

А. М. Токар

ТЕОРЕТИЧНА

МЕХАНІКА

ДИНАМІКА

МЕТОДИ Й ЗАДАЧІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК



3875-18

531(075)
Т 51

А. М. Токар

ТЕОРЕТИЧНА

МЕХАНІКА

ДИНАМІКА

МЕТОДИ Й ЗАДАЧІ

*Рекомендовано Міністерством освіти
і науки України*

Навчальний посібник
для студентів інженерних спеціальностей
вищих навчальних закладів

НТБ ВНТУ



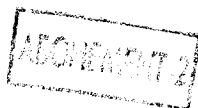
3875-18

531(075)

Т 51

2006

Токар А.М. Теоретична механіка



Київ
"Либідь"
2006

*Розповсюдження й тиражування
без офіційного дозволу видавництва заборонено*

Рецензенти:

доктори технічних наук, професори
М. А. Павловський (Український технічний університет);
О. О. Расказов (Український транспортний університет)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № 14/18.2—129 від 30.01.04)*

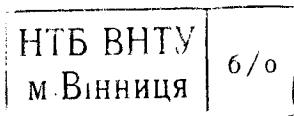
Редакція літератури з природничих і технічних наук
Головний редактор *Т. В. Ковтушенко*
Редактор *А. С. Мищенко*

Токар А. М.

Т51 Теоретична механіка. Динаміка: Методи й задачі: Навч. посібник. — К.: Либідь, 2006. — 440 с.
ISBN 966-06-0404-1.

Викладено динаміку механічного руху. Виділено три методи динаміки: загальних теорем Ньютона, фіктивних сил Д'Аламбера й узагальнених координат Лагранжа для голономних систем. Крім того, розглянуто загальні рівняння Аппеля для неголономних систем. Рівновага вивчається у зв'язку з принципом Д'Аламбера. Практичне застосування методів динаміки проілюстровано на низці прикладних задач механіки.

Для студентів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.



ПЕРЕДМОВА

Теоретична механіка — наука про механічний рух — становить фундамент інженерної технічної освіти. В ній розглядається ньютонівська концепція світу рухів, що спирається на аксіоматику класичної механіки, яку І. Ньютон чітко сформулював у своїй праці «Математичні начала натуральної філософії» (1687). Загальні аксіоми механіки дістали назву фундаментальних законів теоретичної механіки, оскільки на їхній основі розробляються методи дослідження природи механічного руху будь-яких матеріальних тіл, незалежно від їхніх внутрішньої будови, розмірів та форми. З урахуванням методів теоретичної механіки для конкретних реальних матеріальних тіл, які є складовими частинами механізмів і машин, різноманітних споруд, технічних пристроїв і т. д., що є предметом вивчення прикладних наук, розробляються способи дослідження конкретних рухів, специфіка прояву яких залежить від конструктивних особливостей матеріальних тіл у технічних системах.

Пропонований навчальний посібник відповідає сучасній програмі з теоретичної механіки для вищих навчальних закладів, розробленій відомими українськими професорами механіки М. А. Павловським, О. О. Расказовим, А. Т. Улітком. На підставі багаторічного досвіду викладання теоретичної механіки автор дає також своє тлумачення основних положень, теорем та принципів динаміки, начала якої заклали І. Ньютон, Г. Галілей, Ж. Д'Аламбер і Л. Ейлер. Головна мета автора полягала в тому, щоб студент, який опановує курс теоретичної механіки, міг дістати весь потрібний йому програмний теоретичний матеріал з динаміки.

До найважче засвоюваних у динаміці належать принципи віртуальних переміщень, Д'Аламбера й Д'Аламбера—Лаг-

ранжа, а також рівняння Лагранжа. Тому їм приділено особливу увагу. Докладно розглянуто такі фундаментальні поняття механіки, як сили інерції, віртуальні, можливі та дійсні переміщення, а також ідеальні в'язі та віртуальна робота. Викладаючи принцип Д'Аламбера в його сучасному формулюванні, автор спочатку дає своє трактування з використанням так званих утрачених сил.

Для кращого розуміння змісту оберненої задачі динаміки невіільних механічних систем умовно виділено три підходи до висвітлення теорії руху: метод загальних теорем Ньютона, метод Д'Аламбера та метод узагальнених координат Лагранжа. При цьому пояснюється, в яких випадках дослідження руху найдоцільніше застосовувати той чи інший метод. Така методологія викладу матеріалу зумовлена великим внеском зазначених учених у розробку теоретичних положень динаміки.

Автор висловлює щиру подяку члену-кореспондентові НАН України, професорові А. Т. Улітку, докторові технічних наук, професорові М. А. Павловському, заслуженому діячеві науки й техніки України, докторові технічних наук, професорові О. О. Расказову за цінні поради й підтримку.

ВСТУП

Слово «механіка» походить від грецького *mechanike*, що означає: знаряддя, машина. У сучасному розумінні механіка — це наука про механічний рух матеріальних тіл, тобто зміну з часом взаємного положення тіл або їхніх частин у просторі, та про взаємодію між ними. Вона поділяється на прикладну й теоретичну.

Прикладна механіка об'єднує комплекс інженерних дисциплін технічного спрямування — від загальнотехнічних, таких, як теорія механізмів і машин, опір матеріалів, деталі машин, піднімально-транспортні машини тощо, до спеціальних, що формують інженерів технічних галузей.

Теоретичній механіці належить особливе місце серед механічних дисциплін. Вона становить наукову базу прикладної механіки, розробляє для неї загальні методи та прийоми дослідження рівноваги й руху конкретних матеріальних тіл певних форм і розмірів із заданими фізичними властивостями, а також систем матеріальних тіл, конструктивно оформлених у механізм, машину, споруду тощо й призначених для виконання практичних завдань. Отже, теоретична механіка є фундаментальною наукою, оскільки її положення лежать в основі розробки способів розв'язання задач у прикладній механіці. Фундаментальність теоретичної механіки зумовлена також тим, що вона ґрунтується на аксіоматиці Галілея—Ньютона, тобто основних законах класичної механіки.

Складовими частинами теоретичної механіки є статика й динаміка. В статистиці досліджуються абсолютно тверді тіла, що перебувають у стані спокою (рівноваги). В динаміці розглядаються абсолютно тверді тіла та їх системи в русі. Статика належить до стародавніх наук, динаміка ж — наука порівняно молода. Її зародження пов'язують з ім'ям Г. Галілея (XVI—

XVII ст.). Повільний розвиток динаміки був спричинений переважно експериментальними труднощами. Точні прилади для визначення довжин і сил у статиці досить прості й використовувалися ще в давнину. В динаміці, крім цих величин, потрібно вимірювати ще й час. За життя Галілея годинників із балансом і маятникових не було. Тому природно, що через складність вимірювання невеликих інтервалів часу стримувався розвиток динаміки.

Динаміку поділяють на дві частини: кінематику й кінетику. В кінематиці вивчаються геометричні властивості руху без розгляду сил, які спричиняють цей рух, тобто встановлюються способи визначення положення рухомого матеріального тіла в просторі з плином часу. Це основна задача кінематики. В кінетиці визначається характер руху, який дане тіло чи система тіл матиме під дією заданих сил, або сили, необхідні для того, щоб дістати заданий рух, а також рівноважний стан тіла чи системи тіл.

Основи динаміки закладено Г. Галілеєм, який уперше розглянув рух тіл під дією сили ваги й установив закон інерції. Основоположні принципи динаміки були чітко сформульовані І. Ньютоном у вигляді трьох фундаментальних законів механіки та їхніх наслідків: закону інерції (перший закон Ньютона), основного закону динаміки (другий закон Ньютона) і закону рівності дії та протидії (третій закон Ньютона). Перший і другий закони справедливі в так званій абсолютній нерухомій (інерціальній) системі відліку, яка незмінно зв'язана з абсолютно нерухомим простором. Геометричні властивості абсолютно нерухомого простору визначаються аксіомами геометрії Евкліда. Час у класичній механіці також вважається абсолютним.

Подальші розвиток і вдосконалення законів динаміки містяться в працях Л. Ейлера, Ж. Л. Д'Аламбера, Ж. Л. Лагранжа, в яких наведено загальні методи складання рівнянь динаміки. Початок аналітичних методів дослідження рівнянь динаміки заклали Ж. Л. Лагранж, В. Р. Гамільтон і К. Г. Я. Якобі. Пізніше дані методи розвивали К. Ф. Гаусс, М. В. Остроградський, А. Пуанкаре, С. О. Чаплигін, М. Г. Четаєв та ін.

За характером розв'язуваних задач розрізняють динаміку матеріальної точки та динаміку системи матеріальних точок. У систему матеріальних точок входить абсолютно тверде тіло, яке під час дослідження його руху вважають сукупністю матеріальних точок. Поняття «матеріальна точка» є основним у динаміці. Матеріальною точкою називається таке матеріаль-

не тіло, геометричними розмірами якого під час вивчення його руху можна знехтувати, але яке має ту саму кількість речовини, що й реальне матеріальне тіло, котре замінюється моделлю. Перший і другий закони Ньютона в динаміці формулюються лише для однієї матеріальної точки. Абсолютно тверде тіло є моделлю реального матеріального тіла, в якому відстані між будь-якими його точками не змінюються за руху чи рівноваги. Такі модельні тіла дають змогу успішно розв'язувати коло задач, які ставляться в теоретичній механіці, й пов'язані з рухом реальних тіл.

У динаміці розв'язуються дві основні задачі: визначення сил за відомим рухом і визначення руху за відомими силами. Рух однієї матеріальної точки досліджується безпосередньо на підставі другого й третього законів Ньютона. Рух системи матеріальних точок, абсолютно твердого тіла та систем зв'язаних між собою абсолютно твердих тіл досліджується з використанням розроблених у динаміці загальних методів, які містять основні теореми, принципи механіки й рівняння, що впливають із цих принципів. В основі методів динаміки лежать фундаментальні закони механіки Ньютона.

ПРЯМОЛІНІЙНИЙ РУХ

1.1

Закони Ньютона. Основні задачі динаміки

Як уже зазначалось у вступі, закон інерції (перший закон Ньютона) та основний закон динаміки (другий закон Ньютона) стосуються матеріальної точки, тобто безрозмірного тіла з кількістю речовини, яка міститься в реальному тілі, взятому за матеріальну точку; при цьому положення матеріальної точки збігається з центром мас реального тіла, котре замінюється моделлю. Перший і другий закони Ньютона справедливі в абсолютно нерухомій системі відліку, або інерціальній. Означимо дану систему відліку як декартову прямокутну систему координат, незмінно зв'язану з абсолютно нерухомим простором. Найближчою до абсолютно нерухомої системи відліку можна вважати декартову систему координат із початком у центрі мас Сонячної системи й осями, напрямленими до трьох нерухомих зірок на небесній сфері. В інженерній практиці за таку систему відліку з прийнятною точністю можна взяти Землю. Вплив обертання Землі на рухи наземних тіл дуже малий, і в низці інженерних задач ним можна знехтувати. Проте є задачі динаміки, в яких обертання Землі необхідно враховувати. Інерціальною називають систему відліку, що рухається прямолінійно рівномірно відносно абсолютно нерухомої системи.

Надалі замість словосполучення «матеріальна точка» вживатимемо слово «точка».

Спочатку дослідимо кінетику (динаміку) прямолінійного руху точки, тобто визначимо залежність між видом руху точки й силами, що діють на неї. Кінетика ґрунтується на трьох основних законах Ньютона: законі інерції, основному законі динаміки й законі рівності дії та протидії. Ці закони є широким узагальненням спостережень Й. Кеплера за рухом небесних тіл, а також ретельно проведених експериментів із руху земних тіл. Перші достатньо достовірні досліди

були здійснені Г. Галілеєм, який відкрив перші два закони руху точки. І. Ньютон узагальнив ці закони й чітко сформулював їх.

□ **Перший закон Ньютона (закон інерції).** *Кожне тіло відносно абсолютно нерухомої (інерціальної) системи відліку перебуває в стані спокою або прямолінійного рівномірного руху доти, доки прикладені до нього сили не змінять цього стану.* Цей відкритий Г. Галілеєм закон суперечив ученню стародавніх філософів, які стверджували, що для створення прямолінійного рівномірного руху тіла до нього треба постійно прикладати силу в напрямі руху. Натомість спостереження й досвід показують, що швидкість тіла, яке рухається по горизонтальній площині, поступово зменшується й зрештою стає нульовою. Г. Галілей пояснив це дією сил тертя й опору повітря, зі зменшенням яких рух дедалі більше наближатиметься до рівномірного. В ідеальному випадкові, коли опору немає, тіло рухатиметься з постійною швидкістю по прямій лінії. В окремому випадкові, коли швидкість дорівнює нулю й на тіло не діють жодні сили, воно перебуває в абсолютному спокої.

□ **Маса й сила.** Механічний стан тіла, про який ідеться в законі інерції, називають *інерцією*. Це природна властивість усіх матеріальних тіл Усесвіту. Можна стверджувати, що інерція зумовлена двома факторами: наявністю абсолютно нерухомого простору й матеріальністю тіл (тобто кількістю речовини, що міститься в тілі). За Ньютоном, *кількість речовини, що міститься в тілі, називається його масою.*

Завдяки масивності тіла відносно абсолютно нерухомого простору за відсутності впливу на нього інших матеріальних тіл і проявляються його інерційні властивості. Із закону інерції випливає, що для виведення тіла зі стану абсолютного спокою або відхилення його руху від прямолінійного рівномірного відносно абсолютно нерухомого простору потрібен вплив інших матеріальних тіл. *Міру впливу на дане тіло інших матеріальних тіл, унаслідок якого відносно абсолютно нерухомої системи відліку воно виводиться зі стану спокою або його рух відхиляється від прямолінійного рівномірного, назвемо силою.*

Сила є тією причиною, яка порушує інерційний стан ізольованого від зовнішніх впливів тіла (точки). Матеріальне тіло, що перебуває в стані абсолютного спокою, завдяки своїй масі, намагаючися зберегти цей стан, опирається тим силам, які прагнуть вивести його зі стану спокою. Тіло, здійснюючи прямолінійний рівномірний рух, чинить опір силам, які намагаються прискорити прямолінійний рух або зробити його криволінійним.

- Одиниця маси в СІ (Міжнародна система одиниць фізичних величин)
 $m = 1$ кг.

Сила характеризується точкою прикладання в тілі, додатним числовим значенням (модулем) і напрямом дії, що збігається з прямою лінією. Ці три характеристики сили можна виразити однією величиною, яка називається *вектором сили*. Позначатимемо вектори сил латинськими літерами зі стрілочкою, наприклад: \vec{F} — довільна сила; \vec{G} — вага тіла. На схемах вектор сили геометрично зображується напрямленим відрізком, початок якого збігається з тією точкою тіла, до якої сила прикладена, а сам відрізок суміщається з прямою, вздовж якої сила діє; напрям дії сили показується стрілкою на іншому кінці відрізка; довжина відрізка в певному масштабі визначає модуль сили (додатне числове значення). Такий напрямлений відрізок і є вектором сили, або просто силою.

Про одиниці сили йтиметься далі.

□ **Другий закон Ньютона (основний закон динаміки).** *Прискорення точки пропорційне прикладеній до неї силі й напрямлене по прямій у бік дії сили:*

$$a = F/m, \quad (1.1)$$

де $1/m$ — коефіцієнт податливості тіла, взятого за точку. Чим більший цей коефіцієнт, тим більшого прискорення набуває точка під дією сили. Податливість залежить від маси точки: тіла з меншою масою легше змінюють швидкість під дією сили, ніж тіла з більшою масою. Отже, маса тіла характеризує міру його неподатливості до зміни швидкості під дією сили, що намагається змінити цю швидкість. Завдяки масі тіло чинить опір (протидіє) будь-якій зміні його руху. За Ньютоном, рівнодійна всіх сил, з якими точка завдяки своїй масі протидіє тим тілам, котрі намагаються надати їй прискорення, називається *силою інерції точки*. Це сила інерції Ньютона; вона прикладена до тих тіл, які впливають на точку й змінюють її рух.

Основний закон динаміки можна сформулювати ще й так: *прискорення даної точки прямо пропорційне силі, що діє, й обернено пропорційне масі; прискорення й сила напрямлені в один бік по одній прямій*. Із рівняння (1.1) видно, що прискорення точки має силове походження, хоча, виводячи його, силовий вплив на точку не розглядали, а лише використовували геометричні властивості руху, які є результатом дії сил. Річ у тім, що кінематична формула прискорення виводиться за результатом силового впливу, що виявляється у створенні того чи іншого виду руху. Прискорення точки чисельно дорівнює силі, яка діє на одиницю маси точки.

Рівняння (1.1) можна записати в такому вигляді:

$$ma = F. \quad (1.2)$$

Це основне рівняння динаміки: *добуток маси точки на її абсолютне прискорення дорівнює рівнодійній усіх сил, прикладених до точки; напрямки прискорення й рівнодійної сил збігаються.*

В основному законі Ньютона нічого не сказано про рух точки до того, як на неї подіяла сила. Прискорення, спричинене даною силою, не залежить від руху точки. Певна сила, прикладена до точки, спричиняє однакове прискорення незалежно від того, перебуває точка у спокої чи рухається, а також незалежно від напрямку руху. Так само в зазначеному законі не відображено кількість сил, що діють на точку. В разі дії на точку кількох сил кожна з них надаватиме такого самого прискорення, якого вона надавала б, діючи самостійно. Звідси випливає, що сумарне прискорення точки дорівнює геометричній сумі тих прискорень, котрі створюються окремо кожною із сил, які на неї діють. Оскільки прискорення, спричинюване кожною силою, напрямлене в бік дії сили й пропорційне їй, то сумарне прискорення буде напрямлене в бік рівнодійної сил і пропорційне їй.

Для дослідження руху однієї точки достатньо скористатися першим і другим законами Ньютона. Якщо розглядається система точок або абсолютно тверде тіло, треба брати до уваги сили взаємодії між точками та частинками, з яких складається тіло. Ці сили взаємодії визначаються третім законом Ньютона (законом рівності дії та протидії).

□ **Досліди Галілея.** Розглянемо, як Галілей відкрив основний закон динаміки. Він досліджував вільне падіння й довів, що прямолінійний рух тіла під дією сили ваги є рівноприскореним із прискоренням вільного падіння, за модулем однаковим для всіх тіл у даному місці Землі, незалежно від їхньої маси. Дослідним шляхом Галілей дістав числове значення: $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Отже, постійна сила спричинює постійне прискорення. Висновки, зроблені Галілеем, пізніше були підтверджені Ньютоном за допомогою численних ретельних дослідів, в яких він використовував маятники, виготовлені з різних матеріалів.

Аби вповільнити рівноприскорений рух для полегшення вимірювань коротких інтервалів часу, Галілей скористався рухом тіла по похилій площині (рис. 1.1). Він визначив, що прискорення тіла при цьому (рис. 1.1, a)

$$a = g \sin \alpha.$$

Звідси випливає: якщо $\alpha = \pi/2$, то відбувається вільне падіння тіла; при $\alpha = 0$ тіло рухається прямолінійно рівномірно по горизонталь-

ній площині з нульовим прискоренням. У дослідах Галілея було вжито заходів для максимального зменшення сил тертя. Щоб визначити силу, яка надає прискорення a , тіло вагою G зрівноважується

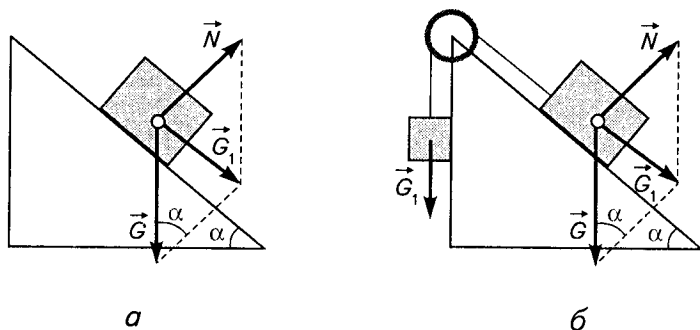


Рис. 1.1

вантажем, вага якого G_1 (рис. 1.1, б). За відсутності сил тертя зрівноважувальна сила

$$G_1 = G \sin \alpha.$$

Із наведених формул

$$a = \frac{G_1}{G/g}.$$

Якщо в цьому рівнянні G_1 замінити на F , а відношення G/g вважати масою m , то прийдемо до основного закону динаміки (1.2). Для вільного падіння точки на підставі (1.2) матимемо

$$G = mg. \quad (1.3)$$

Вага тіла на поверхні Землі або поблизу неї (на невеликій висоті) дорівнює добутку маси тіла на прискорення вільного падіння, середнє значення якого на рівні моря й для широти 45° становить $g = 9,80665 \text{ м/с}^2$.

● Одиниця сили визначається з основного закону динаміки (1.2). У СІ

$$F = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = 1 \text{ Н}.$$

□ **Третій закон Ньютона (закон рівності дії та протидії).** Кожній дії відповідає рівна за модулем і протилежно напрямлена протидія, або взаємодії двох тіл завжди рівні за модулем і протилежні за напрямом.

Якщо одне тіло тисне на інше, то воно, своєю чергою, зазнає тиску з боку іншого тіла з рівною за значенням, але протилежно на-

прямою силою. Якщо перше тіло притягує друге, яке розташоване на деякій відстані, то друге притягує перше з такою самою за значенням, але протилежно напрямленою силою. Наприклад, Сонце притягує Землю з певною силою, Земля ж, своєю чергою, притягує Сонце з точно такою силою. Все це характерне не лише для сил притягання, а й для будь-яких інших (магнітних, електричних або контактних). Магніт притягує залізо не сильніше, ніж залізо притягує магніт.

□ **В'язі та їхні реакції.** Щоб рівняння другого закону Ньютона (1.2) можна було застосовувати до довільного прямолінійного руху точки, необхідно ввести поняття в'язей (зв'язків). *В'язі у вузькому розумінні — це здебільшого конструктивно виконані пристрої, функціональне призначення яких полягає в забезпеченні руху точки, незалежно від сил, що діють на неї, в обмеженій наперед заданій області простору по заздалегідь заданій прямій чи криволінійній траєкторії або поверхні, зокрема плоскій.* В'язями можуть бути нерозтягливі гнучкі нитки, канати, ланцюги, невагомні жорсткі стержні, ідеально відполіровані гладкі та шорсткі поверхні абсолютно твердих тіл, сферичні ідеальні шарніри тощо.

В'язі, накладені на точку, обмежують її положення й рух. У деяких випадках необхідно описати в'язі, накладені на точку, математично у вигляді рівнянь, що пов'язують декартові координати й, можливо, час. У разі руху точки під дією заданих сил її координати мають задовольняти рівняння в'язей — додаткові до динамічних рівнянь руху, що випливають з основних законів Ньютона.

Якщо на точку накладено в'язі, то її називають *невільною*. Приклад — вагома точка масою m , підвішена до кінця невагомного жорсткого стержня завдовжки L , другий кінець якого шарнірно закріплений у точці O (рис. 1.2).

Стержень у цьому разі є в'яззю для точки й змушує її займати положення лише в точках сферичної поверхні радіусом L , не сходити з неї. Траєкторія й характер руху точки по сфері залежатимуть від її початкової швидкості та сили, що діє на неї. Якщо стержень відхилити від вертикального положення на кут α й полишити на самого себе, то під дією активної сили — сили ваги \vec{G} — система здійснюватиме коливальний рух, за якого траєкторією точки буде коло радіусом L із центром у точці O .

Інший приклад — тіло масою m , яке прикріплене до кінця горизонтальної циліндричної пружини й знаходиться на горизонтальній

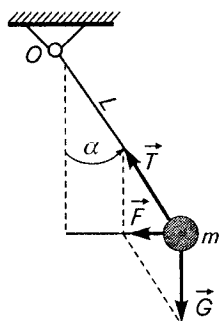


Рис. 1.2

ідеально гладкій поверхні; лівий кінець пружини прикріплений до нерухомої вертикальної основи (рис. 1.3).

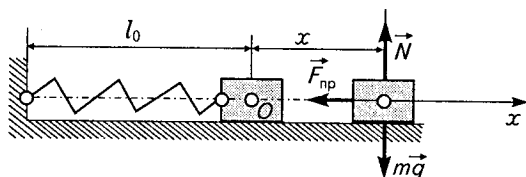


Рис. 1.3

У недеформованому стані довжина пружини становить l_0 . Якщо видовження пружини буде x , то на тіло, крім сили ваги $m\vec{g}$, діятиме сила пружності пружини

$$F_{\text{пр}} = cx,$$

де c — жорсткість пружини (сила, що видовжує пружину на одиницю довжини). Ці дві сили належать до заданих (активних). В'язю, накладеною на тіло, в цьому разі є горизонтальна ідеально гладка поверхня.

На рис. 1.1, *a*, *б* в'язями, накладеними на тіло, що знаходиться на похилій площині, є сама похила площина й невагома нерозтяглива нитка, до якої прикріплено вантаж вагою \vec{G} . Як приклад в'язі розглянемо вантаж 2, підвішений до невагомої нерозтягливої нитки, перекинutoї через нерухомий блок 1, що може обертатися навколо горизонтальної осі, яка проходить через його центр ваги O (рис. 1.4). Для тіла 2 в'язю є нитка, на якій воно висить. Заданою (активною) силою, що діє на тіло 2, є його вага \vec{G}_2 .

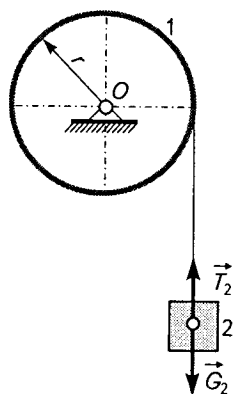


Рис. 1.4

На поршень 1 кривошипно-шатунного механізму (рис. 1.5) накладено в'язі: стінки циліндра (штриховкою показано горизонтальні напрямні), шатун AB . До активних сил, які діють на поршень 1, належать тиск газів на дно поршня \vec{Q} та вага поршня \vec{G} .

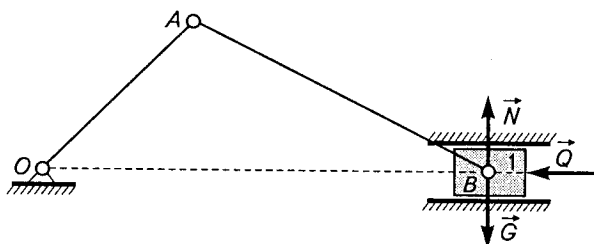


Рис. 1.5

Тепер введемо поняття *реакцій в'язей*. Невільна точка взаємодіє з в'язями відповідно до закону рівності дії та протидії. Якщо силовий вплив точки на в'язь ми назвемо дією, то протидію в'язі називатимемо її силою реакції \vec{F}_p . Сили реакцій належать до пасивних, оскільки вони породжуються рухом або дією активних сил. Характерною ознакою реакцій в'язей є те, що вони заздалегідь невідомі, на відміну від активних сил. Реакції в'язей можуть бути визначені лише після того, як на підставі відповідних рівнянь динаміки досліджено рух матеріальних тіл.

Ідеально гладка поверхня (див. рис. 1.1, 1.3) дає реакцію \vec{N} , нормальну до поверхні. Якщо стержень невагомий і з шарнірами на кінцях (див. рис. 1.2), то його реакція \vec{T} напрямлена вздовж стержня. Шатун із шарнірами на кінцях (див. рис. 1.5) має вагу й тому він дає реакцію, яка вже не напрямлена вздовж осі шатуна. Реакція нитки \vec{T} на рис. 1.1 б, 1.4 діє вздовж нитки.

□ **Аксиома про паралелограм сил.** Досліджуючи рух точки на підставі законів динаміки, необхідно враховувати всі силові впливи на неї: активні сили й реакції в'язей. За другим законом Ньютона рівнодійна всіх сил, прикладених до точки, надає їй прискорення, яке має напрям рівнодійної. Для знаходження рівнодійної сил, прикладених до точки, застосовується *аксіома механіки (правило паралелограма сил) про додавання сил* (рис. 1.6, а): *рівнодійна двох сил, прикладених до точки, зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах*. Математично це записується так:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.4)$$

Рівнодійна двох сил, прикладених в одній точці, дорівнює векторній сумі цих сил.

Легко побачити, що ту саму за модулем і напрямом рівнодійну можна знайти, якщо сили \vec{F}_1 , \vec{F}_2 вважати вільними векторами й із

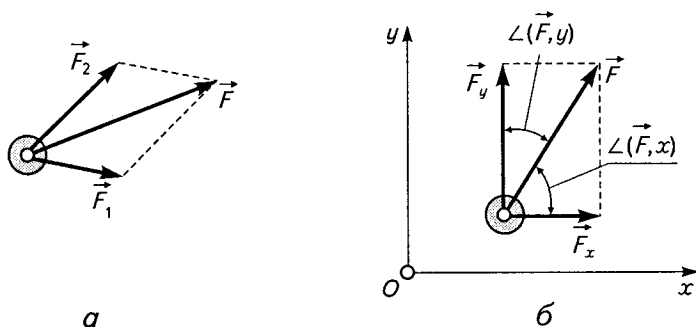


Рис. 1.6

них побудувати ламану, що має дві сторони з напрямками сил, після чого сполучити вільні кінці ламаної вектором, напрям якого протилежний напрямку сторін ламаної, якщо рухатися по контуру утвореного трикутника. Такий вектор буде рівнодієюю сил, замикальною стороною силового трикутника. Це правило силового трикутника.

У разі кількох сил на площині зі спільною точкою прикладання замість силового трикутника матимемо силовий багатокутник, що складається з ламаної лінії і замикальної сторони, яка є рівнодієюю. Математично силовий багатокутник подається у вигляді векторної рівності

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_k.$$

За правилом паралелограма знайдено рівнодійну \vec{G}_1 сили ваги \vec{G} і нормальної реакції \vec{N} похилої площини (див. рис. 1.1, а, б). На рис. 1.2 у відхиленому положенні маятника побудовано рівнодійну \vec{F} сил \vec{G} , \vec{T} , яку в разі малих кутів можна вважати майже горизонтальною. Це дає змогу за малих кутів відхилення замінити рух по дузі кола рухом по горизонтальній прямій (задача про малі коливання маятника).

З аксіоми про паралелограм сил випливає, що рівнодійна колінеарних сил одного напрямку має цей самий напрям і за модулем дорівнює сумі модулів складових сил. Звідси дістаємо також рівнодійну колінеарних сил протилежних напрямів, модуль якої дорівнює різниці їхніх модулів, а напрям збігається з напрямом сили, більшої за модулем.

Якщо сили утворюють прямий кут, то паралелограм сил стає прямокутником. У цьому разі сили називаються прямокутними складовими рівнодійної сил, що є діагоналлю прямокутника сил.

Якщо прямокутні складові \vec{F}_x , \vec{F}_y сили \vec{F} паралельні декартовим осям Ox , Oy , то їхні алгебричні значення F_x , F_y називаються проєкціями сили \vec{F} на декартові осі Ox , Oy відповідно (рис. 1.6, б). З цього рисунка дістаємо значення проєкцій:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \angle(\vec{F}, x), \\ F_y &= F \cos \angle(\vec{F}, y). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Проекції сили на декартові осі дорівнюють добутку модуля сили на косинус кута між напрямом сили й додатними напрямками відповідних декартових осей. Проекції сили є скалярами — модулями відповідних прямокутних складових, паралельних декартовим осям, взятих зі знаком «+» або «-» залежно від того, збігається напрям складової з додатним напрямом осі чи протилежний цьому напрямові: «+» — напрями збігаються, «-» — напрями протилежні.

Якщо кожному із сил \vec{F}_1, \vec{F}_2 (рис. 1.6, а, б) замінити складовими по осях Ox, Oy , а також це саме зробити з їх рівнодійною \vec{F} , то, застосувавши зроблені вище висновки з аксіоми про паралелограм сил, матимемо **теорему про проекцію рівнодійної**: *проекція рівнодійної сил, прикладених до однієї точки, на декартові осі дорівнює сумі проекцій окремих сил на ці самі осі*. Отже, можемо записати для кількох сил:

$$\begin{aligned} F_x &= \sum F_{kx}, \\ F_y &= \sum F_{ky}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де $F_{kx} = F_k \cos \angle(\vec{F}_k, x)$, $F_{ky} = F_k \cos \angle(\vec{F}_k, y)$.

□ **Диференціальне рівняння прямолінійного руху точки.** За прямолінійного довільного руху точки її прискорення напрямлене вздовж прямолінійної траєкторії, і якщо з цією траєкторією суміщено яку-небудь декартову вісь, наприклад Ox , то прискорення

$$a = \ddot{x}. \quad (1.7)$$

За прискореного руху, що відбувається в додатному напрямі осі Ox , згідно з другим законом Ньютона, рівнодійна, що спричинює дане прискорення, також має напрям цієї осі. Отже, приходимо до диференціального рівняння прямолінійного руху:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}. \quad (1.8)$$

Теорема про проекцію рівнодійної на іншу декартову вісь Ox приводить до такого додаткового рівняння:

$$\sum F_{ky} = 0, \quad (1.9)$$

яке дає змогу визначити невідому реакцію в'язі, наприклад нормальну реакцію у випадках руху тіла по шорсткій плоскій поверхні.

□ **Пряма та обернена задачі динаміки прямолінійного руху точки.** Нехай довільний прямолінійний рух точки відбувається під дією заданих сил і реакцій в'язей, накладених на точку. Знайшовши рівнодійні заданих сил і реакцій в'язей за правилом силового многокутника, дістаємо

$$\vec{F}_a = \sum \vec{F}_{ak}, \quad \vec{F}_{p.v} = \sum \vec{F}_{p.vk},$$

де індекс «а» вказує, що сили належать до активних (заданих), а індекс «р.в» позначає реакції в'язей. Тоді замість (1.8) і (1.9) матимемо такі рівняння:

$$m\ddot{x} = F_{ax} + F_{p.vx}, \quad \sum (F_{akx} + F_{p.vkx}) =$$

ІТБ ВІТМ	10
м. Вінниця	6/0
	17

Диференціальне рівняння (1.8) або (1.10) дає змогу за відомим кінематичним рівнянням прямолінійного руху $x = x(t)$ визначити рівнодійну \vec{F} усіх сил, прикладених до точки. За рівнодійною можна знайти лише модулі двох сил, якщо за умовою їхні лінії дії заздалегідь відомі, а решта складових сил наперед задані. Це *пряма задача динаміки*. Якщо за рівнодійною \vec{F} сил, прикладених до точки, знаходиться рівняння прямолінійного руху $x = x(t)$, то це *обернена задача динаміки*.

Зрозуміло, що обернена задача пов'язана з інтегруванням диференціального рівняння другого порядку. Після інтегрування диференціального рівняння прямолінійного руху дістають загальний розв'язок, в який входять дві сталі інтегрування C_1, C_2 . Щоб із загального розв'язку знайти частинний, треба задати початкові дані руху — значення лінійної координати й швидкості точки в початковий момент часу, який часто беруть за нульовий.

Введемо початкові дані руху:

$$(x)_{t=t_0} = x_0, \quad (\dot{x})_{t=t_0} = \dot{x}_0 = v_0.$$

Загальний розв'язок записується у вигляді

$$x = x(C_1, C_2, t), \quad (1.11)$$

і додається перша похідна за часом від цього розв'язку

$$\dot{x} = \dot{x}(C_1, C_2, t). \quad (1.12)$$

Ці два співвідношення після підставлення в них початкових даних руху перетворюються на систему двох алгебричних рівнянь для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 :

$$\begin{aligned} x_0 &= f_1(C_1, C_2, t_0), \\ \dot{x}_0 &= f_2(C_1, C_2, t_0). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Визначивши звідси C_1, C_2 , дістають залежності «відстань—час» і «швидкість—час» для прямолінійного руху:

$$\begin{aligned} x &= x(x_0, \dot{x}_0, t), \\ \dot{x} &= \dot{x}(x_0, \dot{x}_0, t). \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.2

Загальні теореми динаміки прямолінійного руху точки

У деяких випадках загальні теореми динаміки спрощують розв'язання оберненої задачі динаміки. Для випадку прямолінійного руху точки розглядаються дві загальні теореми динаміки: 1) про зміну кількості руху; 2) про зміну кінетичної енергії. Зазначені теореми є наслідками диференціального рівняння прямолінійного руху точки.

Застосування першої теореми до систем точок, що перебувають у прямолінійних рухах і взаємодіють між собою за певного співвідношення між силами, що діють на систему, дає безпосередньо залежності між швидкостями точок або залежності між їх переміщеннями. Такі залежності називаються законом збереження кількості руху системи точок. Застосування другої теореми до так званих потенціальних сил дає закон збереження повної механічної енергії, який пов'язує швидкість і переміщення. Закони збереження кількості руху й кінетичної енергії називають першими інтегралами диференціальних рівнянь руху.

□ **Кількість руху, імпульс сили.** Якщо точка масою m у прямолінійному русі в довільний момент часу має швидкість $v = \dot{x}$, то кажуть, що в цей момент часу вона має **кількість руху** q , яка визначається добутком маси точки на швидкість. Тоді можемо записати

$$q = m\dot{x}. \quad (1.15)$$

Із формули (1.15) видно, що кількість руху точки має напрям її швидкості й тим більша, чим більші маса й швидкість точки.

● Одиниця кількості руху матеріальної точки в СІ

$$q = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Якщо постійна сила F напрямлена вздовж прямолінійної траєкторії, по якій рухається точка, й діє на неї протягом інтервалу часу $\Delta t = t - t_0$, де t_0 — початковий момент часу, то за цей інтервал часу точка дістає імпульс від силового впливу, який виражається у зміні кількості руху. Чим триваліша дія постійної сили на точку й чим більша за модулем сама сила, тим більшої кількості руху набуває точка. **Добуток сили на час її дії називається імпульсом сили** S . Тоді можемо записати

$$S = F\Delta t = F(t - t_0). \quad (1.16)$$

За нульового початкового моменту ($t_0 = 0$)

$$S = Ft. \quad (1.17)$$

- Одиниця імпульсу сили в СІ

$$S = 1 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

У випадку, коли прямолінійний рух точки спричинюється дією кількох постійних за модулем і напрямом сил — як заданих (активних), так і реакцій в'язей, рівнодійна цих сил \vec{F} як замикальна сторона силового многокутника, сторони якого є даними силами, напрямлена по прямолінійній траєкторії — осі Ox . Імпульс рівнодійної в цьому разі визначатиметься формулами (1.16), (1.17). Зрозуміло, що колінеарні прямолінійній траєкторії складові сили роблять свій внесок у загальний імпульс рівнодійної, а інші нормальні до траєкторії складові сил не впливають на його значення.

Підсумовуємо: імпульс рівнодійної всіх сил, прикладених до точки в її прямолінійному русі, дорівнює сумі імпульсів проєкцій усіх цих сил на декартову вісь Ox , яка збігається з прямолінійною траєкторією точки. Математично це записується так:

$$S = Ft = \sum F_{kx} t. \quad (1.18)$$

Якщо на точку в прямолінійному русі діють змінні сили, то замість формули (1.18) застосовується інша, яка враховує зміну як за модулем, так і напрямом кожної із сил, що діють на точку:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} F dt = \int_{t_0}^{t_1} (\sum F_{kx}) dt = \sum \int_{t_0}^{t_1} F_{kx} dt. \quad (1.19)$$

Тут інтеграл $\int_{t_0}^{t_1} F_{kx} dt$ позначимо через S_k і назвемо імпульсом колінеарної траєкторії k -ї складової сили. Тому можемо записати

$$S = \sum S_k.$$

□ **Теорема про зміну кількості руху точки.** Ньютон надав основному закону динаміки загального характеру й сформулював його так: похідна за часом від кількості руху точки дорівнює рівнодійній усіх сил, прикладених до цієї точки. Отже,

$$\frac{d(m\dot{x})}{dt} = \sum F_{kx}.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на елементарний інтервал часу dt , дістанемо

$$d(m\dot{x}) = \sum F_{kx} dt.$$

Беремо інтеграли в лівій і правій частинах цього диференціального співвідношення в межах зміни $m\dot{x}$ від $m\dot{x}_0$ до $m\dot{x}_1$, що відповідають межах зміни незалежної змінної, якою є час t , від t_0 до t_1 :

$$\int_{m\dot{x}_0}^{m\dot{x}_1} d(m\dot{x}) = \sum \int_{t_0}^{t_1} F_{kx} dt.$$

Інтеграл під знаком суми назвемо імпульсом проекції F_{kx} сили \vec{F}_k на вісь Ox , що збігається з прямолінійною траєкторією точки, й позначимо його S_{kx} . Матимемо

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{kx} dt = S_{kx}.$$

Застосувавши формулу Лейбніца та врахувавши введenu величину, дістаємо математичний вираз шуканої теореми:

$$m\dot{x}_1 - m\dot{x}_0 = \sum S_{kx}. \quad (1.20)$$

Зміна кількості руху точки в прямолінійному русі за скінченний інтервал часу дорівнює сумі імпульсів проекцій усіх сил, прикладених до точки, на напрям прямолінійної траєкторії, який визначається додатним напрямом осі Ox , за цей самий інтервал часу.

□ **Кінетична енергія, механічна робота.** Ми розглянули векторну міру прямолінійного руху — кількість руху точки. Скалярною мірою руху є кінетична енергія точки, за Лейбніцем, її жива сила.

Введемо поняття кінетичної енергії точки. Якщо точка масою m відносно абсолютно нерухомої системи відліку (декартової системи координат із початком у центрі мас Сонячної системи або системи осей, незмінно зв'язаних із Землею, якщо знехтувати її власним обертальним рухом) має в прямолінійному русі в певний момент часу t швидкість \dot{x} , то в цей самий момент часу скалярною мірою руху точки буде її **кінетична енергія T , або «жива» сила, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:**

$$T = m\dot{x}^2/2. \quad (1.21)$$

- Одиниця кінематичної енергії в СІ

$$T = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = 1 \text{ Дж}.$$

У загальному випадкові руху точки вздовж прямолінійної траєкторії кінетична енергія змінюється. Ця зміна залежить як від сили, прикладеної до точки, так і від переміщення точки. Мірою зміни кінетичної енергії є механічна робота. Якщо сила F , яка діє на точку, постійна й напрямлена вздовж траєкторії руху точки, а точка переміщується з початкового положення x_0 в яке-небудь кінцеве положення x_1 , то **механічною роботою A** буде добуток сили на переміщення точки з початкового положення в кінцеве:

$$A = F \Delta x = F(x_1 - x_0). \quad (1.22)$$

Графік постійної сили в осях «сила—відстань» є прямою лінією, паралельною осі відстані (рис. 1.7). За однакових напрямів сили й переміщення робота додатна, за протилежних — від'ємна.

- Одиниця роботи в СІ

$$A = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ Дж}.$$

Із формули (1.22) випливає, що графічно (рис. 1.7) робота зображується площею прямокутника, обмеженого графіком сили, переміщення й ординатами сили на початку й наприкінці переміщення.

Якщо деякі сили з числа тих, що діють на точку в прямолінійному русі, утворюють певні кути з траєкторією, то, обчислюючи роботу таких сил, треба брати їхні прямокутні складові, паралельні переміщенню точки прикладання сил. Наприклад, якщо одна із сил \vec{F}_k утворює з переміщенням кут $\angle(\vec{F}_k, \Delta x)$, то робота цієї сили

$$A_k = F_k (x_1 - x_0) \cos \angle(\vec{F}_k, \Delta x). \quad (1.23)$$

Робота постійної сили, яка з переміщенням точки її прикладання утворює певний кут, дорівнює добуткові модулей сили та переміщення на косинус кута між напрямом сили й переміщення. Зрозуміло, що робота рівнодійної сил дорівнює сумі робіт складових сил.

Тепер визначимо роботу змінної сили, прикладеної до точки в прямолінійному русі. Взявши нескінченно мале переміщення dx точ-

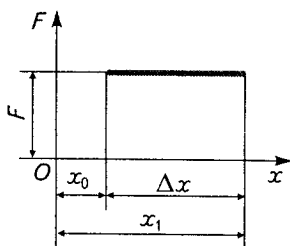


Рис. 1.7

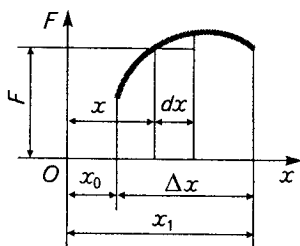


Рис. 1.8

ки прикладання сили \vec{F} , матимемо елементарну роботу $dA = F dx$, яка на графіку (рис. 1.8) зображується прямокутною смужкою заввишки dx і завшишки F . Підсумувавши нескінченно велику кількість таких нескінченно малих площ смужок, дістанемо площу криволінійної трапеції

$$A_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F dx, \quad (1.24)$$

обмеженої згори графіком сили, з боків — прямолінійними відрізками, довжини яких — значення сили на початку й наприкінці переміщення, а знизу — віссю абсцис. Отже, *робота змінної сили дорівнює визначеному інтегралові від елементарної роботи сили, взятому вздовж дуги кривої, описаної точкою прикладання сил на переміщенні від x_0 до x_1 .*

□ **Теорема про зміну кінетичної енергії точки в прямолінійному русі.** Виведемо цю теорему з диференціального рівняння прямолінійного руху точки

$$m\ddot{x} = F.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на диференціал dx і подавши другу похідну за часом від абсциси як першу похідну від швидкості, дістанемо

$$m\dot{x} d\dot{x} = F dx,$$

або

$$d(m\dot{x}^2/2) = F dx.$$

Далі зінтегруємо обидві частини у відповідних межах:

$$\int_{\dot{x}_0^2}^{\dot{x}_1^2} d\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = \int_{x_0}^{x_1} F dx;$$

$$\frac{m\dot{x}_1^2}{2} - \frac{m\dot{x}_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x_1} F dx.$$

Інтеграл у правій частині останньої рівності — робота рівнодійної всіх сил, прикладених до точки, на скінченному переміщенні $x_1 - x_0$. Замінімо роботу рівнодійної сумою робіт усіх сил, що діють на точку. Дістанемо остаточний вираз для теореми про зміну кінетичної енергії точки в прямолінійному русі:

$$\frac{m\dot{x}_1^2}{2} - \frac{m\dot{x}_0^2}{2} = \sum A_k, \quad (1.25)$$

де

$$A_k = \int_{x_0}^{x_1} F_{kx} dx$$

— робота окремої сили з числа тих, що прикладені до точки; тут обчислюється робота проєкцій сил на вісь Ox . Згідно з виразом (1.25) формулюємо теорему: *зміна кінетичної енергії точки на її скінченному переміщенні дорівнює сумі робіт усіх сил на цьому переміщенні.*

□ **Закони збереження кількості руху й механічної енергії системи точок.** Розглянемо систему точок, кожна з яких перебуває в прямолінійному русі паралельно деякій нерухомій осі Ox . Сили взаємодії точок у системі за законом рівності дії та протидії називаються *внутрішніми силами*. Сили, що діють на точки системи з боку матеріальних тіл, які не належать до системи, називаються *зовнішніми силами*. Позначимо рівнодійну всіх внутрішніх сил, що діють на окрему точку масою m_i , яка належить до системи, через $F_{вi}$, а рівнодійну всіх зовнішніх сил — \vec{F}_{zi} .

До кожної точки системи застосуємо теорему про зміну кількості руху (1.20):

$$m\dot{x}_{i1} - m\dot{x}_{i0} = (\sum S_{kx})_i.$$

Тепер візьмемо суму всіх записаних для точок системи рівностей:

$$\sum (m\dot{x}_{i1} - m\dot{x}_{i0}) = \sum (\sum S_{kx})_i.$$

Суму імпульсів усіх сил, прикладених до i -ї точки, замінимо двома рівнодійними — імпульсів внутрішніх сил $S_{вix}$ і імпульсів зовнішніх сил S_{zix} . Тоді попереднє співвідношення переписється так:

$$\sum (m\dot{x}_{i1} - m\dot{x}_{i0}) = \sum (S_{вix} + S_{zix})$$

або

$$\sum m\dot{x}_{i1} - \sum m\dot{x}_{i0} = \sum S_{вix} + \sum S_{zix}.$$

Внутрішні сили за третім законом Ньютона — це сукупність пар рівних за модулем і протилежно напрямлених сил, тому перша сума в правій частині дорівнює нулю. Отже,

$$\sum m\dot{x}_{i1} - \sum m\dot{x}_{i0} = \sum S_{zix}. \quad (1.26)$$

Зміна кількості руху системи точок у прямолінійному русі за скінченний інтервал часу дорівнює сумі проєкцій імпульсів усіх зовнішніх сил, прикладених до точок системи, на вісь Ox , паралельно якій відбувається рух точок.

Якщо зовнішні сили такі, що сума їх проекцій на вісь Ox , яка означає додатний напрям на прямолінійній траєкторії, протягом скінченного інтервалу часу дорівнює нулю, то кількість руху системи точок на цьому інтервалі часу не змінюється:

$$\sum m\dot{x}_{1i} - \sum m\dot{x}_{0i} = 0. \quad (1.27)$$

В цьому й полягає *закон збереження кількості руху системи точок*.

Перш ніж перейти до розгляду закону збереження механічної енергії, введемо поняття потенціальних сил і потенціальної енергії. *Потенціальними силами*, що діють на точку, називатимемо такі сили, які залежать лише від положення точки (наприклад, сила пружності пружини, сила тяжіння тощо). У разі дії на точку потенціальних сил кожне положення точки, в якому вона перебуває в своєму русі, характеризується особливою скалярною величиною (функцією положення), яка називається *потенціальною енергією точки в даному її положенні*.

Спочатку вибирають положення точки, в якому потенціальна енергія нульова. Це положення (або сукупність таких положень) називається нульовим. Щоб визначити потенціальну енергію точки в якомусь іншому, відмінному від нульового, положенні обчислюють роботу потенціальних сил із переміщення точки з даного положення, в якому визначають потенціальну енергію, в нульове. Знайдена робота й буде потенціальною енергією точки в даному положенні.

Потенціальну енергію точки позначимо через P . Тоді в нульовому положенні $P_0 = 0$, а в якому-небудь положенні 1 буде P_1 . Тепер, щоб визначити роботу $A_{1,2}$ з переміщення точки з першого положення в яке-небудь інше, де потенціальна енергія P_2 , треба спочатку знайти роботу $A_{0,1}$ з переміщення з нульового положення в перше й роботу $A_{0,2}$ з переміщення з нульового положення в друге, після чого взяти різницю знайдених робіт, що відповідають першому й другому положенням, і привіняти до шуканої величини:

$$A_{1,2} = A_{0,1} - A_{0,2}.$$

Проте за означенням потенціальної енергії маємо

$$P_2 = A_{0,2}, \quad P_1 = A_{0,1}.$$

У лівій частині цієї рівності роботу $A_{1,2}$ замінимо приростом кінетичної енергії при переході з першого положення в друге відповідно до теореми про зміну кінетичної енергії точки (1.25). Матимемо

$$\frac{m\dot{x}_2^2}{2} - \frac{m\dot{x}_1^2}{2} = P_1 - P_2,$$

звідки остаточно дістаємо *закон збереження механічної енергії для однієї точки*:

$$\frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \Pi_1 = \frac{m\dot{x}_2^2}{2} + \Pi_2. \quad (1.28)$$

За руху точки під дією потенціальних сил сума кінетичної і потенціальної енергій залишається незмінною. Сума кінетичної та потенціальної енергій називається *механічною енергією*.

Закон збереження механічної енергії (1.28) для однієї точки можна поширити на систему точок, які перебувають під впливом лише потенціальних сил. *Кінетичною енергією системи точок* називається арифметична сума кінетичних енергій її окремих точок:

$$T = \sum \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}.$$

Потенціальною енергією системи точок в даному її положенні називається робота потенціальних сил з переміщення системи з нульового рівня, де потенціальна енергія нульова, в дане положення. Позначимо потенціальну енергію системи в першому й другому її положеннях через Π_1, Π_2 відповідно, а кінетичну енергію — T_1, T_2 . Тоді закон збереження механічної енергії запишеться у вигляді

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2. \quad (1.29)$$

За руху системи точок під дією потенціальних сил сума кінетичної і потенціальної енергій системи зберігається незмінною.

Зауважимо, що цей закон виконується в ідеальному випадкові, коли немає різного роду сил тертя. Якщо рух супроводжується тертям, то втрата механічної енергії точно дорівнює роботі сил тертя. Втрачена внаслідок механічної роботи сил тертя механічна енергія перетворюється в теплову. Робота сил тертя є мірою кількості теплової енергії, яка виділилася за рахунок втрати частини механічної енергії.

РУХ ТОЧКИ ПО КОЛУ

2.1

Рівномірний рух точки по колу

Нехай маємо точку масою m , яка перебуває в рівномірному русі по колу радіусом R . Такий рух, як ви вже знаєте, є прискореним із доцентровою складовою. Наведемо конкретний приклад колового руху точки.

Металева кулька, яка знаходиться на добре відшліфованій горизонтальній поверхні стола, прив'язана до одного кінця невагомої нерозтягливої нитки, а інший кінець цієї нитки через нитяне кільце насаджений на вертикальний цвях, жорстко закріпленій на столі. Якщо нитку на столі випрямити й штовхнути кульку в перпендикулярному до нитки напрямі, то дістанемо рівномірний рух її по колу з деякою постійною за модулем швидкістю \vec{v} . Зміна цієї швидкості за напрямом характеризується доцентровим прискоренням $\vec{a}_{\text{доц}}$, яке відповідно до основного закону динаміки надається кульці доцентровою силою $\vec{F}_{\text{доц}}$. Отже, можна записати

$$m\vec{a}_{\text{доц}} = \vec{F}_{\text{доц}}. \quad (2.1)$$

Розглянемо детальніше динаміку колового руху кульки. Завдяки масі (вродженій силі інерції) кульки й малому впливові неінерціальної системи відліку, якою є Земля, кулька за законом інерції намагатиметься продовжувати рух у напрямі поштовху й, таким чином, діючи на в'язь — нитку, розтягує її із силою інерції кульки \vec{F}_i , яку Ньютон назвав відцентровою силою. Своєю чергою, нитка за законом рівності дії та протидії перешкоджає відхиленню кульки від колової траєкторії, діючи на неї з доцентровою силою $\vec{F}_{\text{доц}}$, що надає кульці за другим законом Ньютона доцентрового прискорення $\vec{a}_{\text{доц}}$.

Отже, під час взаємодії нитки й кульки в її коловому русі виникають дві сили: реакція нитки \vec{T}_n і сила інерції кульки (ньютонівська сила інерції) \vec{F}_i . Оскільки природа останньої пов'язана з уродженни-

ми інерційними властивостями кульки, тобто масою, то сила інерції кульки є первинною щодо реакції нитки.

Завдяки своїм інерційним властивостям кулька здатна зберігати набуту швидкість незмінною відносно абсолютно нерухомого простору. Отже, потрібна зовнішня сила, яка протидіяла б опору кульки вимушеній зміні її швидкості. Мірою цього опору й є сила інерції кульки \vec{F}_i , яка залежить від її маси й від того, наскільки інтенсивно сила, що діє на кульку ззовні, змінює її швидкість. Векторне значення сили інерції кульки визначається за формулою

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_{\text{доц}}.$$

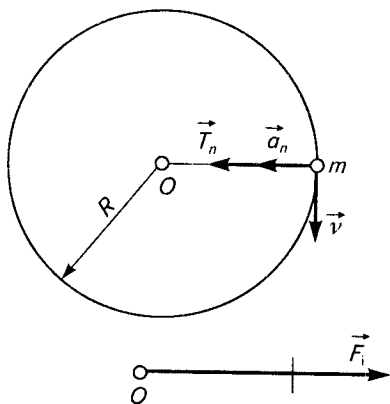


Рис. 2.1

Ця сила діє з боку кульки на нитку й створює її натяг. Сила натягу нитки прикладена до нитки й напрямлена від центра, тому вона називається *відцентровою*, а реакція нитки діє на кульку й спричинює доцентрове прискорення, тому називається *доцентровою*. Схему взаємодії кульки й нитки за рівномірного руху кульки по колу наведено на рис. 2.1.

Згідно із законом рівності дії та протидії доцентрова й відцентрова сили — реакція нитки й сила натягу — однакові за модулем, але протилежно напрямлені й прикладені до різних тіл:

$$\begin{aligned} \vec{T}_n &= -\vec{F}_i, \\ T_n &= F_i = m \frac{v^2}{R}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Зазначимо, що в розглядуваному випадку на кульку діє також активна сила — сила її власної ваги; вона зрівноважується нормальною реакцією стола (тертя не враховується). В даному прикладі реакція в'язі зумовлена рухом, тому вона називається динамічною.

У загальному випадкові дії сил до точки в її коловому русі (рівномірному) прикладаються рівнодійна кількох активних сил \vec{F}_a та рівнодійна кількох реакцій в'язей $\vec{F}_{p.v.}$. Тому основний закон динаміки запишеться у вигляді

$$m\vec{a}_n = \vec{F}_n = \vec{F}_a + \vec{F}_{p.v.} \quad (2.3)$$

Добуток маси точки на її доцентрове прискорення дорівнює рівнодійній усіх сил — як активних, так і реакцій в'язей (рівнодійна має однаковий напрям із доцентровим прискоренням).

Застосування рівняння (2.3) розглянемо на прикладі конічного маятника — важкої кулі, підвішеної на нерозтягливій невагомій нитці, верхній кінець якої прикріплено, скажімо, до стелі (рис. 2.2). Якщо кулю з ниткою відвести від вертикалі й надати їй швидкості \vec{v} перпендикулярно до площини, в якій знаходяться нитка й вертикаль, то надалі куля рухатиметься так, що нитка описуватиме конічну поверхню, а центр ваги кулі рухатиметься рівномірно по колу, центр якого C , зі швидкістю \vec{v} , яка надана кулі від самого початку. При цьому площина кола буде горизонтальною.

Рівномірний рух кулі по горизонтальному колу відбувається з доцентровим прискоренням \vec{a}_n , яке надається доцентровою силою — рівнодійною \vec{F}_n двох сил, прикладених до кулі: активної сили, якою є сила ваги \vec{G} , і реакції нитки \vec{T} . Тоді згідно з рівнянням динаміки рівномірного руху по колу (2.3)

$$m\vec{a}_n = \vec{F}_n = \vec{G} + \vec{T}.$$

Можна дати інше пояснення динаміці рівномірного руху кулі в розглядуваному випадку. Силу ваги кулі \vec{G} вважатимемо рівнодійною двох сил: сили \vec{F} , напрямленої до центра кола, і сили \vec{N} , що напрямлена по нитці, на якій висить куля, протилежно реакції нитки \vec{T} (рис. 2.3).

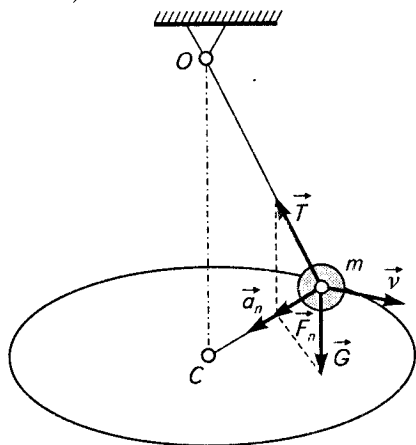


Рис. 2.2

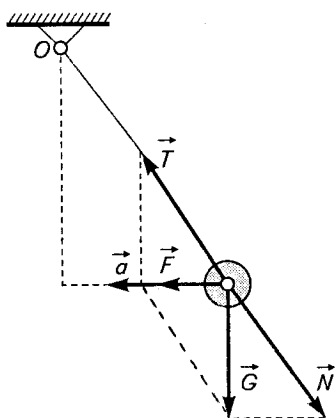


Рис. 2.3

Застосуємо принцип незалежності дії сил, згідно з яким кожна із сил (рис. 2.3) надає кулі такого прискорення, якого вона надавала б,

якби діяла одна без впливу інших сил. Маємо

$$m\bar{a} = \bar{F},$$

$$m\bar{a}_T = \bar{T},$$

$$m\bar{a}_N = \bar{N},$$

$$m\bar{a} + m\bar{a}_T + m\bar{a}_N = \bar{F} + \bar{T} + \bar{N},$$

$$m(\bar{a} + \bar{a}_T + \bar{a}_N) = \bar{F} + \bar{T} + \bar{N},$$

$$m\bar{a}_n = \bar{F}_n.$$

Звідси випливає, що $\bar{a}_T + \bar{a}_N = 0$. Отже, $\bar{T} = -\bar{N}$ і $\bar{F} = \bar{F}_n$.

Сила \bar{N} є силою натягу нитки й прикладена до нитки в місці з'єднання її з кулею. З боку нитки внаслідок розтягу її силою \bar{N} , своєю чергою, виникає інша сила, відмінна від реакції нитки, але за модулем і напрямом рівна їй. Ця сила, як і реакція нитки, належить до сил міжмолекулярної взаємодії. Дану силу \bar{N} , яка в безпосередній близькості до кулі зрівноважується на в'язі осьювою внутрішньою силою нитки, за Д'Аламбером, називають *втраченою*. Для загального випадку дії сил позначимо втрачену силу через $\bar{F}_{\text{втр}}$ і знайдемо вираз для неї. З умови

$$\bar{G} = \bar{F}_n + \bar{F}_{\text{втр}}$$

дістаємо

$$\bar{F}_{\text{втр}} = \bar{G} - \bar{F}_n = \bar{G} - m\bar{a}_n.$$

Робимо висновок, що в розглядуваному випадкові руху одна складова ваги — доцентрова сила — надає прискорення кулі, а інша її складова — втрачена сила — справляє динамічний тиск на в'язь.

Цей висновок справедливий для загального випадку руху невільної точки під дією будь-яких активних сил. Добуток маси точки на її вектор прискорення називається *рушійною силою*:

$$F_{\text{руш}} = m\bar{a}. \quad (2.4)$$

Позначимо рівнодійну всіх активних сил, прикладених до точки, через \bar{F}_a . Тоді динамічний тиск точки на в'язь визначатиметься векторною рівністю

$$\bar{F}_{\text{втр}} = \bar{F}_a - \bar{F}_{\text{руш}}. \quad (2.5)$$

У прикладі з рухом кульки по горизонтальній площині (див. рис. 2.1) втрачена сила

$$\bar{F}_{\text{втр}} = -m\bar{a}_n = -\frac{mv^2}{R} \bar{n} = \bar{F}_i.$$

Це й є сила інерції Ньютона — динамічний тиск на в'язь (сила натягу нитки). Реакція нитки \vec{T}_n прикладена до кульки й надає їй доцентрового прискорення $\vec{a}_{\text{доц}}$. Ця сила відіграє роль рушійної й є тією єдиною силою, яка реально діє на кульку.

Зрозуміло, якщо втрачена сила для точки дорівнює нулю, то це означає відсутність динамічного тиску на в'язь або просто відсутність в'язі. Наприклад, у разі вільного падіння тіла втрачена сила дорівнюватиме нулю:

$$\vec{F}_{\text{втр}} = \vec{G} - m\vec{g} = m\vec{g} - m\vec{g} = 0.$$

У задачі з коловим рухом кульки по горизонтальній поверхні стола (див. рис. 2.1) втрачена сила

$$\vec{F}_{\text{втр}} = -m\vec{a}_n = -mv^2/R$$

є силою інерції \vec{F}_i , яка намагається розтягнути нитку.

Отже, за рівномірного колового руху точки спостерігається сумарно гра двох сил — доцентрової, яка є рівнодійною як активних сил, так і реакцій в'язей і діє на точку, надаючи їй доцентрового прискорення, а також відцентрової, що за модулем дорівнює доцентровій, але за напрямом протилежна їй і діє сумарно на ті тіла, які є джерелами всіх активних сил і реакцій в'язей.

Відцентрова сила зумовлена інерційними властивостями точки, що рухається по колу, і сумарно виражається взятим зі знаком «-» добутком маси точки на її доцентрове прискорення, тобто $\vec{F}_{\text{доц}} = -m\vec{a}_{\text{доц}}$. Із даної формули видно, що доцентрова сила, або сила інерції, пов'язана з двома факторами — вродженою силою інерції (за Ньютоном), мірою якої є маса, і зміною швидкості — прискоренням. Справді, оскільки

$$m = F_i / a_{\text{доц}},$$

то маса точки (міра вродженої сили інерції тіла) чисельно дорівнює значенню сили інерції за одиничного прискорення точки.

Вроджена сила інерції, тобто маса, в динамічних явищах проявляє себе у виникненні сили інерції, яка більша за вроджену силу інерції в a разів.

Зазначимо, що в практичному аспекті важливе поняття втраченої сили — різниці між рівнодійною активних сил і рушійною силою:

$$\vec{F}_{\text{втр}} = \vec{F}_a - m\vec{a}. \quad (2.6)$$

Позначивши сумарний динамічний тиск на в'язі через \vec{Q} , дістанемо формулу динамічного тиску на в'язі:

$$\vec{Q} = \vec{F}_a - m\vec{a}. \quad (2.7)$$

2.2

Довільний рух точки по колу

За рівномірного руху точки по колу її прискорення є доцентровим і відповідно до основного закону динаміки спричинюється доцентровою силою. В рівнозмінному, а також довільному русі точки по колу її абсолютне прискорення має дві прямокутні складові: доцентрову

$$\vec{a}_{\text{доц}} = \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

і тангенціальну (дотичну)

$$\vec{a}_{\text{дот}} = a_{\tau} \vec{\tau}$$

Для рівномірного руху алгебричне значення доцентрового прискорення не змінюється. Однак довільний рух точки по колу, на відміну від рівномірного, характеризується змінним дотичним прискоренням — як за модулем, так і за напрямом:

$$a_{\tau} = \ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Нехай маємо невідільний рух точки масою m , на яку діють рівнодійна всіх активних сил \vec{F}_a і рівнодійна всіх реакцій в'язей $\vec{F}_{p.v}$. Рівнодійна цих сил

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_{p.v}$$

надає точці прискорення

$$\vec{a} = a_{\tau} \vec{\tau} + a_n \vec{n}$$

Застосуємо основний закон динаміки для даного випадку руху з урахуванням того, що абсолютне прискорення точки й рівнодійна сил, що діють на неї, є векторними величинами. Дістанемо

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{2.8}$$

Зазначимо, що векторне рівняння (2.8) має загальний характер. Воно справедливе не лише для колових рухів точки, а й для будь-яких криволінійних рухів як вільної, так і невідільної точки.

Замість одного векторного рівняння (2.8) можна записати два скалярних. Для цього алгебризуємо його, попередньо розклавши всі сили, які діють на матеріальну точку, в напрямках ортів $\vec{\tau}$, \vec{n} :

$$\vec{F} = F_{\tau} \vec{\tau} + F_n \vec{n} = (F_{a\tau} + F_{p\tau}) \vec{\tau} + (F_{an} + F_{p,n}) \vec{n}$$

Підставивши розклади векторів прискорення й рівнодійної сил по ортах в основне рівняння (2.8), після відповідних математичних перетворень приходимо до такого результату:

$$\{ma_{\tau} - (F_{a_{\tau}} + F_{p.v_{\tau}})\}\bar{\tau} + \{ma_n - (F_{a_n} + F_{p.v_n})\}\bar{n} = 0.$$

Звідси випливають шукані скалярні рівняння руху точки за її довільного руху по колу:

$$\begin{aligned} ma_{\tau} &= F_{a_{\tau}} + F_{p.v_{\tau}}, \\ ma_n &= F_{a_n} + F_{p.v_n}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

ДОВІЛЬНИЙ КРИВОЛІНІЙНИЙ РУХ ТОЧКИ

3.1

Диференціальні рівняння руху точки в проекціях на дотичну й головну нормаль

Виведемо основне рівняння динаміки (основний закон динаміки) для невільної точки. Нехай невільна точка масою m перебуває в довільному криволінійному русі, в якому траєкторія точки наперед відома, під дією активних сил з їх рівнодійною \vec{F}_a і реакцій в'язей з їх рівнодійною $\vec{F}_{p.v}$; ці дві сили дають рівнодійну \vec{F} (рис. 3.1). Тоді другий закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

запишеться у вигляді

$$m\vec{a} = \vec{F}_a + \vec{F}_{p.v}. \quad (3.1)$$

Це основне рівняння динаміки невільної точки.

Розкладемо кожен із сил, що діють на матеріальну точку, і зазначені вище їх рівнодійні на складові вздовж дотичної й головної нормалі (рис. 3.1). Матимемо

$$\vec{F}_\tau = \vec{F}_{a\tau} + \vec{F}_{p.v\tau}, \quad \vec{F}_n = \vec{F}_{an} + \vec{F}_{p.vn}.$$

Тоді на підставі принципу незалежності дії сил дотичне прискорення спричинюється рівнодійною дотичною силою, а нормальне прискорення — рівнодійною нормальною силою. Отже, маємо два векторних рівняння

$$m\vec{a}_\tau = \vec{F}_\tau = \vec{F}_{a\tau} + \vec{F}_{p.v\tau},$$

$$m\vec{a}_n = \vec{F}_n = \vec{F}_{an} + \vec{F}_{p.vn}$$

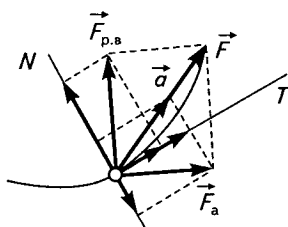


Рис. 3.1

або відповідні їм скалярні рівняння

$$\begin{aligned} ma_{\tau} &= F_{\tau} = F_{a\tau} + F_{p.v\tau}, \\ ma_n &= F_n = F_{an} + F_{p.vn}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Іноді корисно додати третє скалярне рівняння

$$0 = F_b = F_{ab} + F_{p.vb}, \quad (3.3)$$

що виражає рівновагу сил у напрямі, перпендикулярному до площини, в якій лежать дотичне й нормальне прискорення. Ця площина називається *спрямною*. Додатний напрям по перпендикуляру до спрямної площини встановлюється вибором так званої бінормалі, початок якої збігається з точкою. Дотична AT , головна нормаль AN і третя вісь — бінормаль AB орієнтовані так само, як і права декартова система осей Ox , Oy , Oz відповідно.

Скористаємося формулами ((2.24), див. [5]) і подамо рівняння динаміки (3.2) криволінійного руху точки в натуральній формі або в натуральних осях:

$$\begin{aligned} \frac{m\dot{s}^2}{\rho} &= F_{a\tau} + F_{p.v\tau}, \\ m\ddot{s} &= F_{an} + F_{p.vn}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

За допомогою диференціальних рівнянь (3.4) можна визначати динамічні реакції в'язей, якщо рух точки відомий і активні сили, що діють на неї, задані. Це так звана пряма (перша) задача динаміки. Як відомо, втрачені сили — це тиски на в'язь. Із рівнянь (3.4) маємо дотичну й нормальну втрачені сили:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\tau \text{ втр}} &= F_{a\tau} - m\dot{s}^2/\rho, \\ \bar{F}_{n \text{ втр}} &= F_{an} - m\ddot{s}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обернена (друга) задача динаміки точки на підставі рівнянь (3.4) розв'язується, якщо за відомими активними силами й початковими даними руху — значеннями в початковий момент часу t_0 дугової координати s_0 та алгебричної швидкості \dot{s}_0 — потрібно знайти кінематичне рівняння руху точки $s = s(t)$, а також реакції в'язей $F_{p.v\tau}$, $F_{p.vn}$, $F_{p.vb}$. Якщо з динамічних рівнянь (3.4) попередньо вдалося вилучити невідомі реакції в'язей, то далі задача розв'язується інтегруванням цих рівнянь, в які входять задані сили й невідома дугова координата точки.

3.2

Диференціальні рівняння руху точки в декартових координатах

Розглянемо рух точки масою m під дією заданих сил і реакцій в'язей відносно абсолютно нерухомої декартової системи координат $Oxyz$. Позначимо рівнодійну всіх заданих сил, прикладених до точки, через \vec{F}_a , а рівнодійну реакцій в'язей — через $\vec{F}_{p.v}$ (рис. 3.2).

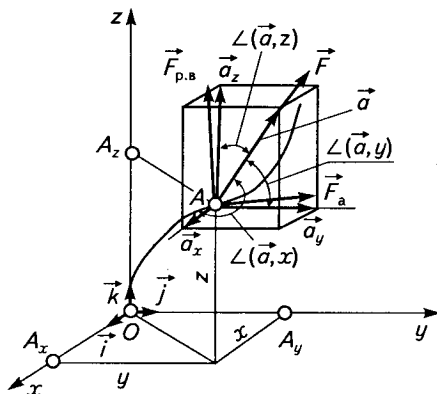


Рис. 3.2

Тепер, розклавши вектор прискорення \vec{a} на прямокутні складові $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ в напрямі декартових осей і відповідно сили $\vec{F}_a, \vec{F}_{p.v} = \vec{F}_{ax}, \vec{F}_{ay}, \vec{F}_{az}, \vec{F}_{p.v.x}, \vec{F}_{p.v.y}, \vec{F}_{p.v.z}$, а також скориставшись принципом незалежності дії сил, в алгебричних величинах, тобто в проекціях на декартові осі, матимемо динамічні рівняння руху матеріальної точки в декартових координатах:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ax} + F_{p.v.x}, \\ m\ddot{y} &= F_{ay} + F_{p.v.y}, \\ m\ddot{z} &= F_{az} + F_{p.v.z}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Використовуючи динамічні рівняння (3.6), можна розв'язувати пряму й обернену задачі динаміки точки. Розв'язуючи пряму задачу за відомими кінематичними рівняннями руху точки в декартових координатах (формули (2.37), див. [5]), визначають сумарну рівнодійну

активних сил і реакцій в'язей. Беручи до уваги властивості в'язей, накладених на точку, знаходять усі сили, що діють на неї.

Розв'язуючи обернену задачу, попередньо за відомими властивостями в'язей із динамічних рівнянь (3.6) вилучають реакції в'язей, після чого, задавшись початковими даними руху й знаючи модулі та напрями активних сил, інтегруванням позбавлених реакцій в'язей диференціальних рівнянь дістають кінематичні рівняння руху. Зазначимо, що зінтегрувавши систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку, дістають загальний розв'язок, в який входять незалежна змінна — час і шість сталих інтегрування:

$$\begin{aligned}x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Щоб дістати частинний розв'язок, використовують початкові дані руху точки — значення її декартових координат і перших похідних від цих координат за часом:

$$\begin{aligned}(x)_{t=t_0} &= x_0, (y)_{t=t_0} = y_0, (z)_{t=t_0} = z_0; \\(\dot{x})_{t=t_0} &= \dot{x}_0, (\dot{y})_{t=t_0} = \dot{y}_0, (\dot{z})_{t=t_0} = \dot{z}_0.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Отже, маємо сім числових даних, у тому числі початковий момент часу, який часто вибирається нульовим; їх підставляють у загальний розв'язок (3.7) і в перші похідні за часом від загального розв'язку:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Урахувавши початкові дані руху, одержують систему шістьох алгебричних рівнянь із шістьма невідомими сталими інтегруваннями. Ці загальні алгебричні рівняння матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\y_0 &= y_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\z_0 &= z_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ \dot{x}_0 &= \dot{x}_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{y}_0 &= \dot{y}_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{z}_0 &= \dot{z}_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Знайдені з цих рівнянь сталі інтегрування підставляють у загальний розв'язок (3.7). У результаті дістають частинний розв'язок:

$$\begin{aligned}x &= x(t, t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\y &= y(t, t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\z &= z(t, t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Зауважимо, що сили, які діють на точку, визначають певний клас її рухів із заданим прискоренням. Траєкторія, координати й швидкість окремих рухів, що належать до даного класу, залежать від початкових даних руху. Завершується розв'язання оберненої задачі відшуканням реакцій в'язей.

ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

4.1

Поступальний рух тіла

Тіло як система точок. Внутрішні й зовнішні сили.

Закон інерції та основний закон динаміки, як уже зазначалося, були сформульовані Ньютоном стосовно точки. Щоб на підставі основного закону динаміки вивести рівняння динаміки поступального руху тіла, треба попередньо мислено поділити його на багато частинок, розміри кожної з яких дуже малі порівняно з розмірами самого тіла. Тоді частинки, на які поділено тіло, беруться за точки. Отже, замість тіла, що здійснює поступальний рух, розглядається рух системи точок.

Сили взаємодії між точками системи називаються *внутрішніми*. Ці сили відповідають закону рівності дії та протидії. Крім внутрішніх сил, на точки системи (тіла) діють сили з боку тих тіл, які не належать до системи, наприклад сили тяжіння точок. Такі сили називаються *зовнішніми* щодо тіла (системи).

Нехай маса тіла становить M , а маси точок (частинок), на які поділено тіло, — $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k, \dots, m_N$. Надалі маси точок системи записуватимемо як m_k , де $k = 1, 2, 3, \dots, N$ — номер точки в системі. Позначимо рівнодійні всіх внутрішніх і зовнішніх сил, що діють на точку з номером k , через $\vec{F}_{\text{в}k}$ і $\vec{F}_{\text{з}k}$ відповідно.

□ **Векторне рівняння динаміки поступального руху тіла.** Сили $\vec{F}_{\text{в}k}, \vec{F}_{\text{з}k}$, що діють на точку з номером k , маса якої m_k , надають їй відносно абсолютно нерухомої системи відліку прискорення \vec{a}_k . Для взятої точки системи запишемо основне рівняння динаміки у векторній формі:

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_{\text{в}k} + \vec{F}_{\text{з}k}.$$

При $k = 1, 2, 3, \dots, N$ матимемо N векторних рівнянь, що описують динаміку руху системи точок, а отже, й тіла, рух якого розглядається.

Зауважимо, що дана система рівнянь справедлива в разі дослідження руху тіла в загальному випадкові, а не лише за поступального руху.

Тепер векторно додамо ліві й праві частини всіх рівностей, кількість яких дорівнює числу точок у системі. В результаті замість системи рівнянь матимемо одне сумарне векторне рівняння

$$\sum_{k=1}^N m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{bk} + \sum_{k=1}^N \vec{F}_{zk}. \quad (4.1)$$

Усі внутрішні сили — сили взаємодії між частинками тіла — можна поділити на пари рівних за модулем і протилежно напрямлених сил (закон рівності дії та протидії). Отже, перша сума в правій частині (4.1) дорівнює нулю, $\sum_{k=1}^N \vec{F}_{bk} = 0$, а друга, що є векторною сумою всіх

зовнішніх сил, прикладених до тіла, називається *головним вектором зовнішніх сил*. Позначимо його через \vec{R}_z . Тоді можна записати

$$\vec{R}_z = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{zk}. \quad (4.2)$$

Для поступального руху тіла дістаємо

$$\sum_{k=1}^N m_k \vec{a}_k = \vec{a} \sum_{k=1}^N m_k = M\vec{a}. \quad (4.3)$$

Покажемо, що прискорення \vec{a} має особлива геометрична точка C , яка називається *центром мас тіла*. Ліву частину рівності (4.3) подамо у вигляді

$$\sum_{k=1}^N m_k \vec{a}_k = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k \right).$$

Тут суму добутків мас точок на їхні радіуси-вектори можна прирівняти до добутку маси тіла на радіус-вектор геометричної точки, яка й є центром мас тіла (центр мас тіла збігається з центром його ваги):

$$\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_C.$$

Тоді після диференціювання дістаємо векторну рівність

$$\sum_{k=1}^N m_k \vec{a}_k = M\vec{\ddot{r}}_C. \quad (4.4)$$

Порівнявши праві частини (4.3) і (4.4), доходимо висновку, що прискорення тіла в поступальному русі дорівнює прискоренню його

центра мас, $\vec{a} = \vec{r}_C = \vec{a}_C$. Підставивши (4.4) і (4.2) в (4.1), дістаємо шукане векторне рівняння динаміки поступального руху тіла

$$M\vec{a}_C = \vec{R}_n. \quad (4.5)$$

За поступального руху тіла добуток його маси на вектор прискорення центра мас дорівнює вектору прикладеної в цьому центрі рівнодійної всіх зовнішніх сил, що діють на тіло.

Для точки масою m , яка рухається з прискоренням \vec{a} під дією сили \vec{F} , що є рівнодійною всіх сил, прикладених до точки, другий закон Ньютона (основний закон динаміки), як відомо, виражається векторним рівнянням

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Зіставивши (4.5) із цим рівнянням, бачимо, що вигляд рівнянь динаміки поступального руху тіла й основного закону динаміки точки однаковий.

□ **Диференціальні рівняння поступального руху тіла.** Відповідно до (4.5) записуємо систему трьох диференціальних рівнянь поступального руху тіла в проєкціях на декартові осі:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= R_{3x}, \\ m\ddot{y}_C &= R_{3y}, \\ m\ddot{z}_C &= R_{3z}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Алгебричні значення прямокутних складових векторів прискорення центра мас і рівнодійної зовнішніх сил, які діють на тіло,

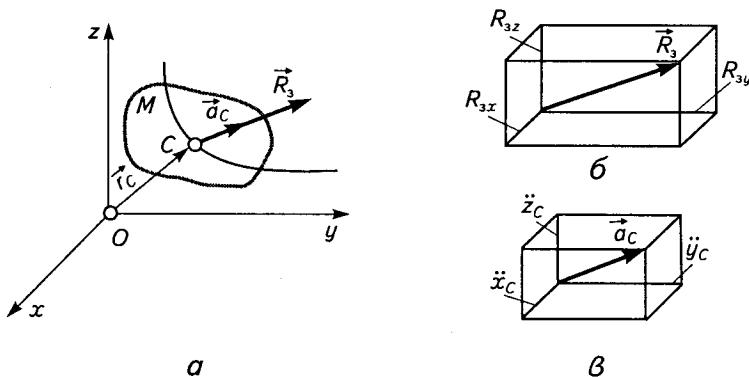


Рис. 4.1

зображено на рис. 4.1 б, в відповідно (окремо від основної схеми рис. 4.1, а). Так само, як і для руху точки, формулюються пряма та обернена задачі динаміки поступального руху тіла (відповідні величини позначаються індексом С).

Підсумовуючи, зазначимо, що динаміка точки й динаміка поступального руху тіла досліджуються за допомогою одних і тих самих диференціальних рівнянь. Однак треба зважати на те, що у випадку поступального руху зовнішні сили можуть бути прикладені в різних точках тіла, а їх рівнодійна — в центрі мас. Отже, *тіло в поступальному русі береться за точку, яка збігається з його центром мас і має таку саму масу, як тіло; в центрі мас до точки прикладена сила, яка дорівнює рівнодійній усіх зовнішніх сил, що діють на тіло.*

4.2

Теорема про зміну кількості руху точки в криволінійному русі й тіла — в поступальному русі

Розглянемо криволінійний рух невідільної точки масою m відносно абсолютно нерухомої системи відліку (рис. 4.2, а). Нехай на точку в цьому русі діють задані сили (активні), рівнодійна яких \vec{F}_a . Вплив в'язей на точку характеризується їхніми реакціями, рівнодійна яких $\vec{R}_{p.a}$. Ці дві сили — рівнодійна заданих сил і рівнодійна реакцій в'язей — у сукупній своїй дії на точку надають їй у поточний момент часу t прискорення \vec{a} . Рух точки в розгля-

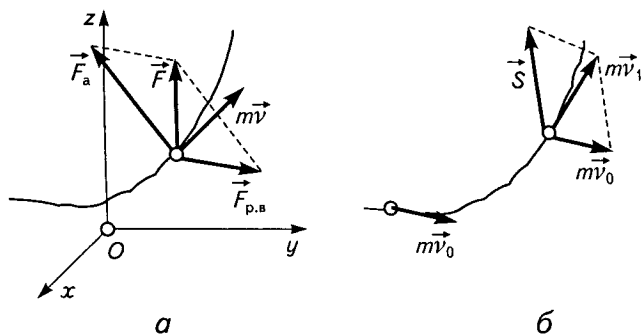


Рис. 4.2

дуваному випадкові описується векторним рівнянням, що виражає основний закон динаміки:

$$m\bar{a} = \bar{F}_a + \bar{F}_{p.a.}$$

Замінімо тут прискорення похідною за часом від швидкості:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

і введемо масу під знак похідної. Матимемо

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}_a + \bar{F}_{p.v.}, \quad (4.7)$$

де $m\bar{v}$ — кількість руху точки в криволінійному русі в поточний момент часу. Кількість руху — векторна величина, яка дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості й напрямлена по дотичній до траєкторії в той самий бік, що й швидкість (рис. 4.2, а).

Рівність (4.7) називають **теоремою про зміну кількості руху точки в диференціальній формі**: похідна за часом від кількості руху точки дорівнює рівнодійній усіх сил, що діють на точку, — як заданих, так і реакцій в'язей.

На підставі принципу незалежності дії сил можна замість одного векторного рівняння (4.7) записати три скалярних:

$$\frac{d(m\dot{x})}{dt} = F_{ax} + F_{p.vx}, \quad \frac{d(m\dot{y})}{dt} = F_{ay} + F_{p.vy}, \quad \frac{d(m\dot{z})}{dt} = F_{az} + F_{p.vz}. \quad (4.8)$$

Похідна за часом від алгебричного значення прямокутної складової кількості руху точки в напрямі декартової осі дорівнює сумі алгебричних значень прямокутних складових усіх сил, що діють на точку в напрямі цієї самої декартової осі. Згадаймо, що алгебричне значення прямокутної складової якого-небудь вектора в напрямі декартової осі називається проекцією цього вектора на цю саму декартову вісь.

Алгебричні формули (4.8) виражають теорему про зміну кількості руху точки в проєкціях на декартові осі в диференціальній формі. Щоб перейти до інтегральної (скінченної) форми, розглянемо два положення точки в криволінійному русі: початкове, якому відповідає початковий момент часу t_0 , і кінцеве, якому відповідає момент часу t_1 (рис. 4.2, б). За скінченний інтервал часу $\Delta t = t_1 - t_0$ відбувається відповідна зміна як вектора кількості руху $\Delta m\bar{v} = m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0$, так і його прямокутних складових у напрямках декартових осей:

$$\Delta m\dot{x} = m\dot{x}_1 - m\dot{x}_0, \quad \Delta m\dot{y} = m\dot{y}_1 - m\dot{y}_0, \quad \Delta m\dot{z} = m\dot{z}_1 - m\dot{z}_0.$$

Ці скінченні зміни кількості руху й відповідних його прямокутних складових спричиняються не силами, а їхніми імпульсами, які враховують векторний характер сил і тривалість їхньої дії на точку в

її криволінійному русі. Залежність між змінами кількостей руху та імпульсами сил визначимо на підставі (4.7), (4.8), зінтегрувавши у відповідних межах:

$$d(m\vec{v}) = (\vec{F}_a + \vec{F}_{p.v.}) dt = \vec{F}_a dt + \vec{F}_{p.v.} dt;$$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} d(m\vec{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_a dt + \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{p.v.} dt;$$

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_a dt + \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{p.v.} dt.$$

Інтегралі в правих частинах є імпульсами відповідно активних сил і реакцій в'язей за скінченний інтервал часу $t_1 - t_0$. Позначивши їх через \vec{S}_a , $\vec{S}_{p.v.}$ відповідно, матимемо

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \vec{S}_a + \vec{S}_{p.v.}, \quad (4.9)$$

де

$$\vec{S}_a = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_a dt, \quad \vec{S}_{p.v.} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{p.v.} dt.$$

Векторна рівність (4.9) виражає *теорему про зміну кількості руху точки в інтегральній формі*: зміна кількості руху точки за скінченний інтервал часу дорівнює сумі імпульсів активних сил і реакцій в'язей за цей самий інтервал часу.

Запишемо рівність (4.9) у вигляді

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_0 + \vec{S}_a + \vec{S}_{p.v.} = m\vec{v}_0 + \vec{S}.$$

Звідси бачимо (рис. 4.2, б), що скінченна кількість руху точки дорівнює векторній сумі початкової кількості руху й повного імпульсу всіх сил, які діють на точку за інтервал часу від його початкового моменту до кінцевого. Мірою зміни кількості руху є імпульс сил.

Зінтегрувавши решту скалярних рівностей, дістаємо теорему про зміну прямокутних складових (4.8) кількості руху в напрямках декартових осей:

$$m\dot{x}_1 - m\dot{x}_0 = \int_{t_0}^{t_1} F_{a,x} dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{p.v.,x} dt,$$

$$m\dot{y}_1 - m\dot{y}_0 = \int_{t_0}^{t_1} F_{a,y} dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{p.v.,y} dt, \quad (4.10)$$

$$m\dot{z}_1 - m\dot{z}_0 = \int_{t_0}^{t_1} F_{a,z} dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{p.v.,z} dt.$$

Введемо позначення:

$$S_x = \int_{t_0}^{t_1} F_{a,x} dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{p,v,x} dt, \quad S_y = \int_{t_0}^{t_1} F_{a,y} dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{p,v,y} dt, \quad S_z = \int_{t_0}^{t_1} F_{a,z} dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{p,v,z} dt.$$

Тоді остаточно дістаємо три скалярні рівності, які виражають *теорему про зміну прямокутних складових кількості руху в напрямках декартових осей*:

$$\begin{aligned} m\dot{x}_1 - m\dot{x}_0 &= S_x, \\ m\dot{y}_1 - m\dot{y}_0 &= S_y, \\ m\dot{z}_1 - m\dot{z}_0 &= S_z. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Зміна прямокутних складових кількості руху точки в напрямках декартових осей за скінченний інтервал часу дорівнює прямокутним складовим повного імпульсу всіх сил, що діють на точку в напрямках декартових осей за цей самий інтервал часу.

Зазначимо, що векторні й скалярні рівняння, які виражають теорему про зміну кількості руху точки як в диференціальній, так і в інтегральній формі, справедливі також для поступального руху тіла. Треба лише зважати на таке: кількість руху та його зміни стосуються центра мас тіла в припущенні, що в ньому зосереджена вся маса тіла, а також що до цього центра прикладена рівнодійна всіх сил, які діють на тіло. Запишемо аналогічні рівняння для поступального руху тіла у векторній формі

$$m\vec{v}_{C1} - m\vec{v}_{C0} = \vec{S}_{a,z} + \vec{S}_{p,v,z}, \tag{4.12}$$

і скалярній (у проекціях на декартові осі)

$$\begin{aligned} m\dot{x}_{C1} - m\dot{x}_{C0} &= S_{z,x}, \\ m\dot{y}_{C1} - m\dot{y}_{C0} &= S_{z,y}, \\ m\dot{z}_{C1} - m\dot{z}_{C0} &= S_{z,z}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Тут індекс C позначає центр мас тіла, а індекс « z » — належність сил до категорії зовнішніх.

4.3

Теорема про зміну моменту кількості руху точки

Момент сили відносно точки й декартових осей. Нехай до точки, положення якої в абсолютно нерухомій декартовій системі координат $Oxyz$ визначається координатами x, y, z , прикладена сила \vec{F} (рис. 4.3, а). Замінімо силу \vec{F} її прямокутними складовими $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ у напрямі декартових осей Ox, Oy, Oz відповідно. Візьмемо вісь Ox і розглянемо перпендикулярну до неї

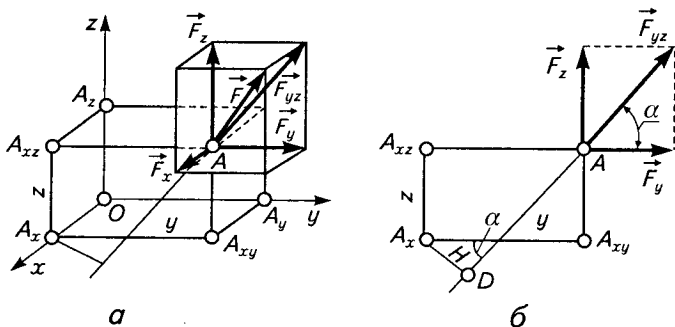


Рис. 4.3

площину, в якій знаходяться прямокутні складові сили \vec{F}_y і \vec{F}_z . Позначимо точку перетину цієї площини з віссю Ox через A_x . Продовжимо лінії дії сил \vec{F}_y, \vec{F}_z до перетину з відповідними декартовими площинами Oxz і Oxy ; точки перетину позначимо через A_xz, A_{xy} відповідно. Відстані ліній дії складових сил \vec{F}_y, \vec{F}_z від взятної осі Ox визначаються довжинами перпендикулярів $A_x A_xz = z, A_x A_{xy} = y$, проведених із точки A_x до ліній дії даних складових сил. Ці відстані z, y називаються *плечами сил* \vec{F}_y, \vec{F}_z відносно осі Ox . Складова сила \vec{F}_x не має плеча відносно осі Ox , бо паралельна їй.

Тепер введемо поняття моменту сили \vec{F} відносно осі Ox . Рівнодійна \vec{F}_{yz} сил \vec{F}_y і \vec{F}_z є проекцією сили \vec{F} на площину, яка перпендикулярна до осі Ox і перетинає її в точці A_x (рис. 4.3, б). Із точки A_x опустимо перпендикуляр $A_x D$ на продовження лінії дії сили \vec{F}_{yz} . Цей перпендикуляр називається плечем ($H = A_x D$) проекції даної сили \vec{F}_{yz} на площину, перпендикулярну до осі Ox , відносно цієї осі. Запишемо спочатку момент проекції \vec{F}_{yz} відносно осі Ox — взятий зі знаком «+» або «-» добуток модуля цієї сили на її плече:

$$M_x(\vec{F}_{yz}) = F_{yz} H.$$

Даний момент додатний, бо сила намагається повернути своє плече навколо осі Ox проти годинникової стрілки, якщо дивитися на площину Oyz навпроти додатного напрямку осі Ox . У протилежному разі момент від'ємний.

З рис. 4.3, б дістаємо

$$H = \left(y - \frac{z}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \sin \alpha = y \sin \alpha - z \cos \alpha.$$

Підставивши у вираз для моменту й зробивши відповідні математичні викладки, дістанемо:

$$M_x(\vec{F}_{yz}) = F_{yz} (y \sin \alpha - z \cos \alpha) = F_{yz} y \sin \alpha - F_{yz} z \cos \alpha;$$

$$F_{yz} \sin \alpha = F_z, \quad F_{yz} \cos \alpha = F_y;$$

$$M_x(\vec{F}_{yz}) = F_z y - F_y z.$$

Із рис. 4.3, а знайдемо суму моментів складових сил $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ відносно осі Ox :

$$M_x(\vec{F}_x) + M_x(\vec{F}_y) + M_x(\vec{F}_z) = 0 \cdot \vec{F}_x + F_z y - F_y z = F_z y - F_y z,$$

Суму моментів прямокутних складових даної сили в напрямках декартових осей відносно тієї чи іншої декартової осі називають *моментом даної сили відносно цієї самої осі*. Позначивши момент сили \vec{F} відносно осі Ox через $M_x(\vec{F})$, матимемо

$$M_x(\vec{F}) + M_x(\vec{F}_x) + M_x(\vec{F}_y) + M_x(\vec{F}_z) = F_z y - F_y z,$$

або

$$M_x(\vec{F}) = M_x(\vec{F}_{yz}).$$

Запишемо без виведення решту формул моментів даної сили відносно осей Ox, Oy , долучивши до них відому формулу моменту сили відносно осі Ox :

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y,$$

$$M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z, \tag{4.14}$$

$$M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x.$$

Отже, *моментом сили відносно осі називається момент проекції сили на перпендикулярну до осі площину відносно точки перетину площини й осі*. У співвідношеннях (4.14) моменти сили відносно декартових осей виражені через координати точки прикладання сили та її проекції на декартові осі.

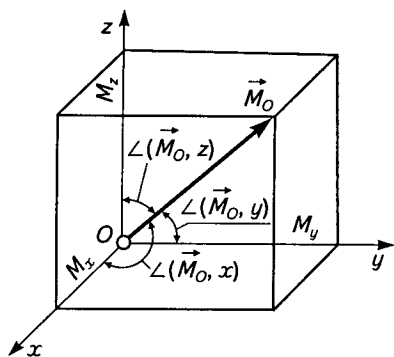


Рис. 4.4

Ці моменти є алгебричними значеннями прямокутних складових \vec{M}_x , \vec{M}_y , \vec{M}_z у напрямках декартових осей деякого вектора (позначимо його через \vec{M}_O), який зображується діагоналлю прямокутного паралелепіпеда зі сторонами M_x , M_y , M_z . Цей вектор називають *моментом сили відносно точки* — початку координат (рис. 4.4). Отже, маємо

$$\vec{M}_O = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z.$$

Із рис. 4.4 знаходимо формулу модуля моменту сили відносно точки:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (4.15)$$

Напрямок вектора-моменту сили відносно точки визначається за напрямними косинусами:

$$\begin{aligned} \cos \angle(\vec{M}_O, x) &= M_x / M_O, \\ \cos \angle(\vec{M}_O, y) &= M_y / M_O, \\ \cos \angle(\vec{M}_O, z) &= M_z / M_O. \end{aligned} \quad (4.16)$$

□ **Момент кількості руху точки відносно центра й декартових осей.** Відповідно до виразів (4.14)—(4.16) можна записати формули для моменту кількості руху точки $m\vec{v}$ відносно декартових осей і нерухомого центра. Маємо моменти кількості руху точки відносно декартових осей:

$$\begin{aligned} k_x &= m(y\dot{z} - z\dot{y}), \\ k_y &= m(z\dot{x} - x\dot{z}), \\ k_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Вектор-момент кількості руху точки відносно нерухомого центра — початку абсолютно нерухомої декартової системи координат — має прямокутні складові в напрямі декартових осей \vec{k}_x , \vec{k}_y , \vec{k}_z . Алгебричними значеннями цих складових, або проєкціями, є величини (4.17). Отже, дістаємо момент кількості руху точки відносно центра O — початку декартової системи координат $Oxyz$:

$$\vec{k}_O = \vec{k}_x + \vec{k}_y + \vec{k}_z.$$

Вектор-момент кількості руху точки відносно початку декартової системи координат (рис. 4.5) зображується діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, сторонами якого є прямокутні складові (4.17). Із

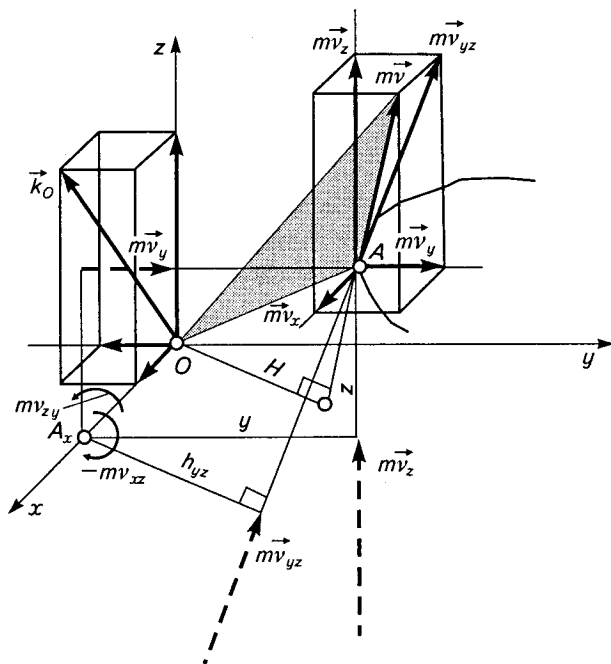


Рис. 4.5

рис. 4.5 виводимо формули модуля й напрямних косинусів вектора-моменту кількості руху точки відносно нерухомого центра:

$$\begin{aligned}
 k_O &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}; \\
 \cos \angle(\vec{k}_O, x) &= k_x / k_O, \\
 \cos \angle(\vec{k}_O, y) &= k_y / k_O, \\
 \cos \angle(\vec{k}_O, z) &= k_z / k_O.
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

Уважно розглянувши рис. 4.5, легко дістати такі співвідношення:

$$k_O = mv \cdot H; \quad k_x = mv_{yz} \cdot h_{yz}, \quad k_y = mv_{zx} \cdot h_{zx}, \quad k_z = mv_{xy} \cdot h_{xy}.$$

□ **Теорема про зміну моменту кількості руху точки в диференціальній формі.** Нехай точка масою m здійснює криволінійний

рух під дією сили \vec{F} , що є рівнодійною як заданих сил, так і реакцій в'язей, відносно абсолютно нерухомої декартової системи координат. Прискорення \vec{a} і рівнодійна сила \vec{F} , яка спричинює дане прискорення, замінюються їхніми прямокутними складовими в напрямі декартових осей. Тоді диференціальні рівняння руху точки в декартових координатах матимуть такий вигляд:

$$m\ddot{x} = F_x,$$

$$m\ddot{y} = F_y,$$

$$m\ddot{z} = F_z.$$

Помноживши друге з рівнянь на абсцису точки, а третє — на її ординату й віднявши друге рівняння від третього, матимемо

$$m(\dot{z}y - \dot{y}z) = yF_z - zF_y.$$

Ліву частину перепишемо у вигляді

$$\frac{d[m(y\dot{z} - z\dot{y})]}{dt} = yF_z - zF_y.$$

Відповідно до (4.14) і (4.17) дістаємо

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x. \quad (4.19)$$

Тепер від першого з рівнянь віднімемо третє, попередньо помноживши перше на z , а третє — на x :

$$m(z\ddot{x} - x\ddot{z}) = zF_x - xF_z.$$

Тут вираз у лівій частині перепишемо так:

$$m(z\ddot{x} - x\ddot{z}) = \frac{d[m(z\dot{x} - x\dot{z})]}{dt},$$

після чого приходимо до еквівалентної рівності

$$\frac{d[m(z\dot{x} - x\dot{z})]}{dt} = zF_x - xF_z.$$

Під знаком похідної маємо алгебричне значення прямокутної складової k_y в напрямі осі Oy моменту кількості руху \vec{k}_O точки відносно центра O , а справа — прямокутну складову (алгебричне значення) вектора-моменту сили \vec{M}_O відносно точки. Дістаємо друге співвідношення шуканої теореми про зміну моменту кількості руху точки:

$$\frac{dk_y}{dt} = M_y. \quad (4.20)$$

Третє співвідношення теореми дістанемо, помноживши обидві частини першого й другого рівнянь основної системи на y і x відповідно, віднявши від першого результату другий і виконавши відповідні перетворення:

$$\frac{d[m(xy - yx)]}{dt} = xM_y - yM_x.$$

Під знаком похідної стоїть прямокутна складова k_z по осі Oz вектора-моменту \vec{k}_O кількості руху точки відносно початку координат, а справа — складова M_z по тій самій осі вектора-моменту \vec{M}_O сили також відносно того самого початку координат. Остаточо маємо

$$\frac{dk_z}{dt} = M_z. \quad (4.21)$$

Якщо прямокутні складові k_x , k_y , k_z назвати моментами кількості руху точки відносно декартових осей Ox , Oy , Oz відповідно, то **теорему про зміну моменту кількості руху точки** в декартових координатах, що виражається рівняннями (4.19)—(4.21), можна сформулювати так: *похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно декартової осі дорівнює моменту рівнодійної всіх прикладених до точки сил відносно цієї самої декартової осі.*

Аби теорему про зміну моменту кількості руху точки відносно центра виразити у векторній формі, візьмемо до уваги, що додатні напрями декартових осей визначаються ортами \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Тоді за допомогою цих ортів подамо вектори-моменти кількості руху й сили відносно центра через їхні складові (проекції) в напрямках декартових осей:

$$\vec{k}_O = k_x\vec{i} + k_y\vec{j} + k_z\vec{k}; \quad \vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}.$$

Тепер візьмемо похідну за часом від обох частин першої векторної рівності й урахуємо другу векторну рівність та рівняння (4.19)—(4.21). У результаті приходимо до теореми у векторній формі:

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{M}_O. \quad (4.22)$$

Похідна за часом від вектора-моменту кількості руху точки відносно нерухомого центра дорівнює вектору-моменту рівнодійної всіх прикладених до точки сил відносно цього самого нерухомого центра.

Векторну рівність (4.22) можна тлумачити інакше. Згадаймо, що похідна за часом від змінного радіуса-вектора точки, початок якого за весь час руху знаходиться в одній і тій самій нерухомій точці, є вектором швидкості рухомої точки, який напрямлений по дотичній до траєкторії точки — годографа радіуса-вектора. Так само у вектор-

ній рівності (4.22) похідна за часом від вектора-моменту кількості руху точки відносно початку координат є швидкістю його кінця, яка напрямлена по дотичній до годографа моменту кількості руху. Позначивши цю швидкість через

$$\vec{u}_k = \frac{d\vec{k}_O}{dt},$$

формулу (4.22) подамо у вигляді

$$\vec{u}_k = \vec{M}_O. \quad (4.23)$$

Швидкість кінця вектора-моменту кількості руху точки відносно нерухомого центра дорівнює вектору-моменту рівнодійної всіх сил, що діють на точку, відносно цього самого нерухомого центра (рис. 4.6).

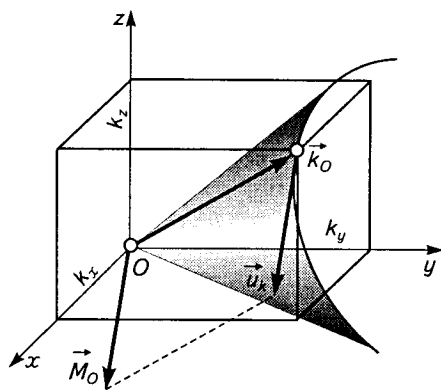


Рис. 4.6

Розкриємо геометричний зміст вектора-моменту кількості руху точки відносно нерухомого центра k_O . Крім декартових координат x, y, z , положення точки A в якій-небудь момент часу в її довільному криволінійному русі визначатимемо радіусом-вектором \vec{r} , який виходить із початку O нерухомої системи осей $Oxyz$. Вектором кількості руху точки в даному її положенні є $m\vec{v}$. Сполучивши початок O радіуса-век-

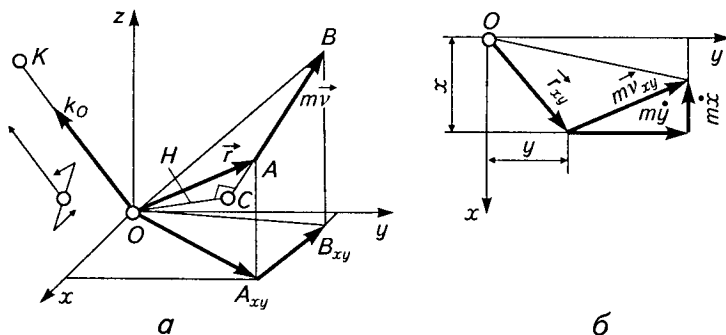


Рис. 4.7

тора \vec{r} із кінцем вектора кількості руху $m\vec{v}$, матимемо трикутник OAB (рис. 4.7, а), де B — кінець вектора кількості руху.

Далі опустимо з точки O на продовження прямої BA перпендикуляр OC . Позначимо його довжину через H і назовемо плечем вектора кількості руху відносно точки O . Введемо кут $\angle(\vec{r}, m\vec{v})$ між напрямом радіуса-вектора \vec{r} і вектором кількості руху $m\vec{v}$. Тоді площа трикутника OAB

$$S = \frac{1}{2}mvH = \frac{1}{2}mvr \sin \angle(\vec{r}, m\vec{v}).$$

Розглянемо проекцію трикутника OAB , наприклад, на площину Oxy . Ця проекція також є трикутником; позначимо його через $OA_{xy}B_{xy}$; в ньому сторона OA_{xy} — проекція \vec{r}_{xy} радіуса-вектора \vec{r} на площину Oxy , інша сторона $A_{xy}B_{xy}$ — проекція $m\vec{v}_{xy}$ вектора $m\vec{v}$ на площину Oxy . Визначимо площу трикутника $OA_{xy}B_{xy}$ на рис. 4.7, б. Для цього треба від площі прямокутника

$$S_{xy \text{ пр}} = (y + m\dot{y})x$$

відняти суму площ трьох прямокутних трикутників, що обмежують взятий для визначення площі трикутник $OA_{xy}B_{xy}$:

$$S_{\text{тп}} = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}m\dot{x}m\dot{y} + \frac{1}{2}(y + m\dot{y})(x + m\dot{x}).$$

Тоді шукана площа

$$S_{xy} = S_{xy \text{ пр}} - S_{\text{тп}} = (y + m\dot{y})x - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}m\dot{x}m\dot{y} + \frac{1}{2}(y + m\dot{y})(x + m\dot{x})$$

або після спрощень

$$S_{xy} = \frac{1}{2}m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Отже, бачимо, що площа проекції трикутника, утвореного радіусом-вектором \vec{r} точки, її вектором кількістю руху $m\vec{v}$ та відрізком, що сполучає початок першого вектора з кінцем другого, на декартову площину Oxy дорівнює половині моменту кількості руху точки відносно осі Oz . Тому маємо

$$k_x = 2S_{xy}.$$

Із геометрії відомо, що площа проекції трикутника на яку-небудь площину дорівнює добутку площі трикутника на косинус кута між проекцією та трикутником. Кут між трикутником та його проекцією на площину — це кут між перпендикулярами до площини проекції і площини трикутника. В нашому випадкові перпендикуляром до

проекції OA_{xy} , B_{xy} є вісь Oz , відносно якої розглядається момент кількості руху k_x , а перпендикуляром до площини трикутника нехай буде OK (рис. 4.7, а). Ураховуючи сказане, запишемо

$$S_{xy} = S \cos \angle(O\vec{K}, z),$$

але з попереднього $S_{xy} = \frac{1}{2}k_z$. Такі самі залежності справедливі й для решти двох моментів кількості руху:

$$S_{xz} = \frac{1}{2}k_y, \quad S_{yz} = \frac{1}{2}k_x.$$

На підставі зазначеної теореми з геометрії можемо записати три таких співвідношення між моментами кількості руху точки відносно декартових осей і площею трикутника S :

$$k_x = 2S \cos \angle(O\vec{K}, x),$$

$$k_y = 2S \cos \angle(O\vec{K}, y),$$

$$k_z = 2S \cos \angle(O\vec{K}, z).$$

Підставимо їх у формулу модуля моменту кількості руху точки відносно нерухомого центра (4.18):

$$k_o = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \\ = \sqrt{(2S \cos \angle(O\vec{K}, x))^2 + (2S \cos \angle(O\vec{K}, y))^2 + (2S \cos \angle(O\vec{K}, z))^2}.$$

Після спрощення дістанемо

$$k_o = 2S \sqrt{\cos^2 \angle(O\vec{K}, x) + \cos^2 \angle(O\vec{K}, y) + \cos^2 \angle(O\vec{K}, z)} = 2S,$$

бо сума квадратів косинусів напрямних кутів, утворених будь-яким вектором із декартовими осями, дорівнює одиниці. Але

$$S = \frac{1}{2}mvH.$$

Тому, підставивши це значення в попередню рівність, матимемо модуль вектора-моменту кількості руху точки відносно нерухомого центра O :

$$k_o = mvH. \quad (4.24)$$

Із формул напрямних косинусів вектора \vec{k}_o (4.18) легко переко-
нати в тому, що вони дорівнюють раніше розглянутим косинусам

напрямних кутів між вектором $O\vec{K}$ і відповідними декартовими осями Ox , Oy , Oz . Отже, робимо висновок, що *вектор-момент кількості руху точки відносно нерухомого центра, прикладений у цьому центрі й перпендикулярний до площини, в якій знаходяться радіус-вектор та вектор кількості руху точки, дорівнює добутку модуля кількості руху точки на плече цієї кількості руху відносно нерухомого центра*. Щодо визначення напрямку, то можна скористатися правилом правого гвинта. Напрямок вектора-моменту кількості руху \vec{k}_O збігається з напрямком поступального руху правого гвинта при загвинчуванні його в нерухому гайку; при цьому напрям, в якому вектор кількості руху $m\vec{v}$ намагається (умовно) повернути своє плече навколо нерухомого центра O , має збігатися з напрямком обертання гвинта в гайці (рис. 4.7, а).

Властивості й формули, які тут наведено, стосуються також моментів сил.

4.4

Теорема про зміну кінетичної енергії точки в криволінійному русі

На відміну від роботи змінної сили за прямолінійного руху точки, де точка прикладання сили переміщується по прямолінійній траєкторії, а сама сила або рівнодійна кількох прикладених сил збігається з прямолінійною траєкторією, робота сили в криволінійному русі виконується на криволінійній траєкторії; при цьому сила змінює свій напрям на криволінійному переміщенні точки її прикладання. За таких умов робота виконується лише дотичною складовою \vec{F}_τ сили \vec{F} на переміщенні точки її прикладання.

Нехай за інтервал часу $t_1 - t_0$ на відомій криволінійній траєкторії точка прикладання сили \vec{F} набуває відповідного скінченного переміщення $s_1 - s_0$. Тоді прикладена до точки сила \vec{F} або рівнодійна всіх сил, що діють на цьому скінченному переміщенні, виконує повну роботу $A_{0,1}$, котра, як і за прямолінійного руху, є мірою зміни кінетичної енергії точки (це буде доведено далі).

Повна робота обчислюється так. Розглядається будь-яке проміжне положення з дуговою координатою s точки прикладання сили \vec{F} між початковим і кінцевим положеннями, що відповідає поточному моменту часу t . Тоді, починаючи з цього моменту часу, беруть нескінченно мале переміщення точки прикладання сили ds за відповідний нескінченно малий приріст часу dt , на якому й визначають так звану

елементарну роботу dA постійної сили \vec{F}_τ . Це значення сили відповідає положенню s і на елементарному переміщенні ds є сталим. Елементарне переміщення й дотична складова сили напрямлені по дотичній до траєкторії, вздовж якої рухається точка. За таких умов справедлива формула роботи

$$dA = F_\tau ds. \quad (4.25)$$

Це формула елементарної роботи, яка дорівнює добутку дотичної складової сили на нескінченно мале переміщення точки її прикладання. Щоб мати повну роботу, треба взяти визначений інтеграл від елементарної роботи (4.25) у межах зміни незалежної інтегрування, якою є дугова координата s точки прикладання сили \vec{F} , від початкового s_0 до кінцевого її значення s_1 (рис. 4.8):

$$A_{0,1} = \int_{s_0}^{s_1} F_\tau ds. \quad (4.26)$$

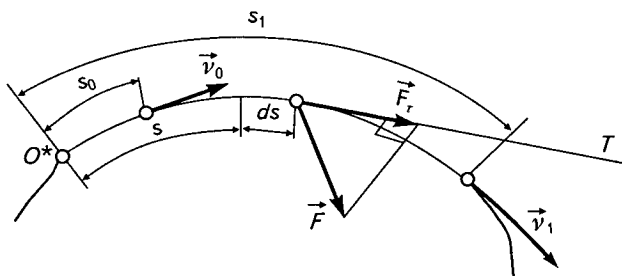


Рис. 4.8

У разі інтегрування за змінною s дотична сила має бути функцією дугової координати: $F_\tau(s)$. Якщо потрібно визначити роботу, коли дотична сила є функцією часу, $F_\tau(t)$, диференціал дугової координати виражають через швидкість як функцію часу, $\dot{s}(t)$:

$$A_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_\tau \dot{s} dt. \quad (4.27)$$

Добуток дотичної сили на швидкість точки її прикладання називається *потужністю сили*. Введемо позначення

$$P(t) = F_\tau \dot{s}. \quad (4.28)$$

Тоді формула (4.28) набирає вигляду

$$A_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt. \quad (4.29)$$

Порівнюючи формули (4.29) і (1.24), робимо висновок, що в криволінійному русі, як і за прямолінійного, робота змінної сили графічно зображується площею криволінійної трапеції, утвореної кривою дотичної сили, значеннями дотичної сили на кінцях переміщення й самим переміщенням.

Переходимо до теореми про зміну кінетичної енергії. Для цього скористаємося першим диференціальним рівнянням системи (3.2):

$$ma_{\tau} = F_{\tau}.$$

Його можна записати інакше:

$$m\dot{s} \frac{ds}{ds} = F_{\tau},$$

або

$$m\dot{s} ds = F_{\tau} ds.$$

У лівій частині $m\dot{s}$ введемо під знак диференціала:

$$d(m\dot{s}^2/2) = F_{\tau} ds. \quad (4.30)$$

У дужках маємо кінетичну енергію точки:

$$T = m\dot{s}^2/2,$$

а справа, як уже відомо, — елементарну роботу дотичної складової рівнодійної всіх сил, прикладених до точки,

$$dA = F_{\tau} ds.$$

Отже, *теорему про зміну кінетичної енергії точки в диференціальній формі* можна сформулювати так: *диференціал кінетичної енергії точки дорівнює елементарній роботі рівнодійної всіх сил, прикладених до точки.*

Тепер візьмемо визначені інтеграли від обох частин (4.30) у відповідних межах змін дугової координати та швидкості: нижніми межами інтегралів є відповідні початкові значення дугової координати s_0 і швидкості \dot{s}_0 , а верхніми — відповідні кінцеві значення дугової координати s_1 і швидкості \dot{s}_1 . Спочатку запишемо

$$\int_{\dot{s}_0}^{\dot{s}_1} d\left(\frac{m\dot{s}^2}{2}\right) = \int_{s_0}^{s_1} F_{\tau} ds.$$

Після інтегрування дістаємо вираз теореми про зміну кінетичної енергії в скінченній формі:

$$\frac{m\dot{s}_1^2}{2} - \frac{m\dot{s}_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s_1} F_{\tau} ds \quad (4.31)$$

або, ввівши позначення

$$T_0 = \frac{m\dot{s}_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}, \quad T_1 = \frac{m\dot{s}_1^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}; \quad A_{0,1} = \int_{s_0}^{s_1} F_\tau ds,$$

де T_0 і T_1 — кінетична енергія точки в її початковому й кінцевому положеннях відповідно, а $A_{0,1}$ — повна робота всіх сил, що діють на точку на скінченному переміщенні, матимемо

$$T_1 - T_0 = A_{0,1}. \quad (4.32)$$

Відповідно до (4.31) або (4.32) маємо: *зміна кінетичної енергії точки на кінцевому переміщенні дорівнює роботі всіх сил, прикладених до точки, на цьому переміщенні.*

ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТІЛА

5.1

Рівняння динаміки обертального руху тіла

Осьові й відцентрові моменти інерції тіла. Радіус інерції.

Осьові й відцентрові моменти інерції тіла. Радіус інерції. Розглянемо абсолютно тверде тіло масою M відносно жорстко зв'язаної з ним декартової прямокутної системи координат $O\xi\eta\zeta$ (рис. 5.1).

Мислено поділимо тіло на таку велику кількість частинок, щоб кожна з них була зникаюче мала порівняно з розмірами самого тіла, яке піддається поділу. Тоді замість тіла матимемо систему матеріальних точок. Введемо індексоване позначення маси окремої точки у вигляді m_k , де $k=1, 2, 3, \dots, N$ — порядковий номер частинки тіла. У вибраній системі осей координати частинок будуть ξ_k, η_k, ζ_k , де k — натуральне число від 1 до N . Візьмемо суми добутків мас частинок тіла на дві декартові координати з трьох ξ_k, η_k, ζ_k у різних їх комбінаціях:

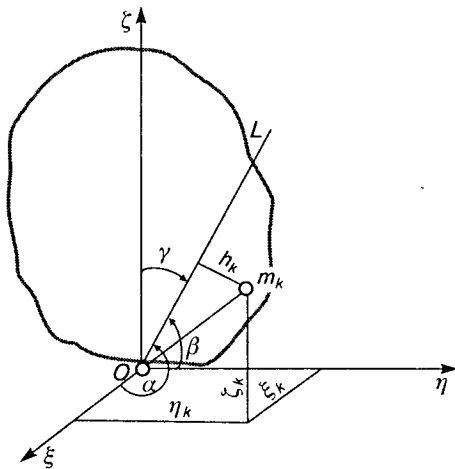


Рис. 5.1

$$\sum m_k \xi_k^2, \quad \sum m_k \eta_k^2, \quad \sum m_k \zeta_k^2; \quad \sum m_k \xi_k \eta_k, \quad \sum m_k \xi_k \zeta_k, \quad \sum m_k \eta_k \zeta_k.$$

Тепер візьмемо добутки двох із перших трьох сум у різних комбінаціях:

$$\sum m_k \xi_k^2 + \sum m_k \eta_k^2 = \sum m_k (\xi_k^2 + \eta_k^2);$$

$$\begin{aligned}\sum m_k \xi_k^2 + \sum m_k \zeta_k^2 &= \sum m_k (\xi_k^2 + \zeta_k^2); \\ \sum m_k \eta_k^2 + \sum m_k \zeta_k^2 &= \sum m_k (\eta_k^2 + \zeta_k^2).\end{aligned}$$

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned}J_\xi &= \sum m_k (\eta_k^2 + \zeta_k^2), \\ J_\eta &= \sum m_k (\xi_k^2 + \zeta_k^2), \\ J_\zeta &= \sum m_k (\xi_k^2 + \eta_k^2); \\ J_{\xi\eta} &= \sum m_k (\xi_k^2 + \eta_k^2), \\ J_{\xi\zeta} &= \sum m_k (\xi_k^2 + \zeta_k^2), \\ J_{\eta\zeta} &= \sum m_k (\eta_k^2 + \zeta_k^2).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Перші три співвідношення системи (5.1) називаються **моментами інерції тіла відносно декартових осей** $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ відповідно, решта три — **відцентровими моментами інерції тіла відносно пари декартових осей** $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ відповідно.

Бачимо, що осьові моменти інерції характеризують розподіл маси тіла відносно відповідних декартових осей. Подібно до того, як маса тіла є мірою його інерції в поступальному русі, осьові моменти інерції є інерційними характеристиками тіла в його обертальному русі, як в окремому випадкові обертання навколо нерухомої осі, так і в найзагальнішому обертальному русі навколо нерухомої точки.

Якщо в тілі довільно вибрати вісь OL із кутами α , β , γ нахилу її до декартових осей Ox , Oy , Oz відповідно (рис. 5.1) і наближено записати загальний вираз для моменту інерції тіла відносно цієї осі у вигляді

$$J_L = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2,$$

де h_k — відстань частинки тіла, яка має масу m_k , від осі OL , то після відповідних викладок (не наводяться) можна прийти до такої точної формули:

$$\begin{aligned}J_L &= J_\xi \cos^2 \alpha + J_\eta \cos^2 \beta + J_\zeta \cos^2 \gamma - \\ &- 2J_{\xi\eta} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{\xi\zeta} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{\eta\zeta} \cos \beta \cos \gamma.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Маємо, що осьовий момент інерції тіла J_L відносно довільної осі OL , що проходить крізь початок O системи координат $O\xi\eta\zeta$ під заданими напрямними кутами α , β , γ , виражається через раніше введені осьові й

відцентрові моменти інерції (5.1). Отже, знаючи осьові й відцентрові моменти інерції тіла (5.1), можна знайти його момент інерції відносно будь-якої осі, що задається напрямними кутами α , β , γ .

Для деяких однорідних тіл правильної геометричної форми й певним чином вибраних відносно тіла декартових осей осьові моменти інерції можна відшукати математично, інтегруванням. Крім того, є методи дослідного визначення осьових моментів інерції у складніших випадках, коли математично задача недоступна.

Відцентрові моменти інерції характеризують розподіл маси тіла відносно відповідних декартових площин і впливають на виникнення динамічних реакцій опор в обертальних рухах тіл. Формули (5.1) і (5.2) показують, що для кожної точки тіла можна вибрати такий напрям декартових осей, що всі три відцентрові моменти інерції стануть нульовими, $J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0$. Такі три взаємно перпендикулярні декартові осі з початком у даній точці тіла називаються *головними осями інерції тіла для даної точки*. Якщо головні осі інерції тіла побудовані для його центра мас, то такі осі називаються *головними центральними осями інерції тіла*.

Однак, якщо два відцентрові моменти інерції нульові, а третій не дорівнює нулю, то відома лише одна головна вісь інерції тіла для даної точки. Наприклад, при $J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0$ вісь $O\xi$, координата по якій є спільним індексом у позначеннях нульових відцентрових моментів інерції, буде головною віссю інерції тіла в точці O .

У задачах механіки на обертальний рух шукають головні осі інерції тіла для тієї чи іншої його точки, оскільки від того, чи збігається вісь обертання тіла з його головною віссю інерції для даної точки, чи не збігається, залежить відсутність або наявність додаткових динамічних реакцій у підшипниках обертючих тіл. Виявляється: якщо за вісь обертання тіла править його головна центральна вісь інерції, то незалежно від того, чи обертається тіло, чи перебуває у стані спокою, силовий тиск його на опори однаковий і має статичний характер.

Наведемо *теорему, яка визначає положення головних центральних осей інерції для однорідних симетричних тіл*: якщо тіло має три площини матеріальної симетрії, то його головні центральні осі інерції збігаються з лініями перетину цих площин. До таких тіл, положення головних центральних осей інерції для яких відоме, належать тонкий однорідний прямолінійний стержень (рис. 5.2), тонкий однорідний диск (циліндр) (рис. 5.3), тонка однорідна прямокутна пластинка (рис. 5.4) й однорідна куля (рис. 5.5). Для даних симетричних тіл вибрані декартові осі $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$ є головними центральними осями інерції, й відцентрові моменти інерції для відповідних пар осей дорівнюють нулю, $J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0$.

Якщо осьові моменти інерції визначені відносно головних центральних осей інерції $C\xi$, $C\eta$, $C\xi$, то вони називаються *головними*

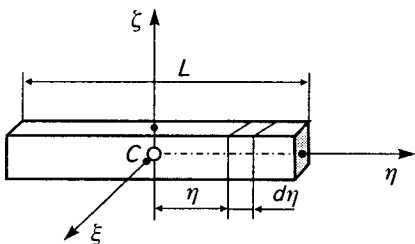


Рис. 5.2

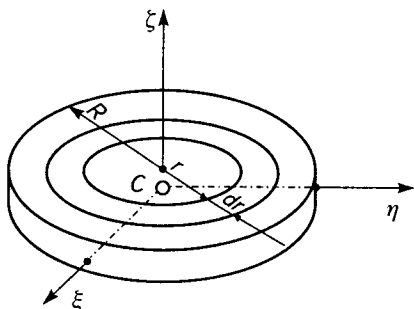


Рис. 5.3

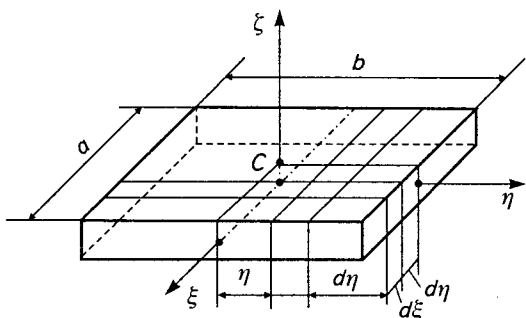


Рис. 5.4

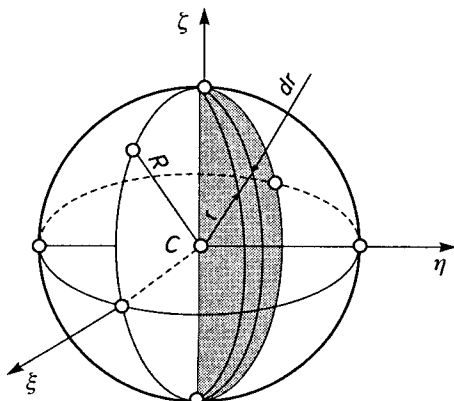


Рис. 5.5

центральною моментом інерції тіла. Позначимо їх через $J_{C\xi}$, $J_{C\eta}$, $J_{C\xi}$. Тепер інтегруванням знайдемо формули, за якими обчислюються головні центральні моменти інерції зазначених вище тіл — стержня, диска, прямокутної пластинки й кулі. Застосуємо формули (5.1).

Для тонкого прямолинійного стержня (див. рис. 5.2), очевидно, $J_{C\eta} = 0$, і зрозуміло, що $J_{C\xi} = J_{C\xi}$. Для визначення моменту інерції відносно осей $C\xi$, $C\xi$ виділимо на відстані η елемент стержня нескінченно малих довжини $d\eta$ і маси dm . Далі замінімо відповідні суми (5.1) інтегралом:

$$J_{C\xi} = \int_{(M)} \eta^2 dm,$$

де

$$dm = \frac{M}{L} d\eta,$$

M — маса стержня. Підставимо в попередню формулу, запишемо межі інтегрування за незалежною змінною, якою є η , від $-L/2$ до $L/2$, і для відшукування головних центральних моментів інерції стержня відносно зазначених осей матимемо інтеграл такого вигляду:

$$J_{C\xi} = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \eta^2 d\eta.$$

Після інтегрування в заданих межах приходимо до шуканої формули головних центральних моментів інерції однорідного стержня

$$J_{C\xi} = J_{C\zeta} = ML^2/12. \quad (5.3)$$

Для двовимірного тіла, яким є тонкий диск, усі його три головних центральних моменти інерції ненульові. Нескінченно малим елементом маси dm у цьому разі буде маса тонкої циліндричної оболонки радіусом r , завтовшки dr і малої висоти, значно меншої порівняно з радіусом диска R (див. рис. 5.3). За такого вибору елемента маси визначатимемо момент інерції диска відносно центральної осі $C\xi$. Застосовуємо третю з формул (5.1), яка для суцільного тіла переписеться так:

$$J_{C\xi} = \int_{(M)} r^2 dm.$$

Тут $r^2 = (\xi^2 + \eta^2)$. Легко бачити, що елемент маси в розглядуваному випадкові

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr.$$

Підставимо в попередню формулу з урахуванням того, що інтегрування здійснюватиметься за незалежною змінною r у межах від 0 до R . Тоді визначений інтеграл набере вигляду

$$J_{C\xi} = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr.$$

Обчисливши інтеграл, дістаємо шукану формулу моменту інерції диска відносно його геометричної осі — однієї з головних центральних осей інерції:

$$J_{C\xi} = MR^2/2. \quad (5.4)$$

Визначимо головні центральні моменти інерції для тонкої прямокутної пластинки (див. рис. 5.4). Оскільки пластинка вздовж осей

$C\xi$, $C\eta$ нічим не відрізняється від стержня, цілком зрозуміло, що для її моментів інерції $J_{C\xi}$, $J_{C\eta}$ справедливі ті самі формули (5.3). Запишемо їх:

$$J_{C\xi} = Mb^2/12, \quad J_{C\eta} = Ma^2/12, \quad (5.5)$$

де M — маса пластинки. Щодо моменту інерції $J_{C\xi}$ відносно осі $C\xi$, то він обчислюється на підставі формул (5.1). Справді, перейдемо у третій із формул (5.1) від суми до інтеграла:

$$J_{C\xi} = \int_{(M)} (\xi^2 + \eta^2) dm,$$

де dm — спільний елемент маси двох матеріальних вузьких смужок, які паралельні осям $C\xi$, $C\eta$ і мають розміри a , $d\eta$; b , $d\xi$ відповідно (див. рис. 5.4). Розкривши дужки під знаком інтеграла, переходимо до суми інтегралів у правій частині останньої рівності:

$$J_{C\xi} = \int_{(M)} \xi^2 dm + \int_{(M)} \eta^2 dm.$$

Перший інтеграл є моментом інерції пластинки відносно осі $C\eta$, другий — моментом інерції пластинки відносно осі $C\xi$. Отже, дістаємо головний центральний момент інерції прямокутної пластинки відносно осі, що проходить через її центр мас перпендикулярно до пластинки:

$$J_{C\xi} = M(a^2 + b^2)/12. \quad (5.6)$$

Залишається знайти формулу для визначення головних центральних моментів інерції однорідної кулі. Відразу зазначимо, що будь-яка вісь, котра проходить через центр мас кулі, буде її головною центральною віссю. З урахуванням центральної симетрії кулі виконується умова

$$J_{C\xi} = J_{C\eta} = J_{C\xi}.$$

Візьмемо третю з формул системи (5.1) і застосуємо для визначення моменту інерції кулі. Замінімо в ній суму інтегралом, як і в перших трьох прикладах:

$$J_{C\xi} = \int_{(M)} (\xi^2 + \eta^2) dm.$$

Щоб мати даний момент інерції, треба взяти суму всіх трьох однакових осьових моментів інерції і поділити на три:

$$J_{C\xi} = \frac{J_{C\xi} + J_{C\eta} + J_{C\xi}}{3} = \frac{2}{3} \int_{(M)} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) dm.$$

Тут

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2,$$

де r — відстань елемента маси dm від центра кулі (див. рис. 5.5). Попередню рівність можна переписати інакше:

$$J_{C\zeta} = \frac{2}{3} \int_{(M)} r^2 dm.$$

Візьмемо елемент маси у вигляді матеріальної тонкої сферичної оболонки радіусом r і завтовшки dr :

$$dm = 4\pi r^2 dr \frac{M}{4/3\pi R^3},$$

де M — маса кулі. Після внесення в основну формулу та інтегрування формула моменту інерції кулі відносно центральної осі інерції матиме вигляд

$$J_{C\zeta} = \frac{2}{5} MR^2. \quad (5.7)$$

У деяких задачах механіки осьовий момент інерції тіла зручніше виражати через його масу й так званий радіус інерції відносно осі. Нехай момент інерції тіла масою M відносно даної осі, наприклад $C\zeta$, становить $J_{C\zeta}$. Тоді можна добрати таку лінійну величину $i_{C\zeta}$, щоб виконувалася умова

$$J_{C\zeta} = Mi_{C\zeta}^2.$$

Для точки такої самої маси M , яка знаходиться на відстані h від осі $C\zeta$, момент інерції відносно цієї осі дорівнює добутку маси точки на квадрат її відстані від осі:

$$\tilde{J}_{C\zeta} = Mh^2.$$

Якщо припустити, що величини $J_{C\zeta}$, $\tilde{J}_{C\zeta}$ однакові за модулем, матимемо

$$h = i_{C\zeta} = \sqrt{J_{C\zeta}/M}. \quad (5.8)$$

Отже, **радіус інерції** — це та відстань від осі, на якій треба розташувати точку такої самої маси, яку має тіло, щоб її осьовий момент інерції був такий самий, як осьовий момент тіла.

