантним у різних ІСВ: $F \equiv F'$ (в останньому виразі ми скористалися формулою зворотного перетворення Лоренца в матричній формі (20.17)).

За аналогією із визначенням 4-тензора другого рангу введемо визначення 4-тензора довільного N-го рангу. 4-тензором N-го рангу називається сукупність 4^N величин, які при перетворенні системи координат перетворюються як добутки компонент (координат) N 4-векторів

$$A_{\mu\nu\kappa\ldots} = \alpha_{\mu\beta}\alpha_{\nu\gamma}\alpha_{\kappa\delta}\ldots A'_{\beta\gamma\delta\ldots}. \tag{20.28}$$

Зауважимо, що вектор можна розглядати як тензор першого рангу, а скаляр як тензор нульового рангу. Докладніше про тензори та їхні властивості розповідається в Додатку 4.

§ 21. Чотиривимірний вектор швидкості та прискорення

Як визначити 4-вектор швидкості? Як знайти компоненти 4-вектора швидкості? Яка в них розмірність?
Як визначається 4-вектор прискорення? Як орієнтовані між собою 4-вектори швидкості та прискорення під час руху?

У класичній механіці швидкість у тривимірному просторі визначається за формулою $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, при цьому компоненти швидкості в декартовій системі координат дорівнюють

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \ v_y = \frac{dy}{dt}, \ v_z = \frac{dz}{dt},$$

тобто компоненти швидкості — це нормовані на інваріант класичної механіки dt диференціали координат. Аналогічно можна визначити швидкість у спеціальній теорії відносності у чотиривимірному просторі. Єдиним інваріантом теорії відносності Ейнштейна є інтервал ds (16.17). Тому за аналогією з класичною механікою визначимо компоненти швидкості u_μ в спеціальній теорії відносності таким чином:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}, \ \mu = 1,2,3,4 . \tag{21.1}$$

Знайдемо інтервал у декартовій системі координат

$$ds = \sqrt{-dx_\mu^2} = \sqrt{c^2dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)} =$$

$$= cdt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)} = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

При виведенні цієї формули ми скористалися визначенням інтервалу (20.9), позначеннями (20.2) і переходом від «часу» τ до реального часу t: $\tau = ict$. Отже,

$$ds = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}\,, \tag{21.2}$$

де v — абсолютна величина швидкості руху частинки. Маючи формули (21.1), (21.2) і (19.2), знайдемо чотири компоненти 4-вектора швидкості:

$$u_1 = \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{cdt\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\,;$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{cdt\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{v_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\,;$$

$$u_3 = \frac{dx_3}{ds} = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{cdt\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{v_z}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\,;$$

$$u_4 = \frac{dx_4}{ds} = \frac{icdt}{ds} = \frac{icdt}{cdt\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{21.3}$$

Тут v_x, v_y, v_z — проекції вектора швидкості $\vec{v}$ частинки на осі декартової системи координат.

Таким чином, 4-вектор швидкості (у чотиривимірному просторі) можна записати у вигляді (20.25)

$$u_\mu = \left(\frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},\ \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \tag{21.4}$$

Із формули (21.4) видно, що три компоненти вектора u_μ є дійсними величинами, а четверта — уявною. При цьому всі компоненти є безрозмірними.

Знайдемо квадрат 4-вектора швидкості, використовуючи формулу (20.9) для квадрата інтервалу:

$$u_\mu^2 = \frac{dx_\mu^2}{ds^2} = \frac{dx_\mu^2}{-dx_\mu^2} = -1\,,$$

тобто квадрат 4-вектора швидкості має стале значення та дорівнює –1:

$$u_\mu^2 = -1, \tag{21.5}$$

а самі компоненти швидкості не залежні між собою.

4-вектор швидкості u_μ при переході від однієї системи відліку до іншої перетворюється відповідно до перетворень Лоренца, при цьому природним шляхом отримується закон додавання швидкостей.

За аналогією з формулою (21.1) для 4-вектора швидкості визначимо чотиривимірний вектор прискорення (4-вектор прискорення). 4-вектор прискорення дорівнює похідній від вектора швидкості за ds:

$$w_\mu = \frac{du_\mu}{ds} \equiv \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}. \tag{21.6}$$

Продиференціюємо вираз (21.5) за ds:

$$\frac{d}{ds}\left(u_\mu^2\right) = 2u_\mu \frac{du_\mu}{ds} = 0.$$

Із визначення (21.6) й останньої формули видно, що скалярний добуток 4-вектора швидкості на 4-вектор прискорення дорівнює нулю:

$$u_\mu w_\mu = 0. \tag{21.7}$$

Отже, під час руху 4-вектори швидкості й прискорення є взаємно ортогональними.

Розділ VI
РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

§ 22. Функціонал дії та функція Лаґранжа для вільної релятивістської частинки

Фундаментальні положення класичної та релятивістської механіки, відмінності між ними.
Як записати функціонал дії для вільної релятивістської частинки?
Як отримати функцію Лаґранжа для вільної релятивістської частинки?

В основі класичної механіки лежать найбільш примітивні уявлення про простір і час, які отримані в результаті узагальнення спостережень повільних рухів макроскопічних тіл. Ця теорія є справедливою для рухів зі швидкостями, значно меншими за швидкість світла $(v \ll c)$.

У механіці Ґалілея—Ньютона визнається, що простір і час існують об'єктивно, однак вони розглядаються у відриві один від одного та від об'єктів, що рухаються.

У класичній механіці:

а) простір є відносним (просторові співвідношення між різними подіями залежать від того, у якій системі відліку вони розглядаються);

б) час є абсолютним (час у різних системах відліку спливає однаково рівномірно, час є інваріантним для всіх систем відліку).

Класична теоретична механіка ґрунтується на двох основних постулатах теорії відносності (теорії відносності Ґалілея—Ньютона):

1. Усі закони природи (механіки) є інваріантними в усіх ІСВ.

2. При переході до іншої ІСВ виконується класичний закон додавання швидкостей $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$, що є наслідком абсолютності часу.

Відрив у класичній механіці простору та часу одне від одного й від тіл, що рухаються, пов'язаний із припущенням можливості миттєвої передачі взаємодії між тілами. Однак реальна взаємодія тіл не може передаватися миттєво, тому зазначене припущення, яке випливає з безвідносності простору й часу до тіл, що рухаються, стало серйозним методологічним ускладненням у класичній механіці. Ці труднощі була подолані завдяки розробці спеціальної теорії відносності Ейнштейна.

У релятивістській механіці, яка ґрунтується на теорії відносності Ейнштейна, показано, що абсолютних простора й часу, не пов'язаних один з одним і безвідносних до руху матеріальних тіл, у природі не існує, а існує єдиний просторово-часовий континуум, тісно пов'язаний із рухом тіл. Тим самим було доказано відносність не лише просторових, а й часових інтервалів.

Релятивістська механіка ґрунтується на двох основних постулатах теорії відносності Ейнштейна:

1. Постулат відносності: усі закони природи, у тому числі й закони механіки та електродинаміки, є інваріантними в будь-якій інерціальній системі відліку.
2. Постулат сталості швидкості світла: швидкість світла в усіх інерціальних системах відліку є однаковою, скінченною та дорівнює $c = 299792458$ м/с — граничній швидкості передачі взаємодії між тілами.

Теорія відносності Ейнштейна вносить докорінні зміни до основних фізичних уявлень про простір і час, достатньо повно описує явища природи під час руху матеріальних об'єктів зі швидкостями, порівнюваними зі швидкістю світла $(v \to c)$.

Під час побудови релятивістської теорії ми будемо використовувати, як і в класичній теорії, принцип найменшої дії за Гамільтоном. Основа даного математичного принципу полягає в тому, що дійсний перехід (за істинною траєкторією) механічної системи з фіксованого початкового (у момент часу t_1) до фіксованого кінцевого (у момент часу t_2) стану відбувається таким чином, що функціонал дії (3.2)

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t),\dot{q}(t),t\right)dt$$

набуває мінімального значення, тобто варіація функціонала δS дорівнює нулю при $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$. Тут $L\left(q(t),\dot{q}(t),t\right)$ — функція Лаґранжа.

Необхідно розробити принцип найменшої дії для релятивістської механіки. Для цього запишемо функціонал дії S в просторово-часовому континуумі, у якому за визначенням будь-яка подія описується світовою точкою, що характеризується чотирма координатами — трьома просторовими й часом (x, y, z, t). При цьому руху частинки відповідає деяка лінія (світова лінія), точки якої визначають координати частинки в усі моменти часу.

Позначимо через S_p функціонал дії релятивістської частинки в просторово-часовому континуумі. Визначимо його властивості та в підсумку його вигляд шляхом порівняння з функціоналом дії для класичної частинки (3.2) S_k

$$S_k=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt\,. \tag{22.1}$$

Відповідно до загальнонаукового принципу відповідності Бора, який стверджує, що будь-яка нова теорія не відкидає стару, а включає її до себе як граничний випадок, класична теорія відносності Ґалілея—Ньютона має бути граничним випадком релятивістської теорії відносності Ейнштейна. А саме,

$$S_p \to S_k,\ \ v \ll c\,. \tag{22.2}$$

Для спрощення наших міркувань будемо розглядати випадок однієї матеріальної частинки.

Функціонал дії для класичного випадку — це інтеграл за істинною траєкторією, який береться в межах від початкового положення системи в момент t_1 до кінцевого положення в момент часу t_2. Що можна поставити у відповідність цьому визначенню в релятивістському випадку руху в просторово-часовому континуумі? Рух у просторово-часовому континуумі відбувається в чотиривимірному просторі за світовою лінією. Тому припустимо, що функціонал дії S_p дорівнює інтегралу за світовою лінією в межах від a до b, де a і b — початкове й кінцеве положення системи, тобто

$$S_p = \int_a^b \{?\}. \qquad (22.3)$$

Яким властивостям має відповідати підінтегральний вираз, який ми умовно позначили {?}? Природно, цей підінтегральний вираз (за аналогією з класичним $L(q,\dot{q},t)dt$) має бути:

1) скаляром, оскільки підінтегральний вираз у класичному співвідношенні (22.1) для S_k є скаляром;
2) інваріантом відносно перетворень Лоренца при переході до іншої ІСВ;
3) пропорційним диференціалу в першому степені від інваріанта спеціальної теорії відносності ds, оскільки підінтегральний вираз класичної механіки пропорційний диференціалу в першому степені від часу, інваріанту теорії відносності Ґалілея—Ньютона.

Єдиною величиною під інтегралом у (22.3), яка відповідала б усім цим вимогам, може бути величина, пропорційна диференціалу від інтервалу ds — інваріанту спеціальної теорії відносності, тобто дію в релятивістському випадку можна представити у вигляді

$$S_p = \int_a^b \alpha ds, \qquad (22.4)$$

де α — скалярний коефіцієнт пропорційності. Величина (22.4) являє собою релятивістський варіант інтеграла дії, узятий за світовою лінією. Перейдемо в цьому виразі від інтегрування за світовою лінією до інтегрування за часом. Для цього скористаємось виразом для диференціала від інтервалу в декартовій системі координат (21.2). У результаті функціонал дії релятивістської механіки (22.4) буде таким:

$$S_p = \int_{t_a}^{t_b} \alpha c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt\,. \tag{22.5}$$

Якщо порівняти класичний вираз для функціонала дії (22.1) і щойно отриманий вираз для функціонала дії S_p (22.5), можна зробити висновок про те, що релятивістська функція Лаґранжа для вільної частинки в декартовій системі координат буде мати такий вигляд:

$$L_p = \alpha c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ . \tag{22.6}$$

Коефіцієнт α можна визначити, виходячи з принципу відповідності Бора, математичний вираз якого буде таким:

$$L_p\big|_{c\to\infty} \to L_k\,. \tag{22.7}$$

Нагадаємо, що функція Лаґранжа для вільної класичної частинки в декартовій системі координат дорівнює (4.6)

$$L_k = \frac{m_0}{2} v^2\,. \tag{22.8}$$

У цій формулі ми через m_0 позначили масу спокою частинки (докладніше про масу спокою буде розказано в наступному параграфі). Розкладемо релятивістську функцію Лаґранжа L_p в ряд за степенями малого параметра $\frac{v}{c} \ll 1$, відкидаючи члени високих порядків. Тоді

$$L_p = \alpha c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \alpha c - \alpha \frac{1}{2}\frac{v^2}{c} \tag{22.9}$$

(під час виведення формули (22.9) ми скористалися відомою з математики формулою розкладання в ряд Тейлора $\sqrt{1-a}\,\Big|_{a\ll 1} \approx$ $\approx 1 - \frac{1}{2}a$). Постійний доданок αc у функції Лаґранжа (22.9) можна відкинути, оскільки функція Лаґранжа в загальному випадку визначена з точністю до доданка, який є повною похідною від функції координат і часу $\left(\alpha c = \frac{d}{dt}(\alpha c t)\right)$.

Тоді з принципу відповідності Бора (22.7) випливає, що

$$-\alpha \frac{1}{2} \frac{v^2}{c} \approx \frac{m_0}{2} v^2,$$

і константа α дорівнює

$$\alpha = -m_0 c. \tag{22.10}$$

Отже, дія для вільної релятивістської частинки має вигляд

$$S_p = -m_0 c \int_a^b ds = -\int_{t_a}^{t_b} m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt, \tag{22.11}$$

а функція Лаґранжа

$$L_p = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{22.12}$$

Для $v \ll c$ отримуємо

$$L_p \big|_{c \to \infty} \approx -m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \ldots\right) \approx \frac{m_0}{2} v^2 - m_0 c^2.$$

Тобто з точністю до константи $m_0 c^2$, яка не впливає на рівняння руху (3.9), релятивістська функція Лаґранжа (22.12) переходить у класичну (22.8).

§ 23. Релятивістське значення імпульсу, маси та енергії

Як визначається імпульс у класичній механіці? Отримати значення релятивістського імпульсу.
Маса тіла в класичній механіці. Яким є вираз для маси в релятивістській механіці? Що таке маса спокою?
Як визначається енергія в класичній механіці? Отримати значення енергії для релятивістського випадку.
Релятивістська функція Гамільтона.

