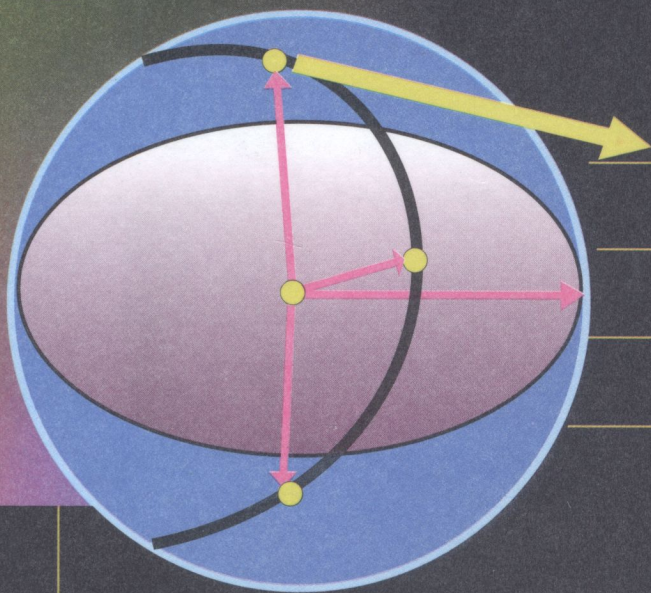
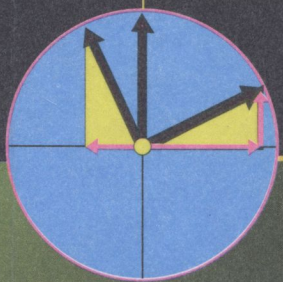


А.М.Токар

# Теоретична МЕХАНІКА

## КІНЕМАТИКА



Методи і задачі

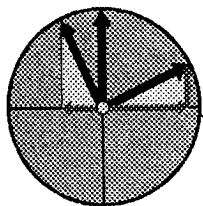
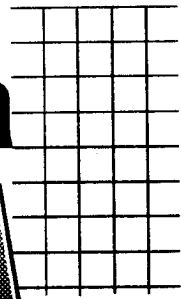
Навчальний посібник

3222-32

531.1(075)  
Т51

А.М.Токар

# Теоретична МЕХАНІКА



## КІНЕМАТИКА

### Методи і задачі

*Допущено Міністерством освіти  
і науки України*

Навчальний посібник для студентів  
технічних спеціальностей  
вищих навчальних закладів

НТБ ВНУ



3222-32

531.1(075) Т 51 2001

Токар А.М. Теоретична механіка

Київ  
"Либідь"  
2001



ББК 22.21я73  
Т51

Розповсюдження та тиражування без офіційного дозволу видавництва заборонено

Рецензенти:

доктори техн. наук, професори:

*М. А. Павловський* (Український технічний університет);

*О. О. Рассказов* (Український транспортний університет)

*Допущено Міністерством освіти і науки України*  
(рішення Колегії Міністерства освіти і науки України.  
Протокол №2/5-18 від 25.02.1998 р.)

Редакція літератури з природничих і технічних наук

Редактор *М. А. Васильківська*

Т 1603030000 – 052  
2001

ISBN 966-06-0099-2



© А. М. Токар, 2001

## ПЕРЕДМОВА

---

У навчальному посібнику викладено геометричну теорію руху матеріальної точки й абсолютно твердого тіла, а також різні методи та способи застосування цієї теорії до розв'язування прикладних задач.

У посібнику докладно розглянуто кінематику плоскопаралельного руху, досліджено його властивості аналітично, геометрично, графічно, методом проекцій і проілюстровано на прикладах кривошипно-шатунного й багатоланкового механізмів. Метод проекцій для визначення кінематичних величин запропоновано в новому викладі, який дає змогу складати компактну систему рівнянь для розв'язування задач на електронно-обчислювальних машинах.

Також викладено основи кінематики складного руху точки і тіла. Теорему Коріоліса розглянуто як у разі найпростішого переносного руху, так і в найзагальнішій постановці задачі.

Досить широко представлено кінематику сферичного й загального руху тіла. Вперше виведено аналітичні залежності абсолютних координат, проекцій швидкостей і прискорень точок тіла від кутів Ейлера.

Автор висловлює щирю подяку члену-кореспонденту НАН України А. Ф. Улітку, доктору технічних наук М. А. Павловському, доктору технічних наук, професорові О. О. Рассказову за цінні поради щодо змісту посібника.

Навчальний посібник призначається для студентів усіх напрямів технічної освіти, як середніх, так і вищих закладів освіти.

Відомо, що теоретична механіка — це наука про найзагальніші закони механічного руху матеріальних тіл, яка складається з трьох розділів — статички, кінематики й динаміки. Її фундаментальні закони було чітко сформульовано І. Ньютоном в його книзі «Математичні начала натуральної філософії».

Основи сучасної кінематики заклав Г. Галілей (1564–1642). Він вперше знайшов закони вільного падіння і руху тіл, кинутих під кутом до горизонту.

Найефективніший шлях вивчення механічних явищ — поетапний. Тому спершу вивчають теорію рівноваги, далі — суто геометрично механічний рух, не звертаючи уваги на його причини. Саме кінематика досліджує механічні рухи та встановлює зв'язок між просторовими параметрами й часом, а вплив інерційних властивостей матеріальних тіл і сил на характер руху не враховує.

У теоретичній механіці, зокрема кінематиці, при вивченні руху реальні матеріальні тіла замінюють на модельні, в яких зберігаються головні ознаки реальних тіл — адже для моделей набагато простіше встановити загальні закономірності руху, ніж для тіл реальних.

Основними моделями в кінематиці є матеріальна точка й абсолютно тверде тіло.

Матеріальною точкою називають точкове матеріальне тіло, кількість речовини в ньому така сама, як і в реальному тілі, заміненому моделлю. Коли саме треба замінити реальне тіло на матеріальну точку, залежить від умов руху і

конкретних задач. Критерієм переходу від реального тіла до матеріальної точки є несуттєва відмінність в рухах складових частинок реального тіла. Будь-яку малу частинку реального матеріального тіла, розміри якої нескінченно малі порівняно з розмірами реального тіла, можна вважати за матеріальну точку.

Одне й те саме тіло в деяких задачах механіки можна прийняти за матеріальну точку, в інших задачах — ні. Наприклад, Землю можна вважати матеріальною точкою, якщо розглядати рух її навколо Сонця, а власний обертальний рух Землі навколо осі є несуттєвим порівняно з її орбітальним рухом. Якщо ж йдеться про вплив власного обертання Землі на окремі механічні явища, які відбуваються на ній, то Землю вже не можна прийняти за матеріальну точку.

До другої моделі реального тіла — абсолютно твердого тіла — належать тіла, які мало змінюють свої розміри і форму, — тверді тіла. У загальному випадку руху таких тіл суттєвими для дослідження є відмінності руху їхніх складових частинок. Втім, спричинене це не зміною розмірів і форми, а рухом тіла як цілого.

Отже, тверді тіла в теоретичній механіці, та й у кінематиці, можна розглядати як абсолютно тверді, а відстань між їхніми складовими частинами не змінюється ні за яких обставин руху; кількість речовини в об'ємі абсолютно твердого тіла лишається така сама, як у змінному об'ємі реального тіла, що замінюється моделлю.

Оскільки речовинні властивості матеріальних тіл у разі кінематичного дослідження руху не мають суттєвого значення, то такі моделі, як матеріальна точка і абсолютно тверде тіло розглядають у кінематиці як геометричні образи точки і незмінного тіла, що позбавлені речовини.

Зауважимо, що хоча встановлення загальних властивостей руху в кінематиці спирається на відповідні модельні тіла, однак створена на ідеальних об'єктах теорія руху справедлива і для реальних тіл.

Реальні матеріальні тіла рухаються в реальному просторі й часі; рух, простір і час нерозривно зв'язані. Це відображено в теорії відносності А. Енштейна. Та в теоретичній механіці дотримуються поглядів І. Ньютона на простір і час і вважають ці категорії абсолютними. Рух модельних тіл розглядають відносно абсолютно нерухомого простору, геометричні властивості якого визначають введенням прямокутних (декартових) систем координат, незмінно зв'язаних з абсолютним простором. Час описує тривалість рухів і є тією незалежною змінною величиною, яка функціонально пов'язана з просторовими параметрами матеріальних тіл, що рухаються.

На підставі кінематичних характеристик руху визначають загальні динамічні величини, які, з одного боку, враховують кінематичний стан руху матеріальних тіл, з іншого — їхні інерційні властивості. Крім того, рівняння кінематики є вихідними для знаходження динамічних рівнянь руху як окремих матеріальних тіл, так і різних механічних систем.

Водночас кінематика є самостійною галуззю знань і використовує ефективні засоби вивчення руху, за допомогою яких розроблено різноманітні методи дослідження геометричних процесів. Кінематичні методи широко застосовують у багатьох галузях науки й техніки, наприклад для розробки механізмів тощо.

## § 1. Закон інерції.

## Прямолінійний рівномірний рух \_\_\_\_\_

При вивченні властивостей механічного руху звичайно дотримуються поглядів І. Ньютона про існування абсолютно-го простору, який вважається нерухомим і в якому відбувається рух матеріальних тіл у часі. Як уже зазначалося у вступі, теоретична механіка ґрунтується на фундаментальних законах Ньютона.

Перший закон Ньютона — закон інерції: *будь-яке тіло утримується у стані спокою або рівномірного й прямолінійного руху доти, доки воно не вимушується прикладеними силами змінити свій стан. Сила визначається як причина, що виводить тіло зі стану спокою або відхиляє його рух від прямолінійного й рівномірного.*

Зазначимо, що інерція тіл зумовлена двома обставинами: наявністю абсолютного простору і кількістю речовини, що відповідає матеріальним тілам (кількість речовини в тілі є його масою).