- Одиниця осьового моменту інерції тіла в СІ

$$\tilde{J}_{C\zeta} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

□ **Диференціальне рівняння обертального руху тіла.** Нехай маємо тіло з двома нерухомими точками O, O_1 . Пряма OO_1 , як відомо з попереднього, є для тіла нерухомою віссю обертання. Виберемо нерухома систему координат $Oxuz$ (рис. 5.6). Позначимо масу тіла через M . У загальному випадкові обертального руху до тіла прикладені як зовнішні сили (активні), так і зовнішні реакції в'язей, у тому числі реакції двох нерухомих точок O, O_1 .

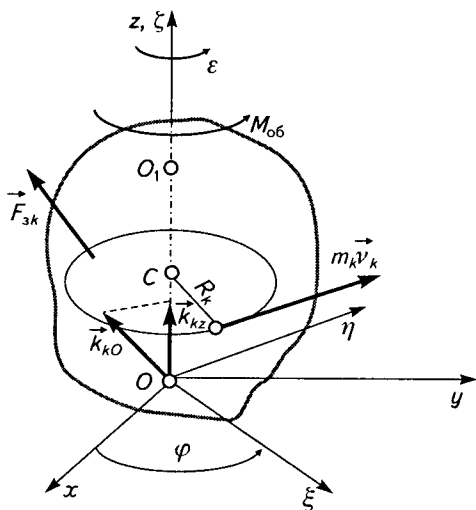


Рис. 5.6

Позначимо прикладені до обертального тіла сили (незалежно від того, задані вони чи реакції в'язей) через \vec{F}_{zi} , де i — номер сили — натуральне число від 1 до N_F ; N_F — кількість сил; індекс «z» вказує на належність сил до категорії зовнішніх. Прикладені до тіла сили спричинять довільний обертальний рух із кутовим прискоренням $\epsilon = \dot{\varphi}$.

Динаміка базується на фундаментальних законах Ньютона, й основний закон динаміки — другий закон Ньютона — описує рух однієї точки. А ми ставимо задачу — дослідити обертальний рух тіла довільних розмірів і форми, в

якому, як відомо, траєкторії, швидкості й прискорення різних точок різні. Тому тіло в задачі на обертальний рух не можна взяти за точку, а отже, неможливо безпосередньо застосувати до нього основний закон динаміки.

Модель абсолютно твердого тіла як суцільного й неподільного не може бути безпосередньо використана для вивчення даного виду руху. Тому застосовують ідею дискретного поділу: абсолютно тверде тіло розглядається як система точок, що має таку саму конфігурацію, як і тіло; при цьому зберігаються характер зовнішнього силового впливу з боку інших тіл, а також дія внутрішніх сил, котрі забезпечують незмінюваність тіла як моделі абсолютно твердого тіла. Разом із тим точки в системі, що утворилася внаслідок поділу тіла на частинки, вважаються вільними.

Детальніше дискретизація тіла виражається в тому, що його мислено ділять довільними поверхнями на безліч складових — частинок,

розміри кожної з яких зникають малі порівняно з розмірами тіла до поділу. Тепер, якщо уявити, що розмежовувальні поверхні частинок стягуються до їхніх центрів мас, то замість суцільного абсолютно твердого тіла матимемо систему точок.

Точки нової механічної системи ототожнюються з центрами мас частинок поділу в припущенні, що в цих центрах зосереджуються маси відповідних частинок, які беруться за точки. Зазначимо, що за такого поділу тіла на частинки руйнуються зв'язки між ними, а для компенсації цього слід урахувувати внутрішні сили взаємодії між самими частинками в тілі. Додамо, що ми знову маємо незмінювану матеріальну систему, як і вибране для вивчення абсолютно тверде тіло, але вже дискретних точок із проміжками між ними, котрі в колових рухах навколо осі обертання тіла з часом не змінюються, як не змінюються відстані між будь-якими точками абсолютно твердого тіла.

Отже, замість модельного суцільного тіла, що обертається навколо нерухомої осі, маємо систему вільних точок, кожна з яких здійснює такий самий коловий рух, як і центри мас відповідних частинок до поділу. Позначимо масу будь-якої точки через m_k , де k — її номер — натуральне число від 1 до N_m ; N_m — кількість точок; індекс m вказує на те, що розглядається система точок.

Кожна точка системи масою m_k рухається по колу під дією рівнодійної всіх зовнішніх сил

$$\vec{F}_{zk} = \sum_{i=1}^{N_F} \vec{F}_{zi}$$

та рівнодійної всіх внутрішніх сил

$$\vec{F}_{bk} = \sum_{i=1}^{N_F} \vec{F}_{bi},$$

що діють із боку як сусідніх частинок, з якими вона безпосередньо контактує, так і інших частинок тіла.

Результуюча (повна рівнодійна) сила — векторна сума сил $\vec{F}_{zk} + \vec{F}_{bk}$, яка, діючи на точку масою m_k , примушує її рухатися по колу радіусом R_k із повним прискоренням \vec{a}_k , котре, як відомо, має дві прямокутні складові — тангенціальну $\vec{a}_{k\tau}$ та доцентрову (нормальну) \vec{a}_{kn} , $\vec{a}_k = \vec{a}_{k\tau} + \vec{a}_{kn}$. Тепер до точок системи, яка замінює обертове тіло, можемо застосувати основний закон динаміки або теорему про зміну моменту кількості руху.

Щоб дістати рівняння динаміки обертального руху тіла в нашому випадкові, скористаємося теоремою про зміну моменту кількості ру-

ху точки відносно нерухомої осі обертання тіла Oz (OO_1) [див. формулу (4.21)] з урахуванням введених вище позначень:

$$\frac{dk_{kz}}{dt} = M_{zkz} + M_{vkz},$$

де $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$. Маємо систему N_m скалярних рівностей. Додамо їх почленно — ліві й праві частини. В результаті дістанемо одне сумарне скалярне рівняння

$$\sum \frac{dk_{kz}}{dt} = \sum M_{zkz} + \sum M_{vkz},$$

де сума поширюється на всі N_m точок (частинок, на які поділено тіло).

Математично правильним буде, якщо в лівій частині поміняємо місцями оператори суми й похідної. Крім того, друга сума справа — це сума всіх внутрішніх сил взаємодії між частинками тіла; як сума пар рівних за модулем і протилежних за напрямом сил на підставі закону рівності дії та протидії вона дорівнює нулю, $\sum M_{vkz} = 0$. Перша сума в правій частині є сумою моментів усіх прикладених до обертового тіла зовнішніх сил — як активних, так і реакцій в'язей; ця сума називається *обертальним моментом* і позначається через $M_{об}$. Під знаком похідної зліва — сума моментів кількостей руху частинок тіла відносно осі обертання, яку позначимо через $K_z = \sum k_{kz}$.

Отже, основне рівняння записуємо у вигляді

$$\frac{dK_z}{dt} = M_{об}. \quad (5.9)$$

Це проміжне рівняння є окремим положенням загальної теореми динаміки механічної системи, яке для випадку обертального руху тіла формулюється так: *похідна за часом від кінетичного моменту тіла в обертальному русі відносно нерухомої осі обертання дорівнює обертальному моментові всіх прикладених до тіла зовнішніх сил відносно цієї осі обертання*.

Використаємо третю з формул системи (4.17) і, відкинувши індекси в сумі, запишемо вираз для кінетичного моменту тіла в обертальному русі відносно осі обертання (рис. 5.6):

$$K_z = \sum k_{kz} = \sum m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k). \quad (5.10)$$

Визначимо кінетичний момент K_z прямим шляхом, взявши суму моментів векторів $m_k \vec{v}_k$ відносно осі Oz :

$$K_z = \sum k_{kz} = \sum m_k v_k R_k = \omega \sum m_k R_k^2,$$

де $\sum m_k R_k^2$ — момент інерції тіла відносно осі обертання. Отже, маємо

$$J_z = \sum m_k R_k^2.$$

Підставивши в основну рівність, дістанемо

$$K_z = J_z \omega. \quad (5.11)$$

Це формула кінетичного моменту тіла в обертальному русі відносно нерухомої осі обертання, за якою *кінетичний момент тіла в обертальному русі відносно осі обертання дорівнює добуткові моменту інерції тіла відносно осі обертання на його кутову швидкість*.

Тепер, маючи кінетичний момент тіла в обертальному русі відносно осі обертання, підставимо його вираз (5.11) у співвідношення (5.9) і винесемо з-під похідної момент інерції як незмінну величину за обертання тіла, а також замінимо похідну за часом від кутової швидкості кутовим прискоренням тіла. В результаті матимемо рівняння динаміки обертального руху тіла

$$J_z \varepsilon = M_{об} \quad (5.12)$$

або, скориставшись формулою кінематики $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$,

$$J_z \ddot{\varphi} = M_{об}.$$

Рівняння динаміки обертального руху в такій формі називають *диференціальним рівнянням обертального руху тіла*. В обертальному русі тіла *добуток моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення тіла дорівнює обертальному моменту*.

Далі зіставимо рівняння динаміки поступального руху (4.4) з рівняннями динаміки обертального руху (5.12), відмовившись в них від індексів:

$$ma = R, \quad J\varepsilon = M. \quad (5.13)$$

Порівнюючи вирази (5.13), бачимо, що масі тіла m , лінійному прискоренню a і рівнодійній прикладених до тіла сил R у поступальному русі відповідають момент інерції тіла J відносно осі обертання, кутове прискорення ε і обертальний момент M в обертальному русі. Крім того, зазначимо: якщо за поступального руху мірою інертності тіла (його опору зміні швидкості внаслідок дії сили R) є маса тіла, то за обертального руху аналогом міри інерційних властивостей тіла (опирання його зміні кутової швидкості внаслідок дії обертального моменту M) виступає його момент інерції J відносно осі обертання.

Звернемо увагу також на зміни лінійної і кутової швидкостей у даних двох видах руху — поступальному та обертальному — за постійних рівнодійної і обертального моменту:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{R}{m}; \quad \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{M}{J}. \quad (5.14)$$

Бачимо, що в поступальному русі (перше співвідношення) масивніші тіла в разі дії на них однієї й тієї самої сили важче піддаються зміні швидкості порівняно з тілами меншої маси. Тіло більшої маси дістає менше прискорення, ніж тіло з меншою масою, за умови, що в обох випадках діє однакова за модулем сила. Тіла більшої маси мають більшу, ніж тіла меншої маси, інерцію до зміни поступальної швидкості, сильніше намагаються зберегти ту швидкість, якої вони набули до початку дії сили.

Більша маса обертового тіла прямо не впливає на його інерційні властивості щодо зміни кутової швидкості. Більшу інерцію до збереження набутої кутової швидкості має обертове тіло з більшим моментом інерції відносно осі обертання. Два однорідних маховики з однаковими масами й різними радіусами по-різному реагуватимуть на дію одного й того самого обертального моменту: маховик, що має більший радіус, а отже, й більший момент інерції, за один і той самий час менше змінить свою кутову швидкість, ніж той, що має менший радіус, а отже, й менший момент інерції за однакової маси.

Маховики з більшим моментом інерції важче зупинити, ніж маховики з меншим моментом інерції. Миттєва зупинка маховика призведе до його поломки через великий опір швидкій зміні кутової швидкості. Щоб зупинити маховик, треба діяти на нього повільно, протягом певного часу, оскільки обертові тіла інертні до зміни кутової швидкості, яку намагаються зберегти такою, якою вона була до дії обертального моменту:

$$M = 0; \quad \omega = \omega_0 = \text{const}.$$

□ **Динаміка рівномірного обертального руху.** В природі прикладом рівномірного обертального руху тіла може бути обертання Землі навколо своєї осі, якщо знехтувати її орбітальним рухом навколо Сонця. Обертальний момент у даному випадкові нульовий, тому з рівняння динаміки обертального руху (5.12) дістаємо

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \omega = \text{const}.$$

Земля навколо своєї осі обертається рівномірно з невеликою кутовою швидкістю

$$\omega = 2\pi / (24 \cdot 60^2) = 7,272 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}.$$

Інший приклад — рівномірний обертальний рух гіроскопа — тіла, яке має вісь динамічної симетрії (центральна вісь інерції править за вісь обертання) і обертається навколо неї з великою кутовою швидкістю, що відповідає, наприклад, частоті обертання $n = 60\,000 \text{ хв}^{-1}$. Гіроскопи застосовуються в навігації, літакобудуванні тощо. В них завдяки запобіжним заходам різного роду тертя зведено до мінімуму. Орієнтація їхньої осі обертання (осі динамічної симетрії) відносно абсолютно нерухомого простору з часом не змінюється. Крім того, завдяки незначному тертю гіроскопи, приведені спеціальними двигунами в обертальний рух з великою кутовою швидкістю, досить довго зберігають її незмінною.

Подібно до закону інерції для поступального прямолінійного руху тіла можна сформулювати *закон інерції для рівномірного обертального руху тіла: якщо на тіло, яке має нерухому вісь обертання, не діють жодні обертальні моменти, то воно перебуває в стані спокою або обертається рівномірно доти, доки якісь обертальні моменти не змінять цього стану.*

Слід звернути увагу на силові відмінності між інерційним рухом, що визначається першим законом Ньютона, та обертальним інерційним рухом. За інерційного поступального руху додаткових, спричинених рухом, сил взаємодії між частинками тіла немає, є лише сили міжмолекулярних зв'язків, які забезпечують незмінюваність тіла як такого в поступальному русі. Що ж до інерційного обертального руху тіла, то тут окремі його частинки рухаються не по прямих, як у випадку інерційного поступального руху, а рівномірно по колах із доцентровими прискореннями, що надаються доцентровими силами. Доцентрова сила, прикладена до окремої частинки обертового тіла, зумовлена дією сусідніх частинок, що контактують із нею, і є рівнодійною розподілених по поверхні сил, яка обмежує виділену в тілі частинку (рис. 5.7, а).

Доцентрові сили частинок обертового тіла напрямлені по радіусах до осі обертання (рис. 5.7, а), їх векторна сума дорівнює нулю, якщо центр мас тіла знаходиться на осі обертання. За законом рівності дії та протидії з боку частинок через їхні обмежувальні поверхні до диска передаються протидійні сили, теж напрямлені по радіусу, але від осі обертання. Це так звані відцентрові сили — сили інерції Ньютона; їхні дії приводять до того, що частинки обертового тіла намагаються відійти далі від осі обертання порівняно з тим їхнім положенням, яке вони займали до обертання. Отже, в обертальному рівномірному русі тіла діють додаткові, зумовлені рухом, відцентрові сили — сили інерції (рис. 5.7, б):

$$F_{i. \text{ від}} = F_{i. \text{ доц}} = \Delta m R \omega^2, \quad (5.15)$$

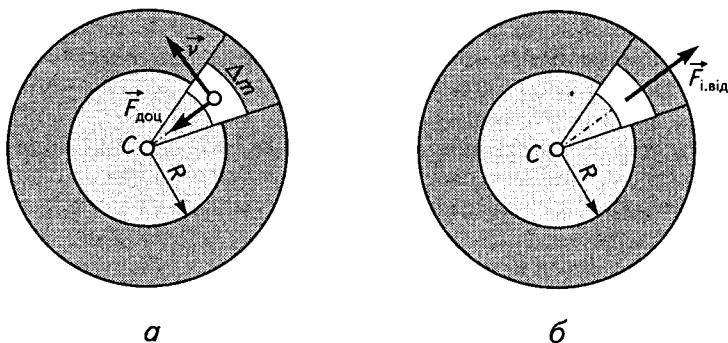


Рис. 5.7

де Δm — маса виділеної в обертовому тілі частинки; R — радіус кола, по якому рухається центр мас частинки; ω — кутова швидкість тіла. Дія цих додаткових, спричинених рухом, сил інерції призводить до напруженого стану тіла. Виникнення відцентрових сил інерції в обертовому тілі пояснюється дуже просто — проявом закону інерції. Окрема частинка обертового тіла, зберігаючи дотичний напрям своєї лінійної швидкості, намагається відійти від осі обертання на дещо більшу відстань, ніж радіус кола, на якому вона знаходиться, і внаслідок цього тисне на сусідні з нею частинки; так виникають сили інерції.

5.2

Загальні теореми динаміки обертального руху тіла

Кількість руху тіла в обертальному русі. Нехай маємо деякий довільний обертальний рух тіла з вертикальною віссю обертання OO_1 . Візьмемо нерухому декартову систему координат $Oxyz$, вісь Oz якої спрямуємо по осі обертання тіла OO_1 (рис. 5.8, а). Прийmemo, що даний обертальний рух тіла є прискореним і відбувається проти годинникової стрілки, якщо дивитися на площину Oxy зверху вниз. Позначимо масу тіла через M , а його кутову швидкість — ω . Вважатимемо також, що центр мас тіла C не збігається з віссю обертання OO_1 і знаходиться на відстані R_C від неї.

Тепер визначатимемо кількість руху тіла в обертальному русі. Для однієї точки [див. формули (4.7), (4.8)] було введено поняття кіль-

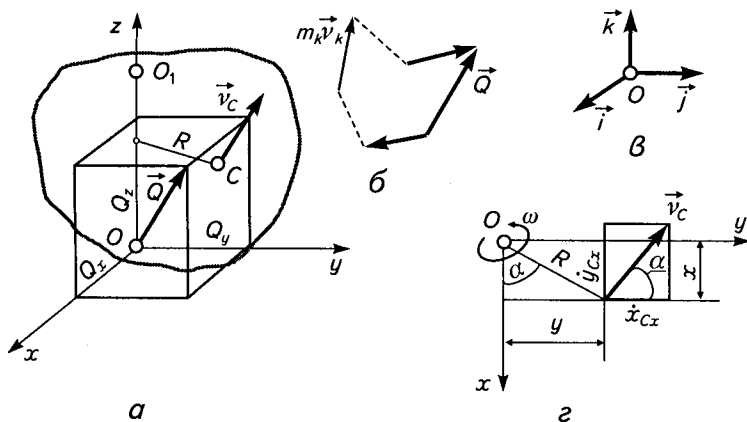


Рис. 5.8

кості руху й сформульовано відповідні теореми про кількість руху. Так само, як це зроблено під час виведення рівняння динаміки обертального руху в п. 5.1, замінимо обертове тіло системою точок, маси яких m_k , де $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$, а їхня кількість у системі N_m . Під час обертання тіла точки системи, якою замінено обертове тіло, здійснюють колові рухи з лінійними швидкостями \vec{v}_k , де $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$.

Запишемо для точок системи кількості руху $m_k \vec{v}_k$, де $k = 1, 2, 3, \dots, \dots, N_m$ (вектор кількості руху, як і вектор швидкості, має один напрям — по дотичній до кола). Введемо позначення кількості руху для точок:

$$\bar{q}_k = m_k \vec{v}_k,$$

де $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$. Візьмемо векторну суму цих N_m рівностей. Геометрично вона зображується замикальною стороною плоского векторного багатокутника, побудованого з N_m кількостей руху $m_k \vec{v}_k$ (рис. 5.8, б). Позначимо сумарний вектор, що є замикальною стороною, через \bar{Q} і назовемо його кількістю руху системи точок. Матимемо

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{N_m} \bar{q}_k = \sum_{k=1}^{N_m} m_k \vec{v}_k. \quad (5.16)$$

Кількість руху системи точок дорівнює векторній сумі кількостей руху всіх її точок.

Вектор кількості руху системи точок за способом визначення є вільним вектором. Його умовно прикладають до початку O нерухомої декартової системи координат $Oxyz$. Звичайно, формула (5.16) стосовно обертового тіла буде наближеною. Але ми можемо перейти до точної формули, записавши (5.16) так:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{N_m} m_k \bar{v}_k = \frac{d \left(\sum_{k=1}^{N_m} m_k \bar{r}_k \right)}{dt}$$

Дану суму добутоків мас точок системи на їхні радіуси-вектори, від якої береться векторна похідна за часом, можна записати інакше:

$$\sum_{k=1}^{N_m} m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C,$$

де M — маса обертового тіла; r_C — радіус-вектор центра мас C системи точок, яка замінює обертове тіло.

Здиференціювавши за часом праву частину попередньої векторної рівності в основній формулі, дістанемо

$$\bar{Q} = \frac{d \left(\sum_{k=1}^{N_m} m_k \bar{r}_k \right)}{dt} = \frac{d(M \bar{r}_C)}{dt} = M \dot{\bar{r}}_C$$

або

$$\bar{Q} = M \bar{v}_C, \quad (5.17)$$

де \bar{v}_C — швидкість центра мас системи точок.

Векторна формула (5.17) є точною й має загальний характер. *Вектор кількості руху системи точок дорівнює добутку її маси на вектор швидкості центра мас системи точок.*

Застосовуючи (5.17) для визначення кількості руху тіла в обертальному русі, слід ураховувати, що центр мас тіла описує коло з центром на осі обертання, площина якого перпендикулярна до осі обертання. Тому вектор кількості руху обертового тіла перпендикулярний до осі обертання й згідно з векторною рівністю має напрям швидкості центра мас. Вектор кількості руху \bar{Q} прикладають у початку O системи координат $Oxyz$, хоча він є вільним вектором.

Вектор кількості руху тіла в обертальному русі \bar{Q} відповідно до формули (5.17) паралельний вектору швидкості центра мас \bar{v}_C , однаково з ним напрямлений (рис. 5.8, *a*) і умовно може бути прикладений у нерухомому початку O системи координат $Oxyz$.

Введемо одиничні вектори декартових осей $Oxyz$ — орти \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} (рис. 5.8, *в*). Представимо вектор кількості руху \bar{Q} через алгебричні значення його прямокутних складових — проєкцій на декартові осі та введені орти:

$$\bar{Q} = Q_x \bar{i} + Q_y \bar{j} = \left(\sum_{k=1}^{N_m} m_k \dot{x}_k \right) \bar{i} + \left(\sum_{k=1}^{N_m} m_k \dot{y}_k \right) \bar{j} = M \dot{x}_C \bar{i} + M \dot{y}_C \bar{j};$$

$$Q_x = M\dot{x}_C, \quad Q_y = M\dot{y}_C, \quad Q_z = 0. \quad (5.18)$$

Останні три співвідношення є формулами проекцій вектора кількості руху обертового тіла на декартові осі. Третя складова вектора кількості руху в напрямі осі Oz дорівнює нулю.

Із рис. 5.8, z дістаємо проекції швидкості центра мас C тіла на декартові осі, які входять у формули (5.18), виражені через кутову швидкість тіла й координати його центра мас:

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= -v_C \sin \alpha = -R\omega \sin \alpha = -\omega y_C, \\ \dot{y}_C &= v_C \cos \alpha = R\omega \cos \alpha = \omega x_C. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Підставивши значення (5.19) у вирази (5.18), матимемо формули алгебричних прямокутних складових вектора кількості руху обертового тіла в напрямках декартових осей:

$$Q_x = -M\omega y_C, \quad Q_y = M\omega x_C. \quad (5.20)$$

Із них випливає: якщо центр мас тіла знаходиться на осі обертання, то кількість руху обертового тіла дорівнює нулю.

□ Теорема про зміну кількості руху тіла в обертальному русі.

Представимо обертове тіло як незмінювану систему дискретних точок із масами m_k ($k = 1, 2, 3, \dots, N_m$), до яких прикладені рівнодійні зовнішніх сил \vec{F}_{zk} та рівнодійні внутрішніх сил взаємодії між самими точками \vec{F}_{bk} , де $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$; їхніми проекціями на декартові осі є $F_{zkx}, F_{zky}, F_{z kz}; F_{b kx}, F_{b ky}, F_{b kz}$. До кожної з точок застосуємо теорему про зміну кількості руху точки (4.8):

$$\frac{d(m_k \dot{x}_k)}{dt} = F_{zkx} + F_{b kx}, \quad \frac{d(m_k \dot{y}_k)}{dt} = F_{zky} + F_{b ky}, \quad 0 = F_{z kz} + F_{b kz},$$

де $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$. Маємо N_m таких потрібних скалярних рівностей. Додамо їх почленно з урахуванням того, що індекс k для точок у сумі змінюється від першого номера до останнього N_m , і введемо знак суми під знак похідної:

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\sum_{k=1}^{N_m} m_k \dot{x}_k\right)}{dt} &= \sum_{k=1}^{N_m} F_{zkx} + \sum_{k=1}^{N_m} F_{b kx}, \\ \frac{d\left(\sum_{k=1}^{N_m} m_k \dot{y}_k\right)}{dt} &= \sum_{k=1}^{N_m} F_{zky} + \sum_{k=1}^{N_m} F_{b ky}, \end{aligned}$$

$$0 = \sum_{k=1}^{N_m} F_{3kz} + \sum_{k=1}^{N_m} F_{Bkz}.$$

На підставі формул (5.20) замінимо суми в лівих частинах їхніми позначеннями Q_x, Q_y , що називаються проєкціями вектора кількості руху обертового тіла на декартові осі Ox, Oy відповідно, а справа другі суми прирівнюємо до нуля, оскільки в них внутрішні сили взаємодії між точками входять парами рівних за модулем і протилежних за напрямом сил (закон рівності дії та протидії):

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} &= \sum_{k=1}^{N_m} F_{3kx}, \\ \frac{dQ_y}{dt} &= \sum_{k=1}^{N_m} F_{3ky}, \\ 0 &= \sum_{k=1}^{N_m} F_{3kz}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Формули (5.21) виражають *теорему про зміну кількості руху обертового тіла*: похідні за часом від проєкцій вектора кількості руху обертового тіла на дві перпендикулярні до його осі обертання декартові осі дорівнюють сумі проєкцій усіх зовнішніх сил, прикладених до обертового тіла, на ці самі декартові осі.

На підставі (5.18) рівняння (5.21) можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum_{k=1}^{N_m} F_{3kx} = R_{3x}, \\ M\ddot{y}_C &= \sum_{k=1}^{N_m} F_{3ky} = R_{3y}, \\ 0 &= \sum_{k=1}^{N_m} F_{3kz} = R_{3z}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

□ **Наслідки теореми про зміну кількості руху тіла в обертальному русі.** Підставимо (5.20) у формули (5.21) і здиференціюємо за часом:

$$\begin{aligned} \frac{d(-M\omega y_C)}{dt} &= \sum_{k=1}^{N_m} F_{3kx}, \\ \frac{d(M\omega x_C)}{dt} &= \sum_{k=1}^{N_m} F_{3ky}; \end{aligned}$$

$$-M(\epsilon y_C + \omega \dot{y}_C) = \sum_{k=1}^{N_m} F_{3kx},$$

$$M(\epsilon x_C + \omega \dot{x}_C) = \sum_{k=1}^{N_m} F_{3ky}.$$

Тут на підставі (5.19)

$$\begin{aligned} \dot{y}_C &= \omega x_C, \\ \dot{x}_C &= -\omega y_C. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Далі зазначимо, що в зовнішні сили, які діють на обертове тіло, входять дві категорії сил: зовнішні активні сили та зовнішні реакції в'язей. Якщо зовнішні активні сили, прикладені до k -ї точки, позначити через $\vec{F}_{a.3k}$, а зовнішні реакції в'язей, прикладених до k -ї точки, через $\vec{F}_{p.в.3k}$, то суми в правих частинах попередніх рівностей можна переписати так:

$$\sum_{k=1}^{N_m} F_{3kx} = \sum_{k=1}^{N_m} F_{a.3kx} + \sum_{k=1}^{N_m} F_{p.в.3kx} = R_{a.3x} + R_{p.в.3x},$$

$$\sum_{k=1}^{N_m} F_{3ky} = \sum_{k=1}^{N_m} F_{a.3ky} + \sum_{k=1}^{N_m} F_{p.в.3ky} = R_{a.3y} + R_{p.в.3y},$$

$$\sum_{k=1}^{N_m} F_{3kz} = \sum_{k=1}^{N_m} F_{a.3kz} + \sum_{k=1}^{N_m} F_{p.в.3kz} = R_{a.3z} + R_{p.в.3z}.$$

Величини $R_{a.3x}$, $R_{a.3y}$, $R_{a.3z}$ називаються проекціями на осі декартової системи координат $Oxuz$ головного вектора зовнішніх активних сил $\vec{R}_{a.3}$, а $R_{p.в.3x}$, $R_{p.в.3y}$, $R_{p.в.3z}$ — проекціями на осі декартової системи координат $Oxuz$ головного вектора зовнішніх реакцій в'язей $\vec{R}_{p.в.3}$, які накладені на обертове тіло. Обертове тіло закріплене у двох точках — O і O_1 . Тому з боку цих опорних точок, які належать нерухомій основі, до обертового тіла прикладаються дві зовнішні реакції — \vec{R}_O і \vec{R}_{O_1} (рис. 5.9). Тоді можемо записати

$$\begin{aligned} R_{p.в.3x} &= R_{Ox} + R_{O_1x}, \\ R_{p.в.3y} &= R_{Oy} + R_{O_1y}, \\ R_{p.в.3z} &= R_{Oz} + R_{O_1z}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

З урахуванням (5.23) і (5.24) основні рівняння наберуть такого вигляду:

$$\begin{aligned} -M(\epsilon y_C + \omega^2 x_C) &= R_{a.3x} + R_{Ox} + R_{O_1x}, \\ M(\epsilon x_C + \omega^2 y_C) &= R_{a.3y} + R_{Oy} + R_{O_1y}, \\ 0 &= R_{a.3z} + R_{Oz} + R_{O_1z}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ці три рівняння є наслідками розглянутої теореми про зміну кількості руху для випадку обертового тіла, які пов'язують кутову швидкість, кутове прискорення, абсцису й ординату центра мас тіла, реакції нерухомої осі обертання та задані зовнішні сили — їхні проекції на декартові осі. Слід зауважити, що в разі обертання тіла в нерухомій декартовій системі осей $Oxyz$ координати його центра мас змінюються з часом. Реакції опорних точок осі обертання тіла, які входять у праві частини рівностей (5.25), називаються *динамічними реакціями осі обертання тіла*.

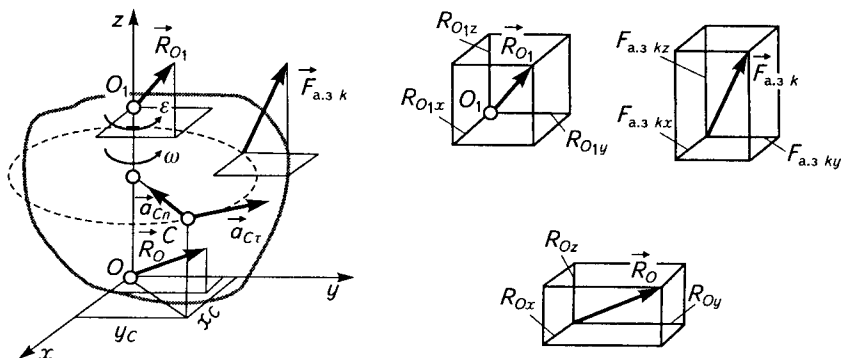


Рис. 5.9

Бачимо, що в три рівняння (5.25) входять шість невідомих проєкцій динамічних реакцій двох нерухомих точок, в яких обертове тіло закріплене на осі обертання. Щоб визначити динамічні реакції осі обертового тіла, коли відомі положення центра мас тіла, а також його кутова швидкість і кутове прискорення, треба мати ще три додаткових рівняння. Ми дістанемо їх, розглянувши теорему про зміну моменту кількості руху обертового тіла.

□ **Моменти кількості руху обертового тіла відносно декартових осей, перпендикулярних до осі обертання тіла.** Скористаємося даними рис. 5.6, на якому зображено вектор-момент кількості руху \vec{k}_{kO} виділеної в обертовому тілі k -ї частинки відносно початку O декартової системи координат $Oxyz$. Користуючися проєкцією цього

вектора на вісь Oz , $k_{kz} = m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k)$, ми вивели формулу моменту кількості руху обертового тіла відносно його осі обертання Oz (5.11), а також розглянули теорему про зміну моменту кількості руху тіла відносно його осі обертання (5.19). Тепер візьмемо проекції вектора-момента k -ї частинки обертового тіла відносно початку $O(\vec{k}_0)$ на осі Ox , Oy :

$$k_{kx} = m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k),$$

$$k_{ky} = m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k).$$

Якщо в цих рівностях індексу k надавати значень усіх натуральних чисел від 1 до N_m , де останнє натуральне число визначає кількість точок у системі, якою замінено обертове тіло, то для всіх точок запишемо формули моментів кількості руху відносно двох взятих декартових осей.

Щоб дістати шукані формули сумарних моментів кількості руху обертового тіла відносно даних двох декартових осей Ox , Oy — K_x , K_y відповідно, додамо окремо для всіх точок моменти кількостей руху відносно осі Ox і окремо — відносно осі Oy . Матимемо

$$K_x = \sum_{k=1}^{N_m} k_{kx} = \sum_{k=1}^{N_m} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k),$$

$$K_y = \sum_{k=1}^{N_m} k_{ky} = \sum_{k=1}^{N_m} m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k).$$
(5.26)

Урахуємо, що проекція вектора лінійної швидкості точки обертового тіла на вісь обертання має нульове значення, оскільки лінійні швидкості всіх точок тіла знаходяться в перпендикулярних до осі обертання площинах. Отже, замість рівностей (5.26) дістаємо простіші залежності:

$$K_x = - \sum_{k=1}^{N_m} m_k z_k \dot{y}_k,$$

$$K_y = \sum_{k=1}^{N_m} m_k z_k \dot{x}_k.$$
(5.27)

Виразимо проекції \dot{x}_k , \dot{y}_k лінійної швидкості k -ї точки \vec{v}_k на осі Ox , Oy через кутову швидкість тіла й координати k -ї точки x_k , y_k (рис. 5.10).

Із прямокутного трикутника (рис. 5.10) з гіпотенузою \vec{v}_k і катетами \dot{x}_k , \dot{y}_k дістаємо співвідношення

$$\dot{x}_k = -v_k \sin(\varphi + \alpha_k) = -\omega R_k \sin(\varphi + \alpha_k) = -\omega y_k,$$

$$\dot{y}_k = v_k \cos(\varphi + \alpha_k) = \omega R_k \cos(\varphi + \alpha_k) = \omega y_k.$$

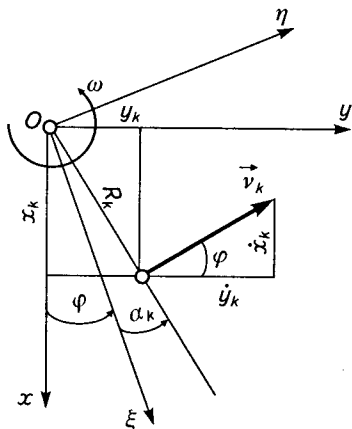


Рис. 5.10

Підставимо їх у формули (5.27), після чого вони наберуть вигляду

$$K_x = -\omega \sum_{k=1}^{N_m} m_k z_k x_k,$$

$$K_y = -\omega \sum_{k=1}^{N_m} m_k z_k y_k.$$

Суми в правих частинах — відцентрові моменти інерції тіла (5.1)

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^{N_m} m_k z_k x_k, \quad (5.28)$$

$$J_{yz} = \sum_{k=1}^{N_m} m_k z_k y_k$$

відносно відповідних декартових площин Oxz , Oyz . З урахуванням формул (5.28) і (5.1) дістаємо шукані моменти кількості руху обертового тіла відносно нерухомих декартових осей Ox , Oy , а також осі обертання Oz :

$$\begin{aligned} K_x &= -J_{xz} \omega, \\ K_y &= -J_{yz} \omega, \\ K_z &= J_z \omega. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Звернемо увагу на те, що в цих виразах кінетичних моментів обертового тіла відносно нерухомих декартових осей відцентрові моменти J_{xz} , J_{yz} з часом змінюються, бо змінюється з часом розташування самого обертового тіла відносно нерухомих площин Oxz , Oyz . Осьовий момент інерції обертового тіла J_z під час обертання тіла навколо нерухої осі Oz не змінюється, про що вже йшлося, коли розглядалися рівняння динаміки обертального руху тіла (5.12).

Величини (5.29) є алгебричними значеннями (проекціями) прямокутних складових \vec{K}_x , \vec{K}_y , \vec{K}_z у напрямках декартових осей Ox , Oy , Oz відповідно деякого вектора \vec{K}_O , який називається *кінетичним моментом обертового тіла відносно нерухомого центра O*. Із формул (5.29) бачимо, що напрями векторів прямокутних складових \vec{K}_x , \vec{K}_y кінетичного моменту \vec{K}_O протилежні додатним напрямкам осей Ox , Oy , якщо відцентрові моменти інерції обертового тіла J_{xz} , J_{yz} мають додатні значення. Візьмемо випадок, коли відцентрові моменти інерції обертового тіла від'ємні. Тоді напрями всіх трьох прямокутних складових \vec{K}_x , \vec{K}_y , \vec{K}_z збігаються з додатними напрямками декартових осей, відносно яких розглядається обертальний рух тіла.

За таких умов на рис. 5.11 побудовано кінетичний момент обертового тіла \vec{K}_O відносно нерухомого центра O за прямокутними складовими \vec{K}_x , \vec{K}_y , \vec{K}_z : вони є сторонами прямокутного паралелепіпеда, а кінетичний момент — його діагоналю.

Як уже відомо, в загальному випадкові обертального руху тіла його кінетичний момент відносно нерухомого центра O має всі три прямокутні складові в напрямі декартових осей, одна з яких — вісь Oz . Тепер з'ясуємо умови, за яких кінетичний момент обертового тіла не матиме прямокутних складових, перпендикулярних до осі обертання, й, отже, збігатиметься з нерухомою віссю обертання $OO_1(Oz)$.

Із формул (5.29) випливає, що в разі нульових відцентрових моментів інерції, $J_{xz} = J_{yz} = 0$, нерухома вісь обертання $OO_1(Oz)$, координата по якій входить спільним індексом у позначення даних двох нульових відцентрових моментів інерції обертового тіла, збігається з головною віссю інерції тіла для точки O . Робимо висновок: якщо нерухома вісь обертання тіла OO_1 для своєї точки O є головною віссю інерції тіла, то кінетичний момент обертового тіла відносно цієї точки напрямлений по осі обертання й збігається з кінетичним моментом обертового тіла відносно осі обертання (рис. 5.12).

Такий випадок можливий, наприклад, тоді, коли тіло однорідне й має площину матеріальної симетрії. Якщо з цією площиною сумістити декартову площину Oxy , то вісь Oz для точки O буде головною віссю інерції тіла (точка O — будь-яка точка на площині симетрії). Закріпимо таке симетричне тіло у двох точках, які розташовані на головній осі інерції тіла; одна з них, наприклад точка O , знаходиться на площині симетрії тіла; зокрема, вона може збігатися з центром мас тіла. В цьому разі нерухома вісь обертання тіла буде його головною центральною віссю.

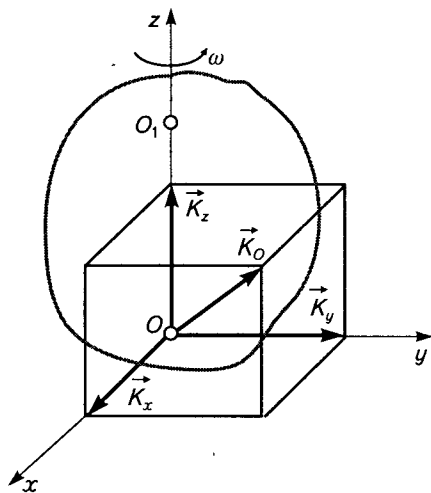


Рис. 5.11

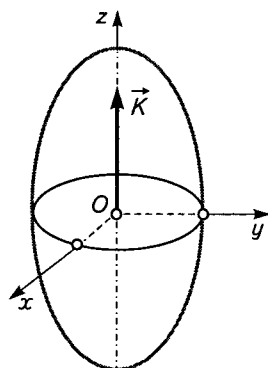


Рис. 5.12

В останньому випадкові й для тіла з віссю симетрії, наприклад еліпсоїда (рис. 5.12), кінетичний момент \vec{K} за обертання навколо осі, що збігається з головною центральною віссю інерції, направлений по цій осі.

Звернемо увагу на симетричні тіла (див. рис. 5.2—5.5). Якщо для них за нерухомі осі обертання взяти $C\zeta$ і привести тіла в обертальний рух навколо них, то кінетичний момент кожного із цих чотирьох тіл збігатиметься з нерухомою віссю обертання, яка є головною центральною віссю для всіх своїх точок. Для однорідних диска й кулі (тіл обертання) осі симетрії будуть головними центральними осями інерції. Такі осі називаються *осями динамічної симетрії*. Тому, якщо обертальний рух здійснюється навколо нерухомих осей, що збігаються з їхніми осями динамічної симетрії, то обертове тіло динамічно й статично зрівноважене. Це означає, що реакції в закріплених точках, які можуть бути спричинені обертанням, відсутні. Про динамічні реакції ітиметься ще й далі.

□ **Теорема про зміну моменту кількості руху (кінетичного моменту) обертового тіла.** Розгляд цієї теореми ґрунтується на аналогічній теоремі для однієї точки (4.19)—(4.21), а також на ідеї заміни тіла системою дискретних точок, яку ми неодноразово використовували, вивчаючи динаміку обертального руху. Нехай маємо довільний обертальний рух тіла масою M , який здійснюється навколо нерухомої осі $OO_1(Oz)$ (див. рис. 5.9) під дією зовнішніх сил — як активних $\vec{F}_{a,3k}$, так і реакцій в'язей $\vec{F}_{p,3k}$, де $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$ (система внутрішніх сил взаємодії між частинками обертового тіла як система попарно рівних за модулем і напрямом сил згідно з третім законом Ньютона дає нульову векторну суму, а також нульові суми моментів відносно декартових осей). Тут N_m — кількість частинок (точок), на які поділено обертове тіло, а також окремо кількість зовнішніх активних сил і зовнішніх реакцій в'язей.

Застосуємо формули (4.19) і (4.20), які математично виражають теорему про зміну кінетичного моменту відносно декартової системи осей Ox, z . З урахуванням введених позначень дістаємо

$$\frac{dk_{kx}}{dt} = M_{a,3kx} + M_{p,3kx},$$

$$\frac{dk_{ky}}{dt} = M_{a,3ky} + M_{p,3ky},$$

де $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$, а справа — моменти зазначених вище обох категорій сил відносно відповідних декартових осей. Таким чином, записано N_m рівнянь у проекціях на декартову вісь Ox і стільки ж рівнянь

у проекціях на вісь Oy . Далі почленно додамо N_m перших рівностей і окремо — стільки ж других рівностей. У результаті матимемо два сумарних рівняння

$$\sum_{k=1}^{N_m} \frac{dk_{kx}}{dt} = \sum_{k=1}^{N_m} M_{a.3 kx} + \sum_{k=1}^{N_m} M_{p.в.з kx},$$

$$\sum_{k=1}^{N_m} \frac{dk_{ky}}{dt} = \sum_{k=1}^{N_m} M_{a.3 ky} + \sum_{k=1}^{N_m} M_{p.в.з ky}.$$

Тепер оператори $\Sigma, \frac{d}{dt}$ поміняємо місцями (сума похідних дорівнює похідній від суми); перші суми справа — це головні моменти $M_{a.3 x}, M_{a.3 y}$ всіх заданих (активних) сил відносно відповідних осей Ox, Oy ; другі суми — головні моменти $M_{p.в.з x}, M_{p.в.з y}$ усіх зовнішніх реакцій відносно тих самих декартових осей Ox, Oy . Врахувавши це, запишемо:

$$\frac{d\left(\sum_{k=1}^{N_m} k_{kx}\right)}{dt} = M_{a.3 x} + M_{p.в.з x},$$

$$\frac{d\left(\sum_{k=1}^{N_m} k_{ky}\right)}{dt} = M_{a.3 y} + M_{p.в.з y}.$$

Тут

$$k_{kx} = m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k),$$

$$k_{ky} = m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k).$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{N_m} k_{kx} = \sum_{k=1}^{N_m} m_k (y_k \dot{z}_k - \dot{y}_k z_k) = K_x,$$

$$\sum_{k=1}^{N_m} k_{ky} = \sum_{k=1}^{N_m} m_k (z_k \dot{x}_k - \dot{z}_k x_k) = K_y.$$

Тепер, долучивши (5.9), можемо записати

$$\frac{dK_x}{dt} = M_{a.3 x} + M_{p.в.з x},$$

$$\frac{dK_y}{dt} = M_{a.3 y} + M_{p.в.з y},$$

$$\frac{dK_z}{dt} = M_{a.3 z} + M_{p.в.з z} = M_{об}.$$
(5.30)

У цих формулах, крім моментів реакцій нерухомої осі обертання тіла, враховано моменти реакцій інших в'язей, які можуть накладатися на обертове тіло й впливати на його обертальний рух. Рівності виражають *теорему про зміну кінетичного моменту обертового тіла відносно декартових осей*, одна з яких — вісь Oz — збігається з нерухомою віссю обертання тіла: *похідні за часом від кінетичних моментів обертового тіла відносно нерухомих декартових осей, одна з яких є віссю обертання тіла, дорівнюють головним моментам усіх зовнішніх сил — як активних, так і реакцій в'язей — відносно цих самих декартових осей.*

□ **Реакції нерухомих точок обертового тіла.** Далі вважатимемо, що крім опорних точок, якими обертове тіло прикріплюється до нерухомого корпусу й завдяки яким забезпечується нерухома вісь обертання, інших в'язей на обертове тіло не накладено. Тоді зовнішніми реакціями є реакції опорних точок тіла (реакції осі обертання) \bar{R}_O , \bar{R}_{O_1} , і основні рівняння (5.30) перепишуться так:

$$\begin{aligned}\frac{dK_x}{dt} &= M_{a.3x} - OO_1 \cdot R_{O_1y}, \\ \frac{dK_y}{dt} &= M_{a.3y} + OO_1 \cdot R_{O_1x}, \\ \frac{dK_z}{dt} &= M_{a.3z} = M_{ob}.\end{aligned}\tag{5.31}$$

Підставивши у перші два рівняння системи (5.31) замість K_x , K_y їхні вирази з (5.29), матимемо

$$\begin{aligned}\frac{d(J_{xz}\omega)}{dt} &= M_{a.3x} - OO_1 \cdot R_{O_1y}, \\ \frac{d(J_{yz}\omega)}{dt} &= M_{a.3y} + OO_1 \cdot R_{O_1x},\end{aligned}$$

або на підставі формул (5.28)

$$\begin{aligned}\frac{d(\omega \sum m_k x_k z_k)}{dt} &= M_{a.3x} - OO_1 \cdot R_{O_1y}, \\ \frac{d(\omega \sum m_k y_k z_k)}{dt} &= M_{a.3y} + OO_1 \cdot R_{O_1x}.\end{aligned}$$

Тут відцентрові моменти інерції обертового тіла визначаються в абсолютно нерухомій системі осей $Oxyz$ (індекси в сумах не показано). Обчислимо похідні зліва:

$$\begin{aligned} \frac{d(\omega \sum m_k x_k z_k)}{dt} &= \varepsilon \sum m_k x_k z_k + \omega \sum m_k (\dot{x}_k z_k + x_k \dot{z}_k) = \\ &= J_{xz} \varepsilon + \omega \sum m_k \dot{x}_k z_k = J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2, \\ \frac{d(\omega \sum m_k y_k z_k)}{dt} &= \varepsilon \sum m_k y_k z_k + \omega \sum m_k (\dot{y}_k z_k + y_k \dot{z}_k) = \\ &= J_{yz} \varepsilon + \omega \sum m_k \dot{y}_k z_k = J_{yz} \varepsilon - J_{xz} \omega^2. \end{aligned}$$

Знайдені похідні підставимо в попередні рівняння й запишемо результат:

$$\begin{aligned} J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2 &= M_{a.3x} - OO_1 \cdot R_{O_1y}, \\ J_{yz} \varepsilon - J_{xz} \omega^2 &= M_{a.3y} + OO_1 \cdot R_{O_1x}. \end{aligned}$$

Рівняння (5.25), два попередніх, а також рівняння динаміки обертального руху (5.12) зведемо в систему:

$$\begin{aligned} -M(\varepsilon y_C + \omega^2 x_C) &= R_{a.3x} + R_{Ox} + R_{O_1x}, \\ M(\varepsilon x_C - \omega^2 y_C) &= R_{a.3y} + R_{Oy} + R_{O_1y}, \\ 0 &= R_{a.3z} + R_{Oz} + R_{O_1z}; \\ J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2 &= M_{a.3x} - OO_1 \cdot R_{O_1y}, \\ J_{yz} \varepsilon - J_{xz} \omega^2 &= M_{a.3y} + OO_1 \cdot R_{O_1x}, \\ J_z \varepsilon &= M_{об}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Маємо повну систему шести рівнянь, що є наслідками двох загальних теорем динаміки обертального руху: теореми про кількість руху й теореми про момент кількості руху; із цієї системи рівнянь можна визначити реакції нерухомих точок O , O_1 (підшипників, в яких закріплюється вал з обертювним тілом), коли відомі інерційні характеристики тіла — маса, осьовий і два відцентрових моменти інерції, положення центра мас, а також зовнішні активні сили. Щодо кутової швидкості й кутового прискорення, які входять у систему (5.32), то вони обчислюються з її шостого рівняння, оскільки обертальний момент $M_{об}$ вважається заданою функцією часу.

Взагалі останнє з рівнянь системи (5.32) називається диференціальним рівнянням динаміки обертального руху тіла. Випишемо його окремо:

$$J_z \varepsilon = M_{об}. \tag{5.33}$$

Нехай обертальний момент є заданою функцією часу. Тоді з рівняння (5.33) знаходимо кутове прискорення й кутову швидкість:

$$\varepsilon = \frac{M_{об}}{J_z}; \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_{об}}{J_z}, \quad \omega = \omega_0 + \frac{1}{J_z} \int_{t_0}^t M_{об}(t) dt,$$

де ω_0 — кутова швидкість (початкова) у початковий момент часу t_0 .

Нехай обертальний момент є функцією кута повороту. В цьому разі кутове прискорення визначається так само, як і в попередньому випадкові. Щодо кутової швидкості застосовується такий підхід:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{d\varphi};$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{d\varphi} = \frac{M_{об}}{J_z}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2}{J_z} \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{об}(\varphi) d\varphi}. \quad (5.34)$$

Для відшукування шести невідомих R_{Ox} , R_{Oy} , R_{Oz} ; R_{O_1x} , R_{O_1y} , R_{O_1z} маємо систему, яка складається з п'яти рівнянь, бо останнє, шосте рівняння використане для визначення кінематичних характеристик обертового тіла. Отже, маємо невизначену задачу динаміки. Щоб уникнути невизначеності й дістати єдиний розв'язок задачі, треба зробити якісь припущення щодо конструктивних особливостей закріплення осі обертового тіла.

За вертикального розташування осі обертання в одній точці O можна встановити опорний підшипник (підп'ятник), а в іншій O_1 —

циліндричний (рис. 5.13). За таких конструктивних умов матимемо лише п'ять невідомих проєкцій зовнішніх реакцій — реакцій підшипників R_{Ox} , R_{Oy} , R_{Oz} ; R_{O_1x} , R_{O_1y} , в яких закріплено вал обертового тіла, та стільки ж рівнянь, в які ці реакції входять, і задача, таким чином, стає визначеною.

Зазначимо, що реакції підшипників (рис. 5.13), в яких встановлено вал обертового тіла, прикладені до самого вала з насадженням на нього обертовим тілом, і згідно із законом рівності дії та протидії з боку системи «вал—обертове тіло» підшипники зазнають тиску з такими са-

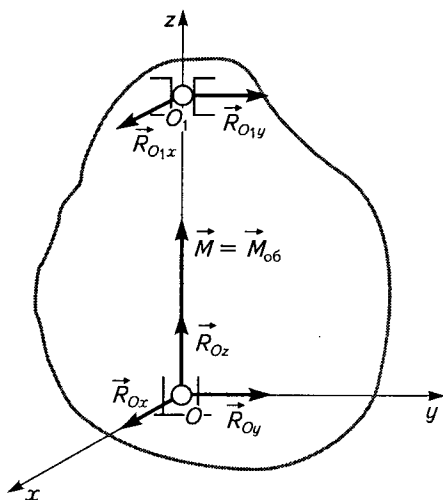


Рис. 5.13

мими модулями, але з протилежними напрямками. Цей тиск на підшипники з боку обертового тіла називається *динамічним*; він спричинений не лише зовнішніми активними силами, а й інтенсивністю обертального руху — кутовою швидкістю та кутовим прискоренням.

□ **Пара сил та її момент.** Розглянемо такий випадок силового навантаження, коли обертальний момент $M_{об}$, що діє на тіло, створюється так званою парою сил. **Пара сил** — це сукупність двох паралельних сил однакового модуля з протилежними напрямками, які розташовані на певній відстані одна від одної, тобто на різних лініях дії. Відстань між лініями дії сил пари, яка зазвичай вимірюється уздовж перпендикуляра до ліній дії сил пари, називається *плечем пари*.

Якщо плече пари позначити через H , а модуль пари сил — через F , то **модулем моменту пари сил** називатимемо добуток модуля сил пари на її плече:

$$M_{об} = FH. \quad (5.35)$$

Щоб однією величиною відобразити орієнтацію в просторі нерухомої осі обертання та напрям, в якому пара намагається повернути обертове тіло, а також інтенсивність обертальної дії пари сил, вводиться *вектор-момент пари сил* \vec{M} . За модулем відповідно до (5.35) він становить

$$M = M_{об}.$$

Вектор-момент пари сил \vec{M} збігається з віссю обертання тіла, і його напрям узгоджується з правилом правого гвинта: *вектор-момент пари сил, який збігається з віссю обертання тіла, напрямлений у бік поступального руху паралельного цій осі правого гвинта при загвинчуванні його в нерухому гайку; при цьому сили пари намагаються повернути обертове тіло (плече пари) в напрям обертання правого гвинта в гайці* (рис. 5.14).

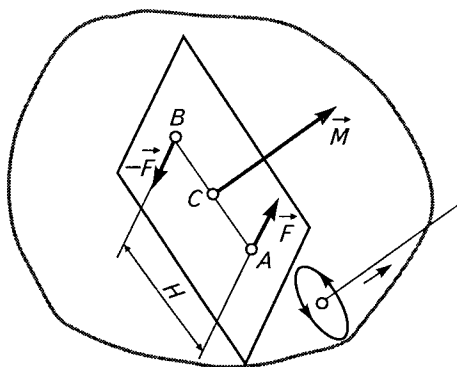


Рис. 5.14

□ **Умови, за яких динамічний тиск обертового тіла на нерухомі точки його закріплення відсутній.** У разі дії на обертове тіло обертального моменту (див. рис. 5.13) рівняння (5.32) спрощуються й набирають вигляду

$$\begin{aligned}
-M(\epsilon y_C + \omega^2 x_C) &= R_{Ox} + R_{O_1x}, \\
M(\epsilon x_C - \omega^2 y_C) &= R_{Oy} + R_{O_1y}, \\
0 &= R_{Oz}; \\
-J_{xz} \epsilon + J_{yz} \omega^2 &= -OO_1 \cdot R_{O_1y}, \\
-J_{yz} \epsilon - J_{xz} \omega^2 &= OO_1 \cdot R_{O_1x}.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь відносно невідомих реакцій у точках O , O_1 закріплення тіла у випадку рівномірного обертання:

$$\begin{aligned}
R_{Ox} &= -\omega^2 \left(Mx_C + \frac{J_{xz}}{OO_1} \right), & R_{Oy} &= -\omega^2 \left(My_C + \frac{J_{yz}}{OO_1} \right), \\
R_{O_1x} &= -\frac{J_{xz} \omega^2}{OO_1}, & R_{O_1y} &= -\frac{J_{yz} \omega^2}{OO_1}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Із двох останніх формул системи (5.36) випливає, що при $J_{xz} = J_{yz} = 0$ у циліндричному підшипникові O_1 прямокутні складові сили тиску зникають, а з перших двох рівнянь — що в підп'ятнику продовжують діяти складові реакції R_{Ox} , R_{Oy} , бо центр мас тіла зміщений відносно осі обертання.

На підставі сказаного маємо модуль повної реакції в підп'ятнику

$$R_O = M\omega^2 r_C, \tag{5.38}$$

яка напрямлена в бік доцентрового прискорення центра мас тіла \bar{a}_{Cn} (див. рис. 5.9). Існування цієї реакції пояснюється *теоремою про рух центра мас*:

$$\bar{R}_O = \bar{R}_{On} = M\bar{a}_{Cn}.$$

Центр мас обертового тіла рухається так, як рухається по колу точка, маса якої дорівнює масі обертового тіла M , під дією сили, що дорівнює реакції \bar{R}_O з боку підп'ятника. Ця сила, напрямлена до осі обертання, як і доцентрове прискорення центра мас, примушує рухатися центр мас тіла по колу радіусом r_C .

Унаслідок інерції обертового тіла його центр мас (у припущенні, що в ньому зосереджена вся маса тіла) зі швидкістю \bar{v}_C намагається зійти з кола, щоб рухатись із цією швидкістю по його дотичній, і тому тіло через зв'язки, що існують між його частинками, тисне в напрямі від осі обертання на підп'ятник, а останній, своєю чергою, за законом рівності дії та протидії тисне на обертове тіло. Отже, в даному випадкові за зміщеного відносно осі обертання центра мас обертовим рухом тіла за інерцією спричинюється реакція підп'ятника.

Якщо за нульових відцентрових моментів, $J_{xz} = J_{yz} = 0$, центр мас обертового тіла знаходиться на його осі обертання, то ніяких реакцій із боку точок закріплення тіла не виникає. Звичайно, окремі частинки тіла, рухаючися по своїх колах, унаслідок інерції намагаються зійти з них, діючи при цьому з інерційними силами на сусідні частинки. Такі інерційні сили належать до внутрішніх сил взаємодії і для тіла в цілому зрівноважуються. В обертальному русі тіла відбувається повне зрівноважування сил інерції, або мас частинок тіла.

Тепер розглянемо випадок, коли маси частинок тіла не зрівноважуються, тобто відцентрові моменти J_{xz} , J_{yz} ненульові, а центр мас обертового тіла знаходиться на його осі обертання ($x_C = y_C = 0$). У такому разі реакції в точках закріплення тіла на підставі (5.37) не дорівнюватимуть нулю, якщо тіло обертається з прискоренням ϵ :

$$R_O = R_{O_1} = \frac{1}{OO_1} \sqrt{(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)(\epsilon^2 + \omega^4)}.$$

Ці реакції, маючи однаковий модуль, напрямлені в протилежні боки й тому утворюють пару сил, момент якої назвемо *інерційним моментом* M_i , що становить

$$M_i = \sqrt{(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)(\epsilon^2 + \omega^4)}.$$

Пара з цим моментом діє на обертове тіло у вертикальній площині з боку підшипників.

Із системи рівнянь (5.36) легко визначити головний вектор R_i і головний момент M_i інерційних реакцій для найзагальнішого випадку обертального руху тіла навколо нерухомої осі за дії заданого обертального моменту (вважається, що вага тіла зрівноважується вертикальною реакцією підп'ятника):

$$R_i = M \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} r_C, \quad (5.39)$$

де r_C — радіус кола, по якому рухається центр мас обертового тіла; M — маса тіла;

$$M_i = \sqrt{(\epsilon^2 + \omega^4)(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)}. \quad (5.40)$$

З урахуванням формул (5.39), (5.40) наголосимо, що повне зрівноваження маси обертового тіла буде забезпечене в тому випадку, коли центр мас тіла знаходитиметься на його осі обертання й два відцентрових моменти інерції, в позначеннях яких міститься координата по осі обертання, дорівнюватимуть нулю, тобто коли вісь обертання правитиме за головну центральну вісь інерції.

Зважаючи на важливе практичне значення добутих результатів в інженерній практиці, розглянемо приклад на визначення опорних реакцій однорідного тонкого диска в рівномірному обертальному русі з кутовою швидкістю ω . Нехай диск має масу M , радіус r і закріплений на вертикальній осі не в центрі мас C , а в точці O_2 , яка знаходиться на відстані a від центра C диска, а площина диска утворює з горизонтальною площиною Oxy кут α (рис. 5.15). Вісь Oz проходить через точки O і O_1 закріплення диска, відстань між якими $2l = OO_1$.

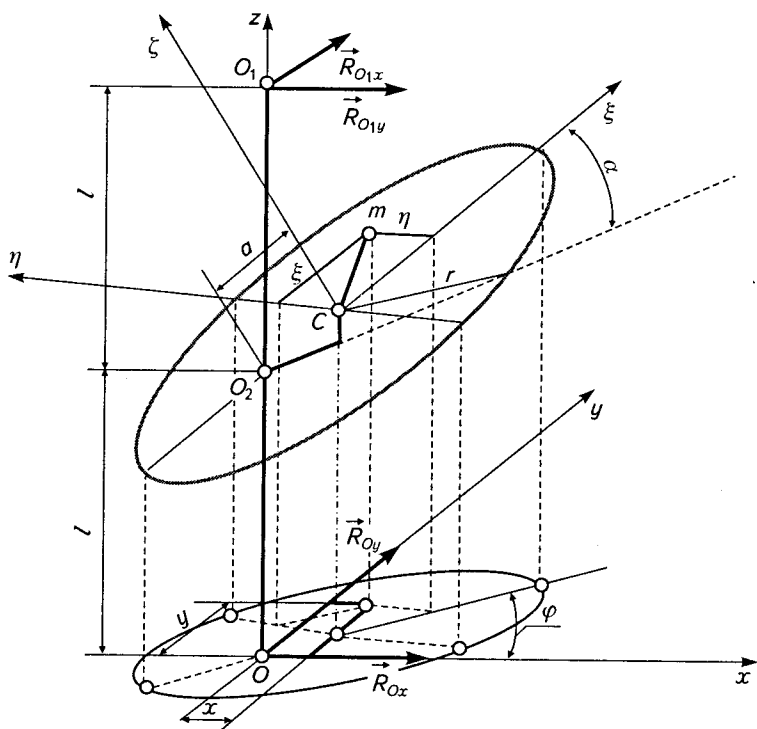


Рис. 5.15

Для спрощення процедури визначення відцентрових моментів інерції диска J_x, J_y введемо рухому систему координат $C\xi\eta\zeta$ із початком у центрі мас диска. При цьому вісь $C\xi$ спрямуємо уздовж діаметра диска, який утворює з координатною площиною Oxy заданий кут α , вісь $C\eta$ сумістимо з площиною диска. Третя вісь $C\zeta$ напрямлена від диска вгору й утворює з віссю Oz кут α .

Записуємо загальні вирази для двох відцентрових моментів:

$$J_{xz} = \sum mxz, \quad J_{yz} = \sum myz.$$

Тепер у цих формулах виразимо абсолютні координати x, y, z точок диска через їхні власні координати ξ, η, ζ . На підставі відомих формул аналітичної геометрії маємо

$$x = a \cos \alpha \cos \varphi + \xi \cos \angle(\xi, x) + \eta \cos \angle(\eta, x) + \zeta \cos \angle(\zeta, x),$$

$$y = a \cos \alpha \sin \varphi + \xi \cos \angle(\xi, y) + \eta \cos \angle(\eta, y) + \zeta \cos \angle(\zeta, y),$$

$$z = z_{O_2} + a \sin \alpha + \xi \cos \angle(\xi, z) + \eta \cos \angle(\eta, z) + \zeta \cos \angle(\zeta, z).$$

Тут φ — кут повороту диска в довільний момент часу t , який відкладається від нерухомої осі Ox у напрямі обертального руху диска, що відбувається проти годинникової стрілки, якщо дивитися зверху на площину Oxy .

Із рис. 5.15 визначаємо косинуси напрямних кутів між осями нерухомої системи координат і рухомими осями, незмінно зв'язаними з обертовим диском:

$$\cos \angle(\xi, x) = \cos \alpha \cos \varphi,$$

$$\cos \angle(\eta, x) = -\sin \varphi,$$

$$\cos \angle(\zeta, x) = -\sin \alpha \cos \varphi,$$

$$\cos \angle(\xi, y) = \cos \alpha \sin \varphi,$$

$$\cos \angle(\eta, y) = \cos \varphi,$$

$$\cos \angle(\zeta, y) = -\sin \alpha \sin \varphi,$$

$$\cos \angle(\xi, z) = \sin \alpha,$$

$$\cos \angle(\eta, z) = 0,$$

$$\cos \angle(\zeta, z) = \cos \alpha.$$

Тепер співвідношення між абсолютними координатами точок диска та їхніми власними координатами набирають вигляду

$$x = a \cos \alpha \cos \varphi + \xi \cos \alpha \cos \varphi + \eta \cos \angle(\eta, x) - \eta \sin \varphi,$$

$$y = a \cos \alpha \sin \varphi + \xi \cos \alpha \sin \varphi + \eta \cos \varphi,$$

$$z = z_{O_2} + a \sin \alpha + \xi \sin \alpha.$$

Скориставшись цими виразами, дістанемо остаточні формули для шуканих відцентрових моментів інерції диска:

$$J_{xz} = \frac{1}{2} M \left[a(l + a \sin \alpha) + \frac{1}{4} r^2 \sin \alpha \right] + \cos \alpha \cos \varphi,$$

$$J_{yz} = \frac{1}{2} M \left[a(l + a \sin \alpha) + \frac{1}{4} r^2 \sin \alpha \right] + \cos \alpha \sin \varphi.$$

Тут l — відстань між точками O, O_1 закріплення вала з диском. На підставі основних залежностей (5.39), (5.40) для головного вектора й головного моменту реакцій в'язей дістаємо їх для розглядуваного випадку:

$$R_i = M\omega^2 \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = M\omega^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi + a^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi},$$

$$R_i = M\omega^2 a \cos \alpha;$$

$$M_i = \omega^2 \sqrt{M^2 \left(a(l + a \sin \alpha) + \frac{1}{4} R^2 \sin \alpha \right) (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)},$$

$$M_i = \omega^2 M \left(a(l + a \sin \alpha) + \frac{1}{4} R^2 \sin \alpha \right) \cos \alpha.$$

Дослідимо два випадки: 1) диск закріплено на осі в його центрі; 2) диск горизонтальний.

Перша умова приводить до нульового головного вектора й ненульового головного моменту

$$M_i = \frac{1}{8} M\omega^2 R^2 \sin 2\alpha.$$

При $\alpha = 0$ маємо

$$R_i = M\omega^2 a;$$

$$M_i = \frac{1}{8} M\omega^2 al.$$

Якщо вісь обертання диска перпендикулярна до його площини й проходить через його центр мас, то маємо повне зрівноваження маси диска (інерційних сил), бо головний вектор і головний момент реакцій осі нульові, а сама вісь обертання править за головну вісь інерції диска. Ось чому, конструюючи машини, їхні обертові частини закріплюють на осях так, щоб ці осі були головними центральними осями інерції, і таким чином досягають умов, за яких динамічні тиски на підшипники відсутні.

□ **Елементарна робота сили в обертальному русі тіла.** Нехай в обертальному русі тіла на нього діють зовнішні сили \vec{F}_{3k} , де $k = 1, 2, 3, \dots, N_F$. Натуральне число N_F визначає кількість прикладених до обертового тіла сил. Як і в попередньому пункті, замінимо обертове тіло системою точок, кількість яких така сама, як і прикладених до

тіла зовнішніх сил, причому кожній точці m_k системи відповідає сила \vec{F}_{3k} , що діє на неї.

Під дією сили \vec{F}_{3k} k -та точка, до якої ця сила прикладена, на колі радіусом R_k за нескінченно малий інтервал часу dt при обертанні тіла пройде відповідний нескінченно малий шлях ds_k . На цьому елементарному шляху ds_k дотична до кола складова $\vec{F}_{3k\tau}$ сили \vec{F}_{3k} виконає елементарну роботу, яка на підставі (4.25) становитиме

$$dA_k = F_{3k\tau} ds_k.$$

Якщо $k = 1, 2, 3, \dots, N_F$, то матимемо елементарну роботу для кожної точки. Тепер візьмемо суму елементарних робіт, що їх виконують дотичні складові зовнішніх сил на відповідних елементарних переміщеннях (рис. 5.16):

$$\sum_{k=1}^{N_F} dA_k = \sum_{k=1}^{N_F} F_{3k\tau} ds_k,$$

або, використавши формулу $ds_k = R_k d\varphi$, дістанемо

$$\sum_{k=1}^{N_F} dA_k = \sum_{k=1}^{N_F} F_{3k\tau} R_k d\varphi.$$

Зліва — повна елементарна робота dA всіх зовнішніх сил на елементарному куті повороту $d\varphi$ тіла, а справа — сума моментів усіх зовнішніх сил, прикладених до обертового тіла, відносно його осі обертання, помножена на елементарний кут повороту тіла, який для всіх точок системи, котрою замінено обертове тіло, однаковий. Ця сума моментів зовнішніх сил відносно осі обертання називається *обертальним моментом*:

$$M_{об} = \sum_{k=1}^{N_F} F_{3k\tau} R_k.$$

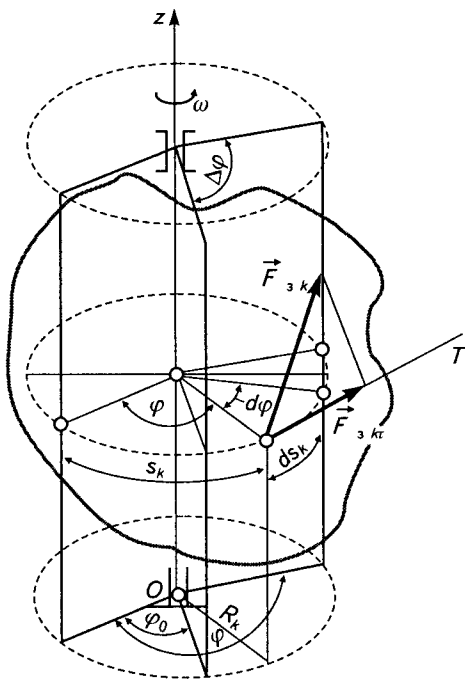


Рис. 5.16

Тепер остаточно можемо записати формулу елементарної роботи прикладених до обертового тіла зовнішніх сил:

$$dA = M_{об} d\varphi. \quad (5.41)$$

Елементарна робота обертального моменту в обертальному русі тіла дорівнює добутку обертального моменту на елементарний кут повороту тіла.

Щоб дістати повну роботу обертального моменту $M_{об}$ на якомусь скінченному кутовому переміщенні тіла $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$, від початкового значення кутової координати φ_0 до кінцевого φ_1 , треба взяти нескінченно велику суму нескінченно малих робіт, які виконуються обертальним моментом на скінченному кутовому переміщенні $\Delta\varphi$. У границі ця сума є визначеним інтегралом від елементарної роботи в межах від φ_0 до φ_1 :

$$A_{0,1} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{об} d\varphi. \quad (5.42)$$

У формулі роботи (5.42) під інтегралом обертальний момент має бути функцією кутової координати. Якщо обертальний момент залежить від часу й треба визначити роботу, то диференціал дугової координати записують як добуток кутової швидкості на диференціал часу, а кутову швидкість знаходять із рівняння динаміки обертального руху (5.33):

$$\begin{aligned} d\varphi &= \omega(t) dt; \\ J_z \frac{d\omega}{dt} &= M_{об}; \\ \omega(t) &= \omega_0 + \frac{1}{J_z} \int_{t_0}^{t_1} M_{об}(t) dt; \\ M_{об} d\varphi &= M_{об} \left[\omega_0 + \frac{1}{J_z} \int_{t_0}^{t_1} M_{об}(t) dt \right] dt; \\ A_{0,1} &= \int_{t_0}^{t_1} M_{об} \left[\omega_0 + \frac{1}{J_z} \int_{t_0}^{t_1} M_{об}(t) dt \right] dt. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Роботу обертального моменту $M_{об}$ можна обчислити також за допомогою графіка, якщо експериментально добуто криву залежності обертального моменту від кута повороту, наприклад, ведучого вала машини. На осі абсцис — горизонтальній осі кутової координати

(кута повороту) $O\varphi$ — відкладаються значення кута повороту вала $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \varphi$; $\varphi_0 = 0$, а на осі ординат — осі обертального моменту — значення самого обертального моменту $M_{об}$. Отже, в системі осей «кут повороту—обертальний момент» кожному значенню кута повороту вала з інтервалу дослідження $[0, \varphi_1]$ відповідає певне значення обертального моменту у відповідному інтервалі $[M_0, M_1]$; ці експериментально добуті значення наносяться на площині даних осей у вигляді точок, через які проводять криву обертального моменту. Тоді відповідно до геометричного змісту визначеного інтеграла на побудованому графіку в осях «кут повороту—обертальний момент» знаходять площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою обертального моменту, віссю кута повороту в межах інтервалу $[0, \varphi_1]$ і вертикальними відрізками значень обертального моменту на кінцях інтервалу кута повороту, на якому будувалася крива залежності обертального моменту від кута повороту:

$$A_{0,1} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{об} d\varphi = S_{тр}. \quad (5.44)$$

□ **Робота постійного обертального моменту. Потужність обертального моменту.** Під час усталеного руху машини її ведучий вал обертається рівномірно, оскільки прикладений до нього рушійний обертальний момент дорівнює моментові опору з боку інших частин машини. Робота постійного обертального моменту визначається із загальної формули (5.44):

$$A_{0,1} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{об} d\varphi = M_{об} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi = M_{об} (\varphi_1 - \varphi_0); \quad \varphi_0 = 0;$$

$$A = M_{об} \varphi.$$

Робота постійного обертального моменту дорівнює добутку обертального моменту на кут повороту тіла. Графічно робота постійного обертального моменту зображується площею відповідного прямокутника.

- Одиниця роботи в СІ

$$A = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ Дж}.$$

Інтенсивність (швидкість) виконання роботи обертальним моментом із часом називають потужністю обертального моменту. Формулу потужності постійного обертального моменту дістанемо, поділивши обидві частини рівності (5.44) на час, протягом якого обертальний момент виконує роботу:

$$\frac{A}{t} = M_{об} \frac{\varphi}{t}.$$

Позначивши потужність через P і врахувавши, що за рівномірного обертального руху відношення кута повороту до часу становить кутову швидкість обертання, приходимо до шуканої формули потужності постійного обертального моменту:

$$P = M_{об} \omega. \quad (5.45)$$

Потужність постійного обертального моменту дорівнює добутку обертального моменту на кутову швидкість тіла.

- Одиниця потужності в СІ

$$P = 1 \text{ Вт.}$$

Формулу потужності (5.45) можна подати інакше, записавши обертальний момент як добуток так званої колової (дотичної, наприклад, до обода силового колеса машини) сили на плече (діаметр колеса):

$$\begin{aligned} P &= M_{об} \omega = FR \frac{v}{R} = Fv, \\ P &= Fv. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Зауважимо, що обертальним моментом ми назвали суму моментів усіх прикладених до обертального тіла зовнішніх сил відносно осі обертання. Тому, якщо обертальний момент треба подати як момент пари, то слід вважати, що плече пари, якщо вона прикладена, наприклад, до колеса, дорівнює не його діаметру, а радіусові, оскільки одна сила пари прикладена до центра колеса, а інша — до його обода.

Застосуємо формулу (5.46) до пояснення механізму зміни швидкості автомобіля й колового зусилля на його ведучих колесах при перемиканні коробки передач. Від двигуна його номінальна потужність $P_{ном}$ через коробку передач і трансмісію передається до ведучих коліс автомобіля, де в зоні контакту шин із поверхнею дороги з боку коліс на поверхню з тертям діють колові зусилля (дотичні сили), а за третім законом Ньютона з боку дороги через колеса на автомобіль передаються такі самі за модулем, але протилежно напрямлені сили (сили зчеплення коліс із дорогою — це для автомобіля рушійні сили), які й спричинюють рух автомобіля.

Після перемикання передачі, наприклад, із нижчої на вищу до тієї самої ведучої шестерні коробки передач підводиться для зчеплення з нею відповідна проміжна шестірня, між ведучою від двигуна й ведучими колесами автомобіля, яка має на своєму ободі більшу

кількість зубців, а отже, більший радіус, ніж та проміжна шестірня, яка була в зачепленні з ведучою до перемикування передач.

Застосуємо формулу для ведучої і проміжної шестерень, що взаємодіють:

$$P_{\text{ном}} = F_{\text{вед}} v_{\text{вед}} = F_{\text{пром}} v_{\text{пром}}. \quad (5.47)$$

Рівність (5.47) показує, що проміжна шестірня передасть більшу колову швидкість на ведучі колеса автомобіля (більшу частоту обертання); при цьому колові зусилля — сили зчеплення між колесами й дорогою — на ободах ведучих коліс зменшаться. У скільки разів ми виграємо у швидкостях, у стільки разів програємо в силах — золоте правило механіки.

□ **Кінетична енергія тіла в обертальному русі.** Нехай маємо довільний обертальний рух тіла, який відбувається навколо нерухомої осі OO_1 із кутовою швидкістю ω . Застосуємо відому формулу кінетичної енергії однієї матеріальної точки в її довільному криволінійному русі (4.30) до випадку обертального руху тіла. Попередньо обертове тіло замінюємо на систему дискретних точок, маси яких m_k , де $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$. Система точок, якою замінено обертове тіло, здійснює навколо осі OO_1 такий самий обертальний рух, як і саме тіло. При цьому окремі точки незмінюваної системи виконують колові рухи з центром на осі обертання зі швидкостями, які для обертального руху називаються *лінійними*.

Запишемо формулу алгебричної лінійної швидкості, з якою будь-яка точка системи здійснює свій коловий рух у загальному обертальному русі:

$$\dot{s}_k = \omega R_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N_m.$$

Тут R_k — радіус колового руху точки масою m_k ; ω — спільна для всіх точок кутова швидкість.

Кінетична енергія будь-якої точки системи на підставі формули (4.30)

$$T_k = \frac{m_k \dot{s}_k^2}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N_m.$$

Візьмемо суму кінетичних енергій усіх точок, які входять до системи. В результаті замість N_m скалярних рівностей дістанемо одну сумарну скалярну величину, яка й буде кінетичною енергією системи точок, якою замінено обертове тіло:

$$\sum_{k=1}^{N_m} T_k = \sum_{k=1}^{N_m} \frac{m_k \dot{s}_k^2}{2}.$$

Суму зліва позначимо через T (як прийнято позначати кінетичну енергію). Справа замінимо лінійну швидкість добутком кутової швидкості на радіус, і утворений спільний множник $\frac{\omega^2}{2}$ винесемо за знак суми:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{N_m} m_k R_k^2.$$

У даній формулі лише кутова швидкість є точною величиною для заданого обертального руху тіла. Сума справа — це момент інерції системи точок відносно осі обертання тіла, який наближено визначає осьовий момент інерції обертового тіла. Якщо в цій наближеній формулі замість суми записати осьовий момент інерції обертового тіла, то дістанемо точну формулу кінетичної енергії тіла в обертальному русі:

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (5.48)$$

Кінетична енергія тіла в обертальному русі дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості тіла.

Кінетична енергія тіла в його поступальному русі визначається так само, як кінетична енергія однієї точки за будь-якого виду її руху. Запишемо формулу кінетичної енергії в поступальному русі тіла й порівняємо її з формулою кінетичної енергії в обертальному русі (5.48):

$$T = \frac{Mv_c^2}{2}, \quad (5.49)$$

де M — маса тіла, що є мірою його інертності в поступальному русі; v_c — швидкість поступального руху — швидкість центра мас тіла. Структура формул (5.48) і (5.49) однакова: лінійній швидкості в поступальному русі відповідає кутова швидкість в обертальному русі, а масі тіла — осьовий момент інерції. Слід звернути увагу також на квадратичну залежність кінетичної енергії від кінематичних характеристик руху — лінійних або кутових швидкостей: зі збільшенням швидкостей удвоє кінетична енергія зростає вчетверо, і навпаки.

□ **Теорема про зміну кінетичної енергії тіла в обертальному русі.** Розглядаючи теорему про зміну кінетичної енергії тіла в обертальному русі, немає потреби за основу брати теорему про зміну кінетичної енергії точки в криволінійному русі. Ми вивели її, засто-

сувавши лише одне рівняння руху із трьох, в натуральній формі, тобто рівняння руху в дотичному до траєкторії напрямі, бо в цьому напрямі під дією дотичної сили змінюється швидкість, а отже, й кінетична енергія, чого не відбувається в напрямі головної нормалі. Нормальна складова сили спричинює лише зміну напрямку швидкості точки, що не впливає на зміну кінетичної енергії.

Так само в обертальному русі лише дія обертального моменту на тіло призводить до зміни його кутової швидкості. Тому для розгляду теореми про зміну кінетичної енергії в обертальному русі застосуємо рівняння динаміки обертального руху тіла (5.12). Умови обертального руху (силовий вплив на обертове тіло, інерційні характеристики тощо) ті самі, що й при виведенні рівняння обертального руху.

За нескінченно малий час dt дія на тіло обертального моменту спричинить нескінченно мале кутове переміщення $d\varphi$ тіла, на якому обертальним моментом буде виконано елементарну роботу $dA = M_{об} d\varphi$. Дану елементарну роботу виразимо через кутове прискорення, помноживши обидві частини рівності (5.12) на елементарне кутове переміщення тіла:

$$J_z \varepsilon d\varphi = M_{об} d\varphi.$$

У лівій частині кутове прискорення виразимо через похідну за часом від кутової швидкості:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} d\varphi = M_{об} d\varphi,$$

$$J_z \frac{d\varphi}{dt} d\omega = M_{об} d\varphi,$$

$$J_z \omega d\omega = M_{об} d\varphi.$$

Тепер ліва частина дає диференціал кінетичної енергії обертового тіла:

$$d(J_z \omega^2 / 2) = M_{об} d\varphi. \quad (5.50)$$

Даний результат називається **теоремою про зміну кінетичної енергії тіла в обертальному русі в диференціальній формі**: диференціал кінетичної енергії тіла в обертальному русі дорівнює елементарній роботі обертального моменту.

Знайдемо зміну кінетичної енергії обертового тіла, якщо робота обертального моменту буде виконана на якомусь скінченному повороті тіла від початкової значення кутової координати φ_0 до іншого її значення φ_1 , не близького до початкового, тобто на кутовому переміщенні $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$. Цим не близьким за значенням дуговим коор-

динамам φ_0, φ_1 відповідають значення кутової швидкості обертового тіла ω, ω_1 . Якщо обертальний рух прискорений, то на скінченному повороті $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ тіла кінетична енергія збільшиться:

$$\Delta T = T_1 - T_0 = J_z \omega_1^2 / 2 - J_z \omega_0^2 / 2. \quad (5.51)$$

Даний приріст кінетичної енергії відбувся за рахунок виконання обертальним моментом повної роботи на скінченному переміщенні

$$A_{0,1} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{об} d\varphi. \quad (5.52)$$

Доведемо це положення, взявши визначені інтеграли від обох частин рівності (5.50) у вказаних вище межах зміни дугової координати й кутової швидкості:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{об} d\varphi; \quad (5.53)$$

$$\frac{J_z \omega_1^2}{2} - \frac{J_z \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{об} d\varphi,$$

або, замінивши праву частину за формулою (5.52):

$$J_z \omega_1^2 / 2 - J_z \omega_0^2 / 2 = A_{0,1}. \quad (5.54)$$

Отже, доведено, що в обертальному русі зміна кінетичної енергії тіла на деякому скінченному куті повороту дорівнює роботі обертального моменту на цьому куті повороту.

Зазначимо, що розглянута теорема про зміну кінетичної енергії тіла в обертальному русі (5.54) застосовується переважно в тих задачах динаміки на обертальний рух, в яких обертальні моменти постійні або залежать від кутової координати, що дає змогу обчислити їхню роботу аналітично або чисельно.

Якщо роботу обертального моменту визначено на скінченному куті повороту, то після цього, знаючи початкову кутову швидкість обертового тіла, що відповідає початковій інтервалу кутового переміщення тіла, за формулою (5.54) обчислюють кутову швидкість його наприкінці інтервалу кутового переміщення, на якому попередньо знайдено роботу обертального моменту.

ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТІЛА

6.1

Загальні теореми динаміки плоскопаралельного руху тіла

Кількість руху тіла в плоскопаралельному русі. Нехай тіло масою M здійснює деякий плоскопаралельний рух паралельно нерухомій площині Oxz , з якою суміщається площина матеріальної симетрії тіла. Позначимо в цьому русі швидкість центра мас C тіла в поточний момент часу t через \vec{v}_C . Далі, якщо координати точки C у даний момент часу x_C, y_C , то проекції вектора швидкості центра мас C тіла на декартові осі будуть $v_{Cx} = \dot{x}_C$, $v_{Cy} = \dot{y}_C$. Тоді, маючи всі необхідні величини, запишемо спочатку відому з попереднього векторну формулу кількості руху тіла в плоскопаралельному русі:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C. \quad (6.1)$$

Отже, вектор кількості руху тіла (системи точок), який умовно прикладається в нерухомому початку O системи осей $Oxyz$, паралельний вектору швидкості центра мас \vec{v}_C і однаково з ним напрямлений.

Векторна формула (6.1) справедлива в найзагальнішому випадкові руху тіла й довільної механічної системи (системи точок). За таких загальних умов вектор кількості руху має три прямокутні складові в напрямках декартових осей:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_x + \vec{Q}_y + \vec{Q}_z. \quad (6.2)$$

Алгебричні значення цих складових, як відомо, є проекціями вектора кількості руху на декартові осі й виражаються через масу механічної системи й перші похідні за часом від абсолютних координат її центра мас:

$$\begin{aligned} Q_x &= Q \cos \angle(\vec{Q}, x) = M\dot{x}_C, \\ Q_y &= Q \cos \angle(\vec{Q}, y) = M\dot{y}_C, \\ Q_z &= Q \cos \angle(\vec{Q}, z) = M\dot{z}_C. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Для тіла в плоскопаралельному русі вектор кількості руху матиме дві проекції:

$$Q_x = M\dot{x}_C, \quad Q_y = M\dot{y}_C. \quad (6.4)$$

Зазначимо, що векторна рівність (6.2) в загальному випадкові геометрично подається як прямокутний паралелепіпед при початку O системи осей $Oxyz$ із діагоналлю Q і сторонами Q_x , Q_y , Q_z відповідно. Щодо плоскопаралельного руху тіла, то замість паралелепіпеда буде прямокутник із діагоналлю Q і сторонами Q_x , Q_y .

□ **Теорема про зміну кількості руху тіла в плоскопаралельному русі.** Плоскопаралельний рух тіла відбувається під дією зовнішніх сил — як активних $\vec{F}_{a.3k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, N_F$), так і реакцій в'язей $\vec{F}_{p.v.3k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, N_F$). Проекції цих сил на декартові осі запишуться так: $F_{p.v.3kx}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, N_F$), $F_{p.v.3ky}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, N_F$), а головні вектори цих сил та їхні проекції на декартові осі — відповідно $\vec{R}_3 = \vec{R}_{a.3} + \vec{R}_{p.v.3}$; $R_{3x} = R_{a.3x} + R_{p.v.3x}$; $R_{3y} = R_{a.3y} + R_{p.v.3y}$.

Щоб вивести дану теорему, візьмемо похідні за часом від обох частин рівностей (6.4). Матимемо

$$\frac{dQ_x}{dt} = M \frac{d\dot{x}_C}{dt} = M\ddot{x}_C, \quad \frac{dQ_y}{dt} = M \frac{d\dot{y}_C}{dt} = M\ddot{y}_C.$$

Із попереднього відомо, що

$$M\ddot{x}_C = R_{3x}, \quad M\ddot{y}_C = R_{3y}.$$

Отже, приходимо до шуканої теореми:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_{3x}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_{3y}. \quad (6.5)$$

Похідна за часом від проекцій вектора кількості руху тіла в плоскопаралельному русі на дві декартові осі, паралельно яким відбувається плоскопаралельний рух, дорівнює проекціям головного вектора всіх зовнішніх сил — як активних, так і реакцій в'язей — на ці самі осі.

Скалярні рівності (6.5) є результатом алгебризації еквівалентної їм векторної рівності

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_3, \quad (6.6)$$

яка виражає *загальну теорему про зміну кількості руху будь-якої механічної системи (системи точок): похідна за часом від вектора кіль-*

кості руху механічної системи (тіла в плоскопаралельному русі) дорівнює головному векторові всіх зовнішніх сил — як активних, так і реакцій в'язей, які діють на механічну систему (тіло в плоскопаралельному русі).

Векторному рівнянню (6.6) відповідають три скалярних (теорема векторної алгебри про проекції векторної похідної на декартові осі):

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_{3x}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_{3y}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_{3z}. \quad (6.7)$$

Похідні за часом від проекцій вектора кількості руху механічної системи на декартові осі дорівнюють проекціям головного вектора прикладених до механічної системи зовнішніх сил на ці самі осі.

Зауважимо, що в нашому випадкові плоскопаралельного руху тіла $Q_z = M\dot{z}_C = 0$ і $R_{3z} = 0$. Векторну формулу (6.6) можна геометрично інтерпретувати так (рис. 6.1): швидкість руху \vec{u}_k кінця вектора кількості руху \vec{Q} тіла в плоскопаралельному русі, початок якого збігається з нерухомою точкою O , має модуль і напрям головного вектора всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла (теорема Резаля).

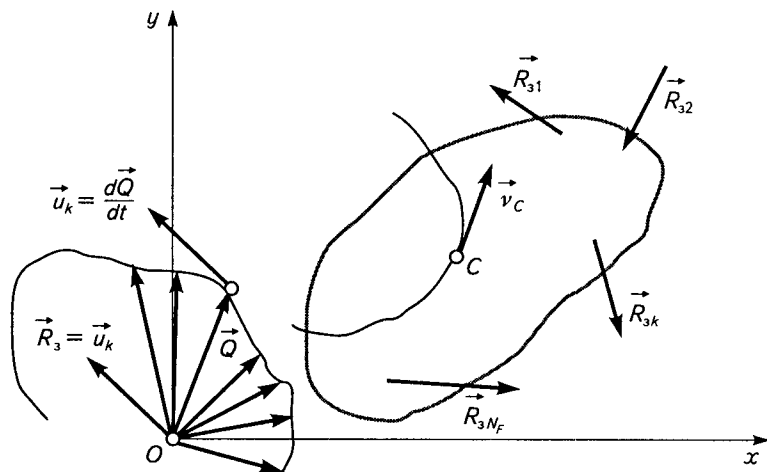


Рис. 6.1

Зрозуміло, якщо розглядається довільний рух будь-якої механічної системи, зокрема тіла, то матимемо не плоску криву, котру описує кінець вектора кількості руху в розглядуваному нами окремому випадкові руху тіла, а просторову криву на описуваній вектором кількості руху конічній поверхні.

□ **Закон збереження кількості руху тіла (механічної системи)** впливає з формул (6.6), (6.7). Якщо головний вектор зовнішніх сил \bar{R}_3 весь час дорівнює нулю, то вектор кількості руху тіла (механічної системи), а отже, і швидкість центра мас залишаються постійними як за модулем, так і за напрямком:

$$\bar{R}_3 = \frac{d\bar{Q}}{dt} = 0, \quad \bar{Q} = M\bar{v}_C = \overrightarrow{\text{const}}.$$

Якщо дві проекції головного вектора зовнішніх сил, наприклад, на осі Ox , Oy дорівнюють нулю, а проекція на вісь Oz не дорівнює нулю, то маємо рух центра мас тіла (механічної системи) по плоскій кривій, площина якої паралельна осі Oz :

$$R_{3,x} = R_{3,y} = \frac{dQ_x}{dt} = \frac{dQ_y}{dt} = 0; \quad Q_x = M\dot{x}_C = \text{const}, \quad Q_y = M\dot{y}_C = \text{const}.$$

В інтерпретації Резаля кінець вектора кількості руху рухається рівномірно по прямій, паралельній осі Oz .

Якщо ж головний вектор зовнішніх сил дає лише одну нульову проекцію, наприклад на вісь Oz , то центр мас тіла (механічної системи) рухається в просторі так, що паралельна цій осі складова швидкості центра мас не змінюється з часом, а решта дві складові змінюються будь-як:

$$R_{3,z} = \frac{dQ_z}{dt} = 0; \quad Q_z = M\dot{z}_C = \text{const}.$$

За Резалем, кінець вектора кількості руху тіла (механічної системи) рухається паралельно площині Oxy . У розглядуваних умовах плоскопаралельного руху тіла додатково $\dot{z}_C = 0$ і $z_C = 0$, тому центр мас описує плоску криву в декартовій площині Oxy .

□ **Кінетичний момент абсолютно твердого тіла в плоскопаралельному русі відносно осей поступально рухомої декартової системи координат із початком у центрі мас тіла.** Візьмемо абсолютно тверде тіло масою M (надалі називатимемо його просто тілом) і дві декартові прямокутні системи координат: одну абсолютно нерухому $Oxyz$, а іншу — поступально рухому $CXYZ$ із початком у центрі мас C тіла. При цьому система координат $CXYZ$ здійснює свій поступальний рух так, що її осі CX , CY і CZ весь час залишаються паралельними відповідним осям Ox , Oy , Oz нерухомої декартової системи координат $Oxyz$.

Нехай тіло перебуває в деякому плоскопаралельному русі, в якому його точки рухаються паралельно декартовій площині Oxy (рис. 6.2). Крім того, запровадимо третю декартову систему координат $C\xi\eta\zeta$, осі якої незмінно зв'яжемо з тілом, а початок сумістимо з

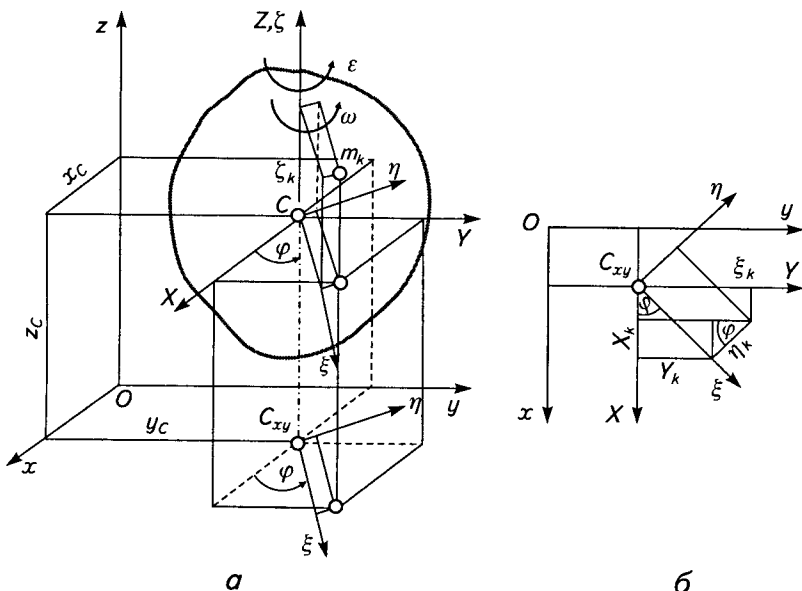


Рис. 6.2

його центром мас C . При цьому вісь $C\xi$ розташуємо паралельно осям Oz , $O\xi$. Це так звана власна для тіла система координат, за допомогою якої задають положення частинок тіла відносно самого тіла. Таким чином, третя система осей $C\xi\eta\zeta$, як і тіло, з яким вона жорстко зв'язана, відносно системи осей $Oxyz$ також рухатиметься плоскопаралельно.

Якщо за полюс взяти центр мас C тіла й координати цієї точки в нерухомій системі координат $Oxyz$ позначити через x_C, y_C, z_C , а двогранний кут між поступально рухомою площиною CXZ і власною площиною $C\xi\zeta$ — через φ , то кінематичні рівняння плоскопаралельного руху тіла матимуть вигляд

$$\begin{aligned} x_C &= x_C(t), \\ y_C &= y_C(t); \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Для виведення формул кінетичного моменту тіла обертальної складової плоскопаралельного руху відносно поступально рухомих декартових осей CX, CY, CZ маємо взяти за основу відповідні формули кінетичного моменту точки відносно нерухомих декартових осей Ox, Oy, Oz (4.17). Щоб у своїх міркуваннях можна було за основу взяти відомий вираз кінетичного моменту точки, треба дане тіло розгля-

дати як дискретну систему точок, яка під впливом тих самих зовнішніх і внутрішніх сил здійснює той самий рух, що й тіло.

Позначимо маси точок системи, якою замінено тіло, через m_k , де $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$, N_m — кількість точок у системі. Проекції швидкості k -ї точки \vec{v}_k на нерухомі декартові осі позначимо через $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$. Тоді на підставі формул (4.17) запишемо моменти кількостей руху всіх точок системи відносно декартових осей:

$$\begin{aligned} k_{kx} &= -m_k z_k \dot{y}_k, \\ k_{ky} &= m_k z_k \dot{x}_k, \\ k_{kz} &= m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Тут ураховано, що проекції швидкостей частинок тіла на вісь Oz дорівнюють нулю; прийемо, що $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$, тобто розглядатимемо по N_m проєкцій на кожну з осей Ox, Oy, Oz .

Виразимо координати x_k, y_k, z_k у нерухомих осях точок системи через їхні власні координати ξ_k, η_k, ζ_k , скориставшись рис. 6.2, а:

$$\begin{aligned} x_k &= x_C + \xi_k \cos \varphi - \eta_k \sin \varphi, \\ y_k &= y_C + \xi_k \sin \varphi + \eta_k \cos \varphi, \\ z_k &= z_C + \zeta_k. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Тепер здиференціюємо за часом рівності (6.10), урахувавши, що власні координати ідентифікують частинки тіла й від часу не залежать:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \dot{x}_C - \dot{\varphi} \xi_k \sin \varphi - \dot{\varphi} \eta_k \cos \varphi, \\ \dot{y}_k &= \dot{y}_C + \dot{\varphi} \xi_k \cos \varphi - \dot{\varphi} \eta_k \sin \varphi, \\ \dot{z}_k &= \dot{z}_C. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Підставимо (6.10) і (6.11) у вирази для моментів кількостей руху точок системи відносно нерухомих декартових осей і здійснимо відповідні математичні викладки:

$$\begin{aligned} k_{kx} &= -m_k z_k (\dot{y}_C + \dot{\varphi} \xi_k \cos \varphi - \dot{\varphi} \eta_k \sin \varphi), \\ k_{ky} &= m_k z_k (\dot{x}_C + \dot{\varphi} \xi_k \sin \varphi - \dot{\varphi} \eta_k \cos \varphi), \\ k_{kz} &= m_k [(x_C + \xi_k \cos \varphi - \eta_k \sin \varphi)(\dot{y}_C + \dot{\varphi} \xi_k \cos \varphi - \dot{\varphi} \eta_k \sin \varphi) - \\ &\quad - (y_C + \xi_k \sin \varphi + \eta_k \cos \varphi)(\dot{x}_C - \dot{\varphi} \xi_k \sin \varphi - \dot{\varphi} \eta_k \cos \varphi)]; \\ k_{kx} &= -m_k (z_C + \zeta_k)(\dot{y}_C + \dot{\varphi} \xi_k \cos \varphi - \dot{\varphi} \eta_k \sin \varphi) = \\ &= -m_k z_C \dot{y}_C - m_k \dot{y}_C \xi_k + \omega \sin \varphi z_C m_k \eta_k + \omega \sin \varphi m_k \eta_k \zeta_k - \\ &\quad - \omega \cos \varphi z_C m_k \xi_k - \omega \cos \varphi m_k \xi_k \zeta_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{ky} &= m_k (z_C + \zeta_k) (\dot{x}_C' - \dot{\varphi} \xi_k \sin \varphi - \dot{\varphi} \eta_k \cos \varphi) = \\
&= m_k z_C \dot{x}_C + m_k \zeta_k \dot{x}_C - m_k \xi_k z_C \omega \sin \varphi - m_k \xi_k \zeta_k \omega \sin \varphi - \\
&- m_k \eta_k z_C \omega \cos \varphi - m_k \eta_k \zeta_k \omega \cos \varphi, \\
k_{kz} &= m_k \dot{y}_C x_C + m_k \xi_k \dot{y}_C \cos \varphi - m_k \eta_k \dot{y}_C \sin \varphi - m_k \eta_k x_C \sin \varphi - \\
&- m_k \xi_k \eta_k \omega \cos \varphi \sin \varphi + m_k \eta_k^2 \omega \sin^2 \varphi + m_k \xi_k x_C \omega \cos \varphi + \\
&+ m_k \xi_k^2 \omega \cos^2 \varphi - m_k \xi_k \eta_k \omega \sin \varphi \cos \varphi - m_k y_C \dot{x}_C - m_k \eta_k x_C \cos \varphi - \\
&- m_k \xi_k \dot{x}_C \sin \varphi + m_k \xi_k \omega y_C \sin \varphi + m_k \xi_k \eta_k \omega \sin \varphi \cos \varphi + \\
&+ m_k \xi_k^2 \omega \sin^2 \varphi + m_k \eta_k \omega y_C \cos \varphi + m_k \eta_k^2 \omega \cos^2 \varphi + \\
&+ m_k \xi_k \eta_k \omega \sin \varphi \cos \varphi.
\end{aligned}$$

Взявши суми моментів кількостей руху всіх точок системи відносно нерухомих декартових осей, після відповідних перетворень приходимо до таких формул кінетичних моментів тіла в плоскопаралельному русі відносно цих осей:

$$\begin{aligned}
\sum k_{kx} &= K_x = -Mz_C \dot{y}_C + J_{\eta\zeta} \omega \sin \varphi - J_{\xi\zeta} \omega \cos \varphi, \\
\sum k_{ky} &= K_y = Mz_C \dot{x}_C - J_{\xi\zeta} \omega \sin \varphi - J_{\eta\zeta} \omega \cos \varphi, \\
\sum k_{kz} &= K_z = M(x_C \dot{y}_C - y_C \dot{x}_C) + J_{\zeta\zeta} \omega.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Тепер, приклавши вектор кількості руху $\vec{Q} = M\vec{v}_C$ у центрі мас тіла й розклавши його на прямокутні складові в напрямі осей Ox , Oy (рис. 6.3), знайдемо моменти кількості руху \vec{Q} тіла відносно нерухомих осей Ox , Oy , Oz :

$$\begin{aligned}
M_x(M\vec{v}_C) &= M_x(\overrightarrow{M\dot{y}_C}) = -M y_C z_C, \\
M_y(M\vec{v}_C) &= M_y(\overrightarrow{M\dot{x}_C}) = M \dot{x}_C z_C, \\
M_z(M\vec{v}_C) &= M_z(\overrightarrow{M\dot{x}_C}) + M_z(\overrightarrow{M\dot{y}_C}) = \\
&- M \dot{x}_C y_C + M y_C \dot{x}_C = M y_C \dot{x}_C - M \dot{x}_C y_C.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

З добутих формул видно: перші члени в правих частинах рівностей (6.12) є моментами кількості руху центра мас тіла відносно нерухомих декартових осей у припущенні, що маса тіла зосереджена в його центрі мас. Отже, маємо, що в поступальній частині плоскопаралельного руху тіла його кінетичний момент визначається за формулами (6.13). Інші члени в правих частинах рівностей (6.12) є кінетичними моментами тіла в обертальній складовій плоскопаралельного руху, яка відбувається навколо поступально рухомої осі CZ ($C\zeta$) відносно поступально рухомих осей CX , CY , CZ .

Випишемо окремо кінетичні моменти тіла в обертальному русі навколо поступально рухомої осі CZ ($C\zeta$) і відносно інших двох осей CX , CY поступально рухомої декартової системи координат $CXYZ$ із початком у центрі мас C тіла:

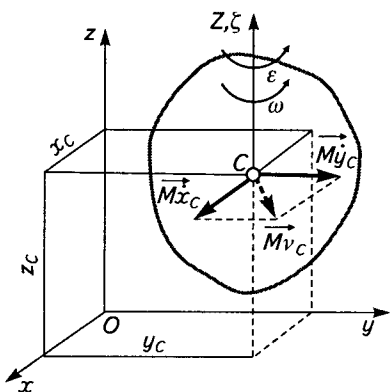


Рис. 6.3

$$\begin{aligned} K_{CX} &= J_{\eta\zeta} \omega \sin \varphi - J_{\xi\zeta} \omega \cos \varphi, \\ K_{CY} &= -J_{\xi\zeta} \omega \sin \varphi - J_{\eta\zeta} \omega \cos \varphi, \quad (6.14) \\ K_{CZ} &= J_{C\zeta} \omega. \end{aligned}$$

Тут $J_{\xi\zeta}$, $J_{\eta\zeta}$, як відомо з попереднього, є відцентровими моментами інерції тіла, які характеризують розподіл маси в тілі відносно площини $C\xi\eta$.

З'ясуємо, за яких умов величини K_{CX} , K_{CY} дорівнюватимуть нулю. З (6.14) дістаємо систему рівнянь відносно невідомих $J_{\xi\zeta}$, $J_{\eta\zeta}$:

$$\begin{aligned} -J_{\xi\zeta} \cos \varphi + J_{\eta\zeta} \sin \varphi &= 0, \\ J_{\xi\zeta} \sin \varphi + J_{\eta\zeta} \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Єдиним розв'язком цієї системи рівнянь є нульовий; це означає, що поступально рухома вісь обертання CZ ($C\zeta$) править за головну центральну вісь інерції тіла. Якщо, наприклад, тіло має матеріальну площину симетрії і його плоскопаралельний рух відбувається паралельно їй, то за таких умов кінетичний момент тіла в обертальній складовій руху матиме лише одну складову — кінетичний момент тіла відносно поступально рухомої осі, що проходить через центр мас тіла, перпендикулярно до площини матеріальної симетрії:

$$K_{CZ} = J_{C\zeta} \omega. \quad (6.15)$$

Кінетичний момент тіла з площиною матеріальної симетрії в плоскопаралельному русі, який здійснюється паралельно даній площині симетрії, відносно поступально рухомої осі, що проходить через центр мас тіла, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на його момент інерції відносно цієї самої поступально рухомої осі.

Перепишемо (6.12) з урахуванням введених позначень:

$$\begin{aligned} K_x &= M_x(M\bar{v}_C) + K_{CX}, \\ K_y &= M_y(M\bar{v}_C) + K_{CY}, \\ K_z &= M_z(M\bar{v}_C) + K_{CZ}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Кінетичний момент тіла в плоскопаралельному русі відносно нерухомої осі дорівнює кінетичному моменту його центра мас відносно цієї самої осі в припущенні, що в ньому зосереджена вся маса тіла, плюс кінетичний момент тіла відносно поступально рухомої осі, яка проходить через центр мас тіла паралельно нерухомій осі.

Замість трьох скалярних рівностей (6.16) можна записати одну векторну:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_{\text{пост } O} + \vec{K}_{\text{об } C}. \quad (6.17)$$

Кінетичний момент тіла в плоскопаралельному русі відносно нерухомого центра дорівнює векторній сумі кінетичного моменту відносно цього самого центра поступальної складової руху та кінетичного моменту відносно центра мас обертальної складової руху (рис. 6.4). Векторну формулу (6.17) подамо в інших позначеннях:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_{C O} + \vec{K}_{\text{відн } C}, \quad (6.18)$$

де $\vec{K}_{C O}$ — кінетичний момент вектора кількості руху механічної системи $M\vec{v}_C$, прикладеного до її центра мас, відносно нерухомої точки O ; $\vec{K}_{\text{відн } C}$ — кінетичний момент механічної системи відносно поступально рухомої системи осей із початком у центрі мас системи.

Векторній формулі (6.18) відповідають три еквівалентні їй алгебризовані скалярні рівності

$$\begin{aligned} K_x &= K_{Cx} + K_{\text{відн } Cx}, \\ K_y &= K_{Cy} + K_{\text{відн } Cy}, \\ K_z &= K_{Cz} + K_{\text{відн } Cz}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

де

$$\begin{aligned} K_{Cx} &= M(y_C \dot{z}_C - z_C \dot{y}_C), \\ K_{Cy} &= M(z_C \dot{x}_C - x_C \dot{z}_C), \\ K_{Cz} &= M(x_C \dot{y}_C - y_C \dot{x}_C); \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} K_{\text{відн } Cx} &= \sum m_k (Y_k \dot{Z}_k - \dot{Y}_k Z_k), \\ K_{\text{відн } Cy} &= \sum m_k (Z_k \dot{X}_k - \dot{Z}_k X_k), \\ K_{\text{відн } Cz} &= \sum m_k (X_k \dot{Y}_k - Y_k \dot{X}_k). \end{aligned} \quad (6.21)$$

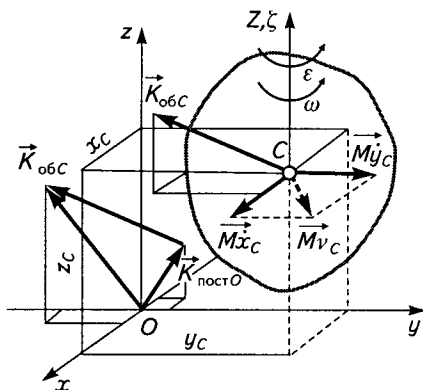


Рис. 6.4

Зазначимо, що у формулах (6.20) і (6.21) відносні кінетичні моменти $K_{\text{відн } CX}$, $K_{\text{відн } CY}$, $K_{\text{відн } CZ}$ визначаються відносно поступально рухомих осей OX , OY , OZ відповідно.

□ **Теорема про зміну кінетичного моменту тіла в плоскопаралельному русі.** Нехай деякий плоскопаралельний рух тіла відбувається відносно нерухомої декартової системи координат $Oxyz$ паралельно площині Oxy під дією зовнішніх сил \vec{F}_{zk} , де $k = 1, 2, 3, \dots, N_F$; N_F — кількість сил, що діють на тіло.

Щоб, виводячи теорему про зміну кінетичного моменту тіла в плоскопаралельному русі, взяти за основу відому вже теорему про зміну моменту кількості руху точки, до суцільного тіла доведеться застосувати дискретний підхід.

Тіло в даному виді руху замінюємо системою дискретних точок, маси яких m_k , де $k = 1, 2, 3, \dots, N_m$; N_m — кількість точок у системі, яка дорівнює кількості N_F прикладених до тіла сил; при цьому до точки масою m_k прикладена відповідна сила \vec{F}_{zk} . До зовнішніх сил належать як активні сили, так і реакції в'язей, отже, під силою \vec{F}_{zk} слід розуміти рівнодійну активної сили $\vec{F}_{a.zk}$ і реакції в'язі $\vec{F}_{p.v.zk}$, тобто $\vec{F}_{zk} = \vec{F}_{a.zk} + \vec{F}_{p.v.zk}$. Внутрішні сили взаємодії між точками вилучаються із сумарних рівнянь (закон рівності дії та протидії), тому їх не розглядатимемо.

На підставі формул (4.19) і (4.20), записавши для системи точок, якою замінено тіло в плоскопаралельному русі, по N_m рівнянь руху в напрямі кожної з трьох нерухомих декартових осей Ox , Oy , Oz і додавши їх з вилученням еквівалентних нулю внутрішніх сил взаємодії, дістанемо такі сумарні скалярні рівняння:

$$\sum \frac{dk_{kx}}{dt} = \sum M_{zkx},$$

$$\sum \frac{dk_{ky}}{dt} = \sum M_{zky},$$

$$\sum \frac{dk_{kz}}{dt} = \sum M_{zkz}$$

або, помінявши місцями оператори \sum , $\frac{d}{dt}$,

$$\frac{d\sum k_{kx}}{dt} = \sum M_{zkx}, \quad \frac{d\sum k_{ky}}{dt} = \sum M_{zky}, \quad \frac{d\sum k_{kz}}{dt} = \sum M_{zkz}.$$

Далі суми під знаком похідної замінимо відповідними *кінетичними моментами* тіла в плоскопаралельному русі відносно нерухомих декартових осей:

$$K_x = \sum k_{kx}, \quad K_y = \sum k_{ky}, \quad K_z = \sum k_{kz},$$

а справа — сумарними моментами

$$M_{zx} = \sum M_{z kx}, \quad M_{zy} = \sum M_{z ky}, \quad M_{zz} = \sum M_{z kz},$$

які називаються *головними моментами зовнішніх сил, прикладених до тіла, відносно нерухомих декартових осей*:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= M_{zx}, \\ \frac{dK_y}{dt} &= M_{zy}, \\ \frac{dK_z}{dt} &= M_{zz}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Це теорема про зміну кінетичного моменту, яка справедлива не лише для тіла в плоскопаралельному русі, а й у найзагальнішому випадковій руху будь-якої механічної системи. Трьом даним скалярним рівностям відповідає еквівалентне їм векторне рівняння

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_{zO}. \tag{6.23}$$

Перейдемо від теореми (6.22) в абсолютно нерухомих осях $Oxyz$ до теореми в поступально рухомих осях $SXYZ$ (див. рис. 6.2). Для цього в рівностях (6.22) замінимо величини K_x, K_y, K_z сумою їхніх складових відповідно до формул (6.13):

$$\begin{aligned} \frac{d[M_x(M\vec{v}_C) + K_{Cx}]}{dt} &= M_{zx}, \\ \frac{d[M_y(M\vec{v}_C) + K_{Cy}]}{dt} &= M_{zy}, \\ \frac{d[M_z(M\vec{v}_C) + K_{Cz}]}{dt} &= M_{zz}. \end{aligned}$$

До лівих частин застосуємо положення математики про те, що похідна від суми функцій дорівнює сумі похідних від цих функцій:

$$\begin{aligned} \frac{d[M_x(M\vec{v}_C)]}{dt} + \frac{dK_{Cx}}{dt} &= M_{zx}, \\ \frac{d[M_y(M\vec{v}_C)]}{dt} + \frac{dK_{Cy}}{dt} &= M_{zy}, \\ \frac{d[M_z(M\vec{v}_C)]}{dt} + \frac{dK_{Cz}}{dt} &= M_{zz}. \end{aligned}$$

У перших членах лівої частини під знаком похідних замінимо кінетичні моменти в поступальній складовій руху тіла їхніми значеннями з формул (6.13) і здиференціюємо:

$$\begin{aligned} -M\ddot{y}_C z_C - M\dot{y}_C \dot{z}_C + \frac{dK_{Cx}}{dt} &= M_{3x}, \\ M\ddot{x}_C z_C + M\dot{x}_C \dot{z}_C + \frac{dK_{Cy}}{dt} &= M_{3y}, \\ M\dot{y}_C x_C + M\dot{y}_C \dot{x}_C - M\ddot{x}_C y_C - M\dot{x}_C \dot{y}_C + \frac{dK_{Cz}}{dt} &= M_{3z}. \end{aligned}$$

Оскільки плоскопаралельний рух тіла відбувається паралельно декартовій площині Oxy , то $\dot{z}_C = 0$, а також у третій рівності знищуються однакові члени з протилежними знаками. Отже, приходимо до таких співвідношень:

$$\begin{aligned} -M\ddot{y}_C z_C + \frac{dK_{Cx}}{dt} &= M_{3x}, \\ M\ddot{x}_C z_C + \frac{dK_{Cy}}{dt} &= M_{3y}, \\ M\dot{y}_C x_C - M\ddot{x}_C y_C + \frac{dK_{Cz}}{dt} &= M_{3z}. \end{aligned}$$

Далі скористаємося рівняннями (4.7), які описують динаміку поступального руху тіла, замінивши в них m на M , а також урахувавши, що за плоскопаралельного руху $\ddot{z}_C = 0$:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_{3x}, \\ M\ddot{y}_C &= R_{3y}, \\ 0 &= R_{3z}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Справа маємо так звані проекції головного вектора всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла в плоскопаралельному русі, на осі нерухомої декартової системи координат. На підставі останніх співвідношень зробимо відповідну заміну в попередніх основних рівностях і прийдемо до таких рівнянь:

$$\begin{aligned} -z_C R_{3y} z_C + \frac{dK_{Cx}}{dt} &= M_{3x}, \\ z_C R_{3x} + \frac{dK_{Cy}}{dt} &= M_{3y}, \\ x_C R_{3y} - y_C R_{3x} + \frac{dK_{Cz}}{dt} &= M_{3z}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Праві частини цих співвідношень подамо так:

$$\begin{aligned}M_{3x} &= \sum (y_k F_{3kz} - z_k F_{3ky}), \\M_{3y} &= \sum (z_k F_{3kx} - x_k F_{3kz}), \\M_{3z} &= \sum (x_k F_{3ky} - y_k F_{3kx}).\end{aligned}$$

Тепер виразимо координати x_k, y_k, z_k точок прикладання сил \vec{F}_{3k} у нерухомій системі осей $Oxyz$ через їхні координати в поступально рухомій системі осей $CXYZ$:

$$\begin{aligned}x_k &= x_C + X_k, \\y_k &= y_C + Y_k, \\z_k &= z_C + Z_k.\end{aligned}$$

Підставимо ці співвідношення в праві частини попередніх рівностей і здійснимо відповідні математичні викладки:

$$\begin{aligned}M_{3x} &= \sum [(y_C + Y_k)F_{3kz} - (z_C + Z_k)F_{3ky}], \\M_{3y} &= \sum [(z_C + Z_k)F_{3kx} - (x_C + X_k)F_{3kz}], \\M_{3z} &= \sum [(x_C + X_k)F_{3ky} - (y_C + Y_k)F_{3kx}]; \\M_{3x} &= y_C R_{3z} - z_C R_{3y} + M_{3x}, \\M_{3y} &= z_C R_{3x} - x_C R_{3z} + M_{3y}, \\M_{3z} &= x_C R_{3y} - y_C R_{3x} + M_{3z}.\end{aligned}$$

Підставимо ці значення в рівності (6.25):

$$\begin{aligned}-z_C R_{3y} + \frac{dK_{CX}}{dt} &= y_C R_{3z} - z_C R_{3y} + M_{3x}, \\z_C R_{3x} + \frac{dK_{CY}}{dt} &= z_C R_{3x} - x_C R_{3z} + M_{3y}, \\-x_C R_{3y} - y_C R_{3x} + \frac{dK_{CZ}}{dt} &= x_C R_{3y} - y_C R_{3x} + M_{3z}.\end{aligned}$$

Знищивши однакові члени й урахувавши (6.24), дістаємо

$$\begin{aligned}\frac{dK_{CX}}{dt} &= M_{3x}, \\ \frac{dK_{CY}}{dt} &= M_{3y}, \\ \frac{dK_{CZ}}{dt} &= M_{3z}.\end{aligned}\tag{6.26}$$

Рівності (6.26) виражають *теорему про зміну кінетичного моменту тіла в плоскопаралельному русі відносно поступально рухомої системи координат із початком у центрі мас тіла в проєкціях на осі цієї самої системи координат*: похідні за часом від кінетичних моментів тіла в плоскопаралельному русі відносно осей поступально рухомої системи декартових координат із початком у центрі мас тіла дорівнюють головним моментам прикладених до тіла зовнішніх сил відносно цих самих осей.

Дамо геометричну інтерпретацію векторної теореми (6.23), що справедлива й у плоскопаралельному, й у довільному русі не лише тіла, а й будь-якої механічної системи. Кінетичний момент \vec{K}_O механічної системи, початок вектора якого знаходиться в нерухомому центрі O , під час руху механічної системи змінюється як за модулем, так і за напрямом. Тому кінцева точка вектора \vec{K}_O у нерухомому просторі в системі осей $Oxuz$ описуватиме просторову криву, так званий годограф кінетичного моменту, а сам вектор \vec{K}_O — конічну поверхню з вершиною в точці O (рис. 6.5). Позначимо кінець вектора \vec{K}_O через k , а його швидкість через \vec{u}_k . Кінетичний момент \vec{K}_O є для свого кінця k радіусом-вектором, а похідна за часом від радіуса-вектора \vec{K}_O дорівнює швидкості його кінця \vec{u}_k , тобто дістаємо

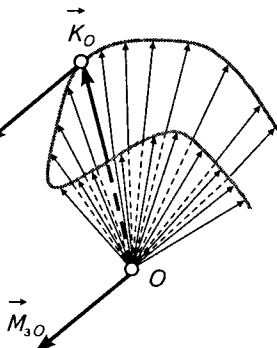


Рис. 6.5

$$\vec{u}_k = \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_{3O}. \quad (6.27)$$

Отже, прийшли до *геометричної теореми Резаля*: швидкість, з якою кінець вектора кінетичного моменту механічної системи відносно нерухомого центра описує його годограф, за модулем і напрямом дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно цього самого центра (рис. 6.5).

□ **Закон збереження кінетичного моменту.** Розглянемо наслідки теореми про зміну кінетичного моменту механічної системи, записаної в основній формі (6.23) або у формі Резаля (6.27). Нехай на механічну систему або тіло діють такі зовнішні сили, що їхній головний момент відносно нерухомого центра дорівнює нулю. Тоді з цих рівнянь випливає незмінність кінетичного моменту відносно нерухомого центра:

$$\vec{M}_{3O} = \vec{u}_k = \frac{d\vec{K}_O}{dt} = 0, \quad \vec{K}_O = \overrightarrow{\text{const}}. \quad (6.28)$$

Це й є закон збереження кінетичного моменту механічної системи або тіла.

Якщо головний момент зовнішніх сил механічної системи (тіла) відносно нерухомого центра не дорівнює нулю, а нульовими є два з трьох головних моментів відносно декартових осей, наприклад Ox , Oy , то за скалярними формулами (6.22) дістаємо незмінність проєкції вектора кінетичного моменту на декартову площину Oxy :

$$\begin{aligned} M_{3x} &= \frac{dK_x}{dt} = 0, & K_x &= \text{const} = C_x, \\ M_{3y} &= \frac{dK_y}{dt} = 0, & K_y &= \text{const} = C_y; \\ K_{xy} &= \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \text{const} = C_{xy}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Підсумовуємо: механічна система (тіло) здійснює рух, під час якого вектор кінетичного моменту, змінюючися за модулем і напрямом, знаходиться в одній і тій самій площині, яка перпендикулярна до осей координат Oxy .

Якщо один із трьох головних моментів зовнішніх сил відносно декартових осей, наприклад відносно осі Oz , є нульовим, то з тих самих скалярних рівнянь випливає

$$\frac{dK_z}{dt} = M_{3z} = \frac{dK_z}{dt} = 0, \quad K_z = \text{const}. \quad (6.30)$$

Висновок: *прямокутна складова кінетичного моменту в напрямі осі Oz не змінюється, й унаслідок цього кінець вектора кінетичного моменту описує плоску криву паралельно декартовій площині Oxy .*

□ **Умови динамічного зрівноважування тіла в плоскопаралельному русі.** Для розгляду цього питання скористаємося рівняннями (6.26) і підставимо в них величини з (6.14):

$$\begin{aligned} \frac{d(J_{\eta\zeta} \omega \sin \varphi - J_{\xi\zeta} \omega \cos \varphi)}{dt} &= M_{3x}; \\ \frac{d(-J_{\xi\zeta} \omega \sin \varphi - J_{\eta\zeta} \omega \cos \varphi)}{dt} &= M_{3y}; \\ \frac{d(J_{Cz} \omega)}{dt} &= M_{3z}. \end{aligned}$$

Тут φ, ω — функції часу; відцентрові моменти інерції тіла постійні в часі, бо вони визначені відносно власної декартової системи координат, незмінно зв'язаних із тілом. Здиференціюємо:

$$\begin{aligned} J_{\eta\zeta}(\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi) - J_{\xi\zeta}(\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) &= M_{3X}, \\ -J_{\eta\zeta}(\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) - J_{\xi\zeta}(\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi) &= M_{3Y}, \quad (6.31) \\ J_{C\zeta} \varepsilon &= M_{3CZ}. \end{aligned}$$

Перші два рівняння системи (6.31) показують: для забезпечення плоскопаралельного руху тіла потрібно, щоб із боку зовнішніх тіл діяли сили, які створювали б моменти відносно поступально рухомих осей $CXYZ$, аби компенсувати інерційні моменти з боку рухомого тіла (згідно з третім законом Ньютона):

$$\begin{aligned} M_{iX} &= -M_{3X} = -J_{\eta\zeta}(\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi) + J_{\xi\zeta}(\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi), \quad (6.32) \\ M_{iY} &= -M_{3Y} = J_{\eta\zeta}(\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) + J_{\xi\zeta}(\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi). \end{aligned}$$

Бачимо, що інерційні моменти спричинені рухом тіла — його кутовою швидкістю та кутовим прискоренням, положенням відносно поступально рухомої системи осей, а також несиметричним розподілом у ньому маси відносно площини, яка паралельна руху тіла й проходить через його центр мас.

Останнє рівняння системи (6.31) показує, що за ненульового головного моменту зовнішніх сил відносно поступально рухомої осі CZ у загальному випадкові плоскопаралельного руху тіла його кутова швидкість і кутове прискорення не дорівнюють нулю — прискорення або сповільнений обертальний рух навколо поступально рухомої осі. Тому з рівнянь (6.32) випливає, що інерційні моменти з боку рухомого тіла не діятимуть, якщо воно буде динамічно зрівноважене, тобто у випадку рівності нулю відцентрових моментів інерції тіла, $J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0$. Це означає, що поступально рухома вісь $CZ(C\zeta)$ править за головну центральну вісь інерції тіла для його центра мас C . Отже, маємо

$$\begin{aligned} M_{iX} &= -M_{3X} = 0, \\ M_{iY} &= -M_{3Y} = 0. \end{aligned}$$

Звідси дістаємо

$$M_{3X} = M_{3Y} = 0.$$

Так, якщо тіло має площину матеріальної симетрії і рухається плоскопаралельно цій площині, то на зовнішні тіла, з якими воно взаємодіє, з боку нього не діятимуть інерційні моменти, а отже, для забезпечення заданого плоскопаралельного руху тіла до нього не

треба прикладати зовнішніх моментів відносно поступально рухомих осей, паралельних площині симетрії тіла. Наприклад, шатун кривошипно-шатунного механізму (див. рис. 4.1) має площину матеріальної симетрії, паралельну площині його руху, тому під час руху механізму шатун не діє на сусідні ланки з додатковими силами, які створюють моменти відносно поступально рухомих осей із початком у центрі мас шатуна, паралельних нерухомих осям.

Третє рівняння системи (6.31) — це рівняння динаміки обертальної складової плоскопаралельного руху тіла. Випишемо його окремо від двох інших рівнянь:

$$J_{Cz} \varepsilon = M_{zCz}. \quad (6.33)$$

За законом рівності дії та протидії головному моментові зовнішніх сил M_{zCz} відповідає інерційний момент M_{iCz} , який діє з боку тіла й спричинений прискореним рухом обертальної складової плоскопаралельного руху. Даний інерційний момент M_{iCz} прикладений до зовнішніх тіл, які змінюють кутову швидкість тіла під час його обертання навколо полюса C (осі CZ). Він, очевидно, становить

$$M_{iCz} = -M_{zCz} = -J_{Cz} \varepsilon. \quad (6.34)$$

Бачимо, що інерційний момент M_{iCz} тіла залежить від його кутового прискорення ε та осьового моменту інерції J_{Cz} , за напрямом протилежний прискореному обертальному рухові тіла навколо центра мас C і за модулем дорівнює добутку осьового моменту інерції J_{Cz} тіла на його кутове прискорення ε .

□ **Рівняння динаміки плоскопаралельного руху тіла.** Як відомо, плоскопаралельний рух тіла складається з двох видів руху: поступального разом із центром мас C і обертального навколо центра мас C . Тому, щоб дістати повну систему рівнянь динаміки плоскопаралельного руху тіла, треба записати три рівняння, які описують рух центра мас C — поступальний рух тіла, й три рівняння, що описують обертальний рух навколо центра мас C :

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_{3x}, \\ M\ddot{y}_C &= R_{3y}, \\ 0 &= R_{3z}; \\ J_{\eta\zeta} (\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi) - J_{\xi\xi} (\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) &= M_{3Cx}, \\ -J_{\eta\zeta} (\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) - J_{\xi\xi} (\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi) &= M_{3Cy}, \\ J_{Cz} \varepsilon &= M_{3Cz}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Рівняння (6.35) показують, що коли за вісь, навколо якої обертається тіло в плоскопаралельному русі, править поступально рухома вісь $C\zeta$, яка не є головною віссю інерції тіла для його центра мас C , то для забезпечення плоскопаралельного руху тіла мають прикладатися такі зовнішні сили \vec{F}_{3k} , де $k = 1, 2, 3, \dots, N_F$, які дають ненульові проєкції R_{3x} , R_{3y} головного вектора \vec{R}_3 зовнішніх сил на нерухомі осі, головні моменти зовнішніх сил відносно поступально рухомих осей M_{3x} , M_{3y} і головний момент зовнішніх сил відносно поступально рухомих осей M_{3z} . Проекція головного вектора зовнішніх сил R_{3z} на нерухому вісь Oz , як видно з третього рівняння системи (6.35), дорівнює нулю.

Якщо ж поступально рухома вісь $C\zeta$, взята за вісь, навколо якої в плоскопаралельному русі обертається тіло, є головною віссю інерції тіла для його центра мас C , то відцентрові моменти інерції тіла $J_{\xi\xi}$, $J_{\eta\eta}$, які входять до лівих частин четвертого й п'ятого рівнянь системи (6.35), дорівнюють нулю, $J_{\xi\xi} = J_{\eta\eta} = 0$. У такому разі головні моменти зовнішніх сил M_{3x} , M_{3y} відносно поступально рухомих осей CX , CY , паралельних основній площині Oxy , перетворюються в нуль, і рівняннями динаміки плоскопаралельного руху тіла буде система трьох рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_{3x}, \\ M\ddot{y}_C &= R_{3y}, \\ J_{C\zeta} \varepsilon &= M_{3\zeta}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Перші два рівняння цієї системи описують поступальну частину руху, а третє — обертальну; їм відповідає одне векторне рівняння

$$M\vec{a}_C = \vec{R}_3,$$

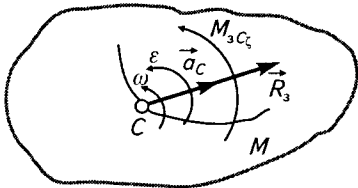


Рис. 6.6

згідно з яким поступальна складова плоскопаралельного руху тіла з площиною матеріальної симетрії, що проходить через його центр мас і паралельно якій тіло рухається, відбувається так, нібито до центра мас, в якому зосереджена вся маса тіла, прикладений головний вектор зовнішніх сил, що надає центру мас прискорення \vec{a}_C (рис. 6.6).

Сума моментів усіх зовнішніх сил \vec{F}_{3k} , де $k = 1, 2, 3, \dots, N_F$, відносно поступально рухомих осей CZ називається *головним моментом зовнішніх сил* M_{3z} відносно цієї осі. Його можна розглядати як момент $M_{обCZ}$ деякої обертальної пари сил, яка тілу навколо центра мас на-

дає кутового прискорення ε відповідно до третього із рівнянь (6.36). Напрями даного обертального моменту й кутового прискорення, яке цим обертальним моментом спричинюється, збігаються (рис. 6.6).

Зовнішні тіла, які своїм силовим впливом на тіло надають його центру мас прискорення та кутового прискорення в обертанні навколо центра мас, за третім законом Ньютона, зазнають з боку тіла дії інерційного головного вектора та інерційного головного моменту:

$$\begin{aligned}\bar{R}_i &= -\bar{R}_3 = -M\bar{a}_C; \\ M_{i\,CZ} &= -M_{3\,Z} = -J_{CZ}\varepsilon.\end{aligned}\tag{6.37}$$

□ **Кінетична енергія тіла в плоскопаралельному русі.** Вивчаючи кінематику плоскопаралельного руху тіла, ми замінювали його плоскою фігурою, що утворюється в перерізі тіла площиною, паралельною основній площині. Згадаймо, що основна (базова) нерухома площина — це, наприклад, декартова площина Oxy , яка вибирається заздалегідь так, щоб плоскопаралельний рух тіла відбувався паралельно їй, що значно полегшує завдання.