У цьому параграфі ми скористаємось визначенням імпульсу та енергії з класичної механіки і на їх основі отримаємо значення цих величин у релятивістській теорії. Імпульс однієї частинки в класичній механіці визначається так (див. формулу (7.6)): $\vec{p}=\dfrac{\partial L_k}{\partial \vec{v}}=\nabla_{\vec{v}}L_k$. Запозичивши це визначення, аналогічно запишемо вираз для імпульсу релятивістської частинки:

$$\vec{P}=\frac{\partial L_p}{\partial \vec{v}}=\nabla_{\vec{v}}L_p\equiv \operatorname{grad}_{\vec{v}}L_p\,. \qquad (23.1)$$

Зауважимо, що релятивістський імпульс для однієї частинки (на відміну від класичного) ми позначили великою літерою $\vec{P}$. Підставивши сюди значення релятивістської функції Лаґранжа (22.12) $L_p=-m_0c^2\sqrt{1-\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/c^2}$, отримаємо

$$\vec{P}=\operatorname{grad}_{\vec{v}}L_p=\frac{\partial L_p}{\partial v_x}\vec{n}_x+\frac{\partial L_p}{\partial v_y}\vec{n}_y+\frac{\partial L_p}{\partial v_z}\vec{n}_z=$$

$$=-m_0c^2\frac{1}{2c^2}\frac{-2\left(v_x\vec{n}_x+v_y\vec{n}_y+v_z\vec{n}_z\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \qquad (23.2)$$

Можна показати, що при русі тіл із малими швидкостями, коли $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, релятивістське значення імпульсу переходить у класичне значення

$$\vec{p} = m_0 \vec{v},$$

тут $m_0 \equiv m$ — класичне значення маси тіла, яке характеризує міру інерції тіла та є сталою (інваріантною) величиною.

Якщо у формулі (23.2) вважати, що маса — функція швидкості

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{23.3}$$

то релятивістський імпульс запишеться повністю аналогічно до класичного: $\vec{P} = m\vec{v}$.

Згідно з другим законом Ньютона, похідна від імпульсу за часом дорівнює силі, що діє на частинку $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$. У зв'язку із цим розглянемо два випадки руху частинки:

1. Нехай швидкість частинки змінюється лише за напрямком (за модулем вона є постійною). Це так званий обертальний рух, коли сила перпендикулярна швидкості: $\vec{F} \perp \vec{v}$. Тоді з урахуванням рівняння (23.2) другий закон Ньютона матиме вигляд

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt},$$

а маса, як і у формулі (23.3), дорівнює

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

2. Нехай швидкість не змінюється за напрямком, а змінюється лише за модулем (величиною). Така ситуація виникає, якщо сила паралельна швидкості: $\vec{F} \parallel \vec{v}$. Тоді

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{m_0}{\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{23.4}$$

Маса в цьому випадку дорівнює

$$m = \frac{m_0}{\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (23.5)$$

Формули (23.3) і (23.5) свідчать про те, що маса тіла в релятивістському випадку залежить від характеру його руху. При цьому для тіла, що перебуває в стані спокою, коли $v \equiv 0$, виходить, що

$$m\left(v^2\right)\Big|_{v \to 0} = m_0. \qquad (23.6)$$

Природно величину m_0 назвати **масою спокою** тіла. Ця величина є інваріантом теорії відносності Ейнштейна, а маса m, яка входить у релятивістське рівняння руху, залежить від швидкості тіла.

Отримаємо формулу для визначення **енергії в релятивістській механіці**. Як і у випадку з імпульсом, будемо виходити з визначення енергії в класичній механіці. У декартовій системі координат енергія класичної частинки дорівнює

$$E = \vec{p}\vec{v} - L_k. \qquad (23.7)$$

У визначенні енергії (23.7) вихідними є вирази для енергії (6.4) та імпульсу (7.13), у яких ми замінили узагальнену швидкість $\dot{q}$ на $\vec{v}$, а також тут використовується визначення класичної функції Лаґранжа (22.8). За аналогією з формулою (23.7) для енергії в релятивістському випадку маємо

$$\mathcal{E} = \vec{P}\vec{v} - L_p. \qquad (23.8)$$

Щоб уникнути плутанини, ми будемо позначати релятивістську енергію через $\mathcal{E}$. Підставивши до (23.8) вирази для релятивістського імпульсу (23.2) і функції Лаґранжа (22.12), після нескладних арифметичних викладок отримаємо, що енергія вільної релятивістської частинки дорівнює

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (23.9)$$

Один із висновків, які випливають з аналізу формули (23.9), полягає в тому, що енергія релятивістської частинки не дорівнює нулю навіть у тому випадку, коли частинка перебуває в стані спокою, тобто її швидкість $\upsilon = 0$. Отже,

$$\mathcal{E} = m_0 c^2 . \tag{23.10}$$

Цю енергію називають **енергією спокою** частинки.

Для малих швидкостей частинки $(\upsilon \ll c)$ з формули (23.9), скориставшись розкладанням у ряд Тейлора функції $\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ за малим параметром υ/c, отримуємо таку формулу:

$$\mathcal{E} \approx m_0 c^2 + \frac{m_0 \upsilon^2}{2} . \tag{23.11}$$

Тобто, якщо не враховувати енергію спокою, маємо класичний вираз для кінетичної енергії $E = \frac{m_0 \upsilon^2}{2}$.

Застосувавши формулу залежності маси від швидкості у вигляді (23.3), отримуємо, що для частинки, що рухається, енергія дорівнюватиме

$$\mathcal{E} = mc^2 . \tag{23.12}$$

З отриманих формул видно, що енергія вільного тіла завжди виявляється додатною величиною, яка залежить від його маси.

Формула для енергії (23.10) є справедливою і для складного тіла маси m_0, що перебуває в стані спокою і складається з багатьох частинок. Ця енергія також містить крім енергій спокою частинок, які його складають, також кінетичну енергію частинок та енергію їхньої взаємодії одне з одним. Тому $m_0 c^2$ не дорівнює $\sum_i m_{0i} c^2$, де m_{0i} — маси спокою всіх частинок складного тіла. Звідси випливає, що m_0 не дорівнює $\sum_i m_{0i}$. Таким чином, у релятивістській механіці не виконується закон збереження маси, а саме, маса складного тіла не дорівнює сумі мас його часток. У релятивістській механіці має місце лише закон збереження енергії, який також включає до себе й енергію спокою частинок.

Отримаємо вираз для енергії релятивістської частинки через її імпульс. Для цього розглянемо наступний допоміжний вираз з урахуванням співвідношень (23.2) і (23.9):

$$\vec{P}^2+m_0^2c^2=\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2+m_0^2c^2=\frac{m_0^2c^2\cdot c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot c^2}=\frac{\mathcal{E}^2}{c^2}. \tag{23.13}$$

Енергія $\mathcal{E}$, яку виражено через імпульс, як відомо, називається функцією Гамільтона. Позначимо її в релятивістському випадку через $\mathcal{H}$. Тоді з попередньої формули отримаємо

$$\mathcal{H}=c\sqrt{\vec{P}^2+m_0^2c^2}\ . \tag{23.14}$$

Вираз для релятивістського імпульсу (23.2) можна також записати у вигляді

$$\vec{P}=\frac{c^2\cdot m_0\vec{v}}{c^2\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\mathcal{E}\vec{v}}{c^2}. \tag{23.15}$$

Остання формула має велике значення при вивченні руху мікрочастинок, які мають нульову масу спокою та рухаються зі швидкістю світла $|\vec{v}|=c$ (наприклад, фотонів). Позначаючи через $\vec{k}=\frac{\vec{v}}{c}$ одиничний вектор напрямку руху такої частинки, формулу (23.15) перепишемо так:

$$\vec{P}=\frac{\mathcal{E}}{c}\vec{k}. \tag{23.16}$$

Отримане співвідношення часто використовується у квантовій механіці.

§ 24. Рівняння руху в релятивістськи-коваріантній формі для вільної релятивістської частинки. Чотиривимірний вектор імпульсу

Яка форма рівнянь називається коваріантною?
Сформулювати задачу про релятивістськи-коваріантні рівняння в диференціальній формі.
Як знайти варіацію функціонала дії для вільної релятивістської частинки?
4-вектор імпульсу та його складові.
Отримати рівняння руху в релятивістськи-коваріантній формі.
Закон збереження енергії-імпульсу в релятивістському випадку.
Лоренцеві перетворення енергії та імпульсу.

У класичній механіці другий закон Ньютона являє собою рівняння, у якому обидві його частини є тривимірними векторами

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}\,. \tag{24.1}$$

Проектуючи це рівняння на осі ортогональної системи координат, отримуємо три скалярних співвідношення. Рівняння, структура яких аналогічна до (24.1), тобто $\{3\text{-вектор}\} = \{3\text{-вектор}\}$, називаються **коваріантними.** У релятивістському випадку, коли рівняння руху записуються в просторово-часовому континуумі для чотирьох ортогональних координат, необхідно отримати рівняння, у якому обидві його частини будуть узгоджуватися за правилом $\{4\text{-вектор}\} = \{4\text{-вектор}\}$. Така форма рівнянь називається **релятивістськи-коваріантною.**

Скористаємось принципом найменшої дії за Гамільтоном (див. § 3) і на його основі отримаємо рівняння руху в просторово-часовому континуумі.

Запишемо функціонал дії (22.11), скориставшись визначенням для квадрата інтервалу $ds^2 = -dx_\mu^2$

$$S_p = -m_0 c \int_a^b ds = -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2}\,. \qquad (24.2)$$

Нагадаємо, що тут a, b — фіксовані світові точки (рис. 24.1), у яких варіації координат (відхилення) дорівнюють нулю:

$$\delta x_\mu(a) = 0\,,\ \ \delta x_\mu(b) = 0 \qquad (24.3)$$

Інтеграл, узятий у цих скінченних межах, є числом і являє собою міру руху за світовою лінією. За якою ж світовою лінією буде рухатися механічна система?

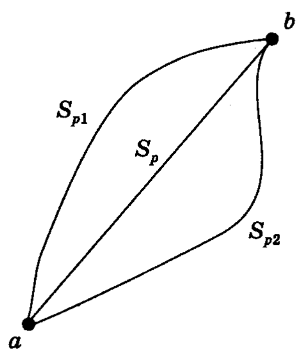


Рис. 24.1

Як і в класичній механіці, постулюємо, що, згідно з принципом найменшої дії перехід із початкового (у точці a) до кінцевого (у точці b) стану має відбуватися таким чином, щоб функціонал дії (24.2) мав мінімальне значення, тобто його варіація дорівнювала нулю

$$\delta S_p = 0\,. \qquad (24.4)$$

Помінявши місцями операції варіювання та інтегрування, із рівняння (24.2) отримуємо

$$\delta S_p = \delta\left(-m_0 c\int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2}\right) = -m_0 c\int_a^b \delta\sqrt{-dx_\mu^2}\,. \tag{24.5}$$

Далі,

$$\delta\sqrt{-dx_\mu^2} = \delta\left(-dx_\mu^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(-dx_\mu^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2dx_\mu \delta dx_\mu\right) = -\frac{dx_\mu \delta dx_\mu}{\sqrt{-dx_\mu^2}} =$$

$$= -\frac{dx_\mu}{ds} d\delta x_\mu = -u_\mu d\delta x_\mu\,.$$

В останній формулі були використані звичайні правила диференціювання, визначення для 4-вектора швидкості (21.1), а також можливість зміни порядку виконання операцій варіювання δ і взяття диференціала d.

Остаточно варіація функціонала дії постане у вигляді інтеграла

$$\delta S_p = m_0 c\int_a^b u_\mu d\delta x_\mu\,, \tag{24.6}$$

який візьмемо, інтегруючи за частинами:

$$\delta S_p = m_0 c u_\mu \delta x_\mu \Big|_a^b - m_0 c\int_a^b du_\mu \delta x_\mu \equiv m_0 c u_\mu \delta x_\mu \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d\left(m_0 c u_\mu\right)}{ds} ds\,\delta x_\mu. \tag{24.7}$$

Узявши до уваги «граничні» умови (24.3), а також довільність обрання варіації координати δx_μ під час руху за світовою лінією, робимо висновок, що рівність нулю δS_p можлива лише, якщо підінтегральний вираз тотожно перетворюється на нуль:

$$\frac{d}{ds}\left(m_0 c u_\mu\right) = 0\,,\ \ \mu = 1, 2, 3, 4\,. \tag{24.8}$$

Це і є **диференціальне рівняння руху в релятивістськи-коваріантній формі** (ліворуч стоїть 4-вектор, а у правій частині — нульовий 4-вектор (див. § 20)).

Для того, щоб отримати вираз 4-вектора імпульсу, застосуємо теоретичні передумови § 11.

