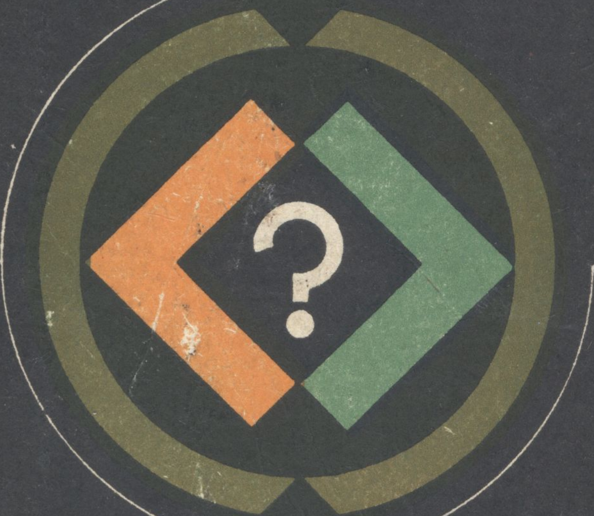
ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

для вступників до втузів

За редакцією
М. І. СКАНАВІ



ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ ВСТУПНИКІВ ДО ВТУЗІВ

За редакцією
М. І. СКАНАВІ

Переклали
з російської

Є. В. Бондарчук
Ю. Ю. Кострица
Л. П. Оніщенко

2-ге видання, стереотипне

КИЇВ
«ВИЩА ШКОЛА»
1994

ББК 22.1я729
З-41
УДК 51(076)

Автори: В. К. Єгерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський, Т. М. Маслова, І. Ф. Орловська, Г. С. Ряховська, Н. М. Федорова

Перекладено за виданням: Сборник задач по математике для поступающих во втузы / Под ред. М. И. Сканави.— Минск: Вышэйш. шк., 1990.— 528 с.

Редакція літератури з математики, фізики, інформатики
Редактор *Л. П. Оніщенко*

З $\dfrac{1602010000-080}{211-94}$ БЗ-29-6-91

ISBN 5-11-004484-8

ПЕРЕДМОВА

При підготовці п'ятого, переробленого і доповненого видання «Сборника задач по математике для поступающих во втузы» (М. : Высш. шк., 1988) автори врахували зміни, що відбулися в орієнтації програм і підручників з математики та критичні зауваження щодо попередніх видань. Зроблено значні зміни у структурі і змісті «Збірника». Повніше викладено теоретичні відомості довідкового характеру, а також наведено приклади розв'язування задач з роз'ясненням застосованих методів (всього понад 100 таких прикладів). Більшість глав «Збірника» доповнено новими задачами. Так, збільшено кількість задач, пов'язаних з логарифмічними і показниковими функціями (гл. 7); частину задач з планіметрії (гл. 10) замінено новими; зроблено істотні зміни у наборі задач з початків математичного аналізу (гл. 15) та задач на застосування координат і векторів (гл. 17). Окремі зміни щодо розміщення і складу задач зроблено і в інших главах. При цьому вся термінологія та символіка, що використовується в «Збірнику», відповідає прийнятій у сучасних шкільних підручниках.

У зв'язку з тим, що число втузів, де віддають перевагу системі перевірки екзаменаційних робіт абітурієнтів із застосуванням електронних пристроїв, поступово збільшується, до «Збірника» включено новий матеріал, що містить 28 орієнтовних варіантів по 10 задач (з відповідями) для ознайомлення з такими екзаменаційними завданнями і перевірки власної підготовленості.

Як і у попередніх виданнях «Збірника», задачі частини I (гл. 1—13) розділено на три групи (А, Б, В) за зростаючою складністю. Зрозуміло, що такий розподіл має умовний характер. Однак автори вважають, що вміння розв'язувати задачі групи А має визначати мінімально необхідний рівень підготовки абітурієнтів до вступних іспитів до втузів. Успішне розв'язування задач із групи Б визначає більш високу якість засвоєння шкільної програми. До групи В належать задачі підвищеної складності. Однак практика розв'язування цих задач корисна для розвитку і закріплення навичок до самостійного логічного мислення, для збагачення математичної культури і може стати у пригоді в школі та на факультативних заняттях. До частини II «Збірника» включено не розподілені на групи за ступенем складності додаткові задачі з алгебри, геометрії, початків математичного аналізу, а також задачі на застосування координат і векторів.

У відповідності до програми середньої школи у «Збірнику» розглядаються лише області дійсних чисел: дійсні корені функцій, рівнянь, систем рівнянь.

Починаючи з третього видання, роботу над «Збірником» здійснював колектив авторів без участі найактивнішого співавтора і наукового редактора його першого і другого видань М. І. Сканаві, який помер у 1972 р. Спеціальне редагування третього і подальших видань здійснював Б. А. Кордемський.

Автори щиро вдячні всім друзям «Збірника» за критичні зауваження і доброзичливі побажання, а особливо Р. Й. Борковському (м. Челябінськ), який надіслав найбільшу кількість зауважень і побажань, що були враховані при підготовці перекладу «Збірника» на українську мову.

Автори

СЛОВО ДО ЧИТАЧІВ

«Збірник» доповнює шкільні підручники і містить понад 5000 задач з відповідями. Цей масив задач охоплює всі розділи програми з математики для середньої школи. Однак, користуючись «Збірником», треба мати на увазі, що деякі задачі, наприклад нерівності, що містять тригонометричні функції, інтеграл і його застосування, не входять до нині діючої програми для вступників до вузів і, отже, не можуть бути пропоновані на вступних іспитах. Разом з тим автори включили їх до «Збірника» поряд з іншими неординарними задачами як додаткові вправи для тих, хто бажає набути навичок використання математичних методів. Розвинення і закріплення таких навичок додасть Вам впевненості на вступних іспитах і при подальшому навчанні у вузі. Порядкові номери деяких неординарних задач, а також задач підвищеної складності за традицією помічено зірочкою.

Задачі з теми «Комбінаторика і біном Ньютона» (гл. 5) також не пропонуються на вступних іспитах до вузів, але їх можна розглядати на факультативних (або гурткових) заняттях в школах. Приступаючи до розв'язування задач з певної глави, спочатку спробуйте розв'язати ті задачі цієї глави, розв'язання яких наведено у «Збірнику». Якщо виникнуть ускладнення, намагайтеся розібратися у викладених розв'язаннях: з'ясуйте теоретичну основу застосованих методів та логіку міркувань.

Не поспішайте розв'язувати задачі тим способом, який першим спаде Вам на думку. Поміркуйте, чи не знайдеться кращий, наприклад менш трудомісткий, підхід до розв'язування? При цьому в процесі розв'язування можна використовувати будь-які формули, теореми, правила алгебри векторів і перетворень до розв'язування геометричних задач, тригонометрії — до розв'язування задач алгебри і геометрії, використовувати метод координат, властивості функцій та похідних, аби здобута Вами відповідь в кінцевому результаті була строго обґрунтована. Іншими словами, на іспиті Вам дозволяється переступати границі між різними розділами математики в усіх напрямках, оскільки Ви звітуєте за повний курс математики.

Нехай, наприклад, Вам запропоновано знайти найбільше можливе значення суми

$$S = 3\cos x + 4\sin x$$

(x — будь-яке дійсне число).

Якщо Ви засвоїли лише методи алгебри, то запропонуєте таке розв'язання:

$$3\cos x + 4\sin x = 3\left(\cos x + \frac{4}{3}\sin x\right);$$

нехай $4/3 = \operatorname{tg}\alpha$, тоді

$$S = 3(\cos x + \operatorname{tg}\alpha \sin x) =$$

$$= \frac{3}{\cos\alpha}(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x) = \frac{3}{\cos\alpha}\cos(\alpha - x).$$

Оскільки найбільше значення $\cos(\alpha - x)$ дорівнює 1 і воно досягається, наприклад, при $x = \alpha = \operatorname{arctg}(4/3)$, то

$$S_{\text{найб}} = \frac{3}{\cos\alpha} = 3\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = 3\sqrt{1 + \frac{16}{9}} = 5.$$

Якщо Ви опанували ще і методи диференціального числення, то виникає таке розв'язання:

$$\text{похідна } S' = (3\cos x + 4\sin x)' = -3\sin x + 4\cos x,$$

$$-3\sin x + 4\cos x = 0,\ \operatorname{tg} x = 4/3,$$

звідки, наприклад, $x = \operatorname{arctg}(4/3)$ — точка максимуму функції (згадайте, як це обгрунтувати!). Тоді

$$S_{\max} = \frac{3}{\sqrt{1 + 16/9}} + \frac{4 \cdot 4/3}{\sqrt{1 + 16/9}} = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5.$$

Неважко показати, що $S_{\max}$ є найбільшим значенням функції S на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції, а отже, і на всій числовій прямій.

Якщо, нарешті, Ви володієте методами векторної алгебри, то виникає ще одне розв'язання: введемо два вектори $\bar{e} = (\cos x;\ \sin x)$ і $\bar{a} = (3;\ 4)$, тоді

$$S = 3\cos x + 4\sin x = \bar{a}\bar{e} = |\bar{a}| \cdot |\bar{e}| \cdot \cos\angle(\bar{a}, e);$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;\quad |\bar{e}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1,\ S = 5\cos\angle(\bar{a}, \bar{e}),$$

звідки $S_{\text{найб}} = 5$, наприклад коли $\angle(\bar{a}, \bar{e}) = 0°$; відповідне значення $x = \operatorname{arctg}(4/3)$.

Нагадаємо, що при розв'язуванні задачі на іспиті Ви маєте повно або стисло сформулювати ті математичні твердження (теореми, аксіоми, властивості), на які Ви спираєтесь в процесі міркувань, виписувати використовувані формули або, в окремих випадках, хоча б вказувати їхні загальноприйняті назви (наприклад: «за формулою синуса подвійного аргументу», «за теоремою Вієта», «за теоремою про три перпендикуляри» тощо). Автори «Збірника» у пропонованих розв'язаннях задач заради стислого викладу робили так не завжди, обмежуючись посиланнями на подвійний номер відповідної формули (перша цифра означає номер глави, а друга — номер формули у цій главі).

При самостійному розв'язуванні задачі розбіжність між здобутою Вами відповіддю і відповіддю із «Збірника», як правило, сигналізує про помилку в процесі міркувань або обчисленнях. Але може трапитись і так, що помилка вкралася до відповідей «Збірника» і своєчасно не виявлена авторами. У такому разі у Вас є шанс (а у деяких випадках і обов'язок) виконати аналіз і перевірку здобутих Вами результатів, виходячи із умови задачі. Не слід нехтувати цією можливістю! Обгрунтоване переконання в тому, що Ви правильно розв'язали задачу, придаватиме Вам снаги і надихатиме на розв'язування більш складних задач. Нехай Вам щастить!

Частина I

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ

Глава 1

АРИФМЕТИЧНІ ДІЇ

Приклад. Обчислити

$$\left(\frac{928\cdot 10^{-2}}{0{,}8}-0{,}6\right)\left(\frac{\left(42\cdot 3\frac{5}{6}+3{,}3:0{,}03\right):\frac{1}{15}}{\left(3\frac{3}{4}:0{,}625-0{,}84:0{,}8\right):0{,}03}\right)^{-1}.$$

△ Позначимо вираз у перших дужках через A, а в других — через B. Послідовно знаходимо:

$$A=\frac{928}{80}-0{,}6=11{,}6-0{,}6=11;$$

чисельник дробу B: 1) $42\cdot 3\frac{5}{6}=42\cdot 3+\frac{42\cdot 5}{6}=161$; 2) $3{,}3:0{,}03=110$; 3) $(161+110)\cdot 15=271\cdot 15$;

знаменник дробу B: 1) $\frac{15}{4}:\frac{5}{8}=6$; 2) $\frac{84}{80}=\frac{21}{20}$; 3) $\left(6-\frac{21}{20}\right)\cdot\frac{100}{3}=200-35=165$;

$$B=271\cdot\frac{15}{165}=\frac{271}{11}.$$

Остаточно дістаємо $A:B^{-1}=A\cdot B=11\cdot\frac{271}{11}=271$. ▲

У задачах цієї глави треба виконати вказані дії, не користуючись мікрокалькулятором, не роблячи заокруглень і наближених обчислень, оскільки припускається, що задані числа є точними.

Обчислити (1.001—1.040):

1.001. $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}$.

1.002. $\left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1{,}25+\frac{7}{40}\right):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\frac{19}{25}$.

1.003. $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$.

1.004. $\left(\dfrac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{70}}+0{,}125\right):2\frac{1}{2}+0{,}43.$

1.005. $\dfrac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\dfrac{5}{7}-\dfrac{\left(2\frac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\frac{1}{2}}.$

1.006. $\dfrac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}.$

1.007. $\dfrac{\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}\right)\cdot 2{,}52}{\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}}.$

1.008. $\left(\dfrac{3\frac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4{,}6-2\frac{1}{3}}{4{,}6+2\frac{1}{3}}\cdot 5{,}2\right):\left(\dfrac{0{,}05}{\frac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right).$

1.009. $\dfrac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}\cdot 90.$

1.010. $\dfrac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\frac{9}{13}}\cdot 34\frac{2}{7}+\dfrac{0{,}3:0{,}01}{70}+\dfrac{2}{7}.$

1.011. $\dfrac{\left(\frac{3}{5}+0{,}425-0{,}005\right):0{,}1}{30{,}5+\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}}+\dfrac{6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}}{26:3\frac{5}{7}}-0{,}05.$

1.012. $\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}:\dfrac{3{,}5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0{,}5\left(1\frac{1}{20}+4{,}1\right)}.$

1.013. $\dfrac{\left(1\dfrac{1}{5}:\left(\dfrac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{\dfrac{5}{6}+1\dfrac{1}{3}-1\dfrac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\dfrac{1}{2}}{33:4\dfrac{5}{7}}:0{,}25.$

1.014. $\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1\dfrac{2}{3}-6{,}75\right)\cdot\dfrac{2}{3}}{\left(3\dfrac{1}{3}\cdot 0{,}3+5\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{8}\right):2\dfrac{2}{3}}+\dfrac{1\dfrac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}3-0{,}96}{\left(0{,}2-\dfrac{3}{40}\right)\cdot 1{,}6}.$

1.015. $\dfrac{\left(1{,}88+2\dfrac{3}{25}\right)\cdot\dfrac{3}{16}}{0{,}625-\dfrac{13}{18}:\dfrac{26}{9}}+\dfrac{\left(\dfrac{0{,}216}{0{,}15}+0{,}56\right):0{,}5}{\left(7{,}7:24\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{15}\right)\cdot 4{,}5}.$

1.016. $\left(16\dfrac{1}{2}-13\dfrac{7}{9}\right)\cdot\dfrac{18}{33}+2{,}2\left(\dfrac{8}{33}-\dfrac{1}{11}\right)+\dfrac{2}{11}.$

1.017. $\dfrac{0{,}128:3{,}2+0{,}86}{\dfrac{5}{6}\cdot 1{,}2+0{,}8}\cdot\dfrac{\left(1\dfrac{32}{63}-\dfrac{13}{21}\right)\cdot 3{,}6}{0{,}505\cdot\dfrac{2}{5}-0{,}002}.$

1.018. $\dfrac{3\dfrac{1}{3}:10+0{,}175:0{,}35}{1{,}75-1\dfrac{11}{17}\cdot\dfrac{51}{56}}-\dfrac{\left(\dfrac{11}{18}-\dfrac{1}{15}\right):1{,}4}{\left(0{,}5-\dfrac{1}{9}\right)\cdot 3}.$

1.019. $\dfrac{0{,}125:0{,}25+1\dfrac{9}{16}:2{,}5}{(10-22:2{,}3)\cdot 0{,}46+1{,}6}+\left(\dfrac{17}{20}+1{,}9\right)\cdot 0{,}5.$

1.020. $\left(\left(1\dfrac{1}{7}-\dfrac{23}{49}\right):\dfrac{22}{147}-\left(0{,}6:3\dfrac{3}{4}\right)\cdot 2\dfrac{1}{2}+\right.$

$$\left.+3{,}75:1\dfrac{1}{2}\right):2{,}2.$$

1.021. $\left(2:3\dfrac{1}{5}+\left(3\dfrac{1}{4}:13\right):\dfrac{2}{3}+\left(2\dfrac{5}{18}-\dfrac{17}{36}\right)\cdot\dfrac{18}{65}\right)\cdot\dfrac{1}{3}.$

1.022. $\dfrac{0{,}5+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+0{,}125}{\dfrac{1}{3}+0{,}4+\dfrac{14}{15}}+\dfrac{(3{,}75-0{,}625)\cdot\dfrac{48}{125}}{12{,}8\cdot 0{,}25}.$

1.023. $\left(26\dfrac{2}{3}:6{,}4\right)\left(19{,}2:3\dfrac{5}{9}\right)-\dfrac{8\dfrac{4}{7}:2\dfrac{26}{77}}{0{,}5:18\dfrac{2}{3}\cdot 11}-\dfrac{1}{18}.$

1.024. $\dfrac{0,725+0,6+\dfrac{7}{40}+\dfrac{11}{20}}{0,128\cdot 6\dfrac{1}{4}-0,0345:\dfrac{3}{25}}\cdot 0,25.$

1.025. $\left((520\cdot 0,43):0,26-217+2\dfrac{3}{7}\right)-$

$-\left(31,5:12\dfrac{3}{5}+114\cdot 2\dfrac{1}{3}+61\dfrac{1}{2}\right).$

1.026. $\dfrac{(3,4-1,275)\cdot\dfrac{16}{17}}{\dfrac{5}{18}\cdot\left(1\dfrac{7}{85}+6\dfrac{2}{17}\right)}+0,5\left(2+\dfrac{12,5}{5,75+\dfrac{1}{2}}\right).$

1.027. $\left(\dfrac{3,75+2\dfrac{1}{2}}{2\dfrac{1}{2}-1,875}-\dfrac{2\dfrac{3}{4}+1,5}{2,75-1\dfrac{1}{2}}\right)\cdot\dfrac{10}{11}.$

1.028. $((21,85:43,7+8,5:3,4):4,5):1\dfrac{2}{5}+1\dfrac{11}{21}.$

1.029. $\left(1\dfrac{2}{5}+3,5:1\dfrac{1}{4}\right):2\dfrac{2}{5}+3,4:2\dfrac{1}{8}-0,35.$

1.030. $\dfrac{\left(0,3275-\left(2\dfrac{15}{88}+\dfrac{4}{33}\right):12\dfrac{2}{9}\right):0,07}{(13-0,416):6,05+1,92}.$

1.031. $\dfrac{\dfrac{5}{6}-\dfrac{21}{45}}{1\dfrac{5}{6}}\cdot\dfrac{1,125+1\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{12}}{0,59}.$

1.032. $\dfrac{\left(3^{-1}-\sqrt{1\dfrac{7}{9}}\right)^{-2}:0,25}{\dfrac{37}{300}:0,0925}+12,5\cdot 0,64.$

1.033. $\dfrac{\left(\dfrac{5}{8}+2\dfrac{17}{24}\right):2,5}{\left(1,3+\dfrac{23}{30}+\dfrac{4}{11}\right)\cdot\dfrac{110}{401}}\cdot 0,5.$

1.034. $\dfrac{((7-6,35):6,5+9,9)\cdot\dfrac{1}{12,8}}{\left(1,2:36+1\dfrac{1}{5}:0,25-1\dfrac{5}{6}\right)\cdot 1\dfrac{1}{4}}:0,125.$

1.035. $$\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0{,}5.$$

1.036. $$\frac{3{,}75:1\frac{1}{2}+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}.$$

1.037. $$\frac{\left(\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}.$$

1.038. $$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}.$$

1.039. $$\left(\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+$$
$$+1{,}364:0{,}124.$$

1.040. $$5\frac{4}{7}:\left(8{,}4\cdot\frac{6}{7}\left(6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right)-20{,}384:1{,}3\right).$$

Знайти X із пропорції (**1.041—1.045**):

1.041. $$\frac{\left(4-3{,}5\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{X}=\frac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}.$$

1.042. $$\frac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}=\frac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{X}.$$

1.043. $$\frac{0{,}125X}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\frac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}.$$

1.044. $$\frac{X}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\frac{9\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}.$$

1.045. $$\frac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7}{X}=\frac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\left(5\frac{1}{2}-3{,}25\right)}.$$

Обчислити найбільш раціональним способом (1.046 —1.048):

1.046. $$\frac{\sqrt{6{,}3\cdot 1{,}7}\cdot\left(\sqrt{\frac{6{,}3}{1{,}7}}-\sqrt{\frac{1{,}7}{6{,}3}}\right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2-4\cdot 6{,}3\cdot 1{,}7}}.$$

1.047. $$\left(\frac{\sqrt{561^2-459^2}}{4\frac{2}{7}\cdot 0{,}15+4\frac{2}{7}:\frac{20}{3}}+4\sqrt{10}\right):\frac{1}{3}\sqrt{40}.$$

1.048. $$\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2.$$

Обчислити:

1.049. $$\frac{2^{-2}+5^0}{(0{,}5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4{,}75.$$

1.050. $$\frac{(0{,}6)^0-(0{,}1)^{-1}}{(3:2^3)^{-1}\cdot(1{,}5)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}.$$

Глава 2

ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ВИРАЗІВ

Основні формули

Властивості степенів

Для будь-яких x, y і додатних a і b справедливі рівності:

$$a^0=1; \quad (2.1) \qquad a^x\cdot a^y=a^{x+y}; \quad (2.2)$$

$$a^x:a^y=a^{x-y}; \quad (2.3) \qquad (a^x)^y=a^{xy}; \quad (2.4)$$

$$(ab)^x=a^xb^x; \quad (2.5) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}; \quad (2.6) \qquad a^{-x}=\frac{1}{a^x}. \quad (2.7)$$

Многочлени

Для будь-яких a, b і c справедливі рівності:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b); \quad (2.8)$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2; \quad (2.9)$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2; \quad (2.10)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
або
$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b); \quad (2.11)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
або
$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b); \quad (2.12)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \quad (2.13)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \quad (2.14)$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (2.15)$$
де x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Властивості арифметичних коренів

Для будь-яких натуральних n і k, більших 1, і будь-яких невід'ємних a і b справедливі рівності:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad (2.16) \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \quad (2.17)$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \quad (2.18) \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \quad (2.19)$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad (2.20) \qquad (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a \geqslant 0); \quad (2.21)$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ якщо } 0 \leqslant a < b; \quad (2.22) \qquad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geqslant 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad (2.24) \qquad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geqslant 0). \quad (2.25)$$

Приклад 1. Спростити вираз

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + \sqrt{3x} + 1} + 2\left(\sqrt[6]{27x^3} - \frac{1}{2}\right).$$

△ Позначимо дріб через A, а вираз у дужках — через B; тоді заданий вираз набуває вигляду $A + 2B$. Зазначимо, що для $\sqrt{3x}$ і $\sqrt[6]{27x^3}$ допустимими є тільки значення $x \geqslant 0$, при яких знаменник дробу A не дорівнює нулю. Тому і для заданого виразу допустимими є тільки значення $x \geqslant 0$.

Використовуючи формулу (2.9), виділимо в чисельнику дробу A повний квадрат:

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 3x = (x^2 + 1)^2 - 3x.$$

Оскільки $x \geqslant 0$, то, згідно з рівністю (2.21), маємо $3x = (\sqrt{3x})^2$. Тоді знайдений вираз за допомогою формули (2.8) можна розкласти на множники як різницю квадратів:

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3x})^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{3x})(x^2 + 1 + \sqrt{3x}).$$

Отже,

$$A = \frac{(x^2 - \sqrt{3x} + 1)(x^2 + \sqrt{3x} + 1)}{x^2 + \sqrt{3x} + 1} = x^2 - \sqrt{3x} + 1.$$

Далі, за формулою (2.20) маємо $\sqrt[6]{27x^3}=\sqrt[6]{(3x)^3}=\sqrt{3x}$, звідки $B=\sqrt{3x}-\frac{1}{2}$. Таким чином, $A+2B=x^2-\sqrt{3x}+1+2\sqrt{3x}-1=x^2+\sqrt{3x}$. ▲

Приклад 2. Спростити вираз

$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b},\quad 0<a<2b.$$

△ Маємо $\sqrt{a^2-4ab+4b^2}=\sqrt{(a-2b)^2}=|a-2b|=2b-a$, $\sqrt{a^2+4ab+4b^2}=|a+2b|=a+2b$; тут використано формули (2.9), (2.10) і (2.23). Отже, $\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}=\frac{2b-a}{2b+a}$. Тепер знаходимо

$$\frac{2b-a}{2b+a}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=$$

$$=\frac{(2b-a)(a-2b)-8ab+2b(a+2b)}{a^2-4b^2}=\frac{a}{2b-a}.\ ▲$$

Приклад 3. Спростити вираз

$$f(x)=\frac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}},\quad x>1.$$

△ Використовуючи формулу (2.15), розкладемо на множники тричлени в чисельнику і знаменнику дробу:

$$f(x)=\frac{(x+5)(x-1)+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{(x-5)(x+1)+(x+5)\sqrt{x^2-1}}.$$

Оскільки $x>1$, то, згідно із співвідношенням (2.21), маємо $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$ і $x+1=\sqrt{(x+1)^2}$. Отже,

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}\,((x+5)\sqrt{x-1}+(x-5)\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}\,((x-5)\sqrt{x+1}+(x+5)\sqrt{x-1})},$$

звідки після скорочення дістанемо $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. ▲

Приклад 4. Не вдаючись до наближених обчислень, спростити числовий вираз

$$A=(4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}-\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}})\cdot\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}.$$

△ Використовуючи формули (2.16), (2.8), (2.20) і (2.10), знаходимо:

1) $4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2\sqrt{3}-1}{11}}=4\sqrt[3]{\dfrac{12-1}{11}}=4;$

2) $\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{\left(\dfrac{2\sqrt{3}-1}{11}\right)^2}=$

$$=\sqrt[6]{(13+4\sqrt{3})\,\frac{12-4\sqrt{3}+1}{11^2}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{(13+4\sqrt{3})\,(13-4\sqrt{3})}{11^2}}=\sqrt[6]{\frac{169-48}{121}}=1.$$

Остаточно дістаємо $A=4-1=3$. ▲

Приклад 5. Перевірити справедливість рівності

$$\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=4.$$

△ Покладемо $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=x$. Піднесемо до куба обидві частини цієї рівності. Використовуючи формулу (2.11), дістаємо

$$38+\sqrt{1445}+38-\sqrt{1445}+3\sqrt[3]{(38+\sqrt{1445})\,(38-\sqrt{1445})}\,x=x^3,$$

або $x^3+3x-76=0$. За допомогою підстановки $x=4$ впевнюємося в тому, що $x=4$ є одним з коренів кубічного рівняння: $64+ +12-76=0$.

Перетворимо кубічне рівняння до вигляду $x^3-64=3\,(4-x)$; $(x-4)\,(x^2+4x+16)+3\,(x-4)=0$, $(x-4)\,(x^2+4x+19)=0$. Але співмножник $x^2+4x+19$ не має дійсних коренів. Отже, 4 — єдино можливе дійсне значення для x, що і доводить задану рівність (оскільки очевидно, що $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}$ — дійсне число). ▲

Приклад 6. Перевірити справедливість рівності

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2.$$

△ Розглянемо рівність

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Очевидно, що коли вона виконується, то виконується і задана рівність. Нехай $a=\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}$, $b=2+\sqrt{3}$. Неважко впевнитися, що $a>0$ і $b>0$. Якщо при цьому виконується рівність $a^2=b^2$, то $a=b$. Знаходимо

$$a^2=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})^2}=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{19-8\sqrt{3}}=$$

$$=7+4\sqrt{3},\ b^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}.$$

Оскільки $a^2=b^2$, то $a=b$, тобто задана рівність справедлива.

Цей приклад можна розв'язати швидше, якщо здогадатися, що обидва підкореневі вирази в умові є квадратами додатних чисел, а саме: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ і $19-8\sqrt{3}=(4-\sqrt{3})^2$. Тоді лівою частиною заданої рівності є

$$\frac{(2+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3},\ \text{і}\ 2=2.\ \blacktriangle$$

Приклад 7. Чому дорівнює сума виразів $\sqrt{24-t^2}$ і $\sqrt{8-t^2}$, якщо відомо, що їхня різниця дорівнює 2 (значення змінної t знаходити не потрібно)?

$\triangle$ Згідно з умовою, $\sqrt{24-t^2}-\sqrt{8-t^2}=2$. Використовуючи формулу $a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$, дістаємо $\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=$ $=\dfrac{24-8}{2}=8$. $\blacktriangle$

Група А

Спростити вирази і обчислити їх, якщо задано числові значення параметрів (2.001—2.124):

2.001. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

2.002. $\left((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}\right):\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$.

2.003. $\dfrac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}}:\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\right.$
$\left.+\sqrt{\dfrac{b}{a}}-2\right);\quad a>b>0.$

2.004. $\left(\dfrac{(a+b)^{-n/4}\cdot c^{1/2}}{a^{2-n}b^{-3/4}}\right)^{4/3}:\left(\dfrac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{1/6};\quad b=0{,}04.$

2.005. $\dfrac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\dfrac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$.

2.006. $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+3\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}$.

2.007. $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}$.

2.008. $\left(\left(\dfrac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)\cdot 3^{-2}\right)^5$.

$$2.009.\quad \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}.$$

$$2.010.\quad t\cdot\frac{1+\frac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\frac{4}{\sqrt{t+4}}.$$

$$2.011.\quad \left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2.$$

$$2.012.\quad \frac{x-1}{x+x^{1/2}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}.$$

$$2.013.\quad \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right).$$

$$2.014.\quad \frac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\frac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\cdot\frac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}.$$

$$2.015.\quad \sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}}:\sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}.$$

$$2.016.\quad \left(\frac{(z^{2/p}+z^{2/q})^2-4z^{2/p+2/q}}{(z^{1/p}-z^{1/q})^2+4z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}.$$

$$2.017.\quad \frac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\frac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1.$$

$$2.018.\quad \left(\frac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\frac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}(5-2x^2);\quad x=\sqrt{3,92}.$$

$$2.019.\quad \frac{(x^2-y^2)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2});\quad x=64.$$

$$2.020.\quad \sqrt{\frac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4+8/a+4/a^2}{\sqrt{2}}}.$$

$$2.021.\quad \frac{4x(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^4-1}.\qquad 2.022.\quad \frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-2/\sqrt{x}}.$$

$$2.023.\quad \sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}.$$

$$2.024.\quad \sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}.$$

2.025. $\dfrac{a^3-a-2b-b^2/a}{\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)(a+\sqrt{a+b})}:$

$:\left(\dfrac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a-b}\right);\quad a=23,\ b=22.$

2.026. $\dfrac{(\sqrt[5]{a^{4/3}})^{3/2}}{(\sqrt[5]{a^4})^3}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{(\sqrt[4]{a\sqrt{b}})^6}.$

2.027. $\dfrac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$

2.028. $\dfrac{x(x^2-a^2)^{-1/2}+1}{a(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\dfrac{a^2\sqrt{x+a}}{x-(x^2-a^2)^{1/2}}+\dfrac{1}{x^2-ax}.$

2.029. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{(r^2+4)\sqrt{1+\dfrac{4}{r^2}}}-\sqrt[3]{(r^2-4)\sqrt{1-\dfrac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}.$

2.030. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{a}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}+2}-\dfrac{a^2\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}.$

2.031. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)(a-\sqrt{a^3})^{-1}.$

2.032. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{abc+4}{a}+4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}+2};\quad a=0{,}04.$

2.033. $\dfrac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}.$

2.034. $1-\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\dfrac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}.$

2.035. $\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{2a}}-\dfrac{a}{\sqrt{2a}+2}+\dfrac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}.$

2.036. $\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+m\sqrt{\dfrac{3n}{m}}+\sqrt{3np}\right)\times$

$\times\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-p\sqrt{\dfrac{3n}{p}}\right).$

2.037. $\dfrac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\dfrac{2}{x^{3/2}}+\dfrac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}$.

2.038. $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$.

2.039. $\dfrac{9b^{4/3}-\dfrac{a^{3/2}}{b^2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2}+6a^{3/4}b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\cdot\dfrac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}}$; $\quad b=4$.

2.040. $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{abc}$;

$a=0{,}02,\ b=-11{,}05,\ c=1{,}07$.

2.041. $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\dfrac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\dfrac{a^2+2}{1-a^3}$.

2.042. $\dfrac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\left(\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{1/2}$;

$a=0{,}32,\ x=0{,}08$.

2.043. $\dfrac{\left(m^2-\dfrac{1}{n^2}\right)^m\left(n+\dfrac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\dfrac{1}{m^2}\right)^n\left(m-\dfrac{1}{n}\right)^{m-n}}$.

2.044. $\left(\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}$;

$x>a>0$.

2.045. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^{-1/2}$.

2.046. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\cdot\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$.

2.047. $\dfrac{\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)}\cdot(b^2+b+ab+a)$.

2.048. $\dfrac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\dfrac{4p^2-3pq}{2+pq^2}$; $\quad p=0{,}78,\ q=7/25$.

2.049. $\left(\dfrac{pq^3}{(p+q)^{5/2}}-\dfrac{2pq^2}{(p+q)^{3/2}}+\dfrac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\left(\dfrac{p^2}{(p+q)^{5/2}}-\right.$

$\left.-\dfrac{p^2q}{(p+q)^{7/2}}\right)$.

2.050. $\dfrac{2(x^4+4x^2-12)+x^4+11x^2+30}{x^2+6}$.

2.051. $\dfrac{(a^2-b^2)(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b})}{a\sqrt[3]{b}+a\sqrt{a}-b\sqrt[3]{b}-\sqrt{ab^2}}:$

$:\dfrac{a^3-b}{a\sqrt[3]{b}-\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt{a}}$; $a=4{,}91$, $b=0{,}09$.

2.052. $\left((1-x^2)^{-1/2}+1+\dfrac{1}{(1-x^2)^{-1/2}-1}\right)^{-2}:$

$:(2-x^2-2\sqrt{1-x^2})$.

2.053. $((1-p^2)^{-1/2}-(1+p^2)^{-1/2})^2+2(1-p^4)^{-1/2}$.

2.054. $\dfrac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\dfrac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$.

2.055. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}+\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}-2\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-y}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+y}}\right)$.

2.056. $\left(\dfrac{4}{a+\dfrac{1}{b+1/c}}:\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}-\dfrac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}$.

2.057. $\left(\left(\dfrac{x}{y-x}\right)^{-2}-\dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\cdot\dfrac{x^4}{x^2y^2-y^4}$.

2.058. $\left(\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$;

$a=1\dfrac{33}{40}$, $b=0{,}625$, $c=3{,}2$.

2.059. $\left(\left(\dfrac{x^2}{y^3}+\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)\right):\dfrac{(x-y)^2+4xy}{1+y/x}$.

2.060. $\left(\dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-5y}\right):\dfrac{y^2}{4x^2-y^2}$.

2.061. $\left(x^2+2x-\dfrac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\dfrac{2x^2+x+2}{3x+1}\right)$; $x=7{,}(3)$.

2.062. $\left(6a^2+5a-1+\dfrac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\dfrac{3}{a+1}\right)$.

2.063. $\dfrac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\dfrac{x^2}{4-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$.

2.064. $\dfrac{2b+a-\dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\dfrac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}.$

2.065. $\dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}).$

2.066. $\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}.$

2.067. $\dfrac{a^{1/2}+ab^{-1}}{a^{-1/3}-a^{-1/6}b^{-1/3}+b^{-2/3}}-\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}}.$

2.068. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{4c^2}{a^2b^2}};\quad a=7{,}4,\ b=\dfrac{5}{37}.$

2.069. $\dfrac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b}:a^{1/3}.$

2.070. $\dfrac{(a^2-b^2)(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}.$

2.071. $\dfrac{(m-1)\sqrt{m}-(n-1)\sqrt{n}}{\sqrt{m^3n}+mn+m^2-m}.$

2.072. $\dfrac{\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}.$

2.073. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}.$

2.074. $\dfrac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2+4a^{(m+n)/(mn)}}{(a^{2/m}-a^{2/n})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}.$

2.075. $\dfrac{(x^{2/m}-9x^{2/n})(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{1/m}+3x^{1/n})^2-12x^{(m+n)/(mn)}}.$

2.076. $\dfrac{3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-4\sqrt{3}}+5\sqrt{2{,}4}\cdot(\sqrt{15}+3).$

2.077. $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1};$

$a=1-\sqrt{2},\ b=1+\sqrt{2}.$

2.078. $\left(\frac{1}{t^2+3t+2}+\frac{2t}{t^2+4t+3}+\frac{1}{t^2+5t+6}\right)^2 \times$
$$\times \frac{(t-3)^2+12t}{2}.$$

2.079. $\left(\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}+\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}\right)^2 \times$
$$\times \sqrt[4]{\frac{m^2}{4}}.$$

2.080. $\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab} : \frac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)}.$

2.081. $\left(\frac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\frac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}-\frac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2} : \sqrt[4]{t^2-4}.$

2.082. $\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\frac{1}{b+1/c}} : \frac{1}{a+\frac{1}{b}}.$

2.083. $\left(2-x+4x^2+\frac{5x^2-6x+3}{x-1}\right) : \left(2x+1+\frac{2x}{x-1}\right).$

2.084. $\left(\frac{2-b}{b-1}+2\cdot\frac{a-1}{a-2}\right) : \left(b\cdot\frac{a-1}{b-1}+a\cdot\frac{2-b}{a-2}\right);$
$$a=\sqrt{2}+0{,}8,\ b=\sqrt{2}-0{,}2.$$

2.085. $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$

2.086. $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right) : \frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}.$

2.087. $\frac{\sqrt{3}(a-b^2)+\sqrt{3}b\sqrt[3]{8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}.$

2.088. $(\sqrt{1-x^2}+1) : \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right).$

2.089. $\frac{8-n}{2+\sqrt[3]{n}} : \left(2+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\frac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\times$
$$\times\frac{4-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{n}}.$$

2.090. $\frac{(a-b)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b}.$

2.091. $\frac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{1/2}+x^{1/3}y^{1/6}}\cdot\frac{(x^{1/3}+y^{1/3})^2-4\sqrt[3]{xy}}{x^{5/6}y^{1/3}-x^{1/2}y^{2/3}}+2x^{-2/3}y^{-1/6}.$

2.092. $\left(x\sqrt[3]{\frac{x-1}{(x+1)^2}}+\frac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)^{-3/5}:(x^2-1)^{4/5}.$

2.093. $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}+2\right).$

2.094. $\frac{m^{4/3}-27m^{1/3}n}{m^{2/3}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{2/3}}:\left(1-3\sqrt[3]{\frac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}.$

2.095. $z^{\frac{p-3}{p^2+3p}}:z^{\frac{12}{9-p^2}}\,z^{\frac{3}{3p-p^2}}.$

2.096. $\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right).$

2.097. $\frac{(\sqrt{x}+2)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)-(\sqrt{x}-2)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)-\frac{8}{\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x+2}):\left(\sqrt{\frac{2}{x}+1}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}.$

2.098. $\frac{1-\sqrt{2t}}{\frac{1-\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}+\sqrt[4]{4t^2}}{1+\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}}-\sqrt{2t}\right)^{-1}.$

2.099. $\frac{(x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{2/3})}{(\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right).$

2.100. $\frac{(z-z\sqrt{z}+2-2\sqrt{z})^2(1+\sqrt{z})^2}{z-2+\frac{1}{z}}-z\sqrt{z}\cdot\sqrt{\frac{4}{z}+4+z}.$

2.101. $\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{a}\right)^{-1}.$

2.102. $\left(\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\cdot\frac{1+a(a-2)}{a^2-a+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{(a+1)^2}}.$

2.103. $(\sqrt{ab}-ab(a+\sqrt{ab})^{-1}):(2((ab)^{1/2}-b)(a-b)^{-1}).$

2.104. $\left(\frac{a}{b}\sqrt[3]{b-\frac{4a^6}{b^3}}-a^2\sqrt[3]{\frac{b}{a^6}-\frac{4}{b^3}}+\right.$

$\left.+\frac{2}{ab}\sqrt[3]{a^3b^4-4a^9}\right):\frac{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}{b^2}.$

2.105. $\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\frac{x^2-1}{2}+\sqrt{1-x^2}.$

2.106. $\dfrac{4a^2-b^2}{a^6-8b^6}\cdot\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\dfrac{a^4+2a^2b^2+4b^4}{4a^2+4ab+b^2}\times$
$$\times\sqrt{a^2+2b\sqrt{a^2-b^2}};\quad a=4/3,\ b=0{,}25.$$

2.107. $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\dfrac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right);\quad x=\dfrac{1}{a-1}.$

2.108. $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)\left(\dfrac{a+b}{2a}-\dfrac{b}{a+b}\right):$
$$:\left(\left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\right);\quad a=0{,}75,\ b=4/3.$$

2.109. $\left(-4a\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{ax}}{a^2}}\right)^3+\left(-10a\sqrt{x}\cdot\sqrt{(ax)^{-1}}\right)^2+$
$$+\left(-2\left(\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}}\right)^2\right)^3;\quad a=3\frac{4}{7},\ x=0{,}28.$$

2.110. $\dfrac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{c-d}{c+d}}+\sqrt{\dfrac{c^2+cd}{c^2-cd}}\right);\ c=2,\ d=1/4.$

2.111. $\dfrac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)\,(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}.$

2.112. $\left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}-t^3}+\sqrt[3]{\dfrac{t^5+2t^4+4t^3}{4-4t+t^2}}\right):$
$$:\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{2}}\right).$$

2.113. $\dfrac{x^{3/p}-x^{3/q}}{(x^{1/p}+x^{1/q})^2-2x^{1/q}\,(x^{1/q}+x^{1/p})}+\dfrac{x^{1/p}}{x^{(q-p)/pq}+1}.$

2.114. $\left(\dfrac{9-4a^{-2}}{3a^{-1/2}+2a^{-3/2}}-\dfrac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-1/2}+3a^{-3/2}}\right)^4.$

2.115. $4ab+\dfrac{\left(1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3}\right)\cdot a^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}-$
$$-\frac{\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}+\left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}}.$$

2.116. $\left(\left(\sqrt{mn}-\dfrac{mn}{m+\sqrt{mn}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}{m-n}-m\sqrt{n}\right)^{2}:$

$$:\sqrt[3]{mn\sqrt{mn}}-\left(\frac{m}{\sqrt{m^4-1}}\right)^{-2}.$$

2.117. $\left((a^{1/2}-b^{1/2})^{-1}(a^{3/2}-b^{3/2})-\dfrac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}}\right):$

$$:\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+(a(1-a^2)^{-1/2})^2}.$$

2.118. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}.$

2.119. $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}.$

2.120. $\dfrac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}.$

2.121. $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}.$

2.122. $5\sqrt{48\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}}+\sqrt{32\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}}-11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}.$

2.123. $2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}.$

2.124. $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}.$

Перевірити справедливість рівностей (2.125—2.134):

2.125. $4:\left(0{,}6\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right)=10\sqrt[4]{1{,}5}:(0{,}25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}).$

2.126. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=2.$

2.127. $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8.$

2.128. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}.$

2.129. $\dfrac{25\sqrt[4]{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{250}+5\sqrt[4]{8}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}+2}=-1.$

$$2.130.\ \frac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}}=\sqrt{2}.$$

$$2.131.\ \left(\frac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2=2\sqrt{61+24\sqrt{5}}.$$

$$2.132.\ \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$

$$2.133.\ \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}.$$

$$2.134.\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}.$$

Зробити вказану підстановку і результат спростити (2.135—2.145):

$$2.135.\ \frac{x^3-a^{-2/3}b^{-1}(a^2+b^2)x+b^{1/2}}{b^{3/2}x^2};\quad x=a^{2/3}b^{-1/2}.$$

$$2.136.\ \frac{1-b}{\sqrt{b}}\cdot x^2-2x+\sqrt{b};\quad x=\frac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}.$$

$$2.137.\ \left(\frac{x+2b}{x-2b}+\frac{x+2a}{x-2a}\right):\frac{x}{2};\quad x=\frac{4ab}{a+b}.$$

$$2.138.\ (x+1)(x+2)(x+3)(x+4);\quad x=\frac{\sqrt{7}-5}{2}.$$

$$2.139.\ \frac{(z-1)(z+2)(z-3)(z+4)}{23};\quad z=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$$2.140.\ \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)};\quad x=\frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

$$2.141.\ \frac{(1-y)(y+2)}{y^2(y+1)^2};\quad y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$$2.142.\ \frac{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}};\quad x=\sqrt{6}.$$

$$2.143.\ \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}};\quad x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right);\quad a>b>0.$$

$$2.144.\ \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}};\quad x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right);\quad a>0,\ b>0.$$

2.145. $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$; $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}$;

$0<b/2<a<b$.

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу (2.146—2.151):

2.146. $\frac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$.

2.147. $\frac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$.

2.148. $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

2.149. $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

2.150. $\frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

2.151. $\frac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$.

2.152. Показати, що коли

$$z=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a},$$

то $z^3+3bz-2a=0$.

2.153. Якщо $\sqrt{8-a}+\sqrt{5+a}=5$, то чому дорівнює $\sqrt{(8-a)(5+a)}$?

2.154. Чому дорівнює сума $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$, коли відомо, що $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$ (величину x знаходити не потрібно)?

2.155. Перетворити вираз $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ так, щоб дістати $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

2.156. Обчислити суму кубів двох чисел, якщо їхня сума і добуток відповідно дорівнюють 11 і 21.

2.157. Обчислити значення виразу:

а) $\frac{z^3}{3}-z$, $z=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

б) x^3+3x, $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

Група Б

Спростити вирази і обчислити їх, якщо задано числові значення параметрів (2.158—2.284):

2.158. $\sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)}:\frac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}$.

2.159. $\left(\left(\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt{a^3}}\right)^{3/2}+\left(\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}\right)^2\right):(a^{1/4}+b^{1/4})$.

2.160. $\frac{(a^2b\sqrt{b}-6a^{5/3}b^{5/4}+12ab\sqrt[3]{a}-8ab^{3/4})^{2/3}}{ab\sqrt[3]{a}-4ab^{3/4}+4a^{2/3}\sqrt{b}}$.

2.161. $\frac{a^3-3a^2+4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}{a^3+3a^2-4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}$; $a>1$, $a\neq\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2.162. $\dfrac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}$.

2.163. $\left(\dfrac{(x+\sqrt[3]{2ax^2})(2a+\sqrt[3]{4a^2x})^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-1/3}\right)^{-6}$.

2.164. $\dfrac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}$; $x>3$.

2.165. $\dfrac{t^2-t-6-(t+3)\sqrt{t^2-4}}{t^2+t-6-(t-3)\sqrt{t^2-4}}$; $t>2$.

2.166. $\dfrac{\dfrac{|b-1|}{b}+b\,|b-1|+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$.

2.167. $\dfrac{m^5+m^4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}$.

2.168. $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\cdot|x-3|$.

2.169. $(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}$.

2.170. $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a\,|a+2|-a^2+4}$.

2.171. $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}$.

2.172. $\left(2-\dfrac{1}{4a^{-1}}-\dfrac{4}{a}\right)\times$

$$\times\left((a-4)\sqrt[3]{(a+4)^{-3}}-\frac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)(a-4)}}\right).$$

2.173. $\dfrac{m\,|m-3|}{(m^2-m-6)\,|m|}$.

2.174. $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{(x^3-4x^2+3x)\,|x-2|}$.

2.175. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}$.

2.176. $\dfrac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}$.

2.177. $\dfrac{2x-x\,|x-1|+x\,|x|+3}{|x|+x^2}$.

2.178. $\dfrac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$.

2.179. $\dfrac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$. 2.180. $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$.

2.181. $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\left(\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2\right)^{1/3}}$.

2.182. $\dfrac{(ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2))((ax+by)^2-4abxy)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$.

2.183. $\dfrac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$. 2.184. $\dfrac{2|a+5|-a+\dfrac{25}{a}}{3a^2+10a-25}$.

2.185. $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{|x|\cdot(x-2)}$.

2.186. $\dfrac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\dfrac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}$.

2.187. $\dfrac{1+2a^{1/4}-a^{1/2}}{1-a+4a^{3/4}-4a^{1/2}}+\dfrac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}$.

2.188. $\dfrac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}\cdot|2x^2-x-1|}$. 2.189. $\dfrac{|r-1|\cdot|r|}{r^2-r+1-|r|}$.

2.190. $\left(\dfrac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\dfrac{(z+4)^2-12}{z^3-8}-\dfrac{1}{z-2}\right):$

$$:\dfrac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}.$$

2.191. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}$.

2.192. $\dfrac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{a}+a}$.

2.193. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{x}(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}$.

2.194. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}$.

2.195. $\dfrac{a^4-a^2-2a-1}{a^3-2a^2+1}:\dfrac{a^4+2a^3-a-2}{1+\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{a^2}}$.

2.196. $\frac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1}-\frac{|x-1|}{x-1}$. 2.197. $\frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$.

2.198. $\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\cdot\sqrt{\frac{b+2}{b-2}}$; $b>2$.

2.199. $\left(\frac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\frac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right):$

$:(\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n})$.

2.200. $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-1/2}\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)$.

2.201. $\sqrt{\frac{p^2-q\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\cdot(p+\sqrt[6]{p^3q^2})^{-1/2}$.

2.202. $\frac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\frac{m-4\sqrt{m-4}}{2}$.

2.203. $\frac{\sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-2}\cdot(2x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}}$.

2.204. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times$

$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

2.205. $\left(\frac{bx+4+\frac{4}{bx}}{2b+(b^2-4)x-2bx^2}+\frac{(4x^2-b^2)\frac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx}\right)\cdot\frac{bx}{2}$.

2.206. $\frac{\sqrt[3]{x^9-x^6y^3}-y^2\sqrt[3]{\frac{8x^6}{y^3}-8x^3}+xy\sqrt[3]{y^3-\frac{y^6}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^8}(x^2-2y^2)+\sqrt[3]{x^2y^{12}}}:$

$:\frac{\sqrt[3]{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x+y}$.

2.207. $\frac{(x^2-3x+2)^{-1/2}-(x^2+3x+2)^{-1/2}}{(x^2-3x+2)^{-1/2}+(x^2+3x+2)^{-1/2}}-1+$

$+\frac{(x^4-5x^2+4)^{1/2}}{3x}$.

2.208. $\dfrac{((\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2-(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2)^2-(16m+4n)}{4m-n}+$

$$+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt{m}}.$$

2.209. $\left(\dfrac{x-9}{x+3x^{1/2}+9}:\dfrac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}.$

2.210. $\dfrac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)}.$

2.211. $(z^2-z+1):\left(\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2+2\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2-3\right)^{1/2}.$

2.212. $(x^4-7x^2+1)^{-2}\left(\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-\right.$

$$\left.-14\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+77\right);\quad x=\frac{\sqrt[4]{125}}{5}.$$

2.213. $\dfrac{\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{(x^2+1)\cdot\frac{1}{x}}.$ 2.214. $\dfrac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}}.$

2.215. $\left((z-3)(z+3)^{-1}-\dfrac{(z+3)^{3/2}}{\sqrt{(z^2-9)(z-3)}}\right)\cdot\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{z}{18}-\frac{1}{2z}}{(z+3)^{-1}}.$

2.216. $\dfrac{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}.$

2.217. $\dfrac{b^{-1/6}\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{(2a^2-b^2-ab)\sqrt[6]{a^9b^4}}:$

$$:\left(\frac{3a^3}{2a^2-ab-b^2}-\frac{ab}{a-b}\right).$$

2.218. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}.$

2.219. $\left(\dfrac{9}{a+8}-\dfrac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4}\right)\cdot\dfrac{a^{4/3}+8a^{1/3}}{1-a^{2/3}}+\dfrac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}.$

2.220. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}$.

2.221. $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3})}{2+\sqrt{1-x^2}}$.

2.222. $\left(\dfrac{2-n}{n-1}+4\cdot\dfrac{m-1}{m-2}\right):\left(n^2\cdot\dfrac{m-1}{n-1}+m^2\cdot\dfrac{2-n}{m-2}\right)$;

$m=\sqrt[4]{400},\ n=\sqrt{5}$.

2.223. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}+\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}-\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}$.

2.224. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}}+|x-2|$.

2.225. $\left(x^2-6x+1+\left(\dfrac{\dfrac{x-3}{1+3x}-\dfrac{x-5}{1+5x}}{1+\dfrac{(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}}\right)^{-1}\right)^{1/2}$.

2.226. $\left(\dfrac{1}{(x+3)^2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{9}\right)+\dfrac{2}{(x+3)^3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)\right)^{-1/2}$.

2.227. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}$.

2.228. $\sqrt{\left(y^2+\dfrac{4}{y^2}\right)^2-8\left(y+\dfrac{2}{y}\right)^2+48}$.

2.229. $\dfrac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\dfrac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}}$; $x=2$.

2.230. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}}$; $x=3$.

2.231. $\dfrac{1+z}{1+\sqrt{1+z}}-\dfrac{1-z}{1-\sqrt{1-z}}$; $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.232. $\dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}$.

2.233. $$\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:$$

$$:\frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}-(1-a^2).$$

2.234. $\frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1}+\frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1};\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2.235. $\frac{(x+1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/2}-(x+1)^{-1/2}};\quad x=\frac{a^2+1}{2a}.$

2.236. $\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}-z};\quad z=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$

2.237. $\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-2\right)^{1/2};\quad x=\frac{a^3+1}{a^3-1}.$

2.238. $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2-\sqrt{2x}}{x^2+x-\sqrt{2x}+2}.$

2.239. $\left(\frac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}\right):\left(\frac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}\right)^{1/2}.$

2.240. $$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}\right)\cdot\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}}.$$

2.241. $$\left(\frac{4-2x+x^2}{4-2x}+\frac{6x^2+8+12x}{4-x^2}-\frac{x^2+2x+4}{2x+4}\right)^{-1/3}\times$$

$$\times(x+2).$$

2.242. $\left(\frac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2}+\frac{(z-1)^2+3}{z^3+8}\right):\frac{z^2-3z+2}{z^3-2z^2-4z+8}.$

2.243. $\left(\frac{x^4+5x^3+15x-9}{x^6+3x^4}+\frac{9}{x^4}\right):\frac{x^3-4x+3x^2-12}{x^5}.$

2.244. $$\frac{a(a-2)-b(b+2)+\sqrt{ab}(b-a+2)}{a+b-\sqrt{ab}}:$$

$$:\left(1+2\cdot\frac{a^2+b^2+ab}{b^3-a^3}\right).$$

2.245. $$\frac{((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2})^{-1}+((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2})^{-1}}{((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2})^{-1}-((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2})^{-1}}.$$

2.246. $$\frac{(x\sqrt[4]{x}-\sqrt{xy}\,(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})-y\sqrt[4]{y})\,(x+y+\sqrt{xy})}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})\,((\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2+\sqrt[4]{xy})}.$$

2.247. $$\frac{ab^{2/3}-\sqrt[3]{b^2}-a+1}{(1-\sqrt[3]{a})\,((\sqrt[3]{a}+1)^2-\sqrt[3]{a})\,(b^{1/3}+1)}+\sqrt[3]{ab}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+b^{-1/3}\right).$$

2.248. $$\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\times\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}.$$

2.249. $$\sqrt[4]{\frac{x}{32}}\cdot\frac{(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{2})^2+(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{2})^2}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{2x}}:\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[8]{2x})\,(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{2x})}{2-\sqrt[4]{2x^3}}.$$

2.250. $$\left(\frac{2(a+1)+2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{2a^2+a}}\right)^{1/2}-(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a})^{-1}\cdot\sqrt{a+2}.$$

2.251. $$\frac{(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y})^2+(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y})^2}{x-\sqrt{xy}}:\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})\,(\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x^3y}-y}.$$

2.252. $$\frac{\sqrt{a^2-b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b+\sqrt{c}}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}{\sqrt{\frac{a^3}{b}-2a+\frac{b}{a}-\frac{c}{ab}}};$$

$a=4{,}8,\quad b=1{,}2.$

2.253. $$(4x-1)\left(\frac{1}{8x}((\sqrt{8x-1}+4x)^{-1}-(\sqrt{8x-1}-4x)^{-1})\right)^{1/2}.$$

2.254. $$\left(\frac{x+2y}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)}-\frac{(x-2y):8y^3}{x^2-2xy+2y^2}\right)+\left(\frac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\frac{1}{4x^2y^2+8y^4}\right);\quad x=\sqrt[4]{6},\quad y=\sqrt[8]{2}.$$

2.255. $$\frac{2(a+(a+1)+(a+2)+\dots+2a)}{a^2+3a+2}+\frac{6(a^{1/2}+b^{1/2})}{(a+b)^{0,6}(a+2)}:((a^{1/2}-b^{1/2})(a-b)^{-2/5})^{-1},\quad a\in\mathbf{N}.$$

2.256. $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{ax}+x+x\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^2}{(x+x^{-1}-2)\cdot a^{-1/4}}-$

$$-\frac{(x\sqrt{a})^{3/2}}{(ax^{-1}+4\sqrt{a}+4x)^{-1/2}}.$$

2.257. $((a-3\sqrt[6]{a^5}+9\sqrt[3]{a^2})(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}+3\sqrt[12]{a^5})^{-1}+$

$$+3\sqrt[12]{a^5})^{-1}.$$

2.258. $\dfrac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[8]{ab})(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab})}{\sqrt[4]{a^3b}-b}:$

$$:\frac{(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b})^2+(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot b^{-1/4}}.$$

2.259. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{8z^3+24z^2+18z}{2z-3}}-\sqrt[3]{\dfrac{8z^3-24z^2+18z}{2z+3}}\right)-$

$$-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2z}{27}-\frac{1}{6z}}\right)^{-1}.$$

2.260. $\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{p^4+q^4}{p^4-p^2q^2}+\dfrac{2q^2}{p^2-q^2}\right)(p^3-pq^2)}-2q\sqrt{p}}{\sqrt{\dfrac{p}{p-q}-\dfrac{q}{p+q}-\dfrac{2pq}{p^2-q^2}}\cdot(p-q)}.$

2.261. $\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{9+18x+9x^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{(1+x)\sqrt[3]{1-x}}{x}}\times$

$$\times\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}}.$$

2.262. $\dfrac{4-\sqrt[3]{a^2}}{(2+\sqrt[3]{ab})^2-(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{b})^2};\quad a=\sqrt[7]{3},\quad b=\sqrt{0{,}008}.$

2.263. $\dfrac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2}{x^2-x\sqrt{2}+2}-x\sqrt{2}.$ 2.264. $\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+x^2-5x+3}.$

2.265. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}}}{\sqrt{\left(1+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2-4\sqrt{\dfrac{b}{a}-\dfrac{\sqrt{b}}{a}}}};\quad a=1{,}21.$

2.266. $\dfrac{\sqrt{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4b+1}{a}}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}})^{-1/2}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}};$

$$a=2{,}25.$$

2.267. $$\frac{\sqrt{x^2y^{-2}-xy^{-1}+\frac{1}{4}}\cdot(xy^{-2}+y^{-3/2})}{2x^2-y^{-3/2}-xy+2xy^{1/2}}.$$

2.268. $$\frac{x+\sqrt{x}-\sqrt[4]{12x}+3+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12x}}-(\sqrt{3}+\sqrt[4]{12x}).$$

2.269. $$\frac{a^{3/2}+a^{3/4}-(\sqrt{a^3+2a^2}+\sqrt[4]{a(a+2)^2})}{\sqrt{2(a+1-\sqrt{a^2+2a})}\cdot(a^2-a^{5/4}+a^{1/2})^{-1}}.$$

2.270. $$\frac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}.$$

2.271. $$\left(\frac{3^{3/2}+\frac{1}{8}z^{3/5}}{3+\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\frac{1}{4}\sqrt[5]{z^2}}+\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}:$$

$$:\frac{1}{2\sqrt{12}+\sqrt[5]{32z}}.$$

2.272. $$\frac{(\sqrt{q^3}:\sqrt{p}+p)^{1/4}:\sqrt[8]{(p-q)^3}}{\left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}+1}\right)^{1/4}}.$$

2.273. $$\frac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}.$$

2.274. $$\frac{8-m}{\sqrt[3]{m}+2}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+2}\right)+\left(\sqrt[3]{m}+\frac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-2}\right)\times$$

$$\times\frac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}}.$$

2.275. $$x\sqrt[3]{2x\sqrt{xy}-x\sqrt{3xy}}\cdot\sqrt[6]{x^3y(7+4\sqrt{3})}.$$

2.276. $$\left(\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{1/2}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{a-1}\,(\sqrt{a}+1)^{-1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}.$$

2.277. $$\left(\frac{a+a^{3/4}b^{1/2}+a^{1/4}b^{3/2}+b^2}{a^{1/2}+2a^{1/4}b^{1/2}+b}\cdot(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})+\right.$$

$$\left.+\frac{3\sqrt{b}\,(a^{1/2}-b)}{a^{-1/4}(a^{1/4}-\sqrt{b})}\right)^{-1/3}:(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})^{-1}.$$

2.278. $\left(\sqrt{\frac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3n^2}{4-8n+4n^2}}\right)^{-1}:$

$$:\sqrt[3]{\left(\frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}}\right)^{-1}}.$$

2.279. $\frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}\cdot\left(\frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1}}+\right.$

$$\left.+\frac{4ab\sqrt{a}+9ab\sqrt{b}-9b^2\sqrt{a}}{\frac{3}{2}\sqrt{b}-2\sqrt{a}}\right);\quad a>b>0.$$

2.280. $\frac{2a(a+2b+\sqrt{a^2+4ab})}{(a+\sqrt{a^2+4ab})(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})}.$

2.281. $\left(\frac{(1+a^{-1/2})^{1/6}}{(a^{1/2}+1)^{-1/3}}-\frac{(a^{1/2}-1)^{1/3}}{(1-a^{-1/2})^{-1/6}}\right)^{-2}\cdot\frac{\frac{1}{3}a^{1/12}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}.$

2.282. $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\right.$

$$\left.-\frac{1}{x}\right);\quad 0<x<1.$$

2.283. $\frac{(pq^{-1}+1)^2}{pq^{-1}-p^{-1}q}\cdot\frac{p^3q^{-3}-1}{p^2q^{-2}+pq^{-1}+1}:\frac{p^3q^{-3}+1}{pq^{-1}+p^{-1}q-1}.$

2.284. $\sqrt{\frac{\sqrt{(a-y)(y-b)}+\sqrt{(a+y)(y+b)}}{\sqrt{(a+y)(y+b)}-\sqrt{(a-y)(y-b)}}};\quad y=\sqrt{ab}.$

2.285. Спростити вираз $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, а потім побудувати графік функції y для $1\leqslant x<\infty$.

2.286. При якому значенні k многочлен $x^2+2(k-9)x+(k^2+3k+4)$ можна записати у вигляді повного квадрата.

2.287. При яких значеннях a і b тричлен $16x^2+144x+(a+b)$ є повним квадратом, коли відомо, що $b-a=-7$?

2.288. Перевірити, що число $x=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$ є коренем рівняння $x^3+12x-8=0$.

2.289. Многочлен x^8-16 подати у вигляді добутку многочленів другого степеня.

2.290. Виключивши u і v з рівностей $u-v=a$, $u^2-v^2=b$, $u^3-v^3=c$, знайти співвідношення між a, b і c.

Перевірити справедливість рівностей (2.291—2.304):

2.291. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3.$

2.292. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=$

$=\sqrt{20-4\sqrt{5}}.$

2.293. $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}}+\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\frac{10}{\sqrt[3]{25}}\right):$

$:(\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5})+\sqrt[6]{5}=\sqrt{2}.$

2.294. $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=$

$=2\sqrt{3m-n}.$

2.295. $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

2.296. $\frac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}+1)^{-1/3}}+\frac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}-1)^{-1/3}}=2\sqrt{a-1}.$

2.297. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})=1.$

2.298. $\frac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2.$

2.299. $\frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}.$

2.300. $\frac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}.$

2.301. $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1.$

2.302. $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$

2.303. $\frac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}=3-\sqrt{2}.$

2.304. $\sqrt{10p+2\sqrt{25p^2-q^2}}-\sqrt{10p-2\sqrt{25p^2-q^2}}=$

$=2\sqrt{5p-q}.$

2.305. Перетворенням лівої частини перевірити, що:

а) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2;$

б) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1.$

2.306. Число 19 подати у вигляді різниці кубів натуральних чисел. Показати, що таке подання едине.

2.307. Перетворити суму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

до найбільш простого вигляду.

2.308. Показати, що

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}.$$

2.309. Довести, що коли $a+b=1$, то

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

2.310. Визначити A, B і C так, щоб для всіх допустимих значень x мала місце рівність

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

2.311. Довести, що: а) сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9; б) число p^5-p ділиться на 5 при будь-якому натуральному значенні p; в) число k^3+5k ділиться на 3 при $k\in\mathbf{N}$.

Група B

Спростити вирази. Знайти області допустимих значень параметрів, якщо вони не вказані (2.312—2.356):

2.312. $$\left(\frac{\dfrac{x^3-1}{x+1}\cdot\dfrac{x}{x^3+1}}{\left(\dfrac{(x+1)^2-x}{(x-1)^2+x}\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right)}\right)^{-1/2}.$$

2.313. $$\frac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}.$$ **2.314.** $|x^2-1|+x\cdot|x+1|$.

2.315. $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}$.

2.316. $(x+2\sqrt{2x-4})^{-1/2}+(x-2\sqrt{2x-4})^{-1/2}$.

2.317. $$\left(\frac{4m^2n^2}{4mn-m^2-4n^2}-\frac{2+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}}{\dfrac{4}{mn}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{4}{m^2}}\right)^{1/2}\cdot\frac{\sqrt{mn}}{m-2n}.$$

2.318. $$\left(\sqrt{x^4-a^4}-\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

2.319. $$\left(\frac{|x-1|}{x-1}\cdot x^2-2x\cdot\frac{|x+1|}{x+1}+2x-4\right):|x-2|.$$

2.320. $$\sqrt{\frac{(x^2-3)^2+12x^2}{x^2}}+\sqrt{(x+2)^2-8x}.$$

2.321. $\left(\dfrac{(a^{3/2}-\sqrt{8})(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}.$

2.322. $\sqrt{y^2-6y+9}-|y-9|+2.$

2.323. $\sqrt{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4x^{-1}}-2}+\sqrt{\dfrac{1}{4x^{-1}}+\dfrac{2^{-2}}{x}+\dfrac{1}{2}}.$

2.324. $\sqrt{\dfrac{x}{2+x+x^{-1}}}+|x-1|.$

2.325. $\dfrac{n^4-2n^3+4n^2+2n-5}{n^4-3n^3+7n^2-5n}.$

2.326. $\dfrac{\sqrt{a+2\sqrt{b}+\dfrac{b}{a}}\cdot\sqrt{2a-10\sqrt[6]{8a^3b^2}+25\sqrt[3]{b^2}}}{a\sqrt{2a}+\sqrt{2ab}-5a\sqrt[3]{b}-5\sqrt[6]{b^5}}.$

2.327. $\dfrac{(x-1)\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|}.$

2.328. $\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x}}.$

2.329. $\dfrac{||x|-1|\cdot|x|}{x^2-1}.$ 2.330. $\dfrac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}.$

2.331. $\dfrac{\sqrt{3}\,x^{3/2}-5x^{1/3}+5x^{4/3}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+10\sqrt{3}\,x^{5/6}+25x^{2/3}}\cdot\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}.$

2.332. $\left(1-\dfrac{2}{x}-\left(\dfrac{2x+x^2}{4+2x+x^2}+\dfrac{2x-x^2}{4-2x+x^2}\right):\right.$

$\left.:\left(\dfrac{16-8x}{4-2x+x^2}-\dfrac{16+8x}{4+2x+x^2}\right)\right)^{1/2}.$

2.333. $\left(\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2-4\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+12\right)^{1/4}:(z-1).$

2.334. $\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}}\times$

$\times\dfrac{\sqrt{a^{3/2}+\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a^{3/2}-\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}}{\sqrt{(a^3+b^3)^2-a(4a^2b^3+1)}}.$

2.335. $\dfrac{\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}},\quad z=\dfrac{2a}{a^2+1}.$

2.336. $\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2y}+\sqrt{x^4+2yx^3}-(x^{3/2}+x^2)}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x^2+2xy})}\,(x^{2/3}-x^{5/6}+x)}.$

2.337. $\dfrac{\sqrt[3]{a-3+3(\sqrt[3]{9a}-\sqrt[3]{3a^2})}}{\sqrt{2^{-2}-\frac{3}{2}a^{-1}+\left(\frac{3}{2a}\right)^2:(\sqrt[3]{9}+a^{2/3}+\sqrt[3]{3a})}}$.

2.338. $\dfrac{\sqrt[3]{8x-y-6(2\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2})}\cdot(4x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+y^{2/3})}{8x\sqrt[3]{y}-y^{4/3}}$.

2.339. $\left(\dfrac{a}{3(a^2+1)^{1/2}}-(2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3})^{1/2}\times\right.$

$\left.\times(2a^2+3+a\sqrt{4a^2+3})^{-1/2}\right)^2$.

2.340. $\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}$.

2.341. $\dfrac{\sqrt{16z^2+z^{-2}-8}}{(2z-1)(4z^3-2z^2+z)^{-1}}-(z^3-1)$.

2.342. $\dfrac{(2x+5+4\sqrt{2x+1})^{-1/2}+(2x+5-4\sqrt{2x+1})^{-1/2}}{(2x+5+4\sqrt{2x+1})^{-1/2}-(2x+5-4\sqrt{2x+1})^{-1/2}}$.

2.343. $\dfrac{\sqrt{4(x-\sqrt{y})+yx^{-1}}\cdot\sqrt{9x^2+6\sqrt[3]{2yx^3}+\sqrt[3]{4y^2}}}{6x^2+2\sqrt[3]{2yx^3}-3\sqrt{yx^2}-\sqrt[3]{4y^5}}$.

2.344. $\sqrt{\frac{1}{6}((3t+\sqrt{6t-1})^{-1}+(3t-\sqrt{6t-1})^{-1})}\times$

$\times|t-1|\cdot t^{-1/2}$.

2.345. $\sqrt[4]{(x^2+4x^{-2})^2-8(x+2x^{-1})^2+48}\cdot(x^2-2)^{-1}$.

2.346. $\left(\dfrac{x^2+x-2\sqrt{x}+6}{x+2\sqrt{x}+3}-1\right)^{1/2}$.

2.347. $\sqrt{x(x^{-1}+4x-4)^{-1}}-\dfrac{2x^2}{|2x-1|}$; $x>0$.

2.348. $\left|\dfrac{|x-2|+4}{x-2}\right|\cdot(x^2-4)$.

2.349. $\left(\dfrac{x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2}{x^4-x^2\sqrt{2}+1}+x^2\sqrt{2}\right)^{1/2}$.

2.350. $\dfrac{|2x-3|+6}{2x-3}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}\cdot(9x^{-1}+4x-12)}$.

2.351. $\dfrac{x^8+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3}+2x^2-2$.

2.352. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+4}}{x^{1/2}-(x-3)^{1/2}-\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{x^2-9}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}$.

2.353. $(3a+\sqrt{6a-1})^{-1/2}+(3a-\sqrt{6a-1})^{-1/2}$.

2.354. $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}+\dfrac{1-2p}{\sqrt{1-4p^2}+2p-1}}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{4p^2}-1}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}}$.

2.355. $\sqrt{\dfrac{a-8\sqrt[6]{a^3b^2}+4\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}+2\sqrt[12]{a^3b^2}}+3\sqrt[3]{b}}$.

2.356. $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}}}$.

2.357. Довести, що коли для чисел x, y, z, m, n, p виконуються рівності $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{p}=1$, $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}+\dfrac{p}{z}=0$, то для них виконується також і рівність $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}+\dfrac{z^2}{p^2}=1$.

2.358. Розкласти на множники вираз $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

2.359. Розкласти на множники вираз $x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)$.

2.360. Середнє арифметичне двох додатних чисел a і b ($a>b$) в m разів більше від їхнього середнього геометричного. Довести, що

$$\frac{a}{b}=\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}.$$

Глава 3

ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

Основні формули

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу (тут і далі запис $n\in\mathbf{Z}$ означає, що n — будь-яке ціле число)

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1; \tag{3.1}$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad x\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in\mathbf{Z}; \tag{3.2}$$

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad x\neq\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}; \tag{3.3}$$

$$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1,\quad x\neq\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbf{Z}; \tag{3.4}$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}, \quad x\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in\mathbf{Z}; \qquad (3.5)$$

$$1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x\neq\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}. \qquad (3.6)$$

Формули додавання

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y; \qquad (3.7)$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y; \qquad (3.8)$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y; \qquad (3.9)$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y; \qquad (3.10)$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}, \quad x,\ y,\ x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}; \qquad (3.11)$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}, \quad x,\ y,\ x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}. \qquad (3.12)$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2x=2\sin x\cos x; \qquad (3.13)$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x; \qquad (3.14)$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \quad x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, \quad k\in\mathbf{Z}, \quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}. \qquad (3.15)$$

Формули половинного аргументу (для функцій sin і cos — формули пониження степеня)

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}; \qquad (3.16)$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}; \qquad (3.17)$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}, \quad x\neq\pi+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}. \qquad (3.18)$$

Формули перетворення суми в добуток

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (3.19)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \qquad (3.20)$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (3.21)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \qquad (3.22)$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}, \quad x,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}; \qquad (3.23)$$

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}, \quad x,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}. \qquad (3.24)$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)); \qquad (3.25)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)); \qquad (3.26)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)). \qquad (3.27)$$

Співвідношення між $\sin x$, $\cos x$ і $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad x \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbf{Z}; \qquad (3.28)$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad x \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (3.29)$$

Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на схожу			
u	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}$			$\alpha \neq \pi n,\quad n \in \mathbf{Z}$			
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
	$\alpha \neq \pi n,\quad n \in \mathbf{Z}$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n \in \mathbf{Z}$			

Приклад 1. Довести тотожність

$$\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{ctg} 6\alpha = \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}.$$

△ Застосовуючи послідовно до лівої частини рівності формули (3.2), (3.3), (3.1) і (3.13), знаходимо

$$A = \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{ctg} 6\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha} +$$

$$+ \frac{\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} + \frac{\sin^2 6\alpha + \cos^2 6\alpha}{\sin 6\alpha \cos 6\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} + \frac{1}{\sin 6\alpha \cos 6\alpha} = \frac{2}{\sin 4\alpha} + \frac{2}{\sin 12\alpha} =$$

$$= \frac{2(\sin 12\alpha + \sin 4\alpha)}{\sin 4\alpha \sin 12\alpha}.$$

Перетворюючи суму синусів за формулою (3.19), дістаємо $A = \frac{4\sin 8\alpha \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha \sin 12\alpha}$. Оскільки $\sin 8\alpha = 2\sin 4\alpha \cos 4\alpha$, то

$$A = \frac{8\sin 4\alpha \cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha \sin 12\alpha} = \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}. \ ▲$$

Приклад 2. Спростити вираз

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{4}.$$

△ До добутку перших двох співмножників застосуємо формулу (3.27). Тоді дістанемо

$$A = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}.$$

Знову використовуючи формулу (3.27), знаходимо

$$A = \frac{1}{4}\left(-\sin\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{3\alpha}{4}\right) + \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}. \ ▲$$

Приклад 3. Подати у вигляді добутку

$$A = 2\cos^2 3\alpha + \sqrt{3}\sin 6\alpha - 1.$$

△ Згідно з формулою (3.14), маємо $2\cos^2 3\alpha - 1 = \cos 6\alpha$. Отже,

$$A = \cos 6\alpha + \sqrt{3}\sin 6\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos 6\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6\alpha\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 6\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin 6\alpha\right).$$

Оскільки вираз у дужках — розгорнута формула (3.10) для косинуса різниці, то $A = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 6\alpha\right)$. ▲

Приклад 4. Перевірити, що $\operatorname{tg} 20^\circ + 4\sin 20^\circ = \sqrt{3}$.

$\triangle$ Застосувавши формули (3.2), (3.13) і (3.19), дістанемо

$$A = \operatorname{tg} 20^\circ + 4\sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ + 4\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ) + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 30^\circ \cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}.$$

Замінивши за формулою зведення $\cos 10^\circ$ на $\sin 80^\circ$ і знову використавши формулу (3.19), знаходимо

$$A = \frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{2} = \frac{2\sin 60^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \ \blacktriangle$$

Приклад 5. Знайти значення $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, коли відомо, що $\sin x - \cos x = 1{,}4$.

$\triangle$ Зручно скористатися формулами (3.28) і (3.29), враховуючи що вони правильні тільки при $x \neq \pi(2n+1)$, $n \in Z$. Проте в даному випадку x не може приймати цих значень. Дійсно, коли б $x = \pi(2n+1)$, то $\sin(\pi(2n+1)) - \cos(\pi(2n+1)) = 0 - (-1) \neq 1{,}4$. Виразивши $\sin x$ і $\cos x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$, перепишемо дану рівність у вигляді

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 1{,}4,$$

Покладаючи $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, дістанемо рівняння $z^2 - 5z + 6 = 0$, звідки $z_1 = 2$, $z_2 = 3$. Таким чином, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$ і $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3$. $\blacktriangle$

Приклад 6. Спростити вираз

$$A = \frac{1}{2}\sin^2\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - 2(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) + 2(\cos^6\alpha + \sin^6\alpha).$$

$\triangle$ За формулою зведення маємо $\sin^2\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos^2 2\alpha$. Перетворимо $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha$ як суму кубів за формулою (2.13):

$$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = (\cos^2\alpha)^3 + (\sin^2\alpha)^3 =$$

$$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha),$$

звідки, враховуючи формули (3.1) і (3.13), знаходимо $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$. Використавши одержані результати, перепишемо заданий вираз у вигляді

$$A = \frac{1}{2}\cos^2 2\alpha - 2(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) +$$

$$+ 2\left(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right).$$

Після зведення подібних членів дістанемо $A = \frac{1}{2}\cos^2 2\alpha - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = \frac{1}{2}\cos 4\alpha$ (за тотожністю (3.14)). Таким чином, $A = \frac{1}{2}\cos 4\alpha$. ▲

Приклад 7. Спростити вираз

$$A = \frac{\sin 8\alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha + \sin 12\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 10\alpha + \cos 11\alpha + \cos 12\alpha},$$

знайти його значення, якщо $\operatorname{tg} 5\alpha = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

△ Перегрупуємо доданки в чисельнику і знаменнику дробу і скористаємося формулами (3.19) і (3.21). Тоді дістанемо

$$A = \frac{(\sin 8\alpha + \sin 12\alpha) + (\sin 9\alpha + \sin 11\alpha) + \sin 10\alpha}{(\cos 8\alpha + \cos 12\alpha) + (\cos 9\alpha + \cos 11\alpha) + \cos 10\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin 10\alpha\cos 2\alpha + 2\sin 10\alpha\cos\alpha + \sin 10\alpha}{2\cos 10\alpha\cos 2\alpha + 2\cos 10\alpha\cos\alpha + \cos 10\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 10\alpha\,(2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + 1)}{\cos 10\alpha\,(2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + 1)} = \operatorname{tg} 10\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 5\alpha}$$

(застосовано формулу (3.15)). Тепер праву частину заданої рівності $\operatorname{tg} 5\alpha = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ помножимо і розділимо на $\sin 20^\circ$; тричі застосовуючи формулу (3.13), знаходимо

$$\operatorname{tg} 5\alpha = \frac{(\sin 20^\circ\cos 20^\circ)\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{(\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Отже,

$$A = \frac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 5\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{64}} = \frac{16}{63}. \ ▲$$

Приклад 8. Довести, що для будь-якого числа k доданків і будь-якого $\alpha \neq 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, справедливі рівності:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos k\alpha = \frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad (а)$$

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin k\alpha = \frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (б)$$

(ці формули зручно використовувати для перетворення суми косинусів або синусів при великій кількості доданків).

△ Нехай $S_k(\alpha) = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos k\alpha$. Помноживши обидві частини цієї рівності на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, дістанемо

$$2S_k(\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha +$$

$$+ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha + \dots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha.$$

Застосовуючи формулу (3.27), маємо

$$2S_k(\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}\right) +$$

$$+ \left(\sin\frac{7\alpha}{2} - \sin\frac{5\alpha}{2}\right) + \dots + \left(\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2} - \sin\frac{\alpha(2k-1)}{2}\right).$$

Помічаємо, що перший доданок у кожній дужці взаємно знищується з другим доданком в наступній дужці. Таким чином, права частина останньої рівності є різницею $\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$. Перетворивши її за формулою (3.20), дістанемо $2S_k(\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}$, звідки випливає рівність для $S_k(\alpha)$, тобто формула (а).

Аналогічно доводиться справедливість рівності (б). ▲

Зауваження. 1. Замість наведеного способу розв'язування можна застосувати метод математичної індукції.

2. Запам'ятовувати одержані формули немає необхідності, проте показаний тут спосіб перетворення тригонометричних виразів може бути ефективним при розв'язуванні аналогічних задач.

Група А

Довести тотожності (3.001—3.062):

3.001. $(1 + \cos^{-1} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha)(1 - \cos^{-1} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha) = 2\operatorname{tg} 2\alpha.$

3.002. $\left(\cos^{-1} 2\alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi - \alpha\right) = 1.$

3.003. $\dfrac{\cos(3\pi - 2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right)} = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right).$

3.004. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 3\beta}{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\beta} = \dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 3\beta}.$

3.005. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos(\alpha/2)\cos(5\alpha/2)\cos 4\alpha.$

3.006. $\sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha + \sin 12\alpha = 4\cos(\alpha/2)\cos\alpha\sin(21\alpha/2).$

3.007. $\cos 2\alpha - \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha = -4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\cos(7\alpha/2).$

3.008. $\sin 4\alpha - \sin 5\alpha - \sin 6\alpha + \sin 7\alpha = -4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\sin(11\alpha/2).$

3.009. $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos 3\alpha+\sin 3\alpha=$

$$=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right).$$

3.010. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{ctg}3\alpha=\dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}.$

3.011. $(\sin\alpha)^{-1}+(\operatorname{tg}\alpha)^{-1}=\operatorname{ctg}(\alpha/2).$

3.012. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)}{1-\sin(3\alpha-\pi)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{3}{2}\alpha\right).$

3.013. $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha.$

3.014. $2\sin^2(3\pi-2\alpha)\cos^2(5\pi+2\alpha)=$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{5}{2}\pi-8\alpha\right).$$

3.015. $\sin 2\alpha(1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha)+\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=$

$$=\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

3.016. $1-\sin 4\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)\cos 4\alpha=0.$

3.017. $\sin^6\dfrac{\alpha}{2}-\cos^6\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha.$

3.018. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=$

$$=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha.$$

3.019. $\dfrac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}=\operatorname{tg}\alpha.$

3.020. $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha.$

3.021. $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{14}{3}\pi\right)+\sin\left(\alpha-\frac{8}{3}\pi\right)=0.$

3.022. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

3.023. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

3.024. $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha)(\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha)}=1.$

3.025. $\dfrac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right).$

3.026. $\cos^2(\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)=$

$$=\frac{1}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}-\cos^2(\alpha+180^\circ).$$

3.027. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)}=\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)-1}.$

3.028. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cos^{-1}2\beta-\operatorname{tg}2\beta\cos^{-1}2\alpha}{\cos^{-1}2\alpha+\cos^{-1}2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta).$

3.029. $2\left(\sin^{-1}4\alpha-\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{2}+4\alpha\right)\right)+\operatorname{tg}(5\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$

3.030. $\sin^2\left(\dfrac{15}{8}\pi-2\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{17}{8}\pi-2\alpha\right)=-\dfrac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$

3.031. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=$

$$=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

3.032. $\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}-2\alpha\right)=\dfrac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}.$

3.033. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha.$

3.034. $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)=\dfrac{\sin(\alpha/2)}{\sqrt{2}}.$

3.035. $\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$

3.036. $\sin^2 2\alpha-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}.$

3.037. $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}.$

3.038. $\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha}=1.$

3.039. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=-1.$

3.040. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}=2.$

3.041. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha.$

3.042. $\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha.$

3.043. $\dfrac{1 - 2\sin^2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}.$

3.044. $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha.$

3.045. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha} - \cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha = \sin 8\alpha.$

3.046. $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha.$

3.047. $\operatorname{ctg}(45^\circ + 2\alpha) = \dfrac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha}.$

3.048. $\dfrac{(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + 1)(\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha + 1)}{(\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 1)(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1)} = 1.$

3.049. $\left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right)^2 = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}.$

3.050. $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha.$

3.051. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1.$

3.052. $\dfrac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$

3.053. $\sin\alpha\sin(x - \alpha) + \sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \alpha\right) = \sin^2\dfrac{x}{2}.$

3.054. $\cos^2\alpha - \sin^2 2\alpha = \cos^2\alpha\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

3.055. $\dfrac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha} - 2(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha) - 1 = 0.$

3.056. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta).$

3.057. $\cos^4 x + \sin^2 y + \dfrac{1}{4}\sin^2 2x - 1 = \sin(y + x)\sin(y - x).$

3.058. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi - 2\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi - 2\alpha\right) - \operatorname{tg}\alpha} - 2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right).$

$$3.059.\ \frac{\operatorname{tg}(\pi+2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}+$$

$$+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right).$$

3.060. $\operatorname{tg}4\alpha+\cos^{-1}4\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}$.

3.061. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=2\cos^{-2}\alpha.$

3.062. $1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\cos 2\alpha=\cos^2\alpha+\cos^4\alpha.$

Спростити вирази (**3.063—3.113**):

3.063. $1-\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\dfrac{\alpha}{4}+\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$.

3.064. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)}+\cos^2\alpha.$

$$3.065.\ \frac{\cos^2\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\right)}{\sin^{-1}\left(\frac{9}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{5}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\right)}.$$

$$3.066.\ \frac{\sin\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)}.$$

3.067. $\cos\alpha\,(1+\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)\,(1-\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha).$

3.068. $\sin^2\alpha\,(1+\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\,(1-\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha).$

3.069. $\dfrac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}$.

3.070. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

3.071. $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-2\beta\right)$.

3.072. $\dfrac{\cos^{-1}2x+\sin 2x\operatorname{tg}2x}{1+\cos 4x}+\dfrac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$.

3.073. $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1.$

3.074. $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1.$

3.075. $(\cos\alpha-\cos 2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin 2\beta)^2$.

3.076. $\dfrac{(1-\cos 2\alpha)\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-\sin 4\alpha}$.

3.077. $\cos^2\left(\dfrac{3}{8}\pi-\dfrac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\dfrac{11}{8}\pi+\dfrac{\alpha}{4}\right)$.

3.078. $\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(135^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

3.079. $\dfrac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

3.080. $\dfrac{\cos m\alpha-\cos n\alpha}{\sin n\alpha-\sin m\alpha}$.

3.081. $\sin^2\left(\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^{-2}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

3.082. $1-\dfrac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

3.083. $\dfrac{\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\beta+\operatorname{tg}\beta\cos^{-1}\alpha}$.

3.084. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^3\left(\dfrac{5}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)}$

3.085. $1-\dfrac{1}{1-\sin^{-1}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

3.086. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha}$.

3.087. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

3.088. $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)}$.

3.089. $\dfrac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha+90^\circ)-1}+\dfrac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha-90^\circ)-1}$.

3.090. $\dfrac{(1+\operatorname{tg}^2(\alpha-90^\circ))(\sin^{-2}(\alpha-270^\circ)-1)}{(1+\operatorname{ctg}^2(\alpha+270^\circ))\cos^{-2}(\alpha+90^\circ)}$.

3.091. $$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

3.092. $$\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)-\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\alpha/2)}.$$

3.093. $$\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$$

3.094. $$\frac{\cos^2(2\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(90^\circ+2\alpha)+1}{\sin^2(2\alpha-270^\circ)+\operatorname{tg}^2(270^\circ+2\alpha)+1}.$$

3.095. $$\frac{\sin^2\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}.$$

3.096. $$\frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{1-\cos(4\alpha-\pi)}{\sin^3 2\alpha}-$$
$$-\frac{1}{2\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}.$$

3.097. $$\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^3(\alpha-4\pi)}+\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}.$$

3.098. $$\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(2\alpha-\frac{8}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\alpha\right).$$

3.099. $$\frac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-4+4\sin^2\alpha}.$$

3.100. $$\sin^2\left(\frac{9}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17}{8}\pi-\alpha\right).$$

3.101. $$\operatorname{ctg}(4\alpha-\pi)\left(\cos^4\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{9}{4}\pi-2\alpha\right)\right).$$

3.102. $$\frac{\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)\sin\alpha}.$$

3.103. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)}.$$

3.104. $$\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}.$$

3.105. $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}$.

3.106. $\frac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.107. $\frac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}$.

3.108. $\frac{4\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

3.109. $\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-\beta)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}$.

3.110. $\frac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$.

3.111. $\frac{\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+4\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)-4}{1+\cos(4\alpha-\pi)-8\sin^2(5\pi-\alpha)}$.

3.112. $\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)\left(2\sin\frac{\pi-\alpha}{2}+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)}$.

3.113. $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

Перетворити в добуток (3.114—3.147):

3.114. $\sin 4\alpha-2\cos^2 2\alpha+1$. **3.115.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2$.

3.116. $\cos^{-4}\alpha-\sin^{-4}\alpha$. **3.117.** $\frac{\operatorname{tg}^4\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha}{\operatorname{ctg}^4\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

3.118. $1-3\operatorname{tg}^2(\alpha+270^\circ)$. **3.119.** $1-3\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)$.

3.120. $\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$.

3.121. $3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ)$.

3.122. $\sin^2(\alpha+90^\circ)-3\cos^2(\alpha-90^\circ)$.

3.123. $\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

3.124. $3-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$. **3.125.** $3-4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

3.126. $1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)+$
$$+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+3\alpha\right).$$

3.127. $1+\cos(2\alpha+270°)+\sin(2\alpha+450°)$.

3.128. $1-\cos(2\alpha-270°)+\sin(2\alpha+270°)$.

3.129. $\sin\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-1$.

3.130. $1-\cos(2\alpha-\pi)-\cos(4\alpha+\pi)+\cos(6\alpha-2\pi)$.

3.131. $1+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-4\alpha\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)$.

3.132. $\dfrac{\sin\alpha-2\cos 3\alpha-\sin 5\alpha}{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}$.

3.133. $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-1$.

3.134. $\dfrac{\sin 4\alpha+\sin 5\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha}$.

3.135. $-\cos 5\alpha\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\cos 3\alpha+2\cos^2 2\alpha\cos\alpha$.

3.136. $\sin 10\alpha\sin 8\alpha+\sin 8\alpha\sin 6\alpha-\sin 4\alpha\sin 2\alpha$.

3.137. $\dfrac{\cos 7\alpha-\cos 8\alpha-\cos 9\alpha+\cos 10\alpha}{\sin 7\alpha-\sin 8\alpha-\sin 9\alpha+\sin 10\alpha}$.

3.138. $\sin 5\alpha-\sin 6\alpha-\sin 7\alpha+\sin 8\alpha$.

3.139. $\cos 3\alpha-\cos 4\alpha-\cos 5\alpha+\cos 6\alpha$.

3.140. $\dfrac{\sin 13\alpha+\sin 14\alpha+\sin 15\alpha+\sin 16\alpha}{\cos 13\alpha+\cos 14\alpha+\cos 15\alpha+\cos 16\alpha}$.

3.141. $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha$.

3.142. $\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha$.

3.143. $\cos 5\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 12\alpha$.

3.144. $3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha$.

3.145. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}$, $0<\alpha<\pi/2$.

3.146. $1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha$.

3.147. $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha$.

Довести справедливість рівностей **(3.148—3.152)**:

3.148. $(\sin 160°+\sin 40°)(\sin 140°+\sin 20°)+$
$$+(\sin 50°-\sin 70°)(\sin 130°-\sin 110°)=1.$$

3.149. $(\cos 34°)^{-1}+(\operatorname{tg} 56°)^{-1}=\operatorname{ctg} 28°$.

3.150. $\dfrac{\cos 28°\cos 56°}{\sin 2°}+\dfrac{\cos 2°\cos 4°}{\sin 28°}=\dfrac{\sqrt{3}\sin 38°}{4\sin 2°\sin 28°}$.

3.151. $1 - 2\sin 50^\circ = 0{,}5\cos^{-1} 160^\circ$.

3.152. $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 310^\circ + \cos 290^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ - \cos 380^\circ) = 1$.

Обчислити (3.153—3.166):

3.153. $\sin^2(\pi/8) + \cos^2(3\pi/8) + \sin^2(5\pi/8) + \cos^2(7\pi/8)$.

3.154. $\operatorname{tg} 435^\circ + \operatorname{tg} 375^\circ$. 3.155. $\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 195^\circ$.

3.156. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$. 3.157. $\operatorname{ctg}\frac{13}{12}\pi - \operatorname{ctg}\frac{5}{12}\pi$.

3.158. $\sin\left(2\alpha + \frac{5}{4}\pi\right)$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

3.159. $\cos\left(2\alpha + \frac{7}{4}\pi\right)$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$.

3.160. $\frac{5}{6 + 7\sin 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

3.161. $\frac{2}{3 + 4\cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

3.162. $\sin\alpha$, якщо $\sin(\alpha/2) + \cos(\alpha/2) = 1{,}4$.

3.163. $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha - \cos\alpha = p$.

3.164. $2 - 13\cos 2\alpha + \sin^{-1} 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = -1/5$.

3.165. $1 + 5\sin 2\alpha - 3\cos^{-1} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

3.166. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right)$, якщо $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + 2\alpha\right) = \frac{9}{11}$.

3.167. Знайти число $\alpha \in (\pi/2; \pi)$, коли відомо, що $\operatorname{tg} 2\alpha = -12/5$.

3.168. Довести, що коли A і B — гострі кути деякого прямокутного трикутника, то $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \sin B$.

3.169. Знайти число β $(\pi/2 < \beta < \pi)$, коли відомо, що $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 9/19$ і $\operatorname{tg}\alpha = -4$.

3.170. Знайти $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, коли відомо, що $\sin\alpha - \cos\alpha = 1/2$.

3.171. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = 3/4$, $\operatorname{ctg}\beta = 1/7$, $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$. Знайти $\alpha + \beta$.

3.172. Знайти $\operatorname{ctg} 2\alpha$, коли відомо, що $\sin(\alpha - 90^\circ) = -2/3$ і $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

3.173. Довести, що коли α і β задовольняють нерівності $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$ і $\cos\alpha = 7/\sqrt{50}$, $\operatorname{tg}\beta = 1/3$, то $\alpha + 2\beta = \pi/4$.

3.174. Знайти $\operatorname{tg} 2\alpha$, коли відомо, що $\cos(\alpha - 90^\circ) = 0{,}2$ і $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

3.175. Довести, що коли α і β задовольняють нерівності $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$ і $\operatorname{tg}\alpha = 5$, $\operatorname{ctg}\beta = 2/3$, то $\alpha + \beta = 3\pi/4$.

3.176. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = 4$, $\operatorname{ctg}\beta = 5/3$, $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$. Знайти $\alpha + \beta$.

3.177. Обчислити $(1 + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\beta)$, якщо $\alpha + \beta = 3\pi/4$.

3.178. Обчислити $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta)$, якщо $\alpha + \beta = \pi/4$.

3.179. Довести, що коли $\sin\alpha = \sqrt{21}/7$, $\sin\beta = \sqrt{21}/14$ і α, β — гострі кути, то $\alpha + \beta = 60^\circ$.

3.180. Показати, що вираз $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$ невід'ємний в області визначення.

3.181. Виключити α з рівностей $x = \operatorname{tg}^2 \alpha$, $y = \sin^2 \alpha$.

3.182. Довести, що $\cos 2 - \cos 8 < 0$.

3.183. Величини α, β, γ становлять арифметичну прогресію. Довести, що $\dfrac{\sin\alpha - \sin\gamma}{\cos\gamma - \cos\alpha} = \operatorname{ctg}\beta$.

3.184. Дано дріб

$$\frac{5}{1 + \sqrt[3]{32\cos^4 15^\circ - 10 - 8\sqrt{3}}}.$$

Перетворити підкореневий вираз до більш простого вигляду, після чого дріб скоротити.

3.185. Виразити $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha$ через m, де $m = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$.

Група Б

Довести тотожності (3.186—3.239):

3.186. $\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1} = \dfrac{2}{3}$.

3.187. $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

3.188. $\sin^{-1} 2\alpha \sin^{-1}(60^\circ - 2\alpha)\sin^{-1}(60^\circ + 2\alpha) =$

$= 4\sin^{-1} 6\alpha$.

3.189. $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \operatorname{ctg}\dfrac{15}{2}\alpha$.

3.190. $\dfrac{\sin^2(3\pi - 4\alpha) + 4\cos^2\left(\dfrac{3}{2}\pi - 2\alpha\right) - 4}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 4\alpha\right) - 4\cos^2\left(2\alpha - \dfrac{5}{2}\pi\right)} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha$.

3.191. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi + \dfrac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3}{4}\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2}\dfrac{\alpha}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3}{2}\pi - \dfrac{\alpha}{4}\right) - \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3}{4}\alpha - \dfrac{7}{2}\pi\right)\right)} =$

$= \dfrac{1}{8}$.

3.192. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \cos\left(\dfrac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right)\cos^{-1}\alpha - 2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)(1 + \sin(4\pi + \alpha))\cos^{-1}\alpha + 2\cos 2\alpha} =$

$= \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

3.193. $$\frac{2\cos\left(\frac{1}{6}\pi-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{9}{2}\pi-2\alpha\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}.$$

3.194. $$\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha-1=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.195. $$1+\operatorname{ctg}\alpha+\sin^{-1}\alpha=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.196. $$\frac{(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}=$$
$$=-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

3.197. $$\frac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha-\pi)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}-3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)=$$
$$=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right).$$

3.198. $$\frac{4\cos^2(\alpha-\pi)-4\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)}=$$
$$=\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}.$$

3.199. $$1-\cos(2\alpha-\pi)+\cos(4\alpha-2\pi)=$$
$$=4\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).$$

3.200. $$\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)\times$$
$$\times\sin^{-2}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)=2.$$

3.201. $$\frac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-1}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

3.202. $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3}{4}\pi\right)(1-\sin 2\alpha)=\cos 2\alpha.$

3.203. $\frac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha+\sin 4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha.$

3.204. $\operatorname{ctg}\left(4\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-1}(4\alpha-3\pi)=$

$$=\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

3.205. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-$

$$-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

3.206. $\frac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\frac{\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}.$

3.207. $3-4\cos(4\alpha-3\pi)-\cos(5\pi+8\alpha)=8\cos^4 2\alpha.$

3.208. $\frac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha.$

3.209. $\frac{3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$

3.210. $3+4\sin\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(8\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)=8\sin^4 2\alpha.$

3.211. $\cos^{-6}\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha=3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha+1.$

3.212. $\frac{1-2\sin^2 2\alpha}{1-\sin 4\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg} 2\alpha}.$

3.213. $\frac{\sin^2(135^\circ-\alpha)-\sin^2(210^\circ-\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-2\alpha)}{\cos^2(225^\circ+\alpha)-\cos^2(210^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)}=$

$$=-1.$$

3.214. $\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$

3.215. $\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta-\frac{2\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+2=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

3.216. $\sin 2\alpha(2\cos 4\alpha+1)\operatorname{ctg}(30^\circ-2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ+$

$$+2\alpha)=\sin 6\alpha\operatorname{ctg} 2\alpha\operatorname{tg} 6\alpha.$$

3.217. $\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\alpha\right)\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$

3.218. $\frac{\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}=\operatorname{tg}\frac{15}{2}\alpha.$

3.219. $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}.$$

3.220. $$\frac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=2\cos 2\alpha.$$

3.221. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha.$

3.222. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha=4\operatorname{ctg}4\alpha.$

3.223. $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-2\cos^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi=\cos 2\alpha.$

3.224. $\sin^2\varphi-\cos^2(\alpha-\varphi)+2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\cos^2\alpha.$

3.225. $\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\sin^2\alpha.$

3.226. $\operatorname{tg}6\beta-\operatorname{tg}4\beta-\operatorname{tg}2\beta=\operatorname{tg}6\beta\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta.$

3.227. $$\frac{\cos\left(4\alpha-\frac{9}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)\right)}=\operatorname{tg}4\alpha.$$

3.228. $$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)}=\operatorname{ctg}2\alpha.$$

3.229. $$\frac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}=-1.$$

3.230. $$\operatorname{tg}4\alpha-\cos^{-1}4\alpha=\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}.$$

3.231. $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=(5+3\cos 4\alpha)/8.$

3.232. $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\cos 2\alpha\,(3+\cos 4\alpha)/4.$

3.233. $\operatorname{ctg}(30^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(150^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha.$

3.234. $$4\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=\cos 6\alpha.$$

3.235. $$\frac{1-2\cos^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}=1.$$

3.236. $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin 5\alpha.$

3.237. $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}.$$

3.238. $1+\sin\left(3\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos 2\alpha+$

$+2\sin 3\alpha\cos(3\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)=2\sin^2(5\alpha/2).$

3.239. $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta).$

Спростити вирази (3.240—3.284):

3.240. $\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}.$

3.241. $\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}}$; $90^\circ<\alpha<135^\circ.$

3.242. $\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)^2-\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$

3.243. $(\cos 8\alpha\operatorname{tg}4\alpha-\sin 8\alpha)(\cos 8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha+\sin 8\alpha).$

3.244. $\sin^2 2\alpha+\sin^2\beta+\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta).$

3.245. $\dfrac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\frac{7}{6}\pi+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}.$

3.246. $\dfrac{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha+\cos 10\alpha-\cos 14\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 6\alpha+\sin 10\alpha+\sin 14\alpha}.$

3.247. $\left(1-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\times$

$\times\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$

3.248. $\dfrac{4\sin(\pi-2x)\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)}{1+\cos 8x}+$

$+\dfrac{\sin 3x\cos x+3\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 4x}.$

3.249. $\dfrac{4\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}-1.$

3.250. $\dfrac{(1+\operatorname{tg}2\alpha)^2-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1.$

3.251. $\dfrac{\sin(80^\circ+4\alpha)}{4\sin(20^\circ+\alpha)\sin(70^\circ-\alpha)}.$

3.252. $\dfrac{\cos^2(4\alpha-3\pi)-4\cos^2(2\alpha-\pi)+3}{\cos^2(4\alpha+3\pi)+4\cos^2(2\alpha+\pi)-1}$.

3.253. $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}$.

3.254. $4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-$

$$-4\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\cos^3\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right).$$

3.255. $\cos^4 2\alpha-6\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha$.

3.256. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)+1}$.

3.257. $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)-4+4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

3.258. $\cos^{-2}4\alpha-\operatorname{tg}^2(3\pi+4\alpha)-2\cos^2\alpha-$

$$-\sqrt{3}\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right).$$

3.259. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}$.

3.260. $\dfrac{4\sin^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^4\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)+\cos^4\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)-1}$.

3.261. $\dfrac{\sin\left(4\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}{1+\cos\left(4\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.262. $(\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}555^\circ)(\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}195^\circ)$.

3.263. $\dfrac{\operatorname{tg}615^\circ-\operatorname{tg}555^\circ}{\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}735^\circ}$.

3.264. $\dfrac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)-\cos(2x-5\pi)\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)\cos 4x+\sin x\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4x\right)}$.

3.265. $\sin(2x-\pi)\cos(x-3\pi)+$

$$+\sin\left(2x-\frac{9\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

3.266. $\sin(x+2\pi)\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+$

$$+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin\left(2x-\frac{5\pi}{2}\right).$$

3.267. $\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}.$

3.268. $\sqrt[3]{\dfrac{\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}}.$

3.269. $\dfrac{3\cos^2(\alpha+270^\circ)-\sin^2(\alpha-270^\circ)}{3\sin^2(\alpha-90^\circ)-\cos^2(\alpha+90^\circ)}.$

3.270. $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha}{\sin 4\alpha+2\sin^2 2\alpha-1}.$

3.271. $\sqrt{(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)(\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1)}.$

3.272. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$.

3.273. $\cos^6\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^6\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-$

$$-\frac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2.$$

3.274. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}+\dfrac{\sin^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$

3.275. $\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}}$, якщо: а) $0<\alpha<\pi$; б) $\pi<$ $<\alpha<2\pi$.

3.276. $\cos^2(45^\circ+\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha).$

3.277. $\sin^2(135^\circ-2\alpha)-\sin^2(210^\circ-2\alpha)-$

$$-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-4\alpha).$$

3.278. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$,

якщо: а) $90^\circ<\alpha<180^\circ$; б) $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

3.279. $\left(1+\cos\dfrac{\alpha-3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi-\alpha}{4}.$

3.280. $\dfrac{\sin^2 4\alpha + 4\sin^4 2\alpha - 4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{4 - \sin^2 4\alpha - 4\sin^2 2\alpha}$.

3.281. $\sin\left(\frac{5}{2}\pi + 4\alpha\right) - \sin^6\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right) + \cos^6\left(\frac{7}{2}\pi - 2\alpha\right)$.

3.282. $\dfrac{\sin 8\alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 10\alpha + \cos 11\alpha} \times \dfrac{\cos 8\alpha - \cos 9\alpha - \cos 10\alpha + \cos 11\alpha}{\sin 8\alpha - \sin 9\alpha - \sin 10\alpha + \sin 11\alpha}$.

3.283. $\cos(270^\circ - 2\alpha)\ \mathrm{ctg}\,(30^\circ - 2\alpha)\ \mathrm{tg}\,(240^\circ - 2\alpha)\,(2\cos 4\alpha - 1)$.

3.284. $\mathrm{tg}\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right)\right)\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

Перетворити в добуток (3.285—3.331):

3.285. $\sin 6\alpha - 2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha + \sqrt{3}$.

3.286. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha + 1 - 2\cos^2 2\alpha$.

3.287. $3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha - 8\cos^4 2\alpha$.

3.288. $\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\,x + 3$.

3.289. $\mathrm{tg}^4 x - 4\,\mathrm{tg}^2 x + 3$. **3.290.** $6\sin^2 2\alpha - 1 - \cos 4\alpha$.

3.291. $\sqrt{1+\sin(\alpha/2)} - \sqrt{1-\sin(\alpha/2)}$, якщо $0^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$.

3.292. $2\cos^2 2\alpha + 3\cos 4\alpha - 3$.

3.293. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha - \beta)$.

3.294. $\dfrac{\sin(2\alpha - \beta)}{\cos 4\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos 2\alpha}$.

3.295. $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta) - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$.

3.296. $\sin^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\alpha - \cos^2 2\beta$.

3.297. $\sin^2(2\alpha - \beta) - \sin^2 2\alpha - \sin^2\beta$.

3.298. $2 + \mathrm{ctg}\left(\dfrac{5\pi + \alpha}{4}\right)\left(1 + \cos\dfrac{\alpha - \pi}{2}\right)\cos^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2} - 2\pi\right) - 4\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2} - 3\pi\right)$.

3.299. $2 - \dfrac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}$. **3.300.** $2 - \mathrm{tg}\,4\alpha - \mathrm{ctg}\,4\alpha$.

3.301. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha - 1}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)} - \mathrm{tg}\,2\alpha + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha$.

3.302. $\dfrac{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}$.

3.303. $1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha - \beta)$.

3.304. $1 + \cos\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(2\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$.

3.305. $4\cos^2\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \cos(2\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{5}{2}\pi - 6\alpha\right)$.

3.306. $\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}$, якщо:

а) $0° < \alpha < 90°$; б) $90° < \alpha < 180°$.

3.307. $2\sin^2 2\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha - \dfrac{4\operatorname{tg} 2\alpha\,(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\sin 8\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha)^2}$.

3.308. $\cos^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2(2\beta - \pi)$.

3.309. $1 - \cos(\pi - 8\alpha) - \cos(\pi + 4\alpha)$.

3.310. $\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha$.

3.311. $\sin^3\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos^3\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$.

3.312. $2\cos^2 2\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha - 1$.

3.313. $\dfrac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - 2\alpha\right) + 2\sin^2\left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right) - 1}{1 + \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(6\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.314. $\dfrac{\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}{\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}$.

3.315. $\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha$.

3.316. $\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5}{4}\pi + 2\alpha\right)$.

3.317. $\dfrac{\cos^{-1}\left(\alpha + \frac{5}{2}\pi\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{\sin^{-1}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)}$.

3.318. $\dfrac{3\,\mathrm{tg}^2(\alpha+3\pi)-1}{1-3\,\mathrm{tg}^2\left(\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}$.

3.319. $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha$.

3.320. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}-$

$$-\,\mathrm{tg}\,\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$$

3.321. $\cos^2\left(\frac{5}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{15}{8}\pi+\alpha\right)$.

3.322. $\dfrac{2\cos^2\left(\frac{9}{4}\pi-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}-\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{7}{4}\pi\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)$.

3.323. $\sin\alpha\sin^2(\alpha-270^\circ)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)+$
$+\cos\alpha\cos^2(\alpha+270^\circ)(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$.

3.324. $\sin 2\alpha+\cos 4\alpha-\sin 6\alpha$.

3.325. $\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha$.

3.326. $\cos^2(n\alpha/2)-\sin^2(m\alpha/2)$.

3.327. $1+\mathrm{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^{-1}\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$.

3.328. $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+2\cos\left(\frac{11}{6}\pi-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}$.

3.329. $\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)$.

3.330. $\sin\alpha-\left(\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2$.

3.331. $\mathrm{tg}\,210^\circ+\mathrm{ctg}\,210^\circ+\mathrm{tg}\,220^\circ+\mathrm{ctg}\,220^\circ$.

Довести справедливість рівностей (3.332—3.354):

3.332. $\dfrac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ-\sin 39^\circ\cos 21^\circ}=-1$.

3.333. $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}=1$.

3.334. $\dfrac{\cos 63^\circ\cos 3^\circ-\cos 87^\circ\cos 27^\circ}{\cos 132^\circ\cos 72^\circ-\cos 42^\circ\cos 18^\circ}=-\mathrm{tg}\,24^\circ$.

3.335. $\dfrac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ} = -1.$

3.336. $\dfrac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ} = 1.$

3.337. $\sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 10^\circ = 1/64.$

3.338. а) $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; б) $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

3.339. а) $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$; б) $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

3.340. $\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ.$

3.341. $\dfrac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ} = 3.$

3.342. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 1/16.$

3.343. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 3/16.$

3.344. $\sin \dfrac{3\pi}{10} - \sin \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{1}{2}.$

3.345. $\cos \dfrac{\pi}{5} + \cos \dfrac{2\pi}{5} + \cos \dfrac{4\pi}{5} + \cos \dfrac{6\pi}{5} = -\dfrac{1}{2}.$

3.346. $\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ = \dfrac{8}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ.$

3.347. $8 \cos \dfrac{4\pi}{9} \cos \dfrac{2\pi}{9} \cos \dfrac{\pi}{9} = 1.$

3.348. $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 8.$

3.349. $\dfrac{\sin\left(\alpha - \dfrac{3}{2}\pi\right) \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\alpha - \dfrac{5}{2}\pi\right)} = 1.$

3.350. $\cos 70^\circ + 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2 \cos^2 35^\circ.$

3.351. $1 - \cos\left(\dfrac{3}{2}\pi - 3\alpha\right) - \sin^2 \dfrac{3}{2}\alpha + \cos^2 \dfrac{3}{2}\alpha =$

$$= 2\sqrt{2} \cos \frac{3}{2}\alpha \sin\left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

3.352. $\dfrac{\cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi - 4\alpha) - \cos\left(\dfrac{5}{2}\pi + 6\alpha\right)}{4 \sin(5\pi - 3\alpha) \cos(\alpha - 2\pi)} =$

$$= \cos 2\alpha.$$

3.353. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4.$

3.354. $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ.$

Обчислити (3.355—3.367):

3.355. $\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$.

3.356. $\sin 20^\circ\cos 50^\circ\sin 60^\circ\cos 10^\circ$.

3.357. $\cos(3\pi/5)\cos(6\pi/5)$.

3.358. $\frac{\cos 68^\circ\cos 8^\circ-\cos 82^\circ\cos 22^\circ}{\cos 53^\circ\cos 23^\circ-\cos 67^\circ\cos 37^\circ}$.

3.359. $\frac{\cos 70^\circ\cos 10^\circ+\cos 80^\circ\cos 20^\circ}{\cos 69^\circ\cos 9^\circ+\cos 81^\circ\cos 21^\circ}$.

3.360. $\frac{\cos 67^\circ\cos 7^\circ-\cos 83^\circ\cos 23^\circ}{\cos 128^\circ\cos 68^\circ-\cos 38^\circ\cos 22^\circ}-\operatorname{tg}164^\circ$.

3.361. $\frac{\sin 22^\circ\cos 8^\circ+\cos 158^\circ\cos 98^\circ}{\sin 23^\circ\cos 7^\circ+\cos 157^\circ\cos 97^\circ}$.

3.362. $\frac{6\sin\alpha-7\cos\alpha+1}{8\sin\alpha+9\cos\alpha-1}$, якщо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=4$.

3.363. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)$, якщо $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\frac{3}{4}$.

3.364. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ і $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, якщо $\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{21}{65}$;

$\cos\alpha+\cos\beta=-\frac{27}{65}$; $\frac{5}{2}\pi<\alpha<3\pi$ і $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$.

3.365. $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, якщо $\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{27}{65}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=$

$=\frac{7}{9}$, $\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$ і $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$.

3.366. $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, якщо $\sin\alpha-\cos\alpha=n$.

3.367. $\frac{2\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Знаючи, що A, B і C — внутрішні кути деякого трикутника, довести справедливість рівностей (3.368—3.374):

3.368. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

3.369. $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A+\sin B-\sin C}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$.

3.370. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

3.371. $\frac{\sin C}{\cos A\cos B}=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B$.

3.372. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C =$

$$= -4\cos\frac{3}{2}A\cos\frac{3}{2}B\cos\frac{3}{2}C.$$

3.373. $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4\sin 2A\sin 2B\sin 2C.$

3.374. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$

3.375. Знайти $\operatorname{tg}(x/2)$, коли відомо, що $\sin x + \cos x = 1/5$.

3.376. Знаючи, що $\operatorname{tg}(\alpha/2) = m$, знайти $\frac{1 - 2\sin^2(\alpha/2)}{1 + \sin\alpha}$.

3.377. Знайти значення виразу $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}(\alpha/2) - \operatorname{tg}(\alpha/2)}$, коли відомо, що $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.

3.378. Відомо, що $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{p}{q}$. Знайти $\operatorname{ctg}\beta$.

3.379. Знаючи, що $\sin\alpha + \cos\alpha = m$, знайти $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

3.380. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = p/q$. Знайти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$.

3.381. Знайти $\cos 2\alpha$, коли відомо, що $2\operatorname{ctg}^2\alpha + 7\operatorname{ctg}\alpha + 3 = 0$ і число α задовольняє нерівності: а) $3\pi/2 < \alpha < 7\pi/4$; б) $7\pi/4 < \alpha < 2\pi$.

3.382. Знайти $\sin 2\alpha$, коли відомо, що $2\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$ і число α задовольняє нерівності: а) $\pi < \alpha < 5\pi/4$; б) $5\pi/4 < \alpha < 3\pi/2$.

3.383. Відомо, що $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{p}{q}$. Знайти $\operatorname{tg}\beta$.

3.384. Довести, що вираз

$$\frac{1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)}$$

не залежить від α, де $\alpha \neq \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{12}$.

3.385. Довести рівність $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \times$ $\times \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.

3.386. Довести, що вираз $\operatorname{tg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4\alpha + \frac{\pi}{2}\right) +$ $+ \cos\left(4\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)$ не залежить від α, якщо $\alpha \neq \frac{\pi(4n + 3)}{8}$.

3.387. Довести, що вираз

$$\frac{1-\cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$$

не залежить від α, якщо $\alpha \neq \pi n/2$.

3.388. Довести, що вираз $\sin(250^\circ+\alpha)\cos(200^\circ-\alpha)-\cos 240^\circ\cos(220^\circ-2\alpha)$ не залежить від α.

3.389. Довести, що вираз $\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha+\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)$ не залежить ні від α, ні від φ.

3.390. Вивести формулу $\cos(n+1)\alpha=2\cos\alpha\cos n\alpha-\cos(n-1)\alpha$, де n — довільне дійсне число, і за її допомогою подати $\cos 3\alpha$ і $\cos 4\alpha$ у вигляді многочленів від $\cos\alpha$.

3.391. Довести, що

$$4\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos(3\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

3.392. Дано, що $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$; $\alpha+\beta\neq 2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Знайти $\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}(\beta/2)$.

3.393. Показати, що коли p стале, то функція $f(\alpha)=\frac{p\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{p\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$ також є сталою.

3.394. Дано функцію $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$. Знайти $f(\alpha)$, коли відомо, що $\sin 2\alpha=2/3$.

3.395. Довести, що коли $\alpha+\beta=60^\circ$ $(\alpha>0, \beta>0)$, то $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\leqslant 1/3$.

Група В

Довести тотожності (3.396—3.409):

3.396. $$\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha.$$

3.397. $$\operatorname{ctg}(270^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(210^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(150^\circ-2\alpha)=3\operatorname{tg}6\alpha.$$

3.398. $$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos^{-1}2\alpha+2\cos(4\alpha-2\pi)=\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

3.399. $$8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=-2\sin(7\alpha/2)\sin(\alpha/2).$$

3.400. $$\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

3.401. $$\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)\sin^3(\pi-2\alpha)-\cos(6\alpha-\pi)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos^3 4\alpha.$$

3.402. $8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 =$
$= 2\cos(7\alpha/2)\cos(\alpha/2)$.

3.403. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha-\beta)$.

3.404. $$\frac{8\cos^4\alpha - 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 1}{8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1} = -\operatorname{tg}\frac{7\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

3.405. $$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

3.406. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha - \ldots - 2^n\operatorname{tg}2^n\alpha =$
$= 2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha$,
n — будь-яке натуральне ціле або нуль.

3.407. $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cdots + \cos(2n-1)\alpha = \dfrac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$,
n — число доданків.

3.408. $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cdots + \cos^2 n\alpha = \dfrac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha} +$
$+ \dfrac{n}{2}$, n — число доданків.

3.409. $\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \cdots + \sin^2 n\alpha = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}$.

Спростити вирази (3.410—3.412):

3.410. $\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha + \cos^3 2\alpha\sin 6\alpha$.

3.411. $3\sin\alpha\cos 3\alpha + 9\sin\alpha\cos\alpha - \sin 3\alpha\cos 3\alpha -$
$- 3\sin 3\alpha\cos\alpha$.

3.412. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 1$.

Перетворити в добуток (3.413—3.415):

3.413. $\sin^3\alpha\cos 3\alpha + \cos^3\alpha\sin 3\alpha$.

3.414. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\cos^{-2}\alpha - 1} + \dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin^{-2}\alpha - 1}\right) + \operatorname{ctg}2\alpha + \cos 2\alpha +$
$+ \sin 2\alpha$.

3.415. $\cos 22\alpha + 3\cos 18\alpha + 3\cos 14\alpha + \cos 10\alpha$.

Довести справедливість рівностей (3.416—3.440):

3.416. $\cos\dfrac{\pi}{33}\cos\dfrac{2\pi}{33}\cos\dfrac{4\pi}{33}\cos\dfrac{8\pi}{33}\cos\dfrac{16\pi}{33} = \dfrac{1}{32}$.

3.417. $$3\sin\frac{2\pi}{17} + \sin\frac{4\pi}{17} - \sin\frac{6\pi}{17} - \frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{17} = 8\sin^3\frac{2\pi}{17}\cos^2\frac{\pi}{17}.$$

3.418. $\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}=\frac{1}{32}.$

3.419. $\operatorname{tg} 20^\circ \cos^{-1}20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \cos^{-1}40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \cos^{-1}60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ \cos^{-1}80^\circ =$
$= 48.$

3.420. $\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \times$
$\times \sin 80^\circ = 3/256.$

3.421. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\ldots\frac{12\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}=$
$=-1/2^{14}.$

3.422. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\times$
$\times\cos\frac{7\pi}{15}=1/2^7.$

3.423. $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=$
$=0{,}5\sin 25^\circ \sin^{-1} 5^\circ.$

3.424. $\operatorname{ctg} 80^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ+\operatorname{ctg} 70^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ+\operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{ctg} 80^\circ=1.$
3.425. $\operatorname{ctg} 70^\circ+4\cos 70^\circ=\sqrt{3}.$
3.426. $\operatorname{tg} 9^\circ-\operatorname{tg} 27^\circ-\operatorname{ctg} 27^\circ+\operatorname{ctg} 9^\circ=\operatorname{tg} 15^\circ+\operatorname{ctg} 15^\circ.$
3.427. $\cos 50^\circ+8\cos 200^\circ\cos 220^\circ\cos 80^\circ=2\sin^2 65^\circ.$
3.428. $\sin 18^\circ \sin 54^\circ=1/4.$
3.429. $\sin^2(\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arcctg}(-1/2))=1/2.$
3.430. $\sin^2(\operatorname{arcctg}(1/2)-\operatorname{arcctg}(-1/3))=1/2.$

3.431. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{7}{5}.$

3.432. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{1}{5}.$

3.433. $\cos(2\operatorname{arctg} 2)-\sin(4\operatorname{arctg} 3)=9/25.$

3.434. $\arccos\frac{36}{85}-\arccos\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}.$

3.435. $\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{36}{85}=\arccos\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right).$

3.436. $\cos(2\operatorname{arcctg} 7)=\sin(4\operatorname{arcctg} 3).$
3.437. $\cos(11\pi/5)-\cos(2\pi/5)=1/2.$
3.438. $\sin 84^\circ \sin 24^\circ \sin 48^\circ \sin 12^\circ=1/16.$
3.439. $\operatorname{tg} 830^\circ+\operatorname{tg} 770^\circ+\operatorname{tg} 740^\circ=\operatorname{tg} 470^\circ \operatorname{tg} 410^\circ \operatorname{tg} 380^\circ.$
3.440. $\operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 24^\circ+\operatorname{tg} 24^\circ \operatorname{tg} 54^\circ+\operatorname{tg} 54^\circ \operatorname{tg} 12^\circ=1.$

Обчислити **(3.441—3.462):**

3.441. $\operatorname{ctg}\left(\frac{11}{4}\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{11}{4}\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right).$

3.442. $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2\alpha}{b}\right).$

3.443. $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}-2\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)$.

3.444. $\cos^6\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)-\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

3.445. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$.

3.446. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

3.447. $\arccos(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$.

3.448. $\arcsin(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$.

3.449. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$, де $a<0$.

3.450. $\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)+\cos^6\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

3.451. $\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

3.452. $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

3.453. $\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

3.454. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

3.455. $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

3.456. $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

3.457. $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

3.458. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-3\operatorname{arcctg}(-2)\right)$.

3.459. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

3.460. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

3.461. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)$.

3.462. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

3.463. Знайти $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, коли відомо, що $\sin x-\cos x=\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

3.464. Довести, що коли $\sin\alpha=1/3$, $\sin\beta=1/(3\sqrt{11})$, $\sin\gamma=3/\sqrt{11}$ (α, β, γ — гострі додатні кути), то $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

3.465. Знаючи, що $\operatorname{tg}\alpha=m$, знайти

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\frac{5\pi}{12}\sin\left(\frac{5\pi}{12}-2\alpha\right).$$

3.466. Відомо, що $\cos 2\alpha=m$. Знайти $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

3.467. Знайти $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha$, коли відомо, що $\cos 2\alpha=m$.

3.468. Знайти значення виразу $\frac{\sin 4\alpha+\sin 10\alpha-\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+1-2\sin^2 4\alpha}$, коли відомо, що $\sin\alpha-\cos\alpha=m$.

3.469. Знаючи, що $\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{4}{5}$ і що $0<x<\frac{\pi}{2}$, знайти $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

3.470. Нехай A, B і C — внутрішні кути деякого трикутника. Довести, що $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C=2$.

3.471. Довести, що коли $\cos 2\alpha=\cos 2\beta\cos 2\gamma$, то $1+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\sin^{-2}\gamma$.

3.472. Нехай A, B і C — внутрішні кути деякого трикутника. Довести, що

$$\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C=$$
$$=(-1)^n\cdot 4\cos\frac{(2n+1)A}{2}\cos\frac{(2n+1)B}{2}\cos\frac{(2n+1)C}{2},$$

де n — ціле число.

3.473. Нехай A, B і C — внутрішні кути деякого трикутника. Довести, що $\sin 2nA+\sin 2nB+\sin 2nC=(-1)^{n+1}\cdot 4\sin nA\sin nB\times\sin nC$, де n — ціле число.

3.474. Довести, що рівність $(\sin\varphi)^x+(\cos\varphi)^x=1$ виконується для всіх $\varphi\in(0;\pi/2)$ в тому і тільки в тому випадку, коли $x=2$.

3.475. Довести, що вираз $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)+2\sin^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi$ не залежить від φ.

3.476. Знайти найбільше значення виразу $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-4\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17\pi}{8}-4\alpha\right)$ при $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/8$.

3.477. Знайти найбільше значення виразу $\frac{\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}{1+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right)}$ при $0<\alpha<\pi/8$.

3.478. Довести таке твердження: для того щоб один із кутів трикутника ABC дорівнював $60°$, необхідно й достатньо, щоб виконувалась рівність $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$.

3.479. Довести таке твердження: для того щоб один із кутів трикутника ABC дорівнював $36°$ або $108°$, достатньо, щоб виконувалась рівність $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0$.

3.480. Довести таке твердження: для того щоб один із кутів трикутника ABC дорівнював 36° або 108°, необхідно, щоб виконувалась рівність $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$.

3.481. Знайти найменше значення виразу $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$ при $0 < \alpha < \pi/4$.

3.482. Знайти найбільше значення виразу $\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{\operatorname{ctg}(\alpha/2) - \operatorname{tg}(\alpha/2)}$ при $0 < \alpha < \pi/2$.

3.483. Довести, що коли $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$, то $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ і $\cos 2\alpha = -\cos 2\beta$.

3.484. Знаючи, що $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = \dfrac{4}{3}$ і $0 < x < \pi/2$, знайти $\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{5x}{2}$.

3.485. Знайти найбільше значення виразу $\dfrac{1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha}$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

3.486. Знайти найбільше значення виразу $\dfrac{1}{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

3.487. Знаючи, що $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) = \dfrac{3}{5}$, знайти $\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{5x}{2}$.

3.488. Довести, що коли для деяких чисел α, β і γ виконується рівність $(1 - \sin\alpha)(1 - \sin\beta)(1 - \sin\gamma) = (1 + \sin\alpha)(1 + \sin\beta)(1 + \sin\gamma)$, то тоді кожна з частин цієї рівності дорівнює $|\cos\alpha\cos\beta \times \cos\gamma|$.

3.489. Довести, що для чисел φ, які задовольняють нерівності $0 < \varphi < \pi/4$, виконується рівність

$$1 - \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi + \dots = \frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2\sin(\pi/4 - \varphi)}.$$

3.490. Знайти найменше значення виразу $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

3.491. Знайти найменше значення виразу $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

3.492. Показати, що коли α стале, то функція $f(x) = \cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) - 2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha + x)$ також є сталою.

3.493. Знайти суму $1 + \cos 4\alpha + \cos 8\alpha + \dots + \cos 4n\alpha$.

3.494. Показати, що коли $x = \operatorname{tg} 5^\circ$, $y = \operatorname{tg} 20^\circ$ і $z = \operatorname{tg} 65^\circ$, то $xy + yz + zx = 1$

3.495. Довести, що $\operatorname{tg} 142^\circ 30' + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$ є цілим числом.

3.496. Нехай A, B, C — кути трикутника. Довести, що $8\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2) \leqslant 1$.

3.497. Показати, що коли $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = \pi$, то $x + y + z = xyz$.

3.498. Показати, що коли $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = \pi/2$, то $xy + yz + zx = 1$.

3.499. Нехай A, B, C — кути трикутника. Довести, що $8\cos A \times \cos B\cos C \leqslant 1$.

3.500. Нехай A, B, C — кути трикутника. Використовуючи нерівність $\cos A\cos B\cos C \leqslant 1/8$, довести, що $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant 9/4$.

Глава 4
ПРОГРЕСІЇ

Основні формули

1°. Арифметична прогресія (a_1 — перший член; d — різниця; n — число членів; a_n — n-й член; S_n — сума n перших членів):

$$a_n = a_1 + d(n-1); \tag{4.1}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n; \tag{4.2}$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1; \tag{4.3}$$

$$a_k + a_m = a_p + a_q, \text{ де } k + m = p + q. \tag{4.4}$$

2°. Геометрична прогресія (b_1 — перший член; q — знаменник ($q \neq 0$); n — число членів; b_n — n-й член ($b_n \neq 0$); S_n — сума n перших членів):

$$b_n = b_1 q^{n-1}; \tag{4.5}$$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1); \tag{4.6}$$

$$b_k^2 = b_{k-1} b_{k+1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1; \tag{4.7}$$

$$b_k b_m = b_p b_l, \text{ де } k + m = p + l. \tag{4.8}$$

Якщо $|q| < 1$, то при необмеженому збільшенні n ($n \to \infty$) сума S_n прямує до числа $\frac{b_1}{1-q}$, яке називають сумою нескінченної геометричної прогресії і позначають буквою S:

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \tag{4.9}$$

Приклад 1. Сума перших трьох членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 21. Якщо від перших двох членів цієї прогресії відняти по 1, а до третього члена додати 2, то одержані три члени утворюватимуть геометричну прогресію. Знайти суму восьми перших членів геометричної прогресії.

△ Згідно з формулою (4.2), маємо $S_3 = \frac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3 = 21$ або $a_1 + d = 7$. За умовою $a_1 - 1$, $a_1 + d - 1$, $a_1 + 2d + 2$ — три послідовні члени геометричної прогресії. Використовуючи формулу (4.7), дістаємо $(a_1 + d - 1)^2 = (a_1 + 2d + 2)(a_1 - 1)$, звідки після заміни $a_1 = 7 - d$ і розкриття дужок приходимо до квадратного рівняння $d^2 + 3d - 18 = 0$, тобто $d_1 = 3$, $d_2 = -6$. Умову задовольняє тільки $d_1 = 3$; тоді $a_1 = 4$. Далі знаходимо $b_1 = a_1 - 1 = 3$, $b_2 = a_1 + d - 1 = 6$ і, отже, $q = 2$. Нарешті, за формулою (4.6) дістаємо

$$S_8 = \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 765. \ ▲$$

Приклад 2. Знайти суму шести перших членів арифметичної прогресії, у якої сума будь-якого числа членів дорівнює почетвереному квадрату цього числа.

△ Використовуючи умову і формулу (4.2), маємо

$$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 4n^2, \text{ або } 2a_1 - d = (8-d)\,n.$$

Остання рівність повинна виконуватись при певних a_1, d і при будь-яких значеннях n, а це можливо лише тоді, коли $d = 8$. Отже, $a_1 = 4$. Тоді знаходимо

$$S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 144. \ ▲$$

Приклад 3. Відомо, що при будь-якому n сума n перших членів деякої числової послідовності $\{u_n\}$ виражається формулою $S_n = n^2 + 2n$. Знайти дев'ятий член цієї послідовності і довести, що $\{u_n\}$ є арифметичною прогресією.

△ Позначимо n-й член послідовності через u_n. Тоді $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$; $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, або $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$. Отже, $u_9 = S_9 - S_8 = 9^2 + 18 - 8^2 - 16 = 19$. Далі розглянемо різницю двох будь-яких суміжних членів послідовності

$$u_{n+1} - u_n = (S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1}) =$$

$$= (n+1)^2 + 2(n+1) - 2n^2 - 4n + (n-1)^2 + 2(n-1) = 2.$$

Це означає, що $\{u_n\}$ є арифметичною прогресією з різницею $d = 2$. ▲

Приклад 4. Розв'язати рівняння $1 + 2x + 4x^2 + \ldots + (2x)^n + \ldots = 3{,}4 - 1{,}2x$, коли відомо, що $|x| < 0{,}5$.

△ Ліва частина рівняння є сумою нескінченної геометричної прогресії, причому $b_1 = 1$ і $|q| = |2x| < 1$, оскільки $|x| < 0{,}5$. Згідно з формулою (4.9), маємо

$$1 + 2x + 4x^2 + \cdots = \frac{1}{1-2x}$$

або

$$\frac{1}{1-2x} = 3{,}4 - 1{,}2x, \quad (3{,}4 - 1{,}2x)(1-2x) = 1,$$

$$2{,}4x^2 - 8x + 2{,}4 = 0, \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0,$$

звідки $x_1 = 3$, $x_2 = 1/3$. Умову задовольняє тільки корінь $x = 1/3$. ▲

Група А

4.001. За виготовлення і встановлення самого нижнього залізобетонного кільця колодязя заплатили 26 крб., а за кожне наступне кільце платили на 2 крб. менше, ніж за попереднє. Крім того, після закінчення роботи заплатили ще 40 крб. Середня вартість виготовлення і встановлення одного кільця виявилась рівною $22\frac{4}{9}$ крб. Скільки кілець було встановлено?

4.002. Сума першого і п'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 5/3, а добуток третього і четвертого її членів дорівнює 65/72. Знайти суму 17 перших членів цієї прогресії.

4.003. У змаганнях із стрільби за кожний промах в серії з 25 пострілів стрілець діставав штрафні очки: за перший промах — одне штрафне очко, а за кожний наступний — на 1/2 очка більше, ніж за попередній. Скільки разів попав у ціль стрілець, що здобув 7 штрафних очків.

4.004. Знайти три перші члени a_1, a_2, a_3 арифметичної прогресії, коли відомо, що $a_1 + a_3 + a_5 = -12$ і $a_1a_3a_5 = 80$.

4.005. Знайти число членів арифметичної прогресії, у якої сума всіх членів дорівнює 112, добуток другого члена на різницю прогресії дорівнює 30, а сума третього і п'ятого членів дорівнює 32. Записати три перші члени цієї прогресії.

4.006. Турист, підіймаючись вгору, у першу годину досягнув висоти 800 м, а кожну наступну годину підіймався на висоту на 25 м меншу, ніж в попередню годину. За скільки годин він досягне висоти 5700 м?

4.007. При діленні дев'ятого члена арифметичної прогресії на другий член у частці дістаємо 5, а при діленні тринадцятого члена на шостий член у частці дістаємо 2 і в остачі 5. Знайти перший член і різницю прогресії.

4.008. Знайти чотири числа, що утворюють геометричну прогресію, у якої сума крайніх членів дорівнює — 49, а сума середніх членів дорівнює 14.

4.009. Знайти третій член нескінченної геометричної прогресії із знаменником $|q| < 1$, сума якої дорівнює 8/5, другий член дорівнює — 1/2.

4.010. Знайти три перші члени нескінченної геометричної прогресії із знаменником $|q| < 1$, сума якої дорівнює 6, а сума п'яти перших членів дорівнює 93/16.

4.011. Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 2, а сума квадратів цих самих чисел дорівнює 14/9. Знайти ці числа.

4.012. Сума третього і дев'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 8. Знайти суму 11 перших членів цієї прогресії.

4.013. Сума трьох перших членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 15. Якщо від перших двох членів цієї прогресії відняти по 1, а до третього члена додати 1, то знайдені три числа утворюватимуть геометричну прогресію. Знайти суму 10 перших членів арифметичної прогресії.

4.014. Відомо, що при будь-якому n сума S_n членів деякої арифметичної прогресії виражається формулою $S_n = 4n^2 - 3n$. Знайти три перші члени цієї прогресії.

4.015. Обчислити $(1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + \ldots + 199^2) -$
$- (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 + \ldots + 200^2)$.

4.016. Знайти чотири числа, що утворюють геометричну прогресію, в якій другий член менший від першого на 35, а третій більший за четвертий на 560.

4.017. Знайти чотири числа, що утворюють геометричну прогресію, в якої третій член більший за перший на 9, а другий більший за четвертий на 18.

4.018. Знаменник геометричної прогресії дорівнює 1/3, четвертий член цієї прогресії дорівнює 1/54, а сума всіх її членів дорівнює 121/162. Знайти число членів прогресії.

4.019. Знайти перший член і знаменник геометричної прогресії, коли відомо, що $a_4 - a_2 = -45/32$ і $a_6 - a_4 = -45/512$.

4.020. Знайти перший і п'ятий члени геометричної прогресії, коли відомо, що її знаменник дорівнює 3, а сума шести перших членів дорівнює 1820.

4.021. Арифметична прогресія має таку властивість: при будь-якому n сума її n перших членів дорівнює $5n^2$. Знайти різницю цієї прогресії і три перші її члени.

4.022. Добуток трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 1728, а їхня сума дорівнює 63. Знайти перший член і знаменник цієї прогресії.

4.023. Розв'язати рівняння:

а) $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = 13/6$, де $|x| < 1$;

б) $\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 7/2$, де $|x| < 1$.

4.024. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 429, різниця її дорівнює —22. Скільки членів цієї прогресії треба взяти, щоб їхня сума дорівнювала 3069?

4.025. Сума нескінченної геометричної прогресії з знаменником $|q| < 1$ дорівнює 16, а сума квадратів членів цієї самої прогресії дорівнює 153,6. Знайти четвертий член і знаменник прогресії.

4.026. Знайти натуральні числа, що утворюють арифметичну прогресію, коли добутки трьох і чотирьох перших її членів дорівнюють відповідно 6 і 24.

4.027. Сума третього і дев'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 6, а їхній добуток дорівнює 135/16. Знайти суму 15 перших членів цієї прогресії.

4.028. Знайти число членів скінченної геометричної прогресії, в якої перший, другий і останній члени відповідно дорівнюють 3, 12 і 3072.

4.029. Знайти суму всіх додатних парних двозначних чисел, що діляться на 3 без остачі.

4.030. Знайти знаменник q нескінченної геометричної прогресії ($|q| < 1$), в якої кожний член в чотири рази більший за суму всіх її наступних членів.

4.031. Відомо, що внутрішні кути деякого опуклого многокутника, найменший серед яких дорівнює 120°, утворюють арифметичну прогресію з різницею 5°. Визначити число сторін цього многокутника.

4.032. Добуток третього і шостого членів арифметичної прогресії дорівнює 406. При діленні дев'ятого члена цієї прогресії на її четвертий член в частці дістаємо 2, а в остачі 6. Знайти перший член і різницю прогресії.

4.033. У нескінченній геометричній прогресії з додатними членами і із знаменником $|q| < 1$ сума трьох перших членів дорівнює 10,5, а сума прогресії 12. Знайти прогресію.

4.034. Знайти три перші члени арифметичної прогресії, в якої сума будь-якого числа членів дорівнює потроєному квадрату цього числа.

4.035. Від ділення тринадцятого члена арифметичної прогресії на третій член у частці дістаємо 3, а від ділення вісімнадцятого члена на сьомий член в частці дістаємо 2 і в остачі 8. Знайти різницю і перший член прогресії.

Група Б

4.036. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 21, а сума їхніх квадратів дорівнює 189. Знайти перший член і знаменник цієї прогресії.

4.037. Довести, що будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним між будь-якими двома членами, рівновіддаленими від нього.

4.038. Відомо, що деяка арифметична прогресія містить члени a_{2n} і a_{2m} такі, що $a_{2n}/a_{2m} = -1$. Чи існує член цієї прогресії, що дорівнює нулю? Якщо це так, то який номер цього члена.

4.039. Дано дві арифметичні прогресії. Перший і п'ятий члени першої прогресії дорівнюють відповідно 7 і -5. У другої прогресії перший член дорівнює 0, а останній член дорівнює 7/2. Знайти суму членів другої прогресії, коли відомо, що треті члени обох прогресій рівні між собою.

4.040. Три числа утворюють геометричну прогресію. Якщо від третього числа відняти 4, то числа утворюватимуть арифметичну прогресію. Якщо від другого і третього членів здобутої арифметичної прогресії відняти по 1, то знову дістанемо геометричну прогресію. Знайти ці числа.

4.041. Знайти ціле додатне число n із рівняння

$$(3+6+9+\cdots+3(n-1))+\left(4+5{,}5+7+\cdots+\frac{8+3n}{2}\right)=$$
$$=137.$$

4.042. Знайти суму всіх парних тризначних чисел, що діляться на 3.

4.043. Сума нескінченної геометричної прогресії із знаменником $|q|<1$ дорівнює 4, а сума кубів її членів дорівнює 192. Знайти перший член і знаменник прогресії.

4.044. Знайти чотири числа, перші три з яких утворюють геометричну прогресію, а останні три — арифметичну прогресію. Сума крайніх чисел дорівнює 21, а сума середніх дорівнює 18.

4.045. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 91. Якщо до цих членів додати відповідно 25, 27 і 1, то дістанемо три числа, що утворюють арифметичну прогресію. Знайти сьомий член геометричної прогресії.

4.046. Три числа утворюють геометричну прогресію. Якщо друге число збільшити на 2, то прогресія буде арифметичною, а якщо після цього збільшити останнє число на 9, то прогресія знову буде геометричною. Знайти ці числа.

4.047. Знайти три числа, що утворюють геометричну прогресію, коли відомо, що їхній добуток дорівнює 64, а їхнє середнє арифметичне дорівнює 14/3.

4.048. Довести, що будь-який член геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому пропорційному між будь-якими членами, рівновіддаленими від нього.

4.049. Знайти суму семи перших членів нескінченної геометричної прогресії із знаменником $|q|<1$, якщо її другий член дорівнює 4, а відношення суми квадратів членів до суми членів дорівнює 16/3.

4.050. Знайти суму всіх тризначних чисел, що діляться на 7.

4.051. Знайти суму

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

4.052. Дано дві нескінченні геометричні прогресії із знаменником $|q|<1$, що відрізняються лише знаком їхніх знаменників. Суми цих прогресій відповідно дорівнюють S_1 і S_2. Знайти суму нескінченної геометричної прогресії, складеної з квадратів членів будь-якої з заданих прогресій.

4.053. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — послідовні члени геометричної прогресії, S_n — сума її n перших членів. Довести, що

$$S_n = a_1 a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right).$$

4.054. Довести, що коли числа a, b і c утворюють арифметичну прогресію, то числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$ і $b^2 + bc + c^2$ в зазначеному порядку також утворюють арифметичну прогресію.

4.055. Перший член деякої нескінченної геометричної прогресії з знаменником $|q| < 1$ дорівнює 1, а її сума дорівнює S. Із квадратів членів цієї прогресії складено нову нескінченну геометричну прогресію. Знайти її суму.

4.056. Знайти п'ятий член зростаючої геометричної прогресії, знаючи, що її перший член дорівнює $7 - 3\sqrt{5}$ і що кожний її член, починаючи з другого, дорівнює різниці двох суміжних з ним членів.

4.057. В арифметичній прогресії сума її m перших членів дорівнює сумі n перших членів ($m \neq n$). Довести, що в цьому випадку сума її перших $m + n$ членів дорівнює нулю.

4.058. Відомо, що L, M, N — відповідно l-й, m-й, n-й члени геометричної прогресії. Показати, що $L^{m-n} M^{n-l} N^{l-m} = 1$.

4.059. Числа a, b, c, одне з яких кратне 7, утворюють арифметичну прогресію з різницею 7. Показати, що число abc ділиться на 294.

4.060. Показати, що для всякої арифметичної прогресії при будь-якому n виконується рівність $S_{2n} = S_n + \frac{1}{3} S_{3n}$ (S_k — сума k перших членів прогресії).

4.061. Розв'язати рівняння

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \ldots + \frac{1}{x} = 3,$$

де x — ціле додатне число

4.062. Число 180 зобразити у вигляді суми чотирьох доданків таких, щоб вони утворювали геометричну прогресію, у якої третій член був би більший за перший на 36.

4.063. Дано дві геометричні прогресії, що мають однакову кількість членів. Перший член і знаменник першої прогресії дорівнюють відповідно 20 і 3/4, а перший член і знаменник другої прогресії дорівнюють відповідно 4 і 2/3. Якщо перемножити члени цих прогресій з однаковими номерами, то сума всіх таких добутків дорівнюватиме 158,75. Знайти число членів цих прогресій.

4.064. Три числа, з яких третє дорівнює 12, утворюють геометричну прогресію. Якщо замість 12 взяти 9, то ці три числа утворюватимуть арифметичну прогресію. Знайти ці числа.

4.065. У скінченній геометричній прогресії відомо її перший член a, останній член b і суму S всіх її членів. Знайти суму квадратів всіх членів цієї прогресії.

4.066. У деякій геометричній прогресії, що містить $2n$ додатних членів, добуток першого члена на останній дорівнює 100. Знайти суму десяткових логарифмів всіх членів прогресії.

4.067. Сума трьох чисел дорівнює 11/18, а сума обернених їм чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 18. Знайти ці числа.

4.068. Різниця арифметичної прогресії відмінна від нуля. Числа, що дорівнюють добутку першого члена цієї прогресії на другий, другого члена на третій і третього на перший, у зазначеному порядку утворюють геометричну прогресію. Знайти її знаменник.

Група В

4.069. Знайти тризначне число, цифри якого утворюють геометричну прогресію. Якщо від цього числа відняти 792, то дістанемо число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку. Якщо від цифри, що виражає число сотень, відняти 4, а решту цифр шуканого числа залишити без змін, то дістанемо число, цифри якого утворюють арифметичну прогресію.

4.070. Відомо, що при будь-якому n сума n перших членів деякої числової послідовності виражається формулою $S_n = 2n^2 + 3n$. Знайти десятий член цієї послідовності і довести, що ця послідовність є арифметичною прогресією.

4.071. Знайти суму 19 перших членів арифметичної прогресії a_1, a_2, a_3, ..., коли відомо, що $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

4.072. Довжини сторін трикутника є трьома послідовними членами зростаючої геометричної прогресії. Порівняти знаменник цієї прогресії з числом 2.

4.073. Знайти суму чотирьох перших членів геометричної прогресії, яка має ту властивість, що її три перші члени, сума яких дорівнює 148/9, є одночасно першим, четвертим і восьмим членами деякої арифметичної прогресії.

4.074. Числа a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} утворюють арифметичну прогресію. Довести, що

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

4.075. Послідовність чисел 1, 8, 22, 43, ... має ту властивість, що різниці двох суміжних членів (наступного і попереднього) утворюють арифметичну прогресію: 7, 14, 21, ... Знайти номер члена послідовності, що дорівнює 35 351.

4.076. Довести таке твердження: для того щоб три числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{b+a}$ утворювали арифметичну прогресію, необхідно й достатньо, щоб числа a^2, b^2 і c^2 також утворювали арифметичну прогресію.

4.077. Сума чотирьох чисел, що утворюють геометричну прогресію, дорівнює — 40, а сума їхніх квадратів дорівнює 3280. Знайти цю прогресію.

4.078. Дано дві прогресії: геометрична з додатними членами a_n (знаменник дорівнює q) і зростаюча арифметична з членами b_n (різниця дорівнює d). Знайти x з умови $\log_x a_n - b_n = \log_x a_1 - b_1$. Чи завжди існує розв'язок?

4.079. Знайти суму $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + \ldots + n(2^n - 1)$.

4.080. Знайти суму $1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 27 + \ldots + (2n - 1) \cdot 3^n$.

4.081. Знайти добуток n перших членів геометричної прогресії, якщо відомо їхню суму S і суму σ їхніх зворотних величин.

4.082. Корені рівняння $x^4 - 10x^2 + a = 0$ утворюють арифметичну прогресію. Знайти a.

4.083. Довести таке твердження: для того щоб три числа x, y і z у зазначеному порядку утворювали геометричну прогресію, необхідно й достатньо, щоб виконувалась рівність $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = (xy + yz)^2$.

4.084. У змаганнях з волейболу брали участь n команд. Кожна команда грала з усіма іншими по одному разу. За кожну гру команді, що виграє, зараховувалось одне очко, за програш очки не нараховувались; нічиїх у волейболі немає. Після змагань з'ясувалося, що здобуті командами очки утворюють арифметичну прогресію. Скільки очків набрала команда, що посіла останнє місце?

4.085. У кут, що містить 60°, вписано п'ять кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з другого, дотикається попереднього. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу меншого круга.

Глава 5

КОМБІНАТОРИКА І БІНОМ НЬЮТОНА

Основні формули

Число перестановок із n елементів визначається за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \ldots (n-1)\, n = n!. \qquad (5.1)$$

Число сполучень із n елементів по m визначається за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}; \quad C_n^0 = 1. \qquad (5.2)$$

Справедливі такі властивості сполучень:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \qquad (5.3)$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}. \qquad (5.4)$$

Число розміщень із n елементів по m визначається за формулою

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (5.5)$$

Формула бінома Ньютона має вигляд

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n, \qquad (5.6)$$

або

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + \cdots + b^n,$$

де n — натуральне число і $C_n^k a^{n-k} b^k = T_{k+1}$ є $(k+1)$-й член у розкладі бінома ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n:

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n. \qquad (5.7)$$

Приклад 1. Команда деякої ЕОМ записується у вигляді набору з восьми цифрових знаків — нулів і одиниць. Яка максимальна кількість різних команд?

△ Оскільки для кожного елемента набору можливі два значення (0 або 1), то максимальна кількість різних команд дорівнює $\underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{8\ \text{разів}} = 256$. Можна міркувати по-іншому: розглянути всі двійкові числа від 00000000 до $11111111_2 = 255_{10}$. ▲

Приклад 2. У розкладі $(1 + x)^n$ четвертий член дорівнює 0,96. Знайти значення x і n, якщо сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 1024.

△ Оскільки сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n, а $1024 = 2^{10}$, то $n = 10$. Четвертий член розкладу $T_4 = C_n^3 x^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 = 120x^3$. Згідно з умовою, $120x^3 = 0{,}96$, звідки $x^3 = 0{,}008$, тобто $x = 0{,}2$. ▲

Приклад 3. При яких значеннях x і y можлива рівність

$$C_y^x : C_{y+2}^x : A_y^x = 1 : 3 : 24?$$

△ Застосовуючи формули (5.2) і (5.5), маємо

$$\frac{y!}{x!\,(y-x)!} : \frac{(y+2)!}{x!\,(y-x+2)!} = \frac{1}{3}; \quad C_y^x : (x! \cdot C_y^x) = 1 : 24.$$

Із другого рівняння дістаємо $x! = 24$, тобто $x = 4$ (оскільки $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$), а з першого рівняння знаходимо

$$\frac{(y-x+1)(y-x+2)}{(y+1)(y+2)} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки $x = 4$, то $y^2 - 9y + 8 = 0$, звідки $y = 1$ і $y = 8$; $y = 1$ не задовольняє умову ($y > x = 4$). Отже, $x = 4$, $y = 8$. ▲

Група А

Розв'язати рівняння **(5.001—5.005)**:

5.001. а) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$; б) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$.

5.002. а) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$; б) $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \dfrac{24}{23}$.

5.003. а) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$; б) $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$.

5.004. а) $\dfrac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$; б) $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$.

5.005. а) $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3} = 210$; б) $A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} = \dfrac{30}{7} P_x$.

5.006. Показати, що при будь-якому k сума $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2$ є точним квадратом.

5.007. Довести тотожності:

а) $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$; б) $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$.

5.008. Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ дорівнює 64. Визначити доданок, що не містить x.

5.009. Сума біноміальних коефіцієнтів з непарними номерами в розкладі $(ax + x^{-1/4})^n$ дорівнює 512. Знайти доданок, що не містить x.

5.010. При яких значеннях x четвертий доданок розкладу $(5 + 2x)^{16}$ більший за два суміжних з ним доданки?

5.011. Який найбільший коефіцієнт розкладу $(a + b)^n$, якщо сума всіх коефіцієнтів дорівнює 4096?

5.012. У розкладі $\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt[10]{\frac{a^7}{b^3}}\right)^n$ є член, що містить ab. Знайти цей член.

5.013. Сума коефіцієнтів другого і третього доданків розкладу $\left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ дорівнює 25,5. Записати член, що не містить x.

5.014. При якому значенні x четвертий доданок розкладу $(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}})^m$ в 20 разів більший m, якщо біноміальний коефіцієнт четвертого доданка відноситься до біноміального коефіцієнта другого доданка як 5 : 1?

5.015. Визначити A_n^2, якщо п'ятий доданок розкладу $(\sqrt[3]{x} + 1/x)^n$ не залежить від x.

5.016. До якого натурального степеня слід піднести біном $(1/\sqrt{2} + 3)$, щоб відношення четвертого доданка розкладу до третього дорівнювало $3\sqrt{2}$?

5.017. Розклад одного дня містить 5 уроків. Визначити кількість таких розкладів при виборі з 11 дисциплін.

5.018. Комісія складається із голови, його замісника і ще п'яти чоловік. Скількома способами члени комісії можуть розподілити між собою обов'язки?

5.019. Скількома способами можна вибрати трьох чергових із групи в 20 чоловік?

5.020. Скільки різних звукосполучень можна взяти на десяти вибраних клавішах рояля, якщо кожне звукосполучення може містити від трьох до десяти звуків?

5.021. У вазі стоять 10 червоних і 4 рожевих гвоздики. Скількома способами можна вибрати три квітки з вази?

5.022. Номери трамвайних маршрутів інколи позначають двома кольоровими ліхтарями. Яку кількість різних маршрутів можна позначити, якщо використати ліхтарі восьми кольорів?

5.023. Чемпіонат, в якому беруть участь 16 команд, проводиться в два круги (тобто кожна команда двічі зустрічається з кожною з решти команд). Визначити, яку кількість зустрічей слід провести.

5.024. Замок відкривається тільки в тому випадку, якщо набрано певний тризначний код із п'яти цифр. Спроба полягає в тому, що набирають наугад три цифри. Угадати номер удалося тільки в останній з усіх можливих спроб. Скільки спроб передувало вдалій?

5.025. Із групи в 15 чоловік вибирають чотирьох учасників естафети 800 + 400 + 200 + 100. Скількома способами можна розставити спортсменів на етапах такої естафети?

5.026. Команда з п'яти чоловік виступає у змаганнях з плавання, в яких бере участь ще 20 спортсменів. Скількома способами можуть розподілитися місця, зайняті членами цієї команди?

5.027. Скількома способами можна розмістити на шаховій дошці дві тури, щоб одна не змогла побити іншу? (Одна тура може побити іншу, якщо вона знаходиться з нею на одній горизонталі або на одній вертикалі шахової дошки.)

5.028. Дві тури різного кольору розміщено на шаховій дошці так, що кожна може побити іншу. Скільки існує таких розміщень?

5.029. Учасники шахового турніру грають в залі, де є 8 столиків. Скількома способами можна розмістити шахістів, якщо учасники всіх партій відомі?

Група Б

Розв'язати рівняння (5.030—5.032):

5.030. $\dfrac{A_{x+1}^{y+1} \cdot P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72.$

5.031. $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \cdots + C_x^{x-8} + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} = 1023.$

5.032. $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5 \cdot P_{x-5}} = 720.$

5.033. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} A_y^x : P_{x-1} + C_x^{y-x} = 126, \\ P_{x+1} = 720; \end{cases}$ б) $\begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 90, \\ A_x^y - 2C_x^y = 40. \end{cases}$

5.034. Знайти x і y, якщо:

а) $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2;$

б) $C_x^{y-1} : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}) : C_x^{y+1} = 3 : 5 : 5.$

5.035. Знайти x і y, якщо:

а) $(A_{x-1}^y + yA_{x-1}^{y-1}) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 10 : 2 : 1;$

б) $A_x^{y-1} : A_{x-1}^y : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-1}) = 21 : 60 : 10.$

5.036. Довести тотожність:

а) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k;$

б) $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k;$

в) $A_{n-1}^m = A_n^m - mA_{n-1}^{m-1}.$

5.037. Різниця між третіми біноміальними коефіцієнтами розкладів $(a+b)^{n+1}$ і $(a+b)^n$ дорівнює 225. Знайти число раціональних членів розкладу $(\sqrt[5]{x} + \sqrt[9]{y})^n$.

5.038. Знайти k-й член розкладу $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^m$, коли відомо, що $T_{k+2} : T_{k+1} : T_k = 28 : 8\sqrt{6} : 9$.

5.039. Різниця між деякими членами T_{k+1} і T_k розкладу $(\sqrt[6]{x} - \sqrt{x^{-1}})^{12}$ дорівнює 30. Визначити, при яких значеннях x це можливо, якщо член T_{k+1} містить x в степені, удвоє меншому, ніж член T_k.

5.040. Знайти найбільший біноміальний коефіцієнт розкладу $(n + 1/n)^n$, якщо добуток четвертого від початку і четвертого від кінця доданків дорівнює 14 400.

5.041. При будь-якому допустимому значенні z доданок U_{k+1} розкладу $(\sqrt[3]{z} + \sqrt{z})^m$ у два рази менший від доданка V_{k+2} розкладу $\left(\sqrt[6]{z^5} + \frac{1}{\sqrt[6]{z}}\right)^{m+1}$. Знайти ці доданки.

5.042. Сума третього від початку і третього від кінця біноміальних коефіцієнтів розкладу $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$ дорівнює 9900. Скільки раціональних членів міститься в цьому розкладі?

5.043. Третій доданок розкладу $(2x + 1/x^2)^m$ не містить x. При яких значеннях x цей доданок дорівнює другому доданку розкладу $(1 + x^3)^{30}$?

5.044. Тридцять чоловік розподілено на три групи по десять чоловік у кожній. Скільки може бути різних складів груп?

5.045. Скільки чотиризначних чисел, що діляться на 5, можна утворити з цифр 0, 1, 3, 5, 7, якщо в кожному числі жодна з цифр не повторюється?

5.046. Скільки різних кілець, що світяться, можна утворити, розмістивши по колу 10 різнокольорових лампочок (кільця вважаються однаковими, якщо порядок слідування кольорів один і той самий)?

5.047. На книжковій полиці вміщується 30 томів. Скількома способами їх можна розставити, щоб при цьому перший і другий томи не стояли поряд?

5.048. Чотири стрільці повинні поразити вісім мішеней (кожний по дві). Скількома способами вони можуть розподілити мішені між собою?

5.049. Із групи в 12 чоловік кожного дня протягом 6 днів вибирають двох чергових. Визначити кількість різних списків чергових, якщо кожний чоловік чергує один раз.

5.050. Скільки чотиризначних чисел, що утворюються з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, містять цифру 3 (цифри в числах не повторюються)?

5.051. Десять груп навчаються в десяти розміщених поряд аудиторіях. Скільки існує варіантів розкладу, при якому групи № 1 і № 2 знаходились би в сусідніх аудиторіях?

5.052. У турнірі беруть участь 16 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого туру (розклади вважаються різними, якщо вони відрізняються учасниками хоча б однієї партії; колір фігур і номер дошки не враховуються).

5.053. Шість ящиків із різними матеріалами доставляються на п'ять поверхів будови. Скількома способами можна розподілити матеріали по поверхах. У скількох варіантах на п'ятий поверх доставлено який-небудь один матеріал?

5.054. Двоє листонош повинні рознести 10 листів за 10 адресами. Скількома способами вони можуть розподілити роботу?

5.055. Поїзд метро робить 16 зупинок, на яких виходять усі пасажири. Скількома способами можуть розподілитися між цими зупинками 100 пасажирів, що ввійшли в поїзд на кінцевій зупинці?

5.056. Скільки тризначних чисел, що діляться на 3, можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо в кожному числі жодна з цифр не повторюється?