Звернемо увагу на те, що матеріальне тіло, про яке йдеться в законі інерції, можна ототожнити з матеріальною точкою. Отже, прямолінійний рівномірний рух матеріальної точки в разі відсутності дії на неї сил є інерційним рухом, який не потребує для свого здійснення ніяких силових впливів; такий рух відбувається сам по собі; це — природна властивість матеріальних тіл всесвіту.

Для визначення прямолінійного рівномірного руху матеріальної точки введемо координатну вісь. Через нерухомі точки абсолютного простору проведемо пряму лінію й виберемо на ній довільну точку  $O$ , яку назвемо *початковою точкою* (початком відліку координати). Установивши на цій прямій додатний і від'ємний напрями, а також проградувавши її від початкової точки  $O$  в обох напрямках еталоном метра, матимемо координатну вісь  $Ox$  (додатний напрям прийнято від точки  $O$  в бік позначення  $x$  (рис. 1.1).



З допомогою осі  $Ox$  можна визначити положення будь-якої точки  $M$  абсолютного простору, яка лежить на цій осі. Відстань (у метрах) від точки  $O$  до будь-якої точки  $M$  осі  $Ox$  називається *координатою* цієї точки. Позначимо алгебраїчною величиною  $x$  координату точки  $M$ , тоді  $x$  набуватиме від'ємних значень для точок лівої півосі й додатних — для точок правої півосі (рис. 1.2).

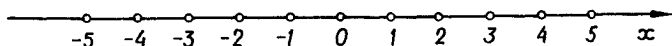


Рис. 1.1

Напрявлений відрізок  $OM$  осі  $Ox$  є радіусом-вектором точки  $M$  і позначається  $\vec{r}$ ; алгебраїчне значення цього радіуса-вектора відповідає координаті  $x$  його кінця  $M$  на осі  $Ox$ . Відношення радіуса-вектора  $\vec{r}$  точки  $M$  до її координати  $x$

$$\frac{\vec{r}}{x} = \vec{i}$$

є завжди додатною векторною величиною, яка називається *ортом*  $\vec{i}$  осі  $Ox$  (одиничним вектором, його модуль дорівнює одиниці). Орт  $\vec{i}$  осі  $Ox$  вказує на її додатний напрям (рис. 1.2). Останнє співвідношення дає змогу визначити положення точок на осі  $Ox$  векторною рівністю

$$\vec{r} = x\vec{i}, \quad (1.1)$$

в якій множник  $x$  при орті  $\vec{i}$  називають проекцією радіуса-вектора точки  $M$  на вісь  $Ox$ .

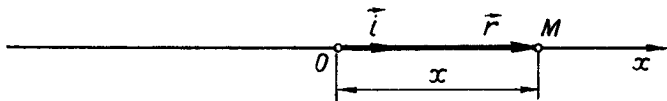


Рис. 1.2

Матеріальна точка  $B$ , рівномірно рухаючися по осі  $Ox$  у послідовні моменти часу  $t$ , збігається з нерухомими точками  $M$  осі. Отже, її положення також визначається в кожний момент часу  $t$  координатою  $x$ , яка вже під час руху буде функцією часу  $x(t)$ . При рівномірному русі точки  $B$  приріст її координати  $\Delta x$  є пропорційною величиною щодо приросту часу  $\Delta t$ , тобто

$$\Delta x = v \Delta t, \quad (1.2)$$

де  $v$  — коефіцієнт пропорційності;  $\Delta t = t - t_0$ ;  $\Delta x = x - x_0$  ( $x_0$  — координата точки  $B$  у початковий момент часу  $t_0$ ;  $t_0$  і  $x_0$  називають *початковими даними руху*).

Коефіцієнт пропорциональності  $v_x$  називається *швидкістю прямо- лінійного рівномірного руху точки В*. З формули (1.2) маємо

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}, \quad (1.3)$$

тобто *швидкість  $v$  прямолінійного рівномірного руху точки — це фізична величина, яка відповідає зміні координати  $x$  точки за одиницю часу.*

У системі СІ за одиницю швидкості прийнято 1 метр за секунду (м/с).

Із співвідношення (1.3) дістанемо рівняння прямолінійного рів- номірного руху точки з ненульовими початковими даними (в кінема- тиці під точкою розуміють і матеріальну, і геометричну точки):

$$x = x_0 + v(t - t_0). \quad (1.4)$$

Рівняння (1.4) можна зобразити гра- фічно (рис. 1.3). Горизонтальна пряма  $Ot$ , на якій відкладаються значення часу  $t$ , називається віссю часу, а вертикальна  $Ox$  — віссю координати  $x$ . Таке схема- тичне зображення залежності коорди- нати  $x$  рухомої точки від часу  $t$  у вигляді прямої, яка утворює з віссю часу  $Ot$  кут  $\alpha$  у площині  $xOt$ , називається *графіком рівномірного прямолінійного руху точки*.

З рис. 1.3, з урахуванням рівняння (1.3), запишемо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v. \quad (1.5)$$

Отже, *тангенс кута нахилу графіка прямолінійного рівномірного ру- ху точки до осі часу чисельно дорівнює швидкості руху*. Чим більший кут  $\alpha$ , тим більша швидкість  $v$  руху.

Якщо точка  $B$  у нульовий момент часу  $t_0 = 0$  в разі рівномірного прямолінійного руху перебуває в початковій точці  $O$  осі  $Ox$ ,  $x_0 = 0$  (нульові початкові дані), то рівняння (1.4) набуває вигляду

$$x = vt, \quad (1.6)$$

а відповідна пряма графіка виходитиме з точки  $O$  (рис. 1.4).

Зауважимо, що зображення руху на схемах пов'язане з вибором лінійного масштабу  $\mu_x = x/X$ , де  $x$  вимірюється в метрах, а  $X$  — у міліметрах, і масштабу часу  $\mu_t = t/T$ , де  $t$  вимірюється в секундах, а  $T$  — також у міліметрах, як і  $X$ . Отже, обидва масштаби розмірні:  $[\mu_x] = \text{м/мм}$ ,  $[\mu_t] = \text{с/мм}$ . І на схемах (див. рис. 1.3, 1.4)  $x$  і  $t$  через масштаби виражаються формулами

$$x = \mu_x X, \quad t = \mu_t T. \quad (1.7)$$

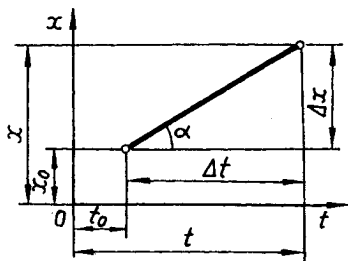


Рис. 1.3

Швидкість досліджуваного руху також можна показати схематично у вигляді прямої, що лежить у координатних осях  $Ot$  і  $Ov$  і паралельна осі часу  $Ot$ , оскільки під час рівномірного руху точки по прямій швидкість  $v$  залишається незмінною (рис. 1.5). Ввівши масштаб швидкості  $\mu_v = v/V$ , де  $v$  вимірюється в м/с, а  $V$  — у мм

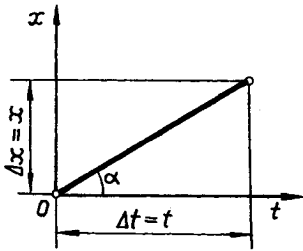


Рис. 1.4

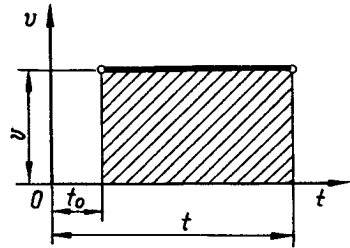


Рис. 1.5

( $[\mu_v] = \text{м}/(\text{с} \cdot \text{мм})$ ), можна за графіком швидкості визначити приріст  $\Delta x$  координати  $x$  за час  $\Delta t$ , тобто пройдений точкою шлях (за умови її рівномірного руху).

Площа прямокутника (заштрихована на рис. 1.5) визначається за формулою

$$S = VT = \frac{v}{\mu_v} \frac{t}{\mu_t} = \frac{\Delta x}{\mu_v \mu_t}, \quad (1.8)$$

де  $T$  і  $V$  вимірюються в мм, а  $\Delta x$  — у м;  $\mu_v$  і  $\mu_t$  — відомі масштаби. Рівність (1.8) представимо у вигляді

$$\Delta x = \mu_v \mu_t S. \quad (1.9)$$

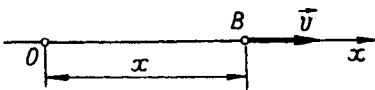


Рис. 1.6

Отже, приріст координати (пройдений шлях)  $\Delta x$  точки в разі прямолінійного рівномірного руху чисельно дорівнює в масштабі  $\mu_v \mu_t$  площі  $S$  прямокутника, обмеженого графіком швидкості (прямою), віссю часу  $Ot$  і з боків — відрізками, що паралельні осі швидкості  $Ov$  і проходять через точки

осі часу  $Ot$ , яким відповідають значення початкового  $t_0$  й кінцевого моментів  $t$  часу.

Якщо у формулі (1.1) врахувати (1.6), то дістанемо векторну рівність

$$\vec{v} = v\vec{i}, \quad (1.10)$$

де  $\vec{v}$  — вектор швидкості, вказує напрям руху точки;  $v$  — модуль швидкості (рис. 1.6). При однакових напрямках  $\vec{v}$  і  $\vec{i}$  рух відбувається в додатному напрямі осі  $Ox$ , у противному разі — у від'ємному (у формулі (1.10) відображається знаком « $-$ »).

Зауважимо, що швидкість як векторна величина має суттєве значення в разі криволінійного руху матеріальної точки.