Вивчаючи плоскопаралельний рух плоскої фігури, ми виділяли в ньому дві простіші його складові — поступальну разом із полюсом і обертальну, якою є обертання плоскої фігури навколо полюса.

У динаміці плоскопаралельного руху тіла, де необхідно враховувати сили, що діють на нього, а також його інерційні властивості, заміна тіла плоскою фігурою вже неприйнятна.

Розглядаючи динаміку даного виду руху, замість полюса плоскої фігури в поступальній складовій руху вибирається поступально рухома вісь, наприклад перпендикулярна до основної площини Oxy вісь CZ , яка проходить через центр мас C тіла. Траєкторії, швидкості й прискорення всіх розташованих на поступально рухомій осі CZ точок тіла однакові, для решти точок тіла в поступальній складовій руху вони такі самі. Вибравши поступально рухома вісь тіла $C\zeta$ й урахувавши обертальну складову руху, розглядають обертання тіла навколо поступально рухомої осі CZ (осі ζ і Z збігаються).

Надалі, розглядаючи кінетичну енергію тіла в плоскопаралельному русі, ми виходитимемо з того, що даний вид руху еквівалентний сукупності водночас здійснюваних двох рухів: поступального руху тіла, який визначається рухом його центра мас, у припущенні, що в ньому зосереджена вся маса тіла, й обертального руху навколо центра мас. При цьому мається на увазі, що рух центра мас — це поступальний рух декартової системи координат $CXYZ$ із початком у центрі мас C тіла, осі CX , CY , CZ якої під час руху тіла залишаються паралельними відповідним осям Ox , Oy , Oz нерухомої декартової сис-

теми координат $Oxyz$. Друга складова руху — це обертання тіла навколо осі CZ ($C\xi$) відносно поступально рухомої системи осей $CXYZ$.

Зауважимо, що в динаміці плоскопаралельного руху абсолютно твердого тіла вводиться ще третя декартова система координат $C\xi\eta\zeta$, яка має початок у центрі мас тіла, а одна з її осей, наприклад $C\xi$ збігається з CZ ; решта осей $C\xi$, $C\eta$ незмінно зв'язуються з тілом. Завдяки запровадженню координат точок тіла в цій системі осей $C\xi\eta\zeta$ точки ідентифікуються. Такі координати точок тіла називаються *власними* й у русі тіла від часу не залежать.

З урахуванням наведених вище загальних зауважень переходимо до визначення кінетичної енергії тіла в плоскопаралельному русі. Вважаємо, що дві декартові системи координат — нерухому $Oxyz$ і поступально рухому $CXYZ$, а також основну площину Oxy вибрано. Далі, нехай маємо деякий плоскопаралельний рух тіла, швидкість центра мас якого \vec{v}_C , а кутова швидкість обертання тіла навколо центра мас (поступально рухомої осі CZ) — ω . Задамо також масу тіла M і його момент інерції відносно центра мас (поступально рухомої осі CZ) J_{CZ} .

Як уже відомо, кінетична енергія тіла в поступальному русі визначається формулою

$$T_{\text{пост}} = Mv_C^2/2,$$

а в обертальному русі —

$$T_{\text{об}} = J_z \omega^2/2.$$

Застосуємо ці величини відповідно до поступальної і обертальної складових загального плоскопаралельного руху тіла, замінивши момент інерції тіла J_z відносно нерухомої осі Oz на момент інерції тіла відносно його центра мас J_{CZ} . Далі, взявши суму кінетичних енергій руху центра мас у припущенні, що в ньому зосереджена вся маса тіла, й обертального руху тіла навколо центра мас, дістанемо шукану формулу кінетичної енергії тіла в плоскопаралельному русі:

$$T = T_{\text{пост}} + T_{\text{об}} = Mv_C^2/2 + J_{CZ} \omega^2/2. \quad (6.38)$$

Кінетична енергія тіла в плоскопаралельному русі дорівнює кінетичній енергії руху центра мас тіла в припущенні, що в ньому зосереджена вся маса тіла, доданий до кінетичної енергії тіла в його обертальному русі навколо центра мас.

Формула (6.38) є окремим випадком загальної формули Кеніга, за якою визначається кінетична енергія як тіла в довільному русі, так і будь-якої механічної системи. **Теорема Кеніга** формулюється так: *кінетична енергія механічної системи відносно нерухомих декартових*

осей дорівнює відносно цих самих осей кінетичній енергії її центра мас у припущенні, що в ньому зосереджена вся маса системи, доданий до кінетичної енергії механічної системи в її русі відносно центра мас, тобто відносно поступально рухомої системи координат із початком у центрі мас і осями, паралельними відповідним нерухомим декартовим осям. Запис теореми такий:

$$T = Mv_C^2/2 + T_C, \quad (6.39)$$

де

$$T_C = \sum \frac{m_k v_{kC}^2}{2}$$

— сума кінетичних енергій усіх точок системи, які визначаються відносно згадуваної вище поступально рухомої системи осей із початком у центрі мас системи.

□ **Робота сил у плоскопаралельному русі тіла.** Тепер розглянемо прикладені до тіла в плоскопаралельному русі зовнішні сили (активні та реакції в'язей) і ті нескінченно малі переміщення точок їх прикладання, які спричинюються силами, що діють.

Позначимо зовнішні активні сили через $\vec{F}_{a.3i}$, де i — номер зовнішньої активної сили — набуває значень від 1 до $N_{a.3}$ ($N_{a.3}$ — кількість активних сил), а зовнішні реакції в'язей — через $\vec{F}_{p.v.3j}$, де ($j = 1, 2, 3, \dots, N_{p.v.3}$ ($N_{p.v.3}$ — кількість зовнішніх реакцій в'язей)). Щоб ввести нескінченно малі переміщення точок прикладання даних сил, треба окремо розглянути поступальну й обертальну складові загальноного плоскопаралельного руху тіла.

Урахуємо, що в поступальній частині руху траєкторії всіх точок конгруентні, а також однакові швидкості й нескінченно малі переміщення точок прикладання обох категорій сил ds . Це переміщення дорівнює переміщенню центра мас тіла, тому можна записати $ds = ds_C$.

Як відомо, елементарна робота сили дорівнює добутку модулів сили та нескінченно малого переміщення точки її прикладання на косинус кута між напрямом сили й напрямом цього переміщення. Отже, матимемо сумарну елементарну роботу обох видів зовнішніх сил у поступальній частині плоскопаралельного руху:

$$\sum F_{a.3i} ds_C \cos \angle(\vec{F}_{a.3i}, ds_C) + \sum F_{p.v.3j} ds_C \cos \angle(\vec{F}_{p.v.3j}, ds_C).$$

Урахуємо, що нескінченно мале переміщення ds_C напрямлене по дотичній до відповідної траєкторії. Тому добутки $F_{a.3i} \cos \angle(\vec{F}_{a.3i}, ds_C)$, $F_{p.v.3j} \cos \angle(\vec{F}_{p.v.3j}, ds_C)$ при $i = 1, 2, 3, \dots, N_{a.3}$; $j = 1,$

2, 3, ..., $N_{p.v.3}$ дадуть усю сукупність проєкцій сил на дотичні до траєкторій точок їх прикладання до тіла.

Тепер суму елементарних робіт усіх розглядуваних сил запишемо у вигляді

$$\sum F_{a.3 \tau, i} ds_C + \sum F_{p.v.3 \tau, j} ds_C$$

або

$$\left(\sum F_{a.3 \tau, i} + \sum F_{p.v.3 \tau, j} \right) ds_C = R_{3\tau} ds_C.$$

Тут вираз у дужках дорівнює проєкції головного вектора всіх зовнішніх сил обох видів на дотичну до траєкторії центра мас тіла:

$$R_{3\tau} = \sum F_{a.3 \tau, i} + \sum F_{p.v.3 \tau, j}.$$

Дотична складова головного вектора зовнішніх сил $\vec{R}_{3\tau}$, алгебричне значення якої і є проєкцією $R_{3\tau}$, вважається прикладеною в центрі мас C тіла.

Отже, позначивши повну елементарну роботу головного вектора всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла в плоскопаралельному русі, через $dA_{3.пост}$, приходимо до такого результату:

$$dA_{3.пост} = R_{3\tau} ds_C. \quad (6.40)$$

Елементарна робота головного вектора всіх зовнішніх сил у поступальній частині плоскопаралельного руху тіла дорівнює проєкції їхнього головного вектора на дотичну до траєкторії центра мас тіла, помноженої на елементарне переміщення центра мас тіла.

Повна робота даних сил на скінченному переміщенні центра мас C тіла $\Delta s_C = s_{C1} - s_{C0}$ дорівнюватиме визначеному інтегралові від їхньої елементарної роботи $R_{3\tau} ds_C$ у межах від s_{C0} до s_{C1} :

$$A_{3.пост} = \int_{s_{C0}}^{s_{C1}} R_{3\tau} ds_C. \quad (6.41)$$

Знайдемо сумарну елементарну роботу обох груп зовнішніх сил в обертальній частині плоскопаралельного руху тіла. В обертальній складовій, якою є обертання тіла навколо його центра мас C , елементарний кут повороту $d\varphi$ однаковий для всіх елементарних переміщень ds_j , де $i = 1, 2, 3, \dots, N_{a.3}$, точок прикладання зовнішніх активних сил і елементарних переміщень ds_j , де $j = 1, 2, 3, \dots, N_{p.v.3}$, точок прикладання зовнішніх реакцій в'язей. Ці елементарні переміщення здійснюються під час обертання тіла навколо його центра мас по колах із центрами, які знаходяться на поступально рухомій осі CZ , що проходить через центр мас C тіла.

Спочатку запишемо вираз шуканої сумарної елементарної роботи в такому вигляді:

$$\sum F_{a.з \tau_i} ds_i + \sum F_{p.в.з \tau_j} ds_j.$$

Виразимо елементарні переміщення точок прикладання сил через кут повороту тіла навколо центра мас:

$$ds_i = r_i d\varphi, \quad ds_j = r_j d\varphi,$$

де i, j змінюються в зазначених вище межах. Тепер, підставивши ці величини в основну формулу, дістанемо

$$\sum F_{a.з \tau_i} r_i d\varphi + \sum F_{p.в.з \tau_j} r_j d\varphi.$$

Спільний множник $d\varphi$ у доданках винесемо за дужки:

$$\left(\sum F_{a.з \tau_i} r_i + \sum F_{p.в.з \tau_j} r_j \right) d\varphi.$$

Загальна сума в дужках — не що інше, як сума моментів зовнішніх активних сил і реакцій в'язей. Увівши позначення для окремих сум і загальної суми в дужках, матимемо

$$\sum F_{a.з \tau_i} r_i + \sum F_{p.в.з \tau_j} r_j = \sum M_{a.з C} + \sum M_{p.в.з C};$$

$$M_{a.з C} = \sum M_{a.з C_i},$$

$$M_{p.в.з C} = \sum M_{p.в.з C_j};$$

$$M_{з C} = M_{a.з C} + M_{p.в.з C}.$$

Позначивши сумарну роботу всіх зовнішніх сил під час обертання тіла в плоскопаралельному русі навколо центра його мас C (осі CZ) через $dA_{з.об}$, запишемо

$$dA_{з.об} = M_{з C} d\varphi. \quad (6.42)$$

Елементарна робота зовнішніх активних сил і реакцій в'язей в обертальній складовій плоскопаралельного руху тіла дорівнює добутку головного моменту цих сил відносно центра мас на елементарний кут повороту тіла відносно цього центра мас.

Маючи елементарну роботу (6.42), знайдемо повну роботу сил у плоскопаралельному русі. Вона визначатиметься визначенням інтегралом на скінченному повороті тіла навколо його центра мас у плоскопаралельному русі $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ у межах від φ_0 до φ_1 :

$$A_{з.об} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{з C} d\varphi. \quad (6.43)$$

Це формула повної роботи сил в обертальній частині плоскопаралельного руху тіла.

Залишилося визначити загальну елементарну роботу й повну роботу всіх зовнішніх сил обох видів — активних і реакцій в'язей — у плоскопаралельному русі тіла. Додавши величини за формулами (6.40) і (6.42), дістаємо шукану загальну елементарну роботу:

$$\begin{aligned} dA_3 &= dA_{3,\text{пост}} + dA_{3,\text{об}}; \\ dA_3 &= R_{3\tau} ds_C + M_{3C} d\varphi. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Додавши повні роботи сил в окремих складових плоскопаралельного руху тіла згідно з формулами (6.41) і (6.43), матимемо загальну повну роботу зовнішніх сил, що діють на тіло в плоскопаралельному русі:

$$\begin{aligned} A &= A_{3,\text{пост}} + A_{3,\text{об}}; \\ A &= \int_{s_{C0}}^{s_{C1}} R_{3\tau} ds_C + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{3C} d\varphi. \end{aligned} \quad (6.45)$$

□ **Теорема про зміну кінетичної енергії тіла в плоскопаралельному русі.** Нехай тіло, здійснюючи деякий плоскопаралельний рух під дією зовнішніх сил, перемістилося за нескінченно малий час dt із даного положення, що відповідає даному моменту часу t , в нескінченно близьке до нього положення. За цей елементарний час dt центр мас C тіла набуде елементарного переміщення ds_C , а тіло повернеться навколо центра мас на елементарний кут $d\varphi$. На цих переміщеннях ds_C і $d\varphi$ головний вектор і головний момент зовнішніх сил виконують сумарну елементарну роботу (6.44), у процесі чого відбудеться нескінченно мала зміна кінетичної енергії тіла dT :

$$\begin{aligned} dT &= dA_3; \\ d\left(\frac{Mv_C^2}{2} + \frac{J_{CZ}\omega^2}{2}\right) &= R_{3\tau} ds_C + M_{3C} d\varphi. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Це *теорема про зміну кінетичної енергії тіла в диференціальній формі*: диференціал кінетичної енергії тіла в плоскопаралельному русі дорівнює сумі елементарних робіт головного вектора зовнішніх сил на нескінченно малому переміщенні центра мас тіла й головного моменту зовнішніх сил на нескінченно малому повороті тіла навколо його центра мас.

Дану теорему можна сформулювати інакше: *диференціал кінетичної енергії тіла в плоскопаралельному русі дорівнює сумі елементарних робіт усіх зовнішніх сил — як активних, так і реакцій в'язей — у поступальній складовій руху тіла разом із його центром мас і в обертальній складовій руху тіла при його обертанні навколо центра мас.*

Взагалі елементарна робота є мірою нескінченно малої зміни кінетичної енергії в будь-яких механічних системах. У найзагальнішому випадкові руху будь-якої механічної системи диференціал її кінетичної енергії дорівнює сумі елементарних робіт усіх прикладених до неї зовнішніх і внутрішніх сил:

$$dT = dA_{\text{з}} + dA_{\text{в}}. \quad (6.47)$$

Тепер, щоб дістати теорему про зміну кінетичної енергії тіла в плоскопаралельному русі в кінцевій (інтегральній) формі, зінтегруємо рівність (6.47) на скінченній зміні кінетичної енергії $\Delta T = T_1 - T_0$ та відповідних цій зміні скінченних переміщеннях $\Delta s_C = s_1 - s_0$ і $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ центра мас і в обертанні навколо центра мас. Спочатку запишемо проміжні викладки:

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = \int_{s_0}^{s_1} R_{3\tau} ds_C + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{3C} d\varphi;$$

$$T_1 - T_0 = \int_{s_0}^{s_1} R_{3\tau} ds_C + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{3C} d\varphi;$$

$$T_1 = \frac{Mv_{C1}^2}{2} + \frac{J_{CZ}\omega_1^2}{2}, \quad T_0 = \frac{Mv_{C0}^2}{2} + \frac{J_{CZ}\omega_0^2}{2}.$$

Підставимо величини з третього формульного рядка в другу рівність і подамо остаточний вираз шуканої теореми:

$$\frac{1}{2}[M(v_{C1}^2 - v_{C0}^2) + J_{CZ}(\omega_1^2 - \omega_0^2)] = \int_{s_0}^{s_1} R_{3\tau} ds_C + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{3C} d\varphi. \quad (6.48)$$

Зберемо в систему рівняння, що виражають загальні теореми динаміки плоскопаралельного руху:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_{3x}, \\ M\ddot{y}_C &= R_{3y}, \\ 0 &= R_{3z}; \\ J_{\eta\zeta}(\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi) - J_{\xi\zeta}(\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) &= M_{3cx}, \\ -J_{\eta\zeta}(\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) - J_{\xi\zeta}(\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi) &= M_{3cy}, \\ J_{C\zeta}\varepsilon &= M_{3cz}; \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$d\left(\frac{Mv_C^2}{2} + \frac{J_{CZ}\omega^2}{2}\right) = R_{3\tau} ds_C + M_{3C} d\varphi.$$

Дана система рівнянь динаміки плоскопаралельного руху тіла є загальною й універсальною: жодних обмежень на в'язі, сили, що діють, і на геометрію маси тіла не накладено. Зауважимо, що останнє рівняння є допоміжним: у низці задач динаміки дає змогу спростити розв'язання задачі на плоскопаралельний рух. Завдяки четвертому і п'ятому рівнянням системи розв'язується задача на динамічне й статичне зрівноважування маси тіла в плоскопаралельному русі. Шосте рівняння — це рівняння динаміки обертальної складової руху. Воно описує обертання тіла в його плоскопаралельному русі навколо центра мас і дає змогу за зовнішніми активними силами визначити кутову швидкість і кутове прискорення в обертальному русі навколо центра мас, які входять у четверте і п'яте рівняння системи. Перші два рівняння системи описують рух центра мас тіла, тобто поступальну складову руху в результуючому плоскопаралельному русі. Нарешті, третє рівняння є рівнянням рівноваги прямокутних складових зовнішніх сил у напрямі осі, перпендикулярної до основної площини, паралельно якій відбувається плоскопаралельний рух тіла. З нього можна визначити невідомі статичні реакції в'язей.

6.2

Динаміка плоскопаралельного руху колеса по шорсткій горизонтальній поверхні

Кочення колеса за нульової початкової кутової швидкості обертання навколо його центра. Нехай маємо колесо радіусом r і масою M , яке знаходиться на шорсткій горизонтальній поверхні й центр мас C якого збігається з геометричною віссю колеса. Виберемо плоску декартову систему координат

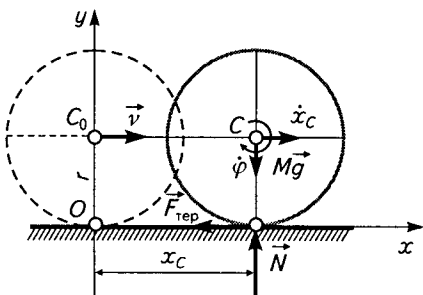


Рис. 6.7

Ox і сумістимо її із серединною площиною колеса (рис. 6.7), на якій розташований і його центр мас C . При цьому вісь Ox спрямуємо по горизонтальній поверхні, по якій відбувається кочення колеса, зліва направо.

Прийmemo, що в початковий момент часу t_0 , який вважається нульовим, колесо перебуває в початковому положенні, в якому його центр мас C знаходиться на осі

Оу і має початкову швидкість \vec{v}_0 . Кутова швидкість колеса в цьому початковому положенні $\omega_0 = 0$. Задача полягає в тому, щоб дослідити зміну швидкості центра мас C колеса \dot{x}_C , його кутової швидкості ϕ , а також установити, за якої умови колесо котитиметься по горизонтальній поверхні без проковзування. Коефіцієнт тертя ковзання колеса по поверхні дорівнює f .

У нульовий початковий момент часу $t_0 = 0$ усі точки колеса мають таку саму швидкість \vec{v}_0 , що й його центр мас, оскільки колесо в даний момент часу здійснює поступальний рух. При цьому його найнижча точка, що внаслідок дії сили ваги колеса контактує з горизонтальною поверхнею, ковзає по цій поверхні зі швидкістю \vec{v}_0 , напрямленою зліва направо.

Згідно із законом тертя Кулона з боку горизонтальної поверхні в місці її контакту з колесом на останнє діятиме максимальна сила тертя $\vec{F}_{\text{тер,макс}}$, напрям якої протилежний напрямку швидкості \vec{v}_0 . Крім сили тертя, на колесо з боку горизонтальної поверхні діятиме також нормальна реакція \vec{N} , напрямлена по вертикалі вгору. Таким чином, на колесо, яке з початкового моменту часу вже перебуватиме в плоскопаралельному русі, діятимуть такі три сили (рис. 6.7): сила ваги $M\vec{g}$, нормальна реакція \vec{N} і максимальна сила тертя Кулона $\vec{F}_{\text{тер,макс}}$.

Для дослідження плоскопаралельного руху колеса в розглядуваному випадкові застосуємо три динамічних рівняння із загальної системи (6.49) — два перших і шосте:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_{zx}, \\ M\ddot{y}_C &= R_{zy}, \\ J_{Cz} \varepsilon &= M_{zCz}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Складаючи рівняння руху колеса в напрямі осі Ox , ліву частину першого з рівнянь (6.50) перепишемо без зміни, бо \ddot{x}_C — невідома величина, а праву частину — суму проекцій усіх зовнішніх сил, що діють на колесо, на горизонтальну декартову вісь — знайдемо за даними задачі (рис. 6.7):

$$R_x = -F_{\text{тер,макс}}.$$

Отже, матимемо

$$M\ddot{x}_C = -F_{\text{тер,макс}}. \quad (6.51)$$

Складаючи рівняння в проекції на вертикальну вісь Oy , урахуємо, що центр мас C колеса при його плоскопаралельному русі переміщується по горизонтальній прямій, і внаслідок цього при $y_C = r = \text{const}$ перша похідна \dot{y}_C і друга похідна \ddot{y}_C дорівнюють нулю.

Визначивши суму проєкцій сил, що діють на колесо, на вісь Oy , запишемо рівняння у вигляді

$$0 = N - Mg. \quad (6.52)$$

Виводячи рівняння динаміки, яке описує обертальний рух колеса в плоскопаралельному русі навколо його центра мас C (поступально рухомої горизонтальної осі CZ), ліву частину $J_{Cz} \ddot{\varphi}$ (6.50) залишаємо без зміни. Права частина M_{zCZ} як сума моментів усіх сил, що діють на колесо, відносно його центра мас C дає

$$M_{zCZ} = -F_{\text{тер.макс}} r.$$

У результаті приходимо до такого шуканого рівняння:

$$J_{Cz} \ddot{\varphi} = -F_{\text{тер.макс}} r. \quad (6.53)$$

Із фізики відомо, що максимальна сила тертя Кулона дорівнює добутку коефіцієнта тертя ковзання на (в нашому випадкові) нормальну силу тиску колеса на горизонтальну поверхню:

$$F_{\text{тер.макс}} = fN, \quad (6.54)$$

де N — модуль сили тиску колеса на горизонтальну площину, який визначається з другого рівняння (6.50), бо з якою силою колесо тисне на площину, з такою самою за модулем силою діє площина на колесо (напрями цих сил протилежні за третім законом Ньютона).

Підставивши (6.54) у рівняння (6.51) і (6.53), дістаємо систему двох диференціальних рівнянь динаміки плоскопаралельного руху колеса в режимі його кочення з проковзуванням по шорсткій горизонтальній поверхні:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= -fMg; \\ J_{Cz} \ddot{\varphi} &= -fMgr. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Зінтегрувавши (6.55) у межах незалежної змінної від $t_0 = 0$ до її поточного значення t і шуканих перших похідних \dot{x}_C , $\dot{\varphi}$ у межах від \dot{x}_{C0} , $\dot{\varphi}_0$ до їх поточних значень \dot{x}_C , $\dot{\varphi}$, дістаємо:

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= \dot{x}_{C0} - fg(t - t_0), \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 - f \frac{Mg}{J_{Cz}} (t - t_0); \\ \dot{x}_C &= v_0 - fgt, \quad \dot{\varphi} = -f \frac{Mg}{J_{Cz}} rt. \end{aligned} \quad (6.56)$$

У двох останніх рівняннях ураховано початкові дані руху колеса: $\dot{x}_{C0} = v_0$, $\dot{\varphi} = 0$.

Зазначимо, що, складаючи диференціальні рівняння, момент сили тертя відносно центра мас колеса брали від'ємним, оскільки вектор-момент сили $\vec{F}_{\text{тер,макс}}$ відносно осі CZ напрямлений протилежно до цієї осі. Кутова швидкість $\dot{\phi}$ колеса береться зі знаком «-», оскільки обертання колеса під дією моменту сили тертя відносно його центра мас C відбувається за годинниковою стрілкою, і кутова швидкість обертання такого напрямку вважається від'ємною.

Тепер переходимо до аналізу двох останніх із рівнянь (6.56). Із першої залежності бачимо, що поступальна швидкість колеса зменшується за модулем зі збереженням напрямку зліва направо, а кутова швидкість, навпаки, зростає за модулем і напрямлена за годинниковою стрілкою.

Для точки колеса, яка в даний момент часу контактує з нерухомою горизонтальною поверхнею, швидкості поступальної і обертальної складових у плоскопаралельному русі колеса напрямлені по осі Ox у протилежні боки. В якийсь момент часу t_1 ці складові швидкості зрівнюються й у сумі дадуть нуль, що виразиться у припиненні кочення колеса з проковзуванням.

Слід зазначити, що в режимі кочення колеса по нерухомій горизонтальній прямій за відсутності активних сил у горизонтальному напрямі й моментів відносно центра мас у зоні контакту колеса з поверхнею сили тертя спокою не діють. Згадаймо з фізики закон Кулона для тертя ковзання: $0 \leq F_{\text{тер}} \leq F_{\text{тер,макс}}$ — сила тертя за відсутності проковзування може набирати різних значень від нульового до максимального.

Якщо у формулах (6.56) замість t взяти зазначений раніше момент часу t_1 і додати їхні ліві й праві частини, попередньо помноживши другу рівність на радіус колеса r , то прийдемо до алгебричного рівняння для визначення моменту часу t_1 , від якого почнеться кочення колеса без проковзування:

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= v_0 - fgt_1, \quad r\dot{\phi} = -f \frac{Mg}{J_{C\xi}} r^2 t_1; \\ \dot{x}_C + r\dot{\phi} &= 0, \quad v_0 - fgt_1 - f \frac{Mg}{J_{C\xi}} r^2 t_1 = 0. \end{aligned} \quad (6.57)$$

З останнього рівняння дістаємо шуканий момент часу t_1 :

$$t_1 = \frac{v_0}{fg(1 + Mr^2/J_{C\xi})}. \quad (6.58)$$

Підставивши значення часу з формули (6.58) у першу й другу рівності (6.57), знайдемо

$$\begin{aligned}\dot{x}_{C1} &= \frac{Mr^2}{J_{C\zeta}} \frac{v_0}{1 + Mr^2/J_{C\zeta}}, \\ \dot{\phi}_1 &= \frac{Mr}{J_{C\zeta}} \frac{v_0}{1 + Mr^2/J_{C\zeta}}.\end{aligned}\tag{6.59}$$

Нагадаємо, що тут $J_{C\zeta}$ — момент інерції колеса відносно його центральної осі; для однорідного диска (циліндра)

$$J_{C\zeta} = \frac{1}{2} Mr^2.$$

Урахувавши це у формулах (6.59), дістанемо швидкість центра мас і кутову швидкість колеса в обертальному русі навколо центра мас за рівномірного кочення без проковзування:

$$\dot{x}_{C1} = \frac{2}{3} v_0, \quad \dot{\phi}_1 = \frac{2v_0}{3r}.\tag{6.60}$$

□ **Кочення колеса за нульової початкової швидкості руху його центра мас.** Дослідимо випадок, коли в початковому положенні колеса початкова швидкість його центра мас C нульова, $v_{C0} = 0$, а початкова кутова швидкість обертання колеса навколо центра мас C становить $\dot{\phi}_{C0} = -\omega_0$. Цей випадок істотно не відрізняється від розглянутого в попередньому пункті. Однак максимальна сила тертя $\vec{F}_{\text{тер.макс}}$ тепер має додатний напрям осі Ox і створює додатний (проти годинникової стрілки) момент відносно центра колеса C , який спричинить зменшення наданої колесу за годинниковою стрілкою початкової кутової швидкості. Разом зі зменшенням кутової швидкості колеса зростатиме, починаючи від нуля, в напрямі сили тертя (додатному) швидкість його центра.

Звичайно, як і в попередньому випадкові, через деякий проміжок часу t_1 від нульового протилежні за напрямом швидкість центра колеса \dot{x}_{C1} і кутова швидкість $\dot{\phi}_1 r$ обертання навколо його центра для точки контакту колеса з горизонтальною поверхнею за модулем зрівняються. При цьому сила тертя в момент часу t_1 у місці контакту колеса з поверхнею припинить свою дію, й колесо перейде з режиму кочення з проковзуванням у режим кочення без проковзування. Надалі кочення колеса буде рівномірним без проковзування.

Складемо диференціальні рівняння плоскопаралельного руху колеса за розглядуваних умов (рис. 6.8). Оскільки сила тертя $F_{\text{тер,макс}}$ напрямлена зліва направо, а не навпаки, як у попередньому випадкові, і її момент відносно центра колеса діє проти годинникової стрілки, то, очевидно, шукані рівняння руху колеса матимуть вигляд

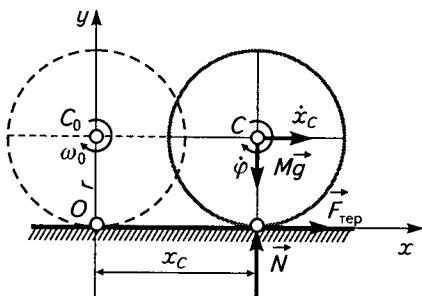


Рис. 6.8

$$M\ddot{x}_C = F_{\text{тер,макс}},$$

$$J_{C\zeta}\ddot{\varphi} = F_{\text{тер,макс}}r.$$

Після перетворень дістанемо

$$\ddot{x}_C = fg, \quad \ddot{\varphi} = \frac{fMg}{J_{C\zeta}}r.$$

Зінтегруємо цю систему рівнянь у таких межах: при $t_0 = 0$ $\dot{x}_{C0} = 0$ і $\dot{\varphi}_0 = -\omega_0$, а моментів часу t_1 відповідають \dot{x}_{C1} і $\dot{\varphi}_1$:

$$\int_0^{\dot{x}_{C1}} d\dot{x}_C = fg \int_0^{t_1} dt,$$

$$\int_{-\omega_0}^{\dot{\varphi}_1} d\dot{\varphi} = \frac{fMg}{J_{C\zeta}}r \int_0^{t_1} dt;$$

$$\dot{x}_{C1} = fgt_1,$$

$$\dot{\varphi}_1 = -\omega_0 + \frac{fMg}{J_{C\zeta}}rt_1.$$

Суми лівих і правих частин двох останніх рівностей, якщо другу з них попередньо помножити на радіус r , дадуть нуль:

$$\dot{x}_{C1} + \dot{\varphi}_1 = 0,$$

$$fgt_1 - \omega_0 r + \frac{fMg}{J_{C\zeta}}r^2 t_1 = 0.$$

З останнього рівняння знаходимо момент часу t_1 , в який режим кочення колеса з проковзуванням замінюється на рівномірне кочення без проковзування:

$$t_1 = \frac{\omega_0 r}{fg(1 + Mr^2/J_{C\zeta})}.$$

Якщо колесо — однорідний диск, то

$$t_1 = \frac{\omega_0 r}{\left(1 + \frac{Mr^2}{Mr^2/2}\right)} = \frac{1}{3} \frac{\omega_0 r}{fg}.$$

Дістанемо також поступальну й кутову швидкості колеса в момент часу t_1 :

$$\dot{x}_{C1} = \frac{1}{3} \omega_0 r, \quad \dot{\phi}_1 = -\frac{1}{3} \omega_0.$$

□ Кочення колеса за ненульових початкових даних руху.

Цікавим є випадок кочення, коли в початковому положенні колеса, яке розглядалося в попередніх пунктах, його початкова поступальна швидкість \bar{v}_{C0} і початкова кутова швидкість $\dot{\phi}_0$ обертання навколо центра мас C не дорівнюють нулю. При цьому обертальний рух колеса навколо його центра відбувається із заданою початковою кутовою швидкістю $\dot{\phi}_0 = \omega_0$ у додатному напрямі, тобто проти годинникової стрілки, а поступальний рух — із заданою початковою швидкістю $\bar{v}_{C0} = \bar{v}_0$ у додатному напрямі осі Ox .

Зрозуміло, що в поточний момент часу t після нульового (початкового) точка контакту колеса з горизонтальною поверхнею, по якій здійснюється кочення, має додатну горизонтальну швидкість (напрявлену в додатному напрямі осі Ox) $\bar{v}_{\text{т.конт}}$, яка є сумою однаково напрямлених кутової $\dot{\phi}r$ і поступальної \dot{x}_C швидкостей:

$$\bar{v}_{\text{т.конт}} = \dot{\phi}r + \dot{x}_C.$$

Оскільки проковзування колеса відбувається зліва направо вздовж осі Ox , то максимальна сила тертя $\vec{F}_{\text{тер,макс}}$ має напрям, протилежний цьому проковзуванню, тобто швидкості $\bar{v}_{\text{т.конт}}$ точки контакту колеса з поверхнею.

Диференціальні рівняння динаміки плоскопаралельного руху колеса за нових початкових даних матимуть такий вигляд:

$$\ddot{x}_C = -fg, \quad \ddot{\phi} = -\frac{Mg fr}{J_{C\zeta}}.$$

Зінтегрувавши цю систему рівнянь у відповідних межах, дістанемо

$$\dot{x}_C = v_0 - fgt, \quad \dot{\phi} = \omega_0 - \frac{Mg fr}{J_{C\zeta}} t.$$

Із першого з рівнянь, яке показує, що в коченні колеса настане такий момент часу t_1 , коли центр колеса зупиниться, дістаємо

$$t_1 = \frac{v_0}{fg}.$$

Із другого з рівнянь системи знайдемо кутову швидкість колеса $\dot{\phi}_1$ у момент t_1 , коли поступальна складова \dot{x}_C швидкості колеса стала нульовою:

$$\dot{\phi}_1 = \omega_0 - \frac{Mr}{J_{C\zeta}} v_0.$$

Останнє рівняння показує, що можливі три механічні стани колеса.

1. Колесо зупиниться за такого співвідношення між початковими даними v_0 і ω_0 :

$$\frac{\omega_0 r}{v_0} = \frac{Mr^2}{J_{C\zeta}}.$$

Для колеса у вигляді однорідного диска

$$\frac{\omega_0 r}{v_0} = \frac{Mr^2}{J_{C\zeta}} = \frac{Mr^2}{Mr^2/2} = 2.$$

Для масивного обода

$$\frac{\omega_0 r}{v_0} = \frac{Mr^2}{J_{C\zeta}} = \frac{Mr^2}{Mr^2} = 1.$$

2. У момент t_1 зупинки центра колеса й надалі воно матиме від'ємну кутову швидкість за такого співвідношення між початковими даними руху:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &< 0, \\ \omega_0 - \frac{Mr}{J_{C\zeta}} v_0 &< 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\omega_0 r}{v_0} < \frac{Mr^2}{J_{C\zeta}}.$$

Так, для однорідного диска це відношення менше за 2, а для масивного обода — менше за одиницю.

Який подальший рух колеса після зупинки його центра мас? Спочатку з'ясуємо, в який момент часу t після нульового припи-

ниться обертання колеса навколо його центра. Для цього в рівнянні кутової швидкості

$$\dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{Mg fr}{J_{C\zeta}} t$$

замість $\dot{\varphi}$ поставимо нуль і одержане рівняння розв'яжемо відносно t :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= 0, \\ \omega_0 - \frac{Mg fr}{J_{C\zeta}} t &= 0; \\ t &= \frac{J_{C\zeta}}{Mg fr} \omega_0 = \frac{J_{C\zeta} v_0}{Mg fr v_0} \omega_0 = \frac{J_{C\zeta} t_1}{Mr^2} \frac{\omega_0 r}{v_0}; \\ \frac{\omega_0 r}{v_0} &< \frac{Mr^2}{J_{C\zeta}}; \\ \frac{\omega_0 r}{v_0} &= \frac{Mr^2 t}{J_{C\zeta} t_1}; \\ t/t_1 &< 1. \end{aligned}$$

Отже, в інтервалі $[t_0, t_1]$ є такий момент часу t , в який колесо, розпочавши свій плоскопаралельний рух із початкового положення з початковою поступальною швидкістю v_0 і початковою кутовою швидкістю ω_0 , припинить обертатися. З цього моменту часу t поступальний рух колеса продовжуватиметься в додатному напрямі, хоча максимальна сила тертя $\vec{F}_{\text{тер.макс}}$ діє в протилежному напрямі, що спричиняє зменшення швидкості центра колеса.

Визначимо швидкість центра мас у момент t , коли припинилось обертання колеса:

$$\begin{aligned} \dot{x}'_C &= v_0 - fgt, \\ \dot{x}'_C &= v_0 \left(1 - \frac{\omega_0 r / v_0}{Mr^2 / J_{C\zeta}} \right). \end{aligned}$$

Тут величина в дужках додатна, оскільки

$$\frac{\omega_0 r}{v_0} < \frac{Mr^2}{J_{C\zeta}}.$$

3. Колесо після припинення поступальної складової його руху в момент часу t_1 збереже обертання навколо центра C у напрямі проти годинникової стрілки з додатною кутовою швидкістю $\dot{\varphi}$ за умови

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &> 0, \\ \omega_0 - \frac{Mr}{J_{Cz}} v_0 &> 0\end{aligned}$$

або за такого співвідношення між початковими даними руху:

$$\frac{\omega_0 r}{v_0} > \frac{Mr^2}{J_{Cz}}.$$

Для суцільного однорідного диска

$$\frac{\omega_0 r}{v_0} > \frac{Mr^2}{J_{Cz}} = \frac{Mr^2}{Mr^2/2} = 2,$$

$$\omega_0 r / v_0 > 2.$$

Для масивного обода

$$\frac{\omega_0 r}{v_0} > 1, \quad \frac{\omega_0}{v_0/r} > 1.$$

Який рух здійснюватиме колесо, маючи додатну кутову швидкість $\dot{\varphi}_1$, з моменту t_1 , в який швидкість його центра мас C стає нульовою? За цієї умови максимальна сила тертя $\vec{F}_{\text{тер, макс}}$ буде від'ємною й, прикладена до колеса, надасть його центру мас C від'ємного прискорення \ddot{x}_C . Отже, з моменту часу t_1 колесо здійснюватиме прискорений рух до початку O системи осей Oxy . Таким чином, колесо в режимі кочення з проковзуванням повертатиметься до початку координат Oxy , з якого воно в нульовий момент часу почало кочення з проковзуванням у додатному напрямі осі Ox .

Цілком зрозуміло, що колесо з від'ємною швидкістю його центра мас і додатною кутовою швидкістю, рухаючися в режимі кочення з проковзуванням у напрямі до початку O координат Oxy , з часом досягне положення, починаючи з якого режим кочення з проковзуванням заміниться коченням без проковзування й продовжуватиметься в тому самому напрямі. Плоскопаралельний рух колеса за таких умов уже досліджено раніше.

Простежимо в останньому випадку плоскопаралельний рух колеса на всьому інтервалі часу, починаючи з початкового $t_0 = 0$ і закінчуючи моментом t_2 , з якого вже починається його усталений рух — кочення без проковзування.

На часовому інтервалі $[t_0, t_2]$ має виконуватись умова

$$\omega_0 - \frac{Mr}{J_{Cz}} v_0 > 0,$$

за якої максимальна сила тертя $\bar{F}_{\text{тер.макс}}$ весь час має один і той самий напрям — від'ємний. На цьому інтервалі плоскопаралельний рух колеса описується диференціальними рівняннями

$$\ddot{x}_C = -fg, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{Mg fr}{J_{C\zeta}}.$$

Після першого невизначеного інтегрування даної системи дістаємо загальні залежності перших похідних \dot{x}_C , $\dot{\varphi}$ від часу, в які увійдуть дві довільні сталі інтегрування C_1 , C_3 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= -fgt + C_1, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{Mg fr}{J_{C\zeta}}t + C_3. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Виконавши невизначене інтегрування системи (6.61), дістанемо так званий загальний розв'язок початкової системи рівнянь, який міститиме вже чотири сталі інтегрування: дві попередні — C_1 , C_3 — і дві з другого інтегрування — C_2 , C_4 :

$$\begin{aligned} x_C &= -fg\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2, \\ \varphi &= -\frac{Mg fr}{J_{C\zeta}}\frac{t^2}{2} + C_3t + C_4. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Тепер, щоб із загального розв'язку одержати частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, необхідно розглянути систему чотирьох алгебричних рівнянь, яка складається так. Беруть початкові дані руху:

$$(x_C)_{t=t_0} = x_{C0}, \quad (\dot{x}_C)_{t=t_0} = \dot{x}_{C0}; \quad (\varphi)_{t=t_0} = \varphi_0, \quad (\dot{\varphi})_{t=t_0} = \dot{\varphi}_0$$

і підставляють у загальні розв'язки (6.61) і (6.62) замість відповідних величин, що змінюються під час руху:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{C0} &= -fgt_0 + C_1, \\ \dot{\varphi}_0 &= -\frac{Mg fr}{J_{C\zeta}}t_0 + C_3; \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} x_{C0} &= -fg\frac{t_0^2}{2} + C_1t_0 + C_2, \\ \varphi_0 &= -\frac{Mg fr}{J_{C\zeta}}\frac{t_0^2}{2} + C_3t_0 + C_4. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Розв'яжемо дві системи рівнянь (6.63) і (6.64) з чотирма невідомими, якими є сталі інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4 і знайдені для них вирази підставимо в рівняння (6.61) і (6.62), після чого виконаємо відповідні перетворення. В результаті матимемо частинний розв'язок початкової системи диференціальних рівнянь, що описують плоскопаралельний рух колеса на часових інтервалах $[t_0, t_1]$ і $[t_1, t_2]$, на яких сила тертя має однаковий знак:

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= -fg(t - t_0) + \dot{x}_{C0}, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{Mgfr}{J_{C\zeta}}(t - t_0) + \dot{\varphi}_0; \\ x_C &= -fg\frac{(t - t_0)^2}{2} + \dot{x}_{C0}(t - t_0) + x_{C0}, \\ \varphi &= -\frac{Mgfr(t - t_0)^2}{J_{C\zeta}} + \dot{\varphi}_0(t - t_0) + \varphi_0. \end{aligned} \tag{6.65}$$

Нехай колесо є масивним ободом (маса колеса розподілена вздовж його обода). Тоді момент інерції

$$J_{C\zeta} = Mr^2. \tag{6.66}$$

Підставивши (6.66) у систему (6.65), матимемо

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= -fg(t - t_0) + \dot{x}_{C0}, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{gf}{r}(t - t_0) + \dot{\varphi}_0; \\ x_C &= -fg\frac{(t - t_0)^2}{2} + \dot{x}_{C0}(t - t_0) + x_{C0}, \\ \varphi &= -\frac{gf}{2r}(t - t_0)^2 + \dot{\varphi}_0(t - t_0) + \varphi_0. \end{aligned} \tag{6.67}$$

Далі на кожному з інтервалів $[t_0, t_1]$ і $[t_1, t_2]$ на підставі (6.67) дослідимо рух масивного обода. На часовому інтервалі $[t_0, t_1]$ з урахуванням того, що при $t_0 = 0$ $x_{C0} = 0$, $\dot{x}_{C0} = v_0$; $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$, матимемо такі залежності кінематичних параметрів кочення колеса в режимі проковзування:

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= -fgt + v_0, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{gf}{r}t + \omega_0; \end{aligned} \tag{6.68}$$

$$\begin{aligned} x_C &= -fg\frac{t^2}{2} + v_0t, \\ \varphi &= -\frac{gf}{2r}t^2 + \omega_0t. \end{aligned} \tag{6.69}$$

Бачимо, що обидві складові плоскопаралельного руху колеса — поступальна й обертальна — є рівносповільненими з відповідними від'ємними прискореннями $a_C = -fg$ і $\varepsilon = -fg/r$. Кочення колеса з проковзуванням відбувається за від'ємних поступального й кутового прискорень від початку координат у додатному напрямі осі Ox , зліва направо.

Підставивши в рівняння (6.68) і (6.69) кінцевий момент часу t_1 , раніше знайдений із умови $\dot{x}_{C1} = 0$, дістанемо

$$t_1 = \frac{v_0}{fg}, \quad \dot{\varphi}_1 = -\frac{gf v_0}{r fg} + \omega_0 = \omega_0 - \frac{v_0}{r};$$

$$x_{C1} = -fg \frac{v_0^2 / (fg)^2}{2} + v_0 \frac{v_0}{fg} = \frac{v_0^2}{2fg}, \quad (6.70)$$

$$\varphi_1 = -\frac{gf}{2r} \left(\frac{v_0}{fg} \right)^2 + \omega_0 \frac{v_0}{fg} = \frac{v_0}{fg} \left(\omega_0 - \frac{v_0}{2r} \right).$$

Використаємо умову $\frac{\omega_0}{v_0/r} > 1$ і візьмемо, наприклад, $\frac{\omega_0}{v_0/r} = 2$.

Тоді з (6.70) остаточно матимемо

$$t_1 = \frac{v_0}{fg},$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_0 - \frac{v_0}{r} = \frac{v_0}{r}; \quad (6.71)$$

$$x_{C1} = \frac{v_0^2}{2fg},$$

$$\varphi_1 = \frac{3 v_0^2}{2 rfg} = 3 \frac{x_{C1}}{r}.$$

Аби знайти ці самі кінематичні величини на другому часовому інтервалі $[t_1, t_2]$, врахуємо, що тепер у загальних рівняннях (6.68) і (6.69) початковим моментом часу буде вже не нульовий, а $t_0 = t_1 = v_0/fg$, в який

$$x_{C0} = x_{C1} = \frac{v_0^2}{2fg}, \quad \varphi_0 = \varphi_1 = \frac{3v_0^2}{2rfg} = 3 \frac{x_{C1}}{r}; \quad v_0 = \dot{x}_{C0} = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{v_0}{r}.$$

Зазначимо, що на розглядуваному часовому інтервалі $[t_1, t_2]$, де $t_2 < t_1$, залежності (6.68) і (6.69) будуть такими:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= -fg \left(t_2 - \frac{v_0}{fg} \right), \\ \dot{\varphi} &= -\frac{gf}{r} \left(t_2 - \frac{v_0}{fg} \right) + \frac{v_0}{r}; \\ x_c &= -fg \frac{(t_2 - v_0/fg)^2}{2} + \frac{v_0^2}{2fg}, \\ \varphi &= -\frac{gf}{2r} \left(t_2 - \frac{v_0}{fg} \right)^2 + \frac{v_0}{r} \left(t_2 - \frac{v_0}{fg} \right) + \frac{3v_0^2}{2rfg}. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Спочатку визначимо момент часу t_2 з умови, що точка контакту колеса з нерухомою прямою нерухома (є миттєвим центром швидкостей):

$$\begin{aligned} \dot{x}_c + r\dot{\varphi} &= 0, \\ t_2 &= \frac{3v_0}{2fg}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

За даним моментом часу t_2 із систем рівнянь (6.68) і (6.69) дістанемо відповідні кінематичні величини:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c2} &= -fg \left(\frac{3v_0}{2fg} - \frac{v_0}{fg} \right) = -\frac{1}{2}v_0, \\ \dot{\varphi}_2 &= -\frac{gf}{r} \left(\frac{3v_0}{2fg} - \frac{v_0}{fg} \right) + \frac{v_0}{r} = \frac{1}{2} \frac{v_0}{r}; \\ x_{c2} &= -fg \frac{\left(\frac{3v_0}{2fg} - \frac{v_0}{fg} \right)^2}{2} + \frac{v_0^2}{2fg} = -\frac{1}{8} \frac{v_0^2}{fg} + \frac{v_0^2}{2fg} = \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{fg}, \\ \varphi_2 &= -\frac{gf}{2r} \left(\frac{3v_0}{2fg} - \frac{v_0}{fg} \right)^2 + \frac{v_0}{r} \left(\frac{3v_0}{2fg} - \frac{v_0}{fg} \right) + \frac{3v_0^2}{2rfg} = \frac{v_0^2}{rfg}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Зауважимо, що в двох останніх із виразів (6.74) лінійна й дугова координати відлічуються від початкового положення колеса, де вони мають нульові значення.

Колесо з початкового положення за час $t_1 = \frac{v_0}{fg}$ віддалиться на відстань $x_{C1} = \frac{v_0^2}{2fg}$, а повернеться назад за час (починаючи з нульового), що визначається за формулою

$$t_3 = t_2 + \frac{x_{C2}}{|\dot{x}_{C2}|} = \frac{3 v_0}{2 fg} + \frac{\frac{3 v_0^2}{8 fg}}{v_0/2} = \frac{3 v_0}{2 fg} + \frac{3 v_0}{4 fg} = \frac{9 v_0}{4 fg}. \quad (6.75)$$

Тривалість руху колеса в протилежному напрямі від його крайнього правого положення, коли, обертаючися, воно зупинилось, обчислюється як різниця між повним часом та часом, витраченим на максимальне віддалення від початкового положення:

$$\Delta t = t_3 - t_1 = \frac{9 v_0}{4 fg} - \frac{v_0}{fg} = \frac{5 v_0}{4 fg}. \quad (6.76)$$

ДИНАМІКА СИСТЕМИ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНИХ ТІЛ, ЩО МАЮТЬ СПІЛЬНУ ПЛОЩИНУ МАТЕРІАЛЬНОЇ СИМЕТРІЇ

7.1

Універсальні рівняння динаміки системи взаємозв'язаних тіл, які рухаються паралельно спільній площині матеріальної симетрії

Динамічні величини системи взаємозв'язаних тіл.
Д. *Кількість руху.* Прикладом механічної системи взаємозв'язаних тіл є будь-який плоский механізм, наприклад кривошипно-повзунний, в якому кривошип, шатун і повзун мають спільну площину матеріальної симетрії і з'єднані між собою за допомогою циліндричних шарнірів. Складові частини механізму вважаються абсолютно твердими тілами, які рухаються паралельно спільній площині матеріальної симетрії.

Під час руху плоскої системи тіл одні з тіл системи перебувають у поступальному русі (поршень кривошипно-повзунного механізму), інші — в обертальному або плоскопаралельному (відповідно кривошип і шатун). До динамічних величин розглядуваної механічної системи належать її кількість руху, кінетичний момент (момент кількості руху) та кінетична енергія. Надалі механічну систему взаємозв'язаних тіл коротко називатимемо плоскою системою тіл (плоским механізмом).

Розглянемо рух плоскої системи тіл відносно абсолютно нерухомої декартової системи координат $Oxuz$. Кількість тіл у системі нехай буде N . Сумістимо осі Ox , Oy з площиною симетрії тіл системи. В такому разі їхні центри мас також знаходяться в цій площині (рис. 7.1). Позначимо маси тіл через m_i , де $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Положення їхніх центрів мас C_i у системі осей $Oxuz$ визначатимемо координатами x_{C_i} , y_{C_i} , $z_{C_i} = 0$. Координати x_{C_i} , y_{C_i} за руху системи будуть неперервними функціями часу. Взявши похідні за часом від цих координат, діс-

танемо проекції вектора швидкості центра мас \vec{v}_{C_i} тіл на вибрані осі Ox , Oy , Oz :

$$v_{C_i,x} = \dot{x}_{C_i,x}, \quad v_{C_i,y} = \dot{x}_{C_i,y}, \quad v_{C_i,z} = \dot{z}_{C_i,x} = 0. \quad (7.1)$$

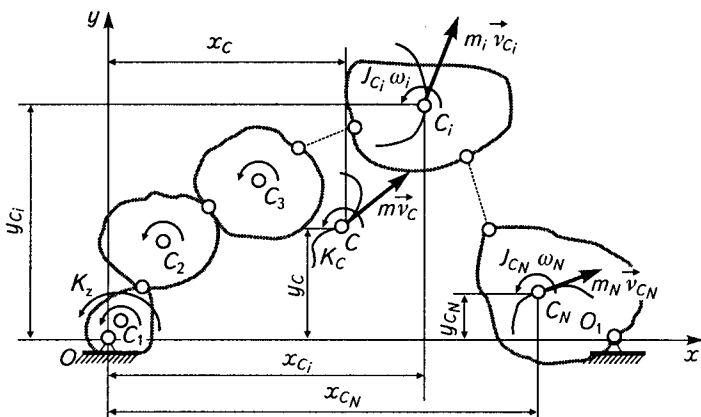


Рис. 7.1

Як відомо з попереднього, незалежно від того, який вид руху здійснює тіло — поступальний, обертальний чи плоскопаралельний, проекції вектора кількості руху тіла на осі визначаються за формулами

$$Q_{ix} = m_i \dot{x}_{C_i}, \quad Q_{iy} = m_i \dot{y}_{C_i}. \quad (7.2)$$

Маємо $2N$ скалярних рівностей, яким відповідає N векторних величин

$$\vec{Q}_i = m_i \vec{v}_{C_i}. \quad (7.3)$$

Додамо окремо N перших із рівностей (7.2) і окремо N других і в результаті замість $2N$ скалярних співвідношень дістанемо два:

$$\sum Q_{ix} = \sum m_i \dot{x}_{C_i}, \quad \sum Q_{iy} = \sum m_i \dot{y}_{C_i}$$

або, ввівши позначення

$$\sum Q_{ix} = Q_x, \quad \sum Q_{iy} = Q_y,$$

матимемо

$$Q_x = \sum m_i \dot{x}_{C_i}, \quad Q_y = \sum m_i \dot{y}_{C_i}. \quad (7.4)$$

Це формули проекцій вектора кількості руху

$$\vec{Q} = \sum m_i \vec{v}_{C_i}, \quad (7.5)$$

плоскої системи тіл на нерухому систему осей *Oxuz*. **Кількість руху плоскої системи тіл** дорівнює векторній сумі кількостей руху всіх тіл, що входять до її складу. Кількість руху будь-якої механічної системи (системи точок) називають **головним вектором кількостей руху**. Інакше кажучи, кількість руху плоскої системи тіл дорівнює векторній сумі кількостей руху центрів мас тіл, які входять до її складу, в припущенні, що маси тіл зосереджені в їхніх центрах мас.

Залежності (7.4) можна подати інакше:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{d}{dt} \sum m_i x_{c_i} = \frac{d}{dt} Mx_c = M\dot{x}_c, \\ Q_y &= \frac{d}{dt} \sum m_i y_{c_i} = \frac{d}{dt} My_c = M\dot{y}_c. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Тут x_c, y_c — координати центра мас плоскої системи тіл,

$$x_c = \frac{\sum m_i x_{c_i}}{M}, \quad y_c = \frac{\sum m_i y_{c_i}}{M}; \quad (7.7)$$

M — маса всієї системи, що дорівнює сумі мас усіх її тіл,

$$M = \sum m_i. \quad (7.8)$$

Отже, відповідно до (7.6) **вектор кількості руху плоскої системи тіл** дорівнює добутку маси системи на вектор швидкості її центра мас і знаходиться в площині матеріальної симетрії тіл:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c. \quad (7.9)$$

Кількість руху плоскої системи тіл, як це впливає з означення, є вільним вектором, що геометрично зображується замикальною стороною векторного багатокутника, побудованого з векторів кількостей руху окремих тіл системи (рис. 7.2).

• **Кінетичний момент.** Переходимо до визначення другої динамічної величини — кінетичного моменту плоскої системи тіл відносно нерухомої осі *Oz* або, що одне й те саме, нерухомого центра *O*.

Спочатку зробимо зауваження. Якщо деякі тіла в плоскій системі тіл (див. рис. 7.1) здійснюють обертання навколо відповідних нерухомих осей, то даний рух таких тіл вважатимемо плоскопаралельним з обома складовими: поступальним разом з їхніми центрами мас і оберталь-

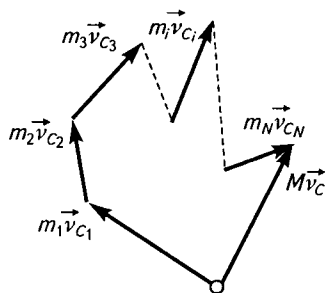


Рис. 7.2

ною — не навколо нерухомих осей $O_i z$, а навколо осей $C_i \zeta_i$, паралельних нерухомих осей $O_i z$, які проходять через центр мас тіл і рухаються поступально разом із ним. При цьому кутові швидкості в зазначених обертальних рухах такі самі, як і в реальних. Таке представлення обертального руху як плоскопаралельного дасть змогу замінити кінетичний момент кожного тіла відносно нерухомої осі, спільної для всіх тіл системи, сумою кінетичного моменту центра мас тіла в припущенні, що в цьому центрі зосереджена вся маса тіла, та кінетичного моменту тіла відносно його центра мас (осі $C_i \zeta_i$).

Нехай кутові швидкості тіл системи становлять ω_i . Тоді на підставі відомих формул (див. гл. 6) для нашого випадку запишемо таке співвідношення:

$$K_z = \sum M_{i_c} (m_i \bar{v}_i) = \sum M_{i_c} (m_i \bar{v}_{C_i}) + \sum K_{C_i \zeta_i}$$

або в розгорнутому вигляді:

$$K_z = \sum m_i (x_{C_i} \dot{y}_{C_i} - y_{C_i} \dot{x}_{C_i}) + \sum J_{C_i} \omega_i. \quad (7.10)$$

Тут J_{C_i} — моменти інерції тіл системи відносно їхніх центрів мас (відносно осей $C_i \zeta_i$, перпендикулярних до площини симетрії тіл). **Кінетичний момент плоскої системи тіл відносно нерухомої осі, перпендикулярної до площини симетрії тіл, дорівнює сумі кінетичних моментів центрів мас тіл у припущенні, що в них зосереджені маси тіл, відносно цієї самої осі, доданий до суми кінетичних моментів тіл відносно їхніх центрів мас (осей $C_i \zeta_i$).**

Вектор кінетичного моменту \vec{K}_z плоскої системи тіл відносно нерухомої осі Oz колінеарний цій осі (див. рис. 7.1), і його можна позначити як \vec{K}_O ($\vec{K}_O = \vec{K}_z$). При цьому, якщо $K_z > 0$, то \vec{K}_O і Oz збігаються за напрямом; якщо $K_z < 0$, то \vec{K}_O і Oz мають протилежні напрями. На рис. 7.1 стрілочкою показано додатний напрям кінетичного моменту плоскої системи тіл. Додамо, що для тіл у поступальних рухах кінетичні моменти відносно їхніх центрів мас нульові, оскільки немає обертань навколо центрів мас.

• **Кінетична енергія.** Визначимо третю динамічну величину для плоскої системи тіл. Нехай у плоскій системі N тіл N_1 із них здійснюють поступальний рух, N_2 — обертальний і N_3 — плоскопаралельний. Позначимо швидкості центрів мас тіл, які рухаються поступально й плоскопаралельно, через \bar{v}_{C_1} і \bar{v}_{C_3} відповідно, а їхні маси — через m_{i1} , m_{i3} відповідно. Кутові швидкості обертання тіл навколо нерухомих осей становлять ω_{i2} , а кутові швидкості тіл, що рухаються плоскопаралельно, — ω_{i3} . Задамо моменти інерції тіл відносно відповідних осей z_{i2} , $\zeta_{C_{i2}}$: для тіл в обертальному русі — $J_{z_{i2}}$, для тіл у плоскопаралельному русі — $J_{\zeta_{C_{i2}}}$. На підставі відомих формул кінетичної

енергії для окремих видів руху можемо записати вираз повної кінетичної енергії в розглядуваному випадкові руху плоскої системи тіл:

$$T = \sum_{i1} \frac{m_{i1} v_{C,1}^2}{2} + \sum_{i2} \frac{J_{C,2} \omega_{i2}^2}{2} + \sum_{i3} \left(\frac{m_{i3} v_{C,3}^2}{2} + \frac{J_{C,3} \omega_{i3}^2}{2} \right). \quad (7.11)$$

Тут $i1 = 1, 2, 3, \dots, N_1$; $i2 = N_1 + 1, N_1 + 2, N_1 + 3, \dots, N_1 + N_2$; $i3 = N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + 2, N_1 + N_2 + 3, \dots, N_1 + N_2 + N_3$.

□ **Теорема про зміну кількості руху та про рух центра мас плоскої системи тіл.** Нехай маємо деякий рух плоскої системи тіл, який відбувається під дією зовнішніх активних сил $\vec{F}_{a,3k}$, де $k = 1, 2, 3, \dots, N_F$ (N_F — кількість зовнішніх сил). Такими силами можуть бути рушійні сили (у двигунах внутрішнього згоряння — тиск газів на поршень під час згоряння пальної суміші), корисний опір (передача від якоря електрогенератора, що приводиться в рух двигуном внутрішнього згоряння, на головний вал двигуна через проміжні ланки пари сил, момент якої є моментом корисного опору, долаючи який, двигун виконує роботу), сили тяжіння тіл системи, сили пружності, наприклад, циліндричних пружин тощо. Крім зовнішніх активних сил, до тіл системи прикладені зовнішні реакції в'язей $\vec{F}_{p,3k}$, а також діють внутрішні сили взаємодії між тілами в системі $\vec{F}_{вi1,i2}, \vec{F}_{вi1,i3}, \vec{F}_{вi2,i3}, \vec{F}_{вi1,i1'}, \vec{F}_{вi2,i2'}, \vec{F}_{вi3,i3'}$.

Якщо як приклад плоскої системи тіл взяти кривошипно-шатунний механізм, то під час роботи механізму в центрі кривошипа з боку корпусу прикладається сила реакції. Крім того, з боку стінок циліндра на поршень (повзун) діють так звані нормальні реакції, а також сили тертя. Це зовнішні реакції в'язей, накладені на кривошипно-шатунний механізм. Сили взаємодії між частинками кривошипа, шатуна, поршня, які вважаються абсолютно твердими тілами, а також сили взаємодії між кривошипом і шатуном, шатуном і поршнем — це внутрішні реакції в'язей.

Під час руху плоскої системи тіл її загальна кількість руху \bar{Q} змінюватиметься лише внаслідок дії системи зовнішніх сил \vec{F}_{3k} . Щодо дії на кожне тіло системи внутрішніх сил $\vec{F}_{вi1,i2}, \vec{F}_{вi1,i3}, \vec{F}_{вi2,i1}, \vec{F}_{вi2,i3}, \vec{F}_{вi3,i1}, \vec{F}_{вi3,i2}, \vec{F}_{вi1,i1'}, \vec{F}_{вi2,i2'}, \vec{F}_{вi3,i3'}, \vec{F}_{вi3,i1'}, \vec{F}_{вi3,i2'}, \vec{F}_{вi1,i1'}, \vec{F}_{вi2,i2'}, \vec{F}_{вi3,i3'}$, то на підставі закону рівності дії та протидії їхній сукупний вплив як системи попарно рівних за модулем і протилежних за напрямом сил ($\vec{F}_{вi1,i2} = -\vec{F}_{вi2,i1}, \vec{F}_{вi1,i3} = -\vec{F}_{вi3,i1}, \vec{F}_{вi2,i3} = -\vec{F}_{вi3,i2}, \vec{F}_{вi1,i1'} = -\vec{F}_{вi1,i1'}, \vec{F}_{вi2,i2'} = -\vec{F}_{вi2,i2'}, \vec{F}_{вi3,i3'} = -\vec{F}_{вi3,i3'}$; $i1', i2', i3'$ набувають тих самих значень, що й $i1, i2, i3$) у результаті не змінює загальної кількості руху.

Отже, в подальших викладках, які стосуватимуться розглядуваної теореми та теореми про зміну кінетичного моменту, внутрішні сили не траплятимуться, оскільки в процесі обчислень знищуються відповідно до третього закону Ньютона й не увійдуть в остаточні рівняння, що виражають дані теореми. Лише під час розгляду теореми про зміну кінетичної енергії вплив внутрішніх сил необхідно враховувати.

Щоб дістати шукану теорему про зміну сумарної кількості руху плоскої системи тіл, треба дослідити окремо рух кожного її тіла й застосувати теорему про зміну кількості руху, яку раніше вже було розглянуто для поступального, обертального та плоскопаралельного рухів. Зазначимо, що незалежно від того, який вид рух здійснює тіло, математичний вираз цієї теореми однаковий.

У нашому випадковій теорема про зміну кількості руху в проекціях на нерухомі осі Oy , Oz для окремого тіла системи запишеться в такому вигляді:

$$\frac{dQ_{ix}}{dt} = R_{3ix} + R_{вix}, \quad \frac{dQ_{iy}}{dt} = R_{3iy} + R_{вий},$$

де під знаком похідних у лівих частинах — проекції кількості руху окремого тіла на осі; $i = 1, 2, 3, \dots, N$ (i послідовно набуває значень індексів i_1, i_2, i_3 , а $N = N_1 + N_2 + N_3$); R_{3ix}, R_{3iy} — проекції на осі головного вектора зовнішніх сил, які діють із боку зовнішніх тіл відносно плоскої системи тіл на i -те тіло в плоскій системі тіл; $R_{вix}, R_{вий}$ — проекції на ці самі осі головного вектора всіх внутрішніх сил, що діють на i -те тіло в плоскій системі тіл. Отже, маємо по N скалярних рівнянь, що описують рух тіл у напрямках осей Ox і Oy .

Додавши окремо перші й другі рівняння, в результаті дістанемо два сумарних рівняння

$$\sum \frac{dQ_{ix}}{dt} = \sum R_{3ix}, \quad \sum \frac{dQ_{iy}}{dt} = \sum R_{3iy}$$

або

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_{3x}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_{3y}; \quad (7.12)$$

$$Q_x = \sum Q_{ix}, \quad Q_y = \sum Q_{iy};$$

$$R_{3x} = \sum R_{3ix}, \quad R_{3y} = \sum R_{3iy}.$$

Похідна за часом від проекції кількості руху плоскої системи тіл на нерухомі декартові осі, які знаходяться в площині симетрії тіл, дорівнює проекціям головного вектора зовнішніх сил, що діють на тіла, на ці самі осі.

Замість двох скалярних рівнянь (7.12) можна записати одне векторне, яке справедливе у випадку руху будь-якої механічної системи:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}_3. \quad (7.13)$$

Похідна за часом від вектора кількості руху будь-якої механічної системи дорівнює головному векторові всіх зовнішніх сил, прикладених до механічної системи.

З урахуванням (7.9) векторну формулу можна подати так:

$$\begin{aligned} \frac{d(M\bar{v}_C)}{dt} &= \bar{R}_3, & M \frac{d\bar{v}_C}{dt} &= \bar{R}_3, \\ M\bar{a}_C &= \bar{R}_3 \end{aligned} \quad (7.14)$$

або в проєкціях на нерухомі осі:

$$M\ddot{x}_C = R_{3x}, \quad M\ddot{y}_C = R_{3y}. \quad (7.15)$$

Слід зважати на те, що

$$\begin{aligned} \bar{R}_3 &= \bar{R}_{a,3} + \bar{R}_{p,v,3}; \\ \bar{R}_{3x} &= \bar{R}_{a,3x} + \bar{R}_{p,v,3x}; \\ \bar{R}_{3y} &= \bar{R}_{a,3y} + \bar{R}_{p,v,3y}, \end{aligned}$$

тобто головний вектор зовнішніх сил плоскої системи тіл дорівнює векторній сумі головного вектора зовнішніх активних сил і головного вектора зовнішніх реакцій в'язей, накладених на систему.

Додавши до (7.15) аналогічне рівняння, що описує рух системи в напрямі осі Oz , матимемо загальну теорему про рух центра мас будь-якої механічної системи в проєкціях на нерухомі осі:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_{3x}, \\ M\ddot{y}_C &= R_{3y}, \\ M\ddot{z}_C &= R_{3z}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

де R_{3z} — проєкція головного вектора зовнішніх сил на третю нерухому вісь Oz . Зазначимо, що (7.16) відповідає та сама векторна формула (7.14).

Сформулюємо загальну теорему про рух центра мас механічної системи: *центр мас механічної системи рухається так само, як точка, маса якої дорівнює масі механічної системи, під дією сили, котра дорівнює головному векторові зовнішніх сил, що діють на механічну систему.*

Для системи взаємозв'язаних тіл, що мають площину матеріальної симетрії, паралельно якій відбувається рух тіл системи, вектор її кількості руху лежить у цій площині симетрії. Якщо протягом деякого часового інтервалу головний вектор зовнішніх сил, які діють на тіла системи, дорівнює нулю, то кількість руху системи не змінюється. Отже, приходимо до так званого *закону збереження кількості руху системи*:

$$\vec{Q} = \overrightarrow{\text{const.}}$$

Якщо головний вектор зовнішніх сил механічної системи дорівнює нулю, то вектор її кількості руху не змінюється.

Із закону про рух центра мас випливає: *якщо головний вектор зовнішніх сил системи дорівнює нулю, то її центр мас рухається прямо-лінійно рівномірно*. Рух навколо центра мас може бути будь-яким. Математично даний результат можна подати так:

$$\vec{R}_3 = 0, \quad \vec{v}_C = \overrightarrow{\text{const.}}$$

Якщо в початковий момент часу $t_0 = 0$ швидкість центра мас системи була нульовою, $\vec{v}_{C0} = 0$ ($\dot{x}_{C0} = \dot{y}_{C0} = 0$), то справедливі залежності

$$Mx_C = \sum m_i x_{C_i} = C_1,$$

$$My_C = \sum m_i y_{C_i} = C_2,$$

де C_1, C_2 — сталі, які визначаються за початковими координатами центрів мас тіл системи:

$$C_1 = \sum m_i x_{C_i,0}, \quad C_2 = \sum m_i y_{C_i,0},$$

звідки

$$\sum m_i (x_{C_i} - x_{C_i,0}) = 0,$$

$$\sum m_i (y_{C_i} - y_{C_i,0}) = 0;$$

$$\sum m_i \Delta x_{C_i} = 0,$$

$$\sum m_i \Delta y_{C_i} = 0.$$

(7.17)

Якщо головний вектор зовнішніх сил плоскої системи тіл і початкова швидкість центра мас системи дорівнюють нулю, то суми добутоків мас тіл системи на абсолютні переміщення їхніх центрів мас уздовж декартових осей також дорівнюють нулю.

Якщо зазначений головний вектор не дорівнює нулю, але його проекція на одну з декартових осей, наприклад Ox , а також проекція почат-

кової швидкості центра мас системи на цю вісь дорівнюють нулю, то сума добутоків мас тіл системи на абсолютні переміщення їхніх центрів мас уздовж цієї осі дорівнює нулю:

$$\sum m_i \Delta x_{c_i} = 0. \quad (7.18)$$

За третім законом Ньютона з боку плоскої системи тіл, кількість руху якої змінюється під впливом головного вектора зовнішніх сил, на зовнішні тіла, що своїм силовим впливом спричиняють зміну сумарної кількості руху \bar{Q} усіх тіл системи відповідно до векторного рівняння (7.13) або еквівалентних йому скалярних рівнянь (7.12), діють так звані інерційні сили, які сумарно виражаються головним вектором інерційних сил \bar{R}_i .

Розглянемо детальніше взаємодію зовнішніх тіл і плоскої системи тіл. Джерелом зовнішніх сил \bar{F}_{zi} , де $i = 1, 2, 3, \dots, N_F$ (N_F — кількість зовнішніх сил), є тіла, які не належать плоскій системі тіл. Серед зовнішніх сил є такі, що розвиваються лише внаслідок контактної взаємодії зовнішніх тіл із тілами системи, рух якої вивчається. Якщо зовнішні сили, які виникають за безпосередньої контактної взаємодії з тілами, до визначення з відповідних динамічних рівнянь системи її руху невідомі, то вони належать до зовнішніх реакцій в'язей. Є зовнішні сили, що діють на тіла системи постійно, не через безпосередній контакт тіл, як у разі виникнення реакцій в'язей, а на відстані. До них належать сили, що створюються різного роду полями — гравітаційним, електричним, магнітним тощо. Прикладом гравітаційних сил є сила притягання тіл Землею — вага тіла. Вага тіл наперед відома, в задачах механіки вона задається. Вага кривошипа, шатуна й поршня — це відомі зовнішні сили.

Приклади наперед відомих зовнішніх сил, які виникають через контакт тіл, це сила пружності пружини динамометра, тиск робочої суміші в камері згоряння на днище поршня в циліндровому двигуні.

Ще один вид зовнішніх сил, які можуть діяти на розглядувану систему тіл, — це так звані ударні сили, що розвиваються через миттєвий контакт тіл і досягають при цьому досить великих значень. Такі сили називаються миттєвими й у деяких випадках визначаються за допомогою відповідних рівнянь теорії удару.

Як бачимо, серед зовнішніх сил є такі, що наперед задаються в задачах механіки, а інші залишаються невідомими доти, доки не буде розв'язано відповідну задачу динаміки й визначено рух системи.

Проведемо за цими ознаками класифікацію зовнішніх сил, які діють на систему тіл у нашому випадкові. Поділимо зовнішні сили на дві категорії: активні задані $\bar{F}_{a,zi}$, $i = 1, 2, 3, \dots, N_F$, і реакції в'язей

$\vec{F}_{p.v.z.i}$, які накладаються на механічну систему (як уже зазначалося, до визначення руху за допомогою динамічних рівнянь ці сили невідомі).

Тепер можемо записати, що

$$\vec{F}_{z i, j} = \vec{F}_{a.z i, j} + \vec{F}_{p.v.z i, j}.$$

Тут i набирає всіх значень індексів $i1, i2, i3$, а $j = 1, 2, 3, \dots, N_{F_i}$, де N_{F_i} — кількість зовнішніх сил з індексом i — як активних, так і реакцій в'язей, прикладених до i -го тіла системи. Тому головні вектори цих сил для окремого тіла становлять

$$\vec{R}_{z i} = \sum_j \vec{F}_{z i, j} = \sum_j \vec{F}_{a.z i, j} + \sum_j \vec{F}_{p.v.z i, j} = \vec{R}_{a.z i} + \vec{R}_{p.v.z i}.$$

Головний вектор зовнішніх сил для плоскої системи тіл виразиться так:

$$\vec{R}_z = \vec{R}_{z i} = \sum_j \vec{F}_{z i, j} = \sum_j \vec{F}_{a.z i, j} + \sum_j \vec{F}_{p.v.z i, j} = \sum_i \vec{R}_{a.z i} + \sum_i \vec{R}_{p.v.z i}.$$

Головний вектор зовнішніх сил \vec{R}_z як сумарна сила за математичним означенням не має певної точки прикладання в системі тіл і є вільним. Він один не визначає певних загальних властивостей руху системи — лише спільно з головним моментом усіх зовнішніх сил відносно нерухомої осі Oz . Отже, головним вектором зовнішніх сил визначається поступальна складова цього загального руху, що проявляється в прискореному русі центра мас системи.

Обертальна складова цього загального руху визначається головним моментом зовнішніх сил відносно вибраних осей, у нашому випадкові — відносно нерухомої осі Oz , яка перпендикулярна до площини симетрії тіл системи. Якщо за таку вісь взяти, наприклад, паралельну їй, яка проходить через центр мас системи тіл, то обертальна складова руху буде інша й визначатиметься головним моментом зовнішніх сил відносно цієї нової осі Cz . Щоб визначити рух окремих тіл системи, треба врахувати всі сили, які прикладені до кожного з них, і застосувати відповідні рівняння динаміки.

Легко показати, що проекція головного вектора зовнішніх сил на дотичну до траєкторії дорівнює похідній за часом від проекції кількості руху на дотичну або похідній по дуговій координаті центра мас від кінетичної енергії. Справді, маємо

$$\begin{aligned} R_{z\tau} &= \frac{dQ_\tau}{dt} = \frac{d(Mv_{C\tau})}{dt} = Ma_{C\tau} = \\ &= M \frac{dv_{C\tau}}{dt} \frac{ds_C}{ds_C} = M \frac{dv_{C\tau}}{ds_C} \frac{ds_C}{d\tau} = Mv_{C\tau} \frac{dv_{C\tau}}{ds_C} = \end{aligned}$$

$$= \frac{d(Mv_{Cx}^2/2)}{ds_C} = \frac{dT}{ds_C}.$$

Згідно із законом рівності дії та протидії реакцією плоскої системи тіл на дію зовнішніх матеріальних тіл, яка виражається головним вектором зовнішніх сил \bar{R}_3 , є головний вектор інерційних сил \bar{R}_i ($\bar{R}_i = -\bar{R}_3$), який за правилом паралелограма сил (силового многокутника) розкладається на складові інерційні сили, що діють на окремі зовнішні тіла.

На підставі закону рівності дії та протидії з формул (7.12) і (7.13) запишемо проекції головного вектора інерційних сил системи тіл на декартові осі:

$$\bar{R}_{i_x} = -\frac{dQ_x}{dt} = -M\ddot{x}_C, \quad (7.19)$$

$$\bar{R}_{i_y} = -\frac{dQ_y}{dt} = -M\ddot{y}_C,$$

$$\bar{R}_i = -\frac{d\bar{Q}}{dt} = -M\bar{a}_C. \quad (7.20)$$

Справедлива також формула

$$-\bar{R}_{p.v.3} = \bar{R}_{a.3} - \frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}_{a.3} - M\bar{a}_C. \quad (7.21)$$

Величина

$$\bar{R}_{втр} = -\bar{R}_{p.v.3}$$

називається *головним вектором сил тиску на в'язі (опори)*, або *головним вектором утрачених сил*. Подамо її у вигляді

$$\bar{R}_{втр} = \bar{R}_{a.3} - \frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}_{a.3} - M\bar{a}_C. \quad (7.22)$$

Головний вектор утрачених сил характеризує сумарний динамічний тиск механічної системи, що рухається прискорено, на зовнішні в'язі; визначення цих сил становить великий практичний інтерес під час дослідження динаміки руху механізмів і машин. Сили тиску рухомої системи на різного роду опори залежать, як видно з формули (7.22), не лише від активних зовнішніх сил, й від прискорень центрів мас тіл системи.

Отже, знаючи, які активні сили діють на тіла системи, а також прискорення їхніх центрів мас, можна визначити динамічні сили,

котрі діють на зовнішні в'язі, що важливо під час розрахунку опор системи в динаміці різного типу машин. У випадку нульових прискорень центрів мас тіл плоскої системи інерційні сили, зумовлені саме поступальною складовою прискореного руху системи, на зовнішні в'язі не діють, а мають місце так звані статичні сили тисків, що за модулем дорівнюють зовнішнім активним силам.

Зробимо зауваження щодо інерційних сил. Розглядаючи теореми про зміну кількості руху й про рух центра мас системи, ми зосереджували свою увагу на сумарній інерційній силі, яка є реакцією матеріальної системи на прискорений рух її центра мас, що спричиняється діями зовнішніх тіл. Цілком зрозуміло, що для визначення інерційних сил, які діють на окремі зовнішні тіла, необхідно розв'язати задачу на розклад сумарної інерційної сили на складові.

Теорема про зміну кількості руху плоскої системи тіл описує лише поступальну складову її загального складного руху. Інша складова загального руху системи — обертальна. Динамічною характеристикою обертального руху системи тіл у цілому відносно нерухомих декартових осей є кінетичні моменти системи відносно цих самих осей або кінетичний момент механічної системи відносно нерухомого центра як векторна величина. Головні моменти зовнішніх сил відносно нерухомих декартових осей спричиняють зміни кінетичних моментів відносно цих осей, а головний момент зовнішніх сил відносно нерухомого центра як вектор зумовлює зміну кінетичного моменту відносно нерухомого центра. Зв'язок між зміною кінетичного моменту з часом та головним моментом зовнішніх сил встановлюється теоремою про зміну кінетичного моменту.

□ **Теорема про зміну кінетичного моменту плоскої системи тіл (плоского механізму).** На плоску систему тіл у загальному русі діють як зовнішні, так і внутрішні сили. Сума моментів внутрішніх сил взаємодії між самими тілами системи відносно нерухомої осі Oz як суми моментів відносно цієї осі попарно рівних за модулем і протилежних за напрямом сил дорівнює нулю. Отже, динамічні властивості обертальної складової системи тіл в її загальному русі не залежать від наявності внутрішніх сил взаємодії. Лише дія на систему зовнішніх сил, а саме їхніх моментів відносно нерухомої осі Oz , зумовлює зміну її кінетичного моменту K_z відносно цієї осі.

Для виведення даної теореми злиференціюємо за часом скалярну рівність (7.10):

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_i (\dot{x}_i \dot{y}_{c_i} + x_{c_i} \ddot{y}_{c_i} - \dot{y}_{c_i} \dot{x}_{c_i} - y_{c_i} \ddot{x}_{c_i}) + \sum J_{c_i} \frac{d\omega_i}{dt} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum m_i (x_{C_i} \ddot{y}_{C_i} - y_{C_i} \ddot{x}_{C_i}) + \sum J_{C_i} \frac{d\omega_i}{dt} = \\
&= \sum (x_{C_i} R_{3iy} - y_{C_i} R_{3ix}) + \sum M_{3iC\zeta}.
\end{aligned}$$

Використавши формули з гл. 6:

$$J_{C_i} \frac{d\omega_i}{dt} = M_{3iC\zeta}, \quad m_i \ddot{y}_{C_i} = R_{3iy}, \quad m_i \ddot{x}_{C_i} = R_{3ix},$$

приходимо до шуканої теореми:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum (x_{C_i} R_{3iy} - y_{C_i} R_{3ix}) + \sum M_{3iC\zeta}. \quad (7.23)$$

Тут R_{3iy} , R_{3ix} — суми проекцій усіх зовнішніх сил, що діють на i -те тіло системи, на осі Ox , Oy відповідно (до цих сил належать як зовнішні щодо самої плоскої системи тіл, так і сили, які діють із боку тіл сусідніх із виділеним i -м тілом); x_{C_i} , y_{C_i} — координати центра мас i -го тіла; $M_{3iC\zeta}$ — сума моментів тих самих сил, які діють на виділене із системи i -те тіло, відносно перпендикулярної до площини симетрії тіл поступально рухомої осі $C\zeta$, що проходить через центр мас i -го тіла; K_z — кінетичний момент плоскої системи тіл відносно нерухомої осі, перпендикулярної до площини матеріальної симетрії тіл системи.

Рівняння (7.23) використовується тоді, коли треба дістати необхідну кількість рівнянь руху для визначення невідомих сил взаємодії між самими тілами системи. Якщо ж під час розв'язання якоїсь конкретної задачі динаміки машин внутрішні сили не розглядаються й, крім того, легко визначити координати центра мас плоскої системи тіл, а також координати точок прикладання зовнішніх сил у поступально рухомій системі осей $C\xi\eta\zeta$ із початком у центрі мас C системи тіл, то зручно застосовувати таку формулу теореми:

$$\frac{dK_z}{dt} = x_C R_{3y} - y_C R_{3x} + M_{3C\zeta}, \quad (7.24)$$

де x_C , y_C — абсолютні координати центра мас системи; R_{3x} , R_{3y} — суми проекцій усіх зовнішніх сил системи тіл на відповідні декартові осі; $M_{3C\zeta}$ — суми моментів усіх зовнішніх сил системи тіл відносно поступально рухомої осі $C\zeta$, що проходить через центр мас системи перпендикулярно до площини симетрії тіл.

Теорема (7.24) про зміну кінетичного моменту плоскої системи тіл формулюється так: *похідна за часом від кінетичного моменту плоскої системи тіл відносно нерухомої осі, перпендикулярної до осі симетрії*

тіл системи, дорівнює моменту головного вектора зовнішніх сил, прикладеному в її центрі мас, у припущенні, що в цьому центрі зосереджена вся маса системи, відносно цієї самої осі, доданому до головного моменту всіх зовнішніх сил відносно поступально рухомої осі, що проходить через центр мас системи.

Якщо розглядаються абсолютні координати точок прикладання зовнішніх сил і при цьому визначаються моменти цих сил відносно нерухомої системи координат $Oxuz$, то зазначену теорему можна подати у вигляді

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum (x_i R_{3iy} - y_i R_{3ix}) = M_{3z}. \quad (7.25)$$

Похідна за часом від кінетичного моменту плоскої системи тіл відносно нерухомої осі, перпендикулярної до спільної для всіх тіл системи площини матеріальної симетрії, дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил відносно цієї самої осі.

Зазначимо, що скалярна формула (7.25) — це одна з трьох таких рівностей:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= M_{3x}, \\ \frac{dK_y}{dt} &= M_{3y}, \\ \frac{dK_z}{dt} &= M_{3z}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

які в найзагальнішому випадкові руху будь-якої механічної системи виражають теорему про зміну її кінетичного моменту відносно трьох нерухомих осей.

Сформулюємо дану теорему для випадку, коли за вісь, відносно якої визначається кінетичний момент, взято нову вісь $C\zeta$, що перпендикулярна до площини симетрії тіл і проходить через центр мас системи паралельно нерухомій осі. З рівняння (7.25) можна прийти до такого:

$$\frac{dK_{C\zeta}}{dt} = M_{3C\zeta}. \quad (7.27)$$

Похідна за часом від кінетичного моменту плоскої системи тіл відносно поступально рухомої осі, що проходить через центр мас системи перпендикулярно до її площини матеріальної симетрії, дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил системи відносно цієї самої осі.

Плоска система тіл, як і всяка механічна система, за зміни її кінетичного моменту відносно нерухомої осі, завдяки своїм інерційним

властивостям, протидіє зовнішнім тілам. Цей опір плоскої системи тіл зовнішнім тілам виражається головним інерційним моментом, який на підставі (7.25) і закону рівності дії та протидії запишеться так:

$$M_{i,z} = -M_{z,z} = -\frac{dK_z}{dt}. \quad (7.28)$$

Від скалярної форми запису інерційного моменту можна перейти до векторної, врахувавши, що складові кінетичного моменту $K_x = -J_{xz}\omega$, $K_y = -J_{yz}\omega$ відносно осей Ox , Oy дорівнюють нулю, оскільки ці осі знаходяться в площині матеріальної симетрії тіл системи, а вісь Oz , перпендикулярна до площини матеріальної симетрії, є головною віссю інерції для початку O . Тому відцентрові моменти $J_{xz} = J_{yz} = 0$. У такому разі складова \vec{K}_z збігається з вектором кінетичного моменту \vec{K}_O плоскої системи тіл відносно початку O системи осей $Oxyz$. Замість (7.28) маємо

$$\vec{M}_{i,O} = -\vec{M}_{z,O} = -\frac{d\vec{K}_O}{dt}. \quad (7.29)$$

Якщо для нашої системи кінетичний момент \vec{K}_O має додатний напрям уздовж осі Oz і векторна похідна $\frac{d\vec{K}_O}{dt} > 0$ (довжина \vec{K}_O збільшується з часом), то інерційний сумарний момент $\vec{M}_{i,O}$, який діє на зовнішні тіла з боку плоскої системи тіл, має напрям, протилежний напрямку \vec{K}_O , тобто додатному напрямку осі Oz .

Представимо головний вектор-момент зовнішніх сил як суму головного вектора-моменту активних сил і головного вектора-моменту реакцій в'язей:

$$\vec{M}_{z,O} = \vec{M}_{a,z,O} + \vec{M}_{p,a,z,O}.$$

Тоді на підставі (7.29) і закону рівності дії та протидії запишемо

$$\vec{M}_{втр,O} = \vec{M}_{a,z,O} - \frac{d\vec{K}_O}{dt}. \quad (7.30)$$

Маємо, що на зовнішні в'язі з боку прискорено рухомої плоскої системи тіл діє головний момент динамічного тиску \vec{M}_O (головний момент утрачених зовнішніх сил), який дорівнює різниці між головним моментом зовнішніх сил системи тіл і швидкістю зміни вектора кінетичного моменту (ці вектори-моменти беруться відносно точки O). Векторній рівності (7.30) відповідає скалярна

$$M_z = M_{a,z,z} - \frac{dK_z}{dt}. \quad (7.31)$$

□ Теорема про зміну кінетичної енергії плоскої системи тіл.

Як відомо, внутрішні сили взаємодії між тілами механічної системи змінюють кількості руху та моменти кількостей руху окремих тіл, однак на сумарну кількість руху й сумарний момент кількості руху системи тіл не впливають. Це пояснюється тим, що кількість руху й момент кількості руху є векторними мірами механічного руху, а тому дія сил, за законом рівності дії та протидії, спричиняє однакові за модулем і протилежні за напрямом зміни даних векторних величин для тієї чи іншої пари тіл системи, що взаємодіють. Отже, в цілому для системи ці зміни компенсуються й у сумі дають нуль, а зміни загальної кількості руху й моменту кількості руху визначаються відповідно головним вектором та головним моментом зовнішніх сил.

Третьою фундаментальною динамічною величиною є кінетична енергія системи тіл, що є скалярною мірою механічного руху. Тому в загальному випадкові дії сил на систему тіл її повна кінетична енергія змінюється через виконання механічної роботи не лише зовнішніми силами, а й внутрішніми, хоч останні й підлягають закону рівності дії та протидії. Дослідимо зміни повної кінетичної енергії плоскої системи тіл залежно від роботи двох категорій сил — зовнішніх і внутрішніх.

Спочатку зробимо деякі зауваження. Виводячи формулу кінетичної енергії (7.11), ми припускали, що в плоскій системі тіл N_1 тіл здійснюють поступальний рух, N_2 перебувають в обертальному русі навколо нерухомих осей і N_3 рухаються плоскопаралельно. Відповідно було введено індекси $i1, i2, i3$ для позначення номера тіла в кожній із трьох груп, що відрізняються характером здійснюваного в них руху тіл.

Тепер знову повернемося до раніше запроваджених позначень сил, які діють на плоску систему тіл. Розглядаючи дану теорему, ми не будемо зосереджувати увагу на поділі сил на активні й реакції зв'язків. Головне нас цікавитиме класифікація сил, що діють на тіла системи, яка пов'язана з поділом їх на зовнішні та внутрішні.

Нехай на плоску систему тіл діють зовнішні $\vec{F}_{3,i,j}$ і внутрішні $\vec{F}_{a,i,l}$ сили, де i набирає значень індексів $i1, i2, i3$ тіл у кожній із трьох груп системи; j — номер зовнішньої сили з числа тих, які прикладені до i -го тіла системи; l — номер внутрішньої сили, яка діє на i -те тіло системи з боку решти $N - 1$ тіл. Нагадаємо, що кількість усіх тіл у системі N , а в першій, другій і третій її групах, що відрізняються характером руху тіл у них, відповідно N_1, N_2, N_3 ; номери тіл у цих групах $i1, i2, i3$ відповідно. Кількість зовнішніх сил, прикладених до окремого тіла системи, позначимо N_{Fj} . Звичайно, вона залежатиме від індексу i , що не відображено в його позначенні.

Головні вектори сил, які діють на тіла в поступальному й плоскопаралельному рухах, позначимо через \vec{R}_{i1} , \vec{R}_{i3} відповідно. Нерухомі осі обертання для тіл другої групи, в якій здійснюються обертальні рухи, позначимо через z_{i2} . Тоді головні моменти сил, прикладених до тіл, відносно нерухомих осей обертання будуть обертальними моментами, які позначимо через $M_{об\ z_{i2}}$.

У плоскопаралельних рухах тіл вважатимемо, що головні вектори сил, які діють на окремі тіла третьої групи, прикладені в їхніх центрах мас C_{i3} ; позначимо їх через \vec{R}_{i3} . Головні моменти сил, що діють на тіла в плоскопаралельному русі, відносно поступально рухомих осей Cz_{i3} (ці осі перпендикулярні до площини матеріальної симетрії тіл і проходять через центри мас тіл) позначимо через $M_{Cz_{i3}}$.

Тепер перейдемо до розгляду самої теореми. В поступальному русі i -го тіла точки прикладання зовнішньої $\vec{F}_{3i,j}$ і внутрішньої $\vec{F}_{вi,l\tau}$ сил за нескінченно малий інтервал часу dt пройдуть по конгруентних траєкторіях однакові нескінченно малі шляхи ds . Дотичні складові даних сил $F_{3i,j\tau}$, $F_{вi,l\tau}$ (проекції сил на дотичні до траєкторій точок прикладання сил) на елементарному шляху ds_i виконують елементарні роботи $F_{3i,j\tau} ds_i$, $F_{вi,l\tau} ds_i$.

У разі поступального руху тіла ds_i можемо замінити на ds_{C_i} — елементарний шлях центра мас. Тоді сума елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил для i -го тіла, що рухається поступально,

$$dA_{3i\text{ пост}} + dA_{вi\text{ пост}} = \sum_j F_{3i,j\tau} ds_{C_i} + \sum_l F_{вi,l\tau} ds_{C_i} = R_{3i\tau} ds_{C_i} + R_{вi\tau} ds_{C_i}.$$

Елементарна робота всіх сил у поступальному русі для першої групи тіл обчислюється як сума елементарних робіт, знайдених для кожного з її тіл:

$$dA_{3\text{ пост}} + dA_{в\text{ пост}} = \sum_i dA_{3i} + \sum_i dA_{вi} = \sum_i R_{3i\tau} ds_{C_i} + \sum_i R_{вi\tau} ds_{C_i}. \quad (7.32)$$

Визначаючи елементарні роботи зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до тіл другої групи, в якій її тіла здійснюють обертальні рухи навколо нерухомих осей Oz_{i2} , спочатку запишемо вирази для елементарної роботи сил $F_{3i,j\tau}$, $F_{вi,l\tau}$:

$$F_{3i,j\tau} ds_{i,j}, \quad F_{вi,l\tau} ds_{i,l},$$

де $ds_{i,j}$, $ds_{i,l}$ — елементарні шляхи на колах, по яких рухаються точки прикладання відповідних сил.

Для i -го тіла $ds_{i,j} = r_{i,j} d\varphi_i$, $ds_{i,l} = r_{i,l} d\varphi_i$. Тоді сума елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил

$$dA_{3i\text{ об}} + dA_{вi\text{ об}} = \sum_j F_{3i,j\tau} r_{i,j} d\varphi_i + \sum_l F_{вi,l\tau} r_{i,l} d\varphi_i,$$

де

$$\sum_j F_{z_i, j \tau} r_{i, j} = M_{z_i z_{i2}}, \quad \sum_l F_{v_i, l \tau} r_{i, l} = M_{v_i z_{i2}}$$

— головні моменти відповідно зовнішніх і внутрішніх сил відносно осі обертання i -го тіла.

Остаточно для окремого тіла формула суми елементарних робіт набере вигляду

$$dA_{z_i \text{ об}} + dA_{v_i \text{ об}} = M_{z_i z_{i2}} d\varphi_i + M_{v_i z_{i2}} d\varphi_i.$$

Тепер, підсумувавши за індексом $i = i2 = N_1 + 1, N_1 + 2, N_1 + 3, \dots, \dots, N_1 + N_2$, дістанемо вираз для суми елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до тіл другої групи, в якій її тіла обертаються навколо нерухомих осей z_{i2} :

$$dA_{z_{\text{об}}} + dA_{v_{\text{об}}} = \sum_i dA_{z_i \text{ об}} + \sum_i dA_{v_i \text{ об}} = \sum_i M_{z_i z_{i2}} d\varphi_i + \sum_i M_{v_i z_{i2}} d\varphi_i. \quad (7.33)$$

Маючи формули (7.32) і (7.33), легко записати суму елементарних робіт для обох категорій сил, прикладених до тіл у плоскопаралельному русі третьої групи системи тіл. Справді, як відомо з кінематики, плоскопаралельний рух тіла є результатом накладання поступального руху разом із центром мас та обертального навколо центра мас. Отже, вважаючи, що $i = i3 = N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + 2, N_1 + N_2 + 3, \dots, N_1 + N_2 + N_3$, і замінивши у виразі (7.33) z_{i2} на $C\zeta_{i3}$, дістанемо

$$\begin{aligned} dA_{z_{\text{пл}}} + dA_{v_{\text{пл}}} &= dA_{z_{\text{пост}}} + dA_{v_{\text{пост}}} + dA_{z_{\text{об}}} + dA_{v_{\text{об}}} = \\ &= \sum_i R_{z_i \tau} ds_{C_i} + \sum_i R_{v_i \tau} ds_{C_i} + \sum_i M_{z_{C\zeta_{i3}}} d\varphi_i + \sum_i M_{v_{C\zeta_{i3}}} d\varphi_i. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Тепер, щоб знайти сумарну елементарну роботу $dA_z + dA_v$ усіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на плоску систему тіл, додамо праві частини трьох рівностей (7.32)—(7.34), що відповідають поступальному, обертальному й плоскопаралельному рухам тіл нашої системи:

$$\begin{aligned} dA_z + dA_v &= \sum_{i1} R_{z_{i1} \tau} ds_{C_{i1}} + \sum_{i1} R_{v_{i1} \tau} ds_{C_{i1}} + \sum_{i3} R_{z_{i3} \tau} ds_{C_{i3}} + \sum_{i3} R_{v_{i3} \tau} ds_{C_{i3}} + \\ &+ \sum_{i2} M_{z_{z_{i2}}} d\varphi_{i2} + \sum_{i2} M_{v_{z_{i2}}} d\varphi_{i2} + \sum_{i3} M_{z_{C\zeta_{i3}}} d\varphi_{i3} + \sum_{i3} M_{v_{C\zeta_{i3}}} d\varphi_{i3}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Тут індекси пробігають значення номерів тіл у межах кожної із груп.

Порівнявши сумарну елементарну роботу в нашому випадковій руху системи до диференціала її сумарної кінетичної енергії, матимемо шукану *теорему про зміну кінетичної енергії плоскої системи тіл у диференціальній формі*:

$$\begin{aligned}
dT &= d \left[\sum_{i1=1}^{N_1} \frac{m_{i1} v_{C_{i1}}^2}{2} + \sum_{i2=1}^{N_2} \frac{J_{O_{i2}} \omega_{i2}^2}{2} + \sum_{i3=1}^{N_3} \left(\frac{m_{i3} v_{C_{i3}}^2}{2} + \frac{J_{O_{i3}} \omega_{i3}^2}{2} \right) \right] = \\
&= \sum_{i1} R_{3i1\tau} ds_{C_{i1}} + \sum_{i1} R_{B_{i1\tau}} ds_{C_{i1}} + \sum_{i3} R_{3i3\tau} ds_{C_{i3}} + \sum_{i3} R_{B_{i3\tau}} ds_{C_{i3}} + \\
&+ \sum_{i2} M_{3z_{i2}} d\varphi_{i2} + \sum_{i2} M_{Bz_{i2}} d\varphi_{i2} + \sum_{i3} M_{3C_{i3}} d\varphi_{i3} + \sum_{i3} M_{B_{C_{i3}}} d\varphi_{i3}. \quad (7.36)
\end{aligned}$$

Диференціал кінетичної енергії плоскої системи тіл дорівнює сумі елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до плоскої системи тіл.

Далі припустимо, що треба визначити не нескінченно малу зміну dT (диференціал) кінетичної енергії в нашому випадкові, що відповідає нескінченно малому інтервалові часу dt , за який відбулося переміщення плоскої системи тіл із даного положення в нескінченно близьке до нього положення, а скінченну зміну кінетичної енергії $\Delta T = T - T_0$ між заданим початковим положенням системи тіл, якому відповідає початковий момент часу t_0 , і будь-яким іншим кінцевим її положенням, якому відповідає кінцевий момент часу t . Тоді беруть інтеграл від диференціала кінетичної енергії в межах від T_0 до T , після чого інтегрують елементарні роботи головних векторів зовнішніх і внутрішніх сил окремо в поступальному русі й у поступальній складовій плоскопаралельного руху в межах відповідних змін дугових координат центрів мас тіл, а також інтегрують елементарні роботи головних моментів обох категорій сил в обертальному русі тіла та в обертальній складовій плоскопаралельного руху в межах змін кутів повороту окремих тіл.

Ураховуючи ці зауваження, запишемо

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^T dT &= \sum_{i1} \int_{s_{0C_{i1}}}^{s_{C_{i1}}} R_{3i1\tau} ds_{C_{i1}} + \sum_{i1} \int_{s_{0C_{i1}}}^{s_{C_{i1}}} R_{B_{i1\tau}} ds_{C_{i1}} + \sum_{i3} \int_{s_{0C_{i3}}}^{s_{C_{i3}}} R_{3i3\tau} ds_{C_{i3}} + \sum_{i3} \int_{s_{0C_{i3}}}^{s_{C_{i3}}} R_{B_{i3\tau}} ds_{C_{i3}} + \\
&+ \sum_{i2} \int_{\varphi_{0i2}}^{\varphi_{i2}} M_{3z_{i2}} d\varphi_{i2} + \sum_{i2} \int_{\varphi_{0i2}}^{\varphi_{i2}} M_{Bz_{i2}} d\varphi_{i2} + \sum_{i3} \int_{\varphi_{0i3}}^{\varphi_{i3}} M_{3C_{i3}} d\varphi_{i3} + \sum_{i3} \int_{\varphi_{0i3}}^{\varphi_{i3}} M_{B_{C_{i3}}} d\varphi_{i3}.
\end{aligned}$$

Введемо позначення повних робіт головних векторів і головних моментів обох категорій сил, які виконуються на відповідних скінченних переміщеннях окремих тіл системи відповідно в поступальному русі, поступальній складовій плоскопаралельного руху та в його обертальній складовій навколо центрів мас тіл:

$$\int_{s_{0C_{i1}}}^{s_{C_{i1}}} R_{3i1\tau} ds_{C_{i1}} = A_{3i1}, \quad \int_{s_{0C_{i1}}}^{s_{C_{i1}}} R_{B_{i1\tau}} ds_{C_{i1}} = A_{B_{i1}}, \quad \int_{s_{0C_{i3}}}^{s_{C_{i3}}} R_{3i3\tau} ds_{C_{i1}} = A_{3i3},$$

$$\int_{S_{0C_{i3}}}^{S_{C_{i1}}} R_{B i 3 \tau} ds_{C_{i3}} = A_{B i 3};$$

$$\int_{\Phi_{0 i 2}}^{\Phi_{i 2}} M_{3 z_{i 2}} d\Phi_{i 2} = A_{3 i 2}, \quad \int_{\Phi_{0 i 2}}^{\Phi_{i 2}} M_{B z_{i 2}} d\Phi_{i 2} = A_{B i 2}, \quad \int_{\Phi_{0 i 3}}^{\Phi_{i 3}} M_{3 C_{i 3}} d\Phi_{i 3} = A_{3 i 3},$$

$$\int_{\Phi_{0 i 3}}^{\Phi_{i 3}} M_{B C_{i 3}} d\Phi_{i 3} = A_{B i 3}.$$

Далі підставимо позначення інтегралів у попередню рівність і обчислимо визначений інтеграл зліва:

$$T - T_0 = \sum_{i1=1}^{N_1} A_{i1 \text{ пост.з}} + \sum_{i1=1}^{N_1} A_{i1 \text{ пост.в}} + \sum_{i3=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} A_{i3 \text{ пост.з}} + \sum_{i3=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} A_{i3 \text{ пост.в}} +$$

$$+ \sum_{i2=N_1+1}^{N_1+N_2} A_{i2 \text{ об.з}} + \sum_{i2=N_1+1}^{N_1+N_2} A_{i2 \text{ об.в}} + \sum_{i3=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} A_{i3 \text{ об.з}} + \sum_{i3=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} A_{i3 \text{ об.в}}.$$

Знову введемо позначення повних робіт обох категорій сил на скінченних переміщеннях окремих груп тіл у поступальному, обертальному та плоскопаралельному рухах, що відповідають кінцевому переміщенню плоскої системи тіл:

$$\sum_{i1=1}^{N_1} A_{3 i 1 \text{ пост}} = A_{3 \text{ пост}}, \quad \sum_{i1=1}^{N_1} A_{B i 1 \text{ пост}} = A_{B \text{ пост}}, \quad \sum_{i2=N_1+1}^{N_1+N_2} A_{B i 2 \text{ об}} = A_{B \text{ об}},$$

$$\sum_{i2=N_1+1}^{N_1+N_2} A_{3 i 2 \text{ об}} = A_{3 \text{ об}}, \quad \sum_{i3=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} A_{3 i 3 \text{ пост}} = A_{3 \text{ пост.пл}}, \quad \sum_{i3=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} A_{B i 3 \text{ пост}} = A_{B \text{ пост.пл}},$$

$$\sum_{i3=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} A_{3 i 3 \text{ об}} = A_{3 \text{ об.пл}}, \quad \sum_{i3=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} A_{B i 3 \text{ об}} = A_{B \text{ об.пл}}.$$

Підставивши в попередню формулу, матимемо

$$T - T_0 = A_{3 \text{ пост}} + A_{B \text{ пост}} + A_{3 \text{ пост.пл}} + A_{B \text{ пост.пл}} +$$

$$+ A_{3 \text{ об}} + A_{B \text{ об}} + A_{3 \text{ об.пл}} + A_{B \text{ об.пл}}. \quad (7.37)$$

Об'єднаємо роботи, що виконуються окремо в поступальній і обертальній складових плоскопаралельного руху тіл третьої групи плоскої системи тіл:

$$T - T_0 = A_{3 \text{ пост}} + A_{B \text{ пост}} + A_{3 \text{ об}} + A_{B \text{ об}} + A_{3 \text{ пл}} + A_{B \text{ пл}}. \quad (7.38)$$

Маємо *теорему про зміну кінетичної енергії плоскої системи тіл*: зміна кінетичної енергії плоскої системи тіл дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил, які виконуються цими силами окремо в поступальних, обертальних та плоскопаралельних рухах тіл системи.

Дану теорему можна поширити на будь-яку механічну систему, в якій на тіла не накладається ніяких обмежень щодо їх симетричності та розташування відносно вибраної декартової системи координат і в яку, крім того, входять тіла, що виконують складніші види руху, ніж поступальний, обертальний і плоскопаралельний. Для цього переписемо (7.38) у вигляді

$$T - T_0 = A_3 + A_B. \quad (7.39)$$

Твердження теореми буде таке: *зміна кінетичної енергії механічної системи дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил.*

На завершення подамо розглядувану теорему (7.36) в дещо іншому вигляді — елементарні переміщення в доданках під знаками сум виразимо через відповідні лінійні й кутові швидкості:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \sum_{i1} R_{3i1\tau} \dot{s}_{C_{i1}} + \sum_{i1} R_{B_{i1}\tau} \dot{s}_{C_{i1}} + \sum_{i3} R_{3i3\tau} \dot{s}_{C_{i3}} + \sum_{i3} R_{B_{i3}\tau} \dot{s}_{C_{i3}} + \\ & + \sum_{i2} M_{3z_{i2}} \dot{\phi}_{i2} + \sum_{i2} M_{B_{z_{i2}}} \dot{\phi}_{i2} + \sum_{i3} M_{3\zeta_{i3}} \dot{\phi}_{i3} + \sum_{i3} M_{B_{\zeta_{i3}}} \dot{\phi}_{i3}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Похідна за часом від кінетичної енергії плоскої системи тіл дорівнює сумі потужностей, які розвиваються зовнішніми й внутрішніми силами в поступальних, обертальних та плоскопаралельних рухах тіл системи.

Тепер зведемо в систему рівняння, що виражають теореми про зміну кількості руху, кінетичного моменту та кінетичної енергії у формі потужностей:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_{3x}, \quad M\dot{x}_C = R_{3x};$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = R_{3y}, \quad M\dot{y}_C = R_{3y};$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum (x_{C_i} R_{3iy} - y_{C_i} R_{3ix}) + \sum M_{3\zeta_{i3}} \dot{\phi}_{i3}, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_{3z}; \quad (7.41)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i1} R_{3i1\tau} \dot{s}_{C_{i1}} + \sum_{i1} R_{B_{i1}\tau} \dot{s}_{C_{i1}} + \sum_{i3} R_{3i3\tau} \dot{s}_{C_{i3}} + \sum_{i3} R_{B_{i3}\tau} \dot{s}_{C_{i3}} +$$

$$+ \sum_{i2} M_{3z_{i2}} \dot{\phi}_{i2} + \sum_{i2} M_{B_{z_{i2}}} \dot{\phi}_{i2} + \sum_{i3} M_{3\zeta_{i3}} \dot{\phi}_{i3} + \sum_{i3} M_{B_{\zeta_{i3}}} \dot{\phi}_{i3}, \quad \frac{dT}{dt} = P_3 + P_B,$$

де P_3, P_B — повні потужності відповідно зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на плоску систему тіл. Система рівнянь (7.41) виражає загальні теореми динаміки в окремому випадкові механічної системи, якою є плоска система тіл, і називається універсальною, за допомогою якої визначають рух як окремих тіл плоскої системи тіл, так і її рух у цілому, сили взаємодії між окремими тілами, а також реакції в'язей.

Для довільної матеріальної (механічної) системи тіл буде сім незалежних універсальних рівнянь динаміки:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} &= R_{3x}, & M\ddot{x}_C &= R_{3x}, \\ \frac{dQ_y}{dt} &= R_{3y}, & M\ddot{y}_C &= R_{3y}, \\ \frac{dQ_z}{dt} &= R_{3z}, & M\ddot{z}_C &= R_{3z}; \\ \frac{dK_x}{dt} &= M_{3x}, & & \\ \frac{dK_y}{dt} &= M_{3y}, & & \\ \frac{dK_z}{dt} &= M_{3z}; & & \\ \frac{dT}{dt} &= P_3 + P_B. & & \end{aligned} \quad (7.42)$$

7.2

Рівновага плоскої системи тіл

Рівновага тіла з площиною матеріальної симетрії, в якій на нього діють активні сили й реакції в'язей. Із площиною симетрії тіла сумістимо декартову площину Oxz ; при цьому вісь Oz напрямлена на читача (рис. 7.3). Нехай на тіло в його площині симетрії діє система зовнішніх сил \vec{F}_j , де $j = 1, 2, 3, \dots, N$ (N — кількість сил у системі). Поділимо ці сили на дві категорії: активні \vec{F}_{aj} і реакції в'язей $\vec{F}_{p,vj}$. Далі введемо для даних сил координати точок їх прикладання в тілі, які в системі осей Oxy будуть x_j, y_j .

Як відомо з попереднього, векторна сума сил системи називається головним вектором системи сил і записується так:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_j = \sum \vec{F}_{aj} + \sum \vec{F}_{p,vj}. \quad (7.43)$$

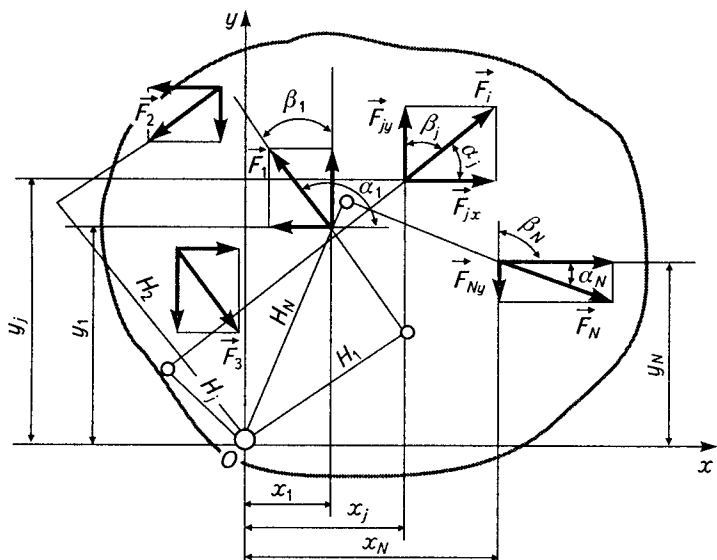


Рис. 7.3

Геометрично ця векторна рівність зображується силовим багатокутником, в якому N сторін — це сили системи, однакові за модулями й напрямками, а $(N + 1)$ -ша сторона є сумарною силою — головним вектором. Якщо йти по контуру силового багатокутника в напрямі складових сил на його контурі, то зустрінемо головний вектор на $(N + 1)$ -й стороні з напрямом, протилежним рухові по контуру (рис. 7.4).

З математики відомо, що проєкція суми векторів на ту чи іншу декартову вісь дорівнює сумі проєкцій складових векторів на цю саму вісь. Отже, маємо

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{jx} = \sum F_j \cos \angle(\vec{F}_j, x) = \sum F_j \cos \alpha_j, \\ R_y &= \sum F_{jy} = \sum F_j \cos \angle(\vec{F}_j, y) = \sum F_j \cos \beta_j. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Тут $\cos \angle(\vec{F}_j, x) = \cos \alpha_j$, $\cos \angle(\vec{F}_j, y) = \cos \beta_j$ — косинуси напрямних кутів (напрямні косинуси) $\angle(\vec{F}_j, x) = \alpha_j$, $\angle(\vec{F}_j, y) = \beta_j$ між векторами сил системи й додатними напрямками осей проєкцій Ox , Oy відповідно.

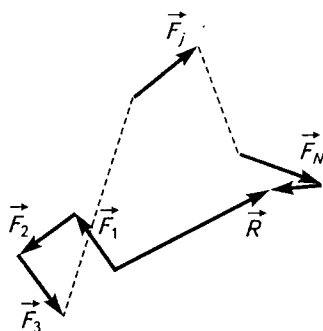


Рис. 7.4

Розрізняють прямокутні складові \vec{F}_{jx} , \vec{F}_{jy} сили \vec{F}_j , паралельні відповідним декартовим осям, і проекції сили на ці осі (див. рис. 7.3). Прямокутні складові — це векторні величини, а проекції сили на осі — алгебричні значення прямокутних складових. Прямокутні складові за правилом паралелограма сил дають рівнодійну сил і за своєю дією замінюють останню. І навпаки, дана сила, розкладаючися в напрямках декартових осей, дає відповідні прямокутні складові. Як уже зазначалося, проекції сили на осі визначають алгебричні значення прямокутних складових, якими зручно користуватися під час розв'язування задач. *Проекції сили визначаються як добутки модуля сили на косинус кута між напрямом сили й додатним напрямом декартової осі (рис. 7.3).*

Тепер звернемо увагу на головний момент плоскої системи сил відносно осі Oz

$$M_z = \sum M_{iz}(\vec{F}_{iz}), \quad (7.45)$$

що становить суму моментів сил системи відносно вибраної осі Oz і є однією з проекцій так званого головного вектора-моменту \vec{M}_O відносно початку O системи координат $Oxyz$. Дві інші його проекції в нашому випадкові дорівнюють нулю. Тому \vec{M}_O перпендикулярний до площини розташування сил системи й збігається з паралельною осі Oz складовою \vec{M}_z . Якщо в загальному випадкові головний вектор-момент \vec{M}_O системи сил утворює з віссю Oz кут $\angle(\vec{M}_O, z)$, то його проекція на цю вісь буде

$$M_z = M_O \cos \angle(\vec{M}_O, z).$$

Це загальна формула, а в розглядуваному випадкові $\angle(\vec{M}_O, z) = 0$, і тому $M_z = M_O$.

Як відомо, головний вектор системи сил, що діють на плоску систему тіл, визначається через координати точок прикладання окремих сил та їх проекції на осі:

$$M_z = \sum (x_j F_{jy} - y_j F_{jx}). \quad (7.46)$$

Перпендикуляри H_j ($j = 1, 2, 3, \dots, N$), опущені з точки O на напрями ліній дії сил системи (рис. 7.3), називаються плечами сил \vec{F}_j відносно точки O або відносно осі Oz .

Для нашого випадку дії сил на тіло моментом сили відносно точки (осі) (точка є перетином площини дії сили з віссю) називається взятий зі знаком «+» або «-» добуток модуля сили на плече. Момент має знак «+», коли сила намагається повернути плече проти годинникової стрілки (якщо дивитися на площину сил зверху вниз проти додатного напрямку осі), і знак «-» — при намаганні сили повернути

плече за годинниковою стрілкою. Отже, в першому випадкові момент сили додатний, а в другому — від’ємний (рис. 7.5, а, б відповідно).

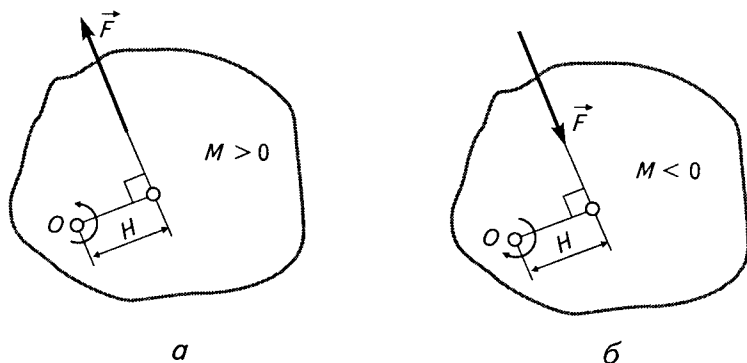


Рис. 7.5

Формулу головного моменту для плоскої системи сил, наведених на рис. 7.3, відносно точки можна подати у вигляді

$$M_z = F_1 H_1 + F_1 H_1 + F_1 H_1 + 0 + 0 + \dots + F_{j-1} H_{j-1} - F_j H_j + F_{j+1} H_{j+1} + \dots - F_{N-1} H_{N-1} + F_N H_N.$$

Під час розв’язування багатьох задач на рівновагу замість формули (7.46) зручно використовувати останню залежність, яку можна записати так:

$$M_z = \sum (\pm F_j H_j). \quad (7.47)$$

У плоскій системі сил можуть бути такі сили, які утворюють пари сил. Це сукупність двох паралельних сил, однакових за модулем і протилежних за напрямом, які мають різні лінії дії (рис. 7.6). Відстань між лініями дії сил пари називається її плечем H . Пари сил справляють на тіло обертальну дію, яка характеризується вектором-моментом або просто моментом. Модуль моменту дорівнює добутку модуля сил пари на її плече:

$$M = FH. \quad (7.48)$$

Вектор-момент \vec{M} пари сил перпендикулярний до її площини $(\vec{F}, -\vec{F})$, і його напрям визначається за правилом правого гвинта: *аби визначити напрям вектора-моменту пари сил, треба дивитися на площину дії пари з такого боку, щоб при цьому сили пари намагалися повернути своє плече в напрямі обертання правого гвинта в гайці при його*

загвинчуванні; тоді поступальний рух гвинта вкаже на напрям вектора-моменту пари. На рис. 7.6, а, визначаючи напрям вектора-моменту пари, погляд слід спрямовувати на нижню сторону площини пари, знизу вгору, а на рис. 7.6, б — навпаки.

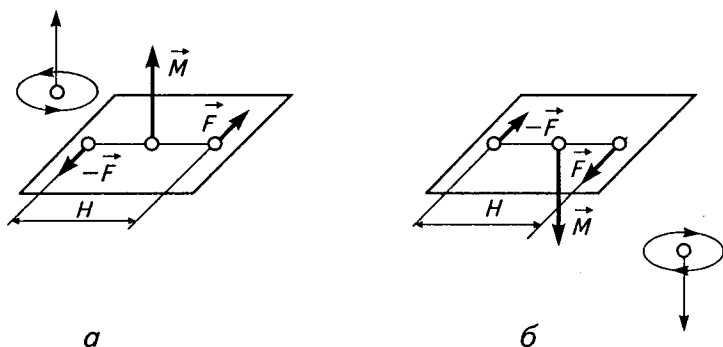


Рис. 7.6

У задачах на рівновагу плоских систем тіл, в яких сили й пари сил системи розташовані у спільній площині, простіше розглядати не вектори-моменти пар сил, а їхні проекції на яку-небудь вісь, перпендикулярну до площини сил, наприклад вісь Oz . У такому випадкові користуються проекцією вектора-моменту \vec{M} на дану вісь:

$$M_z = M \cos \angle(\vec{M}, z) = M \cos 0^\circ = M,$$

якщо \vec{M} і Oz за напрямом збігаються, й

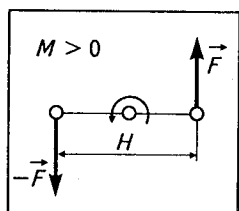
$$M_z = M \cos \angle(\vec{M}, z) = M \cos 180^\circ = -M,$$

якщо напрями протилежні. Взавши до уваги ці два випадки, наведемо правило для визначення алгебричного моменту пари сил на площині. Дивитимемося на одну сторону площини, в якій розташовані сили й пари сил, наприклад, згори вниз, якщо площина горизонтальна. Тоді алгебричним моментом пари сил називається взятий зі знаком «+» або «-» добуток модуля сил пари на її плече:

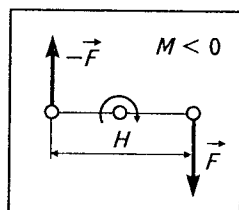
$$M_z = M = \pm FH. \quad (7.49)$$

Момент пари додатний (рис. 7.7, а), якщо сили пари намагаються повернути своє плече проти годинникової стрілки, і від'ємний, якщо сили пари намагаються повернути своє плече за годинниковою стрілкою (рис. 7.7, б).

Доведемо **теорему про пари сил**: сума моментів сил пари відносно довільної точки на площині дії пари сил дорівнює моменту пари сил.



a



б

Рис. 7.7

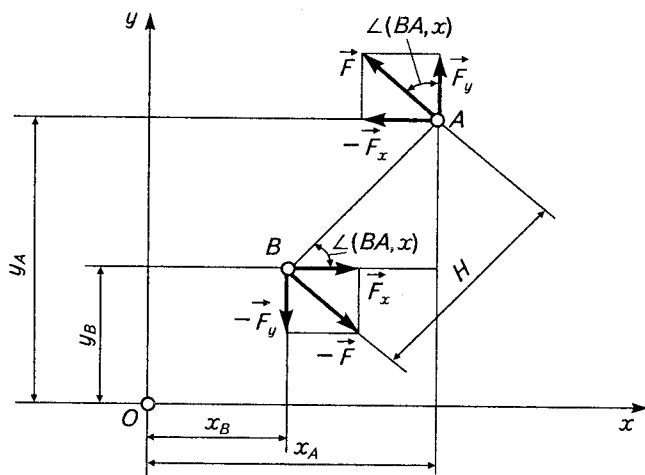


Рис. 7.8

Справді, з рис. 7.8 дістаємо

$$M_O(\vec{F}) + M_O(-\vec{F}) = x_A F_y + y_A F_x + x_B (-F_y) - y_B F_x = \\ = (x_A - x_B) F_y + (y_A - y_B) F_x,$$

але

$$F_y = F \cos \angle(AB, x), \quad F_x = F \sin \angle(AB, x).$$

Підставивши в попередню формулу, матимемо

$$M_O(\vec{F}) + M_O(-\vec{F}) = \\ = (x_A - x_B) F \cos \angle(AB, x) + (y_A - y_B) F \sin \angle(AB, x).$$

Далі з прямокутного трикутника *ABC* запишемо

$$x_A - x_B = H \cos \angle(AB, x), \quad y_A - y_B = H \sin \angle(AB, x).$$

Урахувавши це в попередній рівності й застосувавши основну тригонометричну тотожність, приходимо до остаточного співвідношення

$$M_O(\bar{F}) + M_O(-\bar{F}) = FH = M.$$

Теорему доведено.

Зрозуміло, що для системи пар сил на площині *сума моментів сил складових пар системи відносно взятої точки на площині дії пар дорівнює сумі моментів складових пар системи:*

$$\begin{aligned} & \sum M_{jO}(\bar{F}_j) + \sum M_{jO}(-\bar{F}_j) = \\ & = \sum [(x_{jA} - x_{jB})F_{jy} + (y_{jA} - y_{jB})F_{jx}] = \sum (\pm F_j H_j). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Рівновагою тіла назвемо стан його спокою або прямолінійного рівномірного руху відносно абсолютно нерухомої системи координат (інерціальної). Для дослідження рівноваги в нашому випадковій застосуємо рівняння динаміки плоскопаралельного руху

$$M\ddot{x}_C = R_{3x}, \quad M\ddot{y}_C = R_{3y}, \quad J_{C\zeta} \varepsilon = M_{3C\zeta}.$$

Проекції головного вектора зовнішніх сил на осі Ox , Oy і головний момент цих сил відносно осі Oz виразимо через зовнішні активні сили й зовнішні реакції в'язей:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_{a.3x} + R_{p.в.3x} = \sum F_{a.3jx} + \sum F_{p.в.3jx}, \\ M\ddot{y}_C &= R_{a.3y} + R_{p.в.3y} = \sum F_{a.3jy} + \sum F_{p.в.3jy}; \\ J_{C\zeta} \varepsilon &= M_{a.3C\zeta} + M_{p.в.3C\zeta} = \sum M_{a.3j\zeta} + \sum M_{p.в.3j\zeta}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Щоб дістати рівняння рівноваги тіла, необхідно в лівих частинах замість \ddot{x}_C , \ddot{y}_C , ε поставити нулі:

$$\begin{aligned} 0 &= R_{a.3x} + R_{p.в.3x}, \\ 0 &= R_{a.3y} + R_{p.в.3y}, \\ 0 &= M_{a.3C\zeta} + M_{p.в.3C\zeta}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Останнє рівняння перепишемо так:

$$0 = \sum (\xi_j F_{a.3j\eta} - \eta_j F_{a.3j\xi}) + \sum (\xi_j F_{p.в.3j\eta} - \eta_j F_{p.в.3j\xi}).$$

Вважається, що осі $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$ паралельні відповідним осям Ox , Oy , Oz . Запишемо зв'язок між координатами точок прикладання сил у двох системах координат $Oxyz$, $C\xi\eta\zeta$:

$$x_j = x_C + \xi_j, \quad y_j = y_C + \eta_j.$$

Підставимо в попередні рівняння й зробимо деякі викладки:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum [(x_j - x_C)F_{a.3 j y} - (y_j - y_C)F_{a.3 j x}] + \\
 &+ \sum [(x_j - x_C)F_{p.v.3 j y} - (y_j - y_C)F_{p.v.3 j x}] = \\
 &= y_C [\sum F_{a.3 j x} + \sum F_{p.v.3 j x}] - x_C [\sum F_{a.3 j y} + \sum F_{p.v.3 j y}] + \\
 &+ \sum [x_j F_{a.3 j y} - y_j F_{a.3 j x}] + \sum [y_j F_{p.v.3 j x} - x_j F_{p.v.3 j y}]; \\
 \sum F_{a.3 j x} + \sum F_{p.v.3 j x} &= M\ddot{x}_C, \\
 \sum F_{a.3 j y} + \sum F_{p.v.3 j y} &= M\ddot{y}_C; \\
 0 &= y_C \ddot{x}_C M - x_C M\ddot{y}_C + \\
 &+ \sum [x_j F_{a.3 j y} - y_j F_{a.3 j x}] + \sum [y_j F_{p.v.3 j x} - x_j F_{p.v.3 j y}].
 \end{aligned}$$

Тут здійснено таку заміну на підставі рівнянь (7.48):

$$\begin{aligned}
 y_C [\sum F_{a.3 j x} + \sum F_{p.v.3 j x}] - x_C [\sum F_{a.3 j y} + \sum F_{p.v.3 j y}] = \\
 = y_C \ddot{x}_C M_{3x} - x_C \ddot{y}_C M_{3y}.
 \end{aligned}$$

Оскільки за рівноваги тіла $\ddot{x}_C = \ddot{y}_C = 0$, то третє рівняння набирає вигляду

$$0 = \sum [x_j F_{a.3 j y} - y_j F_{a.3 j x}] + \sum [y_j F_{p.v.3 j x} - x_j F_{p.v.3 j y}].$$

Його можна подати ще й у такій формі:

$$\sum M_{jz}(\vec{F}_{a.j}) + \sum M_{jz}(\vec{F}_{p.v.3.j}) = 0$$

або, використавши позначення $M_{jz}(\vec{F}_{a.3.j}) = M_{a.3.jO}$, $M_{jO}(\vec{F}_{p.v.3.j}) = M_{p.v.3.jO}$,

$$0 = \sum M_{a.3.jO} + \sum M_{p.v.3.jO}.$$

Перші два з рівнянь системи (7.52) запишемо через окремі складові сили, що діють на тіло:

$$0 = \sum F_{a.3 j x} + \sum F_{p.v.3 j x},$$

$$0 = \sum F_{a.3 j y} + \sum F_{p.v.3 j y}.$$

Попередні рівняння й два останніх зведемо в систему:

$$\begin{aligned}
 \sum F_{a.3 j x} + \sum F_{p.v.3 j x} &= 0, \\
 \sum F_{a.3 j y} + \sum F_{p.v.3 j y} &= 0, \\
 \sum M_{a.3.jO} + \sum M_{p.v.3.jO} &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.53}$$

Це рівняння рівноваги тіла під дією довільної плоскої системи сил. *Тіло під дією довільної плоскої системи сил перебуває в рівновазі, якщо алгебричні суми проєкцій усіх сил системи, що діють на тіло, — як зовнішніх активних, так і зовнішніх реакцій в'язей, на дві розташовані в площині дії сил декартові осі дорівнюють нулю, а також дорівнює нулю сума моментів усіх цих сил відносно довільної точки на площині, на якій лежать осі проєкцій і сили системи.*

Оскільки внутрішні сили взаємодії між частинками, з яких складається тіло, зрівноважуються, то в статичі не наголошується на поділі сил на зовнішні активні й зовнішні реакції в'язей. Тому рівняння рівноваги (7.53) записуються без відповідних індексів:

$$\begin{aligned}\sum F_{jx} &= 0, \\ \sum F_{jy} &= 0, \\ \sum M_{jO} &= 0.\end{aligned}\tag{7.54}$$

Плоска система сил перебуває в рівновазі, якщо суми проєкцій її сил на дві взаємно перпендикулярні й розташовані в площині дії сил осі дорівнюють нулю, а також дорівнює нулю сума моментів сил відносно довільної точки на площині дії сил. Перші два з рівнянь (7.54) називаються рівняннями рівноваги сил у проєкціях, а третє — рівнянням рівноваги сил у моментах. Дана система трьох рівнянь рівноваги для плоскої системи сил є основою, бо вона безпосередньо впливає з динамічних рівнянь плоскопаралельного руху тіла.

Для розглядуваного випадку можна дістати ще дві додаткові системи рівнянь рівноваги, якщо в системі (7.54) перше з рівнянь рівноваги сил у проєкціях замінити на рівняння рівноваги сил у моментах відносно якої-небудь іншої точки, відмінної від точки O , але яка знаходиться в площині дії сил. Позначимо цю другу точку через A й запишемо три рівняння рівноваги, одне з яких — у проєкціях, а два інші — в моментах:

$$\begin{aligned}\sum F_{jy} &= 0, \\ \sum M_{jO} &= 0, \\ \sum M_{jA} &= 0.\end{aligned}\tag{7.55}$$

Незалежними рівняннями рівноваги в нашому випадкові є ще три рівняння рівноваги в моментах навколо трьох різних точок O , A , B , які не належать одній прямій:

$$\begin{aligned}\sum M_{jO} &= 0, \\ \sum M_{jA} &= 0, \\ \sum M_{jB} &= 0.\end{aligned}\tag{7.56}$$

Цілком зрозуміло, що в разі прикладання сил, що діють на тіло, в одній його точці, рівняннями рівноваги на підставі (7.56) будуть

$$\begin{aligned}\sum F_{jx} &= 0, \\ \sum F_{jy} &= 0.\end{aligned}\tag{7.57}$$

Для системи паралельних сил також маємо два рівняння рівноваги, одне з яких може бути рівнянням у проєкціях, а друге — в моментах або обидва — рівняннями в моментах:

$$\begin{aligned}\sum F_{jy} &= 0, \\ \sum M_{jO} &= 0;\end{aligned}\tag{7.58}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{jO} &= 0, \\ \sum M_{jA} &= 0.\end{aligned}\tag{7.59}$$

Складаючи перше з рівнянь (7.58), вісь Oy вибирають паралельно силам системи.

□ **Рівняння рівноваги плоскої системи тіл.** Тут умови, накладені на плоску систему тіл у п. 7.1, зберігаються. Для виведення даних рівнянь можна було скористатись універсальними рівняннями динаміки (7.41). Проте оскільки ми маємо рівняння рівноваги (7.54), (7.59) для окремого тіла з тими самими властивостями й характером прикладеного до нього навантаження, які справедливі для складових тіл нашої системи, то виходитимемо переважно з основної системи рівнянь рівноваг (7.56).