5.057. Збори із 80 чоловік обирають голову, секретаря і трьох членів ревізійної комісії. Скількома способами це можна зробити?

5.058. Із 10 тенісисток і 6 тенісистів утворюють 4 мішані пари. Скількома способами це можна зробити?

5.059. Три машини № 1, 2, 3 повинні доставити товар у шість магазинів. Скількома способами можна використати машини, якщо вантажопідйомність кожної з них дає змогу взяти товар зразу для всіх магазинів і якщо дві машини в один і той самий магазин не направляються? Скільки існує варіантів маршруту, якщо використати тільки машину № 1.

5.060. Четверо юнаків і дві дівчини вибирають спортивну секцію. У секції хокею і боксу приймають тільки юнаків, у секцію художньої гімнастики — тільки дівчат, а в лижну і конькобіжну секції — і юнаків, і дівчат. Скількома способами можуть розподілитися між секціями ці шість чоловік?

5.061. Із лабораторії, в якій працює 20 чоловік, 5 співробітників повинні поїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо начальник лабораторії, його замісник і головний інженер одночасно їхати не можуть?

5.062. У фортепіанному гуртку навчаються 10 чоловік, у гуртку художнього слова — 15, у вокальному гуртку — 12 і в фотогуртку — 20 чоловік. Скількома способами можна утворити бригаду із чотирьох читців, трьох піаністів, п'яти співаків і одного фотографа?

5.063. Двадцять вісім костей доміно розподілено між чотирма гравцями. Скільки можливо різних розподілів?

5.064. Із групи в 15 чоловік треба виділити бригадира і 4 члени бригади. Скількома способами це можна зробити?

5.065. П'ять учнів треба розподілити у п'ять паралельних класів. Скількома способами це можна зробити?

5.066. Ліфт зупиняється на десяти поверхах. Скількома способами можуть розподілитися між цими зупинками 8 пасажирів, що знаходяться в кабіні ліфта?

5.067. Вісім авторів повинні написати книгу з шістнадцяти глав. Скількома способами можна розподілити матеріал між авторами, якщо два чоловіки напишуть по три глави, чотири — по дві і два — по одній главі книги?

5.068. У шаховому турнірі беруть участь 8 шахістів третього розряду, 6 — другого і 2 першорозрядники. Визначити кількість таких складів першого туру, щоб шахісти однієї категорії зустрічалися між собою (колір фігур не враховується).

5.069. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюються всілякі п'ятизначні числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, в яких є цифри 2, 4 і 5 одночасно.

5.070. Семеро яблук і три апельсини треба покласти в два пакети так, щоб у кожному пакеті був хоча б один апельсин і щоб кількість фруктів у них була однаковою. Скількома способами це можна зробити?

5.071. Букви азбуки Морзе складаються із символів (крапок і тире). Скільки букв можна зобразити за умови, що кожна буква містить не більше п'яти символів.

5.072. Номер автомобільного причепа складається із двох букв і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна скласти, використовуючи 30 букв і 10 цифр?

5.073. Садівник повинен протягом трьох днів посадити 10 дерев. Скількома способами він може розподілити за днями свою роботу, якщо буде висаджувати не менше одного дерева в день?

5.074. Із вази, де стоять 10 червоних і 4 рожевих гвоздики, вибирають одну червону і дві рожеві квітки. Скількома способами це можна зробити?

Група В

5.075. Довести, що $\dfrac{C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n}{n} = 2^{n-1}$.

5.076. Довести тотожність $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Користуючись цією тотожністю, показати, що

$$C_n^m + C_{n-1}^m + \cdots + C_{n-10}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-10}^{m+1}.$$

5.077. Спростити вираз $P_1 + 2P_2 + \ldots + nP_n$, де P_k — число перестановок із k елементів.

5.078. Довести, що $C_{2n+x}^n \cdot C_{2n-x}^n \leqslant (C_{2n}^n)^2$.

5.079. Знайти найбільше значення суми $S = (1 + x)^{36} + (1 - x)^{36}$ при $|x| \leqslant 1$.

5.080. Знайти найбільший доданок розкладу $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{20}$.

5.081. При яких значеннях x найбільшим доданком розкладу $(5 + 3x)^{10}$ є четвертий?

5.082. Якщо розкрити всі дужки у виразі $(1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + \ldots + (1 + x)^{14}$ і звести подібні члени, то дістанемо деякий многочлен. Визначити коефіцієнт при x^9 у цьому многочлені, не розкриваючи дужок.

5.083. Дванадцяти учням видано два варіанти контрольної роботи. Скількома способами можна розсадити учнів в два ряди, щоб у тих, що сидять поруч, не було однакових варіантів, а у тих, що сидять один за одним, був один і той самий варіант?

5.084. Кожний з десяти радистів пункту A намагається встановити зв'язок з кожним із двадцяти радистів пункту B. Скільки можливо різних варіантів такого зв'язку?

5.085. Шість ящиків із різними матеріалами доставляються на вісім поверхів будови. Скількома способами можна розподілити матеріали по поверхах? У скількох із них на восьмий поверх буде доставлено не менше двох матеріалів?

5.086. Скількома способами можна вишикувати в одну шеренгу гравців двох футбольних команд, так щоб при цьому два футболісти однієї команди не стояли поруч?

5.087. На книжковій полиці книги з математики і з логіки — всього 20 книг. Показати, що найбільша кількість варіантів комплекту, що містить 5 книг з математики і 5 книг з логіки, можлива в тому випадку, коли число книг на полиці з кожного предмета дорівнює 10.

5.088. Ліфт, в якому знаходиться 9 пасажирів, може зупинятися на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по два, три і чотири чоловіки. Скількома способами вони можуть вийти?

5.089. «Рано-вранці на рибалку усміхнений Ігор мчав босоніж». Скільки різних осмислених речень можна скласти, використовуючи частину слів цього речення, але не змінюючи порядку їхнього слідування?

5.090. У шаховій зустрічі беруть участь дві команди, по 8 чоловік у кожній. Кожний з учасників і колір його фігур визначаються жеребкуванням. Яке число різних результатів жеребкування?

Глава 6

АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ

Вказівки до розв'язування рівнянь з однією змінною

1⁰. *Рівнянням з однією змінною* називається рівність, що містить цю змінну (її інколи називають невідомим).

Значення змінної, при підстановці якого в рівняння дістаємо правильну рівність, називається *коренем* (або *розв'язком*) рівняння.

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх не існує.

2⁰. Рівняння, що мають одні й ті самі корені, називають *рівносильними*. У процесі розв'язування задане рівняння замінюють більш простим; при цьому використовують такі правила перетворення рівняння у рівносильне йому:

а) будь-який доданок можна перенести з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком;

б) обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число;

в) рівняння вигляду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ можна замінити рівносильною системою $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ або розв'язати рівняння $f(x) = 0$, а потім відкинути ті із знайдених коренів, які перетворюють в нуль знаменник $g(x)$.

3⁰. Нехай у результаті перетворення рівняння

$$f_1(x) = g_1(x) \tag{6.1}$$

здобуто рівняння

$$f_2(x) = g_2(x). \tag{6.2}$$

Якщо кожний корінь рівняння (6.1) є коренем рівняння (6.2), то рівняння (6.2) називають *наслідком* рівняння (6.1).

Корені рівняння (6.2), що не задовольняють рівняння (6.1), називаються *сторонніми* коренями рівняння (6.1) і не вважаються розв'язками цього рівняння.

До появи сторонніх коренів можуть, наприклад, привести (але не обов'язково приводять) такі перетворення: піднесення до квадрата (або другого парного степеня) обох частин рівняння, множення обох частин рівняння на алгебраїчний вираз, що містить зміну, і т. п.

4⁰. Щоб вияснити, чи існують серед коренів рівняння-наслідку сторонні корені початкового рівняння, необхідно перевірити кожний із знайдених коренів підстановкою його у початкове рівняння.

Можна зробити інакше: на кожному етапі розв'язування рівняння визначати проміжки, в яких можуть знаходитися корені рівняння. Всі корені, що не належать цим проміжкам, є сторонніми і повинні бути відкинуті. Одначе решту коренів все одно треба перевірити підстановкою у початкове рівняння.

5^0. Якщо рівняння має вигляд $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, то ділення обох його частин на $h(x)$, як правило, недопустиме, оскільки може привести до втрати коренів; у цьому випадку можуть бути втрачені корені рівняння $h(x) = 0$, якщо вони існують.

Рівняння не вважається розв'язаним як у випадку, коли відповідь містить сторонні корені, так і в випадку, коли в процесі розв'язування було втрачено хоча б один корінь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{2}{3-x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{x(3-x)}$.

△ Перенесемо всі члени рівняння у ліву частину і перетворимо одержаний вираз до вигляду $\frac{x^2 - 7x + 12}{2x(3-x)} = 0$. Із рівняння $x^2 - 7x + 12 = 0$ знаходимо $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. При $x = 3$ знаменник перетворюється в нуль: отже, 3 не є коренем. Таким чином, дістаємо відповідь: $x = 4$. ▲

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2} = x - 4$.

△ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$(\sqrt{x-2})^2 = (x-4)^2, \quad x - 2 = x^2 - 8x + 16,$$
$$x^2 - 9x + 18 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 6.$$

Перевіримо знайдені корені, підставляючи їх у початкове рівняння. Якщо $x = 3$, дістаємо $1 = -1$ — неправильна рівність; якщо $x = 6$, то дістаємо $2 = 2$ — правильна рівність. Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = 6$.

Зазначимо, що можна було спочатку знайти область визначення заданого рівняння. Для цього розв'яжемо систему нерівностей $\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ x - 4 \geqslant 0, \end{cases}$ звідки $x \geqslant 4$. Тоді бачимо, що $x_1 = 3$ — сторонній корінь початкового рівняння. Перевіркою переконуємось, що $x = 6$ задовольняє задане рівняння. Отже, $x = 6$. ▲

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{(2x+1)^2 - 8x}$.

△ Перетворюючи праву частину рівняння, дістаємо

$$\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1},$$
$$\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{(2x-1)^2}, \quad \sqrt{1-4x} + 2 = |2x - 1|.$$

Це рівняння має розв'язок за умови $1 - 4x \geqslant 0$, тобто $x \leqslant 1/4$. Тоді $|2x - 1| = 1 - 2x$ (а не $2x - 1$, оскільки це виконується тільки при $x \geqslant 1/2$, що суперечить умові $x \leqslant 1/4$). Отже, $\sqrt{1-4x} + 2 = 1 - 2x$, звідки

$$\sqrt{1-4x} = -1 - 2x. \qquad (*)$$

Область можливих значень x визначається системою нерівностей $\begin{cases} 1 - 4x \geqslant 0, \\ -1 - 2x \geqslant 0, \end{cases}$ тобто $x \leqslant -1/2$. Піднісши обидві частини рівняння (*) до квадрата, дістаємо

$$1 - 4x = 1 + 4x + 4x^2, \quad 4x^2 + 8x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -2.$$

Корінь $x_1 = 0$ не задовольняє умову $x \leqslant -1/2$ і тому є стороннім, але його треба перевірити. Підставляючи $x = -2$ у початкове рівняння, дістаємо правильну рівність: $3 + 2 = 5$. Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = -2$. ▲

При розв'язуванні рівнянь часто використовуються метод розкладу на множники і метод заміни змінної.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(x+1)(x^2+2)+(x+2)\times$ $\times(x^2+1)=2$.

$\triangle$ Розкриваючи дужки і зводячи подібні члени, маємо $2x^3+3x^2+$ $+3x+2=0$. Розкладемо ліву частину рівняння на множники. Спочатку згрупуємо члени рівняння, а потім використаємо формулу (2.13), дістанемо

$$2(x^3+1)+3x(x+1)=0,\quad 2(x+1)(x^2-x+1)+$$
$$+3x(x+1)=0,\quad (x+1)(2x^2+x+2)=0.$$

Остання рівність правильна при умові, що принаймні один із співмножників дорівнює нулю: $x+1=0$, звідки $x=-1$ або $2x^2+x+$ $+2=0$. Проте дискримінант останнього рівняння від'ємний, отже, воно не має коренів. Таким чином, $x=-1$. ▲

Приклад 5. Розв'язати рівняння $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.

$\triangle$ Введемо змінну z, покладаючи $x+\frac{1}{x}=z$. Тоді $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=$ $=z^2$, звідки за формулою (2.9) знаходимо $x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2$. Замінивши у даному рівнянні вираз у перших дужках на z, а в других — на z^2-2, дістанемо

$$7z-2(z^2-2)=9,\quad 2z^2-7z+5=0,\quad z_1=5/2,\quad z_2=1.$$

Для відшукання x треба розв'язати два квадратні рівняння:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},\quad 2x^2-5x+2=0,\quad x_1=2,\quad x_2=\frac{1}{2};$$

$$x+\frac{1}{x}=1,\quad x^2-x+1=0,\quad D<0 \text{ — коренів не існує.}$$

Отже, дістаємо відповідь: $x_1=2$, $x_2=1/2$. ▲

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=$ $=\sqrt{3x+12}$.

$\triangle$ Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо

$$x+1+4x+13+2\sqrt{(x+1)(4x+13)}=3x+12,$$
$$\sqrt{(x+1)(4x+13)}=-(x+1).$$

Ще одне піднесення до квадрата привело б до знищення ірраціональності, проте тут не має необхідності в цьому перетворенні. Зазначимо, що одержане рівняння-наслідок може мати розв'язок при умові $x+1\leqslant 0$. Разом з тим однією з умов існування розв'язку початкового рівняння є вимога $x+1\geqslant 0$. Обидві умови сумісні в єдиному випадку, якщо $x+1=0$, звідки $x=-1$. Це значення x, як легко перевірити, задовольняє початкове рівняння. Оскільки рівняння-наслідок інших коренів не має, то інших коренів не має і початкове рівняння. Таким чином, $x=-1$. ▲

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=$ $=5\sqrt[3]{25-x^2}$.

$\triangle$ Оскільки $x = 5$ не є коренем рівняння, то обидві частини рівняння можна розділити на $\sqrt[3]{(5-x)^2}$, причому втрати коренів не буде. Дістаємо рівняння, рівносильне початковому:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^2} + 4 = 5\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}.$$

Покладаючи $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}} = z$, приходимо до квадратного рівняння $z^2 - 5z + 4 = 0$, звідки $z_1 = 1$, $z_2 = 4$. Для відшукання x маємо два рівняння: $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}} = 1$ і $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}} = 4$. Піднісши до куба обидві частини кожного з них, дістаємо $\frac{5+x}{5-x} = 1$, звідки $x = 0$, і $\frac{5+x}{5-x} = 64$, звідки $x = 63/13$. Отже, $x_1 = 0$, $x_2 = 63/13$. $\blacktriangle$

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x + 3.$$

$\triangle$ Запишемо рівняння в такому вигляді:

$$(2x^2 - 3x + 2) - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} + 1 = 0.$$

Покладемо $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = z$; зазначимо, що придатними можуть бути тільки значення $z \geqslant 0$. Виконуючи вказану заміну, дістаємо рівняння $z^2 - 2z + 1 = 0$, звідки $z = 1$ — придатне значення z, і тому рівняння $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1$ або $2x^2 - 3x + 1 = 0$ рівносильне заданому. Корені $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$ цього квадратного рівняння є коренями початкового рівняння. $\blacktriangle$

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

$\triangle$ Покладемо $\sqrt{x-1} = z$ і зазначимо, що $z \geqslant 0$, $x \geqslant 1$, $x = z^2 + 1$. Тоді, згідно з формулою (2.23), дістаємо

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = \sqrt{z^2 - 4z + 4} = |z - 2|,$$

$$\sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = \sqrt{z^2 - 6z + 9} = |z - 3|.$$

Початкове рівняння набирає вигляду

$$|z - 2| + |z - 3| = 1. \qquad (*)$$

Використовуючи означення модуля, розглянемо такі випадки:

1) якщо $z < 2$, то $2 - z + 3 - z = 1$, звідки $z = 2$;

2) якщо $2 \leqslant z < 3$, то $z - 2 + 3 - z = 1$, звідки $1 = 1$, тобто всі значення z, що належать проміжку $[2; 3)$, задовольняють рівняння;

3) якщо $z \geqslant 3$, то $z - 2 + z - 3 = 1$, звідки $z = 3$.

Об'єднуючи ці розв'язки, зазначаємо, що рівняння (*) задовольняють всі значення z, для яких $2 \leqslant z \leqslant 3$.

Оскільки $z = \sqrt{x-1}$, то $2 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3$, отже, $4 \leqslant x - 1 \leqslant 9$, звідки $5 \leqslant x \leqslant 10$. $\blacktriangle$

Приклад 10. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

△ Цю систему лінійних рівнянь можна розв'язувати методом послідовного виключення (методом Гаусса), проте простіше діяти так: додаючи рівняння, дістаємо $4(x + y + z) = 24$, звідки $x + y + z = 6$. Послідовно віднімаючи це рівняння від кожного рівняння системи, знаходимо $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. ▲

Приклад 11. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + y^2x = 20. \end{cases}$$

△ Піднесемо до квадрата обидві частини першого рівняння:

$$x^2y + y^2x + 2xy\sqrt{xy} = 36.$$

Віднімаючи від цього рівняння друге рівняння системи, дістаємо $xy\sqrt{xy} = 8$ або $(xy)^3 = 64$, тобто $xy = 4$. Це рівняння і друге рівняння заданої системи утворюють систему

$$\begin{cases} xy = 4, \\ xy(x + y) = 20 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Звідси знаходимо дві пари розв'язків: $x_1 = 4$, $y_1 = 1$ і $x_2 = 1$, $y_2 = 4$. Перевіркою переконуємося, що обидві пари задовольняють початкову систему рівнянь. ▲

Величини a, b, c, p, q, m, n, як правило, вважаються сталими, а величини x, y, z, u, v, w — змінними.

Група А

Розв'язати рівняння (6.001—6.066):

6.001. $\dfrac{x^2+1}{x-4} - \dfrac{x^2-1}{x+3} = 23.$ **6.002.** $\dfrac{b}{x-a} + \dfrac{a}{x-b} = 2.$

6.003. $\dfrac{x^2+x-5}{x} + \dfrac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$ $\left(\text{підстановка } \dfrac{x^2+x-5}{x} = z\right).$

6.004. $x^4 - \dfrac{50}{2x^4-7} = 14$ (підстановка $2x^4 - 7 = z$).

6.005. $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}$ (підстановка $x^2 + 2x = z$).

6.006. $x + \dfrac{1}{x} = 2\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}.$ **6.007.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{b^3}{x^2} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{b^2}{a^4}.$

6.008. $\dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{x+6}{x+2} + \dfrac{x-6}{x-2}.$

6.009. $\frac{5a}{y+a}+\frac{4a}{y+2a}+\frac{3a}{y+3a}=8.$

6.010. $\frac{1}{x^3+2}-\frac{1}{x^3+3}=\frac{1}{12}.$

6.011. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}.$

6.012. $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2.$

6.013. $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0.$

6.014. $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2.$

6.015. $\frac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=-2.$

6.016. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$ $\left(\text{підстановка } \frac{x^2+1}{x}=u\right).$

6.017. $\frac{x+n}{m+n}-\frac{m-n}{x-n}=\frac{x+p}{m+p}-\frac{m-p}{x-p}.$

6.018. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4$ (підстановка $x+x^{-1}=z$).

6.019. $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$ (підстановка x^2-4x+
$+10=y$).

6.020. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=2{,}5.$

6.021. $8x^4+x^3+64x+8=0.$

6.022. $(x+3)^3-(x+1)^3=56.$

6.023. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6.$

6.024. $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47.$

6.025. $(x-a)^3-(x-b)^3=b^3-a^3.$

6.026. $\frac{ax^2}{x-1}=(a+1)^2.$ 6.027. $\frac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}=\frac{19}{7}.$

6.028. $\frac{x}{a+b}+\frac{2a-x}{a-b}-\frac{a+b}{x}=1.$

6.029. $\frac{a^2-1}{ax-1}+\frac{a-x}{a}=1.$

6.030. $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2.$

6.031. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$.

6.032. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

6.033. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$.

6.034. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$.

6.035. $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b \qquad (a>b)$.

6.036. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$.

6.037. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

6.038. $2\sqrt{7-x}:0,6\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}=10\sqrt[4]{1,5}:\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}$.

6.039. $\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{1/2}+4\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{1/2}=4$.

6.040. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

6.041. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

6.042. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

6.043. $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$.

6.044. $\sqrt[5]{(5x+2)^3}-\dfrac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}}=6$.

6.045. $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0$.

6.046. $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2x^{-1}$.

6.047. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$.

6.048. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$.

6.049. $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.

6.050. $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2$.

6.051. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

6.052. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}$.

6.053. $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

6.054. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$.

6.055. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$.

6.056. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

6.057. $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5$.

6.058. $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2$

$\left(\text{підстановка } \sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}=z\right)$.

6.059. $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}+\sqrt[5]{\frac{z-1}{16z}}=2{,}5$.

6.060. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

6.061. $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-18=0$.

6.062. $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}$.

6.063. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$.

6.064. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

6.065. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}$.

6.066. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$

(підстановка $x^2-4x-6=u$).

Розв'язати системи рівнянь **(6.067—6.119)**:

6.067. $\begin{cases}(x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1,\\ x+y=0{,}9.\end{cases}$ 6.068. $\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ x^3y^3=-8.\end{cases}$

6.069. $\begin{cases}x^{-1}+y^{-1}=5,\\ x^{-2}+y^{-2}=13.\end{cases}$ 6.070. $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6},\\ x+y=5.\end{cases}$

6.071. $\begin{cases}x-y=1,\\ x^3-y^3=7.\end{cases}$ 6.072. $\begin{cases}\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{x},\\ y^2-x-5=0.\end{cases}$

6.073. $\begin{cases}y^2-xy=-12,\\ x^2-xy=28.\end{cases}$ 6.074. $\begin{cases}x+y+\frac{x}{y}=9,\\ \frac{(x+y)x}{y}=20.\end{cases}$

6.075. $\begin{cases}x^2y+xy^2=6,\\ xy+x+y=5.\end{cases}$ 6.076. $\begin{cases}x^2y^3+x^3y^2=12,\\ x^2y^3-x^3y^2=4.\end{cases}$

6.077. $\begin{cases}x^4+y^4=82,\\ xy=3.\end{cases}$ 6.078. $\begin{cases}x^3+y^3=35,\\ x+y=5.\end{cases}$

6.079. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ xy = 2. \end{cases}$ 6.080. $\begin{cases} u^2 + uv = 15, \\ v^2 + uv = 10. \end{cases}$

6.081. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$ 6.082. $\begin{cases} x^2 + y^4 = 5, \\ xy^2 = 2. \end{cases}$

6.083. $\begin{cases} 12(x+y)^2 + x = 2{,}5 - y, \\ 6(x-y)^2 + x = 0{,}125 + y. \end{cases}$

6.084. $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{3} = 3, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$ 6.085. $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

6.086. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 45, \\ x + y = 5. \end{cases}$

6.087. $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^3y - xy^3 = 6. \end{cases}$ 6.088. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$

6.089. $\begin{cases} u^3 + v^3 + 1 = m, \\ u^3v^3 = -m. \end{cases}$ 6.090. $\begin{cases} ax + \dfrac{b}{y} = 2, \\ \dfrac{b}{x} + ay = 2ab. \end{cases}$

6.091. $\begin{cases} (x-y)\,xy = 30, \\ (x+y)\,xy = 120. \end{cases}$ 6.092. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0, \\ x + y + 8 = 0. \end{cases}$

6.093. $\begin{cases} v - u = 1, \\ w - v = 1, \\ (u-1)^3 + (v-2)^3 + (w-3)^3 = 3. \end{cases}$

6.094. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{13}{6}, \\ xy = 5. \end{cases}$

6.095. $\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$ 6.096. $\begin{cases} x^2y^3 = 16, \\ x^3y^2 = 2. \end{cases}$

6.097. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 3x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y + z = 2. \end{cases}$

6.098. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x+y) = -2. \end{cases}$ 6.099. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 91, \\ x + \sqrt{xy} + y = 13. \end{cases}$

6.100. $\begin{cases} \sqrt[4]{u+v} - \sqrt[4]{u-v} = 2, \\ \sqrt{u+v} - \sqrt{u-v} = 8. \end{cases}$

6.101. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8 \end{cases}$

(покласти $\sqrt{x+y}=u,\quad \sqrt[3]{x-y}=v$).

6.102. $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3, \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3. \end{cases}$

6.103. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1, \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4 \end{cases}$

$\left(\text{покласти } \sqrt{\dfrac{x}{y}}=z\right).$

6.104. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}\sqrt{x}=12, \\ xy=64. \end{cases}$

6.105. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=3, \\ \sqrt{(x-y)^2}=1. \end{cases}$ 6.106. $\begin{cases} u^2+v^2=uv+13, \\ u+v=\sqrt{uv}+3. \end{cases}$

6.107. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3}, \\ xy=9. \end{cases}$

6.108. $\begin{cases} 3(2-\sqrt{x-y})^{-1}+10(2+\sqrt{x+y})^{-1}=5, \\ 4(2-\sqrt{x-y})^{-1}-5(2+\sqrt{x+y})^{-1}=3. \end{cases}$

6.109. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28. \end{cases}$ 6.110. $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4, \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8. \end{cases}$

6.111. $\begin{cases} 2(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{xy}, \\ x+y=5. \end{cases}$ 6.112. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10, \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4. \end{cases}$

6.113. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+a}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+a}}=2, \\ x+y=xy+a. \end{cases}$

6.114. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$ 6.115. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3. \end{cases}$

6.116. $\begin{cases} \sqrt[4]{u}-\sqrt[4]{v}=1, \\ \sqrt{u}+\sqrt{v}=5. \end{cases}$ 6.117. $\begin{cases} x-y=8a^2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4a. \end{cases}$

6.118. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=14, \\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=3. \end{cases}$

6.119. $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=0{,}5\sqrt{xy}, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.120. Не розв'язуючи рівняння $ax^2+bx+c=0$, знайти $x_1^{-2}+x_2^{-2}$, де x_1 і x_2 — корені даного рівняння.

6.121. Скласти квадратне рівняння з коренями $1/x_1$ і $1/x_2$, якщо x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

6.122. Скласти рівняння другого степеня, один із коренів якого дорівнював би сумі, а другий — добутку коренів рівняння $ax^2+bx+c=0$.

6.123. Скласти рівняння другого степеня, корені якого були б на одиницю більші за корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

6.124. Визначити коефіцієнти квадратного рівняння $x^2+px+q=0$ так, щоб його корені дорівнювали p і q.

6.125. Знайти коефіцієнти A і B рівняння $x^2+Ax+B=0$, коли відомо, що числа A і B є також його коренями.

6.126. При якому цілому значенні k один із коренів рівняння $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ втроє менший за інший?

6.127. При якому цілому значенні p рівняння $3x^2-4x+p-2=0$ і $x^2-2px+5=0$ мають спільний корінь? Знайти цей корінь.

6.128. Знайти всі значення a, при яких сума коренів рівняння $x^2-2a(x-1)-1=0$ дорівнює сумі квадратів коренів.

6.129. При якому значенні a рівняння $x^2+ax+8=0$ і $x^2+x+a=0$ мають спільний корінь?

6.130. Із рівняння $x^2-2x+c=0$ визначити ті значення c, при яких його корені x_1 і x_2 задовольняють умову $7x_2-4x_1=47$.

6.131. Не розв'язуючи рівняння $x^2-(2a+1)x+a^2+2=0$, знайти, при якому значенні a один із коренів у два рази більший за інший.

6.132. При якому значенні p відношення коренів рівняння $x^2+px-16=0$ дорівнює -4?

6.133. Не розв'язуючи рівняння $3x^2-5x-2=0$, знайти суму кубів його коренів.

6.134. При якому цілому значенні b рівняння $2x^2+(3b-1)x-3=0$ і $6x^2-(2b-3)x-1=0$ мають спільний корінь?

6.135. При якому додатному значенні c один корінь рівняння $8x^2-6x+9c^2=0$ дорівнює квадрату іншого?

Група Б

Розв'язати рівняння (6.136—6.182):

6.136. $\dfrac{x^2+1}{x+1}+\dfrac{x^2+2}{x-2}=-2.$

6.137. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{25}{6}.$

6.138. $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81.$

6.139. $(x+1)^5+(x-1)^5=32x.$

6.140. $\dfrac{z^2-z}{z^2-z+1}-\dfrac{z^2-z+2}{z^2-z-2}=1.$

6.141. $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2.$

6.142. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$

6.143. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}.$

6.144. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55.$

6.145. $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12.$

6.146. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1.$

6.147. $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1.$

6.148. $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9.$

6.149. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2{,}5.$

6.150. $\frac{u^2}{2-u^2}+\frac{u}{2-u}=2.$

6.151. $\frac{x-m}{x-1}+\frac{x+m}{x+1}=\frac{x-2m}{x-2}+\frac{x+2m}{x+2}-\frac{6(m-1)}{5}.$

6.152. $\frac{z+4}{z-1}+\frac{z-4}{z+1}=\frac{z+8}{z-2}+\frac{z-8}{z+2}+6.$

6.153. $(2x+a)^5-(2x-a)^5=242a^5.$

6.154. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}.$

6.155. $ax^4-x^3+a^2x-a=0.$

6.156. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\,\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$

6.157. $2(x-1)^2-5(x-1)(x-a)+2(x-a)^2=0.$

6.158. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$

6.159. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0.$

6.160. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}.$

6.161. $(x-1)x(x+1)+x(x+1)(x+2)=$
$=3x^2+x+18x\sqrt{x}-16.$

6.162. $\sqrt[7]{(ax-b)^3}-\sqrt[7]{(b-ax)^{-3}}=\frac{65}{8}\qquad(a\neq 0).$

6.163. $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^7}=0.$

6.164. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$

6.165. $\sqrt{\frac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}+\sqrt{\frac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}}=\frac{13}{6}$.

6.166. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

6.167. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$.

6.168. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

6.169. $\sqrt{x}+\frac{2x+1}{x+2}=2$.

6.170. $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$.

6.171. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

6.172. $(x+\sqrt{x^2-1})^5(x-\sqrt{x^2-1})^3=1$.

6.173. $2\sqrt{5\sqrt[4]{x+1}+4}-\sqrt{2\sqrt[4]{x+1}-1}=$

$$=\sqrt{20\sqrt[4]{x+1}+5}.$$

6.174. $\frac{z}{z+1}-2\sqrt{\frac{z+1}{z}}=3$.

6.175. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0$.

6.176. $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^3+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2=2$.

6.177. $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$.

6.178. $\frac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}=\frac{7}{3}$.

6.179. $|x|+|x-1|=1$.

6.180. $(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\ldots+$

$$+(x^2+20x+39)=4500.$$

6.181. $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}+\sqrt[3]{x+a+2}=0$.

6.182. $|x|^3+|x-1|^3=9$.

Розв'язати системи рівнянь (6.183—6.243):

6.183. $\begin{cases} xy(x+1)(y+1)=72, \\ (x-1)(y-1)=2. \end{cases}$

6.184. $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$

6.185. $\begin{cases} x^2+2y^2=17, \\ x^2-2xy=-3. \end{cases}$

6.186. $\begin{cases} ax+by+cz=k, \\ a^2x+b^2y+c^2z=k^2, \\ a^3x+b^3y+c^3z=k^3, \end{cases}$

$a\neq b,\quad b\neq c,\quad c\neq a.$

6.187. $\begin{cases}(x+1)(y+1)=10,\\ (x+y)(xy+1)=25.\end{cases}$

6.188. $\begin{cases}x-ay+a^2z=a^3,\\ x-by+b^2z=b^3,\\ x-cy+c^2z=c^3,\end{cases}$

$a\neq b,\quad b\neq c,\quad c\neq a.$

6.189. $\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=5,\\ (x+y)(x^2-y^2)=9.\end{cases}$

6.190. $\begin{cases}xy=a,\\ yz=b,\\ zx=c,\end{cases}\quad abc>0.$

6.191. $\begin{cases}x^2+y=y^2+x,\\ y^2+x=6.\end{cases}$

6.192. $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=3,\\ (x+y)^2+(x-y)^2=20.\end{cases}$

6.193. $\begin{cases}x+yz=2,\\ y+zx=2,\\ z+xy=2.\end{cases}$

6.194. $\begin{cases}\dfrac{5}{x^2-xy}+\dfrac{4}{y^2-xy}=-\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{7}{x^2-xy}-\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{6}{5}.\end{cases}$

6.195. $\begin{cases}x^2+y^2-2x+3y-9=0,\\ 2x^2+2y^2+x-5y-1=0.\end{cases}$

6.196. $\begin{cases}x^2+y^2=34,\\ x+y+xy=23.\end{cases}$

6.197. $\begin{cases}x^2+y^4=20,\\ x^4+y^2=20.\end{cases}$

6.198. $\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{ab+1}{b},\\ x-y+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{ab+1}{a}.\end{cases}$

6.199. $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4},\\ 2x+3y-5z+19=0.\end{cases}$

6.200. $\begin{cases}(x+y)^2+2x=35-2y,\\ (x-y)^2-2y=3-2x.\end{cases}$

6.201. $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}+\dfrac{5}{2}=0,\\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}+\dfrac{7}{5}=0.\end{cases}$

6.202. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3, \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=3, \\ \dfrac{1}{xyz}=1. \end{cases}$

6.203. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ cx+ay+bz=0, \\ (x+b)^2+(y+c)^2+(z+a)^2=a^2+b^2+c^2, \end{cases}$
$a \neq b \neq c$.

6.204. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x^2}{y^2}=7, \\ \dfrac{(x+y)\,x^2}{y^2}=12. \end{cases}$ 6.205. $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1, \\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22. \end{cases}$

6.206. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

6.207. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x\,(y+z)=5, \\ y\,(x+z)=8. \end{cases}$

6.208. $\begin{cases} (x-y)\,(x^2-y^2)=3a^3, \\ (x+y)\,(x^2+y^2)=15a^3, \end{cases}$ $a \neq 0$.

6.209. $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ x^2y+xy^2=-6. \end{cases}$

6.210. $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$ 6.211. $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

6.212. $\begin{cases} \dfrac{3}{uv}+\dfrac{15}{vw}=2, \\ \dfrac{15}{vw}+\dfrac{5}{wu}=2, \\ \dfrac{5}{wu}+\dfrac{3}{uv}=2. \end{cases}$ 6.213. $\begin{cases} x^6+y^6=65, \\ x^4-x^2y^2+y^4=13. \end{cases}$

6.214. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x+3y+z=0, \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14. \end{cases}$

6.215. $\begin{cases} x^3+3xy^2=158, \\ 3x^2y+y^3=-185. \end{cases}$ 6.216. $\begin{cases} x^2+y-20=0, \\ x+y^2-20=0. \end{cases}$

6.217. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$ 6.218. $\begin{cases} x^3+y^3=9a^3, \\ x^2y+xy^2=6a^3, \end{cases}$ $a \neq 0$.

6.219. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y-z=2, \\ x+yz+zx=3. \end{cases}$ **6.220.** $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$

6.221. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+3y+z=1, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9. \end{cases}$

6.222. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}}=2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}-\sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}}=1{,}5. \end{cases}$

6.223. $\begin{cases} x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1, \\ 2x+y=2. \end{cases}$

6.224. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3, \\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5, \\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4. \end{cases}$ **6.225.** $\begin{cases} \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3, \\ x+y=17. \end{cases}$

6.226. $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{y+\dfrac{1}{x}}=2\sqrt{2}, \\ (x^2+1)\,y+(y^2+1)\,x=4xy. \end{cases}$

6.227. $\begin{cases} \sqrt[3]{u+v}+\sqrt[3]{v+w}=3, \\ \sqrt[3]{v+w}+\sqrt[3]{w+u}=1, \\ \sqrt[3]{w+u}+\sqrt[3]{u+v}=0. \end{cases}$

6.228. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30, \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35. \end{cases}$ **6.229.** $\begin{cases} x+\sqrt{y}-56=0, \\ \sqrt{x}+y-56=0. \end{cases}$

6.230. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

6.231. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+2y=23. \end{cases}$

6.232. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$

6.233. $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1, \\ 3x+2y=4. \end{cases}$

6.234. $\begin{cases} u^{-1/2}\sqrt[3]{u}+v^{-1/2}\sqrt[3]{v}=1{,}5, \\ uv=64. \end{cases}$

6.235. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}} - 2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}} = 1, \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5. \end{cases}$

6.236. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 6, \\ xy^2 = 6\sqrt{10}. \end{cases}$

6.237. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5. \end{cases}$

6.238. $\begin{cases} \sqrt{\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 1\right)^2} = 1{,}6, \\ xy = 2. \end{cases}$

6.239. $\begin{cases} |2x+3y| = 5, \\ |2x-3y| = 1. \end{cases}$ **6.240.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y} + 2 + \dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ |x+y| = 5. \end{cases}$

6.241. $\begin{cases} u - v + \sqrt{\dfrac{u-v}{u+v}} = \dfrac{12}{u+v}, \\ u^2 + v^2 = 41. \end{cases}$

6.242. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ x^2 - 18 = 2y(4y-9). \end{cases}$

6.243. $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-88} + \sqrt{x+6y} = 19, \\ 3\sqrt{x^2-3y-88} = 1 + 2\sqrt{x+6y}. \end{cases}$

6.244. Розв'язати рівняння

$$x(x+1) + (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) + \dots + (x+9)(x+10) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + 9\cdot 10.$$

6.245. Знайти коефіцієнти m і n квадратного тричлена $x^2 + mx + n$, коли відомо, що його остачі при діленні на двочлени $x - m$ і $x - n$ дорівнюють відповідно m і n.

6.246. Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два корені. Скласти нове квадратне рівняння, у якого один із коренів на одиницю менший від більшого кореня, а інший на одиницю більший за менший корінь заданого рівняння.

6.247. Визначити, при яких значеннях m один із коренів рівняння $z^3 - (m^2 - m + 7)z - (3m^2 - 3m - 6) = 0$ дорівнює -1. Відшукати два інших корені рівняння при цих значеннях m.

6.248. Показати, що коли коефіцієнти a, b і c рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ пов'язані умовою $2b^2 - 9ac = 0$, то відношення коренів рівняння дорівнює 2.

6.249. Показати, що коли a і b — корені рівняння $x^2 + px + 1 = 0$, а b і c — корені рівняння $x^2 + qx + 2 = 0$, то $(b-a)(b-c) = pq - 6$.

6.250. При яких значеннях a рівняння $x^2 + ax + 1 = 0$ і $x^2 + x + a = 0$ мають спільний корінь?

6.251. При якому додатному значенні p корені рівняння $5x^2 - 4(p+3)x + 4 = p^2$ протилежні за знаком? Знайти ці корені.

6.252. Знайти коефіцієнти рівняння $x^2 + px + q = 0$ за умови, що різниця коренів рівняння дорівнює 5, а різниця їхніх кубів дорівнює 35.

6.253. Скласти квадратне рівняння з коренями $(a+b)^2$ і $(a-b)^2$, якщо a і b — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$.

6.254. Позначимо через α і β корені рівняння $3x^2 + 7x + 4 = 0$. Не розв'язуючи заданого рівняння, скласти нове квадратне рівняння з числовими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють $\frac{\alpha}{\beta - 1}$ і $\frac{\beta}{\alpha - 1}$.

6.255. Показати, що серед коренів рівняння $x^4 + 5x^3 + 15x - 9 = 0$ є тільки один додатний і тільки один від'ємний корені (самі корені знаходити не обов'язково).

Група В

Розв'язати рівняння (**6.256—6.302**):

6.256. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16.$

6.257. $u^3 - (2a+1)u^2 + (a^2 + 2a - b^2)u + (b^2 - a^2) = 0.$

6.258. $x^3 - 2x^2 - (a^2 - a - 1)x + (a^2 - a) = 0.$

6.259. $x^3 - (3a-1)x^2 + (2a^2 - 3a)x + 2a^2 = 0.$

6.260. $(x-1)^5 + (x+3)^5 = 242(x+1).$

6.261. $x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2+a)x - (a^2 - a) = 0.$

6.262. $(x^3 + x^{-3}) + (x^2 + x^{-2}) + (x + x^{-1}) = 6.$

6.263. $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64.$

6.264. $x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2.$

6.265. $x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2 + 2a - m)x - (a^2 - m) = 0.$

6.266. $x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - b)x - (a^3 - ab) = 0; b \geqslant 0.$

6.267. $x^3 - (p^2 - p + 7)x - 3(p^2 - p - 2) = 0.$

6.268. $z^3 - (2p+1)z^2 + (p^2 + 2p - q)z - (p^2 - q) = 0.$

6.269. $x^3 - 2ax^2 + (a^2 + 2\sqrt{3}a - 9)x - (2a^2\sqrt{3} - 12a + 6\sqrt{3}) = 0.$

6.270. $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0.$

6.271. $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1).$

6.272. $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0.$

6.273. $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0.$

6.274. $x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} = 40.$ **6.275.** $\frac{2+x}{2-x} + \sqrt{x} = 1 + x.$

6.276. $\frac{20}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x} + x = 22.$

6.277. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x.$

6.278. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16.$

6.279. $\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2.$

6.280. $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 0.$

6.281. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}.$

6.282. $\sqrt{u^2-u-1}+\sqrt{u^2+u+3}=\sqrt{2u^2+8}$ (обмежитися відшуканням додатних коренів).

6.283. $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16.$

6.284. $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4.$

6.285. $\dfrac{x^2}{\sqrt{5x+4}}+\sqrt{5x+4}=\dfrac{4}{3}x+2.$

6.286. $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3.$

6.287. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}.$

6.288. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x.$

6.289. $x^{4/5}-7x^{-2/5}+6x^{-1}=0.$

6.290. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1.$

6.291. $8{,}4\sqrt[12]{x^{-7}}-0{,}2\sqrt[4]{x^{-1}\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[12]{x^{11}}.$

6.292. $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2.$

6.293. $\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\dfrac{x}{2}\sqrt[7]{\dfrac{x^2}{x+\sqrt{2}}}.$

6.294. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$

6.295. $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}+3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}=8.$

6.296. $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$

6.297. $\sqrt{x^2-19x+204}-\sqrt{x^2-25x-150}=3\sqrt{\dfrac{x+5}{x-30}}.$

6.298. $\dfrac{(\sqrt[3]{(15-x)^2}+\sqrt[3]{(15-x)(x-6)}+\sqrt[3]{(x-6)^2})^2}{\sqrt[3]{15-x}+\sqrt[3]{x-6}}=\dfrac{49}{3}.$

6.299. $\dfrac{2}{19}(\sqrt{x^2+37x+336}-\sqrt{x^2+18x+32})=\sqrt{\dfrac{21+x}{16+x}}.$

6.300. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11.$

6.301. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$

6.302. $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12.$

Розв'язати системи рівнянь (6.303—6.341):

6.303. $\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=16, \\ (x-y)(x^2+y^2)=40. \end{cases}$

6.304. $\begin{cases} \dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}-\dfrac{c+a}{z+x}=1, \\ \dfrac{a+b}{x+y}-\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1, \\ -\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1. \end{cases}$

6.305. $\begin{cases} uvx^2=8, \\ vx^2w=24, \\ x^2wu=12, \\ u+v+w=x+4 \end{cases}$ (обмежитися відшуканням додатних розв'язків).

6.306. $\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ 3x+2y+z=0, \\ 3(x+2)^3+2(y+1)^3+(z+1)^3=27. \end{cases}$

6.307. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=3, \\ x+y+z=3. \end{cases}$

6.308. $\begin{cases} xy+yz=8, \\ yz+zx=9, \\ zx+xy=5. \end{cases}$ 6.309. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$

6.310. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+2xy=\dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy}+x^2+y^2=\dfrac{21}{4}. \end{cases}$

6.311. $\begin{cases} 10(x^4+y^4)=-17(x^3y+xy^3), \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

6.312. $\begin{cases} x-y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ x^3-y^3+z^3=36. \end{cases}$

6.313. $\begin{cases} (x+y)(x+2y)(x+3y)=60, \\ (y+x)(y+2x)(y+3x)=105. \end{cases}$

6.314. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1{,}5, \\ xyz=8. \end{cases}$

6.315. $\begin{cases} x^3+y^3=2, \\ 2xy^2-x^2y=1 \end{cases}$ (обмежитися відшуканням цілочислових розв'язків).

6.316. $\begin{cases} uv+vw=2a^2, \\ vw+wu=2a^2-a-1, \\ wu+uv=2a^2+a-1. \end{cases}$

6.317. $\begin{cases} 2x+y+z=6, \\ 3x+2y+z=7, \\ (x-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7. \end{cases}$

6.318. $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136, \\ x^3y+xy^3=30. \end{cases}$

6.319. $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ (xy+8)(x+y)=2. \end{cases}$

6.320. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

6.321. $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=12, \\ (xy)^2+xy=6. \end{cases}$

6.322. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x^3}{y^3}=14, \\ x+y=3. \end{cases}$

6.323. $\begin{cases} 8x+\dfrac{8}{y}=3y^2, \\ y+\dfrac{1}{x}=3x^2. \end{cases}$

6.324. $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=102, \\ xy+x+y=69. \end{cases}$

6.325. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$

6.326. $\begin{cases} 9(u^4+v^4)=17(u+v)^2, \\ 3uv=-2(u+v). \end{cases}$

6.327. $\begin{cases} xy+\dfrac{y}{x}=2(x^2+y^2), \\ xy-\dfrac{x}{y}=x^2+y^2. \end{cases}$

6.328. $\begin{cases} (u^2+v^2)(u+v)=15uv, \\ (u^4+v^4)(u^2+v^2)=85u^2v^2. \end{cases}$

6.329. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$ (обмежитися відшуканням цілочислових розв'язків).

6.330. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{ax+by}{bx+ay}}+\sqrt{\dfrac{bx+ay}{ax+by}}=2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+1}}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

6.331. $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2,\\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1.\end{cases}$

6.332. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{z}}+\sqrt{\dfrac{z}{x}}=3,\\ \sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{y}}+\sqrt{\dfrac{x}{z}}=3,\\ \sqrt{xyz}=1.\end{cases}$

6.333. $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5,\\ x^2+y^2=13.\end{cases}$ 6.334. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1,\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1.\end{cases}$

6.335. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8,\\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12.\end{cases}$

6.336. $\begin{cases}\sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y),\\ x^2-y^2=41.\end{cases}$

6.337. $\begin{cases}\sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6,\\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12,\\ x+y+z=14.\end{cases}$

6.338. $\begin{cases}\sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y},\\ \sqrt[3]{x+y}=\sqrt{x+y-4}.\end{cases}$

6.339. $\begin{cases}\sqrt{1-4x^2}-\sqrt{1-4y^2}=2(x+y),\\ x^2+y^2+4xy=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

6.340. $\begin{cases}u+v+\sqrt{u^2-v^2}=12,\\ v\sqrt{u^2-v^2}=12.\end{cases}$ 6.341. $\begin{cases}x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=32,\\ y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=162.\end{cases}$

6.342. Задано рівняння $ax^2+bx+c=0$. Нехай $S_n=\alpha^n+\beta^n$, де α і β — корені рівняння. Знайти залежність між S_n, S_{n+1}, S_{n+2}.

6.343. Числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $x^3+px^2+qx+r=0$. Треба: 1) скласти рівняння з коренями x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1; 2) скористатися результатом завдання 1) для відшукання коренів рівняння $x^3-3\sqrt{2}x^2+7x-3\sqrt{2}=0$.

6.344. Знайти коефіцієнти a і b рівняння $x^4+x^3-18x^2+ax+b=0$, коли відомо, що серед його коренів є три рівних цілих числа.

6.345. Знайти коефіцієнти p і q рівняння $x^4-10x^3+37x^2+px+q=0$, коли відомо, що серед його коренів є дві пари рівних між собою чисел.

6.346. Для рівняння $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ добуток суми його коренів на суму їхніх обернених величин виразити через коефіцієнти a і b.

6.347. Показати, що рівність $ab = c$ виражає необхідну і достатню умову того, що серед коренів рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ є два числа, сума яких дорівнює нулю.

6.348. Розв'язати рівняння $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = 0$, коли відомо, що серед його коренів є два числа, обернені за абсолютною величиною і протилежні за знаком.

6.349. Розв'язати рівняння $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$ і $6x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$, коли відомо, що вони мають один спільний корінь.

6.350. Скласти рівняння третього степеня за його коренями x_1^2, x_1x_2 і x_2^2, якщо числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$.

6.351. Розв'язати рівняння $x^3 - 6x^2 - 39x - 10 = 0$ і $x^3 + x^2 - 20x - 50 = 0$, скориставшись тим, що один із коренів першого рівняння в два рази більший за один із коренів другого рівняння.

6.352. Розв'язати рівняння $x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96 = 0$ і $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$, скориставшись тим, що у них є спільний корінь.

6.353. Знайти всі значення λ, при яких рівняння $\lambda x^3 - x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$ і $\lambda x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$ мають спільний корінь. Знайти цей корінь.

6.354. Розв'язати рівняння $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15 = 0$, коли відомо, що два з його коренів x_1 і x_2 задовольняють співвідношення $2x_1 - 4x_2 = 1$.

6.355. Показати, що для всякого натурального числа n виконується рівність

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},$$

і за її допомогою розв'язати рівняння

$$(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{342}\right) = 342.$$

6.356. Розв'язати рівняння $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 2 = 0$, коли відомо, що вони мають принаймні одну пару коренів, різниця між якими дорівнює 1.

6.357. Розв'язати рівняння $3x^3 + 2\sqrt{3}x^2 - 21x + 6\sqrt{3} = 0$, коли відомо, що добуток двох його коренів дорівнює 1.

6.358. Розв'язати рівняння $x^3 - 7x^2 + 12x - 10 = 0$ і $x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$, коли відомо, що один із коренів першого рівняння в два рази менший за один із коренів другого рівняння.

6.359. Знайти всі три корені рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, якщо його коефіцієнти задовольняють умову $ad = bc$.

6.360. Показати, що умова $kb^2 - (k+1)^2 ac = 0$ $(k \neq 0)$ є необхідною і достатньою для того, щоб відношення коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнювало k.

6.361. Розв'язати рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, якщо його коефіцієнти a, b, c і d у вказаному порядку утворюють геометричну прогресію із заданим знаменником q.

6.362. Довести, що коли корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ утворюють геометричну прогресію, то один з них дорівнює $-\sqrt[3]{c}$.

6.363. Розв'язати рівняння $64x^3 - 24x^2 - 6x + 1 = 0$, коли відомо, що його корені утворюють геометричну прогресію.

6.364. 1) Нехай числа x_1, x_2 і x_3 є коренями многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Тоді має місце тотожність

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Скористатися цією тотожністю для виведення формул, які пов'язують корені і коефіцієнти даного многочлена.

2) За допомогою формул, здобутих у завданні 1), знайти корені x_1, x_2 і x_3 рівняння $8x^3 - 20x^2 - 10x + 33 = 0$, склавши і розв'язавши нове кубічне рівняння з коренями $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$ і $x_3 + x_1$.

6.365. Знайти корені рівняння $(x^3 + x^{-3}) + (x^2 + x^{-2}) + (x + x^{-1}) = 6$.

6.366. Скласти рівняння з цілими коефіцієнтами по можливості більш низького степеня, одним із коренів якого було б число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

6.367. Показати, що корені рівняння $x + x^{-1} = 2\cos 40^\circ$ є також коренями рівняння $x^4 + x^{-4} = 2\cos 160^\circ$.

6.368. Розв'язати рівняння $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10 = 0$, коли відомо, що два його корені відрізняються один від одного тільки знаком.

6.369. Розв'язати рівняння $2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$, коли відомо, що воно має три корені, з яких два є протилежними числами (протилежними називаються два числа, сума яких дорівнює нулю).

6.370. Показати, що рівняння $\sqrt{x^4 + x - 2} + \sqrt[4]{x^4 + x - 2} = 6$ має єдиний додатний корінь. Знайти цей корінь.

Глава 7

ЛОГАРИФМИ. ПОКАЗНИКОВІ І ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Основні властивості і формули

Властивості показникової функції

$$y = a^x, \ a > 0, \ a \neq 1$$

1°. Область визначення функції — множина R всіх дійсних чисел.

2°. Область значень функції — множина R_+ всіх додатних чисел; $a^x > 0$ для будь-якого дійсного значення x.

3°. При $a > 1$ функція зростає, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$. При $0 < a < 1$ функція спадає, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$.

4°. Якщо $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.

Властивості логарифмічної функції

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \ a \neq 1$$

1°. Область визначення функції — множина R_+ всіх додатних дійсних чисел.

2°. Область значень функції — множина R всіх дійсних чисел.

3^0. При $a > 1$ функція зростає, тобто якщо $x_2 > x_1 > 0$, то $\log_a x_2 > \log_a x_1$. При $0 < a < 1$ функція спадає, тобто якщо $x_2 > x_1 > 0$, то $\log_a x_2 < \log_a x_1$.

Властивості логарифмів

1^0. Якщо $x > 0$, то

$$x = a^{\log_a x} \tag{7.1}$$

(*основна логарифмічна тотожність*).

2^0. Логарифм основи дорівнює одиниці:

$$\log_a a = 1. \tag{7.2}$$

3^0. Логарифм одиниці дорівнює нулю:

$$\log_a 1 = 0. \tag{7.3}$$

4^0. Якщо $x_1 > 0$ і $x_2 > 0$, то

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \tag{7.4}$$

(*формула для логарифма добутку*);

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \tag{7.5}$$

(*формула для логарифма частки*).

5^0. Якщо $x > 0$, то

$$\log_a x^p = p \log_a x, \tag{7.6}$$

де p — будь-яке дійсне число (*формула для логарифма степеня*).

6^0. Якщо $x > 0$, то

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{7.7}$$

для будь-якого дійсного числа $b > 0$ і $b \neq 1$ (*формула переходу до нової основи логарифма*).

Зокрема,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{або} \quad \log_b b \cdot \log_b a = 1; \tag{7.8}$$

$$\log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b \quad (p \in \mathbf{R},\ p \neq 0). \tag{7.9}$$

Вказівки до розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь

1^0. Показникове рівняння

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1) \tag{7.10}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) \log_c a = g(x) \log_c b, \tag{7.11}$$

яке дістаємо логарифмуванням рівняння (7.10) за будь-якою основою $c > 0$, $c \neq 1$.

Зокрема, рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

2⁰. Коренями рівняння

$$(u(x))^{f(x)} = (u(x))^{g(x)} \qquad (7.12)$$

вважаються тільки розв'язки мішаної системи

$$\begin{cases} u(x) > 0, \\ u(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \qquad (7.13)$$

і ті значення x, для яких $u(x) = 1$, якщо при цих значеннях визначені $f(x)$ і $g(x)$. Функція виду $(u(x))^{f(x)}$ визначена тільки при $u(x) > 0$, тому ті значення x, які формально задовольняють рівність (7.12), але при яких $u(x) \leqslant 0$, не прийнято вважати коренями рівняння (7.12).

3⁰. Логарифмічне рівняння

$$\log_a f(x) = b \qquad (7.14)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = a^b. \qquad (7.15)$$

4⁰. Логарифмічне рівняння

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0, \ a \neq 1) \qquad (7.16)$$

рівносильне кожній із таких систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \qquad (7.17)$$

Щоб розв'язати рівняння (7.16), переходять тільки до однієї з цих систем (до тої, яка простіша) або розв'язують рівняння $f(x) = g(x)$, яке може мати корені, сторонні для початкового рівняння, і перевіряють кожний з коренів підстановкою у початкове рівняння.

5⁰. Для розв'язування рівнянь

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a u(x), \qquad (7.18)$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a u(x), \qquad (7.19)$$

$$p \log_a f(x) = \log_a u(x) \qquad (7.20)$$

з використанням формул (7.4) — (7.6) їх приводять відповідно до вигляду

$$\log_a (f(x)\, g(x)) = \log_a u(x), \qquad (7.21)$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a u(x), \qquad (7.22)$$

$$\log_a (f(x))^p = \log_a u(x) \qquad (7.23)$$

і далі розв'язують відповідно до вказівки 4⁰.

Із знайдених коренів треба включити у відповідь ті, для яких $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $u(x) > 0$, або перевірити кожний з них підстановкою в початкове рівняння.

6⁰. Якщо при розв'язуванні рівняння за допомогою формул (7.4) — (7.6) застосовують перетворення виду $\log_a (f(x)\, g(x))$, $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\log_a (f(x))^p$, де p — парне число, то виникає небезпека втрати коренів заданого рівняння. Щоб запобігти можливій втраті коренів, треба користуватися вказаними формулами у такому вигляді:

$$\log_a (f(x)\, g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|, \qquad (7.24)$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|, \qquad (7.25)$$

$$\log_a (f(x))^p = p \log |f(x)|, \ p \text{ — парне число.} \qquad (7.26)$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{5}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{2x}} - 0{,}04^{1-x} = 0.$

$\triangle$ Тут всі степені можна звести до однієї основи 5. Маємо

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}},\ 0{,}2^{\frac{1}{2x}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2x}} = 5^{-\frac{1}{2x}},\ 0{,}04^{1-x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{1-x} =$$

$$= 5^{-2(1-x)}.$$

Тоді рівняння має вигляд

$$5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2x}} - 5^{-2(1-x)} = 0 \text{ або } 5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}} = 5^{-2(1-x)}.$$

Згідно з вказівкою 1^0, перейдемо до рівносильного рівняння $\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = -2(1-x)$. Після перетворень дістанемо $\begin{cases} 4x^2 - 5x + 1 = 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 1/4$. ▲

Приклад 2. Розв'язати рівняння $35\cdot 3^{x^2} - 35\cdot 5^{2x} - 3^{x^2} + 5^{2x} = 0.$

$\triangle$ Згрупувавши подібні члени, маємо $3^{x^2}(35-1) - 5^{2x}(35-1) = 0$ або $3^{x^2} = 5^{2x}$. Логарифмуючи обидві частини рівняння за основою 10 (див. вказівку 1^0), дістаємо рівносильне рівняння

$$x^2 \lg 3 = 2x \lg 5, \text{ або } x(x \lg 3 - 2\lg 5) = 0,$$

звідки $x_1 = 0$, $x_2 = (2\lg 5)/(\lg 3)$. ▲

Приклад 3. Розв'язати рівняння $4^{\sqrt{x}} - 9\cdot 2^{\sqrt{x}-1} + 2 = 0.$

$\triangle$ Оскільки $4^{\sqrt{x}} = 2^{2\sqrt{x}}$ і $2^{\sqrt{x}-1} = 2^{\sqrt{x}}\cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}\cdot 2^{\sqrt{x}}$, то дане рівняння набирає вигляду $2^{2\sqrt{x}} - \frac{9}{2}\cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$. Введемо заміну $2^{\sqrt{x}} = y$, де $y > 0$ в силу властивості 2^0 показникової функції. Тоді дістанемо рівняння $y^2 - \frac{9}{2}y + 2 = 0$, корені якого $y_1 = 4$, $y_2 = 1/2$. Із рівняння $2^{\sqrt{x}} = 4$ маємо $2^{\sqrt{x}} = 2^2$, звідки $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$. Із рівняння $2^{\sqrt{x}} = 1/2$ знаходимо $2^{\sqrt{x}} = 2^{-1}$, звідки $\sqrt{x} = -1$, що неможливо. Таким чином, дістаємо відповідь: $x = 4$. ▲

Приклад 4. Розв'язати рівняння $|x-2|^{x^2-2x} = |x-2|^{5x-10}.$

$\triangle$ Згідно з вказівкою 2^0, коренями рівняння є тільки розв'язки мішаної системи

$$\begin{cases} |x-2| > 0, \\ |x-2| \neq 1, \\ x^2 - 2x = 5x - 10, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 3,\ x \neq 1, \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$$

1, можливо, розв'язки рівняння $|x-2|=1$. Із двох коренів рівняння $x^2-7x+10=0$ розв'язком системи є одне число $x=5$, а вимогу $|x-2|=1$ задовольняють значення $x=3$ і $x=1$, які також є розв'язками системи, оскільки при цих значеннях x функції x^2-2x і $5x-10$ визначені. Таким чином, дістаємо відповідь: $x=1$, $x=3$, $x=5$. ▲

Приклад 5. Розв'язати рівняння $2(\lg x-\lg 6)=\lg x-2\lg(\sqrt{x}-1)$.

△ Враховуючи область визначення логарифмічної функції, квадратного кореня і вказівку 5^0, дістаємо систему, рівносильну заданому рівнянню:

$$\begin{cases} x>0, \\ \sqrt{x}-1>0, \\ \lg\dfrac{x^2}{36}=\lg\dfrac{x}{(\sqrt{x}-1)^2}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x>0, \\ x>1, \\ \dfrac{x^2}{36}=\dfrac{x}{(\sqrt{x}-1)^2}. \end{cases}$$

Обидві частини рівняння поділимо на x (при цьому не відбудеться втрата коренів, оскільки $x>0$) і помножимо на $36(\sqrt{x}-1)^2$ (причому не появляться сторонні корені, оскільки $x\neq 1$). Тоді дістанемо систему $\begin{cases} x>1, \\ x(\sqrt{x}-1)^2=36. \end{cases}$ Із рівняння $(\sqrt{x}(\sqrt{x}-1))^2=36$ знаходимо $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6$, $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\neq-6$, оскільки $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)>0$. Далі маємо $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6$ або $(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-6=0$. Отже, $\sqrt{x}=3$, звідки $x=9>1$; $\sqrt{x}=-2$, що неможливо. Таким чином, дістаємо відповідь: $x=9$. ▲

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\log_{0,5}\sqrt{1+x}+3\log_{1/4}(1-x)=\log_{1/16}(1-x^2)^2+2.$$

△ Перейдемо до основи 1/4. Маємо:

$\log_{0,5}\sqrt{1+x}=\log_{1/4}(1+x)$ (див. формулу (7.7) або (7.9));

$$\log_{1/16}(1-x^2)^2=\frac{\log_{1/4}(1-x^2)^2}{\log_{1/4}\frac{1}{16}}=\frac{2\log_{1/4}|1-x^2|}{2}=$$

$$=\log_{1/4}|1-x^2| \text{ (див. формулу (7.7) і вказівку } 6^0);$$

$$2=\log_{1/4}\frac{1}{16} \text{ (див. формулу (7.6)).}$$

У результаті маємо рівняння

$$\log_{1/4}(1+x)+3\log_{1/4}(1-x)=\log_{1/4}|1-x^2|+\log_{1/4}\frac{1}{16}.$$

Враховуючи область визначення логарифмічної функції, знаходимо

$$\begin{cases} 1+x>0, \\ 1-x>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1, \\ x<1; \end{cases} \quad -1<x<1.$$

При цих значеннях x маємо $1-x^2>0$ і $|1-x^2|=1-x^2$. Далі, згідно з вказівкою 5^0, дістаємо

$$\log_{1/4}(1+x)(1-x)^3=\log_{1/4}\frac{1-x^2}{16}.$$

Це рівняння рівносильне мішаній системі

$$\begin{cases}-1<x<1,\\(1+x)(1-x)^3=(1-x^2)/16.\end{cases}$$

Обидві частини рівняння останньої системи поділимо на $(1+x)(1-x)>0$, причому втрати коренів не буде. Тоді дістанемо

$$\begin{cases}-1<x<1,\\(1-x)^2=1/16.\end{cases}$$

Із рівняння $1-x=1/4$ знаходимо $x=3/4$, причому $x\in(-1;\ 1)$. Із рівняння $1-x=-1/4$ маємо $x=5/4$, тобто x не задовольняє нерівності $-1<x<1$. Таким чином, дістаємо відповідь: $x=3/4$. ▲

Приклад 7. Розв'язати рівняння $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{\lg x+1}$.

△ Оскільки логарифмічна функція визначена при $x>0$, то ліва і права частини даного рівняння додатні. Логарифмуючи їх за основою 10 і використовуючи формули (7.6) і (7.2), дістаємо

$$\frac{\lg x+5}{3}\cdot\lg x=\lg x+1.$$

Введемо заміну $y=\lg x$ і розв'яжемо рівняння $y^2+5y=3y+3$. Маємо $y^2+2y-3=0$, звідки $y_1=-3$, $y_2=1$. Із рівняння $\lg x=-3$ дістаємо $x=10^{-3}$, а із рівняння $\lg x=1$ знаходимо $x=10$. Таким чином, $x=0{,}001$, $x=10$. ▲

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\log_x(2x^2-4x+3)=2$.

△ Використовуючи вказівку 3^0 і враховуючи обмеження, що накладаються на основу логарифма, запишемо рівносильну даному рівнянню систему

$$\begin{cases}x>0,\quad x\neq 1,\\2x^2-4x+3=x^2.\end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння $x^2-4x+3=0$, звідки $x_1=3$, $x_2=1$ (не підходить). Таким чином, $x=3$. ▲

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\log_3(x+6)\cdot\log_x 3=2$.

△ Враховуючи область визначення логарифмічної функції, обмеження, що накладаються на основу логарифма, і формулу (7.8), дістаємо рівносильну даному рівнянню систему

$$\begin{cases}x+6>0,\\x>0,\quad x\neq 1,\\\log_3(x+6)\cdot\dfrac{1}{\log_3 x}=2.\end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння цієї системи. Оскільки $x\neq 1$, то $\log_3 x\neq 0$, і рівняння набирає вигляду $\log_3(x+6)=2\log_3 x$, або $\log_3(x+6)=\log_3 x^2$, звідки $x^2=x+6$ (див. вказівку 4^0). Знаходимо корені цього рівняння: $x_1=-2$, $x_2=3$. З них тільки $x=3$ задовольняє умови $x+6>0$, $x>0$ і $x\neq 1$. Таким чином, дістаємо відповідь: $x=3$. ▲

Приклад 10. Розв'язати рівняння $\lg x^2 = 0{,}25 \lg (4x+3)^4$.

$\triangle$ Враховуючи область визначення логарифмічної функції, робимо висновок, що $x \neq 0$, $4x+3 \neq 0$. Для перетворення $\lg (4x+3)^4$ застосовуємо формулу (7.26) (див. вказівку 6°). Тоді $0{,}25 \lg (4x+3)^4 = 0{,}25 \cdot 4 \lg |4x+3| = \lg |4x+3|$. У результаті дістаємо рівняння $\lg x^2 = \lg |4x+3|$, рівносильне заданому.

Якщо $4x+3>0$, тобто $x>-3/4$, то $|4x+3| = 4x+3$, і $x^2 = 4x+3$. Знаходимо корені цього рівняння: $x_1 = 2+\sqrt{7} > -3/4$, $x_2 = 2-\sqrt{7} > -3/4$. Якщо $4x+3<0$, тобто $x<-3/4$, то $|4x+3| = -4x-3$, і $x^2 = -4x-3$. Знаходимо корені цього рівняння: $x_1 = -1 < -3/4$, $x_2 = -3 < -3/4$. Таким чином, дістаємо відповідь: $x = 2 \pm \sqrt{7}$, $x=-1$, $x=-3$. $\blacktriangle$

Зауваження. Вираз $0{,}25 \lg (4x+3)^4$ можна замінити тотожно рівним йому виразом $\lg ((4x+3)^4)^{0{,}25}$ (див. вказівку 5°), але твердження $\lg ((4x+3)^4)^{0{,}25} = \lg (4x+3)$ було б невірним. Справа в тому, що при використанні правила піднесення степеня до степеня треба враховувати таку властивість степеневої функції: при будь-якому $n \in \mathbf{N}$ $(x^{2n})^{1/2n} = |x|$, а не x (див. формулу (2.24)). Тому $\lg ((4x+3)^4)^{0{,}25} = \lg ((4x+3)^4)^{1/4} = \lg |4x+3|$.

Група А

Спростити (7.001—7.015):

7.001. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

7.002. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

7.003. $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$. **7.004.** $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

7.005. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}$.

7.006. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$.

7.007. $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

7.008. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409} \cdot \left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25} 7}} - 125^{\log_{25} 6}\right)$.

7.009. $\left(N^{\frac{1}{\log_2 N}} \cdot N^{\frac{1}{\log_4 N}} \cdot N^{\frac{1}{\log_8 N}} \ldots N^{\frac{1}{\log_{512} N}}\right)^{1/15}$ (основою логарифма є натуральні степені числа 2, що йдуть підряд).

7.010. $\left(2^{\log_{\sqrt[4]{2}} a} - 3^{\log_{27} (a^2+1)^3} - 2a\right) : \left(7^{4 \log_{49} a} - 5^{0{,}5 \log_{\sqrt{5}} a} - 1\right)$.

7.011. $\dfrac{\log_a \sqrt{a^2-1} \cdot \log^2_{1/a} \sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1) \cdot \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}}$.

7.012. $a^{\frac{2}{\log_b a}+1} b - 2a^{\log_a b+1} b^{\log_b a+1} + ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}$.

7.013. $\dfrac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{49} 25}} + 2\log_2 \log_2 \log_2 a^{2\log_a 4}\right) \cdot 4^{-\frac{2}{\log_a 4}} - a^2}{1-a}$.

7.014. $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \cdot \log_b a - 1$.

7.015. $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1) \cdot \log_a \frac{a}{b}}$.

7.016. Якщо $\log_a 27 = b$, то чому дорівнює $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$?

7.017. Показати, що за умов $x > 0$ і $y > 0$ із рівності $x^2 + 4y^2 = 12xy$ випливає рівність

$$\lg(x+2y) - 2\lg 2 = 0,5(\lg x + \lg y).$$

7.018. Обчислити суму $2^x + 2^{-x}$, якщо $4^x + 4^{-x} = 23$.

7.019. Довести, що коли $y = 2^{x^2}$ і $z = 2^{y^2}$, то $x = \pm\sqrt{0,5\log_2 \log_2 z}$. Указати всі значення z, при яких x набуває дійсних значень.

Розв'язати рівняння (7.020—7.046):

7.020. $\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3 + \lg 2 = \lg(27 - 3^{1/x})$.

7.021. $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5(3^x - 5^{2-x})$.

7.022. $\sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_9 \sqrt{3x} = 1$.

7.023. $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0,5 = 0$.

7.024. $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$.

7.025. $\log_2 182 - 2\log_2 \sqrt{5-x} = \log_2(11-x) + 1$.

7.026. $\log_5 \sqrt{x-9} - \log_5 10 + \log_5 \sqrt{2x-1} = 0$.

7.027. $\lg(x+1,5) = -\lg x$.

7.028. $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x+\log_5 2}$.

7.029. $0,25^{\log_2 \sqrt{x+3} - 0,5\log_2(x^2-9)} = \sqrt{2(7-x)}$.

7.030. $x\lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$.

7.031. $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4$.

7.032. $\dfrac{2 - \lg 4 + \lg 0,12}{\lg(\sqrt{3x+1}+4) - \lg 2x} = 1$.

7.033. $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0,0001$.

7.034. $\lg(3^x - 2^{4-x}) = 2 + 0,25\lg 16 - 0,5x\lg 4$.

7.035. $\log_3(81^x + 3^{2x}) = 3\log_{27} 90$.

7.036. $3x - \log_6 8^x = \log_6(3^{3x} + x^2 - 9)$.

7.037. $\log_6(3^{x^2}+1) - \log_6(3^{2-x^2}+9) = \log_6 2 - 1$.

7.038. $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2-20x+55}}\right)=0.$

7.039. $\lg\left(10^{\lg(x^2-21)}\right)-2=\lg x-\lg 25.$

7.040. $\lg(x^2+1)=2\lg^{-1}(x^2+1)-1.$

7.041. $\lg\sqrt{5^{x(13-x)}}+11\lg 2=11.$

7.042. $x(\lg 5-1)=\lg(2^x+1)-\lg 6.$

7.043. $\lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)=0.$ **7.044.** $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4.$

7.045. $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8.$

7.046. $\lg(5-x)+2\lg\sqrt{3-x}=1.$

7.047. Знайти натуральне число n із рівності

$$3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\ldots 3^{3n-1}=27^5$$

Розв'язати рівняння (7.048—7.127):

7.048. $0{,}5\left(\lg(x^2-55x+90)-\lg(x-36)\right)=\lg\sqrt{2}.$

7.049. $\lg(5-x)-\dfrac{1}{3}\lg(35-x^3)=0.$

7.050. $\log_2\dfrac{x-5}{x+5}+\log_2(x^2-25)=0.$

7.051. $\dfrac{\lg 8-\lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}=-1.$

7.052. $\log_{0,5}^2 4x+\log_2\dfrac{x^2}{8}=8.$

7.053. $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0.$

7.054. $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11.$

7.055. $\log_3(3^x-8)=2-x.$

7.056. $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot 5^{\lg x-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}.$

7.057. $5^{x+6}-3^{x+7}=43\cdot 5^{x+4}-19\cdot 3^{x+5}.$

7.058. $\dfrac{\log_5(\sqrt{2x-7}+1)}{\log_5(\sqrt{2x-7}+7)}=0{,}5.$

7.059. $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}=81.$

7.060. $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{1/x}}}=4\sqrt[3]{2}.$

7.061. $\sqrt{2}\cdot 0{,}5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}-16^{\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}}=0.$

7.062. $8^{\frac{x-3}{3x-7}}\sqrt[3]{\sqrt{0{,}25^{\frac{3x-1}{x-1}}}}=1.$

7.063. $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\left(10^{x-1}\right)^3.$

7.064. $0{,}6^x\left(\dfrac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\dfrac{27}{125}\right)^3.$

7.065. $5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\sqrt[3]{25}.$

7.066. $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\cdot 0{,}5^{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=4^{\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}.$

7.067. $2{,}5^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot 0{,}4^{1-\sqrt{9-x}}=5^{10}\cdot 0{,}1^{5}.$

7.068. $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}.$

7.069. $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2.$

7.070. $4^{\log_9 x^2}+\log_{\sqrt{3}}3=0{,}2\,(4^{2+\log_9 x}-4^{\log_9 x}).$

7.071. $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2.$

7.072. $10^{2/x}+25^{1/x}=4{,}25\cdot 50^{1/x}.$

7.073. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0.$

7.074. $4^x-10\cdot 2^{x-1}-24=0.$

7.075. $(\sqrt[5]{3})^x+(\sqrt[10]{3})^{x-10}=84.$

7.076. $9^{\sqrt{x-5}}-27=6\cdot 3^{\sqrt{x-5}}.$

7.077. $17\cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}}-8=2\cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}.$

7.078. $8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0.$

7.079. $2\log_x 27-3\log_{27}x=1.$

7.080. $\lg(\sqrt{6+x}+6)=\dfrac{2}{\log_{\sqrt{x}}10}.$

7.081. $\log_5 x+\log_x 25=\operatorname{ctg}^2\dfrac{25\pi}{6}.$

7.082. $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}.$ **7.083.** $x^{\log_4 x-2}=2^{3(\log_4 x-1)}.$

7.084. $\dfrac{2^x+10}{4}=\dfrac{9}{2^{x-2}}.$

7.085. $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99.$

7.086. $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{100}}=0.$ **7.087.** $7^x(\sqrt{2})^{2x^2-6}-\left(\dfrac{7}{4}\right)^x=0.$

7.088. $3\cdot 4^{\log_x 2}-46\cdot 2^{\log_x 2-1}=8.$

7.089. $9^{\log_{1/3}(x+1)}=5^{\log_{1/5}(2x^2+1)}.$

7.090. $27^{\lg x}-7\cdot 9^{\lg x}-21\cdot 3^{\lg x}+27=0.$

7.091. $\log_2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1.$

7.092. $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0.$

7.093. $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27}x\cdot\log_{81}x=2/3.$

7.094. $4^{\log_5 x^2}-4^{\log_5 x+1}+4^{\log_5 x-1}-1=0.$

7.095. $\sqrt{\log_a x}+\sqrt{\log_x a}=10/3.$

7.096. $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1.$

7.097. $\log_3(x-3)^2+\log_3|x-3|=3.$

7.098. $\lg\sqrt{x-3}+\lg\sqrt{x+3}=2-0{,}5\lg 625.$

7.099. $\lg(3-x)-\frac{1}{3}\lg(27-x^3)=0.$

7.100. $2\lg x-\lg 4=-\lg(5-x^2).$

7.101. $\lg 8-\lg\sqrt{x+6}=\lg 16-\lg(x-2).$

7.102. $2\lg\sqrt{4-x}+\lg(6-x)=1.$

7.103. $\frac{\lg(2x-19)-\lg(3x-20)}{\lg x}=-1.$ 7.104. $\frac{\lg x^2}{\lg(6x-5)}=1.$

7.105. $\log_a y+\log_a(y+5)+\log_a 0{,}02=0.$

7.106. $\log_x\sqrt{2}-\log_x^2\sqrt{2}=\log_3 27-\log_x(2x).$

7.107. $(\log_2 x-3)\log_2 x+2(\log_2 x+1)\log_2\sqrt[3]{2}=0.$

7.108. $0{,}1\log_2^4(x-4)-1{,}3\log_2^2(x-4)+3{,}6=0.$

7.109. $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0.$

7.110. $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}.$

7.111. $\frac{1}{3}\lg(271+3^{2\sqrt{x}})+\lg 10=2.$

7.112. $\left((\sqrt[5]{27})^{\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right)^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}}=\sqrt[4]{3^7}.$

7.113. $x^{\lg x}=1000x^2.$ 7.114. $\lg(x(x+9))+\lg\frac{x+9}{x}=0.$

7.115. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\frac{1}{x}.$

7.116. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=\frac{2}{\log_4 x}.$

7.117. $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400.$

7.118. $5^{\log_2(x^2-21)}\cdot 0{,}2^2\cdot 25^{-0{,}5\log_2 x}=1.$

7.119. $4^{2\log_3(2x-2)}\cdot 0{,}25^{\log_3(2x-3)}=\sqrt[3]{16}.$

7.120. $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_5 0{,}2.$

7.121. $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3).$

7.122. $\sqrt[3]{27^{5\sqrt{x}}}=3^{x(\sqrt{x}-4)}.$

7.123. $\log_6\sqrt[7]{3^{x(15-x)}}+8\log_6 2=8.$

7.124. $\log_5(4^x+144)-4\log_5 2=1+\log_5(2^{x-2}+1).$

7.125. $27x^{\log_{27}x}=x^{10/3}.$ 7.126. $\log_x 9+\log_{x^2}729=10.$

7.127. $\log_2(25^{x+3}-1)=2+\log_2(5^{x+3}+1).$

Розв'язати системи рівнянь (7.128—7.149):

7.128. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

7.129. $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

7.130. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 2 - \lg 5, \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 1{,}2 + 1. \end{cases}$

7.131. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$

7.132. $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(y+x)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$

7.133. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 5/2, \\ xy = 27. \end{cases}$ 7.134. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{y/2} = 25. \end{cases}$

7.135. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$

7.136. $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$

7.137. $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} + 2^{\frac{y-x}{2}} = 2{,}5, \\ \lg(2x-y) + 1 = \lg(y+2x) + \lg 6. \end{cases}$

7.138. $\begin{cases} x^{2y^2-1} = 5, \\ x^{y^2+2} = 125. \end{cases}$

7.139. $\begin{cases} 8\cdot(\sqrt{2})^{x-y} = 0{,}5^{y-3}, \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3. \end{cases}$

7.140. $\begin{cases} 4^{x+y} = 2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5. \end{cases}$ 7.141. $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0. \end{cases}$

7.142. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5. \end{cases}$ 7.143. $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6, \\ x^2 + 5y^2 = 6xy. \end{cases}$

7.144. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$ 7.145. $\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ x^y = 4^6. \end{cases}$

7.146. $\begin{cases} \log_{\sqrt{x}} xy = 8, \\ \log_3\left(\log_{1/9}\dfrac{x}{y}\right) = 0. \end{cases}$ 7.147. $\begin{cases} \log_{xy}(x-y) = 1, \\ \log_{xy}(x+y) = 0. \end{cases}$

7.148. $\begin{cases} (x+y)\cdot 2^{y-2x}=6{,}25, \\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}}=5. \end{cases}$

7.149. $\begin{cases} 8^{\log_9(x-4y)}=1, \\ 4^{x-2y}-7\cdot 2^{x-2y}=8. \end{cases}$

Група Б

Спростити вирази (7.150.—7.156):

7.150. $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$.

7.151. $((\log_b^4 a+\log_a^4 b+2)^{1/2}+2)^{1/2}-\log_b a-\log_a b$.

7.152. $\log_2 2x^2+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+\frac{1}{2}\log_4^2 x^4+$
$+2^{-3\log_{1/2}\log_2 x}$.

7.153. $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2}2}}+1\right)^{1/2}$.

7.154. $\dfrac{\log_a b-\log_{\sqrt{a/b^3}}\sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b-\log_{a/b^6} b}:\log_b(a^3b^{-12})$.

7.155. $(6(\log_b a\cdot\log_{a^2} b+1)+\log_a b^{-6}+\log_a^2 b)^{1/2}-\log_a b$
при $a>1$.

7.156. $\dfrac{\log_a b+\log_a\left(b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right)}{\log_a b-\log_{ab} b}\cdot\dfrac{\log_{ab} b\cdot\log_a b}{b^{2\log_b\log_a b}-1}$.

7.157. Відомо, що $\log_a x=\alpha$, $\log_b x=\beta$, $\log_c x=\gamma$, $\log_d x=\delta$ і $x\neq 1$. Знайти $\log_{abcd} x$.

7.158. Відомо, що $\beta=10^{\frac{1}{1-\lg\alpha}}$ і $\gamma=10^{\frac{1}{1-\lg\beta}}$. Знайти залежність α від γ.

7.159. Довести, що $\log_{ab} c=\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_a c+\log_b c}$.

7.160. Спростити вираз $\log_{a+b} m+\log_{a-b} m-2\log_{a+b} m\times$ $\times\log_{a-b} m$, коли відомо, що $m^2=a^2-b^2$.

7.161. Знайти $\log_{30} 8$, коли відомо, що $\lg 5=a$ і $\lg 3=b$.

7.162. Довести, що $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b$.

7.163. Знаючи, що $\lg 2=a$ і $\log_2 7=b$, знайти $\lg 56$.

7.164. Знаючи, що $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ і $c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, показати, що $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

Розв'язати рівняння (7.165—7.258):

7.165. $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

7.166. $\sqrt{\log_{0,04} x + 1} + \sqrt{\log_{0,2} x + 3} = 1$.

7.167. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$.

7.168. $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$.

7.169. $(16^{\sin x})^{\cos x} + \frac{6}{4^{\sin^2(x-\pi/4)}} - 4 = 0$.

7.170. $\log_2 (2 - x) - \log_2 (2 - \sqrt{x}) = \log_2 \sqrt{2 - x} - 0,5$.

7.171. $5^{1 + \log_4 x} + 5^{\log_{0,25} x - 1} = 26/5$.

7.172. $\sqrt{2 \log_8 (-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0$.

7.173. $2 \lg x^2 - (\lg (-x))^2 = 4$.

7.174. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

7.175. $\lg (x^3 + 8) - 0,5 \lg (x^2 + 4x + 4) = \lg 7$.

7.176. $2^{\log_5 x^2} - 2^{1 + \log_5 x} + 2^{\log_5 x - 1} - 1 = 0$.

7.177. $\frac{\log_2 (9 - 2^x)}{3 - x} = 1$.

7.178. $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{1/5} \sqrt{3}$.

7.179. $\log_{a^2} x^2 + \log_a (x - 1) = \log_a \log_{\sqrt{5}} 5$.

7.180. $x^{2 \lg^2 x} = 10x^3$.

7.181. $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0,5$.

7.182. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \frac{a^2}{2a - x} = 1$.

7.183. $5^{-2 \log_{0,04}(3-4x^2)} + 1,5 \log_{1/8} 4^x = 0$.

7.184. $\log_a x + \log_{a^2} x + \log_{a^3} x = 11$.

7.185. $6 - (1 + 4 \cdot 9^{4-2 \log_{\sqrt{3}} 3}) \log_7 x = \log_x 7$.

7.186. $\log_{12} (4^{3x} + 3x - 9) = 3x - x \log_{12} 27$.

7.187. $x^2 \cdot \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4$.

7.188. $\sqrt{\log_5^2 x + \log_x^2 5 + 2} = 2,5$.

7.189. $\log_x m \cdot \log_{\sqrt{m}} \frac{m}{\sqrt{2m - x}} = 1$.

7.190. $\log_2 3 + 2 \log_4 x = x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}}$.

7.191. $\log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \ldots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5{,}5.$

7.192. $\sqrt{3\log_2^2 x - 1 - 9\log_x^2 2} = 5.$

7.193. $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \ldots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36.$

7.194. $\log_x 2 - \log_4 x + 7/6 = 0.$

7.195. $\log_x (125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1.$

7.196. $3^{\log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 x^3 + \ldots + \log_3 x^8} = 27x^{30}.$

7.197. $5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}} \cdot 0{,}2^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}} = 125^{x-4} \cdot 0{,}04^{x-2}.$

7.198. $\left(3 \cdot \left(3^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 3/\sqrt[10]{3}.$

7.199. $\log_2 \log_3 (x^2 - 16) - \log_{1/2} \log_{1/3} \frac{1}{x^2 - 16} = 2.$

7.200. $\frac{1 + 2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2 \cdot \log_x 3 \cdot \log_9 (12 - x).$

7.201. $3\lg 2 + \lg\left(2^{\sqrt{x-1}-1} - 1\right) = \lg\left(0{,}4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}} + 4\right) + 1.$

7.202. $5\log_{x/9} x + \log_{9/x} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2.$

7.203. $20\log_{4x} \sqrt{x} + 7\log_{16x} x^3 - 3\log_{x/2} x^2 = 0.$

7.204. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$

7.205. $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1.$ 7.206. $|x-2|^{10x^2-3x-1} = 1.$

7.207. $\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2a-x}}{a} - \log_{1/a} x = 0.$

7.208. $2^{x-1} + 2^{x-4} + 2^{x-2} = 6{,}5 + 3{,}25 + 1{,}625 + \ldots$ (вираз у правій частині — нескінченна геометрична прогресія).

7.209. $49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} = -7.$

7.210. $5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26.$

7.211. $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9} + 4 = 0.$

7.212. $\frac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2} + \log_{2x} 2 \cdot \log_{1/2} 2x = 0.$

7.213. $|\log_{\sqrt{3}} x - 2| - |\log_3 x - 2| = 2.$

7.214. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}.$

7.215. $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0.$

7.216. $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0.$

7.217. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{x}+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^{x}=14.$

7.218. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2\log_{9}(x+1)}\cdot\left(\frac{125}{27}\right)^{\log_{1/27}(x-1)}=\frac{\log_5 27}{\log_5 243}.$

7.219. $5^{1+x^{2}}-5^{1-x^{2}}=24.$

7.220. $3^{2x+4}+45\cdot 6^{x}-9\cdot 2^{2x+2}=0.$

7.221. $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{\lg x^{2}+2}=0.$

7.222. $3\cdot 16^{x}+2\cdot 81^{x}=5\cdot 36^{x}.$

7.223. $\log_5\left(2^{1,5x-2,5}+2^{1,5x-0,5}-0,01\cdot 5^{3x+1}\right)=3x-1.$

7.224. $\frac{8^{x}+2^{x}}{4^{x}-2}=5.$

7.225. $\log_{3x+7}(5x+3)+\log_{5x+3}(3x+7)=2.$

7.226. $2,5^{\log_3 x}+0,4^{\log_3 x}=2,9.$

7.227. $(\lg(x+20)-\lg x)\log_x 0,1=-1.$

7.228. $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}.$

7.229. $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^{x}-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8.$

7.230. $\log_{x+1}(x-0,5)=\log_{x-0,5}(x+1).$

7.231. $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2.$

7.232. $\log_{x^{2}}16+\log_{2x}64=3.$

7.233. $(3\log_a x-2)\log_x^2 a=\log_{\sqrt{a}}x-3\ (a>0,\ a\neq 1).$

7.234. $\frac{10x^{2\lg^{2}x}}{x^{3}}=\frac{x^{3\lg x}}{10}.$

7.235. $x\log_{x+1}5\cdot\log_{\sqrt[3]{1/5}}(x+1)=\frac{x-4}{x}.$

7.236. $3\lg(x^{2})-\lg^{2}(-x)=9.$

7.237. $4\log_4^2(-x)+2\log_4(x^{2})=-1.$

7.238. $\frac{2}{\sqrt{3}\log_2\sqrt{x^{2}}}-\frac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}}=0.$

7.239. $\lg\sqrt{10}-\lg 100=\sqrt[6]{\lg\left(390635-5^{\sqrt[3]{2x}}\right)}-2,5.$

7.240. $\lg^{4}(x-1)^{2}+\lg^{2}(x-1)^{3}=25.$

7.241. $\frac{\log_2(x^{3}+3x^{2}+2x-1)}{\log_2(x^{3}+2x^{2}-3x+5)}=\log_{2x}x+\log_{2x}2.$

7.242. $(16\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}-0,048)\lg(x^{3}+2x+1)=0.$

7.243. $5^{x}\cdot\sqrt[x]{8^{x-1}}=500.$

7.244. $3\log_2^2\sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2.$

7.245. $\log_{1+x}(2x^{3}+2x^{2}-3x+1)=3.$

7.246. $\log_2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\log_2 x}=4/3.$

7.247. $\sqrt{\log_5 x} + \sqrt[3]{\log_5 x} = 2.$

7.248. $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3 (x^3) + \log_2 (x^2) - 6.$

7.249. $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$. При яких значеннях a рівняння має розв'язок?

7.250. $\log_a x + \log_{\sqrt{a}} x + \log_{\sqrt[3]{a^2}} x = 27.$

7.251. $x^{2 - \lg^2 x - \lg x^2} - \frac{1}{x} = 0.$

7.252. $\frac{2}{15}\left(16^{\log_9 x+1} - 16^{\log_3 \sqrt{x}}\right) + 16^{\log_3 x} - \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = 0.$

7.253. $\log_a \sqrt{4 + x} + 3 \log_{a^2} (4 - x) - \log_{a^4} (16 - x^2)^2 = 2.$

При яких значеннях a рівняння має розв'язок?

7.254. $\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_8 (9^{x+1} - 1) = 1 + \log_8 (3^{x+1} + 1).$

7.255. $25^{\log_4 x} - 5^{\log_{16} x^2+1} = \log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3} - 25^{\log_{16} x}.$

7.256. $\left(1 + \frac{x}{2}\right) \log_2 3 - \log_2 (3^x - 13) = 2.$

7.257. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_n (n + 1) = 10 \ (n \in N).$

7.258. $2^{\frac{a+3}{a+2}} \cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}} = 4^{\frac{1}{x}}$ (розглянути при всіх дійсних значеннях a).

Розв'язати системи рівнянь **(7.259—7.294)**:

7.259. $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2 \log_2 (x + y), \\ \log_2 (x + y) + \log_2 (x^2 - xy + y^2) = 1. \end{cases}$

7.260. $\begin{cases} 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 6 = 0, \\ \lg (3x - y) + \lg (y + x) - 4 \lg 2 = 0. \end{cases}$

7.261. $\begin{cases} (0,48^{x^2+2})^{2x-y} = 1, \\ \lg (x + y) - 1 = \lg 6 - \lg (x + 2y). \end{cases}$

7.262. $\begin{cases} \log_2 (x - y) = 5 - \log_2 (x + y), \\ \frac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1. \end{cases}$

7.263. $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3 (x - y) = 1 - \log_3 (x + y). \end{cases}$

7.264. $\begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ xy = 15. \end{cases}$ 7.265. $\begin{cases} \log_x y = 2, \\ \log_{x+1} (y + 23) = 3. \end{cases}$

7.266. $\begin{cases} (x^2 + y)\, 2^{y-x^2} = 1, \\ 9 (x^2 + y) = 6^{x^2-y}. \end{cases}$ 7.267. $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$

7.268. $\begin{cases} 9^{\sqrt[4]{xy^2}} - 27 \cdot 3^{\sqrt{y}} = 0, \\ \frac{1}{4} \lg x + \frac{1}{2} \lg y = \lg (4 - \sqrt[4]{x}). \end{cases}$

7.269. $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^{y} = 1152, \\ \log_{\sqrt{5}} (x + y) = 2. \end{cases}$

7.270. $\begin{cases} \lg (x^2 + y^2) = 1 + \lg 8, \\ \lg (x + y) - \lg (x - y) = \lg 3. \end{cases}$

7.271. $\begin{cases} 3^{x} \cdot 2^{y} = 972, \\ \log_{\sqrt{3}} (x - y) = 2. \end{cases}$

7.272. $\begin{cases} 3^{1+2\log_3 (y-x)} = 48, \\ 2 \log_5 (2y - x - 12) - \log_5 (y - x) = \log_5 (y + x). \end{cases}$

7.273. $\log_9 (x^3 + y^3) = \log_3 (x^2 - y^2) = \log_3 (x + y).$

7.274. $\begin{cases} (\log_a x + \log_a y - 2) \log_{18} a = 1, \\ 2x + y - 20a = 0. \end{cases}$

7.275. $\begin{cases} (x + y)\, 3^{y-x} = \frac{5}{27}, \\ 3 \log_5 (x + y) = x - y. \end{cases}$

7.276. $\begin{cases} 2^{\sqrt{xy}-2} + 4^{\sqrt{xy}-1} = 5, \\ \frac{3(x+y)}{x-y} + \frac{5(x-y)}{x+y} = 8. \end{cases}$

7.277. $\begin{cases} x^{y} = 2, \\ (2x)^{y^2} = 64 \quad (x > 0). \end{cases}$

7.278. $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12, \\ 2^{-\log_2 x} + 5^{\log_5 \frac{1}{y}} = \frac{1}{3}. \end{cases}$

7.279. $\begin{cases} x^{y^2-7y+10} = 1, \\ x + y = 8 \quad (x > 0). \end{cases}$

7.280. $\begin{cases} 2 (\log_{1/y} x - 2 \log_{x^2} y) + 5 = 0, \\ xy^2 = 32. \end{cases}$

7.281. $\begin{cases} y x^{\log_y x} = x^{2,5}, \\ \log_3 y \cdot \log_y (y - 2x) = 1. \end{cases}$

7.282. $\begin{cases} \lg (x - 3) - \lg (5 - y) = 0, \\ 4^{-1} \sqrt[y]{4^x} - 8 \sqrt[x]{8^y} = 0. \end{cases}$

7.283. $\begin{cases} \log_x(3x+2y)=2, \\ \log_y(2x+3y)=2. \end{cases}$

7.284. $\begin{cases} x+y=12, \\ 2(2\log_{y^2}x-\log_{1/x}y)=5. \end{cases}$

7.285. $\begin{cases} x^{x^2-y^2-16}=1, \\ x-y=2 \quad (x>0). \end{cases}$ 7.286. $\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1, \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2. \end{cases}$

7.287. $\begin{cases} 4^x-7\cdot 2^{x-0,5y}=2^{3-y}, \\ y-x=3. \end{cases}$ 7.288. $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}}=200, \\ 5^{2\sqrt[3]{x}}+2^{2\sqrt{y}}=689. \end{cases}$

7.289. $\begin{cases} 10^{\lg 0,5(x^2+y^2)+1,5}=100\sqrt{10}, \\ \dfrac{\sqrt{x^2+10y}}{3}=\dfrac{6}{2\sqrt{x^2+10y}-9}. \end{cases}$

7.290. $\begin{cases} y^x=1,5+y^{-x}, \\ y^{2,5+x}=64 \quad (y>0). \end{cases}$

7.291. $\begin{cases} \lg(x+y)-\lg 5=\lg x+\lg y-\lg 6, \\ \dfrac{\lg x}{\lg(y+6)-(\lg y+\lg 6)}=-1. \end{cases}$

7.292. $\begin{cases} \log_{xy}\dfrac{y}{x}-\log_y^2 x=1, \\ \log_2(y-x)=1. \end{cases}$ 7.293. $\begin{cases} (x+y)^x=(x-y)^y, \\ \log_2 x-\log_2 y=1. \end{cases}$

7.294. $\begin{cases} x^{x-2y}=36, \\ 4(x-2y)+\log_6 x=9 \end{cases}$ (знайти тільки цілочислові розв'язки).

Група В

Спростити вирази (7.295—7.299):

7.295. $\dfrac{(\lg b\cdot 2^{\log_2\lg b})^{1/2}\cdot\lg^{-1/2}b^2}{\sqrt{\dfrac{\lg^2 b+1}{2\lg b}+1-10^{0,5\lg\lg b^{1/2}}}}.$

7.296. $2\log_a^{1/2}b\left((\log_a\sqrt[4]{ab}+\log_b\sqrt[4]{ab})^{1/2}-\right.$

$\left.-\left(\log_a\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}+\log_b\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}\right)^{1/2}\right)$, якщо $a>1$ і $b>1$.

7.297. $\sqrt{\log_n p+\log_p n+2}\cdot(\log_n p-\log_{np}p)\cdot\sqrt{\log_n p}.$

7.298. $\left(\left(\dfrac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}-1\right)^{1/2}-\right.$

$\left.-\left(\dfrac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}+1\right)^{1/2}\right)\sqrt{2}\log_a^{1/2}b$ при $a>1$.

7.299. $\dfrac{1-\log_{1/a}\dfrac{1}{(a-b)^2}+\log_a^2(a-b)}{(1-\log_{\sqrt{a}}(a-b)+\log_a^2(a-b))^{1/2}}$.

7.300. Помітивши, що $675=9\cdot75$, а $135=3\cdot45$, не використовуючи таблиць, дати відповідь на питання: яке число більше $\log_{135}675$ чи $\log_{45}75$.

7.301. Рівняння $4^x+10^x=25^x$ має єдиний корінь. Знайти його і виясннти: додатний він чи від'ємний; більший чи менший за одиницю.

7.302. Показати, що $\log_3 12=\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4+1$.

7.303. Вираз $\log_m A\cdot\log_n A+\log_n A\cdot\log_p A+\log_p A\times\times\log_m A$ подати у вигляді добутку.

7.304. Показати, що $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7==1/3$.

7.305. Спростити вираз $((\log_b^4 a+\log_a^4 b+2)^{1/2}-2)^{1/2}$ при $1<<a<b$.

7.306. При яких значеннях p рівняння $\lg(x^2+2px)-\lg(8x--6p-3)=0$ має єдиний корінь?

7.307. При яких значеннях a рівняння $2\lg(x+3)=\lg(ax)$ має єдиний корінь?

7.308. Знайти x, якщо $(\sqrt[3]{0{,}5}+\sqrt[3]{4})^x=13{,}5$.

Розв'язати рівняння (7.309—7.333):

7.309. $2\log_9^2 x=\log_3 x\cdot\log_3(\sqrt{2x+1}-1)$.

7.310. $\left(1+\log_x\dfrac{4-x}{10}\right)\cdot\lg x=\lg\lg 10^3-1$.

7.311. $3\log_x 4+2\log_{4x}4+3\log_{16x}4=0$.

7.312. $4^{\log_{16}x}-3^{\log_{16}x-0{,}5}=3^{\log_{16}x+0{,}5}-2^{2\log_{16}x-1}$.

7.313. $\log_{x+1}(x^3-9x+8)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3$.

7.314. $\dfrac{2-4\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)}-1=\dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

7.315. $2^{\operatorname{tg}(x-\pi/4)}-2\cdot0{,}25^{\frac{\sin^2(x-\pi/4)}{\cos 2x}}-1=0$.

7.316. $\lg 2x+\lg(2-x)=\lg\lg p$. При яких значеннях p рівняння має розв'язок?

7.317. $\log_4 x+\log_x 2-\log_4\sqrt{x}=1$.

7.318. $\log_k x+\log_{\sqrt{k}}x+\dots+\lg_{\sqrt[k]{k}}x=\dfrac{k+1}{2}$ $(k\in\mathbf{N})$.

7.319. $2-\log_{b^2}(1+x)=3\log_b\sqrt{x-1}-\log_{b^4}(x^2-1)^2$.

7.320. $m^{1+\log_3 x}+m^{1-\log_3 x}=m^2+1$ $(m>0,\ m\neq1)$.

7.321. $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$.

7.322. $a^{2\lg x-\lg(6-x)}=1$ $(a>0)$.

7.323. $p^{\log_2(x+14)+\log_2(x+2)}=p^6$ $(p>0)$.

7.324. $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1$.

7.325. $(2^x - 2 \cdot 2^{-x})^{\log_9(2x+3)-\log_3 x} = 1.$

7.326. $|x - 3|^{x^2-x} = (x - 3)^2.$

7.327. $\log_{\sqrt{x}}(x + 12) = 8 \log_{x+12} x$ (обмежитися відшуканням цілого кореня).

7.328. $5^{\lg x} - 3^{\lg x} = 5,(3) \cdot 3^{0,5\lg x} \cdot 5^{0,5(\lg x-2)}.$

7.329. $|\log_2(3x - 1) - \log_2 3| = |\log_2(5 - 2x) - 1|.$

7.330. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \dfrac{4}{2-\sqrt{3}}.$

7.331. $\dfrac{\log_3 x - 1}{\log_3 \dfrac{x}{3}} - 2\log_3 \sqrt{x} + \log_3^2 x = 3.$

7.332. $\log_{x+3}(3 - \sqrt{1 - 2x + x^2}) = 1/2.$

7.333. $\sqrt{\log_2(2x^2) \cdot \log_4(16x)} = \log_4 x^3.$

Розв'язати системи рівнянь (7.334—7.340):

7.334. $\begin{cases} \log_2(u + v) - \log_3(u - v) = 1, \\ u^2 - v^2 = 2. \end{cases}$

7.335. $\begin{cases} x^p = y^q, \\ \log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y} \end{cases}$ $(p \neq q$ і $pq \neq 0).$

7.336. $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}. \end{cases}$

7.337. $\begin{cases} xy = a^2, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2,5 \lg^2(a^2) \end{cases}$ при $a < 0.$

7.338. $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$

7.339. $\begin{cases} (2^{x+y})^{x^2-xy-8} = 1, \\ (0,37^{x-}\ )^{x^2+xy+2x-16} = 1. \end{cases}$

7.340. $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_3 y - \log_3 x = 1. \end{cases}$

Глава 8

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Вказівки до розв'язування тригонометричних рівнянь

1°. *Найпростішими тригонометричними рівняннями* називаються рівняння виду $\sin x = a$ (де $|a| \leqslant 1$), $\cos x = a$ (де $|a| \leqslant 1$), $\operatorname{tg} x = a$ (де $-\infty < a < \infty$), $\operatorname{ctg} x = a$ (де $-\infty < a < \infty$). Формули розв'язування цих рівнянь мають такий вигляд (тут і далі $n \in \mathbf{Z}$ означає, що n — ціле число):

$$\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.1}$$

$$\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.2}$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.3}$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{8.4}$$

В окремих випадках при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ маємо такі формули:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.5}$$

$$\sin x = 1, \quad x = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.6}$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.7}$$

$$\cos x = 0, \quad x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.8}$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.9}$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.10}$$

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.11}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0, \quad x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{8.12}$$

Рівняння виду $\sin(\omega x + \varphi) = a$, $\cos(\omega x + \varphi) = a$, $\operatorname{tg}(\omega x + \varphi) = b$, $\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi) = b$ ($|a| < 1$, $\omega \neq 0$, φ, b — будь-які дійсні числа) також відносяться до найпростіших. Їх слід розв'язувати зразу за формулами (8.1) — (8.4), замінивши x на $\omega x + \varphi$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

△ Згідно з формулою (8.1), маємо $\frac{\pi}{6} - 2x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$. Оскільки $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{6} - 2x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, звідки $x = -(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ або $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}(6n + 1)$, $n \in \mathbf{Z}$. ▲

Якщо рівняння не є найпростішим, то за допомогою тотожних перетворень його треба звести до одного або кількох найпростіших рівнянь, сукупність яких рівносильна заданому.

2°. При розв'язуванні тригонометричних рівнянь часто використовуються розклад на множники і введення нової змінної (метод підстановки).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin x = \sin 2x \cos 3x$.

△ Застосувавши до $\sin 2x$ формулу (3.13), дістанемо

$$\sin x = 2 \sin x \cos x \cos 3x, \quad \sin x (1 - 2 \cos x \cos 3x) = 0,$$

Оскільки обидва множники у лівій частині цього рівняння мають смисл при будь-яких значеннях x, то воно рівносильне сукупності двох рівнянь $\sin x = 0$ і $1 - 2\cos x \cos 3x = 0$.

Згідно з формулою (8.5), перше рівняння задовольняють значення $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Для розв'язування другого рівняння перетворимо добуток косинусів у суму за формулою (3.26). Маємо $1 - (\cos 4x + \cos 2x) = 0$. Оскільки $1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x$ (див. формулу (3.16)), то рівняння набирає вигляду $2\sin^2 2x - \cos 2x = 0$ або $2(1 - \cos^2 2x) - \cos 2x = 0$, звідки дістаємо $2\cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$ — квадратне рівняння відносно $\cos 2x$. Покладаючи $\cos 2x = z$, маємо $2z^2 + z - 2 = 0$. Розв'язуючи це рівняння, знаходимо $z_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $z_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$.

Оскільки $|z_2| = \left|\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right| > 1$, то рівняння $\cos 2x = z_2$ не має розв'язків. Залишається розв'язати рівняння $\cos 2x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. За формулою (8.2) знаходимо $2x = \pm\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Таким чином, дістаємо відповідь: $x = \pi n$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbf{Z}$. ▲

При розв'язуванні рівняння за допомогою методу розкладання на множники воно може не бути рівносильним одержаній сукупності рівнянь, оскільки можлива поява сторонніх коренів. Щоб уникнути помилок у відповіді, треба виключити з одержаних значень невідомого ті, для яких задане рівняння не має смислу.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(1 - \sin x)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$.

△ Знайдемо значення x, що задовольняють кожне із рівнянь $1 - \sin x = 0$ і $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$; якщо $\sin x = 1$, то за формулою (8.6) дістанемо

$$x = \pi/2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}; \qquad (*)$$

якщо $\operatorname{tg}^2 x = 3$, тобто $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$, то за формулою (8.3) маємо

$$x = \pm\pi/3 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (**)$$

Проте було б помилкою вважати відповіддю об'єднання розв'язків (*) і (**). Справа в тому, що початкове рівняння не має смислу для значень $x = \pi/2 + \pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$, тому перший із передбачуваних розв'язків непридатний і відповіддю є тільки другий розв'язок $x = \pm\pi/3 + \pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$. ▲

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos x \cos 2x \cos 4x = 1/8$.

△ Найбільш швидкий спосіб розв'язування — множення правої і лівої частин рівності на $8 \sin x$, хоча при цьому можлива поява сторонніх коренів. Щоб запобігти цьому, слідураховувати, що в остаточну відповідь не повинні входити значення x, для яких $\sin x = 0$, тобто значення $x = \pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$, оскільки вони не задовольняють початкове рівняння.

Після множення на $8 \sin x$ рівняння набирає вигляду

$$8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \sin x.$$

Послідовно тричі застосувавши формулу синуса подвійного аргументу (3.13), дістанемо спочатку $4 \sin 2x \cos 2x \cos 4x = \sin x$, потім

$2\sin 4x\cos 4x = \sin x$ і далі $\sin 8x = \sin x$ або $\sin 8x - \sin x = 0$. Перетворюючи за формулою (3.20) різницю синусів в добуток, дістаємо

$$\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{9x}{2} = 0.$$

Нехай $\sin\frac{7x}{2} = 0$, тоді $\frac{7x}{2} = \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$, звідки $x = \frac{2\pi k}{7}$ $(k \in \mathbf{Z})$, причому слід виключити значення $x = 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$, здобуті при $k = 7n$, як сторонні для початкового рівняння.

Нехай тепер $\cos\frac{9x}{2} = 0$, тоді $\frac{9x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m$ $(m \in \mathbf{Z})$, звідки $x = \frac{\pi(2m+1)}{9}$ $(m \in \mathbf{Z})$, причому слід виключити значення $x = \pi(2n + 1)$ $(n \in \mathbf{Z})$, здобуті при $m = 9n + 4$ $(n \in \mathbf{Z})$, як сторонні для початкового рівняння.

Таким чином, дістаємо відповідь: $x = \frac{2\pi k}{7}$, де ціле $k \neq 7n$, $n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi(2m+1)}{9}$, де ціле $m \neq 9n + 4$, $n \in \mathbf{Z}$. ▲

3°. *Однорідними рівняннями* називаються рівняння виду

$$a\sin kx + b\cos kx = 0; \tag{8.13}$$

$$a\sin^2 kx + b\sin kx\cos kx + c\cos^2 kx = 0; \tag{8.14}$$

$$a\sin^3 kx + b\sin^2 kx\cos kx + c\sin kx\cos^2 kx + d\cos^3 kx = 0. \tag{8.15}$$

Рівняння

$$a\sin^2 kx + b\sin kx\cos kx + c\cos^2 kx = d$$

при $d \neq 0$ не є однорідним, але його можна звести до однорідного рівняння виду (8.14), замінивши d тотожно рівним йому виразом $d(\sin^2 kx + \cos^2 kx)$.

Для розв'язування рівнянь (8.13) — (8.15) у випадку $a \neq 0$ розглянемо ті значення x, при яких $\cos kx = 0$. Тоді з кожного рівняння випливає, що при тих самих значеннях x повинно і $\sin kx = 0$, а це неможливо. Отже, розв'язками цих рівнянь можуть бути тільки ті значення x, при яких $\cos kx \neq 0$. Тому якщо (при $a \neq 0$) розділити обидві частини рівняння (8.13) на $\cos kx$, рівняння (8.14) — на $\cos^2 kx$, рівняння (8.15) — на $\cos^3 kx$, то втрати коренів не буде.

У результаті дістаємо алгебраїчне рівняння відносно $\operatorname{tg} kx$, для розв'язування якого слід ввести заміну $\operatorname{tg} kx = z$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$3\sin^2 x\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x -$$
$$-\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos x = 0.$$

△ Використовуючи формули зведення, дістаємо

$$3\sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Це однорідне рівняння відносно $\sin x$ і $\cos x$, причому $a \neq 0$, тобто значення x, при яких $\cos x = 0$ не будуть розв'язками заданого рівняння.

Розділивши члени рівняння на $\cos^3 x$, маємо

$$3\,\mathrm{tg}^3 x + 3\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 1 = 0, \quad (3\,\mathrm{tg}^2 x - 1)(\mathrm{tg}\, x + 1) = 0;$$

$$3\,\mathrm{tg}^2 x - 1 = 0, \quad \mathrm{tg}\, x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1), \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$\mathrm{tg}\, x + 1 = 0, \quad \mathrm{tg}\, x = -1, \quad x = \frac{\pi}{4}(4k - 1), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Таким чином, дістаємо відповідь: $x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1)$ і $x = \frac{\pi}{4}(4k - 1)$, $n, k \in \mathbf{Z}$. ▲

При розв'язуванні рівнянь (8.13) — (8.15) у випадку $a = 0$ ділення на $\cos kx$ недопустиме, оскільки воно приводить до втрати коренів — тих значень x, при яких $\cos kx = 0$.

При $a = 0$ рівняння (8.13) стає найпростішим, а для розв'язування рівнянь (8.14) і (8.15) слід застосувати метод розкладу на множники.

4°. Інші способи розв'язування тригонометричних рівнянь розглянемо при розв'язуванні прикладів.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $3\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos x = 4$.

△ При розв'язуванні таких рівнянь зручно використовувати формули пониження степеня (3.16) і (3.17), які мають вид $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$, $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$. Скориставшись другою із них, маємо $\frac{3(1 + \cos(x - \pi/2))}{2} - 2\cos x = 4$ і після очевидних перетворень дістаємо рівняння

$$3\sin x - 4\cos x = 5. \qquad (*)$$

Воно легко зводиться до алгебраїчного рівняння відносно $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ за допомогою формул (3.28) і (3.29), тобто до рівностей $\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)}$, $\cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)}$, справедливих для всіх $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Зазначимо, що заміна $\sin x$ і $\cos x$ виразами, що містять $\mathrm{tg}\,(x/2)$, може привести до втрати коренів вигляду $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Чи задовольняють ці значення x початкове рівняння, з'ясовується перевіркою.

Виконавши в рівнянні (*) підстановку $\mathrm{tg}\,(x/2) = z$, яку називають «універсальною», дістаємо рівняння $z^2 - 6z + 9 = 0$. Воно має розв'язок $z = 3$. Повертаючись до змінної x, дістаємо $\mathrm{tg}\,(x/2) = 3$, звідки $x = 2\,\mathrm{arctg}\, 3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Залишається перевірити, чи задовольняють рівняння (*) числа $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Маємо $3\sin(\pi + 2\pi n) - 4\cos(\pi + 2\pi n) \neq 5$; отже, числа $x = \pi + 2\pi n$ не є розв'язками рівняння (*).

Таким чином, дістаємо відповідь: $x = 2\,\mathrm{arctg}\, 3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ▲

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sin^6 x + \cos^6 x = a$ (a — задане число).

△ Перетворимо ліву частину рівняння за формулою (2.13) як суму кубів:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) =$$

$$= (\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x) - 3\sin^2 x\cos^2 x =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x.$$

Згідно з формулою (3.13), маємо $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. Тоді дістанемо рівняння $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a$, рівносильне початковому, звідки $\sin^2 2x = \frac{4(1-a)}{3}$. Якщо $0 \leqslant \frac{4(1-a)}{3} < 1$, тобто $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1$, то рівняння $\sin 2x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3(1-a)}$ має розв'язок

$$x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3(1-a)}\right) + \frac{\pi n}{2},\quad n \in \mathbf{Z}. \ \blacktriangle$$

Зокрема, при $a = 1$ розв'язками рівняння $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ є числа $x = \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$. Проте це рівняння, як і багато інших, можна розв'язати швидше, використовуючи нерівності $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ (див. приклади 8 і 9).

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sin^{2k+2}x + \cos^{2k+2}x = 1$, $k \in \mathbf{N}$.

$\triangle$ Легко здогадатися, що числа $x = \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$, є розв'язками рівняння. Проте ще слід довести, що інших розв'язків немає. Припустимо, що існують розв'язки $x = \alpha \neq \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$. Оскільки $|\sin\alpha| < 1$ і $|\cos\alpha| < 1$, то $\sin^2\alpha < 1$ і $\cos^2\alpha < 1$. Тому для будь-якого цілого додатного k справедливі нерівності $\sin^{2k+2}\alpha < \sin^2\alpha$ і $\cos^{2k+2}\alpha < \cos^2\alpha$. Додаючи їх, дістаємо $\sin^{2k+2}\alpha + \cos^{2k+2}\alpha < \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$. Але $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Отже, $\sin^{2k+2}x + \cos^{2k+2}x < 1$ для всіх значень $x = \alpha \neq \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$.

Таким чином, задане рівняння (зокрема рівняння $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$) не має розв'язків, відмінних від $x = \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$. $\blacktriangle$

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\sin(\pi\cos 2x) = 1$.

$\triangle$ За формулою (8.6) знаходимо $\pi\cos 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, тобто $\cos 2x = \frac{1}{2} + 2k$, $k \in \mathbf{Z}$. Але $|\cos 2x| \leqslant 1$, тому $k = 0$. Маємо $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, звідки дістанемо відповідь: $x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1)$, $n \in \mathbf{Z}$. $\blacktriangle$

Група А

Розв'язати рівняння (8.001—8.175):

8.001. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$.

8.002. $7 + 4\sin x\cos x + 1{,}5(\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x) = 0$.

8.003. $\frac{4\,\mathrm{ctg}\, x}{1 + \mathrm{ctg}^2 x} + \sin^2 2x + 1 = 0$.

8.004. $\frac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} + 1 = 2\,\mathrm{tg}^2 x$.

8.005. $\sin z\sin(60^\circ - z)\sin(60^\circ + z) = 1/8$.

8.006. $\cos^{-2} 2t - \sin^{-2} 2t = 8/3$.

8.007. $\operatorname{tg} 3t - \operatorname{tg} t - 4 \sin t = 0.$

8.008. $\cos^{-1} 3t - 6 \cos 3t = 4 \sin 3t.$

8.009. $\operatorname{ctg} t - \sin t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}.$

8.010. $8 \cos z \cos (60^\circ - z) \cos (60^\circ + z) + 1 = 0.$

8.011. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \operatorname{ctg} 3x + \sin (\pi + 2x) - \sqrt{2} \cos 5x = 0.$

8.012. $\sin x \cos 2x + \cos x \cos 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right).$

8.013. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}.$

8.014. $(1 + \cos 4x) \sin 2x = \cos^2 2x.$

8.015. $\sin^2 2z + \sin^2 3z + \sin^2 4z + \sin^2 5z = 2.$

8.016. $\operatorname{ctg}^4 2z + \sin^{-4} 2z = 25.$

8.017. $\operatorname{tg} 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 5x = 0.$

8.018. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1) \cos^{-2} x.$

8.019. $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x = 0.$

8.020. $1 - \sin 3x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2.$

8.021. $2 \operatorname{ctg}^2 x \cos^2 x + 4 \cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x - 2 = 0.$

8.022. $2 \sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

8.023. $\sin 7x + \sin 9x = 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right).$

8.024. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0.$

8.025. $\sin (15^\circ + x) + \sin (45^\circ - x) = 1.$

8.026. $\cos^{-1} x + \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} \frac{3x}{2}.$

8.027. $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0.$

8.028. $2 \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0.$

8.029. $\cos x \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 4x\right) \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 5x\right).$

8.030. $2 + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0.$

8.031. $\sin 2x + \sin (\pi - 8x) = \sqrt{2} \cos 3x.$

8.032. $0{,}5 (\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0.$

8.033. $2 (\cos 4x - \sin x \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x.$

8.034. $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x.$

8.035. $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0.$
8.036. $\sin 2x \sin 6x - \cos 2x \cos 6x = \sqrt{2} \sin 3x \cos 8x.$
8.037. $\sin 3x \cos 3x = \sin 2x.$
8.038. $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0.$
8.039. $3 \sin 2x + 2 \cos 2x = 3.$

8.040. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 x} = 0.$

8.041. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0.$

8.042. $2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2} - 1\right) = \cos t.$

8.043. $\sin 3z - \cos 3z = \sqrt{3/2}.$
8.044. $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0.$
8.045. $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0.$

8.046. $\sin\frac{z}{2} \cos\frac{3z}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2z = \sin\frac{3z}{2} \cos\frac{z}{2}.$

8.047. $\sin^3 z \cos z - \sin z \cos^3 z = \sqrt{2}/8.$

8.048. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \times$
$\times \sin\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right).$

8.049. $\cos 3x = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$

8.050. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x.$
8.051. $1 + \sin 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2.$
8.052. $\sin 3x = 2 \cos(\pi/2 - x).$
8.053. $\cos 4x + 2 \sin^2 x = 0.$
8.054. $\sin x + \sin 7x - \cos 5x + \cos(3x - 2\pi) = 0.$
8.055. $\cos^4 2x + 6 \cos^2 2x = 25/16.$
8.056. $1 + \cos t + \cos 2t + \cos 3t = 0.$
8.057. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x).$

8.058. $1 + \cos 7x = \left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)^2.$

8.059. $2 \operatorname{tg}^4 3x - 3 \operatorname{tg}^2 3x + 1 = 0.$
8.060. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \cos(7x + 3\pi/2).$
8.061. $4 \operatorname{tg}^2 3x - \cos^{-2} 3x = 2.$
8.062. $\cos^3 x + \cos^2 x - 4 \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$
8.063. $\sin 9x = 2 \sin 3x.$
8.064. $(\sin^{-1} z + \cos^{-1} z)(\sin z + \cos z) + 2 = 0.$
8.065. $\sin 2z + \cos 2z = \sqrt{2} \sin 3z.$
8.066. $6 \sin^2 x + 2 \sin^2 2x = 5.$
8.067. $\sin 3x + \sin 5x = 2(\cos^2 2x - \sin^2 3x).$

8.068. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{ctg}^2 x + \sin^{-2} x (1 + \cos 2x) = 0.$

8.069. $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0.$

8.070. $3\sin 5z - 2\cos 5z = 3.$

8.071. $4\sin 3z + \frac{1}{3}\cos 3z = 3.$

8.072. $(\cos 6x - 1)\operatorname{ctg} 3x = \sin 3x.$

8.073. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = 3.$

8.074. $1 - \cos(\pi + x) - \sin\frac{3\pi + x}{2} = 0.$

8.075. $9^{\cos x} = 9^{\sin x}\cdot 3^{2/\cos x}.$

8.076. $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0.$

8.077. $2\sin z - \cos z = 2/5.$

8.078. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2\cos 3x.$

8.079. $(1 + \sin x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \cos^{-1} x - \cos x.$

8.080. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \cos 3x.$

8.081. $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2.$

8.082. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x.$

8.083. $\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3\cos^2 x.$

8.084. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x).$

8.085. $4\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin(\pi + x)\cos x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi + x) = 1.$

8.086. $\cos 6x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right).$

8.087. $2\sin x\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 3\sin(\pi - x)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos x = 0.$

8.088. $(\sin 4t + \cos 4t)^2 = 16\sin 2t\cos^3 2t - 8\sin 2t\cos 2t.$

8.089. $\cos(2t - 18^\circ)\operatorname{tg} 50^\circ + \sin(2t - 18^\circ) = \dfrac{1}{2\cos 130^\circ}.$

8.090. $\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{3t}{2} + \cos^{-1}\frac{t}{2}\sin^{-1}\frac{3t}{2} = 1.$

8.091. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\operatorname{tg} t}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg} t}=\sin 2t.$

8.092. $\cos(20^\circ+x)+\cos(100^\circ-x)=1/2.$

8.093. $\cos t\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+6t\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\sin 6t=\cos 6t+\cos 4t.$

8.094. $\dfrac{1-\cos x}{\sin(x/2)}=2.$

8.095. $\sin\dfrac{7x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{5x}{2}+\sin 2x\cos 7x=0.$

8.096. $\sin 3x+\sin 5x=\sin 4x.$

8.097. $\sin z-\sin^2 z=\cos^2 z-\cos z.$

8.098. $\sin z+\sin 2z+\sin 3z=\cos z+\cos 2z+\cos 3z.$

8.099. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+2\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x+1}+\dfrac{1}{\operatorname{tg} x-1}\right)=4.$

8.100. $1-\cos 6x=\operatorname{tg} 3x.$

8.101. $\sqrt{2}\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0.$

8.102. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-0{,}5.$

8.103. $2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5.$

8.104. $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x.$

8.105. $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cos 2x.$

8.106. $\cos(3x-30^\circ)-\sin(3x-30^\circ)\operatorname{tg} 30^\circ=\dfrac{1}{2\cos 210^\circ}.$

8.107. $4\sin x+\cos x=4.$ 8.108. $2\sin^2 z+\operatorname{tg}^2 z=2.$

8.109. $\cos 2x+\cos 6x+2\sin^2 x=1.$

8.110. $\cos 3x\cos 6x=\cos 4x\cos 7x.$

8.111. $\sin 3x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x+\dfrac{1}{2}\cos 5x=0.$

8.112. $\operatorname{ctg}^3 x+\sin^{-2} x-3\operatorname{ctg} x-4=0.$

8.113. $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=3/2.$

8.114. $1+\sin x-\cos 5x-\sin 7x=2\cos^2\dfrac{3}{2}x.$

8.115. $\dfrac{\sin z}{1+\cos z}=2-\operatorname{ctg} z.$

8.116. $\sin(15^\circ+x)+\cos(45^\circ+x)+\dfrac{1}{2}=0.$

8.117. $1+\sin 2x=\sin x+\cos x.$

8.118. $3(1-\sin t)+\sin^4 t=1+\cos^4 t.$

8.119. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+x\right)-3\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2} x.$

8.120. $\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{3}{2}x-\sin^2 2x-\sin^2 4x=0.$

8.121. $\dfrac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}}=\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}.$

8.122. $\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0.$

8.123. $\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0.$

8.124. $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x=2\cos^{-1}4x.$

8.125. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\sin(\pi-5x)=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 3x).$

8.126. $\dfrac{1}{1+\cos^2 z}+\dfrac{1}{1+\sin^2 z}=\dfrac{16}{11}.$

8.127. $\dfrac{\cos x}{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,x+1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\mathrm{ctg}\,x}=2\sqrt{3}.$

8.128. $\cos 4x\cos(\pi+2x)-\sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x.$

8.129. $\sin x-\sin 3x-\sin 5x+\sin 7x=0.$

8.130. $\sin 3x-\sin 7x=\sqrt{3}\sin 2x.$

8.131. $\sqrt{3}-\mathrm{tg}\,x=\mathrm{tg}(\pi/3-x).$

8.132. $\sin^2 x\cos^{-4}x-4\,\mathrm{tg}^2 x+3\cos^{-2}x-12=0.$

8.133. $\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x.$

8.134. $(\sin 2t-\sin^{-1}2t)^2+(\cos^{-1}2t-\cos 2t)^2=1.$

8.135. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+0{,}25.$

8.136. $\sin 2z-4\cos 2z=4.$

8.137. $3+2\sin 2x=\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x.$

8.138. $\sin^2(\pi/8+t)=\sin t+\sin^2(\pi/8-t).$

8.139. $\sin^3\frac{x}{3}-\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}-3\sin\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}+$
$+3\cos^3\frac{x}{3}=0.$

8.140. $\mathrm{tg}(x-15^\circ)\,\mathrm{ctg}(x+15^\circ)=1/3.$

8.141. $\cos(x+1)\sin 2(x+1)=\cos 3(x+1)\sin 4(x+1).$

8.142. $\cos(4x+2)+3\sin(2x+1)=2.$

8.143. $\cos 4x+2\cos^2 x=1.$ 8.144. $\sin^4 x+\cos^4 x=5/8.$

8.145. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x.$

8.146. $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,50^\circ+\mathrm{tg}\,70^\circ=\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,50^\circ\,\mathrm{tg}\,70^\circ.$

8.147. $\cos x-\sin x=4\cos x\sin^2 x.$

8.148. $\mathrm{tg}\,2x\sin 2x-3\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,2x\cos 2x=0.$

8.149. $\cos x-\cos 3x=\sin 2x.$

8.150. $\sqrt{2}(1+\cos x)=\mathrm{ctg}(x/2).$

8.151. $\sin\dfrac{3x-7\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi-3x}{2}=\cos^{-1}\dfrac{3}{2}x.$

8.152. $\sin^2 3x = 3\cos^2 3x$.
8.153. $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$.

8.154. $\sin 6x + \sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$.

8.155. $$\frac{2\cos(\pi + x) - 5\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - \cos(\pi - x)} = \frac{3}{2}.$$

8.156. $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 = 2 - 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$.

8.157. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 2x + 1 = 4\cos^2 x + \frac{\sin 3x}{\sin x} - 2\cos 2x$.

8.158. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} x = 1$.

8.159. $2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \sin 3x$.

8.160. $\sin^2 2x + \sin^2 x = 9/16$.
8.161. $3\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$.
8.162. $2(1 - \cos 2x) = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$.

8.163. $a\cos^2\frac{x}{2} - (a + 2b)\sin^2\frac{x}{2} = a\cos x - b\sin x$, $b \neq 0$.

8.164. $\sin 5x = \cos 4x$. 8.165. $2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 3$.
8.166. $25\sin^2 x + 100\cos x = 89$.
8.167. $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0{,}25$.

8.168. $\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = 1 + \cos 4x$.
8.169. $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x$.
8.170. $\cos 2x + 3\sin x = 2$. 8.171. $\cos 2x = 1 - \sin 2x$.
8.172. $\operatorname{tg}(70^\circ + x) + \operatorname{tg}(20^\circ - x) = 2$.

8.173. $\sin x + \sin\frac{1}{\pi} = \sin\left(x + \frac{1}{\pi}\right)$.

8.174. $\operatorname{tg}^2 3x - 2\sin^2 3x = 0$. 8.175. $6\operatorname{ctg}^2 x - 2\cos^2 x = 3$.

Група Б

Розв'язати рівняння (8.176—8.385):
8.176. $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$.

8.177. $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} +$
$+ \sin x = 4$.
8.178. $\operatorname{tg}(120^\circ + 3x) - \operatorname{tg}(140^\circ - x) = 2\sin(80^\circ + 2x)$.

8.179. $\sin^2 x + 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin x\sin^2\frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = 0$.

8.180. $\frac{\cos^2 z\,(1+\operatorname{ctg} z)-3}{\sin z-\cos z}=3\cos z.$

8.181. $\frac{1}{2\operatorname{ctg}^2 t+1}+\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 t+1}=\frac{15\cos 4t}{8+\sin^2 2t}.$

8.182. $8\cos^4 x-8\cos^2 x-\cos x+1=0.$

8.183. $\frac{6\cos^3 2t+2\sin^3 2t}{3\cos 2t-\sin 2t}=\cos 4t.$

8.184. $\cos z\cos 2z\cos 4z\cos 8z=1/16.$

8.185. $\frac{\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}}{2+\sin x}=\frac{1}{3}\cos x.$

8.186. $\operatorname{tg}^2 t-\frac{2\sin 2t+\sin 4t}{2\sin 2t-\sin 4t}=2\operatorname{ctg} 2t.$

8.187. $\sin^2 x\operatorname{tg} x+\cos^2 x\operatorname{ctg} x+2\sin x\cos x=4\sqrt{3}/3.$

8.188. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 15^\circ+\operatorname{ctg}(x+25^\circ)=\operatorname{ctg} 15^\circ\operatorname{ctg}(x+25^\circ)\operatorname{ctg} x.$

8.189. $\frac{40\left(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2}\right)}{16\sin\frac{t}{2}-25\cos\frac{t}{2}}=\sin t.$

8.190. $\frac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right).$

8.191. $\sin^{-1} t-\sin^{-1} 2t=\sin^{-1} 4t.$

8.192. $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\cdot\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}-3=0.$

8.193. $\operatorname{ctg}^2 2x+\frac{3(\cos 3x-\cos x)}{\sin 3x-\sin x}+2=0.$

8.194. $\operatorname{tg}^4 3t=\sin^2 6t.$ 8.195. $\frac{1-\sin^6 z-\cos^6 z}{1-\sin^4 z-\cos^4 z}=2\cos^2 3z.$

8.196. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\frac{\cos x-\sin x}{0{,}5\sin 2x}.$

8.197. $\frac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z}+\frac{\operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} 2z}+2=0.$

8.198. $\cos^{-2} 2x\operatorname{tg} 2x+\sin^{-2} 2x\operatorname{ctg} 2x=\frac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x}+10\sin^{-1} 4x+4\sqrt{3}.$

8.199. $\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\right).$

8.200. $\dfrac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$

8.201. $\sin 2x+2\operatorname{ctg} x=3.$

8.202. $2\cos 13x+3\cos 3x+3\cos 5x-8\cos x\cos^3 4x=0.$

8.203. $(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=3-\sin 4x.$

8.204. $\operatorname{tg}^3 t+6\sin^{-1} 2t=8\sin^{-3} 2t-3\operatorname{ctg} t.$

8.205. $2\sin x\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+3\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos x-$

$-5\cos^2 x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0.$

8.206. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x=\dfrac{82}{9}(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x+1)\cos 2x.$

8.207. $2\cos^6 2t-\cos^4 2t+1{,}5\sin^2 4t-3\sin^2 2t=0.$

8.208. $\sin 6x+2=2\cos 4x.$

8.209. $\sin^2 t\operatorname{tg} t+\cos^2 t\operatorname{ctg} t-2\sin t\cos t=$

$=1+\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t.$

8.210. $\operatorname{tg}^3 2x+\operatorname{ctg}^3 2x+6\sin^{-1} 2x=8\sin^{-3} 4x.$

8.211. $\cos x\cos 2x\sin 3x=0{,}25\sin 2x.$

8.212. $\cos 9x-2\cos 6x=2.$

8.213. $2\sin^5 2t-\sin^3 2t-6\sin^2 2t+3=0.$

8.214. $\sin^6 2t+\cos^6 2t=\dfrac{3}{2}(\sin^4 2t+\cos^4 2t)+\dfrac{1}{2}(\sin t+\cos t).$

8.215. $(\cos^{-2} 2x+\operatorname{tg}^2 2x)(\sin^{-2} 2x+\operatorname{ctg}^2 2x)=$

$=4\sin^{-2} 4x+5.$

8.216. $\sin 3z+\sin^3 z=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2z.$

8.217. $(\cos 2x+(\cos x+\sin x)^2)(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)=0.$

8.218. $2\sin 2x-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+3x\right)-\cos 3x\cos^{-1} 5x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\right.$

$\left.-5x\right)=0.$

8.219. $3\operatorname{ctg} t-3\operatorname{tg} t+4\sin 2t=0.$

8.220. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 2x+\cos^{-2} 2x}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 2x+\sin^{-2} 2x}=\dfrac{2}{3}.$

8.221. $\operatorname{tg} 3t+\operatorname{tg} t=2\sin 4t.$

8.222. $\sin(3\pi-x)+\operatorname{tg}(\pi+x)=\dfrac{\cos^{-1} x-\cos x}{2\sin x}.$

8.223. $\frac{1}{2}\sin 4x \sin x + \sin 2x \sin x = 2\cos^2 x.$

8.224. $\frac{2(\cos^4 t + \sin^4 t)}{\cos^4 t - \sin^4 t} = \cos^{-1} 2t + \cos 4t + 1.$

8.225. $\operatorname{tg} t = \frac{\sin^2 t + \sin 2t - 1}{\cos^2 t - \sin 2t + 1}.$

8.226. $\frac{\sin 2t + 2\cos^2 t - 1}{\cos t - \cos 3t + \sin 3t - \sin t} = \cos t.$

8.227. $\sin t^2 - \sin t = 0.$

8.228. $\sin^3 z \sin 3z + \cos^3 z \cos 3z = \cos^3 4z.$

8.229. $2\sin^4 t(\sin 2t - 3) - 2\sin^2 t(\sin 2t - 3) - 1 = 0.$

8.230. $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{8}\cos 15x.$

8.231. $2\sin^4 x + 1{,}25\sin^2 2x - \cos^4 x = \cos 2x.$

8.232. $\sin 2t \cos 2t(\sin^4 2t + \cos^4 2t - 1) = \frac{1}{2}\sin^2 4t.$

8.233. $\sin 2x - 2\cos^2 x + 4(\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x - 1) = 0.$

8.234. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg} 2x.$

8.235. $\operatorname{ctg}^4 x = \cos^3 2x + 1.$

8.236. $\frac{1}{\sin^3 \frac{x}{2}\cos^3 \frac{x}{2}} - 6\cos^{-1} x = \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}.$

8.237. $4\sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0.$

8.238. $\sin x + \cos x + \sin 2x + \sqrt{2}\sin 5x = \frac{2\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$

8.239. $3\sin^2 \frac{x}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + 3\sin^2 \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \times$

$\times \cos^2 \frac{x}{2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)\cos \frac{x}{2}.$

8.240. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1 + \sin x}{\sin x} = \sqrt{2}\cos x.$

8.241. $\operatorname{tg}^3 z + \operatorname{ctg}^3 z - 8\sin^{-3} 2z = 12.$

8.242. $\frac{1}{\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 2x} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 5x + \operatorname{ctg} 2x} = \operatorname{tg} 3x.$

8.243. $\operatorname{ctg}\frac{z}{2} - \operatorname{tg}\frac{z}{2} + 4\cos^{-1} 2z = \frac{4\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{z}{2} - 1}.$

8.244. $\operatorname{ctg}^4 x = \cos^2 2x - 1.$

8.245. $\dfrac{4\sin^2\dfrac{t}{2}-1}{\cos t}=\operatorname{tg} t\,(1-2\cos t)$.

8.246. $3\sin^2 z\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+z\right)-\dfrac{1}{2}\sin^2 2z-5\cos^4 z+$
$$+2\cos 2z=0.$$

8.247. $\dfrac{\cos^2 3t}{\operatorname{tg} t}+\dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{tg} 3t}=0$.

8.248. $\dfrac{\sin 2t}{1+\cos 2t}\cdot\dfrac{\sin t}{1+\cos t}=\sin^{-1} t-1$.

8.249. $\dfrac{\cos^4 2x+\sin^4 2x}{\cos^4 2x-\sin^4 2x}-\dfrac{1}{2}\cos 4x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin^{-1} 4x$.

8.250. $\cos^{-4} z=\dfrac{160}{9}-2\sin^{-2} z\,(\operatorname{ctg} 2z\operatorname{ctg} z+1)$.

8.251. $\cos^{-3} t\sin^{-3} t-\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{ctg}^3 t=2\sqrt{3}\cos^{-1} 2t$.

8.252. $(\sin x-\cos x)^2+\operatorname{tg} x=2\sin^2 x$.

8.253. $\sin 3t-\sin t=\dfrac{8\cos t\operatorname{ctg} 2t}{4-\sin^{-2} t}$.

8.254. $\sin^3 2x\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)+3\sin 2x\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+2x\right)+$
$$+2\cos^3 2x=0.$$

8.255. $\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{ctg}(2x+3)=1$.

8.256. $\dfrac{4\sin^4 z}{(1+\cos 2z)^2}-2\cos^{-2} z-1=0$.

8.257. $\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}+\operatorname{ctg}^2\dfrac{z}{2}-2=4\operatorname{tg} z$.

8.258. $\cos^3 z\cos 3z+\sin^3 z\sin 3z=\sqrt{2}/4$.

8.259. $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\sin^2 x-2\sin^2(\pi/4-x)}{\cos^2 x+2\cos^2(\pi/4+x)}$.

8.260. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3z+\operatorname{tg} 4z}+\operatorname{ctg}^2 7z=\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 3z+\operatorname{ctg} 4z}$.

8.261. $(2\cos 2t+5)\cos^4 t-(2\cos 2t+5)\sin^4 t=3$.

8.262. $\operatorname{tg} z\operatorname{tg}(z+60^\circ)\operatorname{tg}(z+120^\circ)=\sqrt{3}$.

8.263. $\cos 3x+\cos\dfrac{5x}{2}=2$.

8.264. $1-\dfrac{2(\cos 2t-\operatorname{tg} t\sin 2t)}{\cos^{-2} t}=\sin^4 t-\cos^4 t$.

8.265. $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=\cos 2x$.

8.266. $\cos^3 x + \frac{1}{2}\sin 2x - \cos x \sin^3 x + 4\sin x + 4 = 0.$

8.267. $\frac{2(\cos^3 x + 2\sin^3 x)}{2\sin x + 3\cos x} = \sin 2x.$

8.268. $\operatorname{tg}\frac{3x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2\sin x.$

8.269. $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = 1.$

8.270. $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0{,}375 = 0.$

8.271. $\sin 2z + 5(\sin z + \cos z) + 1 = 0.$

8.272. $\sin^3 2t + \cos^3 2t + \frac{1}{2}\sin 4t = 1.$

8.273. $\operatorname{tg} z \operatorname{tg} 2z = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} 2z.$

8.274. $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x.$

8.275. $\frac{\operatorname{ctg} 4t}{\sin^2 t} + \frac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 4t} = 0.$ 8.276. $\operatorname{tg}^4 x = 36\cos^2 2x.$

8.277. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x + 8 = 0.$

8.278. $4\sin^3 x \cos 3x + 4\cos^3 x \sin 3x = 3\sin 2x.$

8.279. $2\cos z \sin^3\left(\frac{3\pi}{2} - z\right) - 5\sin^2 z \cos^2 z + \sin z \cos^3\left(\frac{3\pi}{2} + z\right) = \cos 2z.$

8.280. $\sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4}\cos 12x = 0.$

8.281. $2\sin 2x + 3\operatorname{tg} x = 5.$

8.282. $5\sin^4 2z - 4\sin^2 2z\cos^2 2z - \cos^4 2z + 4\cos 4z = 0.$

8.283. $1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 5x - \sqrt{2}\operatorname{tg} 2x \cos 3x \cos^{-1} 5x = 0.$

8.284. $\cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x = 1/16.$

8.285. $\frac{1}{\sin^2 2x} + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 4 = 0.$

8.286. $\operatorname{tg} 5z - \operatorname{tg} 3z - 2\operatorname{tg} 2z = 0.$

8.287. $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} - 2 = 0.$

8.288. $(\operatorname{ctg} z - 1)(1 + \sin 2z) = 1 + \operatorname{ctg} z.$

8.289. $\operatorname{tg} x \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} = \sin 6x.$

8.290. $\sin^4 3t+\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+3t\right)=\frac{1}{4}$.

8.291. $\cos 10x+2\cos^2 4x+6\cos 3x\cos x=$
$=\cos x+8\cos x\cos^3 3x$.

8.292. $1+\sin\frac{t}{2}\sin t-\cos\frac{t}{2}\sin^2 t=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)$.

8.293. $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)}{\cos^2 x}+2\operatorname{tg} x=0$.

8.294. $\frac{4\cos^2 t-1}{\sin t}=\operatorname{ctg} t\,(1+2\cos 2t)$.

8.295. $(\sin x+\cos x)^4=2\,(1+\sin^2 x)-(\sin x-\cos x)^4$.
8.296. $\cos^{-4} z=64\cos^2 2z$.
8.297. $4\sin 5x\cos 5x\,(\cos^4 x-\sin^4 x)=\sin 4x$.

8.298. $\frac{\operatorname{tg} 4z}{\operatorname{tg} 2z}+\frac{\operatorname{tg} 2z}{\operatorname{tg} 4z}+\frac{5}{2}=0$.

8.299. $\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}=6\cos 2x+4\sin 2x$.

8.300. $\operatorname{tg} 5x-2\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 5x$.
8.301. $\cos z+\sin z=\sqrt{1-2\cos^2 z}$.
8.302. $\sqrt{3}\,(1+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x)=\operatorname{tg} 2x\cos^{-1} 3x$.

8.303. $\left(\cos^{-6} z-\operatorname{tg}^6 z-\frac{7}{3}\right)(\sin z+\cos z+2)=0$.

8.304. $\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 3x+\operatorname{ctg} 5x=0$.
8.305. $\cos^{-1} 2t+\sin^{-1} 2t+\cos^{-1} 2t\sin^{-1} 2t-5=0$.
8.306. $\cos(22^\circ-t)\cos(82^\circ-t)+\cos(112^\circ-t)\cos(172^\circ-t)=$
$=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)$.

8.307. $\sin 4x\,(3\sin 4x-2\cos 4x)=$
$=\sin^2 2x-16\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 2x+\cos^2 2x$.

8.308. $\cos 3z-\cos^3 z+\frac{3}{4}\sin 2z=0$.

8.309. $\operatorname{tg}(t^2-t)\operatorname{ctg} 2=1$.
8.310. $\sin^3 x\,(1-\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x\,(1-\operatorname{tg} x)=1{,}5\cos 2x$.

8.311. $\frac{\cos^2(\pi/2-2t)}{1+\cos 2t}=\cos^{-2} 2t-1$.

8.312. $4\cos x\cos 2x\cos 3x=\cos 6x$.

8.313. $1-\cos x=\sqrt{1-\sqrt{4\cos^2 x-7\cos^4 x}}$.

8.314. $\frac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}+\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=\frac{10}{3}$.

8.315. $4\,(\sin t\cos^5 t+\cos t\sin^5 t)+\sin^3 2t=1$.

8.316. $\sin^4 x - \sin^2 x + 4(\sin x + 1) = 0.$

8.317. $\dfrac{\sin^2 t - \operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t - \operatorname{ctg}^2 t} + 2\operatorname{tg}^3 t + 1 = 0.$

8.318. $\dfrac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 5t} - \dfrac{\operatorname{tg} 5t}{\cos^2 t} = 0.$

8.319. $\dfrac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} + \sin x\left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) = 4.$

8.320. $\sin 2z - \sin 6z + 2 = 0.$

8.321. $\sin^2(t + 45^\circ) - \sin^2(t - 30^\circ) - \sin 15^\circ \cos(2t + 15^\circ) = 0{,}5 \sin 6t.$

8.322. $3\operatorname{tg} 3x - 4\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x.$

8.323. $\dfrac{5\sin x - 5\operatorname{tg} x}{\sin x + \operatorname{tg} x} + 4(1 - \cos x) = 0.$

8.324. $4\cos x = \sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 1.$

8.325. $1 + \dfrac{2(\cos 2z \operatorname{tg} z - \sin 2z)}{\cos^{-2} z} = \cos 2z.$

8.326. $(\cos x - \sin x)^2 + \cos^4 x - \sin^4 x = 0{,}5 \sin 4x.$

8.327. $\operatorname{ctg} x\left(1 - \dfrac{1}{2}\cos 2x\right) = 1.$

8.328. $\cos^2(x + 40^\circ) + \cos^2(x - 40^\circ) - \sin 10^\circ \cos 2x = \sin 2x.$

8.329. $2\cos^2\dfrac{x}{2}(1 - \sin x) + \cos^2 x = 0.$

8.330. $\operatorname{tg} 6x \cos 2x - \sin 2x - 2\sin 4x = 0.$

8.331. $\cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 8\cos x \cos^3 3x - 0{,}5.$

8.332. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x + 1) = 1.$

8.333. $\dfrac{8\sin^{-2} 2x + 1}{\cos^{-2} x + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x + \dfrac{4}{3}.$

8.334. $2 + \sin t = 3\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}.$

8.335. $\operatorname{tg}(35^\circ + x)\operatorname{ctg}(10^\circ - x) = 2/3.$

8.336. $2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + 2\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = 0.$

8.337. $\sin^4 2x + \sin^3 2x \cos 2x - 8\sin 2x \cos^3 2x - 8\cos^4 2x = 0.$

8.338. $\cos t(1 - \operatorname{tg} t)(\sin t + \cos t) = \sin t.$

8.339. $\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}} - \dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - \cos x}} = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}.$

8.340. $1 + \sin z + \cos z + \sin 2z + \cos 2z = 0.$

8.341. $\operatorname{ctg}(x - 25^\circ) + \operatorname{tg}(3x + 15^\circ) = 2\sin(2x - 50^\circ).$

8.342. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x + 4 = 0.$

8.343. $\operatorname{tg} 2t = \operatorname{ctg} t - 4 \cos t \cos 3t$.

8.344. $\cos 2x = \cos^3 \frac{3x}{2}$.

8.345. $(\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t + 2 \operatorname{tg} 2t)(1 + \cos 3t) = 4 \sin 3t$.

8.346. $\sin x (\cos x - 2) + \operatorname{tg} x = 2 - \cos x - \cos^{-1} x$.

8.347. $(1 + \cos x)\sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + \sin x = 2 \cos x$.

8.348. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$.

8.349. $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x - \operatorname{ctg}^2 x = 106/9$.

8.350. $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 0$.

8.351. $3\sqrt{3} \operatorname{tg} x \sin x - \operatorname{ctg} x \cos x + 9 \sin x - 3\sqrt{3} \cos x = 0$.

8.352. $\cos 2x - \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} - 1$.

8.353. $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$.

8.354. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)}{1 + \cos x} = 2$.

8.355. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x$.

8.356. $2 \sin^2 3x + \sin^2 6x = (\sin 2x + \sin 4x) \cos^{-1} x \sin^{-1} 3x$.

8.357. $4 \sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12 \cos^4 x$.

8.358. $5(1 - \sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0$.

8.359. $37 \operatorname{tg} 3x = 11 \operatorname{tg} x$.

8.360. $\sqrt{2}(\cos^4 2x - \sin^4 2x) = \cos 2x + \sin 2x$.

8.361. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \sin^{-1} x - \cos^{-1} x$.

8.362. $\sin^6 x + \cos^6 x = 7/16$.

8.363. $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2 \cos x (\cos x - 1)$.

8.364. $\cos 2x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$.

8.365. $2(1 + \sin 2x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

8.366. $\frac{1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x}{\operatorname{tg} 2x} = 0$.

8.367. $\frac{\operatorname{tg} 2t}{\cos^2 t} - \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 2t} =$

8.368. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

8.369. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x$.

8.370. $\sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{2}} + \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{2}} = 2$.

8.371. $\sin 3x = a \sin x$. 8.372. $\cos 3x = m \cos x$.
8.373. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \alpha + 1 = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha$.
8.374. $12 \sin x + 4\sqrt{3} \cos(\pi + x) = m\sqrt{3}$.
8.375. $\sin\left(x + \frac{5}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{1}{2}\right) = \cos \alpha$.
8.376. $2^{2 \operatorname{tg}(x/2) - \cos x} = 4$. 8.377. $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6$.
8.378. $3^{1+\sin x + \ldots + \sin^n x + \ldots} = \sqrt[3]{9}$.
8.379. $2^{-1+\cos x - \cos^2 x + \ldots + (-1)^{n-1} \cos^n x + \ldots} = \sqrt[3]{0{,}25}$.
8.380. $9^{1-\cos 6x} = 3^{1/\operatorname{ctg} 3x}$. 8.381. $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$.
8.382. $1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos^{-1} x}$.
8.383. $\log_{\cos x} 4 \cdot \log_{\cos^2 x} 2 = 1$. 8.384. $\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4$.
8.385. $3 (\log_2 \sin x)^2 + \log_2 (1 - \cos 2x) = 2$.
8.386. Дано $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$. Знайти $x + y$.
8.387. Показати, що рівняння

$$\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x + \frac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0$$

не має коренів.

8.388. Один із кутів прямокутного трикутника задовольняє рівняння $\sin^3 x + \sin x \sin 2x - 3 \cos^3 x = 0$. Показати, що трикутник рівнобедрений.

8.389. Показати, що не існує трикутника, у якого кожний кут задовольняв би рівняння

$$(3 \cos x - 2)(14 \sin^2 x + \sin 2x - 12) = 0.$$

8.390. Показати, що існує трикутник, у якого кожний кут задовольняє рівняння

$$(65 \sin x - 56)(80 - 64 \sin x - 65 \cos^2 x) = 0.$$

Знайти ці кути.

8.391. Показати, що трикутник, кожний із кутів якого задовольняє рівняння $3 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg}(x/2) - 2\sqrt{3} = 0$, є рівностороннім.

8.392. Знайти $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta$, $\cos \beta = \operatorname{tg} \gamma$, $\cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha$ $(0 < \alpha < \pi/2,\ 0 < \beta < \pi/2,\ 0 < \gamma < \pi/2)$.

8.393. Знайти кути α, β і γ першої чверті, коли відомо, що вони утворюють арифметичну прогресію з різницею $\pi/12$, а їхні тангенси утворюють геометричну прогресію.

Розв'язати системи рівнянь (8.394—8.405):

8.394. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1/2. \end{cases}$ 8.395. $\begin{cases} 9^{2 \operatorname{tg} x + \cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg} x} = 2. \end{cases}$

8.396. $\begin{cases} x - y = 5\pi/3, \\ \sin x = 2 \sin y. \end{cases}$ 8.397. $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25, \\ \sin y \cos x = 0{,}75. \end{cases}$

8.398. $\begin{cases} x - y = -1/3, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = 1/2. \end{cases}$

8.399. $\begin{cases} x + y = \pi/4, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1/6. \end{cases}$ 8.400. $\begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y. \end{cases}$

8.401. $\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=2, \\ \operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y=-1{,}8. \end{cases}$

8.402. $\begin{cases} 2^{\cos x}+2^{\cos^{-1} y}=5, \\ 2^{\cos x}\cdot 2^{\cos^{-1} y}=4. \end{cases}$ 8.403. $\begin{cases} \sin x \sin y=0{,}75, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=3. \end{cases}$

8.404. $\begin{cases} \cos^2 x+\cos^2 y=0{,}25, \\ x+y=5\pi/6. \end{cases}$

8.405. $\begin{cases} \sin x \sin y=0{,}25, \\ x+y=\pi/3. \end{cases}$

Група В

Розв'язати рівняння (8.406—8.492):

8.406. $(\cos^2 x+\cos^{-2} x)(1+\operatorname{tg}^2 2y)(3+\sin 3z)=4.$

8.407. $\dfrac{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x+\cdots+\operatorname{tg}^n x+\cdots}{1-\operatorname{tg} x+\cdots+(-1)^n \operatorname{tg}^n x+\cdots}=1+\sin 2x,$

$|\operatorname{tg} x|<1.$

8.408. $\operatorname{tg} x-\sin 2x-\cos 2x(1-2\cos^{-1} x)=0.$

8.409. $\dfrac{1-\sin t+\cdots+(-1)^n \sin^n t+\cdots}{1+\sin t+\cdots+\sin^n t+\cdots}=\dfrac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t},$

$|\sin t| \neq 1.$

8.410. $\sqrt{3}\sin t-\sqrt{2\sin^2 t-\sin 2t+3\cos^2 t}=0.$

8.411. $\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{4}.$

8.412. $2\sin^2 t=\sqrt{\sin^2 t-16\sin^2 t\cos^2 t\cos^2 2t+\cos^2 t}.$

8.413. $\cos z\sqrt{\operatorname{tg}^2 z-\sin^2 z}+\sin z\sqrt{\operatorname{ctg}^2 z-\cos^2 z}=2\sin z.$

8.414. $\cos x+\sqrt{3/2-\cos^2 x}-\cos x\sqrt{3/2-\cos^2 x}=1.$

8.415. $\sqrt[5]{1/2-\sin x}+\sqrt[5]{1/2+\sin x}=1.$

8.416. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1+\cos x.$

8.417. $\sqrt{1+3\operatorname{ctg} x}+\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x}{3+\operatorname{tg} x}}=\dfrac{5}{2}.$

8.418. $\sqrt[4]{1/2-\cos 2x}+\sqrt[4]{1/2+\cos 2x}=1.$

8.419. $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}=3.$

8.420. $2-\sin x=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}.$

8.421. $\sqrt[3]{2-\operatorname{tg} x}+\sqrt[3]{7+\operatorname{tg} x}=3.$

8.422. $\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}=4.$

8.423. $\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}.$

8.424. $\cos x+\sqrt{\sin^2 x-2\sin 2x+4\cos^2 x}=0.$

8.425. $\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sqrt{\sin x+\cos x}.$

8.426. $\dfrac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cos x}+2\,\mathrm{tg}\,2x+\mathrm{ctg}^3\,4x=3.$

8.427. $\sqrt[4]{10+8\sin^2 x}-\sqrt[4]{8\cos^2 x-1}=1.$

8.428. $\sin^{-1} 2x\sqrt{\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x+2}+$
$+\mathrm{ctg}\,2x\sqrt{\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x-2}=4\cos^2 2x.$

8.429. $\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0.$

8.430. $\sin\pi\sqrt{t}+\sin\pi t=0.$

8.431. $(\cos^4 x+2\sin^3 x-2\sin x+1)(\sin x+\cos x)=0.$

8.432. $4\,\mathrm{ctg}^3\,2x-12\,\mathrm{ctg}\,2x+\mathrm{ctg}^2 x+\mathrm{tg}^2 x-14=0.$

8.433. $\cos^{-4} x+\cos^4 x=1+\cos 2x-2\sin^2 2x.$

8.434. $\cos^{-4} x+8\cos^{-1} x-7=0.$

8.435. $\sin^{10} 3x+\cos^{10} 3x=4\dfrac{\sin^6 3x+\cos^6 3x}{4\cos^2 6x+\sin^2 6x}.$

8.436. $\mathrm{ctg}^4\,2z=\cos^2 4z+1.$

8.437. $\left(2+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)(4-2\cos^4 x)=1+5\sin 3y.$

8.438. $\cos(x-\pi/4)(1-4\cos^2 2x)-2\cos 4x=3.$

8.439. $18\cos^2 x+5(3\cos x+\cos^{-1} x)+2\cos^{-2} x+5=0.$

8.440. $\mathrm{tg}(\pi\,\mathrm{ctg}\,t)=\mathrm{ctg}(\pi\,\mathrm{tg}\,t).$

8.441. $\cos^{-4} x-2\cos^{-2} x-12\,\mathrm{tg}\,x-16=0.$

8.442. $\sin^8 2x+\cos^8 2x=41/128.$

8.443. $2(1-\sin x-\cos x)+\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x=0.$

8.444. $\dfrac{\mathrm{tg}\,t}{2-\cos^{-2} t}(\sin 3t-\sin t)=\dfrac{2}{\mathrm{ctg}^2 t-3}.$

8.445. $\mathrm{tg}(\pi\cos t)=\mathrm{ctg}(\pi\sin t).$ 8.446. $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x-\cos 4x=3.$

8.447. $\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}^2\,3x\,\mathrm{tg}^2\,5x=\mathrm{tg}\,2x+\mathrm{tg}^2\,3x-\mathrm{tg}^2\,5x.$

8.448. $(5+3\sin^{-2} x)(2-\sin^6 x)=7+\cos 2y.$

8.449. $\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\,x-3\,\mathrm{ctg}^2 x-3\,\mathrm{ctg}\,x-2=0.$

8.450. $\cos^4 x+4\cos x-1=0.$

8.451. $\dfrac{1-\cos 2x+\dots+(-1)^n\cos^n 2x+\dots}{1+\cos 2x+\dots+\cos^n 2x+\dots}=\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^4 x,$
$|\cos 2x|\neq 1.$

8.452. $2(\mathrm{tg}\,x-\sin x)+3(\mathrm{ctg}\,x-\cos x)+5=0.$

8.453. $\mathrm{tg}^3 x+\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x+\mathrm{ctg}^3 x-4=0.$

8.454. $\cos\sqrt{x}=\cos x.$ 8.455. $|\sin t+\cos t|=\sqrt{2}.$

8.456. $\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{tg}^2\,3x\,\mathrm{tg}\,4x=\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}^2\,3x+\mathrm{tg}\,4x.$

8.457. $\cos 6x+\sin\dfrac{5x}{2}=2.$ 8.458. $\sqrt{3}\,|\cos t|=1+\mathrm{ctg}\,t.$

8.459. $\cos^2 x^2(\mathrm{tg}\,x^2+2\,\mathrm{tg}\,x)+\mathrm{tg}^3 x(1-\sin^2 x^2)(2-\mathrm{tg}\,x\times$
$\times\,\mathrm{tg}\,x^2)=0.$

8.460. $\dfrac{1-\mathrm{tg}\,x+\dots+(-1)^n\mathrm{tg}^n x+\dots}{1+\mathrm{tg}\,x+\dots+\mathrm{tg}^n x+\dots}=1+\sin 2x,$
$|\mathrm{tg}\,x|<1.$

8.461. $(\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}^2 x)^2-\cos(x+4\,\mathrm{tg}\,x)=-1.$

8.462. $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 2x \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 3x.$
8.463. $(4 - \cos 2x)(2 + 3 \sin y) = 12 + 13 \cos^{-2} 3z.$
8.464. $(2 \sin x - 1)(\cos^4 x + 2 \cos^3 x + 2 \cos^2 x - 2 \cos x + 1) = 0.$
8.465. $1 + \sqrt{3}(1 + \cos x) = \cos 2(x + 2 \operatorname{tg} x).$
8.466. $2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} 3x.$
8.467. $2 \sin^2 x + \sin x + \sin^{-1} x + 2 \sin^{-2} x = 6.$
8.468. $2 \operatorname{tg} \pi t^2 - \operatorname{tg} \pi t + \operatorname{tg} \pi t \operatorname{tg}^2 \pi t^2 = 0.$
8.469. $\sin^4 x + 2 \cos^3 x + 2 \sin^2 x - \cos x + 1 = 0.$
8.470. $|\sin t| + |\cos t| = 1{,}4.$
8.471. $\dfrac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{2 - \cos^{-2} x} = \dfrac{4 + 2 \cos \frac{6}{5} x}{\cos 3x + \cos x}.$
8.472. $12 \cos^{-2} x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^2 x + 10 \left(2 \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{ctg} x}{3}\right) = 1.$
8.473. $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x.$
8.474. $3 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 2x.$
8.475. $\operatorname{ctg} 2\pi t^2 + \operatorname{ctg} 4\pi t = 0.$
8.476. $(3 - \operatorname{tg}^2 x)(\cos 3x + \cos x) = \dfrac{4 \cos 3x}{\operatorname{tg} 2x}.$
8.477. $$\frac{1 + \sin t + \dots + \sin^n t + \dots}{1 - \sin t + \dots + (-1)^n \sin^n t + \dots} = \frac{4}{1 + \operatorname{tg}^2 t}, \quad |\sin t| \neq 1.$$
8.478. $|\operatorname{tg} 2t + \operatorname{ctg} 2t| = 4\sqrt{3}/3.$
8.479. $(3 - \sin x)(4 - \sin^{-2} x) = 12 + \cos^2 y.$
8.480. $4 - 4(\cos z - \sin z) - \sin 2z = 0.$
8.481. $\frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{t}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \operatorname{tg} t = 2\sqrt{3} + \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{t}{4}.$
8.482. $\dfrac{3 \operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^3 t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}(\cos 3t + \cos t) = 2 \sin 5t.$
8.483. $\operatorname{tg} x - \sin 2x - \cos 2x + 2(2 \cos x - \cos^{-1} x) = 0.$
8.484. $5 \sin 2z - 11(\sin z + \cos z) + 7 = 0.$
8.485. $\sin^{-1} 5x - \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$
8.486. $4 \cos^2 2t - \operatorname{tg} 4t = \operatorname{ctg} 2t.$
8.487. $\dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} - \operatorname{tg}^6 x + \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x = 0.$
8.488. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 29/64.$
8.489. $(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2 = 5 + \cos(\pi/3 + 4x).$
8.490. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = 6.$
8.491. $\log_{0,5 \sin 2x} \sin x = 1/2.$
8.492. $\log_{\sin x \cos x} \sin x \cdot \log_{\sin x \cos x} \cos x = 1/4.$
8.493. Показати, що рівняння $2 \operatorname{ctg} 2x - 3 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$ не має коренів.