Припустимо, система, що розглядається, рухається за світовими лініями й може перейти з точки a до точки b або c (рис. 24.2), при цьому обидва рухи є істинними (тобто відповідають рівнянню (24.8)). Для розв'язання задачі в такій постановці інтеграл дії релятивістської системи (24.2) S_p слід розглядати як функцію координати x_μ на верхній межі інтегрування, а саме, $\delta x_\mu(b) \neq 0$. При цьому $S_p = S_p(x_\mu)$. Варіація (змінення) дії при переході від світової лінії ab до близької до неї світової лінії ac визначається виразом (24.7). Присутній тут інтеграл перетворюється на нуль, оскільки обидві світові лінії є істинними і, як наслідок, відповідають рівнянню руху (24.8). У першому доданку (24.7) приймемо, що $\delta x_\mu(a) = 0$ (точка a є фіксованою), а змінне значення $\delta x_\mu(b)$ позначимо для загальності через δx_μ. У результаті отримуємо

$$\delta S_p = m_0 c u_\mu \delta x_\mu . \tag{24.9}$$

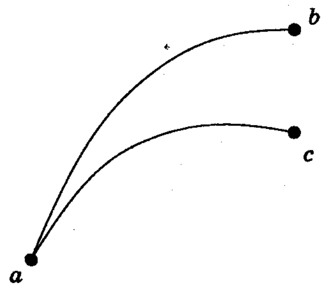


Рис. 24.2

Вважаючи, що дія є функцією координати $S_p = S_p(x_\mu)$, її варіацію можна записати так:

$$\delta S_p = \frac{\partial S}{\partial x_\mu} \delta x_\mu . \tag{24.10}$$

Із двох останніх виразів, а також із формули (11.4), яка в релятивістському випадку має вигляд

$$P_\mu = \frac{\partial S}{\partial x_\mu}, \; \mu = 1,2,3,4, \tag{24.11}$$

можна зробити висновок, що релятивістський 4-вектор імпульсу дорівнює

$$P_\mu = m_0 c u_\mu\,,\ \mu = 1,2,3,4. \tag{24.12}$$

Тепер можна записати диференціальне рівняння руху в релятивістськи-коваріантній формі (24.8) в більш звичному вигляді

$$\frac{d}{ds} P_\mu = 0\,,\ \mu = 1,2,3,4. \tag{24.13}$$

Знайдемо компоненти 4-вектора імпульсу. Для цього скористаємось формулами для 4-вектора швидкості (21.3). Із визначення (24.12) отримаємо

$$P_1 = m_0 c u_1 = \frac{m_0 c v_x}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv P_x\,,$$

$$P_2 = m_0 c u_2 = \frac{m_0 c v_y}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv P_y\,,$$

$$P_3 = m_0 c u_3 = \frac{m_0 c v_z}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv P_z\,,$$

$$P_4 = m_0 c u_4 = \frac{m_0 c i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{i m_0 c^2}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv i\frac{\mathcal{E}}{c}\,. \tag{24.14}$$

4-вектор імпульсу з урахуванням виразів (24.14) запишемо в компактній формі

$$P_\mu = \left(P_1, P_2, P_3, P_4\right) = \left(P_x, P_y, P_z, i\frac{\mathcal{E}}{c}\right) \equiv \left(\vec{P}, i\frac{\mathcal{E}}{c}\right). \tag{24.15}$$

Проаналізуємо отриманий результат. По-перше, із формули (24.15) видно, що 4-вектор імпульсу є об'єктом, який містить і тривимірний вектор імпульсу $\vec{P}$, і енергію $\mathcal{E}$. По-друге, перші три компоненти P_μ — дійсні величини, а четверта — уявна.

Зауважимо, що остання властивість притаманна усім 4-векторам у спеціальній теорії відносності.

Повернемося до формули (24.13). Оскільки величина $c\sqrt{1-v^2/c^2}$ із визначення елементарного інтервалу (21.2) ніколи не перетворюється на нуль, рівняння (24.13) перепишеться у вигляді

$$\frac{d}{dt}P_\mu = 0,\ \mu = 1,2,3,4. \tag{24.16}$$

Це співвідношення являє собою єдиний закон збереження енергії-імпульсу (єдиного об'єкта — 4-вектора імпульсу) в релятивістському випадку. Даний закон збереження містить два закони збереження, відомі з класичної механіки: закон збереження енергії (який є наслідком однорідності часу) і закон збереження імпульсу (наслідок однорідності простору). Вираз (24.16) можна подати так:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{P} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\mathcal{E} = 0. \end{cases} \tag{24.17}$$

У класичній механіці мають місце два окремі закони збереження — енергії та імпульсу (оскільки простір і час не пов'язані між собою). У релятивістській механіці ці два закони об'єднуються в один закон збереження 4-вектора імпульсу в просторово-часовому континуумі (24.16).

За допомогою виразів для 4-вектора імпульсу (24.12) і квадрата 4-вектора швидкості (21.5) можна отримати вже відому формулу для гамільтоніана в релятивістському випадку.

Піднесемо співвідношення (24.12) у квадрат

$$P_\mu^2 = m_0^2c^2u_\mu^2 = -m_0^2c^2, \tag{24.18}$$

далі, використовуючи (24.15), одержимо формулу для енергії, яку виражено через імпульс ($\mathcal{H} = \mathcal{E}$)

$$\mathcal{H} = c\sqrt{\vec{P}^2 + m_0^2c^2}.$$

Як відомо, будь-які 4-вектори при переході від однієї ІСВ до іншої перетворюються за допомогою перетворень Лоренца як компоненти (координати) 4-радіус-вектора (20.21). Підставимо до (20.21) відповідні компоненти 4-вектора імпульсу з (24.15) і отримаємо такі перетворення для компонент імпульсу й енергії:

$$P_x = \frac{P'_x + \frac{V}{c^2}\mathcal{E}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \; P_y = P'_y, \; P_z = P'_z, \; \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + VP'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \quad (24.19)$$

Якщо використати матрицю перетворень Лоренца (20.4), то ці перетворення можна записати в компактному вигляді:

$$P_\mu = \alpha_{\mu\nu} P'_\nu, \; \mu,\nu = 1,2,3,4. \quad (24.20)$$

§ 25. Функціонал дії та функція Лаґранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі. Чотиривимірний векторний потенціал електромагнітного поля

Функціонал дії для зарядженої частинки в електромагнітному полі.
Чотиривимірний векторний потенціал електромагнітного поля.
Функція Лаґранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі.
Узагальнений вектор імпульсу для зарядженої частинки в електромагнітному полі. Фізичний зміст тривимірного векторного потенціалу електромагнітного поля.
Енергія зарядженої частинки в електромагнітному полі. Фізичний зміст скалярного потенціалу електромагнітного поля.

Ми ставили за мету продемонструвати прямий зв'язок теоретичної механіки з наступним розділом теоретичної фізики — електродинамікою. У цьому параграфі буде показано, як за допомогою рівнянь теоретичної механіки отримати основні рівняння електродинаміки — рівняння Максвела.

Дотепер ми вивчали рух матеріальних тіл, що мають масу m_i, і положення яких у фіксований момент часу характеризувалося радіус-вектором $\vec{r}_i$.

Кожному тілу (частинці, матеріальній точці), що має масу m_i, ставиться у відповідність функціонал дії (24.2), який у цьому розділі ми позначатимемо через S_{pm_i} (у запропонованих позначеннях індекс «p» відповідає релятивістському значенню для дії, а індекс «m» указує на те, що частинка має лише масу). Частинки є незалежними об'єктами. Функціонал дії системи частинок дорівнює сумі функціоналів дії всіх незалежних частинок, тобто функціонал дії має властивість адитивності (ця властивість функціонала прямо випливає з адитивності функції Лаґранжа):

$$S_{pm} = \sum_i S_{pm_i}. \tag{25.1}$$

В електродинаміці об'єктом дослідження є матеріальна точка, якій крім маси m_i притаманний ще і заряд e_i. Заряд не залежить від маси і є рівноправною характеристикою матеріальної точки.

Аксіоматика електродинаміки формулюється на основі постулатів релятивістської механіки — понятті про інерціальну систему відліку, постулаті відносності, законі руху, фізичних уявленнях про простір і час, а також на принципі найменшої дії (див. § 24).

Нехай S — функціонал дії для однієї зарядженої частинки. Властивості частинки, яка характеризується масою та зарядом, еквівалентні властивостям двох суміщених частинок маси m_0 і заряду e.

Виходячи з адитивності функціонала дії, запишемо

$$S = S_{pm} + S_{pe}, \tag{25.2}$$

де S_{pm} — функціонал дії частинки, якій притаманна лише маса, а S_{pe} — функціонал дії частинки, що характеризується зарядом.

Нагадаємо, що в релятивістській механіці функціонал дії вільної релятивістської частинки визначається згідно з (24.2):

$$S_{pm} = -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2}\,, \quad \mu = 1, 2, 3, 4.$$

Функціонал дії зарядженої частинки S_{pe} будуватимемо аналогічно до того, як побудовано S_{pm} (див. § 22). Окрім того, у міркуваннях будемо спиратися на той факт, що функціонал дії має бути інваріантним відносно перетворень Лоренца.

1. $S_{pm} \sim m_0$, m_0 — характеристика частинки, яка є інваріантом відносно перетворень Лоренца. Отже, можна передбачити, що $S_{pe} \sim e$, оскільки заряд e також характеризує частинку та є інваріантним відносно перетворень Лоренца.

2. $S_{pm} \sim \int_a^b [ds]$. Тому будемо вважати, що $S_{pe} \sim \int_a^b \{?\}$, де $\{?\}$ — аналог $[ds]$.
3. Підінтегральний вираз $[ds]$ є інваріантом відносно перетворень Лоренца, тому підінтегральний вираз $\{?\}$ також має бути інваріантним відносно перетворень Лоренца.
4. $[ds]$ є скаляром, отже, $\{?\}$ — теж скаляр.
5. $[ds] \sim \sqrt{-dx_\mu^2} \sim (dx_\mu)^1$. Тому $\{?\} \sim (dx_\mu)^1$.

Для того щоб умови 3–5 були виконані, під інтегралом у S_{pe} повинен стояти вираз, який є інваріантом відносно перетворень Лоренца та при цьому пропорційним $(dx_\mu)^1$. Оскільки скалярний добуток двох векторів є інваріантним відносно перетворень Лоренца (20.23), оберемо підінтегральний вираз у вигляді скалярного добутку $A_\mu dx_\mu$. Вектор A_μ має характеризувати електромагнітне поле, що діє на заряд, явний вигляд цього вектора поки не відомий. Представимо вектор A_μ у чотиривимірному просторі таким чином:

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, i\varphi) = (\vec{A}, i\varphi), \tag{25.3}$$

де $\vec{A}$ — тривимірний вектор, а φ — скаляр. Назвемо A_μ — чотиривимірним потенціалом електромагнітного поля, $\vec{A}$ — векторним потенціалом, φ — скалярним потенціалом.

Зауважимо, що четверта компонента 4-вектора, як і раніше, є чисто уявною величиною.

У загальному випадку векторний і скалярний потенціали є функціями координат і часу: $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$, $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$.

Отже, функціонал дії, який відповідає за заряд частинки, має вигляд (із точністю до коефіцієнта):

$$S_{pe} \sim e\int_a^b A_\mu dx_\mu . \tag{25.4}$$

Остаточно представимо функціонал дії так:

$$S_{pe} = \frac{e}{c}\int_a^b A_\mu dx_\mu . \tag{25.5}$$

У рівнянні (25.5) вектор A_μ підлягає подальшому визначенню, а коефіцієнт $\frac{1}{c}$ уведений для забезпечення розмірності.

Таким чином, функціонал дії зарядженої частинки в електромагнітному полі має вигляд

$$S = S_{pm} + S_{pe} = -m_0 c\int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c}\int_a^b A_\mu dx_\mu . \qquad (25.6)$$

Отримаємо функцію Лаґранжа зарядженої частинки в електромагнітному полі. Нагадаємо, що функціонал дії визначається так (3.2):

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L dt . \qquad (25.7)$$

Тому для визначення L ми повинні у виразі для функціонала дії (25.6) перейти до інтеграла за часом, тоді підінтегральний вираз дасть нам шукану функцію Лаґранжа.

$$S = -m_0 c\int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c}\int_a^b A_\mu dx_\mu =$$

$$= \int_a^b \left[-m_0 c\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} + \frac{e}{c}\left(A_x dx + A_y dy + A_z dz + i\varphi \cdot icdt\right)\right] =$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} dt \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\frac{d\vec{r}}{dt} - e\varphi \right]. \qquad (25.8)$$

Тут скалярний добуток $A_\mu dx_\mu = A_x dx + A_y dy + A_z dz + i\varphi \cdot icdt$. У той же час, $A_x dx + A_y dy + A_y dz = \vec{A} \cdot d\vec{r}$, а $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ — вектор швидкості.

Отже, функціонал дії зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi \right] \qquad (25.9)$$

Порівнявши (25.7) із (25.9), отримуємо, що функція Лаґранжа зарядженої частинки в електромагнітному полі дорівнює

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi = L_{pm} + L_{pe} . \qquad (25.10)$$

В останньому виразі L_{pm} обумовлено наявністю в частинки маси, а L_{pe} виникає завдяки наявності в частинки заряду. За відсутності заряду $(e \equiv 0)$, $L_{pe} \equiv 0$ і, як наслідок, $L = L_{pm}$.

Нагадаємо, що в релятивістській механіці імпульс визначається так (див. формулу (23.1)):

$$\vec{P} = \frac{\partial L_p}{\partial \vec{v}} = \nabla_{\vec{v}} L_p \equiv \mathrm{grad}_{\vec{v}} L_p \,, \; (e = 0).$$

Збережемо це визначення імпульсу і для зарядженої частинки, підставляючи замість L_p вираз для функції Лаґранжа зарядженої частинки в електромагнітному полі (25.10). Імпульс зарядженої частинки позначатимемо через $\vec{\mathcal{P}}$,

$$\vec{\mathcal{P}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \nabla_{\vec{v}} L = \nabla_{\vec{v}} \left(L_{pm} + L_{pe} \right). \qquad (25.11)$$

Подіємо оператором $\nabla_{\vec{v}}$ на кожний доданок у (25.11) окремо. У результаті матимемо:

$$\nabla_{\vec{v}} L_{pm} = \nabla_{\vec{v}} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \vec{v}^2 / c^2} \right) = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \equiv \vec{P}, \qquad (25.12)$$

$$\nabla_{\vec{v}} L_{pe} = \nabla_{\vec{v}} \left(\frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi \right) = \frac{e}{c} \vec{A}. \qquad (25.13)$$

Співвідношення (25.12) являє собою раніше отриманий вираз для тривимірного релятивістського механічного імпульсу (23.2). У формулі (25.13) враховано, що $\nabla_{\vec{v}} (e\varphi) = 0$, оскільки $e = \mathrm{const}$, φ не залежить від швидкості.

Тоді узагальнений імпульс зарядженої частинки в електромагнітному полі дорівнює

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}. \qquad (25.14)$$

Якщо $e = 0$, то узагальнений імпульс дорівнює механічному релятивістському імпульсу:

$$\vec{\mathcal{P}} \equiv \vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \qquad (25.15)$$

Виходячи з визначення (25.14), можна сформулювати **фізичний зміст векторного потенціалу:** векторний потенціал із точністю до множника є додатком до механічного імпульсу за рахунок наявності заряду й електромагнітного поля.

У релятивістській механіці (за відсутності заряду $e \equiv 0$) енергія визначається співвідношенням (23.8).