На виділене i -те тіло діють зовнішні сили з боку тіл, які не належать нашій системі, й внутрішні сили з боку сусідніх із ним тіл системи. Оскільки розглядається рівновага, то немає потреби використовувати прийняту раніше систему позначень сил, пов'язану з відмінністю у видах руху тіл у різних групах системи. Кількість тіл у системі, як і раніше в дослідженні динаміки руху, буде N , а номер тіла в системі позначимо індексом $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

Нехай до окремо виділеного із системи i -го тіла прикладені зовнішні сили $\vec{F}_{zi,q}$, де $q = 1, 2, 3, \dots, N_F$ — номер зовнішньої сили в системі сил з їхньою кількістю N_F , прикладених до тіла з номером i .

Зрозуміло, що кількість сил N_F залежить від номера i тіла в системі тіл. До цього i -го тіла прикладена також система внутрішніх сил $\vec{F}_{v,i,i'+1}$ із боку решти $N - 1$ тіл системи, де $i' = 1, 2, 3, \dots, N - 1$. Отже, рівняння рівноваги i -го тіла на підставі (7.56) запишуться так:

$$\begin{aligned} \sum F_{z i, q x} + \sum F_{v, i, i'+1 x} &= 0, \\ \sum F_{z i, q y} + \sum F_{v, i, i'+1 y} &= 0, \\ \sum M_{z i, q O_i} + \sum M_{v, i, i'+1 O_i} &= 0. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Тут O_i — центр моментів сил для i -го тіла — скільки тіл у системі, стільки може бути центрів моментів. Щодо осей проекцій сил, то залежно від складності плоскої системи тіл вони можуть бути спільними для всіх тіл системи, а можуть вибиратися для кожного тіла окремо для спрощення складання рівнянь рівноваги.

Взагалі, розв'язуючи конкретні задачі на рівновагу, слід дотримуватися такої вимоги: *осі проекцій і центри моментів для сил треба вибирати так, щоб рівняння рівноваги були якомога простішими й розв'язання задачі спрощувалося.*

Якщо в рівняннях (7.60) індекс i — натуральне число від 1 до N , то в результаті записується система $3N$ рівнянь рівноваги. Число невідомих для однозначного визначення із системи рівнянь, звичайно, має дорівнювати кількості рівнянь у системі. Як відомо, рівновага тіла забезпечується сукупною дією двох видів сил: активних, що заздалегідь відомі, й наперед невідомих реакцій в'язей. За рівноваги останні сили виникають унаслідок дії активних сил, які входять у дані задачі. Отже, робимо висновок. У задачі на рівновагу з одним тілом можна скласти не більше ніж три незалежних рівняння, з яких можуть бути визначені три невідомі реакції. В загальному випадкові N тіл можемо скласти не більше ніж $3N$ незалежних рівнянь рівноваги, в які для однозначного розв'язку має входити стільки ж невідомих реакцій в'язей.

У задачах на рівновагу можна спростити відшукування деяких реакцій зовнішніх в'язей, якщо замість одного з $3N$ рівнянь скласти рівняння рівноваги плоскої системи тіл як одного цілого. В цьому разі внутрішні сили взаємодії між тілами в системі не розглядаються, бо на підставі закону рівності дії та протидії дають нульові суми проєкцій цих сил на осі, а також у нуль перетворюється сума їхніх моментів відносно будь-якої точки. Отже, $3N - 1$ рівнянь рівноваги окремих тіл системи та її загальне рівняння рівноваги знову дають $3N$ рівнянь.

7.3

Дослідження руху кривошипно-шатунного механізму

Постановка задачі. Розглянемо модельну задачу про рух кривошипно-шатунного механізму, в якому кривошип OA і шатун AB є однорідними стержнями однакової довжини r . Центр B повзуна (поршня) знаходиться на горизонтальній прямій, яка проходить через центр обертання кривошипа — точку O . Це так званий центральний кривошипно-шатунний механізм (рис. 7.9). Між горизонтальними напрямними (стінками циліндра) й поверхнею повзуна, а також у шарнірних з'єднаннях механізму тертя немає. Маса кривошипа, шатуна й повзуна дорівнюють m_1 , m_2 , m_3 відповідно. Нехай на днище поршня з боку робочої суміші діє сила тиску F , залежність якої від ходу поршня задана за результатами дослідження індикаторною діаграмою.

Задача полягає в тому, щоб за умови рівномірного обертання кривошипа з кутовою швидкістю ω визначити: кінематичні характеристики руху окремих тіл механізму — лінійні, кутові швидкості й прискорення; основні динамічні величини механізму — кількість руху, момент кількості руху, кінетичну енергію й роботу; зовнішні реакції в'язей, внутрішні сили взаємодії між ланками механізму й за-

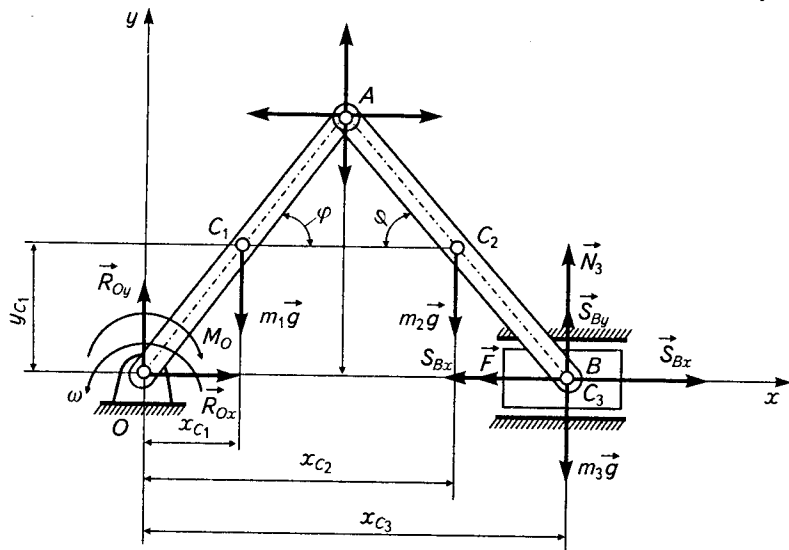


Рис. 7.9

лежність моменту опору кривошипа M_0 від сили тиску F на поршень; динамічні сили тиску на опору кривошипа, в з'єднаннях кривошип—шатун і шатун—поршень, а також поршень—стілки циліндра; статичні реакції зовнішніх в'язей у рівноважному стані механізму, а також сили взаємодії між його складовими частинами.

Для визначення зовнішніх реакцій в'язей можемо застосувати три універсальних рівняння динаміки плоскої системи тіл, які виражають загальні теореми динаміки (7.42):

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} &= M\ddot{x}_C = R_{3x}, \\ \frac{dQ_y}{dt} &= M\ddot{y}_C = R_{3y}, \\ \frac{dK_z}{dt} &= M_{3z}. \end{aligned} \quad (7.61)$$

До зовнішніх реакцій в'язей нашого механізму належать дві прямокутні складові опори O кривошипа OA — \bar{R}_{Ox} , \bar{R}_{Oy} і нормальна реакція стінок циліндра \bar{N}_3 (рис. 7.9).

Для визначення внутрішніх сил взаємодії між частинами механізму найпростіше скористатися відповідними динамічними рівняннями руху тіла. Для обертального руху — диференціальним рівнянням

$$J_z \varepsilon = M_{3z} \quad (7.62)$$

і теоремою про рух центра мас тіла в проекціях на осі Ox , Oy :

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_{3x}, \\ M\ddot{y}_C &= R_{3y}. \end{aligned} \quad (7.63)$$

До сил, які діють на кривошип, належать згадувані реакції його опори \bar{R}_{Ox} , \bar{R}_{Oy} , власна вага $m_1 \bar{g}$ і дві прямокутні складові \bar{S}_{Ax} , \bar{S}_{Ay} внутрішніх сил взаємодії, що діють із боку шатуна в ідеальному шарнірі A .

Для розгляду плоскопаралельного руху застосовуються динамічні рівняння (7.63) та

$$J_{C\zeta} \varepsilon = M_{3\zeta}. \quad (7.64)$$

На шатун AB у плоскопаралельному русі діють такі сили: власна вага $m_2 \bar{g}$, з боку кривошипа OA через шарнір A — такі самі за модулем, але протилежно напрямлені прямокутні складові сил взаємодії \bar{S}_{Ax} , \bar{S}_{Ay} і дві прямокутні складові \bar{S}_{Bx} , \bar{S}_{By} , що прикладені з боку повзуна в точці B ідеального шарніра.

Для дослідження динаміки поступального руху використовують рівняння (4.7). На повзун (поршень) діють такі сили: власна вага $m_3 \bar{g}$, нормальна реакція \bar{N}_3 горизонтальних напрямних — стінок циліндра — і з боку шатуна AB через шарнір B — прямокутні складові \bar{S}_{Bx} , \bar{S}_{By} .

Зауважимо, що момент опору M_0 , який діє на кривошип механізму під час його руху, можна визначити також за теоремою про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі

$$dT = \sum dA_{3i}. \quad (7.65)$$

□ **Визначення кінематичних величин.** До кінематичних величин ланок механізму належать проекції прискорень їхніх центрів мас C_1 , C_2 , C_3 на декартові осі Ox , Oy : \ddot{x}_{C_1} , \ddot{y}_{C_1} ; \ddot{x}_{C_2} , \ddot{y}_{C_2} ; \ddot{x}_{C_3} , \ddot{y}_{C_3} . Кутове прискорення кривошипа OA становить $\varepsilon_{OA} = \frac{d\omega}{dt} = 0$, бо за умовою задачі

$\omega = \text{const}$. Легко показати, що кутове прискорення ε_{AB} шатуна AB також нульове, оскільки довжини кривошипа й шатуна однакові: за різних їхніх довжин навіть за постійної кутової швидкості кривошипа кутове прискорення шатуна не дорівнюватиме нулю.

Спочатку встановимо залежності декартових координат центрів мас кривошипа, шатуна й повзуна. З геометричної картини механізму в заданому його положенні (рис. 7.9), що визначається кутом повороту кривошипа $\varphi = \omega t$, дістаємо

$$\begin{aligned} x_{C_1} &= \frac{r}{2} \cos \varphi, & y_{C_1} &= \frac{r}{2} \sin \varphi; \\ x_{C_2} &= \frac{r}{2} \cos \varphi + r \cos \varphi = \frac{3}{2} r \cos \varphi, & y_{C_2} &= \frac{r}{2} \sin \varphi; \\ x_{C_3} &= 2r \cos \varphi, & y_{C_3} &= 0. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Візьмемо перші похідні за часом від цих співвідношень, ураховуючи, що кут повороту $\varphi = \omega t$. Матимемо

$$\begin{aligned} \dot{x}_{C_1} &= -\omega \frac{r}{2} \sin \varphi, & \dot{y}_{C_1} &= \omega \frac{r}{2} \cos \varphi; \\ \dot{x}_{C_2} &= -\omega \frac{3}{2} r \sin \varphi, & \dot{y}_{C_2} &= \omega \frac{r}{2} \cos \varphi; \\ \dot{x}_{C_3} &= -\omega 2r \sin \varphi, & \dot{y}_{C_3} &= 0. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Диференціювання за часом останніх рівностей дасть нам шукані складові прискорення центрів мас частин механізму:

$$\ddot{x}_{C_1} = -\omega^2 \frac{r}{2} \cos \varphi, \quad \ddot{y}_{C_1} = -\omega^2 \frac{r}{2} \sin \varphi;$$

$$\ddot{x}_{C_2} = -\omega^2 \frac{3}{2} r \cos \varphi, \quad \ddot{y}_{C_2} = -\omega^2 \frac{r}{2} \sin \varphi; \quad (7.68)$$

$$\ddot{x}_{C_3} = -\omega^2 2r \cos \varphi, \quad \ddot{y}_{C_3} = 0.$$

□ **Визначення динамічних величин.** • *Кількість руху.* Проекції кількості руху \bar{Q} механізму на декартові осі в нашому випадкові знайдемо так:

$$Q_x = \sum Q_{C_i x} = m_1 \dot{x}_{C_1} + m_2 \dot{x}_{C_2} + m_3 \dot{x}_{C_3},$$

$$Q_y = \sum Q_{C_i y} = m_1 \dot{y}_{C_1} + m_2 \dot{y}_{C_2} + m_3 \dot{y}_{C_3}.$$

Підставимо сюди відомі значення перших похідних за часом від координат центрів мас окремих ланок механізму й зробимо необхідні викладки:

$$\begin{aligned} Q_x &= m_1 \dot{x}_{C_1} + m_2 \dot{x}_{C_2} + m_3 \dot{x}_{C_3} = -m_1 \omega \frac{r}{2} \sin \varphi - \\ &- m_2 \omega \frac{3}{2} r \sin \varphi - m_3 \omega 2r \sin \varphi = -\frac{1}{2} (m_1 + 3m_2 + 4m_3) \omega r \sin \varphi, \end{aligned} \quad (7.69)$$

$$\begin{aligned} Q_y &= m_1 \dot{y}_{C_1} + m_2 \dot{y}_{C_2} + m_3 \dot{y}_{C_3} = m_1 \omega \frac{r}{2} \cos \varphi + m_2 \omega \frac{r}{2} \cos \varphi = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \omega r \cos \varphi. \end{aligned}$$

Маючи проєкції загальної кількості руху механізму на декартові осі, визначимо модуль і напрям цієї величини. За теоремою Піфагора дістаємо

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} (m_1 + 3m_2 + 4m_3) \omega r \sin \varphi \right)^2 + \left(\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \omega r \cos \varphi \right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \omega r \sqrt{(m_1 + 3m_2 + 4m_3)^2 \sin^2 \varphi + (m_1 + m_2)^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Модуль кількості руху механізму, як видно з формули, залежить від його положення, що визначається кутом повороту φ кривошипа.

Обчислимо ще напрямні кути вектора кількості руху \bar{Q} механізму з осями Ox , Oy :

$$\cos \angle(\bar{Q}, x) = \frac{Q_x}{Q} = -\frac{(m_1 + 3m_2 + 4m_3) \sin \varphi}{\sqrt{(m_1 + 3m_2 + 4m_3)^2 \sin^2 \varphi + (m_1 + m_2)^2 \cos^2 \varphi}},$$

$$\cos \angle(\vec{Q}, y) = \frac{Q_y}{Q} = \frac{(m_1 + m_2) \omega r \cos \varphi}{\sqrt{(m_1 + 3m_2 + 4m_3)^2 \sin^2 \varphi + (m_1 + m_2)^2 \cos^2 \varphi}}$$

Знайдемо вектор кількості руху \vec{Q} для двох положень механізму. При $\varphi = 0$

$$\cos \angle(\vec{Q}, x) = 0, \quad \angle(\vec{Q}, x) = \pi/2;$$

$$\cos \angle(\vec{Q}, y) = Q_y/Q = 1, \quad \angle(\vec{Q}, y) = 0.$$

Цей вектор збігається з додатним напрямом осі Oy (рис. 7.10). При $\varphi = \pi/2$

$$\cos \angle(\vec{Q}, x) = Q_x/Q = -1, \quad \angle(\vec{Q}, x) = \pi;$$

$$\cos \angle(\vec{Q}, y) = Q_y/Q = 0, \quad \angle(\vec{Q}, y) = \pi/2.$$

Вектор кількості руху протилежний додатному напрямові осі Ox (рис. 7.11).

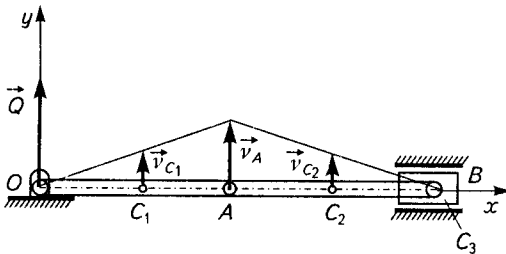


Рис. 7.10

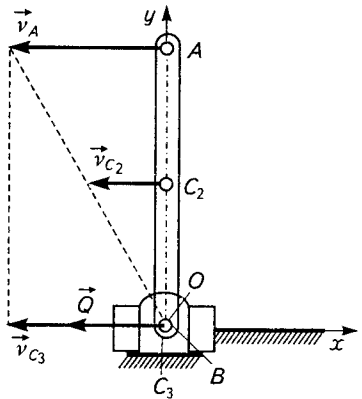


Рис. 7.11

• **Кінетичний момент.** Приходимо до розгляду кінетичного моменту механізму відносно осі Oz або, що одне й те саме, відносно центра O , бо механізм має спільну для всіх своїх ланок площину симетрії. Найдоцільніше в даному випадкові використати формулу

$$K_z = \sum m_i (x_{C_i} \dot{y}_{C_i} - y_{C_i} \dot{x}_{C_i}) + \sum J_{C_i} \omega_i.$$

Для плоскої системи тіл, якою є кривошипно-шатунний механізм,

$$K_z = m_1 (x_{C_1} \dot{y}_{C_1} - y_{C_1} \dot{x}_{C_1}) + m_2 (x_{C_2} \dot{y}_{C_2} - y_{C_2} \dot{x}_{C_2}) + m_3 (x_{C_3} \dot{y}_{C_3} - y_{C_3} \dot{x}_{C_3}) + J_{C_1} \omega_1 + J_{C_2} \omega_2 + J_{C_3} \omega_3.$$

Урахуємо, що $y_{C_3} = \dot{y}_{C_3} = \omega_3 = 0$. Тоді

$$K_z = m_1(x_{C_1}\dot{y}_{C_1} - y_{C_1}\dot{x}_{C_1}) + m_2(x_{C_2}\dot{y}_{C_2} - y_{C_2}\dot{x}_{C_2}) + J_{C_1}\omega_1 + J_{C_2}\omega_2.$$

Моменти інерції кривошипа й шатуна відносно центральних осей $C_1\zeta, C_2\zeta$

$$J_{C_1} = J_{C_1\zeta} = \frac{1}{12}m_1r^2, \quad J_{C_2} = J_{C_2\zeta} = \frac{1}{12}m_2r^2.$$

Підставивши координати центрів мас кривошипа й шатуна, їхні перші похідні за часом, а також моменти інерції цих ланок у загальну формулу кінетичного моменту, дістанемо

$$\begin{aligned} K_z &= m_1 \left[\frac{r}{2} \cos \varphi \omega \frac{r}{2} \cos \varphi - \frac{r}{2} \sin \varphi \left(-\omega \frac{r}{2} \sin \varphi \right) \right] + \\ &+ m_2 \left[\frac{3}{2} r \cos \varphi \omega \frac{r}{2} \cos \varphi - \frac{r}{2} \sin \varphi \left(-\omega \frac{3}{2} r \sin \varphi \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{12} m_1 r^2 \omega_1 + \frac{1}{12} m_2 r^2 \omega_2 = m_1 \left[\frac{r^2}{4} \omega \cos^2 \varphi + \frac{r^2}{4} \omega \sin^2 \varphi \right] + \\ &+ m_2 \left[\frac{3}{4} r^2 \omega \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} r^2 \omega \sin^2 \varphi \right] + \\ &+ \frac{1}{12} r^2 \omega (m_1 - m_2) = m_1 \frac{r^2}{4} \omega + m_2 \frac{3}{4} r^2 \omega + \frac{1}{12} r^2 \omega (m_1 - m_2); \\ K_z &= \frac{1}{4} r^2 \omega \left(m_1 + 3m_2 + \frac{1}{3} m_1 - \frac{1}{3} m_2 \right) = \frac{1}{3} r^2 \omega (m_1 + 2m_2). \quad (7.70) \end{aligned}$$

У викладках ураховано, що кутові швидкості кривошипа й шатуна, маючи однакові модулі, протилежно напрямлені: шатун обертається за годинниковою стрілкою, а кривошип — проти.

Визначаючи сумарний кінетичний момент K_z , для знаходження кінетичного моменту кривошипа K_{z_1} відносно осі Oz його обертальний рух можна не розкладати на поступальну й обертальну складові, а скористатися формулою

$$K_{z_1} = J_{z_1} \omega,$$

де

$$J_{z_1} = J_{C_1} + m_1 \frac{r^2}{4} = \frac{1}{12} m_1 r^2 + m_1 \frac{r^2}{4} = \frac{1}{3} m_1 r^2.$$

Шуканий кінетичний момент

$$K_{z_1} = \frac{1}{3} m_1 r^2 \omega.$$

Окремо визначимо також кінетичний момент шатуна відносно осі Oz :

$$\begin{aligned} K_{z2} &= m_2(x_{C_2}\dot{y}_{C_2} - y_{C_2}\dot{x}_{C_2}) + J_{C_2}\omega_2 = \\ &= m_2\left[\frac{3}{4}r^2\omega\cos^2\varphi + \frac{3}{4}r^2\omega\sin^2\varphi\right] - \frac{1}{12}m_2r\omega = \\ &= m_2\frac{3}{4}r^2\omega - \frac{1}{12}m_2r\omega = m_2\frac{2}{3}r^2\omega. \end{aligned}$$

Кінетичний момент механізму знайдемо, взявши суму кінетичних моментів кривошипа й шатуна:

$$K_z = K_{z1} + K_{z2} = \frac{1}{3}m_1r^2\omega + \frac{2}{3}m_2r^2\omega = \frac{1}{3}(m_1 + 2m_2)r^2\omega.$$

Висновок: кінетичний момент кривошипно-шатунного механізму за його усталеного руху (кривошип обертається з постійною кутовою швидкістю) й рівності довжин кривошипа й шатуна не змінюється.

• **Кінетична енергія** в нашому випадкові дорівнює сумі кінетичних енергій кривошипа, шатуна й повзуна. Оскільки кривошип, шатун і повзун здійснюють відповідно поступальний, обертальний і плоскопаралельний рухи, можемо записати

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 = \frac{J_z\omega^2}{2} + \frac{m_2v_{C_2}^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2} + \frac{m_3v_{C_3}^2}{2} = \\ &= \frac{1}{6}m_1r^2\omega^2 + \frac{m_2v_{C_2}^2}{2} + \frac{1}{24}m_2r^2\omega^2 + \frac{m_3v_{C_3}^2}{2}. \end{aligned}$$

Тепер виразимо швидкості центра мас шатуна й повзуна через відомі їхні проекції на декартові осі:

$$\begin{aligned} v_{C_2}^2 &= \dot{x}_{C_2}^2 + \dot{y}_{C_2}^2 = \left(\omega\frac{3r}{2}\sin\varphi\right)^2 + \left(\omega\frac{r}{2}\cos\varphi\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4}r^2\omega^2(9\sin^2\varphi + \cos^2\varphi), \end{aligned}$$

$$v_{C_3}^2 = \dot{x}_{C_3}^2 + \dot{y}_{C_3}^2 = \dot{x}_{C_3}^2 = (\omega 2r \sin \varphi)^2 = 4r^2\omega^2 \sin^2 \varphi.$$

Підставимо ці результати в основну формулу кінетичної енергії:

$$T = \frac{1}{6}m_1r^2\omega^2 + \frac{m_2\frac{1}{4}r^2\omega^2(9\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{24} m_2 r^2 \omega^2 + \frac{m_3 4r^2 \omega^2 \sin^2 \varphi}{2} = \\
& = \frac{1}{6} (m_1 + m_2) r^2 \omega^2 + (m_2 + 2m_3) r^2 \omega^2 \sin^2 \varphi. \quad (7.71)
\end{aligned}$$

Дістали кінетичну енергію нашого механізму.

• *Елементарна й повна робота.* На елементарному повороті $d\varphi$ кривошипа OA виконують роботу момент опору M_o , сили ваги $m_1 \vec{g}$, $m_2 \vec{g}$, $m_3 \vec{g}$ ланок механізму й задана сила тиску \vec{F} на дно поршня. Їхні елементарні роботи

$$\begin{aligned}
dA_{M_o} &= -M_o d\varphi, \\
dA_{m_1 g} &= -m_1 g \frac{r}{2} \cos \varphi d\varphi, \\
dA_{m_2 g} &= F_x dx + F_y dy = -m_2 g dy_{C_2} = -m_2 g d\left(\frac{r}{2} \sin \varphi\right) = \\
&= -\frac{r}{2} m_2 g \omega \cos \varphi dt = -\frac{r}{2} m_2 g \cos \varphi d\varphi, \\
dA_F &= -F dx_{C_3} = 2rF(\varphi) \sin \varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

Сумарна елементарна робота

$$\begin{aligned}
\sum dA_i &= dA_{M_o} + dA_{m_1 g} + dA_{m_2 g} + dA_F = \\
&= -M_o d\varphi - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g r \cos \varphi d\varphi + 2rF(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (7.72)
\end{aligned}$$

Цій сумарній елементарній роботі відповідає диференціал кінетичної енергії

$$\begin{aligned}
dT &= d\left[\frac{1}{6} (m_1 + m_2) r^2 \omega^2 + (m_2 + 2m_3) r^2 \omega^2 \sin^2 \varphi\right] = \\
&= (m_2 + 2m_3) r^2 \omega^2 \sin 2\varphi d\varphi. \quad (7.73)
\end{aligned}$$

Повну роботу всіх прикладених до механізму зовнішніх сил на його скінченному переміщенні, що відповідає куту повороту $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ кривошипа, дістанемо, обчисливши в заданих межах інтеграл від сумарної елементарної роботи:

$$A = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_o d\varphi - \frac{1}{2} (2m_1 + m_2) g r \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi d\varphi + 2r \int_{\varphi_0}^{\varphi} F(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (7.74)$$

Інтеграл у другому доданку знайдемо точно — це буде функція верхньої межі кута повороту кривошипа φ :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi \, d\varphi = \sin \varphi - \sin \varphi_0.$$

Інтеграл у третьому члені визначається наближено за індикаторною діаграмою. Щодо першого члена, то інтегрування також можна здійснити наближено, але після того, як буде відома залежність моменту опору M_o від сили тиску F газів на поршень.

• *Момент опору* дістанемо на підставі теореми про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі (7.36). Прирівняємо знайдені вирази сумарної елементарної роботи (7.73) і диференціала кінетичної енергії (7.74):

$$(m_2 + 2m_3)r^2\omega^2 \sin 2\varphi \, d\varphi = -M_o d\varphi - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gr \cos \varphi \, d\varphi - 2rF(\varphi)\sin \varphi \, d\varphi,$$

звідки після ділення на диференціал кута повороту $d\varphi$ дістанемо вираз для шуканого моменту опору

$$M_o = 2rF(\varphi)\sin \varphi - (m_2 + 2m_3)r^2\omega^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gr \cos \varphi. \quad (7.75)$$

• *Зовнішні реакції в'язей.* Як зазначалося, до зовнішніх реакцій в'язей нашого механізму належать нормальна реакція стінок циліндра \vec{N}_3 і прямокутні складові опори кривошипа \vec{R}_{Ox} , \vec{R}_{Oy} . Для їх знаходження потрібна система трьох рівнянь, яку дістанемо, застосувавши універсальні рівняння (7.41). Проекції сумарної кількості руху механізму на декартові осі відомі [див. (7.69)], а також маємо вираз для кінетичного моменту механізму відносно центра O (осі Oz).

Щоб застосувати зазначені рівняння для визначення шуканих реакцій, необхідно спочатку скласти суми проекцій усіх зовнішніх сил, прикладених до механізму, на декартові осі, а також суму моментів цих сил відносно осі Oz . Із рис. 7.9 знаходимо:

$$\begin{aligned} R_{3,x} &= \sum F_{3,ix} = R_{Ox} - F, \\ R_{3,y} &= \sum F_{3,iy} = R_{Oy} - m_1g - m_2g - m_3g + N_3, \\ M_{3,z} &= \sum M_{3,iz} = -M_o - m_1g \frac{1}{2}r \cos \varphi - m_2g \frac{3}{2}r \cos \varphi - \\ &\quad - m_3g 2r \cos \varphi + N_3 2r \cos \varphi_3. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Тепер, щоб дістати три шукані реакції, підставимо величини (7.76), (7.70) і (7.69) в універсальні рівняння динаміки плоскої системи тіл (7.41):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} (m_1 + 3m_2 + 4m_3) \omega r \sin \varphi \right) &= R_{Ox}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \omega r \cos \varphi \right) &= R_{Oy} - m_1 g - m_2 g - m_3 g + N_3; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} m_1 + 2m_2 \right) \omega r^2 &= -M_o - m_1 g \frac{1}{2} r \cos \varphi - m_2 g \frac{3}{2} r \cos \varphi - \\ &\quad - m_3 g 2r \cos \varphi + N_3 2r \cos \varphi. \end{aligned}$$

Після диференціювання в лівих частинах приходимо до такої системи трьох рівнянь для знаходження трьох невідомих реакцій R_{Ox} , R_{Oy} , N_3 :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (m_1 + 3m_2 + 4m_3) \omega^2 r \cos \varphi &= R_{Ox} - F; \\ -\frac{1}{2} (m_1 + m_2) r \omega^2 \sin \varphi &= R_{Oy} - m_1 g - m_2 g - m_3 g + N_3; \\ 0 &= -M_o - m_1 g \frac{1}{2} r \cos \varphi - m_2 g \frac{3}{2} r \cos \varphi - \\ &\quad - m_3 g 2r \cos \varphi + N_3 2r \cos \varphi. \end{aligned}$$

Розв'язок першого рівняння дає

$$R_{Ox} = F - \frac{1}{2} (m_1 + 3m_2 + 4m_3) \omega^2 r \cos \varphi. \quad (7.77)$$

Для визначення реакції горизонтальних напрямних N_3 підставимо момент опору M_o з формули (7.75) у третє з рівнянь нашої системи й зробимо відповідні викладки:

$$\begin{aligned} 0 &= 2rF(\varphi) \sin \varphi - (m_2 + 2m_3) r^2 \omega^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g r \cos \varphi - \\ &\quad - m_1 g \frac{1}{2} r \cos \varphi - m_2 g \frac{3}{2} r \cos \varphi - m_3 g 2r \cos \varphi + N_3 2r \cos \varphi; \\ F \operatorname{tg} \varphi - (m_2 + 2m_3) r \omega^2 \sin \varphi &= \\ = \frac{1}{4} (m_1 + m_2) g - m_1 g \frac{1}{4} - m_2 g \frac{3}{4} - m_3 g + N_3 &= -\frac{1}{2} (m_2 + 2m_3) g + N_3. \end{aligned}$$

Тепер остаточно маємо

$$N_3 = F \operatorname{tg} \varphi - (m_2 + 2m_3)r \omega^2 \sin \varphi + \frac{1}{2}(m_2 + 2m_3)g. \quad (7.78)$$

Знаючи N_3 , із другого рівняння визначимо реакцію R_{Oy} з таким проміжним результатом:

$$\begin{aligned} R_{Oy} &= -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)r \omega^2 \sin \varphi + m_1 g + m_2 g + m_3 g - \\ &- F \operatorname{tg} \varphi + (m_2 + 2m_3)r \omega^2 \sin \varphi - \frac{1}{2}(m_2 + 2m_3)g = \\ &= -F \operatorname{tg} \varphi + \left[m_2 + 2m_3 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \right] r \omega^2 \sin \varphi + \\ &+ \left[m_1 + m_2 + m_3 - \frac{1}{2}(m_2 + 2m_3) \right] g. \end{aligned}$$

Звідси після зведення подібних у квадратних дужках дістанемо

$$R_{Oy} = \frac{1}{2}(2m_1 + m_2)g + \frac{1}{2}(m_2 + 4m_3 - m_1)r \omega^2 \sin \varphi - F \operatorname{tg} \varphi. \quad (7.79)$$

• *Внутрішні сили взаємодії.* Для перевірки правильності визначення чотирьох силових факторів \vec{R}_{Ox} , \vec{R}_{Oy} , M_o , N_3 , а також знаходження чотирьох невідомих внутрішніх сил взаємодії між тілами механізму складемо по три рівняння руху окремо для кривошипа OA і для шатуна AB і два рівняння руху для повзуна B .

На кривошип, що рівномірно обертається, діє момент опору M_o , власна вага $m_1 \vec{g}$, дві прямокутні складові \vec{R}_{Ox} , \vec{R}_{Oy} реакції опори O кривошипа, а також дві прямокутні складові \vec{S}_{Ax} , \vec{S}_{Ay} реакції \vec{S}_o з боку шатуна. Шатун AB рухається плоскопаралельно, й на нього з боку кривошипа за законом рівності дії та протидії діють складові сили $-\vec{S}_{Ax}$, $-\vec{S}_{Ay}$, власна вага $m_2 \vec{g}$, а також складові реакції \vec{S}_{Bx} , \vec{S}_{By} із боку повзуна B . Повзун B рухається поступально під дією таких сил: сили тиску \vec{F} газів, власної ваги $m_3 \vec{g}$, нормальної реакції \vec{N}_3 циліндра й прямокутних складових $-\vec{S}_{Bx}$, $-\vec{S}_{By}$ реакції шатуна AB .

Використовуючи рівняння динаміки обертального руху (7.63), (7.62) для кривошипа, плоскопаралельного руху (7.63), (7.64) для

шатуна й поступального руху (7.63) для повзуна, в результаті дістаємо:

$$\begin{aligned}
 R_{Ox} + S_{Ax} &= m_1 \ddot{x}_{C_1}, & R_{Oy} + S_{Ay} - m_1 g &= m_1 \ddot{y}_{C_1}, \\
 0 &= -M_o - m_1 g \frac{r}{2} \cos \varphi + S_{Ay} r \cos \varphi - r S_{Ax} \sin \varphi; \\
 S_{Bx} - S_{Ax} &= m_2 \ddot{x}_{C_2}, & S_{By} - S_{Ay} - m_2 g &= m_2 \ddot{y}_{C_2}, \\
 0 &= S_{Ax} \frac{r}{2} \sin \varphi + S_{Bx} \frac{r}{2} \sin \varphi + S_{Ay} \frac{r}{2} \cos \varphi + S_{By} \frac{r}{2} \cos \varphi; \\
 -S_{Bx} - F &= m_3 \ddot{x}_{C_3}, & N_3 - S_{By} - m_3 g &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

Підставивши значення для других похідних координат центрів мас тіл (7.66) у праві частини (7.80), матимемо

$$\begin{aligned}
 R_{Ox} + S_{Ax} &= -m_1 \frac{r}{2} \omega^2 \cos \varphi, \\
 R_{Oy} + S_{Ay} - m_1 g &= -m_1 \frac{r}{2} \omega^2 \sin \varphi, \\
 0 &= -M_o - m_1 g \frac{r}{2} \cos \varphi + S_{Ay} r \cos \varphi - r S_{Ax} \sin \varphi; \\
 S_{Bx} - S_{Ax} &= -\frac{3}{2} m_2 r \omega^2 \cos \varphi, \\
 S_{By} - S_{Ay} - m_2 g &= -\frac{1}{2} m_2 r \omega^2 \sin \varphi, \\
 0 &= S_{Ax} \frac{r}{2} \sin \varphi + S_{Bx} \frac{r}{2} \sin \varphi + S_{Ay} \frac{r}{2} \cos \varphi + S_{By} \frac{r}{2} \cos \varphi; \\
 -S_{Bx} - F &= -2m_3 r \omega^2 \cos \varphi, \\
 N_3 - S_{By} - m_3 g &= 0.
 \end{aligned}$$

Дістали систему восьми рівнянь із вісьмома невідомими. Розв'яжемо її. З передостаннього рівняння знаходимо

$$S_{Bx} = -F + 2m_3 r \omega^2 \cos \varphi. \tag{7.81}$$

Урахуємо в четвертому рівнянні горизонтальну складову (7.77) і з нього визначимо невідому силу S_{Ax} :

$$S_{Ax} = \frac{1}{2} (4m_3 + 3m_2) r \omega^2 \cos \varphi - F. \tag{7.82}$$

П'яте рівняння подамо у вигляді

$$S_{Ay} + S_{By} = -(S_{Ax} + S_{Bx}) \operatorname{tg} \varphi.$$

Підставивши сюди (7.81) і (7.82) і спростивши, дістанемо

$$S_{Ay} + S_{By} = -\frac{1}{2}(8m_3 + 3m_2)r\omega^2 \sin \varphi + F \operatorname{tg} \varphi.$$

Дане рівняння розв'язуватимемо сумісно з п'ятим системи:

$$S_{Ay} + S_{By} = -\frac{1}{2}(8m_3 + 3m_2)r\omega^2 \sin \varphi + F \operatorname{tg} \varphi;$$

$$S_{By} - S_{Ay} = m_2 g - \frac{1}{2}m_2 r \omega^2 \sin \varphi;$$

$$2S_{By} = -\frac{1}{2}(8m_3 + 3m_2)r\omega^2 \sin \varphi + F \operatorname{tg} \varphi + m_2 g - \frac{1}{2}m_2 r \omega^2 \sin \varphi.$$

Після очевидних дій дістаємо

$$S_{By} = F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2}m_2 g - (m_2 + 2m_3)r\omega^2 \sin \varphi, \quad (7.83)$$

$$S_{Ay} = F \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2}m_2 g - \frac{1}{2}(m_2 + 4m_3)r\omega^2 \sin \varphi.$$

Тоді з першого й другого рівнянь системи визначимо дві невідомі прямокутні складові реакції R_{Ox} , R_{Oy} . Проміжний результат:

$$R_{Ox} = -S_{Ax} - m_1 \frac{r}{2} \omega^2 \cos \varphi = \frac{1}{2}(4m_3 + 3m_2)r\omega^2 \cos \varphi - F - m_1 \frac{r}{2} \omega^2 \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned} R_{Oy} &= -S_{Ay} + m_1 g - m_1 \frac{r}{2} \omega^2 \sin \varphi = \\ &= F \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2}m_2 g - \frac{1}{2}(m_2 + 4m_3)r\omega^2 \sin \varphi + m_1 g - m_1 \frac{r}{2} \omega^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Після спрощення приходимо до остаточних виразів шуканих невідомих:

$$R_{Ox} = -\frac{1}{2}(m_1 + 4m_3 + 3m_2 + 4m_3)r\omega^2 \cos \varphi + F, \quad (7.84)$$

$$R_{Oy} = -F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2}(2m_1 + m_2) + \frac{1}{2}(m_2 + 4m_3 - m_1)r\omega^2 \sin \varphi.$$

У третьому рівнянні системи невідомим є лише момент опору M_o , а сили S_{Ay} , S_{Bx} знайдено [див. (7.83)]. Урахувавши їх і зробив-

ши викладки в зазначеному рівнянні, дістанемо вираз для моменту опору:

$$\begin{aligned}
 0 &= -M_o - m_1 g \frac{r}{2} \cos \varphi + \left[F \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2} m_2 g - \frac{1}{2} (m_2 + 4m_3) r \omega^2 \sin \varphi \right] \times \\
 &\quad \times r \cos \varphi - r \left[\frac{1}{2} (4m_3 + 3m_2) r \omega^2 \cos \varphi - F \right] \sin \varphi, \\
 M_o &= -m_1 g \frac{r}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} m_2 g r \cos \varphi - \frac{1}{4} (m_2 + 4m_3) r^2 \omega^2 \sin 2\varphi - \\
 &\quad - \frac{1}{4} (3m_2 + 4m_3) r^2 \omega^2 \sin 2\varphi + 2r \sin \varphi = \\
 &= 2r \sin \varphi - (m_2 + 2m_3) r^2 \omega^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g r \cos \varphi,
 \end{aligned}$$

що збігається з формулою (7.75).

Підставимо величину S_{By} у восьме рівняння системи й виконаємо перетворення:

$$\begin{aligned}
 N_3 + F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2} m_2 g - (m_2 + 2m_3) r \omega^2 \sin \varphi - m_3 g &= 0, \\
 N_3 &= F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2} m_2 g - (m_2 + 2m_3) r \omega^2 \sin \varphi + m_3 g = \\
 &= F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2} (m_2 + 2m_3) g - (m_2 + 2m_3) r \omega^2 \sin \varphi,
 \end{aligned}$$

що збігається з (7.77).

7.4

Дослідження рівноваги кривошипно-шатунного механізму

Визначення статичних реакцій із динамічних рівнянь. Статичними назвемо ті реакції — як зовнішні, так і внутрішні, що діють на тіла системи в стані її рівноваги, тобто коли кутові й лінійні прискорення в системі тіл нульові. До зовнішніх статичних реакцій належать прямокутні складові реакції $\bar{R}_{Ox \text{ ст}}$, $\bar{R}_{Oy \text{ ст}}$, які діють із боку опори O кривошипа OA : це сили дії станини (корпуса) на кривошип у точці O його закріплення, а також нормальна статична реакція $\bar{N}_{3 \text{ ст}}$ горизонтальних напрямних. Момент опору $M_{o, \text{ ст}}$, який за рівноваги механізму зрівноважує прикладену до поршня горизонтальну активну силу \bar{F} , віднесемо до активних силових факторів.

Статичні реакції $\bar{R}_{Ox \text{ ст}}$, $\bar{R}_{Oy \text{ ст}}$ знайдемо з рівнянь (7.84), вважаючи кутову швидкість нульовою ($\omega = 0$):

$$\begin{aligned} R_{Ox} &= -\frac{1}{2}(m_1 + 4m_3 + 3m_2 + 4m_3)r\omega^2 \cos \varphi + F, \\ R_{Ox \text{ ст}} &= F; \\ R_{Oy} &= -F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2}(2m_1 + m_2) + \frac{1}{2}(m_2 + 4m_3 - m_1)r\omega^2 \sin \varphi, \\ R_{Oy \text{ ст}} &= -F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2}(2m_1 + m_2). \end{aligned} \quad (7.85)$$

Нормальну статичну реакцію $N_{3 \text{ ст}}$ знайдемо з рівності (7.78) за умови, що $\omega = 0$:

$$\begin{aligned} N_3 &= F \operatorname{tg} \varphi - (m_2 + 2m_3)r\omega^2 \sin \varphi + \frac{1}{2}(m_2 + 2m_3)g, \\ N_{3 \text{ ст}} &= F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2}(m_2 + 2m_3)g. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Визначимо, яким має бути момент опору $M_{o. \text{ ст}}$ за рівноваги механізму. Для цього в динамічне рівняння (7.75), що виражає повний момент опору під час руху механізму, підставимо нульову кутову швидкість. Дістанемо

$$\begin{aligned} M_o &= 2rF \sin \varphi - (m_2 + 2m_3)r^2\omega^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gr \cos \varphi, \\ M_{o. \text{ ст}} &= 2rF \sin \varphi - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gr \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Обчислимо дані статичні реакції, наприклад, у положенні механізму, яке визначається кутом повороту $\varphi = \pi/4$:

$$\begin{aligned} R_{Ox \text{ ст}} &= F, \\ R_{Oy \text{ ст}} &= -F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2}(2m_1 + m_2) = -F + \frac{1}{2}(2m_1 + m_2); \\ N_{3 \text{ ст}} &= F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2}(m_2 + 2m_3)g = F + \frac{1}{2}(m_2 + 2m_3)g; \\ M_{o. \text{ ст}} &= 2rF \sin \varphi - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gr \cos \varphi = \sqrt{2}rF - \frac{\sqrt{2}}{4}(m_1 + m_2)gr. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Тепер перейдемо до визначення статичних сил взаємодії між окремими складовими тілами механізму. Під взаємозв'язаністю сис-

теми тіл розумітимемо, що тіла в системі з'єднані між собою завдяки конструктивним обмеженням на їхнє взаємне положення (переміщення), наприклад, циліндричними та сферичними шарнірами, різного роду напрямними поверхнями, пасами тощо. Такі конструктивні обмеження у взаємних положеннях (переміщеннях) тіл у системі називаються *внутрішніми в'язями (зв'язками)*. Тому сили взаємодії між тілами системи з внутрішніми зв'язками належать до категорії внутрішніх реакцій в'язей.

У розглядуваному кривошипно-шатунному механізмі внутрішніми в'язями є ідеальні циліндричні шарніри між кінцями кривошипа й шатуна, а також між другим кінцем кривошипа та поршнем. У цих внутрішніх в'язях унаслідок дії заданих активних сил, які зумовлюють рух або рівновагу механізму, виникають внутрішні реакції, що підлягають закону дії та протидії. Ми маємо повні внутрішні реакції в'язей у шарнірах *A* і *B* механізму в його русі під дією активних сил, якими є момент опору M_0 і рушійна сила F . У шарнірі *A* маємо дві пари рівних за модулем і протилежно напрямлених прямокутних складових статичних внутрішніх реакцій — $S_{AO,x\text{ ст}}$, $S_{AO,y\text{ ст}}$, які прикладені до кривошипа *OA*, і $S_{AB,x\text{ ст}}$, $S_{AB,y\text{ ст}}$, що прикладені до шатуна *AB*.

Із рівностей (7.81)—(7.83) визначаємо дані реакції:

$$\begin{aligned}
 S_{Ax} &= \frac{1}{2}(4m_3 + 3m_2)r\omega^2 \cos \varphi - F, & S_{AO,x\text{ ст}} &= -F, & S_{AB,x\text{ ст}} &= F; \\
 S_{Ay} &= F \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2}m_2g - \frac{1}{2}(m_2 + 4m_3)r\omega^2 \sin \varphi, & S_{AO,y\text{ ст}} &= F \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2}m_2g; \\
 S_{AB,y\text{ ст}} &= -F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2}m_2g; & S_{Bx} &= -F + 2m_3r\omega^2 \cos \varphi; & & (7.89) \\
 S_{BA,x\text{ ст}} &= -F, & S_{B,x\text{ ст}} &= F; & S_{By} &= F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2}m_2g - (m_2 + 2m_3)r\omega^2 \sin \varphi; \\
 S_{BA,y\text{ ст}} &= F \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2}m_2g, & S_{B,y\text{ ст}} &= -F \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2}m_2g.
 \end{aligned}$$

□ **Визначення зовнішніх і внутрішніх реакцій в'язей за рівняннями рівноваги статки.** Спочатку складемо три рівняння рівноваги для зовнішніх сил, які діють на механізм і забезпечують його рівновагу як єдиного цілого в припущенні відсутності шарнірів *A*, *B*, що з'єднують кривошип і шатун та шатун і поршень відповідно. Для цього скористаємось основною формою рівнянь рівноваги статки (7.53) або (7.54).

Нехай маємо механізм (див. рис. 7.9) у рівновазі й розглянемо всі зовнішні сили, які прикладені до його ланок. Це момент опору M_o , прямокутні складові реакції опори O кривошипа \bar{R}_{Ox} , \bar{R}_{Oy} , нормальна реакція горизонтальних напрямних поршня \bar{N}_3 і сили власної ваги ланок OA , AB , B — $m_1\bar{g}$, $m_2\bar{g}$, $m_3\bar{g}$ відповідно. Складаючи рівняння рівноваги, за центр моментів сил візьмемо центр O кривошипа, за осі проєкцій сил — напрямлену зліва направо горизонтальну вісь Ox і напрямлену знизу вгору вертикальну вісь Oy ; початок цих осей збігається з центром O кривошипа.

Для зазначених вище сил маємо такі рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_{a.3.jx} + \sum F_{p.в.з.jx} &= R_{Ox} - F = 0, \\ \sum F_{a.3.jy} + \sum F_{p.в.з.jy} &= R_{Oy} + N_3 - m_1g - m_2g - m_3g = 0; \\ \sum M_{a.з} + \sum M_{p.в.з} &= -M_o - m_1g\frac{r}{2}\cos\varphi - m_2g\frac{3r}{2}\cos\varphi - \\ &- m_3g2r\cos\varphi + N_32r\cos\varphi = 0. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Дістали систему трьох рівнянь із чотирма невідомими R_{Ox} , R_{Oy} , N_3 , M_o . Для замкненості системи рівнянь складемо четверте рівняння рівноваги в моментах відносно точки A , вважаючи, що в точці B шарніра немає. Такий вибір рівняння рівноваги пояснюється тим, що фактично розглядається рівновага системи двох тіл — шатуна й повзуна як єдиного цілого (абсолютно твердого тіла), і з системи трьох рівнянь рівноваги для системи двох тіл вибирається лише одне — рівняння моментів.

Рівняння моментів відносно точки A запишеться так:

$$\begin{aligned} \sum M_{jA} &= -m_2g\frac{r}{2}\cos\varphi - Fr\sin\varphi - \\ &- m_3gr\cos\varphi + N_3r\cos\varphi = 0. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Отже, разом із трьома раніше складеними рівняннями маємо замкнену систему чотирьох рівнянь із чотирма невідомими — трьома зовнішніми реакціями R_{Ox} , R_{Oy} , N_3 і моментом опору M_o . Із рівняння (7.91) знаходимо

$$\begin{aligned} -m_2g\frac{r}{2}\cos\varphi - m_3gr\cos\varphi &= 0; \\ N_3 &= \frac{1}{2}(m_2 + 2m_3)g + Ftg\varphi. \end{aligned}$$

Маючи N_3 , із другого рівняння системи (7.90) визначаємо

$$\begin{aligned} R_{Oy} &= (m_1 + m_2 + m_3)g - N_3 = \\ &= (m_1 + m_2 + m_3)g - \frac{1}{2}(m_2 + 2m_3)g - F \operatorname{tg} \varphi = \\ &= \frac{1}{2}(2m_1 + m_2)g - F \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$

Із першого й третього рівнянь системи (7.90) знаходимо

$$\begin{aligned} R_{Ox} &= F; \\ M_O &= -m_1 g \frac{r}{2} \cos \varphi - m_2 g \frac{3r}{2} \cos \varphi - m_3 g 2r \cos \varphi + \\ &+ \left(\frac{1}{2}(m_2 + 2m_3)g + F \operatorname{tg} \varphi \right) 2r \cos \varphi = 2rF \sin \varphi + \\ &+ \left(m_2 + 2m_3 - \frac{m_1}{2} - \frac{3m_2}{2} - 2m_3 \right) gr \cos \varphi + 2rF \sin \varphi = \\ &= 2rF \sin \varphi - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) dr \cos \varphi. \end{aligned}$$

7.5

Задача на визначення нормального тиску паса на обід диска в його обертальному русі й у стані рівноваги

Постановка задачі. У задачі йтиметься про прискорений обертальний рух диска, який передається на диск пасом завдяки наявності між ним і ободом диска сил сухого тертя Кулона. За відомими прискоренням ϵ диска, його радіусом r і моментом інерції J необхідно визначити залежність сили натягу T паса в точках обода диска, які задаються змінним кутом β (рис. 7.12, *a*), від коефіцієнта кулонівського тертя f , так званого кута обхвату пасом обода диска $\beta_1 + \beta_2$ і початкового натягу T_0 паса в його найнижчій точці O .

Позначимо сили натягів віток паса в точках його сходу з обода диска через T_1, T_2 . Розв'язуючи задачу, ми маємо дослідити динаміку обертального руху диска й окремо рух тієї частини паса, яка контактує з диском. Для дослідження динаміки обертального руху зазначеної частини паса береться до розгляду її нескінченно малий елемент масою dm і завдовжки ds у точці обода диска, положення якої визначається змінним кутом β .

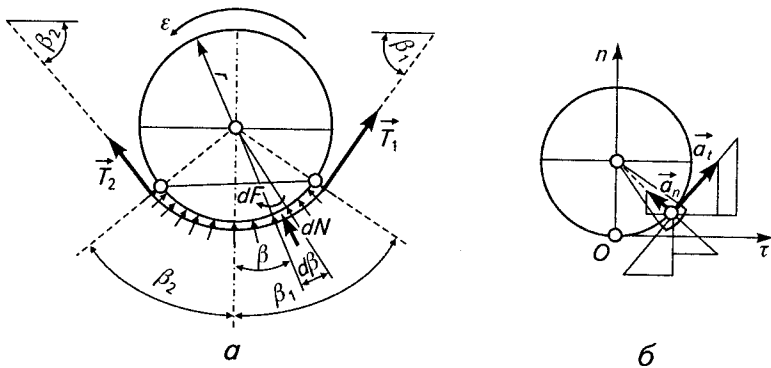


Рис. 7.12

□ **Тиск паса на обід диска без урахування маси паса.** Спочатку розглядаємо систему «диск—частина паса» між точками його сходу з обода диска. Опором обертанню вала диска нехтуємо, а також не враховуємо інших видів опору. Завдяки силам тертя між пасом і ободем диска, коли в їхній взаємодії досягнутий граничний стан, що передує проковзуванню з максимальним кулонівським сухим тертям, дана система обертається як одне ціле навколо горизонтальної осі. Якщо не враховувати масу паса, то матимемо таке диференціальне рівняння обертального руху розглядуваної системи:

$$(T_1 - T_2)r = J\varepsilon. \quad (7.92)$$

Розглядаючи обертальний рух одного диска, враховуємо лише дію сумарного моменту від розподілених уздовж обода диска дотичних сил кулонівського сухого тертя, які прикладені з боку паса. Отже, можна записати

$$J\varepsilon = r \int_{\beta_2}^{\beta_1} dF. \quad (7.93)$$

За схемою загальної задачі обидві прямолінійні вітки паса утворюють із горизонтом кути β_1, β_2 (рис. 7.12). Ці кути можуть змінюватись як унаслідок переміщення центра диска, так і в який-небудь інший спосіб. Очевидно, що такі самі кути утворюватимуть радіуси диска, проведені в точки сходу з його обода стрічки паса, з вертикальним радіусом, який з'єднає центр диска з найнижчою точкою його власного обода.

Щоб записати решту необхідних рівнянь, розглянемо рух зазначеного вище елемента паса, котрий контактує з ободем диска, як і інша частина паса, до якої цей елемент належить. На розглядуваний

елемент паса діють такі сили: елементарна дотична до обода сила кулонівського тертя dF , яка зазвичай напрямлена протилежно до напрямку прискореного обертання диска (показаного стрілочкою на рис. 7.12, *a*); елементарна нормальна до диска сила тиску dN , напрямлена по радіусу диска від його центра; на лівий торець — змінна сила натягу T , що відповідає куту β ; на правий торець — сила натягу $T + dT$, що відповідає куту $\beta + d\beta$.

Під час першого розгляду задачі масою паса знехтуємо. За таких умов матимемо рівновагу зазначених сил, що діють на елемент паса. Якщо осями проєкцій вважати дотичну Ot і головну нормаль On (рис. 7.12, *b*) до обода в найнижчій його точці й взяти суму проєкцій сил, що діють на елемент, на вибрані осі, прирівнявши їх до нуля, то дістанемо шукані два рівняння. Отже, маємо: в проєкціях на вісь Ot

$$-T \cos \beta + (T + dT) \cos(\beta + d\beta) + dF \cos \beta + dN \sin \beta = 0; \quad (7.94)$$

у проєкціях на головну нормаль On

$$-T \sin \beta + (T + dT) \sin(\beta + d\beta) + dF \sin \beta - dN \cos \beta = 0. \quad (7.95)$$

Спростимо ці рівності, утримавши величини першого порядку малості. Приходимо до такої системи диференціальних співвідношень:

$$\begin{aligned} dT \cos \beta - T \sin \beta d\beta + dF \cos \beta + dN \sin \beta &= 0, \\ dT \sin \beta + T \cos \beta d\beta + dF \sin \beta - dN \cos \beta &= 0. \end{aligned} \quad (7.96)$$

Продовжуючи перетворення, першу рівність системи (7.96) помножимо на $\cos \beta$, а другу — на $\sin \beta$, після чого додамо й знищимо протилежні за знаком однакові члени. В результаті маємо, що елементарні прирости на елементарній дузі $ds = r d\beta$ сили натягу паса dT і сили тертя dF однакові за модулем і протилежні за знаком:

$$dF = -dT. \quad (7.97)$$

Візьмемо перше з рівнянь (7.96) і врахуємо в ньому (7.97). Тоді, знищивши відповідні члени, дістанемо

$$\frac{dN}{d\beta} = T. \quad (7.98)$$

Але за модулем

$$dF = f dN, \quad (7.99)$$

або

$$dN = dT/f. \quad (7.100)$$

І нарешті, на підставі рівностей (7.98) і (7.100) записуємо

$$dT/T = f d\beta. \quad (7.101)$$

Маємо диференціальне рівняння для визначення шуканої залежності натягу від кута β , коефіцієнта тертя f та початкового натягу T_0 . Розв'язання дає

$$T = T_0 e^{f\beta}. \quad (7.102)$$

Бачимо, що в бік додатних значень β натяг паса T зростає, в бік від'ємних — зменшується, якщо, звичайно, відбувається прискорений обертальний рух диска в напрямі проти годинникової стрілки. Таким чином, відповідно до (7.102) справедливі дві формули:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 e^{f\beta_1}, \\ T_2 &= T_0 e^{-f\beta_2}. \end{aligned} \quad (7.103)$$

Тепер, взявши відношення лівих і правих частин (7.103) і виконавши відповідні алгебричні дії, замість двох формул дістаємо одну — формулу Ейлера

$$T_1 = T_2 e^{f(\beta_1 + \beta_2)}, \quad (7.104)$$

з якої випливає: якщо між пасом і обертовим диском тертя немає, то натяг уздовж паса однаковий за умови нехтування його масою. Підставимо формулу (7.104) у рівність (7.92):

$$\left| T_2 e^{f(\beta_1 + \beta_2)} - T_2 \right| r = J\epsilon, \quad (7.105)$$

Звідки

$$T_2 = \frac{J\epsilon}{r \left| e^{f(\beta_1 + \beta_2)} - 1 \right|}. \quad (7.106)$$

Підставивши замість T_2 у рівність (7.104), матимемо

$$T_1 = \frac{J\epsilon}{r \left[1 - e^{-f(\beta_1 + \beta_2)} \right]}. \quad (7.107)$$

За формулами (7.106) і (7.107) можна визначити натяги паса в точках його сходу з диска, якщо відомі кутове прискорення, момент інерції та радіус диска, а також кут обхвату останнього пасом, коефіцієнт тертя між пасом та диском. Залежність (7.104) пояснює, чому мотузку, якою кілька разів обмотаний стовп, важко стягнути з нього. Зрозуміло, що в тривіальному випадкові, коли коефіцієнт тертя дорівнює нулю, передача руху обертовим тілам через пас неможлива.

□ **Урахування маси паса.** Щоб дістати рівняння руху елемента паса з урахуванням його маси, треба в праві частини рівнянь (7.96) додати помножені на масу елемента проекції його дотичного й нормального прискорень на ті самі осі. Маємо

$$\begin{aligned} dT \cos \beta - T \sin \beta d\beta + dF \cos \beta + dN \sin \beta &= \\ &= dm \epsilon r \cos \beta - dm \omega^2 r \sin \beta, \\ dT \sin \beta + T \cos \beta d\beta + dF \sin \beta - dN \cos \beta &= \\ &= dm \epsilon r \sin \beta + dm \omega^2 r \cos \beta. \end{aligned} \quad (7.108)$$

Тут

$$dm = \rho ds = \rho r d\beta, \quad (7.109)$$

де ρ — лінійна густина матеріалу паса. З урахуванням (7.109) система (7.108) переписеться так:

$$\begin{aligned} dT \cos \beta - T \sin \beta d\beta + dF \cos \beta + dN \sin \beta &= \\ &= \rho r^2 \epsilon \cos \beta d\beta - \rho r^2 \omega^2 \sin \beta d\beta, \\ dT \sin \beta + T \cos \beta d\beta + dF \sin \beta - dN \cos \beta &= \\ &= \rho r^2 \epsilon \sin \beta d\beta + \rho r^2 \omega^2 \cos \beta d\beta. \end{aligned} \quad (7.110)$$

Помноживши перше з рівнянь (7.110) на $\cos \beta$, а друге — на $\sin \beta$ і потім почленно додавши обидві їхні частини, дістанемо

$$dT + dF = \rho r^2 \epsilon d\beta, \quad (7.111)$$

звідки знаходимо елементарну силу тертя dF і підставляємо в перше з рівнянь системи (7.110):

$$dN = (T - \rho \omega^2 r^2) d\beta. \quad (7.112)$$

За законом Кулона

$$dF = |\rho r^2 \epsilon d\beta - dT| = f |dN| \quad (7.113)$$

або

$$|dN| = \frac{|\rho r^2 \epsilon d\beta - dT|}{f}. \quad (7.114)$$

Тепер (7.112) підставимо в (7.114):

$$\begin{aligned} \rho r^2 \epsilon d\beta - dT &= f(T - \rho \omega^2 r^2) d\beta, \\ \frac{dT}{\frac{\rho r^2 (\epsilon + \omega^2)}{f} + T} &= f d\beta. \end{aligned} \quad (7.115)$$

Зінтегруємо диференціальне рівняння (7.115) у відповідних межах:

$$\int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{\frac{\rho r^2(\epsilon + \omega^2)}{f} + T} = f \int_{-\beta_2}^{\beta_1} d\beta; \quad \ln \left[\frac{\rho r^2(\epsilon + \omega^2)}{f} + T \right] \Big|_{T_2}^{T_1} = e^{f(\beta_1 + \beta_2)};$$

$$\frac{\frac{\rho r^2(\epsilon + \omega^2)}{f} + T_1}{\frac{\rho r^2(\epsilon + \omega^2)}{f} + T_2} = e^{f(\beta_1 + \beta_2)}; \quad (7.116)$$

$$\frac{\rho r^2(\epsilon + \omega^2)}{f} + T_1 = \left[\frac{\rho r^2(\epsilon + \omega^2)}{f} + T_2 \right] e^{f(\beta_1 + \beta_2)}.$$

Остаточно матимемо

$$T_1 = \frac{\rho r^2(\epsilon + \omega^2)}{f} [e^{f(\beta_1 + \beta_2)} - 1] + T_2 e^{f(\beta_1 + \beta_2)}. \quad (7.117)$$

Поклавши в рівняння (7.117) $\rho = 0$, прийдемо до формули (7.104).

З'ясуємо, чи матиме пас натяг, якщо тертя між ним і диском відсутнє. Для цього знайдемо границю виразу (7.117) за прямування f до нуля:

$$\lim_{f \rightarrow 0} T_1 = \frac{\rho r^2(\epsilon + \omega^2)}{f} \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{df}(e^{f(\beta_1 + \beta_2)} - 1)}{\frac{d}{df}(f)} + T_2 =$$

$$= (\beta_1 + \beta_2) \rho r^2(\epsilon + \omega^2) + T_2.$$

Отже, маємо таку залежність для розглядуваного випадку:

$$T_1 = (\beta_1 + \beta_2) \rho r^2(\epsilon + \omega^2) + T_2. \quad (7.118)$$

Тут

$$(\beta_1 + \beta_2) \rho r = \Delta m,$$

де Δm — маса частини паса, яка контактує з диском. Рівності

$$\Delta m r \omega^2 = a_n, \quad \Delta m r \epsilon = a_t, \quad (7.119)$$

визначають відповідно нормальне й дотичне прискорення центра мас частини паса, що контактує з диском. Урахувавши (7.119), остаточно запишемо формулу за нульового коефіцієнта тертя у вигляді

$$T_1 - T_2 = \Delta m r \omega^2 + \Delta m r \epsilon = \Delta m(a_n + a_t). \quad (7.120)$$

ТЕОРІЯ ВІДНОСНОГО РУХУ

8.1

Динаміка відносного руху

Теорію відносного руху розглядатимемо на прикладі плоскої системи взаємозв'язаних тіл зі спільною площиною матеріальної симетрії, що збігається з якоюсь декартовою площиною абсолютно нерухомої прямокутної системи координат $Oxyz$. Рух кожного із тіл даної системи відносно абсолютно нерухомих осей Ox , Oy , Oz , а також траєкторії, лінійні швидкості, прискорення окремих точок тіл системи, кутові швидкості й прискорення складових її тіл в абсолютному русі називатимемо *абсолютними*.

Зазначимо, що в попередніх главах, досліджуючи той чи інший рух, ми оперували його абсолютними кінематичними характеристиками — швидкістю й прискоренням, а також абсолютними динамічними величинами, такими як кількість руху, момент кількості руху, кінетична енергія тощо. Річ у тім, що загальні теореми динаміки, в які входять абсолютні швидкості й прискорення, ми виводили, виходячи з основного закону динаміки — другого закону Ньютона, справедливого щодо абсолютно нерухомої, або інерціальної, системи відліку.

Разом із тим у прикладній механіці для дослідження кінематики й динаміки механізмів, пристроїв, машин має бути визначений абсолютний рух не лише їхніх складових, а й однієї ланки системи відносно іншої, тобто так званий *відносний рух*. З абсолютним рухом складових тіл системи, відносно яких вивчається якийсь відносний рух, пов'язана ще одна складова руху — так званий *переносний рух*. Відносний і переносний рухи якогось-небудь тіла системи є складовими абсолютного руху. Рух у такому випадкові називається *складним*, або *абсолютним*.

Іноді представлення абсолютного руху у вигляді двох його складових — відносного й переносного — істотно спрощує задачу до-

слідження конкретного руху. Зрештою, необхідність вивчення відносного руху зумовлена особливостями задач механіки. Наприклад, якщо розв'язується задача про виведення ракетою супутника Землі на орбіту, то, безумовно, має бути визначений його рух відносно Землі, яка здійснює в міжпланетному просторі досить складний абсолютний рух. Інший приклад: конструюючи механізм, необхідно знати, в яких межах відбувається переміщення якої-небудь ланки відносно інших й як швидко воно змінюється, а також інші відносні величини — й кінематичні, й динамічні.

На прикладі відносного руху виразно проявляється векторний характер швидкостей і прискорень, а також пов'язаних із ними відповідних динамічних величин. У динаміці відносного руху, подібно до динаміки абсолютного руху, виводяться загальні теореми, що ґрунтуються на основному законі динаміки абсолютного руху, а також на кінематичній теоремі про розклад абсолютного прискорення на відносне, переносне й прискорення Коріоліса.

Механічний рух за своєю природою є відносним. Його характер для одного й того самого тіла залежить від вибору системи відліку. В одній системі відліку рух даного тіла може бути поступальним прямолінійним рівномірним, в іншій — поступальним криволінійним або обертальним, або дуже складним чи навіть взагалі відсутнім.

Застосовуючи другий закон Ньютона в динаміці абсолютних рухів, ми розв'язували задачі двох типів: прямі та обернені. Так само й у динаміці відносних рухів виникає потреба ставити й розв'язувати задачі цих двох категорій.

Пристаючи до вивчення складного руху тіла або точки, спочатку визначають їх абсолютний рух, який досліджується на підставі другого закону Ньютона й загальних теорем, що з нього випливають. Далі за відомим абсолютним рухом, розклавши його на відносний і переносний, на підставі кінематичної теореми Коріоліса вивчають динаміку відносного руху. Отже, динаміка відносних рухів ґрунтується на основному законі динаміки абсолютних рухів і кінематичній теоремі Коріоліса.

Справді, якщо розв'язується пряма задача динаміки відносного руху, то вважається, що відносний і переносні рухи точки задані, й на цій підставі за теоремою Коріоліса обчислюється її абсолютне прискорення, за яким, згідно з основним законом динаміки абсолютного руху, визначаються сили, що діють. За оберненої задачі динаміки відносного руху спочатку розв'язують аналогічну задачу динаміки абсолютного руху, після чого на підставі теореми Коріоліса за відомим переносним рухом знаходять кінематичні характеристики відносного руху.

□ **Основні рівняння динаміки відносного руху.** Як уже зазначалося, динаміка відносного руху точки ґрунтується на основному законі динаміки абсолютного руху

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (8.1)$$

і кінематичній теоремі Коріоліса

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{відн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{Кор}}, \quad (8.2)$$

де m — маса точки; \vec{F} — рівнодійна всіх сил — як активних (заданих), так і реакцій в'язей, накладених на точку.

Можемо вважати, що точка, складний рух якої розглядається, входить до складу плоскої системи взаємозв'язаних тіл зі спільною площиною матеріальної симетрії, котра збігається з абсолютно нерухомою декартовою площиною Oxy . Крім того, рухомі осі O_2x_2 , O_2y_2 , відносно яких досліджується динаміка руху, також лежать у площині матеріальної симетрії. Розглядаючи рух точки в нашому випадкові, власну систему осей $O_3\xi\eta$ відкидаємо як зайву. Тому величини ξ , η , φ_3 , ω_{32} , ϵ_{32} набувають нульових значень, а координати x_{20_3} , y_{20_3} правитимуть за відносні координати x_2 , y_2 точки в складному русі.

Ураховуючи це, подамо рівняння (8.1), (8.2) у проєкціях на нерухомі осі Ox , Oy :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y; \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_{O_2} + \ddot{x}_2 \cos \varphi_2 - \ddot{y}_2 \sin \varphi_2 - \omega_2^2(x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2) - \\ &\quad - \epsilon_2(x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2) - 2\omega_2(\dot{x}_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2), \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_{O_2} + \ddot{x}_2 \sin \varphi_2 + \ddot{y}_2 \cos \varphi_2 - \omega_2^2(x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2) + \\ &\quad + \epsilon_2(x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2) + 2\omega_2(\dot{x}_2 \cos \varphi_2 - \dot{y}_2 \sin \varphi_2). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Тут другі похідні за часом \ddot{x}_{O_2} , \ddot{y}_{O_2} — проєкції прискорення \vec{a}_{O_2} початку рухомої системи $O_2x_2y_2$, незмінно зв'язаної з плоскою фігурою, що перебуває в плоскопаралельному русі відносно абсолютно нерухомих осей Ox , Oy , на нерухомі осі; прискорення є поступальною складовою $\vec{a}_{O_2} = \vec{a}_{O_2, \text{пер}}$ повного переносного прискорення точки $\vec{a}_{\text{пер}}$; $\ddot{x}_2 \cos \varphi_2 - \ddot{y}_2 \sin \varphi_2$, $\ddot{x}_2 \sin \varphi_2 + \ddot{y}_2 \cos \varphi_2$ — проєкції відносного прискорення точки $\vec{a}_{\text{відн}}$ на нерухомі осі; $-\omega_2^2(x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2)$, $-\omega_2^2(x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2)$ — абсолютні значення проєкцій доцентрової складової переносного прискорення $\vec{a}_{\text{пер.доц}}$; $-\epsilon_2(x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2)$, $\epsilon_2(x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2)$ — абсолютні значення проєкцій тангенціаль-

ної складової переносного прискорення $\bar{a}_{\text{пер.танг}}$; $-2\omega_2(\dot{x}_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2)$, $2\omega_2(\dot{x}_2 \cos \varphi_2 - \dot{y}_2 \sin \varphi_2)$ — абсолютні значення проєкцій прискорення Коріоліса $\bar{a}_{\text{Кор}}$; φ_2 — кут між осями Ox і O_2y_2 ; ω_2 , ε_2 — відповідно кутова швидкість і кутове прискорення переносного обертання системи осей $O_2x_2y_2$ разом із плоскою фігурою 2 і точкою навколо центра O_2 .

Поділимо сили, що діють на точку, на дві категорії — активні (задані) й реакції в'язей. Рівнодійну активних (заданих) сил позначимо через \bar{F}_a , рівнодійну реакцій в'язей — через $\bar{F}_{\text{р.в}}$ і праві частини рівнянь (8.3) подамо так:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{ax} + F_{\text{р.в}x}, \\ F_y &= F_{ay} + F_{\text{р.в}y}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Тоді рівняння динаміки абсолютного руху точки, на відносний рух якої накладено в'язі, матимуть вигляд

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ax} + F_{\text{р.в}x}, \\ m\ddot{y} &= F_{ay} + F_{\text{р.в}y}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Динамічні рівняння (8.6) з кінематичними рівняннями (8.2) описують відносний рух невідомої точки, якщо переносний рух системи осей $O_2x_2y_2$ наперед задано. Додавши рівняння накладеної на рух точки в'язі

$$f(x, y, t) = 0, \quad (8.7)$$

дістанемо систему вже п'яти рівнянь із шістьма невідомими: x , y , x_2 , y_2 , $F_{\text{р.в}x}$, $F_{\text{р.в}y}$.

У деяких задачах про динаміку відносного руху можемо мати замкнену щодо невідомих систему рівнянь. Це буває, коли проєкції рівнодійної реакцій в'язей на декартові осі $F_{\text{р.в}x}$, $F_{\text{р.в}y}$ визначаються через її модуль і відомі кути між рухомими й нерухомими декартовими осями.

Рівняння динаміки відносного руху точки можна подати й в іншій, компактнішій формі, якщо замість абсолютного прискорення \bar{a} в ліву частину основного закону динаміки абсолютного руху (8.1) підставити його вираз із теореми Коріоліса (8.2) і виконати відповідні дії. В результаті матимемо рівняння

$$m\bar{a}_{\text{відн}} = \bar{F} - m\bar{a}_{\text{пер}} - m\bar{a}_{\text{Кор}}, \quad (8.8)$$

яке називають *основним рівнянням динаміки відносного руху*.

Якщо рівняння (8.8) записати в проміжному варіанті

$$m\vec{a}_{\text{відн}} + m\vec{a}_{\text{пер}} + m\vec{a}_{\text{Кор}} = \vec{F},$$

то рівнодійна сила \vec{F} , як прикладена до точки, розкладається на три складові згідно з правилом паралелограма сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{відн}} + \vec{F}_{\text{пер}} + \vec{F}_{\text{Кор}},$$

які спричиняють відповідно відносно $\vec{a}_{\text{відн}}$ й переносне $\vec{a}_{\text{пер}}$ прискорення, а також прискорення Кориоліса $\vec{a}_{\text{Кор}}$. Тому, можна записати

$$\vec{F}_{\text{відн}} = m\vec{a}_{\text{відн}}, \quad \vec{F}_{\text{пер}} = m\vec{a}_{\text{пер}}, \quad \vec{F}_{\text{Кор}} = m\vec{a}_{\text{Кор}};$$

$$m\vec{a}_{\text{відн}} = \vec{F} - \vec{F}_{\text{пер}} - \vec{F}_{\text{Кор}}.$$

Подамо векторне рівняння (8.8) у проєкціях на декартові осі:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_2 \cos \varphi_2 - \ddot{y}_2 \sin \varphi_2) = F_{ax} + F_{p.v.x} - m[\ddot{x}_{O_2} - \omega_2^2(x_2 \cos \varphi_2 - \\ - y_2 \sin \varphi_2) - \varepsilon_2(x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2)] - \\ - m[-2\omega_2(\dot{x}_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2)], \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_2 \sin \varphi_2 + \ddot{y}_2 \cos \varphi_2) = F_{ay} + F_{p.v.y} - m[\ddot{y}_{O_2} - \omega_2^2(x_2 \sin \varphi_2 + \\ + y_2 \cos \varphi_2) + \varepsilon_2(x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2)] - \\ - m[2\omega_2(\dot{x}_2 \cos \varphi_2 - \dot{y}_2 \sin \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Додавши рівняння в'язі у відносних координатах

$$\Phi(x_2, y_2, t) = 0, \quad (8.10)$$

матимемо систему рівнянь динаміки відносного руху, яка в деяких випадках дає змогу за відомими активними силами й переносним рухом знайти відносний рух і реакції накладених на точку в'язей.

□ **Рівняння відносного прямолінійного руху.** Якщо відносний рух точки прямолінійний рівномірний, то динамічні рівняння (8.9) і (8.10) набирають вигляду

$$\begin{aligned} \vec{F} - m\vec{a}_{\text{пер}} - m\vec{a}_{\text{Кор}} = 0; \\ F_{ax} + F_{p.v.x} - m[\ddot{x}_{O_2} - \omega_2^2(x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2) - \\ - \varepsilon_2(x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2)] - \\ - m[-2\omega_2(\dot{x}_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2)] = 0, \quad (8.11) \\ F_{ay} + F_{p.v.y} - m[\ddot{y}_{O_2} - \omega_2^2(x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2) + \\ + \varepsilon_2(x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2)] - \\ - m[2\omega_2(\dot{x}_2 \cos \varphi_2 - \dot{y}_2 \sin \varphi_2)] = 0. \end{aligned}$$

□ **Рівняння відносного спокою.** Стан відносного спокою, або відносна рівновага, описується такими динамічними рівняннями:

$$\begin{aligned} \vec{F} - m\vec{a}_{\text{пер}} &= 0; \\ F_{ax} + F_{р.в.х} - m[\ddot{x}_{O_2} - \omega_2^2(x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2) - \\ & - \varepsilon_2(x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2)] = 0, \\ F_{ay} + F_{р.в.у} - m[\ddot{y}_{O_2} - \omega_2^2(x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2) + \\ & + \varepsilon_2(x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2)] = 0, \end{aligned} \quad (8.12)$$

за якими визначається положення відносної рівноваги точки, а також реакції в'язей.

■ **Задача про відносний прямолінійний рух точки в її переносному поступальному русі.** Нехай на стержень AB насаджено кільце масою m , яке під час рівномірного обертання кривошипа 1 з постійною кутовою швидкістю ω може рухатися вздовж нього без тертя. Потрібно дослідити рух кільця відносно поступально рухомого стержня AB , якщо довжина кривошипа становить r , а стержня — L (рис. 8.1).

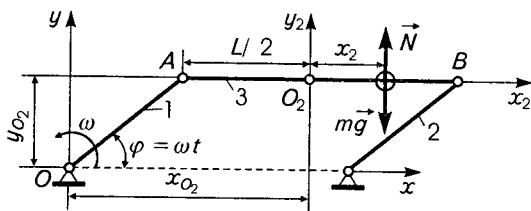


Рис. 8.1

На нашу точку у вигляді кільця діють дві сили — сила ваги $m\vec{g}$ і нормальна реакція \vec{N} стержня AB . Система осей $O_2x_2y_2$ незмінно зв'язана зі стержнем AB , і її поступальний рух є переносним для точки, відносний рух якої досліджується. Для визначення відносного руху кільця в нашому випадкові застосуємо рівняння динаміки відносного руху у формі (8.9). Матимемо

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= -\ddot{x}_{O_2}; \\ 0 &= -mg + N - m\ddot{y}_{O_2}. \end{aligned}$$

Під час виведення цієї системи рівнянь з основної (8.9) ураховано, що $y_2 = \varphi_2 = \omega_2 = \varepsilon_2 = 0$. Виразимо абсолютні координати рухомого початку O_2 системи $O_2x_2y_2$ через кут повороту φ кривошипа 2:

$$\begin{aligned} x_{O_2} &= r \cos \varphi + L/2, \\ y_{O_2} &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Здиференціюємо двічі за часом дані залежності, враховуючи, що $\varphi = \omega t$.

Дістаємо

$$\ddot{x}_{O_2} = -r \omega^2 \cos \varphi,$$

$$\ddot{y}_{O_2} = -r \omega^2 \sin \varphi.$$

Тоді рівняння відносного руху кільця наберуть вигляду

$$\ddot{x}_2 = r \omega^2 \cos \varphi;$$

$$0 = -mg + N + mr \omega^2 \sin \varphi.$$

Із другого рівняння визначаємо нормальну реакцію:

$$N = mg - mr \omega^2 \sin \varphi = m(g - r \omega^2 \sin \varphi).$$

Інтегруючи перше рівняння, дістаємо загальний розв'язок

$$\dot{x}_2 = r \omega \sin \omega t + C_1,$$

$$x_2 = -r \cos \omega t + C_1 t + C_2.$$

Задамо початкові дані руху: при $t_0 = 0$ $x_{20} = 0$, $\dot{x}_{20} = 0$. Тоді при $C_1 = 0$, $C_2 = r$ остаточно дістаємо кінематичне рівняння відносного руху кільця

$$x_2 = r(1 - \cos \omega t).$$

Це гармонічні коливання кільця відносно горизонтального стержня, що перебуває в заданому поступальному русі.

■ **Задача про відносний прямолінійний рух точки, яка знаходиться всередині прямолінійної трубки, що обертається із заданою кутовою швидкістю.** Нехай прямолінійна трубка, в якій знаходиться маленька кулька масою m , обертається в горизонтальній площині навколо центра O з постійною кутовою швидкістю ω (рис. 8.2). Треба визначити рух цієї кульки відносно трубки.

Зв'яжемо з обертовою трубою систему осей $O_2x_2y_2$, сумістивши вісь O_2x_2 з віссю трубки, а другу вісь спрямуємо вгору. Якщо знехтувати тертям, то на кульку в довільному положенні трубки, що визначається кутом $\varphi = \omega t$, у горизонтальній площині діє єдина сила — нормальна реакція стінки трубки \vec{N} , яка спричинює складний рух трубки.

Скористаємось основними рівняннями динаміки відносного руху у формі (8.9) і складемо диференціальні рівняння відносного прямолінійного руху кульки в нашому випадкові. При цьому врахуємо, що $\varphi_2 = \varphi$, $\omega_2 = \omega$, $\varepsilon_2 = 0$, $y_2 = 0$, $x_{O_2} = y_{O_2} = 0$. Матимемо

$$m\ddot{x}_2 \cos \varphi = -N \sin \varphi + m\omega^2 x_2 \cos \varphi + m \cdot 2\omega \dot{x}_2 \sin \varphi,$$

$$m\ddot{x}_2 \sin \varphi = N \cos \varphi + m\omega^2 x_2 \sin \varphi - m \cdot 2\omega \dot{x}_2 \cos \varphi.$$

Помножимо перше рівняння на $\cos \varphi$, а друге — на $\sin \varphi$ і добуті рівності почленно додамо.

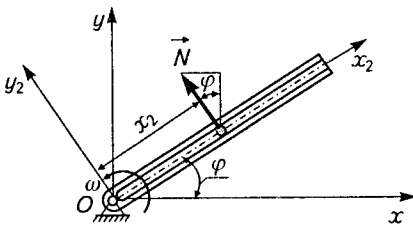


Рис. 8.2

Дістанемо диференціальне рівняння такого типу:

$$\ddot{x}_2 - \omega^2 x_2 = 0.$$

Його загальний розв'язок

$$x_2 = C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t}.$$

Для визначення сталих інтегрування задамо початкові умови руху: при $t_0 = 0$ $x_{20} = a$, $\dot{x}_{20} = 0$. Складаємо алгебричні рівняння з невідомими C_1 , C_2 :

$$a = C_1 + C_2,$$

$$0 = -C_1 \omega + C_2 \omega.$$

Розв'язання цієї системи дає $C_1 = C_2 = a/2$. Знаючи сталі інтегрування, що відповідають початковим даним руху кульки в трубці, на підставі загального розв'язку дістаємо частинний:

$$x_2 = \frac{a}{2} (e^{-\omega t} + e^{\omega t}),$$

який показує, що кулька при обертанні трубки з часом віддаляється від осі обертання. За нульових прискорення й початкової швидкості кулька не зможе розпочати свій відносний рух. Відносне переміщення кульки в трубці пояснюється тим, що внаслідок дії нормальної реакції стінки трубки \bar{N} на кульку в абсолютному русі остання віддалятиметься від осі обертання. Обчислимо цю нормальну реакцію, скориставшись одним із рівнянь динаміки відносного руху кульки, наприклад другим. Маємо

$$\begin{aligned} N &= m(\omega^2 x_2 \operatorname{tg} \varphi - \omega^2 x_2 \operatorname{tg} \varphi + 2\omega \dot{x}_2 \cos \varphi) = \\ &= ma \omega^2 \cos \varphi (e^{\omega t} - e^{-\omega t}). \end{aligned}$$

■ **Задача на визначення східного відхилення тіл, що падають на Землі.** Нехай тіло масою m падає з поверхні Землі без початкової швидкості в шахту завглибшки h . Треба дослідити рух тіла, що падає, відносно Землі. Орбітальним рухом Землі навколо Сонця знехтуємо; враховуватимемо обертання її навколо власної осі. Якщо дивитися на північний полюс, то Земля обертається проти годинникової стрілки (рис. 8.3, *a*). Позначимо її кутову швидкість через ω .

Візьмемо дві умовно нерухомі декартові системи координат: одну — $SXYZ$ із початком у центрі S Землі з напрямками осей, як показано на рис. 8.3, *a*, другу — $Oxyz$ із початком O на меридіані, розташованому в нерухомій площині CXZ , з паралеллю, що має геоцентричну широту місця λ . Вісь Ox суміщаємо з дотичною до цієї паралелі в напрямі на схід, а вісь Oz — по радіусу Землі до її центра S . Третя вісь Oz дотична до меридіана й напрямлена на південь.

Земля обертається, а обидві системи осей нерухомі. Нехай у початковий момент часу $t_0 = 0$ вісь шахти збігається з нерухомою віссю Oz і тіло в цей момент починає падати в шахту, маючи, звичайно, нульові координати ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$). Через інтервал часу t після початкового t_0 Земля разом із тілом, що падає в шахту, повернулася навколо осі обертання CZ на певний кут φ . Позначимо абсолютні координати тіла, що відповідають моментів

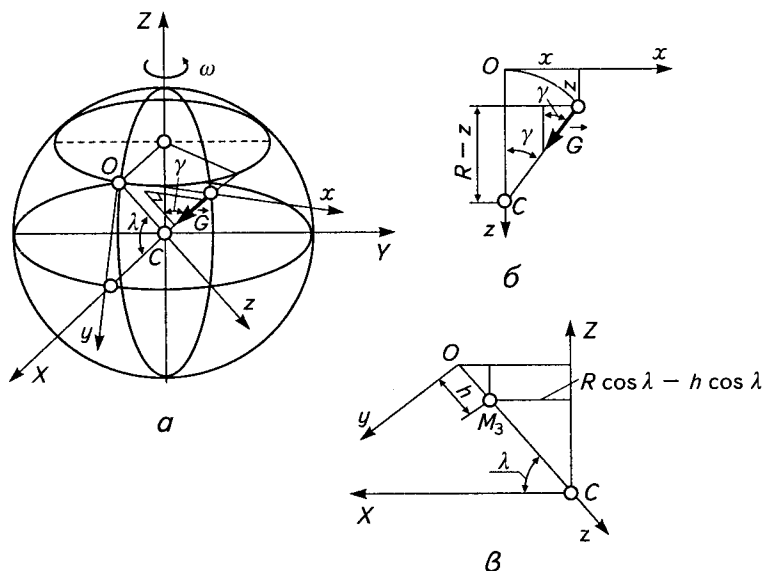


Рис. 8.3

часу t , через x, z і дослідимо рух тіла, що падає, відносно нерухокої системи координат $Oxuz$ (ордината y не змінюється). Можна наближено вважати, що рух тіла відбувається в декартовій площині Oxz .

Єдина сила, яка діє на тіло в його русі в шахті, — це сила тяжіння Землі \vec{G} (власна вага тіла). Вважатимемо, що в межах висоти h вага тіла не змінюється, хоча напрям її змінюється при обертанні Землі. Складемо диференціальні рівняння абсолютного руху тіла в площині Oxz (рис. 8.3, б). Розклавши силу \vec{G} на прямокутні складові $G_x = -mg \sin \gamma$, $G_z = mg \cos \gamma$ у напрямках осей Ox і Oz , де γ — кут між напрямом \vec{G} і віссю Oz , запишемо

$$m\ddot{x} = -mg \sin \gamma,$$

$$m\ddot{z} = mg \cos \gamma.$$

Із рис. 8.3, б дістаємо

$$\sin \gamma = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (R-z)^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{R-z}{\sqrt{x^2 + (R-z)^2}}.$$

Підставимо ці величини в попередні рівняння й скоротимо на масу m . Матимемо

$$\ddot{x} = -g \frac{x}{\sqrt{x^2 + (R-z)^2}},$$

$$\ddot{z} = g \frac{R-z}{\sqrt{x^2 + (R-z)^2}}.$$

Оскільки відношення x/R , $(x/R)^2$, z/R дуже малі порівняно з одиницею, то дані рівняння спрощуються й набувають вигляду

$$\ddot{x} = -\frac{g}{R}x,$$

$$\ddot{z} = g.$$

Зінтегруємо дану систему рівнянь і знайдемо її розв'язок. Перше рівняння запишемо так:

$$d\dot{x}^2 = -2\frac{g}{R}x dx.$$

Далі встановимо початкові дані руху: при $t_0 = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 \neq 0$, $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$. Після першого визначеного інтегрування маємо

$$\dot{x}^2 = \dot{x}_0^2 - \frac{g}{R}x^2.$$

Відокремивши змінні, запишемо

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{R}{g}\dot{x}_0^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{g}{R}} dt.$$

Зінтегрувавши, знаходимо розв'язок

$$x = \dot{x}_0 \sqrt{\frac{R}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}} t\right).$$

Продовжуємо викладки. Розвинемо функцію $\sin(\sqrt{g/R})t$ у ряд і обмежимося першими двома членами:

$$\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}} t\right) = \sqrt{\frac{g}{R}} t - \frac{1}{6} \frac{g}{R} \sqrt{\frac{g}{R}} t^3.$$

Тоді наближений розв'язок буде такий:

$$x = \dot{x}_0 t - \frac{1}{6} \frac{g}{R} \dot{x}_0 t^3.$$

Тут \dot{x}_0 — лінійна швидкість точки поверхні Землі в її обертальному русі відносно нерухомої системи осей $Oxuz$. Ми наближено знайшли абсолютне переміщення тіла, що падає в шахту, в напрямі осі Ox за час t .

Тепер запишемо розв'язок другого рівняння. За початкових даних маємо

$$z = g t^2 / 2.$$

Це абсолютне переміщення тіла по вертикалі вздовж радіуса Землі до її центра за час t , що минув після початку його падіння в шахту.

Діставши абсолютні переміщення тіла в напрямках осей Ox , Oz , визначимо переносні переміщення тіла, які дорівнюють переміщенню тієї точки Землі, якої досягає тіло, що падає, в момент часу t . Зрозуміло, що переносне

переміщення тіла вздовж осі Oz нульове, а в напрямі осі Ox дорівнюватиме, як зазначалося, шляху $x_{\text{пер}}$, пройденому точкою M_3 Землі на глибині h шахти, якої досягає в момент часу t тіло, що падає по дузі кола радіусом $R \cos \lambda - \frac{gt^2}{2} \cos \lambda$ із лінійною швидкістю $\left(R \cos \lambda - \frac{gt^2}{2} \cos \lambda \right) \omega$ (рис. 8.3, в):

$$x_{\text{пер}} = \left(R \cos \lambda - \frac{gt^2}{2} \cos \lambda \right) \omega t.$$

Наше завдання — визначити відхилення тіла, що падає, від вертикалі на глибині h . Це буде переміщення тіла в напрямі осі Ox відносно Землі. Позначивши його через $\Delta x_{\text{відн}}$, матимемо

$$\Delta x_{\text{відн}} = x - x_{\text{пер}} = \dot{x}_0 t - \frac{1}{6} \frac{g}{R} \dot{x}_0 t^3 - \left(R \cos \lambda - \frac{gt^2}{2} \cos \lambda \right) \omega t.$$

Урахуємо, що абсолютна початкова швидкість тіла, яке падає,

$$\dot{x}_0 = R\omega \cos \lambda.$$

Отже, після спрощення відносно переміщення тіла остаточно визначиться так:

$$\Delta x_{\text{відн}} = \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos \lambda.$$

Виразимо $\Delta x_{\text{відн}}$ через висоту шахти h :

$$\Delta x_{\text{відн}} = \frac{2}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{2h^3/g}.$$

Як бачимо, відхилення тіл, що падають, пропорційне їхній кутовій швидкості й є малою величиною. Наприклад, на середніх широтах ($\lambda = 55^\circ 47'$, $g = 9,916 \text{ м/с}^2$) за глибини шахти $h = 100 \text{ м}$ воно становить $\Delta x_{\text{відн}} = 1,2 \text{ см}$.

Значимо, що дану задачу розв'язано на підставі основного закону динаміки абсолютного руху точки. За цим законом, який зв'язує абсолютне прискорення й фізичні сили, що реально діють, ми визначили абсолютне переміщення тіла за його падіння в шахту в напрямі осі Ox .

Ніякі додаткові сили, крім сили тяжіння, не діють на тіло під час його падіння в шахту. Відносні кінематичні величини — переміщення, швидкість і прискорення — зумовлюються лише абсолютними рухами, про які заздалегідь нічого невідомо й які за основним законом динаміки потрібно обчислити; до цих абсолютних рухів належать також переносні рухи, які відрізняються від абсолютних тим, що вони наперед задаються.

Зробимо зауваження щодо розуміння деяких аспектів динаміки відносних рухів. Це стосується причин відносного руху та його кінематичних характеристик, таких як відносна швидкість і пов'язане з нею відносне переміщення, а також відносне прискорення. Приступаючи до вивчення конкретного відносного руху, не варто припису-

вати йому якісь додаткові сили, що не спричинюються конкретними фізичними тілами; такі сили просто реально не існують. Як уже зазначалося, причинами відносних рухів є абсолютні рухи, що визначаються конкретними фізичними силами, яким завжди відповідають конкретні матеріальні тіла.

Аби довести справедливість цього зауваження, ще раз повернемося до задачі про складний рух кульки в прямолінійній трубці, що обертається з постійною кутовою швидкістю. Єдиною силою, що діє на кульку в горизонтальному напрямі, є нормальна реакція \bar{N} стінки трубки, з якою кулька під час свого абсолютного руху безпосередньо контактує.

Абсолютний рух кульки описується такими двома диференціальними рівняннями:

$$m\ddot{x} = -N \sin \varphi, \quad m\ddot{y} = N \cos \varphi$$

відносно нерухомої системи відліку Oxy . Крім даних динамічних рівнянь, запишемо рівняння в'язі, яка кінематично відображує обертання стінки трубки навколо вертикальної осі y з якою кулька весь час руху перебуває в контактній взаємодії:

$$y/x = \operatorname{tg} \varphi.$$

Із рівняння динаміки знаходимо залежність між проекціями абсолютного прискорення кульки на абсолютно нерухомі осі:

$$\ddot{x}/\ddot{y} = -\operatorname{tg} \varphi.$$

Тут кут $\varphi = \omega t$. Рівняння в'язі подамо у вигляді

$$y = x \operatorname{tg} \varphi$$

і двічі здиференціюємо за часом обидві його частини:

$$\ddot{y} = \ddot{x} \operatorname{tg} \varphi + 2\dot{x} \frac{\omega}{\cos^2 \varphi} + 2\omega^2 x \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi}.$$

Підставимо даний вираз у рівняння, що пов'язує проекції абсолютного прискорення кульки на нерухомі осі, й після відповідних перетворень дістанемо таке диференціальне рівняння абсолютного руху кульки в обертовій прямолінійній трубці:

$$\ddot{x} + 2\omega \operatorname{tg} \omega t \cdot \dot{x} + 2\omega^2 \operatorname{tg}^2 \omega t \cdot x = 0. \quad (8.13)$$

Порівняємо його з диференціальним рівнянням кульки у відносних координатах:

$$\ddot{x}_2 - \omega^2 \cdot x_2 = 0. \quad (8.14)$$

Це рівняння виведено з рівняння динаміки відносного руху точки. Якщо в (8.13) замінити змінні за формулою

$$x = x_2 \cos \varphi,$$

то прийдемо також до рівняння відносного руху кульки (8.14). Звичайно, аналітично розв'язати диференціальне рівняння (8.13) не легко — простіше розв'язати рівняння (8.14). По суті перехід від диференціальних рівнянь абсолютного руху до відповідних диференціальних рівнянь відносного руху здійснюється перетворенням координат — заміною змінних, що в деяких випадках спрощує розв'язання задач динаміки.

Так, спочатку знайшовши розв'язок рівняння (8.13), заміною змінних за формулами

$$x = x_2 \cos \varphi, \quad y = x_2 \sin \varphi,$$

не шукаючи розв'язку рівняння в абсолютних координатах, дістанемо кінематичні рівняння руху кульки в абсолютно нерухомій системі відліку Oxy :

$$x = \frac{a}{2}(e^{-\omega t} + e^{\omega t}) \cos \omega t, \quad y = \frac{a}{2}(e^{-\omega t} + e^{\omega t}) \sin \omega t.$$

8.2

Диференціальні рівняння відносного руху

Виведемо диференціальні рівняння руху тіла, яке належить плоскій системі взаємозв'язаних тіл зі спільною площиною матеріальної симетрії. Розглянемо тіло 3 масою M , що перебуває в складному плоскопаралельному русі, й уявимо його як систему великої кількості N частинок, які виділені в тілі уявними довільної форми розмежовувальними поверхнями. По цих поверхнях відбувається контактна взаємодія сусідніх частинок за законом рівності дії та протидії. Крім того, частинка з номером k , взята з числа N частинок, взаємодіє з іншими $k - 1$ частинками за законом усесвітнього тяжіння. Перші й другі сили — це внутрішні сили взаємодії в тілі. На частинки діють також сили, які характеризують вплив зовнішніх щодо даного тіла 3 матеріальних тіл — це зовнішні сили, які поділяються на дві категорії — задані (активні) сили й реакції в'язей (пасивні).

Виділимо в цьому тілі частинку з номером k , яка має масу m_k і на яку діють сили $\vec{F}_{a.3k}$, $\vec{F}_{p.v.3k}$, $\vec{F}_{a.v.k}$, $\vec{F}_{p.v.v.k}$, де $\vec{F}_{a.3k}$ — рівнодійна зовніш-

ніх активних сил; $\vec{F}_{p.v.zk}$ — рівнодійна зовнішніх реакцій в'язей; $\vec{F}_{a.v.k}$ — рівнодійна внутрішніх активних сил; $\vec{F}_{p.v.v.k}$ — рівнодійна внутрішніх реакцій в'язей.

Абсолютний рух частинок масою m_k , де $k = 1, 2, 3, \dots, N$, підпорядкований основному законові динаміки абсолютного руху

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k \quad (8.15)$$

і загальним теоремам, які з нього випливають: теоремі про зміну кількості руху

$$\frac{d m_k \vec{v}_k}{dt} = \vec{F}_k, \quad (8.16)$$

теоремі про зміну моменту кількості руху відносно нерухомого центра

$$\frac{d \vec{k}_{kO}}{dt} = \vec{M}_{kO} \quad (8.17)$$

і теоремі про зміну кінетичної енергії

$$d \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2} = dA_k. \quad (8.18)$$

Грунтуючися на загальних теоремах для частинки тіла, виведемо аналогічні теореми, які справедливі в динаміці складного руху тіла.

Маємо формули проекцій абсолютного прискорення частинки тіла в складному русі на нерухомі осі:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k = & \ddot{x}_{O_2} + \ddot{x}_{2O_3} \cos \varphi_2 - \ddot{y}_{2O_3} \sin \varphi_2 - \omega_2^2 \{x_{2O_3} \cos \varphi_2 - \\ & - y_{2O_3} \sin \varphi_2 + [\xi_k \cos(\varphi_2 + \varphi_{32}) - \eta_k \sin(\varphi_2 + \varphi_{32})]\} - \\ & - \omega_{32}^2 [\xi_k \cos(\varphi_2 + \varphi_{32}) - \eta_k \sin(\varphi_2 + \varphi_{32})] - \varepsilon_2 [x_{2O_3} \sin \varphi_2 + \\ & + y_{2O_3} \cos \varphi_2 + \xi_k \sin(\varphi_2 + \varphi_{32}) + \eta_k \cos(\varphi_2 + \varphi_{32})] - \\ & - \varepsilon_{32} [\xi_k \sin(\varphi_2 + \varphi_{32}) + \eta_k \cos(\varphi_2 + \varphi_{32})] - 2\omega_2 (\dot{x}_{2O_3} \sin \varphi_2 + \\ & + \dot{y}_{2O_3} \cos \varphi_2) - 2\omega_2 \omega_{32} [\xi_k \cos(\varphi_2 + \varphi_{32}) - \eta_k \sin(\varphi_2 + \varphi_{32})], \quad (8.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_k = & \ddot{y}_{O_2} + \ddot{x}_{2O_3} \sin \varphi_2 + \ddot{y}_{2O_3} \cos \varphi_2 - \omega_2^2 \{x_{2O_3} \sin \varphi_2 + \\ & + y_{2O_3} \cos \varphi_2 + [\xi_k \sin(\varphi_2 + \varphi_{32}) + \eta_k \cos(\varphi_2 + \varphi_{32})]\} - \\ & - \omega_{32}^2 [\xi_k \sin(\varphi_2 + \varphi_{32}) + \eta_k \cos(\varphi_2 + \varphi_{32})] + \varepsilon_2 [x_{2O_3} \cos \varphi_2 - \\ & - y_{2O_3} \sin \varphi_2 + \xi_k \cos(\varphi_2 + \varphi_{32}) - \eta_k \sin(\varphi_2 + \varphi_{32})] + \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon_{32} [\xi_k \cos(\varphi_2 + \varphi_{32}) - \eta_k \sin(\varphi_2 + \varphi_{32})] + 2\omega_2 (\dot{x}_{2O_3} \cos \varphi_2 - \dot{y}_{2O_3} \sin \varphi_2) - 2\omega_2 \omega_{32} [\xi_k \sin(\varphi_2 + \varphi_{32}) + \eta_k \cos(\varphi_2 + \varphi_{32})].$$

Додамо до цих рівнянь скалярні рівняння другого закону Ньютона, записаного для частинки тіла в нашому випадковій класифікації сил, що діють на неї:

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{a.3kx} + F_{p.v.3kx} + F_{a.v.kx} + F_{p.v.v.kx}, \\ m_k \ddot{y}_k &= F_{a.3ky} + F_{p.v.3ky} + F_{a.v.ky} + F_{p.v.v.ky}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Якщо підставимо вирази для \ddot{x}_k , \ddot{y}_k з (8.19) у ліві частини (8.20), виконаємо підсумовування за індексом k перших і других N рівнянь, сумістивши початок O_3 власної системи осей $O_3\xi\eta\zeta$ із центром мас C_3 тіла 3, то замість $2N$ дістанемо два сумарних рівняння руху по осях Ox і Oy :

$$\begin{aligned} M_3(\ddot{x}_{2C_3} \cos \varphi_2 - \ddot{y}_{2C_3} \sin \varphi_2) &= R_{a.3x} + R_{p.v.3y} - M_3\ddot{x}_{O_2} + \\ + M_3\omega_2^2(x_{2C_3} \cos \varphi_2 - y_{2C_3} \sin \varphi_2) &+ M_3\varepsilon_2(x_{2C_3} \sin \varphi_2 + y_{2C_3} \cos \varphi_2) + \\ + 2M_3\omega_2(\dot{x}_{2C_3} \sin \varphi_2 + \dot{y}_{2C_3} \cos \varphi_2), & \\ M_3(\ddot{x}_{2C_3} \sin \varphi_2 + \ddot{y}_{2C_3} \cos \varphi_2) &= R_{a.3y} + R_{p.v.3y} - M_3\ddot{y}_{O_2} + \\ + M_3\omega_2^2(x_{2C_3} \sin \varphi_2 + y_{2C_3} \cos \varphi_2) &+ M_3\varepsilon_2(x_{2C_3} \cos \varphi_2 - y_{2C_3} \sin \varphi_2) - \\ - 2M_3\omega_2(\dot{x}_{2C_3} \cos \varphi_2 - \dot{y}_{2C_3} \sin \varphi_2). & \end{aligned} \quad (8.21)$$

Маємо перших два диференціальних рівняння динаміки відносного плоскопаралельного руху тіла в проєкціях на нерухомі осі Ox і Oy , в яких містяться відносні координати, їхні перші й другі похідні за часом. Дані рівняння описують лише поступальну складову загального відносного плоскопаралельного руху тіла 3. Щодо другої складової цього руху, то її диференціальне рівняння ми дістанемо на підставі загальної теореми (8.17) про зміну моменту кількості руху точки відносно нерухомої осі Oz .

На підставі (8.17) для частиніок масою m_k тіла 3, що здійснює складний рух (k — натуральне число від 1 до N), запишемо

$$m_k (x_k \ddot{y}_k - y_k \ddot{x}_k) = x_k F_{ky} - y_k F_{kx}. \quad (8.22)$$

Тут вирази для проєкцій \ddot{x}_k , \ddot{y}_k абсолютного прискорення \ddot{a}_k частинок тіла 3 на осі Ox , Oy мають вигляд (8.19); як уже зазначалося, початок O_3 власної системи осей $O_3\xi\eta\zeta$ збігається з центром мас C_3 тіла 3; F_{kx} , F_{ky} — проєкції рівнодійних усіх категорій сил, що діють на

частинки тіла, — внутрішніх і зовнішніх, як активних, так і реакцій в'язей;

$$\begin{aligned}x_k &= x_{O_2} + x_{2C_3} \cos \varphi_2 - y_{2C_3} \sin \varphi_2 + \xi_k \cos \varphi - \eta_k \sin \varphi, \\y_k &= y_{O_2} + x_{2C_3} \sin \varphi_2 + y_{2C_3} \cos \varphi_2 + \xi_k \sin \varphi + \eta_k \cos \varphi,\end{aligned}\quad (8.23)$$

де $\varphi = \varphi_2 + \varphi_{32}$.

Щоб дістати третє шукане рівняння динаміки відносного плоскопаралельного руху тіла 3, додамо N рівнянь (8.22) із застосуванням (8.23) і (8.9). При цьому врахуємо, що

$$\sum m_k \xi_k = M_3 \xi_{C_3} = 0, \quad \sum m_k \eta_k = M_3 \eta_{C_3} = 0.$$

Пропускаючи низку послідовних викладок, дістаємо таку рівність:

$$\begin{aligned}\sum m_k (x_k \ddot{y}_k - y_k \ddot{x}_k) &= M_3 \left\{ (x_{O_2} + x_{2C_3} \cos \varphi_2 - y_{2C_3} \sin \varphi_2) \left[\ddot{y}_{O_2} + \right. \right. \\&+ \ddot{x}_{2C_3} \sin \varphi_2 + \ddot{y}_{2C_3} \cos \varphi_2 + 2\omega_2 (\dot{x}_{2C_3} \cos \varphi_2 - y_{2C_3} \sin \varphi_2) + \\&+ \varepsilon_2 (x_{2C_3} \cos \varphi_2 - y_{2C_3} \sin \varphi_2) - \omega_2^2 (x_{2C_3} \sin \varphi_2 + y_{2C_3} \cos \varphi_2) + \\&+ (\varepsilon_2 + \varepsilon_{32}) (\cos^2 \varphi \sum m_k \xi_k^2 + \sin^2 \varphi \sum m_k \eta_k^2 - J_{\xi\eta} \sin 2\varphi) - \\&\left. - (\omega_2 + \omega_{32})^2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum m_k (\xi_k^2 - \eta_k^2) + J_{\xi\eta} \cos 2\varphi \right] \right\} - \\&- M_3 \left\{ (y_{O_2} + x_{2C_3} \sin \varphi_2 + y_{2C_3} \cos \varphi_2) \left[\ddot{x}_{O_2} + \right. \right. \\&+ \ddot{x}_{2C_3} \cos \varphi_2 - \ddot{y}_{2C_3} \sin \varphi_2 - \omega_2^2 (x_{2C_3} \cos \varphi_2 - y_{2C_3} \sin \varphi_2) - \\&- 2\omega_2 (\dot{x}_{2C_3} \sin \varphi_2 + \dot{y}_{2C_3} \cos \varphi_2) - \varepsilon_2 (x_{2C_3} \sin \varphi_2 + y_{2C_3} \cos \varphi_2) - \\&- (\varepsilon_2 + \varepsilon_{32}) (\sin^2 \varphi \sum m_k \xi_k^2 + \cos^2 \varphi \sum m_k \eta_k^2 + J_{\xi\eta} \sin 2\varphi) - \\&\left. - (\omega_2 + \omega_{32})^2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum m_k (\xi_k^2 - \eta_k^2) + J_{\xi\eta} \cos 2\varphi \right] \right\}.\end{aligned}$$

Тепер використаємо рівняння (8.21) і формули

$$J_{C_3\xi} = \sum m_k (\xi_k^2 + \eta_k^2), \quad J_{\xi\eta} = \sum m_k \xi_k \eta_k,$$

перша з яких визначає осьовий момент інерції тіла 3 відносно його центра мас C_3 , а друга — відцентровий момент інерції цього тіла відносно пари осей $C_3\xi$, $C_3\eta$. Після знищення на підставі (8.21) однакових членів у лівій і правій частинах і зведення подібних дістаємо шукане третє рівняння динаміки відносного руху, яке пов'язує другі похідні за часом $\ddot{\varphi}_2$, $\ddot{\varphi}_{32}$ від відносного φ_2 і переносного φ_{32} кутів

повороту тіла 3, головний момент $M_{z_{C_3\zeta}}$ усіх зовнішніх сил, що діють на тіло 3, та момент інерції $J_{C_3\zeta}$ тіла 3 відносно його центра мас C_3 (осі ζ_{C_3}):

$$J_{C_3\zeta} \ddot{\varphi}_{32} = M_{z_{C_3\zeta}} - J_{C_3\zeta} \ddot{\varphi}_2, \quad (8.24)$$

де

$$M_{z_{C_3\zeta}} = \sum [(\xi_k \cos \varphi - \eta_k \sin \varphi) F_{z_{ky}} - (\xi_k \sin \varphi + \eta_k \cos \varphi) F_{z_{kx}}].$$

Рівняння (8.21), (8.24) називаються динамічними рівняннями відносного руху тіла 3 плоскої системи тіл щодо її тіла 2. Перші два з рівнянь (8.21) описують динаміку поступальної складової відносного плоскопаралельного руху — рух центра мас C_3 тіла 3 у припущенні, що в ньому зосереджена вся маса тіла; третє — обертальну складову руху — відносне обертання тіла 3 навколо його центра мас C_3 (поступально рухомої осі $C_3\zeta$) щодо тіла 2.

Якщо розв'язується обернена задача динаміки відносного руху тіла, то маємо п'ять невідомих — кінематичні величини x_{2C_3} , y_{2C_3} , φ_{32} і проекції рівнодійної зовнішніх реакцій в'язей $R_{p,v,z,x}$, $R_{p,v,z,y}$ на нерухомі осі. При цьому рух тіла 2 має бути заданий відносно нерухомих осей і визначається параметрами x_{O_2} , y_{O_2} , φ_2 , що є функціями часу; задаються також активні зовнішні сили $R_{a,z,x}$, $R_{a,z,y}$. Задавшись додатковим рівнянням в'язі

$$(x_{C_3}, y_{C_3}, t) = 0,$$

у деяких задачах про динаміку відносного руху вдається попередньо виключити із системи трьох рівнянь невідомі реакції в'язей і дістати систему двох рівнянь, які разом із рівнянням в'язі дають змогу визначити відносний рух. Далі за відносним рухом знаходять невідомі реакції.

□ **Динаміка гіроскопа.** У деяких гіроскопічних пристроях (див. п. 5.1) власна вісь гіроскопа, навколо якої він швидко обертається, сама обертається навколо іншої осі, але зі значно меншою кутовою швидкістю. Це відносно повільне обертання власної осі гіроскопа з одночасним його власним обертанням називається *прецесією*.

Прецесію виконує іграшка дзига — гіроскоп із трьома ступенями вільності (рис. 8.4), якщо надати їй значної кутової швидкості, відхилити від вертикалі на деякий кут і залишити саму на себе. Прецесію здійснюватиме також гіроскоп із двома ступенями вільності (рис. 8.5), якщо рамці, яка встановлена з гіроскопом у підшипниках на вертикальному валу, за кутової швидкості власного обертання навколо горизонтальної осі надати обертання навколо вертикальної осі.

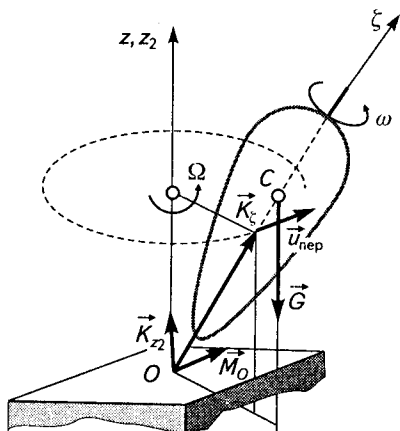


Рис. 8.4

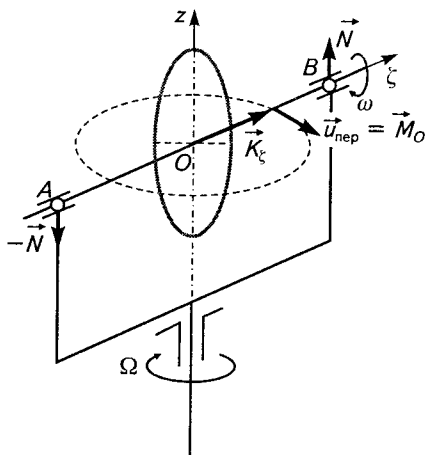


Рис. 8.5

Щоб пояснити явище прецесії з погляду динаміки, використаємо теорему про зміну кінетичного моменту в загальнішій формі, яка відображує векторний характер моменту кількості руху обертового тіла:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_{3O},$$

де O — точка перетину власної осі обертання та осі процесії.

Із попереднього відомо: якщо власна вісь обертання тіла є головною центральною віссю інерції, то вектор кінетичного моменту \vec{K}_ζ обертового тіла відносно точки на осі обертання напрямлений по власній осі обертання. Модуль цього моменту визначається за формулою

$$K_\zeta = J_\zeta \omega.$$

Кутову швидкість ω назвемо власною кутовою швидкістю обертання гіроскопа або в його складному русі — відносною кутовою швидкістю. Позначимо кутову швидкість прецесії гіроскопа через Ω і вважатимемо її переносною. Даній кутовій швидкості прецесії відповідає вектор переносного кінетичного моменту \vec{K}_{z_2} , який напрямлений по осі z_2 прецесії гіроскопа. Тоді шукане векторне рівняння матиме вигляд

$$\frac{d\vec{K}_\zeta}{dt} = \vec{M}_{3O} - \frac{d\vec{K}_{z_2}}{dt}.$$

Похідні $\frac{d\vec{K}_\zeta}{dt}$, $\frac{d\vec{K}_{z_2}}{dt}$ можна геометрично трактувати як швидкості кінців векторів \vec{K}_ζ , \vec{K}_{z_2} за їх векторної зміни. Введемо позначення цих швидкостей:

$$\frac{d\vec{K}_\zeta}{dt} = \vec{u}_{\text{відн}}, \quad \frac{d\vec{K}_{z_2}}{dt} = \vec{u}_{\text{пер}}.$$

Тоді основне векторне рівняння можна записати так:

$$\vec{u}_{\text{відн}} = \vec{M}_{30} - \vec{u}_{\text{пер}}.$$

У явищах прецесії наближено вважають, що кутова швидкість Ω прецесії не змінюється з часом. За таких умов останнє векторне рівняння матиме вигляд

$$\vec{u}_{\text{відн}} = \vec{M}_{30}. \quad (8.25)$$

Отже, *прецесія гіроскопа відбувається так, що кінець вектора відносного кінетичного моменту здійснює коловий рух у площині, перпендикулярній до осі прецесії, зі швидкістю, яка за модулем і напрямом дорівнює зовнішньому моменту, прикладеному до гіроскопа.*

Використовуючи $K_\zeta = J_\zeta \omega$ і взявши до уваги, що кутова швидкість прецесії становить Ω , на підставі векторної рівності (8.25) можна записати скалярну формулу

$$M_o = J_\zeta \Omega \omega. \quad (8.26)$$

У задачі на прецесію дзиги кут α відхилення осі власного обертання від вертикалі відомий, а також відома відстань b від точки опори дзиги до центра її мас C . Тому за формулою (8.26) можна визначити кутову швидкість прецесії, якщо ми знаємо власну кутову швидкість і момент інерції дзиги:

$$\Omega = \frac{Mgb \sin \alpha}{J_\zeta \omega}.$$

У випадку гіроскопа з рамкою його момент інерції та обидві кутові швидкості вважаються заданими. Тоді можна визначити, який зовнішній момент M_o (8.26) діє на гіроскоп і спричинює прецесію.

Цілком зрозуміло, що не сила ваги гіроскопа створює даний момент. Безпосередньо на горизонтальний вал гіроскопа, який закріплено в підшипниках рамки, з боку підшипників діють дві сили: \vec{N} і $-\vec{N}$. Вони утворюють пару з моментом

$$M = M_o = NL,$$

де L — відстань між центрами A і B підшипників рамки, в яких знаходиться вісь гіроскопа.

Знайдемо сили пари, підставивши її момент у формулу (8.26):

$$N = \frac{J_{\zeta} \Omega \omega}{L}.$$

У механіці гіроскопічних приладів момент, що визначається формулою (8.26), але протилежно напрямлений, який здійснює прецесію осі гіроскопа, називають *гіроскопічним моментом*. Можемо записати

$$\begin{aligned} M_{\text{гір}} &= M_O = J_{\zeta} \Omega \omega, \\ \vec{M}_{\text{гір}} &= -\vec{u}_{\text{візн}} = -M_O. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Гіроскопічний момент діє не на гіроскоп, а, за третім законом Ньютона, на ті в'язі (в нашому випадкові на підшипники), які накладені на власну вісь гіроскопа й примушують його здійснювати прецесію. Зрозуміло, для того, щоб відбувалася прецесія гіроскопа, потрібно діяти на нього з моментом (8.26), який назвемо діючим моментом прецесії. У прикладі з дзигою діючим моментом прецесії є момент сили ваги дзиги відносно точки її опори O , а в гіроскопі з рамкою — момент пари сил, які діють із боку рамки на вал ротора гіроскопа в місцях його закріплення (в підшипниках). Щодо гіроскопічних моментів у цих обох випадках, то вони зумовлені інерцією дзиги й ротора за намагання їх зберегти той рух, який вони мали до прецесії. Гіроскопічний момент є інерційним моментом, який діє на ті зовнішні тіла відносно дзиги й ротора, що спричинили прецесію.

Вникнемо глибше в природу гіроскопічного моменту. Розглянемо обертання ротора гіроскопа навколо горизонтальної осі $O\zeta$ з кутовою швидкістю ω — це відносний рух (рис. 8.5). Прецесійне обертання рамки з ротором гіроскопа з кутовою швидкістю Ω навколо вертикальної осі Oz_2 — це переносний рух ротора, а отже, і його частинок масою dm із лінійними відносними швидкостями $v_{\text{візн}} = \omega r$.

Унаслідок прецесії вектори відносних швидкостей $\vec{v}_{\text{візн}}$ додатково змінюють свій напрям на перпендикулярний до площини ротора гіроскопа, що й спричинює появу прискорення Коріоліса $\vec{a}_{\text{Кор}}$ (рис. 8.6). Кожний елемент ротора масою dm набуває такого додаткового прискорення під дією елементарної сили Коріоліса

$$dF_{\text{Кор1}} = a_{\text{Кор}} dm,$$

яка є рівнодійною реакцій в'язей, що діють на елемент dm на його торцях із боку сусідньої частини ротора. Симетрично $d\vec{F}_{\text{Кор1}}$ на такій самій відстані від вертикальної осі Oz_2 на іншій половині ротора на

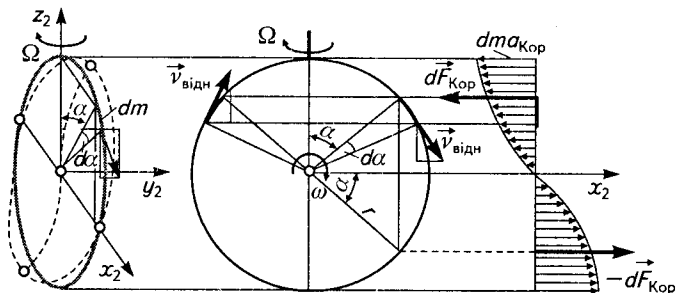


Рис. 8.6

елемент масою dm діє елементарна сила $d\vec{F}_{\text{Кор}2}$, така сама за модулем і напрямом. Отже, рівнодійна обох цих елементарних сил

$$d\vec{F}_{\text{Кор}} = dF_{\text{Кор}1} + dF_{\text{Кор}2} = 2a_{\text{Кор}} dm.$$

Точка прикладання сили $d\vec{F}_{\text{Кор}}$ знаходиться на вертикальній осі Oz_2 на відстані $r \cos \alpha$ від центра ротора. Нижче від центра ротора на цій самій осі також на відстані $r \cos \alpha$ прикладена така сама сила протилежного напрямку $-d\vec{F}_{\text{Кор}}$. Маємо пару сил із моментом

$$dM_{\text{Кор}x_2} = 2r \cos \alpha dF_{\text{Кор}} = 4r \cos \alpha a_{\text{Кор}} dm.$$

Прискорення Коріоліса знайдемо за формулою

$$a_{\text{Кор}} = 2\Omega v_{\text{відн}} \cos \alpha = 2\Omega \omega \cdot r \cos \alpha.$$

Вважаючи, що ротор являє собою масивний обід (кільце) масою M , елемент маси ротора можна виразити так:

$$dm = \frac{M}{2\pi r} r d\alpha = \frac{M}{2\pi} d\alpha.$$

Тоді

$$dM_{\text{Кор}x_2} = 4r^2 \Omega \omega \cos^2 \alpha \frac{M}{\pi} d\alpha = 4 \frac{J_{\zeta}}{\pi} \Omega \omega \cos^2 \alpha d\alpha.$$

Обчислимо визначений інтеграл у межах від 0 до $\pi/2$ незалежної змінної інтегрування α :

$$M_{\text{Кор}x_2} = 4 \frac{J_{\zeta}}{\pi} \Omega \omega \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha = 4 \frac{J_{\zeta}}{\pi} \Omega \omega \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right) \Big|_0^{\pi/2} = J_{\zeta} \Omega \omega.$$

Такий результуючий момент від сил Коріоліса діє на ротор в його прецесійному русі. Він дорівнює раніше визначеному рушійному мо-

ментові прецесії, який створюється парою сил $(\vec{N}, -\vec{N})$, що розвивається в підшипниках вала ротора гіроскопа.

За третім законом Ньютона на ротор, що здійснює прецесію, діє інерційна пара сил, котра намагається відхилити верхню й нижню частини його обода в протилежних напрямках від вертикальної площини, в якій знаходилася площина ротора до прецесії. Ця інерційна пара має гіроскопічний момент, дія якого передається через підшипники вала гіроскопа на рамку; він є сумарним моментом від інерційних сил Коріоліса, діаграма розподілу яких уздовж обода ротора протилежна напрямку елементарних сил Коріоліса, показаних на рис. 8.6.

Крім перпендикулярних до площини ротора гіроскопа елементарних інерційних сил Коріоліса, які розподілені вздовж його обода за законом косинуса й спричинюють деформацію обода (рис. 8.6), на частинки обода діють рівномірно розподілені вздовж нього інерційні відцентрові сили в площині ротора, зумовлені власним його обертанням із відносною кутовою швидкістю $\omega_{\text{відн}} = \omega$; через деформованість ротора їхній вплив на нього призводить до збільшення довжини його обода (діаметра ротора).

■ **Задача про рух колісного ската.** Колісним скатом називається механізм, який складається з вала та двох жорстко насаджених на нього коліс і застосовується у вагонах поїздів. Розглянемо його рух по заокругленню залізничної колії радіусом R (рис. 8.7). Цей рух по колії відбувається в режимі кочення без проковзування. Нехай G — вага колісного ската, J — момент інерції відносно осі вала, L — відстань між центрами його коліс, r — радіус самих коліс.

Візьмемо переносну систему осей $Ox_2y_2z_2$ із початком O в центрі кола кривини колії, вісь Oy_2 спрямуємо вздовж осі вала колісного ската, а вісь Ox_2 — горизонтально зліва направо (на рис. 8.7, *a*); вісь Oz_2 вертикальна.

Під час руху колісного ската створюється гіроскопічний ефект. Покажемо це. Котячися без проковзування на рейках по заокругленню, колісний скат поводить як гіроскоп: він здійснює власне обертання навколо осі Oy_2 вала з кутовою швидкістю ω — це його відносна кутова швидкість (рис. 8.7, *a*). Разом із тим вісь його власного обертання Oy_2 обертається навколо осі Oz_2 з кутовою швидкістю

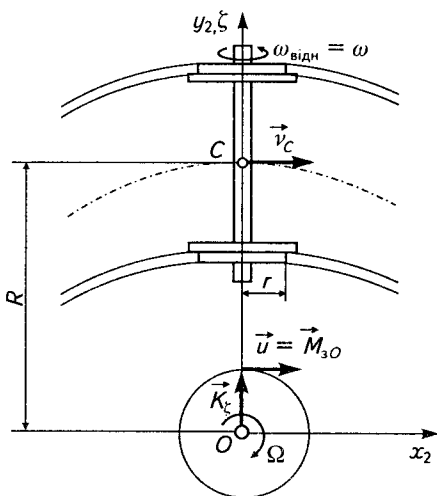
$$\Omega = v_c / R,$$

яка визначає прецесію колісного ската й є переносною. Вектор кінетичного моменту колісного ската в його прецесійному переносному русі є \vec{K}_{x_2} . Позначимо вектор власного кінетичного моменту колісного ската через \vec{K}_z ; його модуль визначається за формулою

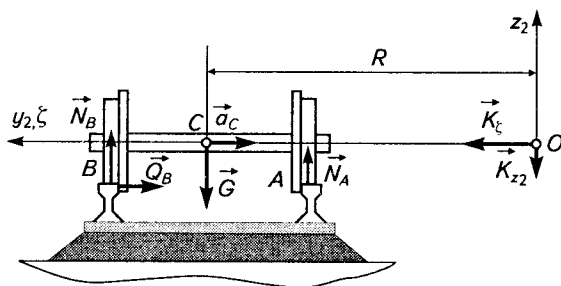
$$K_z = J\omega,$$

де

$$\omega = v_c / r.$$



а



б

Рис. 8.7

Кінетичні моменти \vec{K}_ζ , \vec{K}_{z_2} власного обертання й прецесії колісного ската зображено на рис. 8.7, б. Як відомо з попереднього, рушійний момент прецесії дорівнює швидкості кінця вектора власного кінетичного моменту \vec{K}_ζ , що обертається з кутовою швидкістю прецесії Ω . Тому можемо записати

$$u = J\omega\Omega = M_{3O},$$

де M_{3O} — головний момент усіх зовнішніх сил, які діють на колісний скат під час його руху відносно нерухомого центра обертання O (осі Oz_2).

На колісний скат діють такі сили: власна вага \vec{G} , вертикальні реакції рейок \vec{N}_A , \vec{N}_B і в горизонтальному напрямі — сила \vec{Q}_B (припускається, що

колісний скат під час руху притискається до зовнішньої рейки опорним виступом на колесі).

Візьмемо суму моментів цих сил відносно точки O :

$$M_{3O} = -Q_B r + N_B (R + L/2) - GR + N_A (R - L/2)$$

або

$$M_{3O} + Q_B r = (N_A + N_B)R + \frac{L}{2}(N_B - N_A) - GR.$$

На підставі теореми про рух центра мас тіла маємо

$$Q_B = \frac{G}{g} a_C = \frac{G}{g} \frac{v_C^2}{R},$$

$$N_A + N_B = G.$$

Далі запишемо

$$\frac{2}{L} \left(M_{3O} + \frac{G}{g} \frac{r}{R} v_C^2 \right) = N_B - N_A,$$

$$N_A = G - N_B.$$

Розв'язок цієї системи рівнянь такий:

$$N_B = \frac{G}{2} + \frac{1}{L} \left(M_{3O} + \frac{G}{g} \frac{r}{R} v_C^2 \right),$$

$$N_A = \frac{G}{2} - \frac{1}{L} \left(M_{3O} + \frac{G}{g} \frac{r}{R} v_C^2 \right).$$

Бачимо, що навантаження на зовнішню рейку під час руху колісного ската буде більше, ніж на внутрішню. Очевидно, що момент пари сил, яка діє на колісний скат,

$$NL = M = M_{3O} + \frac{G}{g} \frac{r}{R} v_C^2.$$

Колісний скат, рухаючися по заокругленню й намагаючися перекинутися, діятиме на рейки з інерційною парою згідно з третім законом Ньютона, момент якої

$$M_i = M_{3O} + \frac{G}{g} \frac{r}{R} v_C^2 = J\omega\Omega + \frac{G}{g} \frac{r}{R} v_C^2 = \frac{v_C^2}{rR} \left(J + \frac{G}{g} r^2 \right).$$

ТЕОРІЯ УДАРУ

9.1

Загальні теореми елементарної теорії удару

Загальні зауваження. У попередніх главах вивчалися рухи, в яких лінійні й кутові швидкості, а також відповідні динамічні величини, такі як кількості руху та моменти кількостей руху, під дією сил змінювалися з часом неперервно, тобто нескінченно малим змінам часу відповідали нескінченно малі зміни даних величин. Сили, які зумовлюють неперервний характер змін кінематичних і динамічних величин у механічних рухах, називаються *звичайними*, або *скінченними*, бо вони мають обмежені числові значення. Такими скінченними силами є, наприклад, вага, сила пружності, сили всесвітнього тяжіння тощо. В рівняннях динаміки, якими ми користувалися, досліджуючи рух, сили розглядалися як скінченні.

Тепер звернемо увагу на зіткнення тіл одне з одним під час їх руху та руху тіла з нерухомою поверхнею в механічних процесах. Назвемо таку взаємодію тіл *ударом*, або *ударним явищем*. За удару сили прикладаються до тіл раптово, швидко зростають від нуля до дуже великих значень, після чого так само швидко зменшуються до нуля. Сили, які супроводжують удар, назвемо *ударними силами*, а інтервал часу, протягом якого діють ударні сили, — *часом*, або *тривалістю*, *удару*.

В явищах удару рух реальних деформовних тіл зазвичай має неперервний характер: за час удару, який є дуже малим, неперервно змінюються лінійні й кутові швидкості, а також відповідні динамічні величини — кількості руху та моменти кількостей руху. Ці зміни відбуваються так швидко, що нескінченно малим змінам часу в межах тривалості удару відповідають уже скінченні зміни кінематичних і динамічних величин. При цьому ударні сили за нескінченно малий час їх дії досягають дуже великих значень, які вже не є скінченними величинами.

Розглянуті раніше основний закон динаміки й загальні теореми динаміки, що ґрунтуються на основному законі, справедливі й у явищах удару реальних тіл. Вивчення ударних явищ у рамках задач теоретичної механіки істотно спрощується, якщо дотримуватися введених Ньютоном припущень стосовно цих явищ.

За Ньютоном, тіла, що співударяються, розглядаються як абсолютно тверді; ударні сили є миттєвими й досягають нескінченно великих значень; тривалість удару вважається нульовою; положення точок залишається таким, як до удару; результат дії ударних сил виражається в миттєвій скінченній зміні кінематичних і динамічних величин; у процесі дії ударних сил скінченні сили не враховуються, хоча вони продовжують діяти як у момент удару, так і після нього; скінченні сили визначають рух до моменту удару й після нього; в момент удару рух зумовлюється ударними силами. Властивості деформовності реальних тіл в явищах удару характеризує так званий *коефіцієнт відновлення*, введення якого дає змогу розглядати тіла за удару як абсолютно тверді. Коефіцієнт удару визначається дослідним шляхом й вможливує складання додаткового кінематичного рівняння, яке спільно з динамічними рівняннями теорії удару становить замкнену систему рівнянь для розв'язування задач про удар.

Теорія удару, в основу якої покладено ньютонівську концепцію удару, називається *елементарною теорією удару*. Згідно з нею реальні ударні явища, в яких завдяки деформовності тіл дія на них імпульсивних дуже великих сил, що неперервно змінюються з часом, спричинює також неперервну зміну кінематичних і динамічних величин, замінюються ідеалізованими явищами, в яких удар відбувається між абсолютно твердими тілами; при цьому зміни зазначених величин під дією на абсолютно тверді тіла миттєвих нескінченно великих ударних сил відбуваються стрибкоподібно на скінченне значення. Ці стрибкоподібні зміни кінематичних і динамічних величин називаються *розривами першого роду*.

□ Основне рівняння динаміки елементарної теорії удару.

Розглянемо дію ударної сили $\vec{F}_{\text{уд}}$ на точку масою m у момент часу t . На підставі теореми про зміну кількості руху точки в інтегральній формі матимемо

$$m\vec{V} - m\vec{v} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}_{\text{уд}} dt,$$

де \vec{v} і \vec{V} — швидкості точки в момент t відповідно на початку й наприкінці удару; τ — тривалість удару деформовних тіл. Оскільки зліва стоїть скінченна зміна кількості руху точки в момент удару t , то вели-

чина справа, якою є повний імпульс ударної сили $\vec{F}_{\text{уд}}$, що за малий час удару τ зазнає дуже великих змін, також має скінченне значення.

Введемо позначення

$$\vec{S}_{\text{уд}} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}_{\text{уд}} dt.$$

Це ударний імпульс, що діє на точку в даний момент часу t й якому в цей самий момент часу відповідає скінченна зміна кількості руху

$$\Delta \vec{q} = m\vec{V} - m\vec{v}.$$

Отже, приходимо до основного рівняння динаміки елементарної теорії удару

$$m\vec{V} - m\vec{v} = \vec{S}_{\text{уд}}. \quad (9.1)$$

Зміна кількості руху точки за удару дорівнює ударному імпульсові.