Розв'язати системи рівнянь (8.494—8.499):

8.494. $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y, \end{cases}$ 8.495. $\begin{cases} 3\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \cos x = \sin 2y, \end{cases}$

8.496. $\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

8.497. $\begin{cases} \cos x - \cos y = \sin(x+y), \\ |x| + |y| = \pi/4. \end{cases}$

8.498. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\sin(y - 3\pi/4), \\ \operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y = 2\sin(x + \pi/4). \end{cases}$

8.499. $\begin{cases} 2\cos x = 3\operatorname{tg} y, \\ 2\cos y = 3\operatorname{tg} z, \\ 2\cos z = 3\operatorname{tg} x. \end{cases}$

8.500. Знайти x, y, z, якщо $\dfrac{\sin x}{1} = \dfrac{\sin y}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sin z}{2}$, $x + y + z = \pi$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Глава 9
НЕРІВНОСТІ

Вказівки до розв'язування нерівностей з однією змінною

1°. Нерівності з однією змінною мають вигляд:

$$f(x) > g(x), \quad f(x) < g(x), \quad f(x) \geqslant g(x), \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Розв'язком нерівності називається множина значень змінної, при яких дана нерівність буде правильною числовою нерівністю.

Дві нерівності називаються *рівносильними*, якщо множини їхніх розв'язків збігаються.

Основна ідея розв'язування нерівності полягає в заміні нерівності більш простою, але рівносильною заданій.

2°. При розв'язуванні нерівності використовують такі правила перетворення нерівності в рівносильну:

а) будь-який член нерівності можна перенести з однієї її частини в іншу з протилежним знаком, залишивши при цьому без зміни знак нерівності;

б) обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне й те саме додатне число, залишивши при цьому без зміни знак нерівності;

в) обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний;

г) якщо для одних і тих самих значень x справедливі нерівності $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ і $f(x) > g(x)$, то для тих самих значень x виконується нерівність $(f(x))^n > (g(x))^n$, $n \in \mathbf{N}$.

3°. Нехай задана нерівність має вигляд $f(x)/g(x) > 0$ (замість знака $>$ можуть бути знаки $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, а функція в знаменнику може бути сталою) або вона приведена до цього вигляду за допомогою правил вказівки 2°.

Для розв'язування нерівності застосовується метод інтервалів (метод проміжків), який полягає в тому, що:

а) на числову вісь наносять точки x_1, x_2, ..., x_n, що розбивають її на проміжки, в яких вираз $f(x)/g(x)$ визначено і зберігає знак (плюс або мінус). Такими точками можуть бути корені рівнянь $f(x) = 0$ і $g(x) = 0$. Відповідні цим кореням точки позначають на числовій осі: зафарбованими кружками — точки, що задовольняють задану нерівність, а світлими кружками — точки, що не задовольняють її;

б) відшукують і позначають на числовій осі знак виразу $f(x)/g(x)$ для значень x, які належать кожному з одержаних проміжків. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є многочленами і не містять множників виду $(x - a)^{2n}$, де $n \in \mathbf{N}$, то достатньо визначити знак функції $f(x)/g(x)$ в будь-якому такому проміжку, а в решті проміжків знаки плюс і мінус будуть чергуватися.

Якщо ж у чисельнику і знаменнику дробу $f(x)/g(x)$ є множник виду $(x - a)^{2n}$, де $n \in \mathbf{N}$, то, покладаючи $x \neq a$, ділять обидві частини заданої нерівності на множник $(x - a)^{2n}$, додатний при всіх значеннях $x \neq a$ (див. вказівку 2°), і безпосередньою перевіркою з'ясовують, чи задовольняє значення $x = a$ задану нерівність.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\dfrac{(x+3)(5-x)}{2x-5} > 0$.

$\triangle$ Коренями рівнянь $(x + 3)(5 - x) = 0$ і $2x - 5 = 0$ є числа $x_1 = -3$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 5$, які не являються розв'язками заданої нерівності, тому на числовій осі позначаємо їх світлими кружками (рис. 9.1). Ці точки розбивають числову вісь на чотири проміжки. Легко визначаємо, що при $x > 5$ ліва частина нерівності від'ємна — ставимо знак мінус праворуч від точки 5 і, рухаючись вліво, чергуємо знаки плюс і мінус. При цьому зміну знаків зручно ілюструвати за допомогою хвилеподібної кривої (кривої знаків), проведеної через помічені точки і розміщеної вище або нижче від числової осі в відповідності із знаком нерівності в розглядуваному проміжку. За допомогою рис. 9.1 дістаємо відповідь: $(-\infty; -3) \cup (2{,}5; 5)$. ▲

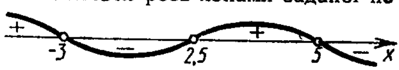


Рис. 9.1

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\frac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4} \leqslant 0.$$

$\triangle$ Покладаючи $x \neq 0$ і $x \neq 3$, поділимо обидві частини нерівності на додатний дріб $\dfrac{x^2}{(2x-6)^4}$ і зразу помічаємо, що $x = 0$ задовольняє задану нерівність, а $x = 3$ не задовольняє. Крім того, множники з непарними показниками степеня замінимо відповідними множниками першого степеня (ясно, що при цьому знак виразу в лівій частині нерівності не зміниться). У результаті дістанемо більш просту нерівність, рівносильну заданій для всіх $x \neq 0$ і $x \neq 3$:

$$\frac{(2x-9)(x-1)}{x+4} \leqslant 0.$$

Накресливши криву знаків, заштрихуємо проміжки, що задовольняють цю нерівність, і позначимо на тій самій осі точки $x = 0$ і $x = 3$ (рис. 9.2). Враховуючи, що значення $x = 0$ є розв'язком заданої нерівності, але не належить заштрихованому проміжку, його слід додатково включити у відповідь. Значення $x = 3$ не є розв'язком нерівності, але належить заштрихованому проміжку; отже, це значення треба виключити. Таким чином, дістаємо відповідь: $(-\infty; -4) \cup [1; 3) \cup (3; 4{,}5] \cup 0$. ▲

Рис. 9.2

4⁰. Розглянемо розв'язування квадратної нерівності

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (9.1)$$

у випадку від'ємного дискримінанта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ $(D = b^2 - 4ac < 0)$.

Якщо $a > 0$, то нерівність (9.1) виконується при всіх значеннях x; якщо ж $a < 0$, то нерівність не виконується ні при якому значенні x.

5⁰. Ірраціональна нерівність

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \qquad (9.2)$$

рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 < (g(x))^2. \end{cases} \qquad (9.3)$$

6⁰. Ірраціональна нерівність

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \qquad (9.4)$$

рівносильна сукупності двох систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \qquad (9.5)$$

7⁰. Показникова нерівність

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \qquad (9.6)$$

при $a > 1$ рівносильна нерівності

$$f(x) > g(x), \qquad (9.7)$$

а при $0 < a < 1$ — нерівності

$$f(x) < g(x). \qquad (9.8)$$

8⁰. Логарифмічна нерівність

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \qquad (9.9)$$

при $a > 1$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \qquad (9.10)$$

а при $0 < a < 1$ — системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \qquad (9.11)$$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

△ Перетворимо дану нерівність у рівносильну:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1}{2} \leqslant 0, \quad \frac{x^2 - 5x + 4}{2(x^2 - 5x + 6)} \geqslant 0.$$

Корені $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ рівняння $x^2 - 5x + 4 = 0$ є розв'язками нерівності (на рис. 9.3 позначаємо їх зафарбованими кружками); корені $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ не є розв'язками нерівності (на рис. 9.3 позначаємо їх світлими кружками). За допомогою кривої знаків (рис. 9.3) дістаємо відповідь: $(-\infty; 1] \cup (2; 3) \cup [4; \infty)$. ▲

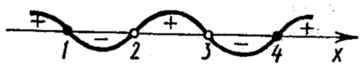


Рис. 9.3

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 2} > 0$.

△ Враховуючи, що x не може набувати від'ємних значень, розіб'ємо точками $x_1 = 2$ (корінь рівняння $x - 2 = 0$) і $x_2 = 9$ (корінь рівняння $\sqrt{x} - 3 = 0$) на проміжки не всю числову вісь, а тільки її частину $[0; \infty)$. За допомогою кривої знаків (рис. 9.4) дістаємо відповідь: $[0; 2) \cup (9; \infty)$. ▲

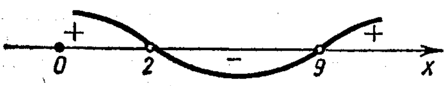


Рис. 9.4

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt{x + 61} < x + 5$.

△ Згідно з вказівкою 5⁰, ця ірраціональна нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x + 61 \geqslant 0, \\ x + 5 > 0, \\ x + 61 < x^2 + 10x + 25, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x > -61, \\ x > -5, \\ x^2 + 9x - 36 > 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x > -5, \\ x^2 + 9x - 36 > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння $x^2 + 9x - 36 = 0$, знаходимо $x_1 = -12$, $x_2 = 3$. Будуємо криву знаків (у даному випадку — дугу параболи) і стрілкою, напрямленою вправо від точки -5, позначаємо

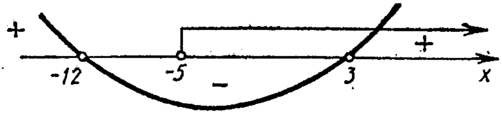


Рис. 9.5

проміжок $x > -5$ (рис. 9.5). Розв'язки першої і другої нерівностей системи збігаються на проміжку $(3;\ \infty)$. Отже, дістаємо відповідь: $(3;\ \infty)$. ▲

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x - 3 < \sqrt{x-2}$.

△ Згідно з вказівкою 6⁰, ця ірраціональна нерівність рівносильна такій сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ x-3 \geqslant 0, \\ x^2-6x+9 < x-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant 3, \\ x^2-7x+11 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 3. \end{cases}$$

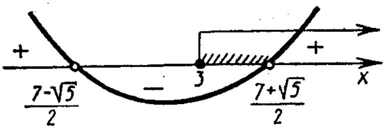


Рис. 9.6

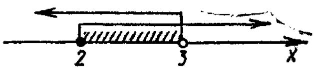


Рис. 9.7

Розв'язком першої системи є проміжок $3 \leqslant x < (7+\sqrt{5})/2$ (рис. 9.6), а розв'язком другої системи — проміжок $2 \leqslant x < 3$ (рис. 9.7). Об'єднуючи ці розв'язки, дістаємо відповідь: $2 \leqslant x < (7+\sqrt{5})/2$. ▲

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\dfrac{(1/3)^{8+x}-81}{x^2+2x+5} < 0$.

△ Оскільки вираз x^2+2x+5 додатний при будь-яких x, то, помноживши на нього обидві частини даної нерівності, дістанемо рівносильну нерівність

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x} - 81 < 0, \quad \text{або} \quad 3^{-(8+x)} < 3^4.$$

Далі, оскільки основа $3 > 1$, то, використовуючи вказівку 7⁰, маємо $-8 - x < 4$, звідки $x > -12$. Таким чином, дістаємо відповідь: $(-12;\ \infty)$. ▲

Приклад 8. Розв'язати нерівність $0{,}4^{\log_2^2 x+1} < 6{,}25^{2-\log_2 x^3}$.

△ Помітивши, що $0{,}4 = 2/5$ і $6{,}25 = (2/5)^{-2}$, зведемо ліву і праву частини нерівності до однієї основи:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2^2 x+1} < \left(\frac{2}{5}\right)^{2\log_2 x^3-4}.$$

Оскільки $0 < 2/5 < 1$, то, використовуючи вказівку 7^0, маємо $\log_2^2 x + 1 > 2\log_2 x^3 - 4$. Функція $f(x) = \log_2 x$ визначена при $x > 0$; отже, $2\log_2 x^3 = 6\log_2 x$. Покладаючи $y = \log_2 x$, дістаємо нерівність $y^2 - 6y + 5 > 0$. Рівняння $y^2 - 6y + 5 = 0$ має корені $y_1 = 1$, $y_2 = 5$. Далі, за допомогою рис. 9.8 установлюємо, що $y < 1$ і $y > 5$.

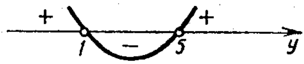


Рис. 9.8

Таким чином, дана нерівність рівносильна сукупності нерівностей $\log_2 x < 1$, $\log_2 x > 5$, яку можна переписати у вигляді $\log_2 x < \log_2 2$, $\log_2 x > \log_2 2^5$. Оскільки основа логарифма $2 > 1$, то, використовуючи вказівку 8^0, знаходимо, що розв'язком першої нерівності є проміжок $0 < x < 2$, а другої — проміжок $x > 2^5$, тобто $x > 32$. Отже, дістаємо відповідь: $(0; 2) \cup (32; \infty)$. ▲

Приклад 9. Розв'язати нерівність $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1$.

△ Зведемо нерівність до вигляду $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > x^0$ і розглянемо два випадки: $0 < x < 1$ і $1 < x < 3$, $3 < x < \infty$. Згідно з вказівкою 7^0, розв'язуємо сукупність систем нерівностей:

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{2x-1}{3-x} < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 < x < 3, \quad 3 < x < \infty, \\ \dfrac{2x-1}{3-x} > 0. \end{cases}$$

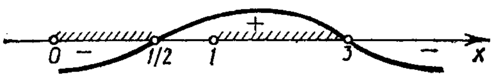


Рис. 9.9

Застосовуємо метод інтервалів зразу до обох систем (рис. 9.9). За допомогою рисунка, враховуючи знак дробової нерівності (<0 у першому випадку і > 0 у другому), дістаємо відповідь: $(0; 1/2) \cup (1; 3)$. ▲

Приклад 10. Розв'язати нерівність $\log_{1/3} \log_{1/2} \dfrac{x+4}{2x-3} < 0$.

△ Згідно з формулою (7.3), маємо $0 = \log_{1/3} 1$. Оскільки основа логарифма $0 < 1/3 < 1$, то, використовуючи вказівку 8^0, дістаємо рівносильну нерівність $\log_{1/2} \dfrac{x+4}{2x-3} > 1$ (при цьому умова $\log_{1/2} \dfrac{x+4}{2x-3} > 0$ виконується автоматично). Далі, згідно з формулою (7.2), маємо $1 = \log_{1/2} \dfrac{1}{2}$, і оскільки $0 < 1/2 < 1$, то, знову використовуючи вказівку 8^0, дістаємо рівносильну даній нерівності систему

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \dfrac{x+4}{2x-3} < \dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \dfrac{11}{2(2x-3)} < 0. \end{cases}$$

Із другої нерівності системи випливає, що $2x - 3 < 0$; отже, $x + 4 < 0$, і задача зводиться до розв'язування рівносильної системи

$$\begin{cases} 2x - 3 < 0, \\ x + 4 < 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x < 3/2, \\ x < -4, \end{cases}$$

звідки $x < -4$. Таким чином, дістаємо відповідь: $(-\infty; -4)$. ▲

Приклад 11. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{1 - \log_8 (x^2 - 4x + 3)}.$$

△ Оскільки логарифмічна функція визначена тільки для додатних чисел, а квадратний корінь — для невід'ємних чисел, задача зводиться до розв'язування системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ 1 - \log_8 (x^2 - 4x + 3) \geqslant 0. \end{cases}$$

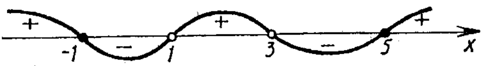


Рис. 9.10

Ліву частину першої нерівності розкладаємо на множники, а в другій замінимо 1 на $\log_8 8$:

$$\begin{cases} (x - 3)(x - 1) > 0, \\ \log_8 (x^2 - 4x + 3) \leqslant \log_8 8. \end{cases}$$

Оскільки основа логарифма $8 > 1$, то, згідно з вказівкою 8^0, маємо систему

$$\begin{cases} (x - 3)(x - 1) > 0, \\ x^2 - 4x + 3 \leqslant 8, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} (x - 3)(x - 1) > 0, \\ (x - 5)(x + 1) \leqslant 0. \end{cases}$$

Остання система рівносильна нерівності $(x - 3)(x - 1)(x - 5) \times \times (x + 1) \leqslant 0$, яку розв'язуємо методом інтервалів. За допомогою рис. 9.10 дістаємо відповідь: $[-1; 1) \cup (3; 5]$. ▲

Група А

9.001. Показати, що для всіх додатних чисел a і b справедлива нерівність $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a + b}$.

9.002. Довести, що коли $a > 0$ і $b > 0$, то

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leqslant \sqrt[4]{ab}.$$

9.003. Довести, що коли $p > 0$ і $q > 0$, то $(p + 2)(q + 2)(p + q) \geqslant 16pq$.

9.004. Довести, що коли $a \neq 2$, то

$$\frac{1}{a^2 - 4a + 4} > \frac{2}{a^3 - 8}.$$

9.005. Довести, що коли m, n і p — сторони деякого трикутника, то $m^2 + n^2 + p^2 < 2(mn + mp + np)$.

9.006. Довести, що коли $m \geqslant 0$ і $n \geqslant 0$, то $mn(m + n) \leqslant m^3 + n^3$.

9.007. Довести, що для будь-яких дійсних чисел x і y справедлива нерівність $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0$.

9.008. При яких значеннях a обидва корені рівняння $x^2 - (a + 1)x + a + 4 = 0$ будуть від'ємними?

9.009. Показати, що для будь-яких двох додатних чисел добуток їхньої суми на суму їхніх обернених величин не менший чотирьох.

9.010. Знайти цілі додатні значення x, що задовольняють нерівність $\frac{5x+1}{x-1} > 2x + 2$.

9.011. Знайти цілі розв'язки системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} + \frac{x}{2} < 2 - \frac{x+5}{2}, \\ 1 - \frac{x+5}{8} + \frac{4-x}{2} < 3x - \frac{x+1}{4}. \end{cases}$$

9.012. Знайти натуральні значення x, що задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-1) < 4, \\ \frac{x}{x-3} + \frac{x-5}{x} < \frac{2x}{3-x}. \end{cases}$$

9.013. При яких значеннях x функція $y = \sqrt[4]{10+x} - \sqrt{2-x}$ набуває додатних значень?

9.014. Знайти множину цілих значень x, що задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x+8}{x+2} > 2, \\ \lg(x-1) < 1. \end{cases}$$

9.015. При яких значеннях m нерівність $x^2 - mx > 2/m$ виконується для будь-яких x?

Знайти області визначення функцій **(9.016—9.021)**:

9.016. $y = \sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$. **9.017.** $y = 0{,}5^{\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}}$.

9.018. $y = \sqrt{\log_{0,3}\frac{x-1}{x+5}}$.

9.019. $y = \sqrt{\log_{1/2}\log_3\frac{x+1}{x-1}}$. **9.020.** $y = \sqrt{5 - x - 6/x}$.

9.021. $y = \sqrt{-\frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}}$.

Розв'язати нерівності **(9.022—9.095)**:

9.022. $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$. **9.023.** $\log_{1/3}\frac{3x-1}{x+2} < 1$.

9.024. $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leqslant 1.$

9.025. $\log_\pi (x+27) - \log_\pi (16-2x) < \log_\pi x.$

9.026. $\log_{0,3} (3x-8) > \log_{0,3} (x^2+4).$

9.027. $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0.$

9.028. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x.$

9.029. $\frac{1}{3x-2-x^2} - \frac{3}{7x-4-3x^2} > 0.$

9.030. $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$. 9.031. $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25} > 0.$

9.032. $|2x^2-9x+15| \geqslant 20.$ 9.033. $|x^2-5x| < 6.$

9.034. $5x-20 \leqslant x^2 \leqslant 8x.$

9.035. $\frac{4x^2-1}{\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)} \leqslant 0.$

9.036. $\frac{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}{(x-8)(2-x)} > 0.$

9.037. $(0,(4))^{x^2-1} > (0,(6))^{x^2+6}.$

9.038. $\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)} < 0.$ 9.039. $\frac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x} < 0.$

9.040. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0.$ 9.041. $x^6-9x^3+8 > 0.$

9.042. $0,3^{2+4+6+\dots+2x} > 0,3^{72} \quad (x \in N).$

9.043. $\sqrt{x^2-x-12} < x.$

9.044. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0.$

9.045. $\sqrt{9x-20} < x.$

9.046. $1 < \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2.$

9.047. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0.$

9.048. $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$. 9.049. $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1+\lg x.$

9.050. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1.$ 9.051. $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{1/x^2}\right)^{x^2-2x} \geqslant 1.$

9.052. $2^{1-2^{1/x}} < 0,125.$ 9.053. $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leqslant 0.$

9.054. $5^{2x+1} > 5^x + 4.$ 9.055. $0,5^{x-2} > 6.$

9.056. $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}<1.$

9.057. $0,3^{\log_{1/3}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1.$

9.058. $2^{\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}\frac{5x}{2}}>1.$

9.059. $4^x-2^{2(x-1)}+8^{\frac{2}{3}(x-2)}>52.$

9.060. $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>2/3.$

9.061. $25^x<6\cdot 5^x-5.$ 9.062. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)}\leqslant 2,5.$

9.063. $4^{1/x-1}-2^{1/x-2}-3\leqslant 0.$

9.064. $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{3(2x-7)}\cdot 12,25^{(4x+1)/2}\geqslant 1.$

9.065. $\dfrac{15}{4+3x-x^2}>1.$ 9.066. $0,64<\sqrt{0,8^{x(x-3)}}<1.$

9.067. $1/2+\log_9 x-\log_3 5x>\log_{1/3}(x+3).$

9.068. $\log_{\frac{x-1}{x+5}}0,3>0.$ 9.069. $(\log_{0,2}(x-1))^2>4.$

9.070. $\log_{1,5}\dfrac{2x-8}{x-2}<0.$

9.071. $\log_{0,3}(x^2-5x+7)>0.$

9.072. $x^8-6x^7+9x^6-x^2+6x-9<0.$

9.073. $a^4+a^3-a-1<0.$

9.074. $m^3+m^2-m-1>0.$

9.075. $\log_2(1+\log_{1/9}x-\log_9 x)<1.$

9.076. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>2.$

9.077. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}.$

9.078. $0,3^{2x^2-3x+6}<0,00243.$

9.079. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\leqslant 0.$

9.080. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0.$

9.081. $\log_{1,2}(x-2)+\log_{1,2}(x+2)<\log_{1,2}5.$

9.082. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1.$

9.083. $\dfrac{1}{3^x+5}<\dfrac{1}{3^{x+1}-1}.$

9.084. $\log_x (\log_9 (3^x - 9)) < 1$.

9.085. $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$.

9.086. $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$.

9.087. $|3 - \log_2 x| < 2$.

9.088. $5 \cdot 0{,}2^{\lg x} > 0{,}04^{\lg 2}$.

9.089. $\log_2 \log_{1/3} \log_5 x > 0$.

9.090. $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11$.

9.091. $0{,}5^x \leqslant 0{,}25^{x^2}$.

9.092. $\log^2_{0,5} x + \log_{0,5} x - 2 \leqslant 0$.

9.093. $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1$.

9.094. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x < 6$.

9.095. $\log_4 (x + 7) > \log_2 (x + 1)$.

Група Б

9.096. Довести, що добуток суми трьох додатних чисел на суму обернених чисел не менший 9.

9.097. Довести, що коли a — будь-яке дійсне число, то виконується нерівність

$$\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geqslant 2.$$

9.098. Знайти всі значення p, при яких вираз

$$\lg ((p - 1) x^2 + 2px + 3p - 2)$$

визначено при будь-яких x.

9.099. Знайти всі значення a, при яких вираз

$$\sqrt{(a + 1) x^2 - 2 (a - 1) x + 3a - 3}$$

має смисл для будь-яких $x \in \mathbf{R}$.

9.100. Знайти множину цілих значень x, що задовольняють нерівність

$$4^{2+\sqrt{x-1}} + 3 \cdot 2^{2+\sqrt{x-1}} - 16 < 15 \cdot 4^{\sqrt{x-1}} + $$
$$+ 2^{3+\sqrt{x-1}} + 5 \cdot 2^{1+\sqrt{x-1}}.$$

9.101. При яких значеннях p обидва корені квадратного тричлена $x^2 + 2 (p + 1) x + 9p - 5$ від'ємні?

9.102. При яких значеннях n обидва корені рівняння $(n - 2) x^2 - 2nx + n + 3 = 0$ додатні?

9.103. При яких значеннях m корені рівняння $4x^2 - (3m + 1) x - m - 2 = 0$ знаходяться в проміжку між -1 і 2?

9.104. При яких значеннях a квадратний тричлен $ax^2 - 7x + 4a$ набуває від'ємних значень для будь-яких дійсних значень x?

9.105. Знайти цілі числа x, що задовольняють нерівність $\left|\frac{2}{x - 13}\right| > \frac{8}{9}$.

9.106. Довести, що за умови $2y + 5x = 10$ виконується нерівність $3xy - x^2 - y^2 < 7$.

9.107. Довести, що коли $4b + a = 1$, то виконується нерівність $a^2 + 4b^2 \geqslant 1/5$.

9.108. Довести, що многочлен $m^6 - m^5 + m^4 + m^2 - m + 1$ набуває додатних значень при всіх дійсних значеннях m.

9.109. Знайти область визначення функції f, якщо

$$f(x) = \sqrt[6]{4^{(x+1)/x} - 17 \cdot 2^{1/x} + 4}.$$

9.110. Знайти область визначення функції f, якщо

$$f(x) = \sqrt{9 - \left(\frac{4x - 22}{x - 5}\right)^2}.$$

9.111. Знайти цілі невід'ємні значення x, що задовольняють нерівність

$$\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x - x^2}.$$

9.112. При яких значеннях a нерівність $\frac{ax}{x^2+4} < 1{,}5$ виконується для будь-яких значень $x \in \mathbf{R}$?

9.113. Знайти область визначення функції f, якщо

$$f(x) = \sqrt{\log_{0,5}(x^2 - 9) + 4}.$$

9.114. При яких значеннях x вираз $\log_3(1 - \log_{0,5}(x^2 - 2x - 2{,}5))$ визначений?

9.115. Знайти ті значення m, при яких нерівність

$$\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} < 0$$

виконується для будь-яких дійсних значень x.

9.116. При яких значеннях x різниця $\frac{11x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} - x$ набуває тільки від'ємних значень?

9.117. При яких значеннях m нерівність $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$ виконується для будь-яких x?

9.118. При яких значеннях m нерівність $\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$ виконується для будь-яких x?

9.119. При яких значеннях a сума $a + \frac{-1 + 9a + 4a^2}{a^2 - 3a - 10}$ набуває тільки додатних значень?

9.120. Знайти цілі значення x, що задовольняють нерівність $\log_4 x + \log_2(\sqrt{x} - 1) < \log_2 \log_{\sqrt{5}} 5$.

9.121. Показати, що при будь-яких дійсних x функція $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ не може набувати значень, більших 3/2 і менших 1/2.

Знайти області визначення функцій (9.122—9.129):

9.122. $y=2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}$. 9.123. $y=\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3|x-4|}$.

9.124. $y=\log_3\left(0{,}64^{2-\log_{\sqrt{2}}x}-1{,}25^{8-(\log_2 x)^2}\right)$.

9.125. $y=\sqrt{\log_{1/3}\log_3|x-3|}$.

9.126. $y=\sqrt{\log_{1/2}^2(x-3)-1}$.

9.127. $y=\sqrt[4]{2-\lg|x-2|}$.

9.128. $y=\log_3\left(2^{\log_{x-3}0{,}5}-1\right)+\dfrac{1}{\log_3(2x-6)}$.

9.129. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}-1}+\dfrac{1}{\log_8(x-4)}$.

Розв'язати нерівності (9.130—9.205):

9.130. $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|<3$. 9.131. $\log_{|x-1|}0{,}5>0{,}5$.

9.132. $\log_x\dfrac{3x-1}{x^2+1}>0$. 9.133. $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$.

9.134. $0{,}5^{\sqrt{3}}<0{,}5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}}<0{,}5$.

9.135. а) $\dfrac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1$;

б) $\log_2\log_4 x+\log_4\log_2 x\leqslant -4$.

9.136. $\left(\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{3x}{4}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-x-\dfrac{(x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2}\right)>0$.

9.137. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{1/2}\dfrac{x^3}{8}\right)^2+9\log_2\dfrac{32}{x^2}<4(\log_{1/2}x)^2$.

9.138. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geqslant 2$.

9.139. $\dfrac{m^2x+1}{2}-\dfrac{m^2x+3}{3}<\dfrac{m+9x}{6}$.

9.140. $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$.

9.141. $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$. 9.142. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leqslant 1$.

9.143. $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

9.144. $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0$.

9.145. $\sqrt{3}\cos^{-2}x < 4\operatorname{tg}x.$

9.146. $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1.$

9.147. $2 + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x < 0.$

9.148. $\dfrac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8}{x^2} < 0.$

9.149. $\dfrac{3}{6x^2 - x - 12} < \dfrac{25x - 47}{10x - 15} - \dfrac{3}{3x + 4}.$

9.150. $\dfrac{\log_{0,3}|x - 2|}{x^2 - 4x} < 0.$ 9.151. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3.$

9.152. $\dfrac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leqslant \dfrac{1}{2}.$ 9.153. $\log_{4/3}(\sqrt{x + 3} - x) > 0.$

9.154. $\dfrac{2 - x}{x^3 + x^2} > \dfrac{1 - 2x}{x^3 - 3x^2}.$

9.155. $0,2^{\frac{6\log_4 x - 3}{\log_4 x}} > \sqrt[3]{0,008^{2\log_4 x - 1}}.$

9.156. $2,25^{\log_2(x^2 - 3x - 10)} > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{1/2}(x^2 + 4x + 4)}.$

9.157. $\log_{0,5}(x + 3) < \log_{0,25}(x + 15).$

9.158. $\log_{1/3}(x - 1) + \log_{1/3}(x + 1) + \log_{\sqrt{3}}(5 - x) < 1.$

9.159. $2\log_3\log_3 x + \log_{1/3}\log_3(9\sqrt[3]{x}) \geqslant 1.$

9.160. $0,008^x + 5^{1-3x} + 0,04^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30,04.$

9.161. $0,4^{\left(\log_3\frac{3}{x}\right)\log_3 3x} > 6,25^{\log_3 x^2 + 2}.$

9.162. $0,3^{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots} < \sqrt[3]{0,3^{3x^2 + 5x}} < 1.$

9.163. $\dfrac{\lg 7 - \lg(-8x - x^2)}{\lg(x + 3)} > 0.$

9.164. $\log_3\log_4\dfrac{4x - 1}{x + 1} - \log_{1/3}\log_{1/4}\dfrac{x + 1}{4x - 1} < 0.$

9.165. $2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} > 2,5.$

9.166. $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2.$

9.167. $\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{2}{x^2 - x + 1} \leqslant \dfrac{1 - 2x}{x^3 + 1}.$

9.168. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{4}} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}.$

9.169. $\frac{1}{x^2-4}+\frac{4}{2x^2+7x+6}\leqslant\frac{1}{2x+3}+\frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}$.

9.170. $\frac{10(5-x)}{3(x-4)}-\frac{11}{3}\cdot\frac{6-x}{x-4}\geqslant\frac{5(6-x)}{x-2}$.

9.171. $0{,}6^{\lg^2(-x)+3}\leqslant(5/3)^{2\lg x^2}$.

9.172. $(x-3)\sqrt{x^2+4}\leqslant x^2-9$.

9.173. $(3/5)^{13x^2}\leqslant(3/5)^{x^4+36}<(3/5)^{12x^2}$.

9.174. $|x-3|^{2x^2-7x}>1$. 9.175. $\log_{1/5}x+\log_4 x>1$.

9.176. $-9<x^4-10x^2<56$. 9.177. $216x^6+19x^3<1$.

9.178. $x^{0,5\log_{0,5}x-3}\geqslant0{,}5^{3-2,5\log_{0,5}x}$.

9.179. $|x-6|>|x^2-5x+9|$.

9.180. $\frac{6x}{x-2}-\sqrt{\frac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>0$.

9.181. $\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}<0$.

9.182. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$.

9.183. $\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9>0$.

9.184. $\log_{0,25}\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$.

9.185. $x^2(x^4+36)-6\sqrt{3}(x^4+4)<0$.

9.186. $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}<0$. 9.187. $2\log_{\log_3 x}3<1$.

9.188. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+4}>0$.

9.189. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$.

9.190. $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2}>0$.

9.191. $2\cos x(\cos x-\sqrt{8}\,\mathrm{tg}\,x)<5$.

9.192. $\sqrt{x^3+3x+4}>-2$.

9.193. $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)>5$.

9.194. $25\cdot2^x-10^x+5^x<25$.

9.195. $\log_3\log_{x^2}\log_{x^2}x^4>0$.

9.196. $0{,}5^{2\sqrt{x}}+2>3\cdot0{,}5^{\sqrt{x}}$.

9.197. $x^2(x+3\sqrt{5})+5(3x+\sqrt{5})>0$.

9.198. $9^{\log_2(x-1)-1}-8\cdot5^{\log_2(x-1)-2}>9^{\log_2(x-1)}-16\cdot5^{\log_2(x-1)-1}$.

9.199. $\dfrac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)}>\dfrac{1}{2}$.

9.200. $\dfrac{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}+5)}<\dfrac{1}{2}$.

9.201. $\dfrac{1}{\log_2(x-1)}<\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$.

9.202. $x^{\log_2 x}+16x^{-\log_2 x}<17$.

9.203. $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<10$.

9.204. $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1)<1$.

9.205. $(x^2+4x+10)^2-7(x^2+4x+11)+7<0$.

9.206. Розмістити у порядку зростання три числа: $a_1=\log_{1/2}\sin 2x$, $a_2=-1-\log_2\sin x$, $a_3=\log_{1/2}(1-\cos 2x)$, якщо $0<x<\pi/4$.

Розв'язати системи нерівностей (9.207—9.214):

9.207. $\begin{cases}0{,}2^{\cos x}\leqslant 1,\\ \dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{1}{2}>0.\end{cases}$

9.208. $\sqrt{x^2-9x+20}\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant\sqrt{x^2-13}$.

9.209. $\begin{cases}\dfrac{x^2+4}{x^2-16x+64}>0,\\ \lg\sqrt{x+7}>\lg(x-5)-2\lg 2.\end{cases}$

9.210. $\dfrac{5x-7}{x-5}<4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<4$.

9.211. $\begin{cases}\sqrt{4x-7}<x,\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}>4.\end{cases}$

9.212. $\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{27}{64},\\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2}.\end{cases}$

9.213. $\begin{cases}|x^2+5x|<6,\\ |x+1|\leqslant 1.\end{cases}$ 9.214. $\begin{cases}|x^2-4x|<5,\\ |x+1|<3.\end{cases}$

9.215. Знайти область визначення функції

$$y=\sqrt[4]{\frac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}+\frac{2}{x^2-49}.$$

Група В

Розв'язати нерівності (9.216—9.220):

9.216. $\log_5 x+\log_x\dfrac{x}{3}<\dfrac{\log_5 x\,(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$.

9.217. $\dfrac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2$. 9.218. $\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} < 3$.

9.219. $\dfrac{3^{2|x-1|} + 3}{4} < 3^{|x-1|}$.

9.220. $\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$.

9.221. Довести, що із всіх прямокутних паралелепіпедів із заданою сумою всіх ребер найбільший об'єм має куб. (Для доведення можна використати, наприклад, нерівність $(a+b+c+d)/4 \geqslant \sqrt[4]{abcd}$, справедливу для всіх додатних чисел.)

9.222. При яких значеннях p система нерівностей

$$-9 < \frac{3x^2 + px - 6}{x^2 - x + 1} < 6$$

виконується для всіх дійсних значень x?

9.223. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1}+1) < \lg(7\cdot 2^x + 12), \\ \log_x (x+2) > 2. \end{cases}$$

9.224. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{\sin x - 0{,}5} + \log_3 (25 - x^2).$$

9.225. Довести, що при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $d > 0$ виконується нерівність $(a+b+c+d)/4 \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

9.226. При яких значеннях m система нерівностей

$$-6 < \frac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} < 4$$

виконується для всіх дійсних значень x?

Довести справедливість нерівностей (9.227—9.230):

9.227. $\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\left(1+\dfrac{z}{y}\right)\left(1+\dfrac{x}{z}\right) \geqslant 8$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

9.228. $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ $(a>0,\ b>0)$.

9.229. $\dfrac{a^4+b^4}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4$.

9.230. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[n]{2-\sqrt{3}} > 2$.

9.231. Не використовуючи таблиць показати, що $2 < \log_3 2 + \log_2 3 < 3$.

9.232. Нехай число $x_1 > 0$ є коренем рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Показати, що існує корінь x рівняння $cx^2 + bx + a = 0$ такий, що $x_1 + x_2 \geqslant 2$.

9.233. Довести, що коли $(x^2+5x+6)(x^2+11x+30) < 0$, то $\sin 2x > 0$.

9.234. Із значень x, що задовольняють нерівність $\log_{1,3}(2x-2) < \log_{1,3}(x+1)$, вказати ті, для яких $\sin 2x < 0$.

9.235. Числа x_1 і x_2 є дійсними коренями рівнянь $5x^3-6=0$ і $6x^3-5=0$ відповідно. Показати, що $x_1+x_2>2$.

Розв'язати нерівності (9.236—9.290):

9.236. $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$.

9.237. $\log_x \log_2(4^x-12) \leqslant 1$. **9.238.** $10\cdot 0{,}3^{\sqrt[4]{\log_{1/\sqrt{3}}(\operatorname{tg} x)}} > 3$.

9.239. $2 < 2^{\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^2} < 8$. **9.240.** $2^{\frac{2\cos^2 x-6}{2\cos^2 x-1}} > 3^{\frac{\cos x}{1-2\cos^2 x}}$.

9.241. $0{,}2^{\cos 2x}-\dfrac{1}{25^{\cos^2 x}} < 4\cdot 125^{-1/2}$.

9.242. $\log_x \log_3(9^x-6) \geqslant 1$.

9.243. $\sqrt{\log_{1/2}(x^2+4x-4)} < 1$ $(x \in \mathbb{Z})$.

9.244. $\sqrt{1-9(\log_{1/8} x)^2} > 1-4\log_{1/8} x$.

9.245. $\log_{1/2} x+\sqrt{1-4(\log_{1/2} x)^2} < 1$.

9.246. $\log_{x^2}(3-2x) > 1$. **9.247.** $\log_3(4^x+1)+\log_{(4^x+1)} 3 > 2{,}5$.

9.248. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_{1/3}(3^{x+2}-9) > -3$.

9.249. $\log_p \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x} < 0$.

9.250. $|x^3-1| > 1-x$. **9.251.** $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x$.

9.252. $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1} x > 2$. **9.253.** $\log_x(x+1) < \log_{1/x}(2-x)$.

9.254. $\log_3 \log_{0,2} \log_{32}\dfrac{x-1}{x+5} > 0$. **9.255.** $\log_x(x^2+3x-3) > 1$.

9.256. $|x-1|+|2-x| > 3+x$.

9.257. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x}$.

9.258. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3} > \dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

9.259. $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{2}$. **9.260.** $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$.

9.261. $\log_{1/2}\dfrac{|x^2-2x|+4}{|x+2|+x^2} \leqslant 0$. **9.262.** $\log_{x^2}\dfrac{2x}{|x-3|} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

9.263. $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1$. **9.264.** $(3/7)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x)-1}} > 1$.

9.265. $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$. 9.266. $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25$.

9.267. $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$.

9.268. $\log_{|x-4|}(2x^2 - 9x + 4) \geqslant 1$.

9.269. $\dfrac{1}{\log_{1/2}\sqrt{x+3}} \leqslant \dfrac{1}{\log_{1/2}(x+1)}$.

9.270. $\log_x \dfrac{3}{8-2x} \geqslant -2$.

9.271. $\log_{1/2}(x-3) - \log_{1/2}(x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0$.

9.272. $|2^{4x^2-1} - 5| \leqslant 3$. 9.273. $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geqslant 9^{\sqrt{x}}$.

9.274. $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant (x^2 + x + 1)^3$.

9.275. $\dfrac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0$.

9.276. $\sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x > \sin 10x$.

9.277. $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2} + 12^\circ\right) + \operatorname{tg}(x + 12^\circ) > 0$.

9.278. $(15/14)^{|x+7|} < (15/14)^{|x^2-3x+2|}$.

9.279. $\log_x 10 - 0{,}5 \log_a 10 > 0 \ (0 < a < 1)$.

9.280. $\log_7 x - \log_3 7 \cdot \log_3 x > \log_2 0{,}25$.

9.281. $x^{\log_a x + 4} < a^4 x \ (0 < a < 1)$.

9.282. $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$.

9.283. $\log_x^2 \sqrt{5} - \log_x 5\sqrt{5} + \dfrac{5}{4} < 0$.

9.284. $|\log_3 x| < \left|\log_3 \dfrac{x}{9}\right|$.

9.285*. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}(x + \pi/2) + 2\operatorname{ctg}(x + \pi/3) > 0$.

9.286*. $\sin^3 x \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos^3 x \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) > \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

9.287*. $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

9.288*. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3}$.

9.289*. $4 \sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$.

9.290*. $\sin(2x + 10^\circ) + \sin(x + 10^\circ) - \sin x < 0$.

2.291. Показати, що $1/8 < \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 70^\circ < 1/4$.

9.292*. Розв'язати нерівність $\dfrac{\cos^3 2x}{\cos^2 x} > 3 \operatorname{tg} x$.

9.293. Показати, що $\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ > 3$.

9.294*. Показати, що за умови $360^\circ k - 45^\circ < \alpha \leqslant 360^\circ k + 45^\circ$, де $k \in \mathbf{Z}$, виконується нерівність $\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg} 45^\circ + \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha) \geqslant 3$.

9.295*. Розв'язати нерівність $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x \leqslant 1/2$.

9.296*. Розв'язати нерівність $\dfrac{\cos x + 2\cos^2 x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1} \geqslant 1$.

9.297*. Розв'язати нерівність $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + \sin x - 1 \leqslant 0$.

9.298. Показати, що $2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \sqrt{2} + 1$.

9.299. Показати, що $1/8 < \sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ < 1/4$.

9.300. Розв'язати нерівність $\log_{x^2-3} 729 \geqslant 3$.

9.301. Розв'язати нерівність $\dfrac{\log_a (35 - x^3)}{\log_a (5 - x)} > 3$.

9.302. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{\log_{1/4}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 1}.$$

9.303. Знайти множину цілих значень x, що задовольняють нерівність $\log_{0,3}(\sqrt{x+5} - x + 1) > 0$.

9.304. При яких значеннях x нерівність $y^2 - (5^x - 1)(y - 1) > 0$ виконується для всіх значень y.

9.305. Знайти a із нерівності $x^2 - 2^{a+2} x - 2^{a+3} + 12 > 0$ за умови, що вона виконується для будь-яких значень x.

Глава 10

ЗАДАЧІ З ПЛАНІМЕТРІЇ

Основні формули

1°. **Довільний трикутник** (a, b, c — сторони; α, β, γ — протилежні їм кути; p — півпериметр; R — радіус описаного кола; r — радіус вписаного кола; S — площа; h_a — висота, проведена до сторони a):

$$S = \frac{1}{2} a h_a; \qquad (10.1) \qquad S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha; \qquad (10.2)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad (10.3)$$

$$r = \frac{S}{p}; \qquad (10.4) \qquad R = \frac{abc}{4S}; \qquad (10.5)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \ (\textit{теорема косинусів}); \qquad (10.6)$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \ (\textit{теорема синусів}). \qquad (10.7)$$

2°. **Прямокутний трикутник** (a, b — катети; c — гіпотенуза; a_c, b_c — проекції катетів на гіпотенузу):

$$S = \frac{1}{2} ab; \qquad (10.8) \qquad S = \frac{1}{2} ch_c; \qquad (10.9)$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}; \quad (10.10) \qquad R = \frac{c}{2}; \quad (10.11)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\textit{теорема Піфагора}); \quad (10.12)$$

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}; \quad (10.13) \qquad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \quad (10.14) \qquad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}; \quad (10.15)$$

$$a = c \sin\alpha = c\cos\beta = b \operatorname{tg}\alpha = b \operatorname{ctg}\beta. \quad (10.16)$$

3⁰. Рівносторонній трикутник:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad (10.17) \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad (10.18) \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad (10.19)$$

4⁰. Довільний опуклий чотирикутник (d_1 і d_2 — діагоналі; φ — кут між ними; S — площа):

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi. \quad (10.20)$$

5⁰. Паралелограм (a і b — суміжні сторони; α — кут між ними; h_a — висота, проведена до сторони a):

$$S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi, \quad (10.21)$$

6⁰. Ромб:

$$S = ah_a = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2. \quad (10.22)$$

7⁰. Прямокутник:

$$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi. \quad (10.23)$$

8⁰. Квадрат (d — діагональ):

$$S = a^2 = d^2/2. \quad (10.24)$$

9⁰. Трапеція (a і b — основи; h — відстань між ними; l — середня лінія):

$$l = \frac{a+b}{2}; \quad (10.25) \qquad S = \frac{a+b}{2} \cdot h = lh. \quad (10.26)$$

10⁰. Описаний многокутник (p — півпериметр; r — радіус вписаного кола):

$$S = pr. \quad (10.27)$$

11⁰. Правильний многокутник (a_n — сторона правильного n-кутника; R — радіус описаного кола; r — радіус вписаного кола):

$$a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R; \quad (10.28)$$

$$S = \frac{na_n r}{2}. \quad (10.29)$$

12⁰. Коло, круг (r — радіус; C — довжина кола; S — площа круга):

$$C = 2\pi r; \quad (10.30) \qquad S = \pi r^2. \quad (10.31)$$

13°. Сектор (l — довжина дуги, яка обмежує сектор; $n°$ — градусна міра центрального кута; α — радіанна міра центрального кута):

$$l = \frac{\pi r n°}{180°} = r\alpha; \quad (10.32) \qquad S = \frac{\pi r^2 n°}{360°} = \frac{1}{2} r^2\alpha. \quad (10.33)$$

Додаткові співвідношення між елементами фігур

1°. Три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

☐ Нехай медіани AD і BE перетинаються в точці O (рис. 10.1). Побудуємо чотирикутник $MNDE$, де M і N — середини відрізків AO і BO. Тоді $MN \parallel AB$ і $MN = \frac{1}{2} AB$ як середня лінія трикутника AOB; $ED \parallel AB$ і $ED = \frac{1}{2} AB$ як середня лінія трикутника ABC. Тому $MN \parallel ED$ і $MN = ED$, тобто фігура $MNDE$ — паралелограм з діагоналями MD і NE. Отже, $MO = OD$, і оскільки $MO = AM$, то $AM = MO = OD$. Таким чином, точка O ділить медіану AD у відношенні $AO : OD = 2 : 1$, і в такому самому відношенні ця точка ділить медіану BE.

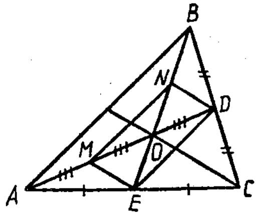


Рис. 10.1

Очевидно, що в тому самому відношенні повинна ділити і третю медіану точка її перетину як з першою, так і з другою медіанами. При цьому третя медіана не може перетнути їх в точках, відмінних від O, оскільки тоді на кожній медіані було б дві різні точки, що ділять її у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини, що неможливо. ■

2°. Медіана трикутника обчислюється за формулою

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2},$$

де a, b, c — сторони трикутника.

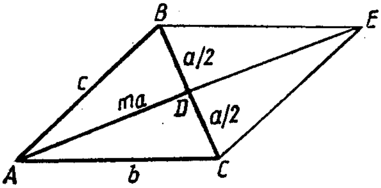


Рис. 10.2

☐ Продовжимо медіану AD (рис. 10.2) на відстань $DE = AD$ і побудуємо відрізки BE і EC. В одержаному чотирикутнику $ABEC$ точка D перетину діагоналей $AE = 2m_a$ і $BC = a$ ділить кожну з них пополам; отже, $ABEC$ — паралелограм. Тепер використаємо теорему про те, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін. Склавши рівняння і розв'язавши його відносно m_a, дістанемо шукане співвідношення. ■

3°. Сторона трикутника обчислюється за формулою

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2},$$

де m_a, m_b, m_c — медіани трикутника.

☐ Позначимо на медіані AD точку перетину медіан трикутника через O (рис. 10.3); згідно з властивістю 1°, вона ділить AD у відношенні $AO : OD = 2 : 1$. Продовжимо OD на відстань $DF = OD = \frac{1}{3} m_a$ і сполучимо точку F з B і C.

Тепер складемо рівняння, що пов'язує сторони $BO = \frac{2}{3} m_b$, $CO = \frac{2}{3} m_c$ і діагоналі $OF = \frac{2}{3} m_a$, $BC = a$ паралелограма $OBFC$. Розв'язавши це рівняння відносно a, дістанемо шукане співвідношення. ■

4^0. Бісектриса ділить сторону трикутника на відрізки, пропорційні двом іншим його сторонам.

□ І с п о с і б. Нехай CD — бісектриса трикутника ABC (рис. 10.4). Трикутники BDC і ADC з основами a_1 і b_1 мають спільну

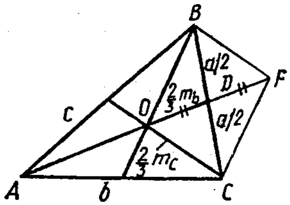


Рис. 10.3

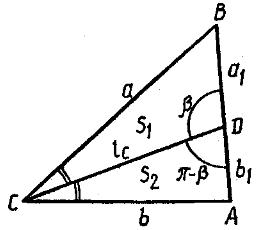


Рис. 10.4

висоту. Нехай їхні площі дорівнюють відповідно S_1 і S_2, тоді $S_1 : S_2 = a_1 : b_1$. Крім того, згідно з формулою (10.2), маємо $S_1 = \frac{1}{2} a \times CD \sin \frac{C}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} b \cdot CD \sin \frac{C}{2}$, звідки $S_1 : S_2 = a : b$. Порівнюючи здобуті пропорції, робимо висновок, що $a_1 : b_1 = a : b$.

II с п о с і б. Нехай $\angle BDC = \beta$ (рис. 10.4); тоді $\angle ADC = \pi - \beta$. Згідно з теоремою синусів (10,7), маємо $a_1 : a = \sin \frac{C}{2} : \sin \beta$ (із $\triangle BCD$) і $b_1 : b = \sin \frac{C}{2} : \sin (\pi - \beta) = \sin \frac{C}{2} : \sin \beta$ (із $\triangle ACD$).

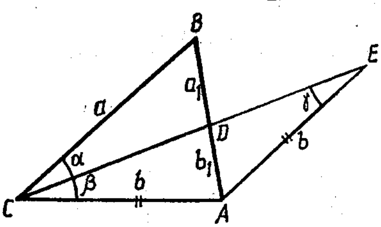


Рис. 10.5

Порівнюючи ці пропорції, робимо висновок, що $a_1 : a = b_1 : b$, звідки $a_1 : b_1 = a : b$.

III с п о с і б. Продовжимо бісектрису CD до перетину в точці E з прямою $AE \parallel CB$ (рис. 10.5). Маємо $\angle\alpha = \angle\beta$ (за умовою) і $\angle\alpha = \angle\gamma$ (кути при паралельних CB і AE і січній CE). Порівнюючи ці рівності, дістаємо $\angle\beta = \angle\gamma$. Отже, трикутник ACE — рівнобедрений і $AE = AC = b$; $\triangle AED \sim \triangle BCD$ (внаслідок рівності кутів), звідки $a_1 : b_1 = a : b$. ■

5^0. Бісектриса трикутника обчислюється за формулою

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1},$$

де a і b — дві сторони трикутника ABC; a_1 і b_1 — відрізки третьої сторони (див. рис. 10.4).

□ Застосувавши теорему косинусів (10.6) до трикутників з однаковими кутами BCD і ACD, складаємо рівняння

$$\frac{l_c^2 + a^2 - a_1^2}{2al_c} = \frac{l_c^2 + b^2 - b_1^2}{2bl_c},$$

звідки $b(l_c^2 + a^2 - a_1^2) = a(l_c^2 + b^2 - b_1^2)$ або $l_c^2(b - a) - ab(b - a) = (a_1 b) a_1 - (ab_1) b_1$. Використовуючи рівність $ab_1 = a_1 b$ (що випливає з властивості 4^0), дістаємо

$$(b - a)(l_c^2 - ab) = ab_1 a_1 - a_1 b b_1 \text{ або } (b - a)(l_c^2 - ab) = -a_1 b_1 (b - a).$$

Покладаючи $b \neq a$, поділимо обидві частини останньої рівності на $b - a$, звідки $l_c^2 = ab - a_1 b_1$. ■

6^0. Бісектриса трикутника визначається через його сторони a, b і c за формулою

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a + b + c)(a + b - c)}}{a + b}.$$

□ Запишемо співвідношення із властивості 5^0 у вигляді $l_c^2 = ab - a_1(c - a_1)$. Далі, використовуючи властивість 4^0, дістаємо $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{c - a_1}$, тобто $a_1 = \frac{ac}{a + b}$. Звідси знаходимо $l_c^2 = ab - \frac{ac}{a + b}\left(c - \frac{ac}{a + b}\right)$ і потім l_c. ■

7^0. Для всякого трикутника залежність між його висотами h_a, h_b, h_c і радіусом r вписаного кола визначається за формулою

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

□ Використовуючи формули (10.4) і (10.1), записуємо: $S = rp$, $2S = ah_a = bh_b = ch_c$. Звідси знаходимо

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{1}{S} = p \cdot \frac{1}{S} = \frac{1}{r}.$$ ■

8^0. Площа S рівнобічної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні, дорівнює квадрату її висоти, тобто $S = h^2$.

□ У рівнобічній трапеції віссю симетрії є перпендикуляр MN до її основи, який проходить через точку O перетину діагоналей (рис. 10.6). Оскільки $\angle AOD = 90°$, то $AD = 2ON$ і $BC = 2OM$. Отже,

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \times MN = (ON + OM) MN = MN^2 = h^2.$$ ■

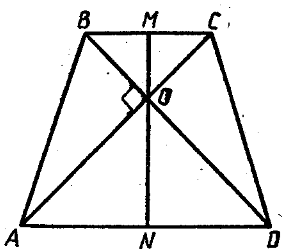


Рис. 10.6

9^0. Висота рівнобічної трапеції, в яку можна вписати коло, є середнім геометричним її основ.

□ Оскільки в чотирикутнику, описаному навколо кола, суми протилежних сторін рівні між собою, то $a + b = 2c$ (рис. 10.7), звідки $AB = \frac{a+b}{2}$. Далі маємо $AE = \frac{a-b}{2}$ і з прямокутного трикутника ABE знаходимо $BE^2 = AB^2 - AE^2$, тобто $h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$. ■

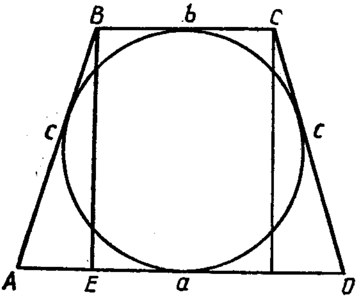


Рис. 10.7

Приклад 1. Площа трикутника ABC дорівнює 30 см². На стороні AC взято точку D так, що $AD : DC = 2 : 3$. Перпендикуляр DE, проведений до сторони BC, дорівнює 9 см. Знайти BC.

△ Проведемо BD (рис. 10.8); трикутники ABD і BDC мають спільну висоту BF; отже, їхні площі відносяться як довжини основ, тобто $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BDC} = AD : DC = 2 : 3$, звідки $S_{\triangle BDC} = \frac{3}{5} S_{\triangle ABC} = 18$ см². Крім того, згідно з формулою (10.1), $S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} BC \times DE$ або $18 = \frac{1}{2} BC \cdot 9$, звідки $BC = 4$ см. ▲

Приклад 2. У рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до основи і до бічної сторони, дорівнюють відповідно 10 і 12 см. Знайти основу.

△ У трикутнику ABC маємо $AB = BC$, $BD \perp AC$, $AE \perp BC$, $BD = 10$ см і $AE = 12$ см (рис. 10.9). Нехай $AC = x$, $AB = BC = y$. Прямокутні трикутники AEC і BDC подібні (кут C — спільний); отже, $BC : AC = BD : AE$ або $y : x = 10 : 12 = 5 : 6$. Застосовуючи теорему Піфагора (10.12) до трикутника BDC, маємо $BC^2 = BD^2 + DC^2$, тобто $y^2 = 100 + \frac{x^2}{4}$. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ y^2 = 100 + \frac{x^2}{4}, \end{cases}$$

дістанемо $x = 15$. Таким чином, $AC = 15$ см. ▲

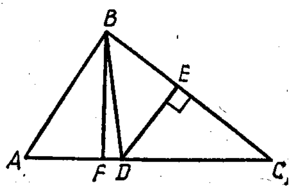


Рис. 10.8

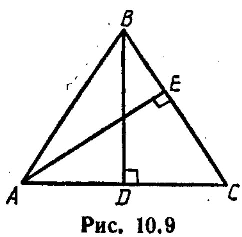


Рис. 10.9

Приклад 3. Два кола дотикаються зовні. До першого з них проведено дотичну, що проходить через центр другого кола. Відстань від точки дотику до центра другого кола дорівнює потроєному радіусу цього кола. У скільки разів довжина першого кола більша за довжину другого кола?

△ Нехай O_1 і O_2 — центри кіл, A — точка дотику (рис. 10.10). Тоді $O_1A = R_1, O_1O_2 = R_1 + R_2, O_2A = 3R_2$ (за умовою). Треба знайти відношення $2\pi R_1 : 2\pi R_2 = R_1 : R_2$. У прямокутному трикутнику O_1AO_2 ($\angle A = 90°$) маємо

$$O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2 \text{ або } (R_1 + R_2)^2 = R_1^2 + (3R_2)^2.$$

Спростивши цю рівність, дістанемо $R_1 = 4R_2$, звідки $R_1 : R_2 = 4$. ▲

Приклад 4. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить гіпотенузу на відрізки m і n. Довести, що площа трикутника $S = mn$. Знайти площу прямокутника, вписаного в даний трикутник

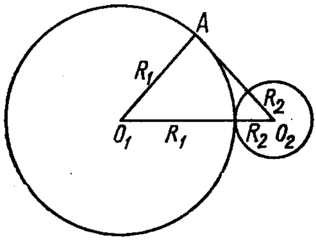


Рис. 10.10

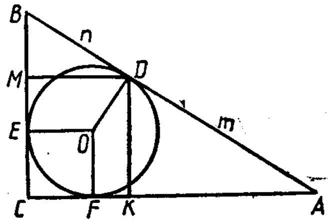


Рис. 10.11

так, що одна його вершина збігається з вершиною прямого кута, а протилежна вершина — з точкою дотику кола і гіпотенузи.

△ Нехай D, E, F — точки дотику (рис. 10.11); тоді $AD = AF = m$, $BD = BE = n$, $CE = CF = r$ — радіус вписаного кола, $p = r + m + n$ — півпериметр. Тоді, використовуючи формулу (10.8), знаходимо $S = \dfrac{(r+m)(r+n)}{2}$ або $2S = r^2 + r(m + n) + mn = r(r + m + n) + mn = rp + mn$. Оскільки, згідно з рівністю (10.4), $rp = S$, то $2S = S + mn$, звідки $S = mn$.

Нехай $CMDK$ — вписаний прямокутник. Оскільки $DK \parallel BC$, то, використовуючи гомотетію з центром у точці A і коефіцієнтом $k = \dfrac{m}{m+n}$, знайдемо площу S_1 трикутника ADK:

$$S_1 = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2} = \frac{m^3n}{(m+n)^2}.$$

Аналогічно для площі S_2 трикутника BDM маємо

$$S_2 = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{n^2}{(m+n)^2} = \frac{mn^3}{(m+n)^2}.$$

Шукана площа

$$S_{CMDK} = mn - \frac{m^3n + mn^3}{(m+n)^2} = \frac{2m^2n^2}{(m+n)^2}. ▲$$

Приклад 5. У прямокутному трикутнику проведено бісектрису гострого кута; відрізок, що сполучає її основу з точкою перетину

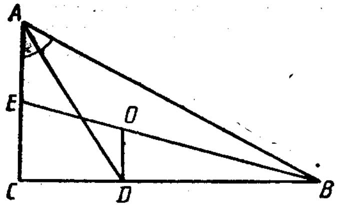


Рис. 10.12

медіан, перпендикулярний до катета. Знайти кути трикутника.

$\triangle$ Нехай BE — медіана, O — точка перетину медіан, AD — бісектриса і $OD \perp BC$ (рис. 10.12). Згідно з властивістю точки перетину медіан, $EO : OB = 1 : 2$. Оскільки $OD \parallel EC$, то за теоремою Фалеса $CD : DB = EO : OB = 1 : 2$. Використовуючи властивість бісектриси трикутника, дістаємо $CD : DB = AC : AB$, тобто $AC : AB = 1 : 2$. Таким чином, $\sin B = 1/2$, звідки $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$. ▲

Група А

10.001. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють 5 і 12 см. Знайти катети трикутника.

10.002. Знайти діагональ і бічну сторону рівнобічної трапеції з основами 20 і 12 см, якщо відомо, що центр описаного кола лежить на більшій основі трапеції.

10.003. У рівнобічній трапеції дано основи $a = 21$ см, $b = 9$ см і висоту $h = 8$ см. Знайти радіус описаного кола.

10.004. Висота ромба, проведена із вершини тупого кута, ділить його сторону на відрізки, що дорівнюють m і n (від вершини гострого кута). Визначити діагоналі ромба.

10.005. У прямокутний трикутник з катетами a і b вписано квадрат, що має з трикутником спільний прямий кут. Знайти периметр квадрата.

10.006. Два кола радіусів $R = 3$ см і $r = 1$ см дотикаються зовні. Знайти відстані від точки дотику кіл до їхніх спільних дотичних.

10.007. Навколо кола з діаметром 15 см описано рівнобічну трапецію з бічною стороною, що дорівнює 17 см. Знайти основи трапеції.

10.008. У рівнобедреному трикутнику з бічною стороною, що дорівнює 4 см, проведено медіану до бічної сторони. Знайти основу трикутника, якщо медіана дорівнює 3 см.

10.009. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 16 см, а бічна сторона дорівнює 10 см. Знайти радіуси вписаного й описаного кіл і відстань між їхніми центрами.

10.010. Кожну сторону правильного трикутника поділено на три рівні частини і відповідні точки поділу в одному напрямі сполучено між собою. У здобутий правильний трикутник вписано коло радіуса $r = 6$ см. Визначити сторони трикутників.

10.011. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана бічної сторони 5 см. Знайти бічні сторони.

10.012. Із точки A, що не лежить на колі, проведено до нього дотичну і січну. Відстань від точки A до точки дотику дорівнює 16 см, а до однієї з точок перетину січної з колом дорівнює 32 см. Знайти радіус кола, якщо січна віддалена від його центра на 5 см.

10.013. Дано трикутник із сторонами 12, 15 і 18 см. Проведено коло, яке дотикається до обох менших сторін, а його центр лежить на більшій стороні. Знайти відрізки, на які центр кола ділить більшу сторону трикутника.

10.014. Хорда кола дорівнює 10 см. Через один кінець хорди проведено дотичну до кола, а через другий — січну, паралельну дотичній. Визначити радіус кола, якщо внутрішній відрізок січної дорівнює 12 см.

10.015. Через кінці дуги кола, яка має $120°$, проведено дотичні, і в фігуру, обмежену цими дотичними і даною дугою, вписано коло. Довести, що довжина вписаного кола дорівнює довжині початкової дуги.

10.016. У сектор AOB з радіусом R і кутом $90°$ вписано коло, що дотикається до відрізків OA, OB і до дуги AB. Знайти радіус кола.

10.017. Дана точка P знаходиться на відстані 7 см від центра кола радіуса 11 см. Через цю точку проведено хорду, що дорівнює 18 см. Знайти відрізки, на які ділиться хорда точкою P.

10.018. Знайти сторони AB і AC трикутника ABC, якщо $BC = 8$ см, а висоти, проведені на AC і BC, дорівнюють відповідно 6,4 і 4 см.

10.019. Площа рівностороннього трикутника, вписаного в коло, дорівнює Q^2. Довести, що радіус кола дорівнює $2Q\sqrt[4]{3}/3$.

10.020. У перетин двох однакових кругів вписано ромб з діагоналями 12 і 6 см. Знайти їхні радіуси.

10.021. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює m і ділить прямий кут у відношенні $1:2$. Знайти сторони трикутника.

10.022. Визначити гострі кути прямокутного трикутника, якщо медіана, проведена до його гіпотенузи, ділить прямий кут у відношенні $1:2$.

10.023. Дано квадрат, дві вершини якого лежать на колі радіуса R, дві інші — на дотичних до цього кола. Знайти діагональ квадрата.

10.024. Паралельні сторони трапеції дорівнюють 25 і 4 см, а непаралельні — 20 і 13 см. Знайти висоту трапеції.

10.025. Спільна хорда двох кіл є для одного з них стороною вписаного квадрата, а для іншого — стороною правильного шестикутника. Знайти відстань між центрами кіл, якщо радіус меншого з них дорівнює r (розглянути два можливих випадки розміщення кіл).

10.026. Із зовнішньої точки проведено до кола січну, що дорівнює 12 см, і дотичну, яка становить 2/3 внутрішнього відрізка січної. Визначити довжину дотичної.

10.027. Кожне з трьох рівних між собою кіл радіуса r дотикається до двох інших. Знайти площу трикутника, утвореного спільними зовнішніми дотичними до цих кіл.

10.028. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, бічна сторона її c, а діагональ дорівнює d. Довести, що $d^2 = ab + c^2$.

10.029. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, дорівнює a і є для одного з кіл стороною правильного вписаного трикутника, а для іншого — стороною вписаного квадрата. Визначити відстань між центрами кіл (розглянути два можливих випадки).

10.030. На сторонах квадрата зовні його побудовано правильні трикутники, і їхні вершини послідовно сполучено. Визначити відношення периметра утвореного чотирикутника до периметра даного квадрата.

10.031. У ромб, який ділиться своєю діагоналлю на два рівносторонніх трикутники, вписано коло радіуса 2. Знайти сторону ромба.

10.032. У трикутнику задано дві сторони, які дорівнюють 6 і 3 см. Знайти третю сторону, якщо півсума висот, проведених до відомих сторін, дорівнює третій висоті.

10.033. До кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з основою 12 см і висотою 8 см, проведено дотичну, паралельну основі. Знайти довжину відрізка цієї дотичної, що міститься між сторонами трикутника.

10.034. Із однієї точки проведено до кола дві дотичні. Довжина кожної дотичної 12 см, а відстань між точками дотику 14,4 см. Визначити радіус кола.

10.035. Із точки A проведено дві прямі, що дотикаються до кола радіуса R в точках B і C, так, що трикутник ABC рівносторонній. Знайти його площу.

10.036. У прямокутний трикутник з кутом 60° вписано ромб із стороною, що дорівнює 6 см, так, що кут в 60° у них спільний, і всі вершини ромба лежать на сторонах трикутника. Знайти сторони трикутника.

10.037. Дано правильний трикутник ABC. Точка K ділить сторону AC у відношенні $2:1$, а точка M — сторону AB у відношенні $1:2$ (починаючи в обох випадках від вершини A). Показати, що довжина відрізка KM дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника ABC.

10.038. Периметр паралелограма дорівнює 90 см, а гострий кут дорівнює 60°. Діагональ паралелограма ділить його тупий кут на частини у відношенні $1:3$. Знайти сторони паралелограма.

10.039. Прямі, на яких лежать бічні сторони рівнобічної трапеції, перетинаються під прямим кутом. Знайти сторони трапеції, якщо її площа дорівнює 12 см^2, а висота дорівнює 2 см.

10.040. У прямокутний трикутник вписано півколо так, що діаметр лежить на гіпотенузі, а центр ділить гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють 15 і 20 см. Знайти площу трикутника і довжину вписаного півкола.

10.041. Один із кутів паралелограма дорівнює 60°, а менша діагональ дорівнює $2\sqrt{31}$ см. Перпендикуляр, проведений із точки перетину діагоналей до бічної сторони, дорівнює $\sqrt{75}/2$ см. Знайти сторони і більшу із діагоналей паралелограма.

10.042. Один із кутів трапеції дорівнює 30°, а прямі, на яких лежать бічні сторони трапеції, перетинаються під прямим кутом. Знайти меншу бічну сторону трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см, а одна з основ 8 см.

10.043. У коло, діаметр якого дорівнює $\sqrt{12}$, вписано правильний трикутник. На його висоті як на стороні побудовано другий правильний трикутник, в який вписано нове коло. Знайти радіус цього кола.

10.044. У колі проведено дві хорди $AB = a$ і $AC = b$. Довжина дуги AC у два рази більша за довжину дуги AB. Знайти радіус кола.

10.045. Спільну хорду двох кіл, що перетинаються, видно з їхніх центрів під кутами 90 і 60°. Знайти радіуси кіл, якщо відстань між їхніми центрами дорівнює $\sqrt{3}+1$.

10.046. Коло дотикається до більшого катета прямокутного трикутника, проходить через вершину протилежного гострого кута і має центр на гіпотенузі трикутника. Знайти радіус кола, якщо катети дорівнюють 5 і 12.

10.047. Периметр прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) дорівнює 72 см, а різниця між медіаною CK і висотою CM дорівнює 7 см. Знайти гіпотенузу.

10.048. У гострий кут, що дорівнює 60°, вписано два кола, що зовні дотикаються одне до одного. Радіус меншого кола дорівнює r. Знайти радіус більшого кола.

10.049. Точка на гіпотенузі, рівновіддалена від двох катетів, ділить гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють 30 і 40 см. Знайти катети трикутника.

10.050. Знайти радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, якщо радіус кола, вписаного в цей трикутник, дорівнює 3 см, а катет дорівнює 10 см.

10.051. Три кола різних радіусів попарно дотикаються одне до одного. Прямі, що сполучають їхні центри, утворюють прямокутний трикутник. Знайти радіус меншого кола, якщо радіуси більшого і середнього кіл дорівнюють відповідно 6 і 4 см.

10.052. Коло дотикається до одного із катетів рівнобедреного прямокутного трикутника і проходить через вершину протилежного гострого кута. Знайти радіус кола, якщо його центр лежить на гіпотенузі трикутника, а катет трикутника дорівнює a.

10.053. У паралелограмі $ABCD$ висота, проведена з вершини B тупого кута на сторону DA, ділить її у відношенні $5:3$, починаючи від вершини D. Знайти відношення $AC : BD$, якщо $AD : AB = 2$.

10.054. На основі рівнобедреного трикутника, яка дорівнює 8 см, як на хорді побудовано коло, що дотикається до бічних сторін трикутника. Знайти радіус кола, якщо висота, проведена до основи трикутника, дорівнює 3 см.

10.055. У рівнобедрений трикутник з кутом $120°$ при вершині і бічною стороною, що дорівнює a, вписано коло. Знайти радіус цього кола.

10.056. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки, взятої усередині правильного многокутника, до всіх прямих, на яких лежать його сторони, є величина стала.

10.057. Діагональ прямокутної трапеції і її бічна сторона рівні між собою. Знайти середню лінію, якщо висота трапеції дорівнює 2 см, а бічна сторона 4 см.

10.058. У правильний трикутник вписано квадрат, сторона якого дорівнює m. Знайти сторону трикутника.

10.059. У колі радіуса r проведено хорду, що дорівнює $r/2$. Через один кінець хорди проведено дотичну до кола, а через інший — січну, паралельну дотичній. Знайти відстань між дотичною і січною.

10.060. Радіуси вписаного і описаного кіл прямокутного трикутника дорівнюють відповідно 2 і 5 см. Знайти катети трикутника.

10.061. Перпендикуляр, опущений з вершини паралелограма на його діагональ, ділить цю діагональ на відрізки, що дорівнюють 6 і 15 см. Різниця між довжинами сторін паралелограма дорівнює 7 см. Знайти сторони паралелограма і його діагоналі.

10.062. У більшому із двох концентричних кіл проведено хорду, яка дорівнює 32 см і дотикається до меншого кола. Визначити радіуси кожного з кіл, якщо ширина утвореного кільця дорівнює 8 см.

10.063. У трикутник вписано ромб так, що один із кутів у них спільний, а протилежна вершина ділить сторону трикутника у відношенні $2:3$. Діагоналі ромба дорівнюють m і n. Знайти сторони трикутника, на яких лежать сторони ромба.

10.064. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, основа 12 см. До кола, вписаного у трикутник, проведено дотичні, які паралельні висоті трикутника і відтинають від даного трикутника два прямокутних трикутники. Знайти сторони цих трикутників.

10.065. У рівносторонній трикутник вписано коло. До цього кола і до сторін трикутника дотикаються три менші кола. Знайти сторону трикутника, якщо радіус малого кола дорівнює r.

10.066. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а проекція іншого катета на гіпотенузу дорівнює 16 см. Знайти радіус кола, вписаного у трикутник.

10.067. У середині кола, радіус якого дорівнює 15 см, взято точку M на відстані 13 см від центра. Через точку M проведено хорду, що дорівнює 18 см. Знайти відрізки, на які точка M ділить хорду.

10.068. Основа трикутника дорівнює 36 см. Пряма, паралельна основі, ділить площину трикутника пополам. Знайти відрізок цієї прямої, що знаходиться між сторонами трикутника.

10.069. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює 15 см, а радіус вписаного в нього кола дорівнює 6 см. Знайти сторони трикутника.

10.070. У круговий сектор з центральним кутом 120° вписано коло. Знайти радіус вписаного кола, якщо радіус даного круга дорівнює R.

10.071. Знайти бічну сторону і діагоналі рівнобічної трапеції з основами 20 і 12 см, коли відомо, що центр описаного кола лежить на більшій основі трапеції.

10.072. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 30 см, а бічна сторона дорівнює 39 см. Визначити радіус вписаного кола.

10.073. У квадраті, сторона якого дорівнює a, середини двох суміжних сторін сполучено між собою і з протилежною вершиною квадрата. Знайти площу утвореного трикутника.

10.074. Одна із двох паралельних прямих дотикається до кола радіуса R у точці A, а інша перетинає це коло у точках B і C. Виразити площу трикутника ABC як функцію відстані x між прямими.

10.075. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 і 12 см. Знайти відстань між точкою перетину його бісектрис і точкою перетину медіан.

10.076. Знайти відношення радіуса кола, вписаного в рівнобедрений прямокутний трикутник, до висоти, опущеної з вершини прямого кута на гіпотенузу.

10.077. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона дорівнюють відповідно 5 і 20 см. Знайти бісектрису кута при основі трикутника.

10.078. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 і 8 см. Знайти відстань від центра вписаного в трикутник кола до центра описаного навколо нього кола.

10.079. Знайти бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють 24 і 18 см.

10.080. Довести, що коли в чотирикутнику діагоналі лежать на бісектрисах його кутів, то такий чотирикутник є ромбом.

10.081. Площа прямокутника дорівнює 9 см^2, а один із кутів, утворених діагоналями, дорівнює 120°. Знайти сторони прямокутника.

10.082. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює S, а висота трапеції в два рази менша за бічну сторону. Визначити радіус кола.

10.083. Сума діагоналей ромба дорівнює m, а його площа дорівнює S. Знайти сторону ромба.

10.084. Периметр ромба дорівнює 2 м, довжини його діагоналей відносяться як 3 : 4. Знайти площу ромба.

10.085. У рівнобічну трапецію вписано коло радіуса R. Верхня основа трапеції в два рази менша за її висоту. Знайти площу трапеції.

10.086. На кожній медіані трикутника взято точку, яка ділить медіану у відношенні 3 : 1, починаючи від вершини. У скільки разів площа трикутника з вершинами в цих точках менша за площу початкового трикутника?

10.087. У рівнобедрений трикутник вписано квадрат одиничної площі, одна сторона якого лежить на основі трикутника. Знайти площу трикутника, коли відомо, що центри мас трикутника і квадрата збігаються (центр мас трикутника лежить на перетині його медіан).

10.088. У коло радіуса R вписано трапецію, у якої нижня основа в два рази більша за кожну з решти сторін. Знайти площу трапеції.

10.089. Знайти площу круга, обмеженого колом, описаним навколо рівнобедреного трикутника, якщо основа цього трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона 13 см.

10.090. Відстань від центра кола до хорди, довжина якої 16 см, дорівнює 15 см. Знайти площу трикутника, описаного навколо кола, якщо периметр трикутника дорівнює 200 см.

10.091. Знайти площу круга, вписаного в рівнобічну трапецію, якщо її більша основа дорівнює a, а кут при меншій основі дорівнює $120°$.

10.092. У коло радіуса R вписано трикутник, кути якого дорівнюють 15 і $60°$. Знайти площу трикутника.

10.093. Периметр прямокутного трикутника дорівнює $2p$, а гіпотенуза дорівнює c. Визначити площу круга, вписаного в трикутник.

10.094. Знайти площу круга, вписаного в прямокутний трикутник, якщо проекції катетів на гіпотенузу дорівнюють 9 і 16 см.

10.095. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 1/3 площі квадрата, побудованого на основі даного трикутника. Бічна сторона трикутника коротша за його основу на 1 см. Знайти сторони і висоту трикутника, проведену до основи.

10.096. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює $32\sqrt{3}$ см^2. Визначити бічну сторону трапеції, коли відомо, що гострий кут при основі дорівнює $\pi/3$.

10.097. Площа прямокутного трикутника дорівнює $2\sqrt{3}$ см^2. Визначити його висоту, проведену до гіпотенузи, якщо вона ділить прямий кут у відношенні 1 : 2.

10.098. Пряма, паралельна основі трикутника, ділить його на частини, площі яких відносяться як 2 : 1. У якому відношенні, починаючи від вершини, вона ділить бічні сторони?

10.099. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 8 см^2. Визначити сторони трапеції, якщо кут при основі дорівнює $30°$.

10.100. Рівносторонній шестикутник $ABCDEF$ складено з двох трапецій, що мають спільну основу CF. Відомо, що $AC = 13$ см, $AE = 10$ см. Знайти площу шестикутника.

10.101. Знайти площу правильного трикутника, вписаного в квадрат із стороною a, за умови, що одна з вершин трикутника збігається з вершиною квадрата.

10.102. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її тупий кут пополам. Менша основа трапеції дорівнює 3 см, периметр дорівнює 42 см. Знайти площу трапеції.

10.103. Знайти площу круга, вписаного в прямокутний трикутник, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить останню на відрізки, що дорівнюють 25,6 і 14,4 см.

10.104. Знайти площу круга, в який вписано прямокутний трикутник, якщо периметр цього трикутника дорівнює 24 см, а його площа 24 см^2.

10.105. Знайти площу рівнобедреного трикутника із кутом 120°, якщо радіус вписаного кола дорівнює $\sqrt[4]{12}$ см.

10.106. На сторонах рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою c зовні цього трикутника побудовано квадрати. Центри цих квадратів сполучено між собою. Знайти площу утвореного трикутника.

10.107. У квадрат вписано другий квадрат, вершини якого лежать на сторонах першого, а сторони утворюють із сторонами першого квадрата кути в 60°. Яка частина площі даного квадрата є площею вписаного.

10.108. Знайти площу квадрата, вписаного в правильний трикутник із стороною a.

10.109. На сторонах рівностороннього трикутника зовні його побудовано квадрати. Їхні вершини, що лежать зовні трикутника, послідовно сполучено. Визначити площу утвореного шестикутника, якщо сторона даного трикутника дорівнює a.

10.110. Даний квадрат із стороною a зрізано по кутах так, що утворився правильний восьмикутник. Визначити площу цього восьмикутника.

10.111. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює a. Обчислити площу квадрата, вписаного в те саме коло.

10.112. Знайти відношення площ квадрата, правильного трикутника і правильного шестикутника, вписаних в одне і те саме коло.

10.113. Сторона рівностороннього трикутника, вписаного в коло, дорівнює a. Визначити площу сегмента, що відтинається цією стороною.

10.114. Сторона квадрата, вписаного в коло, дорівнює a. Визначити площу сегмента, що відтинається цією стороною.

10.115. На діаметрі $2R$ півкола побудовано правильний трикутник, сторона якого дорівнює діаметру. Трикутник розміщено по той самий бік від діаметра, що й півколо. Обчислити площу тієї частини трикутника, яка лежить зовні півкола.

10.116. Круг радіуса R обкладено чотирма однаковими кругами, які дотикаються до даного так, що кожні два суміжні з цих чотирьох кругів дотикаються один до одного. Обчислити площу одного з цих кругів.

10.117. У точках перетину двох кіл з радіусами 4 і 8 см дотичні до них взаємно перпендикулярні. Обчислити площу фігури O_1ABO_2, де AB — спільна дотична до кіл, а O_1 і O_2 — їхні центри.

10.118. Визначити сторону ромба, знаючи, що площа його дорівнює S, а довжини діагоналей відносяться як $m : n$.

10.119. Периметр ромба дорівнює $2p$; довжини діагоналей відносяться як $m : n$. Обчислити площу ромба.

10.120. Два кола радіуса R з центрами в точках O_1 і O_2 дотикаються одне до одного. Їх перетинає пряма в точках A, B, C і D так, що $AB = BC = CD$. Знайти площу чотирикутника O_1ADO_2.

10.121. Обчислити площу прямокутної трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60°, менша основа дорівнює a і більша бічна сторона дорівнює b.

10.122. Більша основа трапеції дорівнює 24 см. Знайти меншу основу, коли відомо, що відстань між серединами діагоналей трапеції дорівнює 4 см.

10.123. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює S. Визначити бічну сторону трапеції, коли відомо, що гострий кут при основі дорівнює $\pi/6$.

10.124. Трапеція розбивається діагоналями на чотири трикутники. Знайти відношення площ трикутників, що прилягають до бічних сторін трапеції.

10.125. На більшому катеті трикутника як на діаметрі побудовано півколо. Знайти його довжину, якщо менший катет дорівнює 30 см, а хорда, що сполучає вершину прямого кута з точкою перетину гіпотенузи і півкола, дорівнює 24 см.

10.126. На діаметрі півкруга побудовано правильний трикутник, сторони якого дорівнюють діаметру. Як відносяться площі частин трикутника, що лежать зовні і всередині півкруга.

10.127. У правильний трикутник із стороною, що дорівнює a, вписано коло, в яке вписано правильний шестикутник. Знайти площу шестикутника.

10.128. Навколо квадрата, сторона якого дорівнює a, описано коло, а навколо кола — правильний шестикутник. Знайти площу шестикутника.

10.129. У рівнобічну трапецію вписано коло. Одна із бічних сторін ділиться точкою дотику на відрізки, що дорівнюють m і n. Знайти площу трапеції.

10.130. Сторона квадрата, вписаного в коло, відтинає сегмент, площа якого дорівнює $(2\pi—4)$ см^2. Знайти площу квадрата.

10.131. У ромб з гострим кутом 30° вписано коло. Площа круга, обмеженого цим колом, дорівнює Q. Знайти площу ромба.

10.132. У круговий сектор, дуга якого містить 60°, вписано круг. Знайти відношення площі цього круга до площі сектора.

10.133. Із точки M, що знаходиться на відстані a від кола, проведено до цього кола дотичну, яка дорівнює $2a$. Знайти площу правильного шестикутника, вписаного в коло.

10.134. У рівнобічній трапеції одна основа дорівнює 40 см, а інша 24 см. Діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні. Знайти її площу.

10.135. Основа трикутника дорівнює 30 см, а бічні сторони 26 і 28 см. Висоту поділено у відношенні 2 : 3 (починаючи від вершини), і через точку поділу проведено пряму, паралельну основі. Визначити площу утвореної при цьому трапеції.

10.136. У прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки, що дорівнюють 4 і 5 см. Визначити площу трикутника.

10.137. Хорда AB сталої довжини ковзає своїми кінцями по колу радіуса R. Точка C цієї хорди, що знаходиться на відстанях a і b від кінців A і B хорди, описує при повному обертанні коло. Обчислити площу кільця, що міститься між даним колом і колом, описаним точкою C.

10.138. Три однакових кола радіуса r попарно дотикаються одне до одного. Обчислити площу фігури, розміщеної зовні кіл і обмеженої їхніми дугами, що містяться між точками дотику.

10.139. На сторонах ромба як на діаметрах описано півкола, обернені всередину ромба. Визначити площу утвореної розетки, якщо діагоналі ромба дорівнюють a і b.

10.140. Довести, що коли через вершини чотирикутника провести прямі, паралельні його діагоналям, то площа паралелограма, утвореного цими прямими, у два рази більша за площу даного чотирикутника.

10.141. Визначити бічні сторони рівнобічної трапеції, якщо її основи і площа дорівнюють відповідно 8 см, 14 см і 44 см^2.

10.142. У правильний трикутник вписано коло, а в нього — правильний шестикутник. Знайти відношення площ трикутника і шестикутника.

10.143. Спільною хордою двох кругів стягуються дуги в 60 і 120°. Знайти відношення площ цих кругів.

10.144. У прямокутнику проведено бісектриси двох кутів, що прилягають до більшої сторони. Визначити, на які частини ділиться площа прямокутника цими бісектрисами, якщо сторони прямокутника дорівнюють 2 і 4 м.

10.145. Висота ромба дорівнює 12 см, а одна з його діагоналей дорівнює 15 см. Знайти площу ромба.

10.146. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 25 см, а радіус вписаного кола дорівнює 8 см. Знайти основу трикутника.

10.147. У паралелограмі, периметр якого 32 см, проведено діагоналі. Різниця між периметрами двох суміжних трикутників дорівнює 8 см. Знайти сторони паралелограма.

10.148. Знайти площу рівнобічної трапеції, якщо її висота дорівнює h, а бічну сторону видно із центра описаного кола під кутом 60°.

10.149. Круг, радіус якого дорівнює R, розділено на два сегменти хордою, що дорівнює стороні вписаного квадрата. Визначити площу меншого з цих сегментів.

10.150. Визначити площу кругового кільця, що міститься між двома концентричними колами, довжини яких дорівнюють C_1 і C_2 $(C_1 > C_2)$.

10.151. Круг розділено на два сегменти хордою, що дорівнює стороні правильного вписаного трикутника. Визначити відношення площ цих сегментів.

10.152. У правильний шестикутник, сторона якого дорівнює a, вписано коло, і навколо нього ж описано коло. Визначити площу кругового кільця, що міститься між цими колами.

10.153. Круг радіуса R розділено двома концентричними з ним колами на три рівновеликі фігури. Знайти радіуси цих кіл.

10.154. Площа кругового кільця дорівнює S. Радіус більшого кола дорівнює довжині меншого кола. Визначити радіус останнього.

10.155. У крузі радіуса R по різні боки від центра проведено дві паралельні хорди, одна з яких дорівнює стороні правильного вписаного трикутника, а інша — стороні правильного вписаного шестикутника. Визначити площу частини круга, що міститься між хордами.

10.156. У коло радіуса R вписано два правильних трикутники так, що при їхньому взаємному перетині кожна з сторін поділилася на три рівних між собою відрізки. Знайти площу перетину цих трикутників.

10.157. Через точки R і E, що належать сторонам AB і AD паралелограма $ABCD$ і такі, що $AR = (2/3)\,AB$, $AE = (1/3)\,AD$, проведено пряму. Знайти відношення площі паралелограма до площі здобутого трикутника.

10.158. Три кола радіусів $R_1 = 6$ см, $R_2 = 7$ см, $R_3 = 8$ см попарно дотикаються одне до одного. Визначити площу трикутника, вершини якого збігаються з центрами цих кіл.

10.159. Знайти відношення площ рівностороннього трикутника, квадрата і правильного шестикутника, сторони яких однакові.

10.160. У трапеції, площа якої дорівнює 594 м², висота 22 м, а різниця паралельних сторін дорівнює 6 м, знайти кожну із паралельних сторін.

10.161. Через вершину прямого кута прямокутного трикутника з катетами 6 і 8 м проведено перпендикуляр до гіпотенузи. Обчислити площі утворених трикутників.

10.162. Обчислити площу рівнобедреного трикутника, якщо його висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 12 см, а основа дорівнює 15 см.

10.163. Сторони трикутника дорівнюють 13, 14 і 15 см. Знайти відношення площ кругів, обмежених описаним навколо трикутника і вписаним в нього колами.

10.164. Обчислити площу трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), якщо її сторони відносяться як 5 : 3, а площа трикутника ADM дорівнює 50 см^2, де M — точка перетину прямих AB і CD.

10.165. У правильний трикутник вписано коло і навколо нього описано коло. Знайти площу утвореного кільця, якщо сторона трикутника дорівнює a.

10.166. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює 3 см. Знайти площу трикутника.

10.167. Довести, що площа трапеції дорівнює добутку однієї з непаралельних сторін на перпендикуляр, проведений через середину іншої бічної сторони до першої.

10.168. Довести, що коли діаметр півкруга розділити на дві довільні частини і на кожній з них побудувати як на діаметрі півкола (всередині даного півкруга), то площа, що міститься між трьома півколами, дорівнює площі круга, діаметр якого дорівнює перпендикуляру, проведеному до діаметра півкруга в точці поділу до перетину з колом.

10.169. У круг радіуса R вписано прямокутник, площа якого вдвоє менша від площі круга. Визначити сторони прямокутника.

10.170. Визначити площу круга, вписаного в сектор круга радіуса R з хордою $2a$.

10.171. Основи трапеції дорівнюють a і b, кути при більшій основі дорівнюють $\pi/6$ і $\pi/4$. Знайти площу трапеції.

10.172. У ромб з гострим кутом 30° вписано коло, а в коло — квадрат. Знайти відношення площі ромба до площі квадрата.

10.173. Довжини сторін прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію з різницею 1 см. Знайти гіпотенузу трикутника.

10.174. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює S. Визначити радіус цього кола, якщо кут при основі трапеції дорівнює 30°.

10.175. Знайти площу рівнобедреного трикутника, якщо основа його дорівнює a, а висота, проведена до основи, дорівнює відрізку, що сполучає середини основи і бічної сторони.

10.176. Довести, що в паралелограмі $ABCD$ відстані від будь-якої точки діагоналі AC до прямих BC і CD обернено пропорційні цим сторонам.

10.177. Довести, що відношення периметра трикутника до однієї із його сторін дорівнює відношенню висоти, проведеної на цю сторону, до радіуса вписаного кола.

10.178. Знайти сторони рівнобедреного трикутника ABC з основою AC, коли відомо, що його висоти AN і BM дорівнюють відповідно n і m.

10.179. Ромб, у якого сторона дорівнює меншій діагоналі, рівновеликий кругу радіуса R. Визначити сторону ромба.

10.180. Обчислити площу трапеції за різницею основ, що дорівнює 14 см, і за двома непаралельними сторонами, що дорівнюють 13 і 15 см, коли відомо, що в трапецію можна вписати коло.

10.181. У квадраті із стороною a середини двох суміжних сторін сполучено між собою і з протилежною вершиною квадрата. Визначити площу внутрішнього трикутника.

10.182. Навколо квадрата із стороною a описано коло. В один із утворених сегментів вписано квадрат. Визначити площу вписаного квадрата.

10.183. У рівнобічну трапецію вписано круг. Довести, що відношення площі круга до площі трапеції дорівнює відношенню довжини кола до периметра трапеції.

10.184. Обчислити площу трапеції, паралельні сторони якої дорівнюють 16 і 44 см, а непаралельні 17 і 25 см.

10.185. У рівнобічній трапеції середня лінія дорівнює 5, а діагоналі взаємно перпендикулярні. Знайти площу трапеції.

10.186. Основи рівнобічної трапеції відносяться як 5 : 12, а її висота дорівнює 17 см. Обчислити радіус кола, описаного навколо трапеції, коли відомо, що її середня лінія дорівнює висоті.

10.187. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює H і вдвоє більша за свою проекцію на бічну сторону. Знайти площу трикутника.

10.188. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, відноситься до радіуса вписаного в нього кола як 5 : 2. Знайти площу трикутника, якщо один із його катетів дорівнює a.

10.189. У сегмент, дуга якого дорівнює 60°, вписано квадрат. Обчислити площу квадрата, якщо радіус круга дорівнює $2\sqrt{3}+\sqrt{17}$.

10.190. У трикутнику сторони відносяться як 2 : 3 : 4. У нього вписано півколо з діаметром, що лежить на більшій стороні. Знайти відношення площі півкруга, обмеженого півколом, до площі трикутника.

Група Б

10.191. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на відстані 3 і 9 см. Знайти сторони трапеції.

10.192. Два кола дотикаються зовні. Їхні радіуси відносяться як 3 : 1, а довжина їхньої спільної зовнішньої дотичної дорівнює $6\sqrt{3}$. Визначити периметр фігури, утвореної зовнішніми дотичними і зовнішніми частинами кіл.

10.193. Усередині прямого кута дано точку M, відстані від якої до сторін кута дорівнюють 4 і 8 см. Пряма, що проходить через точку M, відтинає від прямого кута трикутник, площа якого 100 см^2. Знайти катети трикутника.

10.194. Точка C_1 — середина сторони AB трикутника ABC; кут COC_1, де O — центр кола, описаного навколо трикутника, є прямим. Довести, що $|\angle B - \angle A| = 90°$.

10.195. Коло дотикається до двох суміжних сторін квадрата і ділить кожну з двох інших його сторін на відрізки, що дорівнюють 2 і 23 см. Знайти радіус кола.

10.196. Дано трикутник ABC, у якого $2h_c = AB$ і $\angle A = 75°$. Знайти кут C.

10.197. У прямокутний трикутник із сторонами 6, 8 і 10 см вписано коло. Через центр кола проведено прямі, паралельні сторонам трикутника. Обчислити довжини середніх відрізків сторін трикутника, що відтинаються побудованими прямими.

10.198. Бісектриси тупих кутів при основі трапеції перетинаються на іншій її основі. Знайти всі сторони трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см, а бісектриси 15 і 13 см.

10.199. Основи трапеції дорівнюють 4 і 16 см. Знайти радіуси кіл, вписаного в трапецію і описаного навколо неї, коли відомо, що ці кола існують.

10.200. У трикутник вписано ромб із стороною m так, що один кут у них спільний, а протилежна вершина ромба лежить на стороні трикутника і ділить цю сторону на відрізки, що дорівнюють p і q. Знайти сторони трикутника.

10.201. Дано трикутник ABC такий, що $AB = 15$ см, $BC = 12$ см і $AC = 18$ см. Обчислити, у якому відношенні центр кола, вписаного в трикутник, ділить бісектрису кута C.

10.202. Дано рівнобедрений трикутник з основою, що дорівнює a, і бічною стороною, що дорівнює b. Довести, що центр вписаного кола ділить бісектрису кута при основі у відношенні $(a + b) : b$, починаючи від вершини кута.

10.203. Із однієї точки кола проведено дві хорди, що дорівнюють 9 і 17 см. Знайти радіус кола, якщо відстань між серединами даних хорд дорівнює 5 см.

10.204. Із однієї точки кола проведено дві хорди, що дорівнюють 10 і 12 см. Знайти радіус кола, якщо відстань від середини меншої хорди до більшої хорди дорівнює 4 см.

10.205. У деякий кут вписано коло радіуса 5 см. Хорда, що сполучає точки дотику дорівнює 8 см. До кола проведено дві дотичні, паралельні хорді. Знайти сторони трапеції, що утворилася.

10.206. Якими цілими числами виражаються сторони рівнобедреного трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 3/2 см, а описаного 25/8 см?

10.207. У трикутник із сторонами 10, 17 і 21 см вписано прямокутник з периметром 24 см так, що одна його сторона лежить на більшій стороні трикутника. Знайти сторони прямокутника.

10.208. Із вершини гострого кута ромба проведено перпендикуляри до прямих, що містять сторони ромба, яким не належить ця вершина. Кожний перпендикуляр дорівнює 3 см, а відстань між їхніми основами дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Знайти діагоналі ромба.

10.209. Дано трикутник із сторонами 10, 24 і 26. Дві менші сторони є дотичними до кола, центр якого лежить на більшій стороні. Знайти радіус кола.

10.210. Знайти радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з основами 2 і 14 і бічною стороною 10.

10.211. На більшому катеті прямокутного трикутника як на діаметрі побудовано коло. Визначити радіус цього кола, якщо менший катет трикутника дорівнює 7,5 см, а хорда, що сполучає вершину прямого кута з точкою перетину гіпотенузи і кола, дорівнює 6 см.

10.212. Вершини прямокутника, вписаного в коло, ділять його на чотири дуги. Знайти відстані від середини однієї з більших дуг до вершин прямокутника, якщо сторони його дорівнюють 24 і 7 см.

10.213. Центр півкола, вписаного в прямокутний трикутник так, що його діаметр лежить на гіпотенузі, ділить гіпотенузу на відрізки 30 і 40. Знайти довжину дуги півкола, що міститься між точками його дотику з катетами.

10.214. Навколо кола радіуса 3 описано рівнобедрений трикутник з гострим кутом 30° при основі. Визначити сторони трикутника.

10.215. У прямокутному трикутнику медіани катетів дорівнюють $\sqrt{52}$ і $\sqrt{73}$. Знайти гіпотенузу трикутника.

10.216. Два кола, радіуси яких 4 і 8, перетинаються під прямим кутом. Визначити довжину їхньої спільної дотичної.

10.217. Які необхідні й достатні умови повинна задовольняти трапеція, щоб у неї можна було вписати і навколо неї описати коло?

10.218. Пряма, паралельна основам трапеції, проходить через точку перетину її діагоналей. Знайти довжину відрізка цієї прямої, що міститься між бічними сторонами трапеції, якщо основи трапеції дорівнюють 4 і 12 см.

10.219. У колі радіуса R проведено дві перпендикулярні хорди AB і CD, що перетинаються. Довести, що $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

10.220. Показати, що сума відстаней від будь-якої точки, взятої на стороні правильного трикутника, до двох інших його сторін є величина стала.

10.221. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 і 8 см. Медіани, проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні. Знайти третю сторону трикутника.

10.222. Кола радіусів R і r дотикаються одне до одного зовні. Бічні сторони рівнобедреного трикутника є їхніми спільними дотичними, а основа дотикається до більшого з кіл. Знайти основу трикутника.

10.223. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 60 см. Знайти його сторони, якщо висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см.

10.224. Дано рівнобедрений трикутник з основою 12 см і бічною стороною 18 см. Відрізки якої довжини треба відкласти від вершини трикутника на його бічних сторонах, щоб, сполучивши їхні кінці, дістати трапецію з периметром, що дорівнює 40 см?

10.225. Два кола різних радіусів дотикаються одне до одного зовні. Знайти кут, що утворюється хордами, які сполучають точку дотику кіл з точками дотику їхньої спільної зовнішньої дотичної.

10.226. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить гіпотенузу у відношенні 2 : 3. Знайти сторони трикутника, якщо центр вписаного кола віддалений від вершини прямого кута на відстань $\sqrt{8}$ см.

10.227. Усередині рівностороннього трикутника взято точку M на відстанях b, c, d від його сторін. Знайти висоту трикутника.

10.228. Один кінець діаметра півкола збігається з вершиною кута при основі рівнобедреного трикутника, а інший лежить на цій основі. Знайти радіус півкола, якщо воно дотикається до однієї бічної сторони і ділить іншу на відрізки, що дорівнюють 5 і 4 см, починаючи від основи.

10.229. У трикутник вписано паралелограм із сторонами 3 і 5 см і діагоналлю, що дорівнює 6 см. Знайти сторони трикутника, коли відомо, що діагоналі паралелограма паралельні бічним сторонам трикутника, а менша з його сторін лежить на основі трикутника.

10.230. Висота, основа і сума бічних сторін трикутника дорівнюють відповідно 24, 28 і 56 см. Знайти бічні сторони.

10.231. У прямокутну трапецію вписано коло радіуса r. Знайти сторони трапеції, якщо її менша основа дорівнює $4r/3$.

10.232. У трикутник з бічними сторонами 9 і 15 см вписано паралелограм так, що одна з його сторін дорівнює 6 см і лежить на основі трикутника, а діагоналі паралелограма паралельні бічним сторонам трикутника. Знайти іншу сторону паралелограма і основу трикутника.

10.233. Знайти середню лінію рівнобічної трапеції з висотою h, якщо бічну сторону видно з центра описаного кола під кутом $120°$.

10.234. Коло радіуса 13 см дотикається до двох суміжних сторін квадрата з стороною 18 см. На які два відрізки ділить коло кожну з двох інших сторін квадрата?

10.235. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює $72°$, а бісектриса цього кута дорівнює m. Знайти сторони трикутника.

10.236. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює $36°$, а бісектриса кута при основі дорівнює $\sqrt{20}$. Знайти сторони трикутника.

10.237. Діагоналі чотирикутника рівні між собою, а середні лінії дорівнюють p і q. Знайти площу чотирикутника.

10.238. Більша основа трапеції у два рази більша за меншу основу. Через точку перетину діагоналей проведено пряму, паралельну основам. Знайти відношення висоти кожної з двох утворених трапецій до висоти даної трапеції.

10.239. Знайти радіус круга, в сегмент якого, що відтинається хордою, яка дорівнює 6 см, вписано квадрат із стороною 2 см.

10.240. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона 18 см. До бічних сторін трикутника проведено висоти. Знайти відрізок, кінці якого збігаються з основами висот.

10.241. У рівнобедреному трикутнику з бічною стороною, що дорівнює b, проведено бісектриси кутів при основі. Відрізок прямої між точками перетину бісектрис із бічними сторонами дорівнює m. Визначити основу трикутника.

10.242. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8, а бічна сторона 12. Знайти відрізок, що сполучає точки перетину бісектрис кутів при основі з бічними сторонами трикутника.

10.243. Усередині кута $60°$ розміщено точку на відстанях $\sqrt{7}$ і $2\sqrt{7}$ см від сторін кута. Знайти відстань від цієї точки до вершини кута.

10.244. У трикутник вписано коло радіуса 3 см. Знайти сторони трикутника, якщо одну з них розділено точкою дотику на відрізки 4 і 3 см.

10.245. У кут вписано три кола — мале, середнє і більше. Більше коло проходить через центр середнього, а середнє — через центр малого. Визначити радіуси середнього і більшого кіл, якщо радіус меншого дорівнює r і відстань від його центра до вершини кута дорівнює a.

10.246. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців бічної сторони на відстані 8 і 4 см. Знайти середню лінію трапеції.

10.247. Основи двох правильних трикутників із сторонами a і $3a$ лежать на одній і тій самій прямій. Трикутники розміщено по різні боки від прямої і вони не мають спільних точок, а відстань між найближчими кінцями їхніх основ дорівнює $2a$. Знайти відстань між вершинами трикутників, що не належать даній прямій.

10.248. До двох кіл радіусів R і r, що дотикаються зовні, побудовано січну так, що кола відтинають на ній три рівні між собою відрізки. Знайти ці відрізки.

10.249. Довести, що відстань від ортоцентра (точки перетину висот) до вершини трикутника у два рази більша за відстань від центра описаного кола до сторони, протилежної цій вершині.

10.250. На відрізку AB взято точку M, а на відрізках AM і MB по один бік від прямої AB побудовано квадрати, описані кола яких перетинаються в точці N. Довести, що пряма AN проходить через вершину другого квадрата і що трикутник ANB прямокутний.

10.251. У кут, що містить 60°, вписано п'ять кіл так, що кожне наступне коло (починаючи з другого) дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу меншого круга?

10.252. Сторони трикутника відносяться як 5 : 4 : 3. Знайти відношення відрізків сторін, на які вони діляться точкою дотику вписаного кола.

10.253. Для трикутника з сторонами 26, 28 і 30 см знайти добуток радіусів описаного і вписаного кіл.

10.254. У трикутнику ABC проведено медіани AL і BM, що перетинаються в точці K. Вершина C лежить на колі, що проходить через точки K, L, M. Сторона AB дорівнює a. Знайти медіану CN.

10.255. Через точку A кола радіуса 10 см проведено дві взаємно перпендикулярні хорди AB і AC. Обчислити радіус кола, що дотикається до даного кола і до побудованих хорд, якщо $AB = 16$ см.

10.256. Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють $\sqrt{13}$ і $\sqrt{10}$ см. Знайти третю сторону, знаючи, що ця сторона дорівнює проведеній до неї висоті.

10.257. Через точку P діаметра даного кола проведено хорду AB, що утворює з діаметром кут 60°. Обчислити радіус кола, якщо $AP = a$ і $BP = b$.

10.258. Відстані від точки M, що лежить усередині трикутника ABC, до його сторін AC і BC дорівнюють відповідно 2 і 4 см. Обчислити відстань від точки M до прямої AB, якщо $AB = 10$ см, $BC = 17$ см, $AC = 21$ см.

10.259. На відрізку AC, що дорівнює 12 см, взято точку B так, що $AB = 4$ см. На відрізках AB і AC як на діаметрах в одній півплощині з межею AC побудовано півкола. Обчислити радіус кола, що дотикається до побудованих півкіл і до AC.

10.260. Сторона трикутника дорівнює 48 см, а висота, проведена до цієї сторони, дорівнює 9,5 см. Знайти відстань від центра кола, вписаного в трикутник, до вершини, протилежної даній стороні, якщо радіус вписаного кола дорівнює 4 см.

10.261. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) на стороні BC взято точку D так, що $BD : DC = 1 : 4$. В якому відношенні пряма AD ділить висоту BE трикутника ABC, починаючи від вершини B?

10.262. У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює h. Радіус вписаного кола дорівнює r. Знайти гіпотенузу.

10.263. Медіани трикутника дорівнюють 5, $\sqrt{52}$ і $\sqrt{73}$ см. Довести, що трикутник прямокутний.

10.264. Показати, що у всякому прямокутному трикутнику сума півпериметра і радіуса вписаного кола дорівнює сумі катетів.

10.265. Показати, що у всякому прямокутному трикутнику сума діаметрів описаного і вписаного кіл дорівнює сумі його катетів.

10.266. Знайти третю сторону гострокутного трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють a і b і відомо, що медіани цих сторін перетинаються під прямим кутом.

10.267. На відрізку AB взято точку C і на частинах AC і CB відрізка AB як на діаметрах побудовано півкола. Довести, що сума довжин цих півкіл не залежить від положення точки C на відрізку AB.

10.268. Точка C переміщується на відрізку AB, довжина якого l. На відрізках AC і CB як на основах побудовано правильні трикутники по один бік від AB. Де треба взяти точку C, щоб відстань між вершинами трикутників була найменшою?

10.269. Висоти трикутника дорівнюють 12, 15 і 20 см. Довести, що трикутник прямокутний.

10.270. Знайти відношення суми квадратів всіх медіан трикутника до суми квадратів всіх його сторін.

10.271. Знайти площу трикутника, якщо його висоти дорівнюють 12, 15 і 20 см.

10.272. Числа m_1, m_2 і m_3 виражають довжини медіан деякого трикутника. Показати, що коли виконується рівність $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$, то трикутник є прямокутним.

10.273. Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить його на два трикутники, площі яких Q і q. Знайти катети.

10.274. Числа h_1, h_2 і h_3 виражають довжини висот деякого трикутника. Показати, що коли виконується рівність $(h_1/h_2)^2 + (h_1/h_3)^2 = 1$, то трикутник є прямокутним.

10.275. Через точку перетину діагоналей трапеції паралельно основам проведено пряму, що перетинає бічні сторони в точках M і N. Довести, що $MN = 2ab/(a + b)$, де a і b — основи.

10.276. Прямокутний трикутник ABC розділено висотою CD, проведеною до гіпотенузи, на два трикутники BCD і ACD. Радіуси кіл, вписаних у трикутники BCD і ACD, дорівнюють відповідно 4 і 3 см. Знайти відстань між їхніми центрами.

10.277. Знайти бісектрису прямого кута трикутника, у якого катети дорівнюють a і b.

10.278. Дано квадрат, сторона якого дорівнює a. Визначити сторони рівновеликого йому рівнобедреного трикутника, у якого сума основи і висоти, опущеної на основу, дорівнює сумі двох бічних сторін.

10.279. Точки M, N, P, Q є серединами сторін AB, BC, CD і DA ромба $ABCD$. Обчислити площу фігури, що є перетином чотирикутників $ABCD$, $ANCQ$ і $BPDM$, якщо площа ромба дорівнює 100 см^2.

10.280. Визначити кути рівнобедреного трикутника, якщо його площа відноситься до площі квадрата, побудованого на його основі, як $\sqrt{3} : 12$.

10.281. У коло вписано чотирикутник з кутами 120, 90, 60 і 90°. Площа чотирикутника дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2. Знайти радіус кола, якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні.

10.282. У трикутнику ABC проведено пряму DE, паралельно основі AC. Площа трикутника ABC дорівнює 8 кв. од., а площа трикутника DEC дорівнює 2 кв. од. Знайти відношення відрізка DE до основи трикутника ABC.

10.283. Площа прямокутного трикутника дорівнює 24 см^2, а гіпотенуза дорівнює 10 см. Знайти радіус вписаного кола.

10.284. Навколо кола радіуса R описано квадрат і рівносторонній трикутник, причому одна із сторін квадрата лежить на стороні трикутника. Обчислити площу спільної частини трикутника і квадрата.

10.285. У крузі радіуса R по різні боки від центра проведено дві паралельні хорди, одна з яких стягує дугу 60°, а інша 120°. Знайти площу частини круга, що міститься між хордами.

10.286. Два кола радіусів r і $3r$ дотикаються зовні. Знайти площу фігури, що міститься між колами і їхньою спільною зовнішньою дотичною.

10.287. Знайти площу трикутника, вписаного в коло радіуса 2 см, якщо два кути трикутника дорівнюють $\pi/3$ і $\pi/4$.

10.288. Знайти площу трапеції, діагоналі якої дорівнюють 7 і 8 см, а основи 3 і 6 см.

10.289. У ромб із стороною a і гострим кутом 60° вписано коло. Визначити площу чотирикутника, вершинами якого є точки дотику кола з сторонами ромба.

10.290. Два кола радіусів R і r дотикаються зовні. До цих кіл проведено спільну зовнішню дотичну, і в утворений при цьому криволінійний трикутник вписано круг. Знайти його площу.

10.291. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, знаходиться на відстані 1 і 2 см від кінців бічної сторони. Знайти площу трапеції.

10.292. Коло радіуса R розділено на шість рівних між собою дуг, і всередині круга, обмеженого цим колом, через кожні дві сусідні точки поділу проведено рівні між собою дуги такого радіуса, що на даному колі вони взаємно дотикаються. Обчислити площу внутрішньої частини даного круга, що міститься між проведеними дугами.

10.293. У деякий кут вписано коло радіуса R, а хорда, що сполучає точки дотику, дорівнює a. Паралельно цій хорді проведено дві дотичні, внаслідок чого утворилась трапеція. Знайти площу цієї трапеції.

10.294. Два кола радіусів R і r дотикаються зовні. Знайти площу трапеції, обмеженої двома спільними дотичними до цих кіл і прямими, що сполучають точки дотику.

10.295. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 і 8 см. Через середину меншого катета і середину гіпотенузи проведено коло, що дотикається до гіпотенузи. Знайти площу круга, обмеженого цим колом.

10.296. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо дано радіуси R і r описаного навколо нього і вписаного в нього кіл.

10.297. Сторони трикутника відносяться як $m : n : m$. Знайти відношення площі цього трикутника до площі трикутника, вершини якого знаходяться в точках перетину бісектрис даного трикутника з його сторонами.

10.298. Визначити площу сегмента, якщо його периметр дорівнює p, а дуга містить 120°.

10.299. На відрізку AB і на кожній його половині побудовано як на діаметрах півкола (по один бік від AB). Вважаючи, що радіус більшого півкола дорівнює R, знайти суму площ криволінійних трикутників, що утворилися при побудові кола, дотичного до всіх трьох даних півкіл.

10.300. Сторона правильного трикутника дорівнює a. Визначити площу частини трикутника, що лежить зовні круга радіуса $a/3$, центр якого збігається з центром трикутника.

10.301. Знайти відношення площі квадрата, вписаного в сегмент з дугою 180°, до площі квадрата, вписаного в сегмент того самого круга з дугою 90°.

10.302. Площа чотирикутника дорівнює S. Знайти площу паралелограма, сторони якого дорівнюють і паралельні діагоналям чотирикутника.

10.303. У трикутнику ABC проведено медіани BD і CE; M — точка їхнього перетину. Довести, що трикутник BCM рівновеликий чотирикутнику $ADME$.

10.304. Два круги концентричні, причому коло меншого круга ділить більший круг на рівновеликі частини. Довести, що частина кільця, яка міститься між паралельними дотичними до кола меншого радіуса, рівновелика квадрату, вписаному в менший круг.

10.305. Знайти площу круга, обмеженого колом, описаним навколо прямокутного трикутника, катети якого є коренями рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

10.306. Пряма перетинає коло радіуса R у точках A і B таких, що $\smile AB = 45°$, а пряму, яка перпендикулярна до діаметра AM кола і проходить через його центр,— у точці K. Пряма, що проходить через точку B перпендикулярно до діаметра AM, перетинає його в точці C. Знайти площу трапеції $OCBK$.

10.307. Через дві суміжні вершини квадрата проведено коло так, що довжина дотичної до нього, проведеної з третьої вершини, у три рази більша за сторону квадрата. Знайти площу круга, обмеженого цим колом, якщо сторона квадрата дорівнює a.

10.308. Дано квадрат із стороною a. На кожній стороні квадрата зовні його побудовано трапецію так, що верхні основи цих трапецій і їхні бічні сторони утворюють правильний дванадцятикутник. Обчислити його площу.

10.309. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 32 см^2; гострий кут трапеції дорівнює 30°. Визначити сторони трапеції.

10.310. Висота рівнобічної трапеції дорівнює 14 см, а основи дорівнюють 16 і 12 см. Визначити площу круга, обмеженого описаним навколо трапеції колом.

10.311. Діагоналі ромба відносяться як 3 : 4. У скільки разів площа ромба більша за площу вписаного в нього круга?

10.312. У коло радіуса R вписано правильний трикутник, висоти якого продовжено до перетину з колом. Ці точки перетину сполучено між собою, внаслідок чого утворився новий трикутник. Обчислити ту частину площі круга, обмеженого даним колом, яка знаходиться зовні цих трикутників.

10.313. Два кола радіуса R перетинаються так, що кожне з них проходить через центр іншого. Два других кола того самого радіуса мають центри в точках перетину перших двох кіл. Знайти площу, спільну для всіх чотирьох кругів, обмежених цими колами.

10.314. Дано ромб $ABCD$, діагоналі якого дорівнюють 3 і 4 см. Із вершини тупого кута B проведено дві висоти BE і BF. Очислити площу чотирикутника $BFDE$.

10.315. Відношення двох кутів трикутника дорівнює 2, а різниця протилежних цим кутам сторін дорівнює 2 см; третя сторона трикутника дорівнює 5 см. Обчислити площу трикутника.

10.316. У прямокутному трикутнику відстань від середини гіпотенузи до одного із катетів дорівнює 5 см, а відстань від середини цього катета до гіпотенузи дорівнює 4 см.Обчислити площу трикутника.

10.317. У трикутнику ABC відомо: $BC = 15$ см, $AC = 14$ см, $AB = 13$ см. Обчислити площу трикутника, що міститься між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини B.

10.318. Основи трапеції дорівнюють a і b. Знайти відрізок, який паралельний основам і ділить трапецію на рівновеликі частини.

10.319. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, а її площа дорівнює a^2. Визначити висоту трапеції.

10.320. Медіани одного трикутника дорівнюють сторонам іншого трикутника. Знайти відношення площ цих трикутників.

10.321. Медіани трикутника дорівнюють 3, 4 і 5 см. Знайти площу трикутника.

10.322. У колі з центром O проведено хорду AB, яка перетинає діаметр у точці M і утворює з діаметром кут, що дорівнює $60°$. Знайти OM, якщо $AM = 10$ см, а $BM = 4$ см.

10.323. Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює 10 см, а площа дорівнює 48 см^2. Знайти висоту трапеції.

10.324. У трикутник вписано коло. Прямі, що сполучають центр кола з вершинами трикутника, ділять цей трикутник на частини, площі яких дорівнюють 4, 13 і 15 см^2. Знайти сторони трикутника.

10.325. Основа трикутника дорівнює 20 см, медіани бічних сторін дорівнюють 18 і 24 см. Знайти площу трикутника.

10.326. Медіани трикутника дорівнюють 5, 6 і 5 м. Знайти площу трикутника.

10.327. Визначити площу трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 1 і $\sqrt{15}$ см, а медіана третьої сторони дорівнює 2 см.

10.328. Сторони трикутника дорівнюють 3, 4 і 5 см. Визначити площі трикутників, на які розбивається даний трикутник висотою і медіаною, проведеними до більшої по величині сторони.

10.329. Сторони трикутника дорівнюють 13, 14 і 15 см. Визначити площі трикутників, на які розбивається даний трикутник його медіанами.

10.330. Довжини катетів деякого прямокутного трикутника є коренями рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Знайти радіус кола, вписаного в цей трикутник.

10.331. У прямокутнику із сторонами a і b проведено бісектриси всіх кутів до взаємного перетину. Знайти площу чотирикутника, утвореного бісектрисами.

10.332. Визначити сторони прямокутного трикутника, у якого периметр дорівнює $2p$, а площа дорівнює m^2.

10.333. Паралелограм $ABCD$, у якого $AB = 153$ см, $AD = 180$ см, $BE = 135$ см (BE — висота), розділено на три рівновеликі фігури прямими, перпендикулярними до AD. На якій відстані від точки A знаходиться точка перетину цих перпендикулярів з AD?

10.334. Усередині квадрата з стороною a на кожній його стороні як на діаметрі побудовано півколо. Знайти площу розетки, обмеженої дугами півкіл.

10.335. Периметр сектора дорівнює 28 см, а його площа дорівнює 49 см^2. Визначити довжину дуги сектора.

10.336. У рівносторонній трикутник ABC з стороною $a = 2$ см вписано круг; точка A є центром іншого круга з радіусом 1 см. Знайти площу перетину цих кругів.

10.337. Усередині правильного трикутника з стороною a розміщено три однакових кола, кожне з яких дотикається до двох сторін трикутника і до двох інших кіл. Знайти площу частини трикутника, розміщеної зовні цих кіл.

10.338. Криволінійний трикутник утворено трьома рівними попарно дотичними дугами кіл радіуса R. Знайти площу цього трикутника.

10.339. Центр рівностороннього трикутника з стороною, що дорівнює 6 см, збігається з центром кола радіуса 2 см. Визначити площу частини трикутника, що лежить зовні цього кола.

10.340. У ромб вписано коло радіуса R. Знайти площу ромба, якщо його більша діагональ у 4 раза більша за радіус вписаного кола.

10.341. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c. Проекція вершини прямого кута на гіпотенузу ділить її на два відрізки, з яких менший відноситься до більшого, як більший до всієї гіпотенузи. Визначити площу трикутника.

10.342. Сторони і діагоналі паралелограма дорівнюють відповідно a, b, c і f. Знайти кути паралелограма, якщо $a^4 + b^4 = c^2f^2$.

10.343. Визначити площу трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 35 і 14 см, а бісектриса кута між ними дорівнює 12 см.

10.344. Обчислити площу спільної частини двох ромбів, діагоналі першого з яких дорівнюють 4 і 6 см, а другий утворено поворотом першого на 90° навколо його центра.

10.345. Радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює 2 см. Точка дотику цього кола ділить одну з сторін на відрізки, що дорівнюють 4 і 6 см. Визначити форму трикутника і обчислити його площу.

10.346. Круг з центром у точці O розділено діаметром AB на два півкруги. В один із них вписано два нових півкруги, що спираються на OA і OB як на свої діаметри. У криволінійну фігуру, обмежену контурами цих трьох півкругів, вписано круг. У скільки разів його площа менша за площу даного круга?

10.347. Бісектриси кутів A і B трикутника ABC однаково нахилені до сторін BC і AC. Знайти залежність між кутами A і B.

10.348. Опуклий чотирикутник розділено діагоналями на чотири трикутники; площі трьох із них дорівнюють 10, 20 і 30 см², і кожна менша за площу четвертого трикутника. Знайти площу даного чотирикутника.

10.349. Всю дугу кола радіуса R розділено на 4 великі і 4 малі частини, які чергуються одна за одною. Велика частина в два рази довша за малу. Визначити площу восьмикутника, вершинами якого є точки поділу дуги кола.

10.350. На медіані BD трикутника ABC, площа якого дорівнює S, взято точку E так, що $DE = (1/4)\ BD$. Через точку E проведено пряму AE, яка перетинає сторону BC у точці F. Знайти площу трикутника AFC.

10.351. Нехай BD — висота трикутника ABC, точка E — середина BC. Обчислити радіус кола, описаного навколо трикутника BDE, якщо $AB = 30$ см, $BC = 26$ см і $AC = 28$ см.

10.352. Площа рівностороннього трикутника, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, удвоє більша за площу цього прямокутного трикутника. Знайти відношення катетів.

10.353. На кожній медіані трикутника взято точку, яка ділить медіану у відношенні 1 : 3, починаючи від вершини. У скільки разів площа трикутника з вершинами в цих точках менша за площу початкового трикутника?

10.354. Точка M лежить всередині рівностороннього трикутника ABC. Обчислити площу цього трикутника, коли відомо, що $AM = BM = 2$ см, а $CM = 1$ см.

10.355. Рівнобедрений трикутник із сторонами 8, 5 і 5 поділено на три рівновеликі частини перпендикулярами, проведеними з деякої точки до його сторін. Знайти відстань від цієї точки до кожної сторони даного трикутника.

10.356. Довести, що з усіх прямокутників, вписаних в одне і те саме коло, найбільшу площу має квадрат.

10.357. У трапеції $ABCD$ відомо основи $AD = 24$ см, $BC = 8$ см і діагоналі $AC = 13$ см, $BD = 5\sqrt{17}$ см. Обчислити площу трапеції.

10.358. У трапеції $ABCD$ дано основи $AD = a$, $BC = b$. На продовженні BC взято таку точку M, що пряма AM відтинає від площини трапеції 1/4 її частину. Знайти відрізок CM.

10.359. У трапеції $ABCD$ з основами $AD = 12$ см, $BC = 8$ см на промені BC взято таку точку M, що AM ділить трапецію на дві рівновеликі фігури. Знайти CM.

10.360. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, ділить її висоту у відношенні 3 : 4. Знайти основи трапеції, якщо радіус кола дорівнює 10 і її середня лінія дорівнює висоті.

Група В

10.361. У трикутнику ABC кут A удвоє більший за кут B, а сторони, протилежні цим кутам, дорівнюють відповідно 12 і 8 см. Знайти третю сторону трикутника.

10.362. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює m, радіус вписаного кола дорівнює r. Визначити катети. При якому співвідношенні між r і m задача має розв'язок?

10.363. У рівнобедрений трикутник з основою 12 см вписано коло, і до нього проведено три дотичні так, що вони відтинають від даного трикутника три малих трикутнички. Сума периметрів малих трикутничків дорівнює 48 см. Знайти бічну сторону даного трикутника.

10.364. У рівнобедрений трикутник вписано коло. Точки дотику ділять кожну бічну сторону на відрізки, що дорівнюють m і n, починаючи від вершини. До кола проведено три дотичні, паралельні кожній із сторін трикутника. Знайти довжини відрізків дотичних, що містяться між сторонами трикутника.

10.365. Визначити гострі кути прямокутного трикутника, якщо відношення радіусів описаного і вписаного кіл дорівнює $\sqrt{3} + 1$.

10.366. Два кола дотикаються зовні в точці A. Знайти радіуси кіл, якщо хорди, що сполучають точку A з точками дотику однієї із спільних зовнішніх дотичних, дорівнюють 6 і 8 см.

10.367. Сторону правильного десятикутника виразити через радіус R описаного кола.

10.368. Обчислити бісектрису кута A трикутника ABC, сторони якого $a = 18$ см, $b = 15$ см, $c = 12$ см.

10.369. У трикутник, периметр якого дорівнює 20 см, вписано коло. Відрізок дотичної, проведеної до кола паралельно основі, що міститься між сторонами трикутника, дорівнює 2,4 см. Знайти основу трикутника.

10.370. Більша з паралельних сторін трапеції дорівнює a, менша дорівнює b, непаралельні сторони дорівнюють c і d. Знайти площу трапеції.

10.371. Точка C_1 — основа висоти CC_1 трикутника ABC. Знайти залежність між кутами A і B, якщо $CC_1^2 = C_1A \cdot C_1B$.

10.372. Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане навколо нього коло у точці D. Знайти хорду DC, якщо центр кола, вписаного в даний трикутник, віддалений від точки D на відстань n.

10.373. У трикутник із сторонами 6, 10 і 12 см вписано коло. До кола проведено дотичну так, що вона перетинає дві більші сторони трикутника. Знайти периметр трикутника, що відтинається.

10.374. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 4 і 8 см, а її площа 21 см². Яку сторону перетинає бісектриса кута при більшій основі: меншу основу чи бічну сторону трапеції?

10.375. Правильний трикутник ABC, вписаний в коло радіуса R, повернуто навколо центра кола на 90° в положення $A_1B_1C_1$. Обчислити площу шестикутника $AA_1BB_1CC_1$.

10.376. Основи AB і DC трапеції $ABCD$ дорівнюють a і b. Пряма, паралельна AB, перетинає сторони BC і AD в точках M і N. Обчислити MN, якщо трапеції $ABMN$ і $NMCD$ рівновеликі.

10.377. Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, що дорівнюють 4 і 2 см, а висота, проведена до тієї самої сторони, дорівнює $\sqrt{15}$ см. Чому дорівнюють сторони трикутника, коли відомо, що вони виражаються цілими числами?

10.378. Два кола дотикаються одне до одного зовні. Чотири точки дотику їхніх зовнішніх спільних дотичних A, B, C, D послідовно сполучено. Показати, що в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, і знайти його радіус, якщо радіуси даних кіл дорівнюють R і r.

10.379. Висота і медіана трикутника, проведені всередині його з однієї вершини, різні і утворюють однакові кути із сторонами, що виходять з тієї самої вершини. Визначити радіус описаного кола, якщо медіана дорівнює m.

10.380. Через точку D, взяту на стороні AB трикутника ABC, проведено пряму, яка паралельна AC і перетинає сторону BC в точці E. Довести, що AE, CD і медіана, проведена через вершину B, перетинаються в одній точці.

10.381. Висота трикутника, яка дорівнює 2 см, ділить кут трикутника у відношенні 2 : 1, а основу трикутника — на частини, менша з яких дорівнює 1 см. Визначити площу трикутника.

10.382. Дано два концентричні кола. Довести, що сума квадратів відстаней від точки одного кола до кінців діаметра другого кола не залежить ні від вибраної точки, ні від вибраного діаметра.

10.383. У трикутнику ABC проведено медіани AL і BM, що перетинаються у точці K. Вершина C лежить на колі, яке проходить через точки K, L, M. Показати, що медіана CN утворює з сторонами AC і BC такі самі кути, що й медіани AL і BM з стороною AB.

10.384. У трикутнику ABC бісектриси AD і CE перетинаються в точці F. Точки B, D, E, F лежать на одному колі. Показати, що кут B дорівнює 60°.

10.385. Площа трикутника дорівнює S. Кожну сторону трикутника поділено на три частини у відношенні $m : n : m$. Визначити площу шестикутника, вершинами якого є точки поділу.

10.386. Відстані від центра кола, вписаного в прямокутний трикутник, до вершин його гострих кутів дорівнюють $\sqrt{5}$ і $\sqrt{10}$. Знайти катети.

10.387. У трикутнику ABC кожна висота h_c і h_b не менша за сторону, на яку вона опущена. Знайти кути трикутника.

10.388. Сторона BC трикутника ABC дорівнює a; кожна із двох висот, опущених на сторони AB і AC, не менша за сторону, на яку вона опущена. Знайти сторони AB і AC.

10.389. У рівнобедреному трикутнику ABC маємо $AB = BC = 25$ см і $AC = 14$ см. Обчислити радіус кола, що дотикається до BC у точці D (основі висоти AD) і проходить через середину AC.

10.390. У трикутнику ABC із сторонами $a = 14$ см, $b = 15$ см, $c = 13$ см знайти відстань від точки перетину висот до вершини A.

10.391. На відрізку AC дано точку B, причому $AB = 14$ см, $BC = 28$ см. На відрізках AB, BC і AC як на діаметрах побудовано півкола в одній півплощині відносно межі AC. Знайти радіус кола, що дотикається до всіх трьох півкіл.

10.392. У коло радіуса R вписано рівносторонній трикутник і квадрат, що мають спільну вершину. Обчислити площу спільної частини трикутника і квадрата.

10.393. Навколо кола радіуса $R = 1$ см описано рівнобічну трапецію, площа якої дорівнює 5 см^2. Знайти площу чотирикутника, вершинами якого є точки дотику кола і трапеції.

10.394. Усередині трикутника ABC взято довільну точку і через неї проведено три прямі, паралельні сторонам трикутника. Ці прямі ділять трикутник ABC на шість частин, з яких три частини є трикутниками. Площі цих трикутників дорівнюють S_1 S_2 і S_3. Довести, що площа трикутника ABC дорівнює $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

10.395. Центри чотирьох кругів розміщено у вершинах квадрата із стороною a. Радіуси цих кругів дорівнюють a. Визначити площу їхньої спільної частини.

10.396. У коло радіуса R вписано три рівні між собою кола, що дотикаються зовні до кола і попарно одне до одного. Обчислити площу фігури, обмеженої цими трьома колами.

10.397. У коло радіуса R вписано шість рівних між собою кіл, кожне з яких дотикається до даного кола і до двох суміжних з ним. Обчислити площу фігури, обмеженої цими шістьома колами.

10.398. У коло радіуса R вписано чотири рівні між собою кола, кожне з яких дотикається до даного кола і до двох суміжних. Обчислити площу фігури, обмеженої цими чотирма колами.

10.399. Сторона правильного трикутника дорівнює a. Із його центра описано коло радіуса $a/3$. Обчислити площу частини трикутника, що лежить зовні кола.

10.400. Обчислити площу трикутника за двома сторонами a і b і за бісектрисою l кута між ними.

10.401. Знайти радіус круга, якщо площа круга на Q кв. од. більша за площу вписаного в нього правильного дванадцятикутника.

10.402. Коло радіуса R з центром у точці O розділено точками A, B, C, D, E, F на шість рівних між собою частин. Визначити площу фігури COE, обмеженої дугою OC з центром у точці B, дугою OE з центром у точці F і дугою CE з центром у точці A.

10.403. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено висоту CD. Радіуси кіл, вписаних в трикутники ACD і BCD дорівнюють 0,6 і 0,8 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник ABC.

10.404. Площа трикутника ABC дорівнює S_1; площа трикутника AOB, де O — точка перетину висот, дорівнює S_2. На прямій CO взято таку точку K, що трикутник ABK — прямокутний. Довести, що площа трикутника ABK є середнім геометричним між S_1 і S_2.

10.405. У рівносторонній трикутник із стороною a вписано коло. До кола проведено дотичну так, що відрізок її всередині трикутника дорівнює b. Знайти площу трикутника, що відтинається цією дотичною від даного.

10.406. Основи висот гострокутного трикутника ABC є вершинами другого трикутника, периметр якого дорівнює $2p$. Знайти площу трикутника ABC, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює R.

10.407. Сторони трикутника ABC розділено точками M, N і P так, що $AM : MB = BN : NC = CP : PA = 1 : 4$. Знайти відношення площі трикутника, обмеженого прямими AN, BP і CM, до площі трикутника ABC.

10.408. Навколо трикутника радіуса 5 см описано рівнобічну трапецію. Відстань між точками дотику її бічних сторін дорівнює 8 см. Знайти площу трапеції.

10.409. Трикутник із сторонами 13, 14 і 15 см розділено на три рівновеликі частини прямими, перпендикулярними до більшої сторони. Знайти відстань до цих прямих від найближчих до них вершин трикутника, що знаходяться на більшій стороні.

10.410. У трапецію, в якій менша основа дорівнює a, вписано коло. Одна з бічних сторін трапеції ділиться точкою дотику на відрізки, що дорівнюють m і n, починаючи від більшої основи. Визначити площу трапеції.

10.411. Дано два правильні трикутники площею S, з яких другий утворено поворотом першого трикутника навколо його центра на кут $30°$. Обчислити площу перетину цих трикутників.

10.412. Площа прямокутного трикутника дорівнює $2r^2/3$, де r — радіус кола, що дотикається до одного катета і до продовжень другого катета і гіпотенузи. Знайти сторони трикутника.

10.413. Діагоналі трапеції розбивають її на чотири трикутники. Довести, що коли площі двох із них, які прилягають до основ трапеції, дорівнюють p^2 і q^2, то площа трапеції дорівнює $(p+q)^2$.

10.414. У чотирикутнику $ABCD$ через середину діагоналі BD проведено пряму, паралельну діагоналі AC. Ця пряма перетинає сторону AD у точці E. Довести, що відрізок CE ділить чотирикутник $ABCD$ на рівновеликі частини.

10.415. Пряма, паралельна основам даної прямокутної трапеції, розбиває її на дві трапеції, в кожну з яких можна вписати коло. Знайти основи початкової трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють c і d, причому $c < d$.

10.416. Визначити площу трикутника за його трьома висотами h_1, h_2, h_3.

10.417. У прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано коло, що дотикається до його сторін у точках A_1, B_1, C_1. Знайти відношення площі трикутника ABC до площі трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $AC = 4$ см, $BC = 3$ см.

10.418. У коло вписано чотирикутник, сторони якого дорівнюють a, b, c і d. Обчислити відношення діагоналей цього чотирикутника.

10.419. Круг з центром на стороні AB трикутника ABC дотикається до двох інших його сторін. Знайти площу круга, якщо $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см, де a, b і c — сторони трикутника.

10.420. У трикутник з основою, що дорівнює a, вписано квадрат, одна із сторін якого лежить на основі трикутника. Площа квадрата дорівнює $1/6$ частині площі трикутника. Визначити висоту трикутника і сторону квадрата.

10.421. Висота трикутника, що дорівнює 2 см, ділить кут трикутника у відношенні $2:1$, а основу трикутника на частини, менша з яких дорівнює 1 см. Знайти площу цього трикутника.

10.422. У прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута відтинає на гіпотенузі відрізки, що дорівнюють a і b. Знайти площу квадрата, стороною якого є ця бісектриса.

10.423. Навколо кола радіуса $R = 1$ см описано рівнобічну трапецію, площа якої дорівнює 5 см^2. Знайти площу чотирикутника, вершинами якого є точки дотику кола і трапеції.

10.424. Із кожної вершини, що належать основі рівностороннього трикутника з стороною a, проведено у внутрішню область трикутника по два промені, що утворюють з основою трикутника кути 15 і $30°$. Знайти площу чотирикутника, вершинами якого є точки перетину побудованих променів.

10.425. Через точку M, що лежить на діаметрі кола радіуса 4 см, проведено хорду AB, яка утворює з діаметром кут 30°. Через точку B проведено хорду BC, перпендикулярну до даного діаметра. Знайти площу трикутника ABC, якщо $AM : MB = 2 : 3$.

Глава 11

ЗАДАЧІ ІЗ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Основні формули

1°. Довільна призма (l — бічне ребро; P — периметр основи; S — площа основи; H — висота; $P_{\text{пер}}$ — периметр перпендикулярного перерізу; $S_{\text{біч}}$ — площа бічної поверхні; V — об'ем):

$$S_{\text{біч}} = P_{\text{пер}} l; \quad (11.1) \qquad V = SH. \quad (11.2)$$

2°. Пряма призма:

$$S_{\text{біч}} = Pl. \quad (11.3)$$

3°. Прямокутний паралелепіпед (a, b, c — його виміри; d — діагональ):

$$S_{\text{біч}} = PH; \quad (11.4) \qquad V = abc; \quad (11.5)$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \quad (11.6)$$

4°. Куб (a — ребро):

$$V = a^3; \quad (11.7) \qquad d = a\sqrt{3}. \quad (11.8)$$

5°. Довільна піраміда (S — площа основи; H — висота; V — об'єм):

$$V = \frac{1}{3} SH. \quad (11.9)$$

6°. Правильна піраміда (P — периметр основи; l — апофема; $S_{\text{біч}}$ — площа бічної поверхні):

$$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} Pl; \quad (11.10) \qquad V = \frac{1}{3} SH. \quad (11.11)$$

7°. Довільна зрізана піраміда (S_1 і S_2 — площі основ; h — висота; V — об'єм):

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}). \quad (11.12)$$

8°. Правильна зрізана піраміда (P_1 і P_2 — периметри основ; l — апофема; $S_{\text{біч}}$ — площа бічної поверхні):

$$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) l. \quad (11.13)$$

9°. Циліндр (R — радіус основи; H — висота; $S_{\text{біч}}$ — площа бічної поверхні; V — об'єм):

$$S_{\text{біч}} = 2\pi RH; \quad (11.14) \qquad V = \pi R^2 H. \quad (11.15)$$

10°. Конус (R — радіус основи; H — висота; l — твірна; $S_{біч}$ — площа бічної поверхні; V — об'єм):

$$S_{біч} = \pi R l; \quad (11.16) \qquad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \quad (11.17)$$

11°. Куля, сфера (R — радіус кулі; S — площа сферичної поверхні; V — об'єм):

$$S = 4\pi R^2; \quad (11.18) \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (11.19)$$

12°. Кульовий сегмент (R — радіус кулі; h — висота сегмента; S — площа сферичної поверхні сегмента; V — об'єм):

$$S = 2\pi R h; \quad (11.20) \qquad V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right). \quad (11.21)$$

13°. Кульовий сектор (R — радіус кулі; h — висота сегмента; V — об'єм):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h. \quad (11.22)$$

Додаткові співвідношення між елементами призми і піраміди

1°. Нехай для піраміди виконується одна з таких двох умов: а) усі бічні ребра утворюють з площиною основи однакові кути; б) усі бічні ребра рівні між собою. Тоді вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди (ця сама точка є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін основи піраміди).

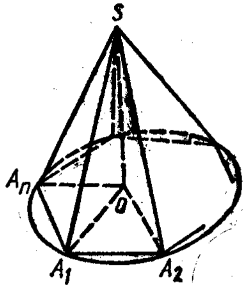


Рис. 11.1

◻ Нехай O — основа висоти n-кутної піраміди $SA_1A_2...A_n$ (рис. 11.1); SA_1, SA_2, ..., SA_n — її бічні ребра; OA_1, OA_2, ..., OA_n — їхні проекції на площину основи; SA_1O, SA_2O, ..., SA_nO — кути, що утворюються ребрами піраміди з площиною основи. Згідно з умовою а), ці кути рівні між собою; тому рівними будуть і прямокутні трикутники SOA_1, SOA_2, ..., SOA_n, які мають спільний катет SO. Звідси випливає, що $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$, тобто точка O рівновіддалена від вершин A_1, A_2, ..., A_n основи і, отже, є центром описаного навколо неї кола.

Якщо умову а) замінити умовою б), то рівність трикутників SOA_1, SOA_2, ..., SOA_n випливає з того, що, крім спільного катета, вони мають однакові гіпотенузи $SA_1 = SA_2 = \ldots = SA_n$. Таким чином, $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$, тобто O — центр кола, описаного навколо основи піраміди. ■

2°. Нехай для піраміди виконується одна з таких двох умов: а) усі бічні грані утворюють з основою однакові кути; б) усі апофеми бічних граней рівні між собою. Тоді вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу піраміди (ця сама точка є точкою перетину бісектрис кутів в основі піраміди).

□ Нехай O — основа висоти n-кутної піраміди $SA_1A_2...A_n$ (рис. 11.2); $SB_1, SB_2, ..., SB_n$ — апофеми (висоти бічних граней). Проекції апофем $OB_1, OB_2, ..., OB_n$ на площину основи перпендикулярні до сторін основи (за теоремою про три перпендикуляри) і, отже, є відстанями від точки O до цих сторін, а кути $SB_1O, SB_2O, ..., SB_nO$ є лінійними кутами відповідних двогранних кутів. Згідно з умовою а), ці кути рівні між собою, тому рівні і прямокутні трикутники SOB_1, $SOB_2, ..., SOB_n$, що мають спільний катет SO. Звідси випливає, що $OB_1 = OB_2 = ... = OB_n$, тобто точка O рівновіддалена від сторін основи і, отже, є центром вписаного в неї кола.

Якщо умову а) замінити умовою б), то рівність трикутників SOB_1, $SOB_2, ..., SOB_n$ випливає з того, що вони, крім спільного катета SO,

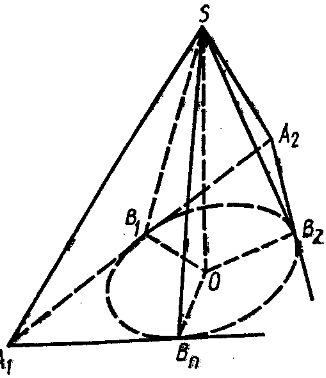


Рис. 11.2

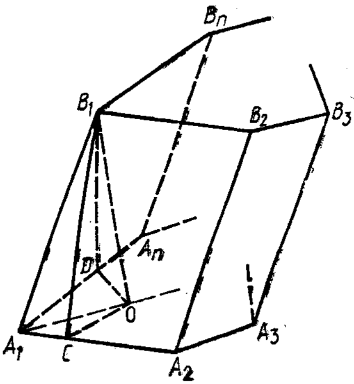


Рис. 11.3

мають однакові гіпотенузи $SB_1 = SB_2 = ... = SB_n$. Таким чином, $OB_1 = OB_2 = ... = OB_n$, тобто O — центр кола, вписаного в основу піраміди. ■

3⁰. Якщо в похилій призмі бічне ребро A_1B_1 утворює однакові кути із сторонами основи, що виходять з вершини A_1 (рис. 11.3), то основа O висоти B_1O лежить на бісектрисі кута A_1.

□ Побудуємо $OC \perp A_1A_2$, $OD \perp A_1A_n$ і відрізки B_1C, B_1D. Згідно з теоремою про три перпендикуляри, маємо $B_1C \perp A_1A_2$ і $B_1D \perp A_1A_n$. Прямокутні трикутники A_1CB_1 і A_1DB_1 рівні, оскільки мають спільну гіпотенузу A_1B_1 і однакові кути ($\angle B_1A_1C = \angle B_1A_1D$ за умовою). Отже, $B_1C = B_1D$ і $\Delta B_1OC = \Delta B_1OD$, звідки $OC = OD$. Таким чином, точка O рівновіддалена від сторін кута A_1 і, отже, лежить на бісектрисі A_1O кута A_1. ■

Це саме твердження можна сформулювати так: якщо в тригранному куті два гострих плоских кути рівні між собою, то проекція їхнього спільного ребра на площину третього плоского кута є його бісектрисою.

4⁰. Якщо висота трикутної піраміди проходить через точку перетину висот трикутника, що лежить в основі, то протилежні ребра піраміди перпендикулярні. Справедливе й обернене твердження.

□ Нехай AD — висота трикутника ABC (рис. 11.4); тоді $BC \perp AD$ і, отже, $BC \perp AO$. Проте AO є проекцією ребра AS на площину ABC і, отже, за теоремою про три перпендикуляри $BC \perp AS$.

Аналогічно доводиться, що перпендикулярні і дві інші пари протилежних ребер піраміди, тобто $AB \perp SC$ і $AC \perp SB$.

Доведемо тепер обернене твердження, тобто що коли $BC \perp AS$, то основою O висоти піраміди є точка перетину висот трикутника ABC (рис. 11.4). Оскільки $SO \perp$ пл. ABC (за умовою), то AO є проекцією AS на площину ABC. Але пряма BC, що належить площині ABC, перпендикулярна до ребра AO (за умовою), тому $BC \perp AO$ (згідно з теоремою про три перпендикуляри). Отже, точка O лежить на висоті AD трикутника ABC. Аналогічно доводиться, що точка O лежить і на другій висоті трикутника ABC і, отже, є точкою перетину висот основи піраміди. ■

5^0. Якщо SO — висота піраміди $SABC$ і $SA \perp BC$, то пл. $SAO \perp$ $\perp BC$ (рис. 11.4).

□ Маємо $SA \perp BC$ (за умовою) і $SO \perp BC$ (так як $SO \perp$ $\perp$ пл. ABC). Оскільки пряма BC перпендикулярна до кожної з двох прямих SA і SO, що лежать в площині SAO, то пл. $SAO \perp BC$ (згідно з ознакою перпендикулярності прямої і площини). ■

Приклад 1. Через медіану BE основи ABC піраміди $ABCD$ і середину F ребра DC проведено площину. Знайти об'єм фігури $ADBFE$, якщо об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює 40 см^3.

△ Об'єм фігури $ADBFE$ дорівнює різниці об'ємів пірамід $ABCD$ і $ECBF$ (рис. 11.5). Щоб знайти об'єм піраміди $ECBF$, порівняємо його з об'ємом піраміди $ABCD$. Для цього достатньо знайти відношення площ їхніх основ і відповідних висот. Оскільки медіана трикутника

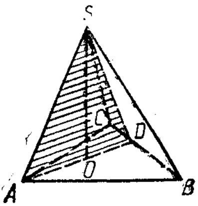


Рис. 11.4

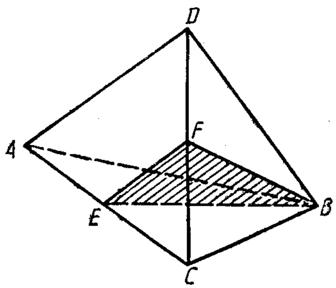


Рис. 11.5

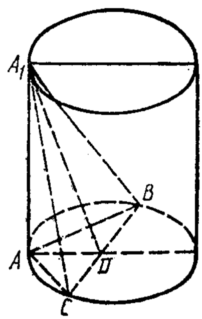


Рис. 11.6

ділить його площину на дві рівні частини, то $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$. Далі, так як F — середина ребра DC, то висота піраміди $ECBF$ дорівнює половині висоти піраміди $ABCD$. Отже, $V_{ECBF} = \frac{1}{4} V_{ABCD} =$ $= 10$ см^3. Шуканий об'єм дорівнює 30 см^3. ▲

Приклад 2. Висота циліндра дорівнює H, радіус його основи дорівнює R. У циліндр поміщено піраміду, висота якої збігається з твірною AA_1 циліндра, а основою є рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$), вписаний в основу циліндра. Знайти площу бічної поверхні піраміди, якщо $\angle A = 120°$.

△ Проведемо $AD \perp BC$ і сполучимо точки A_1 і D відрізком A_1D (рис. 11.6). Згідно з теоремою про три перпендикуляри, маємо $A_1D \perp$ $\perp BC$. Оскільки дуга CAB містить 120°, а дуги AC і AB — по 60°,

то $BC = R\sqrt{3}$, $AB = R$. Із трикутника ABD маємо $AD = R/2$. Застосовуючи теорему Піфагора до трикутника AA_1D, дістаємо $A_1D =$
$= \sqrt{H^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + 4H^2}$. Отже,

$$S_{\triangle A_1AB} = \frac{1}{2} AB \cdot AA_1 = \frac{1}{2} RH,$$

$$S_{\triangle A_1BC} = \frac{1}{2} BC \cdot A_1D = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + 4H^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{3R^2 + 12H^2}.$$

Остаточно дістаємо

$$S_{\text{біч}} = 2S_{\triangle A_1AB} + S_{\triangle A_1BC} = RH + \frac{1}{4} R\sqrt{3R^2 + 12H^2} =$$

$$= \frac{R}{4}\left(4H + \sqrt{3R^2 + 12H^2}\right). \blacktriangle$$

Приклад 3. Основою піраміди є правильний трикутник із стороною, що дорівнює a. Одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи і дорівнює b. Знайти радіус сфери, описаної навколо піраміди.

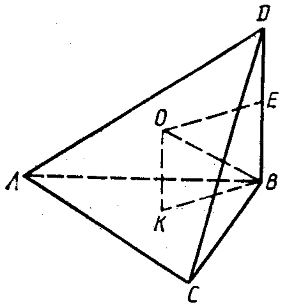


Рис. 11.7

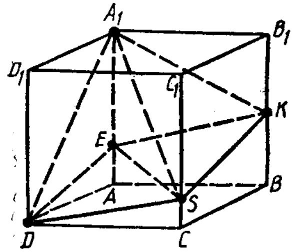


Рис. 11.8

$\triangle$ Нехай O — центр сфери, описаної навколо піраміди $ABCD$ (рис. 11.7). Тоді $OA = OB = OC = OD$. Проведемо $OK \perp$ пл. ABC і $OE \perp DB$. Оскільки точка O рівновіддалена від вершин трикутника ABC, то точка K є центром трикутника і $BK = a/\sqrt{3}$. Далі, так як $OB = OD$, то $EB = ED = b/2$. За теоремою Піфагора з трикутника OKB маємо

$$OB = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{12a^2 + 9b^2}}{6}. \blacktriangle$$

Приклад 4. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює a. На ребрі AA_1 взято точку E так, що $AE = a/4$. Знайти об'єм піраміди, вершиною якої є точка A, а основою — переріз куба, що проходить через точки D, E і довільну внутрішню точку ребра BB_1.

$\triangle$ Побудувавши перетин (рис. 11.8), дістанемо на ребрі CC_1 точку S, яка є спільною вершиною двох трикутних пірамід SEA_1K і SEA_1D, сума об'ємів яких дорівнює об'єму чотирикутної піраміди A_1EKSD.

Маємо $S_{\triangle A_1DE} = \frac{1}{2} A_1E \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a = \frac{3a^2}{8}$. Відстань від точки S до площини A_1ED дорівнює a, тому $V_{SEA_1D} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{8} \times \times a = \frac{a^3}{8}$. Аналогічно знаходимо $V_{SEA_1K} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a\right) \cdot a = = \frac{a^3}{8}$. Отже, шуканий об'єм дорівнює $\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{8} = \frac{a^3}{4}$. $\blacktriangle$

Група А

11.001. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою, що дорівнює c, і гострим кутом 30°. Бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайти об'єм піраміди.

11.002. Обчислити об'єм правильного тетраедра, якщо радіус кола, описаного навколо його грані, дорівнює R.

11.003. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, двогранний кут при основі дорівнює 45°. Визначити об'єм і повну поверхню піраміди.

11.004. Визначити об'єм похилої трикутної призми, у якої площа однієї з бічних граней дорівнює S, а відстань від площини цієї грані до протилежного ребра дорівнює d.

11.005. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює 90°. Знайти відношення бічної поверхні піраміди до площі її основи.

11.006. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 13 см, а діагоналі його бічних граней дорівнюють $4\sqrt{10}$ і $3\sqrt{17}$ см. Визначити об'єм паралелепіпеда.

11.007. Знайти відношення об'єму куба до об'єму правильного тетраедра, ребро якого дорівнює діагоналі грані куба.

11.008. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють a і b, гострий кут між ними дорівнює 60°. Більша діагональ основи дорівнює меншій діагоналі паралелепіпеда. Знайти об'єм паралелепіпеда.

11.009. Центр верхньої основи правильної чотирикутної призми і середини сторін нижньої основи є вершинами вписаної в призму піраміди, об'єм якої дорівнює V. Знайти об'єм призми.

11.010. У кубі, ребро якого дорівнює a, центр верхньої грані сполучено з вершинами основи. Знайти повну поверхню утвореної піраміди.

11.011. Основою правильної піраміди є многокутник, сума внутрішніх кутів якого дорівнює 720°. Визначити об'єм піраміди, якщо її бічне ребро, що дорівнює l, утворює з висотою піраміди кут 30°.

11.012. Діагональ квадрата, що лежить в основі правильної чотирикутної піраміди, дорівнює її бічному ребру і дорівнює a. Знайти повну поверхню піраміди і її об'єм.

11.013. Центр верхньої основи куба з ребром, що дорівнює a, сполучено з серединами сторін нижньої основи, які також сполучено в послідовному порядку. Обчислити повну поверхню утвореної піраміди.

11.014. Апофема правильної шестикутної піраміди дорівнює h, а двогранний кут при основі дорівнює 60°. Знайти повну поверхню піраміди.

11.015. Знайти повну поверхню правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює a, а двогранний кут при основі дорівнює 60°.

11.016. Основа чотирикутної піраміди — прямокутник з діагоналлю, що дорівнює b і кутом 60° між діагоналями. Кожне з бічних ребер утворює з площиною основи кут 45°. Знайти об'єм піраміди.

11.017. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 1 см, а її бічна поверхня дорівнює 3 см^2. Знайти об'єм піраміди.

11.018. Основою піраміди є трикутник із сторонами, що дорівнюють a, a і b. Всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60°. Визначити об'єм піраміди.

11.019. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює l, а висота дорівнює h. Визначити об'єм піраміди.

11.020. В основі похилої призми лежить паралелограм із сторонами 3 і 6 дм і гострим кутом 45°. Бічне ребро призми дорівнює 4 дм і нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайти об'єм призми.

11.021. Кожне з бічних ребер піраміди дорівнює 269/32 см. Основа піраміди — трикутник із сторонами 13, 14 і 15 см. Знайти об'єм піраміди.

11.022. Визначити об'єм правильної чотирикутної призми, якщо її діагональ утворює з площиною бічної грані кут 30°, а сторона основи дорівнює a.

11.023. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює 6 дм, а висота 4 дм. Знайти бічну поверхню зрізаної піраміди, що відтинається від даної площиною, яка паралельна її основі і знаходиться на відстані 1 дм від неї.

11.024. Основами правильної зрізаної піраміди є квадрати із сторонами a і b $(a > b)$. Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°. Визначити об'єм зрізаної піраміди.

11.025. Бічні ребра правильної зрізаної трикутної піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Сторони нижньої і верхньої основ дорівнюють відповідно a і b $(a > b)$. Знайти об'єм зрізаної піраміди.

11.026. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площина, проведена через одну із сторін нижньої основи і протилежну сторону верхньої основи утворює з площиною основи кут 45°. Проведений перетин має площу, що дорівнює Q. Визначити бічну поверхню паралелепіпеда.

11.027. Визначити об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°, а площа діагонального перерізу дорівнює S.

11.028. Основою піраміди є ромб з гострим кутом 30°. Бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60°. Визначити об'єм і повну поверхню піраміди, якщо радіус вписаного в ромб кола дорівнює r.

11.029. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, бічна грань нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайти об'єм і повну поверхню піраміди.

11.030. В основі прямого паралелепіпеда лежить паралелограм із сторонами 1 і 4 см і гострим кутом 60°. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 5 см. Обчислити його об'єм.

11.031. Центр куба, ребро якого дорівнює a, сполучено з усіма його вершинами. Визначити об'єм і повну поверхню кожної з утворених пірамід.

11.032. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою 6 см і висотою 9 см. Кожне бічне ребро дорівнює 13 см. Обчислити об'єм піраміди.

11.033. У трикутній піраміді бічні ребра взаємно перпендикулярні і мають довжину $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$ і $\sqrt{126}$ см. Знайти об'єм і площу основи піраміди.

11.034. Визначити об'єм правильної шестикутної призми, у якої найбільша діагональ дорівнює d, а бічні грані — квадрати.

11.035. Знайти об'єм куба, якщо відстань від його діагоналі до неперетинного з нею ребра дорівнює d.

11.036. Визначити об'єм октаедра (правильного восьмигранника), ребро якого дорівнює a.

11.037. Основа призми — квадрат із стороною, що дорівнює a. Одна з бічних граней — також квадрат, інша — ромб з кутом 60°. Визначити повну поверхню призми.

11.038. Основою паралелепіпеда є квадрат. Одна з вершин верхньої основи однаково віддалена від усіх вершин нижньої основи і віддалена від площини цієї основи на відстань, що дорівнює b. Сторона основи дорівнює a. Визначити повну поверхню паралелепіпеда.

11.039. У кубі центри основ сполучено з центрами бічних граней. Обчислити поверхню утвореного октаедра, якщо ребро куба дорівнює a.

11.040. Основою піраміди є трикутник із сторонами 6, 5 і 5 см. Бічні грані піраміди утворюють з її основою однакові двогранні кути, що містять по 45°. Визначити об'єм піраміди.

11.041. Визначити об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого дорівнює l і утворює з однією гранню кут 30°, а з іншою 45°.

11.042. Визначити об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, якщо її діагональ дорівнює 18 см, а сторони основ 14 і 10 см.

11.043. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює Q. Площі діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2. Визначити об'єм паралелепіпеда.

11.044. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює l і нахилене до площини основи під кутом 60°. Знайти об'єм піраміди.

11.045. Найбільша діагональ правильної шестикутної призми дорівнює d і утворює з бічним ребром призми кут 30°. Знайти об'єм призми.

11.046. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a і b. Діагональ паралелепіпеда нахилена до бічної грані, що містить сторону основи, яка дорівнює b, під кутом 30°. Знайти об'єм паралелепіпеда.

11.047. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a і b. Діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 60°. Визначити бічну поверхню паралелепіпеда.

11.048. Знайти об'єм похилої трикутної призми, основою якої є рівносторонній трикутник із стороною, що дорівнює a, якщо бічне ребро призми дорівнює стороні основи і нахилене до площини основи під кутом 60°.

11.049. Знайти об'єм правильної трикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює a і бічна поверхня рівновелика сумі площ основ.

11.050. Знайти бічну поверхню правильної шестикутної піраміди, висота якої дорівнює h, а бічне ребро дорівнює l.

11.051. Знайти об'єм правильної трикутної піраміди, в якій плоский кут при вершині дорівнює 90°, а сторона основи дорівнює 3 см.

11.052. У правильній трикутній призмі площа перерізу, який проходить через бічне ребро перпендикулярно до протилежної бічної грані, дорівнює Q. Сторона основи призми дорівнює a. Знайти повну поверхню призми.