## § 2. Вільне падіння матеріальної точки поблизу Землі як прямолінійний рівнозмінний рух. Другий закон Ньютона

Із закону інерції випливає: якщо на матеріальну точку впливають інші матеріальні тіла, то стан її спокою або рівномірного прямолінійного руху порушується — із спокою переходить у рух, а рух по прямій перетворюється на нерівномірний, або криволінійний. Мірою впливу матеріальних тіл, який призводить до порушення руху за інерцією матеріальної точки, є сила, а новий кінематичний стан матеріальної точки називають прискореним рухом. Отже, причиною прискорених рухів є сила (див. § 1).

Розглянемо далі властивості часткового випадку прискореного руху точки — рівноприскореного прямолінійного руху. Вперше характеристики даного виду руху детально було вивчено Галілеєм на підставі проведених дослідів стосовно падіння тіл у полі тяжіння Землі.

В одному із дослідів Галілея тіло  $B$  вагою  $G$  утримувалось у рівновазі на гладенькій похилій площині з кутом нахилу до горизонту  $\alpha$  вагою  $P$  вантажу  $A$ , який через нитку, що охоплювала нерухомий блок, з'єднувався з тілом  $B$  (рис. 1.7). Коли система перебуває в рівновазі, вага  $P$  вантажу  $A$  зрівноважує складову сили ваги  $G$  тіла  $B$ , паралельну похилій площині, тобто

$$F = G \sin \alpha.$$

Якщо тіло  $B$  звільнити від вантажу  $A$ , то його нерівномірний (прискорений) рух по похилій площині здійснюватиметься за умов прикладеної до тіла  $B$  сталої сили  $F = G \sin \alpha$ . На підставі цього досліді Галілей виявив, що прирости координати  $x$  тіла  $B$  у разі його прискореного руху по похилій площині під дією сили  $\vec{F}$  за послідовні

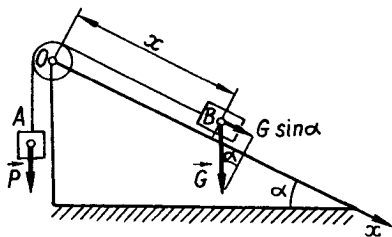


Рис. 1.7

однакові проміжки часу співвідносяться між собою як непарні числа натурального ряду чисел:

$$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 : \dots = 1 : 3 : 5 : \dots \quad (1.11)$$

Така закономірність характерна для квадратичної залежності координати  $x$  тіла  $B$  від часу  $t$ , тобто

$$x = kt^2, \quad (1.12)$$

де  $k^2$  — коефіцієнт пропорціональності.

Справді, поділимо час руху тіла  $B$  по похилій площині на рівні проміжки часу  $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots$  і запишемо на підставі (1.11) значення координати  $x$  у моменти часу  $t_1 = \Delta t_1, t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2, t_3 = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3, \dots$ , де  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \dots = \Delta t$ . Матимемо:

$$x_1 = k\Delta t^2; \quad x_2 = k(2\Delta t)^2; \quad x_3 = k(3\Delta t)^2; \quad \dots,$$

а прирости координати  $x$  тіла  $B$  за такі самі проміжки часу

$$\Delta x_1 = x_1 - 0 = k\Delta t^2; \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = 3k\Delta t^2;$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = 5k\Delta t^2; \quad \dots$$

З останніх рівностей дістанемо

$$\Delta x_2 = 3\Delta x_1; \quad \Delta x_3 = 5\Delta x_1; \quad \dots,$$

що й треба було довести.

З'ясуємо зміст коефіцієнта  $k$  у формулі (1.11) і встановимо характеристики прискореного руху тіла  $B$  під дією сталої сили  $F$ . Для цього розглянемо приріст часу  $\Delta t$  до певного його моменту  $t$ , якому відповідає координата  $x$  тіла  $B$  у разі розглядуваного руху. Тоді і значення  $x$  за проміжок  $\Delta t$  зросте на  $\Delta x$ . Отже, дістанемо рівність, врахувавши вираз (1.12):

$$x + \Delta x = k(t + \Delta t)^2.$$

Розкривши в правій частині квадрат суми двох величин і застосувавши ще раз (1.12), маємо

$$\Delta x = 2kt\Delta t + k\Delta t^2.$$

При досить малих  $\Delta t$  знехтуємо в правій частині другим доданком  $k\Delta t^2$  як величиною другого порядку малості порівняно з першим членом  $2kt\Delta t$ . Отже, дістанемо співвідношення

$$\Delta x = 2kt\Delta t,$$

де  $\Delta t = t - t_1$ ,  $t$  — фіксований момент часу,  $t_1$  — значення часу, близьке до  $t$ .

Остання рівність показує, що на досить малому проміжку часу  $\Delta t$  нерівномірний рух можна замінити рівномірним зі швидкістю

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2kt, \quad (1.13)$$

яка для різних моментів часу має різне значення.

Отже, швидкість точки в нерівномірному русі в кожний даний момент часу розглядається як швидкість рівномірного руху, який би здійснювала точка в подальшому, починаючи з цього моменту часу.

З формули (1.13) видно, що швидкість тіла  $B$ , яке рухається нерівномірно під дією сталої сили  $\vec{F}$ , змінюється пропорційно часу  $t$ . Лишається з'ясувати, яка кінематична величина, що відповідає цьому рухові, є сталою. Рівність (1.13) показує, що змінення часу  $t$  на  $\Delta t$  зумовлює приріст  $\Delta v$  швидкості  $v$ . Отже, можна записати  $v + \Delta v = 2k(t + \Delta t)$ . Оскільки  $v = 2kt$ , то

$$\Delta v = 2k\Delta t; \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = 2k = \text{const.}$$

У разі рівномірного руху сталою величиною є швидкість  $v$ , а для досліджуваного руху характерним є відношення зміни швидкості до приросту часу, за який ця зміна відбулася. Таке відношення  $\Delta v/\Delta t$  позначимо  $a$  і назовемо прискоренням, а рух точки — рівноприскореним. Отже, прискоренням рівноприскореного руху точки називається фізична величина, яка чисельно дорівнює зміні швидкості за одиницю часу:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}. \quad (1.14)$$

Коефіцієнт пропорціональності  $k$  у загальній формулі (1.12), як видно з останніх двох рівностей, дорівнює половині прискорення, тобто  $k = a/2$ . У досліді Галілея, який покладено в основу наших міркувань,  $a = g \sin \alpha$ ;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  ( $g$  — прискорення вільного падіння). У системі СІ розмірність:

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

тобто за одиницю прискорення в СІ прийнято метр за секунду в квадраті ( $\text{м/с}^2$ ); в разі такої величини прискорення швидкість точки під час рівноприскореного руху щосекунди зростає на  $1 \text{ м/с}$ .

Якщо підставити у формули (1.12) і (1.13) значення знайденого  $k$ , то дістанемо рівняння координати  $x$  і швидкості точки в рівноприскореному прямолінійному русі при нульових початкових даних ( $t_0 = 0$ ;  $x_0 = 0$  і  $v_0 = 0$ ):

$$x = \frac{a}{2} t^2; \quad v = at. \quad (1.15)$$

Для запису рівнянь рівноприскореного руху точки при довільних початкових даних скористаємося формулою

$$\Delta x = 2kt_0 \Delta t + k\Delta t^2,$$

де  $\Delta t = t - t_0$  і  $\Delta x = x - x_0$ . Шукані рівняння з урахуванням  $2kt_0 = at_0 = v_0$  набувають вигляду:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2, \\ v &= v_0 + a(t - t_0). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Побудуємо графіки координати  $x$  і швидкості  $v$  точки за умови рівноприскореного руху. При побудові графіків використовуються масштаби

$$\mu_t = \frac{t_0}{T_0} = \frac{t}{T}; \quad \mu_x = \frac{x_0}{X_0} = \frac{x}{X}; \quad \mu_v = \frac{v_0}{V_0} = \frac{v}{V}.$$

Швидкість  $v$  на графіку координати  $x$  (рис. 1.8) відповідає тангенсу кута  $\alpha$ , утвореного дотичною до кривої графіка та віссю часу  $Ot$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = v = v_0 + a\Delta t = \frac{\mu_x}{\mu_t} \frac{X_1 - X_0}{T_1 - T_0}. \quad (1.17)$$

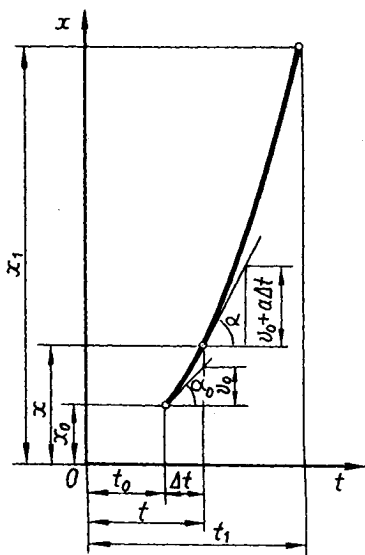


Рис. 1.8

А тангенс кута  $\beta$  нахилу прямої графіка швидкості  $v$  до осі часу  $Ot$  (рис. 1.9) відповідає прискоренню  $a$ :

$$\operatorname{tg} \beta = a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{\mu_v}{\mu_t} \frac{V - V_0}{T - T_0}. \quad (1.18)$$

Зазначимо, що рівняння прямолінійного рівноприскореного руху (1.16), які виведено для випадку руху тіла по похилій площині під дією складової сили ваги тіла, паралельної похилій площині, мають місце в найзагальнішому випадку дії сталої сили, колінеарної з прямолінійною траєкторією матеріальної точки. Якщо початкова швидкість  $v_0$  і прискорення  $a$  збігаються за знаком, то маємо рівноприскорений рух (рис. 1.10, а), в разі різних знаків  $v_0$  і  $a$  рух матеріальної точки рівносповільнений (рис. 1.10, б). Прямолінійний рух матеріальної точ-

ки зі сталим прискоренням називають *прямолінійним рівнозмінним рухом*.