Візьмемо декартову систему осей $Oxuz$; їхній початок O і напрям можна вибрати довільно, бо удар досліджується для одного моменту часу t , в який він здійснюється. В декартових осях векторному рівнянню (9.1) відповідають три скалярних:

$$\begin{aligned} mV_x - mv_x &= S_{\text{уд}x}, \\ mV_y - mv_y &= S_{\text{уд}y}, \\ mV_z - mv_z &= S_{\text{уд}z}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Цілком зрозуміло, що й до, й після моменту удару частини траєкторії точки є гладкими кривими й рух уздовж них відбувається під дією скінченних сил (не ударних). У момент t удару траєкторія зазнає злому. В місці цього злому, що відповідає моментові часу t , точка має різні швидкості — як за модулем, так і за напрямом (рис. 9.1). Швидкість точки наприкінці удару згідно з формулою (9.1)

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{S}_{\text{уд}}/m.$$

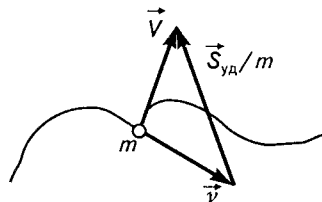


Рис. 9.1

Якщо точка, котра рухається в площині, наприклад Oxy , у момент часу t зазнає удару з імпульсом $\vec{S}_{\text{уд}}$, який діє в цій самій площині, то замість трьох скалярних рівнянь (9.2) матимемо два:

$$\begin{aligned} mV_x - mv_x &= S_{\text{уд}x}, \\ mV_y - mv_y &= S_{\text{уд}y}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

□ Теорема про зміну моменту кількості руху точки за удару.

Візьмемо яку-небудь точку O й сумістимо з нею початок декартової системи осей $Oxyz$ (рис. 9.2).

У цій системі осей до точки масою m у момент часу t прикладемо ударний імпульс $\vec{S}_{уд}$, дія якого на точку згідно з

рівняннями (9.1), (9.2) спричинить зміну кількості руху.

Складемо вирази для моментів ударного імпульсу $\vec{S}_{уд}$, що діє на точку, відносно даних декартових осей Ox , Oy , Oz за тими самими правилами, за якими раніше визначалися моменти сили відносно декартових осей. Маємо

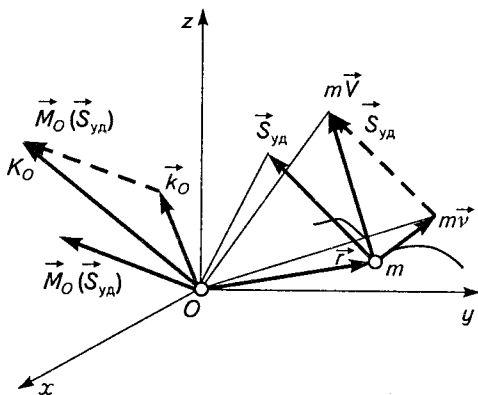


Рис. 9.2

$$M_x(\vec{S}_{уд}) = yS_{удz} - zS_{удy},$$

$$M_y(\vec{S}_{уд}) = zS_{удx} - xS_{удz},$$

$$M_z(\vec{S}_{уд}) = xS_{удy} - yS_{удx}.$$

Тут x , y , z — координати точки в момент удару; $S_{удx}$, $S_{удy}$, $S_{удz}$ — проекції ударного імпульсу на відповідні декартові осі; $M_x(\vec{S}_{уд})$, $M_y(\vec{S}_{уд})$, $M_z(\vec{S}_{уд})$ — моменти ударного імпульсу $\vec{S}_{уд}$ відносно відповідних декартових осей.

Так само для моменту часу t складемо вирази для моментів кількостей руху точки до й після удару відносно тих самих осей:

$$k_x = m(yv_z - zv_y),$$

$$k_y = m(zv_x - xv_z),$$

$$k_z = m(xv_y - yv_x);$$

$$K_x = m(yV_z - zV_y),$$

$$K_y = m(zV_x - xV_z),$$

$$K_z = m(xV_y - yV_x).$$

Далі візьмемо окремо різниці цих величин, що відповідають індексам x , y , z , і порівняємо їх до відповідних моментів ударного імпульсу відносно декартових осей. У результаті дістанемо

$$\begin{aligned}
K_x - k_x &= M_x (\bar{S}_{уд}), \\
K_y - k_y &= M_y (\bar{S}_{уд}), \\
K_z - k_z &= M_z (\bar{S}_{уд}); \\
m(yV_z - zV_y) - m(yv_z - zv_y) &= yS_{удz} - zS_{удy}, \\
m(zV_x - xV_z) - m(zv_x - xv_z) &= zS_{удx} - xS_{удz}, \\
m(xV_y - yV_x) - m(xv_y - yv_x) &= xS_{удy} - yS_{удx}.
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Трьом скалярним рівнянням (9.4) відповідає одне векторне

$$\bar{K}_O - \bar{k}_O = \bar{M}_O (\bar{S}_{уд}), \tag{9.5}$$

яке виражає **теорему про зміну моменту кількості руху точки відносно центра O** : за удару зміна моменту кількості руху точки відносно даного центра дорівнює моменту ударного імпульсу відносно цього самого центра. Це векторна форма теореми.

Скалярні рівняння (9.4) виражають дану теорему в проєкціях на декартові осі: зміна за удару моменту кількості руху точки відносно декартових осей дорівнює моменту ударного імпульсу відносно цих самих осей.

Із рівняння (9.5) випливає, що момент кількості руху точки відносно даного центра після удару дорівнює моменту кількості руху точки відносно цього самого центра до удару, доданого до моменту ударного імпульсу відносно цього самого центра (рис. 9.2).

Якщо точка здійснює рух під дією звичайних сил (не ударних) в одній площині, наприклад Oxy , і в якийсь момент часу t в цьому русі зазнає удару з ударним імпульсом $\bar{S}_{уд}$, котрий лежить у цій самій площині, то моменти кількостей руху точки відносно центра O до й після удару, \bar{k}_O , \bar{K}_O , будуть колінеарними й напрямленими перпендикулярно до площини ударного імпульсу. В такому разі замість (9.4) і (9.5) матимемо одне скалярне рівняння:

$$\begin{aligned}
K_z - k_z &= M_z (\bar{S}_{уд}), \\
m(xV_y - yV_x) - m(xv_y - yv_x) &= xS_{удy} - yS_{удx}.
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Зауважимо, що теореми про зміну моменту кількості руху точки відносно центра [див. (9.5)] і декартових осей [див. (9.4)] впливають зі скалярних рівнянь (9.2), які виражають проєкції основного векторного рівняння теорії удару (9.1) на декартові осі. Справді, перша рівність системи (9.4) є результатом множення третього з рівнянь системи (9.2) на y , а другого — на z із наступним відніманням від третього рівняння з множником u другого рівняння з множником z ; дру-

га — те саме, але з наступним відніманням від попередньо помноженого на z першого рівняння попередньо помноженого на x третього рівняння цієї системи; третя — те саме, але з наступним відніманням від попередньо помноженого на x другого рівняння попередньо помноженого на y першого рівняння.

□ **Кінематичне рівняння елементарної теорії удару.** Розглянемо удар двох тіл унаслідок їх зіткнення (рис. 9.3). У точці контакту поверхонь цих тіл розрізнятимемо дві точки A_1, A_2 , перша з яких належить першому тілу, друга — другому. Цими точками й співударяються тіла. Позначимо швидкості точок A_1, A_2 до й після удару через $\vec{v}_{A_1}, \vec{v}_{A_2}$ і $\vec{V}_{A_1}, \vec{V}_{A_2}$ відповідно. Проведемо в спільній точці контакту тіл, що ударяються, нормалі N_1, N_2 до їхніх стичних поверхонь. Додатні напрями цих нормалей позначимо одиничними векторами \vec{n}_1, \vec{n}_2 , напруженими у внутрішню область тіл (рис. 9.3).

Швидкості точки A_2 відносно точки A_1 до й після удару відповідно становитимуть

$$\vec{v}_{A_2(A_1)} = \vec{v}_{A_2} - \vec{v}_{A_1},$$

$$\vec{V}_{A_2(A_1)} = \vec{V}_{A_2} - \vec{V}_{A_1}.$$

Аналогічно для точки A_1 можна записати

$$\vec{v}_{A_1(A_2)} = \vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2},$$

$$\vec{V}_{A_1(A_2)} = \vec{V}_{A_1} - \vec{V}_{A_2}.$$

Ньютон на підставі дослідів з удару куль установив, що відношення модулів проєкцій відносних швидкостей точок поверхонь двох тіл у місці їх контакту до й після удару на відповідну нормаль до поверхонь тіл є сталою величиною для даних тіл, що співударяються, й не залежить від швидкостей, з якими здійснюється удар. Цю величину називають коефіцієнтом удару, або коефіцієнтом відновлення, який залежить від природи тіл.

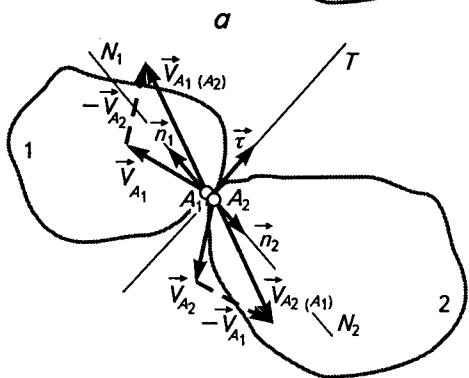
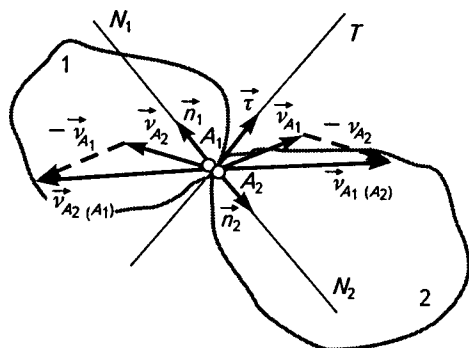


Рис. 9.3

Позначимо коефіцієнт удару через k . Тоді матимемо

$$\frac{|\vec{V}_{A_1(A_2)} \cdot \vec{n}_1|}{|v_{A_1(A_2)} \cdot \vec{n}_1|} = \frac{|(\vec{V}_{A_1} - \vec{V}_{A_2})\vec{n}_1|}{|(\vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2})\vec{n}_1|} = k,$$

$$\frac{|\vec{V}_{A_2(A_1)} \cdot \vec{n}_2|}{|v_{A_2(A_1)} \cdot \vec{n}_2|} = \frac{|(\vec{V}_{A_2} - \vec{V}_{A_1})\vec{n}_2|}{|(\vec{v}_{A_2} - \vec{v}_{A_1})\vec{n}_2|} = k$$

або

$$(\vec{V}_{A_1} - \vec{V}_{A_2})\vec{n}_1 = -k(\vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2})\vec{n}_1,$$

$$(\vec{V}_{A_2} - \vec{V}_{A_1})\vec{n}_2 = -k(\vec{v}_{A_2} - \vec{v}_{A_1})\vec{n}_2,$$
(9.7)

оскільки відносні швидкості до й після удару мають протилежні знаки. Коефіцієнт удару задовольняє умову

$$0 \leq k \leq 1.$$

Якщо $k = 0$, то відбувається так званий пластичний (абсолютно непружний) удар — відносна швидкість точок контакту в напрямі нормалей за удару стає нульовою. При $k = 1$ відбувається абсолютно пружний удар — відносна швидкість точок контакту в напрямі нормалей при ударі не змінюється. Проміжним значенням цього коефіцієнта характеризується пружний удар.

З рис. 9.3, *a* видно, що удар тіл 1 і 2 відбуватиметься тоді, коли кути $\angle(\vec{v}_{A_2(A_1)}, A_2N_2)$, $\angle(\vec{v}_{A_1(A_2)}, A_1N_1)$ більші за прямий. Після удару (рис. 9.3, *б*) кути $\angle(\vec{V}_{A_2(A_1)}, A_2N_2)$, $\angle(\vec{V}_{A_1(A_2)}, A_1N_1)$ гострі — тіла відскакують одне від одного.

Для дотичних складових відносних швидкостей, очевидно, справедливі співвідношення

$$(\vec{V}_{A_1} - \vec{V}_{A_2})\vec{\tau} = (1 - \lambda)(\vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2})\vec{\tau},$$

$$(\vec{V}_{A_2} - \vec{V}_{A_1})\vec{\tau} = (1 - \lambda)(\vec{v}_{A_2} - \vec{v}_{A_1})\vec{\tau},$$
(9.8)

де λ — фрикційний коефіцієнт, який враховує наявність ударного імпульсу в напрямі дотичної T до стичних поверхонь тіл: при $\lambda = 0$ відносні швидкості точок A_1 і A_2 до й після удару однакові — поверхні тіл ідеально гладкі; при $\lambda = 1$ відносні швидкості даних точок після удару стають нульовими — досить велике фрикційне щеплення між стичними поверхнями.

За проміжних значень коефіцієнта удару маємо випадок кулонівського тертя між поверхнями тіл і виникнення внаслідок цього при співударянні тіл дотичного ударного імпульсу згідно з умовою

$$0 \leq |S_{уд\tau}| \leq f |S_{удn}|,$$

де $|S_{уд\tau}|$, $|S_{удn}|$ — модулі дотичного й нормального ударних імпульсів; f — коефіцієнт тертя між стичними поверхнями тіл. Якщо нерівність виконується строго, то відносна швидкість точок контакту тіл у дотичному напрямі за співудару дорівнює нулю; це означає, що у співвідношеннях (9.8) фрикційний коефіцієнт $\lambda = 1$. При $|S_{уд\tau}| = f |S_{удn}|$ відносна швидкість точок контакту в дотичному напрямі після удару не дорівнює нулю. Крім того, вона менша за відносну швидкість цих точок у дотичному напрямі до удару; при цьому $0 < \lambda < 1$.

□ **Дослідне визначення коефіцієнта удару.** Беруть однорідне тіло сферичної форми з досліджуваного матеріалу — кулю радіусом r — і примушують її падати з висоти H на масивну горизонтальну плиту з такого самого матеріалу (рис. 9.4). У разі поступального падіння кулі з даної висоти й підскакування її після удару від поверхні плити у вертикальному напрямі до висоти h відносні швидкості до й після удару точки контакту кулі з поверхнею плити становитимуть

$$v_{вдн} = \sqrt{2g(H - 2r)}, \quad V_{вдн} = \sqrt{2g(h - 2r)}.$$

Тоді коефіцієнт удару

$$k = \frac{V_{вдн}}{v_{вдн}} = \sqrt{\frac{H - 2r}{h - 2r}}. \quad (9.9)$$

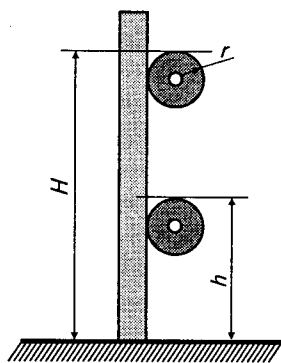


Рис. 9.4

Наведемо числові значення коефіцієнта удару для деяких матеріалів: для сталі $k = 5/9$; для слонов'ячої кістки $k = 8/9$; для скла $k = 15/16$; для деревини $k = 1/2$.

Коефіцієнт удару можна визначити й як відношення тангенсів кутів падіння та відбивання (рис. 9.5):

$$k = \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta.$$

Вектор поступальної швидкості \vec{v} кулі до удару об горизонтальну плиту утворює з вертикаллю кут α , а швидкості після удару \vec{V} — кут β . Перший кут називається *кутом падіння*, другий — *кутом відбивання*. Вважається, що дотична складова швидкості кулі не змінюється внаслідок її співудару з плитою.

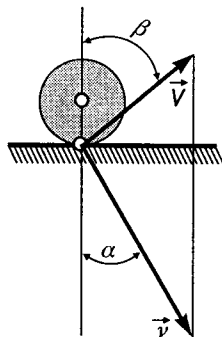


Рис. 9.5

□ **Загальні теореми елементарної теорії удару для плоскої системи тіл.** До цих теорем належать теореми про зміну кількості руху механічної системи, про рух центра мас системи й про зміну кінетичного моменту системи. Послідовно розглянемо їх. Доведення зазначених теорем ґрунтується на загальному рівнянні теорії удару (9.1) або (9.2) і теоремі про зміну моменту кількості руху точки відносно центра й декартових осей (9.5), (9.4). Застосовуючи їх, слід зважати на те, що за удару положення точок механічної системи не залежить від часу.

Розглянемо рух плоскої системи тіл, яка має спільну для всіх її тіл площину матеріальної симетрії, відносно абсолютно нерухомої, або інерціальної, декартової системи координат $Oxyz$ під дією звичайних сил; дві осі Ox , Oy цієї системи збігаються зі спільною площиною симетрії. Нехай у плоску систему входить n циліндричних тіл із твірними, перпендикулярними до площини симетрії. Позначимо маси тіл у системі через m_k , а їхні головні центральні моменти інерції — через J_{C_k} , де $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Швидкості центрів мас C_k тіл в який-небудь момент часу t в їх руці під дією звичайних сил у системі осей $Oxyz$ будуть \vec{v}_{C_k} , а кутові швидкості обертання тіл навколо їхніх центрів мас — ω_k . Припустимо, що в цей самий момент часу t до тіл системи прикладається n_i зовнішніх ударних імпульсів $\vec{S}_{уд.з.i}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n_i$), які спричинять зіткнення тіл системи — співудар. У результаті в цей самий момент часу t у точках контакту на спільних твірних бічних поверхнях сусідніх тіл, що співударяються, виникають внутрішні ударні імпульси $\vec{S}_{уд.в.j}$ ($j = 1, 2, 3, \dots, n_j$), кількість яких n_j .

За законом рівності дії та протидії векторна сума внутрішніх ударних імпульсів, а також векторна сума їхніх моментів відносно центра O (декартових осей) дорівнюватимуть нулю. Тому запишемо

$$\begin{aligned} \sum \vec{S}_{уд.в.j} &= 0, \\ \sum S_{уд.в.jx} &= 0, \\ \sum S_{уд.в.jy} &= 0; \\ \sum \vec{M}_{jO}(\vec{S}_{уд.в.j}) &= 0, \\ \sum M_{jz}(\vec{S}_{уд.в.j}) &= 0. \end{aligned}$$

У момент удару t центри мас C_i кожного з тіл системи мають дві швидкості \vec{v}_{C_i} і \vec{V}_{C_i} (відповідно до й після удару). Тоді відповідні кількості руху центра мас C плоскої системи тіл за удару

$$m\vec{v}_C = \sum m_k \vec{v}_{C_k}, \quad m\vec{V}_C = \sum m_k \vec{V}_{C_k}. \quad (9.10)$$

Тепер, якщо кутові швидкості тіл після удару в момент часу t становлять Ω_i , то з попереднього можна записати вирази кінетичних моментів (моментів кількостей руху) плоскої системи тіл за удару відносно центра O (декартової осі Oz):

$$\begin{aligned} k_z &= \sum J_{C_i} \omega_i + \sum M_{iz} (m_i \vec{v}_i), \\ K_z &= \sum J_{C_i} \Omega_i + \sum M_{iz} (m_i \vec{V}_i). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Зміни кількості руху центра мас плоскої системи тіл та її кінетичного моменту відносно осі Oz за удару в момент часу t становитимуть

$$\begin{aligned} m\vec{V}_C - m\vec{v}_C &= \sum m_k \vec{V}_{C_k} - \sum m_k \vec{v}_{C_k}; \\ K_z - k_z &= \sum J_{C_k} (\Omega_k - \omega_k) + \sum [M_{kz} (m_k \vec{V}_{C_k}) - M_{kz} (m_k \vec{v}_{C_k})]. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Ці зміни спричиняються головним вектором і головним моментом зовнішніх ударних імпульсів відносно осі Oz . Тому можемо записати

$$\begin{aligned} m\vec{V}_C - m\vec{v}_C &= \sum m_k \vec{V}_{C_k} - \sum m_k \vec{v}_{C_k} = \sum \vec{S}_{\text{уд.з.}i}; \\ K_z - k_z &= \sum J_{C_k} (\Omega_k - \omega_k) + \\ &+ \sum [M_{kz} (m_k \vec{V}_{C_k}) - M_{kz} (m_k \vec{v}_{C_k})] = \sum M_{iz} (\vec{S}_{\text{уд.з.}i}). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Зміна кількості руху центра мас плоскої системи тіл за удару дорівнює векторній сумі зовнішніх ударних імпульсів у припущенні, що в центрі мас системи зосереджена вся її маса. Зміна кінетичного моменту плоскої системи тіл відносно осі Oz , перпендикулярної до спільної площини матеріальної симетрії тіл системи, за удару дорівнює сумі моментів зовнішніх ударних імпульсів відносно цієї самої осі.

Система рівнянь (9.13) не містить внутрішніх ударних імпульсів і в деяких задачах на удар може бути дуже корисною.

• *Удар по тілу, що рухається поступально.* Якщо тіло масою m (рис. 9.6) рухається поступально під дією звичайних сил і в даний момент часу t має швидкість \vec{v}_C , то удар із заданим імпульсом

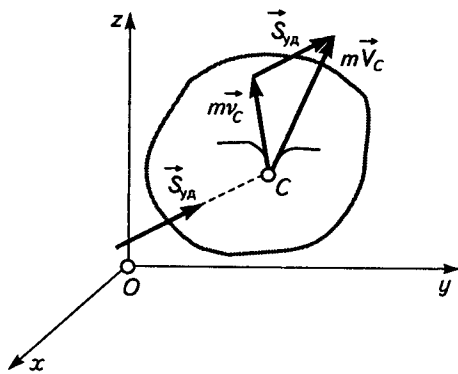


Рис. 9.6

$\vec{S}_{уд}$, лінія дії якого проходить через центр мас C тіла, описується одним векторним рівнянням

$$m\vec{V}_C - m\vec{v}_C = \vec{S}_{уд} \quad (9.14)$$

або в проекціях на декартові осі:

$$\begin{aligned} mV_{Cx} - mv_{Cx} &= S_{удx}, \\ mV_{Cy} - mv_{Cy} &= S_{удy}, \\ mV_{Cz} - mv_{Cz} &= S_{удz}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Векторне рівняння (9.14) і система трьох алгебричних рівнянь (9.15) описують удар по тілу в його поступальному русі.

• *Удар по обертовому тілу.* Нехай тіло масою m обертається під дією звичайних сил навколо вертикальної осі Oz , яка в точці O є для тіла головною віссю інерції, і в даний момент часу t має кутову швидкість ω . Тоді, якщо центр мас C тіла не знаходиться на осі обертання, то його швидкість у момент часу t буде \vec{v}_C . Задамо момент інерції тіла J_z відносно осі обертання Oz . Далі подіємо на обертове тіло в момент часу t ударним імпульсом $\vec{S}_{уд}$ із довільним напрямком. Унаслідок цього швидкість \vec{v}_C центра мас C тіла зміниться на \vec{V}_C , а кутова швидкість ω — на Ω . Удар по тілу спричинить у підшипниках O, A його осі обертання ударні реактивні імпульси $\vec{S}_{уд,рO}, \vec{S}_{уд,рA}$ (рис. 9.7).

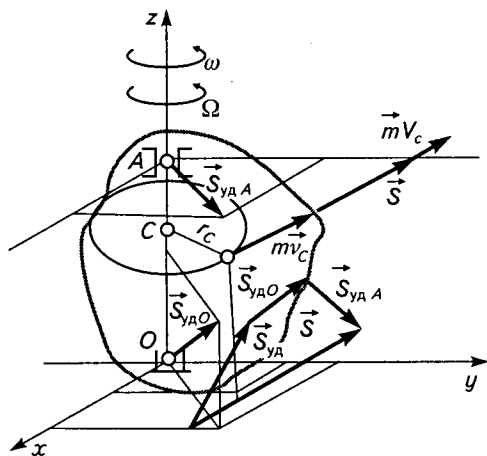


Рис. 9.7

У нашому випадкові удар по обертовому тілу описуватиметься такими рівняннями:

$$\begin{aligned} mV_{Cx} - mv_{Cx} &= S_{удx} + S_{уд,рOx} + S_{уд,рAx}, \\ mV_{Cy} - mv_{Cy} &= S_{удy} + S_{уд,рOy} + S_{уд,рAy}; \\ 0 &= -S_{уд,рAy}AO + M_x(\vec{S}_{уд}), \\ 0 &= S_{уд,рAx}AO + M_y(\vec{S}_{уд}); \\ J_z(\Omega - \omega) &= M_z(\vec{S}_{уд}). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Зазначимо, що вектори швидкостей \vec{V}_C, \vec{v}_C напрямлені по спільній прямій, перпендикулярній до радіуса кола r_C , по якому рухається центр мас C тіла. Модулі цих швидкостей $V_C = \Omega r_C, v_C = \omega r_C$, а їхні алгебричні значення (проекції на осі Ox, Oy)

$$\begin{aligned} V_{Cx} &= -\Omega y_C, & v_{Cx} &= -\omega y_C, \\ V_{Cy} &= \Omega x_C, & v_{Cy} &= \omega x_C. \end{aligned}$$

З урахуванням цих величин система алгебричних рівнянь (9.16), що описує удар по обертовому тілу, набирає такого вигляду:

$$\begin{aligned} m y_C (\omega - \Omega) &= S_{\text{уд } x} + S_{\text{уд } p \text{ } Ox} + S_{\text{уд } p \text{ } Ax}, \\ m x_C (\Omega - \omega) &= S_{\text{уд } y} + S_{\text{уд } p \text{ } Oy} + S_{\text{уд } p \text{ } Ay}; \\ S_{\text{уд } p \text{ } Oz} &= 0; \\ 0 &= -S_{\text{уд } p \text{ } Ay} AO + M_x (\vec{S}_{\text{уд}}), \\ 0 &= S_{\text{уд } p \text{ } Ax} AO + M_x (\vec{S}_{\text{уд}}); \\ J_z (\Omega - \omega) &= M_z (\vec{S}_{\text{уд}}). \end{aligned} \tag{9.17}$$

Це система алгебричних рівнянь, які описують удар по обертовому тілу, вісь обертання якого для однієї його точки закріплення — точки O (центра опорного підшипника) є головною віссю інерції тіла. Згадаймо з попереднього, що головною віссю інерції тіла в даній його точці називається одна з трьох декартових осей, наприклад Oz , і два відцентрових моменти інерції $J_{xz} = \sum m_k x_k z_k, J_{yz} = \sum m_k y_k z_k$, у виразах яких містяться координати частинок тіла по даній осі — в нашому випадкові осі Oz (цією координатою є апліката z_k), дорівнюють нулю.

Зазначимо, що рівняння відповідають умовам, коли вісь обертання тіла закріплено за допомогою опорного підшипника в точці O й циліндричного — в точці A (рис. 9.7). У разі відсутності тертя в підшипниках O і A складові $S_{\text{уд } Oz} = S_{\text{уд } Az} = 0$.

• *Центр удару.* На підставі рівнянь (9.17) з'ясуємо, як до обертового тіла прикласти ударний імпульс $\vec{S}_{\text{уд}}$, щоб ударні реактивні імпульси $\vec{S}_{\text{уд } p \text{ } O}, \vec{S}_{\text{уд } p \text{ } A}$ у підшипниках O і A осі обертання не виникали. Спочатку виберемо декартові осі так, щоб центр мас C тіла знаходився в площині Oxy . Позначимо ординату центра мас C через y_C . Абсциса $x_C = 0$. Попередня умова про те, що для точки O тіла вісь Oz , яка напрямлена по нерухомій осі обертання OA , є головною віссю інерції тіла, виконується.

Припустимо, що удар по обертовому тілу здійснюється так, що в підшипниках реактивні ударні імпульси не виникають, тобто $\bar{S}_{\text{уд.р}O} = \bar{S}_{\text{уд.р}A} = 0$. Урахування цієї умови й того, що центр мас C тіла в момент удару знаходиться в площині Oxy , спрощує рівняння (9.17) до вигляду

$$\begin{aligned} m_{yC}(\omega - \Omega) &= S_{\text{уд}x}, \\ 0 &= S_{\text{уд}y}; \\ 0 &= M_x(\bar{S}_{\text{уд}}), \\ 0 &= M_y(\bar{S}_{\text{уд}}); \\ J_z(\Omega - \omega) &= M_z(\bar{S}_{\text{уд}}). \end{aligned}$$

Друге, третє й четверте рівняння показують, що ударний імпульс $\bar{S}_{\text{уд}}$, який надалі позначатимемо через \bar{S} , за відсутності в підшипниках осі ударних реакцій має діяти на обертове тіло в площині Oxy перпендикулярно до площини Oyz .

Для подальшого аналізу залишається система двох рівнянь

$$\begin{aligned} m_{yC}(\omega - \Omega) &= S; \\ J_z(\Omega - \omega) &= M_z(\bar{S}). \end{aligned} \tag{9.18}$$

Якщо ординату точки тіла, в якій прикладено імпульс \bar{S} , позначимо через $y = l$, то в другому з рівнянь (9.18) модуль моменту ударного імпульсу \bar{S} відносно осі обертання Oz становитиме

$$|M_z(\bar{S})| = lS.$$

Вважатимемо, що кутова швидкість ω тіла до удару напрямлена проти годинникової стрілки, якщо на площину Oxy дивитися паралельно осі обертання, й ударний імпульс \bar{S} напрямлений у бік додатних значень осі абсцис. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} -m_{yC}(\Omega - \omega) &= S; \\ J_z(\Omega - \omega) &= -lS. \end{aligned}$$

Виключивши з цих рівнянь ударний імпульс S , дістанемо

$$l = \frac{J_z}{m_{yC}}. \tag{9.19}$$

Дана формула показує, в якій точці обертового тіла має бути прикладений ударний імпульс, щоб у підшипниках осі не виникали ударні реактивні імпульси. Ця точка називається *центром удару*.

Сформулюємо умови відсутності реактивних ударних імпульсів за удару по обертовому тілу (див. рис. 9.9).

1. Ударний імпульс має бути прикладений до тіла в площині, перпендикулярній до осі обертання.
2. Площина, в якій ударний імпульс діє на обертове тіло, має перетинати його вісь обертання в точці, для якої вісь обертання є головною віссю інерції тіла.
3. Ударний імпульс як прикладений у центрі удару, положення якого визначається за формулою (9.19), має діяти перпендикулярно до площини, в котрій знаходиться центр мас тіла.
4. Центр удару й центр мас тіла мають знаходитися по один бік від осі обертання тіла.

У формулі (9.19) за теоремою про моменти інерції відносно паралельних осей виразимо осьовий момент інерції сумою:

$$J_z = J_C + m y_C^2.$$

Далі, позначивши радіус інерції тіла відносно центра мас C через ρ_i , подамо центральний момент інерції як

$$J_C = m \rho_{iC}^2.$$

Урахувавши цю величину в попередній рівності, формулу (9.19) запишемо у вигляді

$$l = \frac{m \rho_{iC}^2 + m r_C^2}{m y_C}$$

або

$$l = \frac{\rho_{iC}^2}{y_C} + y_C. \quad (9.20)$$

Залежність (9.20) показує: якщо центр мас обертового тіла знаходиться на його осі обертання, то центр удару — на нескінченності. Для з'ясування цього випадку треба замість рівнянь (9.18) розглянути (9.16). У них $V_{Cx} = V_{Cy} = v_{Cx} = v_{Cy} = 0$. Тому ця система рівнянь буде такою:

$$\begin{aligned} 0 &= S_{уд. x} + S_{уд. p. O_x} + S_{уд. p. A_x}, \\ 0 &= S_{уд. y} + S_{уд. p. O_y} + S_{уд. p. A_y}; \\ 0 &= -S_{уд. p. A_y} AO + M_x (\vec{S}_{уд.}), \\ 0 &= S_{уд. p. A_x} AO + M_y (\vec{S}_{уд.}); \\ J_z (\Omega - \omega) &= M_z (\vec{S}_{уд.}). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Звідси робимо висновок, що в разі статичної і динамічної зрівноваженості обертового тіла удар по ньому спричиняє в підшипниках осі ударні реакції.

□ **Фізичний маятник. Центр хитань.** Із центром удару тісно пов'язане поняття центра хитань фізичного маятника. Виявляється, що центр удару й центр хитань обертового тіла мають одну й ту саму фізичну природу. Якщо тіло має горизонтальну вісь обертання й може здійснювати коливання навколо цієї осі лише під дією своєї власної ваги, то це приклад фізичного маятника (рис. 9.8, а).

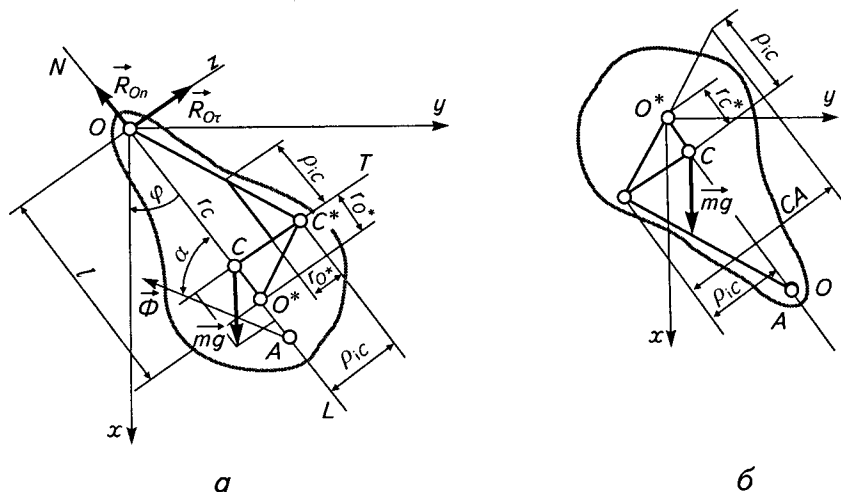


Рис. 9.8

Нехай маса обертового тіла, що розглядається як фізичний маятник, становить m , а його момент інерції відносно осі обертання Oz — J_z . Прийнемо, що тіло має площину матеріальної симетрії, яка перпендикулярна до осі обертання Oz . Отже, ця вісь для тіла в точці O буде головною віссю інерції, так що $J_{xz} = J_{yz} = 0$. У нашій задачі центр мас C не знаходиться на осі обертання й тіло динамічно незрівноважене. У фізичних маятниках їхні осі обертання називають *осями підвісу*.

Вісь Ox системи координат $Oxyz$ спрямуємо вертикально вниз. Якщо вісь Oz напрямлена на читача, то вісь Oy — горизонтально (рис. 9.8, а). Якщо відхилити маятник від вертикалі Ox на кут φ проти годинникової стрілки й залишити на самого себе, то під впливом сили тяжіння маятник намагатиметься повернутись у початкове вертикальне положення. Так розпочнеться його коливальний рух навколо горизонтальної осі.

Проведемо через точку O , яку називають *точкою підвісу* маятника, і центр ваги C вісь OL . На цій осі задамо відстань $OC = r_C$.

Складемо диференціальне рівняння коливань фізичного маятника навколо осі підвісу Oz . На тіло під час його обертання діють сила ваги \vec{mg} і повна реакція підшипників осі \vec{R}_O , яка є рівнодійною однакових реакцій двох підшипників, симетрично розташованих на осі підвісу відносно точки O . На підставі відомого загального диференціального рівняння обертального руху тіла

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_{kz} (\vec{F}_{zk})$$

записуємо диференціальне рівняння коливань фізичного маятника в нашому випадкові:

$$J_z \ddot{\varphi} = -mgr_C \sin \varphi$$

або

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgr_C}{J_z} \sin \varphi.$$

Його можна переписати так:

$$\ddot{\varphi} = -\left(g / \frac{J_z}{mr_C}\right) \sin \varphi.$$

Введемо позначення

$$l = \frac{J_z}{mr_C}. \quad (9.22)$$

Після цього шукане диференціальне рівняння набере остаточного вигляду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (9.23)$$

Це диференціальне рівняння коливань фізичного маятника. Воно дає змогу визначити закон зміни кута повороту φ тіла та його кутової швидкості $\dot{\varphi}$ від часу або від кута повороту. Тут l має розмірність довжини, яку називають зведеною довжиною фізичного маятника. Відкладемо її вздовж осі OL , що проходить через центр ваги S тіла. Ввівши позначення O^* , запишемо $OO^* = l$. Точку O^* називають *центром хитань* фізичного маятника. Як бачимо, він збігається з центром удару обертального тіла, що є цим фізичним маятником.

Дослідимо докладніше природу центра хитань (центра удару) фізичного маятника. Перейдемо від формули (9.22) до такого співвідношення:

$$lr_C = \rho_{ic}^2 + r_C^2.$$

Нехай $CO^* = r_c^*$. Тоді попередню рівність можна записати у вигляді

$$(r_c + r_c^*)r_c = \rho_{ic}^2 + r_c^2$$

або

$$\frac{r_c}{\rho_{ic}} = \frac{\rho_{ic}}{r_c^*}. \quad (9.24)$$

Дана пропорція відображує подібність двох прямокутних трикутників COC^* і CC^*O^* зі спільним катетом $CC^* = \rho_{ic}$ — висотою великого прямокутного трикутника C^*OO^* (рис. 9.8, а).

Тепер цей самий фізичний маятник на тій самій осі Oz закріпимо так, щоб центр хитань O^* став на місце точки підвісу O (рис. 9.8, б) зі збереженням перпендикулярності між площиною симетрії тіла та віссю Oz . Тоді замість диференціального рівняння (9.23) матимемо таке:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l^*} \sin \varphi = 0,$$

де

$$l^* = \frac{J_z^*}{mr_c^*}.$$

За теоремою про моменти інерції тіла відносно паралельних осей можемо записати

$$l^* = \frac{\rho_{ic}^2}{r_c^*} + r_c^*$$

або, прийнявши, що $r_c^* + CA = l^*$, де A — новий центр хитань (центр удару),

$$CAr_c^* = \rho_{ic}^2,$$

звідки

$$\frac{r_c^*}{\rho_{ic}} = \frac{\rho_{ic}}{CA}. \quad (9.25)$$

Порівнявши (9.24) і (9.25), бачимо, що точки O і A збігаються. Це означає, що попередня точка підвісу стала новим центром хитань фізичного маятника, й за його коливань закон зміни кута повороту від часу буде таким самим, як і в попередньому випадкові, коли точкою підвісу була O . Кажуть, що центр хитань і точка підвісу фізичного маятника взаємозамінні.

□ **Реакції в точці підвісу фізичного маятника.** Для встановлення поняття зведеної довжини фізичного маятника фактично було використано теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно осі обертання, в яку не увійшли реакції підшипників осі. Для визначення реакцій осі скористаємося теоремою про зміну кількості руху механічної системи в проекціях на дотичну вісь CT і головну нормаль CN до траєкторії центра мас C (рис. 9.8, a).

Маємо два таких скалярних рівняння:

$$ma_{Ct} = R_{Ot} - mg \sin \varphi,$$

$$ma_{Cn} = R_{On} - mg \cos \varphi.$$

Тут

$$a_{Ct} = \ddot{\varphi} r_C,$$

$$a_{Cn} = \dot{\varphi}^2 r_C.$$

Підставивши, матимемо

$$m\ddot{\varphi} r_C = R_{Ot} - mg \sin \varphi,$$

$$m\dot{\varphi}^2 r_C = R_{On} - mg \cos \varphi,$$

звідки

$$R_{Ot} = mg \sin \varphi + m\ddot{\varphi} r_C,$$

$$R_{On} = mg \cos \varphi + m\dot{\varphi}^2 r_C.$$

Тепер виразимо кінематичні величини $\ddot{\varphi}$, $\dot{\varphi}^2$ через кут відхилення φ маятника. Вважатимемо, що кутова швидкість $\dot{\varphi}$ маятника залежить від його кута повороту. Тоді можна записати

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \right).$$

Підставимо кутове прискорення $\ddot{\varphi}$ у диференціальне рівняння обертального руху й зробимо викладки:

$$J_z \ddot{\varphi} = -mgr_C \sin \varphi,$$

$$J_z \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \right) = -mgr_C \sin \varphi,$$

$$d \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \right) = -\frac{mgr_C}{J_z} \sin \varphi d\varphi.$$

Щоб зінтегрувати останню диференціальну рівність, задамо межі зміни величин φ і $\dot{\varphi}$: при $t = t_0$ $\varphi = \dot{\varphi}_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, а в поточний момент часу t — φ , $\dot{\varphi}$. Після інтегрування дістаємо

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 + \frac{m g r_C}{J_z} (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Тоді шукані реакції становитимуть

$$R_{O\alpha} = mg \sin \varphi - \frac{m g r_C^2}{J_z} \sin \varphi = \left(1 - \frac{r_C^2}{J_z}\right) mg \sin \varphi, \quad (9.26)$$

$$R_{On} = mg \cos \varphi + m \dot{\varphi}^2 r_C = m \left\{ g \cos \varphi + r_C \left[\dot{\varphi}_0^2 + \frac{g}{J_z} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right] \right\}.$$

Якщо тепер фізичний маятник підвісити в центрі хитань O^* , то дотична й нормальна складові його повної реакції \bar{R}_O за коливань будуть відповідно такі:

$$R_{O\alpha} = \left(1 - \frac{r_C^2}{J_z}\right) mg \sin \varphi, \quad (9.27)$$

$$R_{On} = m \left\{ g \cos \varphi + r_C \left[\dot{\varphi}_0^2 + \frac{r_C}{J_z} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right] \right\}.$$

Порівнюючи (9.26) і (9.27), доходимо висновку, що в першому й другому випадках підвішування фізичного маятника реакції в підшипниках його осі за модулем відрізняються, бо неоднакові відстані центра ваги маятника від його осі обертання.

□ Застосування формули зведеної довжини фізичного маятника для експериментального визначення моменту інерції тіла відносно заданої осі. Беруть фізичний маятник, для якого потрібно визначити момент інерції відносно осі підвісу. Порівнюють його рух із рухом відповідного математичного маятника — важкого тіла невеликих розмірів, наприклад кульки, підвішеної до нерозтягнутої невагомої нитки, довжину якої можна змінювати. Ідея експерименту така. Приводять у коливальний рух фізичний маятник, момент інерції якого потрібно знайти, й водночас — математичний маятник. Неперервно змінюючи довжину його нитки, добиваються синхронності в рухах обох маятників, тобто того механічного стану, за якого обидва маятники водночас досягають максимального відхилення в один та інший бік, а також положення рівноваги, рухаючися в одному й тому самому напрямі.

Після досягнення синхронності в коливальних рухах маятників вимірюють довжину l математичного маятника — це буде зведена довжина фізичного маятника, й за формулою (9.22) визначають момент інерції фізичного маятника відносно осі підвісу:

$$J_z = mr_c l. \quad (9.28)$$

Масу m визначають зважуванням, r_c — вимірюванням.

Значимо, що для математичного маятника, довжина якого дорівнює зведеній довжині фізичного маятника, диференціальне рівняння коливань має вигляд (9.23). Воно описує періодичний коливальний рух, період і частота якого для математичного й фізичного маятників однакові. Проте реакції в точках підвісу фізичного й математичного маятників різні. Справді, звернемося до формул (9.26). Для математичного маятника, очевидно, $r_c = l$. Тому дістаємо

$$R_{Ox} = 0,$$

$$R_{On} = m \left\{ g \cos \varphi + l \left[\dot{\varphi}_0^2 + \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right] \right\}.$$

Особливість силового впливу математичного маятника під час його коливань на точку підвісу полягає в тому, що через гнучку невагому нитку сили передаються лише в напрямі осі нитки.

□ **Центр хитань (центр удару) фізичного маятника як точка прикладання рівнодійної всіх зовнішніх сил, що спричинюють його коливання.** Як уже зазначалося, на фізичний маятник під час його коливань, крім сили ваги \vec{mg} , прикладеної в центрі мас C , діють дві прямокутні складові \vec{R}_{Ox} , \vec{R}_{On} повної реакції \vec{R}_O , яка прикладена до маятника в точці його підвісу O . Ці дві сили визначаються за формулами (9.26). Сума моментів повної реакції в точці підвісу й сили ваги фізичного маятника відносно точки його підвісу, що дорівнює моменту сили ваги відносно цієї точки, зумовлює кутове прискорення тіла.

Тепер поставимо задачу знайти модуль і точку (A) прикладання рівнодійної \vec{F} сил, що діють на тіло (фізичний маятник), яка спричиняє такий самий за характером коливальний рух, що й зазначені вище дві сили.

Застосуємо загальні теореми динаміки плоскої системи тіл зі спільною площиною матеріальної симетрії до коливань фізичного маятника під дією рівнодійної \vec{F} , прикладеної в точці A на осі OL (рис. 9.8, a). Позначивши кут, який утворює шукана рівнодійна \vec{F} із нормаллю CN до кола, що його описує центр ваги тіла під час його коливань, через α , матимемо такі рівняння:

$$J_z \ddot{\varphi} = -\Phi OA \sin \alpha;$$

$$mr_C \ddot{\varphi} = -\Phi \sin \alpha,$$

$$mr_C \dot{\varphi}^2 = \Phi \cos \alpha.$$

Із перших двох рівнянь дістаємо

$$OA = \frac{J_z}{mr_C} = OO^* = l.$$

Поділивши друге рівняння на третє, матимемо

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2}.$$

Тут кут α між силою $\bar{\Phi}$ та віссю CN відкладається від цієї осі проти годинникової стрілки, якщо $\ddot{\varphi} < 0$, і за годинниковою стрілкою при $\ddot{\varphi} > 0$.

Дві останні рівності є розв'язком поставленої задачі. Точка A , в якій прикладена рівнодійна сил, що діють на фізичний маятник, збігається з його центром хитань O^* , а напрям цієї рівнодійної збігається з напрямом повного прискорення \bar{a}_C центра ваги тіла.

За теоремою про рух центра мас механічної системи для фізичного маятника маємо

$$m\bar{a}_C = \bar{\Phi}.$$

Тут $\bar{\Phi}$, як відомо, — рівнодійна сили притягання тіла Землею та реакції точки підвісу O , що діють на фізичний маятник із боку зовнішніх відносно нього тіл.

Згідно із законом рівності дії та протидії коливний маятник реагує на дію зовнішніх сил інерційною силою, яка є рівнодійною елементарних інерційних сил частинок фізичного маятника. Ця результуюча (сумарна) інерційна сила прикладена в центрі хитань і має той самий модуль, що й сила $\bar{\Phi}$, але напрямлена протилежно їй.

Позначивши рівнодійну інерційну силу фізичного маятника через $\bar{\Phi}_i$, можемо записати

$$\bar{\Phi}_i = -m\bar{a}_C. \quad (9.29)$$

Якщо взяти до уваги, що

$$m\bar{a}_C = \bar{G} + \bar{R}_O,$$

то сила

$$\bar{R}_{\text{втр}} = -\bar{R}_O = \bar{G} - m\bar{a}_C = \bar{G} + \bar{\Phi}_i$$

називається втраченою — силою тиску обертового тіла на опори його осі.

Як бачимо, втрачена сила має дві складові — активну та інерційну сили. Якщо маятник не коливається, то втрачена сила дорівнює вазі маятника, з якою він у стані рівноваги тисне на опори осі. За відсутності активної сили, але наявності прискореного руху тіла втрачена сила є динамічним тиском на в'язі, зумовленим інерційною силою.

Розв'язуючи задачу про коливання фізичного маятника в аспекті визначення кінематичних параметрів його руху, таких як період коливань або їхня частота, фізичний маятник можна розглядати як математичний зі зведеною довжиною [див. формулу (9.22)].

Те, що центр удару, центр хитань і точка прикладання рівнодійної сил, які діють на фізичний маятник, — це одна й та сама точка тіла, пояснюється векторним рівнянням (9.29): рівнодійна інерційних сил частинок тіла визначається як добуток маси тіла на вектор прискорення його центра мас, а точка прикладання цієї рівнодійної знаходиться в центрі хитань.

Візьмемо плоске тіло з горизонтальною площиною матеріальної симетрії, яке може обертатися навколо вертикальної осі Oz . Нехай центр ваги тіла не знаходиться на осі обертання (рис. 9.9). Оскільки власна вага тіла паралельна осі обертання, то вона не впливатиме на рух у горизонтальній площині. Визначимо, в якій точці на горизонтальній прямій, що проходить через вісь обертання й центр ваги тіла, треба прикласти перпендикулярно до неї силу $\vec{\Phi}$, щоб складова реакції опор осі, паралельна цій силі, не виникала.

Рівняння руху в даному випадкові матимуть такий вигляд:

$$J_z \ddot{\varphi} = \Phi OA + R_{Oz} OA;$$

$$mr_c \ddot{\varphi} = \Phi + R_{Oz},$$

$$mr_c \dot{\varphi}^2 = R_{Oz}.$$

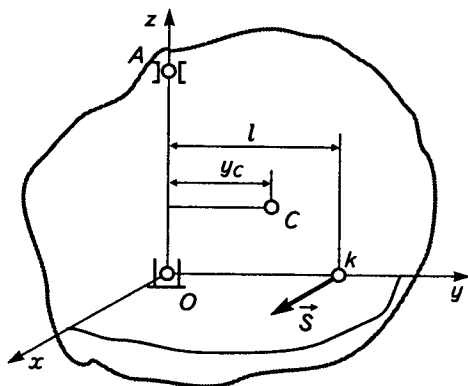


Рис. 9.9

Із перших двох рівнянь дістаємо

$$J_z - mr_C OA = 0.$$

Бачимо, що точка прикладання цієї сили знаходиться в центрі хитань.

Тепер замість звичайної сили подіємо на наше тіло ударним імпульсом \vec{S} у тому самому напрямі й у тій самій точці A , в якій прикладалася сила \vec{F} . Запишемо

$$m(V - v) = F_{уд} \tau;$$

$$J_z (\Omega - \omega) = F_{уд} \tau OA$$

або

$$m \frac{V - v}{\tau} = F_{уд} + R_{уд} \alpha \tau,$$

$$m a_{уд} \tau = F_{уд} + R_{уд} \alpha \tau;$$

$$J_z \frac{\Omega - \omega}{\tau} = F_{уд} OA,$$

$$J_z \varepsilon_{уд} = F_{уд} OA.$$

Маємо таку систему двох рівнянь:

$$m \varepsilon_{уд} r_C = F_{уд} + R_{уд} \alpha \tau;$$

$$J_z \varepsilon_{уд} = F_{уд} OA.$$

Помножимо перше рівняння на OA , після чого, віднявши від результату друге рівняння, дістанемо співвідношення

$$m \varepsilon_{уд} r_C OA - J_z \varepsilon_{уд} = F_{уд} OA + R_{уд} \alpha \tau OA - F_{уд} OA,$$

$$\varepsilon_{уд} (mr_C OA - J_z) = R_{уд} \alpha \tau OA.$$

Остання рівність показує, що ударний імпульс не передається на вісь обертання, якщо точка його прикладання збігатиметься з центром хитань O^* фізичного маятника. Це стосується дотичної складової реактивного ударного імпульсу. Нормальна складова $R_{уд} \alpha \tau$ ударного імпульсу також дорівнює нулю, оскільки нульовим є ударне доцентрове прискорення центра мас: напрям швидкості центра мас за удару не змінюється.

● *Удар по тілу, що рухається плоскопаралельно.* Розглянемо тіло з площиною матеріальної симетрії, що здійснює плоскопаралельний рух паралельно нерухомій основній площині Oxy (рис. 9.10). Задамо масу тіла m , його момент інерції J_{Cz} відносно перпендикулярної до площини матеріальної симетрії осі Cz (поступально рухомої), що про-

ходить через центр C тіла. У момент часу t маємо швидкість центра мас тіла \vec{v}_C і кутову швидкість ω обертання тіла навколо його центра мас.

Тепер припустимо, що в момент часу t тіло в плоскопаралельному русі зазнає удару із заданим імпульсом $\vec{S}_{уд}$, розташованим у площині матеріальної симетрії Ox , що стрибкоподібно змінює швидкість його центра мас від \vec{v}_C до \vec{V}_C , а також кутову швидкість від ω до Ω . Як відомо, ударний імпульс дорівнює зміні кількості руху центра мас у припущенні, що в цьому центрі зосереджена вся маса тіла, а момент ударного імпульсу відносно поступально рухомої осі $C\zeta$, яка проходить через центр мас тіла перпендикулярно до його площини матеріальної симетрії Ox , дорівнює зміні кінетичного моменту тіла відносно цієї самої осі. Тому можемо записати

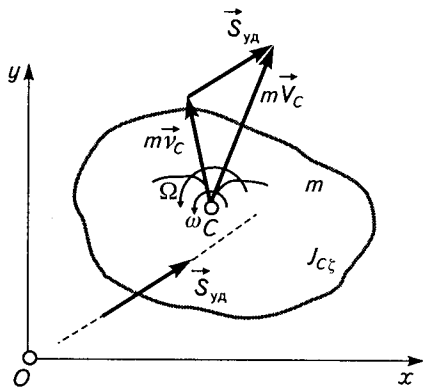


Рис. 9.10

$$\begin{aligned} m\vec{V}_C - m\vec{v}_C &= \vec{S}_{уд}; \\ J_{C\zeta}(\Omega - \omega) &= M_{C\zeta}(\vec{S}_{уд}). \end{aligned} \quad (9.30)$$

Перша рівність виражає теорему про зміну кількості руху механічної системи в застосуванні до удару по тілу в плоскопаралельному русі у векторній формі, друга — теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно поступально рухомої декартової системи координат із початком у центрі мас механічної системи стосовно плоскопаралельного руху тіла, що має площину матеріальної симетрії і рухається паралельно їй.

Якщо початок O системи осей Ox сумістити з центром мас C тіла (осі Ox , Oy розташовані в площині матеріальної симетрії тіла) і взяти проєкції векторного рівняння системи (9.30) на ці осі, то від (9.30) перейдемо до таких трьох алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} mV_{Cx} - mv_{Cx} &= S_{уд\ x}, \\ mV_{Cy} - mv_{Cy} &= S_{уд\ y}; \\ J_{Cz}(\Omega - \omega) &= M_{Cz}(\vec{S}_{уд}). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Дана система рівнянь описує удар по тілу в плоскопаралельному русі.

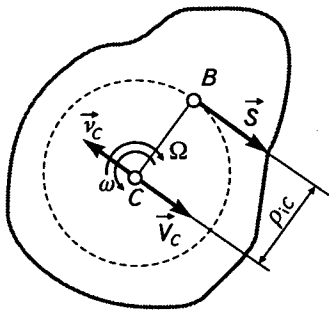


Рис. 9.11

• Удар по тілу в плоскопаралельному русі, що спричиняє його зупинку. На підставі рівнянь (9.31) з'ясуємо, в якій точці тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, треба завдати удар, аби зупинити його. Нехай тіло має площину матеріальної симетрії і здійснює свій рух паралельно цій площині зі швидкістю центра мас \vec{v}_C та кутовою швидкістю обертання навколо центра мас ω (рис. 9.11).

Позначимо шукану точку, в якій до тіла треба прикласти ударний імпульс $\vec{S}_{\text{уд}} = \vec{S}$, щоб воно зупинилося, через B . Нехай швидкості центра мас тіла до й після удару відповідно становлять \vec{v}_C і \vec{V}_C . Тоді за теоремою про швидкість будь-якої точки тіла в плоскопаралельному русі можна записати два таких векторних рівняння:

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_C + \vec{v}_{CB}, \\ \vec{V}_B &= \vec{V}_C + \vec{V}_{CB}.\end{aligned}$$

Тепер введемо одиничний вектор $\vec{\tau}_{\perp BC}$, перпендикулярний до BC і напрямлений у бік кутової швидкості ω , і від другого рівняння віднімемо перше. Дістаємо

$$\vec{V}_B - \vec{v}_B = \vec{V}_C - \vec{v}_C + (\Omega - \omega)CB\vec{\tau}_{\perp BC}.$$

Якщо $\vec{V}_B - \vec{v}_B = 0$, то при зупиненій точці B тіла ударом по ньому останнє рівняння набере вигляду

$$\vec{V}_C - \vec{v}_C = -(\Omega - \omega)CB\vec{\tau}_{\perp BC}.$$

Підставивши цей вираз у рівняння (9.30), матимемо систему

$$\begin{aligned}-m[(\Omega - \omega)CB\vec{\tau}_{\perp BC}] &= \vec{S}_{\text{уд}}; \\ J_{C\zeta}(\Omega - \omega) &= M_{C\zeta}(\vec{S}_{\text{уд}}).\end{aligned}$$

Перше рівняння показує, що ударний імпульс $\vec{S}_{\text{уд}} = \vec{S}$ має діяти перпендикулярно до відрізка BC і бути протилежно напрямленим до одиничного вектора $\vec{\tau}_{\perp BC}$. За цієї умови визначимо момент ударного імпульсу в правій частині другого рівняння:

$$M_{C\zeta}(\vec{S}_{\text{уд}}) = -S BC.$$

Скалярно помноживши перше рівняння на одиничний вектор $\vec{\tau}_{\perp BC}$, з урахуванням моменту ударного імпульсу дістанемо

$$-m[(\Omega - \omega)CB\bar{\tau}_{\perp BC}\bar{\tau}_{\perp BC}] = \bar{S}_{\text{уд}}\bar{\tau}_{\perp BC};$$

$$J_{C\alpha}(\Omega - \omega) = -SBC,$$

звідки випливає таке співвідношення:

$$\frac{mCB^2}{J_{C\alpha}} = 1$$

або

$$CB = \sqrt{J_{C\alpha}/m}.$$

Ця відстань дорівнює радіусу інерції тіла ρ_{iC} відносно його центра мас.

Робимо висновок: *щоб тіло в плоскопаралельному русі зупинити ударом, треба його здійснити так, щоб ударний імпульс був прикладений до тіла на відстані від центра мас, що дорівнює радіусу інерції тіла, перпендикулярно до відрізка BC, і давав момент відносно центра мас у напрямі, протилежному кутовій швидкості обертання тіла навколо центра мас до удару.*

Якщо навколо центра мас C тіла описати коло радіусом $\rho_{iC} = CB$, то дістанемо геометричне місце тих точок у площині матеріальної симетрії, в яких треба прикласти ударний імпульс, перпендикулярний до радіуса кола, щоб тіло, перебуваючи в плоскопаралельному русі, зупинилося. Такий зміст поняття радіуса інерції тіла.

Імпульс, який треба прикласти в зазначених точках за зазначених умов, обчислюється з останнього рівняння системи (9.17):

$$S = 2m\omega\rho_{iC}.$$

Зауважимо: удар, що здійснюється по тілу в даний момент часу, згідно з елементарною теорією удару — це миттєва нескінченно велика за інтенсивністю силова дія на тіло. Внаслідок удару стрибкоподібно, але скінченно змінюються набуті за період дії звичайних сил, починаючи від початкового моменту t_0 до моменту здійснення удару t , швидкості точок тіла та його кутова швидкість.

Хоча в момент t унаслідок удару кінематичний стан тіла різко змінюється — виникають нескінченно великі лінійні та кутові прискорення, а також зумовлені цими прискореннями скінченні зміни лінійних і кутових швидкостей — положення тіла в цілому, а отже, і його просторові параметри, що визначають це положення, залишаються незмінними — такими, як до удару.

Координати точок тіла та інші пов'язані з ними просторові параметри в момент удару не залежать від часу, тобто в момент удару в

даному положенні тіла для його точок є два поля швидкостей: 1) яке мають точки тіла під час його руху під дією звичайних сил до здійснення удару; 2) яке виникає миттєво внаслідок удару.

9.2

Удар двох плоских тіл у спільній площині матеріальної симетрії

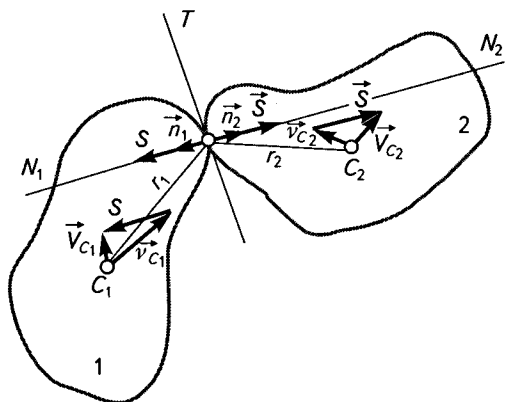
Вважатимемо, що плоскі тіла мають площини матеріальної симетрії, котрі розташовані у спільній нерухомій площині, паралельно якій відбувається рух тіл до й після удару. Для плоских тіл характерне те, що за удару дотичні до поверхонь площини в точках контакту тіл, які взаємодіють, перпендикулярні до їхньої спільної площини матеріальної симетрії, паралельно якій відбувається плоскопаралельний рух. Отже, нормалі до поверхонь тіл у точці контакту під час їх удару знаходяться в площині, в якій рухаються центри мас тіл.

Прикладом двох плоских тіл можуть бути дві однорідні кулі, котрі рухаються паралельно нерухомій площині, в якій знаходяться їхні центри мас; зрозуміло, що при цьому обертання куль можуть відбуватися лише навколо осей, перпендикулярних до спільної площини матеріальної симетрії. Інший приклад — тіла з бічними циліндричними поверхнями, твірні яких перпендикулярні до спільної площини матеріальної симетрії, в котрій рухаються центри мас тіл.

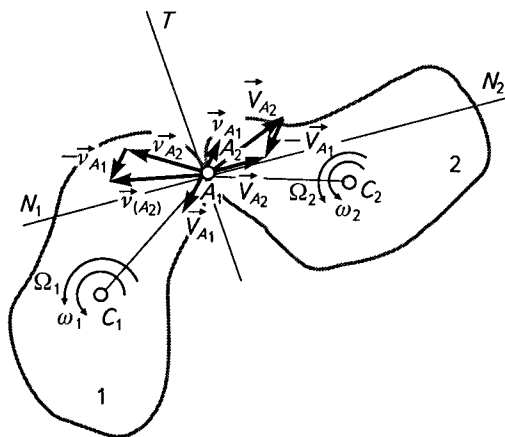
□ **Загальні рівняння удару двох плоских тіл.** На підставі рівнянь (9.13) і (9.30) визначимо швидкості центрів мас плоских тіл та їхні кутові швидкості обертання навколо центрів мас за удару. Розглядається удар плоских тіл у загальному випадкові, коли нормалі до поверхонь тіл у точці удару лежать в їхній спільній площині матеріальної симетрії і не проходять через центри мас тіл (рис. 9.12, *a*).

Нехай тіла 1 і 2 мають маси m_1 , m_2 відповідно й до удару рухаються плоскопаралельно. Позначимо швидкості центрів мас C_1 , C_2 тіл у поступальній складовій плоскопаралельного руху до удару через \vec{v}_{C_1} , \vec{v}_{C_2} відповідно, а швидкості точок A_1 , A_2 , якими тіла співударяються в місці контакту A , через \vec{v}_{A_1} , \vec{v}_{A_2} . Кутові швидкості тіл в обертальній складовій загального плоскопаралельного руху до удару будуть ω_1 , ω_2 .

Ми знаємо, що удар здійснюється миттєво в момент часу t , в який для точок тіл, які співударяються, розглядається два поля швидкостей: до й після удару. В цей самий момент часу внаслідок



a



б

Рис. 9.12

удару зазначені точки мають швидкості $\vec{V}_{C_1}, \vec{V}_{C_2}, \vec{V}_{A_1}, \vec{V}_{A_2}$, а для тіла — кутові швидкості Ω_1, Ω_2 (рис. 9.12, б). Задамо також моменти інерції тіл J_{C_1}, J_{C_2} відносно центральних осей $C_1 z_1, C_2 z_2$, перпендикулярних до площин матеріальної симетрії тіл.

Згідно з елементарною теорією удару в нашому випадкові удару плоских тіл можемо записати

$$\begin{aligned} V_{A_2 n_2(A_1)} &= -k v_{A_2 n_2(A_1)}, \\ (\vec{V}_{A_2} - \vec{V}_{A_1}) \vec{n}_2 &= -k (\vec{v}_{A_2} - \vec{v}_{A_1}) \vec{n}_2. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Тут $V_{A_2 n_2(A_1)}$, $v_{A_2 n_2(A_1)}$ — проєкції швидкості точки A_2 тіла 2 відносно точки A_1 тіла 1 на нормаль AN_2 до поверхні тіла 2 до й після удару. Зрозуміло, що справджується умова

$$|V_{A_2 n_2(A_1)}| < |v_{A_2 n_2(A_1)}|,$$

інакше не буде удару, причому

$$V_{A_2 n_2(A_1)} = -v_{A_2 n_2(A_1)}.$$

Виразимо в рівнянні (9.32) швидкості точок A_1 , A_2 контакту поверхонь тіл 1 і 2, що співударяються, через швидкості їхніх центрів мас і кутові швидкості обертання навколо центра мас згідно з теоремою кінематики плоскопаралельного руху. Якщо швидкості центрів мас C_1 , C_2 тіл 1 і 2 до й після удару позначити через \bar{v}_{C_1} , \bar{v}_{C_2} ; \bar{V}_{C_1} , \bar{V}_{C_2} відповідно, а кутові швидкості — через ω_1 , ω_2 ; Ω_1 , Ω_2 , то замість (9.32) матимемо

$$\begin{aligned} (\bar{V}_{C_2} + k\bar{v}_{C_2})\bar{n}_2 + (\bar{V}_{C_1} + k\bar{v}_{C_1})\bar{n}_1 + (\Omega_2 + k\omega_2)r_2\bar{l}_2 \cdot \bar{n}_2 + \\ + (\Omega_1 + k\omega_1)r_1\bar{l}_1 \cdot \bar{n}_1 = 0. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Тут \bar{l}_1 , \bar{l}_2 — одиничні вектори, перпендикулярні до радіусів-векторів \bar{r}_1 , \bar{r}_2 і напрямлені в бік кутових швидкостей тіл 1 і 2 до й після удару.

Очевидно, що скалярні добутки $r_1\bar{l}_1 \cdot \bar{n}_1$, $r_2\bar{l}_2 \cdot \bar{n}_2$ — не що інше, як моменти векторів \bar{n}_1 і \bar{n}_2 відносно центрів мас C_1 і C_2 тіл 1 і 2 відповідно. Тому можна записати

$$\begin{aligned} r_1\bar{l}_1 \cdot \bar{n}_1 &= M_{C_1}(\bar{n}_1), \\ r_2\bar{l}_2 \cdot \bar{n}_2 &= M_{C_2}(\bar{n}_2). \end{aligned} \quad (9.34)$$

Підставивши (9.34) в (9.33), дістанемо

$$\begin{aligned} (\Omega_2 + k\omega_2)M_{C_2}(\bar{n}_2) + (\Omega_1 + k\omega_1)M_{C_1}(\bar{n}_1) = \\ = -[(\bar{V}_{C_2} + k\bar{v}_{C_2})\bar{n}_2 + (\bar{V}_{C_1} + k\bar{v}_{C_1})\bar{n}_1]. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Дане скалярне рівняння виражає гіпотезу Ньютона про порівняну зміну в напрямі нормалей до поверхонь в точці їх контакту відносних швидкості центрів мас тіл до й після удару. Це додаткове рівняння кінематичного характеру, що замикає систему рівнянь динаміки елементарної теорії удару двох плоских тіл зі спільною площиною матеріальної симетрії (9.13).

Щоб дістати динамічні рівняння в нашому випадковій удару, застосуємо загальні рівняння (9.13) окремо для кожного з тіл, які співударяються.

Врахувавши, що ударні імпульси при співударянні тіл 1 і 2 задовольняють умову $\vec{S}_1 = -\vec{S}_2$ і

$$\vec{S}_1 = S \vec{n}_1, \quad \vec{S}_2 = S \vec{n}_2,$$

можемо записати

$$m_1(\vec{V}_{C_1} - \vec{v}_{C_1}) = S \vec{n}_1,$$

$$m_2(\vec{V}_{C_2} - \vec{v}_{C_2}) = S \vec{n}_2,$$

звідки

$$\vec{V}_{C_1} = \vec{v}_{C_1} + \frac{S}{m_1} \vec{n}_1, \tag{9.36}$$

$$\vec{V}_{C_2} = \vec{v}_{C_2} + \frac{S}{m_2} \vec{n}_2.$$

Друге загальне рівняння системи (9.13) дає

$$\Omega_1 = \omega_1 + \frac{SM_{C_1}(\vec{n}_1)}{J_{C_1}}, \tag{9.37}$$

$$\Omega_2 = \omega_2 + \frac{SM_{C_2}(\vec{n}_2)}{J_{C_2}}.$$

Підставивши (9.36) і (9.37) в (9.35), знайдемо ударний імпульс при співударянні тіл 1 і 2:

$$S = - \frac{(1+k)[\vec{v}_{C_2} \cdot \vec{n}_2 + \vec{v}_{C_1} \cdot \vec{n}_1 + M_{C_2}(\vec{n}_2)\omega_2 + M_{C_1}(\vec{n}_1)\omega_1]}{\frac{M_{C_2}^2(\vec{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\vec{n}_1)}{J_{C_1}} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \tag{9.38}$$

Тут величини J_{C_1} і J_{C_2} — головні центральні моменти інерції тіл 1 і 2 відносно осей z_{C_1} і z_{C_2} , перпендикулярних до спільної площини матеріальної симетрії тіл, що взаємодіють.

Щоб дістати формули лінійних і кутових швидкостей тіл після удару, підставимо величину S за формулою (9.37) у рівності (9.35) і (9.36). Матимемо

$$\vec{V}_{C_1} = \vec{v}_{C_1} - \frac{1+k}{m_1 \left[\frac{M_{C_2}^2(\vec{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\vec{n}_1)}{J_{C_1}} \right] + \frac{m_1 + m_2}{m_2}} (\vec{v}_{C_1} \cdot \vec{n}_1) \vec{n}_1 -$$

$$- \frac{1+k}{m_1 \left[\frac{M_{C_2}^2(\vec{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\vec{n}_1)}{J_{C_1}} \right] + \frac{m_1 + m_2}{m_2}} (\vec{v}_{C_2} \cdot \vec{n}_2) \vec{n}_1 -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1+k}{m_1 \left[\frac{M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\bar{n}_1)}{J_{C_1}} \right] + \frac{m_1+m_2}{m_2}} \times \\
& \quad \times [M_{C_2}(\bar{n}_2)\omega_2 + M_{C_1}(\bar{n}_1)\omega_1] \bar{n}_1, \tag{9.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{C_2} = \bar{v}_{C_2} & - \frac{1+k}{m_2 \left[\frac{M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\bar{n}_1)}{J_{C_1}} \right] + \frac{m_1+m_2}{m_1}} (\bar{v}_{C_2} \cdot \bar{n}_2) \bar{n}_2 - \\
& - \frac{1+k}{m_2 \left[\frac{M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\bar{n}_1)}{J_{C_1}} \right] + \frac{m_1+m_2}{m_1}} (\bar{v}_{C_1} \cdot \bar{n}_1) \bar{n}_2 - \\
& - \frac{1+k}{m_2 \left[\frac{M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\bar{n}_1)}{J_{C_1}} \right] + \frac{m_1+m_2}{m_1}} \times \\
& \quad \times [M_{C_2}(\bar{n}_2)\omega_2 + M_{C_1}(\bar{n}_1)\omega_1] \bar{n}_2; \tag{9.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_1 = \omega_1 & \left\{ 1 - \frac{(1+k)M_{C_1}^2(\bar{n}_1)}{J_{C_1} \left[\frac{M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\bar{n}_1)}{J_{C_1}} + \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \right]} \right\} + \\
& + \frac{(1+k)M_{C_2}(\bar{n}_2)M_{C_1}(\bar{n}_1)}{J_{C_1} \left[\frac{M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\bar{n}_1)}{J_{C_1}} + \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \right]} \omega_2 + \\
& + \frac{M_{C_1}(\bar{n}_1)}{J_{C_1} \left[\frac{M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\bar{n}_1)}{J_{C_1}} + \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \right]} (\bar{v}_{C_2} \cdot \bar{n}_2 + \bar{v}_{C_1} \cdot \bar{n}_1), \tag{9.41}
\end{aligned}$$

$$\Omega_2 = \omega_2 \left\{ 1 - \frac{(1+k)M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_{C_2} \left[\frac{M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\bar{n}_1)}{J_{C_1}} + \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \right]} \right\} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{M_{C_2}(\vec{n}_2)M_{C_1}(\vec{n}_1)}{J_{C_2} \left[\frac{M_{C_2}^2(\vec{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\vec{n}_1)}{J_{C_1}} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right]} \omega_1 - \\
 & - \frac{(1+k)M_{C_2}(\vec{n}_2)}{J_{C_2} \left[\frac{M_{C_2}^2(\vec{n}_2)}{J_{C_2}} + \frac{M_{C_1}^2(\vec{n}_1)}{J_{C_1}} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right]} (\vec{v}_{C_2} \cdot \vec{n}_2 + \vec{v}_{C_1} \cdot \vec{n}_1). \quad (9.42)
 \end{aligned}$$

Зазначимо, що в дотичному напрямі $\vec{\tau}$ за ідеальних поверхонь тіл, які співударяються, взаємний ударний імпульс дорівнює нулю.

■ **Задача про удар двох конусоподібних тіл.** Нехай тіла 1 і 2 у вигляді конусів рухаються поступально й паралельно їхній спільній площині матеріальної симетрії Oxy зі швидкостями v_1 і v_2 відповідно, напрямленими вздовж геометричних осей конусів (рис. 9.13). Осі конусів утворюють кут β — це кут між векторами швидкостей тіл.

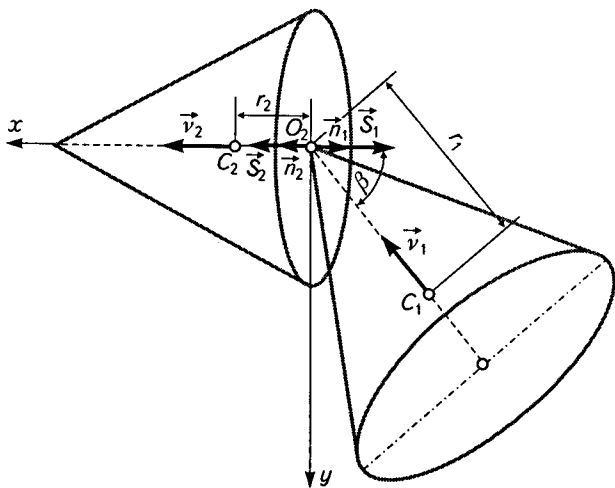


Рис. 9.13

Вважатимемо, що удар здійснюється вершиною конуса 1 у центр основи конуса 2. Якщо знехтувати тертям ковзання, то взаємні ударні імпульси \vec{S}_1, \vec{S}_2 колінеарні осі Ox . Позначимо відстані від точки контакту O до відповідних центрів мас C_1, C_2 конусів через r_1, r_2 , маси конусів — m_1, m_2 , а їх головні центральні моменти інерції відносно осей, що проходять крізь центри мас C_1, C_2 перпендикулярно до площини Oxy , через J_1, J_2 ; коефіцієнт удару — k .

На підставі формул (9.39), (9.40) знаходимо швидкості конусів після удару:

$$V_{1x} = \left[1 + \frac{1+k}{m_1 \frac{r_1^2 \sin^2 \beta}{J_{C_1}} + \frac{m_1 + m_2}{m_2}} \right] v_1 \cos \beta - \frac{1+k}{m_1 \frac{r_1^2 \sin^2 \beta}{J_{C_1}} + \frac{m_1 + m_2}{m_2}} v_2,$$

$$V_{1y} = -v_1 \sin \beta;$$

$$S = -\frac{1+k}{\frac{r_1^2 \sin^2 \beta}{J_{C_2}} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} [v_2 - v_1 \cos \beta];$$

$$V_{2x} = \left[1 - \frac{1+k}{m_2 \frac{r_1^2 \sin^2 \beta}{J_{C_1}} + \frac{m_1 + m_2}{m_1}} \right] v_2 - \frac{1+k}{m_2 \frac{r_1^2 \sin^2 \beta}{J_{C_1}} + \frac{m_1 + m_2}{m_1}} v_1 \cos \beta,$$

$$V_{2y} = 0.$$

Взаємний ударний імпульс дістанемо, скориставшись формулою (9.38):

$$S = -\frac{1+k}{\frac{r_1^2 \sin^2 \beta}{J_{C_2}} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} [v_2 - v_1 \cos \beta].$$

Оскільки розглядається непрямий центральний удар для тіла 1, то воно після удару набуде кутової швидкості Ω_1 , яку можна визначити за формулою (9.42):

$$\Omega_1 = -\frac{(1+k)r_1 \sin \beta}{\frac{J_{C_2}}{J_{C_1}} r_1^2 \sin^2 \beta + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} [v_2 - v_1 \cos \beta].$$

■ **Задача про удар двох куль.** Дві кулі, що мають маси m_1 і m_2 , рухаються поступально у взаємно перпендикулярних напрямках зі швидкостями \vec{v}_1 і \vec{v}_2 відповідно (рис. 9.14, а). За співудару лінії центрів утворюють кут $\pi/4$ з напрямками руху куль до удару. Вважаючи, що кулі ідеально гладкі й коефіцієнт удару для них дорівнює k , знайти швидкості куль після удару.

Початок системи координат $Oxyz$ сумістимо з центром C_1 першої кулі; при цьому першу вісь Ox спрямуємо горизонтально в бік руху кулі до удару. Тоді швидкість другої кулі до удару буде паралельна осі Oy і однаково з нею напрямлена (вгору).

За формулами (9.39) і (9.40) знаходимо проекції швидкості куль на осі Ox і Oy після удару:

$$\vec{V}_1 = \vec{v}_1 - \frac{1+k}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) \vec{n}_1 - \frac{1+k}{m_1 + m_2} (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) \vec{n}_1,$$

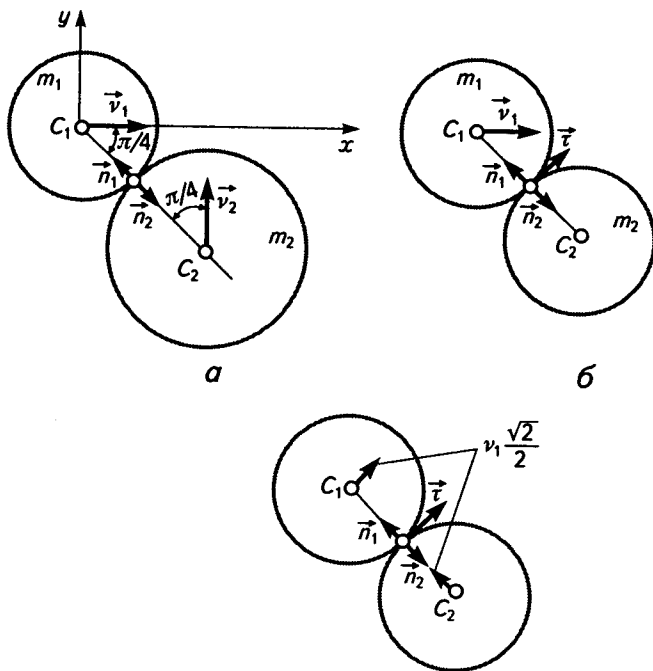


Рис. 9.14 б

$$\vec{V}_2 = \vec{v}_2 - \frac{1+k}{m_1+m_2} (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) \vec{n}_2 - \frac{1+k}{m_1+m_2} (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) \vec{n}_2;$$

$$V_{1x} = v_1 - \frac{1+k}{m_1+m_2} v_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1+k}{m_1+m_2} v_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$V_{2x} = -\frac{1+k}{m_1+m_2} v_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1+k}{m_1+m_2} v_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$V_{1x} = v_1 - \frac{1+k}{m_1+m_2} v_1 \frac{1}{2} - \frac{1+k}{m_1+m_2} v_2 \frac{1}{2} = v_1 \frac{2(m_1+m_2) - m_2 - m_2 k}{2(m_1+m_2)} - \frac{1}{2} \frac{m_2(1+k)}{m_1+m_2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2m_1+m_2(1-k)}{m_1+m_2} v_1 - \frac{m_2(1+k)}{m_1+m_2} v_2 \right];$$

$$V_{2x} = \frac{1+k}{m_1+m_2} v_2 \frac{1}{2} + \frac{1+k}{m_1+m_2} v_1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_1(1+k)}{m_1} (v_2 + v_1);$$

$$V_{1y} = \frac{1+k}{m_1+m_2} v_1 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1+k}{m_1+m_2} v_2 = \frac{1}{2} \frac{m_2(1+k)}{m_1+m_2} (v_1 + v_2);$$

$$V_{2y} = v_2 - \frac{1+k}{m_1+m_2} v_2 \frac{1}{2} + \frac{1+k}{m_1+m_2} v_1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2m_2 + m_1(1-k)}{m_1+m_2} v_2 - \frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2} v_1 \right].$$

Нехай кулі мають однакові маси $m_1 = m_2$ і рухаються з однаковими за модулем швидкостями $v_1 = v_2 = v$. Тоді

$$\begin{aligned} V_{1x} &= \frac{1}{2} \left[\frac{2m_1 + m_2(1-k)}{m_1+m_2} v_1 - \frac{m_2(1+k)}{m_1+m_2} v_2 \right] = \frac{3-k}{4} v - \frac{1+k}{2} v = \\ &= \frac{v}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{k}{2} - \frac{1}{2} - \frac{k}{2} \right) = \frac{v}{2} (1-k), \end{aligned}$$

$$V_{1y} = \frac{1}{2} \frac{(1+k)m_2}{m_1+m_2} (v_1 + v_2) = \frac{1+k}{4} (v + v) = \frac{v}{2} (1+k);$$

$$V_{2x} = \frac{1}{2} \frac{(1+k)m_1}{m_1+m_2} (v_2 + v_1) = \frac{v}{2} (1+k),$$

$$V_{2y} = \frac{1}{2} \left[\frac{2m_2 + m_1(1-k)}{m_1+m_2} v_2 - \frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2} v_1 \right] = \left(\frac{3-k}{4} + \frac{1+k}{4} \right) v = \frac{v}{2} (1-k).$$

При $k = 1$

$$V_{1x} = 0, \quad V_{2x} = v;$$

$$V_{2x} = v, \quad V_{2y} = 0.$$

Отже, за коефіцієнта удару, що дорівнює одиниці, однакових мас куль та їхніх однакових швидкостей у процесі удару кулі обмінюються швидкостями.

Далі прийнемо, що друга куля нерухома й має, як і в попередньому прикладі, таку саму масу, що й перша. Вважаючи, що коефіцієнт удару за цієї умови також дорівнює одиниці, знайдемо швидкості обох куль, яких вони набувають унаслідок непрямого центрального удару. Попередні формули дають

$$V_{1x} = \frac{1}{2} \left[\frac{2m_1 + m_2(1-k)}{m_1+m_2} v_1 - \frac{m_2(1+k)}{m_1+m_2} v_2 \right] = \frac{1}{2} v_1,$$

$$V_{1y} = \frac{1}{2} \frac{(1+k)m_2}{m_1+m_2} (v_1 + v_2) = \frac{1}{2} v_1;$$

$$V_{2x} = \frac{1}{2} \frac{(1+k)m_1}{m_1+m_2} (v_2+v_1) = \frac{1}{2} v_1,$$

$$V_{2y} = \frac{1}{2} \left[\frac{2m_2+m_1(1-k)}{m_1+m_2} v_2 - \frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2} v_1 \right] = -\frac{1}{2} v_1.$$

Звідси випливає, що після удару перша куля втрачає швидкість $v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$ у напрямі осі мас C_1C_2 , яку вона мала до удару; в перпендикулярному до осі C_1C_2 напрямі швидкість $v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$ збереглася. Друга куля, перебуваючи до удару в стані спокою, після удару дістає швидкість $v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$ у напрямі осі C_1C_2 (рис. 9.13, в).

□ **Прямий центральний удар двох тіл.** Якщо у формулах (9.39) – (9.42) моменти $M_{C_1}(\vec{n}_1)$, $M_{C_2}(\vec{n}_2)$ дорівнюють нулю й швидкості центрів мас тіл \vec{v}_{C_1} , \vec{v}_{C_2} неколінеарні одиничним векторам \vec{n}_1 , \vec{n}_2 , то матимемо приклад непрямого центрального удару, на відміну від прямого, коли додатково швидкості центрів мас тіл до удару \vec{v}_{C_1} , \vec{v}_{C_2} колінеарні одиничним векторам \vec{n}_1 , \vec{n}_2 . За непрямого й прямого центральних ударів тіл їхні кутові швидкості вважаються нульовими. Отже, приходимо до таких формул:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{C_1} &= \vec{v}_{C_1} - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (\vec{v}_{C_1} \cdot \vec{n}_1) \vec{n}_1 - \\ &\quad - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (\vec{v}_{C_2} \cdot \vec{n}_2) \vec{n}_1, \\ \vec{V}_{C_2} &= \vec{v}_{C_2} - (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} (\vec{v}_{C_2} \cdot \vec{n}_2) \vec{n}_2 - \\ &\quad - (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} (\vec{v}_{C_1} \cdot \vec{n}_1) \vec{n}_2. \end{aligned} \tag{9.43}$$

Із рівнянь (9.43) за однакових мас тіл і однакових за модулем їхніх зустрічних швидкостей дістаємо

$$\vec{V}_{C_1} = -v\vec{n}_1 + (1+k) \frac{1}{2} v\vec{n}_1 + (1+k) \frac{1}{2} v\vec{n}_1 = v\vec{n}_1 [(1+k) - 1] = v\vec{n}_1 k,$$

$$\vec{V}_{C_2} = -v\vec{n}_2 + (1+k) \frac{1}{2} v\vec{n}_2 + (1+k) \frac{1}{2} v\vec{n}_2 = [(1+k) - 1] v\vec{n}_2 = -kv\vec{n}_1.$$

Звідси видно, що швидкості тіл після удару протилежні за знаком і однакові за модулем, який залежить від коефіцієнта удару: при

$k = 0$ удар пластичний — тіла зупиняються; швидкості, які тіла мали до удару, будуть такі самі за модулем і після удару, однак їхні напрямки змінюються на протилежні; при $k = 1$ удар абсолютно пружний.

Розглянемо випадок, коли друге тіло нерухоме і його маса значно більша за масу першого тіла, — молот і ковадло (прямий удар точки об нерухому поверхню); тоді за швидкості \vec{v} першого тіла до удару матимемо такі швидкості тіл після удару:

$$\vec{V}_{C_1} = v\vec{n}_1 k, \quad \vec{V}_{C_2} = -(1+k)\frac{m_1/m_2}{m_1/m_2 + 1} v\vec{n}_2 = 0.$$

Отже, перше тіло відскакує від нерухомого другого тіла зі швидкістю, яка становить k -ту частину від тієї швидкості, що тіло мало до удару. В двох граничних випадках — абсолютно непружного й абсолютно пружного ударів — швидкість тіла повністю втрачається, що відбувається під час кування, й повністю відновлюється за модулем.

Інший випадок: маса першого тіла значно більша за масу другого (швидкість другого тіла нульова) — забивання палі бабою копра або цвяха молотком. Матимемо

$$\begin{aligned} \vec{V}_{C_1} &= \vec{v}_{C_1} - (1+k)\frac{1}{m_1/m_2 + 1}(\vec{v}_{C_1} \cdot \vec{n}_1)\vec{n}_1 - \\ &- (1+k)\frac{1}{m_1/m_2 + 1}(\vec{v}_{C_2} \cdot \vec{n}_2)\vec{n}_1 = \vec{v}_{C_1}, \\ \vec{V}_{C_2} &= \vec{v}_{C_2} - (1+k)\frac{1}{1 + m_2/m_1}(\vec{v}_{C_2} \cdot \vec{n}_2)\vec{n}_2 - \\ &- (1+k)\frac{1}{1 + m_2/m_1}(\vec{v}_{C_1} \cdot \vec{n}_1)\vec{n}_2 = (1+k)\vec{v}_{C_1}\vec{n}_2. \end{aligned}$$

Бачимо, що перше тіло в ударному процесі не змінює своєї швидкості, однак швидкість другого тіла зростає від нуля до значення, яке перевищує швидкість першого тіла в $1+k$ разів; за абсолютно пружного удару ця швидкість буде вдвоє більша за швидкість тіла, що ударає.

□ Теорема Карно у випадковій співудару системи двох плоских тіл. У рамках задачі про загальні рівняння удару двох плоских тіл (див. рис. 9.11) розглянемо теорему про зміну кінетичної енергії внаслідок удару. До й після співудару двох тіл їхні кінетичні енергії відповідно становитимуть

$$T_{\text{до уд.}} = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) + \frac{1}{2}(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2),$$

$$T_{\text{після уд.}} = \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) + \frac{1}{2}(J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2).$$

Тоді зміна кінетичної енергії тіл, яка відбудеться в процесі удару, очевидно, виразиться співвідношенням

$$\begin{aligned} \Delta T = T_{\text{до уд.}} - T_{\text{після уд.}} &= \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) + \frac{1}{2}(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2) - \\ &- \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) - \frac{1}{2}(J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2). \end{aligned} \quad (9.44)$$

Тут у позначеннях лінійних швидкостей і моментів інерції відкинута індекс С.

Різниця

$$\begin{aligned} \vec{v}_{1 \text{ втр}} &= \vec{v}_1 - \vec{V}_1, \quad \vec{v}_{2 \text{ втр}} = \vec{v}_2 - \vec{V}_2, \\ \omega_{1 \text{ втр}} &= \omega_1 - \Omega_1, \quad \omega_{2 \text{ втр}} = \omega_2 - \Omega_2 \end{aligned} \quad (9.45)$$

називаються втраченими лінійними й кутовими швидкостями відповідно в поступальних і обертальних складових плоскопаралельного руху двох тіл за їх співудару. Розглянемо такий вираз:

$$\begin{aligned} T_{\text{втр}} &= \frac{1}{2} m_1 v_{1 \text{ втр}}^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_{1 \text{ втр}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2 \text{ втр}}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_{2 \text{ втр}}^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)^2 + \frac{1}{2} J_1 (\omega_1 - \Omega_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_2 - \vec{V}_2)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\omega_2 - \Omega_2)^2. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Його можна трактувати як кінетичну енергію втрачених поступальних і обертальних швидкостей двох плоских тіл за їх співудару.

Наша задача — перетворити енергетичне рівняння (9.44) так, щоб воно містило втрачені швидкості й коефіцієнт удару k . Сформулюємо **теорему Карно**: *втрата кінетичної енергії системи двох плоских тіл за їх співудару дорівнює $\left(\frac{1-k}{1+k}\right)$ -й частині кінетичної енергії втрачених поступальних і обертальних швидкостей*. Математично це записується так:

$$\Delta T = \frac{1-k}{1+k} T_{\text{втр}} = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_1 - \vec{V}_1)^2 + \frac{1}{2} J_1 (\omega_1 - \Omega_1)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} m_2 (\bar{v}_2 - \bar{V}_2)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\omega_2 - \Omega_2)^2 \right]. \quad (9.47)$$

Для доведення теореми скористаємося формулами (9.33), (9.36) і (9.37). Тоді матимемо допоміжне рівняння

$$m_1 (\bar{V}_1 + k\bar{v}_1) (\bar{V}_1 - \bar{v}_1) + m_2 (\bar{V}_2 + k\bar{v}_2) (\bar{V}_2 - \bar{v}_2) + J_1 (\Omega_1 + k\omega_1) (\Omega_1 - \omega_1) + J_2 (\Omega_2 + k\omega_2) (\Omega_2 - \omega_2) = 0.$$

Додамо вираз у лівій частині цієї рівності до кінетичної енергії (9.44), утраченої за співудару тіл. Матимемо

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) + \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2) - \\ &- \frac{1}{2} (m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) - \frac{1}{2} (J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2) + \\ &+ m_1 (\bar{V}_1 + k\bar{v}_1) (\bar{V}_1 - \bar{v}_1) + m_2 (\bar{V}_2 + k\bar{v}_2) (\bar{V}_2 - \bar{v}_2) + \\ &+ J_1 (\Omega_1 + k\omega_1) (\Omega_1 - \omega_1) + J_2 (\Omega_2 + k\omega_2) (\Omega_2 - \omega_2). \end{aligned}$$

У групі членів, сума яких дорівнює нулю, розкриємо дужки й зведемо подібні:

$$\begin{aligned} m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 - (1-k)(m_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{V}_1 + m_2 \bar{v}_2 \cdot \bar{V}_2) - \\ - k(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) + \\ + J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2 - (1-k)(J_1 \omega_1 \cdot \Omega_1 + J_2 \omega_2 \cdot \Omega_2). \end{aligned}$$

Замінімо цим результатом у виразі для ΔT еквівалентну початкову групу членів, сума яких дорівнює нулю, й у загальному виразі зведемо подібні:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) + \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2) - \\ &- \frac{1}{2} (m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) - \frac{1}{2} (J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2) + \\ &+ m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 - (1-k)(m_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{V}_1 + m_2 \bar{v}_2 \cdot \bar{V}_2) - \\ &- k(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) + \\ &+ J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2 - (1-k)(J_1 \omega_1 \cdot \Omega_1 + J_2 \omega_2 \cdot \Omega_2) = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) + \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) + \frac{1}{2}(J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2) - \\
& - (1 - k)(m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{V}_2) - k(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \\
& - (1 - k)(J_1 \omega_1 \cdot \Omega_1 + J_2 \omega_2 \cdot \Omega_2).
\end{aligned}$$

Далі вираз

$$k(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$$

подамо у вигляді

$$\begin{aligned}
& k(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \\
& = \frac{1}{2}k(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) + \frac{1}{2}k(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2).
\end{aligned}$$

Тоді з урахуванням цього вираз для втраченої кінетичної енергії за співудару тіл у нашому випадкові запишеться так:

$$\begin{aligned}
\Delta T & = \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) + \frac{1}{2}(J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2) - \\
& - (1 - k)(m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{V}_2) + \frac{1}{2}(1 - k)(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \\
& - \frac{1}{2}k(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - (1 - k)(J_1 \omega_1 \cdot \Omega_1 + J_2 \omega_2 \cdot \Omega_2).
\end{aligned}$$

Повернемося до рівняння втрати кінетичної енергії (9.44) і перепишемо його у вигляді

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) + \frac{1}{2}(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2) = \\
& = \Delta T + \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) + \frac{1}{2}(J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2).
\end{aligned}$$

У попередньому виразі для ΔT згідно з останньою рівністю замінимо

$$\frac{1}{2}(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$$

на

$$\Delta T + \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) + \frac{1}{2}(J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2).$$

Дістанемо

$$\Delta T = \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) + \frac{1}{2}(J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2) -$$

$$\begin{aligned}
& - (1 - k)(m_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{V}_1 + m_2 \bar{v}_2 \cdot \bar{V}_2) + \frac{1}{2}(1 - k)(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \\
& - k \left[\Delta T + \frac{1}{2} \left(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2 \right) \right] - \\
& - (1 - k)(J_1 \omega_1 \cdot \Omega_1 + J_2 \omega_2 \cdot \Omega_2).
\end{aligned}$$

Дане співвідношення можна переписати так:

$$\begin{aligned}
\Delta T(1 + k) &= (1 - k) \frac{1}{2} (m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2) - \\
& - (1 - k)(m_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{V}_1 + m_2 \bar{v}_2 \cdot \bar{V}_2) + \frac{1}{2}(1 - k)(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \\
& - (1 - k)(J_1 \omega_1 \cdot \Omega_1 + J_2 \omega_2 \cdot \Omega_2)
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
\Delta T \frac{1 + k}{1 - k} &= \frac{1}{2} (m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2) - \\
& - \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{V}_1 - \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{V}_1 - \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2 \cdot \bar{V}_2 - \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2 \cdot \bar{V}_2 + \\
& + \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \\
& - \frac{1}{2} J_1 \omega_1 \cdot \Omega_1 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1 \cdot \Omega_1 - \frac{1}{2} J_2 \omega_2 \cdot \Omega_2 - \frac{1}{2} J_2 \omega_2 \cdot \Omega_2.
\end{aligned}$$

Тепер справа легко виділити множники, які є відповідними втраченими швидкостями:

$$\begin{aligned}
\Delta T \frac{1 + k}{1 - k} &= \frac{1}{2} m_1 \bar{V}_1 (\bar{V}_1 - \bar{v}_1) + \frac{1}{2} m_2 \bar{V}_2 (\bar{V}_2 - \bar{v}_2) + \\
& + \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1 (\bar{v}_1 - \bar{V}_1) + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2 (\bar{v}_2 - \bar{V}_2) + \\
& + \frac{1}{2} J_1 \Omega_1 (\Omega_1 - \omega_1) + \frac{1}{2} J_2 \Omega_2 (\Omega_2 - \omega_2) + \\
& + \frac{1}{2} J_1 \omega_1 (\omega_1 - \Omega_1) + \frac{1}{2} J_2 \omega_2 (\omega_2 - \Omega_2).
\end{aligned}$$

Далі, щоб завершити виведення теореми, в правій частині згрупуємо члени з однаковими множниками й винесемо їх за дужки, після чого розв'яжемо рівняння відносно ΔT :

$$\Delta T = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{1}{2} m_1 (\bar{v}_1 - \bar{V}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\bar{v}_2 - \bar{V}_2)^2 + \frac{1}{2} J_1 (\omega_1 - \Omega_1)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\omega_2 - \Omega_2)^2 \right].$$

Теорему доведено.

Енергетичну теорему Карно можна виразити через взаємний ударний імпульс S згідно з формулами (9.36), (9.37):

$$\Delta T = \frac{1-k}{2(1+k)} \left[\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + \frac{J_2 M_{C_1}^2(\bar{n}_1) + J_1 M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_1 J_2} \right] S^2, \quad (9.48)$$

де

$$S = \frac{(1+k)[\bar{v}_2 \cdot \bar{n}_2 + \bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1 + M_{C_2}(\bar{n}_2)\omega_2 + M_{C_1}(\bar{n}_1)\omega_1]}{\frac{M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_2} + \frac{M_{C_1}^2(\bar{n}_1)}{J_1} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}},$$

а поступальні лінійні й обертальні кутові швидкості тіл за співудару визначаються за формулами (9.38)—(9.42).

Теорема Карно показує, що за співудару двох тіл кінетична енергія, яку тіла мали до удару, зменшується:

$$T_{\text{після уд.}} = T_{\text{до уд.}} - \Delta T,$$

де $\Delta T > 0$. За абсолютно пружного удару $k = 1$, і кінетична енергія тіл не втрачається. Якщо удар абсолютно пластичний, то $k = 0$ і маємо формулу

$$\Delta T = \frac{1}{2} m_1 (\bar{v}_1 - \bar{V}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\bar{v}_2 - \bar{V}_2)^2 + \frac{1}{2} J_1 (\omega_1 - \Omega_1)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\omega_2 - \Omega_2)^2$$

або

$$\Delta T = \frac{1}{2} \left[\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + \frac{J_2 M_{C_1}^2(\bar{n}_1) + J_1 M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_1 J_2} \right] S^2,$$

$$S = - \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{n}_2 + \bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1 + M_{C_2}(\bar{n}_2)\omega_2 + M_{C_1}(\bar{n}_1)\omega_1}{\frac{M_{C_2}^2(\bar{n}_2)}{J_2} + \frac{M_{C_1}^2(\bar{n}_1)}{J_1} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}.$$

У разі прямого центрального удару останні формули наберуть вигляду

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2; \quad S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2);$$

$$V_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad V_2 = \frac{m_2 v_2 + m_1 v_1}{m_1 + m_2},$$

якщо швидкості \vec{v}_1, \vec{v}_2 напрямлені в бік \vec{n}_2 і $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$.

Застосуємо ці формули для випадку, коли друге тіло нерухоме.

Тоді $v_2 = 0$ і маємо

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2; \quad S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1;$$

$$V_1 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad V_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Ввівши в першій формулі кінетичну енергію першого тіла до удару $T_1 = m_1 v_1^2 / 2$, подамо її у вигляді

$$\Delta T = \frac{1}{m_1/m_2 + 1} T_1.$$

Втрачена кінетична енергія в разі абсолютно пластичного удару двох тіл залежатиме лише від відношення їхніх мас і становитиме

$\left(\frac{1}{m_1/m_2 + 1} \right)$ -шу частку від кінетичної енергії T_1 першого тіла, яку во-

но мало до удару.

Якщо маса другого тіла, яке до удару було нерухомим, значно більша за масу першого тіла, що ударяє, то відношення m_1/m_2 нехтовно мале порівняно з одиницею. Тоді тіло, що ударяє по нерухомому тілу, втрачає всю кінетичну енергію. Такі умови — під час кування, коли маса ковадла в кілька разів перевищує масу молота.

Якщо маса тіла, яке ударяє по нерухомому тілу, значно більша, то коефіцієнт $\frac{1}{m_1/m_2 + 1}$ близький до нуля й утрата тілом, що ударяє,

кінетичної енергії теж близька до нуля. Такі умови — під час забивання палі бабою копра або цвяха молотком: забивання цвяха важким молотком ефективніше, ніж легким. Чим більша маса копра порівняно з масою палі, тим менше кінетичної енергії внаслідок удару перетворюється в теплоту.

МЕТОД Д'АЛАМБЕРА

10.1

Загальні зауваження

У попередніх главах, вивчаючи динаміку рухів, ми використовували загальні теореми динаміки, які впливають із другого та третього законів Ньютона і є основою загальних методів динаміки — методу загальних теорем Ньютона. Суть цього методу полягає в розгляді руху не окремих тіл механічної системи, а її руху в цілому, який визначається головним вектором і головним моментом сил системи, що діють.

У загальних теоремах динамічними величинами, що характеризують рух, є кількість руху та момент кількості руху — кінетичний момент. Останній залежить від вибору нерухомого центра, відносно якого й визначається. Зміна вектора кількості руху механічної системи спричиняється головним вектором її сил, а вектора моменту кількості руху — головним моментом сил системи відносно вибраного нерухомого центра.

Дві загальні векторні теореми динаміки дають змогу представити довільний рух механічної системи як сукупність двох його складових — поступальної разом із центром мас системи під дією її головного вектора, прикладеного в цьому центрі, й обертальної також навколо її центра мас під дією головного моменту системи, визначеного відносно цього самого центра.

В окремих випадках силової дії на механічну систему, коли головний вектор і головний момент сил, що діють на систему, дорівнюють нулю, справедливі закони збереження кількості руху й кінетичного моменту системи, що дуже важливо для практики.

Третя загальна теорема — енергетична й дає залежність зміни кінетичної енергії системи від значень її зовнішніх і внутрішніх сил та переміщень точок їх прикладання, що є вирішальним для встановлення балансу енергій у машинах і механізмах.

Загальні теореми можуть застосовуватися для дослідження руху будь-яких механічних систем, а також окремих тіл, що входять до її складу, тому й називаються загальними. В диференціальні рівняння руху тіл і механічних систем, які складаються на підставі загальних теорем динаміки, входять як кінематичні величини, що визначають положення тіл, так і невідомі реакції в'язей.

У застосуванні до задач динаміки руху окремого тіла загальні теореми вможливають відшукання всіх невідомих величин — просторових параметрів, що визначають положення тіла, а також реакцій в'язей, накладених на нього.

За користування методом загальних теорем Ньютона динамічні дії тіл на в'язі пояснюються наявністю ньютонівських інерційних сил, які у випадку нульового головного вектора активних сил визначаються головним вектором $\vec{\Phi}$ інерційних сил частинок механічної системи: $\vec{Q} = \vec{\Phi} = -M\vec{a}_C$, де \vec{Q} — головний вектор динамічних сил тиску механічної системи на в'язі, а у випадку нульового головного моменту відносно нерухомого центра O — головним моментом \vec{L}_O тих самих інерційних сил частинок механічної системи відносно центра O : $\vec{H}_O = \vec{L}_O = -\frac{d\vec{K}_O}{dt}$, де \vec{H}_O — головний момент сил динаміч-

ного тиску на в'язі відносно нерухомого центра O . Значимо, що інерційні сили та їхні моменти прикладаються до в'язей.

За наявності активних сил головні вектори й головні моменти сил тиску на в'язі механічної системи визначатимуться як різниці між головним вектором активних сил і головним вектором інерційних сил, а також між головним моментом активних сил і головним інерційним моментом відносно нерухомого центра:

$$\vec{Q} = \vec{R}_a - M\vec{a}_C; \quad \vec{H}_O = \vec{M}_{a_o} - \frac{d\vec{K}_O}{dt}.$$

Це впливає з формул

$$M\vec{a}_C = \vec{R}_{a.з} + \vec{R}_{p.в.з}; \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_{a.з O} - \vec{M}_{p.в.з O}.$$

Зауважимо також, що метод загальних теорем застосовний до розв'язання будь-якої задачі динаміки про рух тіла чи системи абсолютно твердих тіл без використання інших розроблених у динаміці ефективних методів, до яких належать: метод Д'Аламбера з використанням утрачених сил і фіктивних д'аламберових сил інерції; метод Д'Аламбера—Лагранжа з використанням таких фундаментальних понять динаміки, як віртуальні переміщення й віртуальна робота, та

метод Лагранжа з використанням невизначених множників і узагальнених координат.

Метод Д'Аламбера, або метод фіктивних сил інерції, ґрунтується на так званому принципі Д'Аламбера. Дана глава буде присвячена цьому єдиному підходові до дослідження як динаміки руху, так і рівноваги будь-яких механічних систем. Суть цього принципу полягає в тому, що замість реального руху механічної системи з певними в'язями й заданими силами (активними), що діють на її тіла, в кожний даний момент часу розглядається її віртуальна рівновага. Вона досягається тим, що додатково до активних сил і сил реакцій в'язей, які реально діють на дану механічну систему, до частинок тіл системи в кожний даний момент часу мислено прикладаються інерційні сили Ньютона, які вже за нових точок їх прикладання називаються д'аламберовими силами інерції.

Д'аламберові сили інерції за модулем і напрямом збігаються з інерційними силами Ньютона, але відрізняються від них точками прикладання. Якщо до введення д'аламберових сил інерційні сили Ньютона були прикладені до тих тіл, які частинкам механічної системи надають прискорення, то за принципом Д'Аламбера ці сили діють на самі частинки системи й тому є для них фіктивними силами, тобто такими, що реально не існують.

Тепер міркуємо так. У даному положенні механічної системи, котру уявляємо як сукупність багатьох частинок, що відповідає поточному моменту часу t , з боку реальних тіл на кожну частинку масою m_k системи діють дві фізичні сили: активна \vec{F}_{ak} і реакція в'язі $\vec{F}_{p,ak}$. Рівнодійна цих двох сил $\vec{F}_k = \vec{F}_{ak} + \vec{F}_{p,ak}$ кожній частинці механічної системи в розглядуваному її положенні надає прискорення \vec{a}_k згідно з основним законом динаміки $\vec{F}_k = m_k \vec{a}_k$. Д'аламберові сили інерції $\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{a}_k$, прикладені до частинок, зрівноважують розглядувані рівнодійні сили \vec{F}_k . Тому за таких умов віртуальні прискорення всіх частинок будуть нульовими й матимемо віртуальну рівновагу механічної системи, яку ще називають динамічною.

Укажемо на відмінність віртуальної рівноваги за принципом Д'Аламбера та рівноваги статичної. За статичної рівноваги сил, що діють на механічну систему, її частинки мають нульові швидкості й прискорення, а сама механічна система є незмінюваною, як, наприклад, абсолютно тверде тіло. Хоча й у випадку віртуальної рівноваги система сил, що реально діють на механічну систему, разом із додатковими д'аламберовими силами інерції відповідає тим самим умовам, що й система сил за її статичної рівноваги, однак конфігурація системи в даному її положенні змінюється, бо частинки механічної системи мають швидкості й прискорення.

Попередньо принцип Д'Аламбера можна сформулювати так: під час руху невільної механічної системи в кожний даний момент часу активні сили й реакції в'язей динамічно зрівноважуються д'аламберовими силами інерції частинок її тіл.

Слід зазначити, що введення д'аламберових сил інерції спрощує розв'язання задач на визначення динамічних реакцій в'язей за відомим рухом механічної системи, на яку накладено в'язі. Це спрощення полягає в тому, що процедури складання рівнянь динамічної (віртуальної) рівноваги за принципом Д'Аламбера й рівнянь статичної рівноваги однакові й полягають у застосуванні методу проєкцій і моментів.

10.2

Принцип Д'Аламбера для точки й механічної системи

Рушійні та втрачені сили. Розглянемо точку масою m відносно інерціальної системи відліку $Oxuz$ під дією активних сил, рівнодійна яких \vec{F}_a , і реакцій в'язей з їхньою рівнодійною $\vec{F}_{p,v}$. Позначивши рівнодійну сил $\vec{F}_a, \vec{F}_{p,v}$ через \vec{F} , на підставі правила паралелограма сил можемо записати

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_{p,v}.$$

Згідно з основним законом динаміки (другим законом Ньютона) ця рівнодійна \vec{F} надає даній точці масою m прискорення \vec{a} . Отже, маємо векторне рівняння

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

або

$$m\vec{a} = \vec{F}_a + \vec{F}_{p,v}.$$

Як відомо, маса m тіла, яке береться за точку, чисельно дорівнює силі, що надає тілу одиничного прискорення ($a = 1 \text{ м/с}^2$), а якщо тілу треба надати a одиниць прискорення, то для цього вже потрібна в a разів більша сила, тобто ma . Назвемо цю силу *рушійною* й позначимо через $F_{руш}$. Тоді матимемо векторну рівність

$$\vec{F}_{руш} = m\vec{a}. \quad (10.1)$$

Рушійна сила $\vec{F}_{руш}$, долаючи інерційний опір маси точки, надає їй даного прискорення \vec{a} . Зрозуміло, що вона є рівнодійною активної

сили та реакції в'язі: $\vec{F}_{руш} = \vec{F}$ (рис. 10.1). Якщо точка вільна від в'язей, то за рушійну силу править активна сила: $\vec{F}_{руш} = \vec{F}_a$. За відсутності активної сили рушійною силою є реакція в'язі: $\vec{F}_{руш} = \vec{F}_{р.в}$.

Подамо основне рівняння динаміки у вигляді

$$\vec{F}_{р.в} = m\vec{a} - \vec{F}_a.$$

Тут зліва — реакція в'язі, прикладена до прискорено рухомої точки. Силу, з якою згідно із законом рівності дії та протидії прискорено рухома точка діє на в'язь, назвемо силою динамічного тиску (динамічним тиском) на в'язь і позначимо через \vec{Q} . Тоді можемо записати

$$\vec{Q} = -\vec{F}_{р.в} = \vec{F}_a - m\vec{a}.$$

Різницю активної і рушійної сил Д'Аламбер назвав *втраченою силою*. Позначивши її через $\vec{F}_{втр}$, матимемо

$$\begin{aligned}\vec{F}_{втр} &= -\vec{F}_{р.в}, \\ \vec{F}_{втр} &= \vec{F}_a - m\vec{a}.\end{aligned}\tag{10.2}$$

Втрачена сила за взаємодії прискорено рухомої точки з в'яззю прикладена до в'язі, напрямлена протилежно її реакції і дорівнює різниці між активною та рушійною силами, прикладеними до точки.

Зрозуміло, що втрачена сила й є тим динамічним тиском точки на в'язь у прискореному русі під дією на неї двох реальних сил — активної сили й реакції в'язі:

$$\vec{Q} = \vec{F}_{втр}.\tag{10.3}$$

Підсумовуючи, ще раз звернемо увагу на гру сил у загальному випадкові взаємодії прискорено рухомої точки з в'яззю. Тут задіяні принаймні три тіла: тіло 1, яке править за точку; тіло 2, яким є в'язь; тіло 3, дія якого на тіло 1 характеризується активною силою (рис. 10.1). Тіла 2 і 3 діють на точку з активною силою \vec{F}_a і реакцією в'язі $\vec{F}_{р.в}$, які за правилом паралелограма сил додаються й утворюють рушійну силу $\vec{F}_{руш} = m\vec{a}$, котра, долаючи інерційний опір маси m точки, спричинює її прискорення \vec{a} . Інерційна сила $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$, яка зумовлена масою й прискоренням, розкладається згідно з правилом паралелограма сил на дві інерційні сили $\vec{\Phi}_a$, $\vec{\Phi}_{р.в}$, паралельні лініям дії активної сили \vec{F}_a і реакції в'язі $\vec{F}_{р.в}$, але протилежно напрямлені їм (рис. 10.1).

Активна інерційна сила $\vec{\Phi}_a$ прикладена до тіла 3, з боку якого діє активна сила \vec{F}_a , і $\vec{\Phi}_a = -\vec{F}_a$; реактивна інерційна сила $\vec{\Phi}_{р.в}$ прикладена до тіла 2, яке є в'яззю для точки, і $\vec{\Phi}_{р.в} = -\vec{F}_{р.в}$. Отже, реактивна інерційна сила $\vec{\Phi}_{р.в}$ за модулем і напрямом дорівнює втраченій силі $\vec{F}_{втр}$ і спричинює динамічний тиск \vec{Q} точки на в'язь.

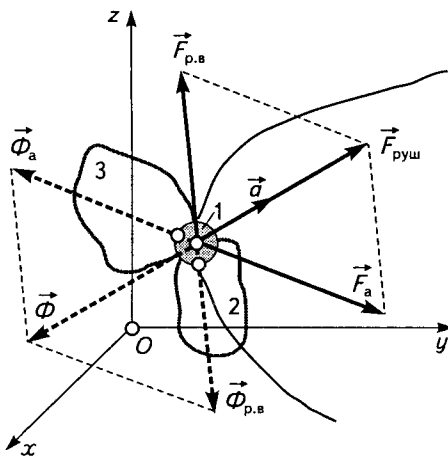


Рис. 10.1

Якщо в'язі немає, то її реакція $\vec{F}_{p,v} = 0$, і активна сила \vec{F}_a надає точці прискорення \vec{a}_a , яке має напрям цієї сили й визначається з векторної рівності

$$\vec{F}_a = m\vec{a}_a.$$

Якщо в'язь є, то з її боку до точки прикладається сила реакції $\vec{F}_{p,v}$, яка згідно із законом незалежності дії сил і другим законом Ньютона надає точці додаткового прискорення $\vec{a}_{p,v}$. Унаслідок цього додаткового прискорення, яке визначається за формулою

$$\vec{F}_{p,v} = m\vec{a}_{p,v},$$

точка відхиляється від напрямку активної сили \vec{F}_a , і за законом рівності дії та протидії чинить динамічний тиск на в'язь

$$\vec{Q} = -\vec{F}_{p,v} = -m\vec{a}_{p,v} = \vec{F}_{втр} = \vec{F} - m\vec{a},$$

котрий, як бачимо, є інерційною силою $\vec{\Phi}_{p,v}$.

Зі схеми гри сил під час взаємодії прискорено рухомої точки з в'яззю (рис. 10.1) можемо записати векторну рівність

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_a + \vec{\Phi}_{p,v}.$$

Якщо прискорення точки \vec{a} нульове, то

$$0 = \vec{F}_a + \vec{F}_{p,v}$$

або

$$\vec{F}_a = -\vec{F}_{p,v},$$

що відповідає статичній рівновазі, за якої реакція в'язі зрівноважує активну силу. Отже, за статичної рівноваги дія точки на в'язь дорівнює активній силі.

Розглянемо приклади визначення динамічних тисків на в'язь у найпростіших випадках без складання рівнянь динамічної рівноваги за принципом Д'Аламбера.

■ **Тіло на прискорено рухомій платформі.** Нехай на горизонтальній платформі 2 розташоване тіло 1 масою m_1 . Припустимо, що платформа з тілом як од-

не ціле рухаються по вертикалі із заданим прискоренням \vec{a} : в одному випадкові вниз (рис. 10.2), в іншому — вгору (рис. 10.3).

• *Рух платформи з прискоренням униз* (рис. 10.2). Активною силою, що діє на тіло на платформі, є його власна вага \vec{G} , а рушійна сила $\vec{F}_{\text{руш}} = m_1 \vec{a}$ має

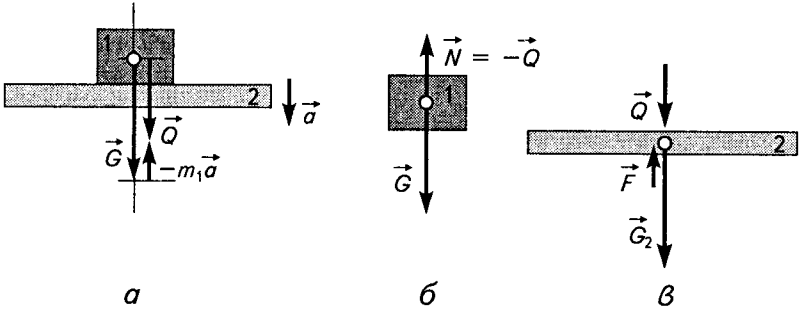


Рис. 10.2

напрямок прискорення \vec{a} . Щоб за цими даними знайти тиск \vec{Q} тіла на платформу під час їх спільного прискорення дорівнює прискоренню вільного падіння, скористаємося формулою (10.2). Дістаємо

$$Q = G - m_1 a$$

або, врахувавши формулу

$$G = m_1 g,$$

де g — прискорення вільного падіння,

$$Q = m_1 (g - a).$$

Якщо платформа з тілом рухаються вниз із прискоренням, меншим за прискорення вільного падіння, то тіло буде тиснути на платформу. У випадку, коли їхнє спільне прискорення дорівнює прискоренню вільного падіння, тиску тіла на платформу не буде — це так званий стан невагомості.

Прискорений рух платформи вниз спричиняється силою \vec{F} , яка прикладається з боку двигуна й має напрям прискорення \vec{a} . Позначивши масу платформи через m_2 , за другим законом Ньютона матимемо

$$m_2 a = F + Q + m_2 g,$$

звідки можна визначити силу F :

$$\begin{aligned} F &= m_2 a - Q - m_2 g = m_2 a - m_1 g + m_1 a - m_2 g = \\ &= (m_1 + m_2) a - (m_1 + m_2) g = (m_1 + m_2) (a - g) \end{aligned}$$

або

$$F = -(m_1 + m_2) (a - g).$$

При $a < g$ сила F від'ємна, напрямлена проти прискорення \vec{a} й є стримувальною силою; при цьому тіло тисне на платформу.

Гру сил у випадку взаємодії тіла з платформою в їх прискореному русі вниз показано на рис. 10.2 б, в: на тіло 1 діють дві сили — сила ваги \vec{G}_1 і нормальна реакція \vec{N} платформи; на платформу 2 — сила ваги \vec{G}_2 , динамічний тиск \vec{Q} тіла на платформу й додаткова стримувальна сила \vec{F} . Звернемо увагу на те, що нормальна реакція \vec{N} і динамічний тиск \vec{Q} як сили дії та протидії однакові за модулем, протилежно напрямлені й прикладені до різних тіл, тому вони належать до системи двох сил, що не зрівноважують одна одну, але в сумі дають нуль.

І нарешті, якщо прискорення платформи нульове, то це статична рівновага — стан спокою або рівномірний рух; при цьому з останньої формули випливає, що додаткова сила \vec{F} зрівноважує загальну вагу тіла й платформи.

• *Рух платформи з прискоренням угору.* На підставі формули (10.2) динамічний тиск або втрачена сила в цьому випадкові (рис. 10.3, а, в)

$$Q = F_{\text{втр}} = m_1(g + a).$$

При $a = 0$ — статична рівновага тіла й платформи, за якої втрачена сила зрівноважує власну вагу тіла на платформі:

$$Q = F_{\text{втр}} = m_1g.$$

Замість платформи з тілом у випадкові прискореного руху по вертикалі вгору візьмемо ракету-носієй із космічним апаратом і людиною на борту. Тут можна говорити про дію перевантажень на організм людини під час прискореного руху системою вертикально вгору. Введемо позначення $a = kg$, де k — коефіцієнт перевантаження, й підставимо у формулу динамічного тиску на крісло космонавта. Приходимо до такої залежності:

$$Q = (k + 1)m_1g = (k + 1)G_1,$$

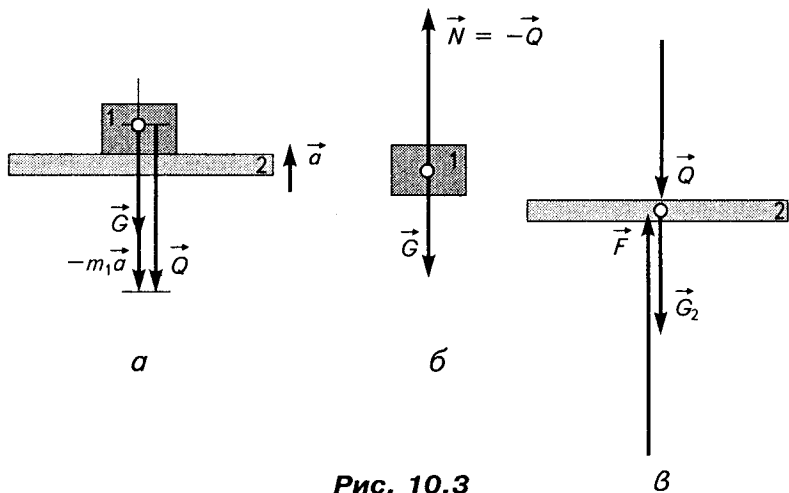


Рис. 10.3

звідки випливає, що під час виведення ракети на орбіту з прискоренням, яке дорівнює k -кратному прискоренню сили земного тяжіння, тиск людини на сидіння перевищуватиме її власну вагу в $k + 1$ разів. Це й є перевантаженням, що діє на організм людини.

Як і в розглянутому раніше випадку, визначимо силу, яку потрібно прикласти до платформи, щоб забезпечити її прискорений рух по вертикалі вгору. Застосовуючи основний закон динаміки до руху платформи, вважатимемо силу F додатною, якщо її напрям збігається з напрямом прискорення платформи. Дістаємо

$$m_2 a = F - Q - m_2 g = F - m_1 g - m_1 a - m_2 g = F - (m_1 + m_2)g - m_1 a,$$

$$(m_1 + m_2)a = F - (m_1 + m_2)g,$$

звідки знаходимо

$$F = (m_1 + m_2)(g + a).$$

Дана формула показує, що сила, яку треба прикласти до платформи з боку двигуна, має бути такою, щоб подолати загальну вагу системи й, крім того, створити необхідну рушійну силу

$$F_{\text{руш}} = (m_1 + m_2)a,$$

яка подолає б інерційну силу системи «тіло—платформа» (рис. 10.3, в).

Згадаймо, що інерційна сила Ньютона згідно із законом рівності дії та протидії протилежна рушійній силі, дорівнює їй за модулем і прикладена своїми складовими до двигуна, який розвиває силу \vec{F} , і до Землі, котра притягує систему до свого центра із силою власної ваги системи. Маємо векторну рівність

$$\vec{\Phi} = -(m_1 + m_2)\vec{a} = -\vec{F} + (\vec{G}_1 + \vec{G}_2).$$

Тут у правій частині перший член — складова активної інерційної сили, яка діє на двигун привода платформи

$$\vec{\Phi}_a = -\vec{F},$$

другий — складова також активної інерційної сили, яка діє вже на Землю,

$$\vec{\Phi}_{a12} = -(\vec{G}_1 + \vec{G}_2).$$

■ **Задача про взаємодію спарника з кривошипами в механізмі спарника.** Розглянемо рух механізму спарника (рис. 10.4), який складається з двох паралельних кривошипів 1 і 2 однакової довжини r і власне спарника 3 масою m_3 . Кривошипи обертаються з постійною кутовою швидкістю ω . Визначити, в якому положенні кривошипів, що визначається кутом повороту φ (кут відкладається від горизонтальної прямої в напрямі кутової швидкості кривошипів), на них діють найбільші осьові сили.

Поступальний рух спарника є коловим із доцентровим прискоренням

$$\vec{a}_{n3} = a_{\text{доц}} = \omega^2 r \vec{n},$$

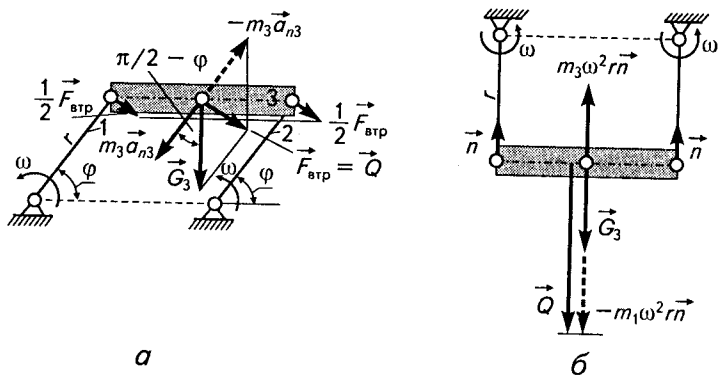


Рис. 10.4

яке напрямлене паралельно осям кривошипів до центра кола, по якому рухається середина спарника. Рушійна сила спарника

$$F_{\text{руш}} = m_3 \omega^2 r.$$

Утрачена сила спарника в нашому випадкові (рис. 10.4, а) визначається за формулою

$$F_{\text{втр}} = \sqrt{(m_3 \omega^2 r)^2 + (m_3 g)^2 - 2 m_3^2 \omega^2 r g \sin \varphi}.$$

Осьова сила, що розтягує кривошип, досягає максимального значення в положенні механізму, яке визначається кутом $\varphi = \frac{3}{2} \pi$. У цьому положенні спарник знаходиться нижче від горизонтальної осі, що проходить через центри обертань кривошипів, і перпендикулярний до кривошипів (рис. 10.4, б). Дістаємо

$$Q = \frac{1}{2} F_{\text{втр}} = \frac{1}{2} m_3 (\omega^2 r + g).$$

Значимо, що прискорення \vec{a}_{n3} спарнику надає рівнодійна $\vec{F}_{p,v}$ реакцій двох кривошипів і його власна вага \vec{G}_3 згідно з другим законом Ньютона:

$$m_3 \vec{a}_{n3} = \vec{F}_{p,v} + \vec{G}_3.$$

Рушійна сила спарника

$$F_{\text{руш}} = m_3 \omega^2 r \vec{n}$$

прикладена в його центрі мас (спарник вважається однорідним стержнем). Інерційна сила Ньютона

$$\vec{\Phi} = \vec{F}_{\text{руш}}$$

діє з двома складовими

$$\vec{\Phi}_a = -\vec{G}, \quad \vec{\Phi}_{p,v} = -\vec{F}_{p,v}$$

відповідно на Землю і кривошипи.

Через інерційну реактивну складову силу $\vec{\Phi}_{p,v} = -\vec{F}_{p,v}$ спарник у найнижчому положенні в своєму прискореному русі чинить динамічний тиск на кожен кривошип механізму у вигляді осьових сил

$$Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2} m_3 (\omega^2 r + g),$$

які намагаються видовжити кривошипи.

Якщо механізм у розглядуваному положенні перебуває в статичній рівновазі, то до окремого кривошипа прикладається розтягальна сила

$$Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2} m_3 g.$$

Тиски на в'язі в прискорених рухах поділяються на статичні й динамічні. Так і в задачі про рух механізму спарника тиск спарника на кривошип можна поділити на статичний

$$Q_{ст1} = Q_{ст2} = \frac{1}{2} m_3 g$$

і динамічний

$$Q_{дин1} = Q_{дин2} = \frac{1}{2} m_3 \omega^2 r.$$

Як видно з цих формул, статичний тиск на в'язь спричиняється активними силами, а динамічний — прискореним рухом.

□ Принцип Д'Аламбера для точки в абсолютному русі. Розглянемо довільний прискорений рух точки, на яку накладено в'язі, відносно абсолютно нерухомої декартової прямокутної системи осей $Oxuz$ (рис. 10.5, *a*).

Нехай маса цієї невільної точки буде m , її положення в осях $Oxuz$ у даний момент часу задається координатами x, y, z (рис. 10.5, *a*), а прискорення, якого вона набуває під дією рівнодійної активної сили \vec{F}_a і реакції в'язі $\vec{F}_{p,v}$, становить \vec{a} .

З попереднього відомо, що втрачена сила $\vec{F}_{втр}$, яка діє з боку точки на в'язі, дорівнює за модулем і протилежно напрямлена реакції в'язі $\vec{F}_{p,v}$:

$$\vec{F}_{втр} = -\vec{F}_{p,v}$$

або, якщо виразити втрачену силу через активну й рушійну сили,

$$\vec{F}_a - m\vec{a} = -\vec{F}_{p,v}.$$

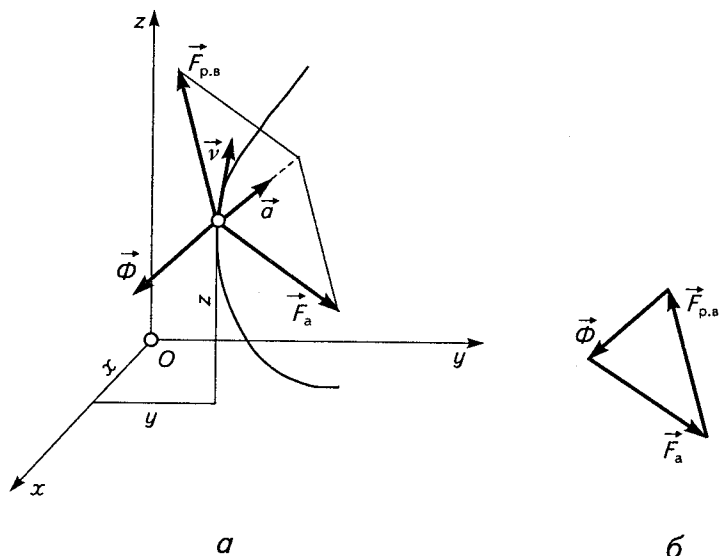


Рис. 10.5

Тепер усі члени запишемо в лівій частині:

$$\vec{F}_a + \vec{F}_{p,a} - m\vec{a} = 0. \quad (10.4)$$

Силою інерції Д'Аламбера назвемо силу, яка за модулем дорівнює рушійній силі, а за напрямом протилежна їй і умовно прикладена до точки. Позначивши її через \vec{F}_i , запишемо

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}. \quad (10.5)$$

Як бачимо, сила інерції Д'Аламбера за модулем і напрямом дорівнює інерційній силі Ньютона $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$:

$$\vec{F}_i = \vec{\Phi}.$$

Однак ці сили, як зазначалося в п. 10.1, мають характерні особливості. Інерційна сила Ньютона $\vec{\Phi}$ належить до фізичних сил, які реально діють і мають джерело дії — конкретні матеріальні тіла; ці сили підпорядковуються закону рівності дії та протидії. Сила інерції Д'Аламбера \vec{F}_i віртуальна — існує лише в нашій уяві, мислено прикладається до прискорено рухомої точки для виведення динамічних рівнянь руху з певною формою їх запису, а також спрощення процесу їх складання.

Проміжне рівняння (10.4) за нового позначення третього члена набирає вигляду

$$\vec{F}_a + \vec{F}_{p,v} + \vec{F}_i = 0. \quad (10.6)$$

Увівши віртуальну силу інерції Д'Аламбера, ми рівняння динаміки руху невільної точки подали у формі запису рівнянь статичної рівноваги.

Векторне рівняння (10.6) виражає *принцип Д'Аламбера для невільної точки: під час руху невільної точки відносно абсолютно нерухомої системи відліку прикладені до неї фізичні сили — активні й реакції в'язей — динамічно зрівноважуються силою інерції Д'Аламбера* (рис. 10.5).

На рис. 10.5, б з активної сили \vec{F}_a , реакції в'язі $\vec{F}_{p,v}$ і сили інерції Д'Аламбера \vec{F}_i побудовано замкнений силовий трикутник, у вершинах якого збігаються кінець і початок векторів сил, що є сусідніми сторонами трикутника, — це перша геометрична ознака — як динамічної зрівноваженості сил, так і статичної. Для динамічної рівноваги за Д'Аламбером, як і для статичної рівноваги в загальному випадкові, коли сил більше, ніж три, характерне те, що кількість сторін у силових багатокутниках дорівнює кількості сил, які зрівноважуються — динамічно чи статично. Це друга геометрична ознака зрівноваженості сил.

Звичайно, як д'аламберові сили інерції, так і сили інерції Ньютона мають розмірність фізичних сил.

- Одиниця сили інерції Д'Аламбера в СІ

$$\vec{F}_i = ma = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 = 1 \text{ Н}.$$

Далі на підставі векторного рівняння (10.6) запишемо скалярні рівняння динамічної рівноваги точки за Д'Аламбером у проєкціях на нерухомі декартові осі Ox , Oy , Oz , подібно до запису статичних умов рівноваги системи збіжних сил у проєкціях на декартові осі.

Уже зазначалося, що метод Д'Аламбера ефективний для визначення динамічних реакцій в'язей і відповідного динамічного тиску на в'язі за відомим рухом. Відомими в задачі є також активні (задані) сили: задаються модулі, напрями й точки прикладання цих сил. Крім того, може бути задана залежність активної сили від часу, координат і перших похідних від координат.