11.053. Висота правильного тетраедра дорівнює h. Обчислити його повну поверхню.

11.054. Кожне з бічних ребер піраміди дорівнює b. Її основою є прямокутний трикутник, катети якого відносяться як $m:n$, а гіпотенуза дорівнює c. Обчислити об'єм піраміди.

11.055. Центр верхньої основи куба сполучено з серединами сторін нижньої основи. Визначити бічну поверхню утвореної піраміди, якщо ребро куба дорівнює a.

11.056. Основою прямої призми є ромб. Площі діагональних перерізів цієї призми дорівнюють P і Q. Знайти бічну поверхню призми.

11.057. Визначити об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює d, а довжини ребер відносяться як $m:n:p$.

11.058. Визначити об'єм правильної трикутної піраміди, якщо висота трикутника, який лежить в її основі, дорівнює h, а апофема піраміди дорівнює m.

11.059. Площі бічних граней прямої трикутної призми дорівнюють M, N та P. Бічне ребро її дорівнює l. Визначити об'єм призми.

11.060. Відомо площу основи P і об'єм V правильної чотирикутної призми. Обчислити її повну поверхню.

11.061. Знайти бічну поверхню правильної трикутної призми з висотою h, коли пряма, що проходить через центр верхньої основи і середину сторони нижньої основи, нахилена до площини основи під кутом 60°.

11.062. В основі піраміди лежить квадрат. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 45°. Середнє за величиною бічне ребро дорівнює l. Знайти об'єм і повну поверхню піраміди.

11.063. Знайти об'єм і повну поверхню правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює a, а кут нахилу бічної грані до площини основи дорівнює 60°.

11.064. Знайти об'єм правильної трикутної піраміди, висота якої дорівнює h, а всі плоскі кути при вершині прямі.

11.065. Знайти бічну поверхню правильної трикутної піраміди, якщо плоский кут при її вершині дорівнює 90°, а площа основи дорівнює S.

11.066. Знайти об'єм правильного тетраедра, якщо ребро його дорівнює a.

11.067. Правильна шестикутна призма, бічні ребра якої дорівнюють по 3 см, розрізана діагональною площиною на дві рівні чотирикутні призми. Визначити об'єм шестикутної призми, якщо бічна поверхня чотирикутної призми дорівнює 30 см².

11.068. За стороною основи, що дорівнює a, визначити бічну поверхню і об'єм правильної чотирикутної піраміди, у якої діагональний переріз рівновеликий основі.

11.069. Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює висоті основи, а площа перерізу, який проведено через це бічне ребро і висоту основи, дорівнює Q. Визначити об'єм призми.

11.070. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють a та b і утворюють кут 30°. Бічна поверхня дорівнює S. Визначити об'єм паралелепіпеда.

11.071. Знайти відношення об'єму правильної шестикутної піраміди до об'єму правильної трикутної піраміди за умови, що сторони основ цих пірамід рівні між собою, а їхні апофеми вдвічі більші за сторони основ.

11.072. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться як $m : n$, а діагональний переріз являє собою квадрат з площею Q. Визначити об'єм паралелепіпеда.

11.073. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2, 3 і 6 см. Знайти довжину ребра такого куба, щоб об'єми цих тіл відносились, як їхні поверхні.

11.074. Висота піраміди дорівнює 8 м. На відстані 3 м від вершини проведено площину, паралельну основі. Площа утвореного перерізу дорівнює 4 м^2. Знайти об'єм піраміди.

11.075. Довести, що об'єм конуса дорівнює об'єму циліндра з тією самою основою і тією самою висотою мінус добуток бічної поверхні цього циліндра на 1/3 радіуса його основи.

11.076. Висота конуса дорівнює діаметру його основи. Знайти відношення площі його основи до бічної поверхні.

11.077. Виразити об'єм конуса через його бічну поверхню S і відстань r від центра основи до твірної.

11.078. Циліндр утворено обертанням прямокутника навколо однієї з його сторін. Виразити об'єм V циліндра через площу S цього прямокутника і довжину C кола, яке описує точка перетину його діагоналей.

11.079. Довести, що коли два різних конуси мають спільну висоту і паралельні основи, то об'єм їхньої спільної частини становить 1/4 об'єму кожного з них.

11.080. На основах циліндра з квадратним осьовим перерізом побудовано два конуси з вершинами, розміщеними на середині осі (циліндра). Знайти суму повних поверхонь і суму об'ємів конусів, якщо висота циліндра дорівнює $2a$.

11.081. Навколо конуса з радіусом основи R описано довільну піраміду, периметр основи якої дорівнює $2p$. Визначити відношення об'ємів і відношення бічних поверхонь конуса та піраміди.

11.082. Висота конуса і його твірна дорівнюють відповідно 4 та 5 см. Знайти об'єм вписаної в конус півкулі, основа якої лежить на основі конуса.

11.083. Визначити об'єм кулі, вписаної в правильну піраміду, в якій висота дорівнює h, а двогранний кут при основі дорівнює 60°.

11.084. Конус і півкуля мають спільну основу, радіус якої дорівнює R. Знайти бічну поверхню конуса, якщо об'єм його дорівнює об'єму півкулі.

11.085. У циліндрі площа перерізу, перпендикулярного до твірної, дорівнює M, а площа осьового перерізу дорівнює N. Визначити повну поверхню і об'єм циліндра.

11.086. У конус, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник, вписано кулю. Знайти об'єм конуса, якщо об'єм кулі дорівнює $32\pi/3$ см^3.

11.087. Довести, що об'єм конуса дорівнює 1/3 добутку бічної поверхні на відстань від центра основи до твірної.

11.088. Дано кулю, циліндр з квадратним осьовим перерізом і конус. Циліндр і конус мають однакові основи, а їхні висоти дорівнюють діаметру кулі. Як відносяться об'єми циліндра, кулі і конуса?

11.089. Радіус основи конуса дорівнює R, а кут при вершині в розгортці його бічної поверхні дорівнює 90°. Визначити об'єм конуса.

11.090. Обчислити поверхню тіла, утвореного при обертанні ромба, площа якого Q, навколо однієї з його сторін.

11.091. На відрізку AB як на діаметрі побудовано півколо з центром у точці O, а на відрізках OA і OB побудовано два півкола, розміщених в тій самій півплощині з межею AB, що й перше. Знайти поверхню і об'єм фігури, яка утворена обертанням навколо AB фігури, обмеженої цими трьома півколами, якщо $AB = 20$ см.

11.092. Трикутник із сторонами 10, 17 і 21 см обертається навколо більшої з сторін. Обчислити об'єм і поверхню утвореної фігури обертання.

11.093. Знайти відношення поверхні і об'єму кулі відповідно до поверхні і об'єму вписаного куба.

11.094. Знайти відношення поверхні і об'єму кулі відповідно до повної поверхні і об'єму описаного навколо неї конуса з рівностороннім осьовим перерізом.

11.095. Навколо правильної трикутної призми, висота якої удвічі більша за сторону основи, описано кулю. Як відноситься її об'єм до об'єму призми.

11.096. Визначити поверхню сфери, описаної навколо конуса, радіус основи якого дорівнює R, а висота дорівнює h.

11.097. У сферу вписано конус, твірна якого дорівнює діаметру основи. Знайти відношення повної поверхні конуса до поверхні сфери.

11.098. Бічна поверхня конуса вдвічі більша за площу основи. Площа його осьового перерізу дорівнює Q. Знайти об'єм конуса.

11.099. Рівнобічна трапеція з основами 2 і 3 см і гострим кутом 60° обертається навколо меншої основи. Обчислити поверхню і об'єм утвореної фігури обертання.

11.100. Висоту конуса поділено на три рівні відрізки, і через точки поділу паралельно основі проведено площини, які розділяють конус на три частини. Знайти об'єм середнього зрізаного конуса, якщо об'єм даного конуса дорівнює V.

11.101. Бічна поверхня конуса розгорнута на площині в сектор, центральний кут якого має 120°, а площа дорівнює S. Знайти об'єм конуса.

11.102. Із мідної болванки, яка має форму прямокутного паралелепіпеда розмірами $80 \times 20 \times 5$ см прокатують лист завтовшки 1 мм. Визначити площу цього листа.

11.103. Металева куля радіуса R перелита на конус, бічна поверхня якого втричі більша за площу основи. Обчислити висоту конуса.

11.104. У правильному тетраедрі побудовано його переріз площиною, яка проходить через ребро AC і точку K на ребрі SB, причому $BK : KS = 2 : 1$. Знайти об'єм відрізаної піраміди $KABC$, якщо ребро тетраедра дорівнює a.

11.105. Ромб обертається навколо своєї більшої діагоналі, а потім навколо меншої діагоналі. Довести, що відношення об'ємів утворених фігур обертання дорівнює відношенню площ їхніх поверхонь.

Група Б

11.106. Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює a. Обчислити об'єм піраміди, якщо відомо, що її бічна поверхня у 10 разів більша за площу основи.

11.107. Об'єм правильної восьмикутної призми дорівнює 8 м^3, а її висота дорівнює 2,2 м. Знайти бічну поверхню призми.

11.108. Основами зрізаної піраміди є два правильні восьмикутники. Сторона нижньої основи дорівнює 0,4 м, а верхньої 0,3 м; висота зрізаної піраміди дорівнює 0,5 м. Зрізана піраміда добудована до повної. Визначити об'єм повної піраміди.

11.109. Знайти об'єм правильної чотирикутної піраміди із стороною основи, що дорівнює a, і плоскими кутами при вершині, що дорівнюють кутам нахилу бічних ребер до основи.

11.110. Знайти відстань між серединами двох перехресних ребер куба, повна поверхня якого дорівнює 36 см^2.

11.111. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі дорівнює 120°. Знайти бічну поверхню піраміди, якщо площа її діагонального перерізу дорівнює S.

11.112. Основою піраміди є паралелограм $ABCD$, який має площу m^2 і такий, що $BD \perp AD$; двогранні кути при ребрах AD і BC дорівнюють по 45°, а при ребрах AB і CD дорівнюють по 60°. Знайти бічну поверхню і об'єм піраміди.

11.113. У похилому паралелепіпеді проекція бічного ребра на площину основи дорівнює 5 дм, а висота дорівнює 12 дм. Перерізом, перпендикулярним до бічного ребра, є ромб з площею 24 дм^2 і діагоналлю, яка дорівнює 8 дм. Знайти бічну поверхню і об'єм паралелепіпеда.

11.114. Висота зрізаної трикутної піраміди дорівнює 10 м, сторони однієї основи — 27, 29 і 52 м, а периметр другої основи дорівнює 72 м. Визначити об'єм зрізаної піраміди.

11.115. В основі призми лежить трапеція. Виразити об'єм призми через площі S_1 і S_2 паралельних бічних граней та відстань h між ними.

11.116. Площа основи прямої трикутної призми дорівнює 4 см^2, площі бічних граней дорівнюють 9, 10 і 17 см^2. Визначити об'єм призми.

11.117. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція $ABCD$; $AB = CD = 13$ см, $BC = 11$ см, $AD = 21$ см. Площа її діагонального перерізу дорівнює 180 см^2. Обчислити повну поверхню призми.

11.118. Основою паралелепіпеда є ромб з стороною a і гострим кутом 30°. Діагональ однієї бічної грані перпендикулярна до площини основи, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60°. Знайти повну поверхню і об'єм паралелепіпеда.

11.119. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а висота, опущена з вершини основи на протилежну бічну грань, дорівнює b. Визначити об'єм піраміди.

11.120. Бічна поверхня правильної трикутної піраміди втричі більша за площу основи. Площа круга, вписаного в основу, чисельно дорівнює радіусу цього круга. Знайти об'єм піраміди.

11.121. Правильна трикутна піраміда перетинається площиною, яка проходить через вершину основи і середини двох бічних ребер. Знайти відношення бічної поверхні піраміди до площі основи, якщо відомо, що січна площина перпендикулярна до однієї з бічних граней (вказати, до якої саме).

11.122. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 2 і 1 см, а висота 3 см. Через точку перетину діагоналей піраміди паралельно основам піраміди проведено площину, яка ділить піраміду на дві частини. Знайти об'єм кожної із утворених частин.

11.123. Площа того перерізу куба, який являє собою правильний шестикутник, дорівнює Q. Знайти повну поверхню куба.

11.124. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює a, а кут при ній дорівнює 45°. Визначити об'єм призми, якщо її бічна поверхня дорівнює сумі площ основ.

11.125. Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник ABC із стороною a. Вершина A_1 проектується в центр нижньої основи, а ребро AA_1 нахилене до площини основи під кутом 60°. Визначити бічну поверхню призми.

11.126. Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює a. Всі діагональні перерізи рівновеликі. Знайти об'єм і бічну поверхню піраміди.

11.127. Куб, ребро якого дорівнює a, зрізаний по кутах площинами так, що від кожної грані залишився правильний восьмикутник. Визначити об'єм утвореного багатогранника.

11.128. У правильну чотирикутну піраміду вписано куб так, що чотири його вершини розміщено на апофемах піраміди і чотири — у площині основи. Всі ребра піраміди рівні між собою і кожне з них дорівнює a. Обчислити повну поверхню і об'єм куба.

11.129. Висота правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, об'єм її 38 см^3, а площі основ відносяться як 4 : 9. Визначити бічну поверхню зрізаної піраміди.

11.130. Знайти відношення об'ємів правильних тетраедра і октаедра, повні поверхні яких рівні між собою.

11.131. В основі похилої призми лежить правильний трикутник із стороною a. Одна з бічних граней призми перпендикулярна до площини основи і є ромбом, діагональ якого дорівнює b. Знайти об'єм призми.

11.132. В основі чотирикутної піраміди лежить прямокутник, площа якого дорівнює S; бічні ребра піраміди однакові і утворюють з площиною основи кут 45°. Кут між діагоналями основи дорівнює 60°. Знайти об'єм піраміди.

11.133. Основою піраміди є рівносторонній трикутник з стороною a. Одна з бічних граней також є рівностороннім трикутником і перпендикулярна до площини основи. Визначити повну поверхню піраміди.

11.134. Правильна трикутна піраміда розрізана площиною, яка перпендикулярна до основи і ділить дві сторони основи навпіл. Визначити об'єм відтятої піраміди, якщо сторона початкової піраміди дорівнює a, а двогранний кут при основі має 45°.

11.135. Визначити об'єм правильної зрізаної чотирикутної піраміди, якщо сторона більшої основи дорівнює a, сторона меншої основи дорівнює b, а гострий кут бічної грані дорівнює 60°.

11.136. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a. Через одну із сторін основи проведено площину, яка перпендикулярна до протилежного бічного ребра і ділить це ребро у відношенні $m : n$, починаючи від вершини основи. Визначити повну поверхню піраміди.

11.137. Через вершини A, C і D_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину, яка утворює з площиною основи двогранний кут 60°. Сторони основи дорівнюють 4 і 3 см. Знайти об'єм паралелепіпеда.

11.138. Основою піраміди є паралелограм, сторони якого дорівнюють 10 і 18 см, а площа дорівнює 90 см^2. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює 6 см. Визначити бічну поверхню піраміди.

11.139. У правильний октаедр вписано куб так, що його вершини розміщено на ребрах октаедра. У скільки разів поверхня октаедра більша за поверхню вписаного куба.

11.140. Знайти об'єм правильної трикутної піраміди, в якій плоский кут при вершині дорівнює 90°, а відстань між бічним ребром і протилежною стороною основи дорівнює d.

11.141. Площа того перерізу правильного тетраедра, який має форму квадрата, дорівнює m^2. Знайти поверхню тетраедра.

11.142. У правильній трикутній призмі через сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи проведено площину, яка утворює з площиною нижньої основи кут 45°. Площа перерізу дорівнює S. Знайти об'єм призми.

11.143. У тетраедрі розміщено правильну трикутну призму так, що вершини однієї її основи містяться на бічних ребрах тетраедра, другої — у площині його основи. Ребро тетраедра дорівнює a. Визначити об'єм призми, якщо всі її ребра однакові.

11.144. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гіпотенузою, яка дорівнює c, і гострим кутом 30°. Через гіпотенузу нижньої основи і вершину прямого кута верхньої основи проведено площину, яка утворює з площиною основи кут 45°. Визначити об'єм трикутної піраміди, відтятої від призми площиною.

11.145. Бічні грані трикутної піраміди взаємно перпендикулярні, а площі їх дорівнюють a^2, b^2 і c^2. Визначити об'єм піраміди.

11.146. Основою піраміди є правильний шестикутник із стороною, що дорівнює a. Одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи і дорівнює стороні основи. Визначити повну поверхню піраміди.

11.147. Основою піраміди є паралелограм, сторони якого дорівнюють 10 і 8 м, а одна з діагоналей дорівнює 6 м. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює 4 м. Визначити повну поверхню піраміди.

11.148. Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють S_1 і S_2 ($S_1 < S_2$), а її об'єм дорівнює V. Визначити об'єм повної піраміди.

11.149. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, один з кутів якого дорівнює 30°. Площа основи дорівнює 4 дм². Площі бічних граней паралелепіпеда дорівнюють 6 і 12 дм². Знайти об'єм паралелепіпеда.

11.150. Визначити об'єм правильної трикутної зрізаної піраміди, сторони основи якої дорівнюють 3 і 2 м, а бічна поверхня рівновелика сумі площ основ.

11.151. Основою похилого паралелепіпеда є ромб $ABCD$ із стороною a і гострим кутом 60°. Ребро AA_1 також дорівнює a і утворює з ребрами AB і AD кути по 45°. Визначити об'єм паралелепіпеда.

11.152. Центри граней правильного тетраедра є вершинами нового тетраедра. Знайти відношення поверхонь і відношення об'ємів цих тетраедрів.

11.153. Через сторону верхньої основи трикутної зрізаної піраміди проведено площину паралельно протилежному бічному ребру. В якому відношенні розділено об'єм зрізаної піраміди, якщо відповідні сторони основ відносяться як 1 : 2?

11.154. Відстань між будь-якими двома бічними ребрами похилої трикутної призми дорівнює a. Бічне ребро дорівнює l і нахилене до площини основи під кутом 60°. Визначити повну поверхню призми.

11.155. Основою похилої призми є правильний трикутник із стороною a. Довжина бічного ребра дорівнює b, а одне з бічних ребер утворює з прилеглими сторонами основи кути 45°. Визначити бічну поверхню призми.

11.156. Довести, що об'єм прямої призми, основою якої є трапеція, дорівнює добутку середнього арифметичного площ паралельних бічних граней на відстань між ними.

11.157. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторони основ дорівнюють a і b, а бічна поверхня дорівнює половині повної поверхні. Знайти об'єм піраміди.

11.158. У трикутній піраміді, кожне з бічних ребер якої дорівнює a, один плоский кут при вершині піраміди прямий, а кожний інший дорівнює 60°. Обчислити об'єм піраміди.

11.159. Основою піраміди є паралелограм, суміжні сторони якого 9 і 10 см, а одна з діагоналей 11 см. Протилежні бічні ребра однакові, а довжина кожного з більших ребер дорівнює 10,5 см. Обчислити об'єм піраміди.

11.160. Основою піраміди є ромб з діагоналями d_1 і d_2. Висота піраміди проходить через вершину гострого кута ромба. Площа діагонального перерізу, який проведено через меншу діагональ, дорівнює Q. Обчислити об'єм піраміди, коли $d_1 > d_2$.

11.161. Дві бічні грані трикутної піраміди взаємно перпендикулярні. Площі цих граней дорівнюють P і Q, а довжина їхнього спільного ребра дорівнює a. Визначити об'єм піраміди.

11.162. Усі чотири грані трикутної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники з основою a і бічною стороною b. Обчислити об'єм піраміди. Чи при будь-яких a і b задача має розв'язок?

11.163. У похилій трикутній призмі відстані бічних ребер одне від одного дорівнюють a, b і c. Бічне ребро дорівнює l, висота призми h. Визначити повну поверхню призми.

11.164. Сторона основи правильної трикутної призми менша від бічного ребра і дорівнює a. Через сторону верхньої основи проведено площину, яка утворює з площиною основи кут 45° і ділить призму на дві частини. Визначити об'єм і повну поверхню верхньої частини призми.

11.165. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a, b і c. Визначити його повну поверхню.

11.166. Довжини ребер паралелепіпеда дорівнюють a, b і c. Ребра, довжини яких дорівнюють a і b, взаємно перпендикулярні, а ребро, довжина якого c, утворює з кожним з них кут 60°. Визначити об'єм паралелепіпеда.

11.167. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм з кутом 120° і сторонами 3 і 4 см. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі основи. Знайти об'єм паралелепіпеда.

11.168. Основою піраміди є прямокутник, площа якого дорівнює S. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутами 30 і 60°. Знайти об'єм піраміди.

11.169. Через вершину основи і середини двох бічних ребер правильної трикутної піраміди проведено площину. Знайти відношення бічної поверхні піраміди до площі її основи, якщо відомо, що січна площина перпендикулярна до бічної грані.

11.170. Із середини висоти правильної трикутної піраміди опущено перпендикуляри на бічне ребро і на бічну грань. Довжини цих перпендикулярів дорівнюють відповідно a і b. Знайти об'єм піраміди. Чи при будь-яких значеннях a і b задача має розв'язок?

11.171. У півкулю радіуса R вписано куб так, що чотири його вершини лежать на основі півкулі, а інші чотири вершини розміщені на її сферичній поверхні. Обчислити об'єм куба.

11.172. Кут між твірною конуса і площиною основи дорівнює 30°. Бічна поверхня конуса дорівнює $3\pi\sqrt{3}$ кв. од. Визначити об'єм правильної шестикутної піраміди, вписаної в конус.

11.173. Навколо сфери радіуса R описано правильну шестикутну призму. Визначити її повну поверхню.

11.174. У сферу радіуса R вписано правильну шестикутну зрізану піраміду, в якій площина нижньої основи проходить через центр сфери, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60°. Визначити об'єм піраміди.

11.175. Навколо сфери описано прямий паралелепіпед, діагоналі основи якого дорівнюють a і b. Визначити повну поверхню паралелепіпеда.

11.176. У сферу радіуса R вписано правильну чотирикутну піраміду. Визначити об'єм цієї піраміди, якщо радіус кола, описаного навколо її основи, дорівнює r.

11.177. Конус утворено обертанням прямокутного трикутника площею S навколо одного з катетів. Знайти об'єм конуса, якщо довжина кола, описаного при обертанні цього трикутника точкою перетину його медіан, дорівнює L.

11.178. Трикутник із сторонами, які дорівнюють a, b і c, обертається по черзі навколо кожної із своїх сторін. Знайти відношення об'ємів утворених при цьому фігур.

11.179. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює a. Через діагональ AC його грані $ABCD$ проведено площину, паралельну прямій BO_1, де O_1 — центр грані $A_1B_1C_1D_1$. Знайти площу утвореного перерізу.

11.180. На ребрі двогранного кута 120° взято відрізок завдовжки c і з його кінців проведено до нього перпендикуляри, які лежать в різних гранях даного двогранного кута і мають довжини a і b. Знайти довжину відрізка прямої, який сполучає кінці цих перпендикулярів.

11.181. Повна поверхня конуса дорівнює πS кв. од. Розгорнута на площині бічна поверхня конуса є сектором з кутом 60°. Визначити об'єм конуса.

11.182. Радіус основи конуса дорівнює R, а бічна поверхня дорівнює сумі площ основи і осьового перерізу. Визначити об'єм конуса.

11.183. Навколо сфери описано правильну трикутну призму, а навколо неї описано сферу. Знайти відношення поверхонь цих сфер.

11.184. Дано циліндр і кулю. Радіуси основи циліндра і великого круга кулі однакові. Повна поверхня циліндра відноситься до поверхні кулі як $m : n$. Знайти відношення їхніх об'ємів.

11.185. Знайти поверхню кулі, вписаної в піраміду, в основі якої лежить трикутник із сторонами 13, 14 і 15 см, якщо вершина піраміди віддалена від кожної сторони основи на 15 см.

11.186. Висота конуса дорівнює h. Розгорткою бічної поверхні цього конуса є сектор з центральним кутом 120°. Обчислити об'єм конуса.

11.187. Обчислити поверхню кулі, вписаної в трикутну піраміду, всі ребра якої дорівнюють a.

11.188. Визначити бічну поверхню і об'єм зрізаного конуса з твірною, яка дорівнює l. Конус описано навколо сфери радіуса r.

11.189. У циліндричну посудину, радіус основи якої $R = 4$ см, поміщено кулю радіуса $r = 3$ см. У посудину налито воду так, що її вільна поверхня торкається поверхні кулі (куля при цьому не спливає). Визначити товщину того шару води, який залишиться, коли кулю вийняти з посудини.

11.190. Радіус основи конуса дорівнює R. Дві взаємно перпендикулярні твірні ділять бічну поверхню конуса на частини у відношенні 1 : 2. Знайти об'єм конуса.

11.191. Навколо кулі описано правильну чотирикутну зрізану піраміду, сторони основ якої відносяться як $m : n$. Визначити відношення об'ємів піраміди і кулі.

11.192. Площина, проведена через вершину конуса, перетинає основу по хорді, довжина якої дорівнює радіусу цієї основи. Визначити відношення об'ємів утворених частин конуса.

11.193. Основою піраміди є прямокутний трикутник. Бічні ребра піраміди однакові, а бічні грані, які проходять через катети, утворюють з площиною основи кути 30 і 60°. Знайти об'єм описаного навколо піраміди конуса, якщо висота піраміди дорівнює h.

11.194. Паралелограм, периметр якого дорівнює $2p$, обертається навколо осі, яка перпендикулярна до діагоналі завдовжки d і проходить через її кінець. Знайти поверхню фігури обертання.

11.195. Радіус основи конуса дорівнює R, а кут розгортки його бічної поверхні дорівнює 90°. Визначити об'єм конуса.

Група В

11.196. Два рівні куби з ребром a мають спільний відрізок AB, кінцями якого є середини двох протилежних ребер, що не належать одній грані. Один з кубів утворено обертанням другого навколо прямої AB на 90°. Знайти об'єм спільної частини цих кубів.

11.197. Знайти об'єм спільної частини двох кубів, якщо один з них утворено обертанням другого на 90° навколо осі, яка проходить через середню лінію однієї з його граней. Ребро куба дорівнює a.

11.198. В основі прямої призми лежить трикутник із сторонами 6, 8 і 10 см. Деякий плоский переріз цієї призми відтинає від бічних ребер, які проходять через вершини більшого і середнього кутів основи, відрізки, що дорівнюють 12 см кожний, а від ребра, яке проходить через вершину меншого кута основи,— відрізок 18 см. Знайти об'єм і площу повної поверхні фігури, яка обмежена площиною основи призми, площинами бічних граней і площиною перерізу.

11.199. Ребро похилого паралелепіпеда дорівнює l. До нього прилягають дві суміжні грані, площі яких дорівнюють m^2 і n^2, а їхні площини утворюють кут 30°. Обчислити об'єм паралелепіпеда.

11.200. Через точку, яка ділить ребро правильного тетраедра у відношенні 1 : 4, проведено площину, перпендикулярну до цього ребра. Знайти відношення об'ємів утворених частин тетраедра.

11.201. Бічні ребра трикутної піраміди мають однакову довжину a. Із трьох плоских кутів, утворених цими ребрами при вершині піраміди, два мають по 45°, а третій — 60°. Визначити об'єм піраміди.

11.202. Через кожне ребро правильного тетраедра проведено площину, паралельну протилежному ребру. Знайти відношення об'єму утвореного паралелепіпеда до об'єму тетраедра.

11.203. Через кожні три вершини куба, розміщені на кінцях кожної трійки ребер, які збігаються в одній вершині, проведено площину. Знайти об'єм тіла, обмеженого цими площинами, якщо ребро куба дорівнює a.

11.204. Із середини висоти правильної чотирикутної піраміди проведено перпендикуляр завдовжки a до бічного ребра і перпендикуляр завдовжки b до бічної грані. Знайти об'єм піраміди.

11.205. Два правильні тетраедри сполучено двома гранями так, що утворюється подвійна піраміда. Центри шести бічних граней цієї подвійної піраміди прийнято за вершини прямої трикутної призми. Обчислити об'єм цієї призми, якщо ребро тетраедра дорівнює a.

11.206. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a; площа її перерізу, який має форму квадрата, дорівнює m^2. Знайти відношення бічної поверхні піраміди до площі основи.

11.207. Два куби з ребром a мають спільний відрізок, який сполучає центри двох протилежних граней, але один куб повернуто на 45° відносно іншого. Знайти об'єм спільної частини цих кубів.

11.208. Через кінці трьох ребер, які виходять з вершин B, D, A_1 і C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює a, проведено площини. Довести, що утворена фігура є правильним тетраедром, і обчислити його повну поверхню і об'єм.

11.209. Через сторону основи правильної чотирикутної піраміди проведено площину, яка відтинає від протилежної грані трикутник площею 4 см². Знайти бічну поверхню піраміди, яка відтята проведеною площиною від даної піраміди, якщо бічна поверхня даної піраміди дорівнює 25 см².

11.210. Довести, що об'єми двох трикутних пірамід, які мають по однаковому тригранному куту, відносяться як добуток довжин трьох ребер рівних тригранних кутів.

11.211. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, бічне ребро утворює з висотою кут 30°. Через вершину основи піраміди проведено площину, перпендикулярну до протилежного бічного ребра. Ця площина розбиває піраміду на дві частини. Визначити об'єм частини піраміди, що прилягає до вершини.

11.212. Відстань між непересічними діагоналями двох суміжних бічних граней куба дорівнює d. Визначити повну поверхню куба.

11.213. Обчислити об'єм трикутної піраміди, в якій два протилежних ребра 4 і 12 м, а кожне із решти ребер дорівнює 7 м.

11.214. Гранями паралелепіпеда є ромби, діагоналі яких дорівнюють 3 і 4 см. У паралелепіпеді є тригранні кути, складені трьома гострими кутами ромбів. Знайти об'єм паралелепіпеда.

11.215. Знайти об'єм трикутної піраміди, сторони основи якої дорівнюють a, b і c, якщо кожна з цих сторін дорівнює бічному ребру, яке не перетинається з нею.

11.216. Основою піраміди $SABCD$ є трапеція з паралельними сторонами AB і CD. Довести, що об'єм піраміди дорівнює 4/3 добутку площі трикутника MSN, де MN — середня лінія трапеції, на відстань ребра AB від площини MSN.

11.217. Многогранник має таку будову: дві його грані (основи) являють собою многокутники, розміщені в паралельних площинах; решта граней (бічні) — трапеції, паралелограми або трикутники, кожна вершина яких є одночасно вершиною однієї з основ. Довести, що об'єм такого многогранника дорівнює (1/6) H $(S_1 + S_2 + 4S_3)$, де H — відстань між площинами основ, S_1 і S_2 — площі основ, а S_3 — площа перерізу, рівновіддаленого від обох основ.

11.218. Фігуру обмежено зверху і знизу двома прямокутниками із сторонами, які дорівнюють a, b і a_1, b_1, а збоку — трапеціями. Сторони прямокутників паралельні; відстань між паралельними площинами прямокутних основ дорівнює h. Знайти об'єм фігури.

11.219. Діагоналі двох однакових кубів з ребром a лежать на одній і тій самій прямій. Вершина другого куба збігається з центром першого, і другий куб повернуто навколо діагоналі на 60° відносно першого. Знайти об'єм спільної частини цих кубів.

11.220. Навколо кулі описано зрізаний конус, площа нижньої основи якого в a разів більша за площу його верхньої основи. У скільки разів об'єм зрізаного конуса більший за об'єм кулі,

11.221. У конус вписано кулю. Довести, що відношення повної поверхні конуса до поверхні кулі дорівнює відношенню їхніх об'ємів.

11.222. Висота циліндра дорівнює радіусу його основи і має довжину a. Через вісь циліндра проведено іншу циліндричну поверхню, яка ділить коло основи на дві дуги, довжини яких відносяться як $2:1$. Ця циліндрична поверхня ділить даний циліндр на дві частини. Знайти бічну поверхню і об'єм більшої частини циліндра.

11.223. Відношення висоти конуса до радіуса описаної навколо нього кулі дорівнює q. Знайти відношення об'ємів цих тіл. При яких значеннях q задача не має розв'язку?

11.224. У кулю радіуса R вписано правильну чотирикутну піраміду, основа якої ділить перпендикулярний до неї радіус навпіл. Визначити поверхню кулі, вписаної в піраміду.

11.225. Конус лежить на площині і котиться по ній, обертаючись навколо своєї нерухомої вершини. Висота конуса і його твірна дорівнюють h і l. Обчислити площу поверхні, яку описує висота конуса.

11.226. Основою піраміди $SABC$ є трикутник ABC такий, що $AB = AC = 10$ м і $BC = 12$ м. Грань SBC перпендикулярна до основи, і $SB = SC$. Обчислити радіус сфери, вписаної в піраміду, якщо висота піраміди дорівнює 1,4 м.

11.227. Бічні ребра трикутної піраміди дорівнюють a, b і c; плоскі кути, утворені цими ребрами — прямі. Знайти висоту, яку проведено до основи піраміди.

11.228. Довести, що коли у многогранник можна вписати сферу, то його об'єм дорівнює 1/3 добутку повної поверхні многогранника на радіус вписаної сфери.

11.229. Знайти об'єм правильної піраміди, в основі якої лежить правильний п'ятикутник, а бічними гранями є правильні трикутники із стороною a.

11.230. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює H. Знайти її повну поверхню, якщо площина, проведена через вершину основи піраміди перпендикулярно до протилежної бічної грані, утворює з площиною основи кут $30°$.

11.231. Основою піраміди $SABC$ є рівнобедрений трикутник ABC, довжина гіпотенузи якого $AB = 4\sqrt{2}$. Бічне ребро SC піраміди перпендикулярне до площини основи, а його довжина дорівнює 2. Знайти кут і відстань між прямими, одна з яких проходить через точку S і середину ребра AC, а друга — через точку C і середину ребра AB.

11.232. Маємо ортоцентричний тетраедр, тобто такий, в якому прямі, що містять в собі його висоти, перетинаються в одній точці. Довести, що: а) кожні два його протилежних ребра взаємно перпендикулярні; б) якщо один із плоских кутів при будь-якій вершині тетраедра прямий, то й інші два плоскі кути прямі; в) суми квадратів довжин його протилежних ребер рівні; г) будь-яка його вершина проектується в ортоцентр протилежної грані (точку перетину прямих, які містять висоти грані).

11.233. а) Довжини ребер AB, AC, AD і BC ортоцентричного тетраедра дорівнюють відповідно 5, 7, 8 і 6 см. Знайти довжини решти двох ребер. б) Чи є ортоцентричним тетраедр $ABCD$, якщо $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $DC = 6$ см?

11.234. В ортоцентричному тетраедрі $ABCD$ кут ADC прямий. Довести, що $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, де h — висота тетраедра, проведена з вершини D, $a = DA$, $b = DB$, $c = DC$.

11.235. В ортоцентричному тетраедрі $ABCD$ кут ABC прямий; S_1, S_2, S_3 — площі граней BAC, BAD, BCD відповідно. Довести, що об'єм тетраедра дорівнює $(1/3)\sqrt{2S_1S_2S_3}$.

Глава 12

ЗАДАЧІ З ГЕОМЕТРІЇ З ЗАСТОСУВАННЯМ ТРИГОНОМЕТРІЇ

Деякі співвідношення між елементами фігур

1°. Площу паралелограма $ABCD$ (рис. 12.1) можна обчислити за такими формулами:

$$S = \frac{AC^2 - BD^2}{4} \cdot \operatorname{tg} A; \quad (а) \qquad S = \frac{AB^2 - AD^2}{2} \cdot \operatorname{tg} \angle AOD, \ (б)$$

де O — точка перетину діагоналей AC і BD.

□ Використовуючи теорему косинусів (10.6), виразимо AC^2 з трикутника ACB і BD^2 з трикутника ABD, а потім віднімемо від першої рівності другу. Тоді дістанемо $AC^2 - BD^2 = 4\ AB \cdot AD \cos A$, звідки $AB \cdot AD = \dfrac{AC^2 - BD^2}{4 \cos A}$. Нарешті, застосовуючи формулу 10.21), знаходимо

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin A = \frac{AC^2 - BD^2}{4} \cdot \operatorname{tg} A.$$

Провівши аналогічні міркування відносно трикутників AOD і AOB, можна встановити справедливість формули (б). ■

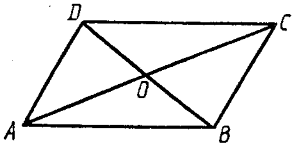


Рис. 12.1

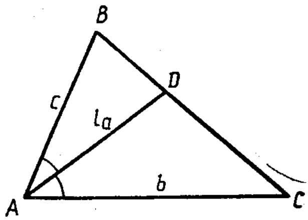


Рис. 12.2

2°. Нехай відомо довжини b і c двох сторін трикутника ABC і кут A, утворений ними (рис. 12.2). Тоді довжина бісектриси AD трикутника, проведеної з вершини цього кута, виражається формулою

$$l_a = \frac{2bc \cos (A/2)}{b + c}.$$

□ Маємо $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ADB}$. Використовуючи формулу (10.2), дістаємо

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} l_a b \sin (A/2) + \frac{1}{2} l_a c \sin (A/2),$$

або $bc \sin (A/2) \cos (A/2) = \dfrac{1}{2} l_a (b + c) \sin (A/2)$.

Оскільки $\sin \dfrac{A}{2} \neq 0$, то $l_a = \dfrac{2bc \cos (A/2)}{b + c}$. ■

3⁰. Справджуються такі співвідношення між елементами сфери і вписаного в неї конуса:

$$l = 2R\sin\alpha; \quad \text{(а)} \qquad l^2 = 2RH, \quad \text{(б)}$$

де R — радіус сфери, l — довжина твірної конуса, H — його висота, α — кут між твірною і площиною основи.

Такі самі співвідношення справедливі і для вписаної в сферу піраміди, бічні ребра якої мають довжину l і утворюють з площиною основи кут α.

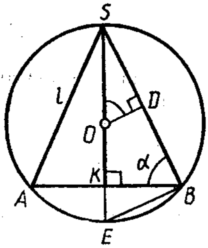


Рис. 12.3

□ а) Побудувавши осьовий переріз конуса, вписаного в сферу (рис. 12.3), маємо рівнобедрений трикутник SAB, вписаний в коло радіуса R. Центром кола є точка O перетину висоти SK і серединного перпендикуляра DO до сторони SB, причому $SK = H$, $\angle SOD = \angle SBK = \alpha$. З трикутника SDO знаходимо $SD = SO\sin\alpha$, тобто $l = 2R\sin\alpha$.

б) Продовжимо SK до перетину з колом у точці E і побудуємо відрізок BE. Тоді утвориться прямокутний трикутник SBE, в якому катет $SB = l$ є середнім геометричним між гіпотенузою $SE = 2R$ і проекцією $SK = H$ катета SB на гіпотенузу SE, тобто $l^2 = 2RH$. ■

4⁰. Нехай A_1B_1 — бічне ребро піраміди або призми, A_1O — його проекція на площину основи, $\angle B_1A_1O = \alpha$, $\angle OA_1A_2 = \beta$, $\angle B_1A_1A_2 = \gamma$ (рис. 12.4). Тоді справедлива рівність $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

□ Проведемо висоту бічної грані — відрізок B_1C; тоді $OC \perp A_1A_2$ (за теоремою про три перпендикуляри) і з трикутника A_1CB_1 дістанемо $\cos\gamma = \dfrac{A_1C}{A_1B_1}$. Оскільки $A_1C = OA_1\cos\beta$ (з ΔOCA_1), то $\cos\gamma = \dfrac{OA_1\cos\beta}{A_1B_1}$. Але $\dfrac{OA_1}{A_1B_1} = \cos\alpha$ (з ΔA_1OB_1), отже, $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$. ■

5⁰. Нехай α — кут нахилу бічного ребра правильної n-кутної піраміди до площини основи, δ — кут нахилу її бічної грані до площини основи, φ — плоский кут при вершині піраміди, ω — двогран-

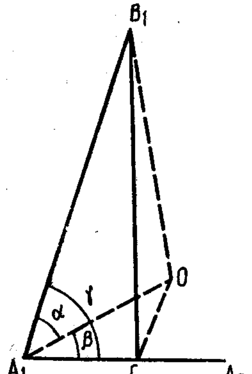


Рис. 12.4

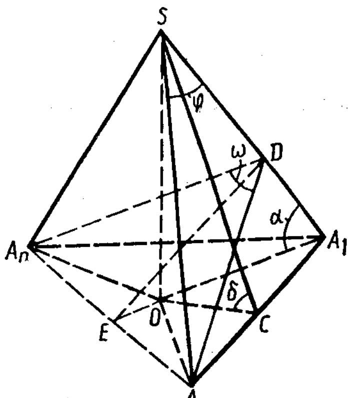


Рис. 12.5

ний кут між суміжними бічними гранями (рис. 12.5). Тоді справедливі такі співвідношення:

$$\cos\alpha = \frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\pi/n)}, \tag{а}$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\cos(\pi/n)}{\cos(\varphi/2)}, \tag{б}$$

$$\cos\delta = \frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\operatorname{tg}(\pi/n)} = \cos\alpha\sin\frac{\omega}{2}. \tag{в}$$

□ а) Нехай O — центр правильного n-кутника, який є основою піраміди; A_1 — кут при вершині цього n-кутника. Тоді

$$\angle A_1 = \frac{\pi(n-2)}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}, \quad \angle OA_1C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

Далі маємо $OA_1 = A_1C : \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = A_1C : \sin\frac{\pi}{n}$ (з $\Delta\, OCA_1$); $SA_1 = A_1C : \sin\frac{\varphi}{2}$ (з $\Delta\, SCA_1$). Тепер з трикутника SOA_1 знаходимо

$$\cos\alpha = \frac{OA_1}{SA_1} = \frac{A_1C}{\sin(\pi/n)} : \frac{A_1C}{\sin(\varphi/2)} = \frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\pi/n)}.$$

б) Нехай E — середина основи A_2A_n рівнобедреного трикутника A_2DA_n. Вона належить також бісектрисі A_1O кута при вершині A_1 основи піраміди і бісектрисі DE кута A_2DA_n. Із прямокутних трикутників A_2ED і A_1EA_2 знаходимо

$$A_2D = A_2E : \sin\frac{\omega}{2} \text{ і } A_1A_2 = A_2E : \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = A_2E : \cos\frac{\pi}{n}.$$

Поділивши першу рівність на другу, дістанемо $A_2D : A_1A_2 = \cos(\pi/n) : \sin(\omega/2)$. Оскільки $\Delta\, A_1A_2D \sim \Delta\, A_1SC$, то $A_2D : A_1A_2 = SC : A_1S = \cos(\varphi/2)$, звідки

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\omega/2)} \text{ або } \sin\frac{\omega}{2} = \frac{\cos(\pi/n)}{\cos(\varphi/2)}.$$

в) Із трикутника SOC маємо $\cos\delta = OC : SC$, де $OC = A_1C\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = A_1C\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ (з $\Delta\, OCA_1$), $SC = A_1C\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ (з $\Delta\, SCA_1$). Тому

$$\cos\delta = \frac{A_1C\operatorname{ctg}(\pi/n)}{A_1C\operatorname{ctg}(\varphi/2)} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\operatorname{tg}(\pi/n)},$$

звідки, перемноживши співвідношення (а) і (б), дістанемо

$$\cos\delta = \frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\operatorname{tg}(\pi/n)} = \cos\alpha\sin\frac{\omega}{2}. \ ■$$

Приклад 1. Кут при основі гострокутного рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) дорівнює α. У якому відношенні, починаючи від вершини A, висота BD ділить висоту AE?

Δ За умовою трикутник ABC гострокутний; отже, точка K перетину висот лежить всередині трикутника (рис. 12.6). Нехай $AD = a$. Із трикутника AEC знаходимо $AE = 2a\sin\alpha$; із трикутника AKD знаходимо $AK = a/\sin\alpha$ ($\angle AKD = \angle C$, оскільки обидва кути доповнюють кут KAD до 90°). Далі маємо

$$KE = AE - AK = 2a\sin\alpha - \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a(2\sin^2\alpha - 1)}{\sin\alpha} =$$

$$= -\frac{a\cos 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Остаточно дістаємо

$$\frac{AK}{KE} = -\frac{a}{\sin\alpha} : \frac{a\cos 2\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\cos 2\alpha}. \blacktriangle$$

Приклад 2. Із вершини C ромба $ABCD$, сторона якого дорівнює a, проведено два відрізки CE та CF (рис. 12.7), які ділять ромб на три рівновеликі фігури. Відомо, що $\cos C = 1/4$. Знайти суму $CE + CF$.

Δ Висоти трикутників CED і CFB, які проведено з вершини C, мають однакові довжини, і $S_{\triangle CED} = S_{\triangle CFB}$ (за умовою); тому $DE = FB$, а отже, $CE = CF$ і $AE = AF$. Проведемо діагональ AC, яка ділить $AECF$ на два рівних трикутники. Отже, $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} S_{AECF}$.

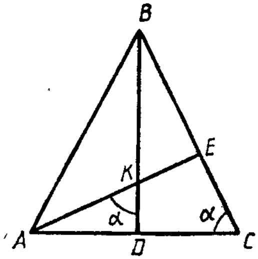


Рис. 12.6

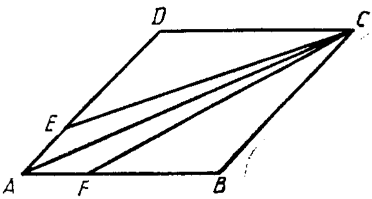


Рис. 12.7

Оскільки $S_{AECF} = S_{\triangle CFB}$ (за умовою), то $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} S_{\triangle CFB}$, причому трикутники ACF і CFB мають спільну висоту, проведену з вершини C. Звідси випливає, що $AF = \frac{1}{2} FB$, тобто $FB = \frac{2}{3} a$; крім того, $\cos B = \cos(180° - \angle C) = \cos C = -1/4$. Із трикутника CFB за теоремою косинусів дістанемо

$$CF = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{9} - 2a\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2a}{3}} = \frac{4a}{3}.$$

Отже, $CE + CF = 8a/3$. ▲

Приклад 3. Основа піраміди — прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює c, а один з гострих кутів дорівнює α. Кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм піраміди.

Δ Оскільки всі бічні ребра піраміди $ABCD$ (рис. 12.8) однаково нахилені до площини основи, то вершина D проектується в центр кола, описаного навколо трикутника ABC; для прямокутного трикутника — в середину E гіпотенузи AB. Висота DE трикутника ADB є висотою піраміди. Далі маємо

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} c^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha, \quad DE = BE \operatorname{tg}\beta = \frac{c}{2} \operatorname{tg}\beta.$$

Остаточно дістаємо

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha \cdot \frac{c}{2} \operatorname{tg}\beta = \frac{c^3}{24} \sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta. \ \blacktriangle$$

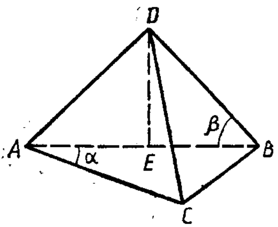


Рис. 12.8

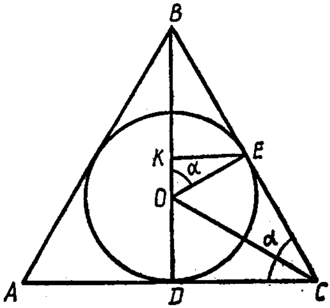


Рис. 12.9

Приклад 4. У конус, твірна якого нахилена до основи під кутом α, вписано кулю. Радіус кола дотику сферичної і конічної поверхонь дорівнює r. Знайти довжину твірної конуса.

Δ В осьовому перерізі конуса (рис. 12.9) маємо рівнобедрений трикутник ABC, в який вписано коло з центром O — точкою перетину висоти BD трикутника і бісектриси CO кута C. Із точки E дотику кола з твірною BC проведемо $KE \perp BD$. Очевидно, що $KE = r$, $\angle KOE = \alpha$ (див. приклад 1), $OE = OD = r/\sin\alpha$. Із трикутника ODC знаходимо $DC = OD \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)/\sin\alpha$, а з трикутника BDC знаходимо $BC = DC/\cos\alpha = 2r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)/\sin 2\alpha$. $\blacktriangle$

Приклад 5. Знайти бічну поверхню правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює H, а плоский кут при вершині дорівнює φ (рис. 12.10).

Δ Введемо допоміжний кут $\alpha = \angle SA_2O$. Тоді $SA_2 = H/\sin\alpha$, а бічна поверхня піраміди визначається за формулою

$$S_{\text{біч}} = 4S_{\triangle SA_2A_3} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{H^2}{\sin^2\alpha} \cdot \sin\varphi = \frac{2H^2 \sin\varphi}{\sin^2\alpha}.$$

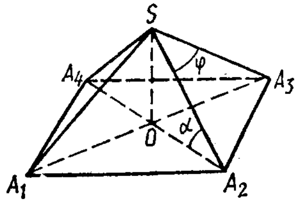


Рис. 12.10

Використовуючи зв'язок між введеним кутом α і відомими кутами φ і $\angle OA_2A_3 = \pi/4$ (див. формулу (а) п. 5°), дістаємо $\cos\alpha = \frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\pi/4)} = \sqrt{2}\sin(\varphi/2)$. Отже, $\sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2(\varphi/2) = \cos\varphi$. Підставляючи цей вираз у формулу для $S_{біч}$, остаточно знаходимо $S_{біч} = 2H^2 \operatorname{tg}\varphi$. ▲

Група А

12.001. Сума двох нерівних висот рівнобедреного трикутника дорівнює l, кут при вершині дорівнює α. Знайти бічну сторону.

12.002. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α. Знайти відношення радіусів вписаного і описаного кіл.

12.003. У ромбі через вершину гострого кута α проведено пряму, яка ділить цей кут у відношенні 1 : 2. У якому відношенні ця пряма ділить сторону ромба, яку вона перетинає?

12.004. У квадраті $ABCD$ через середину M сторони AB проведено пряму, яка перетинає протилежну сторону CD у точці N. В якому відношенні пряма MN ділить площу квадрата, якщо гострий кут AMN дорівнює α. Вказати множину можливих значень α.

12.005. Висота рівнобічної трапеції дорівнює h, а кут між її діагоналями, протилежний бічній стороні, дорівнює α. Знайти середню лінію трапеції.

12.006. У прямокутному трикутнику дано його площу S і гострий кут α. Знайти відстань від точки перетину медіан трикутника до гіпотенузи.

12.007. У прямокутник $ABCD$ ($AB \parallel CD$) вписано трикутник AEF. Точка E лежить на стороні BC, точка F — на стороні CD. Знайти тангенс кута EAF, якщо $AB : BC = BE : EC = CF : FD = k$.

12.008. У паралелограмі з сторонами a і b і гострим кутом α знайти тангенси кутів, утворених більшою діагоналлю паралелограма з його сторонами.

12.009. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, кут при вершині дорівнює α. Знайти довжину бісектриси, яка проведена до бічної сторони.

12.010. Навколо кола радіуса R описано рівнобічну трапецію з гострим кутом α при основі. Знайти периметр цієї трапеції.

12.011. Довести, що у всякому трикутнику різниця між сумою квадратів будь-яких двох його сторін і добутком цих сторін, помножених на косинус кута між ними, є для даного трикутника сталою величиною.

12.012. Дано сторони a, b, c і d чотирикутника, вписаного в коло. Знайти кут між сторонами a і b.

12.013. Відношення площі прямокутного трикутника до площі квадрата, побудованого на його гіпотенузі, дорівнює k. Знайти суму тангенсів гострих кутів трикутника.

12.014. Площа прямокутної трапеції дорівнює S, гострий кут дорівнює α. Знайти висоту трапеції, якщо її менша діагональ дорівнює більшій основі.

12.015. Спільна зовнішня дотична двох кіл, що дотикаються зовні, утворює з лінією центрів кут α. Знайти відношення радіусів цих кіл.

12.016. Дві висоти паралелограма, які проведено з вершини тупого кута, дорівнюють h_1 і h_2, а кут між ними дорівнює α. Знайти більшу діагональ паралелограма.

12.017. Діагональ прямокутника дорівнює d і ділить кут прямокутника у відношенні $m : n$. Знайти периметр прямокутника.

12.018. У рівнобічній трапеції, описаній навколо кола, відношення бічної сторони до меншої основи дорівнює k. Знайти кути трапеції і допустимі значення k.

12.019. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює S, а протилежний основі кут між медіанами, проведеними до його бічних сторін, дорівнює α. Знайти основу.

12.020. У сегмент, дуга якого містить $\alpha°$, вписано правильний трикутник так, що одна його вершина збігається з серединою дуги, а дві інші лежать на хорді. Площа трикутника дорівнює S. Знайти радіус дуги сегмента.

12.021. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α, радіус вписаного кола дорівнює r. Через вершину кута при основі і центр вписаного кола проведено пряму. Знайти відрізок цієї прямої, яка лежить всередині трикутника.

12.022. Знайти кут трикутника, коли відомо, що сторони, які утворюють цей кут, дорівнюють a і b, а бісектриса кута дорівнює l.

12.023. У рівнобедреному трикутнику дано основу a і кут α при основі. Знайти медіану, проведену до бічної сторони.

12.024. Знайти відношення периметра трапеції, описаної навколо кола, до довжини цього кола, якщо кути при більшій основі трапеції дорівнюють α і β.

12.025. У прямокутному трикутнику ABC гострий кут A дорівнює α радіанів. Дуга кола з центром у вершині прямого кута C дотикається до гіпотенузи у точці D і перетинає катети AC і BC відповідно в точках E і F. Знайти відношення площ криволінійних трикутників ADE і BDF.

12.026. У паралелограм із сторонами a і b ($a < b$) й гострим кутом α вписано ромб; дві його вершини збігаються з серединами більших сторін паралелограма, дві інші лежать на менших сторонах (або на їхніх продовженнях). Знайти кути ромба.

12.027. Навколо кола радіуса R описано трапецію з кутами α і β при більшій основі. Знайти площу цієї трапеції.

12.028. У рівнобедрений трикутник з кутом α при основі вписано коло радіуса r. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.

12.029. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює S, кут між висотою, проведеною до бічної сторони, і основою дорівнює α. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

12.030. Рівносторонній трикутник перетинає пряма, яка проходить через середину однієї з його сторін і утворює з цією стороною гострий кут α. У якому відношенні ця пряма ділить площу трикутника?

12.031. У квадрат $ABCD$ вписано рівнобедрений трикутник AEF; точка E лежить на стороні BC, точка F — на стороні CD і $AE = AF$. Тангенс кута AEF дорівнює 3. Знайти косинус кута FAD.

12.032. У рівнобедреному трикутнику кут між бічними сторонами дорівнює α, радіус вписаного кола дорівнює r. Знайти площу трикутника.

12.033. Навколо кола описано прямокутну трапецію з гострим кутом α. Знайти висоту трапеції, якщо її периметр дорівнює P.

12.034. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α. Знайти відношення площі трикутника до площі описаного навколо нього круга.

12.035. У трикутнику дано довжини двох сторін a і b і кут α між ними. Знайти висоту, проведену до третьої сторони.

12.036. Показати, що коли в трикутнику відношення тангенсів двох кутів дорівнює відношенню квадратів синусів цих самих кутів, то трикутник рівнобедрений або прямокутний.

12.037. У ромб $ABCD$ і у трикутник ABC, який вміщує його більшу діагональ, вписано кола. Знайти відношення радіусів цих кіл, якщо гострий кут ромба дорівнює α.

12.038. На меншій основі рівнобічної трапеції побудовано правильний трикутник. Його висота дорівнює висоті трапеції, а площа в 5 разів менша від площі трапеції. Знайти кут при більшій основі трапеції.

12.039. Висоту BD правильного трикутника ABC продовжено за вершину B і на продовженні взято відрізок BF, який дорівнює стороні трикутника. Точку F сполучено відрізком прямої з вершиною C. За допомогою цієї побудови показати, що $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

12.040. Висота рівнобічної трапеції дорівнює h. Верхню основу трапеції з середини нижньої основи видно під кутом 2α, а нижню основу з середини верхньої — під кутом 2β. Знайти площу трапеції у цьому загальному випадку і обчислити її без таблиць, якщо $h = 2$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 75^\circ$.

12.041. Дано дві сторони b і c трикутника і його площу, яка дорівнює $0{,}4bc$. Знайти третю сторону.

12.042. Із точки, взятої на колі радіуса R, проведено дві рівні хорди, які утворюють вписаний кут, що дорівнює α радіанів. Знайти частину площі круга, яка міститься всередині цього вписаного кута.

12.043. Через вершину A рівнобедреного гострокутного трикутника ABC і центр описаного навколо цього трикутника кола проведено пряму, яка перетинає сторону BC у точці D. Знайти довжину AD, якщо $AB = BC = b$ і $\angle ABC = \alpha$.

12.044. У прямокутному паралелепіпеді діагональ основи дорівнює d і утворює із стороною основи кут α. Через цю сторону і протилежну їй сторону верхньої основи проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β. Знайти бічну поверхню паралелепіпеда.

12.045. Різниця між твірною і висотою конуса дорівнює d, а кут між ними дорівнює α. Знайти об'єм конуса.

12.046. Основою піраміди є правильний трикутник. Одне бічне ребро перпендикулярне до площини основи і дорівнює l, два інших утворюють з площиною основи кут α. У піраміду вписано пряму призму; три її вершини лежать на бічних ребрах піраміди, три інші — на основі піраміди. Діагональ бічної грані призми утворює з площиною основи кут β. Знайти висоту призми.

12.047. Діагоналі осьового перерізу зрізаного конуса точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1. Кут між діагоналями, повернутий до основ конуса, дорівнює α. Довжина діагоналі дорівнює l. Знайти об'єм зрізаного конуса.

12.048. Знайти кут при вершині осьового перерізу конуса, якщо центральний кут у розгортці його бічної поверхні дорівнює α радіанів.

12.049. Плоский кут при вершині правильної шестикутної піраміди дорівнює куту між бічними ребрами і площиною основи. Знайти цей кут.

12.050. Через вершину C основи правильної трикутної піраміди $SABC$ проведено площину перпендикулярно до бічного ребра SA. Ця площина утворює з площиною основи кут, косинус якого дорівнює 2/3. Знайти косинус кута між двома бічними гранями.

12.051. В основі прямої трикутної призми лежить рівнобедрений трикутник ABC, в якому $AB = BC = a$ і $\angle BAC = \alpha$. Через сторону AC проведено площину під кутом φ $(\varphi < \pi/2)$ до основи. Знайти площу перерізу, якщо відомо, що фігурою перерізу є трикутник.

12.052. Трикутник ABC обертається навколо прямої, яка лежить у площині цього трикутника та проходить поза ним через вершину A і однаково нахилена до сторін AB і AC. Знайти об'єм тіла обертання, якщо $AB = a$, $AC = b$ і $\angle BAC = \alpha$.

12.053. Бічна поверхня правильної трикутної піраміди в п'ять разів більша за площу її основи. Знайти плоский кут при вершині піраміди.

12.054. Висота конуса дорівнює H, кут між твірною і висотою дорівнює α. У цей конус вписано інший конус так, що вершина другого конуса збігається з центром основи першого конуса, а відповідні твірні обох конусів взаємно перпендикулярні. Знайти об'єм вписаного конуса.

12.055. Сторона більшої основи правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює a. Бічне ребро і діагональ піраміди утворюють з площиною основи кути, які дорівнюють відповідно α і β. Знайти площу меншої основи піраміди.

12.056. Радіус кола, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює r, гострий кут трапеції дорівнює α. Ця трапеція обертається навколо меншої бічної сторони. Знайти бічну поверхню тіла обертання.

12.057. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α. Діагональ більшої бічної грані дорівнює d і утворює з бічним ребром кут β. Знайти об'єм призми.

12.058. Діагоналі осьового перерізу циліндра перетинаються під кутом α, повернутим до основи. Об'єм циліндра дорівнює V. Знайти висоту циліндра.

12.059. Знайти гострий кут ромба, знаючи, що об'єми тіл, утворених при обертанні ромба навколо його більшої діагоналі і навколо його сторони, відносяться як $1 : 2\sqrt{5}$.

12.060. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює a, а кут при вершині дорівнює α. Всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β. Знайти об'єм піраміди.

12.061. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють a і b $(a > b)$, а гострий кут дорівнює α. Площина, яка проходить через більшу основу верхньої трапеції і меншу основу нижньої трапеції, утворює з площиною нижньої основи кут β. Знайти об'єм призми.

12.062. Кут між діагоналями основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює α. Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β. Знайти висоту паралелепіпеда, якщо його об'єм дорівнює V.

12.063. Кожне з бічних ребер чотирикутної піраміди утворює з висотою кут α. Основою піраміди є прямокутник з кутом β між діагоналями. Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює h.

12.064. В основу конуса вписано квадрат, сторона якого дорівнює a. Площина, яка проходить через одну із сторін цього квадрата і вершину конуса, перетинаючись з поверхнею конуса, утворює рівнобедрений трикутник, в якому кут при вершині дорівнює α. Знайти об'єм конуса.

12.065. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Знайти об'єм піраміди.

12.066. Через діагональ нижньої основи правильної чотирикутної призми і протилежну вершину її верхньої основи проведено площину. Кут між рівними сторонами перерізу дорівнює α. Знайти відношення висоти призми до сторони основи.

12.067. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагональ грані, протилежної даному куту, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм призми.

12.068. Бічне ребро правильної трикутної піраміди утворює з стороною основи кут α. Знайти кут між бічним ребром і висотою піраміди і допустимі значення α.

12.069. Площина, проведена паралельно осі циліндра, ділить коло основи у відношенні $m : n$. Площа перерізу дорівнює S. Знайти бічну поверхню циліндра.

12.070. Бічні ребра правильної трикутної піраміди попарно взаємно перпендикулярні. Знайти кут між бічною гранню і площиною основи.

12.071. У півкулю вписано конус; вершина конуса збігається з центром кола, яке є основою півкулі; площини основ конуса і півкулі паралельні. Пряма, яка проходить через центр основи конуса і довільну точку кола більшого круга півкулі, утворює з площиною основи конуса кут α. Знайти відношення об'ємів півкулі і конуса.

12.072. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гострим кутом α. Висота піраміди дорівнює H. Всі бічні ребра утворюють з площиною основи один і той самий кут, що дорівнює β. Знайти об'єм піраміди.

12.073. Твірна конуса дорівнює a, відстань від вершини конуса до центра вписаної сфери дорівнює b. Знайти кут між твірною і площиною основи.

12.074. У конус вписано кулю. Відношення радіуса кола дотику сферичної і конічної поверхонь до радіуса основи конуса дорівнює k. Знайти косинус кута між твірною конуса і площиною основи.

12.075. Площа основи циліндра відноситься до площі його осьового перерізу як $m : n$. Знайти кут між діагоналями осьового перерізу.

12.076. В основі прямої призми лежить ромб з гострим кутом α. Відношення висоти призми до сторони основи дорівнює k. Через сторону основи і середину протилежного бічного ребра проведено площину. Знайти кут між цією площиною і площиною основи.

12.077. Сторони основи прямого паралелепіпеда відносяться як $1 : 2$, гострий кут основи дорівнює α. Знайти кут між меншою діагоналлю паралелепіпеда і площиною основи, якщо висота паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі основи.

12.078. Відношення однієї із сторін основи трикутної піраміди до кожного з решти п'яти її ребер дорівнює k. Знайти двогранний кут між двома рівними бічними гранями піраміди і допустимі значення k.

12.079. Площина квадрата утворює кут α з площиною, яка проведена через одну з його сторін. Який кут утворює з тією самою площиною діагональ квадрата?

12.080. Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює стороні основи. Знайти кут між стороною основи і діагоналлю бічної грані, що не перетинає цю сторону.

12.081. Діагоналі бічних граней прямокутного паралелепіпеда утворюють з площиною основи кути α і β. Знайти кут між діагоналлю паралелепіпеда і площиною основи.

12.082. Знайти кут між перетинними діагоналями двох суміжних бічних граней правильної чотирикутної призми, якщо площина, в якій вони лежать, утворює з площиною основи кут α.

12.083. Знайти кут між апофемами двох суміжних бічних граней правильної n-кутної піраміди, якщо плоский кут при її вершині дорівнює α.

12.084. Знайти косинус кута між апофемою і діагоналлю основи правильної чотирикутної піраміди, в якій бічне ребро дорівнює стороні основи.

12.085. У конус вписано трикутну піраміду, бічні ребра якої попарно взаємно перпендикулярні. Знайти кут між твірною конуса і його висотою.

12.086. У грані двогранного кута, який дорівнює α, проведено пряму, що утворює кут β з ребром двогранного кута. Знайти кут між цією прямою і другою гранню.

12.087. Знайти кут між твірною і висотою конуса, бічна поверхня якого є середнім пропорційним між площею основи і повною поверхнею.

12.088. Усі бічні ребра трикутної піраміди утворюють з площиною основи один і той самий кут, який дорівнює одному з гострих кутів прямокутного трикутника, що лежить в основі піраміди. Знайти цей кут, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює c, а об'єм піраміди дорівнює V.

12.089. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює l і утворює з бічним ребром кут α. Знайти об'єм паралелепіпеда, якщо периметр його основи дорівнює P.

12.090. Площина, проведена через твірну циліндра, утворює з площиною осьового перерізу, який проходить через ту саму твірну, гострий кут α. Діагональ прямокутника, який є перерізом циліндра цією площиною, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм циліндра.

12.091. Сторона ромба дорівнює a, його гострий кут дорівнює α. Ромб обертається навколо прямої, яка проходить через його вершину паралельно більшій діагоналі. Знайти об'єм тіла обертання.

12.092*. Об'єм кулі дорівнює V. Знайти об'єм її сектора, центральний кут якого в осьовому перерізі дорівнює α.

12.093. Кут між висотою правильної трикутної піраміди і бічним ребром дорівнює α $(\alpha < \pi/4)$. В якому відношенні ділить висоту піраміди центр описаної сфери?

12.094. Основи двох конусів, які мають спільну вершину, лежать в одній площині. Різниця їхніх об'ємів дорівнює V. Знайти об'єм меншого конуса, якщо дотичні, проведені до кола його основи з довільної точки кола основи більшого конуса, утворюють кут α.

12.095. Бічна грань правильної зрізаної трикутної піраміди утворює з площиною основи гострий кут α. Знайти кут між висотою і бічним ребром піраміди.

12.096. У конус вписано півкулю. Великий круг півкулі лежить у площині основи конуса. Кульова поверхня дотикається до поверхні конуса. Знайти об'єм півкулі, якщо твірна конуса дорівнює l і утворює з площиною основи кут α.

12.097. Сторони основ правильної n-кутної зрізаної піраміди дорівнюють a і b. Бічна грань утворює з площиною основи кут α. Знайти бічну поверхню піраміди.

12.098. У кулю вписано конус. Площа осьового перерізу конуса дорівнює S, а кут між висотою і твірною дорівнює α. Знайти об'єм кулі.

12.099. Основою чотирикутної піраміди є ромб із стороною a і гострим кутом α. Усі бічні грані нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом β. Знайти повну поверхню піраміди.

12.100. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція, діагональ якої дорівнює a, а кут між діагоналлю і більшою основою дорівнює α. Діагональ призми нахилена до основи під кутом β. Знайти об'єм призми.

12.101. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a. Кут між перетинними діагоналями двох суміжних граней дорівнює α. Знайти об'єм призми.

12.102. Об'єм конуса дорівнює V. У конус вписано піраміду, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник з кутом α між бічними сторонами. Знайти об'єм піраміди.

12.103. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α, проведено площину. Знайти відношення площі перерізу до повної поверхні конуса, якщо твірна конуса утворює з площиною основи кут β.

12.104. Відношення бічної поверхні правильної трикутної піраміди до її основи дорівнює k. Знайти кут між бічним ребром і висотою піраміди.

12.105. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α, проведено площину, яка утворює з основою кут β. Знайти об'єм конуса, якщо його висота дорівнює h.

12.106. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює H, двогранний кут при основі дорівнює α. Знайти повну поверхню піраміди.

12.107. Навколо сфери описано зрізаний конус, в якому площа однієї основи в чотири рази більша за площу другої основи. Знайти кут між твірною конуса і площиною його основи.

12.108. Через сторону нижньої основи куба проведено площину, яка ділить об'єм куба у відношенні $m : n$, починаючи від нижньої основи. Знайти кут між цією площиною і площиною основи, якщо $m \leqslant n$.

12.109. Висота правильної трикутної призми дорівнює H. Площина, проведена через середню лінію нижньої основи і паралельну їй сторону верхньої основи, утворює з площиною нижньої основи гострий двогранний кут α. Знайти площу перерізу, утвореного цією площиною.

12.110. Знайти бічну поверхню зрізаного конуса, описаного навколо правильної трикутної зрізаної піраміди, знаючи, що гострий кут трапеції, яка є бічною гранню піраміди, дорівнює α, і що в цю трапецію можна вписати коло радіуса r.

12.111. Сторона основи трикутної піраміди дорівнює a, прилеглі до неї кути основи дорівнюють α і β. Усі бічні ребра утворюють з висотою піраміди один і той самий кут φ. Знайти об'єм піраміди.

12.112. Відстань від центра основи конуса до його твірної дорівнює d. Кут між твірною і висотою дорівнює α. Знайти повну поверхню конуса.

12.113. Основою піраміди $ABCD$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Бічне ребро AD перпендикулярне до основи. Знайти гострі кути трикутника ABC, якщо $\angle DBA = \alpha$ і $\angle DBC = \beta$ $(\alpha < \beta)$.

12.114. У правильній шестикутній призмі площина, яку проведено через сторону основи і середину відрізка, що сполучає центри основ, утворює з площиною основи гострий кут α. Знайти площу перерізу, утвореного цією площиною, якщо сторона основи призми дорівнює a.

12.115. У конус вписано сферу, поверхня якої дорівнює площі основи конуса. Знайти косинус кута при вершині в осьовому перерізі конуса.

12.116. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює a, а кут між бічними сторонами дорівнює α. Знайти об'єм призми, якщо її бічна поверхня дорівнює S.

12.117. Основою піраміди, вписаної в конус, є чотирикутник, в якому суміжні сторони попарно рівні, а кут між однією парою суміжних сторін дорівнює α. Знайти відношення об'єму піраміди до об'єму конуса.

12.118. Знайти косинус кута між суміжними гранями правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює стороні основи.

12.119. У конус вписано сферу. Радіус кола, по якому дотикаються конус і сфера, дорівнює r. Знайти об'єм конуса, якщо кут між висотою і твірною конуса дорівнює α.

12.120. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює m і нахилене до площини основи під кутом α. Знайти об'єм піраміди.

12.121. Основою піраміди є правильний трикутник із стороною a. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а рівні бічні ребра утворюють між собою кут α. Знайти висоту прямої трикутної призми, яка рівновелика даній піраміді і має з нею спільну основу.

12.122. Знайти об'єм конуса, якщо в його основі хорда, що дорівнює a, стягує дугу в $\alpha°$, а висота конуса утворює з твірною кут β.

12.123. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 2α, а сума довжин його висоти і твірної дорівнює a. Знайти об'єм конуса.

12.124. Знайти повну поверхню прямого паралелепіпеда, якщо в основі його лежить ромб з гострим кутом α і меншою діагоналлю d, а висота паралелепіпеда в два рази менша від сторони основи.

12.125. У правильній дванадцятикутній піраміді, ребра якої пронумеровані підряд, проведено переріз через перше і п'яте ребра. Площина перерізу утворює з площиною основи піраміди кут α, а площа цього перерізу дорівнює S. Знайти об'єм піраміди.

12.126. Знайти кут в осьовому перерізі конуса, якщо сфера з центром у вершині конуса, яка дотикається до його основи, ділить об'єм конуса пополам.

12.127. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник, діагоналі якого перетинаються під кутом α. Довжина діагоналі дорівнює d. Знайти бічну поверхню циліндра.

12.128. У конус, твірна якого дорівнює l, вписано правильну шестикутну призму з рівними ребрами. Знайти бічну поверхню призми, якщо кут між твірною і висотою конуса дорівнює α.

12.129. Знайти об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо сторона її основи дорівнює a, а двогранний кут при основі дорівнює α.

12.130. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник, у якому діагональ дорівнює a і утворює з основою кут α. Знайти об'єм циліндра.

Група Б

12.131. У гострокутному трикутнику ABC висота $AD = a$, висота $CE = b$, гострий кут між AD і CE дорівнює α. Знайти AC.

12.132. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α. Знайти відношення радіуса вписаного в трикутник кола до радіуса описаного кола. При якому значенні α це відношення найбільше?

12.133. Дуга AB сектора AOB містить α радіанів. Через точку B і середину C радіуса OA проведено пряму. В якому відношенні вона ділить площу сектора?

12.134. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b $(a > b)$, кут при більшій основі дорівнює α. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

12.135. Знайти відношення площі сектора з даним центральним кутом α радіанів до площі вписаного в нього круга.

12.136. Бічні сторони трапеції дорівнюють p і q $(p < q)$, більша основа дорівнює a. Кути при більшій основі відносяться як 2 : 1. Знайти меншу основу.

12.137. Площа рівнобічної трапеції дорівнює S. Кут між її діагоналями, протилежний бічній стороні, дорівнює α. Знайти висоту трапеції.

12.138. Більша основа вписаної в коло трапеції дорівнює діаметру кола, а кут при цій основі дорівнює α. В якому відношенні точка перетину діагоналей трапеції ділить її висоту?

12.139. У рівносторонній трикутник ABC вписано рівносторонній трикутник $A_1B_1C_1$; точка A_1 лежить на стороні BC, точка B_1 — на стороні AC і точка C_1 — на стороні AB. Кут $A_1B_1C_1$ дорівнює α. Знайти відношення AB до A_1B_1.

12.140. В якому відношенні ділить висоту рівнобедреного трикутника ABC точка O, з якої всі три сторони видно під одним і тим самим кутом $(\angle AOB = \angle BOC = \angle COA)$, якщо кут при основі трикутника дорівнює α $(\alpha > \pi/6)$?

12.141. Висота рівнобедреного трикутника дорівнює h і утворює з бічною стороною кут α $(\alpha \leqslant \pi/6)$. Знайти відстань між центрами вписаного в трикутник і описаного навколо нього кіл.

12.142. У коло радіуса R вписано трикутник, вершини якого ділять коло на три частини у відношенні 2 : 5 : 17. Знайти площу трикутника.

12.143. Тангенс кута при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 3/4. Знайти тангенс кута між медіаною і бісектрисою, проведеними до бічної сторони.

12.144. Знайти синус кута при вершині рівнобедреного трикутника, якщо медіана, проведена до бічної сторони, утворює з основою кут, синус якого дорівнює 3/5.

12.145. Через вершину кута α при основі рівнобедреного трикутника проведено пряму, яка перетинає протилежну бічну сторону і утворює з основою кут β. В якому відношенні ця пряма ділить площу трикутника?

12.146. Через вершини рівностороннього трикутника ABC проведено паралельні прямі AD, BE і CF. Пряма BE лежить між прямими AD і CF і ділить відстань між ними у відношенні $m : n$, починаючи від прямої AD. Знайти кут BCF.

12.147. Знайти косинус гострого кута ромба, якщо пряма, проведена через його вершину, ділить кут у відношенні 1 : 3, а протилежну сторону — у відношенні 3 : 5.

12.148. Відношення площі прямокутника $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ до квадрата його діагоналі дорівнює k. Знайти кут EAF, де E і F — відповідно середини сторін BC і CD.

12.149. Навколо кола радіуса r описано рівнобічну трапецію. Бічна сторона трапеції утворює з меншою основою кут α. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

12.150. Висота трикутника ділить кути трикутника у відношенні 2 : 1, а основу — на відрізки, відношення яких (більшого до меншого) дорівнює k. Знайти синус меншого кута при основі і допустимі значення k.

12.151. Гіпотенуза прямокутного трикутника ділиться точкою дотику вписаного кола на відрізки, відношення яких дорівнює k. Знайти кути трикутника.

12.152. Відношення бічних сторін трапеції дорівнює відношенню її периметра до довжини вписаного кола і дорівнює k. Знайти кути трапеції і допустимі значення k.

12.153. У сектор радіуса R вписано коло радіуса r. Знайти периметр сектора.

12.154. У гострокутному рівнобедреному трикутнику радіус вписаного кола в 4 рази менший за радіус описаного кола. Знайти кути трикутника.

12.155. У трикутнику ABC дано гострі кути α і γ $(\alpha > \gamma)$, які прилягають до сторони AC. З вершини B проведено медіану BD і бісектрису BE. Знайти відношення площі трикутника BDE до площі трикутника ABC.

12.156. Кут при вершині A трапеції $ABCD$ дорівнює α. Бічна сторона AB вдвічі більша за меншу основу BC. Знайти кут BAC.

12.157. У прямокутному трикутнику знайти кут між медіаною і бісектрисою, проведеними з вершини гострого кута, який дорівнює α.

12.158. Знайти косинуси гострих кутів прямокутного трикутника, знаючи, що добуток тангенсів половини цих кутів дорівнює 1/6.

12.159. Сторони паралелограма відносяться як $p : q$, а діагоналі — як $m : n$. Знайти кути паралелограма.

12.160. Відношення периметра ромба до суми його діагоналей дорівнює k. Знайти кути ромба і допустимі значення k.

12.161. Знайти косинуси кутів рівнобедреного трикутника, в якому точка перетину висот ділить пополам висоту, проведену до основи.

12.162. Периметр сектора дорівнює l. Знайти відстань від вершини центрального кута сектора до центра кола, вписаного в цей сектор, якщо радіус дуги сектора дорівнює R.

12.163. Показати, що коли в трикутнику відношення суми синусів двох кутів до суми косинусів їх дорівнює синусу третього кута, то трикутник є прямокутним.

12.164. Знайти синус кута ромба, якщо з середини його сторони протилежну сторону видно під кутом α.

12.165. Сторона трикутника дорівнює a, різниця кутів, прилеглих до даної сторони, дорівнює $\pi/2$. Знайти кути трикутника, якщо його площа дорівнює S.

12.166. Тангенс гострого кута між медіанами прямокутного трикутника, які проведено до його катетів, дорівнює k. Знайти кути трикутника і допустимі значення k.

12.167. Радіус дуги сектора дорівнює R, центральний кут AOB дорівнює α. Через середину C радіуса OA проведено пряму, яка паралельна радіусу OB і перетинає дугу AB у точці D. Знайти площу трикутника OCD.

12.168. У трикутнику дано сторону a, протилежний їй кут α і висоту h, проведену до даної сторони. Знайти суму двох інших сторін.

12.169. У квадрат $ABCD$ вписано рівнобедрений трикутник AEF; точка E лежить на стороні BC, точка F — на стороні CD і $AE = EF$. Тангенс кута AEF дорівнює 2. Знайти тангенс кута FEC.

12.170. У трикутнику ABC дано гострі кути α і γ $(\alpha > \gamma)$ при основі AC. З вершини B проведено висоту BD і медіану BE. Знайти площу трикутника BDE, якщо площа трикутника ABC дорівнює S.

12.171. У прямокутному трикутнику ABC гострий кут при вершині A дорівнює α. Через середину D гіпотенузи AB проведено пряму, яка перетинає катет AC у точці E. В якому відношенні ця пряма ділить площу трикутника ABC, якщо $\angle DEA = \beta$, $AE > 0{,}5AC$?

12.172. У круг вписано трапецію. Більша основа трапеції утворює з бічною стороною кут α, а з діагоналлю — кут β. Знайти відношення площі круга до площі трапеції.

12.173. У трикутнику ABC кут A дорівнює α і сторона $BC = a$. Знайти довжину бісектриси AD, якщо кут між бісектрисою AD і висотою AE дорівнює β.

12.174. Рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині перетинається прямою, яка проходить через вершину кута при основі і утворює з основою кут β. В якому відношенні ця пряма ділить площу трикутника?

12.175. Радіус дуги сектора AOB дорівнює R, центральний кут AOB дорівнює α. У цей сектор вписано правильний трикутник так, що одна його вершина збігається з серединою дуги AB, а дві інші вершини лежать відповідно на радіусах OA і OB. Знайти сторони трикутника.

12.176. У рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при основі вписано коло. Знайти радіус кола, яке дотикається до вписаного кола і до бічних сторін трикутника.

12.177. Усередині даного кута α розміщено точку на відстані a від вершини і на відстані b від однієї з сторін. Знайти відстань від цієї точки до другої сторони.

12.178. У прямокутному трикутнику ABC проведено бісектрису AD гострого кута A, який дорівнює α. Знайти відношення радіусів кіл, вписаних у трикутники ABD і ADC.

12.179. Знайти синус кута при вершині рівнобедреного трикутника, знаючи, що периметр будь-якого вписаного в нього прямокутника, дві вершини якого лежать на основі, має стале значення.

12.180. Сторона трикутника дорівнює 15, сума двох інших сторін дорівнює 27. Знайти косинус кута, протилежного даній стороні, якщо радіус вписаного в трикутник кола дорівнює 4.

12.181. Менша дуга кола, що стягується хордою AB, має α градусів. Через середину C хорди AB проведено хорду DE так, що $DC : CE = 1 : 3$. Знайти гострий кут ACD і допустимі значення α.

12.182. Медіана BD трикутника ABC перетинається з бісектрисою CE у точці K. Знайти $CK : KE$, якщо $\angle A = \alpha$ і $\angle B = \beta$.

12.183. Площа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 8, а медіана, проведена до його бічної сторони, дорівнює $\sqrt{37}$. Знайти косинус кута при вершині.

12.184. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α. Висота, опущена на основу, більша за радіус вписаного кола на m. Знайти радіус описаного кола.

12.185. У трикутнику відомо площу S, сторону a і протилежний їй кут α. Знайти суму двох інших сторін.

12.186. Нехай OA — нерухомий радіус кола з центром у точці O; B — середина радіуса OA; M — довільна точка кола. Знайти найбільше значення кута OMB.

12.187. У рівнобедреному гострокутному трикутнику кут при основі дорівнює α, а площа дорівнює S. Знайти площу трикутника, вершинами якого є основи висот даного трикутника.

12.188. Нехай a, b, c — сторони гострокутного трикутника; A, B, C — кути, протилежні сторонам; P_a, P_b, P_c — відстані від центра описаного кола до відповідних сторін. Припускаючи, що $A < B < C$, розмістити у порядку зростання P_a, P_b, P_c.

12.189. Промінь, який проведено з вершини рівностороннього трикутника, ділить його основу у відношенні $m : n$. Знайти тупий кут між променем і основою.

12.190. Через вершину рівностороннього трикутника проведено пряму, яка ділить основу у відношенні 2 : 1. Під якими кутами вона нахилена до бічних сторін трикутника?

12.191. Основа трикутника дорівнює a, а кути при основі дорівнюють α і β радіанів. Із протилежної вершини трикутника радіусом, що дорівнює його висоті, проведено коло. Знайти довжину дуги цього кола, розміщеної усередині трикутника.

12.192. Дано дві сторони a і b трикутника і бісектрису l кута між ними. Знайти цей кут.

12.193. Основа трикутника дорівнює 4, а його медіана дорівнює $\sqrt{6}-\sqrt{2}$. Один з кутів при основі дорівнює 15°. Показати, що гострий кут між основою трикутника і його медіаною дорівнює 45°.

12.194. У трапеції менша основа дорівнює 2, прилеглі кути — по 135°. Кут між діагоналями, повернутий до основи, дорівнює 150°. Знайти площу трапеції.

12.195. Довести, що коли бісектриса одного з кутів трикутника дорівнює добутку сторін кута, поділеному на суму їх, то цей кут дорівнює 120°.

12.196. Відомо, що в трикутнику ABC сторона $AB = a$, $\angle C = \alpha$. Знайти радіус кола, яке проходить через вершини A, B і центр кола, вписаного в трикутник ABC.

12.197. У трикутнику ABC проведено висоту BM і на ній, як на діаметрі, побудовано коло, яке перетинає сторону AB у точці K, а сторону BC — у точці Z. Знайти відношення площі трикутника KZM до площі трикутника ABC, якщо $\angle A = \alpha$ і $\angle C = \beta$.

12.198. У ромб вписано коло. В утворений криволінійний трикутник (з гострим кутом) знову вписано коло. Знайти його радіус, якщо висота ромба дорівнює h, а гострий кут дорівнює α.

12.199. Основа трикутника дорівнює a, а прилеглі до неї кути дорівнюють 45° і 15°. Із вершини, протилежної основі, проведено коло радіусом, що дорівнює висоті, опущеній на цю основу. Знайти площу частини відповідного круга, що розміщена усередині трикутника.

12.200. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. У цю піраміду вписано куб так, що чотири його вершини лежать на апофемах піраміди, чотири — на основі піраміди. Знайти ребро куба.

12.201. Площа бічної грані правильної дванадцятикутної піраміди дорівнює S. Плоский кут при вершині дорівнює α. Знайти об'єм піраміди.

12.202. У відкритому конусі розміщено кулю так, що їхні поверхні дотикаються. Радіус кулі дорівнює R, а кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 2α. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями кулі і конуса.

12.203. Знайти об'єм і бічну поверхню правильної трикутної піраміди, якщо площина, яка проходить через сторону a основи і середину її висоти, нахилена до основи під кутом φ.

12.204. Знайти об'єм правильної чотирикутної призми, якщо кут між діагоналлю призми і бічною гранню дорівнює α, а сторона основи дорівнює a.

12.205. В основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) лежить прямокутний трикутник ABC, більший катет AB якого дорівнює a, а протилежний йому кут C дорівнює α. Гіпотенуза BC є діаметром основи конуса, вершина якого лежить на ребрі A_1B_1. Знайти висоту конуса, якщо $AA_1 = a/2$.

12.206. Через вершину правильної трикутної піраміди і середини двох сторін основи проведено переріз. Знайти площу перерізу і об'єм піраміди, якщо відомо сторону a основи і кут α між площинами перерізу і основи.

12.207. Із основи висоти правильної трикутної піраміди на бічне ребро опущено перпендикуляр, що дорівнює p. Знайти об'єм піраміди, якщо двогранний кут між її бічними гранями дорівнює α.

12.208. Із основи висоти правильної трикутної піраміди на бічне ребро опущено перпендикуляр, що дорівнює p. Знайти об'єм піраміди, якщо двогранний кут між бічною гранню і основою піраміди дорівнює α.

12.209. Знайти бічну поверхню і об'єм прямого паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює h, діагоналі утворюють з основою кути α і β, а в основі лежить ромб.

12.210. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює a, а кут при основі дорівнює α. Знайти об'єм призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює сумі площ основ.

12.211. Основою піраміди є ромб з гострим кутом α. Знайти об'єм піраміди, якщо її бічні грані утворюють з основою один і той самий двогранний кут β, а радіус вписаної в неї сфери дорівнює r.

12.212. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, рівні сторони якого мають довжину b; відповідні їм бічні грані перпендикулярні до площини основи і утворюють між собою кут α. Кут між третьою бічною гранню і площиною основи також дорівнює α. Знайти радіус сфери, вписаної в піраміду.

12.213. Із основи висоти правильної трикутної піраміди на бічну грань опущено перпендикуляр, який дорівнює a. Знайти об'єм піраміди, якщо кут нахилу бічного ребра до площини основи дорівнює α.

12.214. Основою піраміди є ромб із стороною a і гострим кутом α. Дві бічні грані перпендикулярні до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом φ. Знайти об'єм і бічну поверхню піраміди.

12.215. У правильній трикутній піраміді з кутом α між бічним ребром і стороною основи проведено переріз через середину бічного ребра паралельно бічній грані. Знаючи площу S цього перерізу, знайти об'єм піраміди. Вказати множину можливих значень α.

12.216. Перпендикуляр, опущений з центра основи конуса на твірну, обертається навколо осі конуса. Знайти кут між його твірною і віссю, якщо поверхня обертання ділить об'єм конуса пополам.

12.217. Знайти кут між твірною і основою зрізаного конуса, повна поверхня якого вдвічі більша за поверхню вписаної в нього сфери.

12.218. Основою прямої призми є трикутник із стороною a і прилеглими до неї кутами α і β. Через цю сторону основи під кутом φ до неї проведено площину, яка перетинає протилежне бічне ребро. Знайти об'єм утвореної трикутної піраміди.

12.219*. Обертанням кругового сектора навколо одного з крайніх радіусів утворено тіло, площа сферичної поверхні якого дорівнює площі конічної поверхні. Знайти синус центрального кута кругового сектора.

12.220. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди утворює з площиною основи кут α. Через вершину основи і середину протилежного бічного ребра проведено площину паралельно одній з діагоналей основи. Знайти кут між цією площиною і площиною основи піраміди.

12.221. Основами зрізаної піраміди є правильні трикутники. Пряма, яка проходить через середину однієї сторони верхньої основи і середину паралельної їй сторони нижньої основи, перпендикулярна до площин основ. Більше бічне ребро дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Знайти довжину відрізка, який сполучає центри верхньої і нижньої основ.

12.222. В основі піраміди лежить ромб, один з кутів якого дорівнює α. Бічні грані однаково нахилені до площини основи. Через середини двох суміжних сторін основи і вершину піраміди проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β. Площа утвореного перерізу дорівнює S. Знайти сторону ромба.

12.223. Основою піраміди є ромб з гострим кутом α. Всі бічні грані утворюють з площиною основи один і той самий кут β. Площа перерізу, проведеного через більшу діагональ основи і вершину піраміди, дорівнює S. Знайти об'єм піраміди.

12.224. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α, а бічна поверхня дорівнює S. Знайти відстань від центра основи до бічної грані.

12.225. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює H. Бічна грань утворює з площиною основи кут α. Через сторону основи і середину протилежного бічного ребра проведено площину. Знайти площу утвореного перерізу.

12.226. В основі трикутної піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом при вершині α; площа його дорівнює S. Знайти об'єм піраміди, якщо кут між кожним бічним ребром і висотою піраміди дорівнює β.

12.227. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, у якої бічна сторона дорівнює a, а гострий кут дорівнює α. Усі бічні грані утворюють з основою піраміди один і той самий кут β. Знайти повну поверхню піраміди.

12.228. Двогранний кут при основі правильної трикутної піраміди дорівнює α, бічна поверхня піраміди дорівнює S. Знайти відстань від центра основи до середини апофеми бічної грані.

12.229. Плоский кут при вершині правильної n-кутної піраміди дорівнює α. Відрізок прямої, що сполучає центр основи піраміди з серединою бічного ребра, дорівнює a. Знайти повну поверхню піраміди.

12.230. Два конуси мають концентричні основи та один і той самий кут α між висотою і твірною. Радіус основи зовнішнього конуса дорівнює R. Бічна поверхня внутрішнього конуса вдвічі менша від повної поверхні зовнішнього конуса. Знайти об'єм внутрішнього конуса.

12.231. У циліндр вписано прямокутний паралелепіпед, діагональ якого утворює з прилеглими до неї сторонами основи кути α і β. Знайти відношення об'єму паралелепіпеда до об'єму циліндра.

12.232. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гострим кутом α. Цей трикутник є вписаним у основу конуса. Вершина піраміди збігається з серединою однієї з твірних конуса. Знайти відношення об'єму конуса до об'єму піраміди.

12.233. У правильну чотирикутну піраміду вписано куб; вершини його верхньої основи лежать на бічних ребрах, вершини нижньої основи — в площині основи піраміди. Знайти відношення об'єму куба до об'єму піраміди, якщо бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут α.

12.234. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a; бічна грань утворює з площиною основи кут α. Знайти радіус описаної сфери.

12.235. Кут між бічним ребром правильної чотирикутної піраміди і площиною основи дорівнює плоскому куту при вершині піраміди. Знайти кут між бічною гранню і площиною основи.

12.236*. Знайти відношення об'єму кульового сегмента до об'єму всієї кулі, якщо дуга в осьовому перерізі сегмента відповідає центральному куту, який дорівнює α.

12.237. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c, його гострий кут дорівнює α. Трикутник обертається навколо бісектриси зовнішнього прямого кута. Знайти об'єм тіла обертання.

12.238. У зрізаний конус вписано сферу. Сума діаметрів верхньої і нижньої основ конуса у п'ять разів більша за радіус сфери. Знайти кут між твірною конуса і площиною основи.

12.239. Відношення поверхні сфери, вписаної в конус, до площі основи конуса дорівнює k. Знайти косинус кута між твірною конуса і площиною його основи та допустимі значення k.

12.240. Відношення об'єму кулі, вписаної в конус, до об'єму описаної кулі дорівнює k. Знайти кут між твірною конуса і площиною його основи та допустимі значення k.

12.241. У сферу, радіус якої дорівнює R, вписано конус; у цей конус вписано циліндр з квадратним осьовим перерізом. Знайти повну поверхню циліндра, якщо кут між твірною конуса і площиною його основи дорівнює α.

12.242. У півкулю вписано тіло, яке складається з циліндра і поставленого на нього конуса. Нижня основа циліндра лежить у площині великого круга півкулі; верхня основа циліндра збігається з основою конуса і дотикається до поверхні кулі. Вершина конуса лежить на поверхні кулі. Твірна конуса утворює з площиною його основи кут α. Знайти відношення об'єму тіла до об'єму півкулі.

12.243. Бічна грань правильної зрізаної трикутної піраміди утворює з площиною основи кут α. Знайти відношення повної поверхні піраміди до поверхні вписаної в неї сфери.

12.244. У конус вписано сферу. Радіус кола дотику сфери і бічної поверхні конуса дорівнює r. Пряма, яка проходить через центр сфери і довільну точку кола основи конуса, утворює з висотою конуса кут α. Знайти об'єм конуса.

12.245. Відношення об'єму конуса до об'єму вписаної в нього кулі дорівнює k. Знайти кут між твірною і площиною основи конуса та допустимі значення k.

12.246. Знайти кут між твірною конуса і площиною основи, якщо бічна поверхня конуса дорівнює сумі площ основи і осьового перерізу.

12.247. Кут між висотою і твірною конуса дорівнює α. У конус вписано правильну трикутну призму; нижня основа призми лежить у площині основи конуса. Бічні грані призми — квадрати. Знайти відношення бічних поверхонь призми і конуса.

12.248. Навколо сфери описано пряму призму, основою якої є ромб. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут α. Знайти гострий кут ромба.

12.249. Бічне ребро правильної зрізаної чотирикутної піраміди утворює з площиною основи кут α. У піраміду вписано прямокутний паралелепіпед так, що верхня основа його суміщається з верхньою основою піраміди, а нижня основа лежить у площині нижньої основи піраміди. Знайти відношення бічних поверхонь піраміди і паралелепіпеда, якщо діагональ паралелепіпеда утворює з його основою кут β.

12.250. У конус вміщено піраміду; основа піраміди вписана в основу конуса, а вершина піраміди лежить на одній з твірних конуса. Всі бічні грані піраміди однаково нахилені до площини основи. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом α ($\alpha \geqslant \pi/3$) при вершині. Знайти відношення об'ємів конуса і піраміди.

12.251. Центр сфери, вписаної в правильну чотирикутну піраміду, ділить висоту піраміди у відношенні $m : n$, починаючи від вершини піраміди. Знайти кут між двома суміжними бічними гранями.

12.252. Відношення сторони основи правильної n-кутної піраміди до радіуса описаної сфери дорівнює k. Знайти кут між бічним ребром і площиною основи та допустимі значення k.

12.253. У конус вписано циліндр; нижня основа циліндра лежить у площині основи конуса. Пряма, яка проходить через центр верхньої основи циліндра і точку на колі основи конуса, утворює з площиною основи кут α. Знайти відношення об'ємів конуса циліндра, якщо кут між твірною і висотою конуса дорівнює β.

12.254. Основою піраміди є ромб з гострим кутом α. Всі бічні грані утворюють з площиною основи один і той самий кут β. Знайти радіус сфери, вписаної в піраміду, якщо об'єм піраміди дорівнює V.

12.255. Дві грані трикутної піраміди — рівні між собою прямокутні трикутники із спільним катетом, що дорівнює l. Кут між цими гранями дорівнює α. Дві інші грані піраміди утворюють двогранний кут β. Знайти радіус сфери, описаної навколо піраміди.

12.256. Основою піраміди є прямокутник, в якому кут між діагоналями дорівнює α. Одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи, а найбільше бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Радіус сфери, описаної навколо піраміди, дорівнює R. Знайти об'єм піраміди.

12.257. Основою піраміди є прямокутний трикутник, вписаний в основу конуса. Вершина піраміди збігається з вершиною конуса. Бічні грані піраміди, на яких лежать катети основи, утворюють з площиною основи кути α і β. Знайти відношення об'ємів піраміди і конуса.

12.258. Сторона квадрата, який лежить в основі правильної чотирикутної піраміди, дорівнює a. У піраміду вписано правильну чотирикутну призму; вершини верхньої основи лежать на бічних ребрах, вершини нижньої основи — у площині основи піраміди. Діагональ призми утворює з площиною основи кут φ. Знайти об'єм призми, якщо бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут α.

12.259. Сторона нижньої основи правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнює a, сторона верхньої основи дорівнює b. Бічна грань утворює з площиною основи кут α. Через сторону нижньої основи і середину відрізка, який сполучає центри основ, проведено площину, що перетинає протилежну бічну грань по деякій прямій. Знайти відстань від цієї прямої до нижньої основи.

12.260. Дві бічні грані зрізаної трикутної піраміди — це рівні прямокутні трапеції з гострим кутом α і спільною меншою бічною стороною. Двогранний кут між цими гранями дорівнює β. Знайти кут між третьою бічною гранню і площиною основи.

12.261. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α, проведено площину. Площа перерізу відноситься до площі повної поверхні конуса як $2 : \pi$. Знайти кут між твірною і висотою конуса.

12.262. Бічна грань правильної чотирикутної зрізаної піраміди утворює з площиною основи кут α. Площина, проведена через сторону нижньої основи і паралельну їй сторону верхньої основи, утворює з площиною основи кут β. Бічна поверхня піраміди дорівнює S. Знайти сторони верхньої і нижньої основ.

12.263. Висота правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнює H і є середнім пропорційним між сторонами основ. Бічне ребро утворює з основою кут α. Знайти об'єм піраміди.

12.264. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди відносяться як $m : n$ $(m > n)$. Висота піраміди дорівнює H. Бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайти бічну поверхню піраміди.

12.265. Через вершину конуса проведено площину, яка ділить коло основи у відношенні $p:q$. Ця площина розміщена на відстані a від центра основи конуса і утворює з висотою конуса кут α. Знайти об'єм конуса.

12.266. Основою піраміди є правильний трикутник. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи. Сума двох нерівних між собою плоских кутів при вершині дорівнює $\pi/2$. Знайти ці кути.

12.267. Відношення повної поверхні конуса до площі осьового перерізу дорівнює k. Знайти кут між висотою і твірною конуса та допустимі значення k.

12.268. Одна з граней трикутної призми, вписаної в циліндр, проходить через вісь циліндра. Діагональ цієї грані утворює з протилежними їй сторонами основи призми кути α і β. Знайти об'єм призми, якщо висота циліндра дорівнює H.

12.269. Дві вершини рівностороннього трикутника із стороною a лежать на колі верхньої основи циліндра, а третя вершина — на колі нижньої основи. Площина трикутника утворює з твірною циліндра кут α. Знайти бічну поверхню циліндра.

12.270. Знайти плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди, якщо він дорівнює куту між бічним ребром і площиною основи піраміди.

12.271. Відрізок прямої, який сполучає точку кола верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Знайти відстань від цієї прямої до осі циліндра, якщо осьовим перерізом циліндра є квадрат. Вказати множину можливих значень α.

12.272. Основою піраміди є прямокутник. Кожне з бічних ребер дорівнює l і утворює з прилеглими сторонами основи кути α і β. Знайти об'єм піраміди.

12.273. Точка A лежить на колі верхньої основи циліндра, точка B — на колі нижньої основи. Пряма AB утворює з площиною основи кут α, а з площиною осьового перерізу, проведеного через точку B,— кут β. Знайти об'єм циліндра, якщо довжина відрізка AB дорівнює l.

12.274. У конус вписано куб (одна з граней куба лежить у площині основи конуса). Відношення висоти конуса до ребра куба дорівнює k. Знайти кут між твірною і висотою конуса.

12.275. Основою піраміди є прямокутник. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, дві інші утворюють з нею кути α і β. Знайти бічну поверхню піраміди, якщо висота піраміди дорівнює H.

12.276. Одна з сторін основи прямої трикутної призми дорівнює a, а прилеглі до неї кути дорівнюють α і β. Знайти бічну поверхню призми, якщо її об'єм дорівнює V.

12.277. Одне бічне ребро трикутної піраміди перпендикулярне до площини основи і дорівнює l, два інших утворюють між собою кут α, а з площиною основи — один і той самий кут β. Знайти об'єм піраміди.

12.278. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, гострий кут якої дорівнює α, а площа дорівнює S. Всі бічні грані утворюють з площиною основи один і той самий кут β. Знайти об'єм піраміди.

12.279. Косинус кута між двома суміжними бічними гранями правильної чотирикутної піраміди дорівнює k. Знайти косинус кута між бічною гранню і площиною основи та допустимі значення k.

12.280. Основою піраміди є прямокутник $ABCD$ $(AB \parallel CD)$.

Бічне ребро OA перпендикулярне до основи. Ребра OB і OC утворюють з основою кути, які відповідно дорівнюють α і β. Знайти кут між ребром OD і основою.

12.281. Через діагональ основи і висоту правильної чотирикутної піраміди проведено площину. Відношення площі перерізу до бічної поверхні піраміди дорівнює k. Знайти косинус кута між апофемами протилежних бічних граней. Вказати допустимі значення k.

12.282. Бічне ребро правильної трикутної піраміди вдвічі більше за сторону основи. Знайти кут між апофемою піраміди і висотою трикутника, який лежить в основі піраміди, якщо ці апофема і висота не перетинаються.

12.283. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Кут між суміжними бічними гранями дорівнює α. Знайти бічну поверхню піраміди.

12.284. У правильній трикутній піраміді проведено площину через бічне ребро і висоту. Відношення площі перерізу до повної поверхні піраміди дорівнює k. Знайти двогранний кут при основі. Вказати допустимі значення k.

12.285. Кут між висотою і твірною конуса дорівнює α. Через вершину конуса проведено площину, яка утворює кут β з висотою ($\beta < \alpha$). В якому відношенні ця площина ділить коло основи.

12.286. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, в якому гострий кут між рівними сторонами дорівнює α. Всі бічні ребра утворюють з площиною основи один і той самий кут β. Через сторону основи, протилежну даному куту α, і середину висоти піраміди проведено площину. Знайти кут між цією площиною і площиною основи.

12.287. Ребра прямокутного паралелепіпеда відносяться як $3 : 4 : 12$. Через більше ребро проведено діагональний переріз. Знайти синус кута між площиною цього перерізу і діагоналлю паралелепіпеда, яка не лежить в площині перерізу.

12.288. Бічна грань правильної трикутної піраміди утворює з площиною основи кут, тангенс якого дорівнює k. Знайти тангенс кута між бічним ребром і апофемою протилежної грані.

12.289. Всі бічні грані піраміди утворюють з площиною основи один і той самий кут. Знайти цей кут, якщо відношення повної поверхні піраміди до площі основи дорівнює k. При яких значеннях k задача має розв'язок?

12.290. Відношення повної поверхні правильної n-кутної піраміди до площі основи дорівнює t. Знайти кут між бічним ребром і площиною основи.

12.291. Косинус кута між бічними ребрами правильної чотирикутної піраміди, що не належать одній грані, дорівнює k. Знайти косинус плоского кута при вершині піраміди.

12.292. Через сторону ромба проведено площину, яка утворює з діагоналями кути α і 2α. Знайти гострий кут ромба.

12.293. Основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) є рівнобедрений трикутник, в якому $AB = AC = a$ і $\angle CAB = \alpha$. Вершина B_1 верхньої основи рівновіддалена від усіх сторін нижньої основи, а ребро BB_1 утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм призми.

12.294. Основою похилої призми є рівнобічна трапеція, бічна сторона і менша основа якої дорівнюють a, а гострий кут дорівнює β. Одна з вершин верхньої основи призми рівновіддалена від усіх вершин нижньої основи. Знайти об'єм призми, якщо бічне ребро утворює з площиною основи кут α.

12.295. Основою прямої призми, описаної навколо кулі радіуса r, є прямокутний трикутник з гострим кутом α. Знайти об'єм призми.

12.296. Діагоналі AB_1 і CB_1 двох суміжних бічних граней прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утворюють з діагоналлю AC основи $ABCD$ кути, які дорівнюють відповідно α і β. Знайти кут між площиною трикутника AB_1C і площиною основи.

12.297. Сторона основи в правильній трикутній призмі дорівнює a, кут між діагоналями двох бічних граней (діагоналі не перетинаються) дорівнює α. Знайти висоту призми.

12.298. У прямокутному трикутнику через його гіпотенузу проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут α, а з одним з катетів — кут β. Знайти кут між цією площиною і другим катетом.

12.299. У прямокутному трикутнику з гострим кутом α через найменшу медіану проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут β. Знайти кути між цією площиною і катетами трикутника.

12.300. Знайти косинус кута між діагоналями, що не перетинаються, двох суміжних бічних граней правильної трикутної призми, бічне ребро якої дорівнює стороні основи.

12.301. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом α між бічними сторонами. Діагональ бічної грані, протилежної даному куту, утворює з суміжною бічною гранню кут φ. Знайти об'єм призми.

12.302. В основі прямої призми лежить трикутник. Два його кути дорівнюють α і β, а площа дорівнює S. Пряма, яка проходить через вершину верхньої основи і центр кола, описаного навколо нижньої основи, утворює з площиною основи кут φ. Знайти об'єм призми.

12.303. Основою похилої призми є прямокутник із сторонами a і b. Дві суміжні бічні грані утворюють з площиною основи кути α і β. Знайти об'єм призми, якщо бічне ребро дорівнює c.

12.304. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює l і утворює з двома суміжними гранями кути α і β. Знайти об'єм паралелепіпеда.

12.305. У правильній трикутній призмі площина, яку проведено через центр основи і центри симетрії двох бічних граней, утворює з площиною основи гострий кут α. Знайти площу перерізу, утвореного цією площиною, якщо сторона основи дорівнює a.

12.306. У прямій призмі $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) сторони основи AB і BC дорівнюють відповідно a і b, а кут між ними дорівнює α. Через бісектрису даного кута і вершину A_1 проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β. Знайти площу перерізу.

12.307. В основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) лежить рівнобедрений трикутник ABC з кутом α між рівними сторонами AB і AC. Відрізок прямої, що сполучає вершину A_1 верхньої основи з центром кола, описаного навколо нижньої основи, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм призми.

12.308. Основою призми є правильний трикутник із стороною a. Бічне ребро дорівнює b і утворює з сторонами основи, які перетинають його, кути, кожний з яких дорівнює α. Знайти об'єм призми і допустимі значення α.

12.309. Основою призми є прямокутник. Бічне ребро утворює рівні кути із сторонами основи і нахилене до площини основи під кутом α. Знайти кут між бічним ребром і стороною основи.

12.310. На сферичній поверхні радіуса R лежать всі вершини рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює бічній стороні, а гострий кут дорівнює α. Знайти відстань від центра сфери до площини трапеції, якщо більша основа трапеції дорівнює радіусу сфери.

12.311. Висота конуса дорівнює H, кут між твірною і площиною основи дорівнює α. У цей конус вписано сферу. До кола дотику сферичної і конічної поверхонь проведено дотичну пряму, а через цю пряму проведено площину паралельно висоті конуса. Знайти площу перерізу сфери цією площиною.

12.312. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, двогранний кут при основі дорівнює α. Піраміду перерізує площина, паралельна основі. Площа перерізу дорівнює бічній поверхні утвореної зрізаної піраміди. Знайти відстань від січної площини до основи піраміди.

12.313. Висота конуса дорівнює H, кут між твірною і площиною основи дорівнює α. Повна поверхня цього конуса ділиться пополам площиною, перпендикулярною до його висоти. Знайти відстань від цієї площини до основи конуса.

12.314. Знайти кут між апофемою правильної трикутної піраміди і площиною її основи, якщо різниця між цим кутом і кутом, утвореним бічним ребром піраміди з площиною основи, дорівнює α.

12.315. Катет прямокутного трикутника дорівнює a, протилежний йому кут дорівнює α. Цей трикутник обертається навколо прямої, яка лежить у площині трикутника, проходить через вершину даного кута і перпендикулярна до його бісектриси. Знайти об'єм тіла обертання.

12.316. Відношення об'єму прямого паралелепіпеда до об'єму вписаної в нього кулі дорівнює k. Знайти кути в основі паралелепіпеда і допустимі значення k.

12.317. Твірна зрізаного конуса, описаного навколо сфери, дорівнює a, кут між твірною і площиною основи дорівнює α. Знайти об'єм конуса, основою якого є коло дотику сферичної поверхні з бічною поверхнею зрізаного конуса, а вершина збігається з центром більшої основи зрізаного конуса.

12.318. У кулю радіуса R вписано два конуси із спільною основою; вершини конусів збігаються з протилежними кінцями діаметра кулі. Кульовий сегмент, який вміщує менший конус, має в осьовому перерізі дугу, що дорівнює α градусів. Знайти відстань між центрами куль, вписаних у ці конуси.

12.319. Знайти відношення об'єму правильної n-кутної піраміди до об'єму описаної кулі, якщо кут між бічним ребром і площиною основи піраміди дорівнює α.

12.320. Бічні грані правильної трикутної призми — квадрати. Знайти кут між діагоналлю бічної грані і стороною основи призми, яка не перетинає її.

12.321. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює a і утворює з площиною основи кут α. У цю піраміду вписано циліндр з квадратним осьовим перерізом (основа циліндра лежить в площині основи піраміди). Знайти об'єм циліндра.

12.322. У трикутнику ABC кут A дорівнює α, кут C дорівнює β і бісектриса BD дорівнює l. Трикутник ABD обертається навколо прямої BD. Знайти об'єм тіла обертання.

12.323. Основою прямої призми є рівносторонній трикутник. Через одну з його сторін проведено площину, що відсікає від призми піраміду, об'єм якої дорівнює V. Знайти площу перерізу, якщо кут між січною площиною і площиною основи дорівнює α.

12.324. У правильній чотирикутній піраміді проведено переріз, паралельний основі. Пряма, яка проходить через вершину основи і протилежну (тобто ту, що не належить тій самій грані) вершину перерізу, утворює з площиною основи кут α. Знайти площу перерізу, якщо бічне ребро піраміди дорівнює діагоналі основи і дорівнює a.

12.325. Основою піраміди є рівнобедрений гострокутний трикутник, в якому бічна сторона дорівнює b, а кут при основі дорівнює α. Всі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи один і той самий кут β. Знайти площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через вершину даного кута α, і висоту піраміди.

12.326. Плоска ламана лінія складається з n рівних відрізків, сполучених у вигляді зигзагу під кутом α один до одного. Довжина кожного відрізка ламаної дорівнює a. Ця лінія обертається навколо прямої, яка проходить через один з її кінців паралельно бісектрисі кута α. Знайти площу поверхні обертання.

12.327. Два конуси мають спільну висоту; їхні вершини лежать на протилежних кінцях цієї висоти. Твірна одного конуса дорівнює l і утворює з висотою кут α. Твірна другого конуса утворює з висотою кут β. Знайти об'єм спільної частини обох конусів.

12.328. Тупокутний рівнобедрений трикутник обертається навколо прямої, яка проходить через точку перетину його висот паралельно більшій стороні. Знайти об'єм тіла обертання, якщо тупий кут дорівнює α, а протилежна йому сторона трикутника дорівнює a.

12.329. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює a, кут при основі дорівнює α. Цей трикутник обертається навколо прямої, яка проходить через вершину, протилежну основі, паралельно бісектрисі кута α. Знайти поверхню тіла обертання.

12.330. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гострим кутом α; радіус вписаного в трикутник кола дорівнює r. Всі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи один і той самий кут β. Знайти об'єм піраміди.

12.331. У конус вписано сферу і до неї проведено дотичну площину паралельно площині основи конуса. В якому відношенні ця площина ділить бічну поверхню конуса, якщо кут між твірною і площиною основи дорівнює α?

12.332*. В основу кульового сегмента вписано прямокутний трикутник, площа якого дорівнює S, а гострий кут дорівнює α. Знайти висоту сегмента, якщо його дузі в осьовому перерізі відповідає центральний кут, який дорівнює β.

12.333. Основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1)$ є рівнобедрений трикутник ABC $(AB = AC)$, в якому периметр дорівнює $2p$, а кут при вершині A дорівнює α. Через сторону BC і вершину A_1 проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм призми.

12.334. У правильну чотирикутну піраміду вписано сферу. Відстань від центра сфери до вершини піраміди дорівнює a, а кут між бічною гранню і площиною основи дорівнює α. Знайти повну поверхню піраміди.

12.335. Основою піраміди є прямокутник, в якому кут між діагоналями дорівнює α. Навколо цієї піраміди описано сферу радіуса R. Знайти об'єм піраміди, якщо всі її бічні ребра утворюють з основою кут β.

12.336. Твірна конуса дорівнює l і утворює з висотою кут α. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює β, проведено площину. Знайти відстань від цієї площини до центра сфери, вписаної в конус.

12.337. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, площа якого S, а кут між бічними сторонами дорівнює α. Всі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи один і той самий кут. Знайти цей кут, якщо об'єм піраміди дорівнює V.

12.338. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a, її об'єм дорівнює V. Знайти косинус кута між діагоналями двох суміжних бічних граней.

12.339. Гострий кут ромба, який є основою чотирикутної піраміди, дорівнює α. Відношення повної поверхні піраміди до квадрата сторони основи дорівнює k. Знайти синус кута між апофемою і висотою піраміди, якщо всі її бічні грані однаково нахилені до площини основи. Вказати допустимі значення k.

12.340. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, плоский кут при вершині піраміди дорівнює α. Знайти відстань від центра основи піраміди до її бічного ребра.

12.341. Відношення площі діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди до площі її основи дорівнює k. Знайти косинус плоского кута при вершині піраміди.

12.342. Відстань від сторони основи правильної трикутної піраміди до її ребра, яке не перетинає цю сторону, в два рази менша за сторону основи. Знайти кут між бічною гранню і площиною основи піраміди.

12.343. Лінійний кут двогранного кута, утвореного двома суміжними бічними гранями правильної чотирикутної піраміди, у два рази більший за плоский кут при вершині піраміди. Знайти плоский кут при вершині піраміди.

12.344. У правильній трикутній піраміді сума кутів, утворених апофемою піраміди з площиною основи і бічним ребром з тією самою площиною, дорівнює $\pi/4$. Знайти ці кути.

12.345. Об'єм правильної піраміди дорівнює V. Через центр вписаної в піраміду сфери проведено площину, паралельну основі піраміди. Знайти об'єм піраміди, яка відсікається від даної цією площиною, якщо двогранний кут при основі дорівнює α.

12.346. Знайти кути прямокутного трикутника, якщо об'єм тіла, утвореного при обертанні трикутника навколо меншого катета, дорівнює сумі об'ємів тіл, утворених при обертанні трикутника навколо його гіпотенузи і навколо більшого катета.

12.347. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а її бічна поверхня дорівнює S. Знайти кут між суміжними бічними гранями.

12.348. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, плоский кут при вершині піраміди дорівнює α. Знайти радіус вписаної в піраміду сфери.

12.349. Радіус сфери, вписаної в правильну трикутну піраміду, в чотири рази менший від сторони основи піраміди. Знайти косинус плоского кута при вершині піраміди.

12.350. Бічні ребра і дві сторони основи трикутної піраміди мають одну і ту саму довжину a, а кут між рівними сторонами основи дорівнює α. Знайти радіус описаної сфери. Із геометричних міркувань встановити, які значення α недопустимі.

12.351. У конус вписано циліндр, висота якого дорівнює діаметру основи конуса. Повна поверхня циліндра дорівнює площі основи конуса. Знайти кут між твірною конуса і площиною його основи.

12.352. Навколо сфери описано пряму призму, основою якої є ромб з гострим кутом α. Знайти кут між більшою діагоналлю призми і площиною основи.

12.353. У зрізаний конус вписано кулю, об'єм якої в два рази менший від об'єму конуса. Знайти кут між твірною конуса і площиною його основи.

12.354. Основою піраміди є рівнобедрений гострокутний трикутник, в якого основа дорівнює a, а протилежний кут дорівнює α. Бічне ребро піраміди, яке проходить через вершину даного кута, утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм піраміди, якщо висота піраміди проходить через точку перетину висот основи.

12.355*. Площа сегмента дорівнює S, а дуга сегмента дорівнює α радіанів. Цей сегмент обертається навколо своєї осі симетрії. Знайти поверхню тіла обертання.

12.356. У конус вписано сферу. Коло дотику сферичної і конічної поверхонь ділить поверхню сфери у відношенні 1 : 4. Знайти кут між твірною конуса і площиною основи.

12.357. Бічна поверхня трикутної піраміди дорівнює S, а кожне з бічних ребер дорівнює l. Знайти плоскі кути при вершині, знаючи, що вони утворюють арифметичну прогресію з різницею $\pi/3$.

12.358. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює α. Знайти бічну поверхню піраміди, якщо радіус сфери, вписаної в цю піраміду, дорівнює R.

12.359. Радіус сфери, описаної навколо правильної трикутної піраміди, дорівнює апофемі піраміди. Знайти кут між апофемою і площиною основи піраміди.

12.360. Твірна конуса дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. У цей конус вписано сферу, а в сферу вписано правильну трикутну призму, в якій всі ребра рівні між собою. Знайти об'єм призми.

12.361. Навколо сфери радіуса R описано правильну n-кутну піраміду, бічна грань якої утворює з площиною основи кут α. Знайти бічну поверхню піраміди.

12.362. Основою піраміди є ромб із стороною a. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи і утворюють між собою кут β. Дві інші бічні грані утворюють з площиною основи кут α. Знайти бічну поверхню піраміди.

12.363. Відстань від середини висоти правильної чотирикутної піраміди до її бічної грані дорівнює d. Знайти повну поверхню вписаного в піраміду конуса, якщо твірна утворює з площиною основи кут α.

12.364. Основою піраміди $SABC$ є рівносторонній трикутник ABC. Ребро SA перпендикулярне до площини основи. Знайти кут між бічною гранню SBC і площиною основи, якщо бічна поверхня піраміди відноситься до площі основи як 11 : 4.

12.365. Радіус основи конуса дорівнює R, кут між твірною і площиною основи дорівнює α. У цей конус вписано сферу. Через точку P, яка лежить на колі дотику сферичної і конічної поверхонь, проведено дотичну пряму до цього кола, а через цю пряму проведено площину паралельно твірній конуса, яка проходить через точку, діаметрально протилежну точці P. Знайти площу перерізу сфери площиною.

12.366. У зрізаному конусі діагоналі осьового перерізу взаємно перпендикулярні і кожна з них дорівнює a. Кут між твірною і площиною основи дорівнює α. Знайти повну поверхню зрізаного конуса.

12.367. Відстань від вершини основи правильної трикутної піраміди до протилежної бічної грані дорівнює l. Кут між бічною гранню і площиною основи піраміди дорівнює α. Знайти повну поверхню конуса, вписаного в піраміду.

12.368. Бічне ребро правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює стороні меншої основи і дорівнює a. Кут між бічним ребром і стороною більшої основи дорівнює α. Знайти площу діагонального перерізу зрізаної піраміди.

12.369. Висота конуса утворює з твірною кут α. Через вершину конуса проведено площину під кутом β $(\beta > \pi/2 - \alpha)$ до площини основи. Знайти площу перерізу, якщо висота конуса дорівнює h.

12.370. Основою піраміди є прямокутний трикутник, у якого один із гострих кутів дорівнює α. Всі бічні ребра однаково нахилені до площини основи. Знайти двогранні кути при основі, якщо висота піраміди дорівнює гіпотенузі трикутника, який лежить в його основі.

12.371. В основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1)$ лежить рівнобедрений трикутник, у якого $AB = BC = a$ і $\angle ABC = \alpha$. Висота призми дорівнює H. Знайти відстань від точки A до площини, проведеної через точки B, C і A_1.

12.372. У піраміді, в якій всі бічні грані однаково нахилені до площини основи, через центр вписаної сфери паралельно основі проведено площину. Відношення площі перерізу піраміди площиною до площі основи дорівнює k. Знайти двогранний кут при основі піраміди.

12.373. Висота H правильної трикутної піраміди утворює з бічним ребром кут α. Через сторону основи проведено площину, яка перетинає протилежне бічне ребро під кутом β $(\beta < \pi/2 - \alpha)$. Знайти об'єм частини піраміди, розміщеної між цією площиною і площиною основи.

12.374. Відрізок прямої, який сполучає центр основи правильної трикутної піраміди з серединою бічного ребра, дорівнює стороні основи. Знайти косинус кута між суміжними бічними гранями.

12.375. Основою піраміди є квадрат із стороною a; дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а більше бічне ребро нахилене до площини основи під кутом β. У піраміду вписано прямокутний паралелепіпед; одна з його основ лежить у площині основи піраміди, вершина другої основи лежить на бічних ребрах піраміди. Знайти об'єм паралелепіпеда, якщо його діагональ утворює з площиною основи кут α.

12.376. Основою піраміди є рівнобедрений гострокутний трикутник, у якого бічна сторона дорівнює a, а кут між бічними сторонами α. Бічна грань піраміди, яка проходить через сторону основи, що лежить проти кута α, утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм конуса, описаного навколо піраміди, якщо всі її бічні ребра рівні між собою.

12.377. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, двогранний кут при основі дорівнює α. У цю піраміду вписано сферу. Знайти об'єм піраміди, вершинами якої є точки дотику сферичної поверхні з бічними гранями даної піраміди і довільна точка, яка лежить у площині основи даної піраміди.

12.378. У сферу радіуса R вписано правильну зрізану чотирикутну піраміду, більша основа якої проходить через центр сфери, а бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм зрізаної піраміди.

12.379. На відрізку AB, який дорівнює $2R$, побудовано як на діаметрі півколо і проведено хорду CD паралельно AB. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням трикутника ACD навколо діаметра AB, якщо вписаний кут, що спирається на дугу AC, дорівнює α $(AC < BD)$.

12.380. Основою прямої призми є прямокутний трикутник, у якого один з гострих кутів дорівнює α. Найбільша за площею бічна грань призми — квадрат. Знайти кут між діагоналями двох інших бічних граней, які перетинаються.

12.381. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює α $(\alpha > \pi/4)$. Знайти площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через вершину основи перпендикулярно до протилежного бічного ребра (тобто ребра, яке не лежить з цією вершиною в одній бічній грані).

12.382. Висота правильної чотирикутної піраміди утворює з бічним ребром кут α. Через вершину піраміди паралельно діагоналі основи проведено площину, яка утворює кут β з другою діагоналлю. Площа утвореного перерізу дорівнює S. Знайти висоту піраміди.

12.383. Вершина конуса знаходиться в центрі сфери, а основа конуса дотикається до поверхні сфери. Повна поверхня конуса дорівнює поверхні сфери. Знайти кут між твірною і висотою конуса.

12.384. Основою піраміди є прямокутний трикутник, у якого гіпотенуза дорівнює c, а менший з гострих кутів дорівнює α. Найбільше бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм піраміди, якщо її висота проходить через точку перетину медіан основи.

12.385. Сторона правильного трикутника дорівнює a. Трикутник обертається навколо прямої, яка лежить у площині трикутника поза ним, проходить через вершину трикутника і утворює з стороною кут α. Знайти об'єм тіла обертання і з'ясувати, при якому значенні α цей об'єм є найбільшим.

12.386. Бічна грань правильної піраміди $SABC$ утворює з площиною основи кут α. Через сторону BC основи і точку D на бічному ребрі AS проведено площину. Знайти кут між цією площиною і площиною основи, якщо $AD : DS = k$.

12.387. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом α між бічними сторонами. Піраміда розміщена в деякому циліндрі так, що її основа вписана в основу цього циліндра, а вершина збігається з серединою однієї з твірних циліндра. Об'єм циліндра дорівнює V. Знайти об'єм піраміди.

12.388. Через вершину квадрата, який лежить в основі правильної призми, проведено площину паралельно протилежній діагоналі квадрата під кутом α до площини основи. Знайти кути многокутника в перерізі призми цією площиною (припускаємо, що висота призми достатньо велика для того, щоб цим перерізом виявився чотирикутник).

12.389. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює a, гострий кут дорівнює α. Діагональ трапеції перпендикулярна до її бічної сторони. Трапеція обертається навколо її більшої основи. Знайти об'єм тіла обертання.

12.390. У кульовий сектор радіуса R вписано сферу. Знайти радіус кола дотику поверхонь сфери і сектора, якщо центральний кут в осьовому перерізі кульового сектора дорівнює α.

Група В

12.391. Сторони паралелограма дорівнюють a і b $(a < b)$. Менша діагональ утворює з меншою стороною тупий кут, а з більшою стороною — кут α. Знайти більшу діагональ паралелограма.

12.392. У сектор POQ радіуса R з центральним кутом α вписано прямокутник; дві його вершини лежать на дузі сектора, дві інші — на радіусах PO і PQ. Знайти площу прямокутника, якщо гострий кут між його діагоналями дорівнює β.

12.393. У трикутнику ABC дано гострі кути α і γ $(\alpha > \gamma)$ при основі AC. Із вершини B проведено висоту BD і бісектрису BE. Знайти площу трикутника BDE, якщо площа трикутника ABC дорівнює S.

12.394. У сегмент кола радіуса R вписано два однакових кола, які дотикаються одне до одного, до дуги сегмента і до його хорди. Знайти радіуси цих кіл, якщо центральний кут, що спирається на дугу сегмента, дорівнює α $(\alpha < \pi)$.

12.395. Відношення радіуса кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, до радіуса кола, описаного навколо нього, дорівнює m. Знайти кути трикутника і допустимі значення m.

12.396. У паралелограмі дано дві сторони a і b $(a > b)$ і гострий кут α між діагоналями. Знайти кути паралелограма.

12.397. У сегмент з центральним кутом α вписано правильний трикутник так, що одна його вершина збігається з серединою хорди сегмента, а дві інші лежать на дузі сегмента. Висота трикутника дорівнює h. Знайти радіус дуги сегмента.

12.398. Відстань між центрами двох кіл, що дотикаються зовні, дорівнює d. Кут між їхніми спільними зовнішніми дотичними дорівнює α радіанів. Знайти площу криволінійного трикутника, обмеженого відрізками однієї дотичної і двома відповідними дугами кіл.

12.399. У паралелограмі дано дві сторони a і b $(a > b)$ і висоту h, яку проведено до більшої сторони. Знайти гострий кут між діагоналями паралелограма.

12.400. Кути трикутника дорівнюють A, B і C. Висота трикутника, яка проходить через вершину кута B, дорівнює H. На цій висоті як на діаметрі побудовано коло. Точки перетину кола із сторонами AB і BC трикутника сполучено з кінцями висоти. Знайти площу побудованого чотирикутника.

12.401. Сторони паралелограма дорівнюють a і b $(a < b)$. Із середини більшої сторони паралельну сторону видно під кутом α. Знайти площу паралелограма.

12.402. У трикутнику дано дві сторони a і b $(a > b)$ і площу S. Знайти кут між висотою і медіаною, проведеними до третьої сторони.

12.403. Відношення радіуса кола, описаного навколо трапеції, до радіуса кола, вписаного в неї, дорівнює k. Знайти кути трапеції і допустимі значення k.

12.404. Відношення периметра паралелограма до його більшої діагоналі дорівнює k. Знайти кути паралелограма, коли відомо, що більша діагональ ділить кут паралелограма у відношенні $1 : 2$.

12.405. У рівносторонній трикутник ABC вписано рівносторонній трикутник DEF; точка D лежить на стороні BC, точка E — на стороні AC і точка F — на стороні AB. Сторона AB відноситься до сторони DF як $8 : 5$. Знайти синус кута DEC.

12.406. Тангенс кута між медіаною і висотою, проведеними до бічної сторони рівнобедреного трикутника, дорівнює $1/2$. Знайти синус кута при вершині.

12.407. Пряма, перпендикулярна до хорди сегмента, ділить хорду у відношенні $1 : 4$, а дугу — у відношенні $1 : 2$. Знайти косинус центрального кута, що спирається на цю дугу.

12.408. У гострокутному трикутнику ABC кут A дорівнює α радіанів і кут B дорівнює β радіанів. Через ортоцентр (точку перетину висот) і основи висот, опущених на сторони AB і BC, проведено коло. Знайти площу спільної частини трикутника і круга, обмеженого проведеним колом, якщо $AC = b$.

12.409. У гострокутному трикутнику ABC відомо кути. Знайти відношення, в якому ортоцентр (точка перетину висот) ділить висоту, проведену з вершини кута A.

12.410. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AL і CN. Знайти радіус кола, що проходить через точки B, L і N, якщо $AC = a$ і $\angle ABC = \alpha$.

12.411. Показати, що відношення площі будь-якого трикутника до площі круга, обмеженого описаним навколо трикутника колом, менше $2/3$.

12.412. Три числа виражають відношення довжин сторін гострокутного трикутника до відповідних відстаней цих сторін від центра описаного кола. Довести, що сума утворених чисел у 4 рази менша від їхнього добутку.

12.413. Довжини чотирьох дуг, на які розбито все коло радіуса R, утворюють геометричну прогресію із знаменником, що дорівнює 3. Точки поділу є вершинами чотирикутника, вписаного в це коло. Знайти його площу.

12.414. Один із плоских кутів тригранного кута дорівнює α. Двогранні кути, прилеглі до цього плоского кута, дорівнюють β і γ. Знайти два інші плоскі кути.

12.415. В основі піраміди лежить квадрат. Кути, утворені бічними гранями з основою, відносяться як 1 : 2 : 4 : 2. Знайти ці кути.

12.416*. У відкритий конус вкладено кулю так, що їхні поверхні дотикаються. Об'єм тіла, розміщеного між ними, у 8 разів менший від об'єму кулі. Знайти кут при вершині осьового перерізу конуса.

12.417. У правильну чотирикутну піраміду вписано сферу. Паралельно основі піраміди проведено дотичну до сфери площину, яка ділить об'єм піраміди у відношенні $m : n$, починаючи від вершини. Знайти кут між висотою піраміди і її бічною гранню.

12.418. Через вершину основи правильної трикутної піраміди проведено площину, перпендикулярну до протилежної бічної грані і паралельну протилежній стороні основи. Ця площина утворює з площиною основи піраміди кут α. Знайти плоский кут при вершині піраміди.

12.419. Прямокутник обертається навколо осі, яка проходить через його вершину паралельно діагоналі. Знайти поверхню тіла обертання, якщо площа прямокутника дорівнює S, а кут між діагоналями дорівнює α.

12.420. Знайти радіус сфери, що дотикається до основи і до бічних ребер правильної трикутної піраміди, в якій сторона основи дорівнює a, а двогранний кут при основі дорівнює α.

12.421. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, двогранний кут при основі дорівнює α. Знайти відстань від центра сфери, вписаної в цю піраміду, до бічного ребра.

12.422. Правильну трикутну піраміду перерізає площина, яка проходить через її бічне ребро і висоту. У перерізі утворився трикутник з кутом $\pi/4$ при вершині піраміди. Знайти кут між бічною гранню і площиною основи піраміди.

12.423. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, плоский кут при вершині дорівнює α. У піраміду вписано кулю. Знайти площу перерізу цієї кулі площиною, яка проходить через центр основи піраміди і перпендикулярна до її бічного ребра.

12.424. Основою піраміди, вписаної в конус, є чотирикутник, одна сторона якого дорівнює a, а кожна з решти трьох сторін дорівнює b. Вершина піраміди лежить на середині однієї з твірних. Знайти об'єм піраміди, якщо кут між твірною і висотою конуса дорівнює α.

12.425. Відношення об'єму зрізаного конуса до об'єму вписаної в нього кулі дорівнює k. Знайти кут між твірною конуса і площиною його основи та допустимі значення k.

12.426. Осьовий переріз циліндра — квадрат. Відрізок AB, який сполучає точку A кола верхньої основи з точкою B кола нижньої основи циліндра, дорівнює a і розміщено на відстані b від осі циліндра. Знайти кут між прямою AB і площиною основи циліндра.

12.427. Через вершину основи правильної чотирикутної піраміди проведено площину, яка перетинає протилежне бічне ребро під прямим кутом. Площа перерізу в два рази менша від площі основи піраміди. Знайти кут між бічним ребром і площиною основи.

12.428. Дано три попарно взаємно перпендикулярні промені OM, ON і OP. На промені OM взято точку A на відстані OA, що дорівнює a; на променях ON і OP взято відповідно точки B і C так, що кут ABC дорівнює α, а кут ACB дорівнює β. Знайти OB і OC.

12.429. У конус вписано сферу. Площина, проведена через коло дотику сферичної і конічної поверхонь, ділить об'єм кулі у відношенні $5:27$. Знайти кут між твірною і площиною основи.

12.430. Поверхня кулі, вписаної в правильну зрізану трикутну піраміду, відноситься до повної поверхні піраміди як $\pi : 6\sqrt{3}$. Знайти кут між бічною гранню і площиною основи піраміди.

12.431. Кут між площинами двох рівних прямокутних трикутників ABC і ADC із спільною гіпотенузою AC дорівнює α. Кут між рівними катетами AB і AD дорівнює β. Знайти кут між катетами BC і CD.

12.432. Сторона нижньої основи правильної зрізаної чотирикутної піраміди у 5 разів більша за сторону верхньої основи. Бічна поверхня піраміди дорівнює квадрату її висоти. Знайти кут між бічним ребром піраміди і площиною основи.

12.433. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція, діагоналі якої перпендикулярні до відповідних бічних сторін. Кут між діагоналями трапеції, протилежний її бічній стороні, дорівнює α. Відрізок прямої, який сполучає вершину верхньої основи з центром кола, описаного навколо нижньої основи, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм призми.

12.434. В основі прямої призми лежить паралелограм з гострим кутом α. Діагоналі призми утворюють з площиною основи кути β і γ $(\beta < \gamma)$. Знайти об'єм призми, якщо її висота дорівнює H.

12.435. Основою призми є правильний трикутник із стороною a. Бічне ребро дорівнює b і утворює з сторонами основи, які перетинаються з ним, кути α і β. Знайти об'єм призми.

12.436. Основою призми є паралелограм з гострим кутом α. Бічне ребро, яке проходить через вершину даного кута α, дорівнює b і утворює з протилежними сторонами основи кути, кожний з яких дорівнює β. Знайти висоту призми.

12.437. В основі прямого паралелепіпеда лежить паралелограм з діагоналями a і b $(a > b)$ і гострим кутом α між ними. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з більшою діагоналлю основи гострий кут β. Знайти об'єм паралелепіпеда.

12.438. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, двогранний кут при основі дорівнює α. У цю піраміду вписано пряму трикутну призму; три її вершини лежать на апофемах піраміди, а три інші — на площині основи піраміди. Знайти об'єм призми, якщо центр вписаної в піраміду сфери лежить на площині верхньої основи призми.

12.439. Основою прямої призми є ромб. Одна з діагоналей призми дорівнює a і утворює з площиною основи кут α, а з однією з бічних граней — кут β. Знайти об'єм призми.

12.440. Відношення двох відрізків, розміщених між паралельними площинами, дорівнює k, а кути, які кожний з цих відрізків утворює з однією із площин, відносяться як $2:3$. Знайти ці кути і допустимі значення k.

12.441. Кут між площиною квадрата $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ і деякою площиною P дорівнює α, а кут між стороною AB і тією самою площиною дорівнює β. Знайти кут між стороною AD і площиною P.

12.442. У правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1)$ через середини двох суміжних сторін основи DC і AD та вершину B_1 верхньої основи проведено площину. Знайти кут між цією площиною і площиною основи, якщо периметр перерізу втричі більший за діагональ основи.

12.443. Відстані від центра основи правильної чотирикутної піраміди до бічної грані і до бічного ребра дорівнюють відповідно a і b. Знайти двогранний кут при основі піраміди.

12.444. Основою піраміди є правильний трикутник. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи. Знайти косинус кута між двома іншими бічними гранями, якщо вони утворюють з площиною основи кут α.

12.445. Основою похилої призми є прямокутний трикутник з гострим кутом α. Бічна грань, яка проходить через гіпотенузу, перпендикулярна до основи, а бічна грань, яка проходить через катет, прилеглий до даного кута, утворює з основою гострий кут β. Знайти гострий кут між третьою бічною гранню і основою.

12.446. Сторона BC трикутника ABC, який є основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1)$, дорівнює a, прилеглі до неї кути дорівнюють β і γ. Знайти кут між бічним ребром і площиною основи, якщо об'єм призми дорівнює V і $AA_1 = A_1B = A_1C$.

12.447. У правильну зрізану трикутну піраміду вписано дві сфери; одна з них дотикається до усіх її граней, а друга — до усіх ребер. Знайти синус кута між бічним ребром і площиною основи.

12.448. В основі чотирикутної піраміди лежить рівнобічна трапеція з основами a і b $(a > 2b)$ і кутом φ між нерівними відрізками її діагоналей. Вершина піраміди проектується в точку перетину діагоналей основи. Кути, утворені з площиною основи бічними гранями, які проходять через основи трапеції, відносяться як $1:2$. Знайти об'єм піраміди.

12.449. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a. Бічна грань утворює з площиною основи кут α. Знайти відстань між бічним ребром і стороною основи, яка не перетинається з ним.

12.450. У трикутній піраміді всі грані — правильні трикутники. Через сторону основи проведено площину, яка ділить об'єм піраміди у відношенні $1:3$, починаючи від основи. Знайти кут між цією площиною і площиною основи.

12.451. У правильній чотирикутній піраміді через два бічних ребра, які не належать одній грані, проведено площину. Відношення площі перерізу до бічної поверхні піраміди дорівнює k. Знайти кут між двома суміжними бічними гранями і допустимі значення k.

12.452. В основі прямої призми лежить паралелограм з гострим кутом φ між діагоналями. Діагоналі кожної з суміжних бічних граней перетинаються під кутами α і β $(\alpha > \beta)$, повернутими до відповідних сторін основи. Знайти об'єм призми, якщо її висота дорівнює h.

12.453. Основою піраміди $ABCDE$ є ромб $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Висота піраміди проходить через середину сторони AB. Бічні ребра EC і ED утворюють з площиною основи кути, які дорівнюють відповідно α і β. Знайти косинус гострого кута ромба, якщо $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$ і $\cos\beta = 1/\sqrt{5}$.

12.454. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Кут між висотою піраміди і бічним ребром дорівнює α $(\alpha \leqslant \operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2))$. Знайти площу перерізу піраміди площиною, проведеною через середину висоти перпендикулярно до одного з її бічних ребер.

12.455. Нехай AB — діаметр нижньої основи циліндра, A_1B_1 — хорда верхньої основи, паралельна AB. Площина, проведена через прямі AB і A_1B_1, утворює з площиною нижньої основи циліндра гострий кут α, а пряма AB_1 утворює з тією самою площиною кут β.

Знайти висоту циліндра, якщо радіус основи циліндра дорівнює R (точки A і A_1 лежать по один бік від прямої, яка проходить через середини відрізків AB і A_1B_1).

12.456. Висота правильної трикутної піраміди $SABC$ дорівнює H. Через вершину A основи ABC проведено площину, перпендикулярну до протилежного бічного ребра SC. Ця площина утворює з площиною основи кут α. Знайти об'єм частини піраміди, розміщеної між площиною основи і площиною перерізу.

12.457. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює H. Бічне ребро утворює з основою кут α, а діагональ піраміди з основою — кут β. Знайти площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через діагональ піраміди паралельно тій діагоналі основи, що не перетинає її.

12.458. Сторони нижньої і верхньої основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють відповідно a і b $(a > b)$. Бічна грань утворює з площиною основи кут α. Знайти площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через середню лінію бічної грані і центр нижньої основи.

12.459. Знайти радіус сфери, вписаної в правильну трикутну піраміду, висота якої дорівнює H, а кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює α.

12.460. Радіус сфери, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, відноситься до сторони основи як 3 : 4. Знайти кут між бічною гранню і площиною основи.

12.461. У конус, осьовий переріз якого — прямокутний трикутник, вписано циліндр; його нижня основа лежить в площині основи конуса. Відношення бічних поверхонь конуса і циліндра дорівнює $4\sqrt{2}$. Знайти кут між площиною основи конуса і прямою, яка проходить через центр верхньої основи циліндра і довільну точку кола основи конуса.

12.462. Основою піраміди є рівнобічна трапеція з гострим кутом α. Ця трапеція описана навколо кола основи конуса. Вершина піраміди лежить на одній з твірних конуса, а її проекція на площину основи збігається з точкою перетину діагоналей трапеції. Знайти об'єм піраміди, якщо твірна конуса дорівнює l і утворює з висотою кут β.

12.463. Основою піраміди $ABCF$ є рівнобедрений трикутник ABC, в якого кут між рівними сторонами AB і AC дорівнює α $(\alpha < \pi/2)$. У піраміду вписано трикутну призму $AEDA_1E_1D_1$; точки A_1, E_1 і D_1 лежать відповідно на бічних ребрах AF, CF і BF піраміди, а сторона ED основи AED проходить через центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Знайти відношення об'єму призми до об'єму піраміди.

12.464. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1)$ проведено площину через середини ребер DD_1 і D_1C_1 та вершину A. Знайти кут між цією площиною і гранню $ABCD$.

12.465. Відношення об'єму правильної трикутної зрізаної піраміди до об'єму вписаної в неї кулі дорівнює k. Знайти кут між бічною гранню піраміди і площиною основи та допустимі значення k.

Глава 13

ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

Приклад 1. У напрямі від A до B автомобіль рухався деякий час із сталою швидкістю $v_1 = 60$ км/год. Решту шляху він проїхав за такий самий час, але з швидкістю $v_2 = 40$ км/год. Повертаючись назад, автомобіль їхав одну половину шляху із швидкістю $v_3 = 80$ км/год, а другу половину — із швидкістю $v_4 = 45$ км/год. Яка середня швидкість рейсу: а) від A до B; б) від B до A?

Δ а) Оскільки автомобіль за однакові проміжки часу їхав з кожною із вказаних швидкостей, то $v_{\text{ср}} = \dfrac{v_1 + v_2}{2} = \dfrac{60 + 40}{2} = 50$ км/год.

б) Зворотний рейс складається з двох однакових частин шляху (припустимо, що кожна з них дорівнює s км), які пройдено автомобілем за нерівні проміжки часу; тому було б неправильно вважати, що $v_{\text{ср}} = \dfrac{v_3 + v_4}{2} = \dfrac{80 + 45}{2} = 62{,}5$ км/год. Нехай автомобіль їхав x годин із швидкістю v_3 і y годин — із швидкістю v_4. Тоді $v_3x = v_4y = s$, звідки $x = \dfrac{v_4y}{v_3}$. Тобто середня швидкість

$$v_{\text{ср}} = \frac{2s}{x+y} = \frac{2v_4y}{v_4y/v_3 + y} = \frac{2v_3v_4}{v_3 + v_4} =$$

$$= \frac{2 \cdot 80 \cdot 45}{125} = 57{,}6 \text{ км/год. } \blacktriangle$$

Приклад 2. Бригада робітників виконала деяку роботу. Якщо бригаду зменшити на 20 осіб, то такий самий обсяг роботи бригада виконає на 5 днів пізніше, ніж при попередньому складі, а якщо бригаду збільшити на 15 осіб, то вона виконає всю роботу на 2 дні раніше. Скільки робітників було в бригаді спочатку і за скільки днів вона виконала роботу?

Δ Нехай x робітників виконали роботу за y днів; тоді за умовою $xy = (x - 20)(y + 5)$ і $xy = (x + 15)(y - 2)$.

Запишемо обидві рівності у вигляді пропорцій: $\dfrac{x-20}{x} = \dfrac{y}{y+5}$ і $\dfrac{x+15}{x} = \dfrac{y}{y-2}$. Кожну пропорцію вигляду $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ замінимо рівносильною пропорцією вигляду $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$. Тоді дістанемо $\dfrac{-20}{x} = \dfrac{-5}{y+5}$ і $\dfrac{15}{x} = \dfrac{2}{y-2}$. Тепер легко знаходимо, що $x = 60$ і $y = 10$. Тобто, у бригаді було 60 осіб, які закінчили роботу за 10 днів. $\blacktriangle$

Приклад 3. Три насоси, які качали воду для поливання, почали працювати одночасно. Перший і третій насоси закінчили роботу одночасно, а другий — через 2 год після початку роботи. Перший насос викачав 9 м^3 води, а другий і третій — разом 28 м^3. Яку кількість води викачує за годину кожний насос, коли відомо, що третій насос за годину викачує на 3 м^3 більше, ніж перший, і що три насоси, працюючи разом, викачують за годину 14 м^3?

Δ Нехай перший і другий насоси викачують за годину відповідно x і y м^3, тоді третій викачує за годину $(x + 3)$ м^3. Другий і третій насоси викачали відповідно $2y$ і $(28 - 2y)$ м^3 води. Перший насос працював $9/x$ год, третій $(28 - 2y)/(x + 3)$ год. Відповідно до умови, $\dfrac{9}{x} = \dfrac{28 - 2y}{x+3}$ і $2x + y + 3 = 14$. Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо $x = 3$, $y = 5$. Отже, дістаємо відповідь: 3, 5 і 6 м^3. $\blacktriangle$

Приклад 4. Пішохід, що йде з радгоспу на залізничну станцію, пройшовши за першу годину 3 км, розрахував, що він спізниться на поїзд на 40 хв, коли йтиме з такою швидкістю, тому решту шляху він пройшов із швидкістю 4 км/год і прибув на станцію за 15 хв до відходу поїзда. Чому дорівнює відстань від радгоспу до станції і з якою сталою на всьому шляху швидкістю пішохід прийшов би на станцію точно до відходу поїзда?

△ Складемо таку таблицю:

Пішохід прийшов би на станцію	Відстань, км	Швидкість, км/год	Час, год
Точно	x	v	$\frac{x}{v}$
Із запізненням	$x-3$	3	$\frac{x-3}{3}$
Із випередженням	$x-3$	4	$\frac{x-3}{4}$

Прирівнюючи проміжки часу, записані в першому і другому, в першому і третьому рядках, маємо систему рівнянь

$$\frac{x}{v}=1+\frac{x-3}{3}-\frac{2}{2};\qquad \frac{x}{v}=1+\frac{x-3}{4}+\frac{1}{4},$$

або $\frac{x-2}{3}=\frac{x+2}{4}$, звідки $x=14$. Отже, маємо відповідь: $x=14$ км, $y=3{,}5$ км/год.

Приклад 5. Відстань між точками A і B дорівнює 270 м. Від A до B рівномірно рухається тіло; діставшись до B, воно відразу ж повертається назад з тією самою швидкістю. Друге тіло, яке починає рух із B в A через 11 с після виходу першого із A, рухається рівномірно, але з меншою швидкістю. На шляху від B до A воно зустрічається з першим двічі: через 10 і через 40 с після свого виходу із B. Знайти швидкість руху кожного тіла.

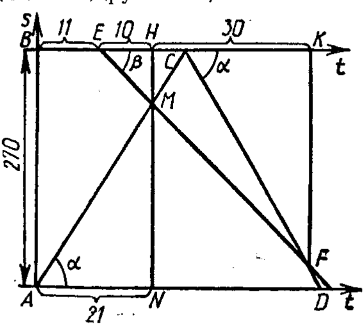


Рис. 13.1

△ Зручна модель задачі — графік рівномірного руху в системі координат «швидкість» (s — у метрах), «час» (t — у секундах). Нехай AC (рис. 13.1) — графік руху із A в B з швидкістю $v_1=\operatorname{tg}\alpha$ (вісь часу At); CD — графік руху із B в A того самого тіла і з тією самою швидкістю $v_1=\operatorname{tg}\alpha$ (вісь часу Bt); EF — графік руху із B в A з швидкістю $v_2=\operatorname{tg}\beta$, $\beta<\alpha$ (вісь часу Bt).

Проміжок часу $BE=11$, проміжок часу до першої зустрічі $EH=10$, між першою і другою зустрічами $HK=30$; тоді $NM=21\,v_1$, $HM=10v_2$, $KF=40v_2$, $NM+HM=AB=270$, тобто

$$21v_1+10v_2=270, \tag{*}$$

Проміжок часу $HC = HM/v_1 = 10\,v_2/v_1$; проміжок часу $CK = KF/v_1 = 40v_2/v_1$. Оскільки $HC + CK = 30$, то $10v_2/v_1 + 40v_2/v_1 = 30$, звідки

$$5v_2 = 3v_1. \qquad (**)$$

Розв'язавши сумісно рівняння (*) і (**), знайдемо $v_1 = 10$ м/с, $v_2 = 6$ м/с. ▲

Приклад 6. Із A в B вирушила машина з поштою. Через 20 хв тим самим маршрутом вирушила друга машина, швидкість якої 45 км/год. Наздогнавши першу машину, водій передав пакунок і відразу ж поїхав назад з тією самою швидкістю (час, затрачений на зупинку і розворот, не враховувати). У той момент, коли перша машина прибула до B, друга подолала лише половину шляху від місця зустрічі її з першою машиною до пункту A. Знайти швидкість руху першої машини, якщо відстань між A і B дорівнює 40 км.

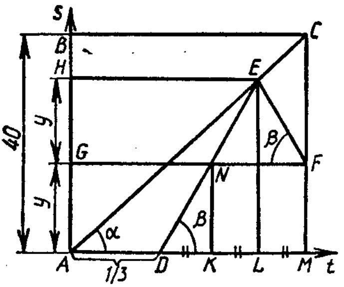


Рис. 13.2

△ Розглянемо систему координат «шлях» (s — у кілометрах), «час» (t — у годинах). Нехай AC (рис. 13.2) — графік руху першої машини з шуканою швидкістю $v = \operatorname{tg}\alpha$; DE і EF — графік руху «туди — назад» другої машини з швидкістю $\operatorname{tg}\beta = 45$; $AD = 1/3$. Відомо, що $AB = 40$ і G — середина шляху AH. Нехай $AG = NK = y$. Тоді проміжок часу $DK = y/\operatorname{tg}\beta = y/45$. Геометрично зрозуміло, що $DK = KL = LM$, тому проміжок часу руху першої машини $AM = \frac{1}{3} + \frac{3y}{45}$, звідки

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{15}\right) v = 40. \qquad (*)$$

Проміжок часу $AL = \frac{1}{3} + \frac{2y}{45}$, $LE = AH = 2y$, тому

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2y}{45}\right) v = 2y. \qquad (**)$$

Розв'язавши сумісно рівняння (*) і (**), знайдемо $y = 15$ і $v = 30$ км/год. ▲

Приклад 7. Із колби з розчином солі відливають $1/n$ частину розчину в пробірку і випаровують доти, поки процентний вміст солі у пробірці не підвищиться вдвічі. Після цього утворений розчин виливають у колбу і змішують з рештою розчину. Внаслідок цього вміст солі в розчині підвищиться на p %. Визначити процентний вміст солі в початковому розчині.

△ Нехай у колбі було спочатку n літрів розчину, який містив x % солі, що становить $(nx/100)$ л солі. У пробірку відлили $\frac{1}{n} \cdot n = 1$ л розчину. За умовою після випаровування процентний вміст солі в пробірці підвищився вдвічі; оскільки випаровується тільки вода, а кількість солі залишається незмінною, тому в колбу влили тільки 0,5 л розчину. Тоді в колбі виявиться $n - 1 + 0{,}5 = (n - 0{,}5)$ л розчину, в якому, як і раніше, знаходиться ($nx/100$) л солі. Згідно з умовою, маємо $nx/100 = (x + p)(n - 0{,}5)/100$, або $nx = (x + p) \times \times (n - 0{,}5)$, звідки $x = p(2n - 1)$. ▲

Приклад 8. Знайти всі натуральні тризначні числа, кожне з яких має такі властивості: перша цифра числа втричі менша від суми двох інших його цифр; різниця між самим числом і числом, утвореним з нього перестановкою двох останніх його цифр, невід'ємна і ділиться на 81.

△ Нехай шукане число має вигляд $100x + 10y + z$, де x, y і z — його цифри. Відповідно до умови, $3x = y + z$ і число $100x + + 10y + z - (100x + 10z + y)$ ділиться на 81. Спростивши, дістанемо, що $9(y - z)$ ділиться на 81, тобто $y - z$ кратне числу 9. Оскільки y і z — цифри, то останнє можливо лише у двох випадках: 1) $y - z = 0$ і 2) $y - z = 9$

У першому випадку маємо систему $\begin{cases} 3x = y + z, \\ y - z = 0, \end{cases}$ звідки $3x = 2y$, що є можливим при $x = 2$, $y = z = 3$ (шукане число 233), при $x = 4$, $y = z = 6$ (шукане число 466) і при $x = 6$, $y = z = 9$ (шукане число 699).

У другому випадку маємо систему $\begin{cases} 3x = y + z, \\ y - z = 9. \end{cases}$ Друге рівняння системи можливе лише при $z = 0$, $y = 9$, тоді $x = 3$ і шукане число дорівнює 390. Отже, маємо відповідь: 233, 390, 466, 699. ▲

Група А

13.001. Із даних чотирьох чисел перші три відносяться між собою як $1/5 : 1/3 : 1/20$, а четверте складає 15 % другого числа. Знайти ці числа, коли відомо, що друге число на 8 більше за суму решти чисел.

13.002. Скільки кілограмів води треба випарувати з 0,5 т целюлозної маси, яка має 85 % води, щоб дістати масу з вмістом 75 % води?

13.003. У двох бідонах знаходиться 70 л молока. Якщо з першого бідона перелити у другий 12,5 % молока, що є в першому бідоні, то в обох бідонах стане порівну. Скільки літрів молока в кожному бідоні?

13.004. Дві бригади, працюючи одночасно, обробили ділянку землі за 12 год. За який час могла б обробити цю ділянку кожна з бригад окремо, якщо швидкості виконання робіт бригадами відносяться як 3 : 2?

13.005. Сума цифр двозначного числа дорівнює 12. Якщо до цього числа додати 36, то дістанемо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайти це число.

13.006. Тракторист зорав три ділянки землі. Площа першої дорівнює 2/5 площі всіх трьох ділянок, а площа другої відноситься до площі третьої як $3/2 : 4/3$. Скільки гектарів займали всі три ділянки, якщо площа третьої на 16 га менша, ніж площа першої?

13.007. Ціну товару спочатку знизили на 20 %, потім нову ціну знизили ще на 15 % і, нарешті, після перерахунку, знизили знову ще на 10 %. На скільки процентів всього знизили початкову ціну товару?

13.008. Морська вода вміщує 5 % солі за масою. Скільки прісної води треба додати до 30 кг морської води, щоб концентрація солі становила 1,5 %?

13.009. У бібліотеці є книги англійською, французькою та німецькою мовами. Англійські книги становлять 36 % усіх книг іноземними мовами, французькі — 75 % англійських, а решта 185 книг — німецькі. Скільки книг іноземними мовами у бібліотеці?

13.010. Насос може викачати з басейну 2/3 води за 7,5 хв. Пропрацювавши 0,15 год, насос зупинився. Знайти місткість басейну, якщо після зупинки насоса в басейні ще залишилось 25 $м^3$ води.

13.011. Внаслідок реконструкції обладнання продуктивність праці робітника підвищувалась двічі протягом року на одне і те саме число процентів. На скільки процентів зростала кожного разу продуктивність праці, якщо за один і той самий час робітник раніше виготовляв виробів на 25 крб., а тепер на 28 крб. 09 коп.?

13.012. Робочий день зменшився з 8 до 7 год. На скільки процентів треба підвищити продуктивність праці, щоб при тих самих розцінках заробітна плата зросла на 5 %?

13.013. У січні завод виконав 105 % місячного плану випуску готової продукції, а в лютому дав продукції на 4 % більше, ніж у січні. На скільки процентів завод перевиконав двомісячний план випуску продукції?

13.014. Знайти три числа, якщо перше становить 80 % другого, друге відноситься до третього як 0,5 : 9/20, а сума першого і третього на 70 % більша за друге число.

13.015. Турист проїхав відстань між двома містами за 3 дні. Першого дня він проїхав 1/5 всього шляху і ще 60 км, другого — 1/4 всього шляху і ще 20 км, а третього дня проїхав 23/80 всього шляху і ще 20 км, що залишились. Знайти відстань між містами.

13.016. Чисельники трьох дробів пропорційні числам 1, 2 і 3, а обернені величини відповідних знаменників пропорційні числам 1, 1/3 і 0,2. Знайти ці дроби, якщо їхнє середнє арифметичне дорівнює 136/315.

13.017. Знайти суму трьох чисел, знаючи, що третє відноситься до першого як 18,48 : 15,4 і становить 40 % другого, а сума першого і другого дорівнює 400.

13.018. Вкладник зняв з ощадної книжки спочатку 1/4 своїх грошей, потім зняв 4/9 залишку і ще 64 крб. Після цього у нього залишилось на ощадній книжці 3/20 усіх його грошей. Який був вклад?

13.019. Сніг прибирають дві снігоочисні машини. Одна з них може прибрати всю вулицю за 1 год, а друга — за 75 % цього часу. Почавши роботу одночасно, обидві машини пропрацювали разом 20 хв, після чого перша машина зупинилась. Скільки ще потрібно часу другій машині, щоб закінчити роботу?

13.020. Сума перших трьох членів пропорції дорівнює 58. Третій член становить 2/3, а другий 3/4 першого члена. Знайти четвертий член пропорції і записати її.

13.021. Одна бригада може обробити все поле за 12 днів. Другій бригаді для виконання тієї самої роботи треба 75 % цього часу. Після того, як протягом 5 днів працювала тільки перша бригада, до неї приєдналась друга, і обидві разом закінчили роботу. Скільки днів працювали бригади разом?

13.022. На вступному екзамені з математики 15 % абітурієнтів не розв'язали жодної задачі, 144 особи розв'язали задачі з помилками, а число тих, хто розв'язав усі задачі правильно, відноситься до числа тих, хто не розв'язав жодної, як 5 : 3. Скільки абітурієнтів екзаменувалось з математики цього дня?

13.023. Однотипні деталі обробляють на двох верстатах. Продуктивність першого верстата на 40 % більша за продуктивність другого. Скільки деталей було оброблено за зміну на кожному верстаті, якщо перший працював у цю зміну 6 год, а другий 8 год, причому на обох верстатах разом оброблено 820 деталей?

13.024. Тракторна бригада може виорати 5/6 ділянки землі за 4 год 15 хв. До обідньої перерви бригада працювала 4,5 год, після чого залишились невиораними ще 8 га. Яка була ділянка?

13.025. Від пристані до міста вийшов човен з швидкістю 12 км/год, а через півгодини після нього у тому самому напрямі вийшов пароплав із швидкістю 20 км/год. Яка відстань від пристані до міста, якщо пароплав прибув туди на 1,5 год раніше ніж човен?

13.026. Турист проплив по річці на човні 90 км і пройшов пішки 10 км. При цьому на шлях пішки було витрачено на 4 год менше, ніж на шлях по річці. Якби турист ішов пішки стільки часу, скільки він плив річкою, а плив річкою стільки часу, скільки йшов пішки, то ці відстані були б рівні між собою. Скільки часу він ішов пішки і скільки плив річкою?