Знайдемо енергію зарядженої релятивістської частинки за аналогією з (23.8), позначивши її через $\widetilde{\mathcal{E}}$:

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{P}}\vec{v} - L\,,\ \left(L = L_{pm} + L_{pe}\right). \tag{25.16}$$

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \left(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{v} - \left(-m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi\right) =$$

$$= \frac{m_0\vec{v}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} + m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} + e\varphi =$$

$$= \frac{m_0v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + e\varphi =$$

$$= \frac{m_0v^2 + m_0c^2\left(1 - v^2/c^2\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi.$$

Таким чином, енергія зарядженої частинки в електромагнітному полі визначається виразом

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi\,. \tag{25.17}$$

При цьому перший доданок (релятивістське значення енергії) залежить лише від швидкості, отже, це кінетична енергія частинки. Другий доданок являє собою потенціальну енергію.

Звідси випливає **фізичний зміст скалярного потенціалу** — це з точністю до множника додаток до енергії за рахунок електромагнітного поля. $U = e\varphi$ — потенціальна енергія.

За визначенням функція Гамільтона (23.14) — це повна енергія, що виражена через узагальнені координати й узагальнені імпульси. У випадку зарядженої частинки

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{\mathcal{E}}(q, p, t)\,. \tag{25.18}$$

Для отримання виразу для функції Гамільтона зарядженої частинки в електромагнітному полі необхідно представити повну енергію $\widetilde{\mathcal{E}}$ через узагальнений імпульс.

Із формули для повної енергії (25.17) випливає

$$\widetilde{\mathcal{E}}-e\varphi=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\Rightarrow\left(\frac{\widetilde{\mathcal{E}}-e\varphi}{c}\right)^2=\frac{m_0^2c^2}{1-v^2/c^2}. \tag{25.19}$$

Скориставшись виразом для узагальненого імпульсу (25.14), отримуємо

$$\vec{\mathcal{P}}-\frac{e}{c}\vec{A}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Із допоміжного співвідношення

$$\left(\vec{\mathcal{P}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+m_0^2c^2=\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2+m_0^2c^2=$$

$$=\frac{m_0^2v^2+m_0^2c^2\left(1-v^2/c^2\right)}{1-v^2/c^2}=\frac{m_0^2c^2}{1-v^2/c^2}=\left(\frac{\widetilde{\mathcal{E}}-e\varphi}{c}\right)^2$$

маємо

$$\left(\vec{\mathcal{P}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+m_0^2c^2=\left(\frac{\widetilde{\mathcal{E}}-e\varphi}{c}\right)^2,$$

звідси автоматично отримуємо вираз для функції Гамільтона зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$\widetilde{\mathcal{H}}=\widetilde{\mathcal{E}}(q,p,t)=c\sqrt{\left(\vec{\mathcal{P}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+m_0^2c^2}+e\varphi. \tag{25.20}$$

Тут перший доданок відповідає кінетичній енергії, а другий — потенціальній.

За відсутності заряду $(e\equiv 0)$ та електромагнітного поля отриманий вираз для функції Гамільтона переходить у відомий із релятивістської механіки

$$\mathcal{H}=c\sqrt{\vec{P}^2+m_0^2c^2}.$$

§ 26. Рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі. Сила Лоренца

Виписати рівняння Лаґранжа в загальному випадку. Вивести рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі.

Постулат сили Лоренца. Напруженості електричного й магнітного полів. Зв'язок векторного та скалярного потенціалів із силовими характеристиками електромагнітного поля.

Змінення кінетичної енергії зарядженої частинки в електромагнітному полі. Робота електромагнітного поля по зміненню кінетичної енергії.

Перша пара рівнянь Максвелла в диференціальній та інтегральній формі.

Для будь-якої фізичної системи рівняння руху має вигляд (3.9)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}\,, \tag{26.1}$$

де функція Лаґранжа L конкретизує фізичну систему. Якщо підставити до загального рівняння руху функцію Лаґранжа для зарядженої частинки (25.10)

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi\,, \tag{26.2}$$

то отримаємо рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі, яке характеризується скалярним і векторним потенціалами.

Раніше було показано (див. (25.11) — (25.14)), що

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_{\vec{v}} L = \vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}, \quad \vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (26.3)$$

Нагадаємо, що $\vec{\mathcal{P}}$ — узагальнений імпульс зарядженої частинки в електромагнітному полі, $\vec{P}$ — тривимірний релятивістський імпульс, $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}(t), t)$, $\varphi = \varphi(\vec{r}(t), t)$.

Знайдемо ліву частину рівняння (26.1), продиференціювавши за часом вираз (26.3)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\vec{\mathcal{P}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) = \frac{d}{dt}\vec{P} + \frac{e}{c}\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{r}(t), t). \qquad (26.4)$$

Для зручності розглянемо окремо похідну за часом від $\vec{A}(\vec{r}(t), t)$, скориставшись формулою для визначення повної похідної складної функції кількох змінних

$$\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{r}(t), t) = \frac{d}{dt}\vec{A}(x(t), y(t), z(t), t) =$$

$$= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{A} \qquad (26.5)$$

Таким чином, остаточно запишемо

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{A}. \qquad (26.6)$$

Вираз $(\vec{v}\nabla)$ представляє собою оператор

$$(\vec{v}\nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

(див. Додаток 2).

Тоді ліва частина рівняння руху (26.1) матиме вигляд

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{P}} = \frac{d}{dt}\vec{P} + \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}(\vec{v}\nabla)\vec{A}. \qquad (26.7)$$

Знайдемо праву частину рівняння руху (26.1)

$$\frac{\partial L}{\partial q} \equiv \nabla_{\vec{r}} L \equiv \nabla\left(-m_0 c^2\sqrt{1-v^2/c^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi\right) =$$
$$= \nabla\left(-m_0 c^2\sqrt{1-v^2/c^2}\right) + \frac{e}{c}\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right) - e\nabla\varphi \qquad (26.8)$$

Вираз $\left(-m_0 c^2\sqrt{1-v^2/c^2}\right)$ не залежить від координат, отже, перший доданок дорівнює нулю. Скориставшись відомою векторною тотожністю (Додаток 2) для градієнта скалярного добутку, отримуємо

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right) = \left[\vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{v}\right] + \left[\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{A}\right] + \left(\vec{A}\nabla\right)\vec{v} + \left(\vec{v}\nabla\right)\vec{A}. \qquad (26.9)$$

Оскільки швидкість не залежить від координат, то перший і третій доданки в цьому виразі дорівнюють нулю. Отже,

$$\nabla L = \frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{A}\right] + \frac{e}{c}\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{A} - e\nabla\varphi. \qquad (26.10)$$

Підставляємо отримані вирази до рівняння руху (26.1)

$$\frac{d}{dt}\vec{P} + \frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{A} = \frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{A}\right] + \frac{e}{c}\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{A} - e\nabla\varphi \qquad (26.11)$$

та одержуємо остаточний вигляд **рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі**

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{A}\right]. \qquad (26.12)$$

Тут $\vec{P}$ — тривимірний механічний імпульс. Права частина рівняння пропорційна заряду. Якщо заряд дорівнює нулю, то отримане рівняння переходить у рівняння руху вільної частинки

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = 0. \qquad (26.13)$$

Якщо заряд відрізняється від нуля, то маємо другий закон Ньютона

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}. \qquad (26.14)$$

З експерименту відомо, що на заряджену частинку в електромагнітному полі діє сила Лоренца, яка є сумою сили Кулона $\vec{F}_K$ та сили Ампера $\vec{F}_A$,

$$\vec{F}_L = e\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}(\vec{r},t)\right] = \vec{F}_K + \vec{F}_A, \qquad (26.15)$$

де $\vec{F}_K = e\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{F}_A = \frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}(\vec{r},t)\right]$.

Сила Кулона паралельна напруженості електричного поля $\vec{E}$ і не залежить від швидкості руху частинки.

Напруженість електричного поля — силова характеристика електричного поля. Вона дорівнює силі, яка діє з боку електричного поля на одиничний додатний заряд

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_K}{e}. \qquad (26.16)$$

Сила Ампера направлена перпендикулярно до векторів швидкості й напруженості магнітного поля $\vec{H}$ та **залежить від швидкості.** Таким чином, маємо якісно нову природу сил. **Напруженість магнітного поля** — силова характеристика магнітного поля. Вона дорівнює множнику при швидкості (точніше, при $\frac{\vec{v}}{c}$) у силі Ампера, яка діє з боку магнітного поля на одиничний додатний заряд.

Якщо

$\vec{E}\neq 0$, $\vec{H}=0$, то маємо електричне поле;

$\vec{E}=0$, $\vec{H}\neq 0$ — магнітне поле;

$\vec{E}\neq 0$, $\vec{H}\neq 0$ — електромагнітне поле.

Виходячи з принципу найменшої дії, отримано рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі (26.12)

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{A}\right].$$

Через те, що похідна за часом від імпульсу є силою, то в правій частині цього рівняння стоїть сила, яка діє на заряджену частинку в електромагнітному полі. За визначенням це повинна бути сила Лоренца (26.15). Маємо рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі у вигляді

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}(\vec{r},t)\right]. \qquad (26.17)$$

Порівнюючи праві частини рівнянь руху (26.12) і (26.17), можна встановити однозначний зв'язок між силовими характеристиками (напруженостями) електромагнітного поля та потенціалами:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t};\ \vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}. \qquad (26.18)$$

Раніше було отримано вираз для повної енергії зарядженої частинки в електромагнітному полі (25.17)

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi,$$

де перший доданок являє собою кінетичну енергію $\widetilde{\mathcal{E}}_K$. Знайдемо $\frac{d\widetilde{\mathcal{E}}_K}{dt}$.

$$\frac{d\widetilde{\mathcal{E}}_K}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\right) = \frac{m_0 c^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2\frac{\vec{v}}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt}}{\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{m_0\frac{d\vec{v}}{dt}}{\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (26.19)$$

Скориставшись виразом для $\frac{d\vec{P}}{dt}$ з рівняння руху, отримуємо

$$\frac{d\widetilde{\mathcal{E}}_K}{dt} = e\vec{v}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{e}{c}\vec{v}\cdot\left[\vec{v}\times\vec{H}(\vec{r},t)\right]. \qquad (26.20)$$

Другий доданок у цій формулі дорівнює нулю через властивість змішаного добутку векторів (Додаток 2). Таким чином, остаточно маємо

$$\frac{d\widetilde{\mathcal{E}}_K}{dt} = e\vec{v}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{v}\cdot\vec{F}_K. \qquad (26.21)$$

Змінення кінетичної енергії із часом є роботою, що здійснюється полем над зарядженою частинкою в одиницю часу. Вона дорівнює добутку швидкості заряду на силу, із якою на заряд діє електричне поле. Магнітне поле не здійснює роботу над зарядом, що рухається, оскільки сила Ампера перпендикулярна швидкості.

Рівняння механіки інваріантні по відношенню до зміни знака в часу, тобто по відношенню до заміни майбутнього на минуле. Таким чином, **у механіці обидва напрямки часу є еквівалентними.** Отже, якщо, згідно з рівняннями механіки, можливий який-небудь рух, то можливий і зворотний рух, тобто такий рух, за якого система проходить ті ж стани, але у зворотному порядку.

Це справедливо і в теорії поля. Під час руху у зворотному порядку $t \to -t$; $\vec{v} \to -\vec{v}$; $\vec{p} \to -\vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} \to \frac{d\vec{p}}{dt}$, при цьому рівняння руху не змінюється, якщо замінити $\vec{E} \to \vec{E}$; $\vec{H} \to -\vec{H}$. Крім того, згідно з (26.18), має виконуватися умова $\varphi \to \varphi$; $\vec{A} \to -\vec{A}$.

Таким чином, якщо в електромагнітному полі можливий деякий рух, то можливий і зворотний рух у полі з $\vec{H} \to -\vec{H}$.

Отримаємо першу пару рівнянь Максвелла. Будемо виходити зі співвідношень (26.18)

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Необхідно знайти рівняння для визначення напруженостей електричного й магнітного полів $\vec{E}$, $\vec{H}$. Для цього застосуємо операцію rot до виразу для $\vec{E}$.

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}. \qquad (26.22)$$

Відповідно до відомої векторної тотожності (див. Додаток 2) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0$, а оператор rot і диференціювання за часом можна поміняти місцями, замінивши після цього $\operatorname{rot}\vec{A}$ на $\vec{H}$. Матимемо

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Аналогічно подіємо оператором div на вираз для $\vec{H}$.

$$\operatorname{div}\vec{H} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}. \tag{26.23}$$

Як відомо з векторного аналізу (Додаток 2), $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} \equiv 0$.

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0.$$

Отже, отримуємо **першу пару рівнянь Максвелла в диференціальній формі**

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}; \tag{26.24}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0. \tag{26.25}$$

Рівняння Максвелла, уперше сформульовані в 1860 р., є основними рівняннями електродинаміки.

Отримаємо інтегральне формулювання рівнянь Максвелла. Для цього проінтегруємо обидві частини рівняння (26.24) за довільною поверхнею S

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{E}d\vec{S} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}d\vec{S}. \tag{26.26}$$

Застосуємо до лівої частини цього виразу теорему Стокса (Додаток 2)

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{E}d\vec{S} = \oint_L \vec{E}d\vec{l}, \tag{26.27}$$

де інтеграл праворуч береться за замкненим контуром L, на який натягнуто поверхню S. У правій частині (26.26) поміняємо місцями операції інтегрування та диференціювання за часом. Отримуємо **інтегральне формулювання першого рівняння Максвелла**

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{H}d\vec{S}. \tag{26.28}$$

Інтеграл від вектора за поверхнею називається потоком вектора через цю поверхню, а похідна за часом від цього інтеграла — швидкістю змінення потоку вектора. Інтеграл від вектора за замкненим контуром називається циркуляцією вектора, а циркуляція вектора напруженості електричного поля — електрорушійною силою (ЕРС).

Таким чином, **фізичний зміст першого рівняння Максвелла** можна сформулювати так: електрорушійна сила в деякому контурі дорівнює взятій із зворотним знаком швидкості змінення потоку вектора напруженості магнітного поля через поверхню, на яку спирається цей контур. Це відомий закон Фарадея або закон електромагнітної індукції.