Тепер скористаємося даними досліджу Галілея й встановимо залежність між прискоренням  $\bar{a}$  матеріальної точки та силою  $\vec{F}$ , яка це прискорення спричиняє. Прискорення руху тіла  $B$  по похилій площині було  $a = g \sin \alpha$ , сила, що його спричинила,  $F = G \sin \alpha$ . З цих двох співвідношень дістанемо

$$a = \frac{F}{G} = \frac{F}{m}, \quad (1.19)$$

$$\frac{a}{g} = \frac{F}{G}$$

де  $G/g = m$  називають масою тіла.

І. Ньютон узагальнив рівняння (1.19) й чітко сформулював

*основний закон динаміки — другий закон Ньютона: прискорення матеріальної точки пропорціональне силі, яка його спричиняє, має той самий напрям, що й сила, та обернено пропорціональна масі матеріальної точки.*

Звернемо увагу на векторний характер прискорення в разі рівноприскореного руху. Якщо помножити рівність (1.15) на одиничний вектор  $\vec{i}$  осі  $Ox$ , то матимемо  $\vec{v} = a\vec{i}t$ , звідки

$$\vec{a} = a\vec{i}. \quad (1.20)$$

На рис. 1.10 показано рівноприскорений і рівносповільнений рухи відповідно. Стала сила, що спричиняє прискорення, в обох випадках має напрям прискорення.

### § 3. Довільний прямолінійний рух

Основний закон динаміки (1.19) можна описати у векторній формі, якщо обидві його частини помножити на одиничний вектор  $\vec{i}$  осі  $Ox$ , по якій рухається матеріальна точка із спричиненою силою  $\vec{F}$  прискоренням  $\vec{a}$ :

$$a\vec{i} = \frac{F\vec{i}}{m}; \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

З цього рівняння випливає, що при зміні значення й напрямку сили  $\vec{F}$  змінюватимуться відповідно значення й напрям прискорення  $\vec{a}$  в разі руху матеріальної точки по осі  $Ox$ . Отже, наближаємося до довільного змінного руху точки по прямій.

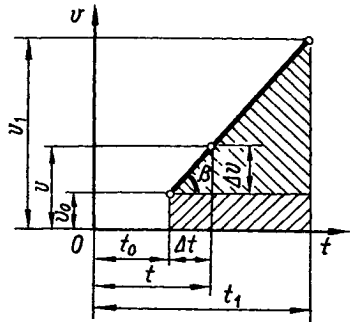


Рис. 1.9



Нехай маємо довільний прямолінійний рух точки, який відбувається вздовж осі  $Ox$  (рис. 1.10) (зауважимо, що умовою прямолінійного руху є колінеарність векторів початкової швидкості  $\vec{v}_0$ , точки й сили  $\vec{F}$ , що спричиняє змінний рух). Тоді положення рухомої точки на прямій у будь-який момент часу  $t$  визначатиметься координатою  $x$ , яка буде однозначною неперервною функцією часу  $t$ . Вигляд цієї функції

$$x = x(t) \quad (1.21)$$

зумовлюється законом зміни сили й початковими даними руху.

Функціональна залежність (1.21) є кінематичним (кінцевим) рівнянням (законом) прямолінійного руху точки в загальному випадку.

Зазначимо, що в кінематиці конкретні рівняння (1.21) дістають у деяких випадках внаслідок дослідження геометричних властивостей конкретного руху точки, в інших — задаються як відомі залежності.

І в найзагальнішій постановці задач механіки конкретні кінематичні рівняння руху для матеріальної точки дістають при інтегруванні відповідних рівнянь динаміки, які пов'язують між собою сили й спричинені ними прискорення, координати й час з урахуванням початкових даних руху.

Як і в разі рівнозмірного прямолінійного руху точки, основними кінематичними величинами довільного прямолінійного руху є

швидкість і прискорення. З математики відомо — якщо є неперервна, однозначна функція  $y = y(x)$ , то для визначення її швидкості зміни при певному значенні аргумента  $x$  функції розглядається її похідна, тобто границя відношення приросту функції до відповідного приросту її аргумента, за умови, що останній — приріст аргумента — прямує до нуля. Записується це так:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y', \quad (1.22)$$

де  $\frac{dy}{dx} = y'$  — похідна функції  $y(x)$  по незалежній змінній  $x$ .

При визначенні швидкості й прискорення для такого випадку руху скористаємося математичним поняттям похідної. Для цього виберемо під час руху точки довільний момент часу  $t$ , якому відповідає цілком певне положення рухомої точки на осі  $Ox$ , яке характеризується координатою  $x$ . З даного положення за проміжок часу  $\Delta t = t_1 - t$ , де  $t_1$  — близьке до  $t$  значення, точка, рухаючись по осі  $Ox$ , пере-

міщується на відстань, відповідну приросту координати  $x$ :  $\Delta x = x_1 - x$ , де  $x_1$  і  $x$  відповідні моментам  $t_1$  і  $t$  значення.

Візьмемо відношення приросту координати  $\Delta x$  до відповідного приросту часу  $\Delta t$  і перейдемо до границі при  $\Delta t$ , що прямує до нуля. Дістанемо швидкість рухомої точки в даний момент часу  $t$  (миттєву швидкість), тобто

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.23)$$

*Швидкість довільного прямолінійного руху точки математично визначається як перша похідна по часу від координати рухомої точки.*

Зауважимо, що в рівності (1.23) крапка над  $x$  є ньютонівим позначенням похідної по часу, на відміну від символу похідної в Лейбніца —  $d/dt$ .

Відповідно до виразу (1.21) миттєва швидкість довільного прямолінійного руху точки є алгебраїчною величиною і при  $\dot{x} > 0$  рух точки відбувається в додатному напрямі осі  $Ox$ , а при  $\dot{x} < 0$  рух має протилежний до попереднього напрям. Якщо  $\dot{x}$  помножити на одиничний вектор  $\vec{i}$  осі  $Ox$ , то маємо вектор швидкості

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i},$$

який вказує на напрям руху точки по осі  $Ox$ . Напрямок вектора  $\vec{v}$  на осі  $Ox$  визначається знаком похідної  $\dot{x}$ : якщо  $\dot{x} > 0$  — напрямки  $\vec{v}$  і  $\vec{i}$  збігаються, при  $\dot{x} < 0$  напрямки  $\vec{v}$  й  $\vec{i}$  взаємно протилежні.

Наведемо інше означення миттєвої швидкості.

*Швидкістю змінного прямолінійного руху точки в даний момент часу є така її швидкість, з якою б рухалась точка, якби, починаючи з цього моменту, її рух став рівномірним.*

Введемо поняття миттєвого прискорення довільного прямолінійного руху. Візьмемо до уваги, що в довільному русі швидкість  $\vec{v}$  точки, як і її координата  $x$ , неперервно змінюється з часом  $t$ . Як і при визначенні миттєвої швидкості, розглянемо будь-яке положення рухомої точки на осі  $Ox$ , що характеризується координатою  $x$  у момент часу  $t$ . Нехай швидкість точки в указаний момент  $\dot{x}_1 = v_1$ , а через проміжок часу  $\Delta t = t_1 - t$ , у момент  $t_1$  швидкість  $\dot{x}_1 = v_1$ . Тоді зміна швидкості за  $\Delta t$  буде  $\Delta v = \dot{x}_1 - \dot{x} = \Delta \dot{x}$ .

Склавши відношення зміни швидкості до проміжку часу, за який ця зміна відбулася, і переходячи до границі за умови прямування проміжку часу до нуля, дістанемо прискорення точки в даний момент часу  $t$  в разі її змінного прямолінійного руху:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta t} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (1.24)$$

або

*прискорення точки в даний момент часу в разі її довільного прямо- лінійного руху дорівнює першій похідній від швидкості точки по часу або другій похідній від її координати по часу.*

Наведемо ще одне означення миттєвого прискорення точки в разі її довільного прямолінійного руху:

*прискорення точки в даний момент часу довільного прямолінійного руху — це таке прискорення, з яким би рухалась точка, якби, по- чинаючи з цього моменту часу, її рух став рівнозмінним.*

Прискорення точки під час змінного прямолінійного руху, як і в разі рівнозмінного, можна розглядати як векторну величину (рис. 1.10). Візьмемо добуток координати  $x$  точки в разі змінного руху на одиничний вектор  $\vec{i}$  осі  $Ox$  і продиференціюємо по часу  $t$ , узявши до уваги, що  $\vec{i}$  — постійний вектор:

$$\frac{dx\vec{i}}{dt} = \dot{x}\vec{i}.$$

Втім, величина  $x\vec{i}$  — це радіус-вектор  $\vec{r}$  рухомої точки (див. рис. 1.2), а  $\dot{x}\vec{i}$  — вектор її швидкості  $\vec{v}$ . Отже, дістанемо векторну рівність

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.25)$$

Отже, вектор швидкості в даний момент часу дорівнює першій похідній від радіуса-вектора точки по часу. Векторна формула (1.25) має місце і в криволінійних рухах точки.

Далі візьмемо похідну по часу від добутку  $x\vec{i}$ :

$$\frac{dx\vec{i}}{dt} = \ddot{x}\vec{i}.$$

Ліва частина рівності — це друга похідна від радіуса-вектора  $\vec{r}$  по часу (1.25), а права — вектор прискорення. Тому дістанемо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}, \quad (1.26)$$

тобто вектор прискорення точки дорівнює першій похідній по часу від вектора швидкості точки або другій похідній по часу від радіуса-вектора точки.

На рис. 1.10, *a* наведено приклад прискореного руху, а на рис. 1.10, *б* — приклад сповільненого руху точки (вважають, що рух довільний).

Зазначимо, що прискорення матеріальної точки, на підставі другого закону Ньютона, спричиняється прикладеною до неї силою й дорівнює тій її частині, яка прикладається до одиничної маси матеріальної точки (нібито сила, викликаючи прискорення, розподіляється порівну між одиничними масами матеріального тіла, прийнятого за матеріальну точку).