13.027. Сума квадратів цифр двозначного числа дорівнює 13, якщо від цього двозначного числа відняти 9, то дістанемо число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку. Знайти число.

13.028. Чисельники трьох дробів пропорційні числам 1, 2, 5, а знаменники пропорційні відповідно числам 1, 3, 7. Середнє арифметичне цих дробів дорівнює 200/441. Знайти ці дроби.

13.029. У штаті гаража налічується 54 водії. Скільки вільних днів може мати кожний водій на місяць (30 днів), якщо щоденно 25 % автомашин з 60 залишаються у гаражі для профілактичного ремонту?

13.030. Три бригади робітників зробили насип. Всю роботу оцінено в 3255 крб. Яку заробітну плату одержить кожна бригада, якщо перша складалась з 15 осіб і працювала 21 день, друга — з 14 осіб і працювала 25 днів, а число робітників третьої бригади, що працювала 20 днів, на 40 % перевищувало число робітників першої бригади?

13.031. Група студентів під час канікул здійснила похід по Підмосков'ю. Перші 30 км вони пройшли пішки, 20 % решти маршруту пропливли на плоту річкою, а потім знову йшли пішки, пройшовши відстань у 1,5 рази більшу за ту, яку пропливли річкою. Решту шляху вони проїхали за 1 год 30 хв на попутному грузовику, який рухався з швидкістю 40 км/год. Яка довжина всього маршруту?

13.032. За 3,5 год роботи один штампувальний прес може виготовити 42 % усіх замовлених деталей. Другий за 9 год роботи може виготовити 60 % усіх деталей, а швидкості виконання роботи на третьому і другому пресах відносяться як 6 : 5. За який час буде виконано все замовлення, якщо всі три преси працюватимуть одночасно?

13.033. Кожна з двох друкарок передруковувала рукопис обсягом 72 сторінки. Перша друкарка передруковувала 6 сторінок за той самий час, за який друга передруковувала 5 сторінок. Скільки сторінок передруковувала кожна друкарка за годину, якщо перша закінчила роботу на 1,5 год швидше другої?

13.034. До книгарні для продажу надійшли підручники з фізики і математики. Коли було продано 50 % підручників з математики і 20 % підручників з фізики, що становило в сумі 390 книжок, то підручників з математики залишилось у 3 рази більше, ніж з фізики. Скільки підручників з математики і скільки з фізики надійшло у продаж?

13.035. Взуттєва фабрика за перший тиждень виконала 20 % місячного плану, за другий — 120 % кількості продукції, виготовленої за перший тиждень, а за третій тиждень — 60 % продукції, виготовленої за перші два тижні разом. Який місячний план випуску взуття, якщо відомо, що для його виконання потрібно за останній тиждень місяця виготовити 1480 пар взуття?

13.036. Свіжі гриби містять за масою 90 % води, а сухі — 12 %. Скільки вийде сухих грибів із 22 кг свіжих?

13.037. Один млин може змолоти 19 ц пшениці за 3 год, другий — 32 ц за 5 год, а третій — 10 ц за 2 год. Як розподілити 133 т пшениці між цими млинами, щоб одночасно почавши роботу, вони закінчили її також одночасно?

13.038. У трьох секціях спортивної школи було 96 спортсменів. Число членів ковзанярської секції складало 0,8 числа членів лижної, а число членів хокейної секції складало $33\frac{1}{3}$ % сумарного числа членів двох перших секцій. Скільки спортсменів було у кожній секції?

13.039. За перший квартал автозавод виконав 25 % річного плану випуску автомашин. Число машин, випущених за другий, третій і четвертий квартали, виявилось пропорційне числам 11,25, 12 і 13,5. Визначити перевиконання річного плану в процентах, якщо у другому кварталі автозавод дав продукції в 1,08 рази більше, ніж у першому.

13.040. Троє винахідників одержали за свій винахід премію у розмірі 1410 крб., причому другий одержав 1/3 того, що одержав перший, і ще 60 крб., а третій одержав 1/3 грошей другого і ще 30 крб. Яку премію одержав кожний?

13.041. Змішали 30 %-й розчин соляної кислоти з 10 %-м і дістали 600 г 15 %-го розчину. Скільки грамів кожного розчину було взято?

13.042. Площі трьох ділянок землі відносяться як $2\frac{3}{4} : 1\frac{5}{6} : 1\frac{3}{8}$. Відомо, що з першої ділянки зібрано зерна на 72 ц більше, ніж з другої. Знайти площу всіх трьох ділянок, якщо середня урожайність складає 18 ц з 1 га.

13.043. Віддаль між Москвою і Смоленськом по залізничному шляху дорівнює 415 км. На цьому шляху розташовані міста Можайськ і Вязьма. Віддаль між Москвою і Можайськом відноситься до віддалі між Можайськом і Вязьмою як 7 : 9, а віддаль між Можайськом і Вязьмою становить 27/35 віддалі між Вязьмою і Смоленськом. Знайти віддаль між кожними двома сусідніми містами.

13.044. До магазину привезли цукор і цукор-пісок у 63 мішках, усього 4,8 т, причому мішків з цукром-піском було на 25 % більше, ніж з цукром. Маса кожного мішка з цукром становить 3/4 маси мішка з цукром-піском. Скільки привезли цукру і скільки цукру-піску?

13.045. Шматок сплаву міді і цинку масою 36 кг містить 45 % міді. Яку масу міді треба додати до цього шматка, щоб утворений новий сплав містив 60 % міді?

13.046. Мисливський порох складається із селітри, сірки і вугілля. Маса сірки має відноситись до маси селітри як 0,2 : 1,3, а маса вугілля повинна становити $11\frac{1}{9}$ % маси сірки і селітри разом. Скільки треба кожної речовини, щоб виготовити 25 кг пороху?

13.047. Музичний театр оголосив конкурс на вступ до оркестру. Спочатку планувалось, що число місць для скрипалів, віолончелістів і сурмачів розподілиться у відношенні 1,6 : 1 : 0,4. Проте потім було вирішено збільшити прийом, і в результаті скрипалів було прийнято на 25 % більше, а віолончелістів на 20 % менше, ніж передбачалось. Скільки музикантів кожної спеціальності було прийнято до оркестру, якщо всього прийняли 32 особи?

13.048. Довжина Дунаю відноситься до довжини Дніпра як 19/3 : 5, а довжина Дону до довжини Дунаю як 6,5 : 9,6. Знайти довжину кожної з річок, якщо Дніпро довший ніж Дон на 300 км.

13.049. Перше з невідомих чисел становить 140 % другого, а відношення першого до третього дорівнює 14/11. Знайти ці числа, якщо різниця між третім і другим на 40 одиниць менша від числа, яке становить 12,5 % суми першого і другого чисел.

13.050. Заробітні плати робітника за жовтень і листопад відносились як 3/2 : 4/3, а за листопад і грудень — як 2 : 8/3. За грудень він одержав на 15 крб. більше, ніж за жовтень, і за перевиконання квартального плану робітникові нарахували премію у розмірі 20 % його трьохмісячного заробітку. Знайти розмір премії.

13.051. По похилій площині 6 м завдовжки котяться два циліндри, у одного з яких довжина кола дорівнює 3 дм, а у другого 2 дм. Чи можливо збільшити довжини кіл обох циліндрів на одну і ту саму величину так, щоб на тому самому шляху один з них зробив на 3 оберти більше, ніж другий?

13.052. Штучне водоймище має форму прямокутника з різницею сторін 1 км. Два рибаки, які знаходяться в одній вершині цього прямокутника, одночасно вирушили до пункту, розміщеного в протилежній вершині. При цьому один рибак поплив навпростець на човні, а другий пішов пішки вздовж берега. Визначити розміри водоймища, якщо кожний рибак пересувався із швидкістю 4 км/год і один з них прибув до пункту призначення на 30 хв раніше другого.

13.053. Кристал, який знаходиться у стані формування, рівномірно нарощує свою масу. Спостерігаючи формування двох кристалів, помітили, що за рік перший кристал збільшив свою початкову масу на 4 %, а другий — на 5 %, в той час як приріст маси першого кристала за 3 місяці виявився рівним приросту другого кристала за 4 місяці. Які були початкові маси цих кристалів, коли відомо, що після того, як кожна з них збільшилась на 20 г, відношення маси першого кристала до маси другого кристала становило 1,5?

13.054. Середня урожайність гречки в одному радгоспі дорівнювала 21 ц з 1 га, а в другому, де під гречкою було на 12 га менше, середня урожайність дорівнювала 25 ц з 1 га. Внаслідок цього у другому радгоспі було зібрано на 300 ц гречки більше, ніж у першому. Скільки центнерів гречки було зібрано в кожному радгоспі?

13.055. На вагоноремонтному заводі за певний час мали відремонтувати 330 вагонів. Перевиконуючи план ремонту в середньому на 3 вагони за тиждень, на заводі вже за два тижні до планового строку відремонтували 297 вагонів. Скільки вагонів ремонтували на заводі за один тиждень?

13.056. На відстані s км вантажний автомобіль використовує бензину на a л більше, ніж легковий. Витрачаючи 1 л бензину, вантажний автомобіль проходить по тій самій дорозі на b км менше, ніж легковий. Скільки бензину витрачає кожний з цих автомобілів на відстані s км?

13.057. Дві сили прикладено до однієї точки і напрямлено під прямим кутом. Модуль однієї з них на 4 Н більший за модуль іншої, а модуль рівнодійної на 8 Н менший від суми модулів даних сил. Знайти модулі даних сил і їхньої рівнодійної.

13.058. У лабораторії вимірюється швидкість, з якою поширюється звук вздовж стержнів, виготовлених з різних матеріалів. Перший дослід показав, що весь шлях, який складається з трьох послідовно з'єднаних стержнів, звук проходить за час a с, а шлях, що складається з другого і третього стержнів, звук проходить вдвічі швидше, ніж один перший стержень. У другому досліді другий стержень замінили новим і тоді послідовне з'єднання з трьох стержнів звук пройшов за час b с, а з'єднання з першого і другого стержнів — вдвічі повільніше, ніж один третій стержень. Знайти швидкість поширення звуку в новому стержні, якщо його довжина l м.

13.059. По обидва боки вулиці 1200 м завдовжки розміщено прямокутні смуги землі завширшки 50 м одна і 60 м друга. Смуги відведено під ділянки. На скільки ділянок розбито все селище, якщо вужча смуга землі має на 5 ділянок більше, ніж ширша, і на вужчій смузі кожна ділянка на 1200 $м^2$ менша, ніж кожна ділянка на ширшій смузі?

13.060. Вантаж масою 60 кг тисне на опору. Якщо масу вантажу зменшити на 10 кг, а площу опори зменшити на 5 $дм^2$, то маса, яка припадає на кожний квадратний дециметр опори, збільшиться на 1 кг. Визначити площу опори.

13.061. Для оплати пересилання чотирьох бандеролей потрібно 4 різні поштові марки на загальну суму 2 крб. 80 коп. Визначити вартості марок, які придбав відправник, якщо ці вартості складають арифметичну прогресію, а найкоштовніша марка у 2,5 рази дорожча найдешевшої.

13.062. Учень токаря виточує шахові пішаки для певного числа комплектів шахів. Він хоче навчитись виготовляти на 2 пішаки більше, ніж зараз, і тоді таке саме завдання він виконає на 10 днів швидше. Якби він зміг виготовляти щодня на 4 пішаки більше, ніж зараз, то термін виконання такого самого завдання зменшився б на 16 днів. Скільки комплектів шахів забезпечує пішаками цей токар, якщо для кожного комплекту треба 16 пішаків?

13.063. У залі клубу було 320 місць, розміщених однаковими рядами. Після того як число місць у кожному ряду збільшили на 4 і додали ще один ряд, у залі стало 420 місць. Скільки рядів стало у залі?

13.064. Запас сіна такий, що можна щоденно видавати на всіх коней 96 кг. Насправді ж щоденну порцію кожного коня змогли збільшити на 4 кг, оскільки двоє коней було передано до сусіднього колгоспу. Скільки коней було спочатку?

13.065. Твір писали 108 абітурієнтів. Їм було роздано 480 аркушів паперу, причому кожна дівчина одержала на один аркуш більше, ніж юнак, а всі дівчата одержали стільки ж аркушів, скільки всі юнаки. Скільки було дівчат і скільки юнаків?

13.066. На машинобудівному заводі розробили новий тип деталей для генераторів. Із 875 кг металу виготовляють тепер на три деталі нового типу більше, ніж виготовляли деталей старого типу з 900 кг. Яку масу мають деталі нового і старого типів, якщо дві деталі нового типу за масою менші від одної деталі старого типу на 0,1 т?

13.067. За перший день спортивних змагань не виконали залікових норм і вибули з подальшої боротьби 1/6 частина складу команди юнаків і 1/7 частина складу команди дівчат. Протягом решти періоду змагань з обох команд вибула через невиконання норм однакова кількість спортсменів. Усього до кінця змагання не виконали залікові норми 48 юнаків і 50 дівчат, а із загальної кількості спортсменів, які виконали залікові норми, дівчат було вдвічі більше, ніж юнаків. Яка початкова чисельність команд дівчат і юнаків?

13.068. Робочі дні майстрів A і B оплачуються неоднаково, але обидва вони працювали однакову кількість днів. Якби A працював на один день менше, а B — на п'ять днів менше, то A заробив би 72 крб., а B — 80 крб. Якби ж, навпаки, A працював на п'ять днів менше, а B — на один день менше, то B заробив би на 36 крб. більше, ніж A. Скільки заробив кожний майстер насправді?

13.069. В одному басейні знаходиться 200 $м^3$, а в другому — 112 $м^3$ води. Відкривають крани, через які наповнюються басейни. Через скільки годин кількість води в басейнах буде однаковою, якщо у другий басейн вливається за годину на 22 $м^3$ води більше ніж у перший?

13.070. Через годину після початку рівномірного спуску води у басейні її залишилось 400 м^3, а ще через 3 год — 250 м^3. Скільки води було в басейні?

13.071. Для перевезення 60 т вантажу з одного місця до іншого потрібна деяка кількість машин. Через несправність дороги на кожну машину довелось вантажити на 0,5 т менше, ніж передбачалось, тому додатково було виділено 4 машини. Яка кількість машин призначалась спочатку для перевезення вантажу?

13.072. До міста C, розташованого між пунктами A і B, надходить газ із цих пунктів, відстань між якими 500 км. Із резервуара A щохвилини відкачується 10 000 м^3 газу, а із резервуара B — на 12 % більше. При цьому витік газу в кожній магістралі становить 4 м^3 на кілометр труби за хвилину. Знаючи, що до міста C газ надходить з резервуарів A і B порівну, знайти відстань між містом C і пунктом A.

13.073. Маємо два куски кабелю різних сортів. Маса першого куска дорівнює 65 кг; другий, довжина якого на 3 м більша за довжину першого і маса кожного метра якого на 2 кг більша за масу кожного метра першого куска, має масу 120 кг. Обчислити довжини цих кусків.

13.074. До швейного цеху надійшло три кіпи білизняної тканини, усього 5000 м. У першій кіпі тканини було втричі менше, ніж у другій, а у третій — 22 % усієї кількості. З тканини першої кіпи пошили 150 простинь і 240 наволочок. Для виготовлення однієї простині потрібно на 3,25 м тканини більше, ніж для виготовлення однієї наволочки. Скільки метрів тканини треба для пошиття однієї наволочки?

13.075. Два робітники за зміну разом виготовили 72 деталі. Після того як перший робітник підвищив продуктивність праці на 15 %, а другий — на 25 %, разом за зміну вони почали виготовляти 86 деталей. Скільки деталей виготовляє кожний робітник за зміну після підвищення продуктивності праці?

13.076. Із полів тваринницької ферми зібрали 4340 ц кукурудзи. На наступний рік заплановано одержати 5520 ц кукурудзи за рахунок збільшення площі на 14 га і збільшення урожайності на 5 ц з 1 га. Визначити площу, зайняту під кукурудзу, і урожайність в центнерах з 1 га (урожай був менше 40 ц з 1 га).

13.077. Старший брат на мотоциклі, а молодший на велосипеді здійснили двогодинну прогулянку до лісу і назад без зупинок. При цьому мотоцикліст проїжджав кожний кілометр на 4 хв швидше, ніж велосипедист. Скільки кілометрів проїхав кожний з братів за 2 год, коли відомо, що шлях, пройдений старшим братом за цей час, на 40 км більший?

13.078. Турист їхав на автомобілі 5/8 усього шляху, а решту шляху — на катері. Швидкість катера на 20 км/год менша від швидкості автомобіля. На автомобілі турист їхав на 15 хв довше, ніж на катері. Чому дорівнюють швидкість автомобіля і швидкість катера, якщо весь шлях туриста дорівнює 160 км?

13.079. Перший турист, проїхавши 1,5 год на велосипеді з швидкістю 16 км/год, зупиняється на 1,5 год, а потім продовжує шлях з попередньою швидкістю. Через 4 год після початку подорожі першого туриста навздогін йому вирушає на мотоциклі другий турист із швидкістю 56 км/год. Яку відстань вони проїдуть, перш ніж другий турист наздожене першого?

13.080. Із селища, розташованого за 60 км від міста, сьогодні має приїхати батько студентки, який хотів відвідати недільну лекцію. Але лекцію перенесено на другий день. Щоб попередити батька про це, дочка поїхала по шосе йому назустріч. При зустрічі виявилось, що батько і дочка виїхали на мопедах одночасно, але середня швидкість дочки була вдвічі більшою. Повертаючись після зустрічі, кожний з них збільшив попередню швидкість на 2 км/год, і дочка прибула до міста на 5 хв пізніше, ніж батько до селища. З якою середньою швидкістю батько і дочка їхали спочатку?

13.081. Мотоцикліст відбув з пункту A до пункту B, віддаленого від A на 120 км. Назад він виїхав з тією самою швидкістю, але через годину після від'їзду мусив зупинитися на 10 хв. Після цієї зупинки він продовжував подорож до A, збільшивши швидкість на 6 км/год. Яка була початкова швидкість мотоцикліста, коли відомо, що на зворотний шлях він затратив стільки ж часу, скільки на шлях від A до B?

13.082. Дві групи туристів мають іти назустріч одна одній із турбаз A і B, відстань між якими 30 км. Якщо перша група вийде на 2 год раніше, ніж друга, то вони зустрінуться через 2,5 год після виходу другої групи. Якщо ж друга група вийде на 2 год раніше, ніж перша, то зістріч відбудеться через 3 год після виходу першої групи. З якою середньою швидкістю іде кожна група?

13.083. Товарний поїзд затримався у дорозі на 12 хв, а потім на відстані 60 км надолужив згаяний час, збільшивши швидкість на 15 км/год. Знайти початкову швидкість поїзда.

13.084. Із пунктів A і B, відстань між якими 120 км, виїхали одночасно назустріч один одному два автобуси. У дорозі перший зробив зупинку на 10 хв, другий — на 5 хв. Перший автобус прибув до B на 25 хв раніше, ніж другий прибув до A. Можна вважати, що швидкості руху автобусів були сталими, причому швидкість першого автобуса перевищувала швидкість другого на 20 км/год. Скільки годин були у дорозі пасажири кожного з автобусів?

13.085. Два брати на своїх велосипедах вирушили в дорогу з наміром проїхати 42 км. Старший брат на всьому шляху їхав з однією і тією самою швидкістю, а молодший брат щогодини відставав від старшого на 4 км. Але оскільки старший брат відпочивав у дорозі цілу годину, а менший — лише 20 хв, то фінішували вони одночасно. Скільки часу продовжувалась поїздка?

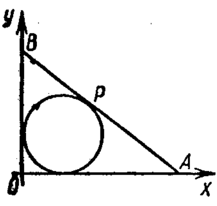


Рис. 13.3

13.086. До задуманого цілого додатного числа дописали справа цифру 7 і від утвореного нового числа відняли квадрат задуманного числа. Різницю зменшили на 75 % цієї різниці і ще відняли задумане число. Остаточно дістали нуль. Знайти задумане число.

13.087. До задуманого цілого додатного числа дописали справа цифру 5 і від утвореного нового числа відняли квадрат задуманого числа. Різницю поділили на задумане число, а потім відняли задумане число і остаточно дістали одиницю. Знайти задумане число.

13.088. На рис. 13.3 зображено коло, яке дотикається до двох взаємно перпендикулярних осей (Ox і Oy), і пряму AB, яка дотикається до кола у точці P. Радіус кола $R = 10$ см, а площа трикутника OAB дорівнює 600 см². Знайти координати точок A, B, P, враховуючи, що $OA > OB$.

13.089. Деяку відстань поїзд пройшов із швидкістю 120 км/год. Після цього відстань, яка на 75 км більша, він пройшов із швидкістю 150 км/год, а решту шляху, що на 135 км менший пройденого,— із швидкістю 96 км/год. Знайти весь шлях, якщо середня швидкість поїзда дорівнює 120 км/год.

13.090. Маємо шматок сплаву міді з оловом загальною масою 12 кг, який містить 45 % міді. Скільки чистого олова треба додати до цього шматка сплаву, щоб утворений новий сплав містив 40 % міді?

13.091. Зі складу продано 300 кг товару двом організаціям у нерівних кількостях по ціні 1,25 крб. за 1 кг. Перша організація перевозить товар на відстань 20 км, а друга — на 30 км. Перевезення 10 кг товару коштує 5 коп. за 1 км шляху. Знаючи, що друга організація затратила на купівлю і перевезення товару на 90 крб. більше за першу, визначити, скільки кілограмів товару купила кожна організація і яку суму вона заплатила за товар і його перевезення.

13.092. Грошова премія була розподілена між трьома винахідниками так: перший одержав половину всієї премії без 3/22 того, що одержали двоє інших разом. Другий одержав 1/4 усієї премії і 1/56 грошей, одержаних разом двома іншими. Третій одержав 300 крб. Яка була премія і скільки грошей одержав кожний винахідник?

13.093. Сплав міді з сріблом містить срібла на 1845 г більше, ніж міді. Якби до нього додати деяку кількість чистого срібла, що за масою дорівнює 1/3 маси чистого срібла, яке міститься у заданому сплаві, то утворився б новий сплав із вмістом срібла 83,5%. Яка маса сплаву і який початковий процентний вміст у ньому срібла?

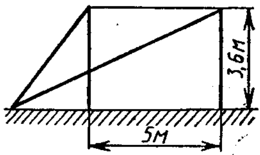


Рис. 13.4

13.094. Маємо 500 кг руди, яка містить деяку кількість заліза. Після видалення з руди 200 кг домішок, які містять у середньому 12,5 % заліза, у решті руди вміст заліза підвищився на 20 %. Яка кількість заліза залишилась ще у руді?

13.095. На рівному горизонтальному майданчику стоять дві щогли на відстані 5 м одна від одної. На висоті 3,6 м від майданчика до кожної щогли прикріплено по одному кінцю куска дроту завдовжки 13 м. Дріт натягнуто у площині розміщення щогли і прикріплено до майданчика, як показано на рис. 13.4. На якій відстані від найближчої щогли знаходиться точка кріплення дроту до майданчика?

13.096. Велосипедист щохвилини проїжджає на 50 м менше, ніж мотоцикліст, тому на шлях 120 км він затрачає часу на 2 год більше, ніж мотоцикліст. Обчислити швидкість кожного з них.

13.097. Довжина шляху від A до B залізницею дорівнює 88 км, а річкою вона дорівнює 108 км. Поїзд із A виходить на 1 год пізніше, ніж теплохід, і прибуває до B на 15 хв раніше. Знайти середню швидкість поїзда, якщо відомо, що вона на 40 км/год більша за середню швидкість теплохода.

13.098. Пішохід і велосипедист вирушають одночасно назустріч один одному із пунктів A і B, відстань між якими 40 км, і зустрічаються через 2 год. Потім вони продовжують подорож, причому велосипедист прибуває до A на 7 год 30 хв раніше, ніж пішохід до B. Знайти швидкості пішохода і велосипедиста, припускаючи, що вони весь час залишались незмінними.

13.099. Відстань між селищами A і B дорівнює s км. Від A до B вирушили одночасно однією і тією самою дорогою два автотуристи, які мали дістатися до B одночасно. Насправді ж перший турист прибув до B на n год раніше зазначеного часу, а другий на $3n$ год запізнився, оскільки він проїжджав за кожну годину в середньому на r км менше від першого. Визначити середню швидкість кожного автотуриста.

13.100. Визначити ціле додатне число за такими даними: коли його записати цифрами і дописати справа цифру 4, то утвориться число, що ділиться без остачі на число, яке більше за шукане на 4, а у частці матимемо число, менше від дільника на 27.

13.101. Одночасно назустріч один одному мали вийти пішоходи A із селища M і B із селища N. Проте A затримався і вийшов пізніше на 6 год. При зустрічі з'ясувалось, що A пройшов на 12 км менше, ніж B. Відпочивши, вони одночасно залишили місце зустрічі і продовжили подорож з попередньою швидкістю. У результаті A пройшов до N через 8 год, а B прийшов до M через 9 год після зустрічі. Визначити відстань MN і швидкості пішоходів.

13.102. Дано два двозначних числа, з яких друге позначено тими самими цифрами, що і перше, але записане у зворотному порядку. Частка від ділення першого числа на друге дорівнює 1,75. Добуток першого числа на цифру його десятків у 3,5 рази більший за друге число. Знайти ці числа.

13.103. Від залізничної станції до турбази можна пройти по шосе або стежкою, причому стежкою ближче на 5 км. Двоє товаришів домовились, що один піде по шосе, додержуючись швидкості v км/год, а другий — стежкою з швидкістю 3 км/год. Другий прийшов на турбазу раніше, ніж перший, на 1 год. Знайти відстань від станції до турбази по шосе і швидкість v першого товариша, коли відомо, що v — ціле число.

13.104. Довжина автобусного маршруту 16 км. У час «пік» автобус переходить на режим експреса, тобто значно зменшує кількість зупинок, внаслідок чого тривалість поїздки від початку до кінця маршруту скорочується на 4 хв, а середня швидкість автобуса збільшується на 8 км/год. З якою швидкістю їде автобус у режимі експреса?

13.105. Однією з трамвайних ліній почали ходити трамваї нової конструкції. Рейс 20 км завдовжки триває тепер на 12 хв менше, оскільки середня швидкість трамваю нової конструкції на 5 км/год більша за середню швидкість трамваю старої конструкції. Скільки часу затрачає на рейс трамвай нової конструкції і яка його середня швидкість?

13.106. Літак має пролетіти 2900 км. Пролетівши 1700 км, він вимушений був приземлитися на 1 год 30 хв, після чого полетів із швидкістю на 50 км/год меншою, ніж раніше. Знайти початкову швидкість літака, коли відомо, що він прибув на місце через 5 год після вильоту.

13.107. Дві бригади, працюючи разом, мали відремонтувати задану ділянку шосейної дороги за 18 днів. Насправді ж вийшло так, що спочатку працювала тільки перша бригада, а закінчувала ремонт ділянки дороги тільки друга бригада, продуктивність праці якої вища, ніж першої бригади. Ремонт заданої ділянки дороги тривав 40 днів, причому перша бригада у свій робочий час виконала 2/3 усієї роботи. За скільки днів була б відремонтована задана ділянка дороги кожною з бригад окремо?

13.108. На полях, виділених агролабораторії для дослідів, з двох ділянок зібрали 14,7 ц зерна. Наступного року, після застосування нових методів агротехніки, на першій ділянці урожай підвищився на 80 %, а на другій — на 24 %, внаслідок чого з цих самих ділянок було зібрано 21,42 ц зерна. Скільки центнерів зерна зібрали з кожної ділянки після застосування нових методів агротехніки?

13.109. Двоє велосипедистів виїхали одночасно назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими дорівнює 270 км. Другий проїжджає за годину на 1,5 км менше, ніж перший, і зустрічається з ним через стільки годин, скільки кілометрів за годину проїжджає перший. Визначити швидкість кожного велосипедиста.

13.110. Два поїзди відправляються із пунктів A і B назустріч один одному. Вони зустрінуться на половині шляху, якщо поїзд із A

вийде на 2 год раніше, ніж поїзд із B. Якщо ж обидва поїзди вийдуть одночасно, то через 2 год відстань між ними становитиме 1/4 відстані між A і B. За які проміжки часу кожний поїзд проходить увесь шлях?

13.111. Поїзд було затримано на t год. Збільшивши швидкість на m км/год, машиніст на перегоні в s км ліквідував запізнення. Визначити, яка мала бути швидкість поїзда на цьому перегоні, якби не було затримки.

13.112. Два тіла рухаються назустріч одне одному з двох місць, відстань між якими 390 м. Перше тіло пройшло за першу секунду 6 м, а за кожну наступну проходило на 6 м більше, ніж за попередню. Друге тіло рухалось рівномірно із швидкістю 12 м/с і почало рух через 5 с після першого. Через скільки секунд після того, як почало рухатись перше тіло, вони зустрінуться?

13.113. В отвір труби ввійшла одна матеріальна частинка, а через 6,8 хв у той самий отвір ввійшла друга частинка. Ввійшовши у трубу, кожна частинка негайно починає поступальний рух уздовж труби: перша частинка рухається рівномірно із швидкістю 5 м/хв, а друга за першу хвилину пробігає 3 м, а за кожну наступну хвилину на 0,5 м більше, ніж за попередню. За скільки хвилин друга частинка наздожене першу?

13.114. Відстань між двома містами дорівнює a км. Два автомобілісти, виїхавши з цих міст назустріч один одному, зустрінуться на половині шляху, якщо перший виїде на t год раніше ніж другий. Якщо ж вони виїдуть одночасно, то зустріч відбудеться через $2t$ год. Визначити швидкість кожного автомобіля, вважаючи, що швидкості сталі на всьому шляху.

13.115. Турист A вирушив з міста M до міста N із сталою швидкістю 12 км/год. Турист B, перебуваючи у місті N і одержавши сигнал, що A проїхав 7 км, відразу ж виїхав назустріч йому і проїжджав щогодини 0,05 усієї відстані між M і N. З моменту виїзду B до його зустрічі з A пройшло стільки годин, на скільки кілометрів за годину пересувався турист B. Знайти відстань між містами M і N, якщо вона не менше 100 км.

13.116. Вийшовши із станції з запізненням на 20 хв, поїзд пройшов перегін 160 км із швидкістю, яка перевищує швидкість за розкладом на 16 км/год, і прибув до кінця перегону вчасно. Яка швидкість поїзда на цьому перегоні за розкладом?

13.117. Велосипедист проїхав 60 км із пункту A до пункту B. На зворотному шляху він першу годину проїхав з попередньою швидкістю, після чого зробив зупинку на 20 хв. Почавши рух знову, він збільшив швидкість на 4 км/год і тому затратив на шлях від B до A стільки ж часу, скільки і на шлях від A до B. Визначити швидкість велосипедиста на шляху від A до B.

13.118. Два автобуси одночасно виїхали з фабрики і відправились в зону відпочинку, до озера. Відстань між фабрикою і озером 48 км. Перший автобус прибув до озера на 10 хв раніше ніж другий, причому середня швидкість другого менша за середню швидкість першого автобуса на 4 км/год. Визначити швидкості автобусів.

13.119. Добуток цифр двозначного числа втричі менший від самого числа. Якщо до цього числа додати 18, то дістанемо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайти задане число.

13.120. Мотоцикліст зупинився для заправлення пальним на 12 хв. Після цього, збільшивши швидкість руху на 15 км/год, він надолужив витрачений час на відстані 60 км. З якою швидкістю він рухався після зупинки?

13.121. Літак при випробуванні на дальність пролетів від заводського аеродрому до наперед заданого пункту всього s км, витративши на це t_1 год. Після цього він повернувся на аеродром за час t_2 год ($t_1 < t_2$). У польоті туди і назад справжня швидкість літака (швидкість відносно нерухомої маси повітря) залишалась одна і та сама, а нерівність $t_1 < t_2$ пояснюється впливом вітру, спочатку попутного, а потім зустрічного. Знайти справжню швидкість v літака, швидкість вітру $v_в$ і шлях $s_c = v_в(t_2 - t_1)$, який пройшов літак відносно нерухомої маси повітря.

13.122. Два брати мали квитки на стадіон, розміщений за 20 км від їхнього будинку. Щоб дістатися до стадіону, вони вирішили скористатися своїм велосипедом і домовились, що вирушать одночасно, один на велосипеді, а другий пішки; проїхавши частину шляху, перший залишить велосипед, а другий, дійшовши до місця, де залишено велосипед, далі поїде на ньому і наздожене першого на вході до стадіону. Де повинен залишити велосипед перший брат і скільки часу буде витрачено на дорогу, якщо кожний з братів йтиме рівномірно із швидкістю 4 км/год, а їхатиме у 5 разів швидше?

13.123. Мотоцикліст затримався біля шлагбаума на 24 хв. Збільшивши після цього свою швидкість на 10 км/год, він надолужив спізнення на перегоні 80 км. Визначити швидкість мотоцикліста до затримки.

13.124. Із порту одночасно вийшли два теплоходи, причому один з них пішов на південь, а другий на схід. Через 2 год відстань між ними становила 174 км. Знайти середню швидкість кожного теплохода, коли відомо, що один з них у середньому за кожну годину проходив на 3 км більше, ніж другий.

13.125. Швидкості пасажирського і товарного поїздів відносяться як $a : b$. Пасажирський поїзд вийшов із станції A на 0,5 год пізніше, ніж товарний, а прибув до станції B на 0,5 год раніше від нього. Знайти швидкості поїздів, якщо відстань між A і B дорівнює s км.

13.126. Дві точки рівномірно обертаються по двох колах. Одна з них здійснює повний оберт на 5 с швидше, ніж друга, і тому встигає виконати за 1 хв на два оберти більше. Скільки обертів за хвилину здійснює кожна точка?

13.127. За сигналом дресирувальника двоє поні одночасно побігли рівномірно вздовж зовнішнього кола арени цирку у протилежних напрямах. Перший поні біг дещо швидше, ніж другий, і до моменту зустрічі пробіг на 5 м більше, ніж другий. Продовжуючи біг, перший поні підбіг до дресирувальника, який залишився на тому самому місці, від якого почали бігти поні, через 9 с після зустрічі з другим поні, а другий — через 16 с після їхньої зустрічі. Який діаметр арени?

13.128. Над пунктом A вертоліт був о 8 год 30 хв. Пролетівши по прямій s км, вертоліт опинився над пунктом B. Протримавшись у повітрі над пунктом B 5 хв, вертоліт пішов зворотним курсом тією самою трасою. До пункту A він повернувся о 10 год 35 хв. Від A до B він летів за вітром, а назад — проти вітру. Швидкість вітру увесь час була сталою. Знайти швидкість вітру, якщо власна швидкість вертольота також увесь час є сталою і при безвітряній погоді дорівнює v км/год. При якому співвідношенні між заданими величинами задача має розв'язок?

13.129. О 9 год самохідна баржа вийшла з пункту A вгору по річці і прибула до пункту B; через 2 год після прибуття до B ця баржа відбула назад. Припускаючи, що середня швидкість течії річки дорівнює 3 км/год, а власна швидкість баржі весь час стала, визначити, коли баржа прибула до пункту B. Відстань між A і B дорівнює 60 км.

13.130. Двоє приятелів у одному човні пройшли вздовж берега і повернулись тією самою трасою через 5 год з моменту відплиття. Весь рейс становить 10 км. За їхніми підрахунками вийшло, що на кожні 2 км проти течії у середньому їм потрібно було стільки ж часу, скільки на кожні 3 км за течією. Знайти швидкість течії, час руху за течією і час руху проти течії.

13.131. Бакенник, інспектуючи свою ділянку річки, у звичайному весловому човні піднявся вгору річкою на 12,5 км, а потім тією самою трасою повернувся на те саме місце. У цьому рейсі він долав кожні 3 км проти течії і кожні 5 км за течією у середньому за рівні проміжки часу, а всього у дорозі перебував рівно 8 год. Знайти швидкість течії і час рейсу бакенника вгору по річці.

13.132. У лабораторному пристрої деяка рідина надходить до посудини через три вхідних крани. Якщо відкрити всі крани одночасно, то посудина заповниться за 6 хв. Якщо ж заповнювати посудину тільки через другий кран, то на це піде 0,75 того часу, за який може заповнитись посудина тільки через один перший кран. Через один третій кран ця посудина заповнюється на 10 хв довше, ніж через один другий кран. На який час треба відкрити кожний кран окремо для заповнення посудини?

13.133. Басейн для плавання має три труби різних перерізів, щоб відводити воду за допомогою насоса рівномірного відкачування. Через першу і другу труби разом при закритій третій трубі заповнений басейн випорожнюється за a хв, через першу і третю разом при закритій другій — за b хв, а через другу і третю труби при закритій першій — за c хв. За який час заповнений басейн випорожнюється через кожну трубу окремо?

13.134. Відповідно до програми, два верстати на потоковій лінії мають за a год обробляти однакову кількість деталей. Перший верстат виконав завдання. Другий верстат виявився не зовсім справним, працював з перебоями, внаслідок чого за той самий час обробив на n деталей менше, ніж перший. На обробку однієї деталі на другому верстаті затрачалось у середньому на b хв більше, ніж на першому. Скільки деталей оброблено на кожному верстаті?

13.135. Бригада слюсарів може виконати деяке завдання з обробки деталей на 15 год швидше, ніж бригада учнів. Якщо бригада учнів попрацює 18 год, виконуючи це завдання, а потім бригада слюсарів продовжуватиме виконання завдання протягом 6 год, то і тоді буде виконано тільки 0,6 усього завдання. Скільки часу треба бригаді учнів для самостійного виконання даного завдання?

13.136. Від пристані пліт відправився за течією річки. Через 5 год 20 хв за плотом з тієї самої пристані відправився моторний човен, який наздогнав пліт, пройшовши 20 км. Яка швидкість плоту, коли відомо, що швидкість моторного човна більша за швидкість плоту на 12 км/год?

13.137. Три машини різних систем виконують деяку лічильну роботу. Якщо всю роботу доручити тільки другій або тільки першій машині, то друга машина витратить на виконання всієї роботи на 2 хв більше, ніж перша. Одна третя машина може виконати всю роботу за термін, вдвічі більший, ніж одна перша. Оскільки частини роботи однотипні, то всю роботу можна розподілити між трьома машинами. Тоді, працюючи разом і закінчивши роботу одночасно, вони виконають її за 2 хв 40 с. За який час може виконати цю роботу кожна машина, працюючи окремо?

13.138. Двоє робітників, другий з яких почав працювати на 1,5 дні пізніше ніж перший, працюючи незалежно один від одного, обклеїли шпалерами кілька кімнат за 7 днів, починаючи з моменту виходу на роботу першого робітника. Якби цю роботу було доручено кожному окремо, то першому для її виконання потрібно було б на 3 дні більше, ніж другому. За скільки днів кожний з них окремо виконав би цю саму роботу?

13.139. Знайти двозначне число, частка від ділення якого на добуток його цифр дорівнює 8/3, а різниця між шуканим числом і числом, записаним тими самими цифрами, але у зворотному порядку, дорівнює 18.

13.140. На одному з двох верстатів обробляють партію деталей на 3 дні довше, ніж на другому. Скільки днів продовжувалась би обробка цієї партії деталей на кожному верстаті окремо, коли відомо, що при сумісній роботі на цих верстатах втричі більша партія деталей була оброблена за 20 днів?

13.141. Задано ціле число. Потрібно було збільшити його на 200 000 і здобуте число потроїти. Замість цього приписали до цифрового запису заданого числа справа цифру 2 і дістали правильний результат. Яке число було задано?

13.142. Чан наповнюється через два крани A і B. Наповнення чану тільки через кран A триває на 22 хв довше, ніж через кран B. Якщо ж відкрити обидва крани, то чан заповниться за 1 год. За який проміжок часу кожний кран окремо може заповнити чан?

13.143. Деяку роботу A виконує на a днів довше, ніж B, і на b днів довше, ніж C. A і B, працюючи разом, виконують цю роботу за стільки ж днів, що й C. Визначити час, за який кожний виконує цю роботу окремо. При якому співвідношенні між заданими величинами задача має розв'язок?

13.144. Сума усіх парних двозначних чисел ділиться на одне з них без остачі. Здобута частка відрізняється від дільника тільки послідовністю цифр, а сума його цифр дорівнює 9. Яке двозначне число було дільником?

13.145. Катер спочатку йшов a км за течією, а потім вдвічі більшу відстань — озером, в яке річка впадає. Весь рейс тривав 1 год. Знайти власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки c км/год.

13.146. Знайти три числа, з яких перше більше за друге у стільки разів, у скільки друге більше за третє. Якщо від першого числа відняти суму двох інших, то дістанемо 2, а якщо до першого додати піврізницю другого і третього, то дістанемо 9.

13.147. Маємо лист жерсті у формі прямокутника, в якого відношення довжини до ширини дорівнює 2 : 1. Із цього листа виготовлено відкриту зверху коробку так, що у кутках листа вирізано по квадрату із стороною 3 см і утворені краї загнуто. Визначити розміри листа жерсті, якщо об'єм коробки виявився рівним 168 см^3.

13.148. Фотокартку розмірами 12×18 см вставлено у рамку з сталою шириною. Визначити ширину рамки, якщо її площа дорівнює площі фотокартки.

13.149. Знайти два числа, сума яких дорівнює 44, причому менше число від'ємне. Процентне відношення різниці між більшим і меншим числами до меншого числа збігається з меншим числом.

13.150. У рукопису задачника з арифметики було наведено приклад, в якому дане число треба помножити на 3 і від знайденого результату відняти 4. У друкарні допустили помилку і замість знака множення поставили знак ділення, а замість мінуса — плюс. Проте кінцевий результат від цього не змінився. Який приклад передбачалось помістити у задачнику?

13.151. Кішка, яка гналась за мишкою вздовж довгого коридора, наздогнала її через a с після початку погоні. Початкова відстань між ними l м. Якщо при такій самій початковій відстані мишка з переляку побігла б не від кішки, а до неї, то була б схоплена нею через b с. Припускаючи, що і в тому і в іншому випадках кішка і мишка докладали б максимальних зусиль, знайти середні швидкості кожної з них.

13.152. Ділянку прямокутної форми загороджено. Якщо від ділянки відрізати по прямій деяку частину так, щоб утворився квадрат, то при цьому її площа зменшиться на 400 м², а загорожа зменшиться на 20 м. Визначити початкові розміри ділянки.

13.153. Під спортмайданчик відведено ділянку в формі прямокутника з діагоналлю, що дорівнює 185 м. Виконуючи будівельні роботи, довжину кожної сторони зменшили на 4 м. При цьому прямокутна форма збереглась, але площа виявилась зменшеною на 1012 м². Які дійсні розміри спортмайданчика?

13.154. За 1 кг одного продукту і 10 кг іншого заплатили 2 крб. Якщо при сезонній зміні цін перший продукт подорожчає на 15 %, а другий подешевшає на 25 %, то за таку саму кількість цих продуктів буде заплачено 1 крб. 82 коп. Скільки коштує кілограм кожного продукту?

13.155. За перший тиждень подорожі друзі витратили на 6 крб. менше, ніж 2/5 кількості взятих із собою грошей; за другий тиждень 1/3 остачі і ще на квитки до театру 2 крб.; за третій тиждень 3/5 нової остачі і ще 3 крб. 20 коп. на морські прогулянки, після чого у них залишилось 20 крб. Скільки грошей було витрачено за три тижні подорожі?

13.156. Моторний човен із швидкістю 20 км/год пройшов відстань між двома пунктами по річці туди і назад без зупинки за 6 год 15 хв. Відстань між пунктами 60 км. Визначити швидкість течії річки.

13.157. Знайти двозначне число таке, що коли його поділимо на добуток цифр, з яких воно складене, то у частці дістанемо 16/3, а якщо віднімемо від нього 9, то різниця буде двозначним числом, яке відрізнятиметься від шуканого тільки послідовністю розміщення цифр.

13.158. Для продажу до рундука привезли яблука першого сорту на суму 22 крб. 80 коп. і яблука другого сорту на суму 18 крб. При розвантаженні яблука випадково перемішались. Підрахунок показав, що коли тепер продавати всі яблука по одній ціні — на 9 коп. меншій від ціни кілограма яблук першого сорту, то буде виручено раніше намічену суму. Скільки кілограмів яблук привезено, якщо відомо, що яблук другого сорту було на 5 кг більше, ніж першого?

13.159. Від трьох кафедр інституту надійшли заявки на придбання додаткового обладнання для лабораторій. Вартість обладнання в заявці першої кафедри становить 45 % від заявки другої кафедри, а вартість обладнання у заявці другої кафедри — 80 % від заявки третьої. Вартість обладнання у заявці третьої кафедри перевищує вартість, вказану в заявці першої, на 640 крб. Знайти загальну вартість обладнання у заявках усіх трьох кафедр.

13.160. Якщо двозначне число поділимо на суму його цифр, то дістанемо у частці 4 і в остачі 3. Якщо ж це число поділимо на добуток його цифр, то дістанемо у частці 3 і в остачі 5. Знайти це число.

13.161. Перевезення тонни вантажу від пункту M до пункту N залізницею обійдеться на b коп. дорожче, ніж водним шляхом. Скільки тонн вантажу можна перевезти від M до N залізницею на суму a крб., якщо водним шляхом на цю саму суму можна перевезти на k т більше, ніж залізницею?

13.162. Деякий товар було куплено восени і за нього заплачено 810 крб. Кілограм цього товару восени коштує на 10 коп. дешевше, ніж весною, і тому на ті самі 810 крб. весною куплено на 90 кг менше. Скільки коштує 1 кг товару весною і скільки його було куплено восени?

13.163. Під час збирання урожаю з кожної з двох ділянок одержано по 210 ц пшениці. Площа першої ділянки на 0,5 га менша від площі другої ділянки. Скільки центнерів пшениці зібрано з 1 га на кожній ділянці, якщо урожайність на першій ділянці була на 1 ц з гектара більшою, ніж на другій?

13.164. Вартість 60 екземплярів першого тому і 75 екземплярів другого тому становить 270 крб. Насправді ж за всі книги заплатили тільки 237 крб., оскільки було проведено зниження цін: на перший том у розмірі 15 %, а на другий — у розмірі 10 %. Знайти початкову ціну цих книг.

13.165. Приймальник посуду прийняв 140 банок двох місткостей. Об'єм банки більшої місткості на 2,5 л більший за об'єм банки меншої місткості. Загальний об'єм більших банок дорівнює об'єму малих банок і дорівнює 60 л. Визначити кількість великих і малих банок.

13.166. Учневі треба було знайти добуток числа 136 на деяке двозначне число, в якому цифра одиниць вдвічі більша за цифру десятків. Через неуважність він поміняв місцями цифри двозначного числа, чому і дістав добуток на 1224 більший за дійсний. Чому дорівнює справжній добуток?

13.167. Моторний і парусний човни, перебуваючи на озері на відстані 30 км один від одного, рухаються назустріч один одному і зустрічаються через 1 год. Якби моторний човен знаходився за 20 км від парусного і наздоганяв його, то вони порівнялись би через 20 хв. Визначити швидкості човнів, покладаючи, що їхні швидкості сталі і незмінні в обох випадках.

13.168. Однозначне число збільшили на 10 одиниць. Якщо утворене число збільшити на стільки само процентів, як і першого разу, то дістанемо 72. Знайти початкове число.

13.169. Кристал, перебуваючи у стадії формування, рівномірно нарощує свою масу. Спостерігаючи за формуванням двох кристалів, помітили, що перший із них за 3 міс. дав такий самий приріст маси, як другий за 7 міс. Проте через рік виявилось, що перший кристал збільшив свою початкову масу на 4 %, другий — на 5 %. Знайти відношення початкових мас цих кристалів.

13.170. Одна тракторна бригада виорала 240 га, а друга — на 35 % більше, ніж перша. Щодня перша бригада обробляла на 3 га менше, ніж друга, але закінчила роботу на 2 дні раніше від другої. Скільки гектарів обробляла кожна бригада за робочий день, коли відомо, що намічена щоденна норма 20 га перевиконувалась обома бригадами?

13.171. Сім'я складається з батька, матері і трьох дочок; усім разом 90 років. Різниця у віці дівчаток — 2 роки. Вік матері на 10 років більший за суму років дівчаток. Різниця років батька і матері дорівнює віку середньої дочки. Скільки років кожному члену сім'ї?

13.172. Дві посудини з розчином солі поставлено для випаровування. Порції солі, що випаровуються щоденно, сталі для кожної посудини. Із першої посудини одержано 48 кг солі, а з другої, яка стояла на 6 днів менше, 27 кг. Якби перша посудина стояла стільки днів, скільки друга, а друга стільки, скільки перша, то з обох розчинів дістали б однакову кількість солі. Скільки днів стояв кожний розчин?

13.173. Якщо невідоме двозначне число поділити на число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку, то у частці дістанемо 4 і в остачі 3. Якщо ж шукане число поділити на суму його цифр, то у частці дістанемо 8 і в остачі 7. Знайти це число.

13.174. У чотирьох ящиках лежить чай. Коли з кожного ящика взяли по 9 кг, то у всіх разом залишилось стільки, скільки було у кожному. Скільки чаю було у кожному ящику?

13.175. Катер відійшов від причалу одночасно з плотом і пройшов вниз по річці 40/3 км. Не зупиняючись, він розвернувся і пішов вгору по річці. Пройшовши 28/3 км, він зустрівся з плотом. Якщо швидкість течії річки 4 км/год, то яка власна швидкість катера?

13.176. Загальна місткість трьох цистерн становить 1620 л. Дві з них заповнено гасом, а третя порожня. Щоб заповнити її, треба використати або увесь вміст першої цистерни плюс 1/5 вмісту другої, або вміст другої плюс 1/3 вмісту першої. Знайти місткість кожної цистерни.

13.177. Планом було передбачено, що підприємство протягом кількох місяців виготовить 6000 насосів. Підвищивши продуктивність праці, підприємство почало виготовляти за місяць на 70 насосів більше, ніж передбачалось, і на 1 місяць раніше встановленого строку перевиконало завдання на 30 насосів. Протягом скількох місяців було передбачено випустити 6000 насосів?

13.178. Два парки загальною площею 110 га розбито на рівні кількості ділянок. Ділянки кожного парку мають рівні між собою площі, але відрізняються від ділянок другого парку. Якби перший парк було розбито на ділянки такої площі, як другий, то він мав би 75 ділянок, а якби другий було розбито на такі ділянки, як перший, то він мав би 108 ділянок. Визначити площу кожного парку.

13.179. Батько хоче розподілити 35 яблук між п'ятьма своїми дітьми. Половину всіх яблук він віддає синам, котрі розподіляють їх порівну, а другу половину віддає дочкам, які теж розподіляють їх порівну. Виявилось, що кожна дочка одержала на 3 яблука більше, ніж кожний син. Скільки у батька було синів і дочок?

13.180. Один із двох дробів вдвічі більший за другий. Після піднесення кожного дробу до квадрата і додавання цих результатів дістаємо деяку суму. Ту саму суму дістанемо після піднесення кожного з дробів до куба і додавання цих результатів. Знайти дані дроби.

13.181. Бригада робітників мала виготовити за зміну 7200 деталей, причому кожний робітник виготовляв однакову кількість деталей. Проте у бригаді захворіло троє робітників, і тому для виконання всієї норми кожному з робітників довелось виготовити на 400 деталей більше. Скільки робітників було в бригаді?

13.182. У дві посудини однакової маси налито воду, причому маса посудини A з водою становить 4/5 маси посудини B з водою. Якщо воду з посудини B перелити у посудину A, то маса її разом з водою стане у 8 разів більша за масу посудини B. Визначити масу посудин і кількість води у них, знаючи, що у посудині B знаходиться води на 50 г більше, ніж у посудині A.

13.183. У залі клубу є 500 стільців, розміщених рядами, причому кожний ряд має однакову кількість стільців. Після реконструкції залу в кожному ряду виявилось на 5 стільців більше, ніж було, але кількість рядів зменшилась на 5. Як наслідок загальна кількість місць у залі зменшилась на 1/10 попередньої кількості стільців. Скільки рядів було у залі і скільки стільців було у кожному ряду?

13.184. Якби учень правильно перемножив два записаних на дошці числа, то дістав би у добутку 4500. Але, списуючи з дошки співмножники, у одному з них учень замість останньої цифри 5 написав цифру 3 і після множення в результаті дістав 4380. Які числа мав перемножити учень?

13.185. При випробуванні двох двигунів було установлено, що перший витратив 300 г, а другий 192 г бензину, причому другий працював на 2 год менше, ніж перший. Перший двигун використовує за годину на 6 г бензину більше, ніж другий. Яку кількість бензину за годину витрачає кожний з двигунів?

13.186. Бригада мулярів взялась покласти 432 $м^3$ кладки і наміченy роботу виконала, хоча на роботу вийшло на 4 робітники менше. Скільки всього мулярів у бригаді, коли відомо, що кожному муляру, який працював, довелось укладати на 9 $м^3$ більше, ніж спочатку передбачалось?

13.187. Бригада робітників мала виготовити 8000 однакових деталей за певний час. Фактично цю роботу було закінчено на 8 днів раніше строку, оскільки бригада виготовляла щоденно на 50 деталей більше, ніж передбачалось планом. За який час мала бути закінчена робота і який щоденний процент перевиконання плану?

13.188. На обробку однієї деталі робітник A витрачає на k хв менше, ніж робітник B. Скільки деталей обробляє кожний робітник за t год роботи, якщо A обробляє за цей час на n деталей більше, ніж B?

13.189. Сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ дорівнює 1,75. Знайти значення a.

13.190. Шматок платини, густина якої дорівнює $2{,}15 \cdot 10^4$ кг/$м^3$, зв'язано із шматком коркового дерева (густина $24 \cdot 10$ кг/$м^3$). Густина системи дорівнює $48 \cdot 10$ кг/$м^3$. Яка маса шматка дерева, якщо маса шматка платини становить 86,94 г?

13.191. До матеріальної точки прикладено дві сили, кут між якими дорівнює 30°. Модуль однієї з прикладених сил в $7\sqrt{3}$ раза більший за модуль другої, а модуль рівнодійної сили на 24 Н більший, ніж модуль меншої сили. Визначити модулі меншої і рівнодійної сил.

13.192. Маємо три посудини, в які налито нерівні кількості рідини. Для вирівнювання цих кількостей здійснено три переливання з першої посудини до другої, потім 1/4 рідини, яка опинилась у другій посудині, перелили до третьої і, нарешті, 1/10 рідини, яка опинилась у третій посудині, перелили до першої. Після цього у кожній посудині виявилось 9 л рідини. Скільки рідини було спочатку в кожній посудині?

13.193. На навчаннях розвідувальний катер підійшов до головного корабля ескадри і одержав наказ провести розвідку попереду ескадри у напрямі її руху на відстані 70 км. Визначити, через який час катер повернеться до головного корабля ескадри, яка продовжує рух вперед, коли відомо, що швидкість катера 28 км/год, а ескадра має рухатись із швидкістю 14 км/год.

13.194. Переднє колесо рухомої моделі на відстані 120 м виконує на 6 обертів більше, ніж заднє. Якщо коло переднього колеса збільшити на 1/4 його довжини, а коло заднього — на 1/5 його довжини, то на тій самій відстані переднє колесо виконає на 4 оберти більше, ніж заднє. Знайти довжини кіл переднього і заднього коліс.

13.195. Бригада монтерів могла закінчити електропроводку о 16-й годині, прокладаючи за годину по 8 м. Після виконання половини усього завдання один робітник вибув із бригади; у зв'язку з цим бригада почала прокладати за годину по 6 м і закінчила заплановану роботу о 18-й годині. Скільки метрів проводу було прокладено і за скільки годин?

13.196. Через 2 год після виїзду з фабрики шофер подивився на спідометр і помітив, що проїхав тільки 112 км. Він подумав, що коли і далі їхатиме з тією самою швидкістю, то на 30 хв спізниться з доставкою вантажу на станцію. Тому шофер збільшив швидкість і прибув на станцію навіть на 30 хв раніше строку. Визначити початкову і подальшу швидкості руху автомобіля, якщо відстань від фабрики до станції за спідометром становить 280 км.

13.197. У кінозалі є двоє дверей, широкі і вузькі. Через обоє дверей після сеансу глядачі виходять із залу протягом 3 хв 45 с. Якщо глядачів випускати тільки через широкі двері, то вихід із залу триватиме на 4 хв менше, ніж у випадку, коли глядачів випускати тільки через одні вузькі двері. Скільки часу треба для виходу глядачів із кінозалу через кожні двері окремо?

13.198. Деяка речовина вбирає вологу, збільшуючи при цьому свою масу. Щоб ввібрати 1400 кг вологи треба взяти неподрібненої речовини на 300 кг більше, ніж подрібненої. Скільки процентів від маси речовини становить маса ввібраної вологи у випадку подрібненої речовини і у випадку неподрібненої, якщо у другому випадку це число процентів на 105 менше, ніж у першому?

13.199. На шляху від села до поля колесо вантажного автомобіля робить на 100 обертів менше, ніж колесо велосипеда, і на 150 обертів більше, ніж гусениця трактора. Знайти відстань від села до поля, коли відомо, що довжина кола вантажного автомобіля становить 4/3 довжини кола колеса велосипеда і на 2 м менша від гусениці трактора.

13.200. Дві шкурки цінного хутра загальною вартістю 225 крб. було продано на міжнародному аукціоні з прибутком 40 %. Яка вартість кожної шкурки окремо, якщо від першої було одержано прибуток 25 %, а від другої 50 %?

13.201. Спортивний майданчик має форму прямокутника, довжина якого на b м більша за ширину. Майданчик облямовано доріжкою однакової ширини a м. Які розміри спортивного майданчика, якщо його площа дорівнює площі доріжки, яка його облямовує?

13.202. Дві друкарки мають передрукувати рукопис, що складається з трьох розділів, з яких перший вдвічі коротший другого і втричі довший третього. Працюючи разом, друкарки передрукували перший розділ за 3 год 36 хв. Другий розділ було передруковано за 8 год, з яких 2 год працювала лише перша друкарка, а решту часу вони працювали разом. Скільки часу треба другій друкарці для того, щоб одній передрукувати третій розділ?

13.203. Відстань між двома селами дорівнює 10 км. Двоє пішоходів виходять одночасно з одного села і йдуть в інше, причому перший із швидкістю, на 3 км/год більшою, ніж другий, і приходить до місця призначення на 3 год раніше. З якою швидкістю іде кожний з них?

13.204. Двоє робітників, працюючи разом, виконують деяку роботу за 8 год. Перший з них, працюючи окремо, може виконати всю роботу на 12 год швидше, ніж другий, якщо той працюватиме окремо. За скільки годин кожний з них, працюючи окремо, може виконати роботу?

13.205. Якщо двозначне число поділити на суму його цифр, то у частці буде 3 і в остачі 7. Якщо потім взяти суму квадратів цифр цього числа і відняти від неї добуток тих самих цифр, то дістанемо початкове число. Знайти це число.

13.206. Тризначне число закінчується цифрою 2. Якщо її перенести у початок запису числа, то утворене число буде на 18 більше початкового. Знайти це число.

13.207. Експрес проходить відстань від Москви до Санкт-Петербургу на 3 год 30 хв швидше пасажирського поїзда, оскільки за 1 год він проходить на 35 км більше. Скільки кілометрів за годину проходить кожний з них, якщо відстань між Москвою і Санкт-Петербургом прийняти з округленням рівною 650 км?

13.208. Деяке двозначне число у чотири рази більше за суму і у три рази більше за добуток своїх цифр. Знайти це число.

13.209. Два тіла одночасно почали прямолінійний рух назустріч одне одному. Одне з них проходить щохвилини 7 м, друге за першу хвилину пройшло 24 м, а за кожну наступну проходить на 4 м менше, ніж за попередню. Через скільки хвилин обидва тіла зустрінуться, якщо початкова відстань між ними дорівнює 100 м?

13.210. На скільки процентів треба збільшити довжину радіуса круга, щоб площа круга стала більшою на 96 %?

Група Б

13.211. Цифри деякого тризначного числа утворюють геометричну прогресію. Якщо у цьому числі поміняти місцями цифри сотень і одиниць, то нове тризначне число буде на 594 менше від шуканого. Якщо ж у шуканому числі закреслити цифру сотень і в утвореному двозначному числі переставити цифри, то нове двозначне число буде на 18 менше від числа, вираженого двома останніми цифрами шуканого числа. Знайти це число.

13.212. На купівлю велосипедів спортивний клуб виділив n крб. Оскільки внаслідок зниження цін вартість кожного велосипеда зменшилась на a крб., то велосипедів було куплено на b більше, ніж передбачалось. Скільки купили велосипедів?

13.213. Звичайно для виконання деякого завдання використовуються два механізми одночасно. Продуктивність цих механізмів неоднакова і при сумісній дії завдання виконується ними за 30 год. Одного разу сімісна робота продовжувалась тільки 6 год, після чого перший механізм було зупинено і решту завдання виконано другим механізмом за 40 год. За який час це саме завдання може виконати кожний механізм, працюючи окремо з властивою йому продуктивністю?

13.214. Зігнуті з дроту коло і прямокутник підігнано так, що коло проходить через дві вершини A і B і дотикається до сторони CD (рис. 13.5). Знайти відношення сторін прямокутника, коли відомо, що його периметр у 4 рази більший за радіус кола.

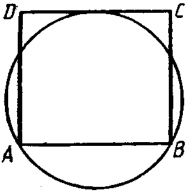


Рис. 13.5

13.215. Від пункту A вздовж шосе віддаляється гонщик, який весь час підтримує сталу швидкість a км/год. Через 30 хв з того самого пункту стартував другий гонщик із сталою швидкістю 1,25 a км/год. Через скільки хвилин після старту другого гонщика було відправлено з того самого пункту третього гонщика, коли відомо, що його швидкість 1,5 a км/год і він одночасно з другим гонщиком наздогнав першого?

13.216. Двоє мотоциклістів вирушають одночасно назустріч один одному з пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 600 км. За той час, що перший проходить 250 км, другий проходить 200 км. Знайти швидкості руху мотоциклістів, вважаючи їхній рух рівномірним, якщо перший мотоцикліст прибуває в B на 3 год раніше, ніж другий в A.

13.217. Дорога між селищами A і B спочатку має підйом, а потім спуск. Велосипедист, рухаючись на спуску з швидкістю, яка на a км/год більша, ніж на підйомі, витрачає на шлях від A до B рівно t год, а на зворотний шлях від B до A — половину цього часу. Знайти швидкість велосипедиста на підйомі і на спуску, якщо відстань між селищами дорівнює b км.

13.218. Результат множення двох додатних чисел, знайдений обчислювачем, здався йому сумнівним. Для перевірки він вирішив поділити результат на більший співмножник. У частці він дістав 17 і в остачі 8. Тоді обчислювач зрозумів свою помилку: виявилось, що цифра десятків, записана ним у добутку, більша за справжню цифру десятків на 6. Які числа перемножав обчислювач, коли відомо, що їхня різниця дорівнює 36?

13.219. Населення міста щорічно збільшується на 1/50 числа жителів. Через скільки років населення потроїться?

13.220. Юнак пішов до залізничної станції, до якої від його будинку було 10,5 км. Через півгодини з того самого будинку за юнаком тією самою дорогою вийшов його брат із швидкістю 4 км/год, який наздогнав юнака, передав йому річ, яку той забув, і зразу ж повернувся та пішов з попередньою швидкістю. З якою швидкістю ішов юнак, коли відомо, що він весь час ішов рівномірно, а його брат повернувся додому в той момент, коли юнак підійшов до станції?

13.221. Із пунктів A і C до пункту B одночасно виїхали двоє вершників і, незважаючи на те, що C знаходився від B на 20 км далі, ніж A від B, прибули в B одночасно. Знайти відстань від C до B, якщо вершник, який виїхав із C, проїжджав кожний кілометр на 1 хв 15 с швидше, ніж вершник, який виїхав із A, і вершник, що виїхав із A, приїхав у B через 5 год.

13.222. Відстань між станціями A і B дорівнює 103 км. Із A до B вийшов поїзд і, пройшовши деяку відстань, був затриманий, а тому решту шляху до B проходив із швидкістю, яка на 4 км/год більша за попередню. Знайти початкову швидкість поїзда, коли відомо, що відстань до B після затримки на 23 км довша, ніж шлях, пройдений до затримки, і на проходження шляху після затримки пішло на 15 хв більше, ніж на проходження шляху до затримки.

13.223. Пункт C розміщено на відстані 12 км від пункту B вниз за течією. Рибалка відправився на човні до пункту C з пункту A, розміщеного вище пункту B. Через 4 год він прибув до C, а на зворотний шлях затратив 6 год. Іншим разом рибалка скористався моторним човном, збільшивши тим самим власну швидкість пересування відносно води втричі, і дістався від A до B за 45 хв. Визначити швидкість течії, вважаючи її сталою.

13.224. Юнак, повертаючись на велосипеді з відпустки, на деякий шлях затратив на один день більше половини числа днів, що залишились після цього до кінця відпустки. Тепер у юнака дві можливості проїхати решту шляху так, щоб прибути додому точно у строк: проїжджати щоденно на h км більше, ніж спочатку, або зберегти попередню норму щоденного шляху, перевищивши її лише один раз — в останній день шляху — на $2h$ км. За скільки днів до кінця відпустки вирушив юнак додому?

13.225. Деяке замовлення виконують у майстерні № 1 на 3,6 год довше, ніж у майстерні № 2, і на 10 год довше, ніж у майстерні № 3. Якщо за тих самих умов роботи майстерні № 1 і № 2 об'єднаються для виконання замовлення, то строк його виконання виявиться таким самим, як в одній майстерні № 3. На скільки годин більше або менше одного семигодинного робочого дня продовжується виконання цього замовлення у майстерні № 3?

13.226. Рукопис обсягом 80 сторінок віддали двом друкаркам. Якщо перша друкарка почне передруковувати рукопис через 3 год після другої, то кожна з них передрукує по половині рукопису. Якщо обидві друкарки почнуть працювати одночасно, то через 5 год залишаться непередрукованими 15 сторінок. За який час може передрукувати рукопис кожна друкарка?

13.227. Двом робітникам було доручено роботу. Другий почав працювати на 1 год пізніше, ніж перший. Через 3 год після того, як перший почав працювати, їм залишилось виконати 9/20 усієї роботи. Після закінчення роботи виявилось, що кожний виконав половину всієї роботи. За скільки годин кожний, працюючи окремо, може виконати всю роботу?

13.228. Двом робітникам було доручено виготовити партію однакових деталей. Після того, як перший попрацював 2 год, а другий 5 год, виявилось, що вони виконали половину всієї роботи. Пропрацювавши разом ще 3 год, вони виявили, що їм залишилось виконати 0,05 усієї роботи. За який період часу кожний з них, працюючи окремо, може виконати всю роботу?

13.229. Знайти чотири числа, які утворюють пропорцію, коли відомо, що сума крайніх членів дорівнює 14, сума середніх членів дорівнює 11, а сума квадратів таких чотирьох чисел дорівнює 221.

13.230. Три додатних двозначних числа мають такі властивості: кожне число дорівнює неповному квадрату суми своїх цифр. Треба знайти два з них, знаючи, що друге число на 50 одиниць більше за перше.

13.231. Сплавили чавун двох сортів з різним процентним вмістом хрому. Якщо чавуну одного сорту взяти в 5 разів більше, ніж другого, то процентний вміст хрому у сплаві вдвічі перевищить процентний вміст хрому в меншій із сплавлених частин. Якщо взяти однакову кількість чавуну обох сортів, то сплав вміщуватиме 8 % хрому. Визначити процентний вміст хрому в кожному сорті чавуну.

13.232. Від залізничної станції до пляжу 4,5 км. Хлопчик вирушив від станції до пляжу одночасно з рейсовим автобусом. Через 15 хв хлопчик зустрів автобус, який повертався від пляжу, і встиг пройти ще 9/28 км від місця першої зустрічі з автобусом, коли його наздогнав той самий автобус, який доїхав до станції і знову повертався до пляжу. Знайти швидкості хлопчика і автобуса, вважаючи їх сталими і що ні хлопчик, ні автобус не зупинялись, але біля пляжу і на станції автобус зупинявся на 4 хв щоразу.

13.233. Турист повертався з відпустки на велосипеді. На першій ділянці шляху, що становить 246 км, він проїжджав у середньому за кожний день на 15 км менше, ніж проїжджав щоденно на ділянці шляху, що залишився, і становить 276 км. Він повернувся додому чітко в строк — до кінця останнього дня відпустки. Відомо також, що на подолання першої ділянки шляху йому знадобилось на один день більше половини числа днів, що залишились після цього до кінця відпустки. За скільки днів до кінця відпустки вирушив турист додому?

13.234. Маємо два сплави міді з різним процентним вмістом міді у кожному. Число, яке показує в процентах вміст міді в першому сплаві, на 40 менше від числа, яке показує в процентах вміст міді у другому сплаві. Обидва ці сплави сплавили разом, після чого вміст міді становив 36 %. Визначити процентний вміст міді у кожному сплаві, якщо у першому сплаві міді було 6 кг, а у другому 12 кг.

13.235. У заїзді на одну і ту саму дистанцію брали участь два автомобілі і мотоцикл. Другий автомобіль на всю дистанцію затратив на 1 хв більше, ніж перший. Перший автомобіль рухався у 4 рази швидше мотоцикла. Яку частину дистанції за 1 хв проходив другий автомобіль, якщо він проходив за 1 хв на 1/6 частину дистанції більше, ніж мотоцикл, а мотоцикл пройшов дистанцію менше, ніж за 10 хв?

13.236. Майстер дає сеанс одночасної гри у шахи на кількох дошках. Наприкінці перших двох годин він виграв 10 % від числа усіх партій, а 8 суперників звели до нічиєї свої партії з майстром. За наступні 2 год майстер виграв 10 % партій у решти суперників, дві партії програв, а решту 7 партій закінчив внічию. На скількох дошках відбувалась гра?

13.237. До цифрового запису задуманого цілого додатного числа дописали справа якусь цифру. Від утвореного нового числа відняли квадрат задуманого числа. Різниця виявилась у 8 разів більшою за задумане число. Яке число задумано і яку цифру було дописано?

13.238. Стрільцю в тирі було запропоновано такі умови: кожне попадання у ціль винагороджується п'ятьма жетонами, але за кожний промах відбирається три жетони. Стрілець був не дуже влучним. Після останнього (n-го) пострілу в нього не залишилось жодного жетона. Із скількох пострілів складалась серія і скільки було вдалих пострілів, якщо $10 < n < 20$?

13.239. До цифрового запису деякого задуманого двозначного числа дописали справа це саме число і від утвореного таким чином числа відняли квадрат задуманого числа. Різницю поділили на 4 % від квадрата задуманого числа; у частці дістали половину задуманого числа, а в остачі — задумане число. Яке число задумано?

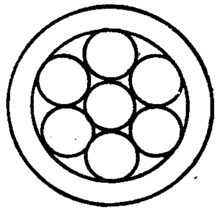


Рис. 13.6

13.240. У круг вкладено 7 рівних кружечків, які дотикаються (рис. 13.6). Площа кругового кільця, утвореного двома концентричними колами, дорівнює сумі площ усіх семи кружечків. Довести, що ширина кільця дорівнює радіусу одного кружечка.

13.241. До цифрового запису деякого задуманого додатного числа дописали справа деяке додатне однозначне число і від утвореного таким чином нового числа відняли квадрат задуманого числа. Ця різниця виявилась більшою задуманого числа у стільки разів, скільки становить додаток приписаного числа до 11. Довести, що так буде виходити тоді і тільки тоді, коли дописане число дорівнює задуманому.

13.242. Два однакові басейни одночасно почали наповнюватись водою. До першого басейну надходить за годину на 30 м³ більше води, ніж до другого. У деякий момент у двох басейнах разом знаходилось стільки води, скільки становить об'єм кожного з них. Після цього через 2 год 40 хв наповнився перший басейн, а ще через 3 год 20 хв — другий. Скільки води надходило за годину до кожного басейну?

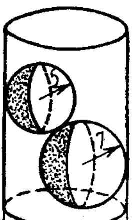


Рис. 13.7

13.243. Одна з трьох діжок наповнена водою, а решта порожні. Якщо другу діжку наповнити водою з першої діжки, то у першій залишиться 1/4 частина води. Якщо потім наповнити третю діжку з другої, то у другій залишиться 2/9 кількості води, яка була в ній. Якщо, нарешті, з третьої діжки вилити воду в порожню першу, то для її наповнення треба буде ще 50 відер води. Визначити місткість кожної діжки.

13.244. Дві кульки вміщено у циліндричну посудину, діаметр якої 22 см (рис. 13.7). Якщо влити у посудину 5 л води, то чи вкриються повністю водою обидві кульки, діаметри яких 10 і 14 см?

13.245. Цистерну за 5 год заповнили водою. Причому кожної наступної години надходження води до цистерни зменшувалось у одне і те саме число разів порівняно з попереднім. Виявилось, що за перші чотири години було налито води вдвічі більше, ніж за останні чотири години. Який об'єм цистерни, коли відомо ще, що за перші дві години у неї було налито 48 м³ води?

13.246. Квадрат і рівносторонній трикутник заповнені однаковою кількістю рівних кругів, що дотикаються один до одного і до сторін цих фігур. Скільки кругів для цього потрібно, якщо до сторони трикутника дотикається на 14 кругів більше, ніж до сторони квадрата (рис. 13.8)?

13.247. Із молока, жирність якого становить 5 %, виготовляють сир жирністю 15,5 %, при цьому залишається сироватка жирністю 0,5 %. Скільки сиру виходить із 1 т молока?

13.248. Маємо два однакові куски різних тканин. Вартість усього першого куска на 12,6 крб. більша за вартість другого. Вартість чотирьох метрів тканини з першого куска на 13,5 крб. перевищує вартість трьох метрів тканини з другого куска. Купувальниця придбала 3 м тканини з першого куска і 4 м тканини з другого куска і заплатила за все 38 крб. 25 коп. Скільки метрів тканини було у кожному з цих кусків? Яка вартість одного метра тканини в кожного куска?

13.249. Було намічено розподілити премію порівну між тими співробітниками установи, які найбільш відзначились. Проте з'ясувалось, що співробітників, які достойні премії, на три більше, ніж передбачалось. У такому разі кожний одержав би на 4 крб. менше. Профспілка і адміністрація знайшли можливим збільшити загальну суму премії на 90 крб., внаслідок чого кожний премійований одержав 25 крб. Скільком співробітникам було виплачено премію?

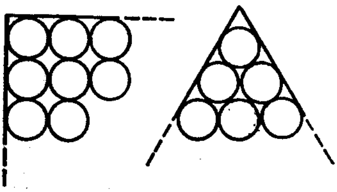


Рис. 13.8

13.250. Бригада лісорубів за планом мала заготовити за кілька днів 216 $м^3$ деревини. Перші три дні бригада виконувала щоденно заплановану норму, а потім щодня заготовляла 8 $м^3$ понад план, тому за день до строку було заготовлено 232 $м^3$ деревини. Скільки кубічних метрів деревини за день мала заготовити бригада за планом?

13.251. Годинна і хвилинна стрілки збігаються опівночі, і починається нова доба. О котрій годині нової доби вперше знову сумістяться годинна і хвилинна стрілки, якщо припустити, що вони рухаються без стрибків?

13.252. Черговий монтер спустився ескалатором метро, що рухався. Увесь його шлях від верхньої площадки до нижньої тривав 24 с. Потім він піднявся і у такому самому темпі знову спустився вниз, але тепер уже по нерухомому ескалатору. Відомо, що спуск тривав 42 с. За скільки секунд спустився б монтер стоячи на сходинці ескалатора, який рухається?

13.253. Для гідродинамічних досліджень виготовлено невелику модель каналу. До цієї моделі підведено кілька труб однакового перерізу, які подають воду, і кілька труб іншого, але так само однакового перерізу, призначених для відведення води. Якщо зразу відкрити чотири труби для наповнення і три труби для відведення, то через 5 год в моделі прибуде 1000 $м^3$ води. Якщо одночасно відкрити на 2 год дві труби для наповнення і дві труби для відведення, то збільшення об'єму води становитиме 180 $м^3$. Скільки води перепускають за годину одна труба на вході і одна труба на виході?

13.254. Першим вирушив наміченим маршрутом мандрівник *А*. Через 45 хв, маючи намір наздогнати мандрівника *А*, швидкість якого v_1 км/год, мандрівник *Б* поїхав із швидкістю v_2 км/год ($v_2 > v_1$). Через скільки хвилин з моменту початку руху мандрівника *А* з турбази має вирушити *В*, щоб наздогнати *А* одночасно з *Б*, якщо відомо, що *В* рухатиметься з швидкістю v_3 км/год ($v_3 > v_2$)?

13.255. Троє плавців мають пропливти у басейні доріжку завдовжки 50 м, відразу ж повернути назад і припливти до місця старту. Спочатку стартує перший, через 5 с — другий, ще через 5 с — третій. У деякий момент часу, ще не досягши до кінця доріжки плавці опинились на однаковій відстані від старту. Третій плавець доплив до кінця доріжки і, повернувши назад, зустрів другого за 4 м до кінця доріжки, а першого — за 7 м до кінця доріжки. Знайти швидкість третього плавця.

13.256. Прилад, який застосовують для визначення діаметра великої деталі ($D > 2$ м), показує висоту H сегмента, що відтинається площиною, дотичною до кульових опор приладу, при сталій відстані $2L$ між центрами опорних кульок приладу (рис. 13.9). Виразити формулою залежність між шуканим діаметром D деталі і вимірюваною висотою H її сегмента при сталих L і d, де d — діаметр кожної з опорних кульок.

13.257. Із міста A в місто B, відстань між якими 120 км, на мопеді вирушив кур'єр. Через 1 год після цього із A на мотоциклі виїхав другий кур'єр, який наздогнав першого, передав йому доручення та негайно з тією самою швидкістю вирушив назад і повернувся до міста A у той момент, коли перший дістався до B. Яка швидкість першого кур'єра, якщо швидкість другого дорівнює 50 км/год?

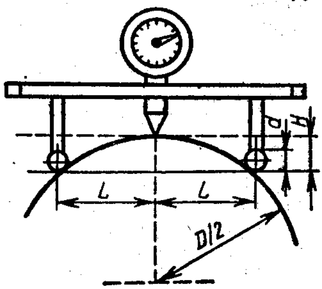


Рис. 13.9

13.258. Поїзд їде від станції A до станції B. На деякій ділянці шляху, яка прилягає до станції B, виконувались ремонтні роботи, і на цій ділянці поїзду дозволено рухатись із швидкістю, що становить тільки $1/n$ частину початкової швидкості, внаслідок чого поїзд прибув на станцію B із запізненням на a год. Другого дня фронт ремонтних робіт став ближче до станції B на b км, і за тих самих умов поїзд запізнився лише на c год. Знайти швидкість поїзда.

13.259. Пароплав через 2 год після виходу з пристані A зупиняється на 1 год і потім продовжує шлях із швидкістю, яка дорівнює 0,8 початкової, внаслідок чого запізнюється до пристані B на 3,5 год. Якби він зупинився на 180 км далі, то за тих самих умов пароплав запізнився б на 1,5 год. Знайти відстань AB.

13.260. Дві матеріальні частинки, які перебувають на відстані 295 м одна від одної, одночасно почали рухатись назустріч одна одній. Перша частинка рухається рівномірно з швидкістю 15 м/с, друга за першу секунду перемістилась на 1 м, а за кожну наступну — на 3 м більше, ніж за попередню. На який кут переміститься секундна стрілка годинника за час, що пройшов від початку руху частинок до їхньої зустрічі?

13.261. Опівдні з пункту A до пункту B вийшов пішохід і виїхав велосипедист, і так само опівдні з B до A вирушив вершник. Усі троє вирушили в дорогу одночасно. Через 2 год велосипедист і вершник зустрілись на відстані 3 км від середини AB, а ще через 48 хв зустрілись пішохід і вершник. Визначити швидкість кожного і відстань AB, коли відомо, що пішохід рухається вдвічі повільніше, ніж велосипедист.

13.262. Відомо, що при вільному падінні тіло проходить за першу секунду 4,9 м, а за кожну наступну на 9,8 м більше, ніж за попередню. Якщо два тіла почали падати з однієї висоти через 5 с одне після одного, то через який час вони будуть одне від одного на відстані 220,5 м?

13.263. Шлях від A до B пасажирський поїзд проходить на 3 год 12 хв швидше, ніж товарний. За той час, що товарний поїзд проходить шлях від A до B, пасажирський проходить на 288 км більше. Якщо швидкість кожного збільшити на 10 км/год, то пасажирський пройде від A до B на 2 год 24 хв швидше, ніж товарний. Визначити відстань від A до B.

13.264. Для того щоб піднятися на звичайному ліфті на останній поверх восьмиповерхового будинку (висота 33 м) при двох 6-секундних проміжних зупинках, треба затратити стільки часу, скільки його потрібно, щоб піднятися на ліфті висотної будівлі при одній 7-секундній проміжній зупинці на 20-й поверх (висота 81 м). Визначити швидкість підйому ліфта у висотній будівлі, знаючи, що вона перевищує швидкість звичайного ліфта на 1,5 м/с, але не досягає 5 м/с.

13.265. Всередині кута 60° рухається матеріальна точка. Вийшовши з вершини цього кута, вона через деякий проміжок часу опинилась на відстані a від однієї сторони кута і на відстані b від другої сторони. Далі вона змінила напрям руху і найкоротшим шляхом просто впала на ту сторону, до якої було ближче. Знайти довжину шляху, пройденого точкою, якщо $a < b$.

13.266. Двоє спортсменів починають бігти одночасно — перший з A до B, другий з B до A. Вони біжать з неоднаковими, але сталими швидкостями і зустрічаються на відстані 300 м від A. Пробігши доріжку AB до кінця, кожний з них зразу повертається назад і зустрічає іншого на відстані 400 м від B. Знайти довжину AB.

13.267. З одного старту і в одному і тому самому напрямі одночасно почали гонки двоє мотоциклістів: один з швидкістю 80 км/год, другий з швидкістю 60 км/год. Через півгодини з того самого старту і в тому самому напрямі вирушив третій гонщик. Знайти його швидкість, коли відомо, що він наздогнав першого гонщика на 1 год 15 хв пізніше, ніж другого.

13.268. Спортсмен стріляє в мішень, віддалену від нього на d м. Спостерігач, який знаходиться на відстані a м від стрільця і b м від мішені, чує одночасно звук пострілу і звук удару кулі по мішені. Знайти швидкість кулі, якщо швидкість звуку дорівнює v м/с.

13.269. На пристані з теплохода зійшли два пасажири і попрямували в одне і те саме селище. Один з них першу половину шляху йшов із швидкістю 5 км/год, а другу половину — з швидкістю 4 км/год. Другий йшов першу половину часу з швидкістю 5 км/год, а другу половину — з швидкістю 4 км/год і прийшов до селища на 1 хв раніше від першого. За який час кожний з них пройшов увесь шлях і яка відстань між пристанню і селищем?

13.270. До Одеси мають прибути два теплоходи з проміжком у 1 год. Обидва теплоходи йдуть з однаковою швидкістю, але обставини ускладнились так, що перший теплохід запізнився б на t_1 хв, а другий на t_2 хв. Одержавши по радіо вказівку про необхідність прибути без запізнення, обидва капітани одночасно збільшили швидкості теплоходів: перший — на v_1 км/год, другий — на v_2 км/год, внаслідок чого обидва теплоходи прибули до Одеси точно за розкладом. З якою швидкістю йшли теплоходи до одержання сигналу по радіо?

13.271. Велосипедна траса для змагань являє собою контур прямокутного трикутника з різницею катетів у 2 км. При цьому його гіпотенуза пролягає по польовій дорозі, а обидва катети — по шосе. Один з учасників пройшов відрізок польовою дорогою з швидкістю 30 км/год, а обидва відрізки по шосе за той самий час із швидкістю 42 км/год. Визначити довжину траси.

13.272. Від пошти A вирушила автомашина у напрямі до поштового відділення B. Через 20 хв за нею виїхав мотоцикліст із швидкістю 60 км/год. Наздогнавши автомашину, мотоцикліст передав шоферу пакунок і зразу ж повернув назад. Автомашина прибула до B у той момент, коли мотоцикліст був на половині відстані від місця зустрічі з автомашиною до A. Визначити швидкість автомашини, якщо шлях від A до B дорівнює 82,5 м.

13.273. М'яч котиться перпендикулярно до бічної лінії футбольного поля. Припустимо, що, рухаючись рівномірно сповільнено, м'яч прокотився за першу секунду 4 м, а за наступну секунду на 0,75 м менше. Футболіст, що знаходився спочатку за 10 м від м'яча, побіг у напрямі руху м'яча, щоб наздогнати його. Рухаючись рівномірно прискорено, футболіст пробіг за першу секунду 3,5 м, а за наступну секунду на 0,5 м більше. За який час футболіст наздожене м'яч і чи встигне він це зробити до виходу м'яча за бічну лінію, якщо до лінії поля футболісту треба пробігти 23 м?

13.274. За графіком поїзд проходить перегін 120 км з однією і тією самою швидкістю. Учора поїзд пройшов половину перегону з цією швидкістю і вимушений був зупинитися на 5 хв. Щоб вчасно прибути в кінцевий пункт перегону, машиністу на другій половині перегону довелось збільшити швидкість поїзда на 10 км/год. Сьогодні зупинка поїзда повторилась на середині того самого перегону, тільки затримка тривала 9 хв. З якою швидкістю машиніст вів поїзд сьогодні на другій половині перегону, якщо в кінцевий пункт цього перегону поїзд знову прибув за розкладом?

13.275. Відстань між містом A і станцією F по залізниці дорівнює 185 км. Приміський електропоїзд їде від A перші 40 км на підйом, наступні 105 км рівниною і решту 40 км знову на підйом. На підйомі поїзд рухається на 10 км/год повільніше, ніж рівниною. На цьому шляху є станції B, C, D і E на відстанях 20, 70, 100 і 161 км від A і на кожній з них поїзд стоїть 3 хв. Знайти час приходу поїзда в B, C, D і E коли відомо, що він вийшов із A о 8 год і прийшов у F о 10 год 22 хв того самого дня.

13.276. По шосе від заводу C до залізничної станції B на 28 км далі, ніж до залізничної станції A. Відстань від A до B через C на 2 км більша, ніж довжина ділянки AB залізниці. Доставка тонни вантажу із C в A коштує 90 коп., а залізницею із A у B — 2 крб. Перевезення тонни вантажу на 1 км автотранспортом коштує на 3,5 коп. більше, ніж залізницею. Визначити відстані AC, BC і AB.

13.277. Навчальний літак летів із швидкістю 220 км/год. Коли йому залишилось пролетіти на 385 км менше, ніж він пролетів, літак збільшив швидкість до 330 км/год. Середня швидкість на всьому шляху виявилась рівною 250 км/год. Яку відстань пролетів літак?

13.278. Пасажир поїзда знає, що на даній ділянці шляху швидкість цього поїзда дорівнює 40 км/год. Тільки-но повз вікно почав проходити зустрічний поїзд, пасажир пустив секундомір і помітив, що зустрічний поїзд проходив повз вікно протягом 3 с. Визначити швидкість зустрічного поїзда, коли відомо, що його довжина 75 м.

13.279. Два контрольних пункти поділяють лижну трасу на три ділянки однакової довжини. Відомо, що шлях, який складається з першої і другої ділянок разом, лижник пройшов із середньою швидкістю a м/хв; шлях, що складається з другої і третьої ділянок разом, він пройшов із середньою швидкістю b м/хв. Середня швидкість лижника на другій ділянці була такою самою, як і середня швидкість для першої і третьої ділянок разом. Яка середня швидкість лижника на всій трасі у цілому і на кожній ділянці цієї траси зокрема? Провести аналіз умов існування реального розв'язку задачі.

13.280. Для контролю за рухом лижника тренер поділив трасу на три ділянки однакової довжини. Стало відомо, що середні швидкості лижника на цих трьох окремих ділянках були різними. При цьому на пробіг першої і другої ділянок разом лижник затратив 40,5 хв, а на пробіг другої і третьої — 37,5 хв. З'ясувалось також, що середня швидкість лижника на другій ділянці була такою самою, як і середня швидкість для першої і третьої ділянок разом. За який час лижник досяг фінішу?

13.281. Два велосипедисти стартували одночасно з одного і того самого місця у одному напрямі. Вслід за ними через 10 хв з того самого місця почав свій шлях третій велосипедист. Спочатку він перегнав першого велосипедиста, після чого через 20 хв наздогнав другого. Починаючи від старту і до кінця шляху кожний велосипедист мав сталу швидкість: a км/год — перший велосипедист; b км/год — другий. Знайти швидкість третього велосипедиста.

13.282. Зв'язківець одержав завдання прибути у пункт B із пункту A у призначений строк. Відстань між A і B дорівнює s км. Коли зв'язківець дістався до пункту C, розміщеного точно на півдорозі від A до B, то розрахував, що запізниться на 2 год, якщо продовжуватиме рух з тією самою швидкістю. Якщо ж у пункті C він відпочине 1 год, а на другій половині шляху збільшить швидкість на v км/год, то прибуде до B у призначений строк. Який строк було призначено зв'язківцю?

13.283. Із двох пунктів, відстань між якими 28 км, одночасно вийшли назустріч один одному два пішоходи. Якби перший не затримався на 1 год на відстані 9 км від місця свого виходу, то зустріч пішоходів відбулась би на половині шляху. Після зупинки перший пішохід збільшив свою швидкість на 1 км/год, і зустріч відбулась на відстані 4 км від того місця, де затримався перший. Знайти швидкості пішоходів.

13.284. Знайти швидкість і довжину поїзда, знаючи, що він проходив із сталою швидкістю повз нерухомого спостерігача протягом 7 с і затратив 25 с на те, щоб пройти з тією самою швидкістю вздовж платформи 378 м завдовжки.

13.285. На ділянці шосе 10 км завдовжки без перехресть автобус зупиняється тільки для входу і виходу пасажирів. Усього він робить 6 проміжних зупинок, затрачаючи на кожну з них по 1 хв, а рухається завжди з однією і тією самою швидкістю. Якби автобус рухався без зупинок, то цей самий шлях він пройшов би із швидкістю, що перевищує середню швидкість свого руху із зупинками на 5 км/год. Скільки хвилин автобус знаходився у русі на цій ділянці шосе?

13.286. Шхуна йде від A до B озером, а від B до C — вгору по річці, після чого повертається назад. Швидкість шхуни відносно нерухомої води весь час підтримується рівною c км/год. Від A до C шхуна йде α год, а зворотний шлях триває β год, причому на шлях від C до B шхуні треба втричі менше часу, ніж на шлях від B до A. Знайти відстані AB і BC.

13.287. Два цехи молокозаводу спільно мають обробити певну кількість літрів молока. Другий цех приступив до виконання завдання на a робочих днів пізніше, але обробляв щоденно на m л молока більше, ніж перший. Минуло ще $5a/9$ робочих днів від початку спільної роботи цих цехів і залишалась невиконаною ще 1/3 усього завдання. Скільки робочих днів потрібно було для виконання завдання, якщо робота була закінчена одночасно і кожний цех обробив половину даної кількості літрів молока?

13.288. Майстрові і його учневі було доручено виготовити партію однакових деталей. Після того як майстер попрацював 7 год, а учень 4 год, виявилось, що вони виконали 5/9 усієї роботи. Попрацювавши разом ще 4 год, вони встановили, що залишилось виконати 1/18 всієї роботи. За який проміжок часу виконав би всю роботу учень, працюючи один?

13.289. Два сплави складаються з цинку, міді і олова. Відомо, що перший сплав вміщує 40 % олова, а другий 26 % міді. Процентний вміст цинку в першому і другому сплавах однаковий. Сплавивши 150 кг першого сплаву і 250 кг другого, дістали новий сплав, що містить цинку 30 %. Скільки олова вміщує цей новий сплав?

13.290. Якщо дві труби відкрити одночасно, то басейн заповниться за 2 год 24 хв. Насправді ж спочатку було відкрито тільки першу трубу протягом 1/4 часу, за який друга труба одна може заповнити басейн. Потім відкрили другу трубу, яка діяла протягом 1/4 того часу, за який перша труба одна може заповнити басейн, після чого виявилось, що залишається наповнити 11/24 всієї місткості басейну. Скільки часу треба для заповнення басейну кожною трубою окремо?

13.291. Якщо виконання замовлення із складання кількох книг покласти на одного з трьох складачів, то перший упорається з роботою на 10 год швидше, а третій — на 6 год швидше, ніж другий. Якщо ж одну із замовлених книг складатиме перший складач, а другу книгу одночасно складатиме другий, то за 9 год вони складуть стільки сторінок, скільки за 10 год складуть другий і третій, працюючи разом за тих самих умов. Скільки часу треба буде кожному складачеві для виконання всього замовлення, якщо вони працюватимуть окремо?

13.292. Два «механічних кроти» з різною потужністю при одночасній роботі з різних кінців тунелю могли б вирити його за 5 днів. Насправді ж обидва «кроти» застосовувались послідовно з одного боку тунелю, причому перший вирив 1/3, а другий — решту, тобто 2/3 його довжини. На виконання всієї роботи знадобилось при цьому 10 днів. За скільки днів кожний «кріт», працюючи самостійно, міг би прорити тунель?

13.293. До басейну підведено дві труби різного перерізу. Одна з них рівномірно подає воду, а друга — рівномірно відводить її; причому через першу басейн наповнюється на 2 год довше, ніж через другу спорожнюється. При заповненому на 1/3 басейні відкрили обидві труби і басейн виявився порожнім через 8 год. За скільки годин, діючи окремо, перша труба заповнює, а друга спорожнює басейн?

13.294. Двом робітникам було доручено виготовити партію однакових деталей; після того, як перший попрацював a год, а другий $0,6a$ год, виявилось, що вони виконали $5/n$ усієї роботи. Попрацювавши разом ще $0,6a$ год, вони з'ясували, що їм залишилось виготовити ще $1/n$ частину всієї партії деталей. За скільки годин кожний з них, працюючи окремо, виконав би всю роботу? Число n натуральне; знайти його.

13.295. Водоймище має два канали. Через перший канал вода рівномірно виливається, а через другий — рівномірно вливається. За скільки годин через перший канал пройде n л води, коли відомо, що через другий надійде води вдвічі більше тоді, коли його буде відкрито на a год менше того часу, за який через перший канал пройде n л? Якщо обидва канали відкриті одночасно, то щогодини у водоймищі прибуває a л води.

13.296. Два екскаваторники мають виконати деяку роботу. Після того як перший попрацював 15 год, починає працювати другий і закінчує цю роботу за 10 год. Якби, працюючи окремо, перший виконав 1/6 частину, а другий 1/4 частину всього завдання, то для його закінчення потрібно було б ще 7 год спільної роботи їх. За скільки годин може виконати роботу кожний екскаваторник окремо?

13.297. Довжина кругової доріжки іподрому дорівнює b км. З двох вершників A і B, які почали скачки одночасно, вершник A фінішував на 2 хв раніше. Іншим разом вершник B збільшив швидкість на

c км/год, у той час як вершник A зменшив швидкість на c км/год, і тому B прибув до фінішу на 2 хв раніше, ніж A. Знайти швидкості вершників у першому заїзді.

13.298. Двоє спортсменів бігають по одній замкненій доріжці стадіону. Швидкість кожного стала, але перший пробіг всю доріжку на 10 с швидше, ніж другий. Якщо вони почнуть біг із спільного старту в одному напрямі, то ще раз зійдуться через 720 с. Яку частину всієї доріжки пробігає за секунду кожний спортсмен?

13.299. Дві точки обертаються рівномірно по двох концентричних колах. Одна з них здійснює повний оберт на 5 с швидше, ніж друга, і тому встигає зробити за хвилину на два оберти більше. Нехай на початку руху промені, проведені з центра кіл до цих точок, збігалися. Підрахувати, якою буде величина кута між променями через 1 с.

13.300. Менша дуга між точками A і B, які лежать на колі, дорівнює 150 м. Якщо точки почнуть рухатись назустріч одна одній по меншій дузі, то зустрінуться через 10 с, а якщо по більшій дузі, то зустріч відбудеться через 14 с. Визначити швидкості руху точок і довжину кола, коли відомо, що точка A може пройти все коло за той час, за який B пройде тільки 90 м.

13.301. У деякому механізмі три шестірні різних діаметрів зв'язані між собою так, що більша з них дотикається до обох менших, причому всі три шестірні разом мають 60 зубців. Коли більша шестірня до повних чотирьох обертів не доходить на 20 зубців, друга і третя роблять відповідно 5 і 10 повних обертів. Скільки зубців має кожна шестірня?

13.302. По колу, довжина якого 60 м, рівномірно в одному напрямі рухаються дві точки. Одна з них здійснює повний оберт на 5 с швидше за другу. При цьому збігаються точки кожного разу через 1 хв. Визначити швидкості точок.

13.303. Двоє коліс з'єднано нескінченним пасом, менше з них робить на 300 обертів за хвилину більше, ніж друге. Більше колесо здійснює 10 обертів за проміжок часу, що на 1 с більший, ніж час такої самої кількості обертів меншого колеса. Скільки обертів за хвилину здійснює кожне колесо?

13.304. Дві зчеплені шестірні A і B щільно насаджено: першу на вал O_1, а другу на вал O_2. Шестірня A має на 10 зубців більше, ніж B. При деякій швидкості обертання вала O_1 вал O_2 здійснює 63 оберти за хвилину. Якщо шестірні поміняти місцями, то при тій самій швидкості вала O_1 вал O_2 здійснить 28 обертів. Визначити число зубців кожної шестірні.

13.305. Знайти два двозначних числа A і B за такими умовами. Якщо число A написати попереду запису числа B і утворене чотиризначне число поділити на число B, то частка дорівнюватиме 121. Якщо ж число B написати попереду числа A і утворене чотиризначне число поділити на A, то частка дорівнюватиме 84 і остача 14.

13.306. Поїзд зупинився на 20 хв через 2 год після відправлення. На ділянці шляху, який залишився до станції, виконувались ремонтні роботи і поїзду дозволили швидкість, що становила 1/3 початкової швидкості, внаслідок чого поїзд прийшов на станцію із запізненням на 1 год 40 хв. Другого дня поїзд було зупинено на 14 км ближче до кінцевої станції і за тих самих умов спізнення скоротилось до 50 хв. Визначити відстань між станціями і швидкість поїзда.

13.307. Знайти тризначне число, цифри якого утворюють геометричну прогресію, коли відомо, що після його зменшення на 495 дістаємо число, записане такими самими цифрами, якими записано шукане число, але розміщеними у зворотному порядку: якщо цифри числа, знайденого після віднімання, зменшити (зліва направо) відповідно на 1, на 1 і на 2, то утвориться арифметична прогресія.

13.308. Яке двозначне число менше від суми квадратів його цифр на 11 і більше за подвоєний добуток їх на 5?

13.309. Маємо два сплави золота і срібла. В одному сплаві кількості цих металів відносяться як 1 : 2, а у другому — як 2 : 3. Скільки грамів треба взяти кожного сплаву, щоб дістати 19 г сплаву, в якому золото і срібло були б у співвідношенні 7 : 12?

13.310. Маємо лом сталі двох сортів із вмістом нікелю 5 і 40 %. Скільки треба взяти металу кожного з цих сортів, щоб дістати 140 т сталі з 30 %-м вмістом нікелю?

13.311. З двох пунктів, відстань між якими дорівнює 2400 км, назустріч один одному виходять одночасно пасажирський і швидкий поїзди. Кожний з них рухається із сталою швидкістю, і в деякий момент часу вони зустрічаються. Якби обидва поїзди йшли із швидкістю швидкого поїзда, то їхня зістріч відбулась би на 3 год раніше фактичного моменту зустрічі. Якби обидва поїзди йшли із швидкістю пасажирського поїзда, то їхня зустріч відбулась би на 5 год пізніше фактичного моменту зустрічі. Знайти швидкості поїздів.

13.312. Під час розвантаження баржі спочатку 4 год працювали чотири підйомні крани однакової потужності. Потім додатково ввели в дію ще два крани меншої, але однакової потужності. Після цього для закінчення робіт треба було працювати ще 3 год. Якби всі ці крани почали працювати одночасно, то розвантажувальні роботи тривали б 4,5 год. Якби один кран більшої і один кран меншої потужності працювали разом, то за який час вони розвантажили б баржу?

13.313. Знаменник дробу менший від квадрата його чисельника на 1. Якщо до чисельника і знаменника додати по 2, то значення дробу буде більше ніж 1/4; якщо від чисельника і знаменника початкового дробу відняти по 3, то дріб дорівнюватиме 1/12. Знайти цей дріб.

13.314. Два колеса утворюють зубчасту передачу. Колесо A має 12 зубів, а колесо B — 54. Скільки обертів зробить кожне колесо до того, як обидва вони повернуться у початкове положення?

13.315. Початкова собівартість одиниці продукції дорівнювала 50 крб. Протягом першого року виробництва вона підвищилась на кілька процентів, а за другий рік знизилась (відносно підвищеної собівартості) на стільки ж процентів, внаслідок чого собівартість стала дорівнювати 48 крб. Визначити проценти підвищення і зниження собівартості продукції.

13.316. Підприємство збільшувало обсяг продукції щорічно на одне і те саме число процентів. Знайти це число, коли відомо, що за 2 роки обсяг випущеної продукції збільшився вдвічі.

13.317. Один турист вийшов о 6 год, а другий назустріч йому о 7 год. Вони зустрілись о 8 год і, не зупиняючись, продовжили шлях. Скільки часу витратив кожний з них на весь шлях, якщо перший прийшов на те місце, з якого вийшов другий, на 28 хв пізніше, ніж другий прийшов на те місце, звідки вийшов перший? Вважати, що кожний рухався без зупинок і зі сталою швидкістю.

13.318. На один продукт ціну було знижено двічі, кожного разу на 15 %. На другий продукт, що мав спочатку таку саму ціну, як і перший, знизили ціну один раз на x %. Яким має бути число x, щоб після вказаних знижень обидва продукти мали знову одну і ту саму ціну?

13.319. Посудину місткістю 8 л заповнено сумішшю кисню і азоту, причому частка кисню становить 16 % місткості посудини. З цієї посудини випускають деяку кількість суміші і додають таку саму кількість азоту, після чого випускають таку саму, як і вперше, кількість суміші і знову додають стільки ж азоту. У новій суміші кисню виявилося 9 %. Яку кількість суміші випускали кожного разу з посудини?

13.320. Домішки становлять 20 % від загального об'єму розчину. Яке найменше число фільтрів, через які треба пропустити розчин, щоб остаточний вміст домішок не перевищував 0,01 %, якщо кожний фільтр поглинає 80 % домішок? (Відомо, що $\lg 2 \approx 0{,}30$.)

13.321. Сума двох тризначних чисел, записаних однаковими цифрами, але у зворотному порядку відносно одне одного, дорівнює 1252. Знайти ці числа, якщо сума цифр кожного з них дорівнює 14, а сума квадратів цифр дорівнює 84.

13.322. Бджоли, переробляючи квітковий нектар на мед, звільняють його від значної частини води. Дослідження показали, що нектар звичайно вміщує близько 70 % води, а вироблений з нього мед вміщує тільки 17 % води. Скільки кілограмів нектару доведеться переробити бджолам, щоб дістати 1 кг меду?

13.323. Для випікання пшеничного хліба взято стільки кілограмів борошна, скільки процентів становить припічка на це борошно. Для виготовлення житнього хліба взято на 10 кг борошна більше, тобто стільки кілограмів, скільки процентів становить припічка на житнє борошно. Скільки кілограмів взято одного і другого борошна, якщо всього випечено 112,5 кг хліба?

13.324. Інженер за перший тиждень відпустки витратив на кілька карбованців менше, ніж 3/5 наявних у нього грошей; за другий тиждень 1/4 залишку і ще 3 крб.; за третій тиждень 2/5 нового залишку і ще 1 крб. 20 коп., після чого залишилось 6/35 від кількості взятих грошей. Відомо також, що кількість грошей, які залишались невитраченими наприкінці першого, другого і третього тижнів, зменшувалась у арифметичній прогресії. Скільки грошей витрачено за три тижні відпустки?

13.325. Можна виготовити 9000 деталей на кількох нових верстатах однакової конструкції і одному верстаті старої конструкції, який працює в 2 рази повільніше, ніж кожний новий верстат. Можна і цей старий верстат замінити новим верстатом такої самої конструкції, що й інші. Тоді за другим варіантом на кожному верстаті виготовляли б на 200 деталей менше, ніж на одному новому верстаті за першим варіантом. Скільки було працюючих верстатів?

13.326. Із A в B через однакові проміжки часу вирушають три машини. Вони прибувають до B одночасно, потім вирушають до пункту C, який знаходиться на відстані 120 км від B. Перша машина прибуває туди через годину після другої. Третя машина, прибувши до C, відразу ж повертає назад і за 40 км від C зустрічає першу машину. Визначити швидкість першої машини, вважаючи, що на всій трасі швидкість кожної машини була сталою.

13.327. У три посудини налито 24 л рідини. Спочатку з першої посудини перелили у дві інші стільки, скільки було у кожній з них. Потім з другої перелили у дві інші стільки, скільки стало у кожній з них після першого переливання. Нарешті, з третьої перелили у інші стільки, скільки стало у кожній з них після другого переливання. Після цього у кожній посудині виявилась однакова кількість рідини. Скільки рідини було у кожній посудині спочатку?

13.328. Бригада рибалок планувала виловити за певний час 1800 ц риби. Протягом 1/3 цього часу був шторм, внаслідок чого планове завдання щодня недовиконувалось на 20 ц. Проте решту днів бригада щоденно виловлювала на 20 ц більше за денну норму, і планове завдання було виконано достроково на 1 день. Скільки центнерів риби планувалось виловлювати щодня?

13.329. Двох робітників було прийнято на один і той самий строк для виконання сезонної роботи з різною поденною оплатою кожному. Перший працював на a днів менше строку і одержав r крб., а другий на a днів більше строку і одержав s крб. Якби перший працював стільки днів, скільки другий, а другий стільки днів, скільки перший, то вони одержали б порівну. Визначити встановлений строк роботи.

13.330. Два вантажні автомобілі мали перевезти певний вантаж протягом 6 год. Другий автомобіль затримався в гаражі, і коли він прибув на місце завантаження, перший перевіз вже 3/5 всього вантажу; решту вантажу перевіз другий автомобіль, і весь вантаж, таким чином, було перевезено за 12 год. Скільки часу треба було кожному автомобілю окремо для перевезення вантажу?

13.331. З металу певної марки виготовлено кілька кульок, рівних за масою, для підшипників і кілька поршневих кілець, також рівних за масою. Якби число, яке виражає масу кожної кульки у грамах, було на 2 менше від числа виготовлених кілець, а число, яке виражає масу кожного кільця у грамах, на 2 більше за число виготовлених кульок, то число, яке виражає їхню загальну масу, перевищувало б подвійну різницю числа кілець і кульок на 800, а якби число, що виражає масу кожного виробу в грамах, дорівнювало числу виготовлених виробів того самого виду, то загальна маса їх була б рівною 881 г. Скільки було виготовлено кульок і кілець?

13.332. Троє хлопчаків A, $Б$ і B домовились, що під час подорожі на катері кожний побуде у ролі капітана, причому час перебування кожного у цій ролі буде пропорційним числу очок, які він здобуде, беручи участь у географічній вікторині. У результаті A здобуде на 3 очка більше, ніж B; $Б$ і B разом здобули 15 очок. Число, яке виражає 1/10 всього часу подорожі (у годинах), на 25 більше числа очок, здобутих хлопчаками. Скільки годин були у ролі капітана A і B, якщо $Б$ був у цій ролі 160 год?

13.333. М'яч падає з висоти 2 м 43 см і, ударяючись об землю, відскакує знову, піднімаючись кожного разу на 2/3 висоти, з якої він чергового разу падає. Після скількох ударів м'яч підніметься на висоту 32 см?

13.334. До ательє надійшло по одному куску чорної, зеленої і синьої тканини. Хоча зеленої тканини було на 9 м менше, ніж чорної, і на 6 м більше, ніж синьої, вартість кусків була однаковою. Відомо також, що вартість 4,5 м чорної тканини дорівнює вартості 3 м зеленої і 0,5 м синьої разом. Скільки метрів тканини було у кожному з кусків?

13.335. Якщо двозначне число поділити на добуток його цифр, то у частці дістанемо 3 і в остачі 8. Якщо число, складене з тих самих цифр, записаних у зворотному порядку, поділити на добуток цифр, то у частці дістанемо 2, а в остачі 5. Знайти це число.

13.336. Вугілля, привезене на склад, призначене для двох заводів. На перший завод почали завозити вугілля з 1 червня по m т щоденно, не виключаючи неділь, на другий завод — з 8 червня по n т щоденно, не виключаючи неділь. Наприкінці дня 16 червня на складі залишилась половина початкової кількості вугілля. Якого числа було вивезено зі складу все вугілля, якщо обидва заводи одержали вугілля порівну?

13.337. На підприємство, де виготовляють розчинну каву, наприкінці травня привезли партію кави у зернах для переробки. Один механізм, який перемелює зерна, почав працювати в понеділок 1 червня; він перемелював щоденно по m кг. З 6 червня почав працювати другий механізм, який перемелював щоденно по n кг. Наприкінці робочого дня 10 червня залишилась не змеленою тільки половина початкової кількості зерен. Коли було закінчено переробку всієї партії кави, якщо обидва механізми змололи кави порівну і, окрім неділь, інших перерв у роботі не було?

13.338. Запис шестизначного числа починається цифрою 2. Якщо цю цифру перенести з першого місця на останнє, зберігаючи порядок решти п'яти цифр, то утворене число буде втричі більше, ніж початкове. Знайти початкове число.

13.339. Треба було взяти кілька літрів рідини при температурі a та іншу кількість літрів тієї самої рідини при температурі b, щоб дістати температуру суміші c. Проте вдруге рідини було взято стільки, скільки передбачалось взяти першого разу і навпаки. Якою стала температура суміші?

13.340. Відомо, що різниця змінних величин z і y пропорційна величині x, а різниця величин x і z пропорційна величині y. Коефіцієнт пропорційності один і той самий і дорівнює цілому додатному числу k. Деяке значення величини z в 5/3 разів більше за різницю відповідних значень x і y. Знайти числове значення коефіцієнта k.

13.341. Троє робітників брали участь у змаганні. Перший і третій з них виробили продукції у два рази більше, ніж другий, а другий і третій — у три рази більше, ніж перший. Яке місце посів кожний робітник у змаганні?

13.342. Відстань між станціями A і B дорівнює 360 км. Одночасно з A і B назустріч один одному виходять два поїзди. Поїзд, який вийшов з A, прибув на станцію B не раніше, ніж через 5 год. Якби його швидкість була в 1,5 рази більша, то він зустрів би другий поїзд раніше, ніж через 2 год після свого виходу з A. Швидкість якого поїзда більша?

13.343. Припустимо, що вираз

$$(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$$

є квадратом тричлена виду $x^2 + px + qa^2$. Як можна перевірити це твердження і знайти коефіцієнти p і q?

13.344. Модулі двох сил, які діють на матеріальну точку під прямим кутом, і модуль рівнодійної утворюють арифметичну прогресію. Визначити відношення значень модулів сил.

13.345. Припускаючи, що стрілки годинників рухаються без стрибків, визначити через скільки хвилин після того, як годинник показував 8 год, хвилинна стрілка наздожене годинну.

13.346. Об'єм речовини A становить половину суми об'ємів речовин B і C, а об'єм речовини B становить 1/5 частину суми об'ємів речовин A і C. Знайти відношення об'єму речовини C до суми об'ємів A і B.

13.347. Знайти два числа за такими умовами: сума їх дорівнює 1244; якщо в кінці першого числа дописати цифру 3, а в кінці другого числа відкинути цифру 2, то утворяться два рівні числа.

13.348. Від станції A до станції B вирушив пасажирський поїзд. Через a год від станції B до станції A вирушив поїзд «Стріла». Поїзди зустрілись на станції C. Після зустрічі пасажирський поїзд рухався b год, поїзд «Стріла» c год. Скільки часу витратив кожний з цих поїздів на весь шлях між станціями A і B? Припускається, що швидкості поїздів сталі протягом всього шляху.

13.349. Від пошти A до селища B треба пройти 9 км. Поштар проходить весь шлях туди і назад, не затримуючись у селищі, за 3 год 41 хв. Дорога від A до B йде спочатку під гору, потім іде по рівному, а після цього — на спуск. На якій відстані дорога пролягає по рівному, якщо на підйомі поштар іде з швидкістю 4 км/год, рівною дорогою 5 км/год, а на спуску 6 км/год?

13.350. Двоє автомобілістів зустрілись на півдорозі між містами A і B. При зустрічі з'ясувалось, що перший із A виїхав раніше, ніж другий із B, на стільки годин, скільки становить половина того часу (також у годинах), який пройшов би до їхньої зустрічі при одночасному виїзді з тих самих пунктів, тією самою дорогою, з тими самими швидкостями, сталими на всьому шляху. У скільки разів другий автомобіліст їхав швидше першого?

13.351. Дорога від пошти A до селища B йде спочатку під гору протягом 2 км, потім по рівному 4 км, після — на спуск 3 км. Поштар проходить від A до B за 2 год 10 хв, а назад — за 2 год 24 хв. Якби кінцевий пункт його шляху було розміщено на тій самій дорові, але у два рази ближче до A, то на весь шлях туди і назад поштареві вистачило б 2 год 10 хв. Скільки кілометрів за годину проходить поштар, коли він іде: а) на гору; б) по рівному; в) на спуск?

13.352. Назустріч трамваю, що рухається, ішла дівчина — знайома юнака, який сидів у трамваї біля вікна. Через 8 с після того, як вона порівнялась з вікном, юнак вийшов із трамваю і пішов слідом за нею. Скільки пройшло часу з цього моменту до того, як він наздогнав дівчину? Швидкість юнака у два рази більша за швидкість дівчини і у п'ять разів менша від швидкості трамваю.

13.353. Під час перемноження двох додатних чисел, з яких одне на 75 більше за друге, помилково дістали добуток на 1000 менший від шуканого. Внаслідок цього під час ділення (при перевірці) помилкового добутку на менший із співмножників, дістали у частці 227 і в остачі 113. Знайти обидва числа.

13.354. При перемноженні двох чисел, з яких одне на 10 більше іншого, учень припустився помилки, зменшивши цифру десятків добутку на 4. При діленні знайденого добутку на менший співмножник для перевірки відповіді він дістав у частці 39, а в остачі 22. Знайти співмножники.

13.355. Автомобіль проїхав шлях від A до B, що дорівнює 300 км, повернув назад і через 1 год 12 хв після виходу із B збільшив швидкість на 16 км/год. У результаті на зворотний шлях він затратив на 48 хв менше, ніж на шлях від A до B. Знайти початкову швидкість автомобіля.

13.356. Відстань між пунктами A і B дорівнює 308 м. Із пункту A у напрямі пункту B рухається точка, яка першої секунди проходить 15 м, а кожної наступної секунди — на 1 м менше. Із пункту B у протилежному напрямі рухається точка, яка першої секунди проходить 20 м, а кожної наступної — на 3 м більше. На якій відстані від пункту A відбудеться зустріч, якщо точка, що рухається з пункту B, почала рух на 3 с пізніше точки, яка рухається з пункту A?

13.357. Велосипедист проїхав 96 км на 2 год швидше, ніж передбачав. При цьому за кожну годину він проїжджав на 1 км більше, ніж збирався проїжджати за 1 год 15 хв. З якою швидкістю він їхав?

13.358. Знайти шестизначне ціле число, що починається з цифри 1, і таке, що коли переставити цю цифру в кінець, то утвориться число, у три рази більше шуканого.

13.359. Знайти два двозначні числа, які мають таку властивість: якщо до більшого шуканого числа приписати справа нуль і за ним менше число, а до меншого числа приписати справа більше число і потім нуль, то з утворених таким чином двох п'ятизначних чисел перше, будучи поділеним на друге, дає у частці 2 і в остачі 590. Крім того, відомо, що сума подвоєного більшого і потроєного меншого чисел дорівнює 72.

13.360. Велосипедист рухається з A в B. Відстань від A до B дорівнює 60 км; швидкість велосипедиста стала. Не затримуючись у B, він їде назад з тією самою швидкістю, але через годину після виїзду з B робить зупинку на 20 хв. Після цього він продовжує шлях, збільшивши швидкість на 4 км/год. Вказати межі швидкості v велосипедиста, коли відомо, що на зворотний шлях від B до A він затратив часу не більше, ніж від A до B?

13.361. Червоний олівець коштує 17 коп., синій — 13 коп. На купівлю олівців можна витратити не більше 4 крб. 95 коп. Потрібно закупити максимально можливу сумарну кількість червоних і синіх олівців. При цьому червоних олівців треба закупити якомога менше, але число синіх олівців не повинно відрізнятись від числа червоних більше, ніж на п'ять. Скільки червоних і скільки синіх олівців слід закупити при заданих умовах?

13.362. Деякий сплав складається з двох металів, які входять до нього у відношенні 1 : 2, а інший сплав вміщує ті самі метали у відношенні 2 : 3. Скільки частин кожного сплаву треба взяти, щоб дістати третій сплав, який вміщує ті самі метали у відношенні 17 : 27?

13.363. Деякий сплав вміщує метали A і B у відношенні $m : n$, інший — ті самі метали у відношенні $p : q$. Скільки першого і другого сплавів треба взяти, щоб дістати 1 кг третього сплаву з однаковим вмістом металів A і B?

13.364. Основу степеня збільшили в k разів, а показник степеня зменшили у стільки ж разів, внаслідок чого сам степінь не змінився. Знайти основу степеня, який має таку властивість.

13.365. Двоє суден рухаються прямолінійно і рівномірно в один і той самий порт. У початковий момент часу точки, що визначають положення суден і порту, утворюють рівносторонній трикутник, а після того, як друге судно пройшло 80 км — прямокутний трикутник. У момент прибуття першого судна в порт другому залишається пройти 120 км. Знайти відстань між суднами у початковий момент часу.

13.366. На річці, швидкість течії якої 5 км/год, за течією розміщено пристані A, B і C, причому B знаходиться посередині між A і C. Від пристані B одночасно вирушають пліт, який рухається за течією до пристані C, і катер, який рухається до пристані A, причому швидкість катера у стоячій воді дорівнює v км/год. Прибувши до пристані A, катер розвертається і рухається до пристані C. Знайти всі ті значення v, при яких катер прибуває у C пізніше, ніж пліт.

13.367. Кілька студентів вирішили купити магнітофон вартістю від 170 до 195 крб. Проте в останній момент двоє відмовились брати участь у купівлі, тому кожному з решти студентів довелось внести на 1 крб. більше. Скільки коштував магнітофон?

13.368. Для перевезення вантажу з одного місця в інше було замовлено деяку кількість вантажних автомобілів однакової вантажопідйомності. Внаслідок несправності дороги на кожну машину довелось вантажити на 0,5 т менше, ніж передбачалось, тому додатково було замовлено 4 таких самих автомобілі. Маса перевезеного вантажу була не менше 55 т, але не перевищувала 66 т. Скільки тонн вантажу було перевезено на кожному автомобілі?

13.369. Біля будинку посаджено липи і берези, причому загальна кількість їх перевищує 14. Якщо кількість лип збільшити у два рази, а кількість беріз на 18, то беріз стане більше. Якщо ж кількість беріз збільшити, не змінюючи кількості лип, то лип все ж буде більше. Скільки лип і скільки беріз було посаджено?

13.370. Школяр переклеює всі свої марки в новий альбом. Якщо він наклеїть по 20 марок на один аркуш, то йому не вистачить альбому, а якщо по 23 марки на аркуш, то щонайменше 1 аркуш залишиться вільним. Якщо ж школяру подарують ще один такий самий альбом, на кожному аркуші якого наклеєно по 21 марці, то всього у нього буде 500 марок. Скільки аркушів в альбомі?

13.371. Споруджується ділянка залізничного насипу 100 м завдовжки, поперечним перерізом якого є рівнобічна трапеція з нижньою основою 5 м, верхньою основою не менше 2 м, і кутом скосу 45°. Яку висоту h повинен мати насип, щоб обсяг земляних робіт становив не менше 400 м^3, але не більше 500 м^3?

Група В

13.372. Комісійний магазин прийняв для продажу фотоапарати, годинники, авторучки і радіоприймачі на суму 240 крб. Сума цін радіоприймача і годинника на 4 крб. більша за суму цін фотоапарата і авторучки, а сума цін годинника і авторучки на 24 крб. менша за суму цін фотоапарата і радіоприймача. Ціна авторучки дорівнює цілому числу карбованців, що не перевищує 6. Кількість прийнятих фотоапаратів дорівнює ціні одного фотоапарата у карбованцях, поділеній на 10; кількість прийнятих годинників дорівнює числу радіоприймачів, а також числу фотоапаратів. Кількість авторучок у три рази більша від кількості фотоапаратів. Скільки всього предметів указаних найменувань було прийнято магазином?

13.373. Електронна обчислювальна машина отримала завдання розв'язати послідовно кілька задач. Реєструючи час виконання завдання, помітили, що на розв'язування кожної наступної задачі машина витрачала в одне і те саме число разів менше часу, ніж на розв'язування попередньої. Скільки було запропоновано задач і скільки часу витрачено машиною на розв'язування всіх задач, якщо на розв'язування всіх задач, крім першої, витрачено 63,5 хв, на розв'язування всіх задач, крім останньої,— 127 хв, а на розв'язування всіх задач, крім двох перших і двох останніх,— 30 хв?

13.374. Три свічки мають однакову довжину, але різну товщину. Першу свічку було запалено на 1 год раніше, ніж дві інших, запалених одночасно. У деякий момент горіння виявилось, що перша і третя свічки мають однакову довжину, а через 2 год після цього перша і друга свічки стали однакової довжини. За скільки годин згоряє перша свічка, якщо друга згоряє за 12 год, а третя — за 8 год?

13.375. Знайти тризначне число, знаючи, що число його десятків є середнім геометричним числа сотень і одиниць. Якщо у його запису поміняти місцями цифри сотень і одиниць і відняти здобуте таким чином число від шуканого, то різниця дорівнюватиме 297.

13.376. Шукане тризначне число закінчується цифрою 1. Якщо її витерти і потім її ж приписати як першу цифру числа, то утворене нове тризначне число буде меншим від шуканого на $10a^{\log}\sqrt{a}^{3}$. Знайти це число.

13.377. Різниця логарифмів цифр сотень і десятків тризначного числа дорівнює логарифму різниці тих самих цифр, а сума логарифмів цифр сотень і десятків дорівнює логарифму суми тих самих цифр, збільшеної в 4/3 рази. Якщо від цього тризначного числа відняти число, що має зворотний порядок цифр, то їх різниця дорівнюватиме додатному числу, в якого цифра сотень збігається з цифрою десятків даного числа. Знайти це число.

13.378. Два шматки сплаву масами 6 і 8 кг мають різний процентний вміст міді. Від першого шматка відтяли деяку частину, а від другого — частину, у два рази більшу за масою, ніж від першого. Кожну з відтятих частин сплавили з рештою іншого шматка, після чого дістали два нових сплави з однаковим процентним вмістом міді. Яка маса кожної з частин, відтятих від кожного з шматків початкових сплавів?

13.379. Ціна діаманта пропорційна квадрату його маси. Діамант масою p каратів було розділено на дві частини, після чого його вартість зменшилась у k разів. Знайти маси частин, на які було розділено діамант (1 карат = 0,2 г). Довести, що найбільшою втрата вартості діаманта буде у тому разі, коли обидві його частини однакові за масою.

13.380. Куплено кілька кілограмів товару двох сортів: першого сорту на 45 крб. і другого на 20 крб., причому першого сорту куплено на 1 кг більше. Вартість 1 кг товару першого сорту на a крб. вища за вартість 1 кг товару другого сорту. Скільки кілограмів товару кожного сорту куплено? Визначити число розв'язків залежно від можливих значень a.

13.381. Вугілля, добуте у пункті A, продається по q крб. за тонну, а добуте у пункті B — на p % дорожче. Пункти A і B сполучає дорога завдовжки s км. На якій ділянці дороги AB знаходяться споживачі вугілля, для яких закупівля і доставка вугілля з B коштуватиме дешевше, ніж з A, якщо перевезення 1 т вугілля на відстань 1 км коштує r крб? В якому місці дороги AB розміщено підприємство, витрати якого на споживання вугілля не залежать від вибору пункту A чи B? Дослідити можливі випадки.

13.382. Точка P розміщена на діаметрі кола радіуса R між кінцями діаметра AB. З цієї точки P рухаються три одиничні маси у напрямі відрізків PA, PB і PC так, що PC — півхорда, перпендикулярна до діаметра AB. На якій відстані від A міститься точка P, коли відомо, що швидкості руху сталі і за одиницю часу перша маса досягла точки A, друга — точки B, а третя — точки C? При цьому кінетична енергія ($mv^2/2$) у сумі складає a^2 одиниць. У яких межах можна змінювати величину a^2, щоб виконувалась умова задачі?

13.383. Кілька робітників виконують роботу за 14 днів. Якби їх було на 4 більше і кожний працював щодня на 1 год довше, то ту саму роботу було б виконано за 10 днів. Якби їх було ще на 6 чоловік більше і кожний працював би щодня на 1 год довше, то цю роботу було б виконано за 7 днів. Скільки було робітників та скільки годин протягом дня вони працювали?

13.384. П'ять чоловік виконують деяку роботу. Перший, другий і третій, працюючи разом, можуть виконувати всю роботу за 7,5 год; перший, третій і п'ятий разом — за 5 год; перший, третій і четвертий разом — за 6 год, а другий, четвертий і п'ятий разом — за 4 год. За який час виконають цю роботу всі п'ять чоловік, працюючи разом?

13.385. На змаганнях авіамоделей з моторчиками кращими виявились дві моделі. При зустрічному вітрі перша модель трималась у повітрі на m хв менше, ніж друга, але пролетіла на h м далі. Швидкість вітру дорівнює c м/хв, але на тривалість польоту моделі вітер не впливає; від вітру залежить тільки дальність польоту. Припускається, що власна швидкість кожної моделі весь час стала. Яка з цих моделей пролетить більшу відстань при відсутності вітру?

13.386. На сторонах рівностороннього трикутника ABC між його вершинами розміщено точки A_1, B_1 і C_1 так, що $AA_1 = BB_1 = CC_1 = x$. Сторона трикутника дорівнює a. Знайти таке значення x, при якому відношення площ трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC дорівнювало б даному додатному числу m. В яких межах можна змінювати значення m, щоб виконувалась умова задачі?

13.387. Із пункту A вирушив моторний човен проти течії річки, а з пункту B одночасно вирушив пліт за течією. Через a год вони зустрілись і далі рухались без зупинки. Дійшовши до пункту B, човен, не затримуючись, повернув назад і наздогнав пліт у пункті A. Припускається, що власна швидкість човна була весь час сталою. Скільки часу перебували у плаванні пліт і човен?

13.388. Три плавці мали пропливти в басейні доріжку 50 м завдовжки, негайно розвернутися і пливти до місця старту. Спочатку стартує перший, через a с — другий, ще через a с — третій. У деякий момент часу, ще не досягши кінця доріжки, плавці опинились на одній відстані від старту. Третій плавець доплив до кінця доріжки і повернув назад, зустрів другого за s м до кінця доріжки, а першого — за r м до кінця доріжки. Знайти швидкості першого і третього плавців і встановити зв'язок у вигляді нерівностей між параметрами r і s так, щоб задача мала розв'язок.

13.389. Від двох шматків сплаву однакової маси, але з різним процентним вмістом міді, відтяли по шматку однакової маси. Кожний з відтятих шматків сплавили з рештою другого шматка, після чого процентний вміст міді в обох шматках став однаковим. У скільки разів відрізаний шматок менший від цілого?

13.390. Колона автомобілів, які рухаються з однією й тією самою сталою швидкістю, має довжину 5 км. У останньому автомобілі знаходиться начальник колони, а поряд з ним мотоцикліст. За наказом начальника мотоцикліст збільшив швидкість, наздогнав головну машину, передав водієві пакунок, негайно розвернувся і з тією самою швидкістю, з якою їхав уперед, поїхав назад і зайняв своє місце. Начальник повідомив мотоциклісту, що, поки той виконував доручення, колона пройшла 5 км. Скільки кілометрів проїхав мотоцикліст?

13.391. Із пунктів A і B одночасно виїжджають два автомобілі і зустрічаються о 12-й годині. Якщо швидкість першого подвоїти, а швидкість другого залишити початковою, то зустріч відбудеться на 56 хв раніше. Якщо ж швидкість другого подвоїти, а швидкість першого залишити початковою, то вони зустрінуться на 65 хв раніше. Визначити час зустрічі у тому випадку, коли швидкість обох автомобілів була б подвоєною.

13.392. Від аеропорту до центру міста виїхав автомобіль, одночасно з центру міста в аеропорт виїхав автобус-експрес. Коли перший подолав половину шляху, другому залишилось до кінця маршруту 19,2 км, а коли другий подолав половину шляху, першому залишилось до кінця маршруту 12 км. Скільки кілометрів залишається проїхати автобусу після того, як автомобіль закінчить свій маршрут? Припускається, що швидкості автомобіля і автобуса сталі протягом усього шляху.

13.393. Відстань між двома точками дорівнює d. Під дією деяких сил обидві точки починають рівномірний рух назустріч одна одній. Щоб вони зустрілись посередині шляху, першій точці треба почати рух на t одиниць часу раніше, ніж другій. Якщо ж точки почнуть зближення одночасно, то через T одиниць часу відстань між ними становитиме k-ту частину $(k > 1)$ початкової відстані. Знайти швидкості руху точок.

13.394. Два брати мали квитки на стадіон, розміщений за 10 км від їхнього будинку. Спочатку вони збирались іти на стадіон пішки, а потім вирішили скористатись своїм велосипедом, домовившись, що один вирушить на велосипеді, а другий одночасно з ним — пішки. Проїхавши частину шляху, перший має залишити велосипед, а другий, дійшовши до залишеного велосипеда, поїде на ньому далі і наздожене першого біля входу на стадіон. Скільки часу виграють брати при цьому, якщо кожний з них на велосипеді долає один кілометр на 12 хв швидше, ніж пішки?

13.395. Спортсмен, тренуючись в швидкої ходьби вздовж шосе, помітив, що кожні 6 хв його наздоганяє тролейбус, а кожні 3 хв він зустрічає тролейбус. Треба визначити, через які проміжки часу вирушають тролейбуси до кінцевих пунктів і у скільки разів повільніше від тролейбуса ішов спортсмен, коли припустити, що в обидва напрями тролейбуси вирушають через рівні проміжки часу, рухаються без зупинок із сталою і однаковою швидкістю. Спортсмен також іде без зупинок із сталою швидкістю (рис. 13.10, де AB — графік руху спортсмена, прямі $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ і $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2$ — графіки руху якихось тролейбусів, які рухаються послідовно один за одним із спортсменом і назустріч йому).

13.396. За розкладом навчально-тренувальних занять спочатку з пункту A має виїхати один зв'язківець, а через 6 год — другий з такою швидкістю, щоб наздогнати першого за 180 км від пункту A. Проте на початку руху перший зв'язківець одержав розпорядження їхати із швидкістю, на a км/год більшою, ніж планувалось спочатку. Другому зв'язківцю не дозволялось збільшувати швидкість, передбачену розкладом, тому, щоб точно виконати завдання, йому довелось виїхати з пункту A на 3 год раніше, ніж було призначено. Скільки часу перебуватиме в дорозі кожний зв'язківець? Довести, що задача має смисл тільки при $a < 30$.

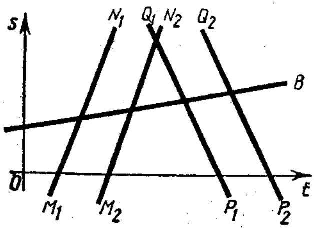


Рис. 13.10

13.397. Два поїзди вирушають одночасно із A і B назустріч один одному і зустрічаються на відстані p км від B. Через t год після зустрічі другий поїзд, минувши пункт A, знаходився за q км від нього, а перший на цей час, минувши пункт B, знаходився від другого поїзда на відстані, що у два рази більша, ніж відстань між A і B. Знайти швидкості поїздів і відстань між A і B. Поїзди не зупинялись і їхні швидкості вважаються сталими.

13.398. Двоє приятелів зібрались на полювання. Один з них живе за 46 км від мисливської бази, другий, що має «Москвич», за 30 км від бази — між цією базою і будинком свого приятеля. Вони вирушили в дорогу одночасно, причому власник «Москвича» поїхав назустріч приятелю, що йшов пішки. Зустрівшись, вони разом поїхали на базу і прибули туди через годину після початку руху. Якби пішохід вийшов з дому на 2 год 40 хв раніше власника «Москвича», то приятелі зустрілись би за 11 км від будинку пішохода. Яка швидкість автомобіля? Швидкості руху пішохода і автомобіля вважати сталими.

13.399. Поїзд було затримано на станції на 1 год 42 хв. Одержавши сигнал на відправлення, машиніст дотримувався такого графіка: на ділянці, що становить 0,9 всього шляху від станції відправлення до станції призначення, він підтримував швидкість, на 20 % вищу від звичайної, і 0,1 шляху вів состав із швидкістю, на 25 % вищою, ніж звичайна. У результаті поїзд прибув до станції призначення без запізнення. Яка тривалість руху цього поїзда між станціями при звичайній швидкості?

13.400. На шосе послідовно розміщено пункти D, A, C і B. Із A і B одночасно виїхали мотоцикліст і велосипедист у пункти C і D відповідно. Зустрівшись в E, вони помінялись машинами і кожний продовжував свій шлях. У результаті перший затратив на поїздку від A до C 6 год, а другий затратив на поїздку від B до D 12 год. Визначити довжину шляху AB, коли відомо, що той, хто їхав на мотоциклі, розвивав швидкість 60 км/год, а на велосипеді — 25 км/год, і, крім того, середня швидкість руху першого на шляху AC дорівнює середній швидкості руху другого на шляху BD.

13.401. На біговій доріжці одночасно стартували двоє ковзанярів на дистанцію s м. Коли переможець досяг фінішу, другому залишилось бігти ще цілий круг. Визначити довжину бігової доріжки, якщо переможець, пробігаючи кожний круг на a с швидше переможеного, закінчив дистанцію за t хв. Вважається, що швидкості спортсменів сталі на всій дистанції.

13.402. Місткості трьох посудин A, B, C, кожна з яких має форму куба, відносяться як 1 : 8 : 27, а об'єми налитої в них води — як 1 : 2 : 3. Після переливання частини води з посудини A в посудину B і з посудини B в посудину C у всіх трьох посудинах утворився шар води однакової висоти, Потім перелили $128\frac{4}{7}$ л води з посудини C в посудину B, а після цього з посудини B в посудину A стільки, що висота шару води у посудині A стала вдвічі більшою, ніж у посудині B. При цьому виявилось, що в посудині A тепер знаходиться на 100 л води менше, ніж було спочатку. Скільки води було спочатку в кожній посудині?

13.403. Змагаються три бригади лісорубів. Перша і третя бригади обробили деревини у два рази більше, ніж друга, а друга і третя — у три рази більше, ніж перша. Яка бригада вийшла переможцем у цьому змаганні?

13.404. Два чоловіки одночасно почали спускатись по ескалатору метро, який рухався вниз, причому один ішов у два рази швидше від другого. Перший з них налічив 60 сходинок, а другий — 40. Скільки сходинок довелось би їм пройти по нерухомому ескалатору?

13.405. Із A в B та із B в A одночасно вийшли два пішоходи. Коли перший пройшов половину шляху, другому залишилось пройти 24 км, а коли другий пройшов половину шляху, першому залишилось пройти 15 км. Скільки кілометрів залишиться пройти другому пішоходу після того, як перший подолає цю відстань?

13.406. Три мотоциклісти проїжджають із сталими, але різними швидкостями одну і ту саму ділянку AB дороги. Спочатку пункт A минув перший мотоцикліст, а через 5 с у тому самому напрямі — другий і третій. Через деякий час першого мотоцикліста перегнав третій, а ще через 10 с його перегнав і другий. За який час перший мотоцикліст проїде відстань AB, якщо другий проїхав цю відстань за 1 хв, а третій — за 40 с?

13.407. До берега водоймища підійшли троє: A, B і C; A вирушив до протилежного берега уплав із швидкістю v км/год; B і C разом вирушили на моторному човні з швидкістю 10 км/год. Через деякий час C вирішив решту шляху подолати уплав і поплив з тією самою швидкістю, що і A. У той самий момент B повернув назад, щоб взяти у човен A, який швидко сів у нього і продовжував шлях разом з B. На протилежному березі всі троє опинилися одночасно. Визначити час переправи, коли відомо, що ширина водоймища дорівнює b км (швидкість течії вважається рівною нулю).

13.408. Між пунктами A і B, відстань між якими дорівнює 3,01 м, здійснює коливальний рух матеріальна частинка m_1. Швидкість її стала і на кінцевих пунктах вона не затримується. Через 11 с після початку руху частинки m_1 з пункту A інша частинка m_2 починає рухатись із пункту B також із сталою, але меншою швидкістю. Ця частинка, рухаючись у напрямі пункту A, двічі зустрічається з частинкою m_1, а саме через 10 і 45 с після початку руху другої частинки. Визначити швидкості частинок.

13.409. Самохідний коток, який використовується для ремонту доріг, здатний укочувати смугу 0,85 м завширшки, причому кожна наступна смуга перекриває попередню на 1/4 її ширини. З якою швидкістю має рухатись цей коток, щоб за час, що не більше 6 год і не менше 5 год, можна було двічі укотити ділянку шосе 750 м завдовжки і 6,7 м завширшки?

13.410. Уздовж сторін прямого кута у напрямі до вершини рухаються дві кулі радіусів 2 і 3 см, причому центри цих куль переміщуються по сторонах кута з нерівними, але сталими швидкостями. У деякий момент часу центр меншої кулі був на відстані 6 см від вершини, а центр більшої — на відстані 16 см. Через 1 с відстань між центрами стала 13 см, а ще через 2 с кулі зіткнулися, не дійшовши до вершини. Знайти швидкості куль.

13.411. Дві точки A і B, початкова відстань між якими дорівнює a, одночасно почали рухатись по різних сторонах прямого кута до його вершини з однією і тією самою сталою швидкістю v. Точка B досягає вершини на t одиниць часу раніше, ніж точка A (всі вимірювання виконано в одній системі одиниць). Визначити, скільки часу рухалась точка A. Яким має бути значення a, щоб шуканий час був найменшим?

13.412. Прямолінійні дороги, що сполучають три господарства, утворюють трикутник. Відстань від першого господарства до третього через друге у чотири рази довша прямого шляху між ними; відстань від першого до другого через третє на a км довша прямого шляху; відстань від другого до третього через перше дорівнює 85 км. У якому інтервалі знаходяться всі значення a, для яких було б можливим розташування господарств не на одній прямій? Обчислити відстань між господарствами при $a = 5$.

13.413. До сплаву входять олово, мідь і цинк. Якщо від цього сплаву відтяти 20 г і сплавити їх з 2 г олова, то в утвореному сплаві маса міді дорівнюватиме масі олова. Якщо ж відтяти від початкового сплаву 30 г і додати 9 г цинку, то в цьому новому сплаві маса олова дорівнюватиме масі цинку. Визначити в процентах склад початкового сплаву.

13.414. Із двох пунктів A і B одночасно виїхали два інспектори до місця події, в пункт C. Перший інспектор прибув у пункт C через a хв. Якщо другий інспектор намагатиметься прибути із пункту B в пункт C одночасно з першим, то йому доведеться на проїзд кожного кілометра витрачати на c хв менше, ніж першому, оскільки відстань від B до C на b км більша за відстань від A до C. Знайти відстань AC.

13.415. Двоє велосипедистів виїхали одночасно із пунктів A і B назустріч один одному. Через 4 год після зустрічі велосипедист, що їхав із A, прибув у B, а через 9 год після зустрічі велосипедист, що їхав із B, прибув у A. Скільки годин затратив на дорогу кожний велосипедист?

13.416. На складі є деяке число діжок двох зразків (розмірів) загальною місткістю 7000 л. Якби всі діжки були першого зразка, то місткість усіх діжок збільшилась би на 1000 л. Якби всі діжки були другого зразка, то їх загальна місткість зменшилась би на 4000 л. Обчислити місткість усіх діжок кожного зразка окремо.

13.417. До квітучої яблуні полетів джміль із швидкістю v_1 м/хв. Одночасно до другої яблуні полетіла бджола із швидкістю v_2 м/хв. При цьому джмелю треба було подолати відстань $2a$ м, а бджолі $2b$ м. Припустимо, що траєкторії їхнього польоту — взаємно перпендикулярні прямі, що перетинаються у точці, яка ділить пополам і шлях джмеля, і шлях бджоли. Знайти формулу, що виражає залежність відстані y між джмелем і бджолою від часу x їхнього польоту. Визначити момент, коли відстань між ними набуває найменшого значення. Дослідити, чи перелетить бджола або джміль точку перетину їхніх траєкторій польоту в момент, коли відстань між джмелем і бджолою буде найменшою.

13.418. Двоє велосипедистів виїжджають одночасно із пункту A з різними (але для кожного сталими) швидкостями і їдуть в пункт B. Прибувши туди, вони одразу повертають назад. Перший велосипедист, який їхав швидше другого, на зворотному шляху зустрів його на відстані a км від B; потім, діставшись в A, їде знову в напрямі B, і, проїхавши k-ту частину шляху AB, зустрічає другого велосипедиста, який повертається з B. Знайти відстань від A до B.

13.419. Два поїзди 490 і 210 м завдовжки рівномірно рухаються назустріч один одному паралельними коліями. Машиніст одного з них помітив зустрічний поїзд на відстані 700 м; після цього через 28 с поїзди зустрілись. Визначити швидкість кожного поїзда, коли відомо, що один з них проїжджає повз світлофор на 35 с довше іншого.

13.420. Кортеж автомобілів, що супроводжують космонавтів, рівномірно рухається проспектом із швидкістю v км/год. Довжина кортежу весь час дорівнює m м. Букет квітів, кинутий з вікна будинку, попав у коляску мотоцикліста, який їхав позаду кортежу. Мотоцикліст проїхав уперед, передав букет космонавту, який знаходився у першому автомобілі, і одразу ж поїхав назад. На проїзд туди і назад вздовж кортежу мотоцикліст затратив t хв. Обчислити швидкість мотоцикліста, якщо вона протягом всього шляху була сталою.

13.421. Якщо двозначне число поділити на деяке ціле число, то у частці дістанемо 3 і в остачі 8. Якщо ж у діленому поміняти місцями цифри, а дільник залишити початковим, то у частці дістанемо 2, а в остачі 5. Знайти початкове значення діленого.

13.422. На базі зберігаються кавуни, призначені для двох магазинів. Перший магазин зразу почав перевозити кавуни і робив це щоденно однаковими за масою порціями. Другий магазин почав перевозити кавуни на a днів пізніше і також перевозив їх щоденно однаковими за масою, але іншими, ніж перший магазин, порціями. Через b днів від початку перевезення на базі залишилась половина початкової маси кавунів. За скільки днів було вивезено всі кавуни з бази, якщо перевезення закінчилось одночасно і маса кавунів, які завезено в перший магазин, дорівнює масі кавунів, що завезено в другий магазин?

13.423. У бригаді землекопів кожний працює щоденно однакову кількість годин. Відомо, що продуктивність праці однакова в усіх робітників бригади і при цьому бригада може викопати канаву для прокладання кабелю за 6 днів. Проте ще до початку роботи з'ясувалось, що робочий день скорочується на 1 год, а склад бригади зменшується на 5 чоловік. У такому разі канава може бути викопана за 9 днів. Насправді цю канаву копали 12 днів, оскільки робочий день було скорочено не на 1 год, а на 2 год і ще два робітники не вийшли на роботу через хворобу. Скільки робітників було у бригаді спочатку і скільки годин щодня вони працювали?

13.424. Три машини виконують деяку роботу. Якщо цю роботу виконуватиме лише перша машина, то вона закінчить роботу на a днів пізніше, ніж при роботі всіх машин разом. Якщо ж це завдання виконуватиме друга машина, то вона закінчить її на b днів пізніше, ніж всі разом, а третій треба буде в c разів більше часу, ніж усім машинам разом. За скільки днів виконає роботу кожна з них окремо? Яких числових значень може набувати c?

13.425. Маємо n мензурок з рідиною. Із першої мензурки перелили $1/n$ частину рідини у другу, потім із другої мензурки $1/n$ частину рідини, що утворилась там після переливання з першої, перелили у третю мензурку і т. д. Нарешті, із n-ї мензурки перелили $1/n$ частину рідини, що була у ній після переливання із попередньої мензурки, знову в першу мензурку. Після цього у кожній мензурці виявилось по a см^3 рідини. Скільки рідини було спочатку в кожній мензурці?

13.426. Для наповнення водою басейну було встановлено два насоси. Перший насос може наповнити басейн на 8 год швидше, ніж другий. Спочатку було включено тільки другий насос на час, що дорівнює подвоєній кількості часу, потрібного для наповнення басейну при одночасній дії обох насосів. Потім включили перший насос і через 1,5 год після того, як було включено перший насос, басейн заповнився водою. За скільки годин кожний з насосів, працюючи окремо, може наповнити басейн?

13.427. Пройшовши крізь пористий фільтруючий матеріал, рідина рівномірною струминою вливається у 40-відерну діжку і може виливатись через кран, який є у дні діжки. Якщо цей кран відкрито, то вливання і виливання рідини такі, що за кожні 4 хв кількість рідини у діжці зменшується на одне відро. За який час відфільтрована рідина заповнить порожню діжку при закритому нижньому крані, коли відомо, що для цього потрібно на 3 хв менше того часу, за який відкритий нижній кран здатний пропустити 66 відер?

13.428. Партію однакових деталей обробляли на трьох верстатах різних конструкцій в такій послідовності: спочатку працював тільки перший верстат стільки годин, скільки необхідно для спільного виконання всієї роботи на другому і третьому верстатах; потім працював тільки другий верстат стільки годин, скільки треба було б для спільного виконання всієї роботи на першому і третьому верстатах. Решту деталей було оброблено на третьому верстаті протягом стількох годин, скільки треба було б для спільного виконання всієї роботи на першому і другому верстатах. У скільки разів швидше було б виконано цю роботу, якби працювали разом всі три верстати.

13.429. Спочатку катер йшов a км озером, а потім половину цієї відстані річкою, яка впадає в озеро. Весь рейс тривав 1 год. Знайти власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює c км/год.

13.430. Із Москви до міста N пасажир може вирушити поїздом. У цьому разі він перебуватиме у дорозі 20 год. Якщо ж він дочекається вильоту літака (а чекати доведеться більше 5 год після відходу поїзда), то дістанеться у місто N через 10 год, враховуючи і час чекання. Протяжності повітряної траси літака і шляху поїзда однакові. У скільки разів швидкість літака перевищує швидкість поїзда, коли відомо, що літак опиниться над цим поїздом через 8/9 год після вильоту з аеропорту і пролетить до цього моменту стільки кілометрів, скільки проїде поїзд?

13.431. Відомо, що різниця змінних величин y і z пропорційна величині x, а різниця величин z і x пропорційна величині y. Коефіцієнти цих пропорційностей дорівнюють відповідно k_1 і k_2. Деяке значення величини z у три рази більше за різницю відповідних значень x і y. Довести, що коли кожний з коефіцієнтів k_1 і k_2 збільшити на 3, то добуток знайдених чисел дорівнюватиме 8 (припускається, що величини x і y не дорівнюють нулю).

13.432. Два спортсмени бігають по одній замкненій доріжці стадіону. Швидкість кожного стала, але на пробіг всієї доріжки перший затрачає на a с менше, ніж другий. Якщо вони починають пробіг із спільного старту і в одному напрямі, то сходяться через кожні b с.

Через який час вони зустрінуться, якщо бігтимуть у протилежних напрямах по тій самій доріжці з початковими швидкостями?

13.433. Підприємство A, яке використовує лід, закуповує його в пункті B по ціні a крб. за тонну. Інколи цьому підприємству доводиться закуповувати лід у пункті C по ціні $1{,}5a$ крб. за тонну. Обидва пункти самі завозять споживачеві A лід, нараховуючи за перевезення p крб. за тонно-кілометр. Втрата маси, яка викликана таненням льоду при транспортуванні, становить $n/1000$ його початкової маси на кілометр шляху. Підприємство A розташовано між B та C і кожна тонна фактично завезеного льоду коштує для підприємства A однаково (у карбованцях) при завезенні як із пункту B, так і з пункту C. Скільки карбованців коштує для підприємства A тонна льоду, який воно одержує, коли відомо, що відстань від B до C через A дорівнює s км?

13.434. Довести, що куб найбільшого з трьох послідовних натуральних чисел не може дорівнювати сумі кубів двох інших чисел.

13.435. Шукане число більше 400 і менше 500. Знайти його, якщо сума його цифр дорівнює 9 і воно дорівнює 47/36 числа, яке зображене тими самими цифрами, але записаними у зворотному порядку.

13.436. На ділянці річки від A до B течія така незначна, що нею можна знехтувати; на ділянці від B до C течія помітно впливає на рух човна. Човен пропливає за течією відстань від A до C за 6 год, а проти течії від C до A за 7 год. Якби на ділянці від A до B течія була такою самою, як на ділянці від B до C, то весь шлях від A до C було б пройдено за 5,5 год. Скільки часу в цьому разі треба було б витратити тому самому човну на рух проти течії від C до A? Власну швидкість човна вважати сталою в усіх випадках.

13.437. На яке ціле додатне число треба поділити 180, щоб остача становила 25 % від частки?

13.438. Змішуючи по 2 $см^3$ кожної з трьох речовин, дістали 16 г суміші. Відомо, що 4 г другої речовини, заповнюють об'єм, що на 0,5 $см^3$ більший, ніж 4 г третьої речовини. Знайти густину третьої речовини, якщо відомо, що маса другої речовини в суміші у два рази більша, ніж маса першої.

13.439. Якщо шукане двозначне число збільшити на 46, то утвориться число, добуток цифр якого дорівнює 6. Знайти це число за умови, що сума його цифр дорівнює 14.

13.440. Дано дві взаємно перпендикулярні осі Ox і Oy, а також точку $A\ (a;\ a)$, де $a > 0$. Треба знайти координати такої точки M на осі Ox і такої точки P на осі Oy, щоб трикутник AMP був рівносторонній.

13.441. На відстані l м від мосту A за течією річки розташований міст B. Коли спортсмен пропливав повз міст A у напрямі до мосту B, йому кинули два м'ячі. Перший м'яч він спіймав, а другий залишив пливти за течією. Пропливши з м'ячем деяку відстань, спортсмен залишив цей м'яч і поплив назад за другим м'ячем. Підхопивши другий м'яч, він знову повернув до мосту B і приплив до нього одночасно з першим м'ячем, що плив вільно. Яку відстань довелось подолати спортсменові, якщо його власна швидкість весь час була в k разів більшою за швидкість течії?

13.442. До магазину надійшов товар першого і другого сортів на загальну суму 450 крб. Додаткова експертиза виявила, що весь товар, який надійшов, можна продавати тільки за ціною другого сорту, внаслідок чого фірма зазнала б збитків на суму 50 крб. Продавці магазину безкоштовно не тільки усунули дефекти товару першого сорту, але й товар другого сорту довели до кондиції першого сорту. Після цього, діставши дозвіл, магазин продав весь товар за ціною першого сорту. У результаті фірма дістала прибуток на суму 30 крб. Якою сумою оцінювали спочатку весь товар першого сорту і весь товар другого сорту окремо?

13.443. З колби, де знаходиться розчин солі, відливають $1/n$ частину розчину в пробірку, а розчин, що залишився в колбі, випаровують доти, доки процентний вміст солі не збільшиться у два рази. Після цього вливають у колбу розчин із пробірки. Внаслідок цього вміст солі в розчині підвищився на p % порівняно з початковим. Визначити процентний вміст солі в початковому розчині. Яку частину початкового розчину треба відлити, щоб внаслідок описаної процедури процентний вміст солі збільшився у півтора рази?

13.444. Знаючи довжини сторін трикутника, учень знайшов його площу і звернув увагу на те, що значеннями довжин сторін та площі цього трикутника є відповідно чотири послідовних цілих числа. Чому дорівнюють сторони трикутника?

13.445. На столі стоїть циліндрична склянка з водою. Радіус основи склянки дорівнює R. Якщо в склянку опустити кульку радіуса r, то вона опуститься на дно склянки, а поверхня води при цьому підніметься настільки, що стане дотичною до кульки. Довести, що відбудеться те саме, якщо в цю склянку з тією самою кількістю води опустити замість даної кульки кульку іншого радіуса. Знайти радіус нової кульки та визначити умови, за яких він буде більшим або меншим, ніж радіус даної кульки.

13.446. З одного і того самого пункту одночасно в одному напрямі по прямолінійній ділянці шосе із сталими, але різними швидкостями, вийшли два пішоходи. Через 2 год відстань між ними була s км. Прискоривши хід пішоходи стали витрачати на кожний кілометр шляху на 10 хв менше. Ще через 2 год відстань між ними дорівнювала $3s$ км. Знайти відстані, що пройшли пішоходи за перші дві години руху.

13.447. Порівнюючи два бруски, що мають форму прямокутного паралелепіпеда, з'ясували, що довжина, ширина і висота другого бруска відповідно на 1 см більші, ніж першого бруска, а об'єм та повна поверхня другого бруска відповідно на 18 см^3 і 30 см^2 більші, ніж першого. Яка повна поверхня першого бруска?

13.448. Від станції A вирушили два електропоїзди з інтервалом 12 хв і практично відразу набрали однакову швидкість 50 км/год. Вони рухаються в одному напрямі без зупинок, зберігаючи швидкість незмінною. З якою сталою швидкістю йшов зустрічний поїзд, якщо він зустрів ці електропоїзди з інтервалом у 5 хв?

13.449. Шукане тризначне число починається з цифри 1. Якщо її витерти і потім дописати замість останньої цифри числа, то утворене нове тризначне число буде більше за шукане на $9a^{1/\lg a}$. Знайти число.

13.450. Якщо при початку відліку часу було m_0 г речовини A і $2m_0$ г речовини B, то через будь-яке число t років, внаслідок радіоактивного розпаду, цих речовин залишиться відповідно $m = m_0 \times \times 2^{-\lambda_1 t}$ і $M = 2m_0 \cdot 2^{-\lambda_2 t}$, де λ_1 і λ_2 — сталі, що залежать від природи речовини. Обчислити період піврозпаду кожної з цих речовин, тобто визначити, через скільки років від кожної речовини залишиться тільки половина її початкової кількості, якщо відомо, що період піврозпаду речовини B у два рази менший, ніж речовини A, і що через 20 років загальна маса цих речовин зменшується у 8 разів.

Частина II

АЛГЕБРА. ГЕОМЕТРІЯ (ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ) ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ

Глава 14

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ З АЛГЕБРИ

Приклад 1. Показати, що $\log_2\cos 20° + \log_2\cos 40° + \log_2\cos 80° = -3$.

Δ Твердження правильне, коли справджується рівність $\log_2 (\cos 20° \cos 40° \cos 80°) = -3$ (використано формулу (7.4)) або $\log_2 A = -3$, де $A = \cos 20° \cos 40° \cos 80°$. Помножимо і поділимо праву частину останньої рівності на $8 \sin 20°$:

$$A = \frac{4 \cdot 2 \sin 20° \cos 20° \cos 40° \cos 80°}{8 \sin 20°}.$$

Застосувавши тричі послідовно формулу (3.13), дістаємо

$$A = \frac{4 \sin 40° \cos 40° \cos 80°}{8 \sin 20°} = \frac{2 \sin 80° \cos 80°}{8 \sin 20°} =$$

$$= \frac{\sin 160°}{8 \sin 20°} = \frac{\sin (180° - 20°)}{8 \sin 20°} = \frac{\sin 20°}{8 \sin 20°} = 2^{-3}.$$

Отже, $\log_2 A = \log_2 2^{-3} = -3$. ▲

Приклад 2. При яких значеннях p рівняння

$$x^2 - (2^p - 1)\, x - 3\, (4^{p-1} - 2^{p-2}) = 0$$

має однакові корені?

Δ Квадратне рівняння має однакові корені, якщо його дискримінант $D = b^2 - 4ac$ дорівнює нулю. Знаходимо

$$D = (2^p - 1)^2 + 4 \cdot 3\, (4^{p-1} - 2^{p-2}) = 2^{2p} - 2 \cdot 2^p + 1 + \frac{12 \cdot 2^{2p}}{4} -$$

$$- \frac{12 \cdot 2^{2p}}{4} = 4 \cdot 2^{2p} - 5 \cdot 2^p + 1.$$

Використовуючи заміну змінної $2^p = y$, дістаємо рівняння $4y^2 - 5y + 1 = 0$, яке має корені $y_1 = 1/4$, $y_2 = 1$. Розв'язуємо рівняння $2^p = 2^{-2}$ і $2^p = 1$, звідки $p = -2$ і $p = 0$. ▲

Приклад 3. Розв'язати рівняння $|x - 1| \cdot |x + 2| = 4$.

Δ Оскільки $|xy| = |x| \cdot |y|$, перепишемо дане рівняння у вигляді $|(x - 1)(x + 2)| = 4$. Воно рівносильне сукупності двох систем:

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) > 0, \\ (x-1)(x+2) = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)(x+2) < 0, \\ -(x-1)(x+2) = 4. \end{cases}$$

У першій системі корені рівняння $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ задовольняють нерівність цієї системи, а значить, і саму систему; дискримінант квадратного рівняння другої системи від'ємний; тобто, ця система несумісна. Отже, маємо відповідь: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. ▲

Приклад 4. При яких цілих значеннях a нерівність

$$2 \log_{0,5} a - 3 + 2x \log_{0,5} a - x^2 < 0$$

справджується в будь-якій точці осі Ox?

△ Замінимо задану нерівність рівносильною: $x^2 - 2x \log_{0,5} a + 3 - 2 \log_{0,5} a > 0$. Оскільки коефіцієнт при x^2 додатний, то нерівність справджується в будь-якій точці осі Ox, якщо дискримінант квадратного тричлена від'ємний (див. вказівку 4°, гл. 9). Отже,

$$4 \log^2_{0,5} a - 4 (3 - 2 \log_{0,5} a) < 0, \quad \text{або} \quad \log^2_{0,5} a + 2 \log_{0,5} a - 3 < 0.$$

Рис. 14.1

Після заміни змінної $y = \log_{0,5} a$ дістаємо нерівність $y^2 + 2y - 3 < 0$; $f(y) = y^2 + 2y - 3 = 0$ при $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. Схематичне розміщення параболи відносно осі Oy показано на рис. 14.1. Звідси знаходимо $-3 < y < 1$.

Розв'язуємо нерівність $-3 < \log_{0,5} a < 1$, яку, використовуючи формули (7.6) і (7.2), запишемо у вигляді $\log_{0,5} 0{,}5^{-3} < \log_{0,5} a < \log_{0,5} 0{,}5$. Оскільки основа логарифму $0 < 0{,}5 < 1$, то за вказівкою 7° із гл. 9 дістаємо рівносильну цій нерівності систему

$$\begin{cases} a > 0, \\ 0{,}5 < a < 0{,}5^{-3}, \text{ тобто } 0{,}5 < a < 8. \end{cases}$$

Цілими значеннями a, які задовольняють останню нерівність, є числа 1, 2, ..., 7. ▲

Приклад 5. Розв'язати нерівність $10^{|\sin x|} > 10^{|\cos x|}$.