Отримаємо інтегральне формулювання рівняння (26.25). Для цього проінтегруємо це рівняння за довільним об'ємом V. Відповідно до теореми Остроградського—Ґаусса (див. Додаток 2), інтеграл за об'ємом від дивергенції вектора дорівнює потоку цього вектора через замкнену поверхню S, яка обмежує об'єм V:

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{H}dV = \oint_S \vec{H}d\vec{S}.$$

Отримуємо **інтегральне формулювання другого рівняння Максвелла:**

$$\oint_S \vec{H}d\vec{S} = 0. \qquad (26.29)$$

Фізичний зміст другого рівняння Максвелла: потік вектора напруженості магнітного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю. Це виражає закон нерозривності силових ліній магнітного поля, тобто факт відсутності в природі магнітних зарядів, на яких могли б починатися або обриватися лінії магнітного поля.

Додатки

Додаток 1.
Принцип найменшої дії

Розглянемо задачу про тіло, яке кинули вертикально вгору (див. рис. 1.1) з початковою швидкістю $\vec{v}$. Нехай рух відбувається в однорідному полі тяжіння. Згідно з другим законом Ньютона, $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$. Спроектуємо це рівняння на вісь $0z$

$$m\ddot{z} = -mg \tag{1.1}$$

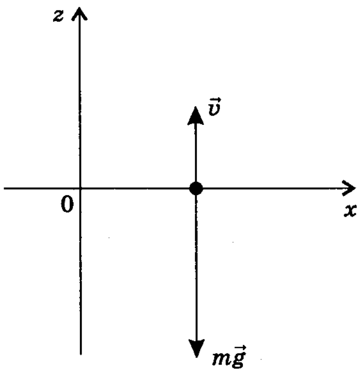


Рис. 1.1

Скорочуючи m й інтегруючи це рівняння з початковими умовами $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = v$, знаходимо

$$z = -\frac{gt^2}{2} + vt\,. \tag{1.2}$$

Коли тіло досягає максимальної висоти $z_{\max}$, його швидкість дорівнюватиме нулю $\dot{z} = 0$. Диференціюючи функцію $z(t)$ в (1.2), отримуємо рівняння

$$\dot{z} = -gt + v = 0\,. \tag{1.3}$$

Звідси знайдемо час, за який тіло досягне $z_{\max}$: $t_{z_{\max}} = v/g$. Тоді максимальну висоту підйому визначимо з (1.2) підстановкою $t = v/g$

$$z_{\max} = z\left(\frac{v}{g}\right) = \frac{v^2}{2g}.$$

Таким чином, задачу повністю розв'язано: ми знайшли закон руху тіла, знаємо його початкове і кінцеве положення.

Рівняння (1.2) є рівнянням траєкторії тіла (у конфігураційному просторі z, t), яке отримано з рівняння Ньютона. Припустимо, ми не знаємо законів руху, а знаємо лише, що тіло в указаному просторі рухається з початковою швидкістю з фіксованої точки 1 до фіксованої точки 2 (див. рис. 1.2).

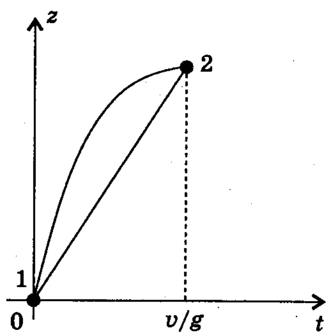


Рис. 1.2

У просторі z, t точка 1 характеризується «координатами» (0, 0), а точка 2 — «координатами» $\left(\frac{v}{g}, \frac{v^2}{2g}\right)$. Чому тіло рухається по кривій $z = -\frac{gt^2}{2} + vt$ (ми її називаємо траєкторією в просторі z, t)? Чим ця крива, яка з'єднує початкову і кінцеву точки, «краще», наприклад, ніж пряма 1 – 2.

Побудуємо вираз

$$S[z(t)] = \int_1^2 L(z, \dot{z})dt. \tag{1.4}$$

У курсі теоретичної механіки постулюється, що функція під інтегралом є функцією Лаґранжа L — функцією координат і швидкостей, яка являє собою різницю кінетичної та потенціальної енергій $L = T - U$. Тоді

$$S[z(t)] = \int_1^2 (T-U)dt = \int_0^{\frac{v}{g}} \left(\frac{\dot{z}^2}{2} - gz\right)dt. \tag{1.5}$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо тут, що маса тіла $m = 1$. Цей вираз називається **дією**. Як видно з його визначення, дія — це функціонал від траєкторії, тобто будь-якій функції $z(t)$ ставиться у відповідність число S за визначеним вище правилом.

Якщо тіло рухається за законами Ньютона, то $z = -\frac{gt^2}{2} + vt$, тоді на цій траєкторії

$$S = \int_0^{\frac{v}{g}} \left(\frac{\dot{z}^2}{2} - gz\right)dt =$$

$$= \int_0^{\frac{v}{g}} \left[\frac{1}{2}(-gt+v)^2 - g\left(-\frac{gt^2}{2} + vt\right)\right]dt = -\frac{1}{6}\frac{v^3}{g}. \tag{1.6}$$

Таким чином, ньютонівській (істинній) траєкторії $z = -\frac{gt^2}{2} + vt$ поставлено у відповідність число $S = \frac{-v^3}{6g}$.

Тепер візьмемо іншу траєкторію, яка з'єднує точки 1 і 2. Нехай це буде пряма, що проходить через ці початкову й кінцеву точки, а саме, $z = \frac{vt}{2}$. Тоді

$$S = \int_0^{\frac{v}{g}} \left(\frac{v^2}{8} - \frac{gv}{2}t\right)dt = -\frac{1}{8}\frac{v^3}{g}. \tag{1.7}$$

Видно, що цій траєкторії ставиться у відповідність число S, яке є більшим, ніж для істинної траєкторії (1.6).

Розглянемо тепер цілий клас траєкторій, кожна з яких проходить через дві точки 1 і 2:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + vt + \eta F(t). \tag{1.8}$$

Тут η — це параметр, що «нумерує» траєкторії. Очевидно, що при $\eta = 0$ ми маємо істинну траєкторію. Для того, щоб довільна крива $z(t)$ проходила через точки 1 і 2, необхідно й достатньо, щоб функція $F(t)$ відповідала таким умовам: $F(0) = F\left(\frac{v}{g}\right) = 0$. Для спрощення обчислень оберемо конкретний вигляд цієї функції

$$F(t) = t\left(t - \frac{v}{g}\right). \tag{1.9}$$

Вона задовольняє переліченим умовам і є квадратичною функцією часу, тому далі припустимо, що $\eta = \varepsilon g$ для дотримання розмірності функції $z(t)$. Тут ε — безрозмірний параметр. Маємо

$$z = -\frac{gt^2}{2} + vt + \varepsilon gt\left(t - \frac{v}{g}\right) \tag{1.10}$$

або, переписуючи,

$$z = -gt^2\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) + vt(1 - \varepsilon). \tag{1.11}$$

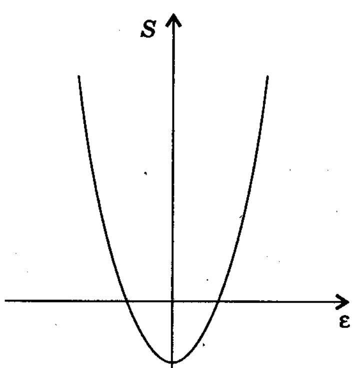


Рис. 1.3

Очевидно, що при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ маємо пряму лінію, яка з'єднує фіксовані точки 1 і 2. Підставимо останній вираз для $z(t)$ до формули для функціонала

$$S[z(t)] = S(\varepsilon) =$$

$$= \int_0^{\frac{v}{g}} \left\{ \frac{1}{2} \left[gt(2\varepsilon - 1) + v(1-\varepsilon) \right]^2 - g \left[gt^2 \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \right) + vt(1-\varepsilon) \right] \right\} dt.$$

Беручи інтеграл, одержуємо

$$S(\varepsilon) = \frac{v^3}{6g} \left(\varepsilon^2 - 1 \right). \tag{1.12}$$

Графік отриманої функції $S(\varepsilon)$ — парабола (рис. 1.3). Очевидно, що мінімум у цієї функції досягається при $\varepsilon = 0$. Отже, істинна траєкторія відповідає мінімуму функціонала дії $S(\varepsilon)$. Одержаний на даному окремому прикладі результат і покладено в основу загального принципу найменшої дії в класичній механіці.

Додаток 2.
Векторний аналіз

У Додатку стисло подані відомі визначення та формули векторної алгебри.

Скалярний добуток двох векторів

Скалярний добуток двох векторів у спеціальній літературі може записуватися в різний спосіб:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\vec{b}\,.$$

Визначення скалярного добутку дається формулою

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).\tag{2.1}$$

Нехай у декартовій системі координат вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ мають вигляд

$$\vec{a}=a_x\vec{n}_x+a_y\vec{n}_y+a_z\vec{n}_z\,,\;\;\vec{b}=b_x\vec{n}_x+b_y\vec{n}_y+b_z\vec{n}_z\,,$$

де a_x,a_y,a_z; b_x,b_y,b_z — проекції цих векторів на осі, а $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$, $\vec{n}_z$ — орти декартової системи координат. Тоді їхній скалярний добуток

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\,.\tag{2.2}$$

Результатом скалярного добутку двох векторів є скаляр.

Векторний добуток двох векторів

Різні форми запису векторного добутку:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}\,.$$

Результатом векторного добутку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор, перпендикулярний $\vec{a}$ і $\vec{b}$, який за абсолютною величиною дорівнює

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right). \tag{2.3}$$

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ утворюють праву трійку векторів.

У декартовій системі координат

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

Властивість векторного добутку

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]. \tag{2.5}$$

Змішаний добуток векторів

Змішаний або векторно-скалярний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є скаляром, який чисельно дорівнює

$$\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

Властивість змішаного добутку

$$\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{b}\left[\vec{c},\vec{a}\right] = \vec{c}\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\vec{b}\left[\vec{a},\vec{c}\right] = -\vec{a}\left[\vec{c},\vec{b}\right] = -\vec{c}\left[\vec{b},\vec{a}\right]. \tag{2.7}$$

Подвійний векторний добуток векторів

Результатом подвійного векторного добутку є вектор

$$\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right). \tag{2.8}$$

Скалярне та векторне поле

Скалярним або векторним полем називається область простору, кожній точці якої поставлено у відповідність значення будь-якого скаляра або, відповідно, вектора.

Кожна точка в просторі визначається **радіус-вектором** — вектором, проведеним із початку координат до даної точки. У декартовій системі координат точка з координатами $(x,\ y,\ z)$ характеризується радіус-вектором

$$\vec{r} = x\vec{n}_x + y\vec{n}_y + z\vec{n}_z . \tag{2.9}$$

Оскільки кожна точка поля визначається її радіус-вектором $\vec{r}$, то задання скалярного або векторного поля еквівалентно заданню, відповідно, скалярної функції $\varphi(\vec{r})$ або векторної функції $\vec{a}(\vec{r})$. Ці функції, окрім $\vec{r}$, можуть залежати ще і від інших аргументів, наприклад, від часу.

Оператори градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан

Розглянемо систему координат, не конкретизуючи її вид. Нехай $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — орти, q_1, q_2, q_3 — координати, a_1, a_2, a_3 — проекції вектора $\vec{a}$ на осі цієї системи. Для цієї довільної системи координат уведемо оператори: градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}; \tag{2.10}$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3a_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3a_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2a_3)\right); \tag{2.11}$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e}_1}{h_2h_3} & \dfrac{\vec{e}_2}{h_1h_3} & \dfrac{\vec{e}_3}{h_1h_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1a_1 & h_2a_2 & h_3a_3 \end{vmatrix}; \tag{2.12}$$

$$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \times$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right). \quad (2.13)$$

Тут h_1, h_2, h_3 — коефіцієнти Ляме (у деяких джерелах зустрічається транскрипція «Ламе»). За допомогою коефіцієнтів Ляме записані загальні вирази для операторів градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан, які є справедливими для довільної системи координат. Конкретизувавши вид системи координат і скориставшись відомими для даного виду коефіцієнтами Ляме, за допомогою (2.10)—(2.13) можна отримати вирази для цих операторів в обраній системі координат.

Коефіцієнти Ляме

Система координат (координати)	h_1	h_2	h_3
Декартова (x, y, z)	1	1	1
Циліндрична (ρ, φ, z)	1	ρ	1
Сферична (r, θ, φ)	1	r	$r\sin\theta$

Наприклад, для **декартової** системи координат ортам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ відповідають $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$, $\vec{n}_z$; координатам q_1, q_2, q_3 — x, y, z; проекціям вектора a_1, a_2, a_3 — a_x, a_y, a_z. Коефіцієнти Ляме для декартової системи всі дорівнюють одиниці. Тоді оператори градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан у декартовій системі координат матимуть вигляд:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \vec{n}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{n}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{n}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \quad (2.14)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}; \quad (2.15)$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}; \qquad (2.16)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \qquad (2.17)$$

Вигляд операторів градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан у сферичній і циліндричній системах координат можна отримати аналогічно, застосовуючи відповідні вирази для коефіцієнтів Ляме.

Наведемо у вигляді таблиці об'єкти, на які діють оператори градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан, і результати, що утворюються в результаті дії цих операторів.

Оператор	Об'єкт дії оператора	Результат дії оператора
Градієнт	Скаляр	Вектор
Дивергенція	Вектор	Скаляр
Ротор	Вектор	Вектор
Лапласіан	Скаляр	Скаляр
	Вектор	Вектор

Оператор набла

Уведемо векторно-диференціальний оператор набла

$$\nabla = \vec{n}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{n}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{n}_z \frac{\partial}{\partial z}. \qquad (2.18)$$

За допомогою оператора набла оператори градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан записуються таким чином:

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi = \vec{n}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{n}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{n}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}; \qquad (2.19)$$

$$(\nabla\vec{a}) = \operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \qquad (2.20)$$

$$\left[\nabla\vec{a}\right]=\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}; \qquad (2.21)$$

$$(\nabla\nabla)\varphi=\nabla^2\varphi=\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \qquad (2.22)$$

Правила векторної алгебри поширюються на оператор набла, якщо він входить множником у добуток, який містить лише **один** істинний вектор або скаляр. (Визначення істинного вектора і скаляра див. у Додатку 3.)