Спочатку вважатимемо, що рух точки заданий у декартових координатах:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Тоді за даними залежностями знаходимо проєкції прискорення \vec{a} точки на декартові осі Ox , Oy , Oz відповідно:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (10.7)$$

Із кінематики відомо, що геометрично проекції \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} зображуються сторонами прямокутного паралелепіпеда, паралельними декартові осям, діагональ якого є вектором прискорення \vec{a} . Проекції \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} вектора прискорення \vec{a} на декартові осі Ox , Oy , Oz є алгебричними значеннями його прямокутних складових \vec{a}_x , \vec{a}_y , \vec{a}_z у напрямках декартових осей.

Якщо вектор прискорення точки відомий, то можна визначити напрямні кути, які він утворює з декартовими осями, після чого відшукати проекції за формулами

$$\begin{aligned} a_x &= a \cos \angle(\vec{a}, x), \\ a_y &= a \cos \angle(\vec{a}, y), \\ a_z &= a \cos \angle(\vec{a}, z). \end{aligned} \quad (10.8)$$

За проекціями прискорення точки на декартові осі визначаємо проекції сили інерції Д'Аламбера на ці самі осі:

$$\begin{aligned} F_{i_x} &= -ma_x = -ma \cos \angle(\vec{a}, x), \\ F_{i_y} &= -ma_y = -ma \cos \angle(\vec{a}, y), \\ F_{i_z} &= -ma_z = -ma \cos \angle(\vec{a}, z) \end{aligned} \quad (10.9)$$

або через другі похідні за часом від декартових координат:

$$\begin{aligned} F_{i_x} &= -m\ddot{x}, \\ F_{i_y} &= -m\ddot{y}, \\ F_{i_z} &= -m\ddot{z}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Так само, розклавши в напрямках декартових осей Ox , Oy , Oz активну силу \vec{F}_a і реакцію в'язі $\vec{F}_{p.v}$, для кожної з них дістанемо по три прямокутні складові, алгебричні значення яких

$$\begin{aligned} F_{a_x} &= F_a \cos \angle(\vec{F}_a, x), & F_{p.v_x} &= F_{p.v} \cos \angle(\vec{F}_{p.v}, x), \\ F_{a_y} &= F_a \cos \angle(\vec{F}_a, y), & F_{p.v_y} &= F_{p.v} \cos \angle(\vec{F}_{p.v}, y), \\ F_{a_z} &= F_a \cos \angle(\vec{F}_a, z), & F_{p.v_z} &= F_{p.v} \cos \angle(\vec{F}_{p.v}, z). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Тут у правих частинах другими множниками є косинуси напрямних кутів векторів активної сили й реакції в'язі, які вони утворюють із декартовими осями.

Тепер на підставі векторного рівняння (10.6) принципу Д'Аламбера дістанемо три скалярні динамічні рівняння руху, які застосовуються для визначення динамічних реакцій в'язей і відповідних дина-

мічних тисків на ці в'язі точки за відомим її прискоренням та його напрямними кутами:

$$\begin{aligned} F_{ax} + F_{p,vx} + F_{ix} &= 0, \\ F_{ay} + F_{p,vy} + F_{iy} &= 0, \\ F_{az} + F_{p,vz} + F_{iz} &= 0 \end{aligned} \quad (10.12)$$

або

$$\begin{aligned} F_{ax} + F_{p,vx} - m\ddot{x} &= 0, \\ F_{ay} + F_{p,vy} - m\ddot{y} &= 0, \\ F_{az} + F_{p,vz} - m\ddot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Система рівнянь динаміки точки у формі Д'Аламбера (10.12) застосовується тоді, коли модуль і напрям прискорення точки відомі. Для визначення за цією системою рівнянь динамічних реакцій і відповідних динамічних тисків на в'язі необхідно розв'язати систему трьох алгебричних рівнянь із трьома невідомими проєкціями $F_{p,vx}$, $F_{p,vy}$, $F_{p,vz}$.

Система рівнянь динаміки точки у формі Д'Аламбера (10.13) може бути використана для розв'язування задач динаміки двох категорій — прямої та оберненої. До прямих задач належать такі, в яких кінематичні рівняння руху точки в декартових осях задані й для визначення із цієї системи невідомих проєкцій реакції в'язі на декартові осі спочатку обчислюють другі похідні за часом від декартових координат і підставляють їх у рівняння системи, після чого розв'язують систему трьох алгебричних рівнянь.

До обернених задач динаміки належать такі, в яких невідомими є не лише проєкції реакції в'язі на декартові осі, а й координати точки. Для їх розв'язання потрібні знання як спеціальних методів механіки, так і теорії диференціальних рівнянь, бо йдеться про систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку з шістьма невідомими: трьома проєкціями $F_{p,vx}$, $F_{p,vy}$, $F_{p,vz}$ і трьома декартовими координатами x , y , z , які входять у рівняння як другі похідні за часом.

■ **Тіло на прискорено рухомій платформі (метод Д'Аламбера).** Динаміку тіла на горизонтальній платформі, що рухається по вертикалі із заданим прискоренням, було розглянуто з погляду втрачених сил. Тут ми цю саму задачу дослідимо, скориставшись методом Д'Аламбера. Визначимо динамічний тиск тіла масою m на платформу в їх спільному русі із заданим прискоренням \bar{a} по вертикалі вгору (вниз).

Нехай платформа з тілом на ній прискорено рухається вниз (рис. 10.6). Візьмемо одну з декартових осей, наприклад Ox , і спрямуємо її вертикально

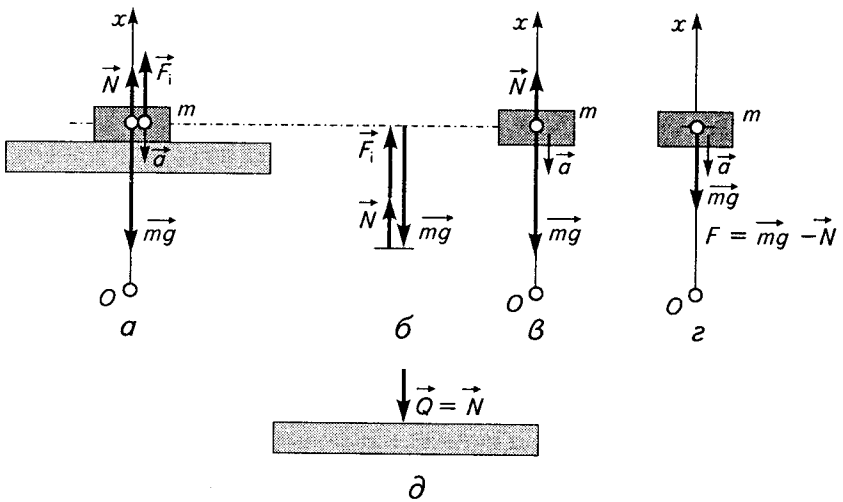


Рис. 10.6

вгору. Розв'язуючи задачу за принципом Д'Аламбера, вибирають довільне положення тіла під час його прискореного руху й у вигляді векторів зображують всі фізичні сили, що на нього діють у розглядуваному положенні.

Далі звертають увагу на напрям відомого прискорення \vec{a} тіла, після чого на підставі формули $\vec{F}_i = -m\vec{a}$ зображують у вигляді вектора силу інерції Д'Аламбера, тобто прикладають її до тіла й спрямовують протилежно його прискоренню. Ця частина силового аналізу називається побудовою схеми сил (гри сил), або силової схеми.

У нашому випадкові прискореного руху платформи з тілом на ній на тіло діють такі фізичні сили: його власна вага G і нормальна реакція \vec{N} платформи, яка прикладена до тіла й напрямлена по вертикалі вгору. Оскільки прискорення \vec{a} тіла, як і платформи, напрямлене вниз, то силу інерції Д'Аламбера \vec{F}_i спрямовуємо вгору. Таким чином, матимемо силову схему колінеарних сил (рис. 10.6, а).

Розглянемо два способи складання рівнянь динаміки за методом Д'Аламбера: спосіб проєкцій і геометричний спосіб силового многокутника. Застосуємо обидва способи для визначення шуканої реакції \vec{N} .

• *Спосіб проєкцій.* Алгебризуємо векторне рівняння (10.6), взявши суму проєкцій сил у його лівій частині на вісь Ox і прирівнявши її до нуля (рис. 10.6, а). Дістанемо скалярне рівняння

$$F_i + N - mg = 0,$$

в яке підставимо абсолютне значення сили інерції за формулою

$$F_i = ma.$$

Матимемо рівняння

$$ma + N - mg = 0.$$

Його розв'язок дає шукану реакцію платформи:

$$N = m(g - a).$$

Зрозуміло, що прискорення платформи має не перевищувати прискорення сили тяжіння, тобто $a \leq g$, бо в протилежному разі тіло відокремиться від неї.

• *Спосіб силового многокутника.* На підставі векторної рівності (10.6) будемо силовий трикутник. Для колінеарних сил, як у нашому випадкові, матимемо одновимірну геометричну фігуру (рис. 10.6, б). За рівноваги сил звертаємо увагу на вершини силового трикутника чи многокутника: в них збігаються початок і кінець двох сусідніх векторів сил.

Із рис. 10.6, б дістаємо таке саме рівняння для визначення невідомої реакції N , вважаючи N і F_i , наприклад, від'ємними величинами, а mg — додатною:

$$-N - F_i + mg = 0,$$

$$-N - ma + mg = 0.$$

Знайшовши за методом Д'Аламбера динамічну реакцію, усвідомлюємо, що насправді сила інерції Д'Аламбера не існує, бо це віртуальний об'єкт, який було введено лише для складання рівняння руху у формі рівнянь рівноваги статички. Дана сила інерції мислено прикладалася до точки й разом із фізичними силами давала нульову їхню векторну суму. Такий динамічний стан тіла, за якого векторна сума сили інерції Д'Аламбера й фізичних сил, що реально діють на тіло, ми назвали віртуальною, або динамічною, рівновагою.

Повертаємося до схеми фізичних сил, які діють на тіло в його прискореному русі вгору (рис. 10.6, в). Маємо, що на тіло в прискореному русі з напрямленим униз прискоренням \vec{a} реально діють лише дві сили: власна вага \vec{mg} і напрямлена вертикально вгору нормальна реакція платформи \vec{N} , які, додаючися за правилом паралелограма, дають рівнодійну $F = mg - N$, котра напрямлена вниз і надає тілу заданого прискорення a з таким самим напрямком (рис. 10.6, з). На саму платформу з боку тіла в його прискореному русі вниз (рис. 10.6, д) діє динамічний тиск \vec{Q} , який за модулем дорівнює втраченій силі тіла $m(a - g)$, $Q = -m(g - a)$, де $a > 0$. Звичайно, крім сили \vec{Q} , до платформи прикладені ще дві сили — її власна вага й сила з боку привода двигуна, про що вже йшлося раніше.

■ **Прискорений горизонтальний рух платформи з тілом на ній.** Нехай стичні поверхні тіла й платформи шорсткі й між ними відбувається тертя з коефіцієнтом f . Платформа здійснює горизонтальний прямолінійний поступальний рух із постійним прискоренням \vec{a} . Тіло, що розміщується на платформі, має масу m (рис. 10.7, а). Треба визначити, за якого прискорення $a_{\text{ковз}}$ почнеться ковзання тіла по платформі.

• *Метод Ньютона з використанням поняття ньютонівської інерційної сили.* Сили (фізичні), що реально діють на тіло, — це власна вага \vec{mg} тіла, нор-

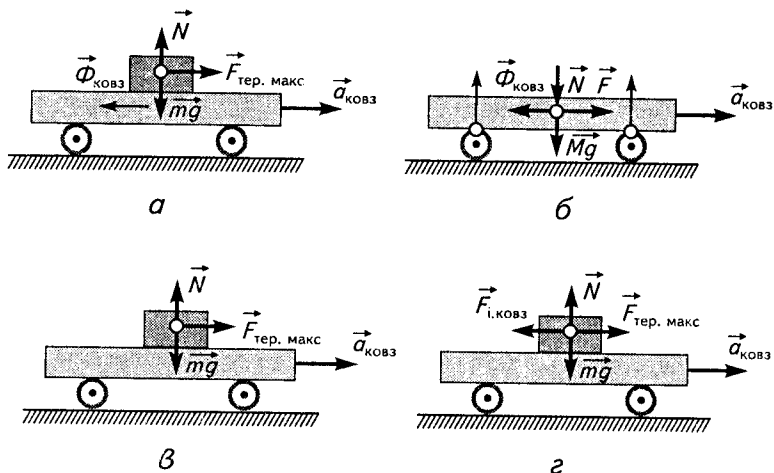


Рис. 10.7

мальна реакція платформи \vec{N} , яка напрямлена вертикально вгору, й сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$, що може мати будь-яке значення в межах

$$0 \geq F_{\text{тер}} \leq F_{\text{тер. макс}}, \quad (10.14)$$

де $F_{\text{тер. макс}}$ — максимальне значення сили тертя, за якого починається ковзання (рис. 10.7, а).

Згідно із законом Кулона про тертя максимальна сила тертя ковзання визначається за формулою

$$F_{\text{тер. макс}} = fQ_n, \quad (10.15)$$

де f — коефіцієнт тертя, який залежить від фізичного стану стичних поверхонь тіл; Q — нормальний динамічний тиск тіла на платформу; в нашому випадкові — це статичний тиск, який за модулем дорівнює нормальній реакції, але протилежно напрямлений.

Якщо прискорення платформи й тіла, що перебуває на ній у відносному спокої, збільшується від нуля необмежено, то зростатиме й інерційна сила Ньютона

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}, \quad (10.16)$$

але до певного граничного значення

$$\vec{\Phi}_{\text{гр}} = -ma_{\text{гр}}. \quad (10.17)$$

Даній граничній інерційній силі $\vec{\Phi}_{\text{гр}}$ протидіє максимальна сила тертя $\vec{F}_{\text{тер. макс}}$ за якої вже почнеться ковзання тіла по платформі. Ці сили за законом рівності дії та протидії однакові за модулем і протилежні за напрямом. Перша сила внаслідок тертя діє на платформу й напрямлена проти її прискореного руху, друга — на тіло, якому вона надає граничного прискорення $a_{\text{гр}}$.

Оскільки за ковзання інерційна сила Ньютона й максимальна сила тертя ковзання досягають можливих граничних значень, то маємо

$$ma_{\text{ковз. гр}} = fmg,$$

звідки визначаємо граничне значення прискорення платформи:

$$a_{\text{ковз. гр}} = fg.$$

Підсумок: якщо прискорення платформи нульове, то інерційна сила й сила тертя також нульові. Зі збільшенням прискорення платформи від нульового значення до граничного водночас зростатимуть як інерційна сила Ньютона, так і сила тертя спокою.

Через тертя прискорений рух платформи передається до тіла, й інерція маси прискореного тіла проявляється як опір рухові платформи (за Ньютоном). Уявімо, що в нашій ситуації стичні поверхні тіла й платформи ідеально гладкі, без тертя; тоді інерція маси тіла проявляється в стані спокою, бо немає силового зв'язку між тілом і платформою в горизонтальному напрямі, який спричинив би виведення тіла з цього стану.

За граничного фрикційного силового зв'язку між платформою та тілом, коли сила тертя максимальна й тіло набуває найбільшого прискорення, подальше зростання прискорення платформи не впливатиме на рух тіла: незалежно від значення прискорення платформи воно перебуватиме в абсолютному рівноприскореному русі з граничним прискоренням.

Щодо силового впливу на платформу (рис. 10.7, б), то тут треба враховувати такі сили в горизонтальному напрямі: рівнодійну (рушійну) силу $\vec{F}_{\text{руш}}$, яка надає платформі заданого граничного прискорення $a_{\text{гр}}$, і її складові — граничну інерційну силу $\vec{F}_{\text{ковз}} = -m\vec{a}_{\text{ковз}}$, що діє проти напрямку руху платформи, та силу \vec{F} , яка прикладена до платформи з боку двигуна й приводить її в рух.

Якщо масу платформи позначити через M , то на підставі другого закону Ньютона можна записати рівняння

$$Ma_{\text{ковз}} = F - mfg.$$

Звідси визначаємо приводну силу, яку треба прикласти до платформи, щоб вона рухалася з граничним прискоренням:

$$F = Ma_{\text{ковз}} + mfg,$$

або, врахувавши, що $a_{\text{ковз}} = fg$,

$$F = (M + m)fg.$$

Зробимо зауваження. Під час розгляду руху платформи не враховувались інші сили, які напрямлені проти її руху, наприклад сили опору коліс, у тому числі сили тертя й інерція коліс.

Тепер застосуємо другий закон Ньютона до тіла на платформі (рис. 10.7, в) і визначимо граничне прискорення платформи, за якого тіло на ній знаходиться на межі проковзування. В горизонтальному напрямі на тіло в гранич-

ному стані діє лише максимальна сила тертя $\vec{F}_{\text{тер. макс}}$, що має напрям прискорення $\vec{a}_{\text{ковз}}$. Отже,

$$ma_{\text{ковз}} = F_{\text{тер. макс}} = fmg,$$

звідки приходимо до шуканої відповіді

$$a_{\text{ковз}} = fg.$$

• *Метод Д'Аламбера.* Якщо до тіла в горизонтальному напрямі прикласти граничну силу інерції Д'Аламбера

$$\vec{F}_{\text{i. ковз}} = -m\vec{a}_{\text{ковз}},$$

то матимемо динамічну рівновагу тіла, до якого прикладена максимальна сила тертя $\vec{F}_{\text{тер. макс}}$, що реально діє, й віртуальна сила інерції Д'Аламбера (рис. 10.7, з). На підставі векторного рівняння принципу Д'Аламбера

$$\vec{F}_a + \vec{F}_{\text{р.п}} + \vec{F}_i = 0$$

записуємо

$$\vec{F}_{\text{i. ковз}} + \vec{F}_{\text{тер. макс}} = 0.$$

Ці сили колінеарні, отже, дістаємо скалярне рівняння

$$-ma_{\text{ковз}} + fmg = 0,$$

яке дає те саме значення граничного прискорення платформи.

□ **Принцип Д'Аламбера для механічної системи.** Як відомо, механічною системою називають будь-яку сукупність тіл, не обов'язково твердих, а й газів, рідин тощо, в якій положення та рух її складових частин між собою зв'язані. Прикладами природних механічних систем можуть бути Сонячна система, вода у водоймі, річці, атмосфера Землі, а створеними людиною — орбітальна станція, автомобіль, будь-яка будівельна конструкція, годинник.

У механічних системах відбуваються різні за природою явища: механічні, теплові, електромагнітні, хімічні та ін. У теоретичній механіці увага зосереджується виключно на механічних рухах, які відбуваються в механічних системах, і на основі законів Ньютона визначаються їхні найзагальніші властивості.

Як відомо, теоретична механіка ґрунтується на фундаментальних законах Ньютона, найважливішим з яких є його другий закон, котрий можна безпосередньо застосувати до дуже малої частинки тіла (відношення розмірів якої до розмірів самого тіла близьке до нуля), або до абсолютно твердого тіла, що рухається поступально; тіло в такому найпростішому русі береться за точку зі збереженням його маси — це матеріальна точка; матеріальною точкою (надалі — просто точка) є також уже згадувана частинка тіла.

Уточнимо поняття цього модельного об'єкта, яким є точка, у зв'язку з дослідженням руху механічної системи за принципом Д'Аламбера. Другий закон динаміки відображує залежність між прискоренням точки й силою, яка діє на неї, і щоб цей закон взяти за основу для дослідження загальних властивостей руху механічних систем, потрібно вдатися до еквівалентної заміни механічної системи, в яку входять різні за структурою й фізичними властивостями матеріальні об'єкти, системою точок.

Якщо є система точок, то стає зрозумілим підхід до вивчення руху механічної системи: до кожної її точки необхідно застосувати основний закон динаміки. При цьому слід урахувувати силові дії на окремі точки системи з боку як самих її точок, так і зовнішніх матеріальних об'єктів, що не належать до розглядуваної механічної системи.

Ідея дискретної заміни механічної системи системою точок полягає в тому, що кожне її матеріальне тіло мислено (віртуально) ділиться по замкнених розмежовувальних поверхнях на безліч малих частинок, обертальним рухом і зміною розмірів яких можна знехтувати. Таким чином дістають систему великої, але обмеженої кількості частинок, кожна з яких рухається поступально. Масу кожної частинки системи мислено зосереджують в їхніх центрах мас. Після таких віртуальних перетворень механічна система стає ідеалізованою — системою точок, положення яких збігається з центрами мас частинок, на які попередньо поділено механічну систему.

Щоб силові зв'язки в новій системі точок і в реальній механічній системі були еквівалентними, а також щоб конфігурації обох систем були тотожними, треба до кожної точки модельної механічної системи прикласти рівнодійну силу, що є результатом дії на окремі матеріальні частинки інших сусідніх частинок, які замінено точками. Ці рівнодійні, що належать до внутрішніх сил взаємодії точок у системі, позначимо через \vec{F}_{nk} , де k — номер частинки в системі.

Крім того, на частинки реальної механічної системи діють рівнодійні зовнішні щодо неї сили, які прикладені до центрів мас частинок. У модельній механічній системі ці зовнішні рівнодійні сили також прикладені до її точок. Позначимо їх через \vec{F}_{zk} .

Тотожність у конфігураціях реальної та модельної механічних систем забезпечується силовими зв'язками, які однакові в обох системах і характеризуються внутрішніми силами. Заміна реальних механічних систем еквівалентними їм модельними вможливує застосування розроблених методів дослідження динаміки руху точки до вивчення загальних властивостей динаміки руху та статичної рівноваги системи точок.

Зазначимо, що теореми, принципи й положення механіки для модельної механічної системи справедливі й у випадку руху та рівноваги реальної механічної системи.

Розрізняють вільні й невільні механічні системи. Для вільної механічної системи (наприклад Сонячної системи) характерне те, що її положення й рух як цілого, а також її складових нічим не обмежені. Інакше кажучи, це система, на яку не накладено ніяких в'язей. Невільною називається механічна система, на положення й рух тіл якої накладені обмеження матеріального характеру, тобто в'язі.

Механічні системи, створені людиною, належать до невільних. Для таких систем у цьому пункті встановлюється принцип Д'Аламбера. В невільних механічних системах всі накладені на них в'язі можна поділити на внутрішні й зовнішні. Зовнішні в'язі обмежують положення й рух механічної системи як єдиного цілого в припущенні, що конфігурація її незмінна, а внутрішні — обмежують взаємні положення й рухи тіл відносно одне одного.

Як приклад невільної механічної системи візьмемо кривошипно-шатунний механізм двигуна внутрішнього згорання. Кривошип, шатун і палець, яким вони з'єднані, а також поршень і палець, яким він приєднаний до шатуна, — це складові частини механізму, тіла, що утворюють механічну систему — даний механізм. Без зовнішніх в'язей механізм не відповідав би своєму призначенню.

До зовнішніх в'язей кривошипно-шатунного механізму належать стінки блока циліндрів і опора в двигуні, в якій за допомогою підшипника закріплено кривошип механізму. Внутрішніми в'язями є зчленування кінців кривошипа й шатуна, шатуна й поршня, а також жорсткі зв'язки між частинками складових механізму, які роблять ці тіла абсолютно твердими, незмінюваними під час руху механізму.

Наявність в'язей — як внутрішніх, так і зовнішніх, зумовлює зміну руху механізму, а отже, виникнення додаткових прискорень, крім тих, що надаються заданими (активними) внутрішніми й зовнішніми силами. Ці додаткові прискорення спричинюються реакціями в'язей — силами, які у випадку руху мають інерційну природу, зумовлені масами тіл.

Позначимо рівнодійні зовнішніх і внутрішніх реакцій в'язей, які діють на точки механічної системи, через $\vec{F}_{p,n,zk}$ і $\vec{F}_{p,n,bk}$ відповідно.

Тепер звернемо увагу, що в системі зовнішніх і внутрішніх сил механічної системи можна виокремити дві групи активних (заданих) сил — внутрішні й зовнішні. Позначимо їх через $\vec{F}_{a,n,k}$, $\vec{F}_{a,zk}$ відповідно, де k — номер точки; при $k = 1, 2, 3, \dots, n$ матимемо всю систему активних сил — як внутрішніх, так і зовнішніх.

Розглянемо рух модельної механічної системи, котрою замінено довільну реальну механічну систему, відносно абсолютно нерухомої,

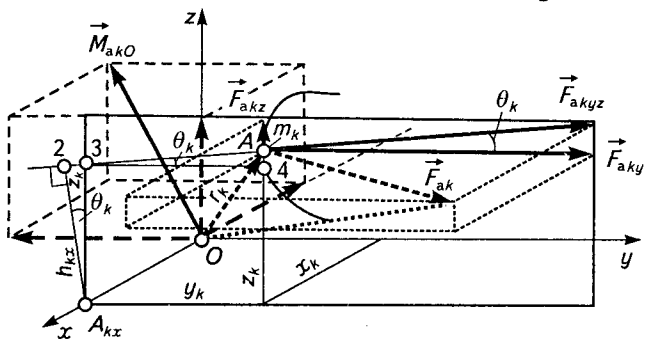
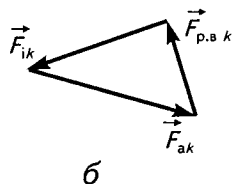
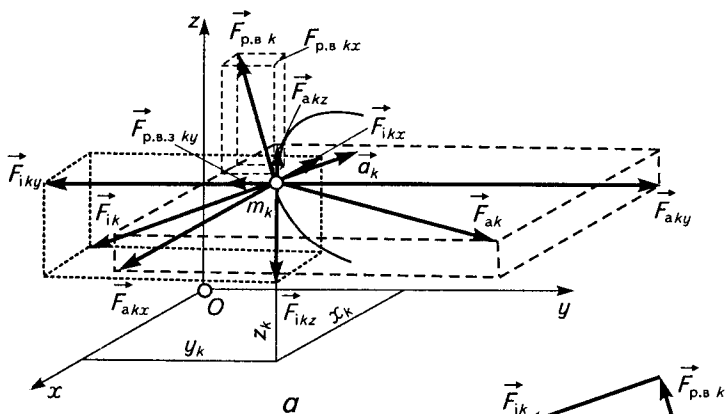


Рис. 10.8

або інерціальної, системи відліку, з якою незмінно зв'язана декартова прямокутна система осей $Oxyz$ (рис. 10.8, а).

Нехай m_k , де $k = 1, 2, 3, \dots, n$, — маси точок механічної системи. Таким записом ми задаємо маси всіх точок. До них прикладені сили, що реально діють:

$$\vec{F}_{ak} = \vec{F}_{a.v.k} + \vec{F}_{a.3k}, \quad \vec{F}_{p.v.k} = \vec{F}_{p.v.v.k} + \vec{F}_{p.v.3k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Якщо до точок прикладені ще сили інерції Д'Аламбера, то $\vec{F}_{ik} = -m_k \vec{a}_k$, де $k = 1, 2, 3, \dots, n$, і рухому механічну систему можна

розглядати як таку, що перебуває в динамічній рівновазі (віртуальній). Щоб дістати принцип Д'Аламбера для невільної механічної системи, застосуємо для всіх її точок векторне рівняння (10.6) принципу Д'Аламбера для однієї точки. Матимемо

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ak} + \vec{F}_{p,вk} + \vec{F}_{ik} &= 0, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Ці n векторних рівнянь, яким відповідають n силових трикутників зі сторонами \vec{F}_{ak} , $\vec{F}_{p,вk}$, \vec{F}_{ik} , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ (рис. 10.8, б), математично виражають *принцип Д'Аламбера для невільної механічної системи* (рис. 10.8, а): *під час руху невільної механічної системи відносно абсолютно нерухомої, або інерціальної, системи відліку реально прикладені до її точок активні сили й реакції в'язей динамічно зрівноважуються з умовно прикладеними до цих самих точок д'аламберовими силами інерції.*

Нагадаємо, що вектори д'аламберових сил інерції, як і сил, що реально діють, прикладені до точок механічної системи. Однак, на відміну від активних сил і реакцій в'язей, д'аламберові сили інерції ніякого силового впливу на точки механічної системи не справляють. Як зазначалося раніше, ці сили віртуальні, існують лише в нашій уяві, але їх використання дає змогу за правилами статички складати рівняння динаміки руху механічної системи у формі рівнянь рівноваги сил у статиці.

Алгебризуємо векторні рівняння принципу Д'Аламбера (10.18), розклавши кожна з трьох сил в їхніх лівих частинах на три складові в напрямках декартових осей (рис. 10.8, а, б), і на підставі динамічної рівноваги колінеарних сил у напрямках цих осей приходимо до системи $3n$ скалярних рівнянь динаміки руху системи точок, представлених у формі рівнянь рівноваги статички:

$$\begin{aligned} F_{akx} + F_{p,вkx} + F_{ikx} &= 0, \\ F_{aky} + F_{p,вky} + F_{iky} &= 0, \\ F_{akz} + F_{p,вkz} + F_{ikz} &= 0, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, n, \end{aligned} \quad (10.19)$$

або, врахувавши формули проєкцій д'аламберових сил інерції на декартові осі:

$$\begin{aligned} F_{akx} + F_{p,вkx} - m_k \ddot{x}_k &= 0, \\ F_{aky} + F_{p,вky} - m_k \ddot{y}_k &= 0, \\ F_{akz} + F_{p,вkz} - m_k \ddot{z}_k &= 0, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Рівняння (10.20), в яких проекції д'аламберових сил інерції на декартові осі виражені через другі похідні за часом від координат точок, називаються *диференціальними рівняннями руху системи точок у декартових координатах у формі Д'Аламбера*.

□ **Наслідки принципу Д'Аламбера.** У подальших міркуваннях за основу візьмемо векторні рівняння принципу Д'Аламбера (10.18), в яких виразимо відповідні рівнодійні через їхні складові:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{a,bk} + \vec{F}_{a,3k} + \vec{F}_{p,v,vk} + \vec{F}_{p,v,3k} + \vec{F}_{ik} &= 0, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Додавши ці n векторних рівнянь, дістанемо одне рівняння вигляду

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_{a,bk} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{a,3k} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{p,v,vk} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{p,v,3k} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} = 0.$$

Звернемо увагу на суми

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_{a,bk}, \quad \sum_{k=1}^n \vec{F}_{p,v,vk}.$$

Усі внутрішні активні сили й реакції в'язей згідно з третім законом Ньютона можна поділити на пари рівних за модулем і протилежно напрямлених сил. Тому суми внутрішніх сил і суми внутрішніх реакцій в'язей у механічній системі дорівнюють нулю. Отже, маємо рівності

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_{a,bk} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \vec{F}_{p,v,vk} = 0,$$

урахувавши які в сумарному рівнянні, дістанемо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_{a,3k} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{p,v,3k} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} = 0. \quad (10.21)$$

Векторна сума всіх активних зовнішніх сил $\sum_{k=1}^n \vec{F}_{a,3k}$, що діють на механічну систему, називається головним вектором зовнішніх сил механічної системи. Позначивши його через $\vec{R}_{a,3}$, матимемо

$$\vec{R}_{a,3} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{a,3k}. \quad (10.22)$$

Векторна сума всіх зовнішніх реакцій в'язей $\sum_{k=1}^n \vec{F}_{p,v,3k}$, що діють на механічну систему, називається головним вектором зовнішніх реак-

цій в'язей механічної системи. Позначивши його через $\bar{R}_{p.v.3}$, запишемо

$$\bar{R}_{p.v.3} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_{p.v.3 k}. \quad (10.23)$$

Векторна сума всіх умовно прикладених до точок механічної системи сил інерції Д'Аламбера $\sum_{k=1}^n \bar{F}_{ik}$ називається головним вектором сил інерції Д'Аламбера механічної системи. Позначивши його через \bar{R}_i , матимемо

$$\bar{R}_i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_{ik}. \quad (10.24)$$

У виразах головних векторів (10.22)—(10.24), що відповідають трьом категоріям сил системи — зовнішнім активним, зовнішнім реакціям в'язей і віртуальним силам інерції Д'Аламбера, перше сумарне векторне рівняння принципу Д'Аламбера подамо у вигляді

$$\bar{R}_{a.3} + \bar{R}_{p.v.3} + \bar{R}_i = 0. \quad (10.25)$$

Дане сумарне векторне рівняння є *першим наслідком принципу Д'Аламбера для механічної системи*: під час руху невідільної механічної системи головний вектор зовнішніх активних сил, що реально діють на механічну систему, і головний вектор зовнішніх реакцій в'язей динамічно зрівноважуються з головним вектором умовно прикладених до точок системи д'аламберових сил інерції.

Один цей наслідок не може повністю описати динаміку руху механічної системи як єдиного цілого: він відображує лише динаміку поступальної складової її загального руху. Обертальна складова характеризується другим наслідком принципу Д'Аламбера, який тісно пов'язаний із поняттям вектора-моменту сили відносно точки й декартових осей.

Момент сили відносно точки є векторною величиною, що обчислюється як векторний добуток радіуса-вектора точки прикладання сили \vec{r} на вектор сили \vec{F} :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (10.26)$$

Вектор-момент \vec{M}_O перпендикулярний до площини, в якій знаходяться радіус-вектор \vec{r} точки прикладання сили й вектор сили \vec{F} ; його напрям визначається за правилом правого гвинта: поступальний рух гвинта в гайці вказує на напрям вектора-моменту, якщо при цьому напрям обертання гвинта в гайці збігається з напрямом, в якому сила

намагається повернути радіус-вектор точки. Абсолютне значення M_O вектора-моменту \vec{M}_O визначається модулем векторного добутку (10.26):

$$M_O = rF |\sin \delta|, \quad (10.27)$$

де δ — кут між напрямками векторів \vec{r} і \vec{F} .

Схеми рис. 10.8, в, 10.9 ілюструють розклад вектора-моменту \vec{M}_{a_kO} активної сили \vec{F}_{ak} відносно центра O на прямокутні складові в напрямках декартових осей:

$$\vec{M}_{a_kO} = \vec{M}_{akx} + \vec{M}_{aky} + \vec{M}_{akz}.$$

Алгебричні значення цих прямокутних складових є проєкціями вектора-моменту \vec{M}_{a_kO} на декартові осі:

$$\vec{M}_{akx} = M_{a_kO} \cos \alpha_k, \quad \vec{M}_{aky} = M_{a_kO} \cos \beta_k, \quad \vec{M}_{akz} = M_{a_kO} \cos \gamma_k.$$

Ці проєкції називають моментами сили відносно декартових осей Ox , Oy , Oz відповідно.

Для моментів сили відносно декартових осей справедливі такі залежності (рис. 10.8, в):

$$\vec{M}_{akx} = y_k F_{akz} - z_k F_{aky} = M_{Ax}(\vec{F}_{akyz}) = -F_{akyz} h_{kx},$$

$$\vec{M}_{aky} = z_k F_{akx} - x_k F_{akz} = M_{Ay}(\vec{F}_{akxz}) = -F_{akxz} h_{ky},$$

$$\vec{M}_{akz} = x_k F_{aky} - y_k F_{akx} = M_{Az}(\vec{F}_{akyx}) = F_{akyx} h_{kz}.$$

Справді, з прямокутних трикутників $3A4$ і $A_{kx}23$ виводимо першу формулу:

$$\begin{aligned} h_{kx} &= (z_k - y_k \operatorname{tg} \theta_k) \cos \theta_k = z_k \cos \theta_k - y_k \sin \theta_k = \\ &= z_k \frac{F_{akx}}{F_{ak}} - y_k \frac{F_{aky}}{F_{ak}} = \frac{z_k F_{aky} - y_k F_{akx}}{F_{ak}}; \\ &-F_{ak} h_{kx} = y_k F_{akz} - z_k F_{aky}. \end{aligned}$$

Аналогічно встановлюються інші дві залежності.

Добутий результат дає таке *правило*: момент сили відносно декартової осі дорівнює моменту проєкції сили на перпендикулярну до осі площину відносно точки перетину осі й площини.

Повертаємося до другого наслідку принципу Д'Аламбера. За основу в наших викладках візьмемо систему векторних рівнянь принципу Д'Аламбера (10.18). З початку O декартової системи осей $Oxyz$ проведемо в кожну точку механічної системи радіус-вектор \vec{r}_k

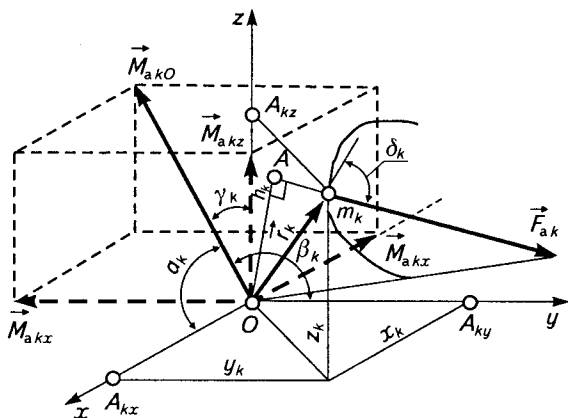


Рис. 10.9

(рис. 10.9) і векторно помножимо його на ліву частину рівностей (10.18). Матимемо

$$\vec{r}_k \times (\vec{F}_{ak} + \vec{F}_{p.v.k} + \vec{F}_{i.k}) = 0,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

або за законом дистрибутивності

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_{ak} + \vec{r}_k \times \vec{F}_{p.v.k} + \vec{r}_k \times \vec{F}_{i.k} = 0,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Тепер додамо ці n векторних рівностей, у результаті чого дістанемо одне сумарне рівняння

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{ak} + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{p.v.k} + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{i.k} = 0.$$

Виразимо в ньому активні сили й реакції в'язей через їхні складові — внутрішні й зовнішні активні сили та реакції в'язей:

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times (\vec{F}_{a.v.k} + \vec{F}_{a.z.k}) + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times (\vec{F}_{p.v.v.k} + \vec{F}_{p.v.z.k}) + \sum_{r=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{i.k} = 0$$

або, застосувавши закон дистрибутивності,

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{a.v.k} + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{a.z.k} + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{p.v.v.k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{p.v.z.k} + \sum_{r=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{i.k} = 0.$$

Тут окремі доданки є векторними сумами моментів усіх розглядуваних категорій сил відносно нерухомого центра O , початку координат. Ці суми називаються головними моментами сил відносно нерухомого центра. Введемо позначення:

$$\begin{aligned}\bar{M}_{a.nO} &= \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_{a.vk}, & \bar{M}_{a.zO} &= \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_{a.zk}, & \bar{M}_{p.v.vO} &= \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_{p.v.vk}, \\ \bar{M}_{p.v.zO} &= \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_{p.v.zk}, & \bar{M}_{iO} &= \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_{ik}.\end{aligned}$$

Головні моменти внутрішніх сил і реакцій в'язей механічної системи відносно нерухомого центра як моменти попарно рівних і протилежно напрямлених сил дорівнюють нулю:

$$\bar{M}_{a.nO} = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_{a.vk} = 0, \quad \bar{M}_{p.v.vO} = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_{p.v.vk} = 0.$$

Тоді в сумарній векторній рівності залишаються члени, які є відповідно головним моментом усіх зовнішніх активних сил механічної системи відносно нерухомого центра $\bar{M}_{a.zO}$, головним моментом усіх зовнішніх реакцій в'язей механічної системи відносно того самого центра $\bar{M}_{p.v.zO}$ і головним моментом сил інерції Д'Аламбера, умовно прикладених до точок механічної системи, відносно того самого спільного нерухомого центра \bar{M}_{iO} .

Отже, приходимо до *другого наслідку принципу Д'Аламбера*:

$$\bar{M}_{a.zO} + \bar{M}_{p.v.zO} + \bar{M}_{iO} = 0. \quad (10.28)$$

Під час руху невільної механічної системи векторна сума головних моментів зовнішніх сил та реакцій в'язей, що реально діють на точки системи, та умовно прикладених до точок системи сил інерції Д'Аламбера відносно нерухомого центра O дорівнює нулю.

Рівняння (10.28) описує у формі Д'Аламбера динаміку обертальної складової загального руху механічної системи навколо нерухомого центра, характер якої залежить від вибору цього центра. Щодо поступальної складової динаміки загального руху механічної системи, яка описується рівнянням (10.25), то вона не залежить від вибору центра моментів сил під час визначення головних моментів механічної системи.

□ Універсальні рівняння динаміки руху механічної системи у формі Д'Аламбера та умови рівноваги. • *Векторна форма.* Випишемо рівняння (10.25) і (10.28) окремо в систему:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{a.z} + \bar{R}_{p.v.z} + \bar{R}_i &= 0; \\ \bar{M}_{a.zO} + \bar{M}_{p.v.zO} + \bar{M}_{iO} &= 0.\end{aligned} \quad (10.29)$$

Це два наслідки принципу Д'Аламбера — універсальні векторні рівняння динаміки загального руху будь-якої невільної механічної системи у формі Д'Аламбера.

Ввівши позначення

$$\begin{aligned}\bar{R}_3 &= \bar{R}_{a,3} + \bar{R}_{p,v,3}; \\ \bar{M}_i &= \bar{M}_{a,3O} + \bar{M}_{p,v,3O},\end{aligned}$$

матимемо

$$\begin{aligned}\bar{R}_3 + \bar{R}_i &= 0; \\ \bar{M}_{3O} + \bar{M}_{iO} &= 0.\end{aligned}\tag{10.30}$$

Отже, під час руху невільної механічної системи динамічно зрівноважуються головні вектори її зовнішніх активних сил і реакцій в'язей з головним вектором сил інерції Д'Аламбера, а також головні моменти цих самих зовнішніх активних сил і реакцій в'язей відносно нерухомого центра з головним моментом сил інерції Д'Аламбера відносно того самого центра.

• *Скалярна форма.* Рівняння (10.29) подамо в проекціях на нерухомі декартові осі Ox , Oy , Oz , скориставшись формулами проекцій сили на декартові осі

$$F_x = F \cos \angle(\bar{F}, x), \quad F_y = F \cos \angle(\bar{F}, y), \quad F_z = F \cos \angle(\bar{F}, z),$$

а також формулами моментів сили відносно декартових осей

$$M_x = M_x(\bar{F}) = h_x F_{yz}, \quad M_y = M_y(\bar{F}) = h_y F_{xz}, \quad M_z = M_z(\bar{F}) = h_z F_{xy}$$

або

$$\begin{aligned}M_x &= yF_z - zF_y, \\ M_y &= zF_x - xF_z, \\ M_z &= xF_y - yF_x.\end{aligned}$$

Матимемо

$$\begin{aligned}R_{3x} + R_{ix} &= 0, \\ R_{3y} + R_{iy} &= 0, \\ R_{3z} + R_{iz} &= 0; \\ M_{3x} + M_{ix} &= 0, \\ M_{3y} + M_{iy} &= 0, \\ M_{3z} + M_{iz} &= 0.\end{aligned}\tag{10.31}$$

Скалярні рівняння (10.31) називаються *універсальними аналітичними рівняннями динаміки руху невільної механічної системи у формі Д'Аламбера*: під час руху невільної механічної системи (абсолютно твердого тіла) суми проєкцій усіх зовнішніх сил, що діють на неї, — як активних, так і реакцій в'язей, та сил інерції Д'Аламбера на три взаємно перпендикулярні декартові осі дорівнюють нулю, а також нулю дорівнюють суми моментів цих сил відносно тих самих декартових осей.

Розглянемо умови рівноваги невільної механічної системи (тіла).

• *Векторні умови.* Якщо в рівняннях (10.30) головний вектор і головний момент сил інерції Д'Аламбера прирівняти до нуля, то дістанемо шукані векторні умови рівноваги:

$$\begin{aligned}\bar{R}_3 &= 0; \\ \bar{M}_{3O} &= 0.\end{aligned}\tag{10.32}$$

Механічна система (тіло) перебуває в статичній рівновазі, якщо головний вектор усіх зовнішніх сил — як активних, так і реакцій в'язей, і головний момент цих самих сил відносно довільної точки дорівнюють нулю.

• *Аналітичні умови.* Двом векторним рівнянням (10.30) відповідають шість алгебризованих методом проєкцій на декартові осі аналітичних умов рівноваги механічної системи (тіла):

$$\begin{aligned}R_{3x} &= 0, & R_{3y} &= 0, & R_{3z} &= 0; \\ M_{3x} &= 0, & M_{3y} &= 0, & M_{3z} &= 0.\end{aligned}\tag{10.33}$$

Механічна система (тіло) перебуває в статичній рівновазі, якщо суми проєкцій усіх зовнішніх сил, що діють на неї, на три декартові осі дорівнюють нулю, а також нулю дорівнюють суми моментів усіх цих сил відносно тих самих декартових осей.

10.3

Сили інерції Д'Аламбера та їхні головний вектор і головний момент

Сили інерції Д'Аламбера в криволінійному русі точки. Нехай маємо довільний криволінійний рух точки масою m із прискоренням \bar{a} по заданій траєкторії відносно абсолютно нерухомої (інерціальної) системи відліку (рис. 10.10).

На заданій траєкторії положення точки визначається законом зміни дугової координати від часу: $s = s(t)$. За цим кінематичним

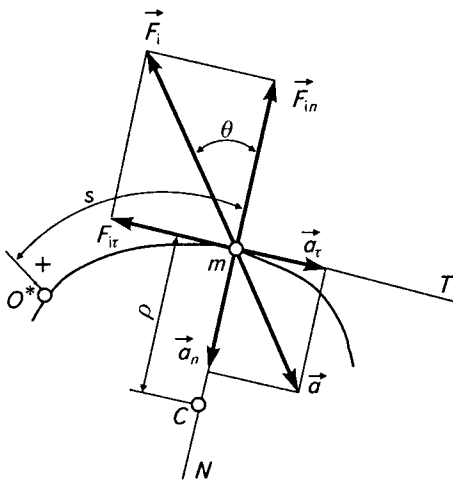


Рис. 10.10

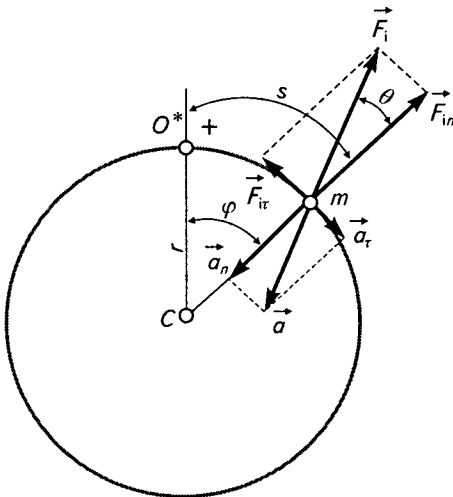


Рис. 10.11

рівнянням знаходимо вектори дотичного й нормального прискорень:

$$\vec{a}_\tau = \dot{s} \vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n}.$$

Тут \dot{s} , \ddot{s} — відповідно перша й друга похідні за часом від дугової координати точки; ρ — радіус кривини траєкторії в розглядуваному положенні точки; $\vec{\tau}$ і \vec{n} — одиничні вектори дотичної mT і головної нормалі mN відповідно.

У разі руху точки по колу (рис. 10.11) її дотичне й нормальне прискорення визначаються за попередніми формулами, лише в другій формулі замість ρ треба взяти радіус кола r . Тоді вектор повного прискорення \vec{a} точки у випадках її криволінійного руху (див. рис. 10.10) та руху по колу (рис. 10.11) виразимо через його прямокутні складові в напрямках дотичної і головної нормалі:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Тепер на підставі векторної формули сили інерції Д'Аламбера

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}$$

і з урахуванням попередньої рівності матимемо

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_\tau - m\vec{a}_n$$

або, ввівши позначення

$$\vec{F}_{i\tau} = -m\vec{a}_\tau, \quad \vec{F}_{in} = -m\vec{a}_n, \quad (10.34)$$

дістанемо

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i\tau} + \vec{F}_{in}. \quad (10.35)$$

Отже, в криволінійному русі точки й русі її по колу сила інерції Д'Аламбера дорівнює векторній сумі її дотичної та нормальної складових (рис. 10.10, 10.11). Із цих рисунків виводимо формули модуля й напрямку сили інерції Д'Аламбера:

$$F_i = \sqrt{F_{i\tau}^2 + F_{in}^2}, \quad (10.36)$$

$$\theta = \operatorname{arctg}(F_{i\tau}/F_{in}).$$

Коли точка здійснює прямолінійний рух уздовж осі, наприклад Ox (рис. 10.12), кінематичний закон її руху задається у вигляді

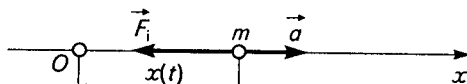


Рис. 10.12

$$x = x(t).$$

Тоді прискорення точки буде $a = \ddot{x}$, а її сила інерції Д'Аламбера визначатиметься за формулою

$$F_i = -m\ddot{x}. \quad (10.37)$$

Якщо за прискорення точки a друга похідна \ddot{x} додатна, то сила інерції \vec{F} напрямлена протилежно осі Ox ; при $a = \ddot{x} < 0$ сила інерції \vec{F}_i напрямлена в бік осі Ox .

□ **Головний вектор сил інерції Д'Аламбера в загальному випадкові руху механічної системи.** Головний вектор сил інерції Д'Аламбера для системи точок визначається векторною формулою

$$\vec{R}_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik}, \quad (10.38)$$

згідно з якою він дорівнює векторній сумі сил інерції Д'Аламбера всіх точок механічної системи й геометрично зображується замкальною $(n + 1)$ -ю стороною просторового силового многокутника, побудованого з n сил інерції Д'Аламбера (див. рис. 10.14, а, б).

У формулу (10.38) замість \vec{F}_{ik} підставимо $-m_k \vec{a}_k$ відповідно до векторної рівності

$$\vec{F}_{ik} = -m_k \vec{a}_k.$$

Для \vec{R}_i матимемо такий проміжний вираз:

$$\vec{R}_i = \sum_{k=1}^n (-m_k \vec{a}_k).$$

Його можна записати ще й так:

$$\bar{R}_i = -\frac{d^2}{dt^2} \left[\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k \right], \quad (10.39)$$

де \bar{r}_k — радіуси-вектори точок механічної системи. Загальна маса системи точок дорівнює арифметичній сумі мас усіх точок, що входять до її складу. Позначимо її через M . Тоді дістанемо

$$M = \sum_{k=1}^n m_k.$$

Тепер візьмемо точку, маса якої дорівнює масі механічної системи, й розмістимо її в такому положенні C відносно точки O , щоб добуток проведеного з точки O радіуса-вектора \bar{r}_C цього положення C на масу M становив

$$M \bar{r}_C = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k. \quad (10.40)$$

Геометрична точка C , радіус-вектор \bar{r}_C якої відносно абсолютно нерухомої системи відліку $Oxyz$ із початком O визначається за формулою

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{M}, \quad (10.41)$$

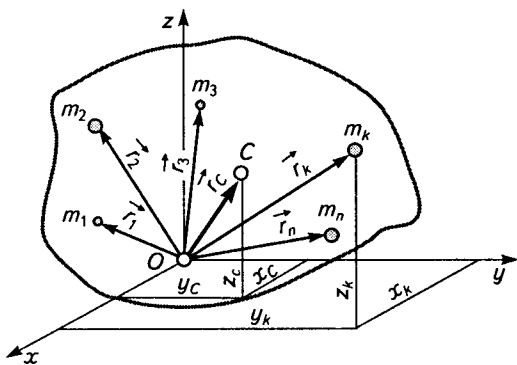


Рис. 10.13

називається *центром мас механічної системи* (рис. 10.13).

Повернемося до формули головного вектора сил інерції Д'Аламбера (10.39) і замість суми $\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k$ підставимо її значення за співвідношенням (10.40). Дістанемо проміжну рівність

$$R_i = -\frac{d^2}{dt^2} (M \bar{r}_C),$$

що після обчислення другої похідної за часом від радіуса-вектора \bar{r}_C центра мас C механічної системи дає

$$R_i = -M \ddot{\bar{r}}_C = -M \ddot{a}_C. \quad (10.42)$$

Ця формула виражає *теорему про головний вектор сил інерції Д'Аламбера для механічної системи*: головний вектор сил інерції Д'Аламбера для механічної системи дорівнює взятому зі знаком «-» добутку маси механічної системи на вектор прискорення її центра мас.

Векторне рівняння (10.42) можна записати в іншій формі, якщо спочатку подати так:

$$\bar{R}_i = -\frac{d(M\bar{v}_C)}{dt}.$$

Тепер здиференціюємо:

$$\frac{d(M\bar{r}_C)}{dt} = \frac{d\left(\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k\right)}{dt},$$

$$M\dot{\bar{r}}_C = \sum_{k=1}^n m_k \dot{\bar{r}}_k.$$

Введемо позначення

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k. \quad (10.43)$$

Як відомо, добуток маси точки на вектор її швидкості називається кількістю руху точки, а векторна сума кількостей руху точок механічної системи — головним вектором кількостей руху механічної системи, або її кількістю руху. Сформулюємо результат (10.43) як теорему: *головний вектор кількості руху механічної системи дорівнює добутку маси механічної системи на вектор швидкості її центра мас.*

Скористаємося теоремою (10.43) і подамо головний вектор сил інерції Д'Аламбера для механічної системи у формі

$$\bar{R}_i = -\frac{d\bar{Q}}{dt}. \quad (10.44)$$

Головний вектор сил інерції Д'Аламбера для механічної системи дорівнює першій похідній за часом від кількості руху механічної системи.

Зробимо зауваження. За математичним означенням головний вектор сил інерції Д'Аламбера, як і головні вектори інших раніше розглядуваних сил, є вільним вектором і тому не має певної точки прикладання; один він не відображує всіх загальних властивостей даної категорії віртуальних сил, якими є сили інерції Д'Аламбера — лише разом із головним моментом цих сил відносно нерухомого центра

характеризує вплив на динамічну рівновагу механічної системи в цілому.

□ **Головний момент сил інерції Д'Аламбера в загальному випадкові руху механічної системи.** На відміну від головного вектора \vec{R}_i , головний момент сил інерції Д'Аламбера для механічної системи \vec{M}_{iO} є не вільним вектором, а прив'язаним до певної нерухомої точки, яку ще називають центром зведення сил: зміна центра зведення впливає на модуль і напрям головного моменту \vec{M}_{iO} .

Головний момент сил інерції Д'Аламбера, як відомо, є векторною сумою моментів умовно прикладених до точок механічної системи сил інерції Д'Аламбера відносно нерухомої точки й геометрично зображується замикальною $(n + 1)$ -ю стороною просторового многокутника, побудованого з n векторів-моментів сил інерції Д'Аламбера точок механічної системи відносно тієї самої нерухомої точки (рис. 10.14, в, з):

$$\vec{M}_{iO} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{ik}. \quad (10.45)$$

Якщо головний вектор сил інерції Д'Аламбера визначається через головний вектор кількостей руху механічної системи, то головний момент цих сил відносно нерухомого центра — через головний момент кількостей руху механічної системи відносно того самого центра. Доведемо це.

Застосувавши формулу

$$\vec{F}_{ik} = -m_k \vec{a}_k$$

до (10.45), матимемо проміжну рівність

$$\vec{M}_{iO} = -\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k.$$

Тепер переконаємося, що виконується векторне співвідношення

$$\vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k = \frac{d(\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k)}{dt}.$$

Здиференціюємо праву частину:

$$\frac{d(\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k)}{dt} = \frac{d(\dot{\vec{r}}_k \times m_k \vec{v}_k + \vec{r}_k \times m_k \dot{\vec{a}}_k)}{dt},$$

де $\dot{\vec{r}}_k \times m_k \vec{v}_k = \vec{v}_k \times m_k \vec{v}_k = 0$ — векторний добуток двох колінеарних векторів.

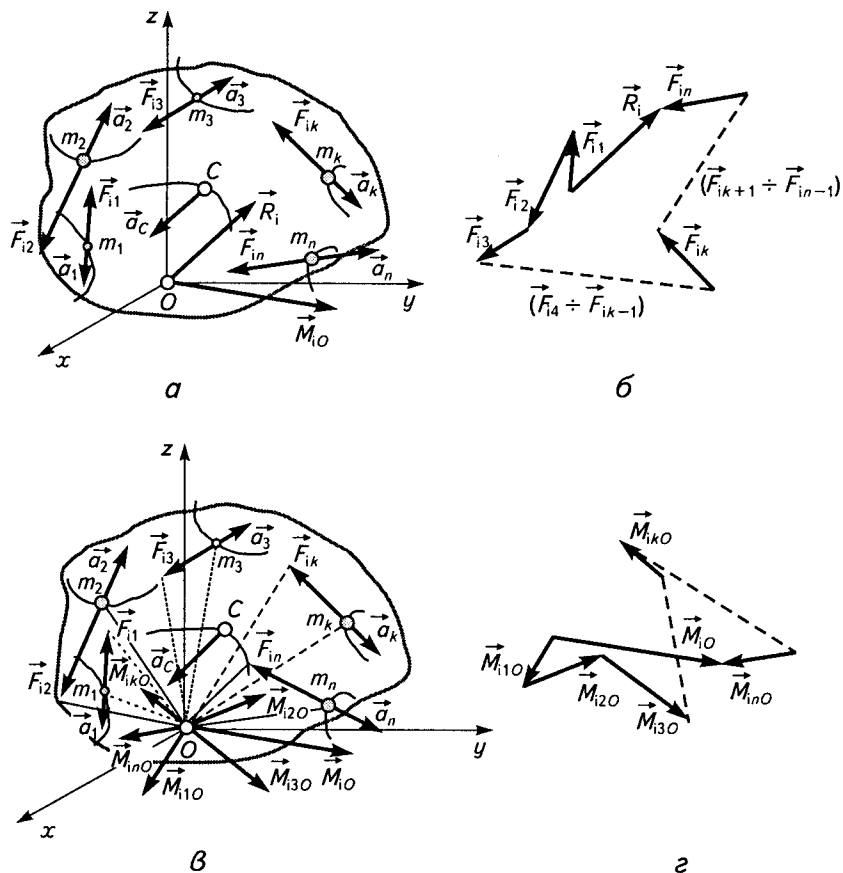


Рис. 10.14

Як відомо, векторний добуток радіуса-вектора точки на вектор її кількості руху є моментом кількості руху точки відносно нерухомого центра:

$$\vec{k}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Тоді головний момент сил інерції Д'Аламбера запишеться через моменти кількостей руху точок механічної системи відносно нерухомого центра у вигляді

$$\vec{M}_{iO} = - \frac{d \left(\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k \right)}{dt},$$

але сума моментів кількостей руху точок механічної системи відносно нерухомого центра є головним моментом кількостей руху механічної системи відносно нерухомого центра. Скориставшись його позначенням

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k,$$

остаточно дістаємо шукану залежність

$$\vec{M}_{iO} = -\frac{d\vec{K}_O}{dt}. \quad (10.46)$$

Головний момент сил інерції Д'Аламбера для механічної системи відносно нерухомого центра дорівнює взятій зі знаком «-» похідній за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно того самого центра. Зауважимо, що головний момент кількостей руху механічної системи називають кінетичним моментом механічної системи (відносно нерухомого центра).

□ **Точки прикладання головного вектора й головного моменту сил інерції Д'Аламбера.** В статистиці головний вектор і головний момент системи сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, статично еквівалентні системі сил, якщо ці обидва вектори прикладені до центра зведення. Щодо точок прикладання головних векторів будь-якої категорії сил під час розгляду динаміки механічної системи, то тут треба враховувати те, що в динаміці досліджується рух механічної системи, в якому можна виділити її загальний складний рух як одного цілого й взаємний рух тіл системи.

Загальний рух механічної системи як одного цілого визначається силовим впливом її головного вектора й головного моменту зовнішніх сил: головному векторові відповідає поступальна складова загального руху, а головному моментові — обертальна складова руху відносно центра зведення. Взаємні рухи тіл у механічній системі відбуваються під дією як внутрішніх сил взаємодії, так і тих самих зовнішніх сил, силовий вплив яких на механічну систему характеризується головним вектором і головним моментом.

Отже, головний вектор і головний момент зовнішніх сил, що реально діють на механічну систему, прикладених у центрі зведення, динамічно еквівалентні зовнішній системі сил, так само, як і головний вектор спільно з головним моментом сил інерції Д'Аламбера, прикладені в цьому самому центрі, будуть динамічно еквівалентні умовно прикладеній до точок механічної системи сил інерції Д'Аламбера (рис. 10.14, а).

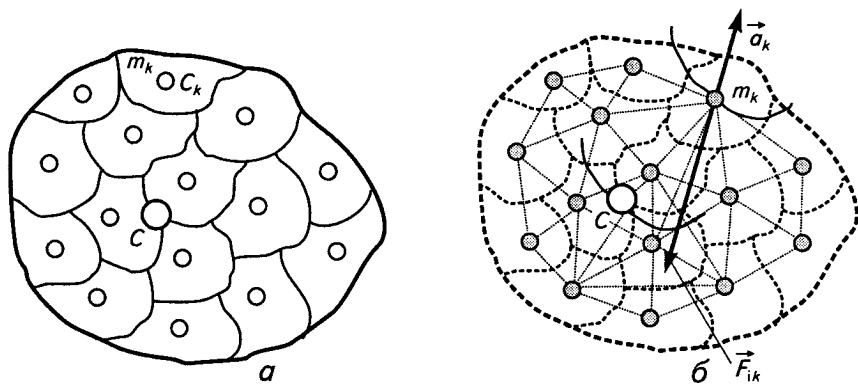


Рис. 10.15

Зазначимо, що коли треба дослідити силову взаємодію між самими тілами механічної системи за методом Д'Аламбера, то для кожного тіла доводиться визначати головні вектори й моменти як зовнішніх відносно даного тіла сил, що реально діють на нього, так і умовно прикладених сил інерції Д'Аламбера.

Як уже зазначалося, головний момент сил інерції Д'Аламбера механічної системи залежить від вибору центра, відносно якого він визначається. Досі, розглядаючи головний момент як сил, що реально діють, так і віртуальних сил Д'Аламбера, брали нерухомий центр, що збігався з початком нерухої декартової системи осей.

Тепер, зберігаючи старий центр O , візьмемо нову — рухому точку C , яка є центром мас механічної системи, й виразимо головний момент сил інерції Д'Аламбера відносно нерухомого центра O через головний момент цих самих сил відносно центра мас C механічної системи.

Позначимо будь-яку точку механічної системи через A_k , абсолютний радіус-вектор цієї точки A_k — через \vec{r}_k , а її радіус-вектор відносно центра мас C системи — через $\vec{CA}_k = \vec{\rho}_k$. Крім того, введемо радіус-вектор центра мас \vec{r}_C системи, початок якого збігається з нерухомою точкою O .

Запишемо основну формулу головного моменту сил інерції Д'Аламбера

$$\vec{M}_{iO} = \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_{ik}$$

і для її перетворення скористаємось очевидною векторною рівністю

$$\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_k.$$

Підставимо в початкову формулу вираз для \vec{r}_k і застосуємо розподільний закон множення. Матимемо

$$\vec{M}_{iO} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_C + \vec{\rho}_k) \times \vec{F}_{ik} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_C \times \vec{F}_{ik} + \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times \vec{F}_{ik}.$$

Тут \vec{r}_C не залежить від індексу, за яким здійснюється підсумовування, тому запишемо

$$\vec{M}_{iO} = \vec{r}_C \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} + \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times \vec{F}_{ik}.$$

Замінімо першу суму відповідно до формули

$$\vec{R}_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik},$$

а для другої — введемо позначення

$$\vec{M}_{iC} = \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times \vec{F}_{ik}.$$

Тоді остаточно можемо записати

$$\vec{M}_{iO} = \vec{r}_C \times \vec{R}_i + \vec{M}_{iC}. \quad (10.47)$$

Сума моментів $\sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times \vec{F}_{ik}$ сил інерції Д'Аламбера механічної системи відносно її центра мас називається головним моментом даних сил відносно центра мас \vec{M}_{iC} . Перший член у формулі (10.47) — векторний добуток радіуса-вектора центра мас C системи \vec{r}_C на головний вектор сил інерції Д'Аламбера \vec{R}_i — є моментом головного вектора сил інерції Д'Аламбера, прикладеного в центрі мас механічної системи, відносно нерухомої точки O .

Результат (10.47) можна сформулювати так: *головний момент сил інерції Д'Аламбера механічної системи відносно нерухомого центра дорівнює моменту відносно цього самого центра головного вектора сил інерції Д'Аламбера, прикладеного в центрі мас механічної системи, доданому до головного моменту сил інерції Д'Аламбера відносно центра мас.*

Далі виразимо головний момент сил інерції Д'Аламбера механічної системи відносно її центра мас C через кінетичний момент механічної системи відносно цього самого центра мас:

$$\vec{M}_{iC} = \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times \vec{F}_{ik} = - \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times m_k \vec{a}_k = - \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times m_k \vec{v}_k \right).$$

Векторна величина

$$\sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k = \bar{K}_C, \quad (10.48)$$

яка дорівнює сумі моментів кількостей руху точок механічної системи відносно її центра мас, називається *кінетичним моментом механічної системи відносно її центра мас C* .

Підставивши вираз (10.48) у проміжну рівність для \bar{M}_{iC} , дістанемо шукану формулу у вигляді

$$\bar{M}_{iC} = -\frac{d\bar{K}_C}{dt}. \quad (10.49)$$

Головний момент сил інерції Д'Аламбера механічної системи відносно її центра мас дорівнює взятій зі знаком « \rightarrow » похідній за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно центра мас.

Тепер у формулу (10.49) замість \bar{M}_{iC} підставимо його вираз за рівністю (10.47):

$$\bar{M}_{iO} = \bar{r}_C \times \bar{R}_i - \frac{d\bar{K}_C}{dt}. \quad (10.50)$$

□ **Головний вектор і головний момент сил інерції Д'Аламбера в поступальному русі тіла.** Нехай тіло масою M здійснює довільний поступальний рух із прискоренням \bar{a}_C відносно абсолютно нерухомої системи відліку (рис. 10.16, а). Замінімо дане тіло системою дискретних точок, мислено поділивши його замкненими розмежовувальними поверхнями з наступним зосередженням мас частинок в їхніх центрах мас (див. рис. 10.15, а, б).

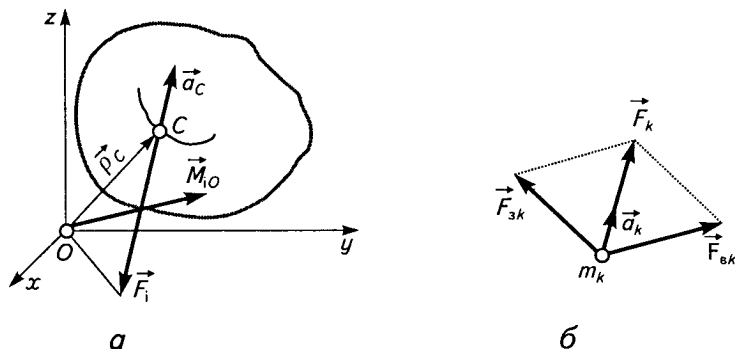


Рис. 10.16

У новій механічній системі розподіл маси не суцільний, як до заміни тіла моделлю, а дискретний, з проміжками між точками. В гіпотетичній системі точок, кількість n яких скінченна, виділена в ній окрема точка взаємодіє з рештою $n - 1$ точками через невидимі жорсткі стержні.

Після представлення тіла дискретною системою точок характерні для нього жорсткі зв'язки між частинками по розмежовувальних поверхнях замінюються динамічно еквівалентними їхніми реакціями, напрямленими по невидимих тонких і жорстких стержнях, що сполучають точки між собою. Така еквівалентна заміна жорстких зв'язків їхніми силовими діями не порушує попередньої незмінності в тілі.

На рис. 10.16, б наведено схему сил, що реально діють на його виділену точку масою m_k : \vec{F}_{bk} , \vec{F}_{zk} — рівнодійні відповідно внутрішніх і зовнішніх сил. Рівнодійна цих двох сил $\vec{F}_k = \vec{F}_{bk} + \vec{F}_{zk}$ надає масі m_k прискорення \vec{a}_k згідно з основним законом динаміки

$$\vec{a}_k = \vec{F}_k / m_k.$$

Сили інерції Д'Аламбера точок тіла в поступальному русі $\vec{F}_{ik} = -m_k \vec{a}_k$, де $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Це просторова система однаково напрямлених паралельних сил (див. рис. 10.15, б), для якої геометрично головний вектор

$$\vec{R}_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} = -M \vec{a}_C$$

сполучає кінець вектора останньої сили \vec{F}_{in} системи з початком вектора першої її сили \vec{F}_{i1} ланцюжка n сил, що йдуть одна за одною в одному напрямі.

Застосуємо формулу (10.50) і знайдемо головний момент сил інерції Д'Аламбера в поступальному русі тіла відносно нерухомої точки O :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{iO} &= \vec{r}_C \times \vec{R}_i - \frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{r}_C \times \vec{R}_i - \frac{d\left(\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k\right)}{dt} = \\ &= \vec{r}_C \times \vec{R}_i - \frac{d\left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{\rho}_k \times \vec{v}_C\right)}{dt} = \vec{r}_C \times \vec{R}_i - \frac{d(M \vec{\rho}_C \times \vec{v}_C)}{dt} = \vec{r}_C \times \vec{R}_i. \end{aligned}$$

Даний результат означає, що для тіла в поступальному русі система сил інерції Д'Аламбера замінюється рівнодійною

$$\vec{F}_i = \vec{R}_i = -M \vec{a}_C, \quad (10.51)$$

прикладеною в його центрі мас C (рис. 10.16, a); вона має момент відносно точки O

$$\vec{M}_{iO} = \vec{r}_C \times \vec{R}_i,$$

а відносно центра мас — $\vec{M}_{iC} = 0$, бо $\vec{r}_C = 0$.

Зауважимо, що рівнодійна сил інерції Д'Аламбера, як і її складові, — уявні.

□ **Принцип Д'Аламбера для тіла в поступальному русі.** Враховуючи викладене вище, запишемо рівняння динаміки поступального руху тіла у формі Д'Аламбера:

$$\begin{aligned} \vec{F}_3 - M \vec{a}_C &= 0; \\ \sum_{k=1}^n \vec{M}_C(\vec{F}_{3k}) &= 0 \end{aligned} \quad (10.52)$$

або в скалярній формі

$$\begin{aligned} F_{3x} - M a_{C_x} &= 0, \\ F_{3y} - M a_{C_y} &= 0, \\ F_{3z} - M a_{C_z} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_{kCx}(\vec{F}_{3k}) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_{kCy}(\vec{F}_{3k}) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_{kCz}(\vec{F}_{3k}) &= 0. \end{aligned} \quad (10.53)$$

➤ **Приклад 10.1.** Дослідимо динаміку прямолінійного руху моторного візка під час його розганяння й гальмування (рис. 10.17).

• *Загальний підхід.* Нехай спочатку моторний візок набирає швидкість із прискоренням \vec{a}_C . Якщо маса візка M , то його власна вага $\vec{G} = M \vec{g}$. У прискореному русі візка сумарні реакції поверхні дороги на задніх силових і передніх ведених колесах відповідно становитимуть \vec{N}_2, \vec{N}_1 . Положення центра мас C візка задається лінійними параметрами a, b, h (рис. 10.17, a).

Рух моторного візка із задніми силовими колесами під дією на них заданого обертального моменту M_{∞} , що передається від двигуна через трансмісію до коліс, здійснюється внаслідок їх взаємодії з шорсткою поверхнею дороги з коефіцієнтом тертя f .

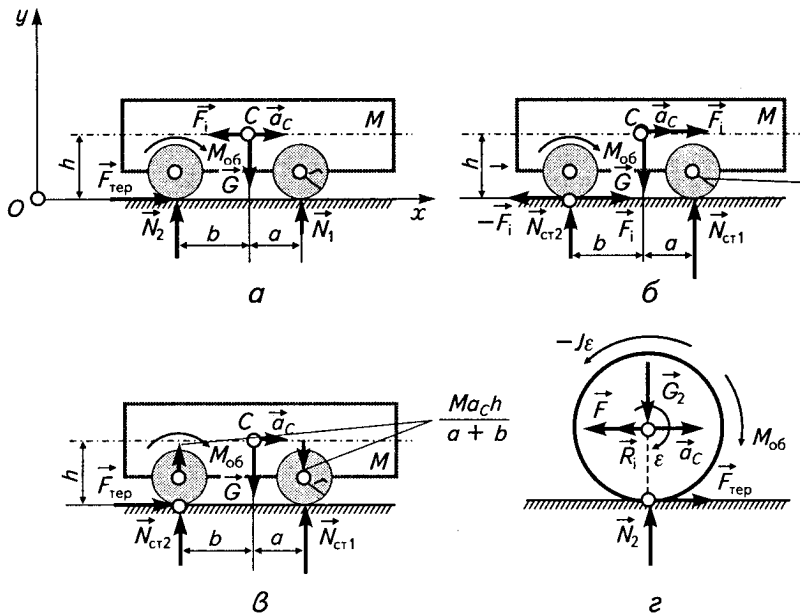


Рис. 10.17

Рушійна сила $F_{руш}$, що прискорює або сповільнює рух моторного візка, є силою тертя (зчеплення) $\vec{F}_{тер}$ між ободом силових коліс і поверхнею дороги, об яку вони опираються завдяки тертю. Очевидно,

$$F_{руш} = F_{тер} = M_{об} / r.$$

Тертям на передніх ведених колесах нехтуємо. Крім того, вважатимемо, що сила тертя на силових колесах досягла свого граничного значення

$$F_{тер} = fN_2$$

на межі проковзування коліс. Подальше зростання обертального моменту на силових колесах не впливатиме на рушійну силу.

Треба визначити граничну рушійну силу моторного візка у випадках, коли силовими колесами є задні або передні, а також вплив прискореного й сповільненого руху візка на значення рушійної сили.

За силовою схемою рис. 10.17, а на підставі рівнянь динаміки поступального руху тіла у формі Д'Аламбера (10.52), (10.53) складемо рівняння руху моторного візка. Якщо нерухомі осі Ox , Oy мають напрям, як на рис. 10.17, а, то приходимо до таких рівнянь:

$$F_{тер} - Ma_C = 0;$$

$$N_1 + N_2 - G = 0;$$

$$F_{тер}h + N_1a - N_2b = 0.$$

Тут невідомими є $F_{\text{тер}}$, N_1 , N_2 . Знайдемо їх, розв'язавши дану систему трьох рівнянь. Двома невідомими силами будуть

$$N_2 = G \frac{a}{a+b} + Ma_c \frac{h}{a+b} = \frac{Mg}{1+b/a} \left(1 + \frac{a_c}{g} \frac{h}{a} \right),$$

$$N_1 = G \frac{b}{a+b} - Ma_c \frac{h}{a+b} = \frac{Mg}{1+a/b} \left(1 - \frac{a_c}{g} \frac{h}{a} \right).$$

Нехай обертальний момент на силових колесах візка має граничне значення $M_{\text{об.гр}}$, за якого сила тертя в зоні контакту коліс і дороги досягає максимального значення. Тоді, очевидно, сила, що прискорює візок, також набуде максимального значення:

$$F_{\text{руш.макс}} = F_{\text{тер.макс}} = f N_2 = f \frac{Mg}{1+b/a} \left(1 + \frac{a_c}{g} \frac{h}{a} \right).$$

Зрозуміло, що при $M_{\text{об}} > M_{\text{об.гр}}$ прискорювальна сила $F_{\text{руш.макс}}$ уже не залежить від обертального моменту на силових колесах візка.

Якщо силовими колесами є передні, то сила, яка прискорює візок,

$$F_{\text{руш.макс}} = F_{\text{тер.макс}} = f N_1 = f \frac{Mg}{1+a/b} \left(1 - \frac{a_c}{g} \frac{h}{a} \right).$$

Порівнюючи цей вираз із попереднім, робимо висновок, що задні силові колеса моторного візка ефективніші. Тому під час гальмування візка ефективніше працюють гальма передніх коліс.

• *Окремий підхід.* Коли моторний візок перебуває в стані спокою, за законами статичної нормальні реакції поверхні дороги на задніх і передніх колесах відповідно становлять (рис. 10.17, б)

$$N_{\text{ст1}} = G \frac{b}{a+b}, \quad N_{\text{ст2}} = G \frac{a}{a+b}.$$

Оскільки в процесі розганяння моторного візка його д'Аламберові сили інерції зводяться до рівнодійної $\vec{F}_i = -M \vec{a}_c$, прикладеної в центрі мас візка, то за принципом Д'Аламбера в центрі мас прикладена рівнодійна зовнішніх сил \vec{F}_s , які впливають на прискорений рух візка (рис. 10.17, б),

$$F_s = Ma_c.$$

Цю рівнодійну можна замінити такою самою силою, але прикладеною в зоні контакту задніх коліс візка з дорогою, по якій він прискорено рухається зліва направо, й парою сил із моментом (рис. 10.17, б)

$$M = Ma_c h,$$

яка намагається повернути візок навколо центра його мас за годинниковою стрілкою. Даній парі відповідає еквівалентна пара з плечем $a+b$ і силами $\frac{Ma_c h}{a+b}$ (рис. 10.17, в). Додавши ці сили до відповідних статичних нормальних

реакцій, що прикладені до коліс із боку поверхні дороги, дістанемо ті самі за модулем повні нормальні реакції під час прискореного руху візка.

Збільшення тиску задніх і зменшення тиску передніх коліс на дорогу пояснюється інерційними силами Ньютона, які виражаються дією інерційної пари сил на поверхню дороги в напрямі проти годинникової стрілки й напрямленої проти руху візка горизонтальної сили, з якою візок своїми силовими задніми колесами завдяки зчепленню з дорогою відштовхується від неї і набуває прискореного руху.

□ **Головний вектор і головний момент сил інерції Д'Аламбера в обертальному русі тіла.** Нагадуємо, що в загальному випадкові руху будь-якої механічної системи головний вектор і головний момент сил інерції Д'Аламбера визначаються за формулами

$$\vec{R}_i = -M \vec{a}_C; \quad \vec{M}_{iO} = -\frac{d\vec{K}_O}{dt}. \quad (10.54)$$

З'ясуємо властивості цих двох сумарних величин, що характеризують систему сил інерції Д'Аламбера, в такому окремому випадкові руху тіла, як обертальний навколо нерухомої осі.

Візьмемо тіло масою M , яке обертається прискорено проти годинникової стрілки, якщо дивитися паралельно осі обертання зверху вниз, наприклад, навколо вертикальної осі Oz ; решта дві нерухомі декартові осі напрямлені так, як на рис. 10.18. Нехай у цьому прискореному обертальному русі кутова швидкість і кутове прискорення будуть ω , ϵ відповідно. Задамо також момент інерції J_z тіла відносно осі обертання Oz .

Із попереднього відомо, що лише одного осьового моменту інерції, яким є J_z , недостатньо для характеристики інерційних властивостей обертового тіла, їхнього силового впливу на зовнішні тіла, зокрема на опори осі, з якими тіло взаємодіє. Тому, крім заданого осьового моменту інерції J_z , вводяться відцентрові моменти інерції J_{zx} , J_{zy} , що враховують несиметричний розподіл маси обертового тіла відносно двох декартових площин Oxz , Oyz , перетином яких і є нерухома вісь обертання тіла Oz і від яких залежить наявність динамічних реакцій в опорах валів обертових частин машин.

Із першої з формул (10.54) випливає, що для тіла в обертальному русі головний вектор сил інерції Д'Аламбера

$$\vec{R}_i = -M \vec{a}_C \quad (10.55)$$

знаходиться в площині, перпендикулярній до осі обертання тіла Oz , оскільки вектор прискорення його центра мас \vec{a}_C , через який він виражається, також перпендикулярний до цієї осі.

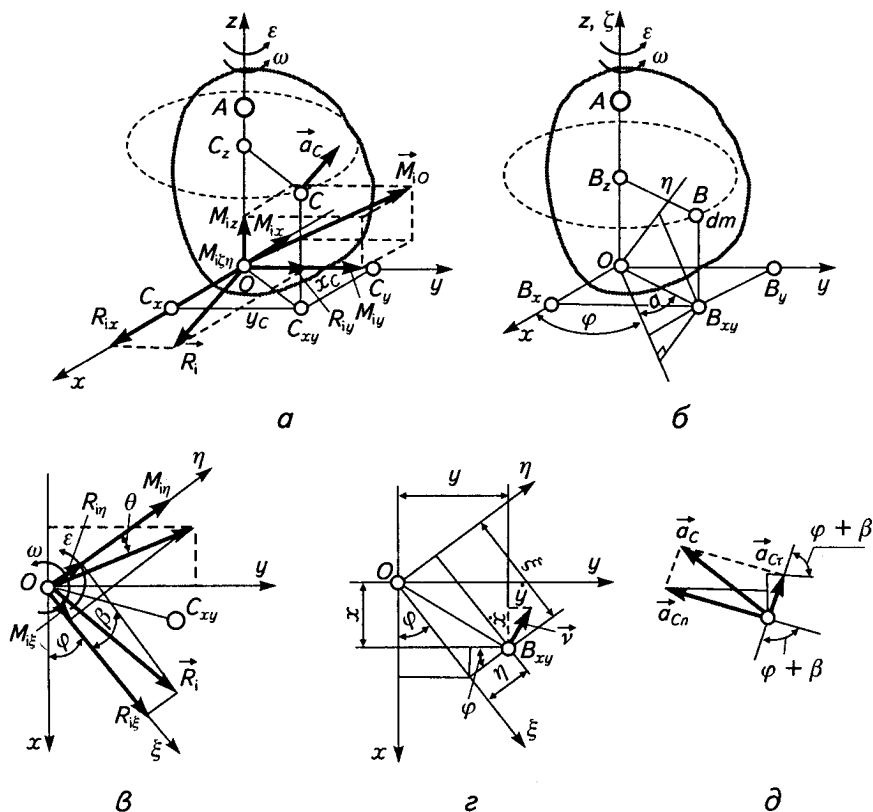


Рис. 10.18

Ввівши одиничні вектори \vec{i}, \vec{j} нерухомих осей Ox, Oy відповідно, подамо векторну рівність (10.55) у вигляді

$$\vec{R}_i = -M \ddot{x}_C \vec{i} - M \ddot{y}_C \vec{j}.$$

Із рис. 10.18, б, в виводимо

$$\ddot{x}_C = -\varepsilon OC_{xy} \sin(\varphi + \beta) - \omega^2 OC_{xy} \cos(\varphi + \beta) = -\varepsilon y_C - \omega^2 x_C,$$

$$\ddot{y}_C = \varepsilon OC_{xy} \cos(\varphi + \beta) - \omega^2 OC_{xy} \sin(\varphi + \beta) = \varepsilon x_C - \omega^2 y_C.$$

Тепер можна записати

$$\vec{R}_i = M(\omega^2 x_C + \varepsilon y_C) \vec{i} + M(\omega^2 y_C - \varepsilon x_C) \vec{j}, \quad (10.56)$$

звідки знаходимо проєкції головного вектора сил інерції Д'Аламбера на нерухомі осі:

$$\begin{aligned} R_{i_x} &= M(\omega^2 x_C + \varepsilon y_C), \\ R_{i_y} &= M(\omega^2 y_C - \varepsilon x_C). \end{aligned} \quad (10.57)$$

З урахуванням схеми рис. 10.18, *a*, розглянувши замість частинки *B* центр мас *C*, виразимо x_C, y_C через власні координати ξ_C, η_C :

$$\begin{aligned} x_C &= \xi_C \cos \varphi - \eta_C \sin \varphi, \\ y_C &= \xi_C \sin \varphi + \eta_C \cos \varphi \end{aligned}$$

і підставимо в (10.57):

$$\begin{aligned} \bar{R}_i &= M[\omega^2(\xi_C \cos \varphi - \eta_C \sin \varphi) + \varepsilon(\xi_C \sin \varphi + \eta_C \cos \varphi)]\bar{i} + \\ &+ M[\omega^2(\xi_C \sin \varphi + \eta_C \cos \varphi) - \varepsilon(\xi_C \cos \varphi - \eta_C \sin \varphi)]\bar{j} = \\ &= M[\sin \varphi(\varepsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C) + \cos \varphi(\varepsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C)]\bar{i} + \\ &+ M[\sin \varphi(\varepsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C) - \cos \varphi(\varepsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C)]\bar{j}. \end{aligned}$$

Розклавши головний вектор \bar{R}_i в напрямках ортів \bar{i}, \bar{j} нерухомих осей, неважко знайти його проєкції на оберткові осі $O\xi, O\eta$ з ортами $\bar{\xi}_o, \bar{\eta}_o$ (рис. 10.18, *в*):

$$\begin{aligned} R_{i_\xi} &= \bar{R}_i \cdot \bar{\xi}_o = M[\sin \varphi(\varepsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C) + \cos \varphi(\varepsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C)]\bar{i} \cdot \bar{\xi}_o + \\ &+ M[\sin \varphi(\varepsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C) - \cos \varphi(\varepsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C)]\bar{j} \cdot \bar{\xi}_o = M(\varepsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C), \\ R_{i_\eta} &= \bar{R}_i \cdot \bar{\eta}_o = M[\sin \varphi(\varepsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C) + \cos \varphi(\varepsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C)]\bar{i} \cdot \bar{\eta}_o + \\ &+ M[\sin \varphi(\varepsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C) - \cos \varphi(\varepsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C)]\bar{j} \cdot \bar{\eta}_o = -M(\varepsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C). \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} R_{i_\xi} &= M(\varepsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C), \\ R_{i_\eta} &= M(\omega^2 \eta_C - \varepsilon \xi_C). \end{aligned} \quad (10.58)$$

На відміну від проєкцій головного вектора \bar{R}_i на нерухомі осі Ox, Oy , у вирази яких входять змінні абсолютні координати центра мас *C* тіла, його проєкції на рухомі осі $O\xi, O\eta$ містять постійні власні координати центра мас *C* тіла (10.58).

Добути результати показують, що головний вектор \bar{R}_i , модуль якого

$$R_i = \sqrt{(R_{i_\xi})^2 + (R_{i_\eta})^2} = M\sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(\xi_C^2 + \eta_C^2)}, \quad (10.59)$$

обертається в площині Oxy разом із тілом згідно з кінематичним рівнянням $\varphi = \varphi(t)$, і водночас змінюються напрямні кути

$$\angle(\bar{R}_i, \xi) = \arccos\left(\frac{\varepsilon\eta_c + \omega^2\xi_c}{\sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(\xi_c^2 + \eta_c^2)}}\right), \quad (10.60)$$

$$\angle(\bar{R}_i, \eta) = \arccos\left(\frac{\omega^2\eta_c - \varepsilon\xi_c}{\sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(\xi_c^2 + \eta_c^2)}}\right),$$

що їх утворює головний вектор \bar{R}_i з власними осями $O\xi$, $O\eta$ відповідно.

Якщо тіло обертається рівномірно, то $\varepsilon = \omega = 0$, і формули (10.59), (10.60) набирають вигляду

$$\begin{aligned} R_i &= M\omega^2\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}; \\ \angle(\bar{R}_i, \xi) &= \arccos\left(\frac{\xi_c}{\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}}\right), \\ \angle(\bar{R}_i, \eta) &= \arccos\left(\frac{\eta_c}{\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}}\right). \end{aligned} \quad (10.61)$$

Проекції головного вектора \bar{R}_i на нерухомі осі визначатимуться за формулами

$$\begin{aligned} R_{i,x} &= M\omega^2\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2} \cos\left[\omega t + \arccos\left(\frac{\xi_c}{\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}}\right)\right], \\ R_{i,y} &= M\omega^2\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2} \sin\left[\omega t + \arccos\left(\frac{\xi_c}{\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}}\right)\right]. \end{aligned} \quad (10.62)$$

Ці дві скалярні рівності можна подати еквівалентною їм однією векторною рівністю

$$\bar{R}_i = M\omega^2\bar{\rho}_c, \quad (10.63)$$

де $\bar{\rho}_c = \sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2} \left\{ \bar{i} \cos\left[\omega t + \arccos\left(\frac{\xi_c}{\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}}\right)\right] + \bar{j} \sin\left[\omega t + \arccos\left(\frac{\xi_c}{\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}}\right)\right] \right\} = \bar{\rho}_o \sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}$; $\bar{\rho}_o$ — одиничний вектор, який

напрямлений по головному вектору сил інерції Д'Аламбера \bar{R}_i обертового тіла й утворює з власними осями $O\xi$, $O\eta$ постійні кути

$$\angle(\bar{\rho}_c, \xi) = \arccos\left(\frac{\xi_c}{\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}}\right), \quad \angle(\bar{\rho}_c, \eta) = \arccos\left(\frac{\eta_c}{\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}}\right),$$

а з нерухомими осями Ox , Oy — змінні кути

$$\angle(\bar{\rho}_c, x) = \omega t + \arccos\left(\frac{\xi_c}{\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}}\right),$$

$$\angle(\bar{\rho}_c, y) = \omega t + \arccos\left(\frac{\eta_c}{\sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2}}\right).$$

На підставі добутих залежностей робимо висновок, що в обертальному русі тіла з постійною кутовою швидкістю ω його головний вектор сил інерції Д'Аламбера обертається в нерухомій площині Oxy також з постійною кутовою швидкістю ω .

Значимо: якщо центр мас тіла знаходиться на його осі обертання, то головний вектор сил інерції Д'Аламбера дорівнює нулю [див. (10.63)].

Досліджуючи головний момент M_{iO} , перетворимо рівність (10.46) з урахуванням властивостей обертального руху тіла. З попереднього відомо, що кінетичний момент тіла в обертальному русі відносно нерухомої точки O — початку системи осей $Oxyz$ — визначається через інерційні величини J_z , J_{zx} , J_{zy} , які характеризують геометрію маси тіла відносно декартових осей Ox , Oy , Oz , формулою

$$\bar{K}_O = -J_{zx}\omega\bar{i} - J_{zy}\omega\bar{j} + J_z\omega\bar{k},$$

де \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} — одиничні вектори осей Ox , Oy , Oz відповідно.

Підставимо вираз для \bar{K}_O в другу з формул (10.54):

$$\begin{aligned} \bar{M}_{iO} &= -\frac{d}{dt}(-J_{zx}\omega\bar{i} - J_{zy}\omega\bar{j} + J_z\omega\bar{k}) = \\ &= \frac{d}{dt}(J_{zx}\omega)\bar{i} + \frac{d}{dt}(J_{zy}\omega)\bar{j} - \frac{d}{dt}(J_z\omega)\bar{k}. \end{aligned}$$

На рис. 10.18, *a* головний момент \bar{M}_{iO} розкладено на прямокутні складові \bar{M}_{ix} , \bar{M}_{iy} , \bar{M}_{iz} , що геометрично зображуються сторонами прямокутного паралелепіпеда з діагоналлю \bar{M}_{iO} . Очевидно, що алгеб-

ричними значеннями цих складових є проекції вектора \vec{M}_{i_0} на декартові осі:

$$M_{i_x} = \frac{d}{dt}(J_{z_x}\omega), \quad M_{i_y} = \frac{d}{dt}(J_{z_y}\omega), \quad M_{i_z} = -\frac{d}{dt}(J_z\omega). \quad (10.64)$$

Тепер із загальних формул

$$J_{z_x} = \int_{(M)} zx \, dm, \quad J_{z_y} = \int_{(M)} zy \, dm, \quad J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) \, dm \quad (10.65)$$

видно, що осьовий момент інерції J_z буде постійним, а відцентрові моменти інерції J_{z_x} , J_{z_y} тіла в його обертанні змінюватимуться, оскільки змінюватимуться з часом координати частинок тіла x , y ; апліката z — постійна координата.

Щоб у проекції головного моменту сил інерції Д'Аламбера на нерухомі декартові осі входили постійні відцентрові моменти інерції, введемо другу декартову систему осей $O\xi\eta\zeta$ (рис. 10.18, б, з, д), яка жорстко зв'язана з обертовим тілом і разом із ним обертається навколо вертикальної осі Oz як одне ціле. Вісь $O\xi$ збігається з Oz , а осі $O\xi$, $O\eta$ обертаються в нерухомій площині Oxy разом із тілом проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω .

Надалі вважатимемо, що в початковий момент часу $t = t_0$ обертові $O\xi$, $O\eta$ і нерухомі Ox , Oy осі відповідно збіглися. Тоді за обертання тіла в поточний момент часу вісь $O\xi$ утворюватиме з нерухомою віссю Ox кут φ , який є кутом повороту тіла в даний момент часу t . Тепер виділимо в тілі нескінченно малу частинку масою dm з абсолютними x , y , z і автономними ξ , η , ζ координатами.

Із рис. 10.18, б, в виводимо такі співвідношення між зазначеними координатами:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ x &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi, \\ x &= \zeta, \end{aligned} \quad (10.66)$$

які використовуватимемо далі, а зараз здиференціюємо за часом залежності (10.64):

$$\begin{aligned} M_{i_x} &= \frac{d}{dt}(J_{z_x}\omega) = \dot{J}_{z_x}\omega + J_{z_x}\dot{\omega}, \\ M_{i_y} &= \frac{d}{dt}(J_{z_y}\omega) = \dot{J}_{z_y}\omega + J_{z_y}\dot{\omega}, \\ M_{i_z} &= -\frac{d}{dt}(J_z\omega) = -\dot{J}_z\omega. \end{aligned} \quad (10.67)$$

У цих проміжних рівностях $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon$ — кутове прискорення тіла, $\dot{J}_{zx} = \frac{dJ_{zx}}{dt}$, $\dot{J}_{zy} = \frac{dJ_{zy}}{dt}$ — похідні за часом від відповідних відцентрових моментів інерції. У загальному вигляді розкриємо ці похідні, скориставшись формулами (10.65):

$$\begin{aligned}\dot{J}_{zx} &= \frac{dJ_{zx}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(M)} zx \, dm = \int_{(M)} (\dot{z}x + z\dot{x}) \, dm, \\ \dot{J}_{zy} &= \frac{dJ_{zy}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(M)} zy \, dm = \int_{(M)} (\dot{z}y + z\dot{y}) \, dm.\end{aligned}\tag{10.68}$$

Тепер здиференціюємо за часом рівності (10.66):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\xi\dot{\varphi} \sin \varphi - \eta\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{y} &= -\xi\dot{\varphi} \cos \varphi - \eta\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{z} &= 0.\end{aligned}\tag{10.69}$$

Продовжуючи викладки, підставимо (10.69) і (10.66) у проміжні рівності (10.68) і виконаємо необхідні дії:

$$\begin{aligned}\dot{J}_{zx} &= \int_{(M)} \zeta(-\xi\dot{\varphi} \sin \varphi - \eta\dot{\varphi} \cos \varphi) \, dm = -J_{\zeta\xi} \omega \sin \varphi - J_{\zeta\eta} \omega \cos \varphi, \\ \dot{J}_{zy} &= \int_{(M)} \zeta(\xi\dot{\varphi} \cos \varphi - \eta\dot{\varphi} \sin \varphi) \, dm = J_{\zeta\xi} \omega \cos \varphi - J_{\zeta\eta} \omega \sin \varphi.\end{aligned}\tag{10.70}$$

Залишилося виразити відцентрові моменти інерції в нерухомих осях через аналогічні величини у власних осях. Для цього підставимо (10.66) у (10.65) і виконаємо необхідні перетворення:

$$\begin{aligned}J_{zx} &= \int_{(M)} zx \, dm = \int_{(M)} \zeta(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \, dm = J_{\zeta\xi} \cos \varphi - J_{\zeta\eta} \sin \varphi, \\ J_{zy} &= \int_{(M)} zy \, dm = \int_{(M)} \zeta(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \, dm = J_{\zeta\xi} \sin \varphi + J_{\zeta\eta} \cos \varphi.\end{aligned}\tag{10.71}$$

На підставі (10.70) і (10.71) перетворимо формули (10.67):

$$\begin{aligned}M_{ix} &= \frac{d}{dt} (J_{zx} \omega) = (-J_{\zeta\xi} \omega \sin \varphi - J_{\zeta\eta} \omega \cos \varphi) \omega + (J_{\zeta\xi} \cos \varphi - J_{\zeta\eta} \sin \varphi) \dot{\omega} = \\ &= -\sin \varphi (J_{\zeta\xi} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \cos \varphi (J_{\zeta\xi} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2), \\ M_{iy} &= \frac{d}{dt} (J_{zy} \omega) = (J_{\zeta\xi} \omega \cos \varphi - J_{\zeta\eta} \omega \sin \varphi) \omega + (J_{\zeta\xi} \sin \varphi + J_{\zeta\eta} \cos \varphi) \dot{\omega} =\end{aligned}$$

$$= \cos \varphi (J_{\zeta\zeta} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \sin \varphi (J_{\zeta\zeta} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2),$$

$$M_{iz} = -\frac{d}{dt} (J_z \omega) = -J_z \varepsilon.$$

Випишемо окремо головні моменти сил інерції Д'Аламбера обертового тіла відносно нерухомих декартових осей:

$$M_{ix} = -\sin \varphi (J_{\zeta\zeta} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \cos \varphi (J_{\zeta\zeta} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2),$$

$$M_{iy} = \cos \varphi (J_{\zeta\zeta} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \sin \varphi (J_{\zeta\zeta} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2), \quad (10.72)$$

$$M_{iz} = -J_z \varepsilon.$$

Щоб дати геометричну інтерпретацію формул (10.72), виразимо зазначені моменти згідно з рівностями (10.71) і (10.68). Спочатку матимемо

$$M_{ix} = \left(\int_{(M)} z \dot{x} \, dm \right) \omega + J_{zx} \varepsilon,$$

$$M_{iy} = \left(\int_{(M)} z \dot{y} \, dm \right) \omega + J_{zy} \varepsilon.$$

У цих формулах виразимо похідні \dot{x} , \dot{y} через кутову швидкість тіла ω й координати x , y виділеної в тілі частинки масою dm , скориставшись рис. 10.18, з:

$$\dot{x} = -OB_{xy} \omega \sin \varphi = -\omega y,$$

$$\dot{y} = OB_{xy} \omega \cos \varphi = \omega x.$$

Підставивши значення цих похідних у попередні формули й виконавши необхідні дії, дістанемо

$$M_{ix} = \left(\int_{(M)} z (-\omega y) \, dm \right) \omega + J_{zx} \varepsilon = J_{zx} \varepsilon - J_{zy} \omega^2,$$

$$M_{iy} = \left(\int_{(M)} z \omega x \, dm \right) \omega + J_{zy} \varepsilon = J_{zy} \varepsilon + J_{zx} \omega^2.$$

Запишемо результат:

$$M_{ix} = J_{zx} \varepsilon - J_{zy} \omega^2, \quad (10.73)$$

$$M_{iy} = J_{zy} \varepsilon + J_{zx} \omega^2.$$

Значимо, що залежності (10.73) можна дістати інакше, виразивши відцентрові моменти інерції тіла відносно нерухомих осей Ox , Oy , Oz

через відцентрові моменти інерції відносно автономних осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, незмінно зв'язаних із тілом, з використанням формул переходу (10.66).

Далі покажемо, що для тіла в нашому випадкові проекції головного моменту сил інерції Д'Аламбера \vec{M}_{iO} відносно нерухомого центра O на осі $O\xi$ і $O\eta$, що обертаються разом із тілом, виражаються рівностями

$$\begin{aligned} M_{i\xi} &= J_{\zeta\xi} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2, \\ M_{i\eta} &= J_{\zeta\eta} \varepsilon + J_{\zeta\xi} \omega^2. \end{aligned} \quad (10.74)$$

Для доведення цього візьмемо векторну формулу $\vec{M}_{iO} = M_{ix} \vec{i} + M_{iy} \vec{j} + M_{iz} \vec{k}$ і скалярно помножимо обидві її частини перший раз на одиничний вектор $\vec{\xi}_O$ осі $O\xi$, а другий — на одиничний вектор $\vec{\eta}_O$ осі $O\eta$:

$$\begin{aligned} M_{iO} \vec{\xi}_O &= M_{i\xi} = M_{ix} \cos \varphi + M_{iy} \sin \varphi, \\ M_{iO} \vec{\eta}_O &= M_{i\eta} = -M_{ix} \sin \varphi + M_{iy} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Щоб мати результат (10.74), треба в праві частини останніх залежностей підставити значення проекцій M_{ix} , M_{iy} за формулами (10.73) і провести відповідні викладки:

$$\begin{aligned} M_{iO} \vec{\xi}_O &= M_{i\xi} = [-\sin \varphi (J_{\zeta\xi} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \cos \varphi (J_{\zeta\xi} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2)] \cos \varphi + \\ &+ [\cos \varphi (J_{\zeta\xi} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \sin \varphi (J_{\zeta\xi} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2)] \sin \varphi = \\ &= -\sin \varphi \cos \varphi (J_{\zeta\xi} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \cos^2 \varphi (J_{\zeta\xi} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2) + \\ &+ \sin \varphi \cos \varphi (J_{\zeta\xi} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \sin^2 \varphi (J_{\zeta\xi} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2) = J_{\zeta\xi} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2, \\ M_{iO} \vec{\eta}_O &= M_{i\eta} = [\sin \varphi (J_{\zeta\xi} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) - \cos \varphi (J_{\zeta\xi} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2)] \sin \varphi + \\ &+ [\cos \varphi (J_{\zeta\xi} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \sin \varphi (J_{\zeta\xi} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2)] \cos \varphi = \\ &= \sin^2 \varphi (J_{\zeta\xi} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \cos^2 \varphi (J_{\zeta\xi} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) - \\ &- \sin \varphi \cos \varphi (J_{\zeta\xi} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2) + \sin \varphi \cos \varphi (J_{\zeta\xi} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2) = J_{\zeta\xi} \omega^2 - J_{\zeta\eta} \varepsilon. \end{aligned}$$

Тепер рівняння (10.72) з урахуванням (10.74) перепишемо так:

$$\begin{aligned} M_{ix} &= -M_{i\eta} \sin \varphi + M_{i\xi} \cos \varphi, \\ M_{iy} &= M_{i\eta} \cos \varphi + M_{i\xi} \sin \varphi, \\ M_{iz} &= -J_{\zeta} \varepsilon. \end{aligned} \quad (10.75)$$

Продовжуючи перетворення перших двох рівнянь системи (10.75), переконаємося, що проекція головного моменту \vec{M}_{iO} сил інерції Д'Аламбера обертового тіла відносно центра O на обертову площину $O\xi\eta$ є вектором $\vec{M}_{i\xi\eta}$ із модулем

$$\begin{aligned} M_{i\xi\eta} &= \sqrt{(M_{i\xi})^2 + (M_{i\eta})^2} = \sqrt{(J_{\zeta\xi}\varepsilon - J_{\zeta\eta}\omega^2)^2 + (J_{\zeta\eta}\varepsilon + J_{\zeta\xi}\omega^2)^2} = \\ &= \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2)} \end{aligned}$$

або (без проміжних дій)

$$M_{i\xi\eta} = \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2)}. \quad (10.76)$$

Беручи до уваги формулу (10.76) та структуру перших двох рівностей (10.75), застосуємо таку заміну:

$$\begin{aligned} M_{i\eta} &= M_{i\xi\eta} \cos \theta = \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2)} \cos \theta, \\ M_{i\xi} &= M_{i\xi\eta} \sin \theta = \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2)} \sin \theta. \end{aligned} \quad (10.77)$$

Підставивши ці величини в (10.75), матимемо

$$\begin{aligned} M_{ix} &= -M_{i\xi\eta} \sin \varphi \cos \theta + M_{i\xi\eta} \cos \varphi \sin \theta = \\ &= M_{i\xi\eta} (\cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \cos \theta) = -M_{i\xi\eta} (\sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta) = \\ &= -M_{i\xi\eta} \sin (\varphi - \theta) = -\sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2)} \sin (\varphi - \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{iy} &= M_{i\xi\eta} \cos \varphi \cos \theta + M_{i\xi\eta} \sin \varphi \sin \theta = \\ &= M_{i\xi\eta} (\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) = M_{i\xi\eta} \cos (\varphi - \theta) = \\ &= \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2)} \cos (\varphi - \theta) \end{aligned}$$

або (без проміжних дій)

$$\begin{aligned} M_{ix} &= -\sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2)} \sin (\varphi - \theta), \\ M_{iy} &= \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2)} \cos (\varphi - \theta), \\ M_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (10.78)$$

Зі співвідношень (10.77) дістаємо, що кут θ у рівностях (10.78) визначається за формулою

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{M_{i\xi}}{M_{i\eta}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{J_{\zeta\xi}\varepsilon - J_{\zeta\eta}\omega^2}{J_{\zeta\eta}\varepsilon + J_{\zeta\xi}\omega^2} \right). \quad (10.79)$$

Проаналізувавши добуті результати, доходимо висновку, що площина, в якій знаходяться головний момент сил інерції Д'Аламбера \vec{M}_{iO} , його проекція $\vec{M}_{i\xi\eta}$ на площину $O\xi\eta$ і нерухома вісь обертання Oz ($O\xi$), обертається разом із тілом прискорено з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ϵ , а також здійснює періодичні рухи за законом $\theta = \theta[\omega(t), \epsilon(t)]$ відносно самого тіла.

Якщо тіло обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω , то $\epsilon = 0$ і $M_{iz} = 0$. Кут θ буде постійним і становитиме

$$\theta = \arctg(M_{i\xi}/M_{i\eta}) = \arctg(-J_{\zeta\eta}/J_{\zeta\xi}).$$

Головний момент сил інерції Д'Аламбера \vec{M}_{iO} лежатиме в площині $O\xi\eta$ і обертатиметься разом із тілом рівномірно. При цьому його модуль, очевидно, визначатиметься за формулою

$$\vec{M}_{iO} = \omega^2 \sqrt{J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2}. \quad (10.80)$$

Залежності (10.78) за постійної кутової швидкості обертання ω тіла набирають вигляду

$$\begin{aligned} M_{ix} &= -\omega^2 \sqrt{J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2} \sin[\varphi + \arctg(J_{\zeta\eta}/J_{\zeta\xi})], \\ M_{iy} &= \omega^2 \sqrt{J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2} \cos[\varphi + \arctg(J_{\zeta\eta}/J_{\zeta\xi})], \\ M_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (10.81)$$

Подано (10.81) у векторній формі:

$$M_{iO} = \omega^2 \sqrt{J_{\zeta\xi}^2 + J_{\zeta\eta}^2} \vec{m}_O, \quad (10.82)$$

де

$$\vec{m}_O = -\sin[\varphi + \arctg(J_{\zeta\eta}/J_{\zeta\xi})] \vec{i} + \cos[\varphi + \arctg(J_{\zeta\eta}/J_{\zeta\xi})] \vec{j}$$

— одиничний вектор напрямку головного моменту \vec{M}_{iO} .

Отже, властивості головного вектора сил інерції Д'Аламбера тіла в обертальному русі такі:

- у загальному випадкові прискореного та рівномірного обертальних рухів тіла перпендикулярний до осі обертання тіла;
- змінюється за модулем і напрямом унаслідок зміни кутової швидкості й кутового прискорення тіла;
- набуває нульового значення, коли центр мас тіла знаходиться на осі обертання тіла;
- маючи постійний модуль, обертається в площині Oxy навколо нерухомої осі Oz разом із тілом у його рівномірному обертанні з кутовою швидкістю ω .

Властивості головного моменту сил інерції Д'Аламбера:

- за прискороного обертального руху тіла має три прямокутні складові в напрямках нерухомих декартових осей, одна з яких є віссю обертання тіла;

- його модуль і напрям змінюються залежно від змін кутової швидкості й кутового прискорення тіла;

- за рівномірного обертального руху тіла перпендикулярний до осі обертання й обертається разом із тілом як одне ціле;

- незалежно від положення центра мас обертального тіла в його обертанні з постійною кутовою швидкістю набуває нульового значення, коли обидва відцентрових моменти інерції дорівнюють нулю;

- за нульових відцентрових моментів інерції, тобто коли вісь обертання тіла для її точки, відносно якої визначається головний вектор сил інерції Д'Аламбера, є головною віссю інерції тіла, а також за довільних значень кутової швидкості та кутового прискорення тіла напрямлений по його осі обертання.

□ **Принцип Д'Аламбера для тіла в обертальному русі.** Універсальні рівняння динаміки у формі Д'Аламбера в загальному випадкові обертального руху тіла записуються у вигляді

$$\begin{aligned}
 R_{a.3x} + R_{p.v.3x} + M [\sin \varphi (\epsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C) + \cos \varphi (\epsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C)] &= 0, \\
 R_{a.3y} + R_{p.v.3y} + M [\sin \varphi (\epsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C) - \cos \varphi (\epsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C)] &= 0, \\
 R_{a.3z} + R_{p.v.3z} &= 0; \\
 M_{a.3x} + M_{p.v.3x} - \sin \varphi (J_{\zeta\zeta} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \epsilon) + \cos \varphi (J_{\zeta\zeta} \epsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2) &= 0, \\
 M_{a.3y} + M_{p.v.3y} + \cos \varphi (J_{\zeta\zeta} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \epsilon) + \sin \varphi (J_{\zeta\zeta} \epsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2) &= 0, \\
 M_{a.3z} + M_{p.v.3z} - J_z \epsilon &= 0,
 \end{aligned} \tag{10.83}$$

а за рівномірного обертального руху

$$\begin{aligned}
 R_{a.3x} + R_{p.v.3x} - M \omega^2 (\eta_C \sin \varphi + \xi_C \cos \varphi) &= 0, \\
 R_{a.3y} + R_{p.v.3y} + M \omega^2 (\xi_C \sin \varphi + \eta_C \cos \varphi) &= 0, \\
 R_{a.3z} + R_{p.v.3z} &= 0; \\
 M_{a.3x} + M_{p.v.3x} - \omega^2 (J_{\zeta\zeta} \sin \varphi + J_{\zeta\eta} \cos \varphi) &= 0, \\
 M_{a.3y} + M_{p.v.3y} + \omega^2 (J_{\zeta\zeta} \cos \varphi - J_{\zeta\eta} \sin \varphi) &= 0, \\
 M_{a.3z} + M_{p.v.3z} &= 0.
 \end{aligned} \tag{10.84}$$

Якщо вісь обертання тіла для її точки O , що є початком нерухомих декартових осей Ox , Oy , Oz , одна з яких, наприклад Oz , збігається

ся з віссю обертання, є головною віссю інерції і при цьому центр мас C тіла не знаходиться на осі обертання, то універсальні рівняння динаміки у формі Д'Аламбера, очевидно, набирають вигляду

$$\begin{aligned}
 R_{a.3x} + R_{p.v.3x} + M[\sin \varphi(\epsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C) + \cos \varphi(\epsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C)] &= 0, \\
 R_{a.3y} + R_{p.v.3y} + M[\sin \varphi(\epsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C) - \cos \varphi(\epsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C)] &= 0, \\
 R_{a.3z} + R_{p.v.3z} &= 0; \\
 M_{a.3x} + M_{p.v.3x} &= 0, \\
 M_{a.3y} + M_{p.v.3y} &= 0, \\
 M_{a.3z} + M_{p.v.3z} - J_z \epsilon &= 0.
 \end{aligned} \tag{10.85}$$

Розрізняють динамічну й статичну зрівноваженість маси обертового тіла. Рівняння (10.85) відповідають динамічній зрівноваженості тіла на осі обертання. За статичної зрівноваженості обертового тіла справедливі динамічні рівняння

$$\begin{aligned}
 R_{a.3x} + R_{p.v.3x} &= 0, \quad R_{a.3y} + R_{p.v.3y} = 0, \quad R_{a.3z} + R_{p.v.3z} = 0; \\
 M_{a.3x} + M_{p.v.3x} - \sin \varphi(J_{\zeta\zeta} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \epsilon) + \cos \varphi(J_{\zeta\zeta} \epsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2) &= 0, \\
 M_{a.3y} + M_{p.v.3y} + \cos \varphi(J_{\zeta\zeta} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \epsilon) + \sin \varphi(J_{\zeta\zeta} \epsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2) &= 0, \\
 M_{a.3z} + M_{p.v.3z} - J_z \epsilon &= 0.
 \end{aligned} \tag{10.86}$$

Повне зрівноваження маси тіла з нерухомою віссю обертання — статичне й динамічне — досягається тоді, коли вісь обертання тіла стає головною центральною віссю інерції тіла. В такому разі універсальні рівняння динаміки обертального руху тіла матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
 R_{a.3x} + R_{p.v.3x} &= 0, \\
 R_{a.3y} + R_{p.v.3y} &= 0, \\
 R_{a.3z} + R_{p.v.3z} &= 0; \\
 M_{a.3x} + M_{p.v.3x} &= 0, \\
 M_{a.3y} + M_{p.v.3y} &= 0, \\
 M_{a.3z} + M_{p.v.3z} - J_z \epsilon &= 0.
 \end{aligned} \tag{10.87}$$

► **Приклад 10.2.** Колесо — однорідний диск радіусом r — має масу M і обертається навколо горизонтальної осі Oz , яка збігається з геометричною віссю колеса, під дією вантажу масою m , підвішеного до кінця невагомої нерозтягнутої нитки. Вільна частина нитки намотана на обід колеса й утримується на ньому завдяки прикріпленому до колеса другому її кінцю (рис. 10.19).

Складемо універсальні рівняння динаміки обертального руху (10.87) для розглядуваного випадку обертання колеса.

На рис. 10.19 зображено силові схеми динамічної рівноваги колеса й вантажу за методом Д'Аламбера. Маємо таку систему динамічних рівнянь для визначення сумарної реакції \vec{R}_O опор вала, на якому закріплено колесо:

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ -Mg + R_O - T &= 0, \\ 0 &= 0, \\ 0 &= 0, \\ 0 &= 0, \\ Tr - J_z \varepsilon &= 0; \\ -mg + T + ma &= 0. \end{aligned}$$

Урахувавши, що

$$a = \varepsilon r,$$

з рівняння динамічної рівноваги вантажу в його поступальному русі дістанемо реакцію нитки:

$$T = m(g - \varepsilon r).$$

Підставимо в останнє рівняння системи, яка виражає динамічну рівновагу колеса, й спочатку знайдемо кутове прискорення обертального руху колеса:

$$\varepsilon = \frac{mgr}{J_z + mr^2}.$$

Із другого з рівнянь системи знаходимо реакцію опор вала колеса:

$$R_O = (m + M)g - \frac{m^2 gr}{J_z + mr^2}.$$

Визначаємо реакцію нитки:

$$T = mg \left(1 - \frac{mr^2}{J_z + mr^2} \right).$$

Тепер припустимо, що на кінці нитки вантажу немає й цей кінець рухається вниз із заданим постійним прискоренням a . Тоді з рівнянь (10.87) дістаємо такі значення реакції опор вала колеса й реакції нитки:

$$R_O = Mg + \frac{J_z}{r^2} a,$$

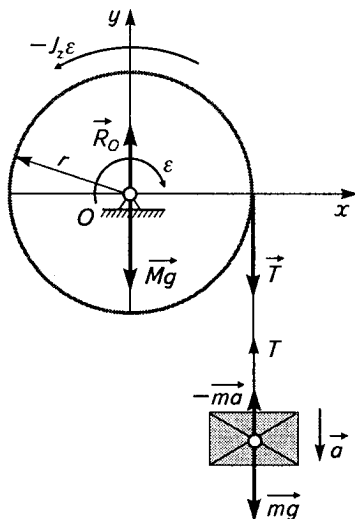


Рис. 10.19

$$T = \frac{J_z}{r^2} a.$$

Нарешті, в разі руху вантажу із заданим прискоренням a

$$\begin{aligned} T &= m(g - a); \\ R_0 &= (m + M)g - ma. \end{aligned}$$

□ **Головний вектор і головний момент сил інерції Д'Аламбера в плоскопаралельному русі тіла.** Нехай тіло масою M у плоскопаралельному русі переміщується паралельно нерухомій декартовій площині Oxy , яка проходить через центр мас C тіла і є його площиною матеріальної симетрії. За вісь полюсів візьмемо декартову вісь Cz , що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до його площини матеріальної симетрії (рис. 10.20). Позначимо момент інерції тіла відносно осі Cz через J_{Cz} .

Далі припустимо, що в даному плоскопаралельному русі прискорення центра мас тіла становить \ddot{a}_C , а кутова швидкість і кутове прискорення в обертальній складовій цього руху навколо поступально рухомої осі Cz — відповідно ω , ϵ .

Для визначення властивостей головного вектора й головного моменту сил інерції Д'Аламбера тіла в плоскопаралельному русі застосуємо їхні загальні векторні формули (10.42) і (10.46).

Насамперед зазначимо, що головний вектор \vec{R}_i сил інерції Д'Аламбера частинок тіла в його плоскопаралельному русі знаходиться в площині матеріальної симетрії тіла й так само, як і в загальному випадкові руху механічної системи, визначається векторною формулою (10.42), а головний момент цих віртуальних сил \vec{M}_{iO} нормальний до площини симетрії, оскільки на самому початку прийнято умову, що плоскопаралельний рух тіла відбувається паралельно цій площині (рис. 10.20), і за основну нерухому площину вибрано декартову площину Oxy , в якій рухається центр мас C тіла.

Якщо, визначаючи головний момент сил інерції Д'Аламбера, за центр моментів цих сил частинок тіла в його плоскопаралельному русі взяти не нерухомий початок O системи осей $Oxyz$, а центр мас C тіла, то векторна формула (10.50) набере вигляду

$$\vec{M}_{iC} = -\frac{d\vec{K}_C}{dt}.$$

Під знаком оператора похідної знаходиться кінетичний момент тіла відносно його центра мас C або, що одне й те саме, відносно поступально рухомої осі полюсів Cz ; він визначається за формулою (10.48).

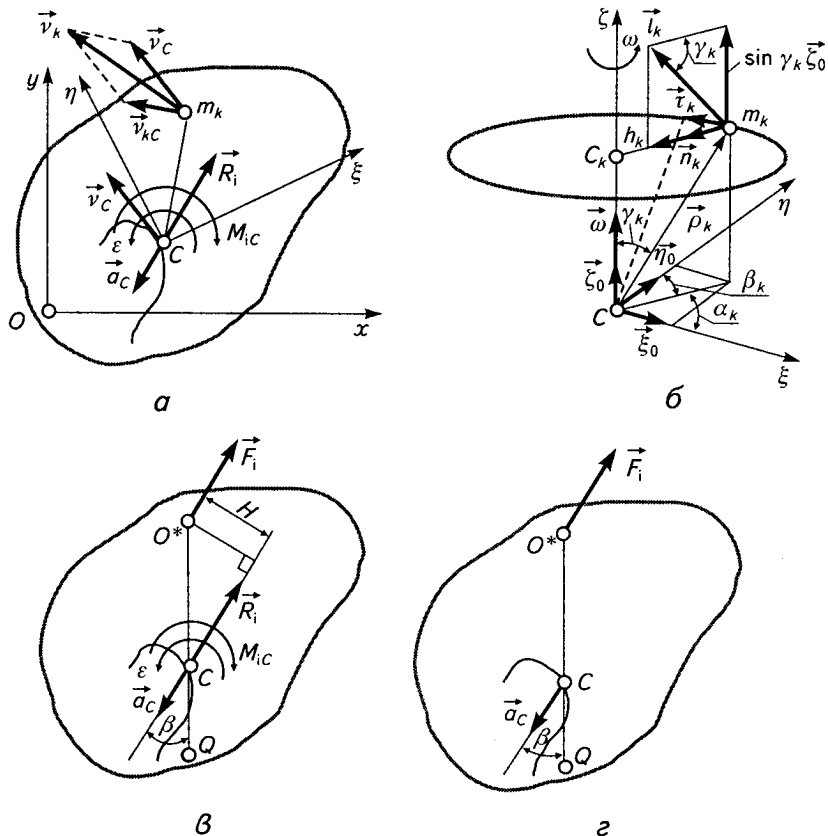


Рис. 10.20

Виразимо \vec{K}_C через кутову швидкість ω обертальної складової плоскопаралельного руху тіла в його обертанні навколо осі полюсів $C\xi$ і момент інерції тіла відносно цієї осі. Для цього для частинок тіла масою m_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) застосуємо теорему кінематики про швидкість точки тіла в плоскопаралельному русі, згідно з якою матимемо (рис. 10.20, а)

$$\vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{v}_{kC} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_k.$$

Тепер підставимо значення цих швидкостей у рівність (10.48) і зробимо відповідні викладки (рис. 10.20, б):

$$\vec{K}_C = \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times m_k (\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_k) = \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times (\vec{\omega} \times m_k \vec{\rho}_k) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times (\omega \bar{\zeta}_0 \times m_k \bar{\rho}_k) = \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times (\omega \bar{\zeta}_0 m_k \rho_k) \times \bar{\tau}_k = \\
&= \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times (\omega m_k \rho_k \sin \gamma_k) \bar{\tau}_k = \sum_{k=1}^n \rho_k \omega m_k \rho_k \bar{I}_k \sin \gamma_k = \\
&= \sum_{k=1}^n \rho_k \omega m_k \rho_k \sin \gamma_k (\bar{n}_k \cos \gamma_k + \bar{\zeta}_0 \sin \gamma_k) = \\
&= \sum_{k=1}^n \rho_k \omega m_k \rho_k \bar{n}_k \sin \gamma_k \cos \gamma_k + \sum_{k=1}^n \rho_k \omega m_k \rho_k \bar{\zeta}_0 \sin \gamma_k \cos \gamma_k = \\
&= - \sum_{k=1}^n \rho_k \omega m_k \rho_k \sin \gamma_k \cos \gamma_k (\bar{\xi}_0 \cos \alpha_k + \bar{\eta}_0 \cos \beta_k) + \\
&+ \sum_{k=1}^n \rho_k \omega m_k \rho_k \bar{\zeta}_0 \sin \gamma_k \cos \gamma_k = - \omega \sum_{k=1}^n h_k m_k \bar{\zeta}_k \bar{\xi}_0 \cos \alpha_k - \\
&\quad - \omega \sum_{k=1}^n h_k m_k \bar{\zeta}_k \bar{\eta}_0 \cos \beta_k + \omega \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 \bar{\zeta}_0 = \\
&= - \omega \sum_{k=1}^n m_k \zeta_k \xi_k \bar{\xi}_0 - \omega \sum_{k=1}^n m_k \zeta_k \eta_k \bar{\eta}_0 + \omega \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 \bar{\zeta}_0.
\end{aligned}$$

Окремо виділимо результат перетворень:

$$\bar{K}_C = - \omega \sum_{k=1}^n m_k \zeta_k \xi_k \bar{\xi}_0 - \omega \sum_{k=1}^n m_k \zeta_k \eta_k \bar{\eta}_0 + \omega \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 \bar{\zeta}_0$$

або, ввівши позначення відцентрових та осевого моментів інерції тіла,

$$\bar{K}_C = -J_{\zeta\xi} \omega \bar{\xi}_0 - J_{\zeta\eta} \omega \bar{\eta}_0 + J_{C\zeta} \omega \bar{\zeta}_0.$$

Оскільки в нашому випадкові плоскопаралельного руху тіла незмінно зв'язана з ним система осей $C\xi\eta$ збігається з його площиною матеріальної симетрії, то інерційні коефіцієнти $J_{\zeta\xi}$, $J_{\zeta\eta}$ дорівнюють нулю, й кінетичний момент тіла відносно його центра мас, який перпендикулярний до площини матеріальної симетрії, становитиме

$$\bar{K}_C = J_{C\zeta} \omega \bar{\zeta}_0, \quad (10.88)$$

а його проекція (алгебричне значення) на поступально рухому вісь полюсів

$$K_C = J_{C\zeta} \omega. \quad (10.89)$$

Тепер повертаємося до основної формули й запишемо вираз для головного моменту сил інерції Д'Аламбера тіла в плоскопаралельному русі відносно його центра мас C

$$\vec{M}_{iC} = -J_{C\zeta} \varepsilon \vec{\zeta}_0$$

або його алгебричне значення

$$M_{iC} = -J_{C\zeta} \varepsilon. \quad (10.90)$$

Як підсумок на рис. 10.20, a наведено схему головного вектора й головного моменту сил інерції Д'Аламбера для тіла в плоскопаралельному русі.

У площині матеріальної симетрії тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, знайдемо таку точку O^* , відносно якої сума моментів д'аламберових сил інерції частинок тіла дорівнює нулю. В такій точці, очевидно, буде прикладена рівнодійна \vec{F}_i цих сил. Положення точки O^* визначимо з умови

$$-R_i H + M_{iC} = 0$$

або

$$-Ma_c H + J_{C\zeta} \varepsilon = 0,$$

де H — плече головного вектора сил інерції Д'Аламбера, прикладеного в центрі мас тіла, відносно шуканої точки O^* , в якій прикладена рівнодійна \vec{F}_i (рис. 10.20, b).

Далі, продовжуючи викладки, розглянемо вісь миттєвих центрів прискорень тіла, яка в досліджуваному випадкові перпендикулярна до площини матеріальної симетрії тіла. Візьмемо миттєвий центр прискорень Q , який знаходиться на площині матеріальної симетрії тіла, й проведемо через нього й центр мас C пряму QC . Тоді прискорення центра мас C тіла відносно миттєвого центра прискорень Q визначатиметься за формулою

$$a_c = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot CQ.$$

Підставивши в попередню формулу, матимемо

$$-M\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot CQ \cdot H + J_{C\zeta} \varepsilon = 0$$

або

$$-M \cdot CQ \cdot H + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} J_{C\zeta} = 0.$$

Тут

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \sin \angle(\vec{a}_C, \vec{CQ}),$$

де $\angle(\vec{a}_C, \vec{CQ}) = \beta$ — кут між вектором прискорення центра мас і напрямом відрізка, що сполучає центр мас із миттєвим центром прискорень.

Отже, маємо

$$\frac{H}{\sin \beta} = \frac{J_{C\zeta}}{M \cdot CQ}.$$

Величина зліва дорівнює відстані від центра мас C тіла до шуканої точки O^* , в якій прикладена рівнодійна \vec{F}_i . Позначивши цю відстань через CO^* , дістанемо

$$CO^* = H / \sin \beta$$

або остаточно

$$CO^* = \frac{J_{C\zeta}}{M \cdot CQ}. \quad (10.91)$$

Точка O^* прикладання рівнодійної \vec{F}_i д'аламберових сил інерції частинок тіла в плоскопаралельному русі лежить на продовженні відрізка QC із протилежного боку відносно миттєвого центра прискорень Q (рис. 10.20, в). Зрозуміло, що за модулем і напрямом рівнодійна \vec{F}_i дорівнює головному векторові \vec{R}_i :

$$\vec{F}_i = \vec{R}_i = -M\vec{a}_C. \quad (10.92)$$

Формула (10.92) показує, що тіло в плоскопаралельному русі можна розглядати як фізичний маятник, в якого за точку підвісу править миттєвий центр прискорень Q , а його центр хитань O^* є точкою прикладання рівнодійної д'аламберових сил інерції частинок тіла (рис. 10.20, з).

□ **Принцип Д'Аламбера для тіла в плоскопаралельному русі.** Для плоскопаралельного руху тіла векторні рівняння (10.30) можна подати у двох формах. Перша форма:

$$\begin{aligned} \vec{R}_3 - M\vec{a}_C &= 0; \\ \vec{M}_{3O} - J_{C\zeta} \varepsilon \vec{\zeta}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (10.93)$$

або в скалярному вигляді

$$\begin{aligned} R_{3x} - Ma_{Cx} &= 0, \\ R_{3y} - Ma_{Cy} &= 0; \\ M_{3C} - J_{C\zeta} \varepsilon &= 0. \end{aligned} \quad (10.94)$$

Друга форма:

$$\vec{F}_3 - M\vec{a}_C = 0 \quad (10.95)$$

або

$$\begin{aligned} F_{3x} - Ma_{Cx} &= 0, \\ F_{3y} - Ma_{Cy} &= 0; \end{aligned} \quad (10.96)$$

$$M_{C\zeta}(\vec{F}_3) - J_{C\zeta} \varepsilon = 0.$$

Тут індекс «3» означає належність сил (як активних, так і реакцій в'язей) до категорії зовнішніх, $M_{C\zeta}(\vec{F}_3)$ — момент рівнодійної прикладених до тіла зовнішніх сил відносно поступально рухомої осі, що проходить через центр мас тіла.

З рівнянь (10.95), (10.96) бачимо, що в плоскопаралельному русі прикладені до тіла й розташовані в його площині матеріальної симетрії, паралельно якій здійснюється рух, зовнішні активні сили разом із зовнішніми реакціями в'язей зводяться до рівнодійної, котра прикладена в центрі хитань O^* і напрямлена в бік прискорення центра мас тіла, а за модулем дорівнює добутку маси тіла на прискорення його центра мас.

► **Приклад 10.3.** У прикладі 10.1 про розгін і зупинку моторного візка (див. рис. 10.17) додатково знайдемо граничне значення обертового моменту $M_{об}$, за якого рушійна сила, що є силою тертя $F_{тер}$, досягає свого максимального значення,

$$F_{тер} = F_{тер,макс} = fN_2.$$

Щоб урахувати дію на силові колеса моторного візка обертового моменту, який передається від двигуна до коліс, треба окремо розглянути плоскопаралельний рух цих коліс (див. рис. 10.17, з), де \vec{G}_2 — сила зчеплення двох силових коліс з дорогою, \vec{N}_2 — нормальна реакція поверхні на силових колесах, $\vec{F}_{тер}$ — сила тяги на їхніх ободах, \vec{F} — горизонтальна реакція підшипників осі, $M_{об}$ — обертовий момент. На межі буксування прискорення центрів коліс a_C пов'язане з їхнім кутовим прискоренням ε формулою

$$a_C = \varepsilon r.$$

За методом Д'Аламбера умовно прикладемо до коліс головний вектор $\vec{R}_i = -m_2\vec{a}_C$ в їхньому центрі мас і головний момент $M_{iC} = -J\varepsilon$, який є моментом пари д'аламберових сил інерції частинок коліс під час обертання їх навколо горизонтальної осі, що проходить через центри мас коліс (див. рис. 10.17, з).

Для складання рівняння динаміки обертової складової плоского руху коліс застосуємо третє з рівнянь системи (10.96). Записуючи моменти сил

відносно осі коліс, урахуватимемо таке правило знаків моментів: додатними вважатимемо ті моменти, які за напрямом збігаються з кутовим прискоренням ϵ колеса, у протилежному разі моменти будуть від'ємними.

Отже, рівняння динаміки обертального руху силових коліс у формі Д'Аламбера матиме вигляд

$$-J\epsilon + M_{об} - F_{тер}r = 0.$$

Якщо сила тяги на ободі коліс досягає свого максимального значення, то граничний обертальний момент визначатиметься так:

$$\bar{F}_{тер.макс} = -\frac{J}{r}\epsilon + \frac{M_{об.гр}}{r} \leq fN_2,$$

$$\frac{M_{об.гр}}{r} \leq fN_2 + \frac{J}{r}\epsilon.$$

Підставивши силу зчеплення силових коліс з дорогою $G_2 = N_2$ і виразивши кутове прискорення через прискорення моторного візка, дістанемо

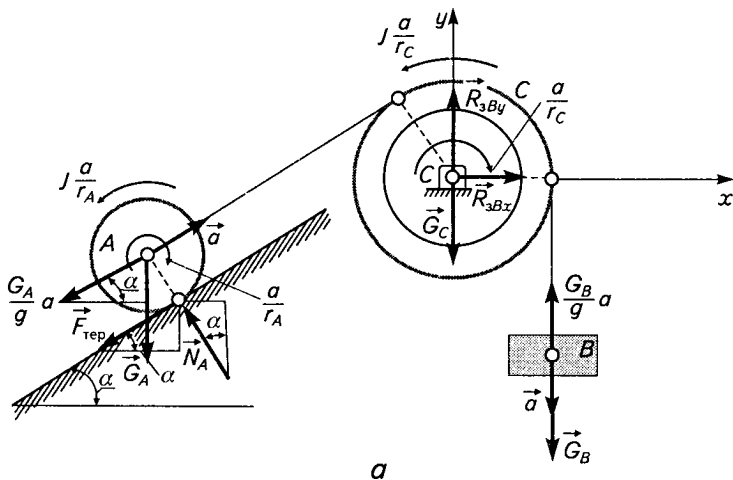
$$\frac{M_{об.гр}}{r} \leq f \frac{aMg}{a+b} \left(1 + \frac{a_c}{g} \frac{h}{a} \right) + \frac{J}{r^2} a_c$$

або

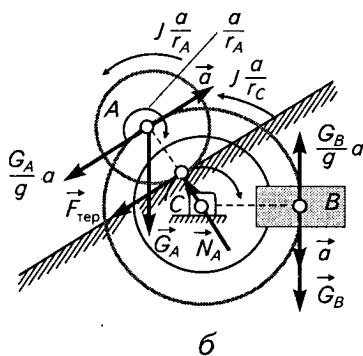
$$\frac{M_{об.гр}}{r} \leq f \frac{aMg}{a+b} + a_c \left(\frac{J}{r^2} + f \frac{hM}{a+b} \right).$$

Якщо обертальний момент перевищує дане значення, то сила тяги на ободі силових коліс моторного візка від нього вже не залежатиме. Зазначимо, що коефіцієнт тертя не є постійною величиною: він зменшується зі зростанням кутової швидкості силових коліс під час їх буксування. Тому найбільша сила тяги на ободі буде саме під час рушання з місця на межі буксування.