△ Оскільки основа степеня $10 > 1$, то на підставі вказівки 7° із гл. 9 перейдемо до рівносильної нерівності $|\sin x| > |\cos x|$. Звідси,

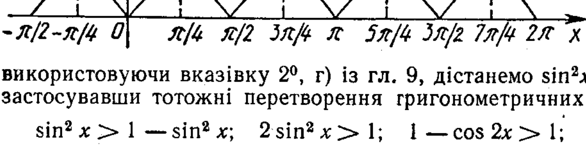


Рис. 14.2

використовуючи вказівку 2°, г) із гл. 9, дістанемо $\sin^2 x > \cos^2 x$. Далі, застосувавши тотожні перетворення тригонометричних виразів, маємо

$$\sin^2 x > 1 - \sin^2 x; \quad 2 \sin^2 x > 1; \quad 1 - \cos 2x > 1; \quad \cos 2x < 0,$$

звідки $\pi/2 + 2\pi k < 2x < 3\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Отже, дістаємо відповідь: $\pi/4 + \pi k < x < 3\pi/4 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ▲

Розв'язок нерівності $|\sin x| > |\cos x|$ можна також знайти графічно, побудувавши графіки функцій $|\sin x|$ і $|\cos x|$ на одному рисунку (рис. 14.2).

Приклад 6. Довести, що графіки функцій $y = m \cdot 3^x + n$ і $y = n \cdot 3^{-x} + m$ при умові $mn < 0$ перетинаються у двох точках, одна з яких лежить на осі абсцис, а друга — на осі ординат.

Δ Абсциси точок перетину графіків є коренями рівняння $m \cdot 3^x + n = n \cdot 3^{-x} + m$; помноживши всі його члени на $3^x \neq 0$ і згрупувавши подібні доданки, дістанемо $m \cdot 3^{2x} + (n - m) \cdot 3^x - n = 0$.

Нехай $3^x = y > 0$; розв'яжемо квадратне рівняння $my^2 + (n - m)y - n = 0$. Маємо $D = (n - m)^2 + 4mn = (n + m)^2$, тобто, $y_{1,2} = \dfrac{-(n-m) \pm (n+m)}{2m}$; $y_1 = 1$, $y_2 = -n/m > 0$ ($mn < 0$ за умовою).

Із рівняння $3^x = 1$ знаходимо $x = 0$, а із рівняння $3^x = -n/m$ дістаємо $x = \log_3(-n/m)$. Знайдемо ординати точок перетину. Якщо $x_1 = 0$, то $y_1 = m \cdot 3^0 + n = m + n$. Точка $(0; m + n)$ лежить на осі Oy. Якщо $x_2 = \log_3(-n/m)$, то $y_2 = m \cdot 3^{\log_3(-n/m)} + n = m(-n/m) + n = 0$ (оскільки $3^{\log_3(-n/m)} = -n/m$ в силу рівності (7.1)). Точка $(\log_3(-n/m); 0)$ лежить на осі Ox. ▲

Спростити вирази (14.001—14.004):

14.001. $\dfrac{m}{m^2+1}\sqrt{1+\left(\dfrac{m^2-1}{2m}\right)^2}$.

14.002. $\dfrac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt[4]{(b-a)^8}}$.   14.003. $\sqrt{\dfrac{1-\cos 246^\circ}{1+\cos 246^\circ}}$.

14.004. $\sqrt{\dfrac{\cos(\pi+\alpha)+1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+1}}$.

Розв'язати рівняння (14.005—14.026):

14.005. $\sqrt{x^2-1} - \dfrac{6}{\sqrt{x^2-1}} = 1$.

14.006. $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}} + \dfrac{1}{x} = 5$.   14.007. $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$.

14.008. $\dfrac{3^{\sqrt{-12x}}+3}{4} = 3^{\sqrt{-3x}}$.   14.009. $4^{\log_2 x} + x^2 = 8$.

14.010. $\lg^2 x^2 = 1$. 14.011. $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$.
14.012. $x^{2\log_2 x} = 8$. 14.013. $\log_3(\log_2^2(x-4)) = 0$.
14.014. $\lg^2 10x + \lg x = 19$. 14.015. $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$.

14.016. $x^{\log_3 x} = \sqrt[4]{3x^3}$.   14.017. $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$.

14.018. $\log_2(\sqrt{4x+5}-1) = 0{,}5\log_2(\sqrt{4x+5}+11)$.

14.019. $\log_2^2 4x - 4\log_4 x = 12$.

14.020. $\log_{x+6}(2x-\sqrt{x+6}) = 0{,}5$.   14.021. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$.

14.022. $2x - \lg(5^{2x} + 4^x - 16) = x\lg 4$.

14.023. $x + \lg(1 + 4^x) = \lg 50$.
14.024. $\cos^{58} x + \sin^{40} x = 1$.
14.025. $\log_{\cos x} \sin x = 1$. **14.026.** $\operatorname{ctg}(\sin x) = 1$.

Розв'язати системи рівнянь (14.027—14.032):

14.027. $\begin{cases} 6{,}751x + 3{,}249y = 26{,}751, \\ 3{,}249x + 6{,}751y = 23{,}249. \end{cases}$

14.028. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2{,}5, \\ x^2 - y^2 = 3{,}0. \end{cases}$ **14.029.** $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4. \end{cases}$

14.030. $\begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y. \end{cases}$ **14.031.** $\begin{cases} 0{,}5 \log_2 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

14.032. $\begin{cases} x^{\log_y x} = 2, \\ y^{\log_x y} = 16. \end{cases}$

14.033. При якому значенні q сума кубів коренів рівняння $x^2 - x - q = 0$ дорівнює 19?

14.034. При яких значеннях p сума квадратів коренів рівняння $x^2 + px + 35 = 0$ дорівнює 74?

14.035. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 3x - 10 = 0$, обчислити суму кубів його коренів.

14.036. Чи має рівняння $(2x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$ дійсні корені?

14.037. Скільки коренів має рівняння $0{,}3^x = x^2 - x + 1$?

14.038. Переконатися, що обидва корені рівняння $2^x + x^2 - 3 = 0$ більші $-\sqrt{3}$, причому один з них точно дорівнює 1.

14.039*. Розв'язати рівняння $x^3 - 7x - 6 = 0$. Переконатися в тому, що сума всіх його коренів дорівнює нулю. Чи можна в цьому переконатися, не знаходячи самих коренів?

14.040. Розв'язати графічно рівняння $|x - 1| + 2x - 5 = 0$.

14.041. Показати графічно, що рівняння $\lg x = \lg 2x$ не має коренів.

14.042. Скільки коренів має рівняння $x^2 = \sin 3x$?

14.043. Показати, що рівняння $\sqrt{9 - x^2} - \log_3(|x| - 3) = 0$ не має коренів.

14.044. Скільки дійсних розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x + y^2 = 3? \end{cases}$$

14.045. Розв'язати рівняння $|x^2 + 1{,}5x + 1| = m$. При яких значеннях m воно має єдиний розв'язок?

14.046. Знайти число x, якщо числа 1, 7, 13, ..., x складають арифметичну прогресію, для якої $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$.

14.047. Знайти раціональні корені рівняння

$$\frac{\sqrt{x+2}}{|x|} + \frac{|x|}{\sqrt{x+2}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

14.048. Знайти цілі корені рівняння $x^3 - |x - 1| = 1$.

14.049. Чому дорівнює сума всіх коренів будь-якого біквадратного рівняння?

14.050. Довести, що послідовність, яка задана формулою $y_n = \frac{10n+7}{2n}$, спадає.

14.051. Чи рівносильні рівняння

$$(1+2\sin x)\operatorname{tg} x = 0 \text{ і } \frac{1+2\sin x}{\operatorname{ctg} x} = 0?$$

14.052. Показати, що рівняння $\sin x + \sin 2x = 2$ не має коренів.

14.053. При якому значенні m система

$$\begin{cases} 2x + (m-1)y = 3, \\ (m+1)x + 4y = -3 \end{cases}$$

має безліч розв'язків; не має розв'язків?

Визначити знаки чисел **(14.054—14.056).**

14.054. $\log_{1,7}(0{,}5(1-\log_7 3))$.

14.055. $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5 - 1)\right)$. **14.056.** $\frac{\log_3 5 - \log_5 3}{\log_{0,3} 4 - \log_{0,3} 3}$.

14.057. Чому дорівнює основа логарифма, при якій число a дорівнює своєму логарифму?

14.058. Записати x у вигляді десяткового дробу, якщо $x = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

14.059. Обчислити $x = 0{,}8(1 + 9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$.

14.060. Обчислити без таблиць $\lg 32{,}11 - \lg 0{,}03211$.

14.061. Обчислити $\log_{1/2} 28$, якщо $\log_7 2 = a$.

14.062. Знайти $\lg^2 \sqrt{x}$, якщо $\log_x 100 = a$.

14.063. Знайти $\log_9 2{,}97$, якщо $\lg 3 = a$ і $\lg 11 = b$.

Обчислити **(14.064—14.067).**

14.064. $\lg \operatorname{tg} 2° + \lg \operatorname{tg} 4° + \lg \operatorname{ctg} 2° + \lg \operatorname{ctg} 4°$.

14.065. $\lg \operatorname{tg} 3° \cdot \lg \operatorname{tg} 6° \cdot \lg \operatorname{tg} 9° \cdots \lg \operatorname{tg} 87°$.

14.066. $\lg \operatorname{tg} 1° \cdot \lg \operatorname{tg} 2° \cdot \lg \operatorname{tg} 3° \ldots \lg \operatorname{tg} 89°$.

14.067. $\lg \operatorname{tg} 1° + \lg \operatorname{tg} 2° + \lg \operatorname{tg} 3° + \cdots + \lg \operatorname{tg} 89°$.

14.068. Чому дорівнює добуток $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \ldots \log_{10} 9$, якщо $\lg 2 = 0{,}3010$?

14.069. Обчислити $\log_8 36$, якщо $\log_{12} 9 = m$.

14.070. Визначити знак добутку $\lg \sin 32° \cdot \lg \cos 17° \cdot \lg \operatorname{tg} 40° \times \lg \operatorname{ctg} 20°$.

14.071. Який знак має число $\lg \operatorname{arctg} 2$?

14.072. Довести, що $\log_2 5$ — ірраціональне число.

14.073. Чи завжди неправильна рівність $\lg(a+b) = \lg a + \lg b$?

14.074. Довести, що коли $a^2 + b^2 = 7ab$, то

$$\log_k \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_k a + \log_k b).$$

14.075. Знайти помилку в таких міркуваннях:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3; \quad 2\log_a \frac{1}{2} > 3\log_a \frac{1}{2}.$$

Скорочуючи обидві частини нерівності на $\log_a \frac{1}{2}$, дістаємо $2 > 3$.

Розв'язати нерівності (14.076—14.100):

14.076. $x^3+4\geqslant x^2+4x$. 14.077. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\geqslant\frac{6}{x^3}$.

14.078. $-\frac{15}{x^2}-\frac{16}{x^4}<-1$. 14.079. $x^3-2x^2-x+2>0$.

14.080. $x^2-4|x|+3>0$. 14.081. $x^2-5|x|+6<0$.

14.082. $\frac{3|x|-14}{x-3}\leqslant 4$. 14.083. $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7}<0$.

14.084. $\left|\frac{2}{x-4}\right|>1$. 14.085. $\frac{\sqrt{1-2x+x^2}+x}{x}>0$.

14.086. $7^{x^2-4x-2}>1/49$. 14.087. $0{,}5^{(x^2+x-2)(3-x)}>1$.

14.088. $1<2^{x(x+2)}<8$.

14.089. $\log_{0,5}(2x+6)>\log_{0,5}(x+8)$.

14.090. $2\lg x<\lg^2 x$. 14.091. $\lg\frac{6}{x}>\lg(x+5)$.

14.092. $\log_2(1+\log_{1/3}x)<1$. 14.093. $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leqslant\frac{1}{2}$.

14.094. $x^{\log_{0,2}0,3}+0{,}3^{\log_{0,2}x}\leqslant 0{,}18$.

14.095. $\log_{1/2}\log_3 x>1$.

14.096. $x^2\log_2 0{,}3-2\log_2 0{,}09>0$.

14.097. $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}<1$. 14.098*. $x^{-3x-8}>x^7$.

14.099. $\frac{\sin x}{1+\cos x}\geqslant 0$. 14.100. $\sin x\cos x>1/4$.

14.101. Для яких точок осі Ox виконується нерівність: а) $\sin x<1/2$; б) $|\sin x|<1/2$?

14.102. Що більше: $\sin 2x$ чи $2\sin x$?

14.103. Для різних x із області визначення функцій з'ясувати, яка з величин більша: $\lg x^2$ або $\lg^2 x$.

14.104. Які значення може набувати x, якщо $\log_x(a^2+1)<0$?

14.105. Що більше: 3^{400} чи 4^{300}?

14.106. При яких значеннях a виконується нерівність $\frac{5a+6}{4-a}>1$?

14.107. Чи існують такі a, при яких корені рівняння $x^2-2(a-3)x-a+3=0$ належать проміжку $(-3;0)$?

14.108. При яких значеннях x вираз $\log_{1/2}(x^2-8)$ невід'ємний?

14.109. Довести, що $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, якщо $ab>0$.

14.110*. Довести, що коли $a+b+c=1$, то $a^2+b^2+c^2\geqslant 1/3$; a, b, c — дійсні числа.

14.111. Довести, що сума кубів катетів менша від куба гіпотенузи.

14.112. Довести, що в будь-якому трикутнику сума довжин трьох медіан менша від периметра і більша від півпериметра.

14.113. Довести, що коли a, b, c — відповідно катети і гіпотенуза, то $a + b \leqslant c\sqrt{2}$.

14.114*. Довести справедливість нерівності

$$\sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt[3]{a^3 + b^3} \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Побудувати графіки функцій (**14.115—14.134**):

14.115. а) $y = x^2 + 5x + 6$; б) $y = x^2 + 5|x| + 6$;
в) $y = |x^2 + 5x + 6|$; г) $y = |x^2 + 5|x| + 6|$.

14.116. а) $y = -x^2 + 4x - 5$;
б) $y = -x^2 + 4|x| - 5$;
в) $y = |-x^2 + 4x - 5|$;
г) $y = |-x^2 + 4|x| - 5|$.

14.117. а) $y = \log_{1/2} x$; б) $y = \log_{1/2}(-x)$;
в) $y = \log_{1/2}|x|$; г) $y = |\log_{1/2} x|$;
д) $y = |\log_{1/2}|x||$.

14.118. а) $y = \sin x$; б) $y = 2\sin x$;
в) $y = \sin 2x$; г) $y = \sin \dfrac{x}{2}$.

14.119. а) $y = \cos x$; б) $y = \cos|x|$;
в) $y = |\cos x|$; г) $y = |\cos|x||$.

14.120. $y = \dfrac{1+x}{x}$. **14.121.** $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$.

14.122. $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$. **14.123.** $y = 2^{1/x}$.

14.124. $y = -\dfrac{1}{\cos x}$. **14.125.** $y = \log_2(\sin x \cos x)$.

14.126. $y = \log_2 \sin x$. **14.127.** $y = |x + 1| - x$.

14.128. $y = x|x| + 1$. **14.129.** $y = x + \dfrac{|x|}{x}$.

14.130. $y = -2^{-|x|}$. **14.131.** $y = 2^x \cdot 2^{|x|}$.

14.132. $y = \lg x + |\lg x|$. **14.133.** $y = \dfrac{|x-1|}{x-1} \cdot (x^2 - 4)$.

14.134. $y = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$.

14.135. Як, знаючи графік $f(x)$, побудувати графік $|f(x)|$? Чи можна за графіком $|f(x)|$ відновити графік $f(x)$?

14.136. Записати найпростішою формулою функцію f, яка одночасно є парною, непарною, незростаючою, неспадною і періодичною.

14.137. Якщо $\log_a \sin 40^\circ + \log_a \operatorname{tg} 40^\circ + \log_a \cos^{-1} 40^\circ = b$, то чому дорівнює сума $\log_a \sin 50^\circ + \log_a \operatorname{tg} 50^\circ + \log_a \cos^{-1} 50^\circ$?

14.138. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} 1/x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

і показати, що $x = 0$ є точкою мінімуму даної функції. Крім того, на цьому прикладі показати, що не обов'язково зліва від точки мінімуму розміщується проміжок спадання функції, а справа — проміжок зростання; може бути і навпаки.

14.139. На рис. 14.3 зображено графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначити, додатне, від'ємне чи дорівнює нулю кожне із чисел a, b і c.

14.140. На рис. 14.4 зображено графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначити, додатне, від'ємне чи дорівнює нулю кожне із чисел a, b і c.

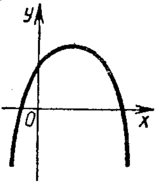


Рис. 14.3

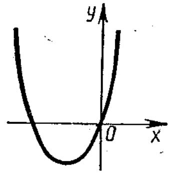


Рис. 14.4

14.141. Побудувати графік функції $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, якщо $a > 0$ і $b^2 - 4ac = 0$.

Знайти області визначення функцій (14.142—14.147):

14.142. $y = \dfrac{\lg x}{\arcsin (x - 3)}$. **14.143.** $y = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x^2}}$.

14.144. $y = \sqrt{\lg \dfrac{1 - 2x}{x + 3}}$. **14.145.** $y = (\log_3 x - \log_2 x)^{-1/2}$.

14.146. $y = \sqrt{2^x - 3^x}$. **14.147.** $y = \log_3 \log_{1/2} x$.

Знайти області значень функцій (14.148—14.150):

14.148. $y = \dfrac{\cos x}{\cos (x/2) - \sin (x/2)}$.

14.149. $y = (\sin x + \cos x)^2$.
14.150. $y = 5 \sin x - 12 \cos x$.

Зобразити в координатній площині xOy задані співвідношення між змінними x і y (14.151—14.159):
14.151 $|x| + |y| = 1$. **14.152.** $|x| - |y| = 1$.
14.153. $x + |x| = y + |y|$. **14.154.** $|y| = \log_{0,5} |x|$.
14.155. $|y| = |\sin x|$. **14.156.** $|y| = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.
14.157. $3x - 4y + 12 > 0$ і $x + y - 2 < 0$.
14.158. $y + 3 \geqslant x^2 + 2x$ і $x + y \leqslant 3$.
14.159. $\log_2 (x + y - 1) < 0$.
14.160. На рис. 14.5 зображено графік $y = \log_a x$ (масштаби по осях координат однакові). За допомогою цього графіка знайти число a.
14.161. Знайти найменше значення функції $y = x^2 - 6x + 11$.

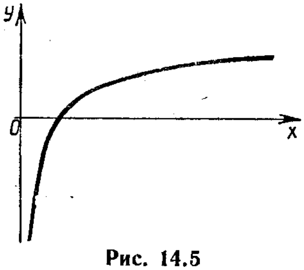


Рис. 14.5

14.162. Знайти найменше значення функції $y = \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{x^2}{2}$.

14.163. Знайти найбільше значення функції $y = 1 + 2x - x^2$.

14.164. Показати, що парабола $y = x^2 - x + 5{,}35$ не перетинає графік функції $y = 2\sin x + 3$.

14.165. Показати, що координати всіх точок прямої $x + y = 2$ задовольняють нерівність $x^2 + y^2 \geqslant 2$, і пояснити цей факт геометрично.

Користуючись означенням факторіалу $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, скоротити дроби (14.166—14.169):

14.166. $\dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$. **14.167.** $\dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$.

14.168. $\dfrac{(n+2)\,n!}{(n+1)!}$. **14.169.** $\dfrac{((n+2)! + n!)\,(n+1)}{(n+2)!\,(n^2+3n+3)}$.

14.170. Показати, що графіком рівняння $\sin(x+y) = 0$ є нескінченна сукупність рівновіддалених паралельних прямих.

14.171. Дано:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне число,} \\ -1, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне число.} \end{cases}$$

Чи є ця функція сталою, якщо x — дійсне число? А її квадрат?

14.172. Довести, що при деяких обмеженнях для α і β із рівності $\sin(\alpha+\beta) = 3\sin(\alpha-\beta)$ випливає $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$. Указати ці обмеження.

14.173. Визначити z, коли відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = 3^z$, $\operatorname{tg}\beta = 3^{-z}$ і $\alpha - \beta = \pi/6$.

14.174. З'ясувати, чи є задана послідовність спадною, чи зростаючою: а) $x_n = 3n^2 - n$; б) $x_n = n^2 - 3n$; в) $x_n = 7n - n^2$; г) $y_n = \lg\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

14.175. Знайти цілі значення x, при яких справджується нерівність $\log_3 (x+3)^2 \leqslant 2$.

14.176*. Довести, що сума кубів n непарних чисел дорівнює $n^2(2n^2-1)$ при будь-якому натуральному n.

14.177. Розглянувши випадки $0 < a < 1$ і $a > 1$, з'ясувати, чи існує число $\sqrt{\log_a \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \log_a \operatorname{tg} 70^\circ}$.

14.178. Показати, що коли арифметичний квадратний корінь із добутку двох натуральних чисел є число раціональне, то і квадратний корінь із їхньої частки — число раціональне.

14.179. Не знаходячи x і y окремо, обчислити суму $x^3y + xy^3$, якщо $x - y = 4$ і $xy = 3$.

14.180. Якщо $\log_b a = m$ і $\log_c b = n$, то чому дорівнює $\log_{bc} ab$?

14.181. Довести, що нерівність $|\sin x + \sqrt{3}\cos x| \leqslant 2$ справджується для будь-якого дійсного значення x.

14.182. На числовій осі побудувати точки, які зображують числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{3}+\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

14.183. Що більше: 123 % від 456 чи 456 % від 123? Яку властивість процентів можна сформулювати, узагальнюючи відповідь на це запитання? Обґрунтувати цю властивість.

14.184. На деякий товар було двічі знижено ціни — спочатку на 15 %, а потім ще на 20 %. Який загальний процент зниження вартості товару?

14.185. Якщо середнє арифметичне десяткових логарифмів двох чисел дорівнює q, то чому дорівнює середнє геометричне кубів самих цих чисел?

14.186. З точністю до 0,01 знайти $2\sqrt{5{,}21}$.

14.187. Показати, що число $\sqrt{12345{,}67}$ ірраціональне.

14.188. Позбутися ірраціональності в знаменнику дробу $\dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}}$.

14.189. Що більше: а) $0{,}8^{-\sqrt{2}}$ чи $0{,}8^{-1{,}4}$; б) $\log_{1/3} 0{,}5$ чи $\log_3 0{,}5$?

14.190*. Скільки цифр має число 2^{100}?

14.191. Довести, що нерівність $3^n \geqslant n + 2$ справджується, якщо n — натуральне число.

14.192. Добуток $(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1)(2^{2^3} + 1)$ подати у вигляді суми степенів числа 2.

14.193. Через один кран вода рівномірно вливається в бак і заповнює його за 3 год, а через другий — за 5 год. За який час вода заповнить бак, якщо відкрити обидва крани одночасно?

14.194. Через один кран вода рівномірно вливається в бак і заповнює його за 3 год, а через другий кран вода рівномірно виливається і наповнений бак спорожнюється за 5 год. За який час вода заповнить порожній бак, якщо відкрити обидва крани одночасно?

14.195. Чи існує така арифметична прогресія, у якої сума будь-якої кількості її членів дорівнює: а) квадрату кількості членів; б) кубу кількості членів?

14.196. Поділити $a^{128} - b^{128}$ на добуток

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \dots (a^{64} + b^{64}).$$

14.197. Показати, що рівняння $x^8 + p^2x^6 + q^2x^4 + r^2x^2 = 0$ не має коренів, які відрізняються від нуля.

14.198*. Многочлен $x^4 + 4$ записати у вигляді добутку двох многочленів другого степеня.

14.199*. Знайти добуток xy, якщо $x + y = a$ і $x^4 + y^4 = b^4$.

14.200*. Многочлен $x^8 + y^8$ подати у вигляді добутку двох многочленів четвертого степеня відносно x і y

14.201*. Розкласти на множники $a^4 + 4b^4$.

14.202. Знайти коефіцієнти квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, знаючи, що при $x = -0{,}75$ вона набуває найбільшого значення 3,25, а при $x = 0$ дорівнює 1.

14.203. З усіх чотирикутників із заданими діагоналями m і n знайти чотирикутник, який має найбільшу площу.

14.204. Побудувати графік функції

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 1 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \cos x & \text{при } 0 < x < \pi, \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi^2 & \text{при } x \geqslant \pi. \end{cases}$$

Вказати значення функції в точці розриву.

14.205. Для яких значень x справджується рівність

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = \frac{1 + x^8}{1 - x}?$$

14.206. Довести, що многочлен $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x + 16$ набуває додатних значень при будь-яких дійсних значеннях x.

14.207. Довести, що жодне парне число, не кратне чотирьом, не можна подати як різницю квадратів двох натуральних чисел.

14.208. Розкласти на множники $x - 3\sqrt{xy} + 2y$ $(x > 0, y > 0)$.

14.209. Знайти такі значення λ, при яких обидва корені тричлена $(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 3)x + (\lambda - 2)$ будуть додатними.

14.210. Чи є число $2^{2001} + 1$ простим або складеним?

14.211. Дано правильний нескоротний дріб $\frac{p}{q}$. Довести, що з рівності $\frac{a}{q} + \frac{p}{q} = 1$ випливає, що $\frac{a}{q}$ — нескоротний дріб.

14.212. Неважко помітити, що рівність

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1$$

має відносно x степінь не вищий, ніж другий. Разом з тим вона має більше двох коренів: можна перевірити, що числа $x_1=a$, $x_2=b$ і $x_3=c$ задовольняють її. Як це можна пояснити?

14.213*. Довести, що коли алгебраїчне рівняння з цілими коефіцієнтами має цілий корінь, то вільний член рівняння ділиться на цей корінь.

14.214*. Як розв'язати рівняння $x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0$, якщо відомо, що многочлен у його лівій частині можна розкласти на множники другого степеня з цілими коефіцієнтами?

14.215. Дано добуток

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right).$$

Трапилося так, що в друкарні обидва дроби випали при складанні. Складач стверджує, що вираз

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

є тотожний даному. Чи це дійсно так?

14.216. При яких значеннях a графік функції $y=(a+5)x^2+x+a-3$ перетинає вісь абсцис з різних боків від осі ординат?

14.217. Вказати область визначення функції

$$y=\log_2(x^2-2x+3).$$

Чи має графік цієї функції яку-небудь вісь симетрії? Якщо має, то яку?

14.218. Вказати область визначення функції

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-10x+25}}.$$

Показати, що графік цієї функції розміщений симетрично відносно прямої $x=5$.

14.219. Показати, що функція $y=\dfrac{2x+3}{5x-2}$ збігається з оберненою до неї.

14.220. Які з наступних функцій є парними, непарними або є ні парними, ні непарними:

а) $y=\sin^3 x+\operatorname{ctg}^5 x$; б) $y=\sin 2x+\cos 3x$;

в) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$; г) $y=\sin^4 x+x^2+1$;

д) $y=x\,|x|$; е) $y=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$;

є) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$; ж) $y=\arccos 3x$;

з) $y=5\operatorname{arctg} x$; и) $y=-\operatorname{arcctg} x$.

14.221. Знайти значення функції $f(n)=\arcsin(\sin n)$ при $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

14.222. Чи можна стверджувати, що сума двох періодичних функцій є періодичною функцією?

14.223. Довести, що добуток парного числа непарних функцій є парною функцією.

14.224*. Величина y є цілою частиною («характеристикою») логарифма x за основою 2. Побудувати графік y як функції x, коли x змінюється від 0,5 до 8,0.

14.225*. Довести, що коли p і q — прості числа, більші 3, то $p^2 - q^2$ ділиться на 24.

14.226. Довести, що коли куби двох дійсних чисел рівні між собою, то рівні і самі ці числа.

14.227. Чи завжди можна три довільних раціональних числа a, b і c розглядати як члени деякої арифметичної прогресії?

14.228. Дано $n < m$, де n і m — натуральні числа. В якій послідовності розміщено на числовій прямій точки, що зображують числа 1, n/m, m/n? Яка з двох останніх точок розміщена ближче до точки, що зображує 1?

14.229. Чому при діленні на 3 чисел, що дорівнюють квадрату цілого числа, в остачі ніколи не залишається 2?

14.230. Довести, що при будь-якому натуральному n вираз $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ є натуральним числом.

14.231. Довести, що коли кожне з двох заданих чисел є сумою квадратів двох чисел, то і добуток цих чисел можна подати у вигляді суми квадратів двох чисел.

14.232*. Довести, що коли n — просте число, більше 3, то $\frac{n^2 - 1}{24}$ є цілим числом.

14.233. Довести, що вираз $n^7 - n$, де n — будь-яке ціле число, ділиться на 42.

14.234 Довести, що

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

14.235. Довести, що

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

14.236. Показати, що будь-яке непарне число можна подати у вигляді різниці квадратів двох цілих чисел.

14.237*. Використовуючи метод математичної індукції, довести справедливість нерівності $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ (n — натуральне число, $n \geqslant 2$ і $a > -1$).

14.238*. Довести, що $|\alpha_1 + \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|$. На підставі цієї нерівності довести методом математичної індукції справедливість нерівності

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — дійсні числа.

14.239. Як можна використати тотожність $\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ для доведення нерівності

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n} ?$$

14.240*. Довести, що для будь-якого $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2.$$

14.241. Виключити t з рівностей $x = 10^{\cos t}$, $y = 10^{\sin t}$.

14.242. Виключити φ з рівностей $u = 10^{\cos^2\varphi}$, $v = 10^{\sin^2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

14.243. Чому дорівнює сума чисел α і β, якщо $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$ є коренями рівняння $6x^2 - 5x + 1 = 0$?

14.244. Для чисел α і β таких, що $0 < \alpha + \beta < \pi/2$, значення $\operatorname{ctg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\beta$ є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$ (передбачається, що обидва корені додатні). Знайти $\alpha + \beta$.

14.245. Виразити $\operatorname{tg} 3\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

14.246. Нехай $\sin 10° = a$. Знайти $\sin 20°$ двома способами: за формулою синуса подвійного кута і за формулою синуса різниці кутів $30°$ і $10°$. Чому здобуто «різні» відповіді?

14.247. За допомогою формули, що пов'язує $\sin 3\alpha$ і $\sin\alpha$, довести, що $0{,}1 < \sin 10° < 0{,}2$.

14.248. Довести, що сума $\sin^n x + \cos^n x$ тотожно дорівнює 1 лише при $n = 2$.

14.249. Значення функції $y = \sin^k x + \cos^k x$ на відрізку $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ порівняти з одиницею для $k = 0, 1, 2, 3$.

14.250. Показати, що $\sin 495° - \sin 795° + \sin 1095° = 0$.

14.251. Виразити $\sin^2 6°$ через $\sin 12°$.

14.252. Чи існує кут, для якого косинус дорівнював би:

а) $a + \dfrac{1}{a}$ при $a \neq 0$; б) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$?

14.253. Чи існує такий кут, для якого числа $2 + \sqrt{3}$ і $2 - \sqrt{3}$ є відповідно його тангенсом і котангенсом?

14.254. Визначити періоди функцій:

а) $y = \cos x + \sin\dfrac{x}{3}$; б) $y = \sin x + \cos\dfrac{x}{3} + \sin\dfrac{x}{5}$.

14.255. Визначити період функції $y = 15\sin^2 12x + 12\sin^2 15x$.

14.256. Побудувати гострий кут, тангенс якого у два рази більший за його синус.

14.257. Знайти $\sin\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 2$ і $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

14.258. Довести, що $8\cos 20°\cos 40°\cos 80° = 1$.

14.259. При яких значеннях α і β виконується рівність $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$?

14.260. Знайти найбільше значення функції

$$y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)\sin\left(2x + \frac{2\pi}{15}\right).$$

14.261. Чому дорівнює найбільше значення функції $y = \sin(\sin x)$?

14.262. Знайти найменше і найбільше значення функції $y = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x$.

14.263. Що більше: $\operatorname{tg} 1$ чи $\operatorname{arctg} 1$?

14.264. Чому дорівнює дріб $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = m$?

14.265. Обчислити $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$, якщо $\sin\alpha = -1/3$, $\cos\beta = -1/2$.

14.266. Визначити знак добутку $\sin 2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5$.

14.267. Що менше: $\frac{\pi}{4}$ чи $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8}$?

14.268. Що менше: $\frac{\pi}{4}$ чи $\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{2}{3}$?

14.269. Знайти такі два числа m і M, щоб нерівність $m \leqslant \sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha \leqslant M$ була справедливою для будь-яких α і щоб різниця між M і m була найменшою.

14.270. Показати, що знаки $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ збігаються при будь-якому значенні $\alpha \neq k\pi$ (k — ціле).

14.271. Знайти такі значення a і b, при яких функція $y = (a-b)\sin^2 x + \frac{a+b}{2}\cos^2 x$ тотожно (для всіх значень x) дорівнює 2.

14.272. Чи можлива рівність $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt[3]{3}$?

14.273. Знак $\vee$ замінити на один із знаків $<, >, \leqslant, \geqslant$ так, щоб наступні співвідношення були справедливими: а) $\lg\sin\alpha \vee 0$; б) $\sin\alpha+\cos\alpha \vee 1{,}5$; в) $\sqrt[3]{\sin\alpha}+\sqrt[3]{\cos\alpha} \vee 1$; г) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha \vee 1{,}9$ (α — гострий кут).

14.274. Довести, що коли для трикутника виконується залежність $a/\cos A = b/\cos B$, то він рівнобедрений.

14.275. Довести, що коли відношення косинусів двох кутів трикутника дорівнює відношенню синусів тих самих кутів, то трикутник рівнобедрений.

14.276. Довести, що для будь-якого трикутника із сторонами a, b, c і кутами A, B, C, які лежать відповідно проти цих сторін, справедлива рівність

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0.$$

14.277. Довести, що коли у трикутнику $\frac{a-b}{a}=1-2\cos C$, то трикутник рівнобедрений.

14.278. Нехай A, B, C — кути трикутника, причому C — тупий кут. Довести, що $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B < 1$.

14.279. Довести, що у будь-якому трикутнику сума попарних добутків котангенсів усіх кутів дорівнює одиниці.

14.280. Довести, що для будь-якого трикутника із сторонами a, b, c і кутами A, B, C його площу S можна визначити за формулою

$$S=\frac{1}{2}(abc)^{2/3}\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}.$$

Побудувати графіки функцій (14.281—14.298):

14.281. $y=|x-2|(x+2)$. **14.282.** $y=\frac{x-1}{|x-1|}(x^2-4)$.

14.283. $y=\sqrt{10^{\lg x^2}}$. **14.284.** $y=x^{\log_x 2}$. **14.285.** $y=2^{\log_2 x}$.

14.286. $y=2^{\sqrt{-\sin^2 x}}$. **14.287.** $y=|x|^{1/2}$.

14.288. $y=5^{\frac{1}{3}\log_5(x-1)}$. **14.289.** $y=\frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{|x|}$.

14.290. а) $y = x^2 - 7x + 6$; б) $y = |x|^2 - 7|x| + 6$;
в) $y = |x^2 - 7x + 6|$; г) $y = ||x|^2 - 7|x| + 6|$.

14.291. $y = \frac{x}{|x|} \sin 2x$. 14.292. $y = \frac{2-x}{|x+1|}(x^2 - x - 2)$.

14.293. $y = \frac{x-1}{|x-3|}(x^2 - 9)$. 14.294. $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x-1}$.

14.295. $y = \log_2 \frac{x^2 - 4}{x-2}$. 14.296. $y = 0{,}5^{\frac{2x^2-6x}{x-3}}$.

14.297. $y = \log_3 \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}$. 14.298. $y = \left| \log_2 \frac{x-4}{x^2 - 16} \right|$.

14.299. Чи відрізняються один від одного графіки функцій $y = \lg x^2$ і $y = 2 \lg x$?

14.300. Побудувати на одному рисунку графіки функцій $y = \lg x^2$ і $y = \lg^2 x$.

14.301*. На вступних іспитах один із абітурієнтів запропонував таке розв'язання рівняння $\sin 2x + 7 \cos 2x + 7 = 0$: виразив $\sin 2x$ і $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$ і дістав рівняння

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{7(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 7 = 0,$$

звідки знайшов $\operatorname{tg} x = -7$ і $x = \pi k - \operatorname{arctg} 7$. Чи все тут гаразд?

14.302. Знайти $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$, якщо $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ і α не належить першій чверті.

14.303. Обчислити $\sin(\arcsin(-1/2) - \arccos(-\sqrt{3}/2) + \operatorname{arctg} \sqrt{3})$.

14.304. Обчислити $\sin(\arcsin(3/5) + \arccos(1/3))$.

14.305. Цифри тризначного числа записано у зворотному порядку. Показати, що різниця між здобутим і даним числами ділиться на 9.

14.306. Знайти добуток $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \ldots \sqrt[512]{a}$.

14.307. Довести, що система рівнянь

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5, \\ y^{-1} + z^{-1} = 3, \\ z^{-1} + x^{-1} = 8 \end{cases}$$

не має дійсних коренів.

14.308. Припускаючи, що $a \neq 10^n$ (a і n — цілі), довести, що $\lg a$ — число ірраціональне.

14.309. Чи можлива рівність $x = \log_2 x$?

14.310. Розв'язати рівняння $\log_y x + \log_x y = 2$.

14.311. Для яких кутів першої чверті виконується нерівність $\sin \alpha \geqslant \sin 2\alpha$?

14.312. Показати, що сума квадратів двох непарних чисел не може бути квадратом цілого числа.

14.313. Знайти значення x, при яких усі значення функції $y = x^2 + 5x + 6$ належать проміжку [6; 12].

14.314. Довести, що коли квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ з цілими коефіцієнтами p і q має раціональні корені, то ці корені — цілі числа.

14.315. Не розв'язуючи рівняння $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} = 10$, показати, що воно не має коренів.

14.316. Вказати область визначення і область значень функції $y = \log_5 \sin x$.

14.317. Вказати область визначення функції $y = \sqrt{\log_3 \cos x}$.

14.318. При яких значеннях x має зміст рівність

$$\lg \frac{x(x-4)}{1-x} = \lg x + \lg(x-4) - \lg(1-x)?$$

14.319*. При яких значеннях x функція $y = |x-1| + |x-3|$ набуває найменшого значення? Знайти це значення.

14.320. Відомо, що дріб $\frac{a+b}{a-b}$ скоротний (a, b — цілі числа, $b \neq 0$, $a \neq b$). Чи скоротний дріб $\frac{a}{b}$?

14.321. Чи має рівняння $x^3 + 2x - 3 = 0$ від'ємні корені?

14.322. Многочлен $a^4 + 2a^3 + 6a - 9$ розкласти на множники.

14.323. Розв'язати рівняння $x^{1/\lg x} = 10$.

14.324. Розв'язати рівняння $x^{\lg 2} \cdot 2^{-\lg x} = 1$.

14.325. Не використовуючи таблиці, обчислити $\lg \operatorname{tg} 22° + \lg \operatorname{tg} 68°$.

14.326. Довести, що сума трьох степенів числа 3 з натуральними, розміщеними підряд показниками, менший з яких не менше 2, ділиться без остачі на 117.

14.327. Розв'язати нерівність $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$.

14.328. Обчислити $\log_{a_1a_2\ldots a_k} x$, якщо $\log_{a_1} x = b_1$, $\log_{a_2} x = b_2$, ..., $\log_{a_k} x = b_k$; $x \neq 1$.

14.329*. Скільки існує цілих чисел, у яких характеристика їхніх десяткових логарифмів дорівнює одному і тому числу:
а) n $(n \in \mathbb{N})$; б) $-m$ $(m \in \mathbb{N})$?

14.330. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (x-a)(y-b) = c, \\ (x-a)/(y-b) = c. \end{cases}$$

14.331. Катети прямокутного трикутника дорівнюють $\log_4 9$ і $\log_3 16$. Знайти площу трикутника.

14.332. Знайти найбільше значення функції $y = \frac{x^2}{x^4+25}$.

14.333. Знайти всі значення x, для яких існує сума $\log_{1/2} x + (\log_{1/2} x)^2 + \ldots + (\log_{1/2} x)^n + \ldots$.

14.334. Довести, що $x = 1$ — єдиний корінь рівняння $x^3 + 3x - 4 = 0$.

14.335. Який знак має число $\log_{\pi/4} \operatorname{tg} 1$?

14.336. Чи має розв'язок рівняння $\sin x = 2 \sin 47° \cos 44°$?

14.337. Розв'язати рівняння $\frac{4}{\sqrt[5]{(11x-1)^2}} = \frac{\sqrt[5]{(11x-1)^2}}{4}$.

14.338. Показати, що координати лише однієї точки площини задовольняють рівняння $x^2 - 4x + y - 6\sqrt{y} + 13 = 0$, і знайти цю точку.

14.339. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y + z = 2, \\ -x + y + z = 4. \end{cases}$$

14.340. Показати, що рівняння $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ має лише один корінь. Який?

14.341. Многочлен $k^5 + k^4 - 2k^3 - 2k^2 + k + 1$ розкласти на множники.

14.342*. Розв'язати рівняння $\cos 2x = x^2 + 1$.

14.343. Знайти найбільше значення функції $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$.

14.344. Знайти найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$.

14.345*. Знайти суму

$$4 - \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - \frac{32}{27} + \dots + 4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\dots.$$

14.346. Розв'язати рівняння $\cos(\pi x^2) = -1/2$.

14.347. Розв'язати рівняння $\cos(\pi\sqrt{x}) = 1$.

14.348. При яких значеннях a рівняння $1 + \sin^2 ax = \cos x$ має єдиний розв'язок?

14.349. Число членів геометричної прогресії парне. Сума всіх її членів у три рази більша за суму членів, розміщених на непарних місцях. Визначити знаменник прогресії.

14.350. Знайти $1 + 2^x + 2^{2x} + \dots + 2^{kx}\dots$, якщо k — ціле натуральне, а $x < 0$.

14.351. Не перетворюючи рівняння $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 17$, показати, що воно не має коренів.

14.352. Нехай A, B, C — кути трикутника. Показати, що $\sin A \sin B - \cos C = \cos A \cos B$.

14.353. Дано рівняння $3 \sin 2x + \cos 2x = 4$. Чи має воно розв'язок?

14.354. При яких значеннях k корені рівняння $x^2 - (2k+1)x + k^2 = 0$ відносяться як $1:4$?

14.355. При яких значеннях a рівняння $x^2 - 2x - \log_3 a^2 = 0$ має корені?

14.356. Скласти біквадратне рівняння, якщо числа $\sqrt{3} - 1$ і $\sqrt{3} + 1$ є двома його коренями.

14.357. Розв'язати рівняння $3^{2+\log_9 25} = 5 \cdot 9^{2/x}$.

14.358. Вказати найменше значення функції

$$y = \log_2(x^2 - 4x + 20).$$

14.359. Чи може синус якого-небудь кута дорівнювати

а) $\lg a + \frac{1}{\lg a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;

б) $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^{-1}$; в) $\cos 40° + \cos 50°$?

14.360. Не використовуючи таблиці, знайти $c = \sqrt[15]{a^{-5}b^3}$, якщо $\lg a = -0{,}6498$, а $\lg b = 13,9170$.

14.361. Виразити $\sin 3\alpha$ через $\sin \alpha$ і за допомогою здобутої формули обчислити $\sin 54°$, коли відомо, що $\sin 18° = (\sqrt{5}-1)/4$.

14.362. Знайти x із умов $\operatorname{tg} \alpha = (3 + \sqrt{x})/2$, $\operatorname{tg} \beta = (3 - \sqrt{x})/2$, $\alpha + \beta = \pi/4$.

14.363. Розв'язати рівняння $x^2 \cdot 2^x + 8 = 2x^2 + 2^{x+2}$.

14.364. При яких значеннях m може виконуватися рівність $\cos \varphi = \frac{m^2 - 4m - 4}{m^2 + 1}$, якщо $0 < \varphi < \pi/3$?

14.365. При яких значеннях a виконується рівність $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2a^2 + 2a}{a^2 - 6a + 9}$, якщо $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$?

14.366. Показати, що коли $x = a\cos\alpha\sin\beta$, $y = a\sin\alpha\sin\beta$, $z = a\cos\beta$, то $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

14.367. Знайти добуток коренів рівняння $z^{\log_5 3z} = 25\sqrt[3]{z^4}$.

14.368. При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a - 2 = 0$ є найменшою?

14.369. Скласти рівняння параболи з віссю, паралельною осі ординат, якщо ця парабола проходить через точки $(-2; -3)$, $(-1; 2)$ і $(1; 0)$. Показати, що вона перетинає вісь абсцис з різних боків від осі ординат.

14.370. В яких точках графік функції $y = \sqrt{-x+9} - \sqrt{-x+4}$ перетинається з прямою $y = 1$?

14.371. Знайти цілі значення x, що задовольняють нерівність $0{,}000729^3 < 0{,}3^{x^2-5x+4} < 11\frac{1}{9}$.

14.372. Знайти невід'ємні розв'язки нерівності

$$\sqrt[15]{32^{3x^2-8x}} < \left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{7,5} 0,5}.$$

Для яких значень x виконуються рівності (14.373—14.376):

14.373. $|x^2 - 8x + 12| = x^2 - 8x + 12$.

14.374. $\left|\frac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 10x + 24}\right| = \frac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 10x + 24}$.

14.375. $\left|\frac{x^3}{x^2 - 1}\right| = \frac{x^3}{1 - x^2}$.

14.376. $|\lg^2(1 - 9x) + \lg(1 - 9x) - 2| = 2 - \lg(1 - 9x) - \lg^2(1 - 9x)$.

14.377. Знайти натуральне значення k із умови

$$2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \ldots 2^{2k} = 0{,}25^{-28}.$$

14.378. Розв'язати рівняння $x^2 + 2x - 3\,|x + 1| + 3 = 0$.

14.379. Розв'язати рівняння: а) $|x + 1| + |x - 1| = 2x^3$; б) $|x^2 - 3|x| + 1| = 1$.

Розв'язати нерівності (**14.380—14.383**):

14.380. $|x + 1| > 2\,|x + 2|$.

14.381. $\log_2 (x + 1) > \log_{x+1} 16$.

14.382. $\log_{0,5} (2^x - 1) > x - 1$, **14.383.** $\log_{x-3} (x - 1) < 2$.

14.384. Розв'язати систему нерівностей $\frac{1}{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{|\sin x|} < 1$.

14.385. Показати, що система рівнянь

$$\begin{cases} 2^{\log_2 x} - 3^{\log_3 y} = 1, \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

не має розв'язків.

14.386. Знайти цілі значення x, які задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} (\log_3 x)^{\log_9 x} \leqslant 1, \\ x > 1. \end{cases}$$

14.387. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3\,|y| = 1, \\ |x| + 2y = 4. \end{cases}$$

14.388. Довести, що функція $f(x) = \lg (x + \sqrt{1 + x^2})$ є непарною.

14.389. При яких значеннях x функція $y = \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{ctg}^2 x + 1$ набуває найменшого значення? Знайти це значення.

14.390. Знайти найбільше значення функції $y = \sin x + \cos x$. При яких значеннях x воно досягається?

14.391. Показати, що графік функції $y = \frac{\lg 5 + \lg (x^2 + 1)}{\lg (x - 2)} - 2$ в жодній точці не перетинає вісь Ox.

14.392. На графіку функції $y = 0{,}8\,|x| \cdot \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ знайти точку, ордината якої у два рази більша за її абсцису (графік можна не будувати).

14.393. Довести, що графіки функцій $y = 4^x - 3 \cdot 2^x$ і $y = -(5 \times 2^{-x} + 1)$ не мають спільних точок.

14.394. Знайти точки перетину параболи $y = x^2 + 1$ і кривої $y = |3x^2 - 5|$.

14.395. Знайти точки перетину кривої $y = 12x^2 - 5\,|x| - 36$ і параболи $y = 6x^2 - 5x - 12$.

14.396. Для яких значень x графік функції $y = x + 3 + \sqrt{(x + 1)(x + 7)}$ розміщується нижче осі абсцис?

14.397. Визначити, при якому значенні k графік функції $y = \lg kx - 2\lg (x + 1)$ має лише одну спільну точку з віссю абсцис.

14.398. Вказати всі точки на осі Ox, в яких функція $y = \sqrt{3 \cdot 81^{1/x} - 10 \cdot 9^{1/x} + 3}$ не визначена.

14.399. При яких значеннях x графік функції $y = 0{,}7^{\lg(x^2 - 8x + 8)}$ розміщується не нижче прямої $y = 1$?

14.400. Знайти значення x, при яких графік функції $y = \log_{1/3}(x^2 - 8x) + 2$ розміщується не нижче осі абсцис.

14.401. В яких точках графік функції

$$y = \log_3 (\sqrt{x^2 + 21} - \sqrt{x^2 + 12})$$

перетинае вісь Ox?

14.402. Знайти точку перетину графіка функції $y = 3{,}6^{1+\log_{3,6}(10+x)\log_6(5-x)}$ з віссю ординат.

14.403. Знайти точку перетину графіків функцій $y = \log_2 (x + 14)$ і $y = 6 - \log_2 (x + 2)$.

14.404. Знайти абсцису тієї точки графіка $y = \log_2 \log_6 (2^{\sqrt{x}+1} + 4)$, ордината якої дорівнює одиниці.

14.405. Знайти точки перетину графіка функції $f(x) = x^{\lg x} - 100000\,x^4$ з віссю абсцис.

14.406. Знайти цілі значення x, які належать області визначення функції

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\lg(-3x^2 + 10x - 3)}.$$

Знайти області визначення функції (14.407—14.410):

14.407. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^4 - 9x^2}}$.

14.408. $f(x) = \sqrt{\log_x 2 - \log_2 x}$.

14.409. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{1 - 3x + 2x^2}}$.

14.410. $f(x) = \sqrt{1 - \lg(x - 1)} + \sqrt{\dfrac{4 - x}{x + 2}}$.

Глава 15

ПОЧАТКИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Таблиця похідних та первісних деяких функцій
(a, b — сталі)

Первісна $F(x)$	Функція $f(x)$	Похідна $f'(x)$
ax	a	0
$\dfrac{x^{p+1}}{p+1}$, $p \neq -1$	x^p, $p \in R$	px^{p-1}
$\dfrac{a^x}{\ln a}$	a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x	e^x

Первісна $F(x)$	Функція $f(x)$	Похідна $f'(x)$
—	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
—	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
—	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
—	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{a} F(u) = \frac{1}{a} F(ax + b)$, $a \neq 0$	$f(u) = f(ax + b)$	$af'(u) = af'(ax + b)$

Основні формули

1⁰. Правила диференціювання (u, v — функції; c — стала):

$$(cu)' = cu'; \quad (15.1) \qquad (u + v)' = u' + v'; \quad (15.2)$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad (15.3) \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad (15.4)$$

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))\, f'(x), \quad (15.5)$$

де $g(f(x))$ — складна функція.

2⁰. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad (15.6)$$

де $(x_0; y_0)$ — точка дотику.

3⁰. Правила знаходження первісних:

а) якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F + G$ є первісною для $f + g$;

б) якщо F — первісна для f, а k — стала, то kF є первісною для kf;

в) якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$, а $k \neq 0$ і b — сталі, то $\frac{1}{k} F(kx + b)$ є первісною для функції $f(kx + b)$.

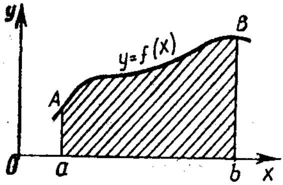


Рис. 15.1

4°. Формула Ньютона — Лейбніца має вигляд

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (15.7)$$

5°. Площа криволінійної трапеції $aABb$ (рис. 15.1), обмежена віссю Ox, прямими $x = a$ і $x = b$ та графіком невід'ємної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$, визначається за формулою

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (15.8)$$

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{2x - 4}$.

△ Функція $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{2x - 4}$ у точці $x = 2$ не визначена. Розклавши чисельник на множники за формулою (2.14), запишемо цю функцію у вигляді

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{2(x-2)}.$$

В області визначення функції $f(x)$ вираз $x - 2 \neq 0$, тому дріб можна скоротити на $x - 2$. Тоді

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{2} = f(2) = 6. \ \blacktriangle$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4}$.

△ Функція $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4}$ у точці $x = 4$ не визначена. Помноживши чисельник і знаменник на $\sqrt{x^2 - 7} + 3 \neq 0$ та використавши формулу (2.8), перетворимо дріб:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 7 - 9}{(x-4)(\sqrt{x^2 - 7} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2 - 7} + 3)} = \lim_{x \to 4} \frac{x+4}{\sqrt{x^2 - 7} + 3} =$$

$$= f(4) = \frac{4}{3}. \ \blacktriangle$$

Приклад 3. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$ у точці його перетину з віссю ординат.

△ Згідно з формулою (15.6), рівняння дотичної запишемо у вигляді $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, де $(x_0; y_0)$ — точка дотику. Абсциса x_0 точки перетину графіка з віссю Oy дорівнює 0, а ордината $y_0 = f(0) = -2$. Отже, $(0; -2)$ — точка дотику. Далі, використовуючи формулу (15,4) і таблицю похідних, дістаємо

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2+4)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2},$$

звідки $f'(0) = -1$. Отже, шукане рівняння дотичної має вигляд $y-(-2) = -1\cdot(x-0)$, або $y = -x-2$. ▲

Приклад 4. Знайти проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2}$.

△ Область визначення функції — вся числова вісь, крім точки $x = 0$. Використовуючи формулу (15.4) і таблицю похідних, знаходимо

$$f'(x) = \frac{2(x-2)x^2 - (x-2)^2 2x}{x^4} = \frac{4(x-2)}{x^3};$$

$f'(x) = 0$ лише при $x = 2$. Складемо таблицю:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$

Отже, $x = 2$ — точка мінімуму; функція зростає на $(-\infty;\ 0)$ і на $(2;\ \infty)$, спадає на $(0;\ 2)$. ▲

Приклад 5. Знайти найменше і найбільше значення функції $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ на проміжку $[0;\ 3\pi/2]$.

△ Спочатку знайдемо значення $f(x)$ на кінцях даного проміжку: $f(0) = 0$, $f(3\pi/2) = -2$, а потім — критичні точки, що належать цьому проміжку. Маємо $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$; $f'(x) = 0$, якщо $\cos x + \cos 2x = 0$, звідки $2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2} = 0$. Із рівняння $\cos\frac{3}{2}x = 0$ знаходимо $\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, тобто $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$, а з рівняння $\cos\frac{x}{2} = 0$ дістанемо $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, тобто $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Другий розв'язок є частиною першого. Отже, розв'язок рівняння має вигляд $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Проміжку $[0;\ 3\pi/2]$ належать точки $x_1 = \pi/3$ і $x_2 = \pi$. Знаходимо значення $f(x)$ у критичних точках: $f(\pi/3) = 3\sqrt{3}/2$, $f(\pi) = 0$. Порівнюючи між собою числа $f(0)$, $f(3\pi/2)$, $f(\pi/3)$, $f(\pi)$, робимо висновок, що $\min\limits_{[0;3\pi/2]} f(x) = -2$, $\max\limits_{[0;3\pi/2]} f(x) = 3\sqrt{3}/2$. ▲

Приклад 6. В арифметичній прогресії шостий член дорівнює 3, а різниця прогресії більше 0,5. При якому значенні різниці цієї прогресії добуток першого, четвертого і п'ятого її членів є найбільшим?

△За умовою $a_6 = a_1 + 5d = 3$, звідки $a_1 = 3 - 5d$. Позначимо добуток $a_1a_4a_5$ через y. Тоді $y = a_1(a_1+3d)(a_1+4d) = -10d^3 + 51d^2 - 72d + 27$. Для відшукання значення d, при якому функція

y набуває найбільшого значення, спочатку знайдемо похідну $y' = -30d^2 + 102d - 72 = -6(5d^2 - 17d + 12)$, а потім, розв'язавши рівняння $5d^2 - 17d + 12 = 0$, знайдемо його корені $d_1 = 1$, $d_2 = 2{,}4$. Оскільки за умовою $d > 0{,}5$, то дослідимо поведінку функції y на інтервалі $(0{,}5; \infty)$. Складемо таблицю:

d	$(0{,}5;\ 1)$	1	$(1;\ 2{,}4)$	2,4	$(2{,}4;\ \infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

На інтервалі $(0{,}5; \infty)$ є лише одна точка максимуму функції y, а саме $d = 2{,}4$. Це означає, що на інтервалі $(0{,}5; \infty)$ функція y досягає найбільшого значення при $d = 2{,}4$. ▲

Приклад 7. Площа поверхні сфери дорівнює 27π. Знайти висоту циліндра найбільшого об'єму, вписаного в цю сферу.

△ Нехай циліндр утворено в результаті обертання прямокутника $ABCD$ навколо діаметра MN (рис. 15.2). Поклавши $AD = x$, запишемо об'єм V циліндра як функцію від x. Маємо $S_{\text{сфери}} = 4\pi OB^2$, тобто $4\pi OB^2 = 27\pi$, звідки $OB^2 = 27/4$. Далі, із трикутника AOB дістаємо $AB^2 = OB^2 - OA^2$, тобто $AB^2 = \frac{27}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{27 - x^2}{4}$. Згідно з формулою (11.17), об'єм циліндра

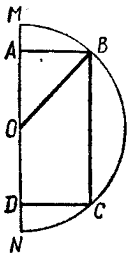


Рис. 15.2

$$V(x) = \pi AB^2 \cdot AD = \pi \frac{(27 - x^2)}{4} x = \frac{\pi}{4}(27x - x^3).$$

За змістом задачі $0 < x < 2OB$, тобто $0 < x < 3\sqrt{3}$. Маємо $V'(x) = \frac{\pi}{4}(27 - 3x^2) = \frac{3}{4}\pi(9 - x^2)$; $V'(x) = 0$, якщо $9 - x^2 = 0$. Звідси знаходимо $x = 3$ (оскільки $x > 0$). Якщо $0 < x < 3$, то $V'(x) > 0$, а якщо $3 < x < 3\sqrt{3}$, то $V'(x) < 0$. Отже, $x = 3$ — точка максимуму. Оскільки функція $V(x)$ визначена для будь-якого x і на всій числовій прямій має одну критичну точку, робимо висновок, що при $x = 3$ функція $V(x)$ досягає найбільшого значення. ▲

Приклад 8. Для функції $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$ знайти первісну $F(x)$ за умови, що графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ перетинаються у точці, що лежить на осі Oy.

△ Оскільки для функції $\sin x$ однією з первісних є $-\cos x$, то, згідно з правилами п. 3°, первісною функції $2\sin 5x$ є $-\frac{2}{5}\cos 5x$. Первісною функції $\sqrt{x} + \frac{3}{5}$ є $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x$. Тоді для $f(x)$ первісною функцією є $F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + C$ при довільному значенні сталої C. Необхідно знайти таке значення C, при якому графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$ перетинаються у точці, що лежить на осі Oy. Це означає, що при $x = 0$ має виконуватися рівність $F(0) = f(0)$. Але $F(0) = -\frac{2}{5} + C$, а $f(0) = \frac{3}{5}$. Отже, $-\frac{2}{5} + C = \frac{3}{5}$, звідки $C = 1$. Шукана первісна має вигляд $F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + 1$. ▲

Приклад 9. Знайти площу замкненої фігури, обмеженої графіками функцій $y = -x^3$, $y = \frac{8}{3}\sqrt{x}$ і $y = 8$.

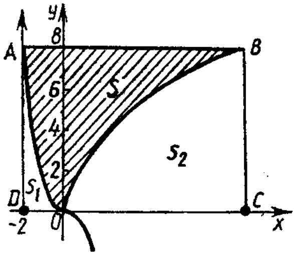


Рис. 15.3

△ Графіки заданих функцій зображено на рис. 15.3. Треба знайти площу S фігури OAB (на рисунку вона заштрихована).

Очевидно, що шукана площа дорівнює різниці між площею прямокутника $ABCD$ та площами S_1 і S_2 двох криволінійних трикутників OAD і OBC. Знайдемо координати точок A і B. Розв'язавши системи рівнянь

$$\begin{cases} y = -x^3, \\ y = 8 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y = \frac{8}{3}\sqrt{x}, \\ y = 8, \end{cases}$$

дістанемо $A(-2; 8)$ і $B(9; 8)$. Далі маємо $C(9; 0)$, $D(-2; 0)$, $CD = 11$, $BC = 8$, звідки $S_{ABCD} = 11 \cdot 8 = 88$. Площі криволінійних трикутників OAD і OBC знаходимо за допомогою інтеграла за формулою (15.8):

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (-x^3)\,dx = -\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{0} = 4, \quad S_2 = \frac{8}{3}\int_0^9 \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \left.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right|_0^9 = 48.$$

Отже, $S = S_{ABCD} - S_1 - S_2 = 88 - 4 - 48 = 36$ кв. од. ▲

Обчислити (15.001—15.010):

15.001. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$. **15.002.** $\lim\limits_{x\to0,5} \frac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$.

15.003. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$.

15.004. $\lim\limits_{x\to2/5} \frac{5x^3-2x^2+5x-2}{5x^4-2x^3-5x^2+2x}$.

15.005. $\lim\limits_{x\to4} \frac{x+\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}$.

15.006. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2+2x^3}$.

15.007. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3}$.

15.008. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$.

15.009. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$.

15.010. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$.

Обчислити границі та довести або спростувати дані твердження (**15.011—15.018**):

15.011. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{3x-9} = 5 + \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{8-x^3}$.

15.012. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1} > \lim\limits_{x\to -0,5} \dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}$.

15.013. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} < \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}$.

15.014. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} < \cos\dfrac{\pi}{10}$.

15.015. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6} > \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}$.

15.016. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-1} \cdot \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2} < 0$.

15.017. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{9x^3+9x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}$.

15.018. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x(x^2-4)} - \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-2^4} = 1$.

Знайти похідні функцій (**15.019—15.033**):

15.019. $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3}$.

15.020. а) $y = (x^4 - x^2 + 1)^3$; б) $y = \dfrac{x^3-3x^2+1}{x-1}$.

15.021. а) $y = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$; б) $y = \lg\dfrac{10-x}{x+2}$.

15.022. а) $y = \sqrt[3]{4x^3-7x^2+1}$; б) $y = (\sin^2 x + 1)\, e^x$.

15.023. а) $y = \sqrt[3]{x^2-1}\cdot(x^4-1)$; б) $y = \ln\sqrt{x^2-1}$.

15.024. а) $y = e^{x^3-5x^2}$; б) $y = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$.

15.025. а) $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x$.

15.026. а) $y = x^2\cos\frac{1}{x}$; б) $y = x + \sin x\cos x$.

15.027. а) $y = \cos^2 3x$; б) $y = \sin^2\frac{x}{2}$.

15.028. а) $y = \operatorname{tg}\sin x$; б) $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

15.029. $y = \frac{2}{3}\left(x^3 - \sqrt{(x^2-1)^3}\right) - x$.

15.030. а) $y = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$; б) $y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3}$.

15.031. а) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$; б) $y = \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$.

15.032. а) $y = (x^3+1)\cos 2x$; б) $y = \sin 2x\operatorname{tg} x$.

15.033. а) $y = x\sqrt[3]{3x^2+1}$; б) $y = \sin\frac{\pi}{10} - \ln\frac{3}{x}$.

15.034. Розв'язати рівняння $f'(x) - \frac{2}{3}\cdot f(x) = 0$, якщо $f(x) = x^3\ln x$.

15.035. Розв'язати нерівність $f'(x) < g'(x)$, якщо $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$, $g(x) = 5x + \frac{1}{x}$.

15.036. Розв'язати нерівність $f'(x) + \varphi'(x) \leqslant 0$, якщо $f(x) = 2x^3 + 12x^2$, $\varphi(x) = 9x^2 + 72x$.

15.037. Розв'язати рівняння $1 + 5f(x) + 6f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Обчислити значення похідних заданих функцій за вказаними значеннями незалежної змінної (15.038—15.059):

15.038. $f(x) = \sqrt{x^2+3} + \frac{2x}{x+1}$; $f'(1) = ?$

15.039. $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$; $f'(2) = ?$

15.040. $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$; $f'(3) = ?$

15.041. $f(x) = x - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x^3}$; $f'(-1) = ?$

15.042. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{x+1}$; $f'(1)=?$

15.043. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$; $f'(0)=?$

15.044. $f(x)=\sin 4x\cos 4x$; $f'(\pi/3)=?$

15.045. $f(x)=\sin^2 x^2$; $f'(0)=?$

15.046. $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$; $f'(\pi/2)=?$

15.047. $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$; $f'(\pi/12)=?$

15.048. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$; $f'(2)=?$

15.049. $f(x)=5(x+1)^2\sqrt[5]{x-1}$; $f'(2)=?$

15.050. $f(x)=\sqrt{x^2-1+\sqrt[3]{x}}$; $f'(1)=?$

15.051. $f(x)=\frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{tg}\,2x$; $f'(\pi/2)=?$

15.052. $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$; $f'(0)=?$

15.053. $f(x)=\frac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{2x}}}$; $f'(0)=?$

15.054. $f(x)=\sin^3\frac{x}{2}$; $f'(\pi/2)=?$

15.055. $f(x)=2^{x-2x^2-1}$; $f'(0)=?$

15.056. $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$; $f'(0)=?$

15.057. $f(x)=(x^3-x)\cos^2 x$; $f'(0)=?$

15.058. $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$; $f'(\pi)=?$

15.059. $f(x)=\frac{x-2}{\sin^2 x}$; $f'(\pi/2)=?$

15.060. Знайти другу похідну функції $f(x)$ та обчислити її значення при вказаному значенні x:

а) $f(x)=x^2\ln x+\cos 2x$; $f''(1)=?$ $f''(\pi)=?$

б) $f(x)=\sin\frac{x}{3}+x\ln x^2$; $f''(3)=f''(\pi/2)=?$

15.061. З'ясувати знак похідної функції $y=\sqrt{4x+9}\,(x^2-16)$ у точці $x=0$.

15.062. Дано функцію $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$. Як змінюється її похідна із зростанням x від 1/16 до 81?

15.063. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x(\ln x - 1)$ у точці $x_0 = e$.

15.064. Дано функцію $y = x^4 - 6x^2 + 1$. Знайти найбільше та найменше значення її похідної на проміжку $[-1; 3]$.

15.065. Дано функцію $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$. Знайти область значень $f'(x)$.

15.066. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = \operatorname{tg} 3x$ у точці $x_0 = \pi/3$.

15.067. Довести, що функція $f(x) = (x + 3)/(x - 5)$ спадає на всіх інтервалах області визначення.

15.068. Дано функцію $f(x) = x \ln x - x$. Як змінюється її дотична із зростанням x від 1 до 9?

15.069. Знайти область визначення функції $f(x) = \sqrt{4 + 3x - x^2}$ та область визначення її похідної.

15.070. Дано: $f(x) = 0{,}5\sqrt{x^3 + 1}$ і $g(x) = xe^{-x}$. Показати, що $f'(2)$ є коренем рівняння $g'(x) = 0$.

15.071. Функцію задано формулою $f(x) = e^{ax^2+bx+1}$. Знайти значення сталих a і b, якщо $f(1) = f(0) = f'(0)$.

15.072. Під яким кутом до осі Ox нахилена дотична до графіка функції $g(x) = x^2 \ln x$ у точці $x_0 = 1$?

15.073. Функцію задано формулою $f(x) = 5\sin x + 3\cos x$. Розв'язати рівняння $f'(0) = f'(x)$.

15.074. Функцію задано формулою $f(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1)$. Розв'язати рівняння $f'(x) = 2f(x)$.

15.075*. Чи можна почленно диференціювати нерівність?

15.076. Дано функцію $f(x) = |x|$. Записати вираз первісної функції.

15.077. Знайти диференціальне рівняння гармонічного коливання: а) $y = -4\sin(2x + 3)$; б) $y = 3{,}8\cos(0{,}6x - 10)$.

15.078. Знайти відмінний від нуля розв'язок диференціального рівняння: а) $y' = -36y$; б) $y'' = -36y$.

15.079. Побудувати окремо графіки функцій $f(x) = x$, $\varphi(x) = |x|$ і $g(x) = x|x|$ в околі точки $x = 0$. Не зважаючи на те, що $f(x)$ диференційовна при $x = 0$, а $\varphi(x)$ ні, їхній добуток $g(x) = x|x|$ має похідну у точці $x = 0$. Обгрунтувати справедливість цих тверджень та знайти $g'(0)$.

15.080. Довести, що функція $f(x) = x + \sin x$ не спадає у кожній точці осі Ox.

15.081*. Показати, що при будь-яких значеннях сталих p і q ($p \neq q$) функція, задана формулою

$$f(x) = \begin{cases} p\cos x + q\sin x & \text{при } x \geqslant 0, \\ px + q + 1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

не диференційовна у точці $x = 0$.

15.082. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = \sqrt[3]{t^2}$. Показати, що її прискорення обернено пропорційне квадрату пройденого шляху.

15.083. Дано функцію $f(x) = 0{,}5(x^2 - \cos x)$. Використовуючи властивість неперервності, з'ясувати, чи мають рівняння $f(x) = 7{,}8$ та $f'(x) = 7{,}8$ хоча б по одному кореню на проміжку $[2\pi; 3\pi]$.

15.084. Знайти всі значення сталої a, при яких похідна функції, заданої формулою $y = e^{ax^3+3x^2+x}$, набуває лише додатних значень на всій області визначення даної функції.

15.085*. Знайти суму $x + x^2 + \ldots + x^n$, а потім суму $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

15.086. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = (x^3 + 1)/3$ у точці її перетину з віссю абсцис.

15.087. На графіку функції $y = x(x-4)^3$ знайти точки, в яких дотичні паралельні осі абсцис.

15.088. Показати, що дотичні, проведені до графіка функції $y = (x-4)/(x-2)$ у точках його перетину з осями координат, паралельні між собою.

15.089. Визначити, під яким кутом синусоїда $y = (1/\sqrt{3}) \sin 3x$ перетинає вісь абсцис на початку координат.

15.090. Показати, що на графіку функції $y = x^3 + x^2 + x + 1$ немає точок, в яких дотичні паралельні осі абсцис.

15.091. В яких точках дотичні до кривої $y = (1/3)x^3 - x^2 - x + 1$ паралельні прямій $y = 2x - 1$?

15.092. В яких точках дотична до графіка функції $f(x) = (1/3)x^3 - (5/2)x^2 + 7x - 4$ утворює з віссю Ox кут 45°?

15.093. Під яким кутом до осі Ox нахилено дотичну, яка проведена до кривої $y = 2x^3 - x$ у точці її перетину з віссю Oy?

15.094. Під яким кутом до осі Ox нахилено дотичну, яка проведена до кривої $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ у точці M_0 (2; —4)?

15.095. Відомо, що пряма $y = -(3/4)x - 3/32$ є дотичною до лінії, заданої рівнянням $y = 0{,}5x^4 - x$. Знайти координати точки дотику.

15.096. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2e^{-x}$ у точці $x = 1$.

15.097. Скласти рівняння дотичних до кривих $y = 2x^2 - 5$ та $y = x^2 - 3x + 5$, які проходять через точку перетину цих кривих.

15.098. Знайти кут, який утворює з віссю ординат дотична до кривої $y = (2/3)x^5 - (1/9)x^3$, проведена у точці з абсцисою $x = 1$.

15.099*. Скласти рівняння дотичних до кривої $y = x^2 - 4x + 3$, які проходять через точку M (2; —5). Зробити рисунок.

15.100. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = \ln(2e - x)$ у точці $x = e$.

15.101. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ у точці $x = -2$.

15.102. В яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ дорівнює 3?

15.103. В яких точках дотична до графіка функції $y = (x+2)/(x-2)$ утворює з віссю Ox кут 135°?

15.104. Дано функцію $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$. Треба: а) скласти рівняння дотичної до графіка даної функції у точці з абсцисою $x = \pi/6$ (остаточні числові значення заокруглювати до другого десяткового знака); б) встановити, в яких точках проміжку $0 \leqslant x \leqslant \pi$ дотична до графіка даної функції утворює з віссю Ox кут 60°.

15.105. Дано функцію $f(x) = \frac{2}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$. Треба знайти: а) кут, утворений з віссю Ox дотичною до графіка даної функції у точці з абсцисою $x = \pi/3$; б) точки мінімуму на проміжку $[0; \pi]$.

15.106*. У точці перетину графіків функцій $y = 6/\sqrt{x}$ і $y = 12x^{-1/2} - 2x^{1/2}$ проведено дотичну до кожного графіка. Знайти різницю кутів, утворених цими дотичними з додатним напрямом осі Ox.

15.107. У точці M (1; 8) до кривої $y = \sqrt{(5 - x^{2/3})^3}$ проведено дотичну. Знайти довжину її відрізка, який міститься між осями координат.

15.108. Знайти площу трикутника, утвореного бісектрисами координатних кутів і дотичною до кривої $y = \sqrt{x^2 - 5}$ у точці M (3; 2).

15.109*. До гіперболи $y = 4/x$ проведено дотичні: одну — у точці M (2; 2), а інші — паралельно прямій $y = -4x$. Знайти площі трикутників, утворених кожною з цих дотичних з осями координат.

15.110*. Відрізок довільної дотичної до кривої $y = x^2$, що міститься між точкою дотику і віссю Ox, спроектовано на вісь Ox. Показати, що ця проекція вдвічі більша за проекцію аналогічного відрізка дотичної до кривої $y = x^4$ з тією самою абсцисою точки дотику.

15.111*. У довільній точці кривої $y = \sqrt{2x - x^2}$ проведено дотичну. Показати, що довжина відрізка дотичної від точки дотику до перетину з віссю Oy дорівнює ординаті точки перетину.

У задачах **15.112—15.115** вказано закон прямолінійного руху $s(t)$; s і t вимірюються відповідно у метрах та секундах.

15.112. $s(t) = \dfrac{4t + 3}{t + 4}$. Знайти швидкість в момент $t = 9$.

15.113. $s(t) = 2t^3 - 3t + 4$. Знайти швидкість та прискорення в момент $t = 2$.

15.114. $s(t) = 0{,}5t^4 - 5t^3 + 12t^2 - 1$. В які моменти часу прискорення руху тіла дорівнює нулю?

15.115. $s(t) = 8 - 2t + 24t^2 - 0{,}3t^5$. В який момент часу тіло має найбільшу швидкість? Знайти цю швидкість.

15.116. Рух двох матеріальних точок вздовж прямої задано рівняннями $s_1 = 4t^2 + 2$, $s_2 = 3t^2 + 4t - 1$ (s_1, s_2 — в метрах, t — в секундах). Знайти швидкість руху точок у ті моменти, коли відстані, які вони пройшли, однакові.

15.117. Прямолінійні рухи двох матеріальних точок задано рівняннями $s_1 = 2t^3 - 5t^2 - 3t$, $s_2 = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (s_1, s_2 — в метрах, t — в секундах). Знайти прискорення точок у той момент, коли їхні швидкості рівні між собою.

15.118. Дві точки рухаються по осі Ox. Координата x_1 першої точки визначається за формулою $x_1 = 3t^2 - 5$, координата x_2 другої точки — за формулою $x_2 = 3t^2 - t + 1$ (x_1, x_2 — в метрах, t — в секундах). Знайти швидкості руху точок у той момент, коли координати точок однакові.

15.119. Тіло, випущене вертикально вгору, рухається за законом $h(t) = 8t - 5t^2$ (h — в метрах, t — в секундах). Знайти швидкість тіла в момент зіткнення з землею (прискорення g вважати рівним 10 м/с²).

15.120. Точка з масою m_0 рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2/(2t - 1)$. Довести, що сила, яка діє на тіло, пропорційна кубу пройденого шляху.

15.121. Тіло з масою m_0 рухається прямолінійно за законом $s(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ (α, β, γ — сталі). Довести, що сила, яка діє на тіло, стала.

15.122. Радіус кулі r рівномірно зростає із швидкістю 2 см/с. З якими швидкостями зростають поверхня і об'єм кулі? Знайти ці швидкості в момент, коли r досягає 10 см (при $t = 0$ величина $r = 0$).

15.123. Кут α, на який повернеться колесо через проміжок часу t, дорівнює $\alpha = 3t^2 - 12t + 36$ (α — в радіанах, t — в секундах). Знайти кутову швидкість ω в момент $t = 4$ і визначити, в який момент часу колесо зупиниться.

15.124. У тонкому неоднорідному стержні 25 см завдовжки маса (у грамах) розподіляється за законом $g(l) = 4l^2 - 2l$, де l — відстань

у сантиметрах від початку стержня до будь-якої його точки. Знайти густину стержня на відстані 4 см від початку стержня і середню густину стержня.

15.125. Функцію задано формулою $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)}$. Показати, що ця функція зростає у будь-якій точці, що належить області її визначення.

15.126. Функцію задано формулою $y = \sqrt{ax^3 - 6x^2 + 3x}$. Знайти всі значення сталої a, при яких дана функція визначена і зростає при всіх $x > 0$.

Знайти точки екстремуму функцій (15.127—15.130):

15.127. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. **15.128.** $y = \dfrac{\ln x + 2}{x}$.

15.129. $y = x^2e^{-x}$. **15.130.** $y = x^3e^{-x}$.

15.131. Знайти екстремум функції $y = x^2 - \ln(1 + 2x)$.

15.132. Знайти точки екстремуму функції $y = e^{-x} - e^{-2x}$ та кут між віссю Ox і дотичною до графіка даної функції у точці з абсцисою $x = 0$.

15.133. Знайти точки екстремуму функції $y = e^{-x}\sin x$ і кут між віссю Ox та дотичною до графіка даної функції у точці з абсцисою $x = 0$.

15.134. Знайти точки екстремуму функції $y = x - \ln(1 + x)$ і точку графіка даної функції, в якій дотична до графіка паралельна прямій, що проходить через точки A (2; 3) та B (—1; 4).

15.135. Знайти екстремуми функції $y = x^3 + \dfrac{3}{x}$ і скласти рівняння дотичної до графіка у точці з абсцисою $x = -2$.

15.136. Дано функцію $y = -4x^4 - 5x^2 + 9$. Знайти її екстремуми та ординати точок перетину з графіком функції $y = -9x^2 + 9$.

15.137. Показати, що функція $y = x^3 + 4x$ зростає на всій числовій прямій.

15.138. При якому значенні p функція $f(x) = \cos x - px + q$ спадає на всій числовій прямій?

15.139. Довести, що функція $y = 2x + \sin x$ зростає на всій числовій прямій.

15.140. Довести, що функція $y = x + \dfrac{1}{1 + x^2}$ зростає на всій числовій прямій.

Знайти проміжки зростання та спадання функцій (15.141—15.145):

15.141. $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$. **15.142.** $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

15.143. $f(x) = -x(x - 3)^2$.

15.144. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$.

15.145. $f(x) = (2^x - 1)(2^x - 4)^2$.

Знайти найменше і найбільше значення функцій на заданих проміжках (15.146—15.164):

15.146. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$; $[-2; 2]$.

15.147. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$; $[-2; 1]$.

15.148. $y = x^5 - x^3 + x + 2$; $[-1; 1]$.

15.149. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$; $[-5; -1]$.

15.150. $y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$; $[1; 6]$.

15.151*. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$; $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

15.152. $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} \sin x$; $[0; \pi]$.

15.153. $y(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 16}}$; а) $[-3; 3]$; б) $[2\sqrt{5}; 8]$.

15.154. $f(x) = x + \cos^2 x$; $[0; \pi/2]$.
15.155. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$; $[\pi/6; \pi/3]$.
15.156. $f(x) = 0{,}5 \cos 2x + \sin x$; $[0; \pi/2]$.

15.157. $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x$,
$[-\pi/2; \pi/2]$.

15.158. $f(x) = \cos^2 x + \sin x$; а) $[0; \pi/4]$; б) $[\pi/3; \pi]$.

15.159*. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x - 1}}$; а) $[3/4; 2]$; б) $[3/2; 3]$.

15.160. $f(x) = x + \frac{8}{x^4}$; а) $[-2; -1]$; б) $[1; 3]$.

15.161. $f(x) = (5 - x)\, 2^{-x}$; а) $[-1; 0]$; б) $[5; 6]$.

15.162. $f(x) = 2^{\sqrt[3]{x^2}}$; а) $[-8; -1]$; б) $[-1; 1]$.

15.163. $y = 3\sqrt[3]{(x-1)^2} + x$; а) $[-7; 0]$; б) $[1; 2]$.
15.164. $f(x) = 2x^2 - \ln x$; $[1; e]$.

15.165. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \cos x \sqrt{\sin x}$ на проміжку $[0; \pi/2]$.

15.166. Знайти проміжки зростання і спадання функції $f(x) = x + \frac{1}{x}$ та визначити, в якій з точок $x_1 = \log_5 4$ чи $x_2 = \log_5 3$ функція набуває найбільшого значення.

15.167. Знайти проміжки зростання і спадання функції $f(x) = (1 + x)/\sqrt{x}$ та визначити, в якій з точок $x_1 = e^{-1}$ чи $x_2 = e^{-2}$ функція набуває найбільшого значення.

15.168. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \left(\frac{2 + \cos x}{\sin x}\right)^2$$

на інтервалі $(0; \pi)$.

15.169. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$$

на півінтервалі $[0; 1)$, n — число натуральне.

15.170*. Знайти проміжок зростання функції $y = \frac{x}{\ln x}$, а потім визначити, що більше: e^{π} чи π^{e}.

Знайти екстремуми та вказати проміжки зростання і спадання функцій (15.171—15.175):

15.171. $y = e^{-x} - e^{-2x}$. **15.172.** $y = x^2 e^{-x}$.

15.173. $y = e^{-x} \sin x$, якщо $0 < x < \pi$.

15.174. $y = x + \ln(1 - 2x)$. **15.175.** $y = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-5)^2}$.

15.176. Число 18 розбити на такі два доданки, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.

15.177. Число 180 розбити на три додатних доданки так, щоб два з них відносились, як 1 : 2, а добуток трьох доданків був найбільшим.

15.178. Знайти число, яке б перевищувало свій квадрат на максимальне значення.

15.179. Треба загородити прямокутну ділянку землі площею 294 м^2 і потім розділити ділянку огорожею на дві рівні частини. При яких лінійних розмірах ділянки довжина всієї огорожі буде найменшою?

15.180. Прямокутний лист жерсті має лінійні розміри 5×8 дм. У чотирьох його кутах вирізають однакові квадрати і роблять відкриту коробку, загинаючи краї під прямим кутом. Яка максимально можлива місткість такої коробки?

15.181. У прямокутний трикутник з гіпотенузою 24 см і кутом 60° вписано прямокутник, основа якого міститься на гіпотенузі. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

15.182. Дві сторони паралелограма лежать на сторонах даного трикутника, а одна з його вершин розміщена на третій стороні. За яких умов площа паралелограма буде найбільшою?

15.183. Серед рівнобедрених трикутників із заданою бічною стороною a знайти трикутник з найбільшою площею.

15.184. Бічні сторони і менша основа трапеції мають однакові довжини — по 50 см. Знайти довжину її більшої основи, при якій площа трапеції буде найбільшою.

15.185. Знайти сторони прямокутника з найбільшою площею, вписаного у прямокутний трикутник із сторонами 18, 24 і 30 см, який має з ним спільний прямий кут.

15.186. Визначити сторони прямокутника з найбільшою площею, вписаного у прямокутну трапецію з основами 24 і 8 см і висотою 12 см (дві вершини прямокутника лежать на бічних сторонах трапеції, а дві інші — на її більшій основі).

15.187. Із пункту A на прогулянку вийшов пішохід із швидкістю v км/год. Після того, як він віддалився від пункту A на 6 км, з цього ж пункту вслід за ним виїхав велосипедист, швидкість якого була на 9 км/год більша за швидкість пішохода. Коли велосипедист наздогнав пішохода, вони повернули назад і прибули разом у пункт A із швидкістю 4 км/год. При якому значенні v час прогулянки пішохода буде найменшим?

15.188. У рівнобедрений трикутник із сторонами 15, 15 і 18 см вписано паралелограм найбільшої площі так, що кут при основі у них спільний. Знайти сторони паралелограма.

15.189. В яке коло можна вписати прямокутник найбільшої площі з периметром 56 см?

15.190. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює її меншій основі. Яким має бути кут при більшій основі, щоб площа трапеції була найбільшою?

15.191. Кут при вершині A трапеції $ABCD$ дорівнює α. Довжина бічної сторони AB удвічі більша за довжину меншої основи BC. При якому значенні α величина кута BAC буде найбільшою? Чому дорівнює це найбільше значення.

15.192. Знайти косинус кута при вершині рівнобедреного трикутника, який має найбільшу площу при заданій сталій довжині медіани, проведеної до її бічної сторони.

15.193. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α. При якому значенні α відношення радіусів вписаного і описаного кіл є найбільшим? Чому дорівнює найбільше значення цього відношення?

15.194. Яких розмірів мають бути радіус основи і висота відкритого циліндричного бака, щоб при заданому об'ємі V на його виготовлення було витрачено найменшу кількість листового металу?

15.195. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди має сталу задану площу і нахилена до площини основи під кутом α. При якому значенні α об'єм піраміди є найбільшим?

15.196. У правильну чотирикутну піраміду з ребром основи a і висотою H вписано правильну чотирикутну призму так, що її нижня основа розміщена в основі піраміди, а вершини верхньої основи — на бічних ребрах. Знайти ребро основи і висоту призми, яка має найбільшу бічну поверхню.

15.197. Бічне ребро правильної трикутної піраміди має сталу задану довжину і утворює з площиною основи кут α. При якому значенні α об'єм піраміди буде найбільшим?

15.198. У правильній трикутній піраміді бічна грань має задану сталу площу і утворює з площиною основи кут α. При якому значенні α відстань від центра основи піраміди до її бічної грані найбільша?

15.199. У конус із заданим сталим об'ємом вписано піраміду, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник з кутом при вершині, що дорівнює α. При якому значенні α об'єм піраміди найбільший?

15.200. Твірна конуса має сталу довжину і утворює з висотою конуса кут α. У конус вписано правильну шестикутну призму з рівними ребрами (основа призми розміщена у площині основи конуса). При якому значенні α бічна поверхня призми найбільша?

15.201. Змінна y обернено пропорційна змінній x. Знайти коефіцієнт k оберненої пропорційності і заповнити таблицю:

x		0,1	9,6
y	30		3,05

На графіку заданої оберненої пропорційності знайти точку, найближчу до початку координат O (0; 0).

15.202. Відомо, що потужність P, яку віддає електричний елемент, визначається за формулою $P = E^2R/(r + R)^2$, де E — стала електрорушійна сила елемента, r — сталий внутрішній опір, R — зовнішній опір. Яким має бути зовнішній опір R, щоб потужність P була найбільшою?

Знайти проміжки зростання і спадання функцій, точки екстремуму та накреслити графіки функцій (**15.203—15.212**):

15.203. $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$. **15.204.** $y = 0,5x^4 - 4x^2$.

15.205. $y = x^4 - 10x^2 + 9.$

15.206. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 3.$

15.207. $y = x^3 - 3x^2 + 2.$ 15.208. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x.$

15.209. $y = 8 + 2x^2 - x^4.$ 15.210. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4}.$

15.211. $y = \frac{1}{5}x^5 - 4x^2.$ 15.212. $y = \frac{2}{1 + x^2}.$

Знайти проміжки зростання і спадання функцій і точки екстремуму (15.213—15.230):

15.213. $y = \frac{x}{x^2 + 1}.$ 15.214. $y = \frac{-5}{(x-2)^2 + 1}.$

15.215. $y = x^2 + \frac{1}{x}.$ 15.216. $y = x + \frac{4}{x^2}.$

15.217. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$ 15.218. $y = \frac{(x-2)^2}{x^2 + 4}.$

15.219. $y = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 8}.$ 15.220. $y = \frac{1}{x^2 + 8x}.$

15.221. $y = \frac{x + 2}{x^2 - 9}.$ 15.222. $y = \frac{4}{x^2 - 2x + 2}.$

15.223. $y = \frac{1 - x}{(x-2)^3}.$ 15.224. $y = \frac{3x}{x^2 + 4x + 4}.$

15.225. $y = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}.$ 15.226. $y = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}.$

15.227. $y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}.$ 15.228. $y = \frac{x^2}{x^3 - 1}.$

15.229. $y = \frac{(x-3)^2}{x^2}.$ 15.230. $y = \frac{1}{(x-1)(x-4)}.$

15.231*. Використовуючи метод математичної індукції, довести що при $x > 0$ виконується нерівність

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad n \in \mathrm{N}.$$

15.232. Знайти функцію $F(x)$, графік якої проходить через задану точку $M_0(x;\ y)$, якщо:

а) $F'(x) = 4x^2 + 9x^{-2};\ M_0(3;\ -2);$

б) $F'(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{1}{3};\quad M_0(2;\ 1).$

Для даної функції $f(x)$ знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ (15.233—15.236):

15.233. $f(x) = x^4;\ M_0(-1;\ 2).$

15.234. $f(x) = \sin 2x$; $M_0(0;\ 1)$.

15.235. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 3x}$; $M_0\left(\dfrac{\pi}{12};\ -1\right)$.

15.236. $f(x) = x^{-4}$; $M_0(2;\ -3)$.

15.237. Знайти функцію $F(x)$, якщо $F'(x) = 4x^3 - 3x^2$ і $F(1) = 3$.

15.238. Для функції $f(x) = \cos 4x$ знайти первісну $F(x)$, якщо $F(\pi/24) = -1$.

15.239. Знайти функцію $S(x)$, якщо її похідна $S'(x) = 2/\sqrt{5 - x}$ і $S(1) = -1$.

Обчислити інтеграли (15.240—15.265):

15.240. $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x dx$.

15.241. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} \sin^3 2x dx$.

15.242. $\int\limits_8^{27} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

15.243. $\int\limits_0^{\pi/4} (\sin 2t - \cos 2t)^2 dt$.

15.244. $\int\limits_0^{3\pi/2} \dfrac{dx}{\cos^2(2x/9)}$.

15.245. $\int\limits_0^{\pi} \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - 3x\right) dx$.

15.246. $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin(x/2) dx$.

15.247. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$.

15.248. $\int\limits_0^{2\pi/3} \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 3x\right) dx$.

15.249. $\int\limits_0^{2} (1 + 3x)^4 dx$.

15.250. $\int\limits_9^{-54} \sqrt[3]{2 - \dfrac{t}{9}}\, dt$.

15.251. $\int\limits_0^{7/3} \dfrac{x + 1}{\sqrt[3]{3x + 1}} dx$.

15.252. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1 - x}\, dx$.

15.253. $\int\limits_1^{e} \dfrac{dx}{0,5x}$.

15.254. $\int\limits_1^{0,5} \left(4x - \dfrac{1}{2x}\right) dx$.

15.255. $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1 + 2x}}$.

15.256. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^{-1} dx$.

15.257. $\int\limits_0^{\pi} \cos^4 x dx$.

15.258. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$.

15.259. $\int\limits_0^{1} \dfrac{x dx}{\sqrt{9 + 16x}}$.

15.260. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)^3}$.   **15.261.** $\int\limits_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}$.

15.262. $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x \cos 3x\,dx$.   **15.263.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 4x \sin 5x\,dx$.

15.264. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos 3x \cos 2x\,dx$.   **15.265.** $\int\limits_{-2}^{2} (10^{x/4} - \sin \pi x)\,dx$.

Обчислити площі фігур, обмежених заданими лініями (15.266—15.273):

15.266. $y = x^3$, $y = 1$ і $x = 2$.

15.267. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ і $x = \pi/4$.

15.268. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ і $x = 9$.

15.269. $y = x^3$ і $y = \sqrt{x}$.

15.270. $y = 2x - x^2$ і $y = 3/4$. **15.271.** $y = x^4$ і $y = x$.

15.272. $y = 1/x^2$, $y = 0$, $x = 0{,}5$ і $x = 2{,}5$.

15.273. $y = 5/x$ і $y = 6 - x$.

15.274. Чому дорівнює шлях, який пройшла точка, що рухається прямолінійно, за відрізок часу від $t_1 = 1$ до $t_2 = 4$, якщо швидкість точки $v(t) = 2t^2 + 3t$ (t — в секундах, v — в м/с)? Чому дорівнює прискорення цієї точки в момент $t = 2$?

15.275. Тіло рухається прямолінійно із швидкістю $v(t) = \sqrt[3]{1+t}$ (t — в секундах, v — в м/с). Знайти шлях, пройдений тілом за перші 7 с. Чому дорівнює прискорення тіла в момент $t = 7$?

Глава 16

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ З ГЕОМЕТРІЇ

Приклад 1. Довести, що в прямокутному трикутнику величина кута між медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи, дорівнює модулю різниці величин гострих кутів трикутника (рис. 16.1).

△ Нехай $\angle C = \pi/2$, CD — висота, CE — медіана. Треба довести, що $\angle DCE = |\angle B - \angle A|$. Покладемо $\angle DCE = \angle x$, тоді $\angle DCA = \angle B$ (оскільки обидва кути доповнюють кут A до $\pi/2$). У прямокутному трикутнику довжина медіани, проведеної до гіпотенузи, дорівнює половині довжини гіпотенузи; отже, трикутник ACE рівнобедрений і $\angle ECA = \angle x + \angle B = \angle A$. Звідси $\angle x = \angle A - \angle B$. Якщо вершини A і B трикутника поміняти місцями (див. рис. 16.1), то дістанемо $\angle x = \angle B - \angle A$. Обидва результати можна об'єднати в один: $\angle x = |\angle B - \angle A|$. ▲

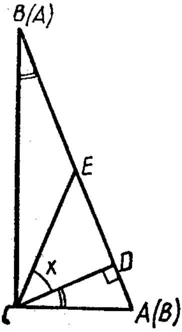


Рис. 16.1

Приклад 2. Довести, що для будь-якої точки M, що належить довільному трикутнику ABC із сторонами a, b і c і висотами h_a, h_b і h_c (рис. 16.2), виконується рівність $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$, де x, y і z — відповідно відстані від точки M до сторін BC, AC і AB. Сформулювати відповідну властивість для довільної точки, яка належить рівносторонньому трикутнику.

△ Сполучивши точку M з вершинами A, B і C, дістанемо три трикутники BMC, AMC і AMB, висоти яких відповідно дорівнюють x, y і z. Нехай S — площа трикутника ABC; тоді $S = \frac{1}{2}(ax + by + cz)$. Крім того, $S = \frac{1}{2} ah_a$, $S = \frac{1}{2} bh_b$, $S = \frac{1}{2} ch_c$.

Комбінуючи ці рівності, знаходимо

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1.$$

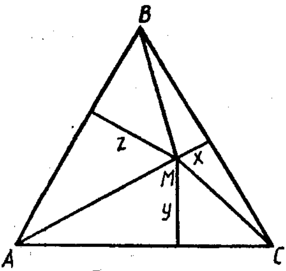


Рис. 16.2

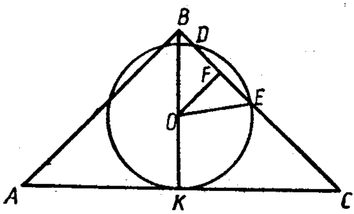


Рис. 16.3

У рівносторонньому трикутнику $h_a = h_b = h_c = h$, тому $x + y + z = h$, тобто сума відстаней від довільної точки, яка належить рівносторонньому трикутнику, до його сторін стала і дорівнює висоті трикутника. ▲

Приклад 3. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 40. Коло з радіусом, який дорівнює 9, дотикається до середини гіпотенузи. Знайти довжину відрізка, який відтинає це коло на одному з катетів.

△ Спочатку з'ясуємо, чи має задача розв'язок при даних значеннях гіпотенузи і радіуса кола. З геометричних міркувань (рис. 16.3) випливає такий факт: щоб коло з центром O на висоті BK трикутника ABC перетинало катет BC у двох точках D і E, необхідно і достатньо, щоб його радіус OK був не більший за половину висоти BK, але більший за радіус вписаного у трикутник кола. Перше співвідношення очевидне $(9 < 10)$, друге також неважко перевірити. Радіус r вписаного кола знайдемо за формулою $r = \frac{a + b - c}{2}$, тобто

$$r = \frac{20\sqrt{2} + 20\sqrt{2} - 40}{2} = 20\sqrt{2} - 20.$$

Покажемо, що $9 > 20\sqrt{2} - 20$, тобто що $29 > 20\sqrt{2}$. Піднісши до квадрата обидві частини нерівності, дістанемо справедливу нерівність $841 > 800$. Отже, справедливою є і початкова нерівність.

Щоб знайти довжину відрізка DE, проведемо $OF \perp DE$ і радіус OE заданого кола. Обчислимо послідовно довжини відрізків BO, OF, FE і DE. Маємо $BO = BK - OK = 11$, $OF = BO \sin 45° = \frac{11\sqrt{2}}{2}$, $FE = \sqrt{OE^2 - OF^2} = \sqrt{81 - \frac{121}{2}} = \sqrt{\frac{41}{2}}$, $DE = 2FE = \sqrt{82}$. ▲

Приклад 4. У трикутнику ABC точка K, яку взято на стороні BC, ділить її у відношенні $1:3$ (від вершини B), а точка L ділить сторону AC у відношенні $2:5$ (від вершини A). В якому відношенні (від відповідних вершин) точка O перетину прямих AK і BL ділить відрізки AK і BL?

$\triangle$ I спосіб. Нехай $BK = x$, $AL = 2y$ (рис. 16.4); тоді за умовою $KC = 3x$, $LC = 5y$. Далі, покладемо $KF = m$, $OF = n$. Із подібності трикутників KOF і AKC маємо $\frac{n}{m} = \frac{7y}{3x}$, звідки

$$\frac{n}{y} = \frac{7m}{3x}. \qquad (*)$$

Із подібних трикутників BOF і BLC знаходимо $\frac{n}{5y} = \frac{x+m}{4x}$, звідки

$$\frac{n}{y} = \frac{5(x+m)}{4x}. \qquad (**)$$

Прирівнюючи праві частини пропорцій (*) і (**), після спрощень дістаємо $28m = 15(x+m)$, звідки $m = \frac{15x}{13}$. Отже, $BF = BK + KF = \frac{28x}{13}$ і $CF = BC - BF = 4x - \frac{28x}{13} = \frac{24x}{13}$. Згідно з теоремою Фалеса, маємо

$$\frac{BO}{OL} = \frac{BF}{FC} = \frac{28x/13}{24x/13} = \frac{7}{6}, \quad \frac{AO}{OK} = \frac{24x/13}{15x/13} = \frac{8}{5}.$$

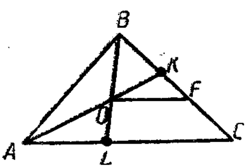


Рис. 16.4

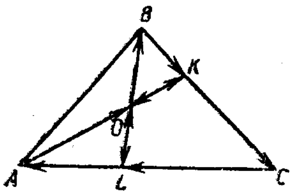


Рис. 16.5

II спосіб. Введемо такі позначення: $\overline{BC} = \bar{a}$, $\overline{CA} = \bar{b}$, $\overline{AO} = \bar{x}$, $\overline{LO} = \bar{y}$ (рис. 16.5). Тоді вектори $\overline{OK}$ і $\overline{OB}$, які колінеарні відповідно векторам $\overline{AO}$ і $\overline{LO}$, можна записати у вигляді $\overline{OK} = \alpha\overline{AO}$ і $\overline{OB} = \beta\overline{LO}$, де α і β — числа, які підлягають визначенню.

Розглянемо три замкнених контури: $OBKO$ (I), $OLAO$ (II), $OKCLO$ (III). З (I) маємо $\overline{OB} + \overline{BK} + \overline{KO} = \bar{0}$, тобто $\beta\bar{y} + \frac{1}{4}\bar{a} - \alpha\bar{x} = \bar{0}$; з (II) маємо $\overline{OL} + \overline{LA} + \overline{AO} = \bar{0}$, тобто $-\bar{y} + \frac{2}{7}\bar{b} + \bar{x} = \bar{0}$; з (III) знаходимо $\overline{OK} + \overline{KC} + \overline{CL} + \overline{LO} = \bar{0}$, тобто $\alpha\bar{x} + \frac{3}{4}\bar{a} + \frac{5}{7}\bar{b} + \bar{y} =$

$= \bar{0}$. У результаті дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} -\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \frac{1}{4}\bar{a} = \bar{0}, \\ \bar{x} - \bar{y} + \frac{2}{7}\bar{b} = \bar{0}, \\ \alpha\bar{x} + \bar{y} + \frac{3}{4}\bar{a} + \frac{5}{7}\bar{b} = \bar{0}. \end{cases}$$

З першого і другого рівнянь виразимо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ через вектори $\bar{x}$ і $\bar{y}$, а здобуті вирази підставимо у третє рівняння. Після нескладних перетворень дістаємо

$$\left(4\alpha - \frac{5}{2}\right)\bar{x} + \left(\frac{7}{2} - 3\beta\right)\bar{y} = \bar{0}.$$

Оскільки вектори $\bar{x}$ і $\bar{y}$ не колінеарні, то ця рівність можлива тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при $\bar{x}$ і $\bar{y}$ дорівнюють нулю, тобто $4\alpha - \frac{5}{2} = 0$, $\frac{7}{2} - 3\beta = 0$. Звідси $\alpha = \frac{5}{8}$, $\beta = \frac{7}{6}$, тобто $\overline{OK} = \frac{5}{8}\overline{AO}$, $\overline{OB} = \frac{7}{6}\overline{LO}$. Остаточно маємо $AO : OK = 8 : 5$, $BO : OL = 7 : 6$.

III спосіб. Нехай сторони трикутника ABC є невагомими стержнями, а до вершин трикутника прикладено паралельні сили (рис. 16.6).

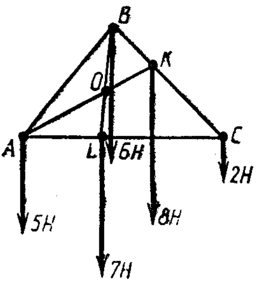


Рис. 16.6

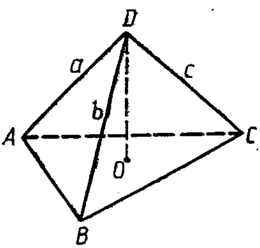


Рис. 16.7

Припустимо, що до вершини C прикладено силу, що дорівнює 2Н: тоді до точки B згідно з умовою рівноваги (рівність моментів сил відносно точки K) має бути прикладена сила 6Н, а до точки K, згідно з правилом додавання паралельних сил, має бути прикладена сила 8Н.

Міркуючи аналогічно відносно точок A і L, знаходимо, що до точки A має бути прикладена сила 5Н, а до точки L — сила 7Н. Нарешті, згідно з умовою рівноваги відносно точки O, дістаємо $AO : OK = 8 : 5$ і $BO : OL = 7 : 6$. ▲

Приклад 5. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні і дорівнюють a, b і c. Знайти об'єм піраміди.

△ Візьмемо за основу піраміди прямокутний трикутник ADB (рис. 16.7), а вершиною — точку C. Оскільки $CD \perp AD$ і $CD \perp BD$, то в силу теореми про перпендикулярність прямої і площини $CD \perp$ пл. ADB. Отже, ребро CD є висотою піраміди. За формулою (11.11) знаходимо об'єм піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABD} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{abc}{2} = \frac{abc}{6}. \quad \blacktriangle$$

Приклад 6. Основою піраміди $ABCD$ є гострокутний рівнобедрений трикутник ABC, у якого $AB = BC = a$ і $AC = b$ (рис. 16.8). Кожне бічне ребро дорівнює c. Через центр кола, описаного навколо основи, проведено площину, паралельну прямим DB і AC. Знайти площу перерізу.

△ Оскільки трикутник ABC — гострокутний, то центр O описаного навколо нього кола лежить всередині трикутника і задана площина перетинає всі грані піраміди. Далі, з рівності всіх бічних ребер піраміди випливає, що її вершина D проектується в точку O (див. гл. 11), і проекцією B на площину основи є відрізок BO, перпендикулярний до сторони AC основи піраміди. Згідно з теоремою про три перпендикуляри, $BD \perp AC$.

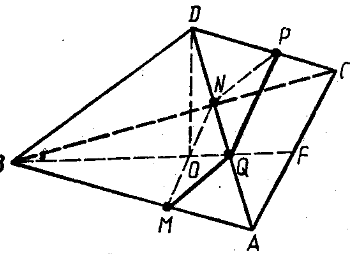


Рис. 16.8

Для побудови заданої площини через точку O проведемо пряму $MN \parallel AC$ (у площині ABC), а через точку N — пряму $NP \parallel DB$ (у площині BDC).

Площина $MNPQ$ паралельна прямим AC і BD (в силу ознаки паралельності прямої і площини) і перетинає бічну грань ADC по прямій $PQ \parallel AC$, а бічну грань ABD — по прямій $MQ \parallel BD$. Переріз $MNPQ$ — прямокутник, оскільки, як було показано вище, $BD \perp AC$, а MN і NP паралельні відповідно AC і BD.

Знайдемо сторони прямокутника $MNPQ$. Зазначимо, що BO — радіус описаного кола, а BF — висота трикутника ABC. Нехай $BO = R$ і $BF = h$. Із подібності трикутників MNB і ABC знаходимо $\frac{R}{h} = \frac{MN}{b} = \frac{BN}{a}$, звідки $MN = \frac{bR}{h}$ і $BN = \frac{aR}{h}$. Далі, $CN = BC - BN = \frac{a(h-R)}{h}$. Із подібності трикутників CNP і CBD знаходимо $\frac{PN}{BD} = \frac{CN}{BC}$ або $\frac{PN}{c} = \frac{h-R}{h}$, звідки $PN = \frac{c(h-R)}{h}$. Отже, площа перерізу

$$S_{MNPQ} = MN \cdot PN = \frac{bcR(h-R)}{h^2}. \qquad (*)$$

Залишається виразити h і R через відомі величини. Із трикутника BFC знаходимо $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$, а залежність між R, h і a у рівнобедреному трикутнику виражається формулою $R = \frac{a^2}{2h}$ (див. гл. 12 п. 3⁰). Підставивши ці вирази у рівність (*), після спрощень дістанемо

$$S_{MNPQ} = \frac{2a^2bc(2a^2 - b^2)}{(4a^2 - b^2)^2}.$$

Покажемо, що здобута для площі формула має зміст, тобто $2a^2 - b^2 > 0$. Тут знову істотним є те, що рівнобедрений трикутник ABC — гострокутний. З цього випливає, що кут A при основі більше 45°. Тому $\cos A < \cos 45°$, тобто $\frac{b/2}{a} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, звідки $b < a\sqrt{2}$, $b^2 < 2a^2$, і $2a^2 - b^2 > 0$. ▲

Приклад 7. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, довжина ребра якого дорівнює a. Знайти об'єм конуса, вершина якого збігається з вершиною B_1, а коло основи проходить через середини трьох ребер, що виходять із вершини D.

△ Нехай точки M, N і P (рис. 16.9) — відповідно середини ребер AD, CD і DD_1, тобто $MD = ND = PD = a/2$. Із рівності рівнобедрених прямокутних трикутників DPN, DPM і DMN випливає, що $MN = MP = NP = a\sqrt{2}/2$. Далі з рівності прямокутних трикутників B_1MA, B_1NC і B_1PD_1 (у яких один з катетів є діагоналлю відповідної грані куба, а другий — половиною ребра куба) випливає, що $B_1M = B_1N = B_1P = \sqrt{B_1D_1^2 + D_1P^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3}{2}a$. Отже, точки M, N і P рівновіддалені як від точки D, так і від точки B_1. Тому пряма B_1D перпендикулярна до площини трикутника MNP і перетинає цю площину у точці O — центрі кола, описаного навколо трикутника MNP. Отже, ON — радіус основи конуса, B_1O — висота конуса.

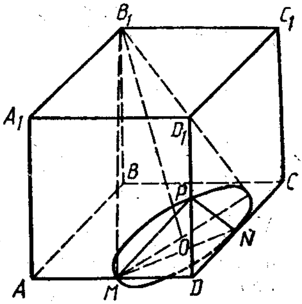


Рис. 16.9

Оскільки сторона a_3 правильного трикутника, вписаного в коло радіуса R, виражається формулою $a_3 = R\sqrt{3}$, то $R = a_3/\sqrt{3}$. Отже, $ON = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$. А далі з трикутника B_1NO знаходимо $B_1O = \sqrt{B_1N^2 - ON^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 - \frac{a^2}{6}} = \frac{5a}{2\sqrt{3}}$. Остаточно маємо

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{6} \cdot \frac{5a}{2\sqrt{3}} = \frac{5\pi a^3\sqrt{3}}{108}. \ ▲$$

16.001. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо точка дотику вписаного в нього кола ділить один із його катетів на відрізки завдовжки m і n $(m < n)$.

16.002. Довести, що сума квадратів медіан будь-якого трикутника становить 75 % від суми квадратів його сторін.

16.003. У прямокутному трикутнику знайти бісектрису прямого кута, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює c, а один із гострих кутів дорівнює α.

16.004. Довести, що площа півкруга, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ півкругів, побудованих на його катетах.

16.005. З яких однойменних рівних правильних многокутників можна скласти паркет?

16.006. Тангенс тупого зовнішнього кута прямокутного трикутника дорівнює k. Знайти тангенс гострого кута трикутника, не суміжного з даним зовнішнім кутом.

16.007. Скільки діагоналей можна провести в опуклому восьмикутнику?

16.008. У коло радіуса R вписано правильний n-кутник, площа якого дорівнює $3R^2$. Знайти n.

16.009. Трикутник розбито медіанами на шість частин, які попарно не мають спільних внутрішніх точок. Порівняти площі цих частин.

16.010. Знайти площу правильного дванадцятикутника, вписаного в коло радіуса R.

16.011. Довести, що пряма, яка проходить через основи двох висот гострокутного трикутника, відтинає від нього подібний йому трикутник.

16.012. Медіана деякого трикутника збігається з його бісектрисою. Довести, що такий трикутник є рівнобедреним.

16.013. Дано відрізок AB і пряму, яка не перпендикулярна до цього відрізка і перетинає його в точці, що не є серединою цього відрізка. Учень побудував точку B_1, симетричну точці B відносно даної прямої, і зазначив, що тепер легко побудувати трикутник ABC, для якого бісектриса кута ACB лежить на даній прямій. Як це можна зробити?

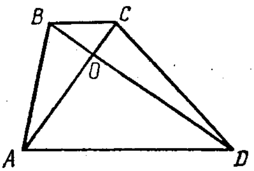


Рис. 16.10

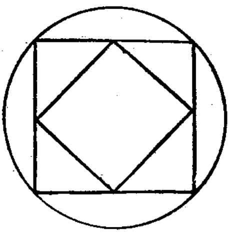


Рис. 16.11

16.014. В якому опуклому многокутнику число діагоналей дорівнює числу сторін?

16.015. Довести, що довжина медіани трикутника менша за півсуму довжин сторін, між якими проведено медіану.

16.016. Пари точок A і A_1, B і B_1 розміщено симетрично відносно однієї прямої. Довести, що ці чотири точки розташовані на одному колі або на одній прямій.

16.017. Довести, що коли дві сторони і медіана одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і медіані другого трикутника, то такі трикутники рівні (розглянути два випадки).

16.018. Довести, що в будь-якій трапеції $ABCD$ (рис. 16.10) трикутники AOB і COD рівновеликі.

16.019. У коло радіуса $R = 1$ см вписано квадрат, а в квадрат — другий квадрат, вершини якого ділять навпіл сторони першого квадрата (рис. 16.11). Не обчислюючи довжину сторони першого квадрата, довести, що площа другого квадрата дорівнює 1 см^2.

16.020. Довести, що в прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить пополам кут між медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи.

16.021. Довести, що сума довжин висот трикутника менша за його периметр.

16.022. З яких точок площини даний відрізок видно під даним кутом?

16.023. Три середні лінії трикутника розбивають його на чотири частити. Якщо площа однієї з них дорівнює S, то чому дорівнює площа даного трикутника?

16.024. Дано трикутник з площею 1 і довжинами сторін a, b і c. Відомо, що $a \geqslant b \geqslant c$. Довести, що $b \geqslant \sqrt{2}$.

16.025. Кола кожного з двох рівних кругів радіуса R проходять через центр одне одного. Знайти площу спільної частини цих кругів.

16.026. Яку фігуру утворює множина всіх вершин рівнобедрених трикутників, які мають спільну основу?

16.027. Із точки A проведено два промені, які перетинають дане коло: один — в точках B і C, другий — в точках D і E. Відомо, що $AB = BC = 7$, $AD = 10$. Визначити DE.

16.028. Непаралельні сторони трапеції продовжено до перетину. Довести, що пряма, яка проходить через здобуту точку і точку перетину діагоналей, ділить кожну з паралельних сторін трапеції на дві рівні частини.

16.029. Сума довжин катетів прямокутного трикутника дорівнює s. Знайти межі можливих значень довжини його гіпотенузи c.

16.030. Довести, що з трьох медіан прямокутного трикутника найменшу довжину має та, що проведена до гіпотенузи.

16.031. Через точку, що належить меншій стороні трикутника, провести пряму, яка відтинає від нього трикутник, подібний даному. Показати, що існують чотири такі прямі.

16.032. Яке найбільш можливе число гострих кутів існує в довільному опуклому многокутнику?

16.033. Яку фігуру утворює множина ортоцентрів (точок перетину висот) всіх трикутників, які мають спільну сторону за умови, що протилежні до цієї сторони кути рівні між собою?

16.034. У прямокутний круговий сектор радіуса R вписано квадрат так, що дві його вершини лежать на крайніх радіусах, а дві — на дузі сектора. Знайти сторону квадрата.

16.035. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки, розміщеної всередині правильного многокутника, до прямих, які містять його сторони, дорівнює добутку апофеми многокутника на число його сторін.

16.036*. Кожна сторона опуклого чотирикутника менша a. Довести, що його площа менша a^2.

16.037. У колі радіуса 4 м знайти довжину хорди, яку видно з будь-якої точки меншої дуги кола під кутом 135°.

16.038. У колі радіуса a знайти довжину хорди, яку з будь-якої точки більшої дуги кола видно під кутом 30°.

16.039. Дано трикутник ABC. На основі BC побудувати трикутник з такою ж площею, але з кутом при вершині B, який дорівнює половині кута B даного трикутника.

16.040. Знайти довжини найменших сторін всіх тупокутних трикутників, у яких довжини сторін виражаються цілими числами і утворюють арифметичну прогресію з різницею 3 см.

16.041. Нехай n — число сторін опуклого многокутника, а d — число його діагоналей. Вказати всі значення n, для яких $n > d$.

16.042. Сформулювати будь-яке твердження, яке справджується разом з оберненим до нього. Сформулювати будь-яке справедливе твердження, але таке, для якого обернене твердження не справджується.

16.043. Нехай BO — бісектриса кута B прямокутного трикутника ABC, D — середина катета AC, $DO \perp AC$, $OE \perp AB$, $OF \perp BC$, AB — гіпотенуза (рис. 16.12). Легко довести, що $\triangle BOE = \triangle BOF$, звідки $BE = BF$. (*) Далі, оскільки $OA = OC$, то $\triangle OEA = \triangle OCF$, звідки

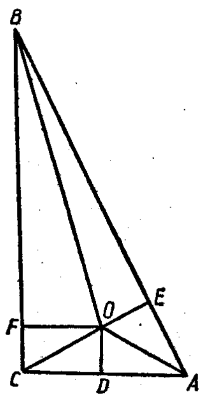


Рис. 16.12

$AE = FC$. (**) Додаючи рівності (*) і (**), дістаємо, що $AB = BC$, тобто довжина гіпотенузи дорівнює довжині катета. Знайти помилку у цьому доведенні.

16.044. Менша основа трапеції дорівнює 6 см. Знайти її більшу основу, якщо відстань між серединами діагоналей дорівнює 5 см.

16.045. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його діагональ на відрізки 3,2 і 8,8 см завдовжки. Знайти сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 30 см.

16.046. Паралельні сторони трапеції дорівнюють 25 і 4 см, а непаралельні сторони 20 і 13 см. Знайти висоту трапеції.

16.047. Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки 8 і 10 см завдовжки. Знайти сторони трикутника, якщо центр вписаного кола ділить цю бісектрису у відношенні 3 : 2 (від вершини кута).

16.048. У чотирикутник, три послідовні сторони якого дорівнюють 2, 3 і 4 см, вписано коло радіуса 1,2 см. Знайти площу чотирикутника.

16.049. Дві сторони трикутника і бісектриса кута між ними дорівнюють відповідно 60, 40 і 24 см. Знайти площу трикутника.

16.050. У рівнобедреному трикутнику бісектриса кута при основі ділить бічну сторону на відрізки 4 і 1 см (від вершини кута). Знайти довжину бісектриси.

16.051. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ділить протилежну сторону так, що відрізок, прилеглий до вершини трикутника, дорівнює його основі. Довести, що бісектриса також дорівнює основі трикутника.

16.052. Сторона, бісектриса і висота трикутника, що виходять з однієї і тієї самої вершини, дорівнюють відповідно 5, 5 і $2\sqrt{6}$ см. Знайти дві інші сторони трикутника.

16.053. Знайти найбільшу площу прямокутного трикутника з даною гіпотенузою c.

16.054. Визначити вигляд трикутника за довжинами трьох його сторін (якщо такий трикутник є можливим): а) 2, 2 і 3; б) 6, 8 і 10; в) 3, 1 і 4; г) 3, 5 і 7.

16.055. Довести, що коли через точку дотику двох кіл провести дві прямі, які перетинають обидва кола, і точки перетину прямих з колами сполучити хордами, то ці хорди будуть паралельними.

16.056. Дві діагоналі, що виходять з однієї і тієї самої вершини правильного п'ятикутника, розбивають його на три трикутники. Знайти відношення площі трикутника, обмеженого цими двома діагоналями, до суми площ двох інших трикутників.

16.057. Через довільно вибрану точку на одній стороні паралелограма і кінці протилежної сторони зроблено два розрізи. Визначити площу даного паралелограма, якщо площі відрізаних трикутників дорівнюють S_1 і S_2.

16.058. Довести, що точка перетину бісектрис кутів, які прилягають до однієї з непаралельних сторін довільної трапеції, належить середній лінії трапеції.

16.059. Показати, що $3 < \pi < 4$, не користуючись наближеним значенням числа π.

16.060. Периметр рівнобічної трапеції, описаної навколо круга, дорівнює p. Знайти довжину середньої лінії трапеції.

16.061. Довести, що в чотирикутнику з непаралельними сторонами середини діагоналей і середини двох протилежних сторін є вершинами деякого паралелограма.

16.062. Довести, що коли медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC рівні між собою, то трикутник рівнобедрений: $CA = CB$.

16.063. Довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію. Висота, проведена до середньої за величиною сторони, дорівнює h. Знайти радіус кола, вписаного в цей трикутник.

16.064. Радіус кола з центром у точці O дорівнює 6 см, а його хорда $AB = 3$ см. Знайти радіус кола, вписаного в сектор AOB.

16.065. Довжини сторін трикутника відносяться як $2:3:4$. У ньому проведено бісектрису найменшого кута. В якому відношенні (від вершини) вона ділиться центром кола, вписаного в цей трикутник.

16.066. На відрізку AB довільно взято точку M. На AM і MB по один бік від AB побудовано квадрати. Навколо квадратів описано кола, які перетинаються в точці C. Показати, що промінь MC є бісектрисою кута ACB.

16.067. Навколо кола з центром O описано чотирикутник $ABCD$. Знайти суму кутів AOB і COD.

16.068*. Довести, що в будь-якому трикутнику відношення суми всіх попарних добутків, складених із довжин сторін трикутника, до суми довжин трьох його висот дорівнює діаметру описаного кола.

16.069. Довести, що у будь-якому прямокутному трикутнику сума квадратів довжин медіан складає 150 % від квадрата довжини його гіпотенузи.

16.070. У квадраті $ABCD$ точки M і N — середини сторін DC і BC. Знайти $\angle MAN$.

16.071. У рівнобічній трапеції $ABCD$ дано: $AB \parallel DC$, $AB = 3DC$, $\cos \angle ABC = 1/\sqrt{5}$. Довести, що діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні.

16.072. Дві точки A і B розміщено по різні боки від прямої MN. На прямій MN знайти точку C таку, що $\angle ACN = \angle BCN$.

16.073. Кути трикутника відносяться як $2:3:7$. Найменша сторона трикутника дорівнює a. Знайти радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

16.074. Знайти кут при вершині рівнобедреного трикутника, якщо медіани, проведені до бічних сторін, взаємно перпендикулярні.

16.075. Одна із сторін п'ятикутника має довжину 30 см. Довжини решти сторін виражаються цілими числами і утворюють арифметичну прогресію з різницею 2 см, причому довжина меншої із сторін не перевищує 7 см. Знайти довжини сторін всіх п'ятикутників, для яких виконується ця умова.

16.076. Довжини сторін гострокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію з різницею 5 см. Знайти найбільше число з такою властивістю: довжина більшої сторони будь-якого трикутника вказаного типу більша за це число.

16.077. Центри описаного навколо трикутника і вписаного в нього кіл розміщені симетрично відносно однієї із сторін трикутника. Знайти кути трикутника.

16.078. Сторону AB трикутника видно з вершини C під кутом α. Під яким кутом її видно з центра кола, описаного навколо трикутника? Розглянути три випадки: C — вершина гострого, прямого або тупого кута.

16.079. Два кола мають лише одну спільну точку. Через неї проведено довільну січну. Довести, що дотичні в точках перетину цієї січної з кожним із кіл паралельні.

16.080. Показати, що коли довжини сторін деякого трикутника утворюють геометричну прогресію, то і довжини побудованих висот цього трикутника також утворюють геометричну прогресію.

16.081. Сума довжин катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см. Чи може довжина гіпотенузи дорівнювати 5 см?

16.082. Довести, що кут C трикутника ABC є прямим кутом тоді і тільки тоді, коли сторони цього трикутника пов'язані рівністю $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (пряма і обернена теореми Піфагора).

16.083. Піраміда перерізається площиною, паралельною основі. Побудувати графік функції, що виражає залежність площі перерізу від відстані між вершиною піраміди і січною площиною.

16.084. Висоти всіх бічних граней деякої піраміди рівні між собою. Під яким кутом вони нахилені до площини основи, якщо площа повної поверхні піраміди у 1,5 рази більша за площу її бічної поверхні?

16.085. Дано правильний тетраедр $SABC$. Під яким кутом ребро AB видно з середини ребра SC?

16.086. У кубі розміщено чотирикутну піраміду так, що її основа збігається з однією з граней куба, а вершина — з серединою одного з ребер протилежної грані. Під якими кутами бічні грані піраміди нахилені до площини її основи.

16.087. Усі ребра (у тому числі і сторони основи) трикутної піраміди рівні між собою. Знайти відношення радіуса вписаної в піраміду сфери до її висоти.

16.088. У конус, осьовий переріз якого є правильним трикутником, вписано кулю, а потім вписано другу кулю, яка дотикається до першої кулі і до бічної поверхні конуса, і т. д. (n-на куля дотикається до $(n - 1)$-ї кулі і до бічної поверхні конуса). Знайти відношення границі суми об'ємів куль при $n \to \infty$ до об'єму конуса.

16.089. У зрізаному конусі AB і CD — взаємно перпендикулярні діаметри нижньої основи; EF — діаметр верхньої основи, паралельний прямій CD. Знайти косинус гострого кута між прямими AE і BF, якщо твірна конуса є середнім пропорційним між діаметрами основ і утворює з площиною основи кут α ($\alpha > \pi/3$).

16.090. Двогранний кут між двома суміжними бічними гранями правильної чотирикутної піраміди дорівнює α, а висота піраміди дорівнює H. Знайти радіус описаної кулі.

16.091. Твірна зрізаного конуса утворює з площиною основи кут α. Всередині конуса розміщено дві кулі, які дотикаються одна до одної і до бічної поверхні конуса, причому перша куля дотикається до нижньої основи конуса, а друга — до верхньої основи. Відстань між центрами куль дорівнює l. Знайти радіуси основ конуса.

16.092. У правильному тетраедрі $SABC$ через ребро AC проведено площину, яка перетинає ребро SB у точці K. Довести, що проекція вершини B на площу перерізу лежить на висоті перерізу, яку проведено до сторони AC. За якої умови ця проекція збігається з точкою K?

16.093. Знайти кут між мимобіжними діагоналями суміжних граней куба.

16.094. Яку фігуру утворює множина всіх точок, віддалених від даної площини на відстань a і від фіксованої точки даної площини на відстань b ($a < b$)?

16.095. Яку умову має задовольняти чотирикутник, щоб на ньому як на основі можна було побудувати піраміду з однаковим нахилом усіх бічних граней?

16.096. Знайти найменше ціле число градусів, яке може містити плоский кут тригранного кута з такою властивістю: кожен із плоских кутів містить ціле число градусів, причому ці три числа утворюють арифметичну прогресію з різницею 50°.

16.097. Відношення повної поверхні конуса до поверхні вписаної в нього кулі дорівнює k. Знайти кут між висотою і твірною конуса та допустимі значення k.

16.098. Відношення бічної поверхні зрізаного конуса, описаного навколо кулі, до суми площ його основ дорівнює k. Знайти кут між твірною і площиною основи та допустимі значення k.

16.099. Знайти відношення об'єму кулі до об'єму вписаного в неї куба.

16.100. Скільки бічних граней має призма, у якої 60 ребер?

16.101. Довести, що коли всі діагоналі паралелепіпеда мають однакові довжини, то він прямокутний.

16.102. Яку фігуру утворює множина точок перетину бісектрис всіх трикутників, що мають спільну сторону, за умови, що протилежні до цієї сторони кути рівні між собою?

16.103. Довести, що коли похила утворює рівні кути з трьома попарно непаралельними прямими, розміщеними в одній площині, то вона перпендикулярна до цієї площини.

16.104. Дано дві перехресні прямі. Чи можна провести дві перетинні прямі так, щоб кожна з них перетинала обидві дані прямі?

16.105. Піраміда, основою якої є прямокутний трикутник з катетами 9 і 8 см, вписана в конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайти об'єм піраміди.

16.106. Навколо правильної піраміди з висотою 27 см описано сферу радіуса 18 см. Знайти кут нахилу бічного ребра піраміди до площини її основи.

16.107. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a. Знайти відстань від прямої, що проходить через ребро AA_1, до прямої, що проходить через діагональ B_1D.

16.108. Чи існує у просторі точка, рівновіддалена від усіх вершин паралелограма; від усіх прямих, які містять його сторони? Яку властивість повинен мати паралелограм, щоб рівновіддалена від його вершин точка була рівновіддаленою і від прямих, які містять його сторони?

16.109. Яку властивість повинна мати трапеція, щоб у просторі існувала точка, рівновіддалена від її вершин? Якщо дана трапеція не має такої властивості, то якою фігурою буде множина всіх таких точок?

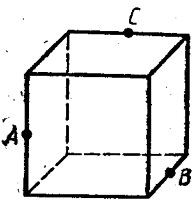


Рис. 16.13

16.110. Побудувати переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, який проходить через середини ребер AD, A_1B_1, CC_1.

16.111. Побудувати переріз куба площиною, яка проходить через точки A, B і C (рис. 16.13).

16.112. Через середню лінію основи трикутної піраміди та її вершину проведено площину. Як відносяться об'єми здобутих пірамід?

16.113. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ (S — її вершина) провести переріз через середину ребра SB і пряму MDN, розміщену у площині основи $ABCD$ і паралельну її діагоналі AC.

16.114. Через середину висоти піраміди проведено площину, паралельну площині основи піраміди. Як відносяться об'єми здобутих многогранників?

16.115. У правильному тетраедрі з ребром $\sqrt{2}$ см визначити відстань між двома перехресними ребрами.

16.116. Знайти площу повної поверхні конуса, якщо його бічну поверхню можна розгорнути у круговий сектор з радіусом 1 і з прямим центральним кутом.

16.117. На скільки дальше центр верхньої основи куба з ребром 1 віддалений від вершини нижньої основи, ніж від його сторони?

16.118. Одне з бічних ребер похилого паралелепіпеда утворює рівні гострі кути з прилеглими до нього сторонами нижньої основи. Що являє собою проекція прямої, яка містить це ребро, на площину нижньої основи? За якої умови ця проекція і діагональ основи лежать на одній прямій?

16.119. Через діагональ нижньої основи довільного паралелепіпеда і середину не перетинаючого її бічного ребра проведено площину. У якому відношенні перебувають об'єми здобутих при цьому частин паралелепіпеда?

16.120. В основі піраміди лежить трикутник, сторони якого дорівнюють 30, 40 і 50 см. Вершина більшого гострого кута основи належить бічному ребру, що має довжину 72 см і перпендикулярне до площини основи. Знайти повну поверхню піраміди.

16.121. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні. Знайти об'єм піраміди, якщо площі її бічних граней дорівнюють S_1, S_2 і S_3.

16.122. Показати, що коли в основі піраміди, яка має рівні бічні ребра, лежить прямокутний трикутник, то одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи.

16.123. Показати, що коли піраміда має рівні бічні ребра, то навколо неї можна описати сферу, радіус якої дорівнюватиме квадрату довжини ребра, поділеному на подвоєну довжину висоти піраміди.

16.124. Чи будь-яка піраміда має таку властивість, щоб навколо неї можна описати сферу? Якщо навколо піраміди можна описати сферу, то де міститься її центр?

16.125*. Показати, що коли навколо основи піраміди можна описати коло, то всі площини, перпендикулярні до бічних ребер піраміди і такі, що ділять їх навпіл, перетинаються в одній точці.

16.126. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1)$ перерізано площиною, яка проходить через вершини A, C і середину E ребра DD_1. Показати, що об'єм піраміди $ACDE$ дорівнює 1/12 об'єму куба.

16.127. У трикутній піраміді перехресні ребра попарно рівні. Довести, що повна поверхня піраміди дорівнює почетвереній площі однієї з її граней.

16.128. Два конуси мають спільну вершину, а їхні висоти перетинаються. Показати, що пряма, по якій перетинаються площини основ конусів, перпендикулярна до площини, в якій розміщено висоти конусів.

16.129. Довести, що проекція діагоналі осьового перерізу зрізаного конуса на основу дорівнює сумі радіусів кіл основ конуса.

16.130. Радіус півкруга, розміщеного в основі півциліндра, дорівнює 1. Через діаметр півкруга проведено площину під кутом 45° до площини півкруга. Показати, що у розгортці півциліндра лінія перерізу проведеної площини з циліндричною поверхнею півциліндра утворює дугу синусоїди.

Глава 17

ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Основні формули

Прямокутна декартова система координат на площині

1°. Відстань між точками A_1 $(x_1; y_1)$ і A_2 $(x_2; y_2)$ визначається за формулою

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (17.1)$$

За допомогою цієї самої формули визначають довжину відрізка A_1A_2 або модуль вектора $\overline{A_1A_2}$ $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

2^0. Координати $(x;\ y)$ середини відрізка з кінцями A_1 $(x_1;\ y_1)$ і A_2 $(x_2;\ y_2)$ визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{17.2}$$

3^0. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом і початковою ординатою має вигляд

$$y = kx + q. \tag{17.3}$$

Кутовий коефіцієнт k є значенням тангенса кута, утвореного прямою з додатним напрямом осі Ox, а початкова ордината q — значенням ординати точки перетину прямої з віссю Oy.

4^0. Загальне рівняння прямої має вигляд

$$ax + by + c = 0. \tag{17.4}$$

5^0. Рівняння прямих, паралельних відповідно осям Oy і Ox, мають вигляд

$$x = a; \quad (17.5) \qquad y = b. \quad (17.6)$$

6^0. Умови паралельності і перпендикулярності прямих $y_1 = kx_1 + q_1$ і $y_2 = kx_2 + q_2$ відповідно мають вигляд

$$k_1 = k_2; \quad (17.7) \qquad k_1k_2 = -1. \quad (17.8)$$

7^0. Рівняння кіл з радіусом R і з центром відповідно в точках O (0; 0) і C $(x_0;\ y_0)$ мають вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2; \quad (17.9) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (17.10)$$

8^0. Рівняння

$$y = ax^2 + bx + c \tag{17.11}$$

є рівнянням параболи з вершиною у точці, абсцисою якої є $x_0 = -b/(2a)$.

Прямокутна декартова система координат у просторі

1^0. Відстань між точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ визначається за формулою

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{17.12}$$

За допомогою цієї самої формули визначають довжину відрізка A_1A_2 або модуль вектора $\overline{A_1A_2}$ $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

2^0. Координати $(x;\ y;\ z)$ середини відрізка з кінцями A_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і A_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{17.13}$$

3^0. Модуль вектора $\bar{a}$ $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, заданого своїми координатами, визначається за формулою

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{17.14}$$

4^0. При додаванні векторів їхні відповідні координати додаються, а при множенні вектора на число усі його координати домножуються на це число, тобто справедливими є формули

$$(a_1;\ a_2;\ a_3) + (b_1;\ b_2;\ b_3) = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3); \quad (17.15)$$

$$\lambda (a_1;\ a_2;\ a_3) = (\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3). \quad (17.16)$$

5°. Одиничний вектор $\bar{a}_0$, співнапрямлений з вектором $\bar{a}$, визначається за формулою

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}. \quad (17.17)$$

6°. Скалярним добутком $\bar{a}\bar{b}$ векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos \varphi, \quad (17.18)$$

де φ — кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

7°. Скалярний добуток векторів $\bar{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $\bar{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ виражається формулою

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (17.19)$$

Зокрема, $\bar{a}^2 = \bar{a}\bar{a} = |\bar{a}|^2$, звідки $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

8°. Косинус кута між векторами $\bar{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $\bar{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ визначається за формулою

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (17.20)$$

9°. Необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів $\bar{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $\bar{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ має вигляд

$$\bar{a}\bar{b} = 0, \quad \text{або} \quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \quad (17.21)$$

10°. Загальне рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\bar{n}\,(a;\ b;\ c)$, має вигляд

$$ax + by + cz + d = 0. \quad (17.22)$$

11°. Рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\bar{n}\,(a;\ b;\ c)$, яка проходить через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, має вигляд

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (17.23)$$

12°. Рівняння кулі з центром $O\,(0;\ 0;\ 0)$ має вигляд

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (17.24)$$

де R — радіус кулі.

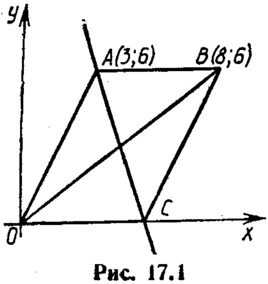


Рис. 17.1

Приклад 1. У паралелограмі $OABC$ дано вершини $O\,(0; 0)$, $A\,(3; 6)$ і $B\,(8; 6)$. Знайти відношення довжин діагоналей OB і AC, а також скласти рівняння сторін паралелограма і діагоналі AC.

△ Оскільки ординати вершин A і B однакові, то $AB \parallel Ox$ (рис. 17.1). Із трьох відрізків OA, AB і OB сторонами паралелограма можуть бути лише OA і AB, оскільки за умовою OB — діагональ. Тому $BC \parallel OA$ і $C\,(5;\ 0)$. За формулою (17.1) знаходимо $OB = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100}$,

$AC = \sqrt{(5-3)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{40}$. Отже, $OB : AC = \sqrt{100} : \sqrt{40} = \sqrt{2,5}$ — шукане відношення діагоналей.

Згідно з формулою (17.3), рівняння сторони OA має вигляд $y = kx + q$, де $k = 6 : 3 = 2$ і $q = 0$. Отже, $y = 2x$. Використовуючи рівність (17.6), запишемо рівняння сторони AB : $y = 6$. Далі, оскільки $BC \parallel OA$, то кутовий коефіцієнт k прямої BC в силу формули (17.7) дорівнює 2, а відповідне значення q знайдемо з рівняння $y = 2x + q$, підставивши в нього замість x і y координати точки C (5; 0). Тоді $0 = 10 + q$, тобто $q = -10$. Отже, рівняння BC має вигляд $y = 2x - 10$. Нарешті, рівнянням OC є $y = 0$.

Щоб знайти рівняння діагоналі AC, скористаємося тим, що точки A (3; 6) і C (5; 0) належать прямій AC, а тому їхні координати задовольняють шукане рівняння. Підставивши ці координати в рівняння $y = kx + q$, дістанемо $6 = 3k + q$, $0 = 5k + q$, звідки $k = -3$, $q = 15$. Отже, $y = -3x + 15$ є рівнянням діагоналі AC. ▲

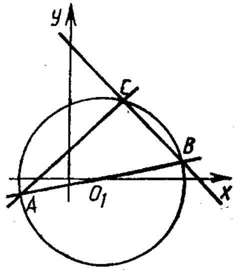


Рис. 17.2

Приклад 2. Скласти рівняння кола, описаного навколо трикутника, утвореного прямими $y = 0,2x - 0,4$, $y = x + 2$, $y = 8 - x$.

△ Кутові коефіцієнти прямих $y = x + 2$ і $y = 8 - x$ дорівнюють відповідно $k_1 = 1$ і $k_2 = -1$. Оскільки $k_1k_2 = -1$, то виконується умова (17.8) перпендикулярності прямих. Отже, трикутник ABC прямокутний (рис. 17.2) і центром кола є середина його гіпотенузи AB. Знайдемо точки перетину прямої $y = 0,2x - 0,4$ з прямими $y = x + 2$ і $y = 8 - x$.

Розв'язавши системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 0,2x - 0,4, \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y = 0,2x - 0,4, \\ y = 8 - x, \end{cases}$$

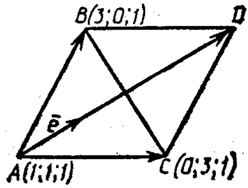


Рис. 17.3.

знайдемо точки A (—3; —1) і B (7; 1) — кінці гіпотенузи. Використовуючи формулу (17.2), знаходимо координати центра кола: O_1 (2; 0). В силу формули (17.1) маємо

$$R = O_1A = \sqrt{(-3-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{26}.$$

Нарешті, згідно з формулою (17.10), знаходимо шукане рівняння кола $(x-2)^2 + y^2 = 26$. ▲

Приклад 3. Знайти одиничний вектор, колінеарний вектору, напрямленому вздовж бісектриси кута BAC трикутника ABC, якщо задано його вершини: A (1; 1; 1), B (3; 0; 1) і C (0; 3; 1).

△ Знайдемо координати і модулі векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Маємо $\overline{AB}$ (2; —1; 0), $\overline{AC}$ (—1; 2; 0), $|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$, $|\overline{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.

Оскільки $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$, то $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$ є діагоналлю ромба $ABCD$ (рис. 17.3), а отже,— бісектрисою кута BAC, причому $\overline{AD}$ (1; 1; 0) і $|\overline{AD}| = \sqrt{2}$. Нехай $\bar{e}$ — одиничний вектор, співнапрямлений з вектором $\overline{AD}$, тобто $\bar{e} = \frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|}$. Тоді, використовуючи формулу (17.17), остаточно знаходимо $\bar{e}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$. ▲

Приклад 4. Пряма, паралельна медіані CM трикутника ABC, перетинає прямі BC, CA і AB відповідно у точках A_1, B_1 і C_1. Довести, що $\overline{A_1C_1} + \overline{B_1C_1} = \overline{CA} + \overline{CB}$.

△ Нехай $A_1E \parallel CM$ (рис. 17.4). Побудуємо $\overline{CD} = 2\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{CB}$. Очевидно, що A_1CDE — паралелограм. Тому $\overline{A_1E} = \overline{CD}$, причому $\overline{A_1E} = \overline{A_1C_1} + \overline{C_1E}$.

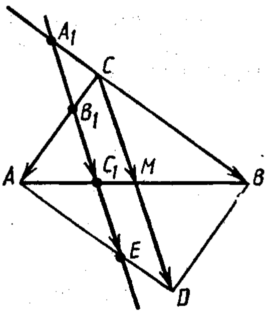


Рис. 17.4

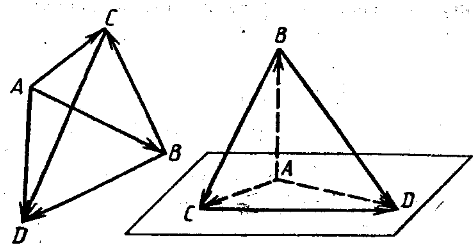


Рис. 17.5

Оскільки AM — медіана трикутника ACD і $B_1E \parallel CD$, то AC_1 — медіана трикутника AB_1E і $\overline{B_1C_1} = \overline{C_1E}$. Тепер $\overline{CA} + \overline{CB} = \overline{CD} = \overline{A_1E} = \overline{A_1C_1} + \overline{C_1E} = \overline{A_1C_1} + \overline{B_1C_1}$. ▲

Приклад 5. Дано два ненульових вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ таких, що $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$. Довести, що $\bar{a} \perp \bar{b}$.

△ **І с п о с і б.** Якщо на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах побудувати паралелограм, то вектори $\bar{a} + \bar{b}$ і $\bar{a} - \bar{b}$ збігатимуться з його діагоналями, довжини яких $|\bar{a} + \bar{b}|$ і $|\bar{a} - \bar{b}|$. Оскільки за умовою довжини діагоналей однакові, то здобутий паралелограм є прямокутником, звідки $\bar{a} \perp \bar{b}$.

ІІ с п о с і б. Нехай $\bar{x} = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{y} = \bar{a} - \bar{b}$. Тоді $\bar{x}^2 = (\bar{a} + \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2$, $\bar{y}^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2$. Квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля. Отже,

$$\bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 = |\bar{a} + \bar{b}|^2 \quad \text{і} \quad \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b} = |\bar{a} - \bar{b}|^2.$$

Праві частини останніх співвідношень рівні між собою за умовою. Отже, $\bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2$, звідки $\bar{a}\bar{b} = 0$. В силу формули (17.21) це означає, що $\bar{a} \perp \bar{b}$. ▲

Приклад 6. Дано два відрізки AB і CD. Довести, що коли $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$, то $AB \perp CD$. Чи справджується обернене твердження?

△ Розглянемо вектори $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ і $\overline{BC}$. Залежно від їхнього взаємного розміщення можна здобути плоску або просторову фігуру (рис. 17.5). Враховуючи, що $\overline{AB}^2 = |\overline{AB}|^2 = AB^2$, перетворимо дану рівність таким чином:

$$\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2;\quad \underbrace{(\overline{BD} - \overline{BC})}_{\overline{CD}}(\overline{BD} + \overline{BC}) =$$

$$= \underbrace{(\overline{AD} - \overline{AC})}_{\overline{CD}}(\overline{AD} + \overline{AC});\quad \overline{CD}(\underbrace{\overline{BD} - \overline{AD}}_{-\overline{AB}} + \underbrace{\overline{BC} - \overline{AC}}_{-\overline{AB}}) = 0;$$

$$-2\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 0;\quad \overline{AB}\cdot\overline{CD} = 0,$$

а це і означає, що $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

Виконуючи перетворення у зворотному порядку ($\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 0$, або $-2\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 0$, або $\overline{CD}(\overline{BD} + \overline{DA} + \overline{BC} + \overline{CA}) = 0$ і т. д.), переконуємося, що справджується і обернене твердження. ▲

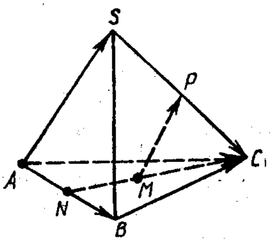


Рис. 17.6

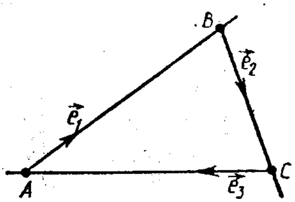


Рис. 17.7

Приклад 7. У піраміді $SABC$ всі грані — правильні трикутники; точка M — центр трикутника ABC, а точка P ділить ребро SC навпіл (рис. 17.6). Розкласти вектор MP за векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AS}$.

△ Маємо $\overline{MP} = \overline{MC} - \overline{PC}$, де $\overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{SC} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AS})$.

Отже, $\overline{MP} = \overline{MC} - \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AS})$. Тепер знайдемо $\overline{MC}$. У рівносторонньому трикутнику ABC маємо $MC = \frac{2}{3}CN$, де CN — висота трикутника, тому $\overline{MC} = \frac{2}{3}\overline{NC}$. Але $\overline{NC} = \overline{AC} - \overline{AN} = \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$, і, отже, $\overline{MC} = \frac{2}{3}\left(\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}\right) = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}$.

Таким чином, остаточно маємо

$$\overline{MP} = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AS} =$$

$$= \frac{1}{6}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AS}. \quad ▲$$

Приклад 8. Довести, що для будь-якого трикутника ABC виконується нерівність $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant 3/2$.

△ На сторонах трикутника побудуємо одиничні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (рис. 17.7). Сумою цих векторів є деякий вектор $\vec{d}$, тобто $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{d}$.

Піднесемо обидві частини до квадрата:

$$\bar{e}_1^2+\bar{e}_2^2+\bar{e}_3^2+2\bar{e}_1\bar{e}_2+2\bar{e}_1\bar{e}_3+2\bar{e}_2\bar{e}_3=\bar{d}^2,$$

або

$$1+1+1+2\cos(\pi-B)+2\cos(\pi-C)+2\cos(\pi-A)=|\bar{d}|^2.$$

Оскільки $|\bar{d}|^2 \geqslant 0$, то $3-2\cos B-2\cos C-2\cos A\geqslant 0$, звідки $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 3/2$. ▲

Приклад 9. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, довжина ребра якого дорівнює a. Знайти радіус сфери, проведеної через точки A, B, E і F, де E і F — точки на ребрі CC_1, причому $CE=EF=FC_1$.

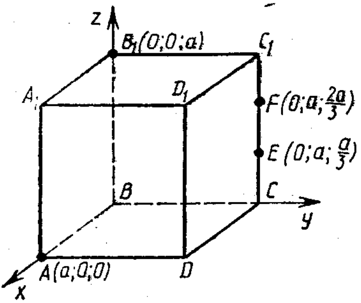


Рис. 17.8

△ **Введемо систему координат** (рис. 17.8), початком якої є точка B (0; 0; 0). У цій системі точки A, B_1, E і F мають такі координати:

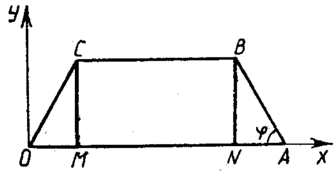


Рис. 17.9

A (a; 0; 0), B_1 (0; 0; a), E (0; a; a/3), F (0; a; $2a/3$). Нехай O (x; y; z) — центр шуканої сфери. Тоді $OA^2=OB^2=OE^2=OF^2=R^2$, де R — радіус сфери. Використовуючи формулу (17.12), яка виражає відстань між двома точками, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2+z^2=R^2, & (*)\\ x^2+y^2+(z-a)^2=R^2, & (**)\\ x^2+(y-a)^2+\left(z-\dfrac{a}{3}\right)^2=R^2, & (***)\\ x^2+(y-a)^2+\left(z-\dfrac{2a}{3}\right)^2=R^2. & (****)\end{cases}$$

Віднімаючи рівняння (****) від (***), дістаємо $\left(z-\frac{a}{3}\right)^2-\left(z-\frac{2a}{3}\right)^2=0$, звідки $2z-a=0$, тобто $z=a/2$. Підставимо це значення z у рівняння (*) та (**) і віднімемо (**) від (*). Тоді $x=a/2$. Віднімаючи рівняння (***) від (**), знаходимо, що $y=7a/18$. Після підстановки значень x, y і z в рівняння (**), остаточно дістанемо $R=a\sqrt{211}/18$. ▲

17.001. Дано коло $x^2+y^2=4$. Скласти рівняння прямої l, яка паралельна осі абсцис та перетинає це коло в таких точках M і N, що $MN=1$.

17.002. Дано три точки: A (2; 1), B (3; —1), C (—4; 0), які є вершинами рівнобічної трапеції $ABDC$. Знайти координати точки D, якщо $\overline{AB}=k\overline{CD}$.

17.003. Дано вершини трикутника: A (—2; —3), B (—1; 2), C (4; 1). Довести, що трикутник ABC рівнобедрений, і скласти рівняння прямої, яка містить висоту, проведену з вершини A.

17.004. У прямокутній системі координат зображено рівнобічну трапецію з основами 6 і 10 та кутом $\varphi = 60°$ при основі (рис. 17.9). Скласти рівняння сторін трапеції.

17.005. Скласти рівняння кола, що проходить через точки A (2; 0), B (5; 0) і дотикається до осі Oy.

17.006. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку (2; 3) і утворює з віссю Ox кут 120°. Знайти площу трикутника, утвореного цією прямою та осями координат.

17.007. У коло $x^2 + y^2 = R^2$ вписано квадрат $ABCD$. Знайти R і координати вершин B, C і D, якщо (5; —12) — координати вершини A.

17.008. Дано коло $x^2 + y^2 = 9$. Скласти рівняння кола, що проходить через початок координат і точку A (1; 0) та дотикається до даного кола.

17.009. Скласти рівняння кола, що проходить через точку A (2; 1) і дотикається до осей координат.

17.010. На прямій $5x - 2y + 9 = 0$ знайти точку A, рівновіддалену від точок B (—1; —3) і C (4; 1), та обчислити площу трикутника ABC.

17.011. Діагоналі ромба дорівнюють 15 і 8 см. Першу діагональ взято за вісь Ox, другу — за вісь Oy. Скласти рівняння сторін ромба і знайти відстань від початку координат до сторони ромба.

17.012. Скласти рівняння кола, вписаного у трикутник, сторони якого лежать на прямих $x = 0$, $y = 0$ та $3x + 4y - 12 = 0$.

17.013. Нехай A — точка перетину прямих $2x + 5y - 8 = 0$ та $x - 3y + 4 = 0$; O — початок координат. Знайти відстань OA і скласти рівняння прямої OA.

17.014. Знайти координати вершин C і D квадрата $ABCD$, якщо A (2; 1), B (4; 0).

17.015. При повороті навколо початку координат точка A (6; 8) переходить в точку A_1 (8; 6). Знайти косинус кута повороту.

17.016. Обчислити довжини діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$, якщо A (1; —3; 0), B (—2; 4; 1), C (—3; 1; 1).

17.017. Дано дві вершини рівностороннього трикутника: A (—2; 2), B (—2; —4). Знайти координати третьої вершини трикутника та його площу.

17.018. Знайти довжину хорди, що утворюється в результаті перетину прямої $x + y - 5 = 0$ та кола $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 40$.

17.019. Дано координати середини сторін трикутника: M_1 (—1; 2), M_2 (2; —3), M_3 (—3; —1). Знайти координати точки перетину медіан цього трикутника.

17.020. Дано координати двох вершин трикутника A (2; —1), B (—3; 5) та координати точки перетину медіан цього трикутника M (1; 1). Знайти координати вершини C.

17.021. Дано координати вершин чотирикутника A (2; —2), B (—3; 1), C (7; 7), D (7; 1). Довести, що $ABCD$ — трапеція, та знайти довжину її середньої лінії.

17.022. Скласти рівняння дотичних, проведених до кола $x^2 + y^2 = 9$ з точки M (5; 0).

17.023. Скласти рівняння кола, описаного навколо трикутника, утвореного прямою $3x - y + 6 = 0$ та осями координат.

17.024. Скласти рівняння сфери, що проходить через точку A (1; —1; 4) і дотикається до координатних площин.

17.025. Переконатися в тому, що існує лише одна точка з координатами x, y, z, сума квадратів відстаней від якої до заданих двох точок A (2; 3; —1), B (1; —1; 3) є сталою і дорівнює 16,5. Знайти координати цієї точки.

17.026. Дано точки A (1; 1), B (6;6), C (5; 4), D (2; 1). Довести, що $ABCD$ — трапеція, та знайти кут α між її діагоналями.

17.027. Довести, що трикутник з вершинами A (2; 1), B (3; 0), C (1; 5) є тупокутним, та знайти косинус тупого кута.

17.028. При яких значеннях α і β вектор $\bar{a}$ (3; —1; α) буде перпендикулярним до вектора $\bar{b}$ (2; β; 1), якщо $|\bar{b}| = 3$?

17.029. Дано три вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Довести, що вектор $(\bar{b}\bar{c})\ \bar{a} - (\bar{a}\bar{c})\ \bar{b}$ перпендикулярний до вектора $\bar{c}$.

17.030. Довести, що сума квадратів довжин всіх ребер паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів довжин всіх його діагоналей.

17.031. Дано точки A_1 (0; 1; 2), A_2 (1; 2; 4), B_1 (—1; —1; 3), B_2 (1; 0; 0); M_1 і M_2 — середини відрізків A_1B_1 та A_2B_2. Знайти вектор $\overline{M_1M_2}$ та його модуль.

17.032. Довести, що трикутник з вершинами A (6; —4; 2), B (3; 2; 3), C (3; —5; —1) прямокутний.

17.033. Нехай O — точка перетину медіан трикутника ABC і $\overline{AO} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$. Розкласти $\overline{AB}$ та $\overline{BC}$ за векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

17.034. При яких значеннях x вектори $(x^3 - 1)\ \bar{a}$ та $2x\bar{a}$ будуть однаково напрямлені, якщо $\bar{a} \neq \bar{0}$?

17.035. При яких значеннях m вектори $(m^2 - m - 2)\ \bar{b}$ та $m^3\bar{b}$ будуть протилежно напрямлені, якщо $\bar{b} \neq \bar{0}$?

17.036. При яких значеннях x вектори $(5x - x^2)\ \bar{a}$ та $\bar{a}$ будуть однаково напрямлені і виконуватиметься нерівність $|(x - 5)\ \bar{a}| \leqslant |3\bar{a}|$?

17.037. При яких значеннях y вектори $(3y^2 - 11y + 6)\ \bar{p}$ та $(y^2 + 1)\ \bar{p}$ протилежно напрямлені, якщо $\bar{p} \neq \bar{0}$?

17.038. При яких значеннях x і y вектори (x; —2; 5) та (1; y; —4) колінеарні?

17.039. При яких x виконується нерівність $|(x - 2)\ \bar{a}| > 3\,|\bar{a}|$, якщо $\bar{a} \neq \bar{0}$?

17.040. Нехай K і M — середини сторін BC і CD паралелограма $ABCD$ і $\overline{AK} = \bar{a}$, $\overline{AM} = \bar{b}$. Записати вектори $\overline{BD}$ і $\overline{AD}$ через $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

17.041. У паралелограмі $ABCD$ дано: $M \in BC$ і $BM : MC = 1 : 2$; $N \in DC$, $DN : NC = 1 : 2$; $\overline{AM} = \bar{a}$; $\overline{AN} = \bar{b}$. Записати вектори $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{MN}$ та $\overline{BD}$ через $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

17.042. У тетраедрі $ABCD$ медіана DD_1 грані ADB ділиться точкою M у відношенні $DM : MD_1 = 3 : 7$. Розкласти вектор $\overline{CM}$ за векторами $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ і $\overline{CD}$.

17.043. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ довжина кожного ребра дорівнює a. Точка $M \in SC$ і $SM : MC = 2 : 1$. Знайти кут між векторами $\overline{DC}$ і $\overline{AM}$.

17.044. Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (вершини основи $ABCD$ розміщені за годинниковою стрілкою); K — середина ребра AA_1; H — середина ребра AD; M — центр грані CC_1D_1D. Довести, що пряма KM перпендикулярна до прямої B_1H.

17.045. Довести, що для будь-якого трикутника ABC виконується нерівність $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -3/2$.

17.046. Дано: пряма трикутна призма $ABCA_1B_1C_1$; $\overline{BB_1} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$ і $\overline{BA} = \bar{c}$; O — точка перетину медіан трикутника ABC. Розкласти $\overline{A_1O}$ за векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$.

17.047. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $AA_1 = 10$, $AD = 6$, $AB = 8$. Знайти косинус кута між векторами $\overline{DB_1}$ та $\overline{AD_1}$.

17.048. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1. Знайти кут між векторами $\overline{MN}$ і $\overline{DC}$, якщо $M \in AA_1$ і $AM : MA_1 = 1 : 2$; $N \in CC_1$ і $CN : NC = 2 : 1$.

17.049. Медіани бічних сторін рівнобедреного трикутника перетинаються під кутом 60°. Знайти кут при вершині трикутника.

17.050. У трикутнику ABC дано: $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$. $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 2$, $\angle BAC = 60°$. Записати через $\bar{a}$ і $\bar{b}$ одиничний вектор, напрямлений вздовж висоти трикутника, проведеної з вершини A.

17.051. Дано вектори $\bar{a}$ (2; —3; 5), $\bar{b}$ (—1; 1; —3) і $\bar{c}$ (3; 7; 1). Знайти координати вектора $\bar{p}$ (x, y, z), якщо $\bar{p}\bar{a} = 12$, $\bar{p}\bar{b} = -6$ і $\bar{p} \perp \bar{c}$.

17.052. Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ лежать в одній площині і утворюють попарно один з одним кути $2\pi/3$. Розкласти вектор $\bar{a}$ за векторами $\bar{b}$ і $\bar{c}$, якщо $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 1$.

17.053. Дано координати вершин чотирикутника: A (—1; 2; 3), B (—1; 3; 1), C (—1; 7; 3), D (—1; 6; 5). Довести, що $ABCD$ — прямокутник.

17.054. У трикутнику ABC дано: $\overline{AB} = 4\bar{i} + 2\bar{j}$, $\overline{AC} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, де $\bar{i}$ та $\bar{j}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори. Довести, що трикутник ABC прямокутний, та обчислити його площу.

17.055. У колі проведено радіуси OA, OB, OC. Визначити величину кута AOB, якщо $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$.

17.056. Знайти об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ і $\overline{OC}$, якщо $|\overline{OA}| = 5$, $|\overline{OB}| = 2$, $|\overline{OC}| = 6$; $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$, $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$, $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 8$.

17.057. Дано прямокутний трикутник ABC; $\angle C = 90°$, D — основа висоти, проведеної з вершини прямого кута. Записати вектор $\overline{CD}$ через вектори $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$.

17.058. Сторони трикутника ABC пов'язані співвідношенням $a^2 + b^2 = 5c^2$. Довести, що дві медіани трикутника перпендикулярні. Чи виконується обернене твердження?

17.059. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти косинус кута між векторами $\overline{DA_1}$ і $\overline{DM}$, де M — середина ребра CC_1.

17.060. Дано координати вершин піраміди: S (0; 0; 2), A (0; 0; 0), B (1; 0; 0), C (0; 1; 0). Знайти координати точки M, що лежить на осі Oz, та координати точки N, що знаходиться у площині SBC, коли відомо що $\overline{MN}$ (1/3; 1/3; 0).

17.061. У ромбі $ABCD$ довжина сторони дорівнює 6, а величина кута BAD дорівнює $\pi/3$. На стороні BC взято точку E таку, що $EC = 2$. Знайти відстань від точки E до центра симетрії ромба.

17.062. Дано одиничні вектори $\bar{m}$, $\bar{n}$ і $\bar{p}$ такі, що $\bar{m} \perp \bar{n}$, $\bar{n} \perp \bar{p}$ і кут між $\bar{m}$ і $\bar{p}$ дорівнює 60°. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = 3\bar{m} - 2\bar{n} + \bar{p}$ і $\bar{b} = -2\bar{m} + \bar{n} - \bar{p}$.