Якщо торкнутися питання про графічне подання кінематичних величин в разі довільного змінного руху, то лише звернімо увагу на деякі моменти. Графіки координати  $x(t)$ , швидкості  $v(t)$  і прискорення  $a(t)$  в разі розглядуваного руху — це довільні криві, між якими існує відповідний зв'язок, що визначається властивостями похідних. Також зазначимо, що для побудови графіків користуються масштабами

$$\mu_x = \frac{x}{X}; \quad \mu_v = \frac{v}{V}; \quad \mu_a = \frac{a}{A}; \quad \mu_t = \frac{t}{T}, \quad (1.27)$$

де  $\mu_x$ ,  $\mu_v$ ,  $\mu_t$  вже розглядалося в § 3, а  $\mu_a$  — масштаб прискорень ( $[\mu_a] = [a]/[A] = \text{м/с}^2 \cdot \text{мм}$ ).

## § 4. Рівномірний і рівнозмінний рух по колу\_\_\_\_\_

Уявімо, що матеріальна точка у вигляді малого кільця, насадженого на прямолінійну ідеально гладеньку дrottину, з якою суміщається вісь  $Ox$ , здійснює рівномірний рух зі швидкістю  $v = \dot{x} = \text{const}$ . Тепер, якщо мислено зігнути прямолінійний відрізок дrottини з рухомим на ньому кільцем у горизонтальне коло, то кільце по утвореному з прямолінійної дrottини колу рухатиметься далі з тією самою швидкістю.

Рівномірний рух кільця по новій траєкторії, розташованій в горизонтальній площині, відбувається тому, що в напрямі, дотичному до кола, силових впливів з боку дrottини немає, в той час як у напрямі радіуса кола на рухоме кільце впливає нормальна реакція дrottини, що призводить до відхилення руху кільця від його прямолінійного руху, забезпечуючи в такий спосіб рух по колу.

Нормальна реакція  $\vec{N}$  дrottини викликає постійне за абсолютним значенням прискорення  $\vec{a}_n$ , яке напрямлене по радіусу кола до його центра. Та прискорення в кожний даний момент часу — це зміна швидкості за одиницю часу. Оскільки за абсолютним значенням швидкість руху кільця не змінюється, то прискорення в даних умовах руху може виникнути лише внаслідок зміни напрямку швидкості. Отже, швидкість точки по колу — це векторна величина, а вектор швидкості має напрям дотичної до кола, оскільки приріст вектора швидкості за одиницю часу, тобто прискорення  $\vec{a}_n$ , збігається з радіусом кола і в разі постійного модуля швидкості  $\vec{v}$  може бути лише перпендикулярним до вектора  $\vec{v}$  (рис. 2.1);  $\vec{a}_n$  — нормальне прискорення.

Якщо перетворити вісь  $Ox$  з початком  $O$  на коло, прямолінійний відрізок завдовжки  $x$  стає дугою, яка має довжину  $s = x$ . Так само, як і на осі  $Ox$ , на колі від початкової точки  $O$  відліку дугової координати  $s$  встановлюються додатний і від'ємний напрямки (див. далі рис. 2.3). Отже, положення рухомої точки  $A$  на колі визначається криволінійною (дуговою) координатою  $s$ , яка є відстанню від початкової точки

$O$  до того положення рухомої точки, якому вона відповідає на колі в той чи інший момент часу, і вимірюється вздовж кола.

Якщо рухома точка  $A$  на колі розташована від початку  $O$  на відстані  $s$ , то має місце співвідношення

$$s = \varphi R, \quad (2.1)$$

де  $\varphi$  — центральний кут;  $R$  — радіус кола.

За умов рівномірного руху точки  $A$  по колу маємо

$$s = vt. \quad (2.2)$$

Це рівняння відповідає нульовим початковим даним (при  $t = t_0 = 0$  маємо  $s = s_0 = 0$ ).

Для ненульових початкових даних дістанемо рівняння рівномірного руху по колу:

$$s = s_0 + v(t - t_0). \quad (2.3)$$

Рівномірний рух точки по колу має постійне за модулем прискорення  $a_n$ , яке називають *доцентровим (нормальним) прискоренням*. Рух по колу в цьому випадку є накладанням двох рухів — руху за інерцією, що відбувається по дотичній до кола, і руху рівноприскореного прямолінійного, що здійснюється в напрямі центра кола по його радіусу.

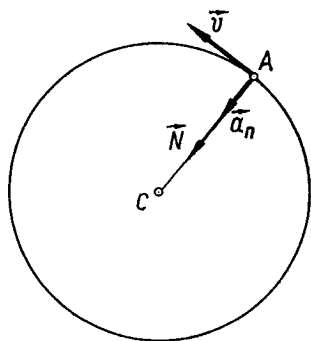


Рис. 2.1

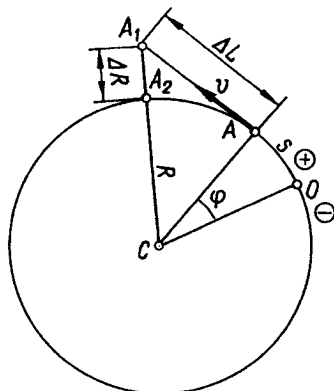


Рис. 2.2

Беручи до уваги таке уявлення про рівномірний рух по колу, знайдемо формулу доцентрового прискорення  $a_d = a_n$ . За дуже малий проміжок часу  $\Delta t$  з даного положення на колі (рис. 2.2) рухома точка  $A$ , здійснюючи свій інерційний рух по дотичній, пройде шлях  $\Delta l = v\Delta t$ . Водночас вона, рухаючися рівноприскорено з шуканим доцентровим прискоренням  $a_d$  у напрямі до центра  $C$  кола по його радіусу  $R$ , за той самий проміжок часу  $\Delta t$  подолає відстань  $R$  і повернеться на коло в положення  $A_2$ . З прямокутного трикутника  $CAA_1$  запишемо:

$$v^2 \Delta t^2 + R^2 = (R + \Delta R)^2.$$

Переміщення точки в рівноприскореному русі з доцентровим прискоренням визначається за відомими формулами (1.15), (1.16):

$$\Delta R = \frac{a_{\text{д}} \Delta t^2}{2}.$$

Підставимо цю величину в попередню рівність і виконаємо відповідні математичні дії. Дістанемо

$$v^2 \Delta t^2 + R^2 = R^2 + 2R \frac{a_{\text{д}} \Delta t^2}{2} + \frac{a_{\text{д}}^2 \Delta t^4}{4}.$$

Знехтуємо в правій частині третім членом як величиною вищого порядку малості порівняно з другим членом, тоді

$$v^2 \Delta t^2 = R \Delta t^2 a_{\text{д}},$$

звідки виводимо шукану формулу доцентрового прискорення:

$$a_{\text{д}} = \frac{v^2}{R}. \quad (2.4)$$

Якщо, крім доцентрової сили, яка спричиняє доцентрове прискорення, на матеріальну точку, що рухається по колу, діє сила в напрямі дотичної до кола, то рух точки, згідно з другим законом Ньютона, буде рівнозмінним з прискоренням  $a_{\tau}$ , яке називають *дотичним (тангенціальним) прискоренням*  $a_{\tau} = a_{\tau}$ .

Застосуємо формули (1.16) для випадку рівнозмінного руху точки по колу й запишемо рівняння дугової координати та рівняння швидкості:

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a_{\tau}}{2}(t - t_0)^2; \quad (2.5)$$

$$v = v_0 + a_{\tau}(t - t_0), \quad (2.6)$$

де  $s_0$ ,  $v_0$  — початкові дані руху;  $a_{\tau} = dv/dt = \text{const}$ . У формулах (2.5) і (2.6)  $v_0$  і  $a_{\tau}$  — алгебраїчні величини: якщо  $v_0 > 0$  і  $a_{\tau} > 0$ , то рух точки по колу рівноприскорений, і при  $v_0 > 0$  і  $a_{\tau} < 0$  — рівносповільнений.

## § 5. Довільний рух по колу.

### Швидкість і прискорення як векторні величини

Спочатку встановимо в кожній точці кола два головні напрями. Для цього візьмемо на колі (рис. 2.3, а, б) нерухому точку  $B$ , яка з ним незмінно зв'язана. Нехай її дугова координата  $s$ .

Введемо поняття одиничного вектора дотичної до кола в його точці  $B$ , який і визначатиме перший головний напрям. При визначенні положення точки  $B$ , крім дугової координати  $s$ , можна скористатися радіусом-вектором  $\vec{r}$ , який сполучає точку  $O$  відліку з даною точкою  $B$  і має напрям від  $O$  до  $B$  (рис. 2.3, а). Зауважимо, що кожному значенню дугової координати  $s$  відповідає цілком певний радіус-вектор. Тому для точок кола їхній радіус-вектор буде функцією дугової координати  $s$ , тобто  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ .

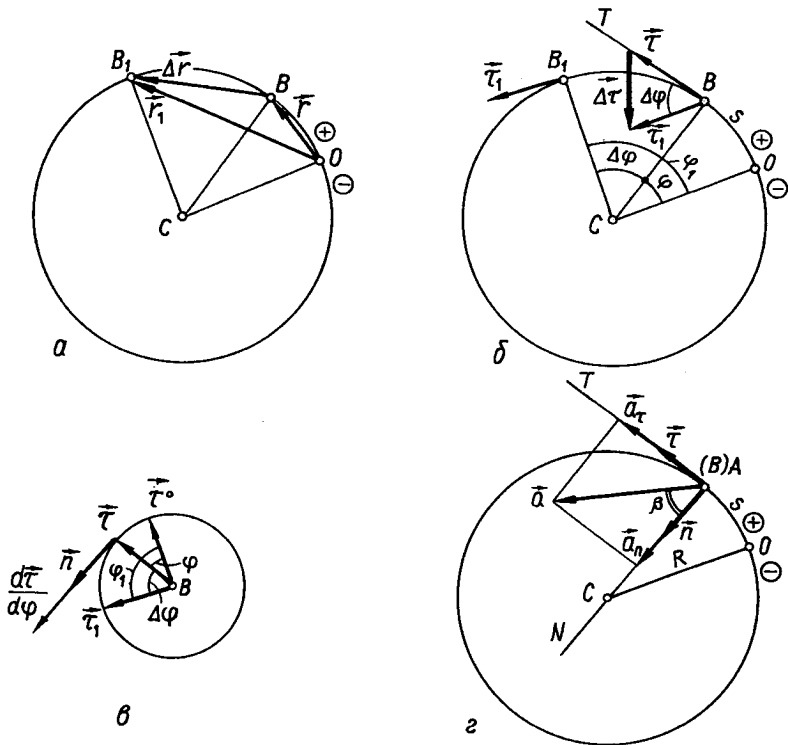


Рис. 2.3

Тепер надамо дуговій координаті  $s$  малого приросту  $\Delta s = s_1 - s$ , що означає перехід від точки  $B$  до близької до неї іншої точки  $B_1$  кола, дугова координата якої  $s_1$ . Тоді малому приросту  $\Delta s$  відповідає елементарний приріст радіуса-вектора  $\vec{r}$  при переході на колі від точки  $B$  до розташованої поблизу неї іншої точки  $B_1$ . Цей приріст позначимо



$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ . Візьмемо відношення приросту радіуса-вектора до відповідного приросту дугової координати і перейдемо до границі в разі прямування радіуса-вектора до нуля:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}.$$

Ця границя називається векторною похідною радіуса-вектора точки кола по дуговій її координаті й дорівнює одиничному вектору  $\vec{\tau}$ .

Одиничний вектор  $\vec{\tau}$  збігається з дотичною  $BT$  до кола в точці  $B$  і напрямлений у бік додатних значень дугової координати (рис. 2.3, б). Справді, нескінченно малий приріст радіуса-вектора  $d\vec{r}$  за довжиною збігається з нескінченно малим елементом дуги  $ds$  кола й лежить на дотичній до кола. Тому модуль відношення

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1.$$

При зміні знака  $ds$  змінюється й напрям відповідного елементарного приросту  $d\vec{r}$  на протилежний, а напрям одиничного вектора

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

залишається незмінним.

Отже, першим головним напрямом на колі є напрям одиничного вектора  $\vec{\tau}$ , який можна побудувати в кожній точці кола. Дотична до кола в будь-якій його точці  $B$  з одиничним на ній вектором  $\vec{\tau}$  називається *дотичною віссю*  $BT$  (рис. 2.3, в). Додатний напрям дотичної  $BT$  визначається напрямом одиничного вектора  $\vec{\tau}$ .

У разі руху точки  $A$  по колу (не тільки по колу, а й по будь-якій криволінійній траєкторії) головними напрямками в кожному її положенні на колі є два напрями — дотичної осі  $BT$  і так званої головної нормалі  $BN$  (нормальна вісь). У кожній точці кола можна побудувати безліч нормалей до дотичної  $BT$ . Та з них, яка суміщається з радіусом кола й проходить через його центр  $C$ , називається *головною нормаллю*  $BN$ . Напрямок головної нормальної осі  $BN$  визначається одиничним вектором  $\vec{n}$ , який виходить з точки  $B$  кола і має напрям до його центра  $C$ . Обґрунтуємо введення цього одиничного вектора.

Розглянемо зміну напрямку одиничного вектора  $\vec{\tau}$ , коли точка  $B$  кола переходить в іншу, близько розташовану до неї точку  $B_1$ , яка належить також колу, переносючи вектор  $\vec{\tau}_1$  з точки  $B_1$  у попередню  $B$ . Шукану зміну напрямку становить вектор  $\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 - \vec{\tau}$ , що сполучає кінці векторів  $\vec{\tau}$  і  $\vec{\tau}_1$ , зображених при точці  $B$  (рис. 2.3, б). З рівнобедреного трикутника  $B\vec{\tau}\vec{\tau}_1$  з кутом при вершині  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ , де  $\Delta\varphi = \Delta s/R$ , знаходимо приріст

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2|\vec{\tau}| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Поділивши цю рівність на приріст дугової координати  $\Delta s$  і перейшовши до границі за умови прямування  $\Delta s$  до нуля, дістанемо

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s} = \frac{1}{R} \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{1}{R}.$$

Отже, модуль похідної  $d\vec{\tau}/ds$  має значення:

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \frac{1}{R}. \quad (2.7)$$

Сам напрям векторної похідної встановлюється з геометричних міркувань (рис. 2.3, б, в). У разі прямування  $\Delta\varphi$  до нуля кут  $90^\circ - \Delta\varphi/2$  при основі  $\Delta\vec{\tau}$  трикутника  $B\vec{\tau}_1$  прямує до  $90^\circ$ . Як відомо, будь-який вектор можна представити як добуток його модуля на одиничний вектор. Отже, маємо векторну рівність

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{n}, \quad (2.8)$$

де  $\vec{n}$  — одиничний вектор головної нормалі  $BN$ , який утворює з вектором  $\vec{\tau}$  прямий кут і напрямлений по радіусу кола до його центра  $C$  (рис. 2.3, г).

Вісь  $BN$  з одиничним вектором  $\vec{n}$  на ній, яка проходить через точку  $B$  кола і його центр  $C$ , називають *головною нормаллю* — це другий головний напрям на колі в даній його точці  $B$ . Дотичну  $BT$  і головну нормаль  $BN$  називають *натуральними осями*.

Тепер розглянемо довільний рух точки  $A$  по колу (рис. 2.3, г). Точка  $A$ , здійснюючи довільний рух по колу, проходить його різні нерухомі точки  $B$ , кожній з яких відповідає цілком певне значення дугової координати  $s$ . Отже, для рухомої точки  $A$  дугова координата  $s$  є неперервною однозначною функцією часу, яка описує рівняння довільного руху точки по колу:

$$s = s(t). \quad (2.9)$$

Для рухомої точки  $A$  радіус-вектор  $\vec{r}$  нерухомих точок  $B$  кола (рис. 2.3, а) є вже складною функцією часу:

$$\vec{r} = \vec{r}[s(t)], \quad (2.10)$$

в якій проміжною змінною є дугова координата  $s$ .

Щоб визначити алгебраїчно миттєву швидкість точки в разі довільного руху по колу, візьмемо похідну по часу від дугової координати (2.9):

$$v_{\tau} = \dot{s} = \frac{ds}{dt}. \quad (2.11)$$

Векторне значення миттєвої швидкості в цьому випадку руху точки дістанемо, якщо продиференціюємо по часу векторну функцію (2.10):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\vec{r}}{ds}$$

або, з урахуванням (2.11) і  $\tau = d\vec{r}/ds$ ,

$$\vec{v} = v_{\tau} \vec{\tau} = \dot{s} \vec{\tau}. \quad (2.12)$$

Отже, за рівностями (2.11) і (2.12) можна зробити висновки:

*згідно з (2.11) алгебраїчне значення миттєвої швидкості точки в разі довільного руху по колу дорівнює першій похідній по часу від дугової координати точки;*

*вектор миттєвої швидкості точки в разі довільного руху по колу відповідно до (2.12) дорівнює добутку алгебраїчного значення миттєвої швидкості точки на одиничний вектор дотичної.*

Зазначимо, що вектор швидкості  $\vec{v}$  збігається з напрямом  $\vec{\tau}$ , якщо  $\dot{s} = v_{\tau} > 0$  (рис. 2.3, з), і при  $\dot{s} \equiv v_{\tau} < 0$  протилежний напрямку  $\vec{\tau}$ .

Зауважимо, що формули (2.11) і (2.12) мають місце в найзагальнішому випадку криволінійного руху точки.

Тепер визначимо прискорення точки в разі довільного руху по колу. Якщо продиференціюємо по часу миттєву швидкість (2.11), то дістанемо алгебраїчне значення так званого дотичного (тангенціального) прискорення точки в цьому випадку руху:

$$a_{\tau} = \ddot{s} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (2.13)$$

Вектор дотичного (тангенціального) прискорення точки дістанемо, помноживши (2.13) на одиничний вектор  $\vec{\tau}$ :

$$\vec{a}_{\tau} = \ddot{s} \vec{\tau}. \quad (2.14)$$

Це — перша прямокутна складова вектора повного прискорення точки в разі довільного руху по колу. Дотичне прискорення враховує лише зміни вектора швидкості, які відбуваються вздовж дотичної — в напрямі орта  $\vec{\tau}$  і в протилежному до нього напрямі. Величину (2.14) можна дістати диференціюванням векторної рівності (2.12) в припущенні, що  $\vec{\tau}$  є сталим вектором.

Другу прямокутну складову повного прискорення  $\vec{a}$  — нормальне прискорення  $\vec{a}_n$ , яке враховує лише зміну напрямку вектора швидкості  $\vec{v}$  уздовж другого головного напрямку — напрямку головної нормалі  $BN$ , визначимо диференціюванням по часу векторної рівності (2.12) при  $\dot{s} = \text{const}$ :

$$\vec{a}_n = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\dot{s}=\text{const}} = \dot{s} \frac{d\vec{\tau}}{dt},$$

але

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \dot{s}.$$

Враховавши (2.8), остаточно маємо нормальне прискорення

$$\vec{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{n}, \quad (2.15)$$

яке завжди напрямлене до центра кола (рис. 2.3, з).

Повне прискорення точки  $\vec{a}$  в разі її руху по колу знайдемо обчисленням повної похідної по часу від векторної рівності (2.12):

$$\vec{a} = \dot{s} \vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{n}, \quad (2.16)$$

або

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (2.17)$$

Оскільки між складовими  $\vec{a}_\tau$ ,  $\vec{a}_n$  кут прямий, то на підставі теореми Піфагора визначимо модуль повного прискорення  $\vec{a}$ :

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (2.18)$$

Векторні рівності (2.16), (2.17) виражають частковий випадок правила паралелограма прискорень — *правило прямокутника прискорень*: повне прискорення зображується діагоналлю прямокутника, побудованого на дотичному й нормальному прискореннях (рис. 2.3, з).