З урахуванням рівнянь (2.19)–(2.22) можна показати, що мають місце тотожності:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=(\nabla,\nabla\varphi)=(\nabla,\nabla)\varphi=\nabla^2\varphi=\Delta\varphi; \qquad (2.23)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=[\nabla,\nabla\varphi]=[\nabla,\nabla]\varphi=0; \qquad (2.24)$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\nabla\left[\nabla\vec{a}\right]\right)=\left(\left[\nabla,\nabla\right]\vec{a}\right)=0; \qquad (2.25)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}=\left[\nabla\left[\nabla\vec{a}\right]\right]=\nabla(\nabla\vec{a})-\vec{a}(\nabla\nabla)=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}-\Delta\vec{a} \qquad (2.26)$$

При виводі (2.23) і (2.24) ми скористалися тим, що скаляр можна винести зі скалярного (векторного) добутку, у (2.24) і (2.25) застосовано факт рівності нулю векторного добутку двох однакових векторів (див. (2.3)), у (2.25) і (2.26) — властивості змішаного (2.7) і подвійного векторного (2.8) добутку.

Застосування оператора набла до добутку

Якщо векторно-диференціальний оператор набла діє на добуток, що містить два і більше істинних скаляра або вектора, то правила векторної алгебри не можна застосовувати безпосередньо. На добуток оператор ∇ діє у два етапи:

1. Як диференціальний оператор, ∇ застосовується до кожного множника окремо, при цьому вважаючи інший постійним

(як при диференціюванні в математичному аналізі: $d(\varphi\psi) = \varphi d\psi + \psi d\varphi$).

2. Як векторний оператор, що підпорядковується всім правилам векторної алгебри. При цьому оператор набла завжди ставиться після множника, який вважається умовно постійним, перед множником, що є змінним.

   Згідно із цим справедливими є такі тотожності:

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi; \tag{2.27}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \vec{a}\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{div}\vec{a}; \tag{2.28}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{a} - [\vec{a}, \operatorname{grad}\varphi]; \tag{2.29}$$

$$\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}; \tag{2.30}$$

$$\operatorname{rot}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} - \vec{b}\operatorname{div}\vec{a} + (\vec{b}\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\nabla)\vec{b}; \tag{2.31}$$

$$\operatorname{grad}(\vec{a}, \vec{b}) = [\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}] + [\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}] + (\vec{b}\nabla)\vec{a} + (\vec{a}\nabla)\vec{b}. \tag{2.32}$$

При цьому вираз виду $(\vec{a}\nabla)$ є оператором і має вигляд

$$(\vec{a}\nabla) = a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.33}$$

(Увага! Не плутати з $(\nabla\vec{a}) = \operatorname{div}\vec{a}$.) Оператор $(\vec{a}\nabla)$ діє на вектор або скаляр, при цьому вектор $\vec{a}$ вважається постійним, на нього оператор набла не діє.

Дія операторів градієнт, дивергенція, ротор на складні функції

$$\operatorname{grad}\varphi[f(r)] = \operatorname{grad}f\,\frac{\partial\varphi}{\partial f}; \tag{2.34}$$

$$\operatorname{div}\vec{a}[f(r)] = \left(\operatorname{grad}f, \frac{\partial\vec{a}}{\partial f}\right); \tag{2.35}$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}[f(r)] = \left[\operatorname{grad}f, \frac{\partial\vec{a}}{\partial f}\right]; \tag{2.36}$$

Теорема Остроградського—Ґаусса

Розглянемо довільну замкнену поверхню S, V — об'єм, який обмежено поверхнею S.

Інтеграл за замкненою поверхнею S довільного вектора $\vec{a}$ називається **потоком вектора** $\vec{a}$ через поверхню S.

Теорема Остроградського—Ґаусса: потік вектора $\vec{a}$ через довільну замкнену поверхню S дорівнює інтегралу дивергенції цього вектора за об'ємом V, який обмежено цією поверхнею

$$\oint_S \vec{a}d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{a}dV. \tag{2.37}$$

Тут $d\vec{S} = \vec{n}dS$, де dS — нескінченно мала площадка, $\vec{n}$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до цієї площадки.

Теорема Стокса

Розглянемо довільний замкнений контур L і поверхню S, що спирається на цей контур.

Інтеграл від довільного векторного поля $\vec{a}$ за замкненим контуром L називається **циркуляцією** цього вектора за контуром L.

Теорема Стокса: циркуляція довільного векторного поля $\vec{a}$ за замкненим контуром L дорівнює потоку ротора цього вектора через поверхню S, що спирається на контур L

$$\oint_L \vec{a}d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{a}d\vec{S}. \tag{2.38}$$

Тут $d\vec{l} = \vec{\tau}dl$, де dl — нескінченно малий елемент контуру, $\vec{\tau}$ — одиничний вектор, дотичний до цього елемента; $d\vec{S} = \vec{n}dS$.

Додаток 3. Закон руху матеріальної точки в різних системах координат

Визначити **закон руху матеріальної точки** означає визначити положення матеріальної точки в будь-який момент часу відносно даної системи відліку й задати його за допомогою радіус-вектора точки як функції часу

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{3.1}$$

Кінець цього радіус-вектора описує в просторі криву, яку називають **траєкторією точки.**

Швидкістю точки відносно системи відліку називається відношення нескінченно малого приросту $d\vec{r}$ радіус-вектора точки до нескінченно малого інтервалу часу dt, за який відбувається зазначене змінення радіус-вектора. Швидкість точки дорівнює похідній радіус-вектора при часом за постійних ортах $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$, $\vec{n}_z$ (рис. 3.1):

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{3.2}$$

Прискорення точки $\vec{w}$ відносно системи відліку визначається як перша похідна швидкості за часом при постійних ортах $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$. Таким чином,

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}, \tag{3.3}$$

де $\dot{\vec{v}} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, $\ddot{\vec{r}} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

У ряді задач використовується поняття **секторної швидкості точки** $\vec{\sigma}$, за визначенням рівної

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\vec{r} \times \vec{v}\right]. \tag{3.4}$$

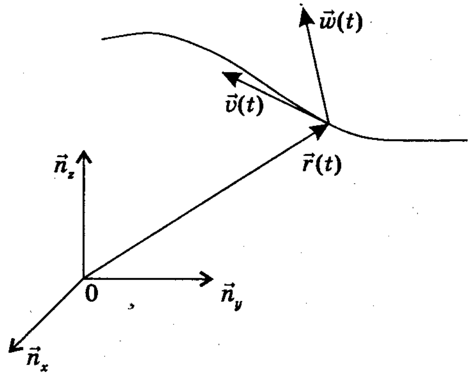


Рис. 3.1

Модуль секторної швидкості дорівнює швидкості, із якою змінюється площа, яку окреслює радіус-вектор точки.

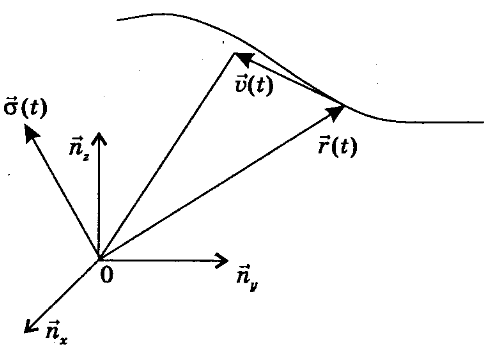


Рис. 3.2

У декартовій системі координат (див. рис. 3.2) радіус-вектор $\vec{r}(t)$ точки як функція часу задається трьома координатами, які, у свою чергу, є функціями часу $x(t), y(t), z(t)$. Цей вектор визначає положення точки відносно обраної системи відліку в будь-який момент часу. Диференціюючи радіус-вектор $\vec{r}(t)$ за часом при постійних ортах $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$, знайдемо швидкість і прискорення точки у вигляді

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{n}_x + \dot{y}\vec{n}_y + \dot{z}\vec{n}_z, \tag{3.5}$$

$$\vec{w} = \ddot{x}\vec{n}_x + \ddot{y}\vec{n}_y + \ddot{z}\vec{n}_z. \tag{3.6}$$

Отже, проекції швидкості й прискорення точки на декартові осі відповідно дорівнюють

$$\upsilon_x = \dot{x}, \upsilon_y = \dot{y}, \upsilon_z = \dot{z}\,, \tag{3.7}$$

$$w_x = \ddot{x}, w_y = \ddot{y}, w_z = \ddot{z}\,. \tag{3.8}$$

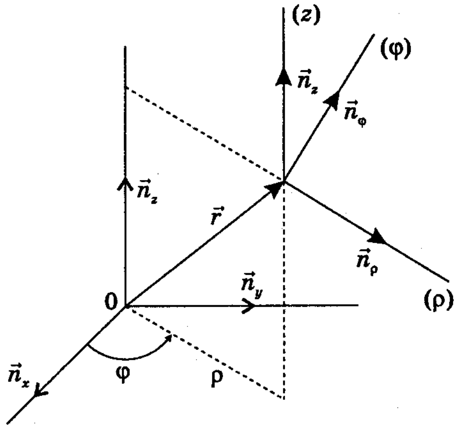


Рис. 3.3

У циліндричній системі координат $\vec{r}(t)$ задається скалярними функціями $\rho(t), \varphi(t), z(t)$ (рис. 3.3)

$$\vec{r} = \rho\vec{n}_\rho + z\vec{n}_z\,, \tag{3.9}$$

де орти циліндричних координат пов'язані з ортами декартової системи координат співвідношеннями

$$\begin{aligned} \vec{n}_\rho &= \vec{n}_x \cos\varphi + \vec{n}_y \sin\varphi; \\ \vec{n}_\varphi &= -\vec{n}_x \sin\varphi + \vec{n}_y \cos\varphi; \\ \vec{n}_z &= \vec{n}_z. \end{aligned} \tag{3.10}$$

При переміщенні точки напрямки ортів $\vec{n}_\rho$ і $\vec{n}_\varphi$ змінюються (тобто залежать від часу), у той час як напрямки ортів декартової системи координат $\vec{n}_x, \vec{n}_y$ і $\vec{n}_z$ є фіксованими. З урахуванням цього в результаті диференціювання $\vec{r}(t)$ за часом знаходимо

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{n}_\rho + \rho\dot{\vec{n}}_\rho + \dot{z}\vec{n}_z\,. \tag{3.11}$$

Згідно з (3.10) $\dot{\vec{n}}_\rho = \varphi \vec{n}_\varphi$, тоді для швидкості точки відносно системи відліку отримуємо вираз

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{n}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{n}_\varphi + \dot{z}\vec{n}_z. \tag{3.12}$$

Отже, проекції швидкості на координатні осі $(\rho), (\varphi), (z)$ виявляються, відповідно, рівними

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}. \tag{3.13}$$

Аналогічно, диференціюючи за часом $\vec{v}(t)$ і враховуючи залежність $\vec{n}_\rho$ і $\vec{n}_\varphi$ від $\varphi(t)$, отримуємо прискорення точки відносно системи відліку у вигляді розкладання по ортах циліндричної системи координат

$$\vec{w} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{n}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})\vec{n}_\varphi + \ddot{z}\vec{n}_z. \tag{3.14}$$

Проекції прискорення на осі $(\rho), (\varphi), (z)$, відповідно, дорівнюють

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}), \quad w_z = \ddot{z}. \tag{3.15}$$

У сферичній системі координат $\vec{r}(t)$ задається скалярними функціями $r(t), \theta(t), \varphi(t)$ (рис. 3.4). Розкладання радіус-вектора по ортах сферичних координат і самі орти визначаються формулами

$$\begin{aligned} &\vec{r} = r\vec{n}_r; \\ &\vec{n}_r = (\vec{n}_x \cos\varphi + \vec{n}_y \sin\varphi)\sin\theta + \vec{n}_z \cos\theta; \\ &\vec{n}_\varphi = -\vec{n}_x \sin\varphi + \vec{n}_y \cos\varphi. \\ &\vec{n}_\theta = (\vec{n}_x \cos\varphi + \vec{n}_y \sin\varphi)\cos\theta - \vec{n}_z \sin\theta. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ураховуючи, що напрямки ортів $\vec{n}_r$, $\vec{n}_\theta$ $\vec{n}_\varphi$ залежать від положення точки, для її швидкості маємо

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{n}_r + r\dot{\theta}\vec{n}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{n}_\varphi. \tag{3.17}$$

Отже, проекції швидкості точки на координатні осі $(r), (\theta), (\varphi)$, відповідно, дорівнюють

$$v_r = \dot{r}, v_\theta = r\dot{\theta}, v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}. \tag{3.18}$$

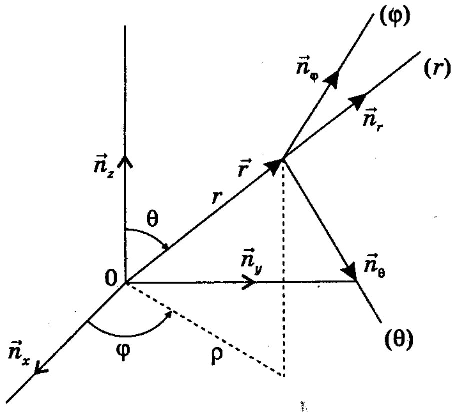


Рис. 3.4

Аналогічно попередньому, диференціюючи за часом $\vec{v}(t)$ (3.17) і враховуючи залежність $\vec{n}_r$, $\vec{n}_\theta$, $\vec{n}_\varphi$ від $\varphi(t)$ і $\theta(t)$, отримуємо прискорення точки відносно системи відліку у вигляді розкладання по ортах сферичних координат

$$\vec{w} = w_r \vec{n}_r + w_\theta \vec{n}_\theta + w_\varphi \vec{n}_\varphi, \tag{3.19}$$

де проекції прискорення точки на орти сферичних координат дорівнюють

$$\begin{aligned} w_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2); \\ w_\theta &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2; \\ w_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Додаток 4.
Тензорний аналіз

Поняття **скаляр, вектор, тензор**, які широко застосовуються у фізиці, є математичними абстракціями, що відображають загальні властивості реальних фізичних величин, таких, як густина, швидкість, напруженість поля, момент інерції тощо.