17.063. У трикутнику ABC точка N лежить на стороні AB і $AN = 3NB$; медіана AM перетинається з CN у точці O. Знайти AB, якщо $AM = CN = 7$ см і $\angle NOM = 60°$.

17.064. Знайти кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо $(\bar{a} - \bar{b})^2 + (2\bar{a} - \bar{b})^2 = 56$, $|\bar{a}| = 2$ і $|\bar{b}| = 3$.

17.065. Знайти косинус кута між діагоналями паралелограма $ABCD$, якщо $\overline{AB} = \bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}$, $\overline{AD} = 4\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$, де $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — одиничні попарно перпендикулярні вектори.

17.066. У паралелограмі $ABCD$ точка K — середина сторони BC, а точка M — середина сторони CD. Знайти AD, якщо $AK = 6$ см, $AM = 3$ см і $\angle KAM = 60°$.

17.067. Дано вектор $\bar{a}$ (1; —2; 5). Знайти координати вектора $\bar{b}$, розміщеного у площині xOy і перпендикулярного до вектора $\bar{a}$, якщо $|\bar{b}| = 2\sqrt{5}$.

17.068. Нехай $\bar{i}$, $\bar{j}$ і $\bar{k}$ — одиничні вектори, напрямлені вздовж координатних осей, і $\bar{a} = 6\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}$. Знайти косинуси кутів, утворених вектором $\bar{a}$ з векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$ і $\bar{k}$.

17.069. Вектор $\overline{OA}$ утворює з осями Ox, Oy і Oz кути, що відповідно дорівнюють $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = \pi/4$; точка B має координати $(-2; -2; -2\sqrt{2})$. Знайти кут між векторами $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$.

17.070. Знайти медіану AM трикутника ABC, якщо $AB = 10$ см, $AC = 6$ см і $\angle ABC = 60°$.

17.071. Дано правильний п'ятикутник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Розкласти вектор $\overline{A_1A_3}$ за векторами $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_5}$.

17.072. Дано два вектори: $\bar{a}$ $(x; 1; -1)$ і $\bar{b}$ (1; 0; 1). При якому значенні x виконується рівність $(\bar{a} + 3\bar{b})^2 = (\bar{a} - 2\bar{b})^2$?

17.073. До кола з центром O із точки M проведено дві дотичні, A і B — точки дотику. Розкласти вектор $\overline{MO}$ за векторами $\overline{MA}$ і $\overline{MB}$, якщо $\angle AMB = \alpha$.

17.074. На стороні AB паралелограма $ABCD$ взято точку K так, що $AK : KB = 7$. Сторона AB у три рази довша за сторону BC. Розкласти $\overline{DK}$ за $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ і знайти відношення $DK : AB$, якщо $\angle BAD = 60°$.

17.075. На сторонах BC, CA і AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) дано відповідно точки A_1, B_1, C_1. Довести, що відрізки CC_1 і A_1B_1 перпендикулярні і рівні між собою, якщо точки A_1, B_1, C_1 ділять сторони трикутника по обходу у рівних відношеннях.

17.076. У трикутнику ABC дано: $AB = BC$; D — середина сторони AC; DK перпендикулярна до BC; точка M — середина відрізка DK. Довести, що прямі AK і BM перпендикулярні між собою.

17.077. Нехай $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — одиничні вектори, напрямлені вздовж координатних осей, і $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\alpha\bar{k}$, $\bar{b} = \alpha^2\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}$. При яких значеннях α вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ перпендикулярні між собою?

17.078. Дано вершини трикутника: A (—1; 1); B (—5; 4) і C (7; 2). Знайти скалярний добуток $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ і площу трикутника.

17.079. Медіани граней SAB і SAC тетраедра $SABC$ перетинаються відповідно в точках M і N. Довести, що $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, та знайти відношення $|\overline{MN}| : |\overline{BC}|$.

17.080. Дано вектори $\bar{a}$ $(6; -8; 5\sqrt{2})$ і $\bar{b}$ $(2; -4; \sqrt{2})$. Знайти кут, утворений вектором $\bar{a} - \bar{b}$ з віссю Oz.

17.081. Дано три ненульові вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, кожні два з яких неколінеарні. Знайти їхню суму, якщо $(\bar{a} + \bar{b}) \parallel \bar{c}$ і $(\bar{b} + \bar{c}) \parallel \bar{a}$.

17.082. Довести, що коли бісектриси двох плоских кутів тригранного кута перпендикулярні, то бісектриса третього плоского кута перпендикулярна до кожної з них.

17.083. Дано вершини трикутника: M (1; 1; 4), N (1; 4; 4) і K (3; 3; 2). Довести, що $\overline{ON} \perp \overline{MK}$, де O — середина сторони MK. Визначити тип трикутника.

17.084. Довести, що для будь-яких чотирьох даних точок A, B, C, D має місце рівність $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$.

17.085. Знайти модуль проекції вектора $\bar{a}$ (7: —4) на вісь, паралельну вектору $\bar{b}$ (—8; 6).

17.086. Знайти кут між медіанами, проведеними до катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, повернутий до гіпотенузи.

17.087. Дано паралелограм $ABCD$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, K — середина BC і P — середина DC. Виразити суму векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CB}$ через вектори $\overline{AK} = \bar{a}$ і $\overline{AP} = \bar{b}$.

17.088. Довести, що коли суми квадратів протилежних ребер тетраедра рівні, то ці ребра попарно перпендикулярні.

17.089. У ромбі $ABCD$ точки M і N — середини сторін BC і CD. Знайти $\angle MAN$, якщо $\angle BAD = 60°$.

17.090. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $AD = a$, $DC = b$; $DD_1 = c$. Знайти гострий кут між прямими BD_1 і A_1D.

17.091. Дано вершини трикутника: A (—2; 1; —3), B (4; —7; 1) і C (1; 2; —1). Знайти кут між стороною CA і медіаною, проведеною з вершини C.

17.092. Одиничні вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ і $\bar{e}_3$ задовольняють умову $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = \bar{0}$. Знайти суму $\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_3\bar{e}_1$.

17.093. Дано неплоску замкнену лінію $ABCD$. Довести, що коли $\angle ABC = \angle DAB = 90°$ і $DA = CB$, то $\angle ADC = \angle BCD$.

17.094. Дано тетраедр $ABCD$ і точку M на площині його грані ABC. Довести, що для розкладу $\overline{DM} = \alpha \overline{DA} + \beta \overline{DB} + \gamma \overline{DC}$ виконується рівність $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

17.095. Дано довжини ребер тетраедра $ABCD$. Знайти косинус кута між протилежними ребрами AB і CD.

17.096. Знайти одиничний вектор, перпендикулярний до векторів $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ і $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

17.097. Знайти відношення, на які точка P перетину бісектрис трикутника ABC ділить кожну бісектрису, якщо $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

17.098. Дано трикутник ABC; $AB = 4$ см; $AC = 8$ см; $\angle BAC = 60°$. Знайти довжину вектора $\overline{AN}$, де $N \in BC$ і $BN : NC = 3 : 1$.

17.099. У тетраедрі $OABC$ плоскі кути тригранного кута при вершині O — прямі. Точка H — основа перпендикуляра, проведеного з вершини O до площини грані ABC. Розкласти вектор $\overline{OH}$ за векторами $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ і $\overline{OC}$, якщо $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

17.100. Дано трикутник ABC; BD — медіана; $\angle DBC = 90°$; $BD = (\sqrt{3}/4)\, AB$. Знайти $\angle ABD$.

17.101. Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ і $\overline{OC}$, дорівнює $\sqrt{15}$. Визначити довжину вектора $\overline{OC}$, якщо $\overline{OA} \times \overline{OB} = 1$, $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$, $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 0$, $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = 2$.

17.102. Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ і $\overline{OC}$, дорівнює $\sqrt{3}/3$. Визначити $\overline{OA} \cdot \overline{OC}$, якщо $|\overline{OB}| = 2$, $|\overline{OA}| = 1$, $|\overline{OC}| = 3$, $\overline{OB} \cdot \overline{OA} = 0$, $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 0$.

17.103. Знайти об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ і $\overline{OC}$, якщо $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = 5$, $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$, $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$, $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 20$.

17.104. На площині задано точки $A(-6; -1)$, $B(-4; -4)$, $C(-1; -6)$, $D(-3; -3)$. Довести що $ABCD$ — ромб, та обчислити його площу.

17.105. Дано трикутник ABC; $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 8$; $|\overline{AB}| = 10$; $|\overline{BC}| = 6$. Знайти висоту, опущену з вершини B. Гострим чи тупим є кут ABC?

17.106. Дано вектори $\bar{a}(2; -1; 3)$, $\bar{b}(1; -3; 2)$, $\bar{c}(3; 2; -4)$. Знайти вектор $\bar{x}$, якщо $\overline{xa} = -5$; $\overline{xb} = -11$, $\overline{xc} = 20$.

17.107. Дано вектори $\bar{a}(3; 2; 2)$ і $\bar{b}(18; -22, -5)$. Знайти вектор $\bar{x}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, утворює з віссю Oy тупий кут, а його довжина дорівнює 14.

17.108. Дано два вектори $\overline{OA}(-1; 2)$ і $\overline{OB}(-4; -2)$, де O — початок координат. Знайти довжину відрізка AB, площу трикутника OAB і довжину медіани OM.

17.109. Знайти вектор $\bar{b}$, колінеарний вектору $\bar{a}(2\sqrt{2}; -1; 4)$, якщо $|\bar{b}| = 10$.

17.110. Довести, що коли в тетраедрі $ABCD$ протилежні ребра попарно перпендикулярні, то $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

17.111. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{AK}$ і $\overline{BL}$, якщо AK і BL — медіани рівнобедреного трикутника ABC, площа якого дорівнює S, а $\angle A = 120°$.

17.112. Дано вершини тетраедра: $A(3; -2; 1)$, $B(3; 1; 5)$, $C(4; 0; 3)$, $D(0; 0; 0)$. Медіани граней ADB і BDC перетинаються в точках M_1 і M_2. Знайти відношення $AC : M_1M_2$.

17.113. Дано правильний п'ятикутник $ABCDE$. Розкласти вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AE}$ за векторами $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$.

17.114. У куб вписано сферу. Довести, що сума квадратів відстаней кожної точки сфери до вершин куба не залежить від вибору цієї точки. Знайти цю суму.

17.115. У квадрат вписано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору цієї точки. Знайти цю суму.

17.116. Навколо квадрата описано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від точок кола до вершин квадрата не залежить від вибору цих точок. Знайти цю суму.

17.117. Дано прямокутник $ABCD$. Довести, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки простору до вершин A і C дорівнює сумі квадратів її відстаней до вершин A і D.

17.118. Довести, що в прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сума квадратів відстаней від будь-якої точки простору до вершин A, B_1, C і D_1 дорівнює сумі квадратів її відстаней до вершин A_1, B, C_1 і D.

17.119. У трикутнику ABC кут при вершині A дорівнює 60°, $\overline{AB}(4; 2; 4)$, $AC = 1$. Знайти косинус кута між медіаною AA_1 і стороною AB.

17.120. Знайти бісектрису AM трикутника ABC, якщо $AB = c$, $AC = b$ і $\angle A = \alpha$.

17.121. Точки M і N — середини відрізків AB і CD. Довести, що $MN \leqslant \frac{1}{2}(AC + BD)$, $MN \leqslant \frac{1}{2}(BC + DA)$.

17.122. Дано трикутник ABC; M — точка перетину його медіан. Довести, що $OM < \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$, де O — довільна точка простору.

17.123. Дано трикутник ABC. Пряма l перетинає прямі BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Довести, що вектори $\overline{AB} + \overline{A_1B_1}$, $\overline{BC} + \overline{B_1C_1}$, $\overline{CA} + \overline{C_1A_1}$ колінеарні.

17.124. У коло вписано трикутник ABC. Пряма, що містить медіану CC_1 трикутника, перетинає коло повторно в точці D. Довести, що $CA^2 + CB^2 = 2CC_1 \cdot CD$.

17.125. У рівнобедреному трикутнику ABC, що має площу S, проведено висоти AM і BN. Знайти скалярний добуток $\overline{AM} \cdot \overline{BN}$ за умови, що точки M і N лежать на бічних сторонах трикутника, а довжина його основи дорівнює c.

17.126. Нехай вектор $\bar{a}$ має координати $\frac{2m}{1+m^2}$ і $\frac{1-m^2}{1+m^2}$, а вектор $\bar{b}$ — координати $\frac{1-k^2}{1+k^2}$ і $\frac{2k}{1+k^2}$. Довести, що обидва вектори одиничні: $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$. Використовуючи властивість скалярного добутку $|\bar{a} \cdot \bar{b}| < |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, довести справедливість нерівності

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(m+k)(1-mk)}{(1+m^2)(1+k^2)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

17.127. У прямокутному трикутнику ABC відомо довжини катетів: $AC = 3$ см, $BC = 4$ см. Точка M ділить гіпотенузу у відношенні $AM : MB = 3 : 4$. На які частини вектор $\overline{CM}$ ділить кут C?

17.128. Довести, що промінь CM, де C — вершина прямого кута трикутника ABC, а M — центр квадрата, побудованого на гіпотенузі і розміщеного поза ним, є бісектрисою кута C.

17.129. Дано п'ятикутник $ABCDE$: точки M, N, P і Q — відповідно середини його сторін AB, BC, CD і DE. Довести, що коли U і V — відповідно середини MP і NQ, то вектор $\overline{UV}$ колінеарний вектору $\overline{AE}$. Знайти відношення $AE : UV$.

17.130. У коло з центром O вписано чотирикутник $ABCD$. Його діагоналі, що перетинаються в точці P, взаємно перпендикулярні. Довести, що середини сторін AB і CD, центр O і точка P є вершинами паралелограма.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

Необхідні обчислення треба виконувати, не користуючись технічними засобами: калькулятором, логарифмічною лінійкою, таблицями тощо.

Варіант I

1. У рівнянні $x^2 + bx - 12 = 0$ один із коренів дорівнює 3. Знайти значення коефіцієнта b.

2. Спростити вираз $(2x^{1/2} - y^{-1/4})(2x^{1/2} + y^{-1/4})$ і обчислити його значення при $x = 1{,}2$ і $y = 4$.

3. Знайти суму коренів рівняння $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot (10^{x-1})^3$.

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{2{,}1x+1} = x - 1$.

5. Знайти суму цілих значень x, які задовольняють нерівність $x^2 - 3x < 4$.

6. Використовуючи формули тотожних перетворень, обчислити $\cos 50° \cos 40° - 2 \sin 50° \sin 20° \cos 20°$.

7. Знайти найменший корінь рівняння $2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0$, який міститься в інтервалі $(0°; 90°)$. Відповідь записати в градусах.

8. Площа рівнобічної трапеції 180 см². Довжина середньої лінії дорівнює 45 см; довжина бічної сторони 5 см. Знайти довжину меншої основи трапеції.

9. Висота конуса дорівнює 3; кут між висотою і твірною дорівнює 45°. У цей конус вписано інший конус так, що його вершина збігається з центром основи першого конуса, а відповідні твірні конусів перпендикулярні. Знайти об'єм вписаного конуса (покласти $\pi = 3{,}14$ і заокруглити відповідь до сотих).

10. Обчислити $f'(\pi/2)$, якщо $f(x) = 0{,}5 \sin x \operatorname{tg} 2x + 2{,}5 \cos x$.

Варіант II

1. Обчислити $\dfrac{4\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$.

2. Розв'язати рівняння $2x + \sqrt{3x-2} = 3$.

3. Знайти число цілих розв'язків нерівності $5 + \dfrac{17}{x-2} < \dfrac{2}{x+3}$.

4. Розв'язати рівняння $\log_5 x - \log_5 (x-4) = 1$.

5. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 24 і 10, а радіус описаного навколо неї кола дорівнює 13. Знайти висоту трапеції за умови, що центр описаного кола розміщується поза трапецією.

6. Знайти суму квадратів найбільшого і найменшого значень функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на відрізку $[-1; 2]$.

7. Знайти число розв'язків рівняння $\sin 3x - \cos 3x = 0$ на відрізку $[0; \pi]$.

8. Сума четвертого і п'ятого членів геометричної прогресії дорівнює 20, а сума третього і четвертого членів дорівнює 5. Знайти шостий член цієї прогресії.

9. Металеву кулю радіуса $R = \sqrt[3]{2}$ переплавлено і з неї відлито конус, площа бічної поверхні якого у три рази більша за площу основи. Знайти висоту конуса.

10. Розв'язати рівняння $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x$.

Варіант III

1. Спростити вираз

$$\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1} + 2\sqrt{x}$$

і знайти його значення при $x = 7$.

2. Знайти $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$.

3. Розв'язати рівняння $4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x-2} = 1$.

4. Знайти $f'(\pi/4)$, якщо $f(x) = 2\sqrt{2} \sin^3 x$.

5. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 30, а висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 24. Знайти бічну сторону.

6. Знайти суму коренів рівняння $f(x) + 4f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

7. Знайти добуток коренів рівняння $\cos^2 \frac{\pi x}{2} = 1$, які належать відрізку $[\pi; 3\pi]$.

8. Знайти ціле число, яке задовольняє систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_{1/2}(2x - 3) > -3, \\ x^2 - 4x > 0. \end{cases}$$

9. З точки, віддаленої від площини на відстань $5\sqrt{2}$, проведено дві похилі, що утворюють з площиною кути 45°, а між собою — кут 60°. Знайти відстань між основами похилих.

10. Вектор $\bar{a}\ (x; -1; 2)$ перпендикулярний до вектора $\bar{b}\ (1; 2; 0)$. Знайти модуль вектора $\bar{a}$.

Варіант IV

1. Обчислити $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5} - \frac{5}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{5}\right)^3}\right)^{1/2} - \sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{4}$.

2. Знайти всі цілі значення x, що задовольняють нерівність $\frac{4 - x}{x - 5} \geqslant 1 - \frac{4}{x}$.

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 + 8} = 6$.

4. Знайти корені рівняння $2^{1+\log_2 x} + 4^{1+\log_2 x} = 110$.

5. Рівнобічна трапеція з основами 2 і 3 см і кутом 60° обертається навколо меншої основи. Знайти об'єм тіла обертання і записати відповідь, заокругливши його до найближчого числа.

6. Скільки коренів рівняння $\cos^2 2x + \cos^2 6x = 1$ міститься у проміжку $[-\pi/8; \pi/2]$?

7. Знайти координату середини відрізка, на якому справедлива нерівність $\log_{0,1}(x^2 - x + 8) \geqslant -1$.

8. Знайти два числа, якщо їхнє середнє арифметичне на 16 менше за більше з цих чисел, а середнє геометричне на 8 більше за менше з них.

9. Спростити вираз $\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin(45^\circ - \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha}\right)^6$.

10. Знайти найменше і найбільше значення функції $y = \sqrt{x(10 - x)}$ в області її визначення.

Варіант V

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{x - 4} + \sqrt{x + 24} = 14$.

2. Спростити

$$\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}\right) : \frac{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{(5b)^2}; \quad a > b > 0.$$

3. Знайти більший корінь рівняння

$$\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg\frac{1}{x}.$$

4. Знайти найменше додатне ціле x, що задовольняє нерівність $\sqrt{0{,}8^{x(x-3)}} > 0{,}64$.

5. Обчислити $\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$.

6. Знайти корінь рівняння $\sin x - 1 = 0{,}5\sin 2x - \cos x$, який міститься в інтервалі $0° < x < 180°$. Відповідь записати в градусах.

7. У рівнобедреному трикутнику висота відноситься до основи, як 3 : 4, а бічна сторона дорівнює $2\sqrt{39}$ см. Знайти площу трикутника.

8. Металевий циліндр з діаметром основи $d = 4$ см і висотою $h = 4$ см переплавили в кулю. Обчислити радіус цієї кулі (вважати $\sqrt[3]{12} \approx 2{,}3$).

9. Число 26 розбити на такі два доданки, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.

10. Розв'язати рівняння $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

Варіант VI

1. Обчислити $\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}$.

2. Обчислити $3x + y + z$, якщо $x + y + 2z = 14$, $2x + y + z = 10$, $x + 2y + z = 12$.

3. Розв'язати рівняння $\log_2(17 - 2^x) = 4 - x$.

4. Обчислити значення 10^x при $x = \lg 12 + (\log_4 10)^{-1}$.

5. Дано: $\operatorname{ctg} 2\alpha = 3/4$, $0 < \alpha < \pi/2$. Знайти $\cos^2\alpha$.

6. Скільки коренів рівняння $\sin x + \cos x = 1{,}4$ міститься на відрізку $[-\pi; 3\pi]$?

7. Знайти координату середини відрізка, на якому справедлива нерівність $3\sqrt[6]{x+1} - \sqrt[3]{x+1} \geqslant 2$.

8. Восьмий член арифметичної прогресії дорівнює 2, одинадцятий член дорівнює 11. Скільки членів прогресії, починаючи з першого, треба взяти, щоб їхня сума дорівнювала 30?

9. Знайти квадрат найбільшого значення функції $f(x) = \sin x + \cos x$.

10. Через вершину конуса проведено площину, що утворює з площиною основи кут, косинус якого дорівнює 1/3, і відтинає на колі основи дугу 90°. Відстань від центра основи до цієї площини дорівнює $2/\sqrt[3]{\pi}$. Знайти об'єм конуса.

Варіант VII

1. Обчислити $(4^{-0{,}25} - 2^{0{,}5})(4^{-0{,}25} + (2\sqrt{2})^{1/3})$.

2. Обчислити значення виразу $x - y + 2z$, якщо $x + y = 4$, $y + z = 8$, $x + z = 6$.

3. Розв'язати рівняння $\frac{1}{2x}\lg 2 = \lg(2^{1/x} - 2)$.

4. Скільки коренів рівняння $\sin x + \cos 2x = 0$ міститься на відрізку $[-\pi; 3\pi]$?

5. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$; $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Обчислити значення виразу $25\sin^2\alpha\cos\alpha$.

6. Знайти довжину відрізка, на якому виконується нерівність $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} \leqslant 6$.

7. Скільки разів перетинає вісь абсцис графік функції $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x$?

8. Сума сьомого і одинадцятого членів арифметичної прогресії дорівнює 10, а сума п'ятого і десятого членів дорівнює 1. Знайти суму 20 перших членів.

9. Обчислити $f'(1)$, якщо $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} - \sqrt{x}$.

10. Бічна сторона рівнобічної трапеції в три рази довша за меншу основу. Бісектриси тупих кутів цієї трапеції перетинаються в точці, розміщеній на основі. Знайти відношення площі трапеції до площі трикутника, утвореного меншою основою і бісектрисами.

Варіант VIII

1. Розв'язати рівняння $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{3x}{2x-2} = -\dfrac{5}{2}$.

2. Знайти x в градусах, якщо $180° < x < 360°$ і $\cos^2(180° + x) + 3\cos^2(90° + x) = 2$.

3. Знайти найбільше значення x, при якому виконується нерівність $x^2 + 4(\sqrt{4-x})^2 - 21 \leqslant 0$.

4. Розв'язати рівняння $2\sqrt[4]{3x+0{,}1} = 3\sqrt{3x+0{,}1} - 1$.

5. Різниця довжин основ трапеції дорівнює 14 см; довжини бічних сторін дорівнюють 13 і 15 см. Обчислити площу трапеції за умови, що в цю трапецію можна вписати коло.

6. Моторний човен пройшов 60 км проти течії річки і 60 км за течією, витративши на шлях проти течії на 50 хв більше, ніж на шлях за течією. Знайти швидкість течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 21 км/год.

7. Знайти ціле число x, якщо

$$\frac{\sqrt[3]{9^2}\cdot(1/3)^6}{(\sqrt[3]{3})^{-1}\cdot 27^{-2/3}} = \frac{x}{3(\sqrt[3]{3})^4}.$$

8. Обчислити значення виразу $27\cos^4 2\alpha$, якщо $\cos(3\pi - 4\alpha) = 2/3$

9. Знайти суму і добуток коренів рівняння

$$x^2 6^{-x} + 6^{\sqrt{x}+2} = x^2 6^{\sqrt{x}} + 6^{2-x}.$$

10. Обчислити значення A, якщо $A = 4^B$, де $B = \log_2 5 + \log_{1/4} 10$.

Варіант IX

1. Знайти ціле число x, якщо

$$\frac{(x-1)(\sqrt[4]{9})^3}{\sqrt{27}\cdot(1/3)^3} = \frac{9^2}{(\sqrt[6]{9})^3}.$$

2. Розв'язати рівняння $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$.

3. Розв'язати рівняння $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$.

4. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 32 см². Знайти бічну сторону, якщо кут при основі трапеції дорівнює $\pi/6$.

5. Знайти синус більшого гострого кута прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника, в 2,5 рази більший за радіус вписаного кола.

6. Спростити вираз

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(2\pi - \alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \cos^2(\pi - \alpha).$$

7. Обчислити $(0{,}001^{\lg 3 - 1} + 0{,}01^{\lg 0{,}3 + 0{,}5}) \cdot 2{,}7$.

8. На ребрі двогранного кута, що дорівнює 120°, взято відрізок $AB = 3$ см; із його кінців у різних гранях до нього проведено перпендикуляри $AC = 1$ см і $BD = 2$ см. Обчислити відстань між точками C і D.

9. Дано: $F(x) = \frac{x}{2 - x} + 2$. Знайти суму коренів рівняння $F(x) = F'(x)$.

10. Знайти площу трикутника, утвореного відрізками осей Ox і Oy та прямою, що проходить через точки (0; 4) і (4; 2).

Варіант X

1. Знайти ціле число $2x$, якщо

$$\frac{x + 5{,}5}{14}(4 + \sqrt{2}) = \frac{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})}{8^{2/3} - 2^{1/2}}.$$

2. Знайти значення виразу $x^2 + y^2$, якщо $2x + y = 2$, $x + 3y = 3$.

3. Розв'язати рівняння $\log_{1/2}(x - 1) + \log_{1/2}(x + 1) - \log_{1/\sqrt{2}}(7 - x) = 1$.

4. Скільки цілих значень x задовольняють нерівність $x^2 + 8x < 20$?

5. Розв'язати рівняння $2^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 6{,}5$.

6. Знайти значення виразу $\operatorname{tg}^2 15° + 4\operatorname{tg} 60°$.

7. Скільки коренів рівняння $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$ міститься на проміжку $[0; \pi]$?

8. Шостий член арифметичної прогресії в 4 рази менший за дев'ятий член, а їх сума дорівнює 20. Знайти суму дев'яти перших членів прогресії.

9. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = x \ln x$.

10. Через вершини довільного чотирикутника проведено прямі, паралельні його діагоналям. Знайти відношення площі паралелограма, утвореного цими прямими, до площі даного чотирикутника.

Варіант XI

1. Знайти ціле число $3x$, якщо

$$\left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{9^{1/2}\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{2^{3/2}(3 - \sqrt{5})} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}.$$

2. Знайти значення виразу $x^2 - y$, якщо $2x - 5y = 0$, $x + 10y = 2$.

3. Обчислити значення 5^x при $x = \log_4 16 + 1{,}5 \log_{1/3} 3 - \lg\sqrt{5} - \lg\sqrt{2}$.

4. Обчислити довжину відрізка, на якому виконується нерівність $x^2 - x \leqslant 6$.

5. Розв'язати рівняння $4 \cdot 5^x - 5^{-x} + \lg 100 = 5$.

6. Спростивши вираз, обчислити $\cos 20° - \sin 20° \operatorname{ctg} 10°$.

7. Скільки коренів має рівняння $\cos x - \cos 3x - \sin 2x = 0$ на проміжку $[0; \pi]$?

8. Дослідити функцію $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$. Скільки разів її графік перетинає вісь Ox?

9. Сума шостого і дев'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 20, а їхній добуток дорівнює 64. Знайти десятий член цієї прогресії, якщо перший її член від'ємний.

10. Осьовий переріз конуса — рівносторонній трикутник. Знайти відношення об'єму конуса до об'єму вписаної в нього кулі.

Варіант XII

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$.

2. У трикутнику з основою 15 см проведено відрізок, паралельний основі. Площа здобутої трапеції становить 75 % від площі трикутника. Знайти довжину цього відрізка.

3. Спростити вираз $\dfrac{\sin(60° + \alpha)}{4\sin\left(15° + \frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75° - \frac{\alpha}{4}\right)}$, а потім знайти його значення, якщо $\sin\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right) = 0{,}8$, $0° < \alpha < 90°$.

4. Розв'язати рівняння $\lg^2(100x) - \lg^2(10x) + \lg x = 9$.

5. Знайти найменший з від'ємних розв'язків нерівності $\sqrt{\dfrac{3+2x}{4-x}} > -\sqrt{3}$.

6. Скільки коренів, які не перевищують за абсолютною величиною π, має рівняння $1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos^4 x - \sin^4 x$?

7. Розв'язати рівняння $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} - \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3} = 0$.

8. Відношення середнього арифметичного двох додатних чисел до середнього геометричного цих самих чисел дорівнює 13/12. Знайти відношення більшого із заданих чисел до меншого.

9. Дано: $\cos 3\alpha = 2/3$. Обчислити значення виразу $81\cos^2\left(6\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.

10. Довести, що функція $f(x) = \sin^2 2x + 0{,}5\cos 4x + 2\sin^2 x + \cos 2x$ набуває одного й того самого значення при будь-якому значенні x. Знайти це значення.

Варіант XIII

1. Спростити вираз

$$\frac{x^{-6}-64}{16+4x^{-2}+x^{-4}}\cdot\frac{1}{4-4x^{-1}+x^{-2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}.$$

2. Спростити вираз $\left(1+\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{tg}2\alpha\right)\left(1-\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{tg}2\alpha\right)$.

3. Розв'язати рівняння $1{,}5\cdot 4^{x+0{,}5}=6^x+2\cdot 9^{x-0{,}5}$.

4. Сума першого, третього і п'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює —12, а їхній добуток дорівнює 90. Знайти перший член a_1 і різницю d прогресії, вибравши найменше значення a_1.

5. Знайти суму всіх цілих розв'язків нерівності $\log_{1/2}\frac{x-1}{7-x}>-1$.

6. Знайти число розв'язків рівняння $f'(x)=0$ на відрізку $[0;2\pi]$, де $f(x)=4\sin 2x-3\cos 2x-10x$.

7. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює $4\sqrt{10}$, а медіана, проведена до бічної сторони, дорівнює $3\sqrt{10}$. Знайти основу трикутника.

8. При якому значенні параметра a рівняння $|x^2-2x-3|=a$ має рівно три розв'язки?

9. У трикутній піраміді $ABCD$ грані ABC і BCD — правильні трикутники із заданою висотою. Кут між цими гранями дорівнює φ. При якому значенні $1/\cos\varphi$ площа повної поверхні піраміди є найбільшою?

10. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до параболи $y=x^2-3x+4$ із початку координат, за умови, що абсциса точки дотику — число додатне.

Варіант XIV

1. Розв'язати рівняння $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$.

2. Обчислити $A=5^B$, де $B=2\log_{25}8+\log_{1/5}5$.

3. Знайти найменше x, при якому виконується нерівність

$$\frac{x-3}{2}\geqslant\frac{(\sqrt{x-5})^2}{x-6}.$$

4. До басейну підведено три труби. Перша з них наповнює його на 4 год довше, ніж друга, а друга — за 1/3 часу, необхідного для наповнення басейну третьою трубою. Якщо всі труби будуть подавати воду одночасно, то басейн наповниться за 4 год. За скільки годин перша і третя труби, подаючи воду окремо, зможуть заповнити басейн?

5. Розв'язати рівняння

$$(x^2-3x)\cdot 9^{\sqrt{2-x}}+4\cdot 9^x=(x^2-3x)\cdot 9^x+4\cdot 9^{\sqrt{2-x}}.$$

6. Знайти ціле число x, якщо $\frac{(\sqrt[6]{4})^5\cdot 16^{1/2}}{\sqrt[3]{64}\cdot x}=(16^{1/6})\cdot 4^{-1/2}$.

7. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює середній лінії, а параметр дорівнює 48. Знайти бічну сторону.

8. Обчислити значення виразу $4\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, якщо $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. Розв'язати рівняння $x\sqrt[3]{x}+16=8\sqrt[3]{x^2}$, $x>0$.

10. Знайти x в градусах, якщо $0°<x<360°$ і $2\sin^2(x+270°)-7\sin(x+90°)=4$.

Варіант XV

1. Розв'язати рівняння

$$x^2\cdot 2^{2\sqrt{6-x}}+4^{2-x}=16\cdot 4^{\sqrt{6-x}}+x^2\cdot 2^{-2x}.$$

2. Знайти ціле число x, якщо

$$\frac{\sqrt[3]{25}\cdot 5^{-1/2}}{(\sqrt[6]{25})^2\cdot\sqrt{5}\cdot x}=\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{25}}\right)^2.$$

3. Знайти значення A, якщо $A=2^B+6^C$, де $B=2/\log_{\sqrt{3}}2$ і $C=1/\log_2 6$.

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{42-x}=2+\sqrt{6-x}$.

5. Розв'язати рівняння $\frac{6}{x^2-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x-1}-1$.

6. Обчислити значення виразу $16\sin^4\left(\frac{11\pi}{2}-2\alpha\right)$, якщо $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)=\frac{1}{4}$.

7. Два кола однакового радіуса зовні дотикаються одне до одного в точці C. Крім того, кожне з них дотикається зовні до третього кола, радіуса 6,5 в точках A і B відповідно. Знайти площу трикутника ABC, якщо $AB=5$.

8. Знайти найбільше значення x, при якому виконується нерівність

$$\frac{x^2+x-45}{x-6}\geqslant\frac{3x+1}{2}.$$

9. Знайти x в градусах, якщо $90°<x<270°$ і $3\cos^2(x+270°)+\sin^2(x+180°)=1$.

10. За першу поїздку на автомобілі було витрачено 10 % бензину з бака, за другу поїздку — 25 % того бензину, що залишився. Після двох поїздок залишилося бензину на 13 л менше, ніж було спочатку. Скільки літрів бензину було у баку до поїздок?

Варіант XVI

1. Обчислити значення $A=2^B-10^C$, де $B=1/\log_6 2$, $C=2/\log_2 10$.

2. Знайти раціональне значення x, яке задовольняє рівняння $10x:(\sqrt[3]{2})^2=2^{5/3}\cdot 4^{-2/3}:\sqrt[6]{64}$.

3. Розв'язати рівняння $2\sqrt{x-2}-15=\sqrt[4]{x-2}$.

4. Знайти найбільше значення x, при якому виконується нерівність $2x-5\sqrt{x}+2\leqslant 0$.

5. Знайти площу рівнобічної трапеції, якщо її висота дорівнює 16, а діагональ дорівнює 20.

6. Знайти x в градусах, якщо $0° < x < 270°$ і $\sin(90° + 2x) + \sin x = 0$.

7. Обчислити значення виразу $49 : \operatorname{tg}^2\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)$, якщо $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

8. На двох верстатах необхідно обробити по 150 деталей, причому на першому верстаті обробляли за годину на 5 деталей більше, ніж на другому. На першому верстаті роботу було розпочато на 1 год пізніше, ніж на другому і, крім того, в його роботі була перерва на 30 хв. Однак на обох верстатах роботу закінчили одночасно. Скільки деталей за годину обробляли на кожному верстаті?

9. Розв'язати рівняння

$$x^2 \cdot 5^{\sqrt{3x-2}} + 5^{2+x} = 5^{\sqrt{3x-2}+2} + x^2 \cdot 5^x.$$

10. Розв'язати рівняння $\frac{6-x}{1-x^2} - \frac{x+3}{x(1-x)} = \frac{x+5}{x(1+x)}$.

Варіант XVII

1. Розв'язати рівняння $\frac{x^2 - x}{x - \sqrt{x}} = 6$.

2. У квадраті $ABCD$ точка E — середина сторони BC, точка F — середина сторони CD. Знайти тангенс кута EAF.

3. Знайти суму всіх значень параметра a, при кожному з яких рівняння $(a - 2)x^2 - 2\sqrt{6}x + a - 1 = 0$ має рівно один корінь.

4. Висота і діагональ рівнобічної трапеції дорівнюють відповідно 5 і 13. Знайти площу трапеції.

5. Знайти $\sin\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 3$.

6. Знайти суму всіх цілих розв'язків нерівності $\log_{1/3}(2x - 1) > -2$.

7. Знайти довжину відрізка, який відтинає на осі ординат дотична, проведена до кривої $y = 8/x^2$ у точці її перетину з бісектрисою першого координатного кута.

8. Точка $M(2; 5)$ належить параболі $y = -x^2 + ax + 5$. Знайти ординату вершини параболи.

9. Бічні грані правильної трикутної призми — квадрати. Площа бічної поверхні призми дорівнює 144. Знайти об'єм многогранника, вершинами якого є центри всіх граней призми.

10. Знайти значення числа k, при якому рівність $2\sin 4x(\cos^4 2x - \sin^4 2x) = \sin kx$ виконується при будь-якому значенні x.

Варіант XVIII

1. Знайти суму квадратів коренів рівняння $x(x - \sqrt{3}) = 1$.

2. Розв'язати рівняння $\log_{1/2}(\log_2 x - 1) = -1$.

3. Три цілих додатних числа утворюють геометричну прогресію. Знайти третій член прогресії, якщо її другий член на 1 більший за перший член.

4. Знайти найменше значення функції $f(x) = |\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x|$.

5. У паралелограмі $ABCD$ ($AB \parallel CD$) бісектриса тупого кута B перетинає сторону AD у точці F. Знайти периметр паралелограма, якщо довжина AB дорівнює 12 і $AF : FD = 4 : 3$.

6. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2-x} \geqslant 1, \\ 2 \cdot 4^{2x} \geqslant 32^x. \end{cases}$$

7. Висота конуса дорівнює 6. Твірна конуса утворює з площиною основи кут 60°. У конусі розміщено піраміду, основою якої є рівнобедрений прямокутний трикутник, вписаний в основу конуса, а вершиною — середина однієї із твірних конуса. Знайти об'єм піраміди.

8. Параметр k квадратного рівняння $x^2 - 2kx + 3(2k-3) = 0$ набуває таких значень: 1, 2, 3, 4, 5, 6 і 7. Кожному із вказаних значень k відповідає певне число коренів заданого рівняння. Знайти число всіх коренів.

9. Розв'язати рівняння $4 \operatorname{arctg} \dfrac{3x-1}{x+3} = \pi$.

10. Знайти цілий корінь рівняння $\dfrac{f(x)}{2f'(x)} = \dfrac{1}{3}$, якщо $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$.

Варіант XIX

1. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 16}$ на відрізку $[1;\ 6]$.

2. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2(x-2)^2}{\log_{0,5}(x^2+1)} \geqslant 0$.

3. Знайти $|x|$, якщо $|x-4| + 5x = -8$.

4. У паралелограмі $ABCD$ довжина діагоналі BD, перпендикулярної до сторони AB, дорівнює 6; довжина діагоналі AC дорівнює $2\sqrt{22}$. Знайти довжину сторони AD.

5. Розв'язати рівняння $\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{x-1} = 2$.

6. Знайти число коренів рівняння $\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{tg}(x/3)} = 0$ на відрізку $[0;\ 9\pi]$.

7. Куб з ребром, довжина якого дорівнює $4\sqrt[4]{3}$, перетинається площиною, яка проходить через середини трьох його ребер, що виходять із однієї вершини. Знайти площу перерізу.

8. Знайти $\sqrt{5}\cos(\operatorname{arctg} 0{,}75)$.

9. Знайти $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

10. Обчислити $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^n}{3^n}+\ldots}$.

Варіант XX

1. Знайти значення числа a, при якому система

$$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}+\dfrac{x+3y}{5}=2, \\ \dfrac{x+2y}{2}-\dfrac{x-5y}{3}=3, \\ \dfrac{5x-y}{3}-\dfrac{x-10y}{2}=a \end{cases}$$

має розв'язок.

2. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 4 - x$, $y = 4 + x$, $y = |x|$.

3. Знайти $\left(\dfrac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2$.

4. Розв'язати рівняння $\log_2^2 (2x) = \log_2 x^4$.

5. У прямокутному трикутнику відношення катетів дорівнює 0,5. Знайти тангенс гострого кута між медіанами, проведеними до катетів.

6. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 9, а сума квадратів її членів дорівнює 40,5. Знайти другий член прогресії.

7. У результаті вимірювання деякої величини здобуто п'ять значень: 51; 51,2; 51,4; 52,1; 52,3. Знайти таке число x, для якого сума квадратів різниць між здобутими значеннями і числом x була б найменшою.

8. Розв'язати рівняння $\dfrac{\log_2 (9 - x^{\log_x 2^{x-3}})}{x} = 1$.

9. Гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC дорівнює 4. Знайти суму $\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BA} + \overline{CA} \cdot \overline{CB}$.

10. Знайти найменший додатний кут (в градусах), що задовольняє рівняння $2\cos^2 (270^\circ + \alpha) + 7 \sin (270^\circ - \alpha) = 5$.

Варіант XXI

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5$.

2. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12. Радіус вписаного в трикутник кола дорівнює 3. Знайти площу трикутника.

3. Знайти суму всіх цілих додатних розв'язків нерівності $4^{x-1} - 2^x < 1{,}25$.

4. Знайти $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\dfrac{2\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = 3$.

5. Розв'язати рівняння $\log_2 \log_{1/2} \log_9 x = 0$.

6. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \cos \pi x = -1, \\ x^3 - 5x^2 - 14x = 0. \end{cases}$

7. Знайти максимум функції $f(x) = 20x/(x^2 + 1)$.

8. Основою піраміди $ABCF$ є правильний трикутник ABC із стороною, довжина якої дорівнює 20. Ребро FB перпендикулярне до пло-

щини основи і дорівнює 5. Піраміду перерізає площина, паралельна перехресним ребрам AC і FB так, що в результаті перерізу здобуто квадрат. Знайти довжину сторони квадрата.

9. Знайти відстань між точками перетину параболи $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 3$ і прямої $4x + 3y + 9 = 0$.

10. Розв'язати рівняння $|x - 4| = x$.

Варіант XXII

1. Вираз $(2\log_2 25 + \lg 2)\log_2 10$ перетворити до вигляду $(A\log_2 5 + B)^2$.

2. Відомо, що точка перетину прямих $2x + y = 9$ і $kx + 5y = 18$ належить бісектрисі першого координатного кута. Знайти число k.

3. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника менше 60°. До бічної сторони проведено медіану і висоту, які відповідно дорівнюють $3\sqrt{5}$ і 6. Знайти бічну сторону.

4. Дотична, проведена до параболи $y = x^2 - 5x + 10$, утворює з віссю абсцис кут 45°. Знайти відстань від точки дотику по початку координат.

5. Розв'язати рівняння $\frac{25}{2x+1} + \frac{10}{\sqrt{2x+1}} = 3$.

6. Знайти $\cos^2 2\alpha$, якщо $\sin\alpha - \cos\alpha = 1/\sqrt{5}$.

7. П'ятий член арифметичної прогресії дорівнює 4. Якою має бути різниця прогресії, щоб сума квадратів другого і шостого членів була найменшою.

8. У піраміді $ABCF$ через медіану BK основи ABC і середину L бічного ребра AF проведено площину. Знайти відношення об'єму многогранника $BCKLF$ до об'єму піраміди $ABKL$.

9. Знайти суму всіх цілих розв'язків нерівності $2^x + \frac{9}{2^x} < 10$.

10. Розв'язати рівняння

$$\frac{\pi}{24}(6x + 1) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Варіант XXIII

1. Сума модулів коренів квадратного рівняння $4x^2 + kx - 3 = 0$ дорівнює 2, причому модуль від'ємного кореня більший за додатний корінь. Знайти число k.

2. Знайти найменший додатний корінь рівняння $\log_3 \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{15} + \frac{1}{2} = 0$.

3. Різниця між площею круга і площею вписаного в нього квадрата дорівнює $2\sqrt{3}(\pi - 2)$. Знайти площу правильного шестикутника, вписаного в це коло.

4. Розв'язати рівняння $2x + \sqrt{x + 11} = 14$.

5. Розв'язати рівняння $\frac{2}{9}x = (\sin 15° + \operatorname{tg} 30° \cos 15°)^2$.

6. Всі чотири грані піраміди — правильні трикутники. Знайти відстань між центрами двох її граней, якщо площа повної поверхні піраміди дорівнює $81\sqrt{3}$.

7. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sqrt{x^2 - x - 12} \cdot (2^{x-1,5} - \sqrt{2})}{x+3} = 0.$$

8. Знайти довжину відрізка, який відтинає на осі абсцис дотична, проведена до графіка функції $y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ у точці з абсцисою, що дорівнює -2.

9. Знайти цілий розв'язок нерівності $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 12x + 35} < 0$.

10. Знайти число коренів рівняння $\sin x + \cos 2x = 0$, які належать відрізку $[0; 3\pi]$.

Варіант XXIV

1. Знайти суму всіх коренів рівняння $(x^2 - 7x + 2)^2 - 13(x^2 - 7x) - 26 = 0$.

2. Знайти $\sin^2 3\alpha$, якщо $\alpha = 2 \operatorname{arctg} 1 - \arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{12}$.

3. У прямокутному трикутнику ABC катети AC і BC відповідно дорівнюють 12 і 8; точка K — середина медіани BD. Знайти довжину відрізка CK.

4. Розв'язати рівняння $\log_{|x|}(x^4 + x^3 - 6x^2 - 7x) = 4$.

5. Знайти найменше значення функції $f(x) = 2^x + 2^{2-x}$ на відрізку $[0; 2]$.

6. Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1)$ є квадрат $ABCD$, площа якого дорівнює 50. Точка O — центр квадрата $ABCD$, точки F і K — відповідно середини ребер CC_1 і A_1B_1. Вектор $\overline{OF}$ перпендикулярний до вектора $\overline{DK}$. Знайти об'єм паралелепіпеда.

7. Якщо деяке двозначне число поділити на добуток його цифр, то в частці дістанемо 3, а в остачі 9. Якщо до суми квадратів цифр цього числа додати добуток його цифр, то дістанемо шукане число. Знайти це число.

8. Знайти $\sin^2 x$, якщо $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 2 \operatorname{tg} x = 2$ і $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

9. Точка перетину прямих $2x - y = 10$ і $3x + 2y = 1$ належить колу з центром у початку координат. Знайти радіус цього кола.

10. Знайти добуток всіх цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$$

Варіант XXV

1. Знайти лише додатні корені рівняння $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 8$.

2. Розв'язати рівняння $\log_{0,5}(x - 12) = -\log_2 \sqrt{x}$.

3. У трикутнику ABC кут C дорівнює 60°, довжина сторони AB дорівнює $\sqrt{31}$. На стороні AC відкладено відрізок AD, довжина якого

дорівнює 3. Знайти довжину сторони BC, якщо довжина відрізка BD дорівнює $2\sqrt{7}$.

4. Бісектриса AD рівнобедреного трикутника ABC утворює з основою AC кут, тангенс якого дорівнює 0,5. Знайти косинус кута ABC.

5. На координатній площині xOy дано пряму $x + 5y = 4$ і два вектори $\bar{a}$ (2; —3) і $\bar{b}$ (—1; 5). На даній прямій знайти таку точку M, щоб вектор $\overline{OM}$ був перпендикулярним до вектора $2\bar{a} + 3\bar{b}$.

6. Основою чотирикутної піраміди є квадрат. Одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи. Яку довжину повинна мати висота піраміди, щоб радіус сфери, описаної навколо піраміди, був найменшим за умови, що об'єм піраміди дорівнює 72?

7. Знайти найбільше значення функції $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$ на відрізку $[\pi/4; 3\pi/4]$.

8. Знайти $f'(2)$, якщо $f(x) = x \ln(x^2 + 2x - 7)$.

9. Знайти суму всіх раціональних (у тому числі і скоротних) дробів із знаменником 2, які є розв'язками нерівності $2^x + 3 \cdot 2^{2-x} < 13$.

10. Знайти площу фігури, обмеженої графіком рівняння $x + |y| = 2$ і віссю ординат.

Варіант XXVI

1. Розв'язати рівняння $x = 2 - \sqrt{-10x - x^2}$.

2. Пасажир проїхав поїздом 120 км і, пробувши на станції 40 хв, повернувся назад поїздом, який проїжджає за годину на 6 км більше, ніж перший. Загальна тривалість поїздки становить 8 год. Скільки кілометрів за хвилину проїжджає кожен поїзд.

3. Знайти середину проміжку, на якому виконується нерівність $4x^2 + 4x + 2(\sqrt{2x+1})^2 \leqslant 34$.

4. Два кола однакового радіуса дотикаються зовні в точці C. Крім того, кожне з них дотикається зовні до третього кола радіуса 5 у точках A і B відповідно. Визначити площу трикутника ABC, якщо $AB = 6$.

5. Знайти x, якщо $\dfrac{4^{-1/3} \cdot 16^{2/3}}{\sqrt[3]{64}\,x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3/4} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}$.

6. Знайти суму і добуток коренів рівняння

$$2x^2 \cdot 2^{\sqrt{x+2}} + x \cdot 2^{x+1} = 2x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{\sqrt{x+2}+1}.$$

7. Обчислити $A = 9\left[\operatorname{tg}^2 \dfrac{3\pi}{2} - 4\alpha\right]^{-1}$, якщо $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

8. Розв'язати рівняння $\dfrac{2x+1}{x} + \dfrac{3x}{2(2x+1)} = \dfrac{5}{2}$.

9. Знайти x в градусах, якщо $0° < x < 360°$ і $2\cos^2(x + 270°) = 3\sin(x + 270°)$.

10. Обчислити A, якщо $A = 4^B + 5^C$, де $B = \dfrac{1}{2\log_5 2}$, $C = \dfrac{1}{\log_7 5}$.

Варіант XXVII

1. Знайти x в градусах, якщо $90° < x < 270°$ і $\sin^2(180° + x) + 3\cos^2(180° + x) = 2$.

2. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 2 см, тангенс двогранного кута при основі дорівнює 4/3. Знайти площу повної поверхні піраміди.

3. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел A, B і C, де $A = 62$, $B = 102$ і $C = 42$.

4. В арифметичній прогресії 10 членів. Сума членів, розміщених на парних місцях, дорівнює 50, а членів, розміщених на непарних місцях, дорівнює 35. Визначити перший член і різницю прогресії.

5. Знайти корінь рівняння $\log_4 (x^2 + 3x - 4) = \log_4 \frac{x-1}{x+4}$.

6. Обчислити A, якщо $A = 10^B + 3^C$, де $B = 2/\log_3 10$ і $C = 1/\log_6 3$.

7. Знайти значення похідної функції $f(x) = \frac{\sin x + 2x}{\cos x - 3}$ у точці $x = 0$.

8. Визначити середину проміжку, на якому виконується нерівність $x^2 + 7 < 6x + y^2$, де $y = (7 - 2x)^{1/2}$.

9. Знайти квадрат відстані між точками, координати яких задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 0, \\ x^{-2} + y^{-2} = 8. \end{cases}$$

10. Знайти x із рівняння $8^{2/3} \cdot 2^3 \cdot (0,5)^{-2} \cdot x^{-1} = 2^7 \cdot 2^{-2}$.

Варіант XXVIII

1. Для перевезення 60 т вантажу з одного місця в інше треба кілька машин. Оскільки кожну машину недовантажували на 0,5 т, то додатково потрібно було завантажити ще 4 машини. Скільки машин було замовлено з самого початку?

2. Визначити середину проміжку, на якому виконується нерівність $\log_{0,25} \frac{1-2x}{x+1} < 0,5$.

3. Розв'язати рівняння $x = (16 - x^2 - 6x)^{1/2} - 2$.

4. Розв'язати рівняння $(2x + 1) : x + 2,5\,x : (2x + 1) = 3,5$.

5. На відрізку [0°; 360°] знайти число різних коренів рівняння $7 + 4 \sin x : \cos^{-1} x + 3 : \cos (90° - 2x) = 0$.

6. Знайти суму і добуток чисел x, y, z, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 2y - z = 2, \\ 3x + 4y - 5z = 4, \\ x + 3y - 2z = -1. \end{cases}$$

7. Обчислити $A = \sin (90° - 2x)$, якщо $\sin (180° - x) : \cos (180° - x) = -2$.

8. Знайти коефіцієнти k і q рівняння прямої $y = kx + q$, яка перетинає гіперболу $y = 2,4/x$ у точках з абсцисами $x = 2$ і $x = -3$.

9. Дано рівняння відносно x: $x \cdot 3^y - x \cdot 3^x = 3^{y+1} - 3^{x+1}$, де $y = (x + 2)^{1/2}$. Знайти суму і добуток коренів цього рівняння.

10. При якому значенні параметра k система рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y = k, \\ x^2 + y^2 = 117 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?

ВІДПОВІДІ

Глава 1

1.001. 20. 1.002. 1. 1.003. 32. 1.004. 0,5. 1.005. 5. 1.006. 1. 1.007. 3. 1.008. 1. 1.009. 9. 1.010. 1. 1.011. 2. 1.012. 4. 1.013. 12. 1.014. 1. 1.015. 4. 1.016. 2. 1.017. 8. 1.018. 3. 1.019. 2. 1.020. 3. 1.021. 0,5. 1.022. 1. 1.023. 10. 1.024. 1. 1.025. 3. 1.026. 3. 1.027. 6. 1.028. 2. 1.029. 3. 1.030. 0,5. 1.031. 5/6. 1.032. 11. 1.033. 1. 1.034. 5/3. 1.035. 9. 1.036. 16. 1.037. 17/27. 1.038. 5. 1.039. 12. 1.040. 15/14. 1.041. 1. 1.042. 1/3. 1.043. 5. 1.044. 5. 1.045. 25. 1.046. 1. 1.047. 125. 1.048. 1/4. 1.049. 5. 1.050. —3/2.

Глава 2

2.001. $x-1$. 2.002. $2(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2/(p-q)$. 2.003. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2/(a-b)$. 2.004. 0,2. 2.005. 0. 2.006. $1/(ab)$. 2.007. $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$. 2.008. y^2. 2.009. $(t+1)/t$. 2.010. —4. 2.011. $16x\sqrt{x}/(1-x^2)(x-1)$. 2.012. $x+1$. 2.013. $\sqrt{a-1}$. 2.014. $(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})/(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})$. 2.015. $\sqrt[m]{y}$. 2.016. $|z^{1/p}-z^{1/q}|$. 2.017. $\sqrt{x}$. 2.018. 0,04. 2.019. 16. 2.020. $2\sqrt[6]{a^5}/a$. 2.021. $1/\sqrt{x^2-1}$. 2.022. $-\sqrt{x}$ для $x\in(0;\ 2)$; $\sqrt{x}$ для $x\in(2;\ \infty)$. 2.023. $\sqrt{6x}$. 2.024. $\sqrt[3]{20x}$. 2.025. 1. 2.026. $1/\sqrt[12]{a^2b}$. 2.027. $\pm\sqrt[6]{2}$. 2.028. $2/(x^2-a^2)$. 2.029. $2\sqrt[3]{r}/r$. 2.030. -1. 2.031. $1/a$. 2.032. 5. 2.033. $4p-\sqrt{4p^2-1}$. 2.034. $\sqrt{a^2-1}$. 2.035. $1/(\sqrt{a}+\sqrt{2})$. 2.036. $-3n(m+p)$. 2.037. $-\sqrt{x}(1+2/x^2)$. 2.038. $(1-a)/\sqrt{a}$. 2.039. —4. 2.040. 0,1. 2.041. $-1/(a^2+a+1)$. 2.042. 1. 2.043. $(m/n)^{m+n}$. 2.044. 1. 2.045. $(1-\sqrt{x})/(1-x)$. 2.046. —1. 2.047. $(b+1)/(b-2a)$. 2.048. 0,5. 2.049. $q(p+q)$. 2.050. $1+3x^2$. 2.051. 5. 2.052. $1-x^2$. 2.053. $2/(1-p^4)$. 2.054. 1. 2.055. $\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}$. 2.056. 1/2. 2.057. $(x-y)/(x+y)$. 2.058. 1. 2.059. $1/(xy)$. 2.060. $24/(5y-2x)$. 2.061. 20. 2.062. $2a+3$. 2.063. $1+2x$. 2.064. $(a-b)/(a+b)$. 2.065. $x+y$. 2.066. $-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})$. 2.067. $a^{5/6}$. 2.068. 1. 2.069. $a^{1/3}+b^{1/3}$. 2.070. $a-b$. 2.071. $(\sqrt{m}-\sqrt{n})/m$. 2.072. $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}$. 2.073. 1. 2.074. $\dfrac{1}{a(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a})}$. 2.075. $\dfrac{x^{1/m}+3x^{1/n}}{x}$. 2.076. 6. 2.077. 1/4. 2.078. 2. 2.079. $\sqrt{2}(m+3)$. 2.080. $a-b$. 2.081. $\sqrt{t^2-4}/(t+2)$. 2.082. —1. 2.083. $2x-1$. 2.084. 1. 2.085. 1. 2.086. —25, якщо $a>0$; 25, якщо $a\leqslant 0$. 2.087. $-\sqrt{ac}$. 2.088. $\sqrt{1+x}$. 2.089. 2. 2.090. 3. 2.091. $(x^{1/3}+y^{1/3})/\sqrt[6]{x^5y^2}$. 2.092. $1/(x^2-1)$. 2.093. $2\sqrt{3}$. 2.094. 0. 2.095. $z^{1/(p-3)}$. 2.096. $\dfrac{a^2}{4(a^2-x)}$. 2.097. 2. 2.098. 1. 2.099. —1. 2.100. $z\times(z+1)(z+2)$. 2.101. $-\sqrt{2}/(2a)$. 2.102. $1-a$ для $a\in(-\infty;\ -1)$; $a-1$ для $a\in(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ \infty)$. 2.103. $a/2$. 2.104. $(a+b)\times\sqrt[3]{b^2+2a^3}$. 2.105. —1. 2.106. 29/35. 2.107. $\dfrac{a^3}{2(a-1)}$. 2.108. —7/24. 2.109. 100. 2.110. 1/3. 2.111. $1/(ab)$. 2.112. $\sqrt[3]{8-t^3}/\sqrt{2}$. 2.113.

$\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}$. 2.114. $16a^2$. 2.115. $(a+b)^2$. 2.116. $1/m^2$. 2.117. $-a^2$. 2.118. $1/2$. 2.119. $3/5$. 2.120. $31/3$. 2.121. $\sqrt[12]{32}$. 2.122. $2\sqrt[6]{18}$. 2.123. 0. 2.124. 0. 2.135. 0. 2.136. 0. 2.137. $(a+b)/(ab)$. 2.138. $-3/4$. 2.139. $3/4$. 2.140. 0,2. 2.141. 6. 2.142. $-\sqrt{6}/2$. 2.143. $a-b$. 2.144. $a+b$. 2.145. 1. 2.146. $2(\sqrt[4]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2})(3+\sqrt{2})$. 2.147. $(\sqrt[4]{13}+\sqrt{3})(\sqrt{13}+3)$. 2.148. $-(4+3\sqrt{2})(5+3\sqrt{3})/2$. 2.149. $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30})/2$. 2.150. $(2\sqrt{6}+1)(3-4\sqrt{2})/23$. 2.151. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})/a$. 2.153. 6. 2.154. 5. 2.156. 638. 2.157. а) $2\sqrt{3}/3$; б) 4. 2.158. $-\sqrt{a+1}/(a+3)$ при $-1<a<1$; $\sqrt{a+1}/(a+3)$ при $1<a<\infty$. 2.159. $1/(ab)$. 2.160. 1. 2.161. $\dfrac{(a-2)\sqrt{a+1}}{(a+2)\sqrt{a-1}}$. 2.162. -2 при $a\in(-\infty;\ 0)$; 2 при $a\in(0;\ \infty)$. 2.163. $16a^4/x^2$. 2.164. $\sqrt{(x+3)/(x-3)}$. 2.165. $-\sqrt{(t+2)/(t-2)}$. 2.166. $(b^2-1)/\sqrt{b}$ при $b\in(0;\ 1)$; $(b^2+3)/\sqrt{b}$ при $b\in(1;\ \infty)$. 2.167. $-(m^2+m\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ при $m\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)$; $m^3/(m-\sqrt[3]{2})$ при $m\in(1;\ \sqrt[3]{2})\cup(\sqrt[3]{2};\ \infty)$. 2.168. $-(x^2+x+1)$ при $x\in(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 3)$; x^2+x+1 при $x\in(3;\ \infty)$. 2.169. mn. 2.170. $-a/2$ при $a\in(-\infty;\ -2)$; $a(a-1)/2$ при $a\in(-2;\ \infty)$. 2.171. $(x+y)/2$. 2.172. $(4a-16)/(a+4)$ при $a\in(4;\ \infty)$ і $\dfrac{(4-a)(a^2+16)}{2a(4+a)}$ при $a\in(-4;\ 4)$. 2.173. $1/(m+2)$ при $m\in(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 0)\cup(3;\ \infty)$; $-1/(m+2)$ при $m\in(0;\ 3)$. 2.174. $-1/x$ при $x\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 2)$; $1/x$ при $x\in(2;\ 3)\cup(3;\ \infty)$. 2.175. -1 при $x\in[1;\ 2)$; 1 при $x\in(2;\ \infty)$. 2.176. $1/(a+1)$ при $a\in(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ -1)\cup(-1;\ 2)$; $1/(a+3)$ при $a\in(2;\ \infty)$. 2.177. $(x+3)/(x^2-x)$ при $x\in(-\infty;\ 0)$; $(2x^2+x+3)/(x+x^2)$ при $x\in(0;\ 1)$; $3/x$ при $x\in[1;\ \infty)$. 2.178. $(a+2)/(a-1)$. 2.179. $(a^2+1)/(a-1)$. 2.180. $1/(1-3x)$ при $x\in(-\infty;\ 0)$; $\dfrac{x+1}{(x-1)(3x-1)}$ при $x\in[0;\ 1/3)\cup(1/3;\ 1)$; $1/(x-1)$ при $x\in(1;\ \infty)$. 2.181. $\sqrt[6]{a^2-1}$. 2.182. $a^2x^2-b^2y^2$. 2.183. $\dfrac{3}{x(2x+3)}$, якщо $x\in(-\infty;\ -3/2)\cup(-3/2;\ 0)\cup(0;\ 3)$; $1/x$, якщо $x\in(3;\ \infty)$. 2.184. $-1/a$, якщо $a\in(-\infty;\ -5)$; $\dfrac{a+5}{a(3a-5)}$, якщо $a\in(-5;\ 0)\cup(0;\ 5/3)\cup(5/3;\ \infty)$. 2.185. $-(x+1)/x$, якщо $x\in(-\infty;\ -1)$; $(x+1)/(2-x)$, якщо $x\in(-1;0)$; $(x+1)/(x-2)$, якщо $x\in(0;\ 2)\cup(2;\ \infty)$. 2.186. p. 2.187. $1/(\sqrt[4]{a}-1)$. 2.188. $1/(x-x^2)$, якщо $x\in(0;\ 1)$; $1/(x^2-x)$, якщо $x\in(1;\ \infty)$. 2.189. $(r^2-r)/(r^2+1)$, якщо $r\in(-\infty;\ 0)$; $r/(1-r)$, якщо $r\in[0;\ 1)$; $r/(r-1)$, якщо $r\in(1;\ \infty)$. 2.190. $1/(z+2)$. 2.191. $1/(1+\sqrt[3]{a})$. 2.192. $a/(a+1)$. 2.193. $(\sqrt{x}-2)/(\sqrt{x}-3)$. 2.194. $1/(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a})$. 2.195. $\dfrac{a+2}{a^2(a-1)^2}$. 2.196. 2, якщо $x\in(-\infty;\ -1]$; $2x^2/(2x^2-1)$, якщо $x\in(-1;\ -\sqrt{2}/2)\cup(-\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2)\cup(\sqrt{2}/2;\ 1)$; 0, якщо $x\in(1;\ \infty)$. 2.197. $1/(\sqrt{b+2})$. 2.198. $(1-b)/(1+b)$. 2.199. $\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}$. 2.200. $\sqrt[4]{x}$, якщо $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}>0$; $-\sqrt[4]{x}$, якщо $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}<0$. 2.201. $\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}$. 2.202. $(m-8)/2$. 2.203.

$1/(\sqrt[4]{x^2-1})$. **2.204.** 1. **2.205.** $(x^2-1)/(2x-b)$. **2.206.** $(\sqrt[3]{x-y})/$ $/(x+y)$. **2.207.** $(x^2-3x+2)/(3x)$. **2.208.** 1. **2.209.** $3-2\sqrt{x}$, якщо $x\in[0,9)$; -3, якщо $x\in(9;\infty)$. **2.210.** 2, якщо $a\in(0;1)$; $2/3$, якщо $a\in(1;\infty)$. **2.211.** $z^2/(z^2+z+1)$. **2.212.** 5. **2.213.** $-1/2$, якщо $x\in(-\infty;0)$; $1/2$, якщо $x\in(0;\infty)$. **2.214.** -2, якщо $x\in(-\infty;0)$; 2, якщо $x\in(0;\infty)$. **2.215.** $-(z^2+9)(3-z)/(9z)$, якщо $z\in$ $\in(-3;0)\cup(0;3)$; $2(z-3)/3$, якщо $z\in(3;\infty)$. **2.216.** $m/2$. **2.217.** $\dfrac{1}{a(3a+b)}$. **2.218.** $2\sqrt{2}$, якщо $x\in[2;4)$; $2\sqrt{x-2}$, якщо $x\in[4;\infty)$. **2.219.** 5. **2.220.** 1 при $0\leqslant b\leqslant a$, $a\neq0$; $\sqrt{a+b}/(2\sqrt{a-b}-$ $-\sqrt{a+b})$ при $0<-b\leqslant a$. **2.221.** $x\sqrt{2}$. **2.222.** $\sqrt{5}/5$. **2.223.** $-1/$ $/\sqrt{a-2}$, якщо $a\in(2;3)$; $-\sqrt{a-2}$, якщо $a\in(3;\infty)$. **2.224.** $(3-x^2)/$ $/(x+2)$, якщо $x\in(-\infty;-2)$; $(5-x^2)/(x+2)$, якщо $x\in(-2;2)$; $(x^2-3)/(x+2)$, якщо $x\in[2;\infty)$. **2.225.** $-(x-3)$, якщо $x\in(-\infty;$ $-1/3)\cup(-1/3;-1/5)\cup(-1/5;3)$; $x-3$, якщо $x\in[3;+\infty)$. **2.226.** $-3x$, якщо $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;0)$; $3x$, якщо $x\in(0;\infty)$. **2.227.** $(a+\sqrt{a^2-9})/3$. **2.228.** $\left(y-\dfrac{2}{y}\right)^2$. **2.229.** $\sqrt{2}$. **2.230.** 2. **2.231.** $\sqrt{3}/3$. **2.232.** $-2a$, якщо $a\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})$; $2a$, якщо $a\in(-\sqrt{3};$ $0)\cup(\sqrt{3};\infty)$. **2.233.** $\sqrt{a^2-1}$. **2.234.** $-2-4\sqrt{3}$. **2.235.** $(1-a)/$ $/(2a)$, якщо $a\in(0;1)$; $(a-1)/2$, якщо $a\in(1;\infty)$. **2.236.** $(m-1)/(2m)$, якщо $m\in(0;1)$; $(1-m)/2$, якщо $m\in[1;\infty)$. **2.237.** $(1-a)/\sqrt{a}$, якщо $a\in(0;1)$; $(a-1)/\sqrt{a}$, якщо $a\in(1;\infty)$. **2.238.** $1/(x-\sqrt{2x}+$ $+1)$. **2.239.** $-\sqrt[4]{2}$. **2.240.** 1. **2.241.** $\sqrt[3]{4-x^2}$. **2.242.** $(z^2-5z+$ $+6)/(1-z)$, якщо $z\in(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;2)$; $z-2$, якщо $z\in[2;\infty)$. **2.243.** $x/(x-2)$. **2.244.** $a-b$. **2.245.** $-\sqrt{(x-2)/(x+2)}$. **2.246.** $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}$. **2.247.** $1+\sqrt[3]{a}$. **2.248.** $\sqrt{2}$. **2.249.** $-(\sqrt[4]{x}+$ $+\sqrt[4]{2})$. **2.250.** $\sqrt{a}/(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a})$. **2.251.** $2\sqrt[4]{y/x^2}$. **2.252.** 2,4. **2.253.** -1, якщо $x\in[1/8;1/4)$; 1, якщо $x\in(1/4;\infty)$. **2.254.** 3. **2.255.** 3. **2.256.** $x^3\sqrt[4]{a}$. **2.257.** $1/(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a})$. **2.258.** $1/(2\sqrt{b})$. **2.259.** 0. **2.260.** $\sqrt{p^2-q^2}/\sqrt{p}$. **2.261.** $\sqrt[3]{(1-x)/(3x)}$, якщо $x\in(0;1]$. **2.262.** 1,25. **2.263.** x^2+1. **2.264.** $(x+3)/(x-1)$. **2.265.** 1,1. **2.266.** 4/9. **2.267.** $1/(2y^3)$ при $y<2x$; $-1/(2y^3)$ при $y>2x$. **2.268.** $\sqrt{x}+1$. **2.269.** $-(a^3+\sqrt[4]{a^3})$. **2.270.** $\dfrac{4}{\sqrt{x-4}}-1$, якщо $x\in(4;8)$; 1, якщо $x\in[8;\infty)$. **2.271.** 4. **2.272.** $1/\sqrt[8]{p-q}$. **2.273.** $-\sqrt{x}$, якщо $x\in(0;$ $2/3)$; $\sqrt{x}$, якщо $x\in(2/3;\infty)$. **2.274.** 2. **2.275.** $x^2\,|\sqrt[3]{y}\,|$. **2.276.** $(\sqrt[3]{a}-1)/4$. **2.277.** 1. **2.278.** $\sqrt[3]{2n/(1+n)}$. **2.279.** $-2b\,(a+3\sqrt{ab})$. **2.280.** $\sqrt{a/(a+4b)}$. **2.281.** $\sqrt[4]{a}/6$. **2.282.** -1. **2.283.** 1. **2.284.** $\sqrt[4]{a/b}$ при $0<b<a$; $\sqrt[4]{b/a}$ при $0<a<b$. **2.285.** $y=$ $=\begin{cases}2 \text{ при } 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2\sqrt{x-1} \text{ при } 2<x<\infty.\end{cases}$ **2.286.** 11/3. **2.287.** $a=165{,}5$; $b=$ $=158{,}5$. **2.289.** $(x^2-2)(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$. **2.290.** $3b^2+a^4=4ac$. **2.294.** Виконується для всіх $n\in[0;3m]$, $m>0$. **2.304.** Виконується для всіх $q\in[0;5p]$, $p>0$. **2.306.** 3^3-2^3. **2.307.** $n/(n+1)$. **2.310.** $A=1$, $B=2$, $C=0$. **2.312.** $(x+1)/x$, якщо

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$; $-(x+1)/x$, якщо $x \in (-1; 0)$. **2.313.** -1, якщо $x \in (-\infty; -1)$; $(2 + x - x^3)/(x^3 + x)$, якщо $x \in [-1; 0) \cup (0; 1)$; 1, якщо $x \in [1; \infty)$. **2.314.** $-(x+1)$, якщо $x \in (-\infty; -1)$; $x + 1$, якщо $x \in [-1; 1)$; $2x^2 + x - 1$, якщо $x \in [1; \infty)$. **2.315.** 6, якщо $x \in (-\infty; 0)$; $6 - 2x$, якщо $x \in [0; 6)$; -6, якщо $x \in [6; \infty)$. **2.316.** $2\sqrt{2}/(4 - x)$, якщо $x \in [2; 4)$; $2\sqrt{x-2}/(x-4)$, якщо $x \in (4; \infty)$. **2.317.** $m - n$ при $0 < m/n \leqslant 1$ і $m/n > 2$; $n - m$ при $1 < m/n < 2$. **2.318.** $2x^2 - a^2$ при $x < -|a|$; $-a^2$ при $x > |a|$. **2.319.** $x - 2$, якщо $x \in (-\infty; -1)$; $(x^2 + 4)/(x - 2)$, якщо $x \in (-1; 1)$; $-(x+2)$, якщо $x \in (1; 2)$; $x + 2$, якщо $x \in (2; \infty)$. **2.320.** $(-2x^2 + 2x - 3)/x$, якщо $x \in (-\infty; 0)$; $(3 + 2x)/x$, якщо $x \in (0; 2)$; $(2x^2 - 2x + 3)/x$, якщо $x \in [2; \infty)$. **2.321.** $6 - 4a$, якщо $a \in [0; \sqrt{2})$; $2(a-1)^2$, якщо $a \in [\sqrt{2}; \infty)$. **2.322.** -4, якщо $y \in (-\infty; 3)$; $2y - 10$, якщо $y \in [3; 9)$; 8, якщо $y \in [9; \infty)$. **2.323.** $5/(2\sqrt{x})$, якщо $x \in (0; 4)$; $(2x - 3)/(2\sqrt{x})$, якщо $x \in [4; \infty)$. **2.324.** $(1 + x - x^2)/(x + 1)$, якщо $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$; $(x^2 + x - 1)/(x + 1)$, якщо $x \in [1; \infty)$; $(1 - x - x^2)/(x + 1)$, якщо $x \in (-1; 0)$. **2.325.** $(n+1)/n$ при $n \neq 0$ і $n \neq 1$. **2.326.** $1/\sqrt{a}$ при $\sqrt{2a} > 5\sqrt[3]{b}$; $-1/\sqrt{a}$ при $\sqrt{2a} < 5\sqrt[3]{b}$. **2.327.** $(x+1)/(1-x)$, якщо $x \in (-\infty; -1)$; $(x+1)/(x-1)$, якщо $x \in [-1; 0)$; $(x-1)/(x+1)$, якщо $x \in [0; \infty)$. **2.328.** $(2 - x)/2$, якщо $x \in (-\infty; -2)$; $-(x^2 + 2x + 8)/(2x)$, якщо $x \in [-2; 0)$; $(x^2 + 2x + 8)/(2x)$, якщо $x \in (0; \infty)$. **2.329.** $x/(x-1)$, якщо $x \in (-\infty; -1)$; $x/(1-x)$, якщо $x \in (-1; 0)$; $-x/(x+1)$, якщо $x \in [0; 1)$; $x/(x+1)$, якщо $x \in (1; \infty)$. **2.330.** $(4 - x^2)/(x^2 + 4x - 4)$, якщо $x \in (-\infty; 1)$, $x \neq -2 \pm 2\sqrt{2}$; $(x+2)/(2-x)$, якщо $x \in [1; 2)$; $(x+2)/(x-2)$, якщо $x \in (2; \infty)$. **2.331.** $-x$ при $0 < x < 1$; x при $x > 1$. **2.332.** $(x-1)/x$, якщо $x \in (-\infty; 0) \cup [1; \infty)$; $(1-x)/x$, якщо $x \in (0; 1)$. **2.333.** $-(z+1)/z$, якщо $z \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$; $(z+1)/z$, якщо $z \in [-1; 0) \cup (1; \infty)$. **2.334.** 1 при $a > 0$, $-\sqrt[6]{a} \leqslant b < \sqrt[3]{a^3 - \sqrt{a}}$. **2.335.** $1/a$, якщо $a \in (-\infty; -1) \cup [1; \infty)$; a, якщо $a \in [-1; 1)$. **2.336.** $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$, якщо $x \in (0; \infty)$, $y \in (0; \infty)$; $-(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})$, якщо $x \in (0; \infty)$, $y \in [-x/2; 0)$. **2.337.** $2a$, якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$; $-2a$, якщо $a \in (0; 3)$. **2.338.** $1/\sqrt[3]{y}$, $y \neq 0$. **2.339.** $\dfrac{4a^2 + 3}{9(a^2 + 1)}$. **2.340.** $2/(2 - a)$ при $1 \leqslant a < 2$; $2\sqrt{a-1}/(a-2)$ при $2 < a < \infty$. **2.341.** $-9z^3$, якщо $z \in (-\infty; -1/2] \cup (0; 1/2)$; $7z^3 + 2$, якщо $z \in (-1/2; 0) \cup (1/2; \infty)$. **2.342.** $-2/\sqrt{2x+1}$, якщо $x \in (-1/2; 3/2)$; $-\sqrt{2x+1}/2$, якщо $x \in (3/2; \infty)$. **2.343.** $1/\sqrt{x}$ при $x > 0$, $0 \leqslant y < 4x^2$; $-1/\sqrt{x}$ при $x > 0$, $y > 4x^2$. **2.344.** $(t-1)/(3t-1)$, якщо $t \in [1/6; 1/3) \cup [1; \infty)$; $(1-t)/(3t-1)$, якщо $t \in (1/3; 1)$. **2.345.** $-1/x$, якщо $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (0; \sqrt{2})$; $1/x$, якщо $x \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (\sqrt{2}; \infty)$. **2.346.** $1 - \sqrt{x}$, якщо $x \in [0; 1)$; $\sqrt{x} - 1$, якщо $x \in [1; \infty)$. **2.347.** x, якщо $x \in (0; 1/2)$; $-x$, якщо $x \in (1/2; \infty)$. **2.348.** $x^2 - 4x - 12$ при $-\infty < x < 2$; $(x+2)^2$ при $2 < x < \infty$. **2.349.** $x^2 + \sqrt{2}$. **2.350.** $(9 - 2x)/x$ при $-\infty < x < 0$; $(2x - 9)/x$ при $0 < x < 3/2$; $(2x + 3)/x$ при $3/2 < x < \infty$. **2.351.** x^4. **2.352.** $-2\sqrt{x}/3$. **2.353.** $\sqrt{2}/(1 - 3a)$ при $1/6 \leqslant a < 1/3$; $\sqrt{12a-2}/(3a-1)$ при $1/3 < a < \infty$. **2.354.** $-(\sqrt{1 - 4p^2} + 1)^2/(4p^2)$ при $-1/2 \leqslant p < 0$; -1 при $0 < p < 1/2$. **2.355.** $|\sqrt[4]{a} - \sqrt[6]{b}|$, $b > 0$. **2.356.** $4x/(x-4)$ при $4 < x < 8$; $2x/\sqrt{x-4}$ при $8 \leqslant x < \infty$. **2.358.** $(y - x)(z - y)(x - z)$. **2.359.** $(x - y)(z - x)(y - z)$.

3.063. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha+\pi}{4}\right)$. 3.064. $-\sin^2\alpha$. 3.065. 1/8. 3.066. $-\mathrm{tg}(\alpha/8)$. 3.067. $2\sin\alpha$. 3.068. $\sin 2\alpha$. 3.069. $(-1/2)\sin 8\alpha$. 3.070. $(1/4)\sin(3\alpha/2)$. 3.071. $\sin\alpha\sin 4\beta$. 3.072. $\cos^{-3} 2x$. 3.073. $-\sin 2\alpha\sin 4\beta$. 3.074. $-\cos 2\alpha\cos 4\beta$. 3.075. $4\sin^2\frac{\alpha+2\beta}{2}$. 3.076. $-(\sqrt{2}/4)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. 3.077. $(\sqrt{2}/2)\sin(\alpha/2)$. 3.078. $2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. 3.079. $\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}$. 3.080. $\mathrm{tg}\frac{m+n}{2}\alpha$. 3.081. 2. 3.082. $\frac{1}{2\cos^2\alpha}$. 3.083. $\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. 3.084. $\mathrm{ctg}^4\alpha$. 3.085. $0{,}5\sin^{-2}(\alpha/2)$. 3.086. $\frac{\mathrm{tg}\,2\alpha}{2}$. 3.087. 1. 3.088. 1. 3.089. 1. 3.090. $\sin^2\alpha$. 3.091. $\frac{\sin^2 2\alpha}{4}$. 3.092. $-\cos\alpha$. 3.093. $\mathrm{ctg}^2\alpha$. 3.094. $\mathrm{tg}^2 2\alpha$. 3.095. $-(1/4)\sin 8\alpha$. 3.096. $2/\sin^3 2\alpha$. 3.097. $2/\cos^3\alpha$. 3.098. 0. 3.099. $-\mathrm{tg}^4\alpha$. 3.100. $(1/\sqrt{2})\sin 2\alpha$. 3.101. $\cos 4\alpha$. 3.102. $4\cos 2\alpha$. 3.103. $\mathrm{ctg}\,2\alpha$. 3.104. $\cos 4\alpha$. 3.105. 2. 3.106. $\mathrm{ctg}\,2\alpha$. 3.107. $\mathrm{tg}\,4\alpha$. 3.108. $\sin^2\alpha$. 3.109. $\mathrm{tg}\,2\alpha$. 3.110. $\mathrm{ctg}\,4\alpha$. 3.111. $(1/2)\,\mathrm{ctg}^4\alpha$. 3.112. $2\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$. 3.113. $2\cos\alpha$. 3.114. $\sqrt{2}\sin(4\alpha-45^\circ)$. 3.115. $4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin^{-1}\alpha$. 3.116. $-16\,\mathrm{ctg}\,2\alpha\sin^{-3}2\alpha$. 3.117. $\mathrm{tg}^8\alpha$. 3.118. $4\sin(\alpha-60^\circ)\sin(\alpha+60^\circ)\sin^{-2}\alpha$. 3.119. $4\sin(30^\circ-\alpha)\times\sin(30^\circ+\alpha)\cos^{-2}\alpha$. 3.120. $4\cos 2\alpha\sin^{-2}2\alpha$. 3.121. $4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)$. 3.122. $4\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)$. 3.123. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$. 3.124. $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$. 3.125. $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. 3.126. $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)}{\cos 3\alpha}$. 3.127. $2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$. 3.128. $2\sqrt{2}\sin\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$. 3.129. $2\cos\alpha\cos 3\alpha$. 3.130. $4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$. 3.131. $\frac{2\sqrt{2}\cos 2\alpha\cos(\pi/4-2\alpha)}{\cos 4\alpha}$. 3.132. $\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\mathrm{ctg}\,3\alpha$. 3.133. $2\sin(\alpha-\pi/6)$. 3.134. $\mathrm{tg}\,5\alpha$. 3.135. $2\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 6\alpha$. 3.136. $2\cos 2\alpha\times\sin 6\alpha\sin 10\alpha$. 3.137. $\mathrm{ctg}(17\alpha/2)$. 3.138. $-4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\sin(13\alpha/2)$. 3.139. $-4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\cos(9\alpha/2)$. 3.140. $\mathrm{tg}(29\alpha/2)$. 3.141. $4\sin 3\alpha\times\cos 2\alpha\cos\alpha$. 3.142. $4\cos(\alpha/2)\cos\alpha\sin(13\alpha/2)$. 3.143. $4\cos(3\alpha/2)\times\cos 2\alpha\cos(17\alpha/2)$. 3.144. $8\cos^4 2\alpha$. 3.145. $2\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. 3.146. $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos(\pi/4+2\alpha)}{\cos 2\alpha}$. 3.147. $4\sin 3\alpha\sin 2\alpha\sin\alpha$. 3.153. 2. 3.154. 4. 3.155. $2\sqrt{3}$. 3.156. 7/25. 3.157. $2\sqrt{3}$. 3.158. $-17\sqrt{2}/26$. 3.159. $7\sqrt{2}/26$. 3.160. 65/113. 3.161. 26/87. 3.162. 0,96. 3.163. $1-p^2$. 3.164. 57/5. 3.165. 2. 3.166. $-22/9$. 3.167. $\pi-\mathrm{arctg}(2/3)$. 3.169. $\pi-\mathrm{arctg}\,5$. 3.170. 23/32. 3.171. $3\pi/4$. 3.172. $\sqrt{5}/20$. 3.174. $-4\sqrt{6}/23$. 3.176. $\alpha+\beta=\pi/4$. 3.177. 2. 3.178. 2. 3.181. $x-y=xy$. 3.184. $1+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}$. 3.185. m^4-4m^2+2.

3.240. $2|\mathrm{ctg}\,\alpha|$. **3.241.** $-0{,}5\sin 2\alpha$. **3.242.** $|\sin\alpha-\sin\beta|$. **3.243.** -1. **3.244.** 1. **3.245.** $-\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$. **3.246.** $\mathrm{tg}\,2\alpha$. **3.247.** 1. **3.248.** $\sin 4x\cos^{-2}4x$. **3.249.** $-\cos^2 4\alpha$. **3.250.** $-2\sin^2 2\alpha$. **3.251.** $\cos(40^\circ+2\alpha)$. **3.252.** $\mathrm{tg}^4\,2\alpha$. **3.253.** $\mathrm{tg}\,\alpha$. **3.254.** $\sin 4\alpha$. **3.255.** $\cos 8\alpha$. **3.256.** $-\sin 4\alpha$. **3.257.** $\mathrm{tg}^4(\alpha/2)$. **3.258.** $2\sin(2\alpha-\pi/6)$. **3.259.** $-1/2$. **3.260.** $-2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha$. **3.261.** $\mathrm{tg}\,(\pi/4+2\alpha)$. **3.262.** $8\sqrt{3}$. **3.263.** $\sqrt{3}/2$. **3.264.** $\mathrm{tg}\,5x$. **3.265.** $\sin 3x$. **3.266.** $\cos 3x$. **3.267.** $2|\cos^{-1}2\alpha|$. **3.268.** $\mathrm{tg}\,\alpha$. **3.269.** $\mathrm{tg}\,(\alpha+30^\circ)\,\mathrm{tg}\,(\alpha-30^\circ)$. **3.270.** $2\sin 2\alpha$. **3.271.** $2|\mathrm{ctg}\,4\alpha|$. **3.272.** $\mathrm{ctg}\,(\alpha-\pi/4)$. **3.273.** $1/4$. **3.274.** $\sin(\alpha+\beta)$. **3.275.** а) $\mathrm{tg}\,(\alpha/2)$; б) $-\mathrm{tg}\,(\alpha/2)$. **3.276.** $-\sin 2\alpha$. **3.277.** $\sin 4\alpha$. **3.278.** а) $-2\,\mathrm{tg}\,\alpha$; б) $2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **3.279.** $\cos(\alpha/2)$. **3.280.** $\mathrm{tg}^4\,2\alpha$. **3.281.** $(1/8)\sin 8\alpha\times\sin 4\alpha$. **3.282.** 1. **3.283.** $-\sin 6\alpha$. **3.284.** 1, якщо $\mathrm{ctg}\,x>0$; -1, якщо $\mathrm{ctg}\,x<0$. **3.285.** $2\sin(6\alpha-60^\circ)$. **3.286.** $(2/\sqrt{3})\sin(4\alpha-60^\circ)$. **3.287.** $-8\cos 4\alpha$. **3.288.** $\dfrac{4\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)}{\cos^3 x}$.

3.289. $\dfrac{8\sin(x-45^\circ)\sin(x+45^\circ)\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)}{\cos^4 x}$. **3.290.** $-8\cos(2\alpha+60^\circ)\cos(2\alpha-60^\circ)$. **3.291.** $2\sin(\alpha/4)$. **3.292.** $8\cos(2\alpha+60^\circ)\cos(2\alpha-60^\circ)$. **3.293.** $\sin^2(\alpha-\beta)$. **3.294.** $\dfrac{\cos(2\alpha+\beta)}{\cos 4\alpha}\times\mathrm{tg}\,2\alpha$. **3.295.** $-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **3.296.** $-2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-2\beta)$. **3.297.** $-2\sin 2\alpha\sin\beta\cos(2\alpha-\beta)$. **3.298.** $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **3.299.** $4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)$. **3.300.** $-\dfrac{4\sin^2(\pi/4-4\alpha)}{\sin 8\alpha}$. **3.301.** $\dfrac{2\sqrt{2}\sin(\pi/4-2\alpha)\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$. **3.302.** $2\,\mathrm{ctg}\,4\alpha$. **3.303.** $\cos^2(\alpha-\beta)$.

3.304. $\dfrac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos(\pi/4-2\alpha)}{\cos 2\alpha}$. **3.305.** $8\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. **3.306.** а) $\mathrm{ctg}\,(\alpha/2)$; б) $\mathrm{tg}\,(\alpha/2)$. **3.307.** $2\sin\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **3.308.** $2\sin\alpha\sin(2\beta-\alpha)\cos 2\beta$. **3.309.** $4\cos 4\alpha\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **3.310.** $4\sin 4\alpha\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)$. **3.311.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$. **3.312.** $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-4\alpha\right)$. **3.313.** $\dfrac{1}{2\cos 2\alpha}$. **3.314.** $\mathrm{tg}\,(\alpha-15^\circ)\,\mathrm{ctg}\,(\alpha+15^\circ)$. **3.315.** $4\sin 4\alpha\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)$. **3.316.** $-\sin 4\alpha$. **3.317.** $\mathrm{ctg}^3\,\alpha$. **3.318.** $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\mathrm{tg}^2\,\alpha$. **3.319.** $2\sqrt{2}\sin 2\alpha\times\sin(4\alpha-45^\circ)$. **3.320.** $\dfrac{2\sqrt{2}\cos(\pi/4+\alpha)\cos^2(\alpha/2)}{\cos\alpha}$. **3.321.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$.

3.322. $\dfrac{4\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$. **3.323.** $\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)$. **3.324.** $4\cos 4\alpha\sin(15^\circ-\alpha)\cos(15^\circ+\alpha)$. **3.325.** $4\sin(30^\circ+2\alpha)\sin(30^\circ-2\alpha)$. **3.326.** $\cos\dfrac{(m+n)\alpha}{2}\cos\dfrac{(m-n)\alpha}{2}$. **3.327.** $\dfrac{\sqrt{2}\sin(\pi/4+\alpha)}{\cos\alpha}$. **3.328.**

$\sqrt{3}\, \text{ctg}\, \alpha$. **3.329.** $\sin 4\alpha$. **3.330.** $2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$. **3.331.** $\frac{8}{\sqrt{3}} \sin 70°$. **3.355.** 3/2. **3.356.** 3/16. **3.357.** 1/4. **3.358.** 1. **3.359.** 1. **3.360.** 0. **3.361.** 1. **3.362.** — 85/44. **3.363.** —50/7. **3.364.** $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{7}{\sqrt{130}}$ і $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{9}{\sqrt{130}}$. **3.365.** $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{27}{7\sqrt{130}}$. **3.366.** $(3n - n^3)/2$. **3.367.** —9/4. **3.375.** $\text{tg}\,(x/2) = 2$ або $\text{tg}\,(x/2) = -1/3$. **3.376.** $(1 - m)/(1 + m)$. **3.377.** $(m^2 - 1)/2$. **3.378.** $\frac{p+q}{p-q} \times \text{ctg}\, \alpha$. **3.379.** $(1 + 6m^2 - 3m^4)/4$. **3.380.** $\sin 2\alpha = 2pq/(p^2 + q^2)$; $\cos 2\alpha = (q^2 - p^2)/(q^2 + p^2)$; $\text{tg}\, 2\alpha = 2pq/(q^2 - p^2)$. **3.381.** а) —3/5; б) 4/5. **3.382.** а) 4/5; б) 3/5. **3.383.** $\frac{q-p}{q+p} \text{ctg}\, \alpha$. **3.384.** —2. **3.386.** —1. **3.387.** —2/3. **3.388.** 1/2. **3.390.** $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$; $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$. **3.392.** 1/3. **3.393.** $f(\alpha) = p + 2$. **3.394.** $f(\alpha) = 7/9$. **3.410.** $(3/4) \sin 8\alpha$. **3.411.** $2 \sin^3 2\alpha$. **3.412.** $-\cos^2 2x$. **3.413.** $(3/4) \sin 4\alpha$. **3.414.** $\frac{2\sqrt{2} \sin(\pi/4 + 2\alpha) \cos^2(\pi/4 - \alpha)}{\sin 2\alpha}$. **3.415.** $8 \cos 16\alpha \cos^3 2\alpha$. **3.441.** $-a/b$. **3.442.** $-b/a$. **3.443.** $-2\sqrt[4]{2}/3$. **3.444.** —0,007. **3.445.** 6/25. **3.446.** 6/25. **3.447.** $3\pi/4$. **3.448.** $-\pi/4$. **3.449.** $\frac{1 - a^2}{2a}$. **3.450.** 0,009. **3.451.** 1/8. **3.452.** $(1 - \sqrt{5})/2$. **3.453.** $\sqrt{10} - 3$. **3.454.** 0,98. **3.455.** —119/120. **3.456.** 1/5. **3.457.** —2. **3.458.** 11/2. **3.459.** $-2\sqrt{5}/5$. **3.460.** $-2\sqrt{5}/5$. **3.461.** $2a/b$. **3.462.** —1/2. **3.463.** 1) $\text{ctg}\,(x/2) = \sqrt{2}/2$; 2) $\text{ctg}\,(x/2) = 3 - 2\sqrt{2}$. **3.465.** $2m/(1 + m^2)$. **3.466.** $(3m^2 + 1)/4$. **3.467.** $m(m^2 + 1)/2$. **3.468.** $2(1 - m^2)$. **3.469.** —38/125. **3.475.** $2 + \cos 2\alpha$. **3.476.** $1/\sqrt{2}$ при $\alpha = \pi/16$. **3.477.** 2 при $\alpha = \pi/16$. **3.481.** 2 при $\alpha = \pi/8$. **3.482.** 1/2 при $\alpha = \pi/4$. **3.484.** —76/125. **3.485.** 4 при $\alpha = \pi/4$. **3.486.** 2 при $\alpha = \pi/4$. **3.487.** 41/125. **3.490.** 1/4 при $\alpha = \pi/4$. **3.491.** 1/2 при $\alpha = \pi/4$. **3.492.** $f(x) = \sin^2 \alpha$. **3.493.** $\frac{\sin(n+1) 2\alpha \cos 2n\alpha}{\sin 2\alpha}$. **3.495.** 2.

Глава 4

4.001. 9. **4.002.** 119/3. **4.003.** 21 раз. **4.004.** 1) 2, —1, —4; 2) —10, —7, —4. **4.005.** 7; 1) 1, 6, 11; 2) 7, 10, 13. **4.006.** За 8 год. **4.007.** 3, 4. **4.008.** 7, —14, 28, —56. **4.009.** 1/8. **4.010.** 3, 3/2, 3/4. **4.011.** 1/3, 2/3, 1. **4.012.** 44. **4.013.** 120. **4.014.** 1, 9, 17. **4.015.** —20 100. **4.016.** 1) 7, —28, 112, —448; 2) $-11\frac{2}{3}$, $-46\frac{2}{3}$, $-186\frac{2}{3}$, $-746\frac{2}{3}$. **4.017.** 3, —6, 12, —24. **4.018.** 5. **4.019.** 1) 6, 1/4; 2) —6, —1/4. **4.020.** 5, 405. **4.021.** 10; 5, 15, 25. **4.022.** 1) 3, 4; 2) 48, 1/4. **4.023.** а) $x_1 = 1/2$, $x_2 = -7/9$; б) $x_1 = 1/3$; $x_2 = 2/3$. **4.024.** 9 або 31. **4.025.** 3/16, 1/4. **4.026.** 1, 2, 3, 4, ... **4.027.** 37,5 або 52,5. **4.028.** 6. **4.029.** 810. **4.030.** 1/5. **4.031.** 9. **4.032.** 1) 4, 5; 2) —79/7, —37/14. **4.033.** 6, 3, 3/2, ... **4.034.** 3, 9, 15. **4.035.** 4, 12. **4.036.** 1) 3, 2; 2) 12, 1/2. **4.038.** Так; $n + m$. **4.039.** 14. **4.040.** 1) 1, 3, 9; 2) 1/9, 7/9, 49/9. **4.041.** 7. **4.042.** 82 350. **4.043.** 6, —1/2. **4.044.** 1) 3, 6, 12, 18; 2) 18,75; 11,25; 6,75;

2,25. **4.045.** 5103 або 7/81. **4.046.** 1) 4, 8, 16; 2) 4/25, —16/25, 64/25. **4.047.** 1) 8, 4, 2; 2) 2, 4, 8. **4.049.** 127/8. **4.050.** 70 336. **4.051.** $2n + \frac{(4^n - 1)(4^{n+1} + 1)}{3 \cdot 4^n}$. **4.052.** S_1S_2. **4.055.** $S^2/(2S - 1)$. **4.056.** 2. **4.061.** 7. **4.062.** 1) $12 + 24 + 48 + 96$; 2) $\frac{9}{2} + \frac{27}{2} + \frac{81}{2} + \frac{243}{2}$. **4.063.** 7. **4.064.** 1) 3, 6, 12; 2) 27, 18, 12. **4.065.** $\frac{(a+b)S - 2ab}{2S - (a+b)}S$. **4.066.** $3n$. **4.067.** 1/9, 1/6, 1/3. **4.068.** —2. **4.069.** 931. **4.070.** 41. **4.071.** 1064. **4.072.** Менше 2. **4.073.** $25\frac{25}{27}$. **4.075.** 101. **4.077.** 2, —6, 18, —54 або —54, 18, —6, 2. **4.078.** $x = \sqrt[d]{q}$; завжди. **4.079.** $2^{n+1}(n-1) + 2 - 0{,}5n(n+1)$. **4.080.** $3^{n+1}(n-1) + 3$. **4.081.** $(S/\sigma)^{n/2}$. **4.082.** 9. **4.084.** 0. **4.085.** У 7381 раз.

Глава 5

5.001. а) $x = 4$; б) $x = 7$. **5.002.** а) $x = 5$; б) $x = 5$. **5.003.** а) $x = 5$; б) $x = 6$; $x = 11$. **5.004.** а) $x = 8$; б) $x = 7$. **5.005.** а) $x = 5$; б) $x = 7$. **5.008.** 240; 3-й доданок. **5.009.** $C_{10}^8 a^2 = 45a^2$. **5.010.** $15/28 < x < 10/13$. **5.011.** 924. **5.012.** $252ab$. **5.013.** 1547/1024. **5.014.** $x = 4$. **5.015.** $A_{16}^2 = 240$. **5.016.** 5. **5.017.** 55 440. **5.018.** 42. **5.019.** 1140. **5.020.** 968. **5.021.** 364. **5.022.** 64. **5.023.** 240. **5.024.** 124. **5.025.** 32 760. **5.026.** 25!/20!. **5.027.** 3136. **5.028.** 896. **5.029.** 8!. **5.030.** $x = 8$; $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. **5.031.** $x = 10$. **5.032.** $x = 7$. **5.033.** а) $x = 5$; $y = 7$; б) $x = 5$; $y = 3$. **5.034.** а) $x = 8$; $y = 3$; б) $x = 7$; $y = 3$. **5.035.** а) $x = 7$; $y = 3$; б) $x = 7$; $y = 3$. **5.037.** 6. **5.038.** 7290. **5.039.** $x_1 = \sqrt{2}/4$; $x_2 = 5\sqrt{5}$. **5.040.** 252. **5.041.** $U_3 = 10z^2$, $V_4 = 20z^2$. **5.042.** 9. **5.043.** $x = 2$. **5.044.** $30!/(10!)^3$. **5.045.** 42. **5.046.** 9!. **5.047.** $30! - 2 \cdot 29!$. **5.048.** 2520. **5.049.** $12!/(2!)^6$. **5.050.** 204. **5.051.** $2 \cdot 9!$. **5.052.** 2 027 025. **5.053.** 5^6; $6 \cdot 4^5$. **5.054.** 2^{10}. **5.055.** 16^{100}. **5.056.** 40. **5.057.** $80!/(3! \cdot 75!)$. **5.058.** 10!/48. **5.059.** 3^6; 6!. **5.060.** 2304. **5.061.** 15 368. **5.062.** $10 \cdot 15!/7!$. **5.063.** $28!/(7!)^4$. **5.064.** 15 015. **5.065.** 3^5. **5.066.** 10^8. **5.067.** $16!/(2^6 \cdot 3^2)$. **5.068.** 420. **5.069.** 1800. **5.070.** 105. **5.071.** 62. **5.072.** $9 \cdot 10^6$. **5.073.** 36. **5.074.** 60. **5.077.** $(n+1)! - 1$. **5.079.** 2^{36}. **5.080.** $314\,925 \cdot 10^5$, 9-й доданок. **5.081.** $5/8 < x < 20/21$. **5.082.** 3003. **5.083.** $2(6!)^2$. **5.084.** 2^{200}. **5.085.** 8^6; $8^6 - 13 \cdot 7^5$. **5.086.** $2(11!)^2$. **5.088.** 10!/4. **5.089.** 23. **5.090.** $2^8 \cdot 8!$.

Глава 6

6.001. $x_1 = 5$, $x_2 = -55/16$. **6.002.** $x_1 = a + b$, $x_2 = (a+b)/2$. **6.003.** $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}$. **6.004.** $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm \sqrt[4]{24}/2$. **6.005.** $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. **6.006.** $x_1 = (m+n)/(m-n)$, $x_2 = (m-n)/(m+n)$. **6.007.** $x_{1,2} = \pm a\sqrt{b}$, $x_{3,4} = \pm b\sqrt{a}$. **6.008.** $x = 0$. **6.009.** $y_1 = 0$, $y_{2,3} = a(-9 \pm \sqrt{5})/4$. **6.010.** $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt[3]{6}$. **6.011.** $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm 3\sqrt{21}/7$. **6.012.** $x = -1$. **6.013.** $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1/3$. **6.014.** $x = 0$. **6.015.** $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 38/11$. **6.016.** $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$. **6.017.** Якщо $n = p$, то x — будь-яке число, крім n; якщо $n \neq p$, то $x_1 = m$, $x_2 = -m$, $x_3 = m + n + p$. **6.018.**

$x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=(-3\pm\sqrt{5})/2$. **6.019.** $x_1=1$, $x_2=3$. **6.020.** Якщо $a\neq b$, то $x_1=2b-a$, $x_2=2a-b$; якщо $a=b$, то коренів немає. **6.021.** $x_1=-2$, $x_2=-1/8$. **6.022.** $x_1=1$, $x_2=-5$. **6.023.** $x_1=0$, $x_{2,3}=-3\pm2\sqrt{3}/3$. **6.024.** $x_1=2$, $x_2=1/2$, $x_{3,4}=(-11\pm\sqrt{105})/4$. **6.025.** Якщо $a=b$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq b$, то $x_1=0$, $x_2=a+b$. **6.026.** $x_1=a+1$, $x_2=(a+1)/a$. **6.027.** Якщо $a\neq0$, то $x_1=3a$, $x_2=-2a$; якщо $a=0$, то коренів немає. **6.028.** Якщо $b\neq0$, то $x_1=a+b$, $x_2=(a^2-b^2)/(2b)$; якщо $b=0$, то $x=a$. **6.029.** $x_1=a$, $x_2=(1-a^2)/a$. **6.030.** $x_1=-3$, $x_2=3$. **6.031.** $x=4$. **6.032.** $x=5$. **6.033.** $x=-1$. **6.034.** $x=7$. **6.035.** $x_1=a$, $x_2=(4a-b)/3$. **6.036.** $x_1=-1$, $x_2=3$. **6.037.** $x=0$. **6.038.** $x=3$. **6.039.** $x=5/3$. **6.040.** $x=9$. **6.041.** $x_1=-61$, $x_2=30$. **6.042.** $x_1=-5$, $x_2=2$. **6.043.** $x_1=-7$, $x_2=7$. **6.044.** $x_1=6$, $x_2=-2(\sqrt[3]{4}+1)/5$. **6.045.** $x_{1,2}=\pm2\sqrt{2}$; **6.046.** $x_{1,2}=\pm2\sqrt{2}$. **6.047.** $x_1=4$, $x_2=-4$. **6.048.** $x_1=8$, $x_2=27$. **6.049.** $x=2$. **6.050.** $x_1=3$, $x_2=5$. **6.051.** $x_1=8$, $x_2=7$. **6.052.** $x=4$. **6.053.** $x=8$. **6.054.** $x=64$. **6.055.** $x=1024$. **6.056.** $x_1=-4$, $x_2=4$. **6.057.** $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$. **6.058.** $x=1$. **6.059.** $z_1=2$, $z_2=-1/511$. **6.060.** $x_1=4$, $x_2=-3$. **6.061.** $x=64$. **6.062.** $x_{1,2}=\pm1$. **6.063.** $x=64$. **6.064.** $x=-1$. **6.065.** $x=2$. **6.066.** $x_1=6$, $x_2=-2$. **6.067.** (0,6; 0,3), (0,4; 0,5). **6.068.** (—1; 2), (2; —1). **6.069.** (1/2; 1/3), (1/3; 1/2). **6.070.** (2; 3), (3; 2). **6.071.** (2; 1), (—1; —2). **6.072.** (4; 3), (4; —3). **6.073.** (7; 3), (—7; —3). **6.074.** (4; 1), (10/3; 2/3). **6.075.** (1; 2), (2; 1). **6.076.** (1; 2). **6.077.** (1; 3), (3; 1), (—1; —3), (—3; —1). **6.078.** (2; 3), (3; 2). **6.079.** (1; 2), (2; 1). **6.080.** (3; 2), (—3; —2). **6.081.** (4; 1), (1; 4). **6.082.** (2; 1), (2; —1), (1; $\sqrt{2}$), (1; $-\sqrt{2}$). **6.083.** (1/4; 1/6), (1/12; 1/3), (—5/24; —7/24), (—3/8; —1/8). **6.084.** (2; 6), (1; 3). **6.085.** (2; 4), (4; 2). **6.086.** (4; 1), (1; 4). **6.087.** (2; 1), (—2; —1). **6.088.** (3; 2), (—3; —2). **6.089.** ($\sqrt[3]{m}$; —1), (—1; $\sqrt[3]{m}$). **6.090.** Якщо $ab=0$, то розв'язків немає; якщо $ab\neq0$, то $x=1/a$, $y=b$. **6.091.** (5; 3). **6.092.** (—4; —4), (—6; —2). **6.093.** (2; 3; 4). **6.094.** (5; 1), (—5; —1). **6.095.** (1; 2; 3). **6.096.** (1/2; 4). **6.097.** (2; —1; 1). **6.098.** (2; —1), (—1; 2). **6.099.** (9; 1), (1; 9). **6.100.** (41; 40). **6.101.** (12; 4), (34; —30). **6.102.** (3; 1). **6.103.** (1; 4). **6.104.** (1; 64), (64; 1). **6.105.** (2; 1), (1; 2), (—1; —2), (—2; —1). **6.106.** (4; 1), (1; 4), ($2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$), ($2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$). **6.107.** (1; 9), (9; 1). **6.108.** (5; 4). **6.109.** (1; 27), (27; 1). **6.110.** (41; 40). **6.111.** (4; 1), (1; 4). **6.112.** (1; 81), (81; 1). **6.113.** Якщо $a\neq0$, то $x_1=0$, $y_1=a$, $x_2=2-a$, $y_2=2$; якщо $a=0$, то $x=y=2$. **6.114.** (4; 1), (1; 4). **6.115.** (1; 8), (8; 1). **6.116.** (16; 1). **6.117.** ($9a^2$; a^2). **6.118.** (124; 76). **6.119.** (4; 1). **6.120.** $(b^2-2ac)/c^2$. **6.121.** $cx^2+bx+a=0$. **6.122.** $a^2x^2+(ab-ac)x-bc=0$. **6.123.** $ax^2+(b-2a)x+(c-b+a)=0$. **6.124.** $p=q=0$; $p=1$, $q=-2$. **6.125.** $A_1=1$, $B_1=-2$; $A_2=0$, $B_2=0$. **6.126.** $k=2$. **6.127.** $p=3$; $x=1$. **6.128.** $a=1$ і $a=1/2$. **6.129.** $a=-6$. **6.130.** $c=-15$. **6.131.** $a=4$. **6.132.** $p_1=-6$, $p_2=6$. **6.133.** 215/27. **6.134.** $b=2$. **6.135.** $c=1/3$. **6.136.** $x=1$. **6.137.** $x_1=1$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{7}/7$. **6.138.** $x_1=x_2=3$, $x_{3,4}=3\pm2\sqrt{5}$. **6.139.** $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm1$. **6.140.** $z_1=0$, $z_2=1$. **6.141.** $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=(-2\pm\sqrt{66})/2$. **6.142.** $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$. **6.143.** $x_1=1$, $x_2=-3$. **6.144.** $x_1=2$, $x_2=-4$. **6.145.** $x=1$. **6.146.** $x=0$. **6.147.** $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=(-3\pm\sqrt{73})/2$. **6.148.** $x_1=2$,

$x_2 = 1/2$. **6.149.** $x_{1,2} = -1$. **6.150.** $u_1 = 1$, $u_{2,3} = (1 \pm \sqrt{33})/4$. **6.151.** Якщо $m = 1$, то x — будь-яке число, крім ± 1, ± 2; якщо $m \neq 1$, то коренів немає. **6.152.** Коренів немає. **6.153.** Якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x_{1,2} = \pm a$. **6.154.** $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. **6.155.** Якщо $a = 0$, то $x = 0$; якщо $a \neq 0$, то $x_1 = 1/a$, $x_2 = -\sqrt[3]{a}$. **6.156.** $x_1 = 3$, $x_2 = 2/3$. **6.157.** $x_1 = 2a - 1$, $x_2 = 2 - a$. **6.158.** $x = 0$. **6.159.** $x = 2$. **6.160.** $x = 12$. **6.161.** $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. **6.162.** $x_1 = (b + 128)/a$, $x_2 = (128b + 1)/(128a)$. **6.163.** $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. **6.164.** $x = 2$. **6.165.** $x_1 = 0$, $x_2 = -5$. **6.166.** $x_1 = 2$, $x_2 = -7$. **6.167.** $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. **6.168.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1/3$. **6.169.** $x = 1$. **6.170.** $x = 5$. **6.171.** $x_1 = 8$, $x_{2,3} = 8 \pm 12\sqrt{21}/7$. **6.172.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. **6.173.** $x = 0$. **6.174.** $z = -4/3$. **6.175.** $x_1 = 1$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = 2$. **6.176.** $x = 0$. **6.177.** $x = 1$. **6.178.** $x_1 = (4b - a)/3$, $x_2 = (4a - b)/3$; якщо $a = b$, то коренів немає. **6.179.** $x \in [0; 1]$. **6.180.** 10; —20,5. **6.181.** $x = -(a + 1)$. **6.182.** —1; 2. **6.183.** (2; 3), (3; 2), $((-7 + \sqrt{73})/2; -(7 + \sqrt{73})/2)$, $(-(7 + \sqrt{73})/2; (-7 + \sqrt{73})/2)$. **6.184.** (2; 1), (—2; —1). **6.185.** (3; 2), (—3; —2), $(\sqrt{3}/3; 5\sqrt{3}/3)$, $(-\sqrt{3}/3; -5\sqrt{3}/3)$. **6.186.** $x = \frac{k(k-c)(k-b)}{a(a-c)(a-b)}$, $y = \frac{k(k-c)(k-a)}{b(b-c)(b-a)}$, $z = \frac{k(k-a)(k-b)}{c(c-a)(c-b)}$. **6.187.** (4; 1), (1; 4). **6.188.** $x = abc$, $y = ab + bc + ca$, $z = a + b + c$. **6.189.** (2; 1), (—1; —2). **6.190.** $x_{1,2} = \pm\sqrt{abc}/b$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{abc}/c$, $z_{1,2} = \sqrt{abc}/a$. **6.191.** (2; 2), (—3; —3), $((1 + \sqrt{21})/2; (1 - \sqrt{21})/2)$, $((1 - \sqrt{21})/2; (1 + \sqrt{21})/2)$. **6.192.** (3; 1), (3; —1), $(-5/3; \sqrt{65}/3)$, $(-5/3; -\sqrt{65}/3)$. **6.193.** (1; 1; 1), (—2; —2; —2). **6.194.** (5; 3), (—5; —3). **6.195.** (1; 2), (—239/146; 117/146). **6.196.** (3; 5), (5; 3). **6.197.** (2; 2), (—2; —2). **6.198.** Якщо $ab + 1 = 0$, то $y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$, x — будь-яке число; якщо $ab = 1 \neq 0$, то $x_1 = (a + b)/2$; $y_1 = (a - b)/2$, $x_2 = (a + b)/(2ab)$, $y_2 = (a - b)/(2ab)$. **6.199.** (3; 0; 5). **6.200.** (3; 2), (1; 4), (—3; —4), (—5; —2). **6.201.** (2; —3). **6.202.** (1; 1; 1). **6.203.** (0; 0; 0), $(a - b; b - c; c - a)$. **6.204.** (2; 1), (6; —3), $(6 + 2\sqrt{3}; -2 - 2\sqrt{3})$, $(6 - 2\sqrt{3}; -2 + 2\sqrt{3})$. **6.205.** (3; 1), (—3; —1), $(14\sqrt{106}/53; 4\sqrt{106}/53)$, $(-14\sqrt{106}/53; -4\sqrt{106}/53)$. **6.206.** (3; 1), (1; 3). **6.207.** (1; 2; 3), (1; 4; 1), (5; 2; —1), (5; 4; —3). **6.208.** $(a; 2a)$, $(2a; a)$. **6.209.** (3; —2), (—2; 3). **6.210.** (2; 1), (1; 2), (—2; 1), (1; —2), (2; —1), (—1; 2), (—2; —1), (—1; —2). **6.211.** (2; 3), (—2; —3). **6.212.** (1; 3; 5), (—1; —3; —5). **6.213.** (2; 1), (—2; —1), (2; —1), (—2; 1), (1; 2), (—1; —2), (1; —2), (—1; 2). **6.214.** (0; 0; 0), (2; —1; —1). **6.215.** (2; —5). **6.216.** (4; 4), (—5; —5), $((1 + \sqrt{77})/2; (1 - \sqrt{77})/2)$, $((1 - \sqrt{77})/2; (1 + \sqrt{77})/2)$. **6.217.** (1; 3), (3; 1), (—1; —3), (—3; —1). **6.218.** $(a; 2a)$, $(2a; a)$. **6.219.** (1; 1; 1), (7; —3; —1). **6.220.** (4; 2), (—4; —2). **6.221.** (3; —2; 1), (—1; 0; 3). **6.222.** (11; 1). **6.223.** (2; —2). **6.224.** (3; —2; 6). **6.225.** (16; 1), (1; 16). **6.226.** (1; 1). **6.227.** (—4; 5; 3). **6.228.** (4; 9), (9; 4). **6.229.** (49; 49). **6.230.** (2; 3), (13/3; —5/3). **6.231.** (5; 4), (—9; 25). **6.232.** (5; 4). **6.233.** (2; —1). **6.234.** (64; 1), (1; 64). **6.235.** (1; 7), (49/64; 41/8), (7; —8). **6.236.** $(\sqrt{10}; \sqrt{6})$, $(\sqrt{10}; -\sqrt{6})$. **6.237.** (4; 1), (121/64; 169/64). **6.238.** (1; 2), (—1; —2). **6.239.** (3/2; 2/3), (—1; —1), (1; 1), (—3/2; —2/3). **6.240.** (4; 1), (1; 4), (—4; —1), (—1; —4). **6.241.** (5; 4), $(-\sqrt{28{,}5}; -\sqrt{12{,}5})$, $(-\sqrt{28{,}5}; \sqrt{12{,}5})$. **6.242.** (3; 3/2), (6; 3). **6.243.** (10; 1), (—21/2; 53/12). **6.244.** $x_1 = 0$; $x_2 = -10$. **6.245.** (0; 0), (1; —1), (1/2; 0),

6.246. $ax^2 + bx + (c + \sqrt{b^2 - 4ac} - a) = 0$. **6.247.** $m = 3$ і $m = -2$; при цих значеннях m буде $z_1 = -1$, $z_2 = -3$, $z_3 = 4$. **6.250.** $a = -2$. **6.251.** $p > 2$; $x_1 = p + 2$, $x_2 = (2 - p)/5$. **6.252.** $p = 1$, $q = -6$ і $p = -1$, $q = -6$. **6.253.** $x^2 + (4q - 2p^2)x + (p^4 - 4p^2q) = 0$. **6.254.** $21x^2 - 23x + 6 = 0$. **6.256.** $x_1 = -3$, $x_2 = -5$. **6.257.** $u_1 = 1$, $u_2 = a + b$, $u_3 = a - b$. **6.258.** $x_1 = 1$, $x_2 = a$, $x_3 = 1 - a$. **6.259.** $x_1 = -1$, $x_2 = a$, $x_3 = 2a$. **6.260.** $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$. **6.261.** $x_1 = 1$, $x_2 = a + \sqrt{a}$, $x_3 = a - \sqrt{a}$. **6.262.** $x = 1$. **6.263.** $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. **6.264.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. **6.265.** $x_1 = 1$, $x_{2,3} = a \pm \sqrt{m}$. **6.266.** $x_1 = a$, $x_{2,3} = a \pm \sqrt{b}$. **6.267.** $x_1 = -3$, $x_2 = p + 1$, $x_3 = -p + 2$. **6.268.** $z_1 = 1$, $z_{2,3} = p \pm \sqrt{q}$. **6.269.** $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = x_3 = a - \sqrt{3}$. **6.270.** $x = -1/2$. **6.271.** $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1/2$. **6.272.** $x_1 = x_2 = 2/3$, $x_3 = 5/3$. **6.273.** $x_{1,2} = \pm 1/2$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$. **6.274.** $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$. **6.275.** $x = 0$. **6.276.** $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. **6.277.** $x = 1$. **6.278.** $x = 3$. **6.279.** $x = 8$. **6.280.** $x = 0$. **6.281.** $x_1 = -6$, $x_2 = -5{,}5$ і $x_3 = 5$. **6.282.** $u = 2$. **6.283.** $x = 32$. **6.284.** $x_1 = 63/5$, $x_2 = -17{,}5$. **6.285.** $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. **6.286.** $x = 1$. **6.287.** $x = 64$. **6.288.** $x = 5$. **6.289.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2\sqrt[3]{4}$, $x_3 = -3\sqrt[3]{9}$. **6.290.** $x = 5$. **6.291.** $x = 4$. **6.292.** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. **6.293.** $x = 1$. **6.294.** $x_1 = 1$, $x_2 = -6$. **6.295.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. **6.296.** $x_1 = 7$, $x_2 = 26$. **6.297.** $x = 31$. **6.298.** $x_1 = 7$, $x_2 = 14$, $x_{3,4} = 21/2 \pm 7\sqrt{141}/12$. **6.299.** $x = 79$. **6.300.** $x = 3$. **6.301.** $x_1 = 190/63$, $x_2 = 2185/728$. **6.302.** $x = 2$. **6.303.** $(3; -1)$, $(1; -3)$. **6.304.** $(a; b; c)$. **6.305.** $x = 2$, $u = 1$, $v = 2$, $w = 3$. **6.306.** $(0; 0; 0)$, $(-1; 1; 1)$. **6.307.** $(1; 1; 1)$. **6.308.** $(1; 2; 3)$, $(-1; -2; -3)$. **6.309.** $(1; -1; 2)$, $(1; 2; -1)$, $(-1; 1; 2)$, $(-1; 2; 1)$, $(2; 1; -1)$, $(2; -1; 1)$. **6.310.** $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(-2; -1)$, $(\sqrt{5}/5; \sqrt{5}/10)$, $(\sqrt{5}/10; \sqrt{5}/5)$, $(-\sqrt{5}/5; -\sqrt{5}/10)$, $(-\sqrt{5}/10; -\sqrt{5}/5)$. **6.311.** $(2; -1)$, $(-1; 2)$, $(-2; 1)$, $(1; -2)$. **6.312.** $(1; -2; 3)$, $(1; -3; 2)$, $(2; -1; 3)$, $(2; -3; 1)$, $(3; -1; 2)$, $(3; -2; 1)$. **6.313.** $(2; 1)$, $(19\sqrt[3]{4}/4; -17\sqrt[3]{4}/4)$. **6.314.** $(2; 2; 2)$. **6.315.** $(1; 1)$. **6.316.** $(a + 1; a; a - 1)$, $(-a - 1; -a; -a + 1)$. **6.317.** $(3; -2; 2)$, $((9 + 3\sqrt{5})/2; -(7 + 3\sqrt{5})/2; (1 - 3\sqrt{5})/2)$, $((9 - 3\sqrt{5})/2; (-7 + 3\sqrt{5})/2; (1 + 3\sqrt{5})/2)$. **6.318.** $(3; 1)$, $(1; 3)$, $(-1; -3)$, $(-3; -1)$. **6.319.** $(-2; 3)$, $(3; -2)$. **6.320.** $(1; 2)$, $(2; 1)$. **6.321.** $(2; 1)$, $(-2; -1)$. **6.322.** $(2; 1)$. **6.323.** $(1; 2)$. **6.324.** $(6; 9)$, $(9; 6)$. **6.325.** $(4; 4; -4)$. **6.326.** $(0; 0)$, $(-1; -2)$, $(-2; -1)$, $(2/3; -1/3)$, $(-1/3; 2/3)$. **6.327.** Коренів немає. **6.328.** $(0; 0)$, $(2; 4)$, $(4; 2)$. **6.329.** $(1; 64)$, $(64; 1)$. **6.330.** Якщо $a \neq b$, то $x_1 = 1/3$, $y_1 = 1/3$, $x_2 = -4/3$, $y_2 = -4/3$; якщо $a = b \neq 0$, то система має безліч розв'язків, які є координатами точок двох прямих $x - 4y = -1$ і $4x - y = -4$. **6.331.** $(17/12; 5/3)$. **6.332.** $(1; 1; 1)$. **6.333.** $(2; 3)$, $(-2; -3)$, $(2; -3)$, $(-2; 3)$. **6.334.** $(0; 0)$. **6.335.** $(26; 10)$, $(650; -646)$. **6.336.** $(25/3; 16/3)$. **6.337.** $(5; 4; 5)$. **6.338.** $(4; 4)$, $(4{,}5; 3{,}5)$. **6.339.** $(\sqrt{2}/4; -\sqrt{2}/4)$, $(-\sqrt{2}/4; \sqrt{2}/4)$. **6.340.** $(5; 3)$, $(5; 4)$. **6.341.** $(8\sqrt{26}/13; 27\sqrt{26}/13)$, $(-8\sqrt{26}/13; -27\sqrt{26}/13)$, $(-8\sqrt{26}/13; 27\sqrt{26}/13)$, $(8\sqrt{26}/13; -27\sqrt{26}/13)$. **6.342.** $S_{n+2} = -(bS_{n+1} + cS_n)/a$. **6.343.** 1) $x^3 - qx^2 + prx - r^2 = 0$; 2) $x = \sqrt{2}$. **6.344.** $a = -52$, $b = -40$. **6.345.** $p = -60$, $q = 36$. **6.346.** ab. **6.348.** $x_1 = 2/3$, $x_2 = -3/2$, $x_3 = 1/2$. **6.349.** $x = 1/2$. **6.350.** $x^3 - (p^2 - q)x^2 + (p^2q - q^2)x - q^3 = 0$. **6.351.** $x_1 = 10$, $x_{2,3} =$

$= -2 \pm \sqrt{3}$ і $x = 5$. **6.352.** $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = \pm 4$ і $x = -2$. **6.353.** $x = 1 + \lambda^{-1}$, де λ — дійсне число; $\lambda \neq 0$. **6.354.** $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = -5/2$. **6.355.** $n = 17$. **6.356.** $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, $x_3 = 2 + \sqrt{3}$, $x_4 = 2 - \sqrt{3}$. **6.357.** $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}/3$, $x_3 = -2\sqrt{3}$. **6.358.** $x = 5$ і $x_1 = 10$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$. **6.359.** $x_1 = -b/a$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{-d/b}$ за умови, що $bd < 0$. **6.361.** $x = -q$. **6.363.** 1/8; —1/4; 1/2. **6.364.** $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 0{,}5 + \sqrt{3}$, $x_3 = 0{,}5 - \sqrt{3}$. **6.365.** $x = 1$. **6.366.** $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. **6.368.** $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$. **6.369.** $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = 1/2$. **6.370.** $x = 2$.

Глава 7

7.001. 10. **7.002.** 890. **7.003.** 3. **7.004.** 2. **7.005.** —11. **7.006.** 24. **7.007.** 19. **7.008.** 1. **7.009.** 8. **7.010.** $a^2 + a + 1$. **7.011.** $\log_a \sqrt{a^2 - 1}$. **7.012.** $ab\,(a - b)^2$. **7.013.** $1 + a$. **7.014.** $\log_a b$ **7.015.** $\log_a b$. **7.016.** $1/b$. **7.018.** 5. **7.019.** $z \geqslant 2$. **7.020.** 1/2. **7.021.** 2. **7.022.** 3; 81. **7.023.** —5/4. **7.024.** 1,5; 10. **7.025.** — 2. **7.026.** 13. **7.027.** 1/2. **7.028.** 0. **7.029.** 5. **7.030.** —1; 5. **7.031.** 3. **7.032.** 1. **7.033.** 0,01; 0,1; 10; 100. **7.034.** 3. **7.035.** 1. **7.036.** —3; 3. **7.037.** —1; 1. **7.038.** 5; 15. **7.039.** 7. **7.040.** —3; 3. **7.041.** 2; 11. **7.042.** 1. **7.043.** 2; 6. **7.044.** 1/9; 3. **7.045.** 37. **7.046.** $4 - \sqrt{11}$. **7.047.** 3. **7.048.** 54. **7.049.** 2; 3. **7.050.** 6. **7.051.** 29. **7.052.** 1/128; 2. **7.053.** 10. **7.054.** 64. **7.055.** 2. **7.056.** 100. **7.057.** — 3. **7.058.** 5,5. **7.059.** 81. **7.060.** — 0,2; 3. **7.061.** 25. **7.062.** 5/3. **7.063.** 1; 2. **7.064.** —2,5; 3. **7.065.** 9/4. **7.066.** 4. **7.067.** — 7; 8. **7.068.** $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **7.069.** 2. **7.070.** 1; 3. **7.071.** 0. **7.072.** — 1/2; 1/2. **7.073.** $-\sqrt{2}$; —1; 1; $\sqrt{2}$. **7.074.** 3. **7.075.** 20. **7.076.** 9. **7.077.** —1; 9. **7.078.** $3\log_6 2$; 3. **7.079.** 1/27; 9. **7.080.** 10. **7.081.** 5; 25. **7.082.** 10^{-5}; 10^3. **7.083.** 2; 64. **7.084.** 3. **7.085.** —1; 1. **7.086.** $1/\sqrt{10}$; 100. **7.087.** —3; 1. **7.088.** $\sqrt[3]{2}$. **7.089.** 0; 2. **7.090.** 1; 100. **7.091.** 1. **7.092.** 3; $3 + \sqrt{2}$. **7.093.** 1/9; 9. **7.094.** 5. **7.095.** $\sqrt[9]{a}$; a^9, де $a > 0$, $a \neq 1$. **7.096.** —1; 7. **7.097.** 0; 6. **7.098.** 5. **7.099.** 0. **7.100.** 1; 2. **7.101.** 10. **7.102.** $5 - \sqrt{11}$. **7.103.** 10. **7.104.** 5. **7.105.** 5. **7.106.** $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{2}$. **7.107.** $\sqrt[3]{2}$; 4. **7.108.** 17/4; 33/8; 8; 12. **7.109.** 1. **7.110.** 0. **7.111.** 9. **7.112.** 10. **7.113.** 0,1; 1000. **7.114.** —10. **7.115.** $10^{-9/2}$; 10. **7.116.** 2; 8. **7.117.** 9. **7.118.** 7. **7.119.** 2. **7.120.** 3; 10. **7.121.** 2. **7.122.** 0; 25. **7.123.** 7; 8. **7.124.** 2; 4. **7.125.** 3; 27^3. **7.126.** $\sqrt{3}$. **7.127.** —2. **7.128.** (5; 5). **7.129.** (4,5; 0,5). **7.130.** (4; 2), (4; —2). **7.131.** (2; 18), (18; 2). **7.132.** (1; 2), (16; —28). **7.133.** (9; 3), (3; 9). **7.134.** (3; 2). **7.135.** (6; 8), (8; 6). **7.136.** (25; 36). **7.137.** (4; 2). **7.138.** (5; 1), (5; —1). **7.139.** (3; —3). **7.140.** (1/2; —3/2). **7.141.** (4; 2). **7.142.** (4; 16). **7.143.** (3; 3), (5; 1). **7.144.** (1; 1). **7.145.** (16; 3), (1/64; —2). **7.146.** (3; 27). **7.147.** $((\sqrt{5} - 1)/2;\ (3 - \sqrt{5})/2)$. **7.148.** (9; 16). **7.149.** (5; 1). **7.150.** $a + b$. **7.151.** 0, якщо $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < b < 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} a > 1, \\ b > 1, \end{cases}$ і $-2\,(\log_b a + \log_a b)$, якщо $\begin{cases} a > 1, \\ 0 < b < 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ b > 1. \end{cases}$ **7.152.** $(\log_2 x + 1)^2$. **7.153.** $x + 1$, де $x > 0$, $x \neq 1$. **7.154.** $\log_a b$. **7.155.** $3 - 2\log_a b$, якщо $0 < b < a^3$, і —3, якщо $b \geqslant a^3$. **7.156.** $1/(\log_a b - 1)$.

7.157. $(1/(\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}+\delta^{-1})$. 7.158. $\alpha = 10^{1/(1-\lg\gamma)}$. 7.160. 0. 7.161. $3(1-a)/(b+1)$. 7.163. $a(b+3)$. 7.165. $-1/2$. 7.166. 25. 7.167. 1/25. 7.168. 1/12. 7.169. $\pi n/2$, $n \in Z$. 7.170. 0; 16/9. 7.171. 1; 1/16. 7.172. -64; -1. 7.173. -100. 7.174. 1/9; 9. 7.175. -1; 3. 7.176. 5. 7.177. 0. 7.178. $1/\sqrt[3]{3}$. 7.179. 2. 7.180. 1/10; $10^{(1\pm\sqrt{3})/2}$. 7.181. 1/3; 9. 7.182. a, де $a>0$, $a\neq 1$. 7.183. 0,75. 7.184. a^6, де $a>0$, $a\neq 1$. 7.185. $\sqrt[5]{7}$; 7. 7.186. 3. 7.187. 2. 7.188. 1/25; $1/\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; 25. 7.189. m, де $m>0$, $m\neq 1$. 7.190. 16/3. 7.191. $\sqrt[10]{10}$. 7.192. 1/8; 8. 7.193. $\sqrt{3}$. 7.194. $1/\sqrt[3]{4}$; 8. 7.195. 1/625; 5. 7.196. $\sqrt{3}$. 7.197. 9. 7.198. 25. 7.199. -5; 5. 7.200. 6. 7.201. 17. 7.202. $\sqrt{3}$; 3. 7.203. $1/(4\sqrt[5]{8})$; 1; 4. 7.204. 2; 3; 4; 11. 7.205. 1/3; 2; 4. 7.206. $-1/5$; 1/2; 1; 3. 7.207. a, де $a>0$, $a\neq 1$. 7.208. 4. 7.209. 3. 7.210. 1; 3. 7.211. 1/3. 7.212. 4. 7.213. 1/9; 9. 7.214. 0. 7.215. 2,5. 7.216. 0; 1; 2. 7.217. -2; 2. 7.218. 2. 7.219. 1. 7.220. -2. 7.221. 0,01. 7.222. 0; 1/2. 7.223. 1/3. 7.224. 1; $\log_2(3+\sqrt{29})-1$. 7.225. 2. 7.226. 1/3; 3. 7.227. 5. 7.228. 100. 7.229. 0. 7.230. 1. 7.231. 16. 7.232. $0{,}5\sqrt[3]{4}$; 4. 7.233. $1/a$; $\sqrt{a}$; a^2. 7.234. 0,1; $\sqrt{10}$; 100. 7.235. 1. 7.236. -1000. 7.237. $-1/2$. 7.238. $-2\sqrt[3]{2}$. 7.239. 256. 7.240. 1,1; 11. 7.241. 1. 7.242. 0. 7.243. 3. 7.244. $(-1)^n \pi/6+\pi n$, $n\in Z$. 7.245. 3. 7.246. 2. 7.247. 5. 7.248. 8; 9. 7.249. $2+\log_4\dfrac{a-27}{3-a}$, де $3<a<27$. 7.250. a^6, де $a>0$, $a\neq 1$. 7.251. 0,001; 1; 10. 7.252. 1. 7.253. $x=4-a^2$ при $0<a<1$ і $1<a<2\sqrt{2}$. 7.254. 0. 7.255. 4. 7.256. $4\log_3 2$. 7.257. 1023. 7.258. $(2a-1)/(a+3)$ при $a\neq -2$, $a\neq -3$ і $a\neq 1/2$; коренів немає при $a=-2$, $a=-3$ і $a=1/2$. 7.259. (1; 1), $(\sqrt[3]{6}/3;\ 2\sqrt[3]{6}/3)$. 7.260. (2; 2). 7.261. (2; 4). 7.262. (6; 2). 7.263 (2; 1). 7.264. (10; 1,5), (0,2; 75), (15; 1). 7.265. (2; 4). 7.266. $(\sqrt{3};\ 1)$, $(-\sqrt{3};\ 1)$. 7.267. (27; 4) (1/81; -3). 7.268. (1; 9), (16; 1). 7.269. (-2; 7). 7.270. (8; 4). 7.271. (5; 2). 7.272. (16; 20). 7.273. (1; 0), (2; 1). 7.274. $(9a;\ 2a)$, $(a;\ 18a)$, де $a>0$, $a\neq 1$. 7.275. (4; 1). 7.276. (4; 1), (-4; -1). 7.277. $(\sqrt{2};\ 2)$, $(\sqrt[3]{4}/2;\ -3)$. 7.278. (6; 6). 7.279. (3; 5), (6; 2), (1; 7). 7.280. (2; 4), $(4\sqrt{2};\ 2\sqrt[4]{2})$. 7.281. (3; 9). 7.282. (6; 2). 7.283. (5; 5). 7.284. (3; 9), (9; 3). 7.285. (5; 3) (1; -1). 7.286. (-10; 20), (10/3; 20/3). 7.287. (1; 4). 7.288. (8; 9), $(27\log_5^3 2;\ 4\log_2^2 5)$. 7.289. (4; 2), ($-4$; 2). 7.290. (1/2; 4). 7.291. (2; 3). 7.292. (1; 3). 7.293. (2/9; 1/9). 7.294. (6; 2). 7.295. $\lg b$, де $b>1$. 7.296. 2, якщо $1<a\leqslant b$, і $2\log_a b$, якщо $1<b<a$. 7.297. $\log_n^2 p$, де $\begin{cases} n>1, \\ p>1 \end{cases}$ або $\begin{cases} 0<n<1, \\ 0<p<1. \end{cases}$ 7.298. -2, якщо $1<a\leqslant b$, і $-2\log_a b$, якщо $1<b<a$. 7.299. $1-\log_a(a-b)$, якщо $\begin{cases} 0<a<1, \\ b<0 \end{cases}$ або $\begin{cases} a>1, \\ 0<b<a, \end{cases}$ і $\log_a(a-b)-1$, якщо $0<b<a<1$ або $\begin{cases} a>1, \\ b<0. \end{cases}$ 7.300. $\log_{135} 675>\log_{45} 75$. 7.301. $x=\log_{0,4}((\sqrt{5}-1)/2)$, $0<x<1$. 7.303. $\log_n A \log_m A \log_p A \log_A (mnp)$. 7.305. $\log_a b-\log_b a$. 7.306. При $p=1$ і при $p\in[-1/2;\ -3/22]$. 7.307. При $a=12$ і при $a\in(-\infty;\ 0)$. 7.308. 3. 7.309. 1; 4. 7.310. 3. 7.311.

1/8; 1/2. 7.312. 64. 7.313. 3. 7.314. 7. 7.315. $\pi/2+\pi n$, де $n\in Z$. 7.316. $1-\sqrt{1-0{,}5\lg p}$; $1+\sqrt{1-0{,}5\lg p}$, де $1<p\leqslant 100$. 7. 317. 4. 7.318. $\sqrt[k]{k}$, де $k\geqslant 2$. 7.319. b^2+1, де $b>0$, $b\neq 1$. 7.320. 1/3; 3. 7.321. 0,1; 2; 1000. 7.322. 2 і (0; 6), якщо $a=1$. 7.323. 2 і (-2; ∞), якщо $p=1$. 7.324. -1; 1; 2. 7.325. 1; 3. 7.326. -1; 2; 4. 7.327. 4. 7.328. 100. 7.329. 1; 17/12; 11/6. 7.330. $1-\sqrt{2}$; 1; $1+\sqrt{2}$. 7.331 1/3; 9. 7.332. $(\sqrt{5}-3)/2$; $(9-\sqrt{29})/2$. 7.333. 16. 7.334. (3/2; 1/2). 7.335. $\left(a^{\frac{q^2}{p(q-p)}},\ a^{\frac{q}{q-p}}\right)$. 7.336. (1/4; 1/3). 7.337. $(-a^3; -1/a)$, $(-1/a; -a^3)$. 7.338. (8; 2), (1/2; 1/8). 7.339. (0; 0), (8; -8), (3; 1/3), (-4; -2). 7.340. (3; 9), (1/9; 1/3).

Глава 8

(Всюди, якщо немає інших вказівок, припускаємо, що k, l, m набувають будь-яких цілих значень)

8.001. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(12k+1)$. 8.002. $x=(-1)^{k-1}\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.003. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.004. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.005. $z=(-1)^k 10^\circ+60^\circ\cdot k$. 8.006. $t=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. 8.007. $t_1=\pi k$, $t_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$. 8.008. $t_1=\frac{\pi}{12}(4k-1)$, $t_2=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi k}{3}$. 8.009. $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.010. $z=\pm 40^\circ+120^\circ\times k$. 8.011. $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. 8.012. $x=\frac{\pi}{12}(4k-1)$. 8.013. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.014. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.015. $z_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. 8.016. $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. 8.017. $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{8}(8k\pm 3)$. 8.018. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.019. $x=\frac{\pi}{9}(2k+1)$. 8.020. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.021. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.022. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$. 8.023. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi k}{5}$, $x_3=\frac{\pi}{11}(2k+1)$. 8.024. $x=\frac{\pi k}{3}$. 8.025. $x=15^\circ+360^\circ\cdot k$. 8.026. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}\times(4k+1)$. 8.027. $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi k}{7}$. 8.028. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.029. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. 8.030. $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.031. $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$. 8.032. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$,

$x_2 = \frac{2\pi k}{11}$. 8.033. $x = \frac{\pi}{16}(4k+1)$. 8.034. $x = \frac{\pi k}{8}$. 8.035. $x = \frac{\pi}{4} \times$ $\times (2k+1)$. 8.036. $x_1 = \frac{\pi}{16}(2k+1)$, $x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$. 8.037. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1)$. 8.038. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$. 8.039. $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2 = \operatorname{arcctg} 5 + \pi k$. 8.040. $x = \frac{\pi}{4}(4k+3)$. 8.041. $x_1 = \frac{\pi k}{5}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(2k+1)$. 8.042. $t = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.043. $z_1 = 35^\circ + 120^\circ \cdot k$, $z_2 = 55^\circ + 120^\circ \cdot k$. 8.044. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{21} + \frac{\pi k}{7}$. 8.045. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. 8.046. $z_1 = \pi k$, $z_2 = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. 8.047. $z = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$. 8.048. $x = \frac{\pi k}{4}$. 8.049. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$. 8.050. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. 8.051. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.052. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$. 8.053. $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$. 8.054. $x_1 = \frac{\pi k}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{8}(4k+3)$. 8.055. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. 8.056. $t_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $t_2 = \frac{\pi}{3}(2k+1)$. 8.057. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$. 8.058. $x_1 = \frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{20}(4k+3)$. 8.059. $x_1 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $x_2 = \pm\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi k}{3}$. 8.060. $x = \frac{\pi k}{5}$. 8.061. $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$. 8.062. $x = \pi(2k+1)$. 8.063. $x_1 = \frac{\pi k}{3}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$. 8.064. $z = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. 8.065. $z_1 = \frac{\pi}{4}(8k+1)$, $z_2 = \frac{\pi}{20}(8k+3)$. 8.066. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.067. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{18}(4k+1)$. 8.068. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.069. $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.070. $z_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $z_2 = \frac{2}{5}\operatorname{arctg} 5 + \frac{2\pi k}{5}$. 8.071. $z_1 = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} 2 + \frac{2\pi k}{3}$, $z_2 = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \frac{2\pi k}{3}$. 8.072. $x = \pm\frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi k$. 8.073. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$. 8.074. $x_1 = \pi(2k+1)$, $x_2 = \pm\frac{4}{3}\pi + 4\pi k$. 8.075. $x_1 = \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$. 8.076. $x_1 = \frac{\pi k}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{7}(2k+1)$. 8.077. $z_1 = 2\operatorname{arcctg} 3 + 2\pi k$, $z_2 = -2\operatorname{arctg} 7 + 2\pi k$, 8.078. $x_1 = \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.079. $x =$

$= \frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.080.** $x_1 = \pi k$, $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. **8.081.** $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi k$. **8.082.** $x_1 = \frac{\pi k}{5}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_3 = \frac{\pi}{10}(4k+1)$. **8.083.** $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$. **8.084.** $x_1 = \frac{\pi}{12}(2k+1)$, $x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **8.085.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$. **8.086.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. **8.087.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$. **8.088.** $t = \frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.089.** $t_1 = -31° + 180° \cdot k$, $t_2 = 89° + 180° \cdot k$. **8.090.** $t = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.091.** $t_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $t_2 = \pi k$. **8.092.** $x_1 = 100° + 360° \cdot k$, $x_2 = -20° + 360° \cdot k$. **8.093.** $t_1 = \frac{\pi}{10}(2k+1)$, $t_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **8.094.** $x = \pi(4k+1)$. **8.095.** $x = \frac{\pi k}{6}$. **8.096.** $x_1 = \frac{\pi k}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$. **8.097.** $z_1 = 2\pi k$, $z_2 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.098.** $z_1 = \frac{\pi}{8}(4k+1)$, $z_2 = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.099.** $x = \frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.100.** $x_1 = \frac{\pi k}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{12}(4k+1)$. **8.101.** $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{12}(8k \pm 3)$. **8.102.** $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.103.** $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.104.** $x_1 = \frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.105.** $x = \frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.106.** $x = \pm 40° + 120° \cdot k$. **8.107.** $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + 2\pi k$. **8.108.** $z = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.109.** $x = \frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.110.** $x = \frac{\pi k}{10}$. **8.111.** $x_1 = 75° + 180° \cdot k$, $x_2 = 45° \cdot k - 3°\,45'$. **8.112.** $x_1 = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.113.** $x_1 = \frac{\pi}{16}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.114.** $x_1 = \frac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.115.** $z = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.116.** $x_1 = 135° + 360° \times k$, $x_2 = -105° + 360° \cdot k$. **8.117.** $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_3 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.118.** $t_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $t_2 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.119.** $x = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.120.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{5}(2k+1)$, $x_3 = \frac{\pi}{7}(2k+1)$. **8.121.** $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.122.** $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \frac{\pi k}{5}$.

8.123. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. 8.124. $x = \frac{\pi}{12}(4k+1)$. 8.125. $x_1 = \frac{\pi}{16}(4k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{12}(12k-1)$. 8.126. $z = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1)$. 8.127. $x = \frac{\pi}{12}(1+6k)$. 8.128. $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$. 8.129. $x = \frac{\pi k}{4}$. 8.130. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{5}$. 8.131. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{3}(3k+1)$. 8.132. $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. 8.133. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \frac{\pi k}{9}$. 8.134. $t = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.135. $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.136. $z_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_2 = \operatorname{arctg} 4 + \pi k$. 8.137. $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. 8.138. $t_1 = \pi k$, $t_2 = \frac{\pi}{4}(8k \pm 1)$. 8.139. $x_1 = \frac{3\pi}{4}(4k+1)$, $x_2 = \pi(3k \pm 1)$. 8.140. $x = 45^\circ(4k+1)$. 8.141. $x_1 = \frac{\pi k}{2} - 1$, $x_2 = \frac{\pi}{10}(2k+1) - 1$. 8.142. $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k+1) - \frac{1}{2}$, $x_2 = (-1)^k \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{12} - \frac{1}{2}$. 8.143. $x = \frac{\pi}{6}(2k+1)$. 8.144. $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$. 8.145. $x_1 = \frac{2\pi k}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_3 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.146. $x = 60^\circ + 180^\circ \cdot k$. 8.147. $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2 = \frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.148. $x = \frac{\pi}{6}(3k+1)$. 8.149. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$. 8.150. $x_1 = \pi(2k+1)$, $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$. 8.151. $x_1 = \frac{2\pi k}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(4k+1)$. 8.152. $x = \frac{\pi}{9}(3k \pm 1)$. 8.153. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.154. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. 8.155. $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.156. $x_1 = \frac{2\pi k}{5}$, $x_2 = \frac{2\pi}{9}(3k-2)$. 8.157. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.158. $x = 30^\circ + 180^\circ \cdot k$. 8.159. $x_1 = \frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4} \times (4k+1)$. 8.160. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + \pi k$. 8.161. $x_1 = \pi k - \operatorname{arctg} 3$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.162. $x_1 = \pi k$, $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. 8.163. $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.164. $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{18}(4k+1)$. 8.165. $x = \frac{\pi k}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$. 8.166. $x = \pm\arccos 0{,}8 + 2\pi k$. 8.167. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$. 8.168. $x = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1)$. 8.169. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.170. $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 =$

$= \frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.171. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.172. $x = 180^\circ \times$ $\times k - 25^\circ$. 8.173. $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = 2\pi k - \frac{1}{\pi}$. 8.174. $x_1 = \frac{\pi k}{3}$, $x_2 =$ $= \frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.175. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{73}-9}{2} + \pi k$. 8.176. $x =$ $= \frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.177. $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2 = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3} +$ $+ \pi k$. 8.178. $x = 60^\circ \cdot k - 40^\circ$. 8.179. $x = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.180. $z_1 =$ $= \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $z_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$. 8.181. $t = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1)$. 8.182. $x_1 = \frac{2\pi k}{5}$, $x_2 = \frac{2\pi k}{3}$. 8.183. $t = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi k}{2}$. 8.184. $z_1 =$ $= \frac{2\pi k}{15}$, $k \neq 15l$, $z_2 = \frac{\pi}{17}(2k+1)$, $k \neq 17l + 8$. 8.185. $x = \frac{\pi}{2}(4k +$ $+ 1)$. 8.186. $t = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.187. $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. 8.188. $x = 25^\circ + 90^\circ \cdot k$. 8.189. $t = 2\operatorname{arctg}\frac{4}{5} + 2\pi k$. 8.190. $x_1 = \frac{\pi}{8}(4k +$ $+ 3)$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.191. $t = \frac{\pi}{7}(2k+1)$, $k \neq 7l + 3$. 8.192. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$. 8.193. $x = \frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.194. $t_1 = \frac{\pi k}{3}$, $t_2 = \frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.195. $z = \frac{\pi}{18}(6k \pm 1)$. 8.196. $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.197. $z = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. 8.198. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}$. 8.199. $x =$ $= \frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.200. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. 8.201. $x = \frac{\pi}{4}(4k +$ $+ 1)$. 8.202. $x = \frac{\pi k}{12}$. 8.203. $x = \frac{\pi}{16}(4k+1)$. 8.204. $t =$ $= \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. 8.205. $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.206. $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$. 8.207. $t = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.208. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$. 8.209. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. 8.210. $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. 8.211. $x_1 =$ $= \frac{\pi k}{5}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.212. $x_1 = \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2 = \frac{2\pi}{9}(3k \pm$ $\pm 1)$. 8.213. $t = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.214. $t_1 = \pi(2k+1)$, $t_2 =$ $= \frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.215. $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.216. $z_1 = \pi k$, $z_2 = \frac{\pi}{2}(2k +$ $+ 1)$, $z_3 = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. 8.217. $x = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.218. $x_1 = \pm\frac{\pi}{15} +$ $+ \frac{2}{5}\pi k$, $x_2 = \pi k$. 8.219. $t = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. 8.220. $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.221. $t_1 = \frac{\pi k}{4}$, $k \neq 4l + 2$; $t_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi k$.

8.222. $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.223. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.224. $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.225. $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\pi k$, $t_3=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\pi k$. 8.226. $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.227. $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}$, $t_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\pi(2k+1)}}{2}$; $k=0, 1, 2, \ldots$. 8.228. $z=\frac{\pi k}{3}$. 8.229. $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin(1-\sqrt{3})+\frac{k\pi}{2}$. 8.230. $x=\frac{\pi k}{14}$, $k\neq 14l$. 8.231. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.232. $t=\frac{\pi k}{4}$. 8.233. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.234. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. 8.235. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.236. $x=\frac{\pi}{4}(1+4k)$. 8.237. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{24}(2k+1)$. 8.238. $x_1=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{5\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}$. 8.239. $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$. 8.240. $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. 8.241. $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.242. $x=\frac{\pi}{20}(2k+1)$, $k\neq 5l+2$. 8.243. $z=\frac{\pi}{8}(4k-1)$. 8.244. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.245. $t=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$. 8.246. $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.247. $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.248. $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.249. $x=\frac{\pi}{12}(3k+1)$. 8.250. $z=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. 8.251. $t=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. 8.252. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.253. $t_1=\frac{\pi}{4}\times(2k+1)$, $t_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. 8.254. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k-1)$, $x_2=\frac{1}{2}\times\operatorname{arctg}2+\frac{\pi k}{2}$. 8.255. $x=\pi k-2$. 8.256. $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.257. $z=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.258. $z=\frac{\pi}{8}(8k\pm 1)$. 8.259. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_3=-\operatorname{arctg}2+\pi k$. 8.260. $z_1=\frac{\pi}{14}(2k+1)$, $2k+1\neq 7l$; $z_2=\frac{\pi}{28}(3+4k)$, $3+4k\neq 7l$. 8.261. $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$ 8.262. $z=-20^\circ+60^\circ\cdot k$. 8.263. $x=4\pi k$. 8.264. $t=\pi k$. 8.265. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.266. $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.267. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, $x_3=\operatorname{arctg}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$. 8.268. $x_1=2\pi k$, $x_2=\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi k$, 8.269. $x=\operatorname{arctg}3+\pi k$.

8.270. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$. **8.271.** $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.272.** $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.273.** $z_1=\pi k$, $z_2=\pi k-\operatorname{arctg} 3$. **8.274.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_3=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$. **8.275.** $t_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\neq 3l+1$; $t_2=\frac{\pi k}{5}$, $k\neq 5l$. **8.276.** $x_1=\pm\frac{1}{2}\times\arccos\frac{\sqrt{73}-7}{12}+\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $x_3=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k$. **8.277.** $x=\frac{\pi}{32}(4k+3)$. **8.278.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.279.** $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.280.** $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.281.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.282.** $z_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. **8.283.** $x_1=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. **8.284.** $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.285.** $x_1=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3+\frac{\pi k}{2}$. **8.286.** $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{16}(2k+1)$. **8.287.** $x=8\pi k$. **8.288.** $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.289.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.290.** $t_1=\frac{\pi k}{3}$, $t_2=\frac{\pi}{12}(4k-1)$. **8.291.** $x=2\pi k$. **8.292.** $t=\pi k$. **8.293.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **8.294.** $t=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.295.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.296.** $z_1=\pm\arccos\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}+\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.297.** $x_1=\frac{\pi k}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.298.** $z_1=\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\frac{\pi k}{2}$, $z_2=\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{5}+\frac{\pi k}{2}$. **8.299.** $x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 5+\frac{\pi k}{2}$. **8.300.** $x=\pi k$. **8.301.** $z_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.302.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.303.** $z=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **8.304.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.305.** $t_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $t_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **8.306.** $t_1=360^\circ\cdot k$, $t_2=90^\circ(4k+1)$. **8.307.** $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1)$, $x_2=-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{4}$. **8.308.** $z_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_2=\pi k$, $z_3=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.309.** $t=\frac{1\pm\sqrt{9+4\pi k}}{2}$, $k=0, 1, 2, \ldots$. **8.310.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.311.**

$t_1 = \pi k$, $t_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi k$. **8.312.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$. **8.313.** $x_1 = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.314.** $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.315.** $t = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. **8.316.** $x = \frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.317.** $t = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.318.** $t_1 = \pi k$, $t_2 = \frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.319.** $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. **8.320.** $z = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.321.** $t_1 = 90^\circ \cdot k$, $t_2 = \pm 15^\circ + 90^\circ \cdot k$. **8.322.** $x = \pi k$. **8.323.** $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k$. **8.324.** $x_1 = \frac{\pi}{3}(6k+1)$, $x_2 = \frac{2}{9}\pi(1+3k)$. **8.325.** $z_1 = \pi k$, $z_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.326.** $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.327.** $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.328.** $x = 45^\circ(4k+1)$. **8.329.** $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.330.** $x_1 = \frac{\pi}{18}(6k \pm 1)$, $x_2 = \frac{\pi k}{2}$. **8.331.** $x = \frac{\pi}{30}(6k \pm 1)$. **8.332.** $x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$. **8.333.** $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.334.** $t = \frac{\pi}{2}(1+4k)$. **8.335.** $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - 35^\circ + 180^\circ \cdot k$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 2 - 35^\circ + 180^\circ \cdot k$. **8.336.** $x_1 = \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \neq 3l + 1$; $x_3 = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi k$. **8.337.** $x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\pi k$, $x_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{1}{2}\pi k$. **8.338.** $t = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.339.** $x = 2\pi k$. **8.340.** $z_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $z_2 = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.341.** $x_1 = -5^\circ + 60^\circ \cdot k$, $x_2 = 70^\circ + 90^\circ \cdot k$. **8.342.** $x = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.343.** $t_1 = \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $t_2 = \frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.344.** $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **8.345.** $t_1 = \frac{\pi}{3}(2k+1)$, $k \neq 3l+1$; $t_2 = \frac{\pi}{5}(2k+1)$, $k \neq 5l+2$. **8.346.** $x = 2\pi k$. **8.347.** $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.348.** $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_3 = 2\pi k$. **8.349.** $x_1 = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$, $x_2 = \pm \frac{1}{2} \times \arccos \frac{\sqrt{157}-6}{11} + \pi k$. **8.350.** $x = \frac{7}{12}\pi + \pi k$. **8.351.** $x_1 = \frac{\pi}{6}(6k+1)$, $x_2 = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \pi k$, $x_3 = \pi k - \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. **8.352.** $x_1 = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(8k \pm 3)$. **8.353.** $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.354.**

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.355.** $x = \pi k$. **8.356.** $x_1 = \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k \neq 3l + 1$; $x_2 = \frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.357.** $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.358.** $x = (-1)^k \times \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.359.** $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pi k \pm \operatorname{arctg} 5$. **8.360.** $x_1 = \frac{\pi}{24}(8n+1)$. $x_2 = \frac{\pi}{8}(8k-1)$. **8.361.** $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.362.** $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$. **8.363.** $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_3 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.364.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(12k-1)$, $x_3 = \frac{\pi}{3}(6k-1)$. **8.365.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **8.366.** $x = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.367.** $t_1 = \pi k$, $t_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **8.368.** $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pi k \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.369.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2 = (-1)^k \arcsin \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.370.** $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.371.** $x = \pi k$ при будь-якому a; $x = \pi k \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a-1}{2}$ при $-1 \leqslant a \leqslant 3$. **8.372.** $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ при будь-якому m; $x = \pi k \pm \frac{1}{2} \times \arccos \frac{m+1}{2}$ при $-3 \leqslant m \leqslant 1$. **8.373.** $x = \frac{\pi}{4}(4k-1) - \alpha$ при $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$; при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$ розв'язків немає. **8.374.** $x = (-1)^k \arcsin \frac{m}{8} + \frac{\pi}{6}(6k+1)$, $-8 \leqslant m \leqslant 8$. **8.375.** $x = \pi k - \frac{3}{2} + (-1)^k \arcsin \frac{\cos\alpha}{2\cos 1}$ при будь-якому α. **8.376.** $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.377.** $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.378.** $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.379.** $x = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$. **8.380.** $x = (-1)^k \frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{6}$. **8.381.** $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$. **8.382.** $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.383.** $x = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$. **8.384.** $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$. **8.385.** $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.386.** $x + y = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.390.** $\arcsin(3/5)$, $\arcsin(5/13)$, $\pi - \arcsin(56/65)$. **8.392.** $\sin\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$. **8.393.** $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$. **8.394.** $x_1 = (-1)^k \times \frac{\pi}{6} + \pi k$, $y_1 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $y_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **8.395.** $x = \pi k_1$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k_2$. **8.396.** $x = \frac{\pi}{2}(2k+3)$, $y = \frac{\pi}{6}(6k-1)$. **8.397.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi(k_1 - k_2)$, $y_1 = \frac{\pi}{3} + \pi(k_1 +$

$+ k_2)$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi(k_1 - k_2)$, $y_2 = \frac{2\pi}{3} + \pi(k_1 + k_2)$. **8.398.** $x = \frac{1}{6}(6k - 1)$, $y = \frac{1}{6}(6k + 1)$. **8.399.** $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, $y_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \pi k$; $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $y_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi k$. **8.400.** $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $y_{1,2} = \pm\frac{\pi}{4} + \pi(k + 2n)$. **8.401.** $x_1 = 2\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2\pi k_1$, $y_1 = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k_2$; $x_2 = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k_1$, $y_2 = 2\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2\pi k_2$. **8.402.** $x = \frac{\pi}{2}(2k_1 + 1)$, $y = \frac{\pi}{3}(6k_2 \pm 1)$. **8.403.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k_1 + k_2)$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k_1 - k_2)$. **8.404.** $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $y_1 = \frac{\pi}{3}(1 - 3k)$; $x_2 = \frac{\pi}{3}(3k + 1)$, $y_2 = \frac{\pi}{2} \times (1 - 2k)$. **8.405.** $x = \frac{\pi}{6}(6k + 1)$, $y = \frac{\pi}{6}(1 - 6k)$. **8.406.** $x = \pi k$, $y = \frac{\pi m}{2}$, $z = \frac{\pi}{6}(4n - 1)$. **8.407.** $x = \pi k$. **8.408.** $x = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$. **8.409.** $t = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.410.** $t_1 = \frac{\pi}{4}(1 + 8k)$, $t_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi(2k + 1)$. **8.411.** $x = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$. **8.412.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_3 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17} - 1}{4} + \pi k$. **8.413.** $z_1 = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $z_2 = \arcsin\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \pi k$. **8.414.** $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$. **8.415.** $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **8.416.** $x_1 = \pi(2k + 1)$, $x_2 = \arccos(\sqrt{5} - 2) + 2\pi k$. **8.417.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k$. **8.418.** $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$. **8.419.** $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$. **8.420.** $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$. **8.421.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 6 + \pi k$. **8.422.** $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **8.423.** $x = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$. **8.424.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(8k + 5)$, $x_2 = \operatorname{arctg} 3 + \pi(2k + 1)$. **8.425.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k - 1)$, $x_2 = 2\pi k$. **8.426.** $x_1 = \frac{\pi}{16} \times (4k + 3)$, $x_2 = \frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} + \frac{\pi k}{4}$. **8.427.** $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.428.** $x = \frac{\pi}{8}(8k + 3)$. **8.429.** $x_1 = \frac{3\pi}{8} + \pi k$, $x_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi}{2}(2k + 1)$. **8.430.** $t_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 8k}}{2} + 2k$, $t_2 = \frac{3 + \sqrt{5 + 8k}}{2} + 2k$; $k = 0, 1, 2, \ldots$ **8.431.** $x = \frac{\pi}{4}(4k - 1)$.