Скалярні величини

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{v^2}{R} \quad (2.19)$$

називають відповідно дотичним і нормальним прискореннями. Знаючи їх, можна визначити кут  $\beta$ , який утворює вектор повного прискорення  $\vec{a}$  з радіусом кола:

$$\text{tg } \beta = \frac{a_\tau}{a_n}. \quad (2.20)$$

Нарешті зазначимо, що дотичне прискорення  $\vec{a}_\tau$  матеріальної точки спричиняється дотичною складовою  $\vec{F}_\tau$  сили  $\vec{F}$ , нормальне  $\vec{a}_n$  — її нормальною складовою  $\vec{F}_n$ , а повне прискорення  $\vec{a}$  — рівнодійною  $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$ , що впливає з другого закону Ньютона  $m\vec{a} = \vec{F}$ .

## § 6. Рух по довільній кривій. Вектори миттєвої швидкості й миттєвого прискорення

---

Спочатку означимо траєкторію рухомої точки, користуючись поняттям абсолютного нерухомого простору.

*Траєкторією рухомої точки  $A$  називається геометричне місце нерухомих точок  $B$  абсолютного простору, через які під час свого руху проходить точка  $A$ .*

Траєкторію точки, незмінно зв'язану з абсолютно нерухомим простором, називатимемо абсолютною траєкторією. Тому швидкість і прискорення точки під час її руху по абсолютній траєкторії також вважатимемо абсолютними кінематичними величинами. Річ у тім, що змінна швидкість і прискорення як характеристика зміни швидкості мають фізичний смисл, якщо вони визначені для матеріальної, а не геометричної точки, і є величинами абсолютними. Це пояснюється тим, що другий закон Ньютона справедливий для рухів, які здійснюються відносно абсолютно нерухомого простору або так званої інерціальної системи відліку.

Далі розглянемо довільну криву, яка незмінно зв'язана з абсолютно нерухомим простором, й установемо спосіб визначення положень нерухомих точок, які належать даній кривій. Для цього, як і в разі прямої й кола, на взятій просторовій кривій вибираємо довільно початкову точку  $O$  відліку координати (в цьому випадку — криволінійної координати). Від вибраної точки  $O$  на кривій уздовж неї встановлюємо додатний і від'ємний напрями.

Положення нерухомої точки  $B$  на кривій з початком відліку — точкою  $O$  і вибраними на ній додатним та від'ємним напрямками, визначатимемо відстанню її від точки  $O$ ; ця відстань вимірюється вздовж кривої в додатному або від'ємному напрямі, залежно від того, де на кривій розташована точка  $B$ . Ця відстань називається *дуговою координатою* й позначається  $s$ , як і для кола (рис. 2.4, а).

Дугова координата є алгебраїчною величиною: початок  $O$  відліку дугової координати  $s$  ділить криву на дві частини, позначені «+» і «-», одна з них («+») містить точки з додатним значенням дугової координати, інша («-») — точки, що характеризуються від'ємним значенням дугової координати.

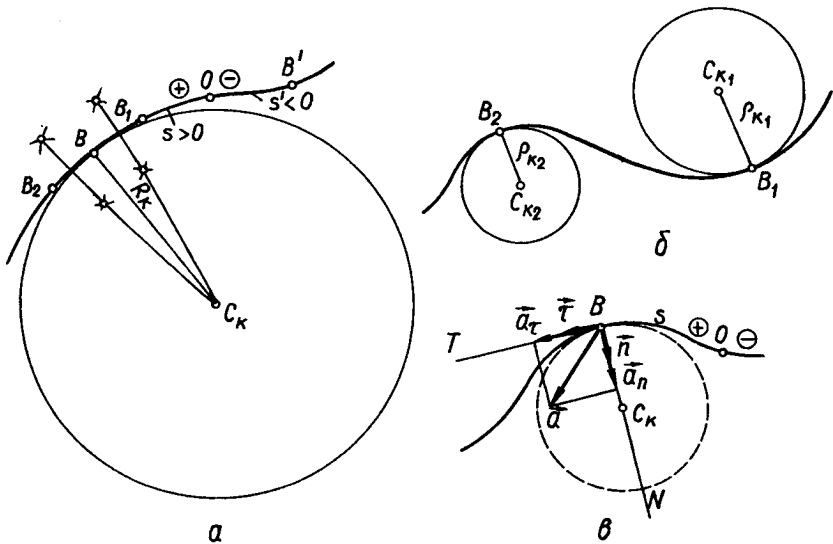


Рис. 2.4

Кожна точка проградуєваної кривої лінії характеризується, крім дугової координати  $s$ , трьома головними напрямками — напрямком дотичної  $BT$  з одиничним на ній вектором  $\vec{\tau}$ , який завжди збігається з додатним напрямком відліку дугової координати  $s$ , напрямком головної нормалі  $BN$  з одиничним на ній вектором  $\vec{n}$ , на якій розташований центр кривизни  $C$  кривої в точці  $B$ , і напрямком так званої біномалі  $BV$  (цей напрям розглянемо далі).

Установимо перші два зазначених напрямки, виходячи з властивостей точок кола, які було описано в попередньому параграфі. З геометрії відомо, що через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести коло, й до того ж тільки одне. Використаємо дане положення й через близькі три точки  $B_1$ ,  $B$  і  $B_2$  кривої проведемо коло. Центр цього кола розташований на перетині перпендикулярів до хорд  $B_1B$  і  $BB_2$ , проведених через їхні середини (рис. 2.4, а). Якщо тепер точки  $B_1$  і  $B_2$  водночас наблизити до точки  $B$ , то площина кола повертатиметься навколо точки  $B$ , також за цих умов зміниться довжина його радіуса  $R$ , а отже, й положення центра  $C$  кола.

Як тільки точки  $B_1$  і  $B_2$ , необмежено наближаючися до точки  $B$ , зйдуться з нею, то коло зі змінним радіусом і змінною орієнтацією площини набуде цілком певне граничне положення відносно кривої. В цьому граничному положенні його називають *колом кривизни кривої* в її точці  $B$ . Центр  $C_\kappa$  і радіус  $R = \rho_\kappa$  кола кривизни називають від-

повідно центром і радіусом кривизни кривої в даній точці  $B$  кола. Отже, довільна крива в кожній своїй точці характеризується колом кривизни, центром  $C_k$  і радіусом кривизни  $\rho_k$  (рис. 2.4, б).

Колом кривизни кривої в даній її точці називається таке коло, яке проходить через цю точку, й дві інші нескінченно близькі до неї точки кривої.

Виходячи з такого означення, зауважимо, що нескінченно малий дуговий елемент  $B_1BB_2$  кривої, що містить дану точку  $B$ , у якій побудовано коло кривизни, усіма своїми точками збігається з відповідним нескінченно малим елементом дуги кола кривизни в околі точки  $B$ .

Тепер, якщо в спільній точці  $B$  кола кривизни і кривої провести до кола кривизни дотичну  $BT$  у напрямі відліку додатних значень дугової координати  $s$  точок кривої, а також головну нормаль  $BN$ , то ці головні напрямки на колі кривизни в точці  $B$  водночас будуть головними і на кривій (рис. 2.4, в).

Встановивши спосіб визначення положення точок на довільній кривій, а також головні напрямки  $BT$  і  $BN$  у точках на кривій, розглянемо довільний рух точки  $A$  по заданій довільної форми просторовій траєкторії, незмінно зв'язаній з абсолютно нерухомим простором. Точка  $A$  під час свого руху по криволінійній траєкторії в кожний момент часу збігається з певною нерухомою точкою  $B$  траєкторії, дугова координата якої  $s$ . Отже, положення рухомої точки  $A$  на траєкторії в той чи інший момент часу визначається дуговою координатою  $s$  тієї нерухомої на кривій точки  $B$ , з якою в даний момент часу збігається рухома точка  $A$ . Ця дугова координата  $s$  для рухомої точки  $A$  буде неперервною функцією часу  $t$ , оскільки точка  $A$ , здійснюючи свій рух, проходить через різні нерухомі відносно кривої її точки  $B$ . Отже, рівняння руху точки  $A$  по довільній криволінійній траєкторії матиме вигляд

$$s = s(t). \quad (2.21)$$

Для визначення швидкості й прискорення рухомої точки  $A$  по криволінійній траєкторії скористаємося результатами попереднього параграфу, які стосуються руху точки по колу. Вже відомо, що крива, яка для рухомої точки  $A$  є траєкторією, характеризується в кожній своїй нерухомій точці відповідним колом кривизни. Тому траєкторію рухомої точки  $A$  можна уявити складеною з елементарних дуг нескінченно малої довжини відповідних кіл кривизни.

Отже, рух точки  $A$  по криволінійній траєкторії є неперервним у часі рядом послідовних нескінченно малих переміщень по нескінченно малих дугах відповідних кіл кривизни. Отже, швидкістю і прискоренням точки  $A$  в разі руху по кривій в кожний момент часу є швидкість  $\vec{v}$  і прискорення  $\vec{a}$ , з якими рухома точка  $A$  в цей самий

момент часу проходить нескінченно малу дугу відповідного кола кривизни.

На підставі викладених міркувань дійдемо висновку, що швидкість і прискорення в разі довільного руху по криволінійній траєкторії визначаються за тими самими формулами, які мають місце для точки, що рухається по колу — (2.12) і (2.16). Запишемо ці дві основні векторні формули:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} = \dot{s} \vec{\tau}, \quad (2.22)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_k} \vec{n}, \quad (2.23)$$

де  $\rho_k$ , — радіус кривизни траєкторії,  $\vec{\tau}$  і  $\vec{n}$  — одиничні вектори дотичної осі  $AT$  і головної нормалі  $AN$  відповідно.