Тензори — це математичні величини, які визначаються своїми законами перетворення при поворотах системи координат.

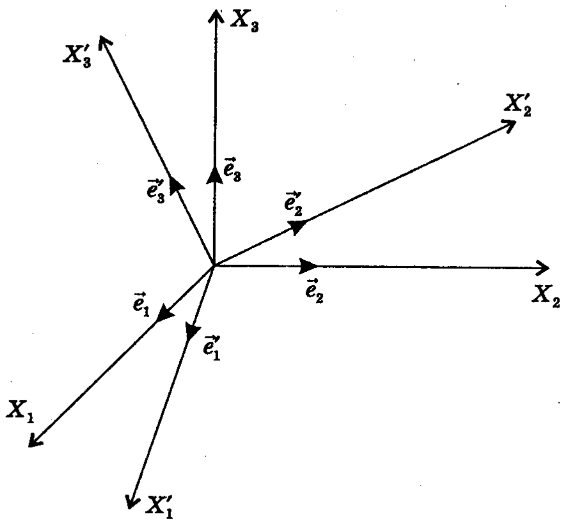


Рис. 4.1

Розглянемо дві декартові системи координат — вихідну $X_1X_2X_3$ і повернуту $X_1'X_2'X_3'$, які мають спільний початок (рис. 4.1); $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — орти вихідної, а $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ — орти повернутої (штрихованої) системи координат.

Тензор нульового рангу

Скаляром (інваріантом) називається величина, що не змінює свого значення при поворотах координатної системи, тобто має те саме значення у вихідній і повернутій системах координат:

$$R = R' \tag{4.1}$$

Скаляр — це **тензор нульового рангу.** Прикладом скаляра може бути відстань між двома точками, маса, заряд, час.

Зв'язок між ортами вихідної та повернутої систем координат

Виразимо орти системи $X_1'X_2'X_3'$ через орти вихідної системи $X_1X_2X_3$.

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 \cos(\widehat{\vec{e}_1',\vec{e}_1}) + \vec{e}_2 \cos(\widehat{\vec{e}_1',\vec{e}_2}) + \vec{e}_3 \cos(\widehat{\vec{e}_1',\vec{e}_3});$$
$$\vec{e}_2' = \vec{e}_1 \cos(\widehat{\vec{e}_2',\vec{e}_1}) + \vec{e}_2 \cos(\widehat{\vec{e}_2',\vec{e}_2}) + \vec{e}_3 \cos(\widehat{\vec{e}_2',\vec{e}_3});$$
$$\vec{e}_3' = \vec{e}_1 \cos(\widehat{\vec{e}_3',\vec{e}_1}) + \vec{e}_2 \cos(\widehat{\vec{e}_3',\vec{e}_2}) + \vec{e}_3 \cos(\widehat{\vec{e}_3',\vec{e}_3}).$$

Однією формулою цей зв'язок можна записати:

$$\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} \cos(\widehat{\vec{e}_i',\vec{e}_j})\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\vec{e}_j .$$

Тут уведено матрицю переходу від вихідної системи координат до повернутої — **матрицю повороту.** Елемент матриці повороту представляє собою косинус кута між i-ю віссю повернутої та j-ю віссю вихідної системи координат

$$\alpha_{ij} = \cos(\widehat{\vec{e}_i',\vec{e}_j}). \tag{4.2}$$

Зауважимо, що елемент матриці повороту також може бути введений як результат скалярного добутку i-го орта повернутої та j-го орта вихідної системи координат: $\left(\vec{e}_i',\vec{e}_j\right) = \alpha_{ij}$.

Зв'язок між ортами в матричній формі має вигляд

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

У тензорному аналізі заведено знак суми випускати. На той факт, що у виразі має місце підсумовування, указує наявність індексу, який повторюється, у нашому випадку індексу j. (Індекс підсумовування називається «німим» індексом, від нього результат підсумовування не залежить, тому він може бути позначений будь-якою літерою.) Таким чином, зв'язок між ортами двох систем координат:

$$\vec{e}_i' = \alpha_{ij}\vec{e}_j. \tag{4.3}$$

Підсумовування в цьому виразі відбувається за елементами рядка матриці повороту.

Аналогічно можна виразити орти вихідної системи координат через орти повернутої

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \cos(\widehat{\vec{e}_j', \vec{e}_i})\vec{e}_j' = \alpha_{ji}\vec{e}_j'. \tag{4.4}$$

В останньому виразі підсумовування відбувається за елементами стовпця матриці повороту.

Перетворення компонент вектора при переході від однієї системи координат до іншої. Тензор першого рангу

Визначимо, як перетворюються компоненти вектора при переході від вихідної системи координат до повернутої. Для цього запишемо радіус-вектор довільної точки в кожній із систем координат

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' + x_3'\vec{e}_3'.$$

Перепишемо цей вираз таким чином:

$$\sum_{k=1}^{3} x_k \vec{e}_k = \sum_{i=1}^{3} x_i' \vec{e}_i' .$$

Випустимо знак суми:

$$x_k \vec{e}_k = x_i' \vec{e}_i' . \qquad (4.5)$$

Визначимо звідси x_i'. Для цього домножимо останній вираз зліва скалярно на вектор $\vec{e}_i'$

$$x_k \left(\vec{e}_i', \vec{e}_k\right) = x_i' \left(\vec{e}_i', \vec{e}_i'\right).$$

Далі врахуємо, що $\left(\vec{e}_i', \vec{e}_i'\right) = 1$, а $\left(\vec{e}_i', \vec{e}_k\right) = \alpha_{ik}$. Тоді вираз, який визначає закон перетворення компонентів вектора при переході від вихідної системи координат до повернутої, буде таким:

$$x_i' = \alpha_{ik} x_k . \qquad (4.6)$$

Підсумовування відбувається за елементами рядка матриці повороту.

Аналогічно отримуємо зворотне перетворення компонент вектора. Для цього домножимо (4.5) справа скалярно на вектор $\vec{e}_k$

$$x_k \left(\vec{e}_k, \vec{e}_k\right) = x_i' \left(\vec{e}_i', \vec{e}_k\right).$$

Оскільки $\left(\vec{e}_k, \vec{e}_k\right) = 1$, а $\left(\vec{e}_i', \vec{e}_k\right) = \alpha_{ik}$, то зворотне перетворення компонентів вектора запишеться так:

$$x_k = \alpha_{ik} x_i' . \qquad (4.7)$$

Підсумовування відбувається за елементами стовпця матриці повороту.

Вектор у тривимірному просторі — це сукупність трьох величин, які перетворюються при повороті системи координат за законом

$$x_i' = \alpha_{ik} x_k .$$

Вектор — це **тензор першого рангу.** Прикладом тензора першого рангу може бути радіус-вектор, швидкість.

Тензор другого рангу. Тензор s-го рангу

Тензором другого рангу в тривимірному просторі називається сукупність дев'яти величин, що перетворюються при повороті системи координат за законом

$$T'_{ik} = \alpha_{il}\alpha_{km}T_{lm}. \tag{4.8}$$

У цьому виразі підсумовування відбувається від 1 до 3 за індексами l і m.

Прикладом тензора другого рангу може бути діелектрична й магнітна проникність анізотропних магнітодіелектриків

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тензором s-го рангу в тривимірному просторі називається сукупність 3^s величин, що перетворюються при повороті системи координат за законом

$$T'_{i'k'l'\ldots t'} = \alpha_{i'i}\alpha_{k'k}\alpha_{l'l}\ldots\alpha_{t't}T_{ikl\ldots t} \tag{4.9}$$

Властивість ортогональності матриці повороту

Для отримання умови ортогональності матриці повороту будемо виходити з умови ортогональності векторів: два вектори є ортогональними, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю. Через ортогональність ортів вихідної та повернутої систем координат, а також враховуючи, що орти мають одиничну довжину, одержуємо

$$\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_{ij}; \tag{4.10}$$

$$\left(\vec{e}'_k, \vec{e}'_l\right) = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases} = \delta_{kl}. \tag{4.11}$$

Розпишемо $\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right)$, виражаючи орти нештрихованої системи координат через орти штрихованої (4.4) і враховуючи (4.10), (4.11).

$$\left(\vec{e}_i,\vec{e}_j\right)=\left(\alpha_{ki}\vec{e}\,'_k,\alpha_{lj}\vec{e}\,'_l\right)=\alpha_{ki}\alpha_{lj}\left(\vec{e}\,'_k,\vec{e}\,'_l\right)=\alpha_{ki}\alpha_{lj}\delta_{kl}=\alpha_{ki}\alpha_{kj}=\delta_{ij}\,.$$

Таким чином, маємо **умову ортогональності матриці** за другою парою індексів

$$\alpha_{ki}\alpha_{kj}=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ 1, & i\doteq j.\end{cases} \tag{4.12}$$

Якщо елементи матриці переходу відповідають цій умові, то матриця переходу є ортогональною, і саме перетворення називається ортогональним. Таким чином, **поворот системи координат — ортогональне перетворення.**

Аналогічно розглянемо скалярний добуток $\left(\vec{e}\,'_i,\vec{e}\,'_j\right)$.

$$\left(\vec{e}\,'_i,\vec{e}\,'_j\right)=\left(\alpha_{ik}\vec{e}_k,\alpha_{jl}\vec{e}_l\right)=\alpha_{ik}\alpha_{jl}\left(\vec{e}_k,\vec{e}_l\right)=\alpha_{ik}\alpha_{jl}\delta_{kl}=\alpha_{ik}\alpha_{jk}=\delta_{ij}\,.$$

Отримуємо **умову ортогональності матриці** за першою парою індексів:

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk}=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ 1, & i=j.\end{cases} \tag{4.13}$$

Побудова зворотної матриці перетворення

Зворотною матрицею називається така матриця, для якої має місце співвідношення

$$\hat{\alpha}^{-1}\hat{\alpha}=\hat{\alpha}\hat{\alpha}^{-1}=\hat{\mathrm{I}}\,, \tag{4.14}$$

де $\hat{\mathrm{I}}$ — одинична матриця:

$$\hat{\mathrm{I}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

У явному вигляді співвідношення (4.14)

$$\alpha^{-1}{}_{ik}\alpha_{kj}=\alpha_{ik}\alpha^{-1}{}_{kj}=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ 1, & i=j.\end{cases} \tag{4.15}$$

Порівнюючи останній вираз з умовою ортогональності матриці (4.13), отримуємо

$$\alpha^{-1}{}_{kj} = \alpha_{jk} \Leftrightarrow \hat{\alpha}^{-1} = \hat{\alpha}^{T} . \qquad (4.16)$$

Матрицю зворотного перетворення одержуємо шляхом транспонування матриці прямого перетворення. Це справедливо для ортогонального перетворення.

Скористаємось (4.16) для отримання виразу зворотного перетворення компонент-вектора (4.7) з прямого перетворення (4.6). Для цього пряме перетворення (4.6)

$$x'_k = \alpha_{ki} x_i$$

домножимо на $\alpha^{-1}{}_{ik}$

$$\alpha^{-1}{}_{ik} x'_k = \alpha^{-1}{}_{ik} \alpha_{ki} x_i .$$

Згідно з (4.15), (4.16) $\alpha^{-1}{}_{ik}\alpha_{ki} = 1$, а $\alpha^{-1}{}_{ik} = \alpha_{ki}$. Тоді

$$\alpha_{ki} x'_k = x_i .$$

Таким чином, одержуємо той самий вираз для зворотного перетворення, що і в (4.7).

Симетрія тензорів

Тензор $S_{ikl...}$ називається **симетричним** за парою індексів i і k, якщо він не змінюється при перестановці індексів:

$$S_{ikl...} = S_{kil...} \qquad (4.17)$$

Якщо при такій перестановці змінюється знак, то тензор називається **антисиметричним.**

$$A_{ikl...} = -A_{kil...} . \qquad (4.18)$$

Діагональні елементи антисиметричного тензора дорівнюють нулю:

$$A_{iil...} = -A_{iil...} = 0 . \qquad (4.19)$$

Умову симетричності (антисиметричності) тензора можна узагальнити на будь-яку пару індексів.

Властивість симетричності (антисиметричності) тензора зберігається при переході від однієї системи координат до іншої, тобто є інваріантною. Поняття симетрії тензора належить до тензорів рангу не нижче другого.

Симетричний тензор другого рангу містить 6 незалежних компонент, а антисиметричний тензор другого рангу — лише 3 незалежні компоненти.

Згортання тензорів

Процедура **згортання тензора** полягає в підсумовуванні його за двома індексами, які прирівнюються. Наприклад, згорнемо тензор третього рангу T_{ikl} за першою парою індексів. Для цього прирівняємо $i = k$ та просумуємо:

$$T_{iil} = \sum_{i=1}^{3} T_{iil} = T_{11l} + T_{22l} + T_{33l}; \quad l = 1,2,3. \tag{4.20}$$

Користуючись визначеннями тензора третього рангу й вектора, а також властивістю ортогональності матриці переходу, можна показати, що результат згортання T_{iil} являє собою тензор першого рангу (вектор). Процедура згортання тензора зменшує ранг тензора на дві одиниці. Згорнути можна тензор рангу не нижче другого. Тензор парного рангу може бути згорнутий до скаляра (інваріанта), тензор непарного рангу — до вектора.

Перетворення тензорів при інверсії системи координат

Важливе значення у фізиці має інверсне перетворення системи координат. **Інверсією системи координат** назвемо дзеркальне відбиття координатних осей, тобто

$$x'_\alpha = -x_\alpha . \tag{4.21}$$

Вектори можуть поводитися по-різному стосовно інверсії системи координат. Залежно від поведінки при інверсії існують два типи векторів — справжні вектори й псевдовектори.

Справжній (полярний) вектор — це такий вектор, компоненти якого при інверсії системи координат змінюють свій знак. Прикладом справжнього вектора можуть бути радіус-вектор точки $\vec{r}$, швидкість частинки $\vec{v}$, імпульс $\vec{p}$, сила $\vec{F}$, напруженість електричного поля $\vec{E}$ тощо.

Псевдовектор (аксіальний вектор) — це такий вектор, компоненти якого при інверсії системи координат не змінюють свій знак. Наприклад, до аксіальних векторів належать кутова швидкість $\vec{\omega}$, момент імпульсу $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, напруженість магнітного поля $\vec{H} = [\nabla \times \vec{A}]$ і взагалі будь-який векторний добуток двох істинних векторів.