8.432. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+3)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. 8.433. $x=\pi k$. 8.434. $x=\pm\arccos\frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-2}}+2\pi k$. 8.435. $x=\frac{\pi k}{6}$. 8.436. $z=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.437. $x=\pi k$, $y=\frac{\pi}{6}(4n+1)$. 8.438. $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.439. $x_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $x_2=\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi k$. 8.440. $t_1=\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{4}{2k+1}+\frac{\pi n}{2}$, $n\leqslant -4$, $k\geqslant 3$; $t_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$. 8.441. $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\pi k$. 8.442. $x=\frac{\pi}{12}(3k\pm 1)$. 8.443. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}+2\pi k$. 8.444. $t=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.445. $t=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi k$. 8.446. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\pi k}{2}$. 8.447. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{32}(4k+1)$. 8.448. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\pi m$. 8.449. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.450. $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{\sqrt{2}}+2\pi k$. 8.451. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.452. $x_1=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-2}{2}+2\pi k$. 8.453. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.454. $x=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}+2\pi k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ 8.455. $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.456. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.457. $x=\pi(4k+1)$. 8.458. $t=\frac{\pi}{4}(4k-1)-\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$. 8.459. $x=-1\pm\sqrt{1+\pi k}$, $k=0, 1, 2, \ldots$. 8.460. $x=\pi k$. 8.461. $x=2\pi k$. 8.462. $x_1=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1)$. 8.463. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\frac{\pi}{2}(4l+1)$, $z=\frac{\pi n}{3}$. 8.464. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.465. $x=\pi(2k+1)$. 8.466. $x=\frac{2\pi k}{5}$, $k\neq 5l$. 8.467. $x_1=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.468. $t_1=0$, $t_2=\frac{1+\sqrt{1+8k}}{4}$, $k>0$, $k\neq l(2l+1)$; $t_3=\frac{1-\sqrt{1+8k}}{4}$,

$k \neq l(2l-1),\ l > 0$. 8.469. $x = \pi(2k+1)$. 8.470. $t = \pm 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi k$. 8.471. $x = \frac{5\pi}{6}(4k+1)$, $k \neq 3l+2$. 8.472. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{6} + \pi k$. 8.473. $x = \frac{\pi}{2}(1+4k)$. 8.474. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{5}} + \pi k$. 8.475. $t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2k}}{2}$, $k \geqslant -1$, $k \neq 2(l^2-1)$. 8.476. $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. 8.477. $t = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. 8.478. $t = \frac{\pi}{12}(3k \pm 1)$. 8.479. $x = \frac{\pi}{2}(4k-1)$, $y = \frac{\pi}{2}(2n+1)$. 8.480. $z_1 = 2\pi k$, $z_2 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.481. $t = \frac{\pi}{12}(6k+5)$. 8.482. $t_1 = \pi k$, $t_2 = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.483. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.484. $z = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{10} + 2\pi k$. 8.485. $x = \frac{\pi}{6}(2k+1)$. 8.486. $t_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $t_2 = \frac{\pi}{16}(4k+1)$. 8.487. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.488. $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.489. $x = \frac{\pi}{6}(6k+1)$. 8.490. $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.491. $x = \frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.492. $x = \frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.494. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $y = \frac{\pi}{4}(2k+5) + 2\pi k$. 8.495. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k_1+1)$, $y_1 = \pi k_2$; $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $y_2 = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k_1$. 8.496. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $y_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi k$, $y_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi n$; $x_3 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi k$, $y_3 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi n$. 8.497. $x = \pm \frac{\pi}{8}$, $y = \mp \frac{\pi}{8}$. 8.498. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_1$, $y = \frac{\pi}{4} + \pi(2k_2+1)$. 8.499. $x_1 = (-1)^{k_1} \frac{\pi}{6} + \pi k_1$, $y_1 = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{6} + \pi k_2$, $z_1 = (-1)^{k_3} \frac{\pi}{6} + \pi k_3$, k_1, k_2, k_3 — числа однакової парності; $x_2 = y_3 = z_4 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k_1$, $y_2 = z_3 = x_4 = \frac{\pi}{6} + \pi(2k_2+1)$, $z_2 = x_3 = y_4 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k_3$; $x_5 = y_6 = z_7 = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k_1+1)$, $y_5 = z_6 = x_7 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k_2$, $z_5 = x_6 = y_7 = \frac{\pi}{6} + \pi(2k_3+1)$. 8.500. $x_1 = \pi/6$, $y_1 = \pi/3$, $z_1 = \pi/2$; $x_2 = y_3 = z_4 = 0$, $y_2 = z_3 = x_4 = 0$, $z_2 = x_3 = y_4 = \pi$.

9.008. $(-4; -3)$. **9.010.** 2. **9.011.** 1. **9.012.** 2. **9.013.** $(-1; 2]$. **9.014.** 2; 3. **9.015.** $(-2; 0)$. **9.016.** $(-\infty; -1) \cup [4; \infty)$. **9.017.** $[-2; 1) \cup (1; 2]$. **9.018.** $(1; \infty)$. **9.019.** $[2; \infty)$. **9.020.** $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$. **9.021.** $[2; 4)$. **9.022.** $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$. **9.023.** $(-\infty; -2) \cup (5/8; \infty)$. **9.024.** $(5/3; \infty)$. **9.025.** $(3; 4{,}5)$. **9.026.** $(8/3; \infty)$. **9.027.** $(-1; 2) \cup (2; 3)$. **9.028.** $[0; 3]$. **9.029.** $(-\infty; 1) \cup (4/3; 2)$. **9.030.** $(-4{,}5; -2) \cup (3; \infty)$. **9.031.** $(-\infty; 1/3) \cup (3; 5) \cup (5; \infty)$. **9.032.** $(-\infty; -1/2] \cup [5; \infty)$. **9.033.** $(-1; 2) \cup (3; 6)$. **9.034.** $[0; 8]$. **9.035.** $(-\infty; -0{,}5] \cup [0{,}5; \infty)$. **9.036.** $(-\infty; 2) \cup (8; \infty)$. **9.037.** $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$. **9.038.** $(-\infty; 7/3) \cup (3; \infty)$. **9.039.** $(0; 4)$. **9.040.** $(-\infty; 0{,}75) \cup (4; 7)$. **9.041.** $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$. **9.042.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. **9.043.** $[4; \infty)$. **9.044.** $(-3; 1)$. **9.045.** $[20/9; 4) \cup (5; \infty)$. **9.046.** $(1; 6)$. **9.047.** $(-1; 5)$. **9.048.** $(1; 3) \cup (3; 5)$. **9.049.** $(0; 3) \cup (7; \infty)$. **9.050.** $(-\infty; -2) \cup (-1; 0]$. **9.051.** $(0; 2]$. **9.052.** $(0; 0{,}5)$. **9.053.** $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. **9.054.** $(0; \infty)$. **9.055.** $(-\infty; 1 - \log_2 3)$. **9.056.** $(-1; 91/9)$. **9.057.** $(-1/2; 2)$. **9.058.** $(0; 0{,}4) \cup (1; \infty)$. **9.059.** $(3; \infty)$. **9.060.** $(3; 4) \cup (4; \infty)$. **9.061.** $(0; 1)$. **9.062.** $[1; 4]$. **9.063.** $(-\infty; 0) \cup [1/2; \infty)$. **9.064.** $(-\infty; 11]$. **9.065.** $(-1; 4)$. **9.066.** $(-1; 0) \cup (3; 4)$. **9.067.** $(0; \infty)$. **9.068.** $(1; \infty)$. **9.069.** $(1; 1{,}04) \cup (26; \infty)$. **9.070.** $(4; 6)$. **9.071.** $(2; 3)$. **9.072.** $(-1; 1)$. **9.073.** $(-1; 1)$. **9.074.** $(1; \infty)$. **9.075.** $(1/3; 3)$. **9.076.** $(0; 0{,}25) \cup (4; \infty)$. **9.077.** $(0; \infty)$. **9.078.** $(-\infty; 0{,}5) \cup (1; \infty)$. **9.079.** $(-8; 1]$. **9.080.** $(-2; -1) \cup (-1; 2)$. **9.081.** $(2; 3)$. **9.082.** $(-\infty; -3) \cup (-2; -1)$. **9.083.** $(-1; 1)$. **9.084.** $(1/\lg 3; \infty)$. **9.085.** $(-1; 0) \cup (0; 1)$. **9.086.** $(0; 1)$. **9.087.** $(2; 32)$. **9.088.** $(0; 40)$. **9.089.** $(1; \sqrt[3]{5})$. **9.090.** $[0; 4)$. **9.091.** $[0; 0{,}5]$. **9.092.** $[0{,}5; 4]$. **9.093.** $(2; \infty)$. **9.094.** $(0; 27)$. **9.095.** $(-1; 2)$. **9.098.** $(2; \infty)$. **9.099.** $[1; \infty)$. **9.100.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. **9.101.** $(5/9; 1] \cup [6; \infty)$. **9.102.** $(-\infty; -3) \cup (2; 6]$. **9.103.** $(-3/2; 12/7)$. **9.104.** $(-\infty; -7/4)$. **9.105.** 11; 12; 14; 15. **9.109.** $[-0{,}5; 0) \cup (0; 0{,}5]$. **9.110.** $[37/7; 7]$. **9.111.** 1. **9.112** $(-6; 6)$. **9.113.** $[5; -3) \cup (3; 5]$. **9.114.** $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$. **9.115.** $(-\infty; -0{,}5)$. **9.116.** $(-3; -2) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$. **9.117.** $(-6; 2)$. **9.118.** $(-7; 1)$. **9.119.** $(-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (5; \infty)$. **9.120.** 2; 3. **9.122.** $[5{,}5; \infty)$. **9.123.** $[0; 3) \cup (3; 4)$. **9.124.** $(0; 1/64) \cup (4; \infty)$. **9.125.** $[0; 2) \cup (4; 6]$. **9.126.** $(3; 3{,}5] \cup [5; \infty)$. **9.127.** $[-98; 2) \cup (2; 102]$. **9.128.** $(3; 3{,}5) \cup (3{,}5; 4)$. **9.129.** $(4; 5) \cup (5; \infty)$. **9.130.** $(-\infty; 4/3)$. **9.131.** $(0; 75) \cup (1{,}25; 2)$. **9.132.** $(1/3; 1) \cup (1; 2)$. **9.133.** $(-1; \sqrt[3]{4})$. **9.134.** $(\pi/6 + \pi n; \pi/4 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.135.** а) $(a^4; 1/a)$, якщо $0 < a < 1$, і $(1/a; a^4)$, якщо $a > 1$; б) $(1; \sqrt[4]{2}]$. **9.136.** $(-2; 0) \cup (0; 1)$. **9.137.** $(1/8; 1/4) \cup (4; 8)$. **9.138.** $[1{,}5; 2)$. **9.139.** Якщо $m > 3$ і $m < -3$, то $\left(-\infty; \frac{1}{m-3}\right)$; якщо $-3 < m < 3$, то $\left(\frac{1}{m-3}; \infty\right)$; якщо $m = 3$, то $(-\infty; +\infty)$; якщо $m = -3$, то розв'язків немає. **9.140** $(-\infty; 2\sqrt{5} - 4)$. **9.141.** $(2; \infty)$. **9.142.** $[0; 1{,}6] \cup [2{,}5; \infty)$. **9.143.** $(2\sqrt{21}/3; \infty)$. **9.144.** $(0; 0{,}5) \cup (2; 3)$. **9.145.** $(\pi/6 + \pi n; \pi/3 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.146.** $(\pi n/2; (\pi/8)(4n + 1))$, де $n \in \mathbf{Z}$. **9.147.** $((\pi/4)(2n - 1); (\pi/8)(4n - 1)) \cup ((\pi/8)(4n - 1); \pi n/2)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.148.** $(-2; 0) \cup (0; 1)$. **9.149.** $(-\infty; -4/3) \cup (-79/75; 3/2) \cup (2; \infty)$. **9.150.** $(-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; \infty)$. **9.151.** $(-\infty; 0] \cup (4{,}5; \infty)$. **9.152.** $(0; 0{,}5) \cup [\sqrt{2}; \infty)$. **9.153.** $[-3; 1)$. **9.154.** $(-\infty; -7) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (3; \infty)$. **9.155.** $(1; 2) \cup (64; \infty)$. **9.156.**

$(-\infty; -2) \cup (6; \infty)$. **9.157.** $(1; \infty)$. **9.158.** $(2; 5)$. **9.159.** $[27; \infty)$. **9.160.** $(-1/3; \infty)$. **9.161.** $(0; 1/3) \cup (243; \infty)$. **9.162.** $(-2; -5/3) \cup (0; 1/3)$. **9.163.** $(-3; -2) \cup (-1; 0)$. **9.164.** $(2/3; \infty)$. **9.165.** $(0; 0{,}5) \cup (2; \infty)$. **9.166.** $(0{,}01; \infty)$. **9.167.** $(-\infty; -1) \cup (-1; 2]$. **9.168.** $(1; 2\sqrt{3}]$. **9.169.** $(-2; -1{,}5) \cup [1; 2) \cup [5; \infty)$. **9.170.** $(-\infty; 2) \cup [3{,}5; 4) \cup [7; \infty)$. **9.171.** $(-\infty; -0{,}1] \cup [-0{,}001; 0)$. **9.172.** $(-\infty; -5/6] \cup [3; \infty)$. **9.173.** $[-3; -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{6}; -2] \cup [2; \sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; 3]$. **9.174.** $(-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (3; 3{,}5) \cup (4; \infty)$. **9.175.** $(4^{\log_{0,8} 0,2}; \infty)$. **9.176.** $(-\sqrt{14}; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; \sqrt{14})$. **9.177.** $(-1/2; 1/3)$. **9.178.** $[1/8; 4]$. **9.179.** $(1; 3)$. **9.180.** $(2; 8)$. **9.181.** $(-4; -3) \cup (8; \infty)$. **9.182.** $(0; 0{,}5) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$. **9.183.** $(4; 10)$. **9.184.** $(-4/3; -1) \cup (-1; -1/2)$. **9.185.** $(-\sqrt[4]{12}; \sqrt[4]{12})$. **9.186.** $(-\infty; -5)$, $(-3; -1)$, $(1; 2)$. **9.187.** $(1; 3) \cup (3^9; \infty)$. **9.188.** $((\sqrt{34} - 1)/2; \infty)$. **9.189.** $(1; 4)$. **9.190.** $(-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$. **9.191.** $(2\pi n - \pi/4; \pi/2 + 2\pi n) \cup (\pi/2 + 2\pi n; 5\pi/4 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.192.** $[-1; \infty)$. **9.193.** $(1; 1 + 1/(2\sqrt[4]{2})) \cup (3; \infty)$. **9.194.** $(0; 2)$. **9.195.** $(-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$. **9.196.** $(0; \infty)$. **9.197.** $(-\sqrt{5}; \infty)$. **9.198.** $(1; 5)$. **9.199.** $(5; \infty)$. **9.200.** $(-2; 13)$. **9.201.** $(1; 2) \cup (3; \infty)$. **9.202.** $(0{,}25; 1) \cup (1; 4)$. **9.203.** $(0{,}2; 5)$. **9.204.** $(2^{-28}; 1)$. **9.205.** $(-3; -1)$. **9.206.** a_2; a_1; a_3. **9.207.** $(0; \pi/2]$. **9.208.** $4 \cup [5; 7]$. **9.209.** $(5; 8) \cup (8; 29)$. **9.210.** $(-8; -6{,}5) \cup (0; 5)$. **9.211.** $[1{,}75; 4)$. **9.212.** $(-1; 3)$. **9.213.** $(-2; 0]$. **9.214.** $(-1; 2)$. **9.215.** $(-\infty; -7) \cup (-7; -2] \cup (1; 7) \cup (7; 8] \cup (11; \infty)$. **9.216.** $(0; \sqrt{5}/5) \cup (1; 3)$. **9.217.** $(-\pi + 2\pi n; -5\pi/6 + 2\pi n) \cup (-\pi/6 + 2\pi n; 2\pi n) \cup (\arcsin(1/8) + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi n) \cup (5\pi/6 + 2\pi n; \pi - \arcsin(1/8) + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.218.** $[0{,}8; 1)$. **9.219.** $(0; 1) \cup (1; 2)$. **9.220.** $(-\infty; -2] \cup [-1; (\sqrt{13} - 1)/6)$. **9.222.** $(-3; 6)$. **9.223.** $(1; 2)$. **9.224.** $(-5; -7\pi/6] \cup [\pi/6; 5\pi/6]$. **9.226.** $(-2; 4)$. **9.234.** $(\pi/2; 3)$. **9.236.** $(3; \infty)$. **9.237.** $(\log_4 13; 2]$. **9.238.** $(\pi/6 + \pi n; \pi/4 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.239.** $(\pi/3 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n) \cup (3\pi/2 + 2\pi n; 5\pi/3 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.240.** $(2\pi n - 3\pi/4; 2\pi n - \pi/4) \cup (\pi/4 + 2\pi n; 3\pi/4 + 2\pi n)$. **9.241.** $(\pi n - \pi/6; \pi/6 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.242.** $(\log_9 7; 1) \cup (1; \infty)$. **9.243.** -5; 1. **9.244.** $[1/2; 1)$. **9.245.** $[1/\sqrt{2}; 1/\sqrt[5]{4}) \cup (1; \sqrt{2}]$. **9.246.** $(-3; -1)$. **9.247.** $(-\infty; \log_4(\sqrt{3} - 1)) \cup (1{,}5; \infty)$. **9.248.** $(\log_3(28/27); \log_3 4)$. **9.249.** Якщо $0 < p < 1$, то $(p; 1) \cup (1/p; \infty)$; якщо $p > 1$, то $(1/p; 1)$. **9.250.** $(-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$. **9.251.** $(-\infty; 3)$. **9.252.** $(2; \infty)$. **9.253.** $(0; 1) \cup ((\sqrt{5} + 1)/2; 2)$. **9.254.** $(-\infty; -11)$. **9.255.** $((\sqrt{21} - 3)/2; 1) \cup (1; \infty)$. **9.256.** $(-\infty; 0) \cup (6; \infty)$. **9.257.** $[-2; 0) \cup (0; 2]$. **9.258.** $(5; \infty)$. **9.259.** $(-\infty; \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}; \infty)$. **9.260.** $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$. **9.261.** $(-\infty; (\sqrt{17} + 1)/4]$. **9.262.** $[5; \infty)$. **9.263.** $(-\infty; -0{,}5) \cup (1; \infty)$. **9.264.** $(\pi/6 + \pi n; \pi/4 + \pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.265.** $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$. **9.266.** $(2/3; 1) \cup (2; 6)$. **9.267.** $(3; \infty)$. **9.268.** $(-\infty; 0) \cup (5; \infty)$. **9.269.** $(-1; 0) \cup [1; \infty)$. **9.270.** $(0; 1) \cup [4/3; 4)$. **9.271.** $(3; 9)$. **9.272.** $[-1; -1/\sqrt{2}] \cup [1/\sqrt{2}; 1]$. **9.273.** $[0; 16]$. **9.274.** $(-2; -1) \cup [-0{,}5; 0]$. **9.275.** $(-5; -2) \cup (2; 3) \cup (3; 5)$. **9.276.** $(2\pi n/5 - \pi/10; 2\pi n/5 - \pi/30) \cup (2\pi n/5 + \pi/10; 2\pi n/5 + 7\pi/30)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.277.** $(180^\circ \cdot n; 78^\circ + 180^\circ \cdot n) \cup (156^\circ + 180^\circ \cdot n; 168^\circ + 180^\circ \cdot n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.278.** $(-\infty; -1) \cup (5; \infty)$. **9.279.** $(0; a^2) \cup (1; \infty)$. **9.280.** $\left(0; 3^{\frac{2}{\log_3 7 - \log_7 3}}\right)$. **9.281.** $(0; a) \cup (1/a^4; \infty)$.

9.282. $(-2; -1] \cup [-2/3; 1/3)$. **9.283.** $(\sqrt[5]{5}; 5)$. **9.284.** $(0; 3)$. **9.285.** $(\pi n - \pi/3; \pi n - \pi/9) \cup (\pi n; 2\pi/9 + \pi n) \cup (\pi/2 + \pi n; 5\pi/9 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.286.** $(\pi/12 + \pi n/2; \pi/6 + \pi n/2)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.287.** $(-\pi/4 + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi n) \cup (\pi/4 + 2\pi n; 3\pi/4 + 2\pi n) \cup (5\pi/6 + 2\pi n; 5\pi/4 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.288.** $(\pi n/8; (\pi/48)(1 + 6n))$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.289.** $(\pi n - \pi/8; \pi n) \cup (\pi/8 + \pi n; 3\pi/8 + \pi n) \cup (\pi/2 + \pi n; 5\pi/8 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.290.** $(360° \cdot n - 95°; 360° \cdot n - 10°) \cup (85° + 360° \cdot n; 180° + 360° \cdot n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.292.** $(\pi n - 7\pi/12; \pi n - \pi/2) \cup (\pi n - \pi/2; \pi n + \pi/12)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.295.** $((\pi/18)(12n - 7); (\pi/18)(12n + 1))$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.296.** $((\pi/3)(6n - 1); (\pi/3)(6n + 1))$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.297.** $x \neq (\pi/2)(4n + 1)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.300.** $(-\sqrt{12}; -2) \cup (2; \sqrt{12})$. **9.301.** $(2; 3)$, $a > 0$; $a \neq 1$. **9.302.** $[-1/3; 0) \cup (0; 1]$. **9.303.** 3. **9.304.** $x \in (0; 1)$. **9.305.** $a \in (-\infty; 0)$.

Глава 10

10.001. 8 і 15 см. **10.002.** $8\sqrt{5}$ і $4\sqrt{5}$ см. **10.003.** 10,625 см. **10.004.** $\sqrt{2n(m+n)}$, $\sqrt{4m^2 + 6mn + 2n^2}$. **10.005.** $4ab/(a + b)$. **10.006.** 0 і 1,5 см. **10.007.** 9 і 25 см. **10.008.** $\sqrt{10}$ см. **10.009.** 8/3, 25/3 і 5 см. **10.010.** $12\sqrt{3}$ і 36 см. **10.011.** 6 см. **10.012.** 13 см. **10.013.** 8 і 10 см. **10.014.** 6,25 см. **10.016.** $R(\sqrt{2} - 1)$. **10.017.** 12 і 6 см. **10.018.** $\sqrt{41}$ і 5 см. **10.020.** 7,5 см. **10.021.** m, $m\sqrt{3}$, $2m$. **10.022.** 60 і 30°. **10.023.** $1,6R\sqrt{2}$. **10.024.** 12 см. **10.025.** $r(\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$, $r(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$. **10.026.** 6 см. **10.027.** $2r^2(2\sqrt{3} + 3)$. **10.029.** $a(3 + \sqrt{3})/6$, $a(3 - \sqrt{3})/6$. **10.030.** $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$. **10.031.** $8\sqrt{3}/3$. **10.032.** 4 см. **10.033.** 3 см. **10.034.** 9 см. **10.035.** $3R^2\sqrt{3}/4$. **10.036.** 9, $9\sqrt{3}$ і 18 см. **10.038.** 15 і 30 см. **10.039.** 4, 8, $2\sqrt{2}$ і $2\sqrt{2}$ см. **10.040.** 294 см^2; 12π см. **10.041.** 12, 10 і $2\sqrt{91}$ см. **10.042.** 2 см. **10.043.** 3/4. **10.044.** $a^2/\sqrt{4a^2 - b^2}$. **10.045.** 2 і $\sqrt{2}$. **10.046.** 65/18. **10.047.** 32 см. **10.048.** $3r$. **10.049.** 42 і 56 см. **10.050.** 29/4 см. **10.051.** 2 см. **10.052.** $a(2 - \sqrt{2})$. **10.053.** 2 : 1. **10.054.** 20/3 см. **10.055.** $a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})/2$. **10.057.** $3\sqrt{3}$ см. **10.058.** $m(2\sqrt{3} + 3)/3$. **10.059.** $r/8$. **10.060.** 6 і 8 см. **10.061.** 10, 17, 21 і $\sqrt{337}$ см. **10.062.** 12 і 20 см. **10.063.** $5\sqrt{m^2 + n^2}/6$, $5\sqrt{m^2 + n^2}/4$. **10.064.** 3, 4 і 5 см. **10.065.** $6r\sqrt{3}$. **10.066.** 5 см. **10.067.** 14 і 4 см. **10.068.** $18\sqrt{2}$ см. **10.069.** 18, 24 і 30 см. **10.070.** $R\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$. **10.071.** $4\sqrt{5}$ і $8\sqrt{5}$ см. **10.072.** 10 см. **10.073.** $3a^2/8$. **10.074.** $x\sqrt{2Rx - x^2}$. **10.075.** 1 см. **10.076.** $\sqrt{2} - 1$. **10.077.** 6 см. **10.078.** $\sqrt{5}$ см. **10.079.** $9\sqrt{5}$ і $8\sqrt{10}$ см. **10.081.** $3\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[4]{27}$ см. **10.082.** $\sqrt{2S}/4$. **10.083.** $\sqrt{m^2 - 4S}/2$. **10.084.** 0,24 м^2. **10.085.** $5R^2$. **10.086.** У 64 рази. **10.087.** 9,4 кв. од. **10.088.** $3R^2\sqrt{3}/4$. **10.089.** $285{,}61\pi$. **10.090.** 1700 см. **10.091.** $\pi a^2/12$. **10.092.** $R^2\sqrt{3}/4$. **10.093.** $\pi(p - c)^2$. **10.094.** 25π м^2. **10.095.** 5, 5, 6 і 4 см. **10.096.** 8 см. **10.097.** $\sqrt{3}$ см. **10.098.** $(\sqrt{6} + 2) : 1$ або $(\sqrt{3} + 1) : 2$. **10.099.** $4 + 2\sqrt{3}$, $4 - 2\sqrt{3}$ і 4 см. **10.100.** 120 см^2. **10.101.** $a^2(2\sqrt{3} - 3)$. **10.102.** 96 см^2. **10.103.** 64π см^2. **10.104.** 25π см^2. **10.105.** $2(7 + 4\sqrt{3})$ см^2. **10.106.** $c^2/2$. **10.107.** $4/(\sqrt{3} + 1)^2$. **10.108.** $3a^2(7 - 4\sqrt{3})$. **10.109.** $a^2(3 + \sqrt{3})$. **10.110.** $2a^2(\sqrt{2} - 1)$. **10.111.** $2a^2/3$. **10.112.** $8 : 3\sqrt{3} : 6\sqrt{3}$. **10.113.** $a^2(4\pi - 3\sqrt{3})/36$.

10.114. $a^2(\pi-2)/8$. **10.115.** $R^2(3\sqrt{3}-\pi)/6$. **10.116.** $\pi R^2(3+2\sqrt{2})$. **10.117.** 48 см². **10.118.** $\sqrt{\dfrac{S(m^2+n)^2}{2mn}}$. **10.119.** $\dfrac{mnp^2}{2(m^2+n^2)}$. **10.120.** $5R^2\sqrt{3}/4$. **10.121.** $(4a+b)b\sqrt{3}/8$. **10.122.** 16 см. **10.123.** $\sqrt{2S}$. **10.124.** 1. **10.125.** 20π см. **10.126.** $(3\sqrt{3}-\pi)/(3\sqrt{3}+\pi)$. **10.127.** $a^2\sqrt{3}/8$. **10.128.** $a^2\sqrt{3}$. **10.129.** $2\sqrt{mn}(m+n)$. **10.130.** 16 см². **10.131.** $8Q/\pi$. **10.132.** 2 : 3. **10.133.** $27a^2\sqrt{3}/8$. **10.134.** 1024 см². **10.135.** 282,24 см². **10.136.** 54 см². **10.137.** πab. **10.138.** $r^2(2\sqrt{3}-\pi)/2$. **10.139.** $(\pi(a^2+b^2)-4ab)/8$. **10.141.** 5 см. **10.142.** 2 : 1. **10.143.** 3 : 1. **10.144.** 2, 2 і 4 м². **10.145.** 150 см². **10.146.** 80/3 см. **10.147.** 12 і 4 см. **10.148.** $h^2\sqrt{3}$. **10.149.** $R^2(\pi-2)/4$. **10.150.** $(c_1^2-c_2^2)/(4\pi)$. **10.151.** $(4\pi-3\sqrt{3})/(8\pi+3\sqrt{3})$. **10.152.** $\pi a^2/4$. **10.153.** $R\sqrt{1/3}$, $R\sqrt{2/3}$. **10.154.** $\sqrt{\dfrac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$. **10.155.** $(\pi+\sqrt{3})R^2/2$. **10.156.** $R^2\sqrt{3}/2$. **10.157.** 9. **10.158.** 84 см². **10.159.** $\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$. **10.160.** 24 і 30 см. **10.161.** 8,64 і 15,36 м². **10.162.** 75 см². **10.163.** $(65/32)^2$. **10.164.** 32 см². **10.165.** $\pi a^2/4$. **10.166.** 60 см². **10.169.** $R(\sqrt{4+\pi}\pm\sqrt{4-\pi})/2$. **10.170.** $\pi\left(\dfrac{Ra}{R+a}\right)^2$. **10.171.** $(a^2-b^2)(\sqrt{3}-1)/4$. **10.172.** 4. **10.173.** 5 см. **10.174.** $\sqrt{2S}/4$. **10.175.** $a^2\sqrt{3}/12$. **10.178.** $2mn/\sqrt{4m^2-n^2}$, $2m^2/\sqrt{4m^2-n^2}$. **10.179.** $R\sqrt{2\pi/\sqrt{3}}$. **10.180.** 168 см². **10.181.** $3a^2/8$. **10.182.** $a^2/25$. **10.184.** 450 см². **10.185.** 25. **10.186.** 13 см. **10.187.** $H^2\sqrt{3}$. **10.188.** $3a^2/8$ або $2a^2/3$. **10.189.** 1. **10.190.** $3\pi\sqrt{15}:50$. **10.191.** $36/\sqrt{10}$, $12/\sqrt{10}$, $18/\sqrt{10}$ і $30/\sqrt{10}$ см. **10.192.** $14\pi+12\sqrt{3}$. **10.193.** 20 і 10 см або 5 і 40 см. **10.195.** 17 см. **10.196.** 75°. **10.197.** 3/2, 8/3 і 25/6 см. **10.198.** 14, 12,5, 29,4 і 16,9 см. **10.199.** 4 і $5\sqrt{41}/4$ см. **10.200.** $m(p+q)/q$, $m(p+q)/p$, $p+q$. **10.201.** 2 : 1. **10.203.** 85/8 см. **10.204.** 6,25 см. **10.205.** 20, 12,5, 5 і 12,5 см. **10.206.** 5, 5 і 6 см. **10.207.** 84/13 і 72/13 см. **10.208.** 6 і $2\sqrt{3}$ см. **10.209.** 120/17. **10.210.** $5\sqrt{2}$. **10.211.** 5 см. **10.212.** 15 і 20 см. **10.213.** 12π. **10.214.** $4\sqrt{3}+6$, $6\sqrt{3}+12$. **10.215.** 10. **10.216.** 8. **10.217.** Трапеція рівнобічна, бічна сторона дорівнює середній лінії. **10.218.** 6 см. **10.221.** $2\sqrt{5}$ см. **10.222.** $2R^2/\sqrt{Rr}$. **10.223.** 15, 20 і 25 см. **10.224.** 6 см. **10.225.** $\pi/2$. **10.226.** 6, 8 і 10 см. **10.227.** $b+c+d$. **10.228.** $15\sqrt{11}/11$ см. **10.229.** 9, 9 і $6\sqrt{2}$ см. **10.230.** 26 і 30 см. **10.231.** $4r$, $10r/3$, $2r$. **10.232.** $4\sqrt{2}$ і 18 см. **10.233.** $h\sqrt{3}/3$. **10.234.** 1 і 17 см. **10.235.** $m(\sqrt{5}+1)/2$ і m. **10.236.** $2\sqrt{5}$ і $5+\sqrt{5}$. **10.237.** pq. **10.238.** 1 : 3, 2 : 3. **10.239.** $\sqrt{10}$ см. **10.240.** 28/3 см. **10.241.** $bm/(b-m)$. **10.242.** 4,8. **10.243.** $14\sqrt{3}/3$ см. **10.244.** 7, 24 і 25 см. **10.245.** $ar/(a-r)$ і $a^2r/(a-r)^2$. **10.246.** $18\sqrt{5}/5$ см. **10.247.** $2a\sqrt{7}$. **10.248.** $0{,}5\sqrt{(14Rr-R^2-r^2)/3}$. **10.251.** У 7381 раз. **10.252.** 3 : 2, 3 : 1, 2 : 1. **10.253.** 130 см². **10.254.** $a\sqrt{3}/2$. **10.255.** 8 см. **10.256.** 3 см. **10.257.** $\sqrt{a^2-ab+b^2}$. **10.258.** 5,8 см. **10.259.** 3 см. **10.260.** 5 см. **10.261.** 1 : 2. **10.262.** $2r^2/(h-2r)$. **10.266.** $\sqrt{(a^2+b^2)/5}$. **10.268.** На середині відрізка AB. **10.270.** 3 : 4. **10.271.** 150 см². **10.273.** $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{Q/q}}$ і $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{q/Q}}$. **10.276.** $5\sqrt{2}$ см. **10.277.**

$ab\sqrt{2}/(a+b)$. **10.278.** $a\sqrt{3}$, $5a\sqrt{3}/6$ і $5a\sqrt{3}/6$. **10.279.** 20 см^2. **10.280.** 30, 30 і 120°. **10.281.** 3 см. **10.282.** 1 : 2. **10.283.** 2 см. **10.284.** $R^2\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4)/3$. **10.285.** $R^2(\pi+\sqrt{3})/2$. **10.286.** $r^2(24\sqrt{3}-11\pi)/6$. **10.287.** $(3+\sqrt{3})$ см^2. **10.288.** $12\sqrt{5}$ см^2. **10.289.** $3a^2\sqrt{3}/16$. **10.290.** $\pi R^2r^2/(\sqrt{R}+\sqrt{r})^4$. **10.291.** 3,6 см^2. **10.292.** $2R^2(3\sqrt{3}-\pi)/3$. **10.293.** $8R^3/a$. **10.294.** $8Rr\sqrt{Rr}/(R+r)$. **10.295.** $100\pi/9$ см^2. **10.296.** r^2+2Rr. **10.297.** $(m+n)^2/(mn)$. **10.298.** $\dfrac{3(4\pi-3\sqrt{3})\,p^2}{4(2\pi+3\sqrt{3})^2}$. **10.299.** $5\pi R^2/36$. **10.300.** $a^2(3\sqrt{3}-\pi)/18$. **10.301.** 10 : 1. **10.302.** $2S$. **10.305.** $\pi(b^2-2ac)/(4a^2)$. **10.306.** $R^2(3+\sqrt{2})/4$. **10.307.** $65\pi a^2/4$. **10.308.** $3a^2/2$. **10.309.** 8, 8, $8+4\sqrt{3}$ і $8-4\sqrt{3}$ см. **10.310.** 100π см^2. **10.311.** $25/(6\pi)$. **10.312.** $R^2(\pi-\sqrt{3})$. **10.313.** $R^2(2\pi-3\sqrt{3})/6$. **10.314.** 4,32 см. **10.315.** $15\sqrt{7}/4$ см^2. **10.316.** 200/3 см^2. **10.317.** 9 см^2. **10.318.** $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. **10.319.** a. **10.320.** 3/4. **10.321.** 8 см^2. **10.322.** 6 см. **10.323.** 8 або 6 см. **10.324.** $8/\sqrt{3}$, $26/\sqrt{3}$ і $30/\sqrt{3}$ см. **10.325.** 288 см^2. **10.326.** 16 м^2. **10.327.** $\sqrt{15}/2$ см^2. **10.328.** 2, 16, 3 і 0,84 см^2. **10.329.** 14 см^2. **10.330.** $-(b+\sqrt{b^2-2ac})/(2a)$. **10.331.** $(b-a^2)/2$. **10.332.** $\dfrac{p^2-m^2}{p}$, $\dfrac{p^2+m^2\pm\sqrt{(p^2+m^2)^2-8m^2p^2}}{2p}$. **10.333.** 96 і 156 см. **10.334.** $a^2(\pi-2)/2$. **10.335.** 14 см. **10.336.** $(5\pi-6\sqrt{3})/18$ см^2. **10.337.** $a^2(2\sqrt{3}-6\pi+3\pi\sqrt{3})/8$. **10.338.** $R^2(2\sqrt{3}-\pi)/2$; **10.339.** $2(3\sqrt{3}-\pi)$ см^2. **10.340.** $8R^2\sqrt{3}/3$. **10.341.** $0{,}5c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}$. **10.342.** 45 і 135°. **10.343.** 235,2 см^2. **10.344.** 9,6 см^2. **10.345.** Прямокутний; 24 см^2. **10.346.** У 9 разів. **10.347.** $\angle A=\angle B$ або $\angle A+\angle B=120°$. **10.348.** 120 см^2. **10.349.** $R^2(\sqrt{3}+1)$. **10.350.** $2S/5$. **10.351.** 16,9 см. **10.352.** $\sqrt{3}$. **10.353.** У 2,56 рази. **10.354.** $(9\sqrt{3}+3\sqrt{15})/8$ см$^2\approx 3{,}4$ см^2. **10.355.** $4\sqrt{3}/3$, $4\sqrt{3}/3$ і $(9-5\sqrt{3})/3$. **10.357.** 80 см^2. **10.358.** $a\,\dfrac{3a-b}{a+b}$ при $b<3a$; $\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{a-3b}{a+b}$ при $a>3b$. **10.359.** 2,4 см. **10.360.** 12 і 16. **10.361.** 10 см. **10.362.** $(2r+m\pm\sqrt{m^2-4r(r+m)})/2$, $r\leqslant m(\sqrt{2}-1)/2$. **10.363.** 18 см. **10.364.** $2mn/(m+2n)$ і $n(m+n)/(m+2n)$. **10.365.** 30 і 60°. **10.366.** 20/3 і 15,4 см. **10.367.** $R(\sqrt{5}-1)/2$. **10.368.** 10 см. **10.369.** 6 або 4 см. **10.370.** $\dfrac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(a-b+c+d)(a-b+d-c)(c+a-b-d)\times(c-a+b+d)}$. **10.371.** $\angle A+\angle B=90°$ або $|\angle A-\angle B|=90°$. **10.372.** n. **10.373.** 16 см. **10.374.** Бічну сторону. **10.375.** $9R^2/4$. **10.376.** $MN=\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. **10.377.** 8, 4 і 6 см. **10.378.** $2Rr/(R+r)$. **10.379.** m. **10.381.** 11/3 см^2. **10.385.** $S\left(1-\dfrac{3m^2}{(2n+m)^2}\right)$. **10.386.** 3 і 4. **10.387.** 45, 45 і 90°. **10.388.** $AB=AC=a\sqrt{2}/2$. **10.389.** 175/48 см. **10.390.** 33/4 см. **10.391.** 6 см. **10.392.** $R^2(8\sqrt{3}-9)/4$. **10.393.** 1,6 см^2. **10.395.** $a^2(3-3\sqrt{3}+\pi)/3$. **10.396.** $R^2(6\sqrt{3}-3\pi)\times(7-4\sqrt{3})/2$. **10.397.** $2R^2(3\sqrt{3}-\pi)/9$. **10.398.** $R^2(3-2\sqrt{2})(4-\pi)$ **10.399.** $a^2(3\sqrt{3}-\pi)/18$. **10.400.** $\dfrac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$

10.401. $\sqrt{Q/(\pi-3)}$. 10.402. $\pi R^2/6$. 10.403. 1 см. 10.405. $a\sqrt{3}(a-2b)/12$. 10.406. Rp. 10.407. 3 : 7. 10.408. 125 см². 10.409. $\sqrt{42}$ і $\sqrt{33}$. 10.410. $a\sqrt{mn}\left(\frac{m+a-n}{a-n}\right)$. 10.411. $(\sqrt{3}-1)S$. 10.412. r, $4r/3$ і $5r/3$. 10.415. $(\sqrt{d+c}\pm\sqrt{d-c})^2/4$. 10.416.

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\times\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)}}.$$

10.417. 5. 10.418. $(ad+bc):(ab+cd)$. 10.419. $3136\pi/81$ см². 10.420. $a(3+\sqrt{6})/6$ і $a(5+2\sqrt{6})$ або $a(3-\sqrt{6})\cdot 6$ і $a(5-2\sqrt{6})$. 10.421. 11/3 см². 10.422. $2a^2b^2/(a^2+b^2)$. 10.423. 1,6 см². 10.424. $\frac{a^2}{12}(9-5\sqrt{3})$ кв. од. 10.425. $180\sqrt{3}/19$ см².

Глава 11

11.001 $c^3\sqrt{3}/48$. 11.002. $R^3\sqrt{6}/4$. 11.003. $a^3/24$; $a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})/4$. 11.004. $Sd/2$. 11.005. $\sqrt{3}$. 11.006. 144 см³. 11.007. 3. 11.008. $ab\times\sqrt{6ab}/2$. 11.009. $6V$. 11.010. $a^2(\sqrt{5}+1)$. 11.011. $3l^3/16$. 11.012. $a^2(1+\sqrt{7})/2$, $a^3\sqrt{3}/12$. 11.013. $2a^2$. 11.014. $3h^3\sqrt{3}/2$. 11.015. $3a^2\sqrt{3}/4$. 11.016. $b^3\sqrt{3}/24$. 11.017. $\sqrt{47}/24$ см³. 11.018. $a^2b\sqrt{3}/12$. 11.019. $(l^2-h^2)h\sqrt{3}/4$. 11.020. $18\sqrt{2}$ дм³. 11.021. 60,375 см³. 11.022. $a^3\sqrt{2}$. 11.023. 26,25 дм². 11.024. $(a^3-b^3)\sqrt{2}/6$. 11.025. $(a^3-b^3)\sqrt{3}/12$. 11.026. $2Q\sqrt{2}$. 11.027. $2S\sqrt{S}/3$. 11.028. $8r^3\times\sqrt{3}/3$, $24r^2$. 11.029. $a^3/24$, $a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})/4$. 11.030. $4\sqrt{3}$ см³. 11.031. $a^3/6$, $a^2(\sqrt{2}+1)$. 11.032. 108 см³. 11.033. $21\sqrt{55}$ см³, 84 см². 11.034. $3d^3\sqrt{3}/(10\sqrt{5})$. 11.035. $2d^3\sqrt{2}$. 11.036. $a^3\sqrt{2}/3$. 11.037. $a^2(4+\sqrt{3})$. 11.038. $2a(a+\sqrt{4b^2+a^2})$. 11.039. $a^2\sqrt{3}$. 11.040. 6 см³. 11.041. $l^3\sqrt{2}/8$. 11.042. 872 см³. 11.043. $\sqrt{S_1S_2Q/2}$. 11.044. $l^3\sqrt{3}/12$. 11.045. $9d^3/64$. 11.046. $ab\sqrt{3a^2-b^2}$. 11.047. $2(a+b)\times\sqrt{3(a^2+b^2)}$. 11.048. $3a^3/8$. 11.049. $a^3/8$. 11.050. $(3/2)\times\sqrt{(l^2-h^2)(3l^2+h^2)}$. 11.051. $9\sqrt{2}/8$ см³. 11.052. $\sqrt{3}(2Q+0{,}5a^2)$. 11.053. $3h^2\sqrt{3}/2$. 11.054. $\frac{mnc^2\sqrt{4b^2-c^2}}{12(m^2+n^2)}$. 11.055. $3a^2/2$. 11.056. $2\sqrt{P^2+Q^2}$. 11.057. $\frac{mnpd^3}{(m^2+n^2+p^2)^{3/2}}$. 11.058. $(\sqrt{3}/27)h^2\sqrt{9m^2-h^2}$. 11.059. $\frac{1}{4l}\sqrt{(M+N+P)(M+N-P)(M+P-N)\times(N+P-M)}$. 11.060. $2P+\frac{4V}{\sqrt{P}}$. 11.061. $6h^2$. 11.062. $l^3\sqrt{2}/12$, $l^2(2+\sqrt{2})/2$. 11.063. $a^3\sqrt{3}/6$, $3a^2$. 11.064. $h^3\sqrt{3}/2$. 11.065. $S\sqrt{3}$. 11.066. $a^3\sqrt{2}/12$. 11.067. $18\sqrt{3}$ см³. 11.068. $3a^2$, $a^3\sqrt{2}/3$. 11.069. $Q\sqrt{Q/3}$. 11.070. $\frac{abS}{4(a+b)}$. 11.071. $6\sqrt{1833}/47$. 11.072. $\frac{mn}{m^2+n^2}Q\sqrt{Q}$.

11.073. 3 см. 11.074. $4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3$ м^3. 11.076. $\sqrt{5}/5$. 11.077. $Sr/3$. 11.078. $V=CS$. 11.080. $2\pi(\sqrt{2}+1)\cdot a^2$, $2\pi a^3/3$. 11.081. $\pi R:p$. 11.082. $1152\pi/125$ см^3. 11.083. $4\pi h^3/81$. 11.084. $\pi R^2\sqrt{5}$. 11.085. $\pi N+2M$, $N\sqrt{\pi M}/2$. 11.086. 24π см^3. 11.088. $3:2:1$. 11.089. $\pi R^3\sqrt{15}/3$. 11.090. $4\pi Q$. 11.091. 600π см^2, 1000π см^3. 11.092. 216π см^2, 448π см^3. 11.093. $S:s=\pi:2$, $V:v=\pi\sqrt{3}:2$. 11.094. $s:S=v:V=4:9$. 11.095. $64\pi:27$. 11.096. $\pi(R^2+h^2)^2/h^2$. 11.097. 9/16. 11.098. $\pi Q\sqrt{Q}/(3\sqrt[4]{3})$. 11.099. $4\pi\sqrt{3}$ см^2, 2π см^3. 11.100. $7V/27$. 11.101. $2S\sqrt{6\pi S}/(27\pi)$. 11.102. 8 м^2. 11.103. $2R\sqrt[3]{4}$. 11.104. $a^3\sqrt{2}/18$. 11.106. $9a^3\sqrt{11}/4$. 11.107. $16\sqrt{2{,}2(\sqrt{2}-1)}$ м^2. 11.108. ≈ 515 дм^3. 11.109. $a^3\sqrt{1+\sqrt{5}}/6$. 11.110. 3 см. 11.111. $4S$. 11.112. $m^2(2+\sqrt{2})/2$, $m^3\sqrt[4]{2}/6$. 11.113. 260 дм^2, 312 дм^3. 11.114. 1900 м^3. 11.115. $(S_1+S_2)h/2$. 11.116. 12 см^3. 11.117. 906 см^2. 11.118. $a^3\sqrt{3}/2$, $a^2(1+2\sqrt{3}+\sqrt{13})$. 11.119. $a^3b/(12\sqrt{3a^2-4b^2})$. 11.120. $2\sqrt{6}/\pi^3$. 11.121. $\sqrt{6}$. 11.122. 37/27 і 152/27 см^3. 11.123. $8Q\sqrt{3}/3$. 11.124. $a^3(\sqrt{2}-1)/8$. 11.125. $a^2\sqrt{3}(\sqrt{13}+2)/3$. 11.126. $3a^3/4$, $3a^2\sqrt{6}/2$. 11.127. $7a^3(\sqrt{2}-1)/3$. 11.128. $3a^2/4$, $a^3\sqrt{2}/32$. 11.129. $10\sqrt{19}$ см^2. 11.130. $1:\sqrt{2}$. 11.131. $ab\sqrt{12a^2-3b^2}/8$. 11.132. $S\sqrt{S}\sqrt[4]{27}/9$. 11.133. $a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})/4$. 11.134. $a^3/128$. 11.135. $(a^3-b^3)\sqrt{2}/6$. 11.136. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\frac{3(2n+m)}{m}}\right)$. 11.137. $144\sqrt{3}/5$ см^3. 11.138. 192 см^2. 11.139. $\sqrt{3}(2\sqrt{2}+3):6$. 11.140. $d^3\sqrt{2}/3$. 11.141. $4m^2\sqrt{3}$. 11.142. $S\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{6}/2$. 11.143. $a^3(27\sqrt{2}-22\sqrt{3})/2$. 11.144. $c^3/32$. 11.145. $abc\sqrt{2}/3$. 11.146. $a^2(6+3\sqrt{3}+\sqrt{7})/2$. 11.147. $8(11+\sqrt{34})$ м^2. 11.148. $VS_2\sqrt{S_2}:(S_2\sqrt{S_2}-S_1\sqrt{S_1})$. 11.149. 12 дм^3. 11.150. 1,9 м^3. 11.151. $a^3/2$. 11.152. $9:1$, $27:1$. 11.153. $3:4$. 11.154. $3al+a^2$. 11.155. $ab(\sqrt{2}+1)$. 11.157. $\frac{ab(a^2+b^2+ab)}{3(a+b)}$. 11.158. $a^3\sqrt{2}/12$. 11.159. 200 см^3. 11.160. $d_1\sqrt{16Q^2-d_1^2d_2^2}/12$. 11.161. $2PQ/(3a)$. 11.162. $a^2\sqrt{4b^2-2a^2}/12$. 11.163. $2pl+\frac{2l}{h}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $2p=a+b+c$. 11.164. $a^3/8$, $a^2\sqrt{3}(3+\sqrt{2})/4$. 11.165. $\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}+\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}+\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$. 11.166. $abc\sqrt{2}/2$. 11.167. $36\sqrt{2}$ см^3. 11.168. $S\sqrt{S}/3$. 11.169. $\sqrt{6}$. 11.170. $\frac{18a^3b^3}{(a^2-b^2)\sqrt{4b^2-a^2}}$. 11.171. $(2/3)R^3\sqrt{2/3}$. 11.172. $27\sqrt{2}/8$ куб. од. 11.173. $12R^2\sqrt{3}$. 11.174. $21R^3/16$. 11.175. $3ab$. 11.176. $2r^2(R+\sqrt{R^2-r^2})/3$ або $2r^2(R-\sqrt{R^2-r^2})/3$. 11.177. SL. 11.178. $(1/a):(1/b):(1/c)$. 11.179. $a^2\sqrt{3}/2$. 11.180. $\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab}$. 11.181. $\pi S\sqrt{5S}/21$ куб. од. 11.182. $\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^2R^3}{(\pi^2-1)}$. 11.183. $5:1$. 11.184. $(6m-3n)/(4n)$. 11.185. $64\pi/9$ см^2. 11.186. $\pi h^3/24$. 11.187. $\pi a^2/6$. 11.188. πl^2, $2\pi R(l^2-R^2)/3$. 11.189. 3,75 см. 11.190. $\pi R^3\sqrt{2}/6$. 11.191.

$\frac{2}{\pi}$. $\frac{m^2+mn+n^2}{mn}$. **11.192.** $(2\pi - 3\sqrt{3})/(10\pi + 3\sqrt{3})$. **11.193.** $10\pi h^3/9$. **11.194.** $2\pi dp$. **11.195.** $\pi R^3\sqrt{15}/3$. **11.196.** $a^3(3\sqrt{2}-2)/3$. **11.197.** $a^3/4$. **11.198.** 336 см³, 396 см². **11.199.** $m^2n^2/(2l)$. **11.200.** 4 : 121. **11.201.** $a^3/12$. **11.202.** 3. **11.203.** $a^3/6$. **11.204.** $\frac{16a^3b^3}{3(a^2-b^2)\sqrt{2b^2-a^2}}$, $b < a < \sqrt{2}b$. **11.205.** $a^3\sqrt{2}/54$. **11.206.** $\sqrt{9m^2-3a^2+6am}/(a-m)$. **11.207.** $2a^3(\sqrt{2}-1)$. **11.208.** $2a^2\sqrt{3}$, $a^3/3$. **11.209.** 20,25 см². **11.211.** $a^3\sqrt{6}/18$. **11.212.** $18d^2$. **11.213.** 24 м³. **11.214.** $9\sqrt{39}/4$ см³.

11.215. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.

11.218. $h(2ab+2a_1b_1+ab_1+a_1b)/6$. **11.219.** $9a^3/64$. **11.220.** $(a+\sqrt{a}+1)/(2\sqrt{a})$. **11.222.** $2\pi a^2$, $a^3(2\pi+3\sqrt{3})/6$. **11.223.** $q^2(2-q)/4$ при $q < 2$; при $q \geqslant 2$ задача не має розв'язку. **11.224.** $\pi R^2(4-\sqrt{7})/2$. **11.225.** $\pi h^3/l$. **11.226.** 12/19 м. **11.227.** $abc/\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$. **11.229.** $a^3(5+\sqrt{5})/24$. **11.230.** $3H^2\sqrt{3}$. **11.231.** $\pi/3$, $2\sqrt{3}/3$. **11.233.** а) $5\sqrt{3}$ і $\sqrt{51}$; б) ні.

Глава 12

12.001. $\frac{l}{2\sin\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-3\alpha}{4}}$. **12.002.** $\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

12.003. $\cos\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\alpha}{6}$. **12.004.** $\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, де $\mathrm{arctg}\,2 \leqslant \alpha < \pi/2$.

12.005. $h\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$. **12.006.** $\frac{1}{3}\sqrt{S\sin 2\alpha}$. **12.007.** $\frac{k^2+k+1}{(k+1)^2}$.

12.008. $\frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}$ і $\frac{a\sin\alpha}{b+a\cos\alpha}$. **12.009.** $\frac{a\cos(\alpha/2)}{\sin(45^\circ+3\alpha/4)}$.

12.010. $\frac{8R}{\sin\alpha}$. **12.012.** $\arccos\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$. **12.013.** $\frac{1}{2k}$.

12.014. $\sqrt{2S\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$. **12.015.** $\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.016.** $\frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2+2h_1h_2\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. **12.017.** $2d\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi(3m+n)}{4(m+n)}$. **12.018.** $\arccos\frac{k-1}{k}$ і $\pi-\arccos\frac{k-1}{k}$, $k > 1$. **12.019.** $2\sqrt{S\,\mathrm{tg}(\alpha/2)/3}$.

12.020. $\frac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{2\sin^2(\alpha/4)}$. **12.021.** $\frac{4r\cos^2(\alpha/2)}{\sin(3\alpha/2)}$. **12.022.** $2\arccos\frac{(a+b)l}{2ab}$.

12.023. $\frac{a}{4}\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+9}$. **12.024.** $\frac{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$. **12.025.** $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\alpha-\pi/2}$. **12.026.** $2\,\mathrm{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$ і $\pi-2\,\mathrm{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$. **12.027.**

$\dfrac{4R^2 \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\,\sin\beta}$. **12.028.** $\dfrac{r\,\mathrm{ctg}\,(\alpha/2)}{\sin 2\alpha}$. **12.029.** $\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\alpha}\times$ $\times\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **12.030.** $\dfrac{2\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}$. **12.031.** $2\sqrt{5}/5$. **12.032.** $r^2\,\mathrm{ctg}^2\dfrac{\pi-\alpha}{4}\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$. **12.033.** $\dfrac{P\sin\alpha}{4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. **12.034.** $2\sin 2\alpha\times$ $\times\sin^2\alpha/\pi$. **12.035.** $\dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$. **12.037.** $2\cos^2\dfrac{\alpha}{4}$. **12.038.** 30°. **12.040.** $\dfrac{h^2\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, 16 кв. од. **12.041.** $\sqrt{b^2+c^2\pm 1{,}2bc}$. **12.042.** $R^2(\alpha+\sin\alpha)$. **12.043.** $\dfrac{b\sin\alpha}{\sin(3\alpha/2)}$. **12.044.** $2d^2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **12.045.** $\dfrac{1}{3}\pi d^3\,\mathrm{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **12.046.** $\dfrac{l\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **12.047.** $\dfrac{7}{54}\pi l^3\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}$. **12.048.** $2\arcsin\dfrac{\alpha}{2\pi}$. **12.049.** $2\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. **12.050.** 1/7. **12.051.** $\dfrac{a^2\sin 2\alpha}{2\cos\varphi}$. **12.052.** $\dfrac{\pi}{3}ab(a+b)\times$ $\times\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$. **12.053.** $2\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}/5)$. **12.054.** $\dfrac{\pi H^3}{12}\sin^2\alpha\,\sin^2 2\alpha$. **12.055.** $\dfrac{a^2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. **12.056.** $\dfrac{8\pi r^2\cos^2(\pi/4-a/2)}{\sin^2\alpha}$. **12.057.** $\dfrac{d^3\sin\beta\sin 2\beta\sin 2\alpha}{8}$. **12.058.** $\sqrt[3]{\dfrac{4V\,\mathrm{ctg}^2(\alpha/2)}{\pi}}$. **12.059.** $\arccos(1/9)$. **12.060.** $\dfrac{a^3\sin(\alpha/2)\,\mathrm{tg}\,\beta}{6}$. **12.061.** $\dfrac{(a^2-b^2)(a-b)\,\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{8}$. **12.062.** $\sqrt[3]{\dfrac{2V}{\mathrm{ctg}^2\beta\sin\alpha}}$. **12.063.** $\dfrac{2h^3\,\mathrm{tg}^2\alpha\sin\beta}{3}$. **12.064.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin(\alpha/2)}$. **12.065.** $\dfrac{\sqrt{3}l^2\sin 2\alpha\cos\alpha}{8}$. **12.066.** $\dfrac{\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin(\alpha/2)}$. **12.067.** $\dfrac{1}{8}l^3\sin 2\beta\cos\beta\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$. **12.068.** $\arcsin\dfrac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. **12.069.** $\dfrac{\pi S}{\sin\dfrac{\pi n}{m+n}}$. **12.070.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **12.071.** $\dfrac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. **12.072.** $\dfrac{H^3}{3}\mathrm{ctg}^2\beta\sin 2\alpha$. **12.073.** $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}$. **12.074.** $1-k$. **12.075.** $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{4m}{\pi n}$ при $\dfrac{m}{n}<\dfrac{\pi}{4}$ і $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\pi n}{4m}$ при $\dfrac{m}{n}>\dfrac{\pi}{4}$. При $\dfrac{m}{n}=\dfrac{\pi}{4}$ задача не має розв'язку. **12.076.** $\mathrm{arctg}\,\dfrac{k}{2\sin\alpha}$. **12.077.** $\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}$. **12.078.**

$2\arcsin\frac{k}{\sqrt{3}}$, $0<k<\sqrt{3}$. **12.079.** $\arcsin\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$. **12.080.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.081.** $\operatorname{arcctg}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$. **12.082.** $2\operatorname{arctg}(\cos\alpha)$. **12.083.** $2\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.084.** $\sqrt{6}/6$. **12.085.** $\arcsin(\sqrt{6}/3)$. **12.086.** $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$. **12.087.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **12.088.** $\arcsin\frac{\sqrt{12cV}}{c^2}$. **12.089.** $\frac{1}{8}(P^2-4l^2\sin^2\alpha)\,l\cos\alpha$. **12.090.** $\frac{\pi l^3\sin 2\beta\cos\beta}{8\cos^2\alpha}$. **12.091.** $2\pi a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$. **12.092.** $V\sin^2\frac{\alpha}{4}$. **12.093.** $\cos 2\alpha$, від основи. **12.094.** $V\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **12.095.** $\operatorname{arctg}(2\operatorname{ctg}\alpha)$. **12.096.** $\frac{\pi l^3}{12}\sin^3 2\alpha$. **12.097.** $\frac{n(a^2-b^2)\operatorname{ctg}(\pi/n)}{4\cos\alpha}$. **12.098.** $\frac{\pi S\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{3\sin^2 2\alpha\cos^3\alpha}$. **12.099.** $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2(\beta/2)}{\cos\beta}$. **12.100.** $\frac{a^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{2}$. **12.101.** $\frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\alpha/2}$. **12.102.** $\frac{2V\cos^2(\alpha/2)\sin\alpha}{\pi}$. **12.103.** $\frac{\sin\alpha}{4\pi\cos\beta\cos^2(\beta/2)}$. **12.104.** $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$. **12.105.** $\frac{\pi h^3}{3\sin^2\beta}\left(\cos^2\beta+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.106.** $\frac{3H^2\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin^2(\alpha/2)}$. **12.107.** $\arccos(1/3)$. **12.108.** $\operatorname{arctg}\frac{2m}{m+n}$. **12.109.** $\frac{H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$. **12.110.** $\frac{8\sqrt{3}\pi r^2}{3\sin^2\alpha}$. **12.111.** $\frac{a^3\operatorname{ctg}\varphi\sin\alpha\sin\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$. **12.112.** $\frac{\pi d^2}{2\sin^2(\pi/4-\alpha/2)\sin\alpha}$. **12.113.** $\arccos\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, $\arcsin\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. **12.114.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. **12.115.** $\frac{7}{25}$. **12.116.** $\frac{aS}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$. **12.117.** $\frac{2\sin\alpha}{\pi}$. **12.118.** $-\frac{1}{3}$. **12.119.** $\frac{\pi r^3\operatorname{ctg}^3(\pi/4-\alpha/2)}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$. **12.120.** $\frac{m^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3}$. **12.121.** $\frac{a}{3\sin(\alpha/2)}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.122.** $\frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3(\alpha/2)}$. **12.123.** $\frac{\pi a^3\cos\alpha\sin^2(\alpha/2)}{6\cos^4(\alpha/2)}$. **12.124.** $\frac{d^2\cos^2(\pi/4-\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)}$. **12.125.** $\frac{4S\sqrt[4]{3}}{3}\sin\alpha\sqrt{S\cos\alpha}$. **12.126.** $2\arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}$. **12.127.** $\frac{d^2\sin\alpha}{2}$. **12.128.** $\frac{3l^2\sin^2 2\alpha}{4\sin^2(\pi/4+\alpha)}$. **12.129.** $\frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\alpha$. **12.130.** $\frac{a^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$. **12.131.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. **12.132.** $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-1$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **12.133.** $\frac{\sin\alpha}{2\alpha-\sin\alpha}$. **12.134.**

$\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha}}{2\sin 2\alpha}$. 12.135. $\frac{2\alpha\cos^4\frac{\pi-\alpha}{4}}{\pi\sin^2(\alpha/2)}$. 12.136. $\frac{p^2+ap-q^2}{p}$.

12.137. $\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. 12.138. $-\cos 2\alpha$. 12.139. $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.

12.140. $\frac{2\sin(\alpha-\pi/6)}{\cos\alpha}$ від основи. 12.141. $\frac{h\cos(\pi/4+3\alpha/2)}{2\cos^2\alpha\cos(\pi/4-\alpha/2)}$.

12.142. $R^2/4$. 12.143. 1/13. 12.144. 72/97. 12.145. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}$.

12.146. $\operatorname{arctg}\frac{n\sqrt{3}}{2m+n}$. 12.147. 7/18. 12.148. $\operatorname{arctg}\frac{3k}{2}$. 12.149. $\frac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$. 12.150. $\frac{1}{k-1}$, $k>2$. 12.151. $\frac{\pi}{4}\pm\arcsin\frac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)}$.

12.152. $\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k^2}$, $\pi-\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k^2}$, $\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k}$, $\pi-\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k}$; $k\geqslant\frac{2}{\pi-2}$. 12.153. $2R\left(1+\arcsin\frac{r}{R-r}\right)$.

12.154. $2\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ і $\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. 12.155. $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}$.

12.156. $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$. 12.157. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}$.

12.158. $\frac{3}{5}$ і $\frac{4}{5}$. 12.159. $\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$ і $\pi-\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$. 12.160. $\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$ і $\pi-\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$; $\sqrt{2}\leqslant k<2$. 12.161. 1/3, $\sqrt{3}/3$. 12.162. $\frac{R}{2\cos^2\frac{(\pi+2)R-l}{4R}}$. 12.164. $\frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha$. 12.165. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}+\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}$.

12.166. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3}$ і $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3}$; $0<k\leqslant\frac{3}{4}$. 12.167. $\frac{R^2\sin\alpha}{8}\times(\sqrt{4-\sin^2\alpha}-\cos\alpha)$. 12.168. $\sqrt{a^2+2ah\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. 12.169. $3-\sqrt{5}$.

12.170. $\frac{S\sin(\alpha-\gamma)}{2\sin(\alpha+\gamma)}$. 12.171. $\frac{3\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$. 12.172. $\frac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin 2\beta}$.

12.173. $\frac{a\cos(\beta+\alpha/2)\cos(\beta-\alpha/2)}{\sin\alpha\cos\beta}$. 12.174. $\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}$.

12.175. $\dfrac{R\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)}$. 12.176. $\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$. 12.177. $\sqrt{a^2-b^2}\sin\alpha -$ $- b\cos\alpha$. 12.178. $\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi+\alpha}{4}}{2\sin(\pi/4+\alpha/2)}$. 12.179. 4/5. 12.180. 5/13.

12.181. $\arcsin\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{\sqrt{3}}$; $\alpha \leqslant 120^\circ$. 12.182. $\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha}$.

12.183. —3/5. 12.184. $\dfrac{m}{4\sin^2(\alpha/2)}$. 12.185. $\sqrt{a^2+4S\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

12.186. $\pi/6$. 12.187. $-\dfrac{1}{2}S\operatorname{ctg}\alpha\sin 4\alpha$. 12.188. $P_a > P_b > P_c$.

12.189. $\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{m+n}{|n-m|}\sqrt{3}$. 12.190. $\arcsin(\sqrt{21}/7)$ і $\arcsin(\sqrt{21}/14)$.

12.191. $a(\pi-\alpha-\beta)\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 12.192. $2\arccos\dfrac{(a+b)l}{2ab}$.

12.194. 2 кв. од. 12.196. $\dfrac{a}{2\cos(\alpha/2)}$. 12.197. $\dfrac{1}{4}\sin 2\alpha\sin 2\beta$.

12.198. $\dfrac{h}{2}\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi-\alpha}{4}$. 12.199. $\dfrac{\pi a^2}{18}(2-\sqrt{3})$. 12.200. $\dfrac{a\sin\alpha}{2\sin(\pi/4+\alpha)}$.

12.201. $\dfrac{S}{\cos(\alpha/2)\sin^3 15^\circ}\sqrt{S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(15^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

12.202. $\dfrac{4}{3}\pi R^3\dfrac{\sin^4(\pi/4-\alpha/2)}{\sin\alpha}$. 12.203. $\dfrac{1}{12}a^3\operatorname{tg}\varphi$ і $\dfrac{a^2}{4}\sqrt{3(4\operatorname{tg}^2\varphi+1)}$.

12.204. $\dfrac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$. 12.205. $\dfrac{a\sqrt{\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}$. 12.206. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{49\cos\alpha}$ і $\dfrac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{48}$. 12.207. $\dfrac{9p^3\operatorname{tg}^3(\alpha/2)}{4\sqrt{3\operatorname{tg}^2(\alpha/2)-1}}$. 12.208. $\dfrac{\sqrt{3}p^3\sqrt{(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^3}}{8\operatorname{tg}^2\alpha}$.

12.209. $2h^2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$ і $\dfrac{h^3}{2}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. 12.210. $\dfrac{a^3}{8}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

12.211. $\dfrac{4r^3\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha\operatorname{tg}^3(\beta/2)}$. 12.212. $\dfrac{b\sin\alpha}{4\cos^2(\alpha/4)}$. 12.213. $\dfrac{\sqrt{3}a^3\sqrt{(4\operatorname{tg}^2\alpha+1)^3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$.

12.214. $\dfrac{a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{3}$ і $\dfrac{2a^2\sin\alpha\cos^2(\pi/4-\varphi/2)}{\cos\varphi}$. 12.215. $\dfrac{16}{3}\times$ $\times S\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\dfrac{2S\sin(\alpha-\pi/6)\sin(\alpha+\pi/6)}{\sin 2\alpha}}$, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

12.216. $\arccos(1/\sqrt[4]{2})$. 12.217. $\arcsin(2/\sqrt{5})$. 12.218. $\dfrac{a^3\sin^2\beta\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{6\sin^2(\alpha+\beta)}$. 12.219. 4/5. 12.220. $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$. 12.221. $\dfrac{l}{3}\times$

$\times \sqrt{5-4\cos 2\alpha}$. **12.222.** $2\sqrt{\dfrac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}}$. **12.223.** $\dfrac{2S}{3\cos(\alpha/2)}\times$ $\times\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.224.** $\dfrac{\sin\alpha}{3}\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}$. **12.225.** $\dfrac{1}{2}H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{1+16\operatorname{ctg}^2\alpha}$. **12.226.** $\dfrac{S\sqrt{2S\sin\alpha}\operatorname{ctg}\beta}{6\sin\alpha\cos(\alpha/2)}$. **12.227.** $\dfrac{2a^2\sin\alpha\cos^2(\beta/2)}{\cos\beta}$. **12.228.** $\dfrac{\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}}{6\cos\alpha}$. **12.229.** $\dfrac{4na^2\sin(\alpha/2)\sin(\alpha/2+\pi/n)}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$. **12.230.** $\dfrac{1}{3}\pi R^3\cos^3\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha$.

12.231. $\dfrac{4\cos\alpha\cos\beta}{\pi(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}$. **12.232.** $\dfrac{2\pi}{\sin 2\alpha}$. **12.233.** $\dfrac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}$. **12.234.** $\dfrac{a(3+\cos 2\alpha)}{4\sin 2\alpha}$. **12.235.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{5}+1}$. **12.236.** $\sin^4\dfrac{\alpha}{4}\left(2+\right.$ $\left.+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **12.237.** $\dfrac{\pi c^3}{6}\sin 2\alpha\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **12.238.** $\arcsin(4/5)$. **12.239.** $\dfrac{4-k}{4+k}$, $0<k<4$. **12.240.** $\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2}$, $0<k\leqslant$ $\leqslant\dfrac{1}{8}$. **12.241.** $\dfrac{6\pi R^2\sin^2 2\alpha}{(1+2\operatorname{ctg}\alpha)^2}$. **12.242.** $2\sin^2 2\alpha\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **12.243.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}(4\operatorname{ctg}^2\alpha+3)$. **12.244.** $-\dfrac{\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha}{24\cos^6\alpha}$. **12.245.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}}$, $k\geqslant 2$. **12.246.** $2\operatorname{arcctg}\pi$. **12.247.** $\dfrac{9\sin 2\alpha\cos\alpha}{8\pi\sin^2(\pi/6+\alpha)}$. **12.248.** $2\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$. **12.249.** $\dfrac{\sqrt{2(1+\sin^2\alpha)}\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha\cos\beta}$. **12.250.** $\dfrac{\pi\operatorname{tg}\dfrac{\pi+\alpha}{4}}{4\sin\alpha\cos^3(\alpha/2)}$. **12.251.** $\pi-$ $-\arccos\dfrac{n^2}{m^2}$. **12.252.** $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{k}{2\sin(\pi/n)}$, $0<k\leqslant 2\sin\dfrac{\pi}{n}$. **12.253.** $\dfrac{\cos^3\alpha\cos^3\beta}{3\sin\alpha\sin\beta\cos^2(\alpha+\beta)}$. **12.254.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\sqrt[3]{6V\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}$. **12.255.** $\dfrac{l}{2\cos^2(\alpha/2)}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta+\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.256.** $\dfrac{2}{3}R^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha$. **12.257.** $\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\pi(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)}$. **12.258.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}\operatorname{ctg}^2\varphi}{(\operatorname{ctg}\varphi+2\operatorname{ctg}\alpha)^3}$. **12.259.** $\dfrac{a(a-b)\operatorname{tg}\alpha}{3a-b}$. **12.260.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos(\beta/2)}$. **12.261.** $\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi-\alpha}{4}\sin\dfrac{\alpha}{4}\right)$. **12.262.** $\sin(\alpha\pm\beta)\sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\sin 2\beta}}$.

12.263. $\frac{H^3\sqrt{3}}{4\sin^2\alpha}$. 12.264. $\frac{2(m+n)H^2}{m-n}\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 12.265. $\frac{2\pi a^3}{3\cos\alpha\sin 2\alpha\cos^2\frac{\pi q}{p+q}}$. 12.266. $\arccos(\sqrt{3}-1)$ і $\frac{\pi}{2}-\arccos(\sqrt{3}-1)$.

12.267. $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{\pi}{k}$, $k>\pi$. 12.268. $\frac{H^3\cos\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{2\sin^2\alpha}$.

12.269. $\frac{1}{4}\pi a^2(3\sin^2\alpha+1)\operatorname{ctg}\alpha$. 12.270. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 12.271. $\frac{l}{2}\times$ $\times\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. 12.272. $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\times$ $\times\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. 12.273. $\frac{\pi l^3\sin 2\alpha\cos^3\alpha}{8\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

12.274. $\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}(k-1))$. 12.275. $\frac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

12.276. $\frac{2V\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{a\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)}$. 12.277. $\frac{l^3\sin(\alpha/2)}{3\sin^2\beta}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}$.

12.278. $\frac{S\operatorname{tg}\beta}{6}\sqrt{S\sin\alpha}$. 12.279. $\sqrt{-k}$, $-1<k<0$. 12.280. $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$. 12.281. $16k^2-1$. 12.282. $\arccos(\sqrt{5}/30)$. 12.283. $a^2/\sqrt{-\cos\alpha}$. 12.284. $2\operatorname{arctg}(2k\times$ $\times\sqrt{3})$, $0<k<\sqrt{3}/6$. 12.285. $\frac{\arccos(\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha)}{\pi-\arccos(\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha)}$. 12.286. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}$. 12.287. 24/65. 12.288. $\frac{3k}{k^2-2}$. 12.289. $\arccos\frac{1}{k-1}$, $k>2$. 12.290. $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{t^2-2t}\cos\frac{\pi}{n}\right)$. 12.291. $(1+k)/2$. 12.292. $2\operatorname{arcctg}(2\cos\alpha)$. 12.293. $\frac{a^3\sin\alpha\sin(\alpha/2)\operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\pi-\alpha}{4}}$. 12.294. $2a^3\cos^3\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

12.295. $2r^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 12.296. $\arccos\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}$.

12.297. $\frac{a\sqrt{\sin(\pi/3+\alpha/2)\sin(\pi/3-\alpha/2)}}{\sin(\alpha/2)}$. 12.298. $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$. 12.299. $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$ і $\arcsin(\cos\alpha\sin\beta)$. 12.300. 1/4. 12.301. $\frac{a^3\sin\alpha\sin(\alpha/2)}{\sin\varphi}\times$ $\times\sqrt{\cos\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 12.302. $S\operatorname{tg}\varphi\times$

$\times\sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$. 12.303. $\dfrac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}$.

12.304. $l^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. 12.305. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\alpha}$.

12.306. $\dfrac{a^2b\sin\alpha}{2(a+b)\cos\beta}$. 12.307. $l^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

12.308. $\dfrac{a^2b}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)}$, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{5\pi}{6}$.

12.309. $\arccos\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}$. 12.310. $\dfrac{R}{\sin(3\alpha/2)}\times$

$\times\sqrt{\sin\left(\dfrac{3\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{3\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}$. 12.311. $\dfrac{\pi H^2\cos^4\alpha}{4\cos^4(\alpha/2)}$.

12.312. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3\cos(\alpha/2)}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\alpha$.

12.313. $2H\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$. 12.314. $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-8}}{2}$.

12.315. $\dfrac{\pi a^3}{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. 12.316. $\arcsin\dfrac{6}{\pi k}$ i $\pi-$

$-\arcsin\dfrac{6}{\pi k}$; $k\geqslant\dfrac{6}{\pi}$. 12.317. $\dfrac{\pi a^3}{12}\sin^5\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

12.318. $\dfrac{R\sqrt{2}\sin(\alpha/2)}{2\cos\dfrac{\alpha}{8}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{8}\right)}$. 12.319. $\dfrac{n\sin^2 2a\sin^2\alpha\sin(2\pi/n)}{4\pi}$.

12.320. $\arccos(\sqrt{2}/4)$. 12.321. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}\sin^3 2\alpha}{128\sin^3(\pi/4+\alpha)}$. 12.322.

$\dfrac{\pi l^3\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{3\sin^2\alpha}$. 12.323. $\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3}V^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}}$.

12.324. $\dfrac{a^2\sin^2(\pi/3-\alpha)}{2\sin^2(\pi/3+\alpha)}$. 12.325. $-\dfrac{b^2\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\cos 3\alpha}$.

12.326. $\pi n^2a^2\sin\dfrac{\alpha}{2}$. 12.327. $\dfrac{\pi l^3\sin^2 2\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$.

12.328. $\dfrac{\pi a^3}{12}\left(3-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$. 12.329. $8\pi a^2\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\right.$

$\left.+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. 12.330. $\dfrac{\sqrt{2}}{12}r^3\operatorname{tg}\beta\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

12.331. $\dfrac{\sin^4(\alpha/2)}{\cos\alpha}$. 12.332. $\sqrt{\dfrac{S}{\sin 2\alpha}}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{4}$. 12.333.

$p^3\operatorname{tg}^3\dfrac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. 12.334. $8a^2\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

12.335. $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta\sin\alpha$. 12.336. $l\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times$ $\times\sqrt{\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos(\beta/2)}}$. 12.337. $\mathrm{arctg}\left(\frac{3V\cos(\alpha/2)}{S}\times\right.$ $\left.\times\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{S}}\right)$. 12.338. $\frac{V^2}{V^2+a^6}$. 12.339. $\frac{\sin\alpha}{k-\sin\alpha}$, $2\sin\alpha<k<2$. 12.340. $\frac{\alpha}{2}\sqrt{2\cos\alpha}$. 12.341. $\frac{4k^2}{4k^2+1}$. 12.342. $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$. 12.343. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 12.344. $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ і $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{17}-3}{2}$. 12.345. $\frac{V}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}$.

12.346. $\frac{1}{2}\arcsin(2(\sqrt{2}-1))$ і $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin(2(\sqrt{2}-1))$. 12.347. $\arccos(-a^4/S^2)$. 12.348. $\frac{a}{6}\sqrt{\frac{3\sin(\pi/3-\alpha/2)}{\sin(\pi/3+\alpha/2)}}$. 12.349. 23/26. 12.350. $\frac{a\cos(\alpha/2)}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}$; недопустимо $\alpha\geqslant\frac{2\pi}{3}$. 12.351. $\mathrm{arctg}\,\frac{2(4+\sqrt{6})}{5}$, 12.352. $\mathrm{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. 12.353. arctg 2. 12.354. $\frac{a^3}{12}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$. 12.355. $\frac{8\pi S\sin^2\frac{\alpha}{4}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{4}\right)}{\alpha-\sin\alpha}$. 12.356. $\arccos(3/5)$. 12.357. $\arcsin\frac{S}{l^2}\pm\frac{\pi}{3}$, $\arcsin\frac{S}{l^2}$. 12.358. $4R^2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$. 12.359. $\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{3}$. 12.360. $\frac{18\sqrt{7}}{49}l^3\cos^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}$. 12.361. $\frac{nR^2\,\mathrm{ctg}^2(\beta/2)\,\mathrm{tg}(\pi/n)}{\cos\beta}$. 12.362. $\frac{2a^2\sin\beta\cos^2(\pi/4-\alpha/2)}{\cos\alpha}$.

12.363. $\frac{2\pi d^2}{\cos\alpha\sin^2(\alpha/2)}$. 12.364. $\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}$. 12.365. $\pi R^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 2\alpha$. 12.366. $\frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$. 12.367. $\frac{2\pi l^2\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)}{9\sin 2\alpha}$. 12.368. $2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-2\cos 2\alpha}$. 12.369. $\frac{h^2\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\cos\alpha\sin^2\beta}$. 12.370. $\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sin\alpha}$ і $\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\cos\alpha}$. 12.371. $\frac{Ha\sin\alpha}{\sqrt{H^2+a^2\sin^2\alpha}}$. 12.372. $2\arccos(1/\sqrt[4]{4k})$. 12.373. $\frac{3\sqrt{3}H^3\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha}{8\sin\beta}$.

12.374. 7/15. **12.375.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\alpha\sin^3\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}$. **12.376.** $\dfrac{\pi a^3\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{24\cos^3(\alpha/2)}$.

12.377. $\dfrac{a^3}{3}\sin\alpha\sin^4\dfrac{\alpha}{2}$. **12.378.** $\dfrac{2}{3}R^3\sin 2\alpha\,(1-\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha)$.

12.379. $\dfrac{2}{3}\pi R^3\sin 2\alpha\sin 4\alpha$. **12.380.** $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{8+\sin^2 2\alpha}}$

12.381. $-\dfrac{a^2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$. **12.382.** $\sin\beta\sqrt{-\dfrac{S\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}$. **12.383.** $\mathrm{arctg}\,(4/3)$. **12.384.** $\dfrac{c^3}{36}\sqrt{3\cos^2\alpha+1}\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **12.385.** $\dfrac{1}{2}\pi a^3\times$ $\times\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$; при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$. **12.386.** $\mathrm{arctg}\left(\dfrac{k}{k+3}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)$.

12.387. $\dfrac{V}{3\pi}\sin\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. **12.388.** $2\,\mathrm{arctg}\,(\cos\alpha)$ і $\pi-2\,\mathrm{arctg}\,(\cos\alpha)$.

12.389. $\dfrac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **12.390.** $\dfrac{R\sin\alpha}{4\cos^2\dfrac{\pi-\alpha}{4}}$.

12.391. $\sqrt{a^2+b^2+2b\,(\sqrt{a^2-b^2\sin^2\alpha}\cos\alpha+b\sin^2\alpha)}$. **12.392.** $\dfrac{4R^2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\beta}{2}}{1+\left(\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}+2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\beta}{2}\right)^2}$. **12.393.** $\dfrac{S\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

12.394. $4R\cos\dfrac{\alpha}{4}\sin^2\dfrac{\alpha}{8}$. **12.395.** $2\arcsin\dfrac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$ і $\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$, $0<m\leqslant\dfrac{1}{2}$. **12.396.** $\arcsin\left(\dfrac{a^2-b^2}{2ab}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)$ і $\pi-\arcsin\left(\dfrac{a^2-b^2}{2ab}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)$. **12.397.** $\dfrac{h}{\sin^2(\alpha/2)}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\right.$ $\left.+\sqrt{1+\dfrac{1}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\right)$. **12.398.** $\dfrac{d^2}{8}\left(4\cos\dfrac{\alpha}{2}-\pi\left(1+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)+\right.$ $\left.+2\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **12.399.** $\mathrm{arctg}\,\dfrac{2ah}{a^2-b^2}$. **12.400.** $\dfrac{H^2}{2}\sin B\cos(A-C)$.

12.401. $\dfrac{4a^2-b^2}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **12.402.** $\mathrm{arctg}\,\dfrac{a^2-b^2}{4S}$. **12.403.** $\arcsin\left(\dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$ і $\pi-\arcsin\left(\dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$; $k\geqslant\sqrt{2}$. **12.404.** $3\arccos\dfrac{2+k}{2k}$ і $\pi-3\arccos\dfrac{2+k}{2k}$.

12.405. $(4\sqrt{3}\pm 3)/10$. **12.406.** 3/5 або 1. **12.407.** $-23/27$. **12.408.** $b^2\,\mathrm{ctg}^2\,\beta\,(\beta-\sin\beta\cos(2\alpha+\beta))/4$. **12.409.** $\dfrac{\cos A}{\cos B\cos C}$. **12.410.** $0{,}5a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **12.413.** $R^2\sqrt{2}/4$. **12.414.** $\mathrm{arcctg}\,(\sin\beta\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,(\mathrm{ctg}\,\beta+$ $+\cos^{-1}\alpha\,\mathrm{ctg}\,\gamma))$ і $\mathrm{arcctg}\,(\sin\gamma\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,(\mathrm{ctg}\,\gamma+\cos^{-1}\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta))$. **12.415.** $\pi/6$,

$\pi/3$, $2\pi/3$ i $\pi/3$. **12.416.** $\pi/3$. **12.417.** $2\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{\frac{m+n}{m}}-\frac{\pi}{2}$. **12.418.** $2\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}\sin\alpha)$. **12.419.** $4\pi S\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **12.420.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}(\sqrt{4\,\mathrm{ctg}^2\alpha+1}-2\,\mathrm{ctg}\,\alpha)$. **12.421.** $\frac{a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)}{2\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$.

12.422. $\mathrm{arctg}\,\frac{3+\sqrt{17}}{2}$. **12.423.** $\frac{\pi a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin(\pi/3-\alpha/2)}{9\sin(\pi/3+\alpha/2)}$. **12.424.** $\frac{1}{24}(ab+b^2)^{3/2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **12.425.** $\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{2k-3}}$, $k>\frac{3}{2}$. **12.426.** $\frac{1}{2}\arccos(-4b^2/a^2)$. **12.427.** $\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}$. **12.428.** $a\sqrt{-\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)}$ i $a\sqrt{-\mathrm{ctg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)}$. **12.429.** $\pi/3$. **12.430.** $\mathrm{arctg}\,2$. **12.431.** $2\arcsin\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

12.432. $\mathrm{arctg}\sqrt{9+3\sqrt{10}}$. **12.433.** $l^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **12.434.** $\frac{H^3\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}$. **12.435.** $\frac{a^2b}{4}\times\sqrt{3-4(\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)}$. **12.436.** $\frac{b}{\cos(\alpha/2)}\times\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.437.** $\frac{ab^2\sin\alpha}{2\cos\beta}\times\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$. **12.438.** $\frac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}}{128\cos^5(\alpha/2)}$. **12.439.** $\frac{a^3\sin 2\alpha\cos\alpha\sin\beta}{4\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}$. **12.440.** $2\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$ i $3\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$; $2\sqrt{3}/3\leqslant k<3/2$. **12.441.** $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$. **12.442.** $\arccos(3/4)$. **12.443.** $\arccos\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{b}$.

12.444. $-\frac{1+3\cos 2\alpha}{4}$. **12.445.** $\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)$. **12.446.** $\mathrm{arctg}\,\frac{4V\sin^2(\beta+\gamma)}{a^3\sin\beta\sin\gamma}$. **12.447.** $\frac{1}{3}$. **12.448.** $\frac{1}{24}(a+b)^2\times\sqrt{a(a-2b)}\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}$. **12.449.** $\frac{a\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{4+\mathrm{tg}^2\alpha}}$. **12.450.** $\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}/5)$.

12.451. $\arccos(8k^2-1)$; $0<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.452.** $\frac{h^3\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{2\cos^2(\alpha/2)\cos^2(\beta/2)}$.

12.453. $5/12$. **12.454.** $\frac{a^2}{8}\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha$. **12.455.**

$\frac{2R\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$. **12.456.** $\frac{3\sqrt{3}H^3\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{8}$.

12.457. $\frac{H^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin 2\beta\sin\beta}$. **12.458.** $\frac{7a+3b}{144\cos\alpha}\times$ $\times\sqrt{3(a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha)}$. **12.459.** $\frac{H}{4}\operatorname{ctg}^2\alpha(\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}-1)$.

12.460. $\pi/4$ і $\operatorname{arctg} 2$. **12.461.** $\operatorname{arcctg}(4\pm 2\sqrt{2})$. **12.462.** $\frac{2}{3}l^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\times$ $\times\sin\beta\sin 2\beta$. **12.463.** $\frac{3\cos\alpha}{8\cos^6(\alpha/2)}$. **12.464.** $\arccos(2/3)$.

12.465. $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2\sqrt{3}k\pi-27}}{6}$; $k>\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

Глава 13

13.001. 48; 80; 12; 12. **13.002.** 200 кг. **13.003.** 40 і 30 л. **13.004.** 20 і 30 год. **13.005.** 48. **13.006.** 136 га. **13.007.** На 38,8 %. **13.008.** 70 кг. **13.009.** 500. **13.010.** 125 м². **13.011.** На 6 %. **13.012.** На 20 %. **13.013.** На 7,1 %. **13.014.** 80; 100; 90. **13.015.** 400 км. **13.016.** 4/7, 8/21, 12/35. **13.017.** 520. **13.018.** 240 крб. **13.019.** 10 хв. **13.020.** 12. **13.021.** 3. **13.022.** 240. **13.023.** 420 і 400. **13.024.** 68 га. **13.025.** 60 км. **13.026.** 6 і 2 год. **13.027.** 32. **13.028.** 4/7, 8/21; 20/49. **13.029.** 5. **13.030.** 1260, 1050 і 945 крб. **13.031.** 150 км. **13.032.** За 3 год 45 хв. **13.033.** 8 і 9,6. **13.034.** 720 і 150. **13.035.** 5000 пар. **13.036.** 2,5 кг. **13.037.** 475, 480 і 375 ц. **13.038.** 40; 32; 24. **13.039.** На 13,2 %. **13.040.** 900, 360 і 150 крб. **13.041.** 150 і 450 г. **13.042.** 26 га. **13.043.** 105, 135 і 175 км. **13.044.** 1,8 і 3 т. **13.045.** 13,5 кг. **13.046.** Сірки 3 кг, селітри 19,5 кг, вугілля 2,5 кг. **13.047.** 20 скрипалів, 8 віолончелістів і 4 сурмачі. **13.048.** 2850, 2250 і 1950 км. **13.049.** 280; 200; 220. **13.050.** 49 крб. 80 к. **13.051.** Можна збільшити на 2 дм. **13.052.** 3×4 км. **13.053.** 100 і 60 г. **13.054.** 3150 і 3450 ц. **13.055.** 33. **13.056.** $(-ab+\sqrt{a^2b^2+4abs})/(2b)$ і $(ab+\sqrt{a^2b^2+4abs})/(2b)$ л. **13.057.** 12, 16 і 20 Н. **13.058.** $\frac{3l}{2(b-a)}$ м/с, має смисл при $b>a$. **13.059.** На 45. **13.060.** 15 дм². **13.061.** 40 к., 60 к., 80 к., 1 крб. **13.062.** 15. **13.063.** 21. **13.064.** 8. **13.065.** 48 і 60. **13.066.** 175 і 450 кг. **13.067.** 72 і 98 чоловік. **13.068.** 75 і 100 крб. **13.069.** Через 4 год. **13.070.** 450 м³. **13.071.** 20. **13.072.** 100 км. **13.073.** 5 і 8 м або 19,5 і 22,5 м. **13.074.** Із 1,25 м. **13.075.** 46 і 40. **13.076.** 124 га; 35 ц з 1 га. **13.077.** 20 і 60 км. **13.078.** Швидкість автомобіля 100 або 80 км/год; швидкість катера 80 або 60 км/год. **13.079.** 56 км. **13.080.** 14 і 28 км/год. **13.081.** 48 км/год. **13.082.** 5 і 3 км/год. **13.083.** 60 км/год. **13.084.** 1 год. 40 хв. і 2 год. 5 хв. **13.085.** 3 год. 20 хв. **13.086.** 7. **13.087.** 5. **13.088.** A (40; 0), B (0; 30), P (16; 18). **13.089.** 415 км. **13.090.** 1,5 кг. **13.091.** 120 кг і 162 крб.; 180 кг і 252 крб. **13.092.** 950 крб.; 400, 250 і 300 крб. **13.093.** 3165 г; $\approx 79,1$ %. **13.094.** 187,5 кг. **13.095.** 2,7 м. **13.096.** 30 і 60 км/год. **13.097.** 88 км/год. **13.098.** 4 і 16 км/год. **13.099.** $(-nr+\sqrt{nr(nr+s)})/(2n)$ і $(nr+\sqrt{nr(nr+s)})/(2n)$ км/год. **13.100.** 32. **13.101.** 84 км; 6 і 4 км/год. **13.102.** 21 і 12. **13.103.** 8 км; 4 км/год. **13.104.** 48 км/год. **13.105.** 48 хв; 25 км/год. **13.106.** 850 км/год. **13.107.** 45 і 30 днів. **13.108.** 10, 26 і 11,6 ц. **13.109.** 12 і 10,5 км/год. **13.110.** 4 і 8 год. **13.111.**

$(\sqrt{tm\,(4s+tm)}-tm)/(2t)$ км/год. **13.112.** Через 10 с. **13.113.** Через 17 хв. **13.114.** $a\,(3-\sqrt{5})/(4t)$ і $a\,(\sqrt{5}-1)(4t)$ км/год. **13.115.** 140 км. **13.116.** 80 км/год. **13.117.** 20 км/год. **13.118.** 32 і 36 км/год. **13.119.** 24. **13.120.** 75 км/год. **13.121.** $v=s\,(t_2+t_1)/(2t_2t_1)$ км/год; $v_в = s\,(t_2-t_1)/(2t_2t_1)$ км/год; $s_c = s\,(t_2-t_1)^2/(2t_2t_1)$ км. **13.122.** На середині шляху; 3 год. **13.123.** 40 км/год. **13.124.** 60 і 63 км/год. **13.125.** $s\,(a-b)/b$ і $s\,(a-b)/a$ км/год. **13.126.** 4 і 6. **13.127.** ≈ 11 м. **13.128.** $\sqrt{v\,(v-s)}$ км/год; при $v>s$. **13.129.** О 14 год. **13.130.** 5/12 км/год; 2 і 3 год. **13.131.** 5/6 км/год.; 5 год. **13.132.** На 56/3, 14 і 24 хв. **13.133.** За $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$, $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ і $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ хв. **13.134.** $(bn+\sqrt{b^2n^2+240\,abn})/(2b)$ і $(-bn+\sqrt{b^2n^2+240abn})/(2b)$. **13.135.** 45 год. **13.136.** 3 км/год. **13.137.** За 6, 8 і 12 хв. **13.138.** За 14 і 11 днів. **13.139.** 64. **13.140.** 15 і 12. **13.141.** 85 714. **13.142.** За 132 і 110 хв. **13.143.** $b+\sqrt{b\,(b-a)}$; $b-a+\sqrt{b\,(b-a)}$; $\sqrt{b\,(b-a)}$ днів; задача має розв'язок при $b>a$. **13.144.** 54. **13.145.** $(3a-c+\sqrt{9a^2+2ac+c^2})/2$ км/год. **13.146.** 8; 4; 2 або —6,4; 11,2; —19,6. **13.147.** 10 × 20 см. **13.148.** 3 см. **13.149.** —220 і 264. **13.150.** 3 · 3 — 4. **13.151.** $\frac{l\,(a+b)}{2ab}$ і $\frac{l\,(a-b)}{2ab}$ м/с. **13.152.** 40 × 50 см. **13.153.** 149 і 100 м. **13.154.** 12 і 80 к. **13.155.** 120 крб. **13.156.** 4 км/год. **13.157.** 32. **13.158.** 85 кг. **13.159.** 2160 крб. **13.160.** 23. **13.161.** $(\sqrt{b^2k^2+400abk}-bk)/(2b)$. **13.162.** 1 крб; 900 кг. **13.163.** 21 і 20 ц. **13.164.** 2 крб. **13.165.** 20 і 120. **13.166.** 1632. **13.167.** 18 і 12 км/год. **13.168.** 2. **13.169.** 35 : 12. **13.170.** 24 і 27 га. **13.171.** 38, 31, 5, 7 і 9. **13.172.** 18 і 24. **13.173.** 71. **13.174.** 12 кг. **13.175.** 68/3 км/год. **13.176.** 540, 450 і 630 л. **13.177.** Десяти. **13.178.** 50 і 60 га. **13.179.** 3 сини і 2 дочки. **13.180.** 5/9 і 10/9. **13.181.** 9. **13.182.** 50, 150 і 200 г. **13.183.** 20 рядів по 25 стільців у кожному. **13.184.** 75 і 60. **13.185.** 24 і 30 г. **13.186.** 16. **13.187.** 40 днів; 25 %. **13.188.** $(-kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn})/(2k)$ і $(kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn})/(2k)$. **13.189.** ±0,5. **13.190.** ≈ 85 г. **13.191.** 2 і 26 Н. **13.192.** 12, 8 і 7 л. **13.193.** Через 3 год 20 хв. **13.194.** 4 і 5 м. **13.195.** 96 м; за 14 год. **13.196.** 56 і 84 км/год. **13.197.** 6 і 10 хв. **13.198.** 280 і 175 %. **13.199.** 600 м. **13.200.** 90 і 135 крб. **13.201.** $(\sqrt{b^2+32a^2}-b+4a)/2$ і $(\sqrt{b^2+32a^2}+b+4\,a)/2$ м. **13.202.** 3 год. **13.203.** 2 і 5 км/год. **13.204.** 12 і 24 год. **13.205.** 37. **13.206.** 202. **13.207.** 65 і 100 км/год. **13.208.** 24. **13.209.** Через 4 хв. **13.210.** На 40 %. **13.211.** 842. **13.212.** $(ab+\sqrt{ab\,(ab+4\,n)})/2a)$. **13.213.** За 50 і 75 год. **13.214.** 4 : 1. **13.215.** Через 50 хв. **13.216.** 40 і 50 км/год. **13.217.** $(4b\pm 3at+\sqrt{16b^2+9a^2t^2})/(6t)$ км/год; $4b>3at$. **13.218.** 16 і 52. **13.219.** ≈ 55 років. **13.220.** 3 км/год. **13.221.** 80 км. **13.222.** 80 км/год. **13.223.** 1 км/год. **13.224.** За 4 дні. **13.225.** Більше на 1 год. **13.226.** 16 і 10 год. **13.227.** 10 і 8 год. **13.228.** 12 і 15 год. **13.229.** 12, 8, 3, 2. **13.230.** 13 і 63. **13.231.** 5 і 11 %. **13.232.** 3 і 45 км/год. **13.233.** За 4 дні. **13.234.** 20 і 60 %. **13.235.** 2/3. **13.236.** На 20 дошках. **13.237.** Дописана цифра або 0, або 3, або 8; у першому випадку задумано число 2, у другому 3, у третьому 4. **13.238.** Із 16 пострілів 6 вдалих. **13.239.** 50. **13.242.** 60 і 90 м³. **13.243.** 120, 90 і 70 відер. **13.244.** Трохи не покриється. **13.245.** 62 м³. **13.246.** 1225 кругів на кожну фігуру. **13.247.** 300 кг.

13.248. 6,75 і 4,5 крб.; у кожному куску було по 5,6 м. **13.249.** 18. **13.250.** 24. **13.251.** 1 год $5\frac{5}{11}$ хв. **13.252.** За 56 с. **13.253.** 65 і 20 м³. **13.254.** Через $\frac{45v_2(v_3-v_1)}{v_3(v_2-v_1)}$ хв. **13.255.** 22/15 м/с. **13.256.** $D=(L^2+H^2-Hd)/H$. **13.257.** 30 км/год. **13.258.** $b(n-1)/(a-c)$ км/год. **13.259.** 270 км. **13.260.** 60°. **13.261.** 6, 9 і 12 км/год; 42 км. **13.262.** Через 7 с після початку падіння першого тіла. **13.263.** 360 км. **13.264.** 3 м/с. **13.265.** $a+2\sqrt{(a^2+ab+b^2)}/3$. **13.266.** 500 м. **13.267.** 100 км/год. **13.268.** $vd/(a-b)$ м/с. **13.269.** 1 год 21 хв; 1 год 20 хв; 6 км. **13.270.** $\frac{60v_1v_2}{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}}$ км/год. **13.271.** 24 км. **13.272.** 45 км/год. **13.273.** Через 5 с; за 0,5 м до лінії поля. **13.274.** 100 км/год. **13.275.** 8 год 15 хв; 8 год 53 хв; 9 год 16 хв; 10 год 1 хв. **13.276.** 12, 40 і 50 км. **13.277.** 1375 км. **13.278.** 50 км/год. **13.279.** $2ab/(a+b)$; $2ab/(3b-a)$; $2ab/(a+b)$; $2ab/(3a-b)$ м/хв, де $b/3<a<3b$. **13.280.** За 58,5 хв. **13.281.** $(a+3b+\sqrt{a^2-10ab+9b^2}/4$ км/год. **13.282.** $(v+\sqrt{9v^2+6sv})/v$ год. **13.283.** Спочатку обидва йшли з однаковою швидкістю 3 км/год. **13.284.** 75,6 км/год; 147 м. **13.285.** 24 хв. **13.286.** $AB=\frac{3c\beta}{4}$ км; $BC=\frac{\beta c(4\alpha-3\beta)}{4(2\alpha-\beta)}$ км. **13.287.** $2a$. **13.288.** За 24 год. **13.289.** 170 кг. **13.290.** 4 і 6 год. **13.291.** 20, 30 і 24 год. **13.292.** За 15 і 7,5 днів. **13.293.** За 6 і 8 год. **13.294.** 0,4 $an/(11-n)$; $0{,}24an/(n-9)$; $n=10$. **13.295.** За $(a^2+n+\sqrt{a^4+6a^2n+n^2})/(2a)$ год. **13.296.** За 20 і 30 год. **13.297.** $(c+\sqrt{c^2+120bc})/2$ і $(-c+\sqrt{c^2+120bc})/2$ км/год. **13.298.** 1/80 і 1/90. **13.299.** 12 або 60°. **13.300.** 12 і 3 м/с; 360 м. **13.301.** 10, 20 і 30 зубців. **13.302.** 3 і 4 м/с. **13.303.** 300 і 600. **13.304.** 20 і 30. **13.305.** 42 і 35. **13.306.** 196 км; 84 км/год. **13.307.** 964. **13.308.** 15 або 95. **13.309.** 9 і 10 г. **13.310.** 40 і 100 т. **13.311.** 100 і 60 км/год. **13.312.** За 14,4 год. **13.313.** 4/15. **13.314.** 9 і 2. **13.315.** 20 %. **13.316.** ≈ 41,4 %. **13.317.** 3 год 40 хв і 2 год. 12 хв. **13.318.** 27,75. **13.319.** 2 л. **13.320.** 5. **13.321.** 824 і 428. **13.322.** ≈ 2,77 кг. **13.323.** 35 і 45 кг. **13.324.** 116 крб. **13.325.** 5. **13.326.** 30 км/год. **13.327.** 13, 7 і 4 л. **13.328.** 100 ц. **13.329.** $a(\sqrt{s}+\sqrt{r})/(\sqrt{s}-\sqrt{r})$ днів, де $s>r$. **13.330.** 10 і 15 год або по 12 год **13.331.** 25 кульок і 16 кілець або 16 кульок і 25 кілець. **13.332.** 200 і 140 год. **13.333.** Після 5 ударів. **13.334.** 45, 36 і 30 м. **13.335.** 53. **13.336.** 28 червня. **13.337.** Через 15 робочих днів, або 17 червня. **13.338.** 285 714. **13.339.** $a+b-c$. **13.340.** 3. **13.341.** На першому місці — третій робітник, на другому — другий, на третьому — перший. Кількості виробленої ними продукції відносяться, як 5 : 4 : 3. **13.342.** Що вийшов із B. **13.343.** $p=5a$; $q=5$. **13.344.** 3 : 4 : 5. **13.345.** Через $43\frac{7}{11}$ хв. **13.346.** 1. **13.347.** 12 і 1232. **13.348.** $(a+2b+\sqrt{a^2+4bc})/2$ і $(2c-a+\sqrt{a^2+4bc})/2$ год. **13.349.** 4 км. **13.350.** У $(\sqrt{5}+1)/2$ разів. **13.351.** а) 3 км/год; б) 4 км/год; в) 5 км/год. **13.352.** Через 88 с. **13.353.** 159 і 234. **13.354.** 31 і 41. **13.355.** 60 км/год. **13.356.** 105 м. **13.357.** 16 км/год. **13.358.** 142 857. **13.359.** 21 і 10. **13.360.** $0<v\leqslant 20$ км/год. **13.361.** 14 червоних і 19 синіх. **13.362.** 9 і 35. **13.363.** $\frac{1}{2}+\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$; $\frac{1}{2}-\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$.

13.364. $\sqrt[k-1]{k}$. **13.365.** 240 км. **13.366.** $5 < v < 15$. **13.367.** 180 крб. **13.368.** 2,5 т. **13.369.** 11 лип і 5 берез. **13.370.** 12. **13.371.** $1 \leqslant h \leqslant b$, де $b \approx 1{,}4$ м. **13.372.** 18. **13.373.** 8 задач; 127,5 хв. **13.374.** 16 год. **13.375.** 421. **13.376.** 211. **13.377.** 421. **13.378.** 2,4 і 4,8 кг. **13.379.** $p\,(k \pm \sqrt{2k - k^2})/(2k)$ каратів, $k \leqslant 2$; найбільша втрата вартості у 2 рази. **13.380.** $(25 - a \pm \sqrt{D})/(2a)$ і $(25 + a \pm \sqrt{D})/(2a)$ кг, де $D = a^2 - 130a + 625$, причому якщо $a > 5$ — немає розв'язків, якщо $0 < a < 5$ — два розв'язки, якщо $a = 5$ — один розв'язок (2 і 3 кг). **13.381.** Якщо $s \geqslant pq/(100r)$, то на відстані від B, не більшій ніж $s/2 - pq/(200r)$. Якщо ж $s < pq/(100r)$, то для будь-якого пункту, розташованого на шляху AB, вигідніше брати вугілля у пункті A. **13.382.** $R \pm \sqrt{2a^2 - 3R^2}$; $3R^2/2 \leqslant a^2 < 2R^2$. **13.383.** 20; 6 год. **13.384.** За 3 год. **13.385.** Якщо $c < h/m$, то перша модель; якщо $c > h/m$, то друга модель; якщо $c = h/m$, то однаково. **13.386.** $a\,(3 \pm \sqrt{3\,(4m - 1)})/6$; $1/4 \leqslant m < 1$. **13.387.** $a + a\sqrt{2}$ год. **13.388.** $\frac{100s - r\,(50 + s)}{(3s - r)\,a}$ і $\frac{100s - r\,(50 + s)}{(r - s)\,a}$ м/с, де $s < r < \frac{100s}{50 + s}$. **13.389.** У 2 рази. **13.390.** $5 + 5\sqrt{2}$; ≈ 12 км. **13.391.** О 10 год 29 хв. **13.392.** 6,4 км. **13.393.** $\frac{d\,(k-1)}{2Tk} \pm \frac{d}{2t}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{t^2\,(k-1)}{T^2k^2}}\right)^2$. **13.394.** 1 год. **13.395.** Через 4 хв; у 3 рази. **13.396.** $\frac{3\,(-a + \sqrt{a^2 + 240a})}{2a}$ і $\frac{-3\,(3a - \sqrt{a^2 + 240a})}{2a}$ год, де $a < 30$. **13.397.** $(4p - 2q)/t$ і $2p/t$ км/год.; $3p - q$ км, де $0 \leqslant q < 2p$, $p > 0$, $t > 0$. **13.398.** 60 км/год. **13.399.** 10 год. **13.400.** 340 км. **13.401.** $\frac{s\,(-a + \sqrt{a^2 + 240at})}{120t}$ м. **13.402.** 500, 1000 і 1500 л. **13.403.** Третя. **13.404.** 120. **13.405.** 8 км. **13.406.** За 80 с. **13.407.** $31b/(130\,v)$ год. **13.408.** 11 і 7 см/с. **13.409.** Від 2,5 до 3 км/с. **13.410.** 1 і 4 см/с. **13.411.** $(vt + \sqrt{2a^2 - v^2t^2})/(2v)$; $a = vt/\sqrt{2}$. **13.412.** $0 < a < 68$. При $a = 5$ відстань між господарствами 60, 40 і 25 км. **13.413.** 40, 50 і 10 %. **13.414.** $(\sqrt{b^2c^2 + 4abc} - bc)/(2c)$ км; a, b, c — довільні додатні числа. **13.415.** 10 і 15 год. **13.416.** 6400 і 600 л. **13.417.** Через $(av_1 + bv_2)/(v_1^2 + v_2^2)$ хв від початку польоту. **13.418.** $2ak$ км. **13.419.** 36 і 54 км/год. **13.420.** $(3m + \sqrt{9m^2 + 2500t^2v^2})/(50t)$ км/год. **13.421.** 53. **13.422.** За $b + \sqrt{b\,(b - a)}$ днів. **13.423.** 21; 6 год. **13.424.** $a + \frac{-(a + b) + \sqrt{(a - b)^2 + 4abc^2}}{2\,(c + 1)}$; $b + \frac{-(a + b) + \sqrt{(a - b)^2 + 4abc^2}}{2\,(c + 1)}$; $\frac{-c\,(a + b) + c\sqrt{(a - b^2) + 4abc^2}}{2\,(c + 1)}$; $c > 1$. **13.425.** У першій $\frac{an\,(n - 2)}{(n - 1)^2}$ см³; у другій $\frac{a\,(n^2 - 2n + 2)}{(n - 1)^2}$ см³; у всіх інших по a см³. **13.426.** За 4 і 12 год. **13.427.** За 96 або за 5 хв. **13.428.** У 4 рази. **13.429.** $(3a + 2c + \sqrt{4c^2 - 4ac + 9a^2})/4$ км/год. **13.430.** У 10 разів. **13.432.** Через $ab/\sqrt{a^2 + 4ab}$ с. **13.433.** $1000\,(2{,}5a + sp)/(2000 - sn)$ крб. Задача має розв'язок при $sn < 2000$. **13.435.** 423. **13.436.** 7,7 год. **13.437.**

На 11. **13.438.** 4 г/см³. **13.439.** 77 або 86. **13.440.** $M_1\ (a\sqrt{3}-a;\ 0)$, $P_1\ (0;\ a\sqrt{3}-a)$; $M_2\ (-a\sqrt{3}-a;\ 0)$, $P_2\ (0;\ -a\sqrt{3}-a)$. **13.441.** $l\,(3k+1)/(k+3)$ м. **13.442.** 300 і 150 крб. **13.443.** $p\,(n+1)/(n-1)$; 1/3. **13.444.** 3; 4; 5. **13.445.** $r_1=(-r+\sqrt{6R^2-3r^2})/2$; $r<r_1\leqslant R$ при $(\sqrt{3}-1)/2\leqslant r/R<\sqrt{2}/2$; $r_1<r<R$ при $\sqrt{2}/2<r/R\leqslant 1$. **13.446.** $(24+s-\sqrt{s^2+288})/2$ і $(24-s-\sqrt{s^2+288})/2$ км; $s<6$. **13.447.** 22 см². **13.448.** 70 км/год. **13.449.** 121. **13.450.** 10 і 5 років.

Глава 14

14.001. 1/2, якщо $m>0$; $-1/2$, якщо $m<0$. **14.002.** $\sqrt[4]{b-a}$, де $b>a$. **14.003.** ctg 33°. **14.004.** $|\operatorname{tg}(\alpha/2)|$. **14.005.** $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$. **14.006.** 1/3. **14.007.** 35. **14.008.** 0; $-1/3$. **14.009.** 2. **14.010.** $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$; $-1/\sqrt{10}$; $1/\sqrt{10}$. **14.011.** 64. **14.012.** $2^{-\sqrt{6}/2}$; $2^{\sqrt{6}/2}$. **14.013.** 4,5; 6. **14.014.** 10^{-6}; 10^3. **14.015.** $\sqrt{26}$. **14.016.** 3; $1/\sqrt[4]{3}$. **14.017.** 6; 1/6. **14.018.** 5. **14.019.** 1/16; 4. **14.020.** 3. **14.021.** 0,01; 100. **14.022.** 2. **14.023.** 1. **14.024.** $\pi n/2$; $n\in\mathbf{Z}$. **14.025.** $\pi/4+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **14.026.** $(-1)^n\arcsin(\pi/4)+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **14.027.** (3; 2). **14.028.** (2; 1); $(-2;\ -1)$. **14.029.** (0; 2); (2; 0). **14.030.** $(1/2;\ \sqrt{2}/5)$. **14.031.** (1; 1); (4; 2). **14.032.** $(2^{\sqrt[3]{4}};\ 2^{2\sqrt[3]{2}})$. **14.033.** 6. **14.034.** При $p=\pm12$. **14.035.** 117. **14.036.** Ні. **14.037.** Один. **14.039.** -2; -1; 3. **14.040.** 2. **14.042.** Три. **14.044.** Чотири. **14.045.** $-(3+\sqrt{16m-7})/4$; $(-3+\sqrt{16m-7})/4$ при $m\geqslant 7/16$; $x_1=x_2=-3/4$ при $m=7/16$. **14.046.** 55. **14.047.** $-2/3$; 1. **14.048.** 1. **14.049.** 0. **14.051.** Ні. **14.053.** Немає розв'язків при $m=3$; безліч розв'язків при $m=-3$. **14.054.** Мінус. **14.055.** Мінус. **14.056.** Мінус. **14.057.** $a^{1/a}$, де $a>0$, $a\neq1$. **14.058.** 12,5. **14.059.** 4. **14.060.** 3. **14.061.** $-(1+2a)/a$. **14.062.** $1/a^2$. **14.063.** $(b+3a-2)/(2a)$. **14.064.** 0. **14.065.** 0. **14.066.** 0. **14.067.** 0. **14.068.** 0,3010. **14.069.** $2\,(2+m)/(2-m)$. **14.070.** Мінус. **14.071.** Плюс. **14.073.** Виконується при $a=b/(b-1)$, де $b>1$. **14.076.** $[-2;\ 1]\cup[2;\ \infty)$. **14.077.** $(-3;\ 0)\cup(2;\ \infty)$. **14.078.** $(-4;\ 0)\cup(0;\ 4)$. **14.079.** $(-1;\ 1)\cup(2;\ \infty)$. **14.080.** $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 1)\cup(3;\ \infty)$. **14.081.** $(-3;\ -2)\cup(2;\ 3)$. **14.082.** $(-\infty;\ -2/7]\cup(3;\ \infty)$. **14.083.** (2; 3). **14.084.** $(2;4)\cup(4;\ 6)$. **14.085.** $(0;\ \infty)$. **14.086.** $(-2;\ 0)\cup(2;\ \infty)$. **14.087.** $(-2;\ 1)\cup(3;\ \infty)$. **14.088.** $(-3;\ -2)\cup(0;\ 1)$. **14.089.** $(-3;\ 2)$. **14.090.** $(0;\ 1)\cup(100;\ \infty)$. **14.091.** (0; 1). **14.092.** (1/3; 3). **14.093.** $(0;\ 1/2)\cup[\sqrt{2};\ \infty)$. **14.094.** (0; 0,04]. **14.095.** $(1;\ \sqrt{3})$. **14.096.** $(-2;\ 2)$. **14.097.** [1/3; 3/4). **14.098.** (0; 1). **14.099.** $[2\pi n;\ \pi+2\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$. **14.100.** $(\pi/12+\pi n;\ 5\pi/12+\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$. **14.101.** а) $(2\pi n-7\pi/6;\ 2\pi n+\pi/6)$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $(\pi n-\pi/6;\ \pi n+\pi/6)$, $n\in\mathbf{Z}$. **14.104.** (0; 1). **14.105.** $3^{400}>4^{300}$. **14.106.** $(-1/3;\ 4)$. **14.107.** (1,2; 2). **14.108.** $[-3;\ -2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};\ 3]$. **14.135.** Ні. **14.137.** $-b$. **14.142.** $[2;\ 3)\cup(3;\ 4]$. **14.143.** $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ \infty)$. **14.144.** $(-3;\ -2/3]$. **14.145.** (0; 1). **14.146.** $(-\infty;\ 0]$. **14.147.** (0; 1). **14.148.** $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$. **14.149.** [0; 2]. **14.150.** $[-13;\ 13]$. **14.161.** $y_{\min}=2$. **14.162.** $y_{\min}=4$. **14.163.** $y_{\max}=2$. **14.166.** $1/n$. **14.167.** $(n+3)/(n+1)$. **14.168.** $(n+2)/(n+1)$. **14.169.** $1/(n+2)$. **14.171.** Ні; так. **14.173.** 1/2. **14.174.** а) і б) Зростаюча; в) не монотонна; г) спадна. **14.175.** -6; -5; -4; -2; -1; 0. **14.177.** Ні. **14.179.** 66. **14.180.** $n\,(m+1)/(n+1)$. **14.184.** 32 %. **14.185.** 1000^q. **14.186.** 4,56. **14.188.** $(2\sqrt{2}+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{2}+2+\sqrt[6]{32}+$

$+\sqrt[3]{4})/2$. **14.189.** а) $0{,}8^{-1{,}4}$; б) $\log_{1/3} 0{,}5$. **14.190.** 31. **14.192.** $2^{14}+ + 2^{12} + \ldots + 2^2 + 2^0$. **14.193.** 1,875 год. **14.194.** 7,5 год. **14.195.** а) $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbf{N}$; б) ні. **14.196.** $a - b$. **14.198.** $(x^2 + 2x + 2) \times (x^2 - 2x + 2)$. **14.199.** $0{,}5\,(2a^2 \pm \sqrt{2(a^4 + b^4)})$. **14.200.** $(x^4 + \sqrt{2}\,x^2y^2 + y^4)(x^4 - \sqrt{2}\,x^2y^2 + y^4)$. **14.201.** $(a^2 + 2b^2 + 2ab) \times (a^2 + 2b^2 - 2ab)$. **14.202.** $y = -4x^2 - 6x + 1$. **14.203.** Множина чотирикутників із взаємно перпендикулярними діагоналями. **14.205.** $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$. **14.208.** $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$. **14.209.** $(2;\ 1 + \sqrt{12}/3]$. **14.210.** Складеним. **14.215.** Ні. **14.216.** $(-5;\ 3)$. **14.222.** Ні. **14.227.** Так. **14.241.** $\lg^2 x + \lg^2 y = 1$. **14.242.** $\lg^{2/3} u + \lg^{2/3} v = 1$. **14.243.** $\pi/4 + \pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$. **14.244.** $\operatorname{arcctg} \dfrac{1-q}{p}$, де $1 < q < \dfrac{p^2}{4}$, $p < 0$. **14.245.** $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$. **14.249.** $y > 1$ при $k = 0$; $y \geqslant 1$ при $k = 1$; $y = 1$ при $k = 2$; $0 < y \leqslant 1$ при $k = 3$. **14.251.** $\sin^2 6° = 0{,}5\,(1 - \sqrt{1 - \sin^2 12°})$. **14.252.** а) Ні; б) ні. **14.253.** Так. **14.254.** а) 6π; б) 30π. **14.255.** $\pi/3$. **14.257.** $-2\sqrt{5}/5$. **14.259.** При $\alpha + \beta = 2\pi n$, або при $\alpha = 2\pi n$ і при будь-якому β, або при $\beta = 2\pi n$ і будь-якому α $(n \in \mathbf{Z})$. **14.260.** $y_{\max} = 3/4$. **14.261.** $y_{\max} = \sin 1$. **14.262.** $y_{\min} = 2$; $y_{\max} = 3$. **14.263.** $\operatorname{tg} 1$. **14.264.** $(m - 1)/(m + 1)$ при $m \neq 1$, $m \neq -1$. **14.265.** $-23/36$. **14.266.** Мінус. **14.267.** $\pi/4$. **14.268.** $\pi/4$. **14.269.** $m = -1/4$, $M = 1/4$. **14.271.** $(3;\ 1)$. **14.272.** Ні. **14.273.** а) «$<$»; б) «$<$»; в) «$>$»; г) «$<$». **14.302.** $-7/24$. **14.303.** $-\sqrt{3}/2$. **14.304.** $(3 + 8\sqrt{2})/15$. **14.306.** $\sqrt[512]{a^{511}}$. **14.309.** Ні. **14.310.** $y = x$, де $x > 0$, $x \neq 1$. **14.311.** 0, $[\pi/3;\ \pi/2]$. **14.313.** $[-6;\ -5] \cup [0;\ 1]$. **14.316.** Область визначення $(2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$; область значень $(-\infty;\ 0]$. **14.317.** $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **14.318.** При жодних x. **14.319.** $y_{\min} = 2$ при $1 \leqslant x \leqslant 3$. **14.320.** Скоротний тоді і тільки тоді, коли числа $a + b$ і $a - b$ або окремо діляться на 4, або мають найбільший спільний дільник $k > 2$. **14.321.** Ні. **14.322.** $(a - 1)(a + 3)(a^2 + 3)$. **14.323.** $(0;\ 1) \cup (1;\ \infty)$. **14.324.** $(0;\ \infty)$. **14.327.** $(-\infty;\ \infty)$. **14.328.** $1/(b_1^{-1} + b_2^{-1} + \ldots + b_k^{-1})$. **14.329.** а) $9 \cdot 10^n$; б) 0. **14.330.** $x = a$, $y \neq b$ при $c = 0$; $(a + c;\ b + 1)$, $(a - c;\ b - 1)$ при $c \neq 0$. **14.331.** 2 кв. од. **14.332.** $y_{\max} = 1/10$. **14.333.** $(1/2;\ 2)$. **14.335.** Мінус. **14.336.** Ні. **14.337** $-31/11$; 3. **14.338.** $(2;\ 9)$. **14.339.** $(1;\ 2;\ 3)$. **14.340.** -1. **14.341.** $(k + 1)^3 (k - 1)^2$. **14.342.** 0. **14.343.** $y_{\max} = 6$. **14.344.** $y_{\max} = 2$. **14.345.** 2, 4. **14.346.** $\pm\sqrt{2/3}$; $\pm\sqrt{2n + 2/3}$; $\pm\sqrt{2n - 2/3}$, $n \in \mathbf{N}$. **14.347.** $4n^2$, де $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 0$. **14.348.** $x = 0$ при $a \in \mathbf{R}$. **14.349.** 2. **14.350.** $1/(1 - 2^x)$. **14.353.** Ні. **14.354.** 2; $-2/9$. **14.355.** $(-\infty;\ -\sqrt{3}/3] \cup [\sqrt{3}/3;\ \infty)$. **14.356.** $x^4 - 8x^2 + 4 = 0$. **14.357.** 2. **14.358.** $y_{\min} = 4$. **14.359.** а) Ні; б) так; в) ні. **14.361.** $(\sqrt{5} + 1)/4$. **14.362.** $x = 17$. **14.363.** -2; 1; 2. **14.364.** $(-1{,}25;\ -1) \cup (9;\ \infty)$. **14.365.** $[-9;\ -1] \cup [0;\ 1]$. **14.367.** $5\sqrt[3]{5}/3$. **14.368.** $a = 1$. **14.369.** $y = -2x^2 - x + 3$. **14.370.** $(0;\ 1)$. **14.371.** -1; 0; 1; 4; 5; 6. **14.372.** $[0;\ 3)$. **14.373.** $(-\infty;\ 2] \cup [6;\ \infty)$. **14.374.** $(-\infty;\ 2] \cup (4;\ 6) \cup [8;\ \infty)$. **14.375.** $(-\infty;\ -1) \cup [0;\ 1)$. **14.376.** $[-1;\ 0{,}11]$. **14.377.** $k = 7$. **14.378.** -3; -2; 0; 1. **14.379.** а) 1; б) ± 3; ± 2; ± 1; 0. **14.380.** $(-3;\ -5/3)$. **14.381.** $(-3/4;\ 0) \cup (3;\ \infty)$. **14.382.** $(0;\ 1)$. **14.383.** $(3;\ 4) \cup (5;\ \infty)$. **14,384.** $\pi n < x \leqslant$

$< \pi/6 + \pi n$; $\pi n - \pi/6 < x < \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **14.386.** 2; 3. **14.387.** (2; 1). **14.389.** $x = \pi/4 + \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$; $y_{\min} = 4$. **14.390.** $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **14.392.** (3; 6). **14.394.** $(-\sqrt{3}; 4)$, $(-1; 2)$, $(1; 2)$, $(\sqrt{3}; 4)$. **14.395.** (—3; 57), (2; 2). **14.396.** $(-\infty; -7]$. **14.397.** $k = 4$. **14.398.** $(-\infty; -2)$, $(2; \infty)$, 0. **14.399.** $[1; 4 - 2\sqrt{2}) \cup (4 + 2\sqrt{2}; 7]$. **14.400.** $[-1; 0) \cup (8; 9]$. **14.401.** (—2; 0), (2; 0). **14.402.** (0; 25). **14.403.** (2; 4). **14.404.** 16. **14.405.** $(10^5; 0)$, $(10^{-1}; 0)$. **14.406.** 1; 2. **14.407.** $(-\infty; -3) \cup [-2; 0) \cup (0; 3) \cup [5; \infty)$. **14.408.** $(0; 0{,}5] \cup (1; 2]$. **14.409.** $(1/2; 1) \cup [3; \infty)$. **14.410.** (1; 4].

Глава 15

15.001. —3. **15.002.** 4/5. **15.003.** 0. **15.004.** —145/42. **15.005.** —5. **15.006.** 1. **15.007.** 0,25. **15.008.** —1. **15.009.** 1,5. **15.010.** 4. **15.034.** e^{-1}. **15.035.** $(-\infty; 0) \cup (0; 2{,}5)$. **15.036.** [—4; —3]. **15.037.** 3; 4. **15.038.** 1. **15.039.** 4/9. **15.040.** 2/3. **15.041.** —2. **15.042.** 1/8. **15.043.** 1/8. **15.044.** —2. **15.045.** 0. **15.046.** —0,5. **15.047.** 1. **15.048.** 1/30. **15.049.** 39. **15.050.** 7/6. **15.051.** 1. **15.052.** —0,5. **15.053.** 3 ln 2. **15.054.** $3\sqrt{2}/8$. **15.055.** 0,5 ln 2. **15.056.** —3. **15.057.** —1. **15.058.** $2/\sqrt{\pi}$. **15.059.** 1. **15.060.** а) $f''(1) = 3 - 4\cos 2$, $f''(\pi) = 2\ln\pi - 1$; б) $f''(3) = 2/3 - (1/9)\sin 1$, $f''(\pi/2) = 4/\pi - 1/18$. **15.061.** $y'(0) < 0$. **15.062.** Спадає від 1,5 до 0,25. **15.063.** $y = x - e$. **15.064.** —8; 72. **15.065.** [—8; 8]. **15.066.** $y = 3x - \pi$. **15.068.** Зростає від 0 до ln 9. **15.069.** [—1; 4] і (—1; 4). **15.071.** $a = -1$, $b = 1$. **15.072.** 45°. **15.073.** $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = 2\pi k - 2\,\mathrm{arctg}\,(3/5)$, $k \in \mathbf{Z}$. **15.074.** $x_1 = 0$, $x_2 = -7/3$. **15.075.** Ні.

15.076. $F(x) = \begin{cases} x^2/2 + C & \text{при } x \geqslant 0, \\ -x^2/2 + C & \text{при } x < 0. \end{cases}$ **15.077.** а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' + 0{,}36y = 0$. **15.078.** а) $y = Ce^{-36x}$; б) $y = A\cos(6x + \varphi)$. **15.083.** Перше — ні, друге — так. **15.084.** $a > 3$. **15.085.** $\dfrac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. **15.086.** $y = x + 1$. **15.087.** (4; 0), (1; —27).

15.089. $\pi/3$. **15.091.** (3; —2), (—1; 2/3). **15.092.** (2; 8/3), (3; 7/2). **15.093.** $3\pi/4$. **15.094.** $\pi/4$. **15.095.** (1/2; —15/32). **15.096.** $y = (1/e)\,x$. **15.097.** У точці (—5; 45): $y = -20x - 55$ і $y = -13x - 20$; у точці (2; 3): $y = 8x - 13$ і $y = x + 1$. **15.098.** $\beta = \pi/2 + \mathrm{arctg}\, 3$. **15.099.** $y = 4x - 13$; $y = -4x + 3$. **15.100.** $x + ey - 2e = 0$. **15.101.** $8x - y + 14 = 0$. **15.102.** (1; 0); (—1/3; —44/27). **15.103.** (0; —1); (4; 3). **15.104.** а) $y = x - 0{,}09$; б) $\pi/24$; $\pi/8$; $13\pi/24$; $5\pi/8$. **15.105.** а) $3\pi/4$; б) $7\pi/18$. **15.106.** $\pi/6$. **15.107.** $5\sqrt{5}$. **15.108.** 5 кв. од. **15.109.** $S_1 = S_2 = S_3 = 8$ кв. од. **15.112.** 1/13 м/с. **15.113.** 21 м/с; 24 м/с². **15.114.** 1 і 4 с. **15.115.** $v(2) = 70$ м/с. **15.116.** $v_1 = 8$ м/с, $v_2 = 10$ м/с і $v_1 = 24$ м/с, $v_2 = 22$ м/с. **15.117.** $a_1 = 14$ м/с², $a_2 = 18$ м/с² **15.118.** $v_1 = 36$ м/с. $v_2 = 35$ м/с. **15.119.** $v = -8$ м/с. **15.122.** 160π см²/с; 800π см³/с. **15.123.** $\omega = 12$ рад/с; $t = 2$ с. **15.124.** 30 г/см; 98 г/см. **15.126.** $a > 4$. **15.127.** $x = e$ — точка мінімуму. **15.128.** $x = 1/e$ — точка максимуму. **15.129.** $x = 0$ — точка мінімуму, $x = 2$ — точка максимуму. **15.130.** $x = 3$ — точка максимуму. **15.131.** $x = 0{,}5$ — точка мінімуму; $y_{\min} = 0{,}25 - \ln 2$. **15.132.** $x = \ln 2$ — точка максимуму; $\pi/4$. **15.133.** $x = \pi/4 + \pi k$ — точки мінімуму при $k = 2n + 1$ і точки максимуму при $k = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\pi/4$. **15.134.** $x = 0$ — точка мінімуму; (—0,25; —0,25 — ln 0,75). **15.135.** $x = -1$ —

точка максимуму; $x = 1$ — точка мінімуму; $y = 11{,}25x + 13$. **15.136.** $x = 0$ — точка максимуму; 0; 0; 9. **15.138.** $p > 1$. **15.141.** Зростає на $(2\pi n - \pi/3;\ 2\pi/3 + 2\pi n)$; спадає на $(2\pi/3 + 2\pi n;\ 5\pi/3 + 2\pi n)$, $n \in Z$. **15.142.** Зростає на $(-\infty; -1/2)$; спадає на $(-1/2; \infty)$. **15.143.** Зростає на $(1; 3)$; спадає на $(-\infty; 1)$ і на $(3; \infty)$. **15.144.** Зростає на $(-6; 0)$ і на $(0; 2)$; спадає на $(-\infty; -6)$ і на $(2; \infty)$. **15.145.** Зростає на $(-\infty; 1)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(1; 2)$. **15.146.** $y_{\text{найм}} = -24$, $y_{\text{найб}} = 4$. **15.147.** $y_{\text{найм}} = 0$, $y_{\text{найб}} = 17$. **15.148.** $y_{\text{найм}} = 1$, $y_{\text{найб}} = 3$. **15.149.** $y_{\text{найм}} = -10/3$, $y_{\text{найб}} = -2$. **15.150.** $y_{\text{найм}} = 1$, $y_{\text{найб}} = 2{,}125$. **15.151.** $y_{\text{найм}} = 0$, $y_{\text{найб}} = 1$. **15.152.** $y_{\text{найм}} = 0$, $y_{\text{найб}} = 3\sqrt{3}/8$. **15.153.** а) $y_{\text{найм}} = 0{,}8$, $y_{\text{найб}} = 1$; б) $y_{\text{найм}} = 1/\sqrt{5}$, $y_{\text{найб}} = 2/3$. **15.154.** $y_{\text{найм}} = 1$, $y_{\text{найб}} = \pi/2$. **15.155.** $y_{\text{найм}} = 1$, $y_{\text{найб}} = 2\sqrt{3}/3$. **15.156.** $y_{\text{найм}} = 0{,}5$, $y_{\text{найб}} = 3/4$. **15.157.** $y_{\text{найм}} = -\pi/4$, $y_{\text{найб}} = \pi/4$. **15.158.** а) $y_{\text{найм}} = 1$, $y_{\text{найб}} = 1{,}25$; б) $y_{\text{найм}} = 1$, $y_{\text{найб}} = 1{,}25$. **15.159.** а) $y_{\text{найм}} = 1$, $y_{\text{найб}} = \sqrt[3]{4/3}$; б) $y_{\text{найм}} = \sqrt[3]{9}/2$, $y_{\text{найб}} = \sqrt[3]{9/5}$. **15.160.** а) $y_{\text{найм}} = -1{,}5$, $y_{\text{найб}} = 7$; б) $y_{\text{найм}} = 2{,}5$, $y_{\text{найб}} = 9$. **15.161.** а) $y_{\text{найм}} = 5$, $y_{\text{найб}} = 12$; б) $y_{\text{найм}} = -1/64$, $y_{\text{найб}} = 0$. **15.162.** а) $y_{\text{найм}} = 2$, $y_{\text{найб}} = 16$; б) $y_{\text{найм}} = 1$, $y_{\text{найб}} = 2$. **15.163.** а) $y_{\text{найм}} = 3$, $y_{\text{найб}} = 5$; б) $y_{\text{найм}} = 1$, $y_{\text{найб}} = 5$. **15.164.** $y_{\text{найм}} = 2$, $y_{\text{найб}} = 2e^2 - 1$. **15.165.** $2^{1/2} \times 3^{-3/4}$. **15.166.** Зростає на $(-\infty; -1)$ і на $(1; \infty)$; спадає на $(-1; 0)$ і на $(0; 1)$; $f(x_1) < f(x_2)$. **15.167.** Зростає на $(1; \infty)$; спадає на $(0; 1)$; $f(e^{-2}) > f(e^{-1})$. **15.168.** 3. **15.169.** $f(0) = 2$. **15.170.** $(e; \infty)$; $\pi^e < e^\pi$. **15.171.** $y_{\max} = 0{,}25$ при $x = \ln 2$; зростає на $(-\infty; \ln 2)$; спадає на $(\ln 2; \infty)$. **15.172.** $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y_{\max} = 4e^{-2}$ при $x = 2$; зростає на $(0; 2)$; спадає на $(-\infty; 0)$ і на $(2; \infty)$. **15.173.** $y_{\max} = \sqrt{2}/(2e^{\pi/4})$ при $x = \pi/4$; зростає на $(0; \pi/4)$; спадає на $(\pi/4; \pi)$. **15.174.** $y_{\max} = \ln 2 - 0{,}5$ при $x = -0{,}5$; зростає на $(-\infty; -0{,}5)$; спадає на $(-0{,}5; 0{,}5)$. **15.175.** $y_{\min} = -25/96$ при $x = 7/11$; зростає на $(7/11; 5)$; спадає на $(-\infty; 7/11)$ і на $(5; \infty)$. **15.176.** 9 і 9. **15.177.** 40; 60; 80. **15.178.** 0,5. **15.179.** 14×21 м. **15.180.** 18 дм³. **15.181.** 12 і $3\sqrt{3}$ см. **15.182.** Дві сторони паралелограма — середні лінії даного трикутника. **15.183.** Прямокутний трикутник з катетом a. **15.184.** 100 см. **15.185.** 12 і 9 см. **15.186.** 12 і 9 см. **15.187.** 6 км/год. **15.188.** 9 і 7,5 см. **15.189.** $2R = 14\sqrt{2}$ см. **15.190.** 60°. **15.191.** $\angle BAC_{\text{найб}} = \pi/6$ при $\alpha = 2\pi/3$. **15.192.** 4/5. **15.193.** При $\alpha = \pi/3$ найбільше значення дорівнює 0,5. **15.194.** $H = R = \sqrt[3]{V/\pi}$. **15.195.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **15.196.** $a/2$; $H/2$. **15.197.** $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2)$. **15.198.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **15.199.** $\pi/3$. **15.200.** $\pi/4$. **15.201.** $k = 29{,}28$; $x \approx 5{,}4$; $y \approx 5{,}4$. **15.202.** $R = r$. **15.203.** $x = -1$ — точка максимуму, $x = 0$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; -1)$ і на $(0; \infty)$; спадає на $(-1; 0)$. **15.204.** $x = \pm 2$ — точка мінімуму, $x = 0$ — точка максимуму; зростає на $(-2; 0)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(-\infty; -2)$ і на $(0; 2)$. **15.205.** $x = \pm\sqrt{5}$ — точки мінімуму, $x = 0$ — точка максимуму; зростає на $(-\sqrt{5}; 0)$ і на $(\sqrt{5}; \infty)$; спадає на $(-\infty; -\sqrt{5})$ і на $(0; \sqrt{5})$. **15.206.** $x = -1$ — точка максимуму, $x = 2$ — точка мінімуму;

зростає на $(-\infty; -1)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(-1; 2)$. **15.207.** $x = 0$ — точка максимуму, $x = 2$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 0)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(0; 2)$. **15.208.** $x = 2$ — точка максимуму, $x = 3$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 2)$ і на $(3; \infty)$; спадає на $(2; 3)$. **15.209.** $x = \pm 1$ — точки максимуму, $x = 0$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; -1)$ і на $(0; 1)$; спадає на $(-1; 0)$ і на $(1; \infty)$. **15.210.** $x = \pm 2$ — точки мінімуму $x = 0$ — точка максимуму; зростає на $(-2; 0)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(-\infty; -2)$ і на $(0; 2)$. **15.211.** $x = 0$ — точка максимуму, $x = 2$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 0)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(0; 2)$. **15.212.** $x = 0$ — точка максимуму; зростає на $(-\infty; 0)$; спадає на $(0; \infty)$. **15.213.** $x = -1$ — точка мінімуму, $x = 1$ — точка максимуму; зростає на $(-1; 1)$; спадає на $(-\infty; -1)$ і на $(1; \infty)$. **15.214.** $x = 2$ — точка мінімуму; спадає на $(-\infty; 2)$; зростає на $(2; \infty)$. **15.215.** $x = \sqrt[3]{1/2}$ — точка мінімуму; спадає на $(-\infty; 0)$ і на $(0, \sqrt[3]{1/2})$; зростає на $(\sqrt[3]{1/2}; \infty)$. **15.216.** $x = 2$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 0)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(0; 2)$. **15.217.** $x = 0$ — точка мінімуму; спадає на $(-\infty; 0)$; зростає на $(0; \infty)$. **15.218.** $x = 2$ — точка мінімуму, $x = -2$ — точка максимуму; зростає на $(-\infty; -2)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(-2; 2)$. **15.219.** $x = 2$ — точка мінімуму; спадає на $(-\infty; 2)$; зростає на $(2; \infty)$. **15.220.** $x = 4$ — точка максимуму; зростає на $(-\infty; -8)$ і на $(-8; -4)$; спадає на $(-4; 0)$ і на $(0; \infty)$. **15.221.** Спадає на $(-\infty; -3)$, на $(-3; 3)$ і на $(3; \infty)$. **15.222.** $x = 1$ — точка максимуму; зростає на $(-\infty; 1)$; спадає на $(1; \infty)$. **15.223.** $x = 1/2$ — точка мінімуму; спадає на $(-\infty; 1/2)$; зростає на $(1/2; 2)$ і на $(2; \infty)$. **15.224.** $x = 2$ — точка максимуму; спадає на $(-\infty; -2)$ і на $(2; \infty)$; зростає на $(-2; 2)$. **15.225.** $x = 1 - \sqrt{3}$ — точка максимуму, $x = 1 + \sqrt{3}$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 1 - \sqrt{3})$ і на $(1 + \sqrt{3}; \infty)$; спадає на $(1 - \sqrt{3}; 1)$ і на $(1; 1 + \sqrt{3})$. **15.226.** $x = 0$ — точка мінімуму, $x = 2$ — точка максимуму; спадає на $(-\infty; 0)$ і на $(2; \infty)$; зростає на $(0; 2)$. **15.227.** $x = -1$ — точка мінімуму, $x = 1$ — точка максимуму; спадає на $(-\infty; -1)$ і на $(1; \infty)$; зростає на $(-1; 1)$. **15.228.** $x = -\sqrt[3]{2}$ — точка мінімуму, $x = 0$ — точка максимуму; спадає на $(-\infty; -\sqrt[3]{2})$, на $(0; 1)$ і на $(1; \infty)$; зростає на $(-\sqrt[3]{2}; 0)$. **15.229.** $x = 3$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 0)$ і на $(3; \infty)$; спадає на $(0; 3)$. **15.230.** $x = 2{,}5$ — точка максимуму; зростає на $(-\infty; 1)$ і на $(1; 2{,}5)$; спадає на $(2{,}5; 4)$ і на $(4; \infty)$. **15.232.** а) $\frac{4x^3}{3} - \frac{9}{x} - 35$; б) $\frac{x^4}{12} - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 7$. **15.233.** $F(x) = \frac{x^5 + 11}{5}$. **15.234.** $F(x) = \frac{3 - \cos 2x}{2}$. **15.235.** $F(x) = -\frac{\operatorname{ctg} 3x + 2}{3}$. **15.236.** $F(x) = -\frac{71x^3 + 8}{24x^3}$. **15.237.** $F(x) = x^4 - x^3 + 3$. **15.238.** $F(x) = \frac{2\sin 4x - 9}{8}$. **15.239.** $S(x) = 7 - 4\sqrt{5 - x}$. **15.240.** $\pi/2$. **15.241.** $3\pi/4$. **15.242.** 3. **15.243.** $(\pi - 2)/4$. **15.244.** $9\sqrt{3}/2$. **15.245.** $\sqrt{3}/3$. **15.246.** 2. **15.247.** 1/2. **15.248.** 0. **15.249.** 1120,4. **15.250.** $-101{,}25$. **15.251.** 46/15. **15.252.** $(4 - \sqrt{2})/6$. **15.253.** 2. **15.254.** $0{,}5 \ln 2 - 1{,}5$. **15.255.** $3(\sqrt[3]{9} - 1)/4$. **15.256.** 1/8. **15.257.** $3\pi/8$. **15.258.** $3\pi/16$. **15.259.** 11/96. **15.260.** 1/8. **15.261.** 12. **15.262.** $-4/5$. **15.263.** 4/9. **15.264.** 3/5. **15.265.** $3{,}6\sqrt{10} \lg e \approx 4{,}94$. **15.266.** 11/4 кв. од. **15.267.** $\sqrt{2}$ кв. од.

15.268. 8/3 кв. од. **15.269.** 5/12 кв. од. **15.270.** 1/6 кв. од. **15.271.** 3/10 кв. од. **15.272.** 1,6 кв. од. **15.273.** $12 - 5 \ln 5 \approx 4$ кв. од. **15.274.** 64,5 м; 11 м/с². **15.275.** 11,25 м; 1/12 м/с².

Глава 16

16.001. $\dfrac{n^2 + m^2}{n - m}$. **16.003.** $\dfrac{c \sin 2\alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$. **16.006.** $-1/k$. **16.007.** 20. **16.008.** 12. **16.009.** Частини рівновеликі. **16.010.** $3R^2$. **16.014.** У п'ятикутнику. **16.023.** $4S$. **16.025.** $R^2 (4\pi - 3\sqrt{3})/6$. **16.027.** 0,2. **16.029.** $[s/\sqrt{2}; s]$. **16.032.** 3. **16.034.** $0{,}2R\sqrt{10}$. **16.037.** $4\sqrt{2}$ м. **16.038.** a. **16.040.** 4, 5, 6, 7 і 8 см. **16.041.** 3 і 4. **16.044.** 16 см. **16.045.** 4 і 11 см. **16.046.** 12 см. **16.047.** 12, 15 і 18 см. **16.048.** 7,2 см². **16.049.** $600\sqrt{3}$ см². **16.050.** 1,5 см. **16.052.** $4\frac{8}{21}$ і $5\frac{20}{21}$ см. **16.053.** $c^2/4$. **16.054.** а) Тупокутний; б) прямокутний; в) неможливий; г) тупокутний. **16.056.** $(\sqrt{5} + 1) : 4$. **16.057.** $2(S_1 + S_2)$. **16.060.** $p/4$. **16.063.** $h/3$. **16.064.** 1,2 см. **16.065.** 7 : 2. **16.067.** 180°. **16.070.** $\arccos(4/5)$. **16.073.** a. **16.074.** $\arccos(4/5)$. **16.075.** 1) 5, 7, 9, 11 і 30 см; 2) 6, 8, 10, 12 і 30 см; 3) 7, 9, 11, 13 і 30 см. **16.076.** 25. **16.077.** 36 і 108°. **16.078.** 2α; π; $2\pi - 2\alpha$. **16.081.** Ні. **16.084.** 60°. **16.085.** $\arccos(1/3)$. **16.086.** $\pi/4$; $\pi/2$; $\operatorname{arctg} 2$. **16.087.** 1 : 4. **16.088.** 6/13. **16.089.** $-\frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$. **16.090.** $\frac{1}{2} H \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$. **16.091.** $l \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \times \sin^2\frac{\alpha}{2}$ і $l \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **16.093.** $\pi/3$. **16.096.** 51°. **16.097.** $\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k}}$; $k \geqslant 2$. **16.098.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 - \sqrt{2k - k^2}}{k - 1}}$; $1 < k < 2$. **16.099.** $\pi\sqrt{3} : 2$. **16.100.** 20. **16.105.** $6\sqrt{435}$ см³. **16.106.** 60°. **16.107.** $a\sqrt{2}/2$. **16.114.** 1 : 7. **16.115.** 1 см. **16.116.** $5\pi/16$. **16.117.** $Ha(\sqrt{6} - \sqrt{5})/2$. **16.119.** 1 : 11. **16.120.** 5040 см². **16.121.** $\sqrt{2S_1S_2S_3}/3$.

Глава 17

17.001. $y \pm 0{,}5\sqrt{15} = 0$. **17.002.** $D(-1{,}4; -5{,}2)$. **17.003.** $5x - y + 7 = 0$. **17.004.** $y = 0$; $y = 2\sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}x$; $y = -\sqrt{3} \times (x - 10)$. **17.005.** $(x - 7/2)^2 + (y \pm \sqrt{10})^2 = 49/4$. **17.006.** $y = -\sqrt{3}x + (3 + 2\sqrt{3})$; $6 + 3{,}5\sqrt{3}$ кв. од. **17.007.** 13; $B(12; 5)$; $C(-5; 12)$; $D(-12; -5)$. **17.008.** $(x - 1/2)^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9/4$ або $(x - 1/2)^2 + (y + \sqrt{2})^2 = 9/4$. **17.009.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ або $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$. **17.010.** $(-1; 2)$; 13 кв. од. **17.011.** $8x + 15y \pm 60 = 0$ і $8x - 15y \pm 60 = 0$; 60/17 см. **17.012.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. **17.013.** $4\sqrt{17}/11$; $y = 4x$. **17.014.** $C(5; 2)$; $D(3; 3)$ або $C(3; -2)$; $D(1; -1)$. **17.015.** 24/25. **17.016.** $\sqrt{33}$ і $\sqrt{105}$. **17.017.** $(-2 + 3\sqrt{3}; -1)$ або $(-2 - 3\sqrt{3}; -1)$; $9\sqrt{3}$ кв. од. **17.018.** $4\sqrt{2}$. **17.019.** $(-2/3; -2/3)$. **17.020.** $C(4; -1)$. **17.021.** $(3/2)\sqrt{34}$. **17.022.** $3x + 4y - 15 = 0$ і $3x - 4y - 15 = 0$. **17.023.** $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$. **17.024.** $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$. **17.025.** $(1{,}5; 1; 1)$. **17.026.** $\cos\alpha = 31/(5\sqrt{41})$. **17.027.** $\cos A = -5/\sqrt{34}$.

17.028. $\alpha = -4$, $\beta = 2$ або $\alpha = -8$, $\beta = -2$. **17.031.** $\overline{M_1M_2}$ (1,5; 1; —0,5); $|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{7/2}$. **17.033.** $\overline{AB} = 3\bar{a} - \bar{b}$; $\overline{BC} = 2\bar{b} - 3\bar{a}$. **17.034.** $(-\infty; 0)$ і $(1; \infty)$. **17.035.** $(-\infty; -1)$ і $(0; 2)$. **17.036.** $[2; 5)$. **17.037.** $(2/3; 3)$. **17.038.** $x = -5/4$, $y = 8/5$. **17.039.** $(-\infty; -1)$ і $(5; \infty)$. **17.040.** $\overline{BD} = 2(\bar{b} - \bar{a})$; $\overline{AD} = (4/3)\bar{b} - (2/3)\bar{a}$. **17.041.** $\overline{AB} = (9/8)\bar{a} - (3/8)\bar{b}$; $\overline{AD} = (-3/8)\bar{a} + (9/8)\bar{b}$; $\overline{MN} = \bar{b} - \bar{a}$; $\overline{BD} = (-3/2)\bar{a} + (3/2)\bar{b}$. **17.042.** $\overline{CM} = (3/20)\overline{CA} + (3/20)\overline{CB} + (7/10)\overline{CD}$. **17.043.** $\arccos(5\sqrt{13}/26)$. **17.046.** $\overline{A_1O} = -\bar{a} + (1/3)\bar{b} - (2/3)\bar{c}$. **17.047.** $8/(5\sqrt{17})$. **17.048.** $\arccos(3/\sqrt{19})$. **17.049.** $\arccos(13/14)$. **17.050.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}(\bar{a} + \bar{b})$. **17.051.** $\bar{p}(2; -1; 1)$. **17.052.** $\bar{a} = (-3/2)\bar{b} - 3\bar{c}$. **17.054.** 5 кв. од. **17.055.** 120°. **17.056.** $10\sqrt{5}/3$ куб. од. **17.057.** $\overline{CD} = \frac{CB^2 \cdot \overline{CA} + CA^2 \cdot \overline{CB}}{CA^2 + CB^2}$. **17.059.** $1/\sqrt{10}$. **17.060.** $M(0; 0; 2/3)$; $N(1/3; 1/3; 2/3)$. **17.061.** $\sqrt{13}$. **17.062.** —11,5. **17.063.** $4\sqrt{7}$. **17.064.** 120°. **17.065.** $7/(5\sqrt{33})$. **17.066.** 4. **17.067.** $(-4; -2; 0)$ або $(4; 2; 0)$. **17.068.** 6/7; —2/7; —3/7. **17.069.** π. **17.070.** 7. **17.071.** $\overline{A_1A_3} = 0{,}5(\sqrt{5} + 1)\overline{A_1A_2} + \overline{A_1A_5}$. **17.072.** При $x = 0$. **17.073.** $\overline{MO} = \frac{1}{2\cos^2(\alpha/2)}(\overline{MA} + \overline{MB})$. **17.074.** $\overline{DK} = (7/8)\overline{AB} - \overline{AD}$; $|\overline{DK}| : |\overline{AB}| = \sqrt{337}/24$. **17.077.** 4; 1/2. **17.078.** —29; 14 кв. од. **17.079.** 1 : 3. **17.080.** $\pi/4$. **17.081.** $\bar{0}$. **17.083.** Рівнобедрений гострокутний. **17.085.** 8. **17.086.** $\arccos(-4/5)$. **17.087.** $\overline{AB} + \overline{CB} = 2(\bar{a} - \bar{b})$. **17.089.** $\arccos(13/14)$. **17.090.** $\arccos \frac{|a^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. **17.091.** $\arccos(1/\sqrt{14})$. **17.092.** —1,5. **17.095.** $\cos x = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ef}$, де $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|DA| = d$, $|DB| = e$, $|DC| = f$. **17.096.** $(1/\sqrt{11}; -3/\sqrt{11}; 1/\sqrt{11})$. **17.097.** $(a + b) : c$; $(b + c) : a$; $(c + a) : b$. **17.098.** $\sqrt{43}$. **17.099.** $\overline{OH} = \frac{b^2c^2\overline{OA} + a^2c^2\overline{OB} + a^2b^2\overline{OC}}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$. **17.100.** $\pi/6$. **17.101.** 6. **17.102.** $\pm\sqrt{6}$. **17.103.** 12,5 куб. од. **17.104.** 5 кв. од. **17.105.** $\sqrt{442/19}$; тупим. **17.106.** (2; 3; —2). **17.107.** (—4; —6; 12). **17.108.** $AB = 5$; $S_{\triangle OAB} = 5$ кв. од.; $OM = 2{,}5$. **17.109.** $(4\sqrt{2}; -2; 8)$ або $(-4\sqrt{2}; 2; -8)$. **17.111.** $-S\sqrt{3}/6$. **17.112.** 3 : 1. **17.113.** $\overline{AB} = \overline{AC} + k\overline{AD}$, $\overline{AE} = \overline{AD} + k\overline{AC}$, де $k = (1 - \sqrt{5})/2$. **17.114.** $8a^2$, де a — довжина ребра куба. **17.115.** $3a^2$, де a — довжина сторони квадрата. **17.116.** $4a^2$, де a — довжина сторони квадрата. **17.119.** $13/(2\sqrt{43})$. **17.120.** $\frac{2bc}{b + c}\cos(\alpha/2)$. **17.125.** $\frac{16S^2c^2(c^4 - 16S^2)}{(16S^2 + c^4)^2}$. **17.127.** На рівні частини по 45°. **17.129.** 4 : 1.

Варіант I: 1. 1. 2. 4,3. 3. 3. 4. 4,1. 5. 6. 6. 0. 7. 30°. 8. 42 см. 9. 3,53. 10. —1,5.

Варіант II: 1. 4. 2. 1. 3. 4. 4. 5. 5. 7. 6. 41. 7. 3. 8. 64. 9. 4. 10. 1.

Варіант III: 1. 8. 2. 7. 3. 2. 4. 3. 5. 25. 6. 2. 7. 192. 8. 5. 9. 10. 10. 3.

Варіант IV: 1. 2. 2. 1, 2 і 4. 3. 2. 4. 5. 5. 6. 6. 8. 7. 0,5. 8. 4 і 36. 9. 8. 10. 0 і 5.

Варіант V: 1. 40. 2. —25. 3. 10. 4. 1. 5. 0,28. 6. 90°. 7. 72 см^2. 8. 2,3 см. 9. 13 і 13. 10. 6.

Варіант VI: 1. 1. 2. 11. 3. 0; 4. 4. 48. 5. 0,8. 6. 4. 7. 31,5. 8. 15. 9. 2. 10. 18.

Варіант VII: 1. —1,5. 2. 8. 3. 0,5. 4. 6. 5. 7,2. 6. 16. 7. 1. 8. 190. 9. —0,5. 10. 7.

Варіант VIII: 1. 2; 0,25. 2. 225°; 315°. 3. 4. 4. 0,3. 5. 168. 6. 3 км/год. 7. 1. 8. 0,75. 9. 6 і 0. 10. 2,5.

Варіант IX: 1. 2. 2. 9. 3. 10. 4. 8 см. 5. 0,8. 6. 0. 7. 103. 8. 4 см. 9. 6. 10. 16 кв. од.

Варіант X: 1. —9. 2. 1. 3. 3. 4. 11. 5. —1. 6. 7. 7. 4. 8. 0. 9. Мінімум при $x = 1/e$. 10. 2.

Варіант XI: 1. 6. 2. 0. 3. 1. 4. 5. 5. 0. 6. —1. 7. 5. 8. Один раз. 9. 20. 10. 2,25.

Варіант XII: 1. 1, 5. 2. 7,5 см. 3. 0,6. 4. 100. 5. —1,5. 6. 3. 7. 1. 8. 2,25. 9. 80. 10. 1,5.

Варіант XIII: 1. $(2x + 1)^2$. 2. $2 \operatorname{tg} 2\alpha$. 3. 1. 4. —10; 3. 5. 9. 6. 2. 7. 10. 8. 4. 9. —3. 10. 1.

Варіант XIV: 1. 3. 2. 1,6. 3. 5. 4. 12 і 24 год. 5. —1, 1. 6. 4. 7. 12. 8. 0,5. 9. 8. 10. 120°; 240°.

Варіант XV: 1. —4; —3. 2. 25. 3. 5. 4. —58. 5. 2; 3. 6. 2,25. 7. 9,375 кв. од. 8. 12. 9. 150°; 210°. 10. 40 л.

Варіант XVI: 1. 2. 2. 0,1. 3. 83. 4. 4. 5. 192 кв. од. 6. 90°; 210°. 7. 32. 8. 25 і 20. 9. 2; 1; 5. 10. 2; 4.

Варіант XVII: 1. 4. 2. 3/4. 3. 5. 4. 60 кв. од. 5. 0,8. 6. 10. 7. 6. 8. 6. 9. 12 куб. од. 10. 8.

Варіант XVIII: 1. 5. 2. 8. 3. 4. 4. 2. 5. 66. 6. 1. 7. 12 куб. од. 8. 13. 9. 2. 10. 3.

Варіант XIX: 1. 4. 2. 2. 3. 3. 4. 7. 5. 3. 6. 3. 7. 6 кв. од. 8. 2. 9. 4. 10. 3.

Варіант XX: 1. 7. 2. 8 кв. од. 3. 3. 4. 2. 5. 0,6. 6. 2. 7. 51,6. 8. 3. 9. 16. 10. 120°.

Варіант XXI: 1. 4. 2. 48 кв. од. 3. 3. 4. 5. 5. 3. 6. 7. 7. 10. 8. 4. 9. 5. 10. 2.

Варіант XXII: **1.** $(2 \cdot \log_2 5 + 1)^2$. **2.** 1. **3.** 10. **4.** 5. **5.** 12. **6.** 0,36. **7.** 0,8. **8.** 3. **9.** 6. **10.** 2.

Варіант XXIII: **1.** 4. **2.** 5. **3.** 9. кв. од. **4.** 5. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 4. **8.** 2. **9.** 6. **10.** 4.

Варіант XXIV: **1.** 14. **2.** 0,5. **3.** 5. **4.** 7. **5.** 4. **6.** 250 куб. од. **7.** 63. **8.** 0,2. **9.** 5. **10.** 20.

Варіант XXV: **1.** 1. **2.** 16. **3.** 6. **4.** 0,28. **5.** (9; —1). **6.** 6. **7.** 3. **8.** 12. **9.** 14. **10.** 4 кв. од.

Варіант XXVI: **1.** —2; —1. **2.** 0,5; 0,6. **3.** 0,75. **4.** 18 кв. од. **5.** 4. **6.** 3 і 0. **7.** 16. **8.** —2; —1. **9.** 120°; 240°. **10.** 12.

Варіант XXVII: **1.** 135°; 225°. **2.** 24 $см^2$. **3.** 2 і 22 134. **4.** —5 і 3. **5.** —5. **6.** 15. **7.** —1,5. **8.** 1,75. **9.** 2. **10.** 4.

Варіант XVIII: **1.** 20. **2.** —0,4. **3.** 1. **4.** —1, 2. **5.** 4. **6.** —6 і —6. **7.** —0,6. **8.** 0,4 і 0,4. **9.** 5 і 6. **10.** 39 і —39.

ЗМІСТ

Довідкове видання

Єгерев Віктор Костянтинович
Зайцев Володимир Валентинович
Кордемський Борис Анастасійович
Маслова Тамара Миколаївна
Орловська Іраїда Федорівна
Ряховська Галина Сергіївна
Федорова Ніна Михайлівна

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ВСТУПНИКІВ ДО ВТУЗІВ

За редакцією *М. І. Сканаві*

Переклали з російської

Бондарчук Євгенія Володимирівна,
Костриця Юрій Юхимович,
Оніщенко Лідія Павлівна

Оправа художника В. Г. Самсонова
Художній редактор С. В. Анненков
Технічний редактор О. В. Козлітіна
Коректор Н. І. Хоменко

Підписано до друку з матриць 20.10.94. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Папір друк. № 2. Гарнітура літературна. Високий друк. Умов.-друк. арк. 23,52. Умов. фарбовідб. 23,73. Обл.-вид. арк. 34,63. Вид. № 9856. Замовлення № 4—1834.

Видавництво «Вища школа», 252054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7

Головне підприємство республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига», 252057, Київ-57, вул. Довженка, 3

Збірник задач з математики для вступників до
З-41 втузів/В. К. Єгерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський та ін.; За ред. М. І. Сканаві; Пер. з рос.: Є. В. Бондарчук, Ю. Ю. Кострица, Л. П. Оніщенко.— 2-ге вид., стер.— К.: Вища шк., 1994.— 445 с.: іл.
ISBN 5-11-004484-8

Зміст збірника відповідає програмі з математики для вступників до втузів. Він складається з двох частин: «Арифметика, алгебра, геометрія» (частина I) і «Алгебра, геометрія (додаткові задачі). Початки аналізу. Координати і вектори» (частина II). Усі задачі частини I розбито на три групи за рівнем їх складності.

$З\,\frac{160201000-080}{211-94}$ БЗ-29-6-91 ББК 22.1я729