➤ **Приклад 10.4.** Проілюструємо застосування універсальних рівнянь динаміки у формі Д'Аламбера для плоскої системи тіл зі спільною площиною матеріальної симетрії. Маємо механічну систему з трьох тіл (рис. 10.21, а): правильний круглий циліндр (колесо) A вагою $G_A = 288,4$ Н і радіусом $r_A = 0,3$ м, що котиться без проковзування вгору по похилій площині; нерухомий блок C вагою $G_C = 144,2$ Н, радіусом $r_C = 0,76$ м і з радіусом інерції $i_C = 0,61$ м (він обертається навколо горизонтальної осі C); тіло B вагою $G_B = 144,2$ Н, що здійснює поступальний рух по вертикалі вниз. Тіла в системі взаємодіють між собою через невагому нерозтягливу нитку, що охоплює верхню частину обода нерухомого блока. До вільних кінців нитки прикріплені циліндр і вантаж. Треба визначити прискорення a вантажу, що падає, та коефіцієнт тертя f між циліндром і похилою площиною.



а



б

Рис. 10.21

Якщо розглядати динамічну (віртуальну) рівновагу заданої системи за методом Д'Аламбера, то для визначення a і f потрібна система двох рівнянь, які пов'язують ці дві величини. Одне рівняння дістанемо, прирівнявши до нуля суму моментів зовнішніх щодо розглядуваної механічної системи активних сил \vec{G}_A , \vec{G}_B , \vec{G}_C і реакцій в'язей \vec{N}_A , $\vec{F}_{\text{тер}}$, \vec{R}_{iC} (сил \vec{G}_C , \vec{R}_{iC} на схемі немає), а також д'аламберових сил інерції відносно нерухомої точки C . Д'Аламберові сили інерції частинок тіл системи зводяться до головного вектора $\vec{R}_i = \frac{G_A}{g} \vec{a} + \frac{G_B}{g} \vec{a}$ та головного моменту $M_{iC} = -J_C \varepsilon_C - J_A \varepsilon_A - \frac{G_A}{g} a r_C - \frac{G_B}{g} a r_C$ відносно центра C (рис. 10.21, а).

Оскільки активні сили, що діють на тіла системи, не змінюються, то, очевидно, прискорення — як кутові, так і лінійні — для системи також не змінюватимуться. Тому рівняння динамічної рівноваги в моментах зазначе-

них сил відносно точки C можемо скласти в положенні тіл системи, в якому центр колеса A і центр мас тіла B збігаються з відповідними точками сходження нитки з обода колеса C (рис. 10.21, б).

Шукане рівняння матиме вигляд

$$a \left(\frac{J_A}{r_A} + \frac{J_C}{r_C} + \frac{G_A}{g} r_C + \frac{G_B}{g} r_C \right) = \\ = (G_B - G_A \sin \alpha - f G_A \cos \alpha) r_C + f G_A \cos \alpha r_A.$$

Інше рівняння дістанемо на підставі принципу Д'Аламбера для плоскопаралельного руху тіла, розглянувши лише його обертальну складову навколо центра мас:

$$f G_A \cos \alpha r_A - \frac{J_A}{r_A} a = 0$$

за умови, що колесо A , котячися без проковзування, перебуває на межі перед ковзанням по похилій площині, якому відповідає максимальна сила тертя $F_{\text{тер}} = f N_A = f G_A \cos \alpha$.

Розв'язуючи добуті два рівняння відносно шуканих невідомих, приходимо до таких формул для їх визначення:

$$a = 2g r_C^2 \frac{G_B - G_A \sin \alpha}{2[G_C r_C^2 + (G_A + G_B) r_C^2] + G_A r_C^2}, \\ f = \frac{a}{2g \cos \alpha}.$$

Підставивши числові значення, дістанемо

$$a = 2 \cdot 9,81 \cdot 0,76^2 \frac{144,2 - 288,4 \sin(\pi/6)}{2[144,2 \cdot 0,61^2 + (288,4 + 144,2)0,76^2] + 288,4 \cdot 0,76^2} = \\ = 6,471 = 6,5 \text{ м/с}^2; \\ f = \frac{6,471}{2 \cdot 9,81 \cos(\pi/6)} = 0,381 = 0,4.$$

Метод Д'Аламбера найефективніший саме для визначення динамічних реакцій в'язей механічних систем, коли кутові й лінійні прискорення за умовою задачі відомі чи можуть бути визначені за іншою методикою, наприклад за методом Д'Аламбера—Лагранжа або узагальнених координат Лагранжа (див. гл. 11).

Проілюструємо визначення динамічних реакцій за методом Д'Аламбера на прикладі руху вже розглянутої механічної системи. З рис. 10.21, а дістаємо такі рівняння для обчислення реакцій опор \bar{R}_{3Cx} , \bar{R}_{3Cy} горизонтального вала, на якому насаджено колесо C :

$$R_{3Cx} - \frac{G_A}{g} a \cos \alpha - F_{\text{тер}} \cos \alpha - N_A \sin \alpha = 0,$$

$$R_{3,Cy} - \frac{G_A}{g} a \sin \alpha - F_{\text{тер}} \sin \alpha + N_A \cos \alpha - G_B + \frac{G_B}{g} a = 0$$

або, підставивши

$$F_{\text{тер}} = fG_A \cos \alpha, \quad N_A = G_A \cos \alpha,$$

матимемо

$$R_{3,Cx} - \frac{G_A}{g} a \cos \alpha - fG_A \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} G_A \sin 2\alpha = 0,$$

$$R_{3,Cy} - \frac{G_A}{g} a \sin \alpha - fG_A \frac{1}{2} \sin 2\alpha + G_A \cos^2 \alpha - G_A - G_B + \frac{G_B}{g} a - G_C = 0.$$

Далі знаходимо

$$\bar{R}_{3,Cx} = G_A \left(\frac{a}{g} \cos \alpha + f \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right),$$

$$\bar{R}_{3,Cy} = \frac{a}{g} (G_A \sin \alpha - G_B) + G_A \left(f \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \cos^2 \alpha \right) + G_B + G_C.$$

Підставимо числові значення:

$$\bar{R}_{3,Cx} = 29,4 \left(\frac{6,5}{9,81} \cos \frac{\pi}{6} + 0,4 \cos^2 \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) = 377 \text{ Н},$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{3,Cy} &= \frac{6,5}{9,81} \left(29,4 \sin \frac{\pi}{6} - 147 \right) + 29,4 \left(0,4 \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{6} \right) + \\ &+ 147 + 14,7 = 45 \text{ 610 Н}. \end{aligned}$$

10.4

Принцип Д'Аламбера для руху тіла навколо нерухомої точки. Динамічні рівняння Ейлера

Головний вектор і головний момент сил інерції Д'Аламбера в сферичному русі тіла. Розглядаючи динаміку даного виду руху, користуватимемося двома декартовими системами осей: абсолютно нерухомою $Oxyz$ із початком у нерухомій точці O тіла, навколо якої і відбувається його сферичний рух, і незмінно зв'язаною з тілом рухомою $O\xi\eta\zeta$ з початком у тій самій точці (рис. 10.22). Введемо орти нерухомих і рухомих осей: $\bar{x}^\circ, \bar{y}^\circ, \bar{z}^\circ; \bar{\xi}^\circ, \bar{\eta}^\circ, \bar{\zeta}^\circ$ відповідно. Визначатимемо положення центра мас C тіла у сферичному русі радіусом-вектором \bar{r}_C .

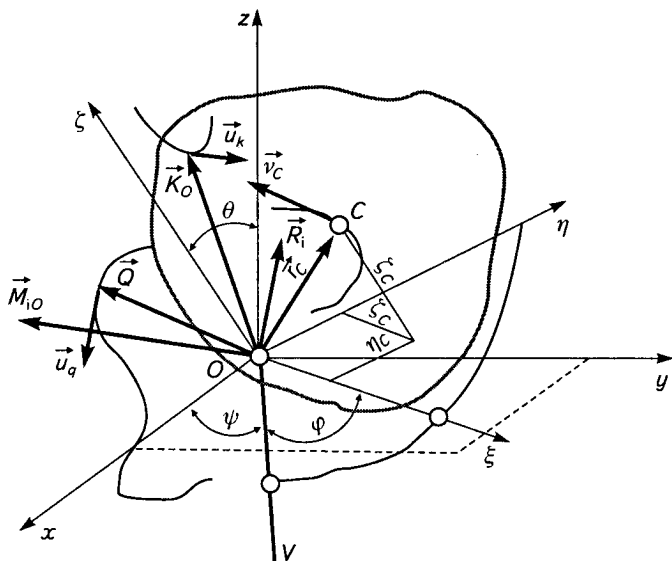


Рис. 10.22

Тоді швидкість і прискорення центра мас тіла становитимуть

$$\vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C, \quad \vec{a}_C = \ddot{\vec{r}}_C. \quad (10.97)$$

Якщо маса тіла M , то, як і в загальному випадкові руху механічної системи, головний вектор сил інерції Д'Аламбера частинок тіла визначатиметься за формулою

$$\vec{R}_i = -M\vec{a}_C$$

або

$$\vec{R}_i = -\frac{d}{dt}(M\vec{v}_C). \quad (10.98)$$

Тут

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C \quad (10.99)$$

— головний вектор кількостей руху частинок тіла, який вважається прикладеним у нерухомій точці O й має напрям швидкості \vec{v}_C центра мас C тіла.

Отже,

$$\vec{R}_i = -\frac{d\vec{Q}}{dt}. \quad (10.100)$$

Із векторної формули (10.100) випливає, що головний вектор д'Аламберових сил інерції дорівнює взятій зі знаком «-» швидкості

$\vec{u}_q = \frac{d\vec{Q}}{dt}$ кінця головного вектора \vec{Q} кількості руху тіла в його сферичному русі, тобто

$$\vec{R}_i = -\vec{u}_q.$$

Зазначимо, що вектор \vec{R}_i , як і \vec{Q} , прикладений у нерухомій точці O (рис. 10.22); векторна похідна $\vec{u}_q = \frac{d\vec{Q}}{dt}$ є абсолютною (визначається в абсолютно нерухомій системі осей $Oxyz$).

Покажемо, що вектор кількості руху \vec{Q} змінюється не лише відносно нерухомих осей, а й відносно рухомих, тобто відносно самого тіла. Для цього виразимо абсолютний вектор \vec{Q} через його прямокутні складові в напрямках рухомих осей $O\xi^\circ$, Oy° , $O\zeta^\circ$:

$$\vec{Q} = Q_\xi \vec{\xi}^\circ + Q_\eta \vec{\eta}^\circ + Q_\zeta \vec{\zeta}^\circ.$$

У цій векторній рівності скалярні множники Q_ξ , Q_η , Q_ζ не можуть не змінюватися, бо система осей $O\xi^\circ\eta^\circ\zeta^\circ$ разом із тілом обертаються навколо точки O з миттєвою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, водночас змінюється й напрям ортів $\vec{\xi}^\circ$, $\vec{\eta}^\circ$, $\vec{\zeta}^\circ$.

Маємо похідну

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{dQ_\xi}{dt} \vec{\xi}^\circ + \frac{dQ_\eta}{dt} \vec{\eta}^\circ + \frac{dQ_\zeta}{dt} \vec{\zeta}^\circ + Q_\xi \frac{d\vec{\xi}^\circ}{dt} + Q_\eta \frac{d\vec{\eta}^\circ}{dt} + Q_\zeta \frac{d\vec{\zeta}^\circ}{dt}.$$

За відомими формулами кінематики записуємо

$$\frac{d\vec{\xi}^\circ}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\xi}^\circ, \quad \frac{d\vec{\eta}^\circ}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\eta}^\circ, \quad \frac{d\vec{\zeta}^\circ}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\zeta}^\circ.$$

Тоді з урахуванням цих величин сума трьох останніх членів у виразі абсолютної похідної зміниться:

$$Q_\xi \frac{d\vec{\xi}^\circ}{dt} + Q_\eta \frac{d\vec{\eta}^\circ}{dt} + Q_\zeta \frac{d\vec{\zeta}^\circ}{dt} = \vec{\omega} \times (Q_\xi \vec{\xi}^\circ + Q_\eta \vec{\eta}^\circ + Q_\zeta \vec{\zeta}^\circ)$$

або

$$Q_\xi \frac{d\vec{\xi}^\circ}{dt} + Q_\eta \frac{d\vec{\eta}^\circ}{dt} + Q_\zeta \frac{d\vec{\zeta}^\circ}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{Q}.$$

Векторна сума перших трьох доданків — це так звана локальна похідна за часом від кількості руху \vec{Q} , яка й визначає зміну цієї векторної величини відносно самого тіла:

$$\frac{dQ_{\xi}}{dt} \bar{\xi}^{\circ} + \frac{dQ_{\eta}}{dt} \bar{\eta}^{\circ} + \frac{dQ_{\zeta}}{dt} \bar{\zeta}^{\circ} = \frac{\tilde{d}(Q_{\xi} \bar{\xi}^{\circ} + Q_{\eta} \bar{\eta}^{\circ} + Q_{\zeta} \bar{\zeta}^{\circ})}{dt} = \tilde{d}\bar{Q}.$$

Тут $\bar{\xi}^{\circ}$, $\bar{\eta}^{\circ}$, $\bar{\zeta}^{\circ}$ вважаються незалежними від часу.

Остаточно приходимо до такої важливої формули динаміки, яку називають *теоремою про абсолютну похідну від вектора*:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \tilde{d}\bar{Q} + \bar{\omega} \times \bar{Q}. \quad (10.101)$$

Абсолютна похідна за часом від головного вектора кількості руху тіла в його сферичному русі дорівнює локальній похідній за часом від цього вектора, доданий до векторного добутку вектора миттєвої кутової швидкості тіла на головний вектор кількості руху.

Таким чином, векторна формула (10.101) для головного вектора д'аламберових сил інерції набирає вигляду

$$\bar{R}_i = -\frac{\tilde{d}\bar{Q}}{dt} - \bar{\omega} \times \bar{Q}. \quad (10.102)$$

Тепер урахуємо, що

$$\bar{Q} = M\bar{\omega} \times \bar{r}_C.$$

Тоді

$$\bar{R}_i = -M \left(\frac{\tilde{d}(\bar{\omega} \times \bar{r}_C)}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}_C \right).$$

У проєкціях на рухомі осі $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ матимемо такі скалярні вирази:

$$\begin{aligned} R_{i\xi} &= -M \left[\zeta_C \frac{d\omega_{\eta}}{dt} - \eta_C \frac{d\omega_{\zeta}}{dt} + \omega_{\eta}(\omega_{\xi}\eta_C - \omega_{\eta}\xi_C) - \right. \\ &\quad \left. - \omega_{\zeta}(\omega_{\zeta}\xi_C - \omega_{\xi}\zeta_C) \right], \\ R_{i\eta} &= -M \left[\xi_C \frac{d\omega_{\zeta}}{dt} - \zeta_C \frac{d\omega_{\xi}}{dt} + \omega_{\zeta}(\omega_{\eta}\zeta_C - \omega_{\zeta}\eta_C) - \right. \\ &\quad \left. - \omega_{\xi}(\omega_{\xi}\eta_C - \omega_{\eta}\xi_C) \right], \\ R_{i\zeta} &= -M \left[\eta_C \frac{d\omega_{\xi}}{dt} - \xi_C \frac{d\omega_{\eta}}{dt} + \omega_{\xi}(\omega_{\zeta}\xi_C - \omega_{\xi}\zeta_C) - \right. \\ &\quad \left. - \omega_{\eta}(\omega_{\eta}\zeta_C - \omega_{\zeta}\eta_C) \right]. \end{aligned} \quad (10.103)$$

Нехай кінематичні рівняння сферичного руху тіла задані, тобто відомі кути Ейлера як функції часу:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi(t), \\ \theta &= \theta(t), \\ \psi &= \psi(t).\end{aligned}\tag{10.104}$$

Із кінематики відомі залежності проекції миттєвої кутової швидкості $\bar{\omega}$ тіла на нерухомі осі $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ від кутів Ейлера та їх похідних:

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta, \\ \omega_\eta &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta, \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.\end{aligned}\tag{10.105}$$

Підсумовуючи викладене, зазначимо: якщо кінематичні рівняння сферичного руху тіла (10.104) заздалегідь відомі, то, використовуючи залежності (10.105), за формулами (10.103) можна визначити проекції головного вектора д'Аламберових сил інерції частинок тіла в його сферичному русі, а отже, й сам головний вектор.

□ **Головний момент сил інерції Д'Аламбера в сферичному русі тіла.** Вважатимемо, що рухомі осі $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, які незмінно зв'язані з тілом і разом із ним здійснюють сферичний рух, збігаються з головними осями інерції тіла для його нерухомої точки O . Тоді із шести інерційних коефіцієнтів J_ξ , J_η , J_ζ , $J_{\xi\eta}$, $J_{\xi\zeta}$, $J_{\eta\zeta}$ три останні — відцентрові моменти інерції — набувають нульових значень.

Використаємо загальну формулу головного моменту д'Аламберових сил інерції

$$\vec{M}_{iO} = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} = -\ddot{u}_k,$$

де \ddot{u}_k — швидкість кінця вектора кінетичного моменту \vec{K}_O , і перетворимо її стосовно сферичного руху тіла. Для цього скористаємося раніше виведеною теоремою про абсолютну похідну від вектора (10.101), в якій вектор \vec{Q} замінено на \vec{K}_O . Тоді матимемо

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \vec{K}_O.\tag{10.106}$$

Зліва стоїть абсолютна похідна вектора \vec{K}_O , визначеного відносно нерухомої точки O , обчислена в абсолютно нерухомій системі відліку $Oxuz$; $\frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt}$ — локальна (відносна) похідна того самого абсолютного

вектора \vec{K}_O , обчислена в рухомій системі відліку $O\xi\eta\zeta$; доданок $\vec{\omega} \times \vec{K}_O$ зумовлений тим, що вектор \vec{K}_O разом із тілом як одне ціле в нерухомій системі відліку $Oxyz$ обертається в даний момент часу навколо нерухомої точки O з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$.

На підставі формули (10.106) вираз головного моменту сил інерції Д'Аламбера для тіла у сферичному русі матиме вигляд

$$\vec{M}_{iO} = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{K}_O. \quad (10.107)$$

Продовжуючи викладки, для суцільного тіла запишемо

$$\vec{K}_O = \int_{(M)} \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_{(M)} \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} dm.$$

Окремо випишемо подвійний векторний добуток під інтегралом і перетворимо його до рухомих координат:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} &= (\xi\vec{\xi}^\circ + \eta\vec{\eta}^\circ + \zeta\vec{\zeta}^\circ) \times [(\omega_\eta\zeta - \omega_\zeta\eta)\vec{\xi}^\circ + (\omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta)\vec{\eta}^\circ + \\ &+ (\omega_\xi\eta - \omega_\eta\xi)\vec{\zeta}^\circ] = \eta(\omega_\eta\zeta - \omega_\zeta\eta)(\vec{\eta}^\circ \times \vec{\xi}^\circ) + \zeta(\omega_\eta\zeta - \omega_\zeta\eta)(\vec{\zeta}^\circ \times \vec{\xi}^\circ) + \\ &+ \xi(\omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta)(\vec{\xi}^\circ \times \vec{\eta}^\circ) + \zeta(\omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta)(\vec{\zeta}^\circ \times \vec{\eta}^\circ) + \\ &+ \xi(\omega_\xi\eta - \omega_\eta\xi)(\vec{\xi}^\circ \times \vec{\zeta}^\circ) + \eta(\omega_\xi\eta - \omega_\eta\xi)(\vec{\eta}^\circ \times \vec{\zeta}^\circ) = -\eta(\omega_\eta\zeta - \omega_\zeta\eta)\vec{\zeta}^\circ + \\ &+ \zeta(\omega_\eta\zeta - \omega_\zeta\eta)\vec{\eta}^\circ + \xi(\omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta)\vec{\zeta}^\circ - \zeta(\omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta)\vec{\xi}^\circ - \\ &- \xi(\omega_\xi\eta - \omega_\eta\xi)\vec{\eta}^\circ + \eta(\omega_\xi\eta - \omega_\eta\xi)\vec{\xi}^\circ = [\eta(\omega_\xi\eta - \omega_\eta\xi) - \\ &- \zeta(\omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta)]\vec{\xi}^\circ + [\zeta(\omega_\eta\zeta - \omega_\zeta\eta) - \xi(\omega_\xi\eta - \omega_\eta\xi)]\vec{\eta}^\circ + \\ &+ [\xi(\omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta) - \eta(\omega_\eta\zeta - \omega_\zeta\eta)]\vec{\zeta}^\circ. \end{aligned}$$

Підставивши під знак інтеграла й виконавши інтегрування, дістанемо шуканий вираз для кінетичного моменту:

$$\vec{K}_O = J_\xi \omega_\xi \vec{\xi}^\circ + J_\eta \omega_\eta \vec{\eta}^\circ + J_\zeta \omega_\zeta \vec{\zeta}^\circ. \quad (10.108)$$

Тепер запишемо (10.107) у проєкціях на рухомі осі:

$$\begin{aligned} M_{i\xi} &= -\frac{dK_\xi}{dt} - (K_\zeta \omega_\eta - K_\eta \omega_\zeta), \\ M_{i\eta} &= -\frac{dK_\eta}{dt} - (K_\xi \omega_\zeta - K_\zeta \omega_\xi), \\ M_{i\zeta} &= -\frac{dK_\zeta}{dt} - (K_\eta \omega_\xi - K_\xi \omega_\eta) \end{aligned}$$

або з урахуванням (10.108)

$$\begin{aligned}
 M_{i\xi} &= -J_{\xi} \frac{d\tilde{\omega}_{\xi}}{dt} - (J_{\zeta} - J_{\eta}) \omega_{\eta} \omega_{\zeta}, \\
 M_{i\eta} &= -J_{\eta} \frac{d\tilde{\omega}_{\eta}}{dt} - (J_{\xi} - J_{\zeta}) \omega_{\xi} \omega_{\zeta}, \\
 M_{i\zeta} &= -J_{\zeta} \frac{d\tilde{\omega}_{\zeta}}{dt} - (J_{\eta} - J_{\xi}) \omega_{\xi} \omega_{\eta}.
 \end{aligned}
 \tag{10.109}$$

Формули (10.109) дають змогу визначити головні моменти д'Аламберових сил інерції для тіла у сферичному русі відносно рухомих осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, якщо, звичайно, наперед відомі кінематичні рівняння сферичного руху (10.104). Зазначимо, що величини ω_{ξ} , ω_{η} , ω_{ζ} , що входять у праві частини (10.109), виражаються через кути Ейлера за формулами (10.105).

□ **Принцип Д'Аламбера для тіла в сферичному русі.** Нехай деякий сферичний рух тіла масою M відбувається під дією зовнішніх активних сил з їхнім головним вектором $\vec{R}_{a,3}$ і головним моментом $\vec{M}_{a,3O}$ відносно нерухомої точки O , а також зовнішніх реакцій опорної точки O з рівнодієюною $\vec{R}_{p,3}$. Проекції цих векторів на рухомі осі будуть $\vec{R}_{a,3\xi}$, $\vec{R}_{a,3\eta}$, $\vec{R}_{a,3\zeta}$; $\vec{M}_{a,3\xi}$, $\vec{M}_{a,3\eta}$, $\vec{M}_{a,3\zeta}$; $\vec{R}_{p,3\xi}$, $\vec{R}_{p,3\eta}$, $\vec{R}_{p,3\zeta}$ відповідно. Вважатимемо також, що рухомі осі $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ для точки O є головними осями інерції тіла. Тоді шість універсальних скалярних рівнянь динаміки механічної системи у формі Д'Аламбера (10.31) для нашого випадку сферичного руху з урахуванням формул (10.103) і (10.109) запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}
 &\vec{R}_{a,3\xi} + \vec{R}_{p,3\xi} - M \left[\zeta_C \frac{d\omega_{\eta}}{dt} - \eta_C \frac{d\omega_{\zeta}}{dt} + \right. \\
 &+ \omega_{\eta} (\omega_{\xi} \eta_C - \omega_{\eta} \xi_C) - \omega_{\zeta} (\omega_{\xi} \xi_C - \omega_{\zeta} \zeta_C) \left. \right] = 0, \\
 &\vec{R}_{a,3\eta} + \vec{R}_{p,3\eta} - M \left[\xi_C \frac{d\omega_{\zeta}}{dt} - \zeta_C \frac{d\omega_{\xi}}{dt} + \right. \\
 &+ \omega_{\zeta} (\omega_{\eta} \zeta_C - \omega_{\zeta} \eta_C) - \omega_{\xi} (\omega_{\xi} \eta_C - \omega_{\eta} \xi_C) \left. \right] = 0, \\
 &\vec{R}_{a,3\zeta} + \vec{R}_{p,3\zeta} - M \left[\eta_C \frac{d\omega_{\xi}}{dt} - \xi_C \frac{d\omega_{\eta}}{dt} + \right. \\
 &+ \omega_{\xi} (\omega_{\zeta} \xi_C - \omega_{\xi} \zeta_C) - \omega_{\eta} (\omega_{\eta} \zeta_C - \omega_{\zeta} \eta_C) \left. \right] = 0;
 \end{aligned}
 \tag{10.110}$$

$$M_{a.3\xi} - J_{\xi} \frac{d\tilde{\omega}_{\xi}}{dt} - (J_{\zeta} - J_{\eta})\omega_{\eta}\omega_{\zeta} = 0,$$

$$M_{a.3\eta} - J_{\eta} \frac{d\tilde{\omega}_{\eta}}{dt} - (J_{\xi} - J_{\zeta})\omega_{\zeta}\omega_{\xi} = 0,$$

$$M_{a.3\zeta} - J_{\zeta} \frac{d\tilde{\omega}_{\zeta}}{dt} - (J_{\eta} - J_{\xi})\omega_{\xi}\omega_{\eta} = 0.$$

Якщо відомі зовнішні активні сили, що діють на тіло, й кінематичні рівняння його сферичного руху (10.104), а також формули (10.105), які пов'язують проекції миттєвої кутової швидкості тіла на рухомі осі з кутами Ейлера та їх похідними за часом, то перші три рівняння системи (10.110) дають змогу визначити реакції опорної точки O тіла. Коли центр мас C тіла збігається з його опорною точкою O , ці рівняння перетворюються в статичні рівняння рівноваги між зовнішніми активними силами й реакцією опорної точки:

$$\bar{R}_{a.3\xi} + \bar{R}_{p.v.3\xi} = 0,$$

$$\bar{R}_{a.3\eta} + \bar{R}_{p.v.3\eta} = 0,$$

$$\bar{R}_{a.3\zeta} + \bar{R}_{p.v.3\zeta} = 0.$$

Останні три рівняння системи (10.110) можна використати в тому випадкові, коли сферичний рух тіла заздалегідь невідомий, а зовнішні активні сили за умовою задачі задані. При цьому потрібно розв'язати систему трьох диференціальних рівнянь першого порядку відносно невідомих проекцій миттєвої кутової швидкості тіла на рухомі декартові осі, незмінно зв'язані з тілом. Перейдемо від цих рівнянь у формі Д'Аламбера до звичайної форми:

$$J_{\xi} \frac{d\omega_{\xi}}{dt} + (J_{\zeta} - J_{\eta})\omega_{\eta}\omega_{\zeta} = M_{a.3\xi},$$

$$J_{\eta} \frac{d\omega_{\eta}}{dt} + (J_{\xi} - J_{\zeta})\omega_{\zeta}\omega_{\xi} = M_{a.3\eta}, \quad (10.111)$$

$$J_{\zeta} \frac{d\omega_{\zeta}}{dt} + (J_{\eta} - J_{\xi})\omega_{\xi}\omega_{\eta} = M_{a.3\zeta}.$$

Це динамічні рівняння Ейлера, на яких ґрунтується теорія гіроскопів. Визначаючи кути Ейлера — власний кут обертання φ , кут прецесії ψ і кут нутації θ , крім інтегрування рівнянь Ейлера (10.111) і відшукування невідомих ω_{ξ} , ω_{η} , ω_{ζ} , потрібно ще розв'язати систему трьох кінема-

тичних диференціальних рівнянь першого порядку відносно кутів Ейлера (10.105).

Нехай маємо окремий випадок сферичного руху, коли центр мас тіла та його опорна точка збігаються, а активною силою, що діє на тіло, є його власна вага. Тоді рівняння (10.111) набувають вигляду

$$\begin{aligned} J_{\xi} \frac{d\omega_{\xi}}{dt} + (J_{\zeta} - J_{\eta}) \omega_{\eta} \omega_{\zeta} &= 0, \\ J_{\eta} \frac{d\omega_{\eta}}{dt} + (J_{\xi} - J_{\zeta}) \omega_{\xi} \omega_{\zeta} &= 0, \\ J_{\zeta} \frac{d\omega_{\zeta}}{dt} + (J_{\eta} - J_{\xi}) \omega_{\xi} \omega_{\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (10.112)$$

Рівняння (10.112) описують сферичний рух тіла за інерцією, який за довільних початкових даних руху є дуже складним, і його характер визначається початковими даними руху, а також співвідношеннями між головними центральними осьовими моментами інерції тіла. Інерційний рух тіла з однією нерухомою точкою аналітично дослідив Л. Ейлер, а геометрично — Л. Пуансо.

Нехай у рівняннях (10.112) $J_{\xi} = J_{\eta} = J$. Тоді можна записати

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega_{\xi}}{dt} + (J_{\zeta} - J) \omega_{\eta} \omega_{\zeta} &= 0, \\ J \frac{d\omega_{\eta}}{dt} + (J - J_{\zeta}) \omega_{\xi} \omega_{\zeta} &= 0, \\ J_{\zeta} \frac{d\omega_{\zeta}}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (10.113)$$

Зінтегрувавши останнє рівняння й урахувавши третє з кінематичних співвідношень (10.105), маємо

$$\begin{aligned} \omega_{\zeta} &= \text{const} = C_3; \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta &= \omega_{\zeta 0}. \end{aligned} \quad (10.114)$$

Аби дістати наступне рівняння, що пов'язує перші похідні від кутів Ейлера, перше, друге й третє рівняння (10.113) помножимо на $J\omega_{\xi}$, $J\omega_{\eta}$, $J_{\zeta}\omega_{\zeta}$ відповідно й після цього додамо. В результаті матимемо

$$d(J^2 \omega_{\xi}^2 + J^2 \omega_{\eta}^2 + J_{\zeta}^2 \omega_{\zeta}^2) = 0$$

або після інтегрування

$$J^2 \omega_{\xi}^2 + J^2 \omega_{\eta}^2 + J_{\zeta}^2 \omega_{\zeta}^2 = K_0^2.$$

Зліва стоїть модуль кінетичного моменту, який під час руху тіла не змінюється. Зібравши сталі величини в правій частині, дістанемо

$$\omega_{\zeta}^2 + \omega_{\eta}^2 = \frac{K_O^2 - J_{\zeta}^2 \omega_{\zeta 0}^2}{J^2}.$$

Тепер перетворимо ліву частину, скориставшись кінематичними рівняннями (10.105):

$$\begin{aligned} (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta)^2 + (-\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta)^2 &= \frac{K_O^2 - J_{\zeta}^2 \omega_{\zeta 0}^2}{J^2}, \\ \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta &= \frac{K_O^2 - J_{\zeta}^2 \omega_{\zeta 0}^2}{J^2}. \end{aligned} \quad (10.115)$$

Останнє, третє рівняння для розв'язання задачі простіше знайти, врахувавши, що в нерухомій системі відліку кінетичний момент зберігається не лише за модулем, а й напрямом. Припустимо, що вектор кінетичного моменту \vec{K}_O розташований на осі Oz . Тоді його проекція на рухому вісь $O\zeta$ буде сталою величиною:

$$\begin{aligned} K_O \cos \angle(\vec{K}_O, \zeta) &= J_{\zeta} \omega_{\zeta 0}, \\ K_O \cos \theta &= J_{\zeta} \omega_{\zeta 0}, \\ \cos \theta &= \frac{J_{\zeta} \omega_{\zeta 0}}{K_O} = \text{const.} \end{aligned}$$

Отже, кут нутації θ не змінюється. З другого з рівнянь (10.115) дістанемо кутову швидкість прецесії $\dot{\psi}$, яка є сталою. Тому кут прецесії є лінійною функцією часу:

$$\psi = \frac{\sqrt{K_O^2 - J_{\zeta}^2 \omega_{\zeta 0}^2}}{J \sin \theta} t + \psi_0.$$

Кутова швидкість власного обертання визначається з першого з рівнянь (10.114):

$$\dot{\varphi} = \omega_{\zeta 0} - \frac{\sqrt{K_O^2 - J_{\zeta}^2 \omega_{\zeta 0}^2} J_{\zeta} \omega_{\zeta 0} / K_O}{J \sqrt{1 - (J_{\zeta} \omega_{\zeta 0} / K_O)^2}} = \omega_{\zeta 0} \left(1 - \frac{J_{\zeta}}{J} \right) = \text{const},$$

а кут власного обертання буде лінійною функцією часу:

$$\varphi = \omega_{\zeta 0} (1 - J_{\zeta} / J) t + \varphi_0.$$

Кінематичний стан тіла з однією нерухомою точкою, за якого кут нутації, кутові швидкості власного обертання й прецесії з часом не змінюються, називається *регулярною прецесією*.

МЕТОД ЛАГРАНЖА

11.1

Загальні зауваження

Істотним недоліком методів загальних теорем Ньютона й Д'Аламбера, розглянутих у попередніх главах, є те, що рівняння динаміки, які складаються на їх підставі, містять невідомі реакції в'язей. Сили, які належать до категорії реакцій в'язей, не можуть бути визначені доти, доки з рівнянь динаміки не виведено кінематичних рівнянь руху.

У разі застосування даних методів задачі динаміки розв'язуються поетапно. Спочатку з динамічних рівнянь виключаються невідомі реакції в'язей, після чого інтегруванням цих перетворених рівнянь визначається рух за відомими активними силами та початковими даними. Таким чином, діставши кінематичні рівняння руху, знову повертаються до початкових, не звільнених від реакцій в'язей рівнянь і продовжують розв'язувати задачу на визначення реакцій в'язей за відомим рухом і активними силами.

У складних задачах динаміки процедура виключення з рівнянь динаміки невідомих реакцій в'язей, щоб дістати рівняння, які містять лише задані сили, може бути громіздкою й неефективною. Тому в методі Лагранжа ще на стадії виведення динамічних рівнянь позбавляються невідомих реакцій в'язей. Хоча базові рівняння методу Лагранжа не містять реакцій в'язей і мають простий вигляд, проте їх застосування для складання рівнянь руху конкретних механічних систем не є простим і потребує застосування одних і тих самих стандартних підходів.

У методі Лагранжа розрізняють два підходи до складання рівнянь динаміки механічних систем. За одного, менш загального підходу використовують так звані рівняння принципу можливих переміщень, що дає змогу не розглядати реакцій ідеальних в'язей механічних систем, проте натомість у рівняння включаються довільні нескінченно малі прирости (варіації) просторових координат. Це

ускладнює самі рівняння, але в подальшому спеціальним прийомом варіації координат із рівнянь виключаються.

Досконалішим і загальнішим підходом у методі Лагранжа, що дає змогу уникнути розгляду реакцій в'язей у механічних системах, є застосування так званих рівнянь Лагранжа першого й другого роду. Вони по суті є математичним алгоритмом, за яким рівняння динаміки будь-яких механічних систем складаються за єдиними правилами, виконуються певні, однакові для всіх механічних систем алгебричні процедури. За методом Д'Аламбера дістають мінімально можливу кількість динамічних рівнянь, що є дуже важливим, оскільки механічна система буває досить складною, але має один ступінь вільності, й у такому разі її рух описується лише одним рівнянням динаміки. Мінімальна кількість динамічних рівнянь визначається ступенем рухомості механічної системи.

В основу методу Лагранжа покладено принцип Д'Аламбера й такі фундаментальні поняття динаміки, як віртуальні (можливі) переміщення й віртуальна робота, а також узагальнені координати й число ступенів вільності механічної системи. В методі Лагранжа накладені на механічну систему в'язі подаються математичними співвідношеннями, що пов'язують просторові координати точок простору, в яких перебувають точки механічної системи в своєму русі. Ці співвідношення називаються рівняннями в'язей. Виявляється, що сили реакцій в'язей залежать від властивостей самих рівнянь в'язей.

11.2

Рівняння Лагранжа першого роду

Рівняння в'язей. Як уже зазначалося, в динаміці в'язями (зв'язками) називаються обмеження геометричного або кінематичного характеру, що конструктивно або природно накладаються на положення й рух окремих точок тіл і механічних систем, які при цьому стають невільними.

В'язі, накладені на тіла, ідеалізацією можна зробити такими об'єктами, які математично описуються за допомогою рівнянь, що пов'язують просторові параметри й, можливо, час. Якщо, наприклад, досліджується динаміка невільної точки з якою-небудь однією в'яззю в декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$, то рівняння цієї в'язі запишеться так:

$$f(x, y, z; t) = 0. \quad (11.1)$$

Дане рівняння не пов'язане із силами, що діють на точку. Його вигляд не залежить від того, рухається точка чи перебуває в стані спокою. Єдина умова — щоб за руху й спокою точки її координати задовольняли рівняння в'язі (11.1). Рівняння в'язі заздалегідь визначає ту область простору, в якій може перебувати точка в своєму русі.

Якщо рівняння в'язі, крім координат, явно містить час, то така в'язь називається *нестационарною (реонотною)*, а в протилежному разі — *стационарною*. Рівняння (11.1) описує *нестационарну в'язь*. Взагалі в літературі з теоретичної механіки в'язь, в рівняння якої входять лише координати й час і відсутні перші похідні від координат, називається *нестационарною голономною*, а якщо в рівняння в'язі час t не входить, то *стационарною голономною*.

Наведемо деякі приклади *стационарних* і *нестационарних* в'язей, які можуть бути накладені на точку.

Розглянемо в'язь у вигляді нерозтяжливої невагомої нитки (або тонкого невагомого стержня), один кінець якої прикріплено до нерухомої основи, а до другого кінця прикріплено важку точку масою m (рис. 11.1). Обмежувальна умова цієї в'язі полягає в тому, що точка на натягнутій її власною вагою G нитці, рухаючися чи перебуваючи в рівновазі, має займати певне положення на колі радіусом l , рівняння якого в декартовій прямокутній системі осей $Oxyz$ записується так:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - l^2 = 0. \quad (11.2)$$

Це рівняння *стационарної голономної в'язі* в нашому випадкові.

Якщо в опорі O встановлено невеличке кільце й кінець нитки не прив'язано до опори, а пропущено крізь отвір кільця, то довжину нитки можна змінювати за певним законом, наприклад тягнути її кінець у певному напрямі з постійною швидкістю v . За таких умов рівняння в'язі набере вигляду

$$x^2 + y^2 - (l_0 - vt)^2 = 0. \quad (11.3)$$

Це рівняння *нестационарної голономної в'язі*.

Розглянемо наступний приклад *нестационарної голономної в'язі* — *прямолинійну циліндричну трубку невеликого діаметра, одним своїм кінцем закріплену на вертикальному валу нормально до його*

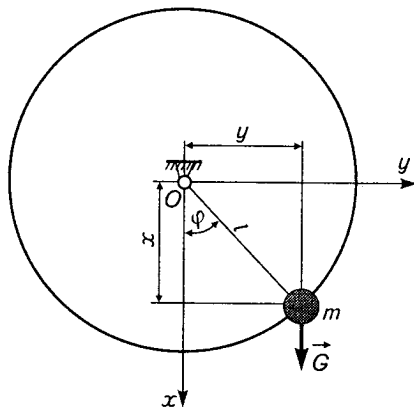


Рис. 11.1

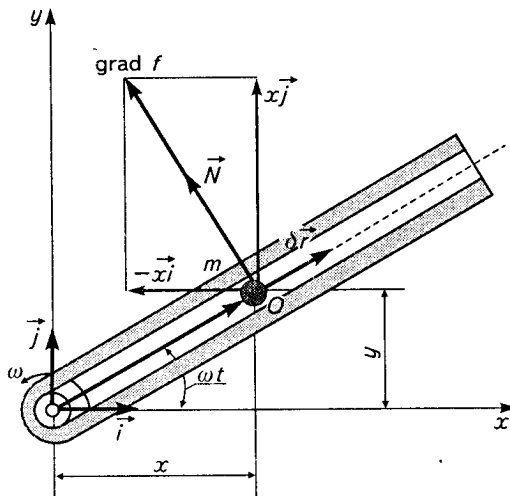


Рис. 11.2

осі, в якій уздовж її осі може вільно рухатися кулька. Вважатимемо, що трубка разом із кулькою в ній обертається з постійною кутовою швидкістю ω (рис. 11.2). Якщо осі Ox , Oy спрямувати, як на рис. 11.2, то в'язь у вигляді обмежувальних прямолінійних стінок трубки, які за її рівномірного обертання примушують кульку весь час знаходитися на її осі, описується таким рівнянням:

$$y - x \operatorname{tg} \omega t = 0. \quad (11.4)$$

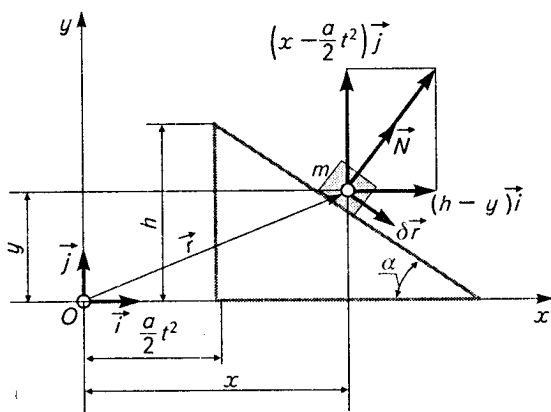


Рис. 11.3

Інший приклад — прямокутна призма, яка прямолінійно поступально з постійним прискоренням \bar{a} рухається вздовж горизонтальної поверхні. На похилій грані призми, яка утворює з горизонтом заданий кут α , знаходиться тіло, що може вільно рухатися по ній (рис. 11.3). У разі вибору основної системи осей Oxy , як на рис. 11.3, рівняння в'язі запишеться так:

$$y + x \operatorname{tg} \alpha - \left(h + \frac{a}{2} t^2 \operatorname{tg} \alpha \right) = 0. \quad (11.5)$$

Якщо точка m вимушено рухається по поверхні іншого тіла, яке саме перебуває в заданому русі або в стані спокою (рис. 11.4), то в системі декартових прямокутних осей $Oxyz$ таке обмеження поверхні на положення точки, очевидно, записується рівнянням (11.1). У разі руху точки по заданій просторовій кривій, наприклад маленького круглого кільця по дротині, яка сама перебуває в заданому русі, обмежувальна крива в декартових координатах описується двома рівняннями, кожне з яких визначає просторову поверхню. Перетин таких двох поверхонь і визначає задану криву, по якій вимушено рухається точка m (рис. 11.5):

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z; t) &= 0, \\ f_2(x, y, z; t) &= 0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Зауважимо, що розглядаються так звані *удержувальні*, або *двобічні*, *в'язі*, бо вони описуються рівностями. Це означає, що точка за жодних обставин не може позбутися в'язі.

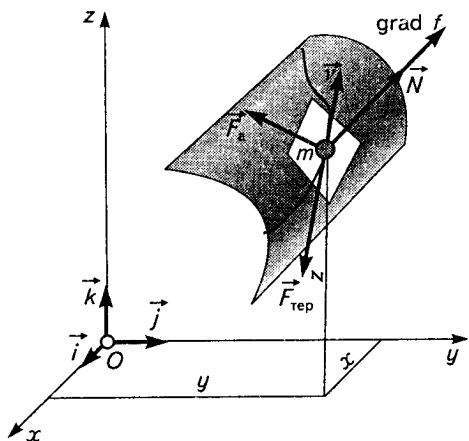


Рис. 11.4

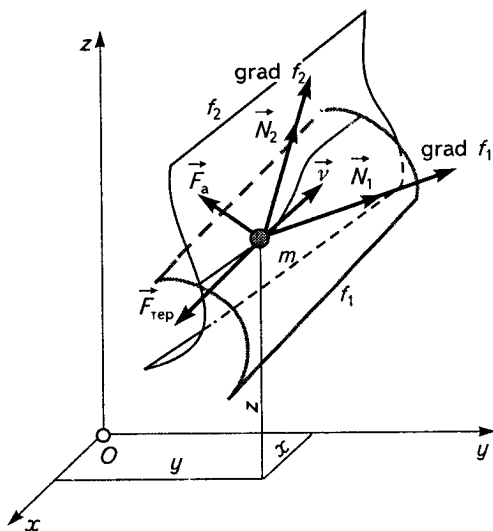


Рис. 11.5

□ **Динаміка руху точки по заданій нерухомій шорсткій поверхні. Рівняння динаміки руху точки з невизначеними множниками Лагранжа.** Нехай невільна точка масою m здійснює

деякий рух із тертям по заданій поверхні, рівняння якої в нерухомій декартовій системі осей $Oxyz$

$$f(x, y, z) = 0,$$

під дією рівнодійної заданих (активних) сил \vec{F}_a . Коефіцієнт тертя f (ми не розрізнятимемо статичний і кінематичний коефіцієнти тертя — вважатимемо, що вони однакові).

Для виведення рівняння руху невідільної точки з невизначеними коефіцієнтами застосуємо основний закон динаміки (див. рис. 11.4)

$$m\vec{a} = \vec{F}_a + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}},$$

де \vec{a} — прискорення точки; \vec{N} — нормальна реакція поверхні; $\vec{F}_{\text{тер}}$ — сила тертя ковзання.

Виразимо нормальну реакцію поверхні через характеристики поверхні: в даному випадкові це градієнт функції $f(x, y, z)$ і невизначений множник Лагранжа λ .

Нормальну реакцію поверхні подамо в такому вигляді:

$$\vec{N} = \lambda \text{grad } f = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Силу тертя запишемо так:

$$\vec{F}_{\text{тер}} = -f \frac{\vec{v}}{v} N = -f \frac{\vec{v}}{v} |\lambda \text{grad } f| = -f \frac{\vec{v}}{v} |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Підставимо ці величини у векторне рівняння другого закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_a + \lambda \text{grad } f - f \frac{\vec{v}}{v} |\lambda \text{grad } f| \quad (11.7)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$m\vec{a} = \vec{F}_a + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) - f \frac{\vec{v}}{v} - f \frac{\vec{v}}{v} |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (11.8)$$

Тепер подамо (11.8) у проєкціях на нерухомі декартові осі:

$$m\ddot{x} = F_{ax} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - f |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$

$$m\ddot{y} = F_{ay} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - f |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \quad (11.9)$$

$$m\ddot{z} = F_{az} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - f |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

До системи цих трьох рівнянь треба додати рівняння в'язі

$$f(x, y, z) = 0. \quad (11.10)$$

Рівняння (11.9) і (11.10) утворюють систему чотирьох рівнянь із чотирма невідомими $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, λ з невизначеними коефіцієнтами (множниками Лагранжа) і називаються *рівняннями Лагранжа першого роду для точки*.

► **Приклад 11.1.** Точка масою m знаходиться на площині, яка нахилена до горизонту під кутом α . Коефіцієнт тертя між точкою та площиною f . Скласти рівняння руху точки.

Візьмемо нерухому систему осей $Oxyz$, вісь Ox якої спрямуємо по похилій площині горизонтально, вісь Oy — по лінії найбільшого схилу (перпендикулярно до горизонталей на похилій площині), а вісь Oz — вгору (рис. 11.6).

Рівняння площини, по якій рухається точка, в нашому випадкові має вигляд

$$f(x, y, z) = z = 0.$$

Тоді $|\text{grad } f| = 1$,

$$\text{і } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1.$$

Тепер на підставі (11.9) запишемо

$$m\ddot{x} = -f\lambda \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$m\ddot{y} = mg \sin \alpha - f\lambda \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}};$$

$$0 = -mg \cos \alpha + \lambda_0$$

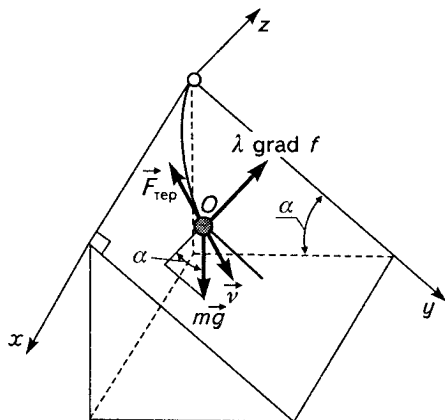


Рис. 11.6

або, взявши до уваги третє рівняння й скоротивши на масу m ,

$$\ddot{x} = -fg \cos \alpha \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$\ddot{y} = g \sin \alpha - fg \cos \alpha \frac{\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\lambda = mg \cos \alpha.$$

Завершуючи розгляд питання про динаміку руху точки по нерухомій шорсткій поверхні, звернемо увагу на застосування рівнянь (11.9) і (11.10) у загальному випадкові. Якщо розв'язується обернена задача динаміки про визначення кінематичних рівнянь руху $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ та нормальної реакції за відомими активними силами, то можна вибрати таку методику.

Спочатку двічі диференціюють за часом рівняння в'язі (11.10) і дістають рівняння, яке містить другі похідні за часом від декартових координат \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} і їхні перші похідні \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , а також самі координати x , y , z . Після цього в добути рівність замість других похідних від декартових координат підставляють їхні значення з динамічних рівнянь Лагранжа першого роду (11.9). У результаті приходять до одного рівняння, яке містить невизначений множник Лагранжа λ , координати, перші похідні від них, коефіцієнт тертя та проекції рівнодійної заданих активних сил на декартові осі.

Це рівняння розв'язують відносно невизначеного множника Лагранжа λ й добути значення підставляють в основну систему динамічних рівнянь (11.9). Таким чином дістають систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку, в якій невідомими є лише шукані функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Зінтегрувавши цю систему за початкових даних руху

$$\begin{aligned} (x)_{t=0} &= x_0, & (y)_{t=0} &= y_0, & (z)_{t=0} &= z_0; \\ (\dot{x})_{t=0} &= \dot{x}_0, & (\dot{y})_{t=0} &= \dot{y}_0, & (\dot{z})_{t=0} &= \dot{z}_0, \end{aligned}$$

знаходять залежність координат від часу.

Розв'язання задачі завершують визначенням за відомим множником Лагранжа λ модуля нормальної реакції шорсткої поверхні:

$$N = |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

□ **Динаміка руху точки по нерухомій шорсткій кривій.** Якщо нерухома крива, по якій вимушено рухається точка, задається двома рівняннями поверхонь

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0, \\ f_2(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \tag{11.11}$$

то тим самим повністю визначаються її властивості: радіус кривини траєкторії ρ , дугова координата s — довжина дуги кривої між взятою початковою точкою O на кривій і поточним положенням A на ній точки, що відповідає даному моментові часу t ; дугова координата, як відомо, цілком визначає положення точки на кривій.

Складемо рівняння руху точки по нерухомій шорсткій кривій у формі Лагранжа з невизначеними множниками λ_1, λ_2 . Нехай m — маса точки, \bar{a} — прискорення, \bar{v} — швидкість її руху по кривій, f — коефіцієнт тертя точки по кривій, \bar{F}_a — рівнодійна активних сил, \bar{N} — нормальна реакція кривої. Очевидно (див. рис. 11.5),

$$m\bar{a} = \bar{F}_a + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2 - f \frac{\bar{v}}{v} |\bar{N}|.$$

Тут v — модуль швидкості;

$$\text{grad } f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \bar{k}, \quad \text{grad } f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \bar{k};$$

$$|\bar{N}| = N = |\lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2|.$$

Ураховуючи останній вираз для модуля рівнодійної складових реакцій від окремих поверхонь, остаточно запишемо векторне рівняння динаміки точки в її русі по нерухомій шорсткій прямій у формі Лагранжа з невизначеними множниками:

$$m\bar{a} = \bar{F}_a + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2 - f \frac{\bar{v}}{v} |\lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2|. \quad (11.12)$$

Це рівняння має радше теоретичний інтерес, ніж практичний. Тому для розв'язання конкретних задач динаміки про визначення руху й нормальної реакції в разі руху точки по заданій рівняннями (11.11) нерухомій шорсткій кривій використовуються рівняння в натуральних осях. Перейдемо до них.

Із даним поточним положенням A точки на кривій сумістимо початок локальної системи натуральних осей $ATNB$. Як відомо, дотична вісь AT напрямлена по дотичній до кривої в бік додатних значень дугової координати s , що визначається ортом $\bar{\tau}$ дотичної; головна нормаль AN з ортом \bar{n} проходить через центр кривини C кривої, так що $AC = \rho$; бінормаль AB перпендикулярна до спрямної площини ATN , і її додатний напрям визначається ортом \bar{b} .

Таким чином, якщо в кожному положенні точки на кривій встановлені три головних напрями $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$, то на підставі основного закону Ньютона

$$m\bar{a} = \bar{F}_a + \bar{N} + \bar{F}_{\text{тер}}$$

можна скласти диференціальні рівняння руху точки по заданій шорсткій кривій у проєкціях на локальні осі натурального триєдра:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_{a\tau} - f \frac{\dot{s}}{v} |N|; \\ \frac{mv^2}{\rho} &= F_{an} + N_n; \\ 0 &= F_{ab} + N_b. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Щоб дістати диференціальне рівняння для визначення криволинійної координати $s(t)$, із двох останніх рівнянь знаходять модуль нормальної реакції кривої:

$$N = \sqrt{N_n^2 + N_b^2} = \sqrt{\left(\frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F_{an}\right)^2 + (F_{ab})^2}. \quad (11.14)$$

На підставі рівнянь в'язей (11.11) радіус кривини можна виразити через дугову координату s , оскільки справедливі залежності

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

і з диференціальної геометрії відомо, що

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Отже, радіус кривини буде функцією дугової координати.

Далі підставимо вирази для модуля нормальної реакції N і радіуса кривини ρ в основне рівняння (11.13) і дістанемо шукане диференціальне рівняння другого порядку відносно невідомої дугової координати s :

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_{a\tau} - \\ &- f \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \sqrt{\left(\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} m\dot{s}^2 - F_{an}\right)^2 + (F_{ab})^2}. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Сила \vec{F}_a у загальному випадкові є функцією $\vec{F}_a(t, \vec{v}, \vec{r})$. Точка рухається по кривій (11.11), тому справедливі залежності

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(s); \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{ds} \dot{s} = \vec{\tau} \dot{s}, \end{aligned}$$

і силу \vec{F}_a можна подати як функцію:

$$\vec{F}_a = \vec{F}_a(t, s, \dot{s}).$$

Якщо рух точки відбувається по плоскій нерухомій шорсткій кривій, то рівняння набирає вигляду

$$m\ddot{s} = F_{a\tau} - f \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \left[\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} m\dot{s}^2 - F_{an} \right]. \quad (11.16)$$

Це також рівняння другого порядку відносно дугової координати s . Зінтегрувавши його відносно s , дістанемо загальний розв'язок $s = s(t; C_1, C_2)$, який, очевидно, міститиме дві сталі інтегрування C_1, C_2 .

Визначивши із загального розв'язку за початковими даними руху (значеннями дугової координати та її похідної в початковий момент часу, який часто вважається нульовим) сталі інтегрування, підставляють їх у загальний розв'язок і таким чином приходять до частинного розв'язку $s = s(t; s_0, \dot{s}_0)$. Розв'язання задачі завершується знаходженням нормальної реакції: випадку для руху точки по просторовій кривій — за формулами

$$N_n = \frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F_{an},$$

$$N_b = -F_{ab},$$

$$N = \sqrt{\left[\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} m\dot{s}^2 - F_{an} \right]^2 + (F_{ab})^2}$$

і для випадку руху по плоскій кривій — за формулою

$$N = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} m\dot{s}^2 - F_{an}.$$

Розглянемо застосування рівняння (11.16).

■ **Рух кільця по вертикальній шорсткій дrottині у формі кола.** Нехай маємо шорстке дrottяне коло радіусом r , площина якого вертикальна (рис. 11.7). Найнижче положення на колі візьмемо за початок відліку O' дугової координат s . Припустимо, що в нульовий момент часу ($t_0 = 0$) кільце на колі перебувало в положенні, яке визначається дуговою координатою $s = s_0$, і мало

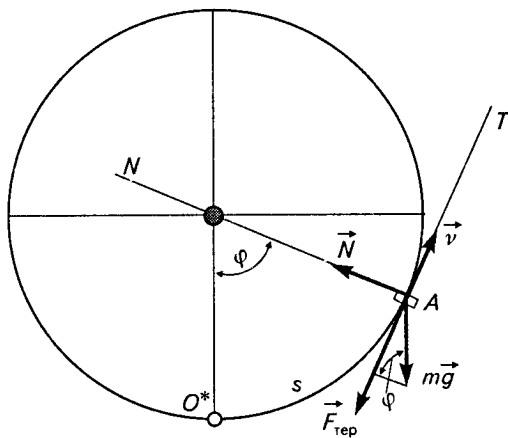


Рис. 11.7

швидкість $\dot{s} = \dot{s}_0$. Коефіцієнт тертя кільця по колу f . Дослідимо подальший рух кільця по колу.

Рівняння (11.16) у нашому випадкові набирає вигляду

$$m\ddot{s} = F_{ат} - f \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \left| \frac{m\dot{s}^2}{r} - F_{ан} \right|.$$

Із рис. 11.7 знаходимо

$$F_{ат} = -mg \sin \varphi,$$

$$F_{ан} = -mg \cos \varphi.$$

Якщо кільце рухається по колу в одному напрямі, наприклад угору, то сила тертя діє по дотичній униз, і в рівнянні зберігається знак «-». Отже,

$$m\ddot{s} = -mg \sin \varphi - f \left| \frac{m\dot{s}^2}{r} + fmg \cos \varphi \right|$$

або після скорочення на масу m і перенесення члена з модулем у ліву частину

$$\ddot{s} + f \left| \frac{\dot{s}^2}{r} + fg \cos \varphi \right| = -g \sin \varphi. \quad (11.17)$$

Якщо кільце рухається по колу вниз, то сила тертя напрямлена по дотичній угору, й рівняння матиме вигляд

$$\ddot{s} - gf \left| \left(\frac{\dot{s}^2}{r} + \cos \frac{s}{r} \right) \right| = -g \sin \frac{s}{r}. \quad (11.18)$$

Якщо швидкість кільця в деякому його положенні на колі, наприклад у найвершній точці, дорівнює нулю, то на частині дуги кола, на якій знаходиться ця точка, може бути зона спокою кільця. Назвемо зоною спокою на колі геометричне місце тих точок на ньому, в яких кільце, потрапивши з нульовою швидкістю, залишається нерухомим.

Зону спокою знайдемо із системи рівнянь і нерівностей, які випливають з умови рівноваги сил:

$$0 \leq F_{терп} \leq |N|,$$

$$0 = N - mg \cos \varphi,$$

$$0 = F_{терп} - mg \sin \varphi;$$

$$0 \leq mg |\sin \varphi| \leq fmg |\cos \varphi|;$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq |\operatorname{tg} \alpha_{3,\text{сн}}| \leq f; \\
0 &\leq \alpha_{3,\text{сн}} \leq \operatorname{arctg} f; \\
0 &\leq f \leq 1; \quad 0 \leq \alpha_{3,\text{сн}} \leq \pi/4.
\end{aligned}$$

У розглядуваному випадкові руху кільця по вертикальному колу кут φ може змінюватися від 0 до 2π , і зони спокою визначаються нерівностями

$$\begin{aligned}
0 &\leq \alpha_{3,\text{сн}} \leq \operatorname{arctg} f; \\
0 &\leq f \leq 1; \quad 0 \leq \alpha_{3,\text{сн}} \leq \pi/4.
\end{aligned}$$

За певного коефіцієнта тертя f на колі буде дві зони тертя спокою: на верхній його частині між значеннями кутів

$$\pi + \operatorname{arctg} f \leq \alpha_{3,\text{сн}} \leq \pi - \operatorname{arctg} f$$

і на нижній між значеннями кутів

$$2\pi - \operatorname{arctg} f \leq \alpha_{3,\text{сн}} \leq \operatorname{arctg} f.$$

Як відомо зі статики, величина

$$\alpha_{\text{тер}} = \operatorname{arctg} f$$

називається *кутом тертя*.

Досліджуючи рух кільця по колу без початкової швидкості $\dot{s}_0 = 0$, треба за початкову дугову координату кільця брати $s_0 = (\pi - \operatorname{arctg} f)r$ або $\varphi_0 = \pi - \operatorname{arctg} f$.

Визначимо аналітично швидкість кільця в його русі по вертикальному шорсткому колу залежно від кута φ . У рівняннях (11.17) і (11.18) зробимо таку заміну:

$$\ddot{s} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{ds}.$$

Тоді матимемо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{ds^2}{ds} + f \frac{s^2}{r} &= -g \left(\sin \frac{s}{r} + f \cos \frac{s}{r} \right), \\
\frac{1}{2} \frac{ds^2}{ds} - f \frac{s^2}{r} &= g \left(f \cos \frac{s}{r} - \sin \frac{s}{r} \right).
\end{aligned}$$

Якщо тепер введемо нову змінну $s^2 = u$, то рівняння наберуть вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{du}{ds} + 2f \frac{u}{r} &= -2g \left(\sin \frac{s}{r} + f \cos \frac{s}{r} \right), \\
\frac{du}{ds} - 2f \frac{u}{r} &= 2g \left(f \cos \frac{s}{r} - \sin \frac{s}{r} \right).
\end{aligned}$$

Таким чином, прийшли до лінійних неоднорідних рівнянь відносно нової змінної u .

За відомою з теорії диференціальних рівнянь формулою загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння для нашого випадку запишемо

$$u = e^{-\int \frac{2f}{r} ds} \left\{ C + \int \left[-2g \left(\sin \frac{s}{r} + f \cos \frac{s}{r} \right) \right] e^{\int \frac{2f}{r} ds} ds \right\},$$

$$u = e^{\int \frac{2f}{r} ds} \left\{ C + \int \left[-2g \left(\sin \frac{s}{r} - f \cos \frac{s}{r} \right) \right] e^{-\int \frac{2f}{r} ds} ds \right\}.$$

Зінтегруємо праву частину першого загального розв'язку за умови, що точка рухається по колу в додатному напрямі вгору:

$$\begin{aligned} u &= Ce^{-\frac{2f}{r}s} + e^{-\frac{2f}{r}s} \int \left[-2g \left(\sin \frac{s}{r} + f \cos \frac{s}{r} \right) \right] e^{\frac{2f}{r}s} ds = \\ &= Ce^{-\frac{2f}{r}s} - 2ge^{-\frac{2f}{r}s} \int e^{\frac{2f}{r}s} \sin \frac{s}{r} ds - 2gfe^{-\frac{2f}{r}s} \int e^{\frac{2f}{r}s} \cos \frac{s}{r} ds = \\ &= Ce^{-2f\varphi} - 2gr e^{-2f\varphi} \int e^{2f\varphi} \sin \varphi d\varphi - 2grf e^{-2f\varphi} \int e^{2f\varphi} \cos \varphi d\varphi = \\ &= Ce^{-2f\varphi} - 2gr e^{-2f\varphi} \frac{e^{2f\varphi} (2f \sin \varphi - \cos \varphi)}{1 + 4f^2} - 2grf e^{-2f\varphi} \frac{e^{2f\varphi} (2f \cos \varphi + \sin \varphi)}{1 + 4f^2} = \\ &= Ce^{-2f\varphi} - \frac{2gr}{1 + 4f^2} (2f \sin \varphi - \cos \varphi + 2f^2 \cos \varphi + f \sin \varphi) = \\ &= Ce^{-2f\varphi} - \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi + (2f^2 - 1) \cos \varphi]. \end{aligned}$$

Окремо запишемо результат інтегрування:

$$v^2 = Ce^{-2f\varphi} - \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi + (2f^2 - 1) \cos \varphi].$$

Нехай у нульовий момент часу ($t_0 = 0$) кільце на колі знаходиться в положенні, в якому $\varphi = \varphi_0$, а початкова швидкість:

$$v_0^2 = Ce^{-2f\varphi_0} - \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi_0 + (2f^2 - 1) \cos \varphi_0].$$

Тоді стала інтегрування

$$C = \left\{ v_0^2 + \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi_0 + (2f^2 - 1) \cos \varphi_0] \right\} e^{2f\varphi_0}.$$

Отже, приходимо до такого частинного розв'язку:

$$v = \sqrt{\left\{ v_0^2 + \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi_0 + (2f^2 - 1) \cos \varphi_0] \right\} e^{2f(\varphi_0 - \varphi)} - \dots}$$

$$\dots \sqrt{-\frac{2gr}{1+4f^2} [3f \sin \varphi + (2f^2 - 1) \cos \varphi]}. \quad (11.19)$$

Тепер визначимо, яка має бути початкова швидкість v_0 кільця, щоб воно досягло найверхньої точки на колі з нульовою швидкістю. Підставивши в розв'язок $\varphi_0 = 0$, $\varphi = \pi$ і $v = 0$, дістанемо

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gr(1-2f^2)}{1+4f^2}(1+e^{-2f\pi})}.$$

Вираз під коренем буде додатним при $f < \sqrt{1/2}$. За нульового коефіцієнта тертя ($f = 0$) початкова швидкість кільця для досягнення верхнього положення на дротині має становити

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gr(1-2f^2)}{1+4f^2}(1+e^{-2f\pi})} = 2\sqrt{gr}.$$

Цю саму відповідь для ідеально гладкого кола можна дістати на підставі закону збереження механічної енергії. Справді,

$$\frac{mv^2}{2} = 2mgr,$$

$$v^2 = 4gr.$$

З того самого частинного розв'язку задачі визначимо швидкість v кільця, яке вийшло з нижнього початкового положення при $\varphi = 0$ із заданою початковою швидкістю v_0 проти годинникової стрілки, пройшло все коло $\varphi = 2\pi$ і повернулося в початкове положення:

$$\begin{aligned} v^2 &= \left[v_0^2 + \frac{2gr(2f^2-1)}{1+4f^2} \right] e^{-4f\pi} - \frac{2gr}{1+4f^2} [3f \sin 2\pi + (2f^2-1) \cos 2\pi] = \\ &= \left[v_0^2 + \frac{2gr(2f^2-1)}{1+4f^2} \right] e^{-4f\pi} - \frac{2gr(2f^2-1)}{1+4f^2} = v_0^2 e^{-4f\pi} + \\ &\quad + \frac{2gr(2f^2-1)}{1+4f^2} (e^{-4f\pi} - 1). \end{aligned}$$

Тепер знайдемо розв'язок другого рівняння, що описує рух кільця по колу з верхнього його положення вниз за годинниковою стрілкою:

$$\begin{aligned} v^2 &= e^{\frac{2fs}{r}} \left\{ C + \int \left[-2g \left(\sin \frac{s}{r} - f \cos \frac{s}{r} \right) \right] e^{-\frac{2fs}{r}} ds \right\} = \\ &= e^{2f\varphi} C - 2gr e^{2f\varphi} \int e^{-2f\varphi} \sin \varphi d\varphi + 2grf \int e^{-2f\varphi} \cos \varphi d\varphi = \\ &= e^{2f\varphi} C - 2gr e^{2f\varphi} \frac{e^{-2f\varphi} (-2f \sin \varphi - \cos \varphi)}{1+4f^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2gr e^{2f\varphi} \frac{e^{-2f\varphi}(-2f \cos \varphi + \sin \varphi)}{1 + 4f^2} = \\
& = Ce^{2f\varphi} + \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi + (1 - 2f^2) \cos \varphi].
\end{aligned}$$

Випишемо добутий інтегруванням рівняння його загальний розв'язок і за ненульових початкових даних $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ визначимо сталу інтегрування C , яка входить у нього:

$$\begin{aligned}
s^2 &= Ce^{2f\varphi} + \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi + (1 - 2f^2) \cos \varphi], \\
s_0^2 &= Ce^{2f\varphi_0} + \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi_0 + (1 - 2f^2) \cos \varphi_0]; \\
s_0^2 - \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi_0 + (1 - 2f^2) \cos \varphi_0] &= Ce^{2f\varphi_0}; \\
C &= \left\{ s_0^2 - \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi_0 + (1 - 2f^2) \cos \varphi_0] \right\} e^{-2f\varphi_0}.
\end{aligned}$$

Підставивши значення сталої інтегрування C у загальний розв'язок, прийдемо до частинного розв'язку відносно v^2 :

$$\begin{aligned}
s^2 &= \left\{ s_0^2 - \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi_0 + (1 - 2f^2) \cos \varphi_0] \right\} e^{2f(\varphi - \varphi_0)} + \\
& + \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi + (1 - 2f^2) \cos \varphi].
\end{aligned}$$

Звідси швидкість кільця в його русі по колу з зверхнього положення вниз за годинниковою стрілкою

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{\left\{ s_0^2 - \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi_0 + (1 - 2f^2) \cos \varphi_0] \right\} e^{2f(\varphi - \varphi_0)} +} \\
& \dots \sqrt{+ \frac{2gr}{1 + 4f^2} [3f \sin \varphi + (1 - 2f^2) \cos \varphi]}. \quad (11.20)
\end{aligned}$$

■ **Рух точки по вертикальній шорсткій циклоїді.** Нехай циклоїда розташована опуклою стороною вниз (рис. 11.8), і рух точки A відбувається по її внутрішньому боку (однобічна в'язь).

Розташуємо початок O декартової системи координат Oxy у вершині циклоїди, спрямувавши вісь Ox горизонтально вправо, а вісь Oy — вертикально вгору. Із рис. 11.8 легко знайти рівняння циклоїди, якщо розглянути кочення без проковзування по нерухомій горизонтальній прямій KL круга, який утворює циклоїду (P — миттєвий центр обертання круга). Зазначимо, що на

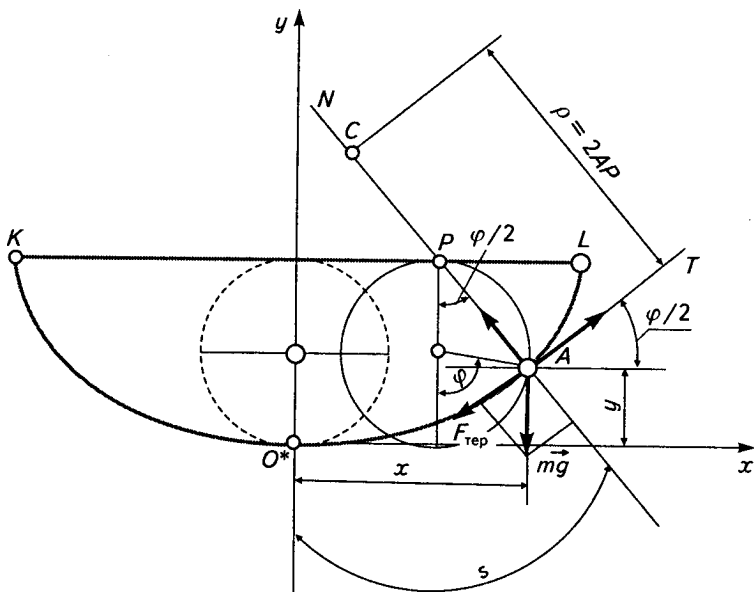


Рис. 11.8

перетині кола й циклоїди в даний момент часу знаходиться точка в своєму русі по циклоїді. Маємо такі рівняння в'язі (циклоїди):

$$\begin{aligned}x &= r(\varphi + \sin \varphi), \\y &= r(1 - \cos \varphi),\end{aligned}$$

де r — радіус твірного кола.

Рівняння (11.16) запишемо у вигляді

$$m\ddot{s} = F_{\text{ат}} - f \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \left| \frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F_{\text{ан}} \right|.$$

Із рис. 11.8 знаходимо радіус кривини циклоїди

$$\rho = 4r \cos(\varphi/2).$$

На підставі рівнянь в'язі визначаємо залежність дугової координати від кута повороту твірного кола (круга). Для цього спочатку зробимо проміжні викладки:

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{\varphi} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{\varphi} \sqrt{(r^2 + r^2 \cos^2 \varphi + 2r^2 \cos \varphi) + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\&= r\sqrt{2} \int_0^{\varphi} \sqrt{1 + \cos \varphi} d\varphi = 2r \int_0^{\varphi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi.\end{aligned}$$

Оскільки $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, то

$$|\cos(\varphi/2)| = \cos(\varphi/2).$$

Отже, після інтегрування остаточно дістаємо вираз для дугової координати:

$$s = 4r \sin(\varphi/2).$$

Далі знайдемо проекції сили ваги $m\vec{g}$ точки на дотичну AT і головну нормаль AN (рис. 11.8):

$$F_{3\tau} = -mg \sin(\varphi/2),$$

$$F_{3n} = -mg \cos(\varphi/2),$$

підставимо їх в основне диференціальне рівняння й здійснимо відповідні математичні викладки:

$$m \frac{d^2 \left[4r \sin \frac{\varphi(t)}{2} \right]}{dt^2} = -mg \sin \frac{\varphi}{2} - f \frac{\frac{d}{dt} \left[4r \sin \frac{\varphi(t)}{2} \right]}{\left| \frac{d}{dt} \left[4r \sin \frac{\varphi(t)}{2} \right] \right|} \times$$

$$\times \left| \frac{m \left(\frac{d}{dt} \left[4r \sin \frac{\varphi(t)}{2} \right] \right)^2}{\rho} + mg \cos \frac{\varphi}{2} \right|;$$

$$\frac{d}{dt} \left(4r \sin \frac{\varphi(t)}{2} \right) = 2r \dot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2};$$

$$\frac{d^2 \left[4r \sin \frac{\varphi(t)}{2} \right]}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(2r \dot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} \right) = 2r \ddot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} - r \dot{\varphi}^2 \sin \frac{\varphi}{2};$$

$$2r \ddot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} - r \dot{\varphi}^2 \sin \frac{\varphi}{2} = -g \sin \frac{\varphi}{2} - f \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} \cos \frac{\varphi}{2} |r \dot{\varphi}^2 + g|.$$

У результаті перетворень дістаємо таке проміжне рівняння:

$$2r \ddot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} - r \dot{\varphi}^2 \sin \frac{\varphi}{2} = -g \sin \frac{\varphi}{2} - f \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} \cos \frac{\varphi}{2} |r \dot{\varphi}^2 + g|$$

або, замінивши модуль суми двох додатних величин їх сумою,

$$2r \ddot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} - r \dot{\varphi}^2 \sin \frac{\varphi}{2} = -g \sin \frac{\varphi}{2} - f \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} \cos \frac{\varphi}{2} r \dot{\varphi}^2 - f \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} \cos \frac{\varphi}{2} g.$$

Тепер об'єднаємо члени з $\dot{\varphi}^2$ і поділимо на r :

$$2\ddot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} + \left(f \cos \frac{\varphi}{2} \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{r} \left(f \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

Це диференціальне рівняння руху точки по вертикальній шорсткій циклоїді. Звичайно, якщо, наприклад, точка рухається по циклоїді згори вниз за початкового значення дугової координати $s_0 > 0$ і нульової початкової швидкості ($\dot{s}_0 = 0$), то останнє рівняння набере вигляду

$$2\ddot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} - \left(f \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{r} \left(f \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

Зазначимо, що попереднє рівняння розв'язується лише чисельно, а останнє — допускає також аналітичне розв'язання, яке є надто громіздким.

11.3

Принцип віртуальних робіт. Загальні рівняння статички й динаміки

Варіації декартових координат і радіусів-векторів.

Нехай у нерухомій декартовій системі осей маємо загальне рівняння нестационарної голономної в'язі, наприклад ідеально гладкої поверхні, на якій точка вимушено перебуває незалежно від сил, що діють на неї:

$$f(x, y, z; t) = 0.$$

Як зазначалося, рівняння в'язі є додатковим до диференціальних рівнянь, що описують динаміку руху невідільної точки. Головна властивість рівняння в'язі полягає в тому, що його мають задовольняти координати точки в її русі.

Обчислення повного диференціала лівої частини рівняння в'язі за трьома змінними x, y, z за незмінного часу t назвемо варіюванням. Зваріювавши рівняння в'язі, в результаті дістанемо

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0.$$

Тут δf — варіація функції $f(x, y, z; t)$; в даному випадковій вона дорівнює нулю; нескінченно малі величини $\delta x, \delta y, \delta z$ — варіації декартових координат; $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ — частинні похідні.

Результат варіювання можна подати як рівність нулю скалярного добутку градієнта функції f на варіацію радіуса-вектора точки в'язі з координатами x, y, z :

$$\partial f = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \delta \vec{r} = 0.$$

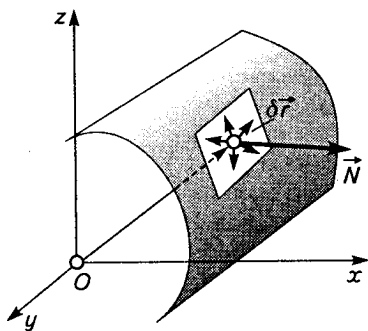


Рис. 11.9

Дана рівність означає, що градієнт і варіація радіуса-вектора будь-якої точки в'язі між собою перпендикулярні й варіація радіуса-вектора $\delta\vec{r}$ точки в'язі лежить у дотичній площині до поверхні, що геометрично зображується рівнянням в'язі, оскільки градієнт збігається із зовнішньою нормаллю до поверхні в цій точці.

Слід зазначити, що варіація радіуса-вектора $\delta\vec{r}$ є вектором, проекції якого на декартові осі дорівнюють відповідним варіаціям декартових координат δx , δy , δz . Таким чином, дана точка поверхні в'язі характеризується тим, що в ній через довільність величин δx , δy , δz має місце ціла система варіацій її радіуса-вектора \vec{r} , і всі вони розташовані в дотичній до поверхні в'язі площині. Це основна властивість в'язі (рис. 11.9).

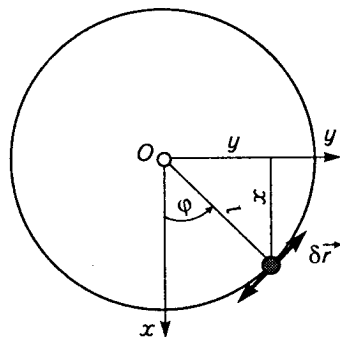


Рис. 11.10

► **Приклад 11.2.** Для математичного маятника (рис. 11.10) з постійною довжиною l маємо рівняння в'язі $x^2 + y^2 - l^2 = 0$.

Це циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі Oz . Дана в'язь характеризується тим, що в кожній точці кола на циліндричній поверхні, на якому вимушена перебувати точка в своєму русі, маємо одновимірну систему варіацій радіуса-вектора, напрямлених по дотичній до кола (рис. 11.10).

► **Приклад 11.3.** Нехай маємо кривошипно-шатунний механізм (рис. 11.11). Запишемо в нерухомій системі осей Oxy рівняння в'язей, які під час руху механізму примушують кінець A кривошипа $OA = r$ перебувати на колі радіусом r , повзун B — на горизонтальній напрямній OB (осі Ox) тощо. Запишемо повну систему рівнянь в'язей, які конструктивно утворюють механізм, якщо довжина шатуна $AB = l$:

$$x_O = y_O = 0;$$

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2;$$

$$y_B = 0;$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2.$$

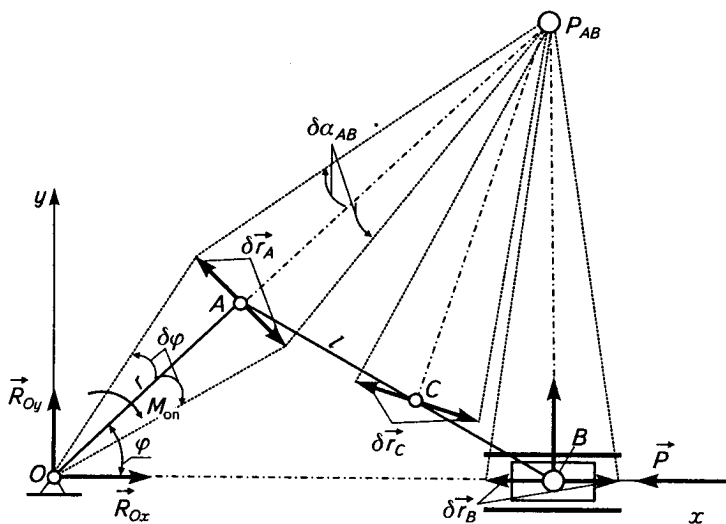


Рис. 11.11

У результаті варіювання цих рівнянь дістаємо

$$\begin{aligned} \delta x_O = \delta y_O = 0; \quad \delta \vec{r}_O = 0; \\ x_A \delta x_A + y_A \delta y_A = 0; \quad \vec{r}_A \cdot \delta \vec{r}_A = 0; \quad \delta \vec{r}_A \perp \vec{r}_A; \\ \delta y_B = 0; \quad \delta \vec{r}_B \parallel \vec{r}_B; \\ (x_B - x_A)(\delta x_B - \delta x_A) + (y_B - y_A)(\delta y_B - \delta y_A) = 0; \\ (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \delta(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{AB} \cdot \delta \vec{AB} = 0. \end{aligned}$$

Згідно з цими даними на рис. 11.11 у відповідних точках механізму зображено варіації їхніх радіусів-векторів, проведених із початку O системи Oxy. Цим варіаціям радіусів-векторів відповідають варіації кутів: варіації $\delta \vec{r}_A$ — варіація кута $\delta \varphi$; за алгебричним значенням, очевидно,

$$\delta r_A = \delta s_A = r \delta \varphi = AP_{AB} \delta \alpha_{AB};$$

варіаціям $\delta \vec{r}_B$, $\delta \vec{r}_C$ — варіація $\delta \alpha_{AB}$, і

$$\delta r_B = BP_{AB} \delta \alpha_{AB}, \quad \delta r_C = CP_{AB} \delta \alpha_{AB}.$$

Таким чином, приходимо до співвідношень

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{BP_{AB}}{AP_{AB}}, \quad \frac{\delta r_C}{\delta r_A} = \frac{CP_{AB}}{AP_{AB}}.$$

□ **Віртуальні переміщення.** Вектори варіацій радіусів-векторів точок в'язей різного походження прикладені до відповідних точок

в'язей. Однак ці вектори можна мислено прикладати до самих точок (у випадку механічної системи) і до самої точки в разі однієї точки. Варіації радіусів-векторів, які мислено прикладені до точок (точки) механічної системи, називаються *віртуальними переміщеннями* цих точок (точки), а їхні проекції на декартові осі — *проекціями віртуальних переміщень* на ці осі.

Отже, стосовно кривошипно-шатунного механізму віртуальним переміщенням повзуна є його нескінченно мале переміщення по горизонтальній напрямній, уздовж якої рухається поршень, кінця кривошипа A — нескінченно мале переміщення, перпендикулярне до кривошипа, точки C шатуна — переміщення, перпендикулярне до відрізка, що сполучає цю точку з миттєвим центром обертання шатуна AB , $\delta\varphi$ — віртуальні переміщення кривошипа.

Віртуальним переміщенням невільної точки називається таке її нескінченно мале переміщення, яке допускається в'язями, накладеними на точку, в даний фіксований момент часу. Із цього означення випливає, що віртуальні переміщення ніяк не пов'язані із силами, які діють на точку, і її дійсним рухом у часі під дією сил. Подібно до того, як сили інерції Д'Аламбера насправді не прикладені до точок, що рухаються з прискоренням, так само віртуальні переміщення точок до них не прикладені й реально не відбуваються: є лише дійсні переміщення, зумовлені силами, що діють.

Віртуальним переміщенням невільної механічної системи з даного положення, що відповідає даному фіксованому моменту часу, називається така система нескінченно малих переміщень її точок, які допускаються накладеними на механічну систему в'язями. Інакше кажучи, віртуальне переміщення невільної механічної системи — це сукупність мислено прикладених до її точок варіацій радіусів-векторів тих точок в'язей, з якими у фіксований момент часу збігаються точки системи.

Тепер звернемо увагу на відмінність між віртуальними та дійсними нескінченно малими переміщеннями точок механічної системи. Дійсні переміщення відбуваються з плином часу під дією як активних сил, так і реакцій в'язей. Отже, дійсні нескінченно малі переміщення точок визначаються як диференціали від радіусів-векторів $d\vec{r}_k$ (k — номер точки в механічній системі) за незалежною змінною, якою є час t . Тому для дійсного переміщення можемо записати

$$d\vec{r}_k = \vec{v}_k dt,$$

де \vec{v}_k — дійсна швидкість. Кожному даному моменту часу t відповідає одне певне дійсне нескінченно мале переміщення точки.

Віртуальних переміщень невільної точки може бути безліч, наприклад, коли в'яззю є удержувальна поверхня, а також в інших випадках (див. рис. 11.9), і незалежно від того, нерухома поверхня (стаціонарна в'язь) чи рухома (нестационарна в'язь), вся система віртуальних переміщень знаходиться в дотичній до поверхні площині, бо при визначенні віртуальних переміщень час фіксується, розглядається в рівняннях в'язі як константа. Це означає, що на момент визначення віртуальних переміщень в'язь вважається призупиненою.

➤ **Приклад 11.4.** Визначимо віртуальне переміщення кульки, що рухається вздовж осі трубки, яка обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі (див. рис. 11.2).

Рівняння в'язі в даному випадкові

$$y - x \operatorname{tg} \omega t = 0;$$

зваріювавши, матимемо (час розглядається як константа, що рівнозначно зупинці трубки)

$$\delta y - \delta x \operatorname{tg} \omega t = 0$$

або через скалярний добуток нормального до площини, паралельної осі Oz , градієнта

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = -\operatorname{tg} \omega t \cdot \vec{i} + \vec{j}$$

на варіацію $\delta \vec{r}$ радіуса-вектора \vec{r} тієї точки на осі трубки, з якою збігається кулька в момент зупинки трубки,

$$(-\operatorname{tg} \omega t \cdot \vec{i} + \vec{j}) \delta \vec{r} = \left(-\frac{\partial y}{\partial x} \vec{i} + \vec{j} \right) \delta \vec{r} = (-\delta y \vec{i} + \delta x \vec{j}) \delta \vec{r} = 0.$$

Даний результат показує, що вектор $(-\delta y \vec{i} + \delta x \vec{j})$ перпендикулярний до осі трубки (див. рис. 11.2), а варіація $\delta \vec{r}$ колінеарна цій осі. Якщо мислено прикласти вектор $\delta \vec{r}$ до кульки, то він буде її віртуальним переміщенням, яке має два напрями: від або до осі обертання.

У випадку в'язі (11.5) маємо

$$\delta \left[y + x \operatorname{tg} \alpha - \left(h + \frac{a}{2} t^2 \operatorname{tg} \alpha \right) \right] = 0,$$

$$\delta y + \delta x \operatorname{tg} \alpha = (\operatorname{tg} \alpha \cdot \vec{i} + \vec{j}) \delta \vec{r} = 0.$$

Урахувавши в останньому результаті рівняння в'язі (11.5) і виконавши необхідні дії, можемо записати

$$\left[(h - y) \vec{i} + \left(x - \frac{a}{2} t^2 \right) \vec{j} \right] \delta \vec{r} = 0.$$

Перший множник зліва — вектор, перпендикулярний до похилої грані, а другий $\delta \vec{r}$ — варіація радіуса-вектора тієї точки похилої грані призми, з якою

збігається в даний момент часу рухома точка, — колінеарний цій грані (див. рис. 11.3). Якщо вектор $\delta\vec{r}$ мислено прикласти до тіла на похилій грані, то матимемо для нього віртуальне переміщення, що допускається в'язю, якою є нахилена під кутом α і паралельна осі Oz площина.

□ **Віртуальна робота.** Нехай маємо деякий рух невідільної точки під дією рівнодійної активних сил \vec{F}_a та рівнодійної реакцій в'язі $\vec{F}_{p.v}$. Розглядаючи віртуальне переміщення невідільної точки, кажуть, що точці треба надати віртуального переміщення з даного її положення за зупиненої в'язі, якщо ця в'язь нестационарна.

Отже, надамо точці в процесі її руху віртуального переміщення $\delta\vec{r}$ і скалярно помножимо його на сили $\vec{F}_a, \vec{F}_{p.v}$, що діють на точку. В результаті дістанемо так звані *віртуальні роботи* цих сил

$$\delta A_a = \vec{F}_a \delta\vec{r}, \quad \delta A_{p.v} = \vec{F}_{p.v} \delta\vec{r}$$

або

$$\delta A_a = F_{ax} \delta x + F_{ay} \delta y + F_{az} \delta z, \quad \delta A_{p.v} = F_{p.vx} \delta x + F_{p.vy} \delta y + F_{p.vz} \delta z.$$

Значимо, що насправді дані сили віртуальної роботи не виконують, проте виконують роботу на дійсному елементарному переміщенні $d\vec{r}$, яка пов'язана зі зміною кінетичної енергії точки.

Далі буде показано, що застосування поняття віртуальної роботи дає змогу в рівняннях динаміки для так званих ідеальних в'язей позбавлятися наперед невідомих їхніх реакцій. Зрозуміло, що раніше розглянуті формули елементарних робіт різних сил на дійсних переміщеннях можна використовувати й для визначення віртуальних робіт.

□ **Ідеальні в'язі.** Розглянемо рух невідільної механічної системи з N точок, яким присвоєно номери $k = 1, 2, 3, \dots, N$, під дією рівнодійних активних сил \vec{F}_{ak} та реакцій в'язей $\vec{F}_{p.vk}$, які прикладені до цих точок. У поточний момент часу t , зафіксувавши його (мислено зупинивши на мить нестационарні в'язі), надаємо точкам механічної системи віртуального переміщення $\delta\vec{r}_k$. Складемо вираз для суми віртуальних робіт усіх реакцій в'язей, накладених на точки механічної системи:

$$\sum_{k=1}^N \delta A_{p.vk} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{p.vk} \delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^N (F_{p.vkx} \delta x_k + F_{p.vky} \delta y_k + F_{p.vkz} \delta z_k).$$

В'язі називаються ідеальними, якщо для їхніх реакцій сума віртуальних робіт дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^N \delta A_{p.vk} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{p.vk} \delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^N (F_{p.vkx} \delta x_k + F_{p.vky} \delta y_k + F_{p.vkz} \delta z_k) = 0. \quad (11.21)$$

Механічні системи з ідеальними в'язями називаються *ідеальними*. До них належать механічні системи без тертя (див. рис. 11.2, 11.3, 11.11).

Суми віртуальних робіт нормальних реакцій \vec{N} стінок трубки (див. рис. 11.2) і похилої грані (див. рис. 11.3), прямокутних складових \vec{R}_{Ox} , \vec{R}_{Oy} , реакції \vec{R}_O опори кривошипа OA , нормальної реакції \vec{N} горизонтальних напрямних повзуна B , а також взаємних реакцій у зчленуваннях A , B механізму (див. рис. 11.11) за відсутності тертя дорівнюють нулю, оскільки між нормальними реакціями й віртуальними переміщеннями утворюється прямиий кут. Віртуальна робота реакції \vec{R}_O через нерухомість точки прикладання також дорівнює нулю.

Ідеальними можуть бути також невільні механічні системи з тертям. Приклад — колесо, яке котиться без проковзування по нерухомій шорсткій поверхні. В цьому випадкові віртуальна робота реакції в точці контакту колеса й поверхні дорівнює нулю через нульове віртуальне переміщення точки прикладання реакції.

□ **Принцип можливих переміщень.** Нехай маємо невільну механічну систему з будь-якими в'язями. Користуючись ідеєю дискретного поділу, подамо її як систему N матеріальних точок, маси яких m_k , де $k = 1, 2, 3, \dots, N$. Механічна система здійснює певний рух під дією заданих (активних) сил \vec{F}_{ak} і реакцій в'язей $\vec{F}_{p,в,k}$. Сили \vec{F}_{ak} і $\vec{F}_{p,в,k}$ прикладені до точки з номером k і є рівнодійними відповідно всіх активних сил та реакцій в'язей, прикладених до цієї точки. При $k = 1, 2, 3, \dots, N$ маємо всю систему сил, що діють на механічну систему.

Прискорення точок m_k механічної системи, які надаються рівнодійною $\vec{F}_k = \vec{F}_{ak} + \vec{F}_{p,в,k}$, позначимо через \vec{a}_k . Тепер до точок прикладемо д'аламберові сили інерції \vec{F}_{ik} . Тоді згідно з принципом Д'Аламбера механічна система перебуватиме в динамічній рівновазі, за якої справедливі N векторних рівностей:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ak} + \vec{F}_{p,в,k} + \vec{F}_{ik} &= 0, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, N,\end{aligned}$$

де $\vec{F}_{ik} = -m_k \vec{a}_k$.

Далі надамо точкам механічної системи віртуальних переміщень $\delta \vec{r}_k$. Помноживши скалярно кожне з останніх рівнянь на відповідне віртуальне переміщення й додавши їх, у результаті дістанемо одне сумарне рівняння

$$\sum_{k=1}^N (\vec{F}_{ak} + \vec{F}_{p,в,k} + \vec{F}_{ik}) \delta \vec{r}_k = 0$$

або, застосувавши розподільний закон множення,

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_{ak} \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{F}_{ik} \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{F}_{p.v.k} \delta \bar{r}_k = 0.$$

Тепер вважатимемо, що невільна механічна система ідеальна. Тоді другий доданок у лівій частині набере нульового значення, й придімо до рівняння, яке вже не міститиме реакцій ідеальних в'язей:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_{ak} \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{F}_{ik} \delta \bar{r}_k = 0. \quad (11.22)$$

Якщо віртуальну роботу окремих сил позначити через

$$\bar{F}_{ak} \delta \bar{r}_k = \delta A_{ak}, \quad \bar{F}_{ik} \delta \bar{r}_k = \delta A_{ik},$$

то рівняння (11.22) набере вигляду

$$\sum_{k=1}^N \delta A_{ak} + \sum_{k=1}^N \delta A_{ik} = 0. \quad (11.23)$$

Це математичний вираз **принципу можливих переміщень у випадковій руху механічної системи**: під час руху ідеальної механічної системи сума віртуальних робіт активних (заданих) сил, що реально діють на неї (тобто фізичних), та д'аламберових сил інерції точок дорівнює нулю.

За рівноваги механічної системи прискорення її точок $\bar{a}_k = 0$, а отже, дорівнюють нулю також д'аламберові сили інерції $\bar{F}_{ik} = -m_k \bar{a}_k$. Тому з (11.23) дістаємо

$$\sum_{k=1}^N \delta A_{ak} = 0. \quad (11.24)$$

Рівняння (11.24) виражає **принцип можливих переміщень для ідеальної механічної системи в стані рівноваги**: дане положення ідеальної механічної системи буде рівноважним, якщо в ньому сума віртуальних робіт прикладених до неї активних сил дорівнює нулю.

Перепишемо рівняння (11.24) інакше:

$$\sum_{k=1}^N (F_{akx} \delta x_k + F_{aky} \delta y_k + F_{akz} \delta z_k). \quad (11.25)$$

Це загальне рівняння статки, що виражає принцип можливих переміщень у застосуванні до рівноваги ідеальної механічної системи.

Тепер повертаємося до рівняння (11.23) і записуємо його у вигляді

$$\sum_{k=1}^N [(F_{akx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{aky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{akz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k] = 0. \quad (11.26)$$

Це загальне рівняння динаміки, що виражає принцип можливих переміщень у застосуванні до динаміки руху будь-якої ідеальної механічної системи, як голономної, так і неголономної.

Рівняння (11.25), (11.26) не містять наперед невідомих реакцій в'язей, але натомість у них входять довільні варіації декартових координат, що ускладнює їх безпосереднє застосування.

Процедура використання даних рівнянь стане зрозумілою, якщо взяти до уваги рівняння в'язей, накладених на механічну систему, й з'ясувати зумовлені в'язями деякі важливі властивості механічних систем, головною з яких є число ступенів вільності.

11.4

Узагальнені координати Лагранжа. Рівняння Лагранжа другого роду

Узагальнені координати Лагранжа. Число ступенів вільності механічної системи. На механічну систему в загальному випадкові можуть бути накладені в'язі двох типів: геометричні та диференціальні.

Геометричні в'язі обмежують механічну систему щодо положень її точок. При цьому точки можуть мати довільні швидкості й рухатися в будь-якому напрямі, який заздалегідь не зумовлюється самими в'язями. В'язі цього типу, як відомо, математично описуються співвідношеннями між декартовими координатами точок простору, в яких вимушено перебувають точки: не через прикладені до механічної системи сили, а через в'язі. Геометричні в'язі називаються голономними.

Диференціальні в'язі кінематичного характеру обмежують механічну систему лише щодо швидкості її точок і незалежно від сил, що діють, визначають співвідношення між першими похідними за часом від декартових координат. Отже, диференціальні в'язі математично описуються співвідношеннями між проекціями швидкостей точок механічної системи на декартові осі, які жодними математичними методами не можуть бути зведені до звичайних залежностей між декартовими координатами тих точок простору, в яких перебувають точки механічної системи. Диференціальні в'язі називаються неголономними.

Розглядаючи загальне рівняння динаміки (11.25), до нього треба додати рівняння в'язей обох типів: / голономних

$$f_s(x_1, y_1, z_1; \dots; x_N, y_N, z_N; t) = 0 \quad (11.27)$$

(s — номер в'язі, який набуває значень $1, 2, 3, \dots, l$) і p неголономних

$$f_{l+\alpha}(x_1, y_1, z_1; \dots; x_N, y_N, z_N; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1; \dots; \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N; t) = 0 \quad (11.28)$$

($\alpha = 1, 2, 3, \dots, p$).

Зваріюємо перші l рівнянь голономних в'язей (11.27):

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\delta f_s}{\delta x_k} \delta x_k + \frac{\delta f_s}{\delta y_k} \delta y_k + \frac{\delta f_s}{\delta z_k} \delta z_k \right) = 0, \quad s=1, 2, 3, \dots, N. \quad (11.29)$$

Щодо p неголономних співвідношень (11.28), то в динаміці найчастіше мають справу з лінійними рівняннями відносно похідних від координат:

$$\sum_{k=1}^p (a_{\alpha,k} \dot{x}_k + b_{\alpha,k} \dot{y}_k + c_{\alpha,k} \dot{z}_k) + d_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, p. \quad (11.30)$$

Варіювання лінійних неголономних рівнянь в'язей зводиться до формальної заміни в рівностях (11.30) похідних від координат варіаціями цих координат. Маємо

$$\sum_{k=1}^p (a_{\alpha,k} \delta x_k + b_{\alpha,k} \delta y_k + c_{\alpha,k} \delta z_k) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, p. \quad (11.31)$$

Значимо: якщо механічна система характеризується й голономними, й неголономними рівняннями в'язей, то вона буде неголономною; механічна система лише з голономними в'язями називається голономною.

Таким чином, усіх рівнянь в'язей буде $l + p$, координат точок — $3N$. Тоді, очевидно, справедливе співвідношення $l + p < 3N$.

Різниця $3N - (l + p) = r$ визначає число ступенів вільності неголономної системи.

Наявність голономних в'язей (11.27) у механічній системі дає змогу визначити декартові координати точок x_k, y_k, z_k через $3N - l = n$ незалежних декартових координат. Замість незалежних декартових координат, які повністю визначають положення механічної системи, можна вибрати таку саму кількість будь-яких інших незалежних параметрів. Назвемо будь-які незалежні параметри, які повністю визначають положення механічної системи й кількість яких мінімальна, узагальненими координатами Лагранжа (координатами системи) й позначимо їх через $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$. Тоді

$$\begin{aligned}
 x_k &= x_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; t), \\
 y_k &= x_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; t), \\
 z_k &= x_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; t), \\
 k &= 1, 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned}
 \tag{11.32}$$

Звичайно, якщо ці величини підставити в рівняння голономних в'язей (11.27), то вони перетворяться на тотожності. Зауважимо, що співвідношення (11.32) для конкретних механічних системи можна дістати, не використовуючи рівнянь в'язей (11.27), а безпосередньо виходячи з геометричних властивостей системи, що є простішою процедурою.

Тепер завдяки залежностям (11.32) рівняння неголономних в'язей (11.28) можна звести до вигляду

$$\begin{aligned}
 f_{l+\alpha}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n; t) = 0, \\
 \alpha = 1, 2, 3, \dots, p.
 \end{aligned}
 \tag{11.33}$$

Похідні $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n$ називаються *узагальненими швидкостями*, які відповідають координатам системи $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$.

У теоретичній механіці рівняння неголономних в'язей (11.33) розглядаються як лінійні відносно узагальнених швидкостей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n$:

$$\begin{aligned}
 a_{\alpha,1}\dot{q}_1 + a_{\alpha,2}\dot{q}_2 + a_{\alpha,3}\dot{q}_3 + \dots + a_{\alpha,n}\dot{q}_n + a_\alpha = 0, \\
 \alpha = 1, 2, 3, \dots, p.
 \end{aligned}
 \tag{11.34}$$

Коефіцієнти $a_{\alpha,i}, a_\alpha$, де $\alpha = 1, 2, 3, \dots, p$ і $i = 1, 2, 3, \dots, n$, є функціями координат системи $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ і часу t .

Продовжуючи дослідження, зваріюємо залежності (11.32). Враховуючи, що варіювання проводиться за фіксованого часу t , дістанемо

$$\begin{aligned}
 \delta x_k &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i, \\
 \delta y_k &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \delta q_i, \\
 \delta z_k &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \delta q_i, \\
 k &= 1, 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned}
 \tag{11.35}$$

Тут $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \dots, \delta q_n$ — варіації узагальнених координат Лагранжа (варіації параметрів системи). Зазначимо, що узагальнені координа-

ти Лагранжа незалежні між собою, а їх варіації вже не є незалежними, оскільки справедливі лінійні рівняння неголономних в'язей (11.34).

Далі перепишемо рівняння (11.34) у вигляді

$$a_{\alpha,1}dq_1 + a_{\alpha,2}dq_2 + a_{\alpha,3}dq_3 + \dots + a_{\alpha,n}dq_n + a_{\alpha}dt = 0, \quad (11.36)$$

$$\alpha = 1, 2, 3, \dots, p.$$

Тут $dq_1, dq_2, dq_3, \dots, dq_n$ — диференціали узагальнених координат, які пов'язані з часом і відповідають дійсному рухові механічної системи. Очевидно: щоб мати зв'язок між варіаціями параметрів системи, який накладається неголономними в'язями, треба в рівностях (11.36) формально замінити диференціали параметрів системи на їх варіації. В такому разі вільні члени $a_{\alpha}dt$, де $\alpha = 1, 2, 3, \dots, p$, зникнуть. Отже,

$$a_{\alpha,1}\delta q_1 + a_{\alpha,2}\delta q_2 + a_{\alpha,3}\delta q_3 + \dots + a_{\alpha,n}\delta q_n = 0, \quad (11.37)$$

$$\alpha = 1, 2, 3, \dots, p.$$

Зрозуміло, що у випадку лише голономних в'язей кількість незалежних варіацій параметрів системи дорівнює кількості самих параметрів. Для голономної системи кількість її параметрів називається **числом ступенів вільності**.

Якщо механічна система неголономна, то кількість незалежних варіацій унаслідок варіаційних співвідношень (11.37) не збігається з кількістю параметрів системи. Міра свободи руху будь-якої невірної механічної системи в загальному випадковій визначається саме кількістю незалежних варіацій параметрів системи. Отже, *кількість незалежних варіацій узагальнених координат Лагранжа для неголономної механічної системи дорівнює числу її ступенів вільності*, яке визначається співвідношенням

$$r = n - p. \quad (11.38)$$

► **Приклад 11.5.** Визначимо декартові координати невірної точки через узагальнені координати.

З рис. 11.10 для математичного маятника з постійною довжиною l нитки дістаємо шукані залежності

$$x = l \cos \varphi,$$

$$y = l \sin \varphi$$

або у варіаціях

$$\delta x = -l \sin \varphi \delta \varphi,$$

$$\delta y = l \cos \varphi \delta \varphi.$$

Тут φ — узагальнена координата Лагранжа.

Якщо довжина нитки змінюється з часом, наприклад нитка пропущена в опорній точці O через кільце й виходить крізь нього з постійною швидкістю v , то матимемо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}x &= (l - vt) \cos \varphi, \\y &= (l - vt) \sin \varphi; \\ \delta x &= -(l - vt) \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y &= (l - vt) \cos \varphi \delta \varphi.\end{aligned}$$

В обох цих випадках стаціонарної і нестаціонарної голономної в'язі, якою є нитка, число ступенів вільності математичного маятника дорівнює одиниці (один ступінь вільності).

У випадку руху точки по вертикальній циклоїді (див. рис. 11.8) маємо такі залежності:

$$\begin{aligned}x &= r \left(\frac{s}{r} + \sin \frac{s}{r} \right), \quad y = r \left(1 - \cos \frac{s}{r} \right); \\ \delta x &= \left(1 + \cos \frac{s}{r} \right) \delta s, \quad \delta y = -\sin \frac{s}{r} \delta s.\end{aligned}$$

Тут s — дугова координата, яка є узагальненою координатою Лагранжа. Циклоїдний маятник має один ступінь вільності.

Читачеві пропонується записати аналогічні рівняння для руху кульки в обертовій трубці (див. рис. 11.2) і вантажу по рухомій призмі (див. рис. 11.3).

➤ **Приклад 11.6.** Визначимо декартові координати точок ланок кривошипно-шатунного механізму як функцій узагальненої координати.

Якщо за узагальнену координату Лагранжа взяти кут φ між кривошипом і горизонтальною напрямною повзуна (див. рис. 11.11), то, наприклад, для повзуна B виводимо такі залежності:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi + l \sqrt{1 - (r/l)^2 \sin^2 \varphi}, \\ y &= 0, \\ \delta x &= -r \sin \varphi \delta \varphi - \frac{r^2}{l} \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{1 - (r/l)^2 \sin^2 \varphi}} \delta \varphi, \\ \delta y &= 0.\end{aligned}$$

Аналогічні залежності можна дістати для яких-небудь інших точок ланок механізму.

➤ **Приклад 11.7.** Виведемо рівняння неголономних в'язей для випадку ковчання без проковзування кулі по горизонтальній шорсткій поверхні (див. рис. 11.12).

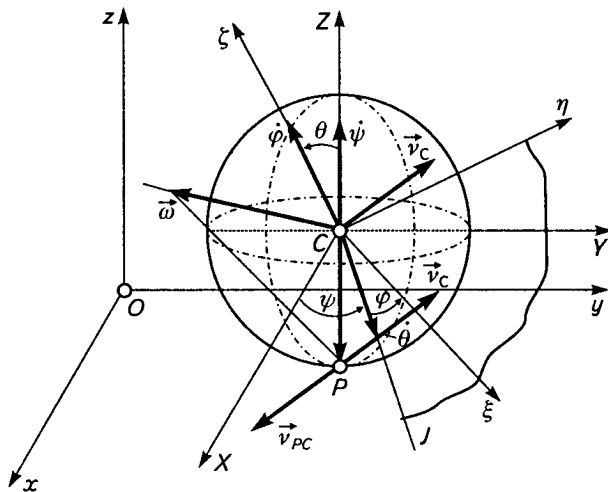


Рис. 11.12

За теоремою про швидкість точки в загальному русі тіла запишемо умову, яку має задовольняти швидкість точки P контакту кулі з горизонтальною поверхнею. Ця умова полягає в тому, що швидкість точки дорівнює нулю. Маємо

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CP} = 0$$

або в проекціях на нерухомі осі Ox , Oy , Oz

$$0 = \dot{x}_C + \omega_y z_C - \omega_z y_C,$$

$$0 = \dot{y}_C + \omega_z x_C + \omega_x z_C.$$

Однак

$$z_C = r, \quad y_C = 0, \quad x_C = 0;$$

$$\omega_x = \theta \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi,$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi.$$

Підставивши, дістанемо

$$0 = \dot{x}_C + r (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi),$$

$$0 = \dot{y}_C + r (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi).$$

Звертаємо увагу на те, що для визначення положення кулі в її русі по горизонтальній поверхні достатньо задати п'ять незалежних параметрів (узагальнених координат Лагранжа): дві абсолютні координати центра мас кулі x_C , y_C , що визначають її положення в поступальній складовій загального руху, й три кути Ейлера ϕ , ψ , θ в обертальній складовій загального руху кулі навколо її центра мас.

Знайдемо число ступенів вільності кулі в нашому випадкові. Маємо п'ять варіацій незалежних узагальнених координат:

$$\delta x_C, \delta y_C, \delta \varphi, \delta \psi, \delta \theta.$$

Із них незалежними є лише три, оскільки п'ять варіацій пов'язані між собою двома рівняннями голономних в'язей:

$$0 = \delta y_C + r (\delta \theta \sin \psi - \delta \varphi \sin \theta \cos \psi),$$

$$0 = \delta y_C + r (\delta \theta \cos \psi + \delta \varphi \sin \theta \sin \psi).$$

За формулою (11.38) знаходимо число ступенів вільності кулі:

$$r = n - p = 5 - 2 = 3.$$

Отже, куля, що котиться без проковзування по горизонтальній шорсткій поверхні, має три ступені вільності.

Слід зауважити, що на кочення колеса по нерухомій прямій без проковзування накладена голономна в'язь (рис. 11.13). Справді, на підставі теореми кінематики плоскопаралельного руху про швидкість точки тіла маємо

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CP} = 0.$$

У проекції на горизонтальну вісь Ox

$$\dot{x}_C + \dot{\varphi}r = 0.$$

На стадії виведення ми дістали диференціальне співвідношення між координатами, яке виражає в'язь, накладену на рух колеса. Проте це співвідношення не є рівнянням неголономної в'язі, бо воно інтегрується:

$$\begin{aligned} d(x_C + \varphi r) &= 0, \\ x_C + \varphi r &= \text{const.} \end{aligned}$$

Отже, прийшли до рівняння голономної в'язі.

Тепер стає зрозумілою процедура застосування загального рівняння динаміки (11.25) до розв'язування задач на визначення руху механічної системи.

• *Перший підхід.* На підставі рівнянь голономних і неголономних в'язей у формі варіацій (11.29), (11.30) у рівнянні (11.26) замінюють варіації декартових координат, виражені через $n = 3N - (1 + p)$ незалежних декартових координат, і розбивають їх на доданки, множниками яких є незалежні варіації координат.

Таким чином приходять до загального рівняння динаміки в незалежних варіаціях координат. Прирівнявши величини при варіаціях до нуля, дістають таку кількість диференціальних рівнянь другого

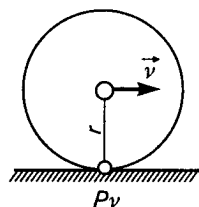


Рис. 11.13

порядку, яке дорівнює числу ступенів вільності механічної системи. Ці рівняння, хоч і позбавлені варіацій, але містять $3N$ невідомих декартових координат. Виходить, що в результаті перетворень система диференціальних рівнянь стає незамкненою.

Якщо до n диференціальних рівнянь у декартових координатах додати $l + p$ рівнянь голономних і неголономних в'язей [(11.27), (11.30) відповідно], то дістанемо систему $3N$ диференціальних рівнянь другого порядку з $3N$ невідомими, але яка не містить невідомих реакцій в'язей.

• *Другий підхід.* Підставимо вирази варіацій декартових координат за формулами (11.35) у загальне рівняння динаміки (11.26) і зробимо попередні викладки:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left[(F_{akx} - m_k \ddot{x}_{kx}) \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i + (F_{aky} - m_k \ddot{y}_{ky}) \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \delta q_i + \right. \\ & \quad \left. + (F_{akz} - m_k \ddot{z}_{kz}) \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \delta q_i \right] = \\ & = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\sum_{k=1}^N \left(F_{akx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{aky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{akz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i - \right. \\ & \quad \left. - \left[\sum_{k=1}^N \left(m_k \ddot{x}_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + m_k \ddot{y}_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + m_k \ddot{z}_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i \right\} = 0. \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$\sum_{k=1}^N \left(F_{akx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{aky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{akz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = Q_i$$

і назвемо величину Q_i узагальненою силою, що відповідає узагальненій координаті q_i .

Далі окремо здійснимо проміжне перетворення диференціально-го виразу в круглих дужках:

$$\begin{aligned} & m_k \ddot{x}_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + m_k \ddot{y}_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + m_k \ddot{z}_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} = \\ & = m_k \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) - \left(\dot{x}_{kx} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \right] + \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{y}_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \right) - \left(\dot{y}_{ky} \frac{d}{dt} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{z}_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) - \left(\dot{z}_{kz} \frac{d}{dt} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \right] \right\} = m_k \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \dot{y}_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \dot{z}_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \left(\dot{x}_{kx} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \dot{y}_{kx} \frac{d}{dt} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \dot{z}_{kx} \frac{d}{dt} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \right\}.$$

У подальших перетвореннях спочатку звернемо увагу на частинні похідні

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial y_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial z_k}{\partial q_i}.$$

Вони є функціями узагальнених координат і часу. Покажемо, що справедливі такі перші співвідношення Лагранжа:

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial y_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial z_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial \dot{q}_i}.$$

Для цього (11.32) спочатку здиференціюємо за часом:

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_k}{\partial t},$$

$$\dot{y}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial y_k}{\partial t},$$

$$\dot{z}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial z_k}{\partial t},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Тепер візьмемо частинні похідні від цих рівностей за похідними від узагальнених координат і дістанемо співвідношення Лагранжа

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial y_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial z_k}{\partial q_i}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Іншими співвідношеннями Лагранжа будуть такі:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial q_i}.$$

Переконуємось у справедливості цих співвідношень, диференціюючи:

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_k}{\partial t} \right)}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial q_i},$$

$$\frac{\partial \dot{y}_k}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial y_k}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 y_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 y_k}{\partial t \partial q_i},$$

$$\frac{\partial \dot{z}_k}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial z_k}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 z_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 z_k}{\partial t \partial q_i},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} [q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots, q_n(t); t] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial q_i},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 y_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 y_k}{\partial t \partial q_i},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 z_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 z_k}{\partial t \partial q_i},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Продовжуємо перетворення з урахуванням співвідношень Лагранжа:

$$\begin{aligned} & m_k \ddot{x}_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + m_k \ddot{y}_{kx} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + m_k \ddot{z}_{kx} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} = \\ & = m_k \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \dot{y}_{kx} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \dot{z}_{kx} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\dot{x}_{kx} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \dot{y}_{kx} \frac{d}{dt} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \dot{z}_{kx} \frac{d}{dt} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \right] \right\} = \\ & = m_k \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \dot{y}_{kx} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \dot{z}_{kx} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\dot{x}_{kx} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \dot{y}_{kx} \frac{d}{dt} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \dot{z}_{kx} \frac{d}{dt} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \right] \right\} = \\ & = \frac{d}{dt} m_k \left(\dot{x}_{kx} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} + \dot{x}_{kx} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} + \dot{x}_{kx} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} \right) - \\ & - m_k \left(\dot{x}_{kx} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} + \dot{y}_{kx} \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial q_i} + \dot{z}_{kx} \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial q_i} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial \frac{m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)}{2}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \frac{m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)}{2}}{\partial q_i}.$$

Маємо рівність

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + m_k \ddot{y}_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + m_k \ddot{z}_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} = \\ = \frac{d}{dt} \frac{\partial \frac{m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)}{2}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \frac{m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)}{2}}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Переходимо до початку наших викладок і продовжуємо їх з урахуванням останнього результату:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left[(F_{akx} - m_k \ddot{x}_{kx}) \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i + (F_{aky} - m_k \ddot{y}_{ky}) \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \delta q_i + \right. \\ \left. + (F_{akz} - m_k \ddot{z}_{kz}) \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \delta q_i \right] = \\ = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\sum_{k=1}^N \left(F_{akx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{aky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{akz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i - \right. \\ \left. - \left[\sum_{k=1}^N \left(m_k \ddot{x}_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + m_k \ddot{y}_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + m_k \ddot{z}_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i \right\} = \\ = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \sum_{k=1}^N \frac{m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)}{2}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \sum_{k=1}^N \frac{m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)}{2}}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \end{aligned}$$

Суми під операторами частинних похідних є кінетичною енергією механічної системи

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Тут величини \dot{x}_k , \dot{y}_k , \dot{z}_k на підставі співвідношень (11.32) треба виразити через узагальнені координати Лагранжа, їхні похідні за часом і час.

Остаточо дістаємо

$$\sum_{i=1}^n \left[Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (11.39)$$

Це й є загальне рівняння динаміки в узагальнених координатах Лагранжа. Воно справедливе за будь-яких варіацій узагальнених координат. У нашому випадкові не всі варіації узагальнених координат Лагранжа незалежні, а лише $r = n - p$, що дорівнює числу ступенів вільності неголономної механічної системи. Знову зіткнулися з проблемою, як вивести з рівняння довільні нескінченно малі величини.

□ **Рівняння Лагранжа другого роду для неголономної механічної системи з невизначеними коефіцієнтами.** Рівняння (11.39) можна звільнити від варіацій узагальнених координат за допомогою невизначених коефіцієнтів Лагранжа. Щоб ввести ці коефіцієнти в рівняння (11.39), кожне з p рівнянь неголономних в'язей у варіаціях (11.37) помножимо на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p$, після чого додамо. Дістанемо

$$\sum_i^n \left(\sum_{\alpha=1}^p a_{\alpha,i} \lambda_{\alpha} \right) \delta q_i = 0,$$

$$\sum_i^n (a_{1,i} \lambda_1 + a_{2,i} \lambda_2 + a_{3,i} \lambda_3 + \dots + a_{p,i} \lambda_p) \delta q_i = 0.$$

Введемо в рівняння (11.39) і винесемо за дужки спільні множники δq_i :

$$\sum_{i=1}^n \left[Q_i + (a_{1,i} \lambda_1 + a_{2,i} \lambda_2 + a_{3,i} \lambda_3 + \dots + a_{p,i} \lambda_p) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i = 0.$$

Тепер доберемо коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p$ так, щоб p доданків при залежних варіаціях перетворилися в нуль. Інші $n - p$ доданків при довільних (незалежних) варіаціях неминуче будуть нулями, бо справа в рівності стоїть нуль. Отже, приходимо до такої системи рівнянь Лагранжа для неголономної механічної системи з невизначеними коефіцієнтами Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + a_{1,i} \lambda_1 + a_{2,i} \lambda_2 + a_{3,i} \lambda_3 + \dots + a_{p,i} \lambda_p, \quad (11.40)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Це система n рівнянь із невідомими функціями часу $q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots, q_n(t)$. Крім того, рівняння системи містять p невизначених коефіцієнтів Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p$. Отже, в системі $n + p$ невідомих величин. Система рівнянь буде замкненою щодо визначення всіх невідомих, якщо додати до неї p рівнянь неголономних в'язей (11.34).

□ **Рівняння Лагранжа другого роду для голономної механічної системи.** Якщо механічна системи голономна, то сума $a_{1,i}\lambda_1 + a_{2,i}\lambda_2 + a_{3,i}\lambda_3 + \dots + a_{p,i}\lambda_p$ перетворюється в нуль, і приходимо до рівнянь

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (11.41)$$

Це рівняння Лагранжа другого роду для голономної механічної системи, або просто лагранжеві рівняння, кількість яких дорівнює кількості незалежних між собою узагальнених координат, або числу ступенів вільності голономної системи.

Лагранжеві рівняння не містять реакцій ідеальних в'язей — це їхня перевага. В них входить кінетична енергія T як функція узагальнених координат $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, узагальнених швидкостей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n$ і часу t . Праві частини є узагальненими силами, які в загальному випадкові також залежать від тих самих величин, що й кінетична енергія.

Лагранжеві рівняння у вигляді (11.41) — це ще не диференціальні рівняння; по суті вони є математичним алгоритмом (правилом), за яким в узагальнених координатах складаються диференціальні рівняння руху неголономної механічної системи.

Щоб за методом Лагранжа скласти диференціальні рівняння руху голономної механічної системи, треба в лівих частинах лагранжевих рівнянь виконати такі дії над кінетичною енергією T , якщо, звичайно, її попередньо зведено до узагальнених координат:

- обчислити частинні похідні від кінетичної енергії за узагальненими швидкостями;
- знайти повні похідні за часом від добутих частинних похідних;
- визначити частинні похідні від кінетичної енергії за узагальненими координатами Лагранжа;
- знайдені вирази підставити в ліві частини лагранжевих рівнянь;
- визначити узагальнені сили за співвідношеннями

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \left(F_{akx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{aky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{akz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (11.42)$$

або за формулами віртуальної роботи

$$Q_i = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \delta A_{ak} \right)_i}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (11.43)$$

за умови, що варіації інших, відмінних від q_i узагальнених координат, є нульовими; величина $\left(\sum_{k=1}^N \delta A_{ak} \right)_i$, таким чином, залежатиме від номера i узагальненої координати q_i ;

- знайдені значення узагальнених сил ввести в праві частини лагранжевих рівнянь.

У результаті дістанемо систему n диференціальних рівнянь другого порядку відносно невідомих узагальнених координат Лагранжа.

• *Лагранжеві рівняння у випадку дії потенціальних сил.* Потенціальні сили належать до енергетичних, які залежать тільки від положень точок механічної системи, й тому їхня робота з переміщення системи між якими-небудь двома положеннями (першим і другим) визначається запасом енергії в першому положенні порівняно з другим, куди переходить система в своєму русі. Кожне положення механічної системи характеризується потенціальною енергією Π .

Розглядаючи потенціальні сили, завжди відмічають так зване початкове (нульове) положення, в якому потенціальна енергія механічної системи дорівнює нулю ($\Pi_0 = 0$). Тоді потенціальна енергія механічної системи в довільному першому положенні визначатиметься роботою, яку виконують потенціальні сили з переміщення системи з цього першого положення в початкове з нульовою потенціальною енергією ($\Pi_0 = 0$). Отже, маємо таку формулу для визначення потенціальної енергії в загальному випадкові:

$$\Pi_1 = A_{1,0} = \sum_{k=1}^N \left[\int_{(0,0)} (F_{kx} dx_{kx} + F_{ky} dy_{kx} + F_{kz} dz_{kx}) \right]. \quad (11.44)$$

Зрозуміло, що потенціальні сили напрямлені в бік зменшення потенціальної енергії, тому можна записати

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N,$$

де $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1; \dots; x_N, y_N, z_N)$ і $x_1, y_1, z_1; \dots; x_N, y_N, z_N$ на підставі (11.32) залежать від узагальнених координат Лагранжа.

Підставимо у співвідношення (11.42):

$$Q_i = - \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{aky} \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} + F_{akz} \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Права частина є не що інше, як частинна похідна від потенціальної енергії за узагальненою координатою Лагранжа. Отже, приходимо до рівностей

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (11.45)$$

Підставляємо (11.45) у лагранжеві рівняння (11.41) і записуємо результат

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (11.46)$$

Це лагранжеві рівняння у випадку дії на ідеальну голономну систему потенціальних сил. Замість двох динамічних величин T і Π у рівняння (11.46) можна ввести одну $L = T - \Pi$. Функція L , яка дорівнює різниці між кінетичною та потенціальною енергіями механічної системи, називається функцією Лагранжа.

Лагранжеві рівняння в такій заміні матимуть вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (11.47)$$

Звернемо увагу на те, що потенціальні сили не залежать від часу. В такому разі кажуть, що система потенціальних сил утворює стаціонарне консервативне поле. Якщо механічна система з ідеальними стаціонарними без тертя в'язями перебуває під дією лише потенціальних сил, то виконується закон збереження повної механічної енергії системи, який можна вивести з рівнянь (11.47).

□ Загальне рівняння статки в узагальнених координатах Лагранжа. Загальне рівняння статки (11.25) визначає умови, які мають задовольняти задані активні сили, щоб ідеальна механічна система перебувала в рівновазі.

Застосуємо формули (11.35) і перейдемо в рівнянні (11.25) до узагальнених координат:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (F_{akx} \delta x_k + F_{aky} \delta y_k + F_{akz} \delta z_k) = \\ & = \sum_{k=1}^N \left(F_{akx} \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i + F_{aky} \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \delta q_i + F_{akz} \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^N \left(F_{akx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{aky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{akz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \right] \partial q_i = 0$$

або

$$\sum_{i=1}^n Q_i \partial q_i = Q_1 \partial q_1 + Q_2 \partial q_2 + Q_3 \partial q_3 + \dots + Q_n \partial q_n = 0. \quad (11.48)$$

Але в рівнянні (11.48) варіації узагальнених координат незалежні, довільні величини. Тому узагальнені сили дорівнюють нулю, й приходимо до загального рівняння статички в узагальнених координатах:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n = 0. \quad (11.49)$$

Положення механічної системи з ідеальними стаціонарними в'язями буде рівноважним, якщо узагальнені активні сили, які в цьому положенні діють на неї, дорівнюють нулю.

• *Загальне рівняння статички в разі дії на механічну систему потенціальних сил.* Якщо рівновага механічної системи з ідеальними стаціонарними в'язями в даному її положенні зумовлена лише потенціальними силами, то узагальнені сили системи можна виразити через її потенціальну енергію за формулами (11.45). Тому замість (11.49) матимемо

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = \dots = \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (11.50)$$

Рівноважними положеннями механічної системи з ідеальними стаціонарними в'язями під дією потенціальних сил будуть ті, в яких потенціальна енергія системи досягає екстремального значення (найменшого або найбільшого).

Розрізняють два види рівноваги механічної системи під дією на неї потенціальних сил: стійку й нестійку. Звичайно, ще є байдужа рівновага. На рис. 11.14 зображено кулю в трьох положеннях, які відповідають різним видам її рівноваги. В даних положеннях вага кулі \vec{G} зрівноважується нормальною реакцією \vec{N} поверхні. Положення рівноваги на опуклій униз поверхні (рис. 11.14, а) стійке, оскільки за незначного відхилення кулі від цього положення з'являється горизонтальна складова реакції, яка повертає її в рівноважне положення. На опуклій угору поверхні (рис. 11.14, б) положення рівноваги кулі нестійке, бо навіть за дуже малого відхилення її від цього положення виникає горизонтальна складова реакції, яка дедалі більше відхилятиме кулю від стійкого положення, в яке вона ніколи більше не повернеться. На горизонтальній поверхні куля перебуває в байдужій рівновазі (рис. 11.14, в).

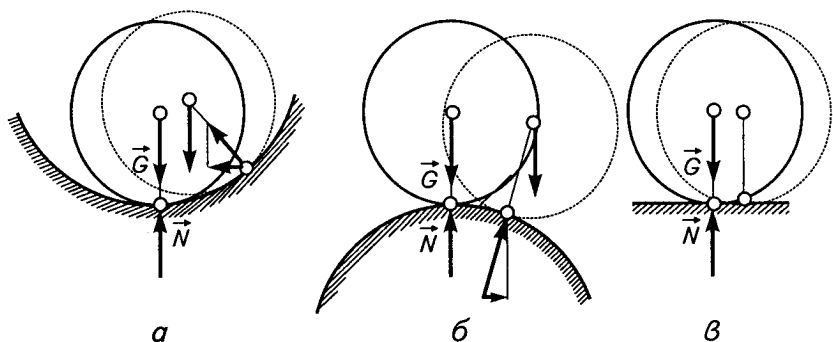


Рис. 11.14

Виходячи з цих прикладів, можна дати такі означення стійкої та нестійкої рівноваги ідеальної механічної системи під дією на неї активних сил, якими є потенціальні сили.

*Рівновага механічної системи називається **стійкою**, якщо внаслідок незначної зміни початкових координат її точок або миттєвого надання їм у положенні рівноваги невеликих швидкостей виникають сили, які намагаються повернути механічну систему в попереднє положення рівноваги, від якого вона вимушена була відхилитися під впливом зовнішнього збурення.*

*Рівновага механічної системи називається **нестійкою**, якщо за незначної зміни початкових координат її точок або миттєвого надання їм великих початкових швидкостей виникають сили, які намагаються збільшити відхилення системи від положення рівноваги, з якого вона вимушено вийшла внаслідок зовнішнього збурення.*

Сформулюємо без доведення теорему Лагранжа—Діріхле та Ляпунова, які дають критерій стійкості положення рівноваги механічної рівноваги.

***Теорема Лагранжа—Діріхле.** Дане положення рівноваги консервативної механічної системи стійке, якщо в цьому положенні потенціальна енергія системи має мінімум.*

***Теорема Ляпунова 1.** Дане положення рівноваги консервативної механічної системи нестійке, якщо потенціальна енергія системи в цьому положенні має максимум, який визначається членами з найменшим порядком малості з тих, що справді є в розкладі потенціальної енергії системи за степенем малих приростів координат.*

***Теорема Ляпунова 2.** Дане рівноважне положення консервативної механічної системи нестійке, якщо в цьому положенні потенціальна енергія системи не має мінімуму, відсутність якого визначається членами другого порядку малості в розкладі потенціальної енергії за степенем малих приростів координат.*

► **Приклад 11.8.** Однорідний круглий циліндр радіусом r покладено бічною поверхнею зверху на інший нерухомий циліндр радіусом R так, що їхні осі взаємно перпендикулярні (рис. 11.15). Дослідимо стійкість системи, якщо тертя в точці дотику циліндрів достатнє, щоб запобігти проковзуванню верхнього циліндра по нерухомому нижньому.

Вісь Oy з початком у центрі мас нерухомого циліндра спрямуємо по вертикалі вгору. Положення циліндрів рівноважне в разі розташування їхніх центрів мас на спільній вертикалі — осі Oy .

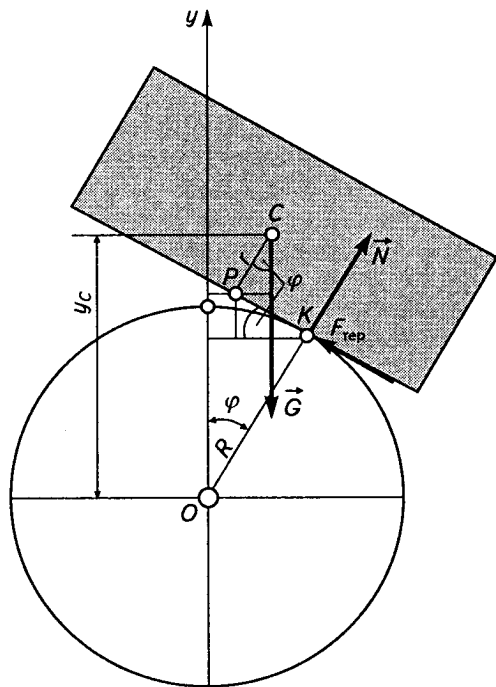


Рис. 11.15

Як відомо, потенціальна енергія системи в даному положенні дорівнює роботі потенціальних сил з переміщення її на нульовий рівень. Отже, маємо

$$\Pi = Gy_C = G(R \cos \varphi + R\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi).$$

На підставі умови (11.50) рівноваги консервативної системи в узагальнених координатах обчислюємо похідну від потенціальної енергії циліндра за параметром φ :

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} [G(R \cos \varphi + R\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi)] =$$

Перемістимо верхній циліндр із рівноважного положення P коченням твірною без проковзування по нерухомому колу в близьке до рівноважного положення K , яке визначається кутом φ між радіусом R точки дотику циліндрів і вертикаллю Oy . Цілком зрозуміло, що твірна верхнього циліндра, котячися по відрізьку PK , простелилася на дузі $R\varphi$ кола нижнього циліндра, так що виконується умова

$$R\varphi = PK.$$

Із рис. 11.13 знаходимо ординату нового положення центра мас циліндра після його виведення з рівноваги:

$$y_C = R \cos \varphi + R\varphi \sin \varphi + r \sin \varphi.$$

У разі визначення потенціальної енергії циліндра після виведення його з рівноважного положення нульовим рівнем потенціальної енергії буде горизонтальна площина, що проходить через точку O (вісь Ox).

$$\begin{aligned}
 &= G(-R \sin \varphi + R \sin \varphi + R\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi) = \\
 &= G(R\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi).
 \end{aligned}$$

Прирівнюємо цю похідну до нуля й з'ясовуємо, за якого кута φ має місце рівновага циліндра:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Pi}{d\varphi} &= 0, \\
 G(R\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi) &= 0; \\
 \varphi &= 0.
 \end{aligned}$$

Отже, рівноважному положенню циліндра, як ми передбачали на самому початку, відповідає кут $\varphi = 0$. Щоб дослідити дане рівноважне положення на стійкість, треба застосувати теорему Лагранжа—Діріхле, згідно з якою рівноважне положення стійке, якщо в ньому потенціальна енергія має мінімум.