Сформульовані визначення полярних та аксіальних векторів поширюються на тензори довільного рангу. **Тензор s-го рангу** називається **істинним** або **полярним**, якщо його компоненти при інверсії набувають множника $(-1)^S$, і **псевдотензором**, якщо його компоненти множаться на $(-1)^{S+1}$.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка фундаментальна проблема природознавства розв'язується в курсі теоретичної механіки?
2. Яка теоретична модель реальних фізичних об'єктів вивчається в курсі теоретичної механіки?
3. Яке місце посідає теоретична механіка в університетському курсі теоретичної фізики?
4. Що таке система відліку?
5. Що таке інерціальна система відліку? Чи розрізняються явища природи в інерціальних системах відліку?
6. Сформулюйте аксіоматику класичної теорії відносності Ґалілея—Ньютона.
7. Що таке абсолютний простір? Чи він є пізнаваним?
8. Що таке відносний простір? Чому він є пізнаваним?
9. Що таке абсолютний час? Відносний час?
10. Запишіть класичне перетворення Ґалілея—Ньютона. Переконайтеся, що ці перетворення забезпечують виконання обох постулатів Ґалілея—Ньютона.
11. Що таке матеріальна точка? Яка модель реальної фізичної системи використовується в теоретичній механіці?
12. Як визначається положення фізичної системи у фіксований момент часу? Що таке узагальнені координати? Число степенів вільності?
13. Як визначається механічний стан фізичної системи у фіксований момент часу? Що таке узагальнені швидкості?
14. Сформулюйте аксіоматику принципу найменшої дії.
15. Отримайте диференціальне рівняння руху (рівняння Лаґранжа) з принципу найменшої дії.

16. У чому полягає властивість адитивності функції Лаґранжа?
17. Сформулюйтеи загальні властивості функції Лаґранжа: адитивність і неоднозначність її визначення.
18. Яка загальна постановка задачі про рух у теоретичній механіці? Запишіть функцію Лаґранжа для найпростішого випадку вільної частинки.
19. Від яких змінних не може залежати функція Лаґранжа вільної частинки? Чому? Від яких змінних вона має залежати? Яким чином?
20. Якою є розмірність функції Лаґранжа?
21. Визначте швидкість і квадрат швидкості частинки. Як вони перетворюються при переході від однієї ІСВ до іншої?
22. Запишіть функцію Лаґранжа для довільної сукупності невзаємодіючих частинок.
23. Дайте визначення замкненої системи взаємодіючих частинок. Який вигляд повинна мати функція Лаґранжа для цієї фізичної системи? Чому?
24. Як проявляє себе абсолютність часу при записі функції Лаґранжа системи взаємодіючих частинок?
25. Запишіть рівняння Ньютона для системи взаємодіючих частинок. Що таке сила? Від яких змінних вона залежить у класичній механіці?
26. Як зміниться функція Лаґранжа при заміні декартових координат на узагальнені координати?
27. Від яких змінних залежить функція Лаґранжа незамкненої системи? Чому?
28. Запишіть вирази для елемента довжини та квадрата швидкості в різних ортогональних системах координат.
29. Що таке інтеграли руху? Скільки їх має замкнена система?
30. Яким є походження законів збереження? У чому полягає відмінна властивість збереження величин у теоретичній механіці?
31. Яку величину, що зберігається, породжує однорідність часу? Визначте енергію замкненої системи. Звідки випливає її адитивність?

32. Дайте визначення консервативної системи. Знайдіть її енергію.
33. Як відбивається властивість однорідності простору на функції Лаґранжа замкненої системи?
34. Отримайте закон збереження імпульсу. У чому полягає відмінність властивостей адитивності імпульсу й енергії?
35. Як визначається сила через функцію Лаґранжа? Покажіть, що третій закон Ньютона є наслідком однорідності простору.
36. Як визначається узагальнений імпульс? Що таке узагальнена сила?
37. Виходячи із закону перетворення імпульсу при переході з однієї ІСВ до іншої, знайдіть таку ІСВ, у якій ця механічна система перебуває в стані спокою.
38. Що таке центр інерції механічної системи? У якому змісті механічну систему можна трактувати як матеріальну точку? Адитивність маси.
39. Що таке внутрішня енергія системи? Як перетворюється енергія системи при переході від однієї ІСВ до іншої?
40. Як відображається властивість ізотропії простору на функції Лаґранжа замкненої механічної системи? Знайдіть її варіацію при повороті на заданий кут.
41. Що таке момент імпульсу механічної системи? Чи є обмеження на властивості його адитивності?
42. Як залежить момент імпульсу від вибору початку системи координат ІСВ? Як змінюється момент імпульсу при переході від однієї ІСВ до іншої?
43. Як змінюється вигляд закону збереження моменту імпульсу за умови впливу зовнішнього поля на систему?
44. Запишіть рівняння Лаґранжа. Здійсніть перехід від рівняння Лаґранжа до рівнянь Гамільтона.
45. Як пов'язана функція Гамільтона з функцією Лаґранжа? Отримайте рівняння Гамільтона. Чому вони називаються канонічними?
46. Отримайте закон збереження енергії за допомогою функції Гамільтона.

47. Як визначаються компоненти імпульсу через дію як функцію узагальнених координат і часу?
48. Отримайте рівняння Гамільтона—Якобі в загальному випадку.
49. Знайдіть явну залежність від часу для дії у випадку замкненої системи. Що таке укорочена дія? Запишіть рівняння Гамільтона—Якобі для замкненої системи.
50. Наведіть приклад рівняння Гамільтона—Якобі для однієї частинки в зовнішньому полі.
51. Отримайте закон руху матеріальної точки із закону збереження енергії.
52. Проведіть графічний аналіз руху механічної системи. Дайте визначення фінітного та інфінітного руху.
53. Лінійний гармонічний осцилятор.
54. Вільні коливання системи. Амплітуда, фаза і власна частота коливань.
55. Повна енергія гармонічних власних коливань.
56. Коливання системи, що перебуває під дією зовнішнього поля. Вимушуюча сила. Розгляньте випадок постійної вимушуючої сили й періодичної в часі вимушуючої сили. Резонанс.
57. Як класичні уявлення про простір і час відбиваються на уявленні про взаємодію між частинками в класичній механіці?
58. Яке протиріччя між експериментом і теорією примусило переглянути уявлення про простір і час?
59. Наведіть приклад експерименту, який принципово суперечить другому постулату класичної теоретичної механіки — закону додавання швидкостей.
60. Сформулюйте сучасні фізичні уявлення про простір і час. Якою є математична модель просторово-часового континуума?
61. Що таке подія? Матеріальна точка? Процес? Світова лінія?
62. Як визначається інтервал між тією ж самою парою подій у двох ІСВ?
63. Що таке елементарний інтервал? Доведіть, що інтервал між двома подіями є інваріантом у різних ІСВ.

64. Що таке часоподібні інтервали, просторовоподібні інтервали? Як властивість інваріантності інтервалу відбивається на цих поняттях?
65. Яка геометрія лежить в основі класичної теорії відносності Ґалілея—Ньютона? Які незалежні перетворення простору залишають інваріантною довжину відрізка?
66. Яка геометрія лежить в основі спеціальної теорії відносності Ейнштейна? Які незалежні перетворення просторово-часового континуума залишають інваріантним інтервал?
67. Виведіть перетворення Лоренца як результат обертання просторово-часового континуума в площині $x0\tau$.
68. Отримайте класичні перетворення Ґалілея—Ньютона як граничний випадок перетворення Лоренца. Якому значенню граничної швидкості передачі взаємодії вони відповідають?
69. Як визначити дві події, що відбуваються одночасно в ІСВ K? Чи будуть ці ж події відбуватися одночасно в ІСВ K'?
70. Як виглядає спостереження спалаху світла в системі координат K', що рухається?
71. Як здійснюється вимірювання довжини відрізка в нерухомій системі відліку? Що таке лоренцеве скорочення довжини?
72. Як ставиться задача про час у рухомій і нерухомій системах відліку? Знайдіть уповільнення часу рухомого годинника відносно нерухомого.
73. Як визначаються компоненти 3-вектора швидкості частинки в класичній механіці?
74. Як перетворюються компоненти 3-вектора швидкості частинки при переході від однієї ІСВ до іншої в межах спеціальної теорії відносності?
75. Переконайтеся, що формули перетворення 3-вектора швидкості не суперечать сталості швидкості світла в будь-якій ІСВ.
76. Що таке аберація світла?
77. Скориставшись перетворенням Лоренца, запишіть матрицю перетворень Лоренца. Що таке «німий» індекс? Чотиривимірний вектор.

78. Властивість ортогональності матриці перетворень Лоренца. Транспонована матриця. Пряме і зворотне перетворення Лоренца в матричній формі.
79. Інваріантність скалярного добутку довільної пари 4-векторів.
80. Чотиривимірний тензор другого рангу (4-тензор).
81. Як визначити 4-вектор швидкості? Знайдіть компоненти 4-вектора швидкості. Яка в них розмірність?
82. Як визначається 4-вектор прискорення? Як орієнтовані між собою 4-вектори швидкості та прискорення під час руху?
83. У чому полягає відмінність фундаментальних положень класичної і релятивістської механіки?
84. Запишіть функціонал дії для вільної релятивістської частинки.
85. Отримайте функцію Лаґранжа для вільної релятивістської частинки.
86. Як визначається імпульс у класичній механіці? Отримайте значення релятивістського імпульсу.
87. Маса тіла в класичній механіці. Який вираз для маси в релятивістській механіці? Маса спокою.
88. Як визначається енергія в класичній механіці? Отримайте значення енергії для релятивістського випадку.
89. Релятивістська функція Гамільтона.
90. Яка форма рівнянь називається коваріантною? Сформулюйте задачу про релятивістськи-коваріантні рівняння в диференціальній формі.
91. Знайдіть варіацію функціонала дії для вільної релятивістської частинки.
92. 4-вектор імпульсу і його складові.
93. Отримайте рівняння руху в релятивістськи-коваріантній формі.
94. Сформулюйте закон збереження енергії-імпульсу в релятивістському випадку.
95. Лоренцеві перетворення енергії та імпульсу.

96. Запишіть функціонал дії для зарядженої частинки в електромагнітному полі.
97. Чотиривимірний векторний потенціал електромагнітного поля.
98. Функція Лаґранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі.
99. Узагальнений вектор імпульсу для зарядженої частинки в електромагнітному полі. У чому полягає фізичний зміст тривимірного векторного потенціалу електромагнітного поля?
100. Енергія зарядженої частинки в електромагнітному полі. У чому полягає фізичний зміст скалярного потенціалу електромагнітного поля?
101. Випишіть рівняння Лаґранжа в загальному випадку. Виведіть рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі.
102. Постулат сили Лоренца. Напруженості електричного й магнітного полів. Зв'язок векторного і скалярного потенціалів із силовими характеристиками електромагнітного поля.
103. Змінення кінетичної енергії зарядженої частинки в електромагнітному полі. Робота електромагнітного поля по зміненню кінетичної енергії.
104. Отримайте першу пару рівнянь Максвелла в диференціальній та інтегральній формі.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Краткий курс теоретической физики. — Кн. 1: Механика. Электродинамика. — М.: Наука, 1969. — 271 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. — Т. 2. Теория поля. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. — Т. 1. Механика. — М.: Наука, 2002. — 224 с.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. — Т. 8. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 620 с.
5. *Ольховский И. И.* Курс теоретической механики для физиков. — М.: Изд-во МГУ, 1978. — 575 с.

Додаткова література

1. *Айзерман М. А.* Классическая механика. — М.: Наука, 1974. — 367 с.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
3. *Гандмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — М.: Физматгиз, 1966. — 300 с.
4. *Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. — М.: Наука, 1979. — 223 с.

Т33 **Теоретична механіка** (для факультетів радіофізичного профілю): Підручник для вищих навчальних закладів / С. М. Шульга, О. В. Багацька, О. Ю. Бутрим, М. М. Колчигін, О. О. Третьяков. — Х.: Видавництво «Ранок», 2007. — 208 с.

ISBN 978–966–672–128–3.

Пропонований підручник містить докладний курс лекцій із теоретичної механіки — одного з основних розділів теоретичної фізики. Викладений матеріал спирається на такі загальнонаукові дисципліни, як вища математика та загальна фізика. Відмінність даного курсу від традиційного викладання теоретичної механіки на фізичних і механіко-математичних факультетах полягає у відстеженні прямого зв'язку теоретичної механіки з електродинамікою.

Призначений для студентів, аспірантів і викладачів фізичних і радіофізичних спеціальностей.

УДК 531/534(0.75)
ББК 22.21я73

Навчальне видання

ШУЛЬГА Сергій Миколайович
БАГАЦЬКА Ольга Вячеславівна
БУТРИМ Олександр Юрійович
КОЛЧИГІН Микола Миколайович
ТРЕТЬЯКОВ Олег Олександрович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
(для факультетів радіофізичного профілю)

Редактор *Т. С. Данченко*. Технічний редактор *В. І. Труфен*. Коректор *О. Г. Неро*.
Код Г4984У. Підписано до друку 10.12.2007. Формат 60×90/16. Папір друкарський. Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 13,0.

Наклад 6400 прим. Зам. 3701/08

Надруковано у друкарні «Тріада+» м. Харків, вул. Киргизька, 19.
Тел.: (057) 757-98-16, 757-98-15

ТОВ Видавництво «Ранок». Свідоцтво ДК № 279 від 13.12.2000.
61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.

Для листів: 61045 Харків, а/с 3355. E-mail: office@ranok.kharkov.ua
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67

Сучасний Підручник

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Пропонований підручник містить докладний курс лекцій із теоретичної механіки — одного з основних розділів теоретичної фізики. Викладений матеріал спирається на такі загальнонаукові дисципліни, як вища математика та загальна фізика. Відмінність даного курсу від традиційного викладання теоретичної механіки на фізичних і механіко-математичних факультетах полягає у відстеженні прямого зв'язку теоретичної механіки з електродинамікою.

ISBN 978-966-672-128-3

9 789666 721283 >

ДАВНИЦТВО
АНОК