Наведемо алгебраїчні формули дотичного прискорення й модуля нормального прискорення відповідно:

$$a_\tau = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho_k}, \quad (2.24)$$

а також вектори дотичного й нормального прискорень відповідно:

$$\vec{a}_\tau = \ddot{s} \vec{\tau}; \quad \vec{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho_k} \vec{n}.$$

Вектор повного прискорення точки за умови її руху по кривій визначається за правилом прямокутника прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

а його модуль за формулою

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (2.25)$$

З наведених кінематичних формул випливає, що швидкість точки в разі криволінійного руху напрямлена по дотичній до криволінійної траєкторії в даному положенні на ній рухомої точки, а її прискорення напрямлене в бік угнутості траєкторії і має в загальному випадку руху в кожний момент часу дві прямокутні складові — дотичне  $\vec{a}_\tau$  і нормальне  $\vec{a}_n$  прискорення (рис. 2.4, в).

Якщо в разі криволінійного руху точки її швидкість і дотичне прискорення мають однакові напрями, то рух точки по кривій прискорений; за умов різних їхніх напрямів — рух сповільнений. Незалежно від характеру руху точки по кривій її нормальне прискорення в будь-який момент часу напрямлене до центра  $C_k$  траєкторії. Як і в разі руху по колу, дотичне прискорення характеризує зміну швид-



кості точки вздовж дотичної, а нормальне прискорення є наслідком зміни напрямку швидкості, яка відбувається в напрямі головної нормалі.

Зробимо деякі зауваження, що стосуються кінематики руху точки по криволінійній траєкторії.

Площина, утворена дотичною віссю  $BT$  і головною нормаллю  $BN$ , називається *стичною площиною*  $BTN$ . Зазначимо, що стична площина  $BTN$  характеризується тим, що вона з кривою в околі нерухокої точки  $B$  кривої має найтісніший дотик порівняно із взаємним розташуванням кривої й будь-якої іншої площини, утвореної дотичною віссю і якою-небудь з сім'ї нормалей, до якої входить і головна нормаль  $BN$ .

Введемо третій головний напрям на кривій, який визначається напрямом так званої бінормалі  $B\bar{B}$ . Бінормаль  $B\bar{B}$  перпендикулярна до стичної площини  $BTN$  і виходить з точки  $B$  кривої, з якої виходять дві інші головні осі  $BT$  і  $BN$ . За додатний напрям на щойно введеній осі  $B\bar{B}$  беруть такий, що коли дивитися навпроти нього, то для суміщення дотичної  $BT$  з нормаллю  $BN$  треба першу повернути проти руху стрілки годинника навколо бінормалі на кут  $90^\circ$ .

Додатний напрям на бінормалі  $B\bar{B}$  позначають одиничним вектором  $\bar{b}$ . Отже, в кожній точці кривої можна побудувати три взаємно перпендикулярні орти  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  — одиничні вектори головних напрямів на кривій в її точках. З даними головними напрямками суміщаються осі  $BT$ ,  $BN$  і  $B\bar{B}$  натурального триєдра  $BTN\bar{B}$ , який є для точок кривої локальною системою трьох взаємно перпендикулярних осей. Триєдр  $BTN\bar{B}$  не є системою координатних осей, подібно до декартової. Натуральні осі триєдра  $BTN\bar{B}$  використовують як осі проєкцій для тих чи інших векторних рівнянь механіки.

У разі руху точки по криволінійній траєкторії зручно проєктувати її прискорення на осі локального натурального триєдра  $BTN\bar{B}$ . Згідно із формулою (2.23) запишемо:

$$\bar{a} = a_t \bar{t} + a_n \bar{n}; \quad a_b = 0.$$

Отже, вектор прискорення  $\bar{a}$  лежить у стичній площині  $ATN$  (у позначенні натуральних осей точку  $B$  замінено на  $A$ , оскільки під час руху вона збігається з тією чи іншою точкою  $B$  кривої) і його проєкція на бінормальну вісь  $B\bar{B}$  є нульовою. Зазначимо, що дотичне й нормальне прискорення в даному положенні рухокої точки на кривій є абсолютними складовими повного її прискорення в напрямках локальних натуральних осей, початок  $B$  яких і самі осі — нерухомі: під час свого руху точка  $A$  проходить на кривій різні початки  $B$  позрізному орієнтованих нерухомих натуральних осей.

**Силкові (фізичні) прискорення.** Якщо прискорення визначено для матеріальних точок і відносно абсолютно нерухомого простору (абсолютно нерухокої системи відліку), або так званої інерціальної сис-

теми відліку (система, що рухається прямолінійно рівномірно відносно абсолютно нерухомої системи відліку), то такі абсолютні прискорення називають силовими (фізичними) прискореннями, оскільки вони спричиняються силами відповідно до основного закону динаміки (другого закону Ньютона):

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (2.26)$$

або добуток маси матеріальної точки на вектор її абсолютного прискорення дорівнює рівнодійній сил, прикладених до матеріальної точки; прискорення і рівнодійна мають однаковий напрям.

Рівняння (2.26) можна записати в скалярній формі:

$$a = \frac{F}{m}. \quad (2.27)$$

Отже, прискорення матеріальної точки дорівнює силі, прикладеній до одиничної маси матеріального тіла, яке прийнято за матеріальну точку.

Не слід ототожнювати поняття сили й прискорення: сила — це динамічна величина, яка враховує вплив одних матеріальних тіл на рух інших, а прискорення — кінематична величина, яка вводиться в розгляд незалежно від сил та інерційних властивостей матеріальних тіл.

**Геометричні прискорення.** Можна навести приклади таких прискорень, які не спричиняються силами і є суто геометричними поняттями. До геометричних прискорень не можна застосувати рівняння другого закону Ньютона. Геометричні прискорення застосовують при розгляді руху матеріальних тіл в неінерціальних системах відліку.

Щоб ознайомитися на конкретному прикладі з геометричними прискореннями, розглянемо таку задачу:

визначити абсолютне прискорення кульки, яка перебуває всередині горизонтальної прямолінійної трубки під час її обертання навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 2.5). Поверхня трубки ідеально гладенька.

Розв'язання цієї задачі дає змогу ознайомитися з векторним способом дослідження руху, який буде розглянуто далі.

Спочатку виведемо формулу прискорення, що має загальний характер. Положення кульки визначимо радіусом-вектором  $\vec{r}$ , проведеним з осі обертання. Його можна виразити через власний одиничний вектор:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r},$$

де  $r$  — модуль  $\vec{r}$ .

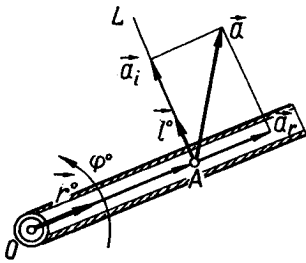


Рис. 2.5

Маємо  $\vec{r} = r\vec{r}^0$  ( $\vec{r}^0$  — одиничний радіус-вектор). Під час руху кульки  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}^0$  і  $r$  є функціями часу.

Взявши першу і другу похідні по часу від  $\vec{r} = r\vec{r}^0$ , дістанемо:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}^0 + r\dot{\vec{r}}^0;$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\vec{r}^0 + \dot{r}\dot{\vec{r}}^0 + \dot{r}\dot{\vec{r}}^0 + r\ddot{\vec{r}}^0.$$

При змінненні радіуса-вектора  $\vec{r}$  кінець його одиничного вектора  $\vec{r}^0$  описує коло в горизонтальній площині. Тому похідна

$$\dot{\vec{r}}^0 = \frac{d\vec{r}^0}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\vec{l}^0,$$

де  $\vec{l}^0$  — одиничний вектор, нормальний до осі трубки.

Тепер знайдемо другу похідну:

$$\ddot{\vec{r}}^0 = \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\vec{l}^0) = \ddot{\varphi}\vec{l}^0 + \dot{\varphi}\frac{d\vec{l}^0}{dt} = \ddot{\varphi}\vec{l}^0 + \dot{\varphi}\frac{d\vec{l}^0}{d\varphi} \dot{\varphi} = \ddot{\varphi}\vec{l}^0 - \dot{\varphi}^2\vec{r}^0.$$

Підставимо цей результат в загальну формулу прискорення:

$$\vec{a} = \ddot{\varphi}r\vec{l}^0 - \dot{\varphi}^2r\vec{r}^0 + 2\dot{\varphi}r\dot{\vec{l}}^0 + r\ddot{\vec{r}}^0 = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2r)\vec{r}^0 + (\ddot{\varphi}r + 2\dot{\varphi}\dot{r})\vec{l}^0 = \vec{a}_i + \vec{a}_r. \quad (2.28)$$

Вираз (1.55) — розклад вектора абсолютного прискорення рухомої точки в разі її плоскої траєкторії на дві прямокутні складові  $\vec{a}_i$  і  $\vec{a}_r$ , перша з яких нормальна до радіуса-вектора  $\vec{r}$ , а друга — колінеарна з радіусом-вектором  $\vec{r}$ .

Оскільки поверхня трубки ідеально гладенька, то силових впливів на кульку в напрямі осі трубки немає. Тому складова

$$\vec{a}_r = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2r)\vec{r}^0 = 0. \quad (2.29)$$

У цій рівності  $\ddot{r} = a_r$ , або  $\vec{a}_r^b = \ddot{r}\vec{r}^0$  — прискорення кульки відносно трубки;  $\dot{\varphi}^2r\vec{r}^0 = \vec{a}_r^{\text{неп}}$  — так зване переносне прискорення кульки; воно називається нормальним переносним прискоренням кульки і дорівнює нормальному прискоренню тієї точки трубки, якій в даний момент часу відповідає положення кульки під час свого руху в напрямі осі трубки.

Прискорення  $\vec{a}_r^b$  і  $\vec{a}_r^{\text{неп}}$  належать до класу геометричних — несилових прискорень, оскільки