Обчислюємо другу похідну від потенціальної енергії і дізнаємося, який вона матиме знак за критичного значення $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} &= \frac{d}{d\varphi} [G(R\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi)] = \\
 &= G(R \cos \varphi - R\varphi \sin \varphi - r \cos \varphi), \\
 \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}(0) &= G(R - r) > 0.
 \end{aligned}$$

У рівноважному положенні циліндра його потенціальна енергія матиме мінімум, якщо друга похідна додатна. Отже, приходимо до такого співвідношення між радіусами циліндрів, за якого рівноважне положення буде стійким:

$$R > r.$$

➤ **Приклад 11.9.** Застосуємо принцип можливих переміщень для визначення співвідношення між моментом опору $M_{\text{он}}$, прикладеним до кривошипа OA , і силою P , що діє на поршень B кривошипно-шатунного механізму за його рівноваги (див. рис. 11.11). Дані задачі такі: довжини шатуна й кривошипа однакові, $r = l$; кут $\varphi = \pi/4$. Тертям знехтувати й вагу ланок механізму не враховувати.

Щоб знайти умову, яку мають задовольняти величини $M_{\text{он}}$, P у рівноважному положенні механізму, треба обчислити суму віртуальних робіт сили P і моменту опору $M_{\text{он}}$ і прирівняти її до нуля. На підставі рівняння (11.2.4) дістаємо

$$\sum_{k=1}^N \delta A_{a_k} = M_{\text{он}} \delta\varphi - P \delta r_B = 0.$$

Із рис. (11.11) виводимо співвідношення між віртуальними переміщеннями кривошипа й поршня:

$$\frac{r \delta\varphi}{AP_{AB}} = \frac{\delta r_B}{BP_{AB}};$$

$$\delta r_B = BP_{AB} \frac{r \delta \varphi}{AP_{AB}} = 2r \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r \delta \varphi}{\rho} = \sqrt{2} r \delta \varphi.$$

Підставивши в рівняння віртуальних робіт, дістанемо шукане співвідношення:

$$\sum_{k=1}^N \delta A_{a k} = M_{\text{он}} \delta \varphi - P \sqrt{2} r \delta \varphi = 0,$$

$$M_{\text{он}} = P \sqrt{2} r.$$

Цей приклад наочно доводить велику перевагу методу віртуальних робіт перед методами геометричної статистики.

11.5

Рівняння Аппеля

Вираження проєкцій швидкостей точок неголономної механічної системи на нерухомі декартові осі через незалежні узагальнені швидкості (узагальнені варіації). Нехай маємо деяку неголономну механічну систему з n узагальненими координатами Лагранжа $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, на яку накладено l геометричних і p неголономних (неінтегровних диференціальних) в'язей. Маючи рівняння геометричних в'язей, виразимо в нерухомих осях Ox, Oy, Oz декартові координати точок механічної системи через узагальнені координати Лагранжа:

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; t), \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; t), \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; t), \\ k &= 1, 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \tag{11.51}$$

Здиференціюємо співвідношення (11.51) за часом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x_k}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \dots + \frac{\partial x_k}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_k}{\partial t}, \\ \dot{y}_k &= \frac{\partial y_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial y_k}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \dots + \frac{\partial y_k}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial y_k}{\partial t}, \\ \dot{z}_k &= \frac{\partial z_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial z_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial z_k}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \dots + \frac{\partial z_k}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial z_k}{\partial t}, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \tag{11.52}$$

а також зваріюємо їх:

$$\begin{aligned}\delta x_k &= \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial x_k}{\partial q_3} \delta q_3 + \dots + \frac{\partial x_k}{\partial q_n} \delta q_n, \\ \delta y_k &= \frac{\partial y_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial y_k}{\partial q_3} \delta q_3 + \dots + \frac{\partial y_k}{\partial q_n} \delta q_n, \\ \delta z_k &= \frac{\partial z_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial z_k}{\partial q_3} \delta q_3 + \dots + \frac{\partial z_k}{\partial q_n} \delta q_n, \\ & k = 1, 2, 3, \dots, N.\end{aligned}\quad (11.53)$$

Тепер долучимо p лінійних неголономних рівнянь в'язей:

$$\begin{aligned}a_{1,1}\dot{q}_1 + a_{1,2}\dot{q}_2 + a_{1,3}\dot{q}_3 + \dots + a_{1,n}\dot{q}_n + a_1 &= 0, \\ a_{2,1}\dot{q}_1 + a_{2,2}\dot{q}_2 + a_{2,3}\dot{q}_3 + \dots + a_{2,n}\dot{q}_n + a_2 &= 0, \\ a_{3,1}\dot{q}_1 + a_{3,2}\dot{q}_2 + a_{3,3}\dot{q}_3 + \dots + a_{3,n}\dot{q}_n + a_3 &= 0, \\ \dots & \\ a_{p,1}\dot{q}_1 + a_{p,2}\dot{q}_2 + a_{p,3}\dot{q}_3 + \dots + a_{p,n}\dot{q}_n + a_p &= 0\end{aligned}\quad (11.54)$$

і також подамо їх у варіаціях:

$$\begin{aligned}a_{1,1}\delta q_1 + a_{1,2}\delta q_2 + a_{1,3}\delta q_3 + \dots + a_{1,n}\delta q_n &= 0, \\ a_{2,1}\delta q_1 + a_{2,2}\delta q_2 + a_{2,3}\delta q_3 + \dots + a_{2,n}\delta q_n &= 0, \\ a_{3,1}\delta q_1 + a_{3,2}\delta q_2 + a_{3,3}\delta q_3 + \dots + a_{3,n}\delta q_n &= 0, \\ \dots & \\ a_{p,1}\delta q_1 + a_{p,2}\delta q_2 + a_{p,3}\delta q_3 + \dots + a_{p,n}\delta q_n &= 0.\end{aligned}\quad (11.55)$$

Зазначимо, що в усіх цих співвідношеннях їхні коефіцієнти є функціями узагальнених координат Лагранжа $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ і часу t .

Виходячи зі співвідношень (11.54), не всі узагальнені швидкості $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n$ і відповідні варіації $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \dots, \delta q_n$ незалежні. Очевидно, незалежних серед них буде $r = n - p$, що дорівнює числу ступенів вільності механічної системи, яка є неголономною. Надамо даним r незалежним величинам загальний номер j . Тоді незалежні узагальнені швидкості й відповідні їм варіації зададуться так: $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_r$; $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \dots, \delta q_r$ або $\dot{q}_j, j = 1, 2, 3, \dots, r$; $\delta q_j, j = 1, 2, 3, \dots, r$.

Тепер із рівнянь (11.54), (11.55) виразимо n узагальнених швидкостей (варіацій) через незалежні $\dot{q}_j, j = 1, 2, 3, \dots, r$; $\delta q_j, j = 1, 2, 3, \dots, r$:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= b_{1,1}\dot{q}_1 + b_{1,2}\dot{q}_2 + b_{1,3}\dot{q}_3 + \dots + b_{1,r}\dot{q}_r + b_1, \\ \dot{q}_2 &= b_{2,1}\dot{q}_1 + b_{2,2}\dot{q}_2 + b_{2,3}\dot{q}_3 + \dots + b_{2,r}\dot{q}_r + b_2, \\ \dot{q}_3 &= b_{3,1}\dot{q}_1 + b_{3,2}\dot{q}_2 + b_{3,3}\dot{q}_3 + \dots + b_{3,r}\dot{q}_r + b_3, \\ &\dots \\ \dot{q}_n &= b_{n,1}\dot{q}_1 + b_{n,2}\dot{q}_2 + b_{n,3}\dot{q}_3 + \dots + b_{n,r}\dot{q}_r + b_n;\end{aligned}\tag{11.56}$$

$$\begin{aligned}\delta q_1 &= b_{1,1}\delta q_1 + b_{1,2}\delta q_2 + b_{1,3}\delta q_3 + \dots + b_{1,r}\delta q_r, \\ \delta q_2 &= b_{2,1}\delta q_1 + b_{2,2}\delta q_2 + b_{2,3}\delta q_3 + \dots + b_{2,r}\delta q_r, \\ \delta q_3 &= b_{3,1}\delta q_1 + b_{3,2}\delta q_2 + b_{3,3}\delta q_3 + \dots + b_{3,r}\delta q_r, \\ &\dots \\ \delta q_n &= b_{n,1}\delta q_1 + b_{n,2}\delta q_2 + b_{n,3}\delta q_3 + \dots + b_{n,r}\delta q_r.\end{aligned}\tag{11.57}$$

З урахуванням (11.56) і (11.57) виразимо проекції $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, k = 1, 2, 3, \dots, N$ і відповідні їм варіації $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k, k = 1, 2, 3, \dots, N$, через незалежні $\dot{q}_j, j = 1, 2, 3, \dots, r$; $\delta q_j, j = 1, 2, 3, \dots, r$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= A_{k,1}\dot{q}_1 + A_{k,2}\dot{q}_2 + A_{k,3}\dot{q}_3 + \dots + A_{k,r}\dot{q}_r + A_k, \\ \dot{y}_k &= B_{k,1}\dot{q}_1 + B_{k,2}\dot{q}_2 + B_{k,3}\dot{q}_3 + \dots + B_{k,r}\dot{q}_r + B_k, \\ \dot{z}_k &= C_{k,1}\dot{q}_1 + C_{k,2}\dot{q}_2 + C_{k,3}\dot{q}_3 + \dots + C_{k,r}\dot{q}_r + C_k, \\ &k = 1, 2, 3, \dots, N;\end{aligned}\tag{11.58}$$

$$\begin{aligned}\delta x_k &= A_{k,1}\delta q_1 + A_{k,2}\delta q_2 + A_{k,3}\delta q_3 + \dots + A_{k,r}\delta q_r, \\ \delta y_k &= B_{k,1}\delta q_1 + B_{k,2}\delta q_2 + B_{k,3}\delta q_3 + \dots + B_{k,r}\delta q_r, \\ \delta z_k &= C_{k,1}\delta q_1 + C_{k,2}\delta q_2 + C_{k,3}\delta q_3 + \dots + C_{k,r}\delta q_r, \\ &k = 1, 2, 3, \dots, N.\end{aligned}\tag{11.59}$$

Зрозуміло, що нові коефіцієнти залежать від тих самих n узагальнених координат Лагранжа та часу t , що й старі. Особливістю нових співвідношень є те, що в них містяться лише незалежні узагальнені швидкості й відповідні узагальнені варіації.

□ **Визначення других похідних від декартових координат точок механічної системи за часом як функцій незалежних узагальнених прискорень.** Здиференціюємо рівності (11.58) за часом:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_k &= A_{k,1}\ddot{q}_1 + A_{k,2}\ddot{q}_2 + A_{k,3}\ddot{q}_3 + \dots + A_{k,r}\ddot{q}_r + \\ &+ \frac{dA_{k,1}}{dt}\dot{q}_1 + \frac{dA_{k,2}}{dt}\dot{q}_2 + \frac{dA_{k,3}}{dt}\dot{q}_3 + \dots + \frac{dA_{k,r}}{dt}\dot{q}_r + \frac{dA_k}{dt},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_k &= B_{k,1}\ddot{q}_1 + B_{k,2}\ddot{q}_2 + B_{k,3}\ddot{q}_3 + \dots + B_{k,r}\ddot{q}_r + \\ &+ \frac{dB_{k,1}}{dt}\dot{q}_1 + \frac{dB_{k,2}}{dt}\dot{q}_2 + \frac{dB_{k,3}}{dt}\dot{q}_3 + \dots + \frac{dB_{k,r}}{dt}\dot{q}_r + \frac{dB_k}{dt}, \\ \ddot{z}_k &= C_{k,1}\ddot{q}_1 + C_{k,2}\ddot{q}_2 + C_{k,3}\ddot{q}_3 + \dots + C_{k,r}\ddot{q}_r + \\ &+ \frac{dC_{k,1}}{dt}\dot{q}_1 + \frac{dC_{k,2}}{dt}\dot{q}_2 + \frac{dC_{k,3}}{dt}\dot{q}_3 + \dots + \frac{dC_{k,r}}{dt}\dot{q}_r + \frac{dC_k}{dt}, \\ &k=1, 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} \Phi_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n; t) &= \\ &= \frac{dA_{k,1}}{dt}\dot{q}_1 + \frac{dA_{k,2}}{dt}\dot{q}_2 + \frac{dA_{k,3}}{dt}\dot{q}_3 + \dots + \frac{dA_{k,r}}{dt}\dot{q}_r + \frac{dA_k}{dt}, \\ \Theta_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n; t) &= \\ &= \frac{dB_{k,1}}{dt}\dot{q}_1 + \frac{dB_{k,2}}{dt}\dot{q}_2 + \frac{dB_{k,3}}{dt}\dot{q}_3 + \dots + \frac{dB_{k,r}}{dt}\dot{q}_r + \frac{dB_k}{dt}, \\ \Psi_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n; t) &= \\ &= \frac{dC_{k,1}}{dt}\dot{q}_1 + \frac{dC_{k,2}}{dt}\dot{q}_2 + \frac{dC_{k,3}}{dt}\dot{q}_3 + \dots + \frac{dC_{k,r}}{dt}\dot{q}_r + \frac{dC_k}{dt}, \\ &k=1, 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Тепер шукані залежності наберуть вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k &= A_{k,1}\ddot{q}_1 + A_{k,2}\ddot{q}_2 + A_{k,3}\ddot{q}_3 + \dots + A_{k,r}\ddot{q}_r + \Phi_k, \\ \ddot{y}_k &= B_{k,1}\ddot{q}_1 + B_{k,2}\ddot{q}_2 + B_{k,3}\ddot{q}_3 + \dots + B_{k,r}\ddot{q}_r + \Theta_k, \\ \ddot{z}_k &= C_{k,1}\ddot{q}_1 + C_{k,2}\ddot{q}_2 + C_{k,3}\ddot{q}_3 + \dots + C_{k,r}\ddot{q}_r + \Psi_k, \\ &k=1, 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (11.60)$$

□ **Перетворення загального рівняння динаміки для неголомної механічної системи на систему рівнянь.** Запишемо загальне рівняння динаміки (11.26) і підставимо в нього значення варіацій із рівностей (11.59):

$$\sum_{k=1}^N \left[(F_{akx} - m_k \ddot{x}_{kx}) \sum_{j=1}^r A_{k,j} \delta q_j + (F_{aky} - m_k \ddot{y}_{ky}) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{j=1}^r B_{k,j} \delta q_j + (F_{akx} - m_k \ddot{z}_k) \sum_{j=1}^r C_{k,j} \delta q_j \Big] = \\
& = \sum_{j=1}^r \left[\sum_{k=1}^N (F_{akx} A_{k,j} + F_{aky} B_{k,j} + F_{akz} C_{k,j}) \right] \delta q_j - \\
& - \sum_{j=1}^r \left[\sum_{k=1}^N (m_k \ddot{x}_k A_{k,j} + m_k \ddot{y}_k B_{k,j} + m_k \ddot{y}_k C_{k,j}) \right] \delta q_j ; \\
& \sum_{j=1}^r \left[\sum_{k=1}^N (m_k \ddot{x}_k A_{k,j} + m_k \ddot{y}_k B_{k,j} + m_k \ddot{y}_k C_{k,j}) \right] \delta q_j = \\
& = \sum_{j=1}^r \left[\sum_{k=1}^N (F_{akx} A_{k,j} + F_{aky} B_{k,j} + F_{akz} C_{k,j}) \right] \delta q_j .
\end{aligned}$$

Оскільки в останньому рівнянні всі варіації узагальнених координат Лагранжа незалежні, то замість одного сумарного матимемо систему r окремих рівнянь:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^N (m_k \ddot{x}_k A_{k,1} + m_k \ddot{y}_k B_{k,1} + m_k \ddot{y}_k C_{k,1}) = \\
& = \sum_{k=1}^N (F_{akx} A_{k,1} + F_{aky} B_{k,1} + F_{akz} C_{k,1}), \\
& \sum_{k=1}^N (m_k \ddot{x}_k A_{k,2} + m_k \ddot{y}_k B_{k,2} + m_k \ddot{y}_k C_{k,2}) = \\
& = \sum_{k=1}^N (F_{akx} A_{k,2} + F_{aky} B_{k,2} + F_{akz} C_{k,2}), \\
& \sum_{k=1}^N (m_k \ddot{x}_k A_{k,3} + m_k \ddot{y}_k B_{k,3} + m_k \ddot{y}_k C_{k,3}) = \\
& = \sum_{k=1}^N (F_{akx} A_{k,3} + F_{aky} B_{k,3} + F_{akz} C_{k,3}), \\
& \dots \dots \dots \\
& \sum_{k=1}^N (m_k \ddot{x}_k A_{k,r} + m_k \ddot{y}_k B_{k,r} + m_k \ddot{y}_k C_{k,r}) = \\
& = \sum_{k=1}^N (F_{akx} A_{k,r} + F_{aky} B_{k,r} + F_{akz} C_{k,r}).
\end{aligned}$$

Зліва — не що інше, як узагальнені сили неголономної системи. Замінімо їх тим самим позначенням, що й у випадку голономної системи:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \sum_{k=1}^N (F_{akx} A_{k,1} + F_{aky} B_{k,1} + F_{akz} C_{k,1}), \\
 Q_2 &= \sum_{k=1}^N (F_{akx} A_{k,2} + F_{aky} B_{k,2} + F_{akz} C_{k,2}), \\
 Q_3 &= \sum_{k=1}^N (F_{akx} A_{k,3} + F_{aky} B_{k,3} + F_{akz} C_{k,3}), \\
 &\dots \\
 Q_r &= \sum_{k=1}^N (F_{akx} A_{k,r} + F_{aky} B_{k,r} + F_{akz} C_{k,r}).
 \end{aligned} \tag{11.61}$$

Замість одного загального рівняння динаміки у варіаціях декартових координат точок будь-якої механічної системи (як голономної, так і неголономної) остаточно дістаємо систему r загальних рівнянь динаміки, що не містять варіацій:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N (m_k \ddot{x}_k A_{k,1} + m_k \ddot{y}_k B_{k,1} + m_k \ddot{z}_k C_{k,1}) &= Q_1, \\
 \sum_{k=1}^N (m_k \ddot{x}_k A_{k,2} + m_k \ddot{y}_k B_{k,2} + m_k \ddot{z}_k C_{k,2}) &= Q_2, \\
 \sum_{k=1}^N (m_k \ddot{x}_k A_{k,3} + m_k \ddot{y}_k B_{k,3} + m_k \ddot{z}_k C_{k,3}) &= Q_3, \\
 &\dots \\
 \sum_{k=1}^N (m_k \ddot{x}_k A_{k,r} + m_k \ddot{y}_k B_{k,r} + m_k \ddot{z}_k C_{k,r}) &= Q_r.
 \end{aligned} \tag{11.62}$$

Тепер у цих рівняннях позбавимося коефіцієнтів $A_{k,r}$, $B_{k,r}$, $C_{k,r}$, $k = 1, 2, 3, \dots, N$; $j = 1, 2, 3, \dots, r$. Для цього обчислимо частинні похідні від рівностей (11.60) за узагальненими прискореннями:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{q}_1} &= A_{k,1}, \quad \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{q}_2} = A_{k,2}, \quad \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{q}_3} = A_{k,3}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{q}_r} = A_{k,r}, \\
 \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \ddot{q}_1} &= B_{k,1}, \quad \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \ddot{q}_2} = B_{k,2}, \quad \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \ddot{q}_3} = B_{k,3}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \ddot{q}_r} = B_{k,r},
 \end{aligned} \tag{11.63}$$

$$\frac{\partial \ddot{z}_k}{\partial \ddot{q}_1} = C_{k,1}, \quad \frac{\partial \ddot{z}_k}{\partial \ddot{q}_2} = C_{k,2}, \quad \frac{\partial \ddot{z}_k}{\partial \ddot{q}_3} = C_{k,3}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \ddot{z}_k}{\partial \ddot{q}_r} = C_{k,r},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Підставимо значення коефіцієнтів (11.63) у загальні рівняння (11.62):

$$\sum_{k=1}^N \left(m_k \ddot{x}_k \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{q}_1} + m_k \ddot{y}_k \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \ddot{q}_1} + m_k \ddot{z}_k \frac{\partial \ddot{z}_k}{\partial \ddot{q}_1} \right) = Q_1,$$

$$\sum_{k=1}^N \left(m_k \ddot{x}_k \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{q}_2} + m_k \ddot{y}_k \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \ddot{q}_2} + m_k \ddot{z}_k \frac{\partial \ddot{z}_k}{\partial \ddot{q}_2} \right) = Q_2,$$

$$\sum_{k=1}^N \left(m_k \ddot{x}_k \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{q}_3} + m_k \ddot{y}_k \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \ddot{q}_3} + m_k \ddot{z}_k \frac{\partial \ddot{z}_k}{\partial \ddot{q}_3} \right) = Q_3,$$

.....

$$\sum_{k=1}^N \left(m_k \ddot{x}_k \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{q}_r} + m_k \ddot{y}_k \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \ddot{q}_r} + m_k \ddot{z}_k \frac{\partial \ddot{z}_k}{\partial \ddot{q}_r} \right) = Q_r.$$

Бачимо, що в дужках під знаком частинної похідної можна записати величину, за виглядом подібну до кінетичної енергії точки. Це так звана енергія прискорення точки масою m_k . Позначимо її через

$$S_k = \frac{m_k (\ddot{x}_k^2 + \ddot{y}_k^2 + \ddot{z}_k^2)}{2} = \frac{m_k a_k^2}{2}. \quad (11.64)$$

Отже, перепишемо так:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial \left[\left(\frac{m_k (\ddot{x}_k^2 + \ddot{y}_k^2 + \ddot{z}_k^2)}{2} \right) \right]}{\partial \ddot{q}_1} = Q_1,$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial \left[\left(\frac{m_k (\ddot{x}_k^2 + \ddot{y}_k^2 + \ddot{z}_k^2)}{2} \right) \right]}{\partial \ddot{q}_2} = Q_2,$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial \left[\left(\frac{m_k (\ddot{x}_k^2 + \ddot{y}_k^2 + \ddot{z}_k^2)}{2} \right) \right]}{\partial \ddot{q}_3} = Q_3,$$

.....

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial \left[\left(\frac{m_k (\ddot{x}_k^2 + \ddot{y}_k^2 + \ddot{z}_k^2)}{2} \right) \right]}{\partial \ddot{q}_r} = Q_r$$

або, помінявши місцями оператори $\left(\sum_{k=1}^N, \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j}, \sum_{k=1}^N \right)$ і замінивши повну енергію прискорень S механічної системи відповідно до рівності

$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{\ddot{x}_k^2 + \ddot{y}_k^2 + \ddot{z}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^N S_k = S:$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_1} = Q_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_2} = Q_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_3} = Q_3, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r} = Q_r. \quad (11.65)$$

Коротко можна записати

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = Q_j, \quad j=1, 2, 3, \dots, r. \quad (11.66)$$

Це система $r = n - p$ рівнянь Аппеля для неголономної механічної системи, причому кількість рівнянь дорівнює числу ступенів вільності й менша за кількість узагальнених координат Лагранжа. Згадаймо, що n — кількість узагальнених координат, а p — кількість рівнянь неголономних в'язей.

Зрозуміло, що узагальнені сили в правих частинах (11.65) є функціями всіх n узагальнених координат системи й завдяки рівнянням голономних в'язей (11.54) в них входять r незалежних узагальнених швидкостей і час для нестационарних в'язей. Ті самі змінні входять і у вираз енергії прискорень S .

Після виконання математичних дій, передбачених структурою рівнянь Аппеля (11.66), дістанемо систему $n - p$ диференціальних рівнянь другого порядку відносно n узагальнених координат Лагранжа. Крім шуканих функцій $q_i(t)$, $i=1, 2, 3, \dots, n$, вони містять лише перші й другі похідні від тих із загальних координат $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, варіації від яких незалежні; кількість цих координат і відповідних їм варіацій — r , що дорівнює числу ступенів вільності системи.

Долучивши до $n - p$ рівнянь Аппеля (11.66) p рівнянь неголономних в'язей (11.54), дістанемо замкнену систему диференціальних рівнянь для визначення всіх невідомих задачі.

11.6

Застосування методу Лагранжа для розв'язування деяких задач статички й динаміки

Коефіцієнт корисної дії простих машин. Як зазначалося, принцип віртуальних робіт можна безпосередньо застосовувати до механічних систем без тертя. Конструкція багатьох машин і пристроїв така, що тертям між їхніми складовими частинами можна знехтувати, проте бувають випадки, коли тертя треба брати до уваги. Застосовуючи у таких випадках принцип віртуальних робіт, доводиться, крім активних (заданих) сил, урахувати й сили тертя.

Розглянемо приклади.

• *Простий пристрій для підймання вантажів* (рис. 11.16). Він складається з похилої площини, блока й нитки. Якщо похила площина шорстка (необроблена), то для визначення сили F , необхідної для підняття тіла вагою \vec{G} , треба врахувати силу тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$ між тілом і площиною (рис. 11.16, а). Позначивши віртуальне переміщення тіла

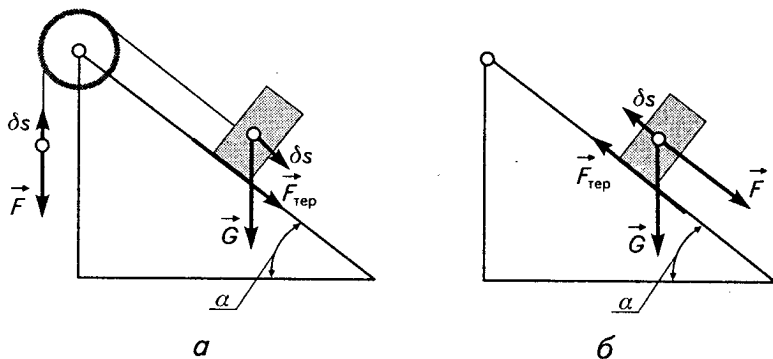


Рис. 11.16

через δs і знехтувавши тертям у блоці, на підставі принципу віртуальних робіт дістанемо рівняння

$$-F \delta s + G \sin \alpha \delta s + F_{\text{тер}} \delta s = 0. \quad (11.67)$$

Позначивши коефіцієнт тертя між тілом і площиною через f , за законом Кулона про тертя ковзання матимемо

$$\vec{F}_{\text{тер}} = fN = fG \cos \alpha.$$

Підставимо в (11.67) і скоротимо на δs :

$$-F + G \sin \alpha + fG \cos \alpha = 0,$$

звідки знаходимо шукану силу F :

$$F = G(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Із рівняння (11.67) випливає, що віртуальна робота сили F

$$\delta A_{\text{затр}} = G(\sin \alpha + f \cos \alpha) \delta s \quad (11.68)$$

витрачається не лише на підняття тіла вагою G на висоту $\delta H = \delta s \sin \alpha$, а й на подолання сили тертя $F_{\text{тер}}$. Ця робота називається *затраченою*. Віртуальна робота

$$\delta A_{\text{кор}} = G \delta H = \delta s \sin \alpha$$

називається *корисною*.

Коефіцієнтом корисної дії (ККД) машини η у даному випадкові — похилої площини для підняття вантажів називається відношення корисної роботи до затраченої:

$$\eta = \frac{\delta A_{\text{кор}}}{\delta A_{\text{затр}}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + f \cos \alpha}. \quad (11.69)$$

Із формули (11.69) видно, що при $f=0$ ККД для ідеального випадку, тобто коли немає тертя, дорівнює одиниці; зі збільшенням коефіцієнта тертя ККД зменшується.

Тепер визначимо, яку силу F треба прикласти паралельно похилій площині до вантажу, щоб він переміщувався вниз по цій площині (рис. 11.16, б). За принципом віртуальних робіт складаємо рівняння

$$-F \delta s - G \sin \alpha \delta s + fG \cos \alpha = 0,$$

звідки шукана сила

$$F = G(f \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Сила, необхідна для виникнення ковзання тіла вниз по похилій площині, дорівнюватиме нулю, коли виконуватиметься умова

$$F = G(f \cos \alpha_{\text{тер}} - \sin \alpha_{\text{тер}}) = 0,$$

за якої коефіцієнт тертя

$$f = \text{tg } \alpha_{\text{тер}}.$$

Отже, коли кут α нахилу площини дорівнює куту тертя $\alpha_{\text{тер}}$ або менший від нього, тіло не ковзатиме по похилій площині. Якщо кут на-

хилу більший за кут тертя, тіло ковзатиме вниз по похилій площині без будь-якої штовхальної сили.

Для окремого випадку, коли

$$\alpha = \alpha_{\text{тер}} = \arctg f,$$

за формулою (11.69) дістаємо таке значення ККД:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + f \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha_{\text{тер}}}{\sin \alpha_{\text{тер}} + \frac{\sin \alpha_{\text{тер}}}{\cos \alpha_{\text{тер}}} \cos \alpha_{\text{тер}}} = \\ &= \frac{\sin \alpha_{\text{тер}} \cos \alpha_{\text{тер}}}{2 \sin(\alpha_{\text{тер}} \cos \alpha_{\text{тер}})} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

• *Гвинтовий прес* (рис. 11.17, а). Вважаючи, що нарізка гвинта преса прямокутна (рис. 11.17, б), матимемо похилу площину, намотану на циліндричну поверхню. Під час повертання гвинта парою сил із моментом M на деякий кут нерухома рама тисне на плоску поверхню гвинта, й унаслідок цього між нею та площиною нарізки виникає сила тертя. Отже, для визначення ККД гвинта можна застосувати спосіб, викладений вище.

Параметри гвинта й силову схему преса наведено на рис. 11.17. Віртуальним переміщенням гвинта є його нескінченно малий поворот $\delta\varphi$. Якщо середній радіус кола площини нарізки позначити через r , то відповідне повороту $\delta\varphi$ віртуальне переміщення точок площини нарізки, які знаходяться на відстані r від осі гвинта, очевидно, буде $r \delta\varphi$.

Обертальному віртуальному переміщенню гвинта $\delta\varphi$ відповідає його поступальне по вертикалі вниз віртуальне переміщення δh . Ці переміщення пов'язані таким співвідношенням (рис. 11.17, в):

$$\frac{2\pi r}{h} = \frac{r \delta\varphi}{\delta h},$$

звідки $\delta h = \frac{h \delta\varphi}{2\pi}$. Введемо в цю рівність кут нахилу нарізки α . З рис. 11.17, в

виводимо $\text{tg } \alpha = \frac{h}{2\pi r}$ і підставляємо в попередню формулу:

$$\delta h = r \delta\varphi \text{ tg } \alpha. \quad (11.70)$$

Тиск F , що розвивається пресом, спричинює сумарний нормальний тиск N на площину нарізки й, крім того, сумарну дотичну до площини нарізки силу, яка дорівнює силі тертя $F_{\text{тер}}$.

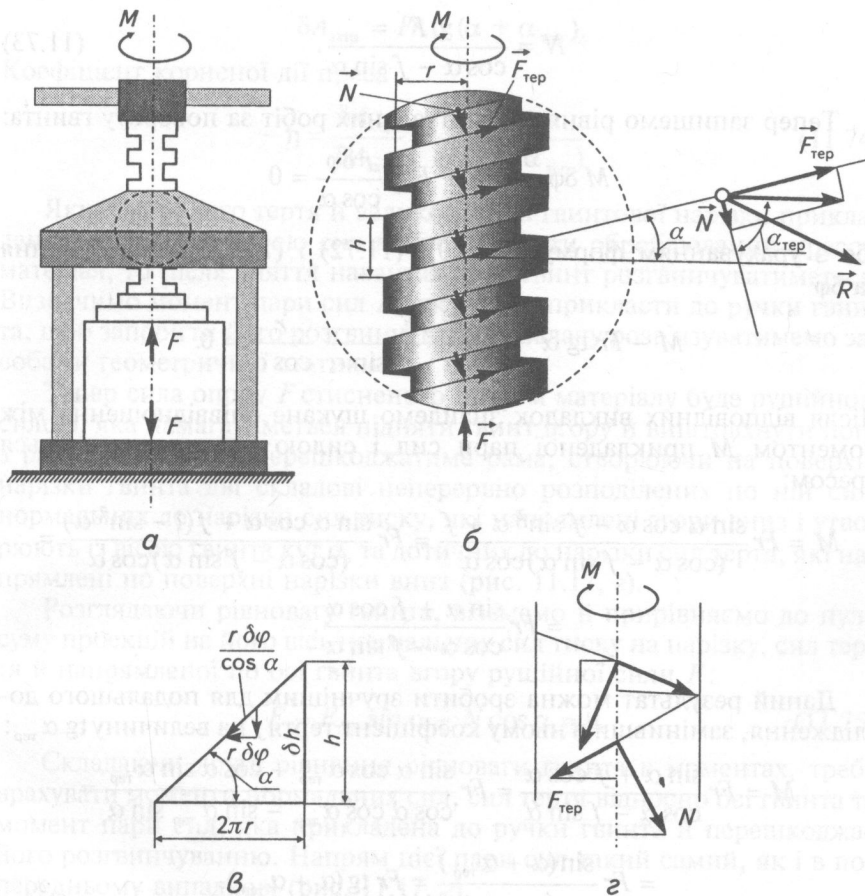


Рис. 11.17

Рівняння віртуальної роботи в напрямі осі гвинта запишеться так:

$$N \delta h \cos \alpha - F_{\text{тер}} \delta h \sin \alpha - F \delta h = 0. \quad (11.71)$$

При цьому сумарна сила тертя в зоні контакту рами й площини нарізки становитиме

$$F_{\text{тер}} = fN. \quad (11.72)$$

Із рівнянь (11.71) і (11.72) виключаємо нормальну реакцію N :

$$N \delta h \cos \alpha - fN \delta h \sin \alpha - F \delta h = 0;$$

$$N = \frac{F}{\cos \alpha - f \sin \alpha}. \quad (11.73)$$

Тепер запишемо рівняння віртуальних робіт за повороту гвинта:

$$M \delta \varphi - F \delta h - F_{\text{тер}} \frac{r \delta \varphi}{\cos \alpha} = 0$$

або з урахуванням формул (11.70), (11.72) і (11.73) та скорочення на $\delta \varphi$

$$M - Fr \operatorname{tg} \alpha - \frac{fF}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \frac{r}{\cos \alpha} = 0.$$

Після відповідних викладок знайдемо шукане співвідношення між моментом M прикладеної пари сил і силою F , що розвивається пресом:

$$\begin{aligned} M &= Fr \frac{\sin \alpha \cos \alpha - f \sin^2 \alpha + f}{(\cos \alpha - f \sin \alpha) \cos \alpha} = Fr \frac{\sin \alpha \cos \alpha + f(1 - \sin^2 \alpha)}{(\cos \alpha - f \sin \alpha) \cos \alpha} = \\ &= Fr \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Даний результат можна зробити зручнішим для подальшого дослідження, замінивши в ньому коефіцієнт тертя f на величину $\operatorname{tg} \alpha_{\text{тер}}$:

$$\begin{aligned} M &= Fr \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = Fr \frac{\sin \alpha \cos \alpha_{\text{тер}} + \cos \alpha \sin \alpha_{\text{тер}}}{\cos \alpha \cos \alpha_{\text{тер}} - \sin \alpha_{\text{тер}} \sin \alpha} = \\ &= Fr \frac{\sin(\alpha + \alpha_{\text{тер}})}{\cos(\alpha + \alpha_{\text{тер}})} = Fr \operatorname{tg}(\alpha + \alpha_{\text{тер}}). \end{aligned}$$

В ідеальному випадкові, коли сила тертя дорівнює нулю, тобто $\alpha_{\text{тер}} = 0$, матимемо

$$M = Fr \operatorname{tg} \alpha,$$

і вся робота прикладеної до гвинта пари сил іде лише на подолання корисної сили F опору матеріалу, який стискається пресом. Тому віртуальна корисна робота

$$\delta A_{\text{кор}} = M \delta \varphi = Fr \delta \varphi \operatorname{tg} \alpha.$$

Робота, яка виконується парою сил для подолання не лише сили опору преса, а й тертя в ньому, очевидно, буде затраченою. Віртуальна затрачена робота

$$\delta A_{\text{затр}} = Fr \operatorname{tg}(\alpha + \alpha_{\text{тер}}).$$

Коефіцієнт корисної дії преса

$$\eta = \frac{\delta A_{\text{кор}}}{\delta A_{\text{затр}}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha_{\text{тер}})}. \quad (11.74)$$

Якщо за малого тертя й великого кута гвинтової нарізки прикладено до гвинта парою сил міцно стиснути оброблюваний пресом матеріал, то після зняття навантаження гвинт розгвинчуватиметься. Визначимо момент пари сил M , яку треба прикласти до ручки гвинта, щоб запобігти його розгвинчуванню. Задачу розв'язуватимемо за собами геометричної статyki.

Тепер сила опору F стисненого пресом матеріалу буде рушійною силою, яка намагатиметься підняти гвинт вгору й виштовхнути його з рами. Але цьому перешкоджатиме рама, створюючи на поверхні нарізки гвинта дві складові неперервно розподілених по ній сил: нормальних до нарізки сил тиску, які напрямлені згори вниз і утворюють із віссю гвинта кут α , та дотичних до нарізки сил тертя, які напрямлені по поверхні нарізки вниз (рис. 11.17, з).

Розглядаючи рівновагу гвинта, візьмемо й прирівняємо до нуля суму проєкцій на його вісь нормальних сил тиску на нарізку, сил тертя й напрямленої по осі гвинта вгору рушійної сили F :

$$F - F_{\text{тер}} \sin \alpha - N \cos \alpha = 0. \quad (11.75)$$

Складаючи друге рівняння рівноваги гвинта в моментах, треба врахувати моменти нормальних сил, сил тертя відносно осі гвинта та момент пари сил, яка прикладена до ручки гвинта й перешкоджає його розгвинчуванню. Напрямок цієї пари сил такий самий, як і в попередньому випадкові (рис. 11.17, з).

Зауважимо, що на гвинт преса за годинниковою стрілкою діють момент пари сил M та сумарний момент сил тертя, а проти годинникової стрілки — сумарний момент нормальних сил, який у даному випадкові є рушійним (рис. 11.17, з).

Складаємо друге рівняння рівноваги:

$$-M - F_{\text{тер}} r \cos \alpha + Nr \sin \alpha = 0. \quad (11.76)$$

Сумарну силу тертя, як і в попередньому випадкові, знайдемо за формулою

$$F_{\text{тер}} = fN.$$

Підставивши її значення в рівняння (11.75), визначимо сумарну нормальну реакцію:

$$N = \frac{F}{f \sin \alpha + \cos \alpha}. \quad (11.77)$$

Далі, підставивши (11.77) у (11.76) і врахувавши значення сили тертя, розв'язуємо рівняння (11.76) і знаходимо шуканий момент пари сил M :

$$-M - fNr \cos \alpha + Nr \sin \alpha = 0,$$

$$M = Fr \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{f \sin \alpha + \cos \alpha}.$$

Добутий вираз для M можна спростити, врахувавши формулу $f = \operatorname{tg} \alpha_{\text{тер}}$:

$$\begin{aligned} M &= Fr \frac{\sin \alpha - \frac{\sin \alpha_{\text{тер}}}{\cos \alpha_{\text{тер}}} \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha_{\text{тер}}}{\cos \alpha_{\text{тер}}} \sin \alpha + \cos \alpha} = \\ &= Fr \frac{\sin \alpha \cos \alpha_{\text{тер}} - \sin \alpha_{\text{тер}} \cos \alpha}{\sin \alpha \sin \alpha_{\text{тер}} + \cos \alpha \cos \alpha_{\text{тер}}} = Fr \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_{\text{тер}}). \end{aligned}$$

Як видно з останнього рівняння, момент пари сил дорівнюватиме нулю, якщо $\alpha = \alpha_{\text{тер}}$, тобто коли кут нарізки різьби дорівнюватиме куту тертя. Звідси випливає, що при $\alpha < \alpha_{\text{тер}}$ гвинт являє собою самогальмівний пристрій.

Проаналізуємо залежності

$$M = Fr \operatorname{tg}(\alpha + \alpha_{\text{тер}}),$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha_{\text{тер}})}.$$

Якщо $\alpha = \alpha_{\text{тер}}$, то

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{\text{тер}}}{\operatorname{tg} 2\alpha_{\text{тер}}}.$$

Із першої формули видно, що коли сума кутів $\alpha + \alpha_{\text{тер}}$ дорівнює 90° , то хоч би який був момент прикладеної до ручки гвинта пари сил, гвинт не повертатиметься. Це означає, що повна реакція гвинтової нарізки \vec{R} знаходиться в межах кута тертя, й будь-яке збільшення моменту пари лише призведе до зростання тиску між гвинтом і рамою (рис. 11.17, б).

• *Лебідка.* Даний пристрій для піднімання вантажів складається зі шківа заданого радіуса r_1 з валом радіусом r_2 і підшипників, в яких знаходяться кінці вала (рис. 11.18). Обід циліндра охоплений ниткою, до одного кінця якої прикріплюється вантаж заданої ваги G , а до іншого — прикладається сила F , яку треба визначити.

Вважатимемо, що всі сили діють в одній серединній площині шківа. В початковий момент після надання руху вантажу силою \vec{F} вал завдяки тертю котитиметься по внутрішній поверхні підшипника. При цьому вісь вала підніметься вгору на малу висоту, якій відповідатиме кут викоту α , і притиснеться до підшипника в деякій точці A . В цій точці A на вал із боку підшипників діятимуть дві сили — сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$ і нормальна реакція (власною вагою шківа й вала нехтуємо).

Таким чином, на систему діють такі зовнішні сили: шукана сила \vec{F} , задана вага вантажу \vec{G} і реакції підшипників $\vec{F}_{\text{тер}}$, \vec{N} . Віртуальним переміщенням нашої системи можна вважати будь-яке переміщення, бо вона вважається вільною — системою без зовнішніх в'язей.

Складемо три рівняння принципу віртуальних робіт. Складаючи перше рівняння, за віртуальне переміщення візьмемо нескінченно малий поворот $\delta\varphi$ системи навколо осі вала. На цьому віртуальному переміщенні зовнішніми силами, прикладеними до системи, буде виконана віртуальна робота:

$$\sum_{k=1}^N \delta A_{ak} = -F \delta s + G \delta s + F_{\text{тер}} r_2 \delta\varphi.$$

Прирівнявши її до нуля, матимемо перше рівняння

$$-F \delta s + G \delta s + F_{\text{тер}} r_2 \delta\varphi = 0. \quad (11.78)$$

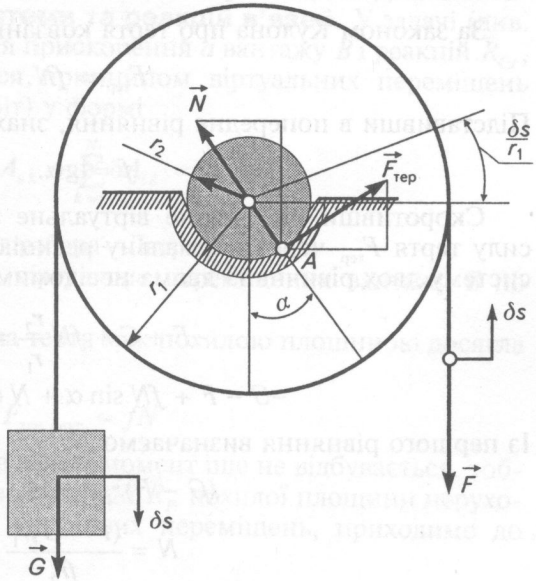


Рис. 11.18

Далі розглянемо віртуальне переміщення δh по вертикалі, наприклад угору, й складемо рівняння віртуальних робіт:

$$-G \delta h - F \delta h + F_{\text{тер}} \delta h \sin \alpha + N \delta h \cos \alpha = 0. \quad (11.79)$$

Виберемо третє віртуальне переміщення δl по горизонталі, наприклад управо, й запишемо рівняння віртуальних робіт:

$$F_{\text{тер}} \delta l \cos \alpha - N \delta l \sin \alpha = 0.$$

За законом Кулона про тертя ковзання

$$F_{\text{тер}} = fN.$$

Підставивши в попереднє рівняння, знаходимо

$$f = \text{tg} \alpha.$$

Скоротивши на спільне віртуальне переміщення й виразивши силу тертя $F_{\text{тер}}$ через нормальну реакцію N , в результаті дістанемо систему двох рівнянь із двома невідомими:

$$-F + G + fN \frac{r_2}{r_1} = 0,$$

$$-G - F + fN \sin \alpha + N \cos \alpha = 0.$$

Із першого рівняння визначаємо N :

$$(G - F)r_1 + fNr_2 = 0,$$

$$N = \frac{(F - G)r_1}{fr_2}.$$

У невикористаному рівнянні врахуємо останній результат:

$$-(G + F)fr_2 + (f \sin \alpha + \cos \alpha)(F - G)r_1 = 0,$$

$$-Gfr_2 - Ffr_2 + Fr_1(f \sin \alpha + \cos \alpha) - Gr_1(f \sin \alpha + \cos \alpha) = 0,$$

$$-Gr_1(f \sin \alpha + \cos \alpha) - Gfr_2 = F[fr_2 - r_1(f \sin \alpha + \cos \alpha)],$$

$$F = -G \frac{r_1(f \sin \alpha + \cos \alpha) + fr_2}{fr_2 - r_1(f \sin \alpha + \cos \alpha)} = G \frac{f(r_2/r_1) + (f \sin \alpha + \cos \alpha)}{(f \sin \alpha + \cos \alpha) - f(r_2/r_1)} =$$

$$= G \frac{f \frac{r_2}{r_1} + \frac{f^2}{\sqrt{1+f^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}}{\frac{f^2}{\sqrt{1+f^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} - f \frac{r_2}{r_1}} = G \frac{1 + f^2 + f \frac{r_2}{r_1} \sqrt{1+f^2}}{1 + f^2 - f \frac{r_2}{r_1} \sqrt{1+f^2}}.$$

ККД розглядуваного пристрою

$$\eta = \frac{\delta A_{\text{а.кор}}}{\delta A_{\text{а.затр}}} = \frac{G \delta s}{F \delta s} = \frac{1 + f^2 - f \frac{r_2}{r_1} \sqrt{1 + f^2}}{1 + f^2 + f \frac{r_2}{r_1} \sqrt{1 + f^2}}$$

□ **Застосування принципу можливих переміщень для визначення прискорень тіл системи та реакцій в'язей.** У задачі (див. рис. 10.21, а) для визначення прискорення a вантажу B і реакцій \bar{R}_{Cx} , \bar{R}_{Cy} опори C скористаємося принципом віртуальних переміщень (рівнянням віртуальних робіт) у формі

$$\sum_{k=1}^N \delta A_{ak} + \sum_{k=1}^N \delta A_{ik} = 0.$$

Це рівняння принципу Д'Аламбера—Лагранжа.

Розглянемо, наприклад, віртуальне переміщення вантажу B по вертикалі вгору.

Взявши до уваги, що сила тертя між похилою площиною досягла свого граничного значення

$$F_{\text{тер. макс}} = fN$$

перед проковзуванням, яке в даний момент іще не відбувається, тобто точка P прикладання повної реакції \bar{R}_p похилої площини нерухома, застосувавши принцип можливих переміщень, приходимо до рівняння

$$\left(2G_A + G_A + 2G_C \frac{i_C^2}{r_C^2} + 2G_B \right) a = 2g(G_B - G_A \sin \alpha),$$

звідки дістаємо те саме значення прискорення a вантажу B , що й у разі застосування принципу Д'Аламбера.

Коефіцієнт тертя визначимо за принципом Д'Аламбера, застосувавши його до обертальної складової плоскопаралельного руху колеса A , або за диференціальним рівнянням, яке описує цю саму складову руху, що одне й те саме.

Робимо висновок, що визначати прискорення тіл системи з ідеальними в'язями за принципом віртуальних робіт набагато простіше, ніж із застосуванням принципу Д'Аламбера, за яким зручно знаходити реакції в'язей прискорено рухомих механічних систем.

Застосуємо рівняння Лагранжа для визначення прискорення вантажу B . Розглядувана механічна система має один ступінь вільності.

За узагальнену координату візьмемо відстань s вантажу B від точки сходження нитки з барабана C . Запишемо рівняння Лагранжа в узагальненій координаті s :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s.$$

Виводимо вираз для кінетичної енергії системи, яка дорівнює сумі кінетичних енергій усіх її складових:

$$\begin{aligned} T &= T_A + T_C + T_B, \\ T_A &= \frac{G_A}{g} \dot{s}^2 + \frac{G_A}{2g} r_A^2 \frac{\dot{s}^2}{r_A^2} + \frac{G_C}{g} i_C^2 \frac{\dot{s}^2}{r^2} + \frac{G_B}{g} \dot{s}^2 = \\ &= \frac{\dot{s}^2}{2g} [3r_C^2 G_A + 2(G_C + G_B r_C^2)]. \end{aligned}$$

Узагальнену силу активних сил системи визначаємо за формулою

$$Q_s = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \delta A_{ak} \right)_s}{\delta s} = \frac{G_B \delta s - C_C \delta s \sin \alpha}{\delta s} = G_B - G_C \sin \alpha.$$

Виконавши дії в лівій частині рівняння Лагранжа над кінетичною енергією й урахувавши в його правій частині значення узагальненої сили в нашому випадкові, приходимо до рівняння

$$\frac{\ddot{s}}{g} [3r_C^2 G_A + 2(G_C + G_B r_C^2)] = G_B - G_C \sin \alpha,$$

яке має той самий вигляд, що й у задачі, розв'язаній за принципом Д'Аламбера.

□ **Коливання механічних систем.** • *Коливання вантажу на пружині.* Якщо вантаж вагою \bar{G} підвісити до вільного кінця циліндричної пружини з коефіцієнтом жорсткості c (рис. 11.19) і відпустити, то відбуватимуться вертикальні коливання вантажу під дією його власної ваги \bar{G} і сили пружності пружини $\bar{F}_{\text{пр}}$. Оскільки сила пружності пружини згідно із законом Гука змінюється за лінійним законом і може невпинно зростати від нульового значення

$$\bar{F}_{\text{пр}} = c\Delta l,$$

то є таке положення вантажу на вертикалі під час його коливань, в якому сила пружності пружини $F_{\text{пр,ст}}$ зрівноважить вагу G вантажу.

Назвемо його положенням статичної рівноваги вантажу, а деформацію пружини, що відповідає цьому положенню, — статичною деформацією. Позначивши її через $\lambda_{\text{ст}}$, в положенні рівноваги матимемо

$$F_{\text{пр,ст}} = c\lambda_{\text{ст}} = G.$$

Якщо вільний кінець пружини перемістити вниз на $\lambda_{\text{ст}}$ і підвісити до нього вантаж, що має нульову швидкість, то вантаж перебуватиме в статичній рівновазі. Коливання вантажу неминуче припиняться внаслідок опору повітря й внутрішнього тертя в матеріалі пружини, й він повернеться в положення статичної рівноваги.

Для складання рівняння динаміки руху вантажу застосуємо лагранжеві рівняння. Вісь Ox спрямуємо по осі пружини вниз, початок відліку абсциси вантажу сумістимо з положенням статичної рівноваги. Розглянемо в коливальному процесі поточне положення вантажу з координатою x нижче від положення статичної рівноваги, яку беремо за узагальнену координату Лагранжа.

Тоді запишемо

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x.$$

Силами, що діють на тіло, є власна вага \vec{G} і сила пружності пружини

$$F_{\text{пр}} = c(\lambda_{\text{ст}} + x).$$

Спочатку визначимо кінетичну енергію вантажу:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{G}{2g} \dot{x}^2.$$

Узагальнену силу знайдемо безпосередньо за формулою

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \left(F_{akx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{akx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{akx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right);$$

$$Q_x = G - c(\lambda_{\text{ст}} + x).$$

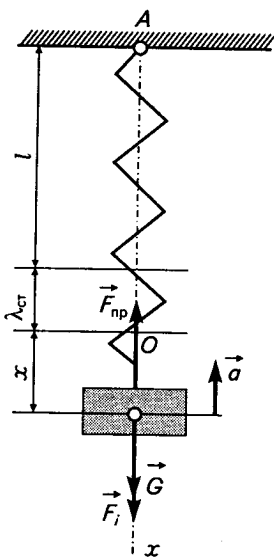


Рис. 11.19

Підставивши в рівняння Лагранжа, дістанемо

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{G}{2g} \dot{x}^2 \right)}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \left(\frac{G}{2g} \dot{x}^2 \right)}{\partial x} = G - c(\lambda_{\text{ст}} + x),$$

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = G - c(\lambda_{\text{ст}} + x) = -cx.$$

Зведемо останнє рівняння до вигляду

$$\ddot{x} + \frac{gc}{G} x = 0.$$

Дістали лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, загальний розв'язок якого

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt.$$

Якщо вибрати ненульові початкові дані: при $t = t_0 = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, то сталі інтегрування визначаються з алгебричних рівнянь

$$x_0 = C_2, \quad \dot{x}_0 = C_1 k.$$

Підставивши в загальний розв'язок, матимемо частинний розв'язок:

$$x = \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + x_0 \cos kt = A \cos \alpha \sin kt + A \sin \alpha \cos kt = A \sin(kt + \alpha),$$

де

$$A = \sqrt{(\dot{x}_0 / k)^2 + x_0^2},$$

$$\alpha = \text{arctg}(x_0 k / \dot{x}_0).$$

Тепер визначимо k . Відомо, що

$$k = 2\pi / T;$$

з іншого боку,

$$k = \sqrt{gc / G}.$$

Тепер матимемо формулу

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{G}{gc}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{\text{ст}}}{c}}, \quad (11.80)$$

за якою визначається період власних коливань вантажу на пружині.

Із формули (11.80) випливає: чим масивніше тіло й м'якша пружина, тим повільніше коливання вантажу (відбуваються з меншою частотою). Коливань із меншим періодом — більшої частоти — можна досягти, взявши тіло меншої маси й підвісивши його до жорсткішої пружини, тобто з більшим коефіцієнтом пружності.

Шуканий розв'язок

$$x = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2 + x_0^2} \sin \left[kt + \arctg \left(\frac{x_0 k}{\dot{x}_0} \right) \right]. \quad (11.81)$$

Маємо, що коливання вантажу на пружині є гармонічними з амплітудою

$$A = \sqrt{(\dot{x}_0 / k)^2 + x_0^2}, \quad (11.82)$$

яка залежить від початкових умов руху.

Величину

$$\alpha = \arctg(x_0 k / \dot{x}_0) \quad (11.83)$$

називають початковою фазою коливань.

• *Малі обертальні коливання тонкого прямолінійного стержня, підвішеного до пружини* (рис. 11.20). Тут узагальненою координатою Лагранжа буде кут повороту φ стержня навколо горизонтальної осі, що проходить через опору A перпендикулярно до стержня. Система має один ступінь вільності.

Вважатимемо, що горизонтальне положення стержня рівноважне, за якого виконується умова

$$G \frac{l}{2} = F_{\text{пр.ст}} l$$

або

$$G = 2cl \varphi_{\text{ст}}.$$

Якщо стержень відхилити від положення рівноваги на невеликий кут φ і відпустити, то він здійснюватиме малі коливання навколо цього положення.

Застосуємо рівняння Лагранжа другого роду для виведення диференціального рівняння в нашому випадкові. В положенні φ на стержень діють його вага \vec{G} та сила пружності пружини $\vec{F}_{\text{пр}}$, яка за модулем становить

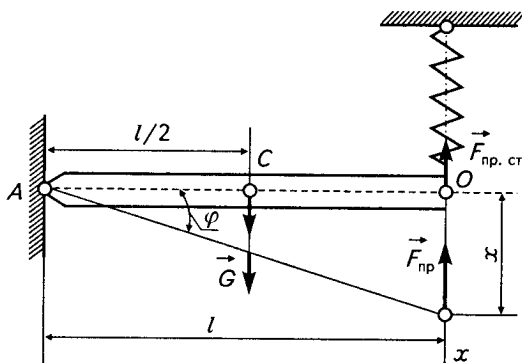


Рис. 11.20

$$F_{\text{пр}} = cl(\varphi_{\text{ст}} + \varphi).$$

Якщо момент інерції стержня відносно його кінця позначити через J , то кінетична енергія стержня за малих коливань

$$T = J \dot{\varphi}^2 / 2.$$

Для тонкого стержня

$$J = \frac{1}{3} \frac{G}{g} l^2.$$

Отже,

$$T = \frac{Gl^2 \dot{\varphi}^2}{6g}.$$

В'яззю, накладеною на стержень, є опори осі, які допускають лише поворот його навколо осі. Тому віртуальним переміщенням стержня буде $\delta\varphi$. Знаходимо віртуальну роботу сил \vec{G} і $\vec{F}_{\text{пр}}$:

$$\sum_{k=1}^N \delta A_{ak} = Gl \delta\varphi - cl(\varphi_{\text{ст}} + \varphi) l \delta\varphi.$$

Узагальнену силу Q_φ , що відповідає узагальненій координаті φ , визначимо за формулою

$$Q_\varphi = \frac{\sum_{k=1}^N \delta A_{ak}}{\delta\varphi}.$$

Підставивши вираз віртуальної роботи й скоротивши на $\delta\varphi$, дістаємо

$$Q_\varphi = \frac{\sum_{k=1}^N \delta A_{ak}}{\delta\varphi} = \frac{G \frac{l}{2} \delta\varphi - cl(\varphi_{\text{ст}} + \varphi) l \delta\varphi}{\delta\varphi} = G \frac{l}{2} - cl^2(\varphi_{\text{ст}} + \varphi).$$

Підставивши значення величин T і Q_φ у рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

і виконавши відповідні дії, матимемо

$$\frac{Gl^2}{3g} \ddot{\varphi} = G \frac{l}{2} - cl^2(\varphi_{\text{ст}} + \varphi)$$

або

$$\frac{Gl^2}{3g} \ddot{\varphi} = 2cl \varphi_{\text{ст}} \frac{l}{2} - cl^2 (\varphi_{\text{ст}} + \varphi) = -cl^2 \varphi.$$

Остаточно дістаємо таке диференціальне рівняння малих коливань стержня навколо його рівноважного горизонтального положення:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3gc}{G} \varphi = 0.$$

За малих коливань стержня, коли вісь пружини залишається вертикальною, маємо гармонічні коливання з періодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{G}{3gc}}.$$

У будь-якому випадкові обертального руху тіла, коли диференціальне рівняння

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z$$

має вигляд

$$\ddot{\varphi} + k\varphi = 0,$$

цей рух буде гармонічними коливаннями, й тоді можна записати формули для його періоду або частоти:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{k}}{2\pi}$$

відповідно.

• *Крутильні коливання диска.* Розглянемо однорідний диск радіусом r і вагою G , підвішений у центрі мас до кінця пружного стержня завдовжки l (рис. 11.21). Верхній кінець стержня защемлений у нерухомій горизонтальній основі. Нехай коефіцієнт пружності стержня c . Якщо диск повернути на невеликий кут φ навколо осі стержня й відпустити, то в подальшому він здійснюватиме коливання навколо цієї осі під дією пружного моменту, що створюється дотичними силами, які діють у кожному поперечному перерізі стержня при його закручуванні на кут φ . Такі коливання називаються крутильними. Система має один ступінь вільності. Кут φ буде узагальненою координатою крутильного маятника.

У межах пружності, в яких виконується закон Гука, тобто за малих кутів закручування стержня, пружний момент $M_{\text{пр}}$ визначається за формулою

$$M_{\text{пр}} = c\varphi.$$

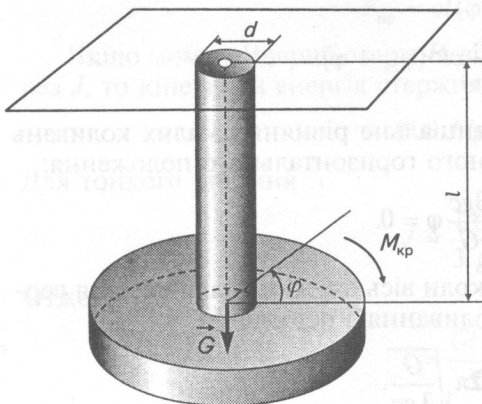


Рис. 11.21

Кінетична енергія диска під час його коливань

$$T = J_z \dot{\varphi}^2 / 2.$$

Узагальнену силу Q_φ , що відповідає узагальненій координаті φ , визначимо за формулою

$$Q_\varphi = \frac{\left[\sum_{k=1}^N \delta A_{a,k} \right]_\varphi}{\delta \varphi}.$$

Віртуальним переміщенням диска буде нескінченно малий поворот його за годинниковою

стрілкою або проти. Якщо в деякому положенні диска за його коливань кут повороту $\varphi > 0$, то

$$M_{np} = -c\varphi.$$

Якщо за віртуальне переміщення диска взяти, наприклад, поворот його за годинниковою стрілкою, то $\delta\varphi$ у формулі узагальненої сили буде зі знаком «-».

Отже, узагальнена сила, яка відповідає узагальненій координаті, становить

$$Q_\varphi = \frac{M_{np} \delta\varphi}{\delta\varphi} = \frac{-c\varphi \delta\varphi}{\delta\varphi} = -c\varphi,$$

що дорівнює пружному моменту.

Підставивши значення кінетичної енергії та узагальненої сили в рівняння Лагранжа й обчисливши відповідні похідні, дістанемо шукане рівняння власних коливань диска:

$$J_z \ddot{\varphi} = -c\varphi$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J_z} \varphi = 0.$$

Для диска $J_z = \frac{1}{2} G r^2$. Тому

$$\ddot{\varphi} + \frac{2gc}{Gr^2} \varphi = 0.$$

Для круглого стержня діаметром d із модулем пружності при зсуві $G_{\text{пр}}$ коефіцієнт пружності

$$c = \frac{G_{\text{пр}} J_{\rho}}{l} = \frac{G_{\text{пр}} \pi d^4}{l \cdot 32}.$$

Підставивши в диференціальне рівняння, матимемо

$$\ddot{\varphi} + \frac{\pi g d^4 G_{\text{пр}}}{16 G r^2 l} \varphi = 0.$$

Дане рівняння описує гармонічні коливання крутильного маятника без урахування маси стержня (вала) й опору повітря, а також внутрішнього тертя в матеріалі стержня. Період цих коливань

$$T_{\text{кол}} = 2\pi \sqrt{\frac{16 G r^2 l}{\pi g d^4 G_{\text{пр}}}}.$$

Зробимо деякі зауваження щодо малих вільних коливань у загальному випадкові.

Ми розглянули застосування рівняння Лагранжа для складання диференціального рівняння коливального руху окремого тіла навколо положення рівноваги в найпростіших випадках, коли внаслідок малого зміщення тіла від положення рівноваги виникає сила, пропорційна зміщенню й напрямлена до положення рівноваги. В цьому разі коливання тіла є гармонічними, тобто відбуваються за законом синуса або косинуса, й називаються власними.

Звернемо увагу також на те, що розглянуті малі власні коливання тіла зі стаціонарними в'язями відбувалися під впливом потенціальних сил. У загальному випадкові малі коливання механічної системи зі стаціонарними в'язями, на яку діють потенціальні сили й яка має один ступінь вільності, тобто консервативної механічної системи з одним і багатьма ступенями вільності, також вивчають на підставі лагранжевих рівнянь.

Зазначимо, що вивчення малих коливань пов'язане з дослідженням за теоремою Лагранжа—Діріхле положення рівноваги системи на стійкість. Попередньо, прирівнюючи до нуля похідну від потенціальної енергії, з добутого рівняння визначають саме положення рівноваги.

• *Періодична збурювальна сила. Вимушені коливання.* У розглянутих прикладах про власні коливання вантажу й стержня на пружині, а також крутильні коливання диска спільним є те, що біля рівноважного положення коливання відбувалися через початкове зміщення

тіла або надання йому початкової швидкості, внаслідок чого виникала пропорційна зміщенню сила, яка повертала тіло до цього положення. За відсутності цих початкових збурень коливання не виникають, тому й називаються власними.

Якщо до вантажу на пружині додатково прикласти ззовні силу $F(t)$, яка залежить від часу, то диференціальне рівняння запишеться так:

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = -cx + F(t). \quad (11.84)$$

Це диференціальне рівняння вимушених коливань вантажу. Силу $F(t)$ називають збурювальною. На практиці часто доводиться стикатися з періодичними збурювальними силами, які змінюються з часом за законом синуса або косинуса.

Розглянемо приклади.

Схему роторного електродвигуна на пружинах, який може рухатися вздовж вертикальних напрямних, наведено на рис. 11.22. Якщо ротор не розбалансований, то під впливом ваги двигуна відбуватиметься осадка пружин $\lambda_{\text{ст}}$, унаслідок чого він перебуватиме в положенні статичної рівноваги. Якщо змістити двигун з цього положення, то незабаром виникнуть власні коливання з періодом

$$T = 2\pi \sqrt{\lambda_{\text{ст}}/g}.$$

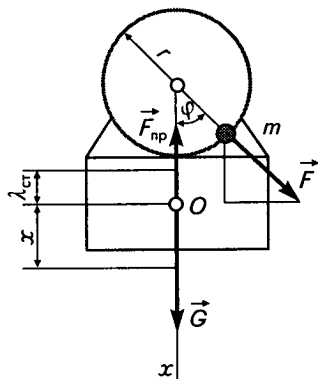


Рис. 11.22

Припустимо, що ротор розбалансований масою m , яка знаходиться на ободі ротора радіусом r . Якщо в нульовий початковий момент часу центр ваги двигуна збігається з положенням статичної рівноваги й маса m займає на колі найнижче положення, то за обертання ротора з кутовою швидкістю ω , наприклад проти годинникової стрілки, в момент часу t взаємне положення маси m і ротора визначатиметься кутом $\varphi = \omega t$ (рис. 11.22). Положення двигуна в момент часу t визначатиметься на осі Ox із початком у положенні статичної рівноваги координатою x .

Під час обертання ротора маса внаслідок її інерції намагатиметься зійти з ротора, тиснувши на нього із силою інерції Ньютона, яку називають відцентровою й яка напрямлена по радіусу ротора від осі його обертання. Проекція цієї сили на вісь Ox

$$F(t) = m\omega^2 r \cos \omega t.$$

Це збурювальна сила, яка, діючи у вертикальному напрямі на двигун, спричинює його вимушені коливання.

Складемо диференціальні рівняння вимушених коливань двигуна. Рівняння (11.84) справедливе й у розглядуваному випадкові. Тому можемо записати

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = -cx + m\omega^2 r \cos \omega t$$

або, поділивши на величину при \ddot{x} і ввівши позначення $k^2 = cg/G$, $F_0 = gm\omega^2 r/G$,

$$\ddot{x} + k^2 x = F_0 \cos \omega t. \quad (11.85)$$

Це рівняння вимушених коливань системи без урахування опору й тертя.

Іншим прикладом системи, під час вимушених коливань якої на підвішений до пружини вантаж, крім його власної ваги \bar{G} і відновлювальної сили $-cx$, діє періодична збурювальна сила, що змінюється за законом косинуса, може бути куліса Вольфа (на рис. 11.23, *a, б* наведено її кінематичну та силову схеми). Вантаж \bar{G} підвішений до гвинтової пружини з коефіцієнтом жорсткості c , верхній кінець якої з'єднаний із повзуном куліси, яка через камінь у прорізі рамки з'єднується з кривошипом радіусом r (рис. 11.23, *a*). Кривошип обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω .

Збурювальна сила $\bar{F}_{зб}$, що передається до вантажу через пружину в механізмі куліси (рис. 11.23, *б*), змінюється за законом

$$F_{зб} = \bar{F}_0 \cos \omega t. \quad (11.86)$$

Статичну деформацію пружини, що спричиняється власною вагою \bar{G} підвішеного до пружини вантажу, позначимо через $\lambda_{ст}$. Із рис. 11.23 встановлюємо, що сила пружності $\bar{F}_{пр}$ пружини під час коливань вантажу

$$F_{пр} = -c(\lambda_{ст} + x - x_n). \quad (11.87)$$

Звертаємо увагу на те, що початок відліку координати повзуна x_n куліси суміщається з його середнім положенням, коли під час обертання кривошип займає горизонтальні положення. В цьому разі маємо таку залежність координати повзуна від часу:

$$x_n = r \cos \omega t. \quad (11.88)$$

Початок відліку координати x вантажу $O(x = 0)$ суміщений із його положенням статичної рівноваги.

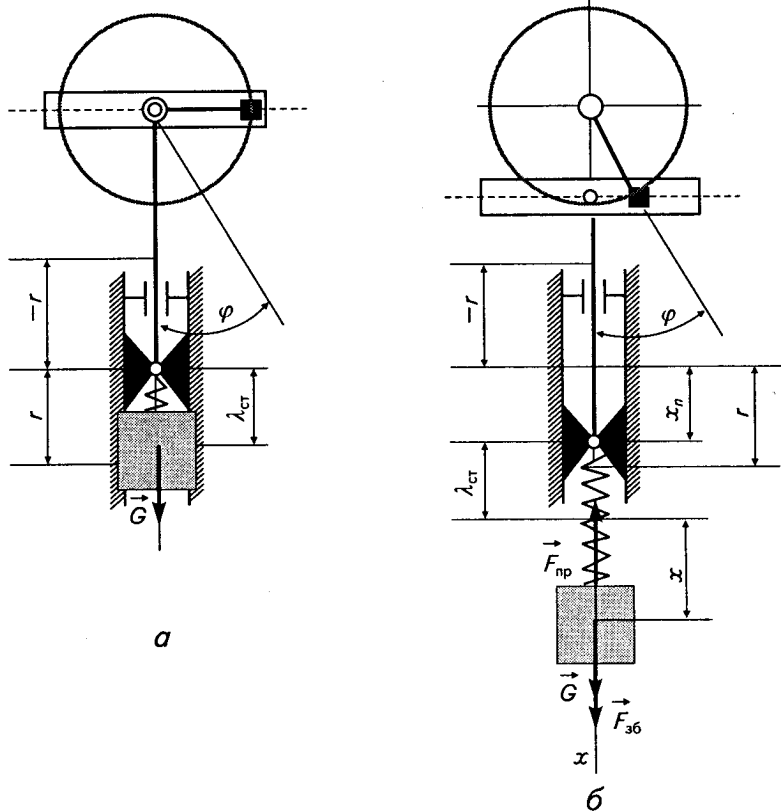


Рис. 11.23

Диференціальне рівняння вимушених коливань вантажу механізму з кулісою Вольфа виводитимемо так само, як рівняння (11.85). Маємо

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = G - F_{np},$$

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = G - c(\lambda_{cr} + x - x_n),$$

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = -cx + cx_n.$$

Щоб прийти до остаточної форми шуканого диференціального рівняння, спочатку треба в останню рівність підставити (11.88):

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = -cx + cr \cos \omega t,$$

$$\ddot{x} + \frac{gc}{G} x = \frac{gcr}{G} \cos \omega t.$$

Далі, ввівши позначення

$$k^2 = \frac{gc}{G}, \quad \bar{F}_0 = \frac{gcr}{G}, \quad (11.89)$$

дістаємо

$$\ddot{x} + k^2 x = \bar{F}_0 \cos \omega t. \quad (11.90)$$

Це диференціальне рівняння вимушених коливань вантажу в механізмі куліси Вольфа без урахування опору й тертя.

Рівняння (11.85) і (11.90), маючи однакову форму, різняться між собою тим, що в першому збудувальна сила безпосередньо передається до вантажу з пружним елементом, а в другому — через кінематичний зв'язок (кінематичне збурення верхнього кінця пружини) до пружини й від неї до вантажу. Дія на вантаж пружної сили

$$F_{\text{пр.кін}} = cr \cos \omega t$$

зумовлена кінематичним збуренням.

Знайдемо розв'язок рівняння (11.85), дослідимо його й зробимо висновки. З теорії диференціальних рівнянь відомо, що у випадку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами його загальний розв'язок будується з якого-небудь частинного розв'язку рівняння й загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

Спочатку шукаємо частинний розв'язок рівняння (11.85) у формі його правої частини, тобто візьмемо

$$x_{\text{ч}} = A \cos \omega t.$$

Знайдемо другу похідну від цієї рівності й результат підставимо в (11.85) замість \ddot{x} , а також підставимо вираз для $x_{\text{ч}}$:

$$x_{\text{ч}} = \frac{d(dx_{\text{ч}}/dt)}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega A \sin \omega t) = -\omega^2 A \cos \omega t,$$

$$-\omega^2 A \cos \omega t + k^2 A \cos \omega t = F_0 \cos \omega t.$$

Скоротивши на спільний множник, дістаємо алгебричне рівняння відносно A :

$$-\omega^2 A + k^2 A = F_0,$$

звідки

$$A = \frac{F_0}{k^2} \frac{1}{1 - \omega^2/k^2}. \quad (11.91)$$

Це амплітуда вимушених коливань системи. Підставимо в частинний розв'язок і дістанемо першу складову розв'язку рівняння (11.85):

$$x_{\text{ч}} = \frac{F_0}{k^2} \frac{1}{1 - \omega^2/k^2} \cos \omega t. \quad (11.92)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

має вигляд

$$x_{\text{зар}} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Взявши суму цього загального розв'язку однорідного рівняння й частинного розв'язку рівняння з правою частиною, матимемо загальний розв'язок рівняння вимушених коливань:

$$x = x_{\text{ч}} + x_{\text{зар}} = \frac{F_0}{k^2} \frac{1}{1 - \omega^2/k^2} \cos \omega t + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 , C_2 задамо початкові умови руху. Нехай ці умови ненульові, тобто при $t - t_0 = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$. Щоб мати систему двох рівнянь для визначення C_1 , C_2 , диференціюємо за часом загальний розв'язок:

$$\dot{x}_{\text{зар}} = -\frac{\omega F_0}{k^2} \frac{1}{1 - \omega^2/k^2} \sin \omega t - C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Підставивши початкові дані руху в два останні рівняння, дістанемо систему двох алгебричних рівнянь із двома невідомими:

$$x_0 = \frac{F_0}{k^2} \frac{1}{1 - \omega^2/k^2} + C_1,$$

$$\dot{x}_0 = C_2 k,$$

звідки визначимо шукані невідомі:

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k^2} \frac{1}{1 - \omega^2/k^2},$$

$$C_2 = \dot{x}_0/k.$$

Урахувавши в загальному розв'язкові ці величини, прийдемо до частинного розв'язку рівняння вимушених коливань:

$$x = \frac{F_0}{k^2} \frac{1}{1 - \omega^2/k^2} \cos \omega t + \left(x_0 - \frac{F_0}{k^2} \frac{1}{1 - \omega^2/k^2} \right) k \cos kt + \dot{x}_0 \sin kt. \quad (11.93)$$

Отже, робимо висновок, що вимушені коливання є результатом накладання двох коливальних гармонічних рухів: вільних коливань із власною частотою k , амплітуда яких залежить від початкових умов, і коливань із частотою збудовувальної сили, амплітуда яких не залежить від початкових умов і визначається відношенням частоти збудовувальної сили до частоти власних коливань.

Графіки вимушених гармонічних коливань із частотою ω , власних коливань із частотою k і результат їх додавання наведено на рис. 11.24, а, б, в відповідно. Надалі власними коливаннями знехту-

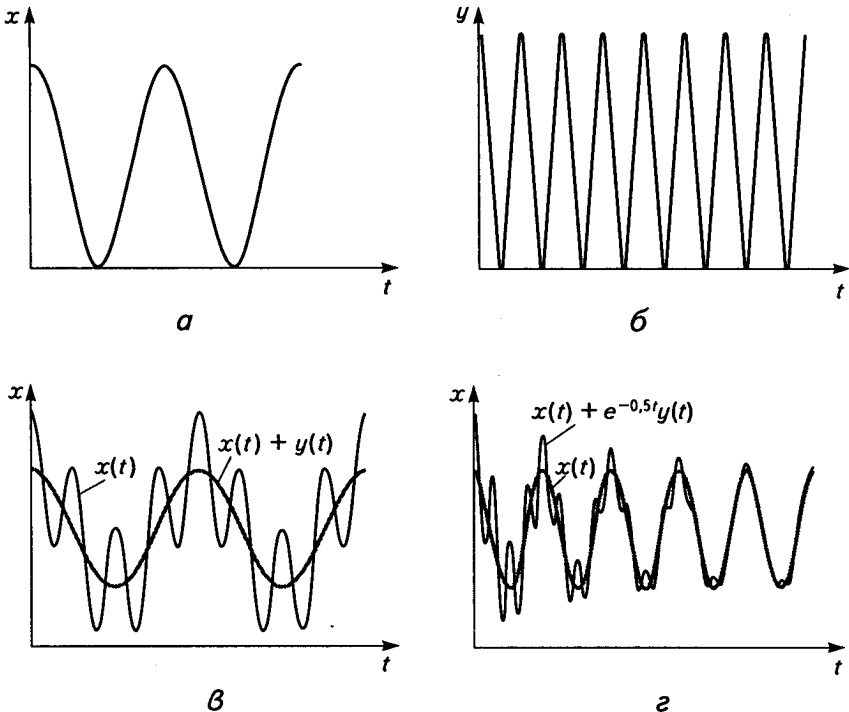


Рис. 11.24

емо, оскільки вони швидко згасають унаслідок тертя в системі (рис. 11.24, з). Розглянемо вимушені коливання, які становлять практичний інтерес.

Будемо досліджувати рівняння (11.93) без власної складової

$$x = \frac{F_0}{k^2} \frac{1}{1 - \omega^2/k^2} \cos \omega t. \quad (11.94)$$

Це рівняння вимушених коливань під дією гармонічної збудувальної сили. Їхня частота визначається частотою збудувальної сили, а амплітуда залежить від співвідношення між частотою збудувальної сили й частотою власних коливань системи.

У рівнянні (11.94) окремо розглянемо множники

$$x_{\text{ст}}(t) = \frac{F_0}{k^2} \cos \omega t, \quad (11.95)$$

що становить осадку пружини внаслідок статичної дії сили F_0 , та

$$b = \frac{1}{1 - \omega^2/k^2}, \quad (11.96)$$

абсолютне значення якого називається коефіцієнтом динамічності коливальної системи,

$$b_{\text{дин}} = \left| \frac{1}{1 - \omega^2/k^2} \right|. \quad (11.97)$$

Із рівняння (11.94) робимо висновок, що динамічний вплив збудувальної сили на систему визначається множником b , який, очевидно, залежить лише від відношення ω/k (рис. 11.25), тобто відношення частоти збудувальної сили $\nu_{\text{зб}} = \frac{\omega}{2\pi}$ до частоти власних коливань

системи $\nu = \frac{k}{2\pi}$.

Амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{F_0}{k^2} \frac{1}{1 - \omega^2/k^2} = \frac{F_0}{k^2} b_{\text{дин}}$$

прямо пропорційна коефіцієнту динамічності.

Графік рис. 11.25 показує, що коли частота ω збудувальної сили мала порівняно з власною частотою k системи, коефіцієнт динамічності майже не відрізняється від одиниці ($b_{\text{дин}} \approx 1$). Отже, за таких умов амплітуда вимушених коливань системи дорівнюватиме амплі-

літуді збурювальної сили. У випадку вимушених коливань електро-
двигуна на пружинах

$$A = \frac{F_0}{k^2} b_{\text{дин}} = \frac{F_0}{k^2} = \frac{gm\omega^2 r/G}{cg/G} = \frac{m\omega^2 r}{c},$$

а за коливань вантажу в кулісі Вольфа

$$A = \frac{\bar{F}_0}{k^2} b_{\text{дин}} = \frac{\bar{F}_0}{k^2} = \frac{gcr/G}{cg/G} = r.$$

Отже, при $b_{\text{дин}} \approx 1$ коливне тіло здійснює такий рух, як у разі при-
кладання до нього лише однієї збурювальної сили

$$F = m\omega^2 r \cos \omega t$$

за початкових даних руху

$$x_{t=0} = r, \quad \dot{x}_{t=0} = 0$$

або

$$F = cr \cos \omega t$$

при

$$x_{t=0} = r, \quad \dot{x}_{t=0} = 0.$$

Даний висновок має велике практичне значення. Переконаємося в цьому на прикладах.

Схему такого датчика тиску в циліндрах поршневих двигунів наведено на рис. 11.26. Тіло, яке має здійснювати вимушені коливання, становить легкий поршень 1 зі штоком і з досить жорсткою гвинтовою пружиною 2. Гвинтова пружина одним своїм кінцем прикріплена до поршня, а іншим — до циліндра, в якому рухається поршень. Простір між днищем поршня та стінками циліндра трубою сполучається з поршнем двигуна, в якому потрібно визначити тиск його робочого тіла (газу). До штока поршня датчика тиску приєдну-

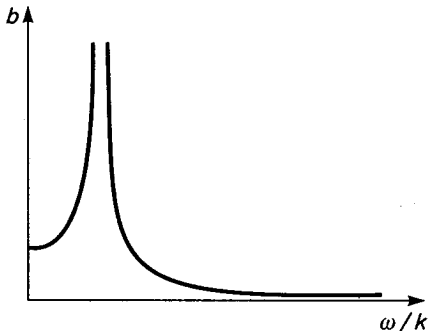


Рис. 11.25

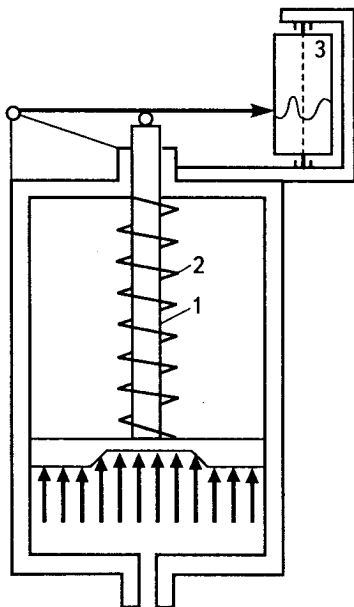


Рис. 11.26

ється записувальний пристрій 3, який реєструє коливання тиску робочого тіла в двигуні під час його роботи.

Легкий поршень зі штоком і пружиною з достатнім коефіцієнтом пружності дають мале відношення ω/k і коефіцієнт динамічності, який приблизно дорівнює одиниці ($b_{\text{дин}} \approx 1$), що забезпечує визначення з невеликою похибкою тиску робочого тіла в поршневих двигунах.

Тепер розглянемо великі відношення ω/k , які за певної частоти ω збурювальної сили можуть бути в разі достатньо великої маси (інерції) коливного тіла й малої жорсткості пружини. При цьому коефіцієнт динамічності близький до нуля ($b_{\text{дин}} \approx 0$), а отже, й амплітуда вимушених коливань тіла буде приблизно нульовою, тобто коливне тіло в абсолютному просторі зупиниться й не коливатиметься. Ця властивість використовується на практиці для побудови вібрографів (сейсмографів) — приладів, що реєструють коливання систем.

Схему вібрографа для запису інтенсивності коливань турбін, генераторів тощо подано на рис. 11.27. Віброграф складається з рамки 1,

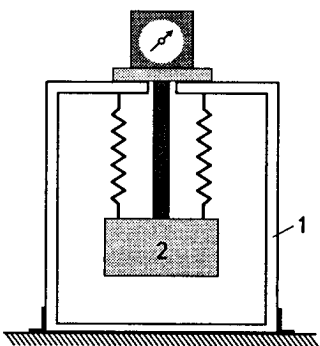


Рис. 11.27

до якої на м'якій пружині підвішено важке тіло, та реєстратора 2 вібрацій системи. Віброграф працює так. Реєстратор 2, який розташований безпосередньо на приєднаній до досліджуваної системи рамці вібратора, завдяки коливанням тіла на пружині відносно рамки (тіло нерухоме в абсолютному просторі) з достатньою точністю реєструє вібрації системи 1.

Тут звернемо увагу на накладання системи двох коливань тіла: відносних щодо рамки вібратора й переносних разом із рамкою та системою, що вібрує. Оскільки

результуючі коливання тіла майже припиняються, абсолютні значення параметрів цих складових коливань однакові.

Зазначимо, що вібрографом можна вимірювати як вертикальні, так і горизонтальні коливання системи.

Таким чином, ми з'ясували, що збурювальна сила великої частоти практично не спричинює коливань системи з малою власною частотою. На цьому ґрунтується застосування різних конструкцій ресор, наприклад в автомобілях, пружних опорах для приладів, які треба ізолювати від зовнішніх вібрацій, тощо.

Уявимо лабораторію як масивну платформу 1 з приладами 2, підвішену до будівлі за допомогою м'яких пружин 3 (рис. 11.28). Відо-

мо, що більшість будівель мають жорстку конструкцію, а отже, й великі власні частоти. Коли вулицями рухаються важкі вантажівки, будівлі вібрують. Навіть якщо ці вібрації будуть настільки інтенсивними, що будівля прийде в резонанс, то завдяки низькій частоті власних коливань платформи з приладами вона не реагуватиме на сторонні коливання.

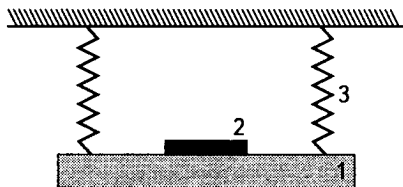


Рис. 11.28

Ми розглянули важливі випадки застосування в техніці двох із трьох характерних областей графіка динамічного коефіцієнта (див. рис. 11.25): область великих частот власних коливань $k = 2\pi\nu$ механічної системи за великої її жорсткості c і малої маси m $\left(\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} \right)$

та малої частоти $\omega = 2\pi\nu$, збурювальної сили; область малих частот власних коливань механічної системи за малої її жорсткості та великої маси. Третьою областю даного графіка є вузький інтервал зміни відношення k/ω . Ця область характеризує коливну систему поблизу резонансу й у момент резонансу, тобто коли частоти k і ω близькі за своїми значеннями або дорівнюють одна одній.

Графік показує, що коефіцієнт динамічності, який відповідає області резонансу, досягає великих значень, а в разі збігу частот за умови нехтування тертям у системі, що вібрує (ідеальний випадок), — нескінченності. В реальних коливних системах завжди є тертя, тому коефіцієнт динамічності має скінченне значення. Явище резонансу, яке характеризується різким зростанням відхилень коливної системи від положення стійкої рівноваги, відіграє надзвичайно важливу роль у техніці.

На властивостях резонансу побудовані тахометри — прилади для визначення частоти тіл, що здійснюють коливання. Схему тахометра Фрама наведено на рис. 11.29. Сталеві балочки (пластинки) однакової довжини своїми нижніми кінцями нерухомо защемлені на жорсткій рамі, а на їхніх верхніх кінцях містяться кульки різних мас. Власні частоти

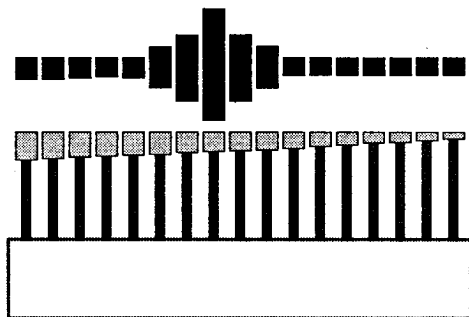


Рис. 11.29

пластинок, які знаходяться в певному діапазоні, заздалегідь відомі. Для визначення частоти коливного тіла на нього рамою кладуть тахометр. Якщо частота тіла, яка лежить у діапазоні власних частот приладу, збігається з власною частотою однієї з пластинок, відбувається резонанс, за якого пластинка, що зрезонувала, коливається інтенсивніше, ніж решта. Знаючи власну частоту пластинки за резонансу, визначають частоту досліджуваного тіла.

Явища резонансу в коливних механічних системах можуть мати негативні наслідки (руйнування мостів, літаків тощо). Іноді необхідно визначати власні частоти якихось споруд, аби запобігти виникненню резонансу під час їх експлуатації. Для цього застосовують вібратори, що являють собою два розбалансовані ротори з паралельними осями обертання, змонтовані на рамі (рис. 11.30). Під час роботи вібратора його ротори обертаються від електропривода з однаковою частотою в протилежних напрямках. При цьому частоту обертання можна змінювати в досить широких межах.

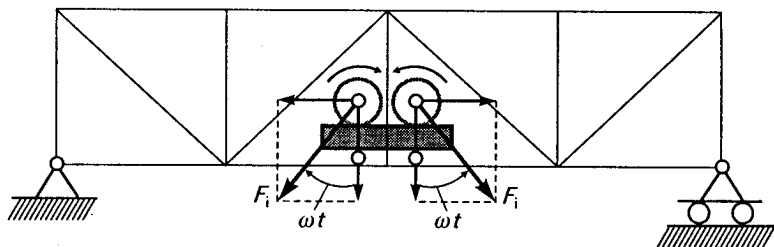


Рис. 11.30

Унаслідок деякого зміщення центрів мас роторів відносно осі обертання вектори інерційних відцентрових сил ексцентричних мас роторів обертаються разом із ними в протилежних напрямках. У кожний момент часу горизонтальні складові цих сил компенсуються, а змінні вертикальні — подвоюються, що, таким чином, спричиняє вертикальні вібрації споруди: як тільки частота вібратора збіжиться з власною частотою споруди, відбудеться резонанс коливної системи.

Знаючи частоту обертання вібратора, можна визначити шукану власну частоту споруди. Звернемо увагу на те, що застосуванням невеликого вібратора за резонансу можна досягти таких інтенсивних вібрацій споруди, внаслідок яких вона може зруйнуватися. За допомогою вібраторів руйнують споруди, які треба знести, доводячи їх до резонансу, або досліджують власні частоти натурних моделей тих чи інших споруд.

11.7

Статичне й динамічне зрівноважування оберткових тіл. Балансувальні машини

Зрівноважування оберткових тіл пов'язане не із силовим впливом на них, а зі створенням умов такого розподілу маси оберткового тіла відносно осі обертання, за якого тіло не тиснутиме на опори (підшипники), якщо йому, наприклад, поштовхом надати обертального руху. Ці умови розподілу маси тіла відносно його осі обертання відомі з принципу Д'Аламбера в обертальному русі (див. п. 10.3): вісь обертання тіла має бути його головною центральною віссю інерції. В такому разі, хоч би яка система сил діяла на обертове тіло, воно, перебуваючи або в рівномірному, або в прискореному обертальному русі, тиснутиме на опорні підшипники вала лише статично — динамічних складових сил тиску, які у випадку незрівноваженості тіла залежать від кутової швидкості й кутового прискорення, немає [див. (10.87)].

Рівняння (10.84) показують, що обертове тіло має деяку незрівноваженість маси, якщо положення його центра мас $C(x_C, y_C)$ не збігається з віссю обертання Oz і відцентрові моменти інерції J_{xz}, J_{yz} відносно пар декартових осей Ox, Oz і Oy, Oz , однією з яких є вісь обертання тіла Oz , не дорівнюють нулю. В цьому випадкові незрівноваженості обертової маси виникають реакції опор, прямокутні складові яких R_{Ox}, R_{Oy} і R_{Ax}, R_{Ay} в напрямках декартових осей періодично змінюються й можуть досягати великих значень, перевищуючи статичні реакції в багато разів залежно від кутової швидкості й кутового прискорення тіла в обертальному русі. Сили тиску вала оберткового тіла на опори, в яких закріплені опорні підшипники, спричиняють вимушені коливання корпусу, й за збігу частоти збурювальної сили з частотою власних коливань корпусу машини призводять до резонансу, що є дуже небезпечним у механічних процесах.

Теоретично, щоб запобігти виникненню додаткових реакцій опор, зумовлених незрівноваженістю обертової маси, потрібно вісь обертання тіла зробити його головною центральною віссю інерції, тобто досягти стану, коли центр мас тіла знаходиться на осі обертання й, крім того, два відцентрових моменти інерції J_{xz}, J_{yz} дорівнюють нулю. Під час конструювання й виготовлення оберткових тіл передбачається збіг осі обертання тіла з його головною центральною віссю інерції, що само собою мало б зняти проблему зрівноважування. Однак практично обертові тіла машин і механізмів завжди мають деяку незрівноваженість маси, оскільки в процесі їх виготовлення зазвичай допускаються технологічні неточності, пов'язані з незначним

зміщенням центра мас тіла відносно осі обертання, а також із неоднорідністю матеріалу. В такому разі для усунення незрівноваженості застосовують спеціальні балансувальні машини.

□ **Статичне зрівноважування.** Як уже зазначалось, обертове тіло повністю зрівноважене, якщо його віссю обертання є головна центральна вісь інерції. Для статичної зрівноваженості незалежно від того, є вісь обертання тіла головною віссю інерції чи ні, центр мас тіла має знаходитися на осі обертання тіла. Якщо обертове тіло статично зрівноважене і його вісь обертання не є головною центральною віссю інерції, то динамічні рівняння обертального руху тіла у формі Д'Аламбера мають вигляд (10.86):

$$R_{a.zx} + R_{p.v.zx} = 0,$$

$$R_{a.zy} + R_{p.v.zy} = 0,$$

$$R_{a.zz} + R_{p.v.zz} = 0;$$

$$M_{a.zx} + M_{p.v.zx} - \sin \varphi (J_{\zeta\zeta} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \cos \varphi (J_{\zeta\zeta} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2) = 0, \quad (11.98)$$

$$M_{a.zy} + M_{p.v.zy} + \cos \varphi (J_{\zeta\zeta} \omega^2 + J_{\zeta\eta} \varepsilon) + \sin \varphi (J_{\zeta\zeta} \varepsilon - J_{\zeta\eta} \omega^2) = 0,$$

$$M_{a.zz} + M_{p.v.zz} - J_z \varepsilon = 0.$$

Дані рівняння показують, що зрівноваженість обертової маси неповна. Динамічне зрівноваження відсутнє, оскільки в четвертому й п'ятому рівняннях моментів зовнішніх сил відносно декартових осей містяться члени, що зумовлені відцентровими моментами інерції обертального тіла, які характеризують його динамічну незрівноваженість на осі обертання.

Якщо тіло тільки статично незрівноважене на осі обертання, то рівняння динаміки його обертального руху у формі Д'Аламбера (10.85) записуються так:

$$R_{a.zx} + R_{p.v.zx} + M [\sin \varphi (\varepsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C) + \cos \varphi (\varepsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C)] = 0,$$

$$R_{a.zy} + R_{p.v.zy} + M [\sin \varphi (\varepsilon \eta_C + \omega^2 \xi_C) - \cos \varphi (\varepsilon \xi_C - \omega^2 \eta_C)] = 0,$$

$$R_{a.zz} + R_{p.v.zz} = 0;$$

$$M_{a.zx} + M_{p.v.zx} = 0, \quad (11.99)$$

$$M_{a.zy} + M_{p.v.zy} = 0,$$

$$M_{a.zz} + M_{p.v.zz} - J_z \varepsilon = 0.$$

Статичну незрівноваженість обертального тіла можна виявити дослідним шляхом, поклавши його кінцями вала на горизонтальні

напрявні. Через деякий ексцентриситет центра мас тіла під дією його власної ваги почнеться кочення по напрямних, яке відбуватиметься доти, доки центр мас не займе найнижче можливе положення. За статичної зрівноваженості обертове тіло на горизонтальних напрямних перебуватиме в байдужій рівновазі.

Щоб пояснити статичну незрівноваженість обертового тіла, розглянемо модельну задачу. Нехай маємо горизонтальну вісь обертання, до якої на відстані r від осі за допомогою невагомogo стержня жорстко прикріплено важку точку масою m (рис. 11.31). Під дією власної ваги точки здійснюватиметься прискорений обертальний рух системи з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ϵ .

Оскільки вісь обертання Oz у нашому випадкові обертального руху системи є головною віссю інерції для точки O , тобто виконується умова

$$J_{xz} = mxz = 0, \quad J_{yz} = myz = 0,$$

то для дослідження впливу статичної незрівноваженості на реакції опор треба розглянути рівняння динамічної зрівноваженості (11.98), які згідно з рис. 11.31 набирають вигляду

$$\begin{aligned} R_{Ox} + mr(-\sin \varphi \epsilon + \cos \varphi \omega^2) &= 0, \\ -mg + R_{Oy} + mr(\sin \varphi \omega^2 + \cos \varphi \epsilon) &= 0, \\ -g \cos \varphi + r \epsilon &= 0. \end{aligned}$$

З останнього рівняння визначимо кутову швидкість і кутове прискорення залежно від кута повороту системи:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{g}{r} \cos \varphi, \\ \omega^2 &= 2 \frac{g}{r} (1 - \sin \varphi). \end{aligned}$$

Підставимо ці величини в перші два рівняння й виконаємо перетворення:

$$R_{Ox} + mr \left[-\sin \varphi \frac{g}{r} \cos \varphi + \cos \varphi \cdot 2 \frac{g}{r} (1 - \sin \varphi) \right] =$$

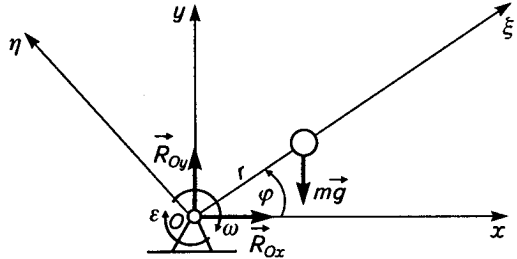


Рис. 11.31

$$\begin{aligned}
 &= R_{Ox} + 2mg \left(\cos \varphi - \frac{3}{4} \sin 2\varphi \right) = 0, \\
 -mg + R_{Oy} + mr \left[\sin \varphi \cdot 2 \frac{g}{r} (1 - \sin \varphi) + \cos \varphi \frac{g}{r} \cos \varphi \right] = \\
 &R_{Oy} + mg(2 - 3 \sin \varphi) \sin \varphi = 0.
 \end{aligned}$$

Остаточно дістаємо вирази для реакцій у випадку статичної незрівноваженості обертової маси:

$$R_{Ox} = 2mg \left(\frac{3}{4} \sin 2\varphi - \cos \varphi \right),$$

$$R_{Oy} = mg(3 \sin \varphi - 2) \sin \varphi.$$

При $\varphi = -\pi/2$

$$R_{Ox} = 0, \quad R_{Oy} = 5mg.$$

Якщо б маса m перебувала в найнижчому положенні (рис. 11.31) в рівновазі, то йому відповідала б статична реакція $R_{Oy} = mg$.

У даній модельній задачі маса m знаходиться на відстані r від горизонтальної осі обертання з координатами $\xi = r, \eta = 0$. Щоб статично зрівноважити нашу систему, треба приєднати до неї додаткову масу m_1 і розташувати в такій точці з координатами ξ_1, η_1 , щоб виконувалась умова

$$\xi_c = \frac{mr + m_1 \xi_1}{m + m_1} = 0, \quad \eta_c = \frac{m_1 \eta_1}{m + m_1} = 0. \quad (11.100)$$

Звідси дістаємо

$$\eta_1 = 0, \quad \xi_1 = -\frac{m}{m_1} r. \quad (11.101)$$

Співвідношення (11.100), (11.101) показують: щоб усунути статичну незрівноваженість (рис. 11.32), треба з протилежного відносно осі обертання Oz боку радіуса r розмістити масу m_1 на відстані ξ_1 . Для статичної зрівноваженості можна використати інший варіант: згідно з першою рівністю (11.100) спочатку вибрати ξ_1 , а потім за формулою

$$m_1 = -\frac{m}{\xi_1} r$$

визначити зрівноважувальну масу m_1 .

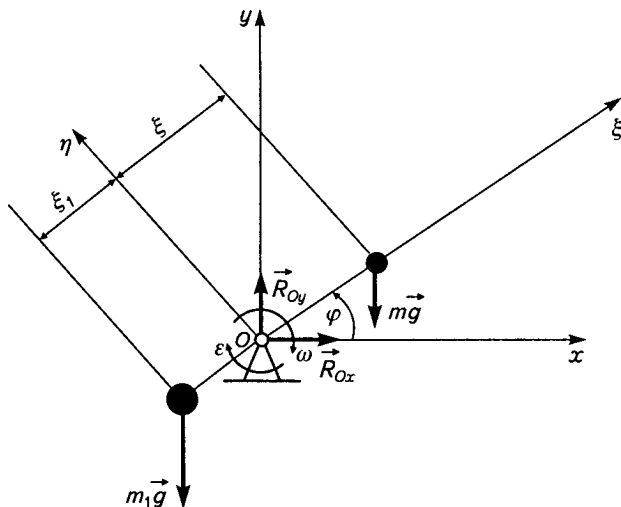


Рис. 11.32

Після статичного зрівноважування обертової маси m рівняння (11.99) наберуть вигляду

$$R_{p.v.z.y} - g(m + m_1) = 0,$$

$$M_{a.z} - \left(mr^2 + m_1 \left(\frac{m}{m_1} r \right)^2 \right) \varepsilon = 0.$$

Тут

$$M_{a.z} = -mg \xi \cos \varphi + m_1 g \xi_1 \cos \varphi = -gmr \cos \varphi + gmr \cos \varphi = 0.$$

Отже, при $\varepsilon = 0$ маємо рівномірний обертальний рух або стан спокою. В цьому випадкові сила тиску обох статично зрівноважених мас m і m_1 на підшипники осі становитиме

$$Q = R_{Oy} = g(m + m_1).$$

Завершуючи дослідження модельної задачі на статичну зрівноваженість, зазначимо, що внаслідок введення додаткової маси m_1 згідно з формулою (11.101) для забезпечення умови статичної зрівноваженості динамічна зрівноваженість нової обертової системи не порушилась, оскільки вісь Oz і для системи з двох мас m , m_1 править за вісь матеріальної симетрії.

Отже, статична незрівноваженість встановлюється дослідним шляхом при коченні жорсткої обертової системи кінцями її вала по горизонтальних напрямних, яке врешті припиняється за досягнення

стійкої рівноваги системи. Динамічно-статична незрівноваженість жорсткої обертової системи внаслідок ексцентриситету її центра мас відносно осі вала проявляється в обертальному русі у виникненні додаткових складових реакцій опор її вала — динамічних добавок до статичних реакцій.

□ **Динамічне зрівноважування.** Як зазначалося, за динамічної незрівноваженості жорсткої обертової системи два відцентрових моменти інерції, у вирази яких входить координата по декартовій осі, яка збігається з віссю обертання системи, не дорівнюють нулю ($J_{\xi\xi} \neq 0, J_{\eta\xi} \neq 0$), а центр мас системи знаходиться на осі обертання ($\xi_c = 0, \eta_c = 0$). У такому разі вісь обертання $O\xi$ системи не є її головною віссю інерції для точки осі обертання, що збігається з початком системи осей $O\xi\eta\xi$ (нагадаємо, що система осей $O\xi\eta\xi$ незмінно зв'язана з обертовим тілом), і реакції опор вала обертового тіла (системи) визначаються з динамічних рівнянь у формі Д'Аламбера (11.98).

Нехай маємо таку модельну задачу, в якій розглядається жорстка обертова система з двох однакових точкових мас $m_1 = m_2 = m$, розташованих у площині $O\xi\xi$ на однакових відстанях r від осі $O\xi$ з протилежних її боків ($\xi_1 = r, \xi_2 = -r$) і на різних відстанях ζ_1, ζ_2 від площини $O\xi\eta$ відповідно (рис. 11.33, а).

У цьому випадкові маємо статичну зрівноваженість обертових мас, оскільки на підставі

$$\xi_c = \frac{m\xi_1 - m\xi_2}{2m} = \frac{mr - mr}{2m} = 0,$$

$$\eta_c = 0,$$

$$\zeta_c = \frac{m\xi_1 + m\xi_2}{2m}$$

їхній центр мас C знаходиться на осі обертання.

Аби показати, що жорстка обертова система двох мас динамічно незрівноважена, визначимо її відцентрові моменти інерції $J_{\xi\xi}, J_{\eta\xi}$:

$$J_{\xi\xi} = \sum_{k=1}^n m_k \xi_k \zeta_k = m\xi_1 \zeta_1 - m\xi_2 \zeta_2 = mr \zeta_1 - mr \zeta_2 = mr(\zeta_1 - \zeta_2),$$

$$J_{\eta\xi} = \sum_{k=1}^n m_k \eta_k \zeta_k = 0.$$

Отже, дістали, що вісь обертання $O\xi$ (Oz) не є головною віссю обертання. Рівняння (11.98) динаміки обертального руху у формі Д'Аламбера в нашому випадкові матимуть вигляд

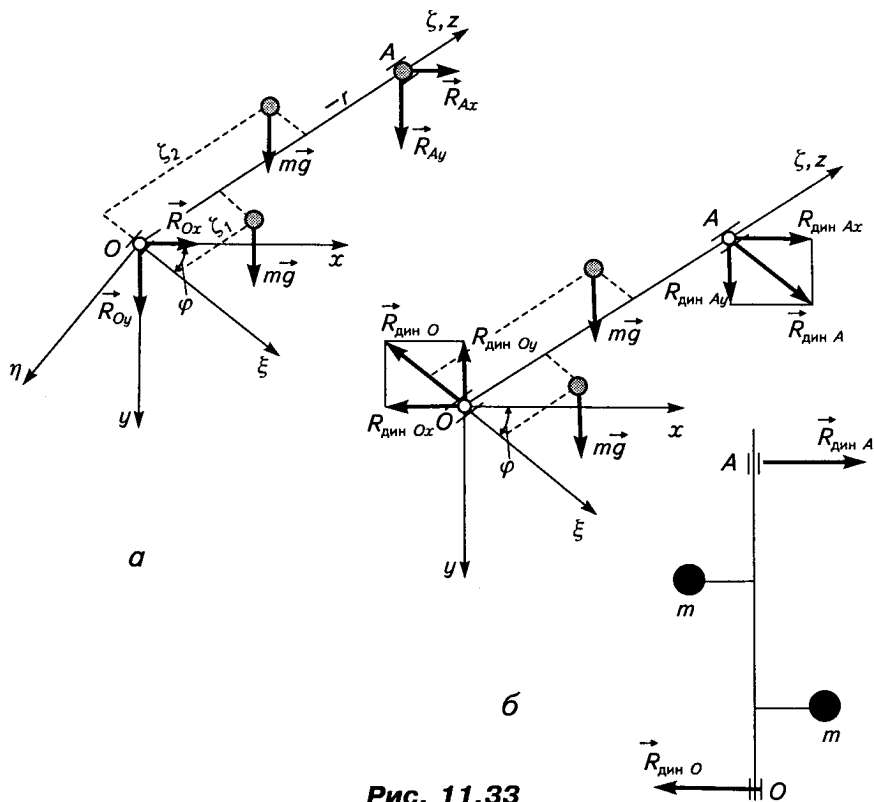


Рис. 11.33

$$\begin{aligned}
 R_{Ax} + R_{Ox} &= 0, \\
 R_{Ay} + R_{Oy} + 2mg &= 0, \\
 -mg\zeta_1 - mg\zeta_2 - R_{Ay}OA - \sin\varphi J_{\xi\xi}\omega^2 + \cos\varphi \frac{d\omega}{dt} J_{\xi\xi} &= 0, \\
 R_{Ax}OA + \cos\varphi J_{\xi\xi}\omega^2 + \sin\varphi \frac{d\omega}{dt} J_{\xi\xi} &= 0, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= 0.
 \end{aligned}$$

У третє й четверте рівняння цієї системи підставимо значення величин $J_{\xi\xi}$, $J_{\eta\xi}$ і виразимо в ній прямокутні складові реакцій вала обертової системи двох точкових мас через кутову швидкість ω , урахувавши, що $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned}
R_{Ax} &= \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{OA} mr \omega^2 \cos \varphi, \\
R_{Ox} &= -\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{OA} mr \omega^2 \cos \varphi, \\
R_{Ay} &= mg \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{OA} m \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{OA} \omega^2 r \sin \varphi, \\
R_{Oy} &= -2mg - mg \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{OA} - m \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{OA} \omega^2 r \sin \varphi, \\
\omega &= \text{const.}
\end{aligned}
\tag{11.102}$$

Бачимо, що прямокутні складові реакцій опорних точок O і A вала обертової системи двох точкових мас $\bar{R}_{Ax} = \bar{R}_{\text{дин } Ax}$ і $\bar{R}_{Ox} = \bar{R}_{\text{дин } Ox}$, перпендикулярні до сил ваги важких мас, не мають членів, незалежних від кутової швидкості вала; ці сили зумовлені тільки обертанням системи й є суто динамічними реакціями. Дві інші вертикальні складові реакцій \bar{R}_{Ay} і \bar{R}_{Oy} містять члени

$$R_{\text{ст } Ay} = -mg \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{OA}, \quad R_{\text{ст } Oy} = -2mg + mg \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{OA},$$

які зумовлені статичною дією сил ваги точкових мас і називаються статичними реакціями опорних точок осі вала обертової системи.

У повних складових реакціях \bar{R}_{Ay} , \bar{R}_{Oy} виокремимо динамічні доданки до статичних складових $R_{\text{ст } Ay}$, $R_{\text{ст } Oy}$:

$$R_{\text{дин } Ay} = +m \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{OA} \omega^2 r \sin \varphi, \quad R_{\text{дин } Oy} = -m \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{OA} \omega^2 r \sin \varphi.$$

Аналізуючи добуті результати, приходимо до висновку, що під час рівномірного обертання жорсткої системи двох точкових мас навколо горизонтальної осі в її опорних точках діють по вертикалі вгору рівнодійна статична реакція

$$R = -2mg,$$

статична пара сил $(\bar{R}_{\text{ст } Ay}, -\bar{R}_{\text{ст } Ay})$ із вектором-моментом $\bar{M}_{\text{ст}}$, модуль якої

$$M_{\text{ст}} = \bar{R}_{\text{ст } Ay} OA = mg |(\zeta_1 - \zeta_2)|,$$

а також динамічна пара сил $(\bar{R}_{\text{дин } A}, -\bar{R}_{\text{дин } A})$ із вектором-моментом $\bar{M}_{\text{дин}}$, модуль якої

$$M_{\text{дин}} = |R_{\text{дин } A}| OA = \sqrt{2} m |(\zeta_1 - \zeta_2)| \omega^2 r.$$

Тут

$$R_{\text{дин } A} = \sqrt{\left(mg \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{OA}\right)^2 r^2 \omega^4 \sin^2 \varphi + \left(mg \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{OA}\right) r^2 \omega^4 \cos^2 \varphi} = \\ = \sqrt{2} mg \frac{|\zeta_1 - \zeta_2|}{OA} r \omega^2.$$

Зазначимо, що в даній модельній задачі про рівномірне обертання двох точкових мас має місце динамічна незрівноваженість, за якої в точках O і A циліндричних підшипників осі обертової системи в площині $O\xi\xi$ на вал діють динамічні реакції однакового модуля й протилежного напрямку, які утворюють пару сил (рис. 11.33, б). При цьому прямокутні складові цих реакцій у напрямках нерухомих осей змінюються з часом періодично з періодом обертання вала.

Отже, за законом дії та протидії на нерухоме тіло, в якому закріплені підшипники, з боку обертової системи в місцях розташування підшипників діятимуть змінні сили тиску, які спричинять вимушені коливання. За збігу частоти збудовальної сили, якою є змінний динамічний тиск, з частотою власних коливань основи (корпусу машини) виникає явище резонансу, що може супроводжуватися небезпечними для роботи машини значними вібраціями.

Покажемо, як за статичної зрівноваженості даних двох обертових мас можна усунути їхню динамічну незрівноваженість і, отже, уникнути дії додаткових сил тиску на опори під час обертання системи. Якщо обидва відцентрових моменти інерції $J_{\eta\zeta}$, $J_{\xi\xi}$ дорівнюватимуть нулю, то згідно з рівняннями (11.102) додаткових тисків, зумовлених обертанням, не буде.

Запишемо вираз для відцентрового моменту $J_{\xi\xi}$ в нашому випадкові:

$$J_{\xi\xi} = m_1 \xi_1 \zeta_1 + m_2 \xi_2 \zeta_2 = mr \zeta_1 - mr \zeta_2 = mr (\zeta_1 - \zeta_2).$$

Тепер з'ясуємо, чи можна створити такі умови підбором двох точкових мас m_3 , m_4 та їх певним розміщенням поблизу осі обертання, щоб вона була головною центральною віссю інерції. Спробуємо розмістити на площині $O\xi\xi$ дві задані точкові маси m_3 , m_4 у положеннях A_3 , A_4 з координатами ξ_3 , ξ_4 ; ζ_3 , ζ_4 відповідно. Тоді справедливі такі рівності:

$$J_{\xi\xi}^{\circ} = mr (\zeta_1 - \zeta_2) + m_3 \xi_3 \zeta_3 + m_4 \xi_4 \zeta_4 = 0, \\ J_C^{\circ} = \frac{mr - mr + m_3 \xi_3 + m_4 \xi_4}{2m + m_3 + m_4} = 0,$$

$$\xi_C^0 = \frac{m\zeta_1 + m\zeta_2 + m_3\zeta_3 + m_4\zeta_4}{2m + m_3 + m_4} = 0.$$

Звідси дістаємо

$$\begin{aligned} mr(\zeta_1 - \zeta_2) + m_3\xi_3\zeta_3 + m_4\xi_4\zeta_4 &= 0, \\ m_3\xi_3 + m_4\xi_4 &= 0, \\ m(\zeta_1 - \zeta_2) + m_3\zeta_3 + m_4\zeta_4 &= 0. \end{aligned} \quad (11.103)$$

Маємо систему трьох рівнянь із чотирма невідомими $\xi_3, \xi_4; \zeta_3, \zeta_4$. Якщо одну з невідомих взяти довільно, наприклад $\zeta_3 = h$, то одним із розв'язків цієї системи буде

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \frac{m_4mr(\zeta_2 - \zeta_1)}{[m(\zeta_1 + \zeta_2) + (m_3 + m_4)h]m_3}, \\ \xi_4 &= -\frac{mr(\zeta_2 - \zeta_1)}{m(\zeta_1 + \zeta_2) + (m_3 + m_4)h}, \\ \zeta_4 &= -\frac{m(\zeta_1 + \zeta_2) + m_3h}{m_4}. \end{aligned}$$

Отже, бачимо, що додаванням до жорсткої обертової системи двох точкових мас і розташуванням їх у відповідних місцях відносно осі обертання можна забезпечити динамічну й статичну зрівноваженість системи. Однак зазначимо, що задача на зрівноваженість обертової маси не має єдиного розв'язку. Спробуємо, наприклад, у нашій задачі зрівноважити дві маси такими самими двома масами, розташувачи їх у площині $O\xi\xi$ і задавши величину $h = \zeta_1$ (рис. 11.34, а).
Із рівнянь дістаємо розв'язок

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \frac{r(\zeta_2 - \zeta_1)}{3(\zeta_1 + \zeta_2)}, \\ \xi_4 &= -\frac{r(\zeta_2 - \zeta_1)}{3(\zeta_1 + \zeta_2)}, \\ \zeta_4 &= -2\zeta_1 - \zeta_2. \end{aligned}$$

Система рівнянь (11.103) є нелінійною відносно невідомих $\xi_3, \xi_4; \zeta_3, \zeta_4$ і допускає безліч розв'язків, один з яких уже розглянуто вище. Легко переконатися, що іншим, тривіальним, розв'язком її при $m_3 = m_4 = m$ буде (рис. 11.34, б)

$$\xi_3 = -r, \quad \xi_4 = r, \quad \zeta_3 = \zeta_1, \quad \zeta_4 = \zeta_2.$$

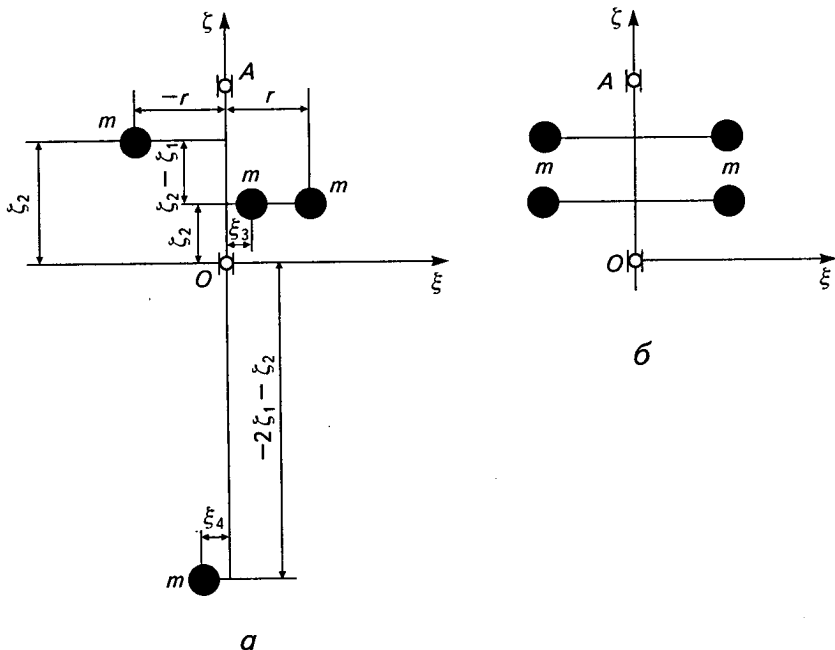


Рис. 11.34

Відсутність тиску системи чотирьох однакових зрівноважених мас на опори під час її обертання (див. рис. 11.33) пояснюється зрівноваженням двох інерційних пар сил Ньютона, які діють із боку точкових мас і через вал передаються на опори.

Загальнішим випадком незрівноваженості жорсткої обертової системи можуть бути дві різні точкові маси m_1 і m_2 , розміщені у взаємно перпендикулярних площинах $O\xi\xi$, $O\eta\xi$, перетином яких є вісь обертання системи $O\xi$, на відстанях r_1 і r_2 відповідно від осі обертання (рис. 11.35, а).

Легко показати, що будь-яка жорстка система точкових мас m_i° , $i = 1, 2, 3, \dots, N$ (рис. 11.35, б), розташованих на відстанях r_i° від осі $O\xi$, зводиться до двох точкових мас m_1 , m_2 , розташованих від осі $O\xi$ на відстанях

$$m_1 r_1 = \sum_{i=1}^N m_i^\circ \xi_i^\circ, \quad m_2 r_2 = \sum_{i=1}^N m_i^\circ \eta_i^\circ.$$

Покажемо також, що в розглядуваному загальному випадкові системи двох мас їхню статичну й динамічну незрівноваженість можна

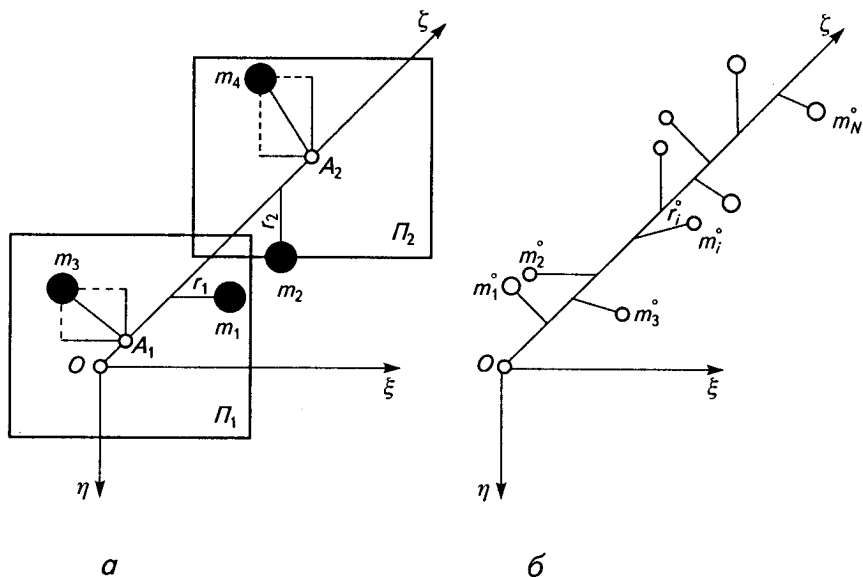


Рис. 11.35

усунути двома масами m_3, m_4 , розташованими в перпендикулярних до осі обертання площинах Π_3, Π_4 (так званих площинах корекції) відповідно, які перетинаються з віссю обертання $O\zeta$ у точках A_3, A_4 з координатами ζ_3, ζ_4 . Позначивши координати маси m_3 у площині Π_3 через ξ_3, η_3 , а маси m_4 у площині Π_4 — через ξ_4, η_4 , запишемо вирази координат центра мас системи й прирівняємо до нуля:

$$\xi_C = m_1 \xi_1 + m_3 \xi_3 + m_4 \xi_4 = 0,$$

$$\eta_C = m_1 \eta_1 + m_3 \eta_3 + m_4 \eta_4 = 0,$$

$$\zeta_C = m_1 \zeta_1 + m_2 \zeta_2 + m_3 \zeta_3 + m_4 \zeta_4;$$

$$J_{\xi\xi} = m_1 \xi_1 \zeta_1 + m_3 \xi_3 \zeta_3 + m_4 \xi_4 \zeta_4 = 0,$$

$$J_{\eta\zeta} = m_1 \eta_2 \zeta_2 + m_3 \eta_3 \zeta_3 + m_4 \eta_4 \zeta_4 = 0.$$

Два перших і два останніх рівняння даної системи становлять умову повної зрівноваженості жорсткої системи двох точкових мас m_1, m_2 з координатами

$$\xi_1 = r_1, \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1; \quad \xi_2 = 0, \quad \eta_2 = r_2, \quad \zeta_2$$

двома точковими масами m_3, m_4 , координати яких $\xi_3, \eta_3; \xi_4, \eta_4$ треба визначити. Дві інші координати ζ_3, ζ_4 цих двох точок вибираються довільно.

Отже, наперед відому незрівноваженість довільної жорсткої обертової системи точкових мас можна усунути (зрівноважити систему мас) двома заданими точковими масами, розташованими в довільно вибраних площинах корекції. При цьому координати положень двох точкових мас, що зрівноважують задану обертову систему, в площинах корекції визначаються з попередньої системи рівнянь.

Як приклад розглянемо обертове тіло — великий ротор, що застосовується в електротехніці (рис. 11.36). Цей ротор можна змодельювати жорсткою обертовою системою точкових мас (див. рис. 11.35), поділивши його на тонкі диски, центри яких унаслідок тих чи інших неточностей, допущених під час виготовлення ротора, не знаходяться на його осі обертання. Вважаючи, що в центрах мас елементарних дисків ротора зосереджені їхні маси, приходимо до системи радіально розташованих відносно осі обертання точкових мас.

У розглядуваному випадкові незрівноваженість маси ротора повністю невизначена, й розрахунком неможливо встановити, які повинні бути зрівноважувальні маси й місця закріплення двох вантажів на обертовому тілі. За таких умов на обох торцях ротора, які беруться за площини корекції, по колу робляться спеціальні отвори для встановлення зрівноважувальних точкових мас; при цьому вантажі підбираються експериментально методом повторних випробувань за допомогою спеціальних балансувальних машин.

□ **Балансувальні машини.** Балансувальна машина, зображена на рис. 11.37, складається з важкої платформи 1 , яка може обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через опору O . Один кінець платформи 1 з'єднаний із нерухомою основою пружиною 6 . На платформі є два стояки з регульовальними підшипниками 3 і 5 , в які встановлюються кінці вала розбалансованого ротора 4 . Електропривод 2 дає змогу змінювати частоту обертання ротора.

Така система має певну частоту власних коливань. Зрівноважуючи обертову масу ротора, його розташовують так, щоб вісь обертання платформи 1 знаходилася в одній із площин корекції Π_1 . Привівши ротор в обертальний рух, зміною частоти його обертання електроприводом 2 досягають збігу цієї частоти з частотою власних коливань

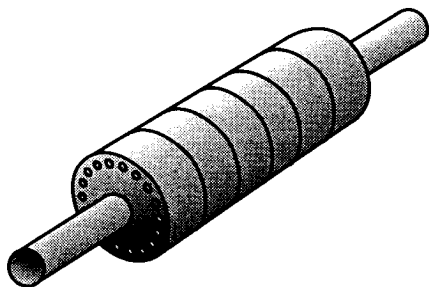


Рис. 11.36

платформи, тобто добиваються явища резонансу. Змінні ньютонівські сили інерції розбалансованої маси ротора, що діють на платформу за резонансу, спричиняють досить значні амплітуди коливань платформи. Розмістивши зрівноважувальну масу m_3 у другій площині корекції Π_2 , автоматично за допомогою спеціального пристрою добивають відповідні значення й кутове положення доти, доки за обер-

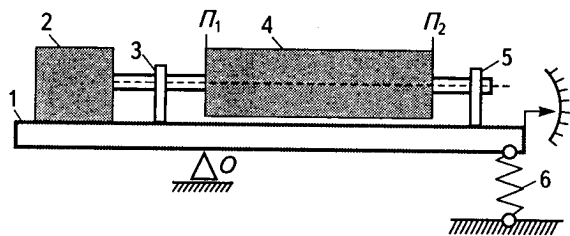


Рис. 11.37

тання ротора зовсім не припиняться вібрації платформи 1, що свідчить про динамічну зрівноваженість.

Загасання вібрацій пояснюється тим, що зумовлені зрівноважувальною масою m_3 вертикальні сили тиску кінців вала ротора на

підшипники в стояках платформи нейтралізуються вертикальними силами тиску на підшипники, які спричинені масами m_1 і m_2 , що еквівалентне неоднорідності матеріалу ротора й відхиленню осі обертання від головної центральної осі інерції.

Продовжуючи балансування після зрівноваження масою m_3 , ротор повертають на платформі так, щоб площини корекції Π_1 і Π_2 , лівий і правий торці ротора, помінялися місцями. Як тільки площина корекції Π_2 з вантажем m_3 збіжиться з віссю обертання платформи 1, зрівноважувальна маса m_3 вже не впливатиме на платформу під час її коливань. Зміною частоти обертання ротора досягають резонансу у вібраціях платформи, за якого так само, як і у випадку зрівноваження масою m_3 , здійснюють зрівноваження ротора масою m_4 в площині корекції Π_1 .

Список рекомендованої літератури

1. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т. — М.: Наука, 1971—1973 . — Т. 1. — 512 с.; Т. 2. — 642 с.; Т. 3. — 487 с.
2. Бутенин Н. В., Луиц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: В 2 т. — М.:Наука, 1976—1979. — Т. 1. — 240 с.; Т 2. — 461 с.
3. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики: В 2 ч. — М.: Наука, 1967. — Ч. 1. — 468 с.; Ч. 2. — 332 с.
4. Ишлинский А. Ю. Механика относительного движения и силы инерции. — М.: Наука, 1981. — 191 с.
5. Кільчевський Н. А. Курс теоретичної механіки: В 2 т. — К.: Рад. шк., 1952. — Т. 2. — 362 с.
6. Кінематика та динаміка точки. Комп'ютерний курс / М. А. Павловський, Л. Ю. Акінфієва, А. І. Юркін, С. Я. Свистунов. — К.: Либідь, 1993. — 248 с.
7. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: В 2 т. — М.: Наука, 1984. — Т. 1. — 352 с.; Т. 2. — 640 с.
8. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1980. — 446 с.
9. Николаї Є. А. Теоретична механіка: В 2 т. — К.: Держтехвидав УРСР, 1955. — Т. 2. — 476 с.
10. Павловський М. А. Теоретична механіка. — К.: Техніка, 2002. — 512 с.
11. Павловський М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойко О. Ф. Теоретическая механика. Динамика. — К.: Вища шк., 1990. — 480 с.
12. Путята Т. В., Фрадлін Б. М. Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. — К.: Рад. шк., 1955. — 368 с.
13. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
14. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі. — К.: Либідь, 2001. — 416 с.
15. Токар А. М. Теоретична механіка. Статика. Методи і задачі. — К.: Либідь, 1998. — 240 с.
16. Яблонский А. А. Курс теоретической механики.: В 2 т. — М: Высш. шк., 1977. — Т. 2. — 430 с.
17. Яблонский А. А. и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. — М.: Высш. шк., 1978. — 240 с.

ЗМІСТ

Передмова	3
Вступ	5
Глава 1 ПРЯМОЛІНІЙНИЙ РУХ	8
1.1. Закони Ньютона. Основні задачі динаміки	8
1.2. Загальні теореми динаміки прямолінійного руху точки.	19
Глава 2 РУХ ТОЧКИ ПО КОЛУ	27
2.1. Рівномірний рух точки по колу	27
2.2. Довільний рух точки по колу	32
Глава 3 ДОВІЛЬНИЙ КРИВОЛІНІЙНИЙ РУХ ТОЧКИ.	34
3.1. Диференціальні рівняння руху точки в проекціях на дотичну й головну нормаль	34
3.2. Диференціальні рівняння руху точки в декартових координатах	36
Глава 4 ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ	39
4.1. Поступальний рух тіла	39
4.2. Теореми про зміну кількості руху точки в криволінійному русі й тіла — в поступальному русі.	42
4.3. Теорема про зміну моменту кількості руху точки	46
4.4. Теорема про зміну кінетичної енергії точки в криволінійному русі.	55
Глава 5 ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТІЛА	59
5.1. Рівняння динаміки обертального руху тіла.	59
5.2. Загальні теореми динаміки обертального руху тіла	72
Глава 6 ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТІЛА	101
6.1. Загальні теореми динаміки плоскопаралельного руху тіла	101

6.2.	Динаміка плоскопаралельного руху колеса по шорсткій горизонтальній поверхні	126
Глава 7	ДИНАМІКА СИСТЕМИ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНИХ ТІЛ, ЩО МАЮТЬ СПІЛЬНУ ПЛОЩИНУ МАТЕРІАЛЬНОЇ СИМЕТРІЇ	141
7.1.	Універсальні рівняння динаміки системи взаємозв'язаних тіл, які рухаються паралельно спільній площині матеріальної симетрії	141
7.2.	Рівновага плоскої системи тіл	162
7.3.	Дослідження руху кривошипно-шатунного механізму	173
7.4.	Дослідження рівноваги кривошипно-шатунного механізму	186
7.5.	Задача на визначення нормального тиску паса на обід диска в його обертовому русі й у стані рівноваги	190
Глава 8	ТЕОРІЯ ВІДНОСНОГО РУХУ	196
8.1.	Динаміка відносного руху	196
8.2.	Диференціальні рівняння відносного руху	208
Глава 9	ТЕОРІЯ УДАРУ	220
9.1.	Загальні теореми елементарної теорії удару.	220
9.2.	Удар двох плоских тіл у спільній площині матеріальної симетрії	246
Глава 10	МЕТОД Д'АЛАМБЕРА	263
10.1.	Загальні зауваження	263
10.2.	Принцип Д'Аламбера для точки й механічної системи	266
10.3.	Сили інерції Д'Аламбера та їхні головний вектор і головний момент	293
10.4.	Принцип Д'Аламбера для руху тіла навколо нерухомої точки. Динамічні рівняння Ейлера	331
Глава 11	МЕТОД ЛАГРАНЖА	341
11.1.	Загальні зауваження	341
11.2.	Рівняння Лагранжа першого роду	342
11.3.	Принцип віртуальних робіт. Загальні рівняння статички й динаміки	359
11.4.	Узагальнені координати Лагранжа. Рівняння Лагранжа другого роду	367
11.5.	Рівняння Аппеля	386
11.6.	Застосування методу Лагранжа для розв'язування деяких задач статички й динаміки.	394
11.7.	Статичне й динамічне зрівноважування обертових тіл. Балансувальні машини.	423
	<i>Список рекомендованої літератури</i>	<i>437</i>

Навчальне видання

Токар Анатолій Максимович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Динаміка

Методи й задачі

Художній редактор *Т. О. Щур*
Технічний редактор *Л. І. Швець*
Коректори *А. В. Бородавко, Л. Ф. Іванова*
Комп'ютерна верстка *О. В. Кузьменка*

Підп. до друку 23.12.05. Формат 60x84/16. Папір офс. №1. Гарнітура Таймс.

Умов.-друк. арк. 25,58. Обл.-вид. арк. 25.

Тираж 4500 пр. Вид. № 4160. Зам. 6-6

Видавництво «Либідь»

01004 Київ, вул. Пушкінська, 32

Свідоцтво про державну реєстрацію

№ 404 від 06.04.2001 р.

ЗАТ «Книга»

04053, Київ-53, Артема, 25.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру виговівників

Серія ДК №2325 від 25.10.2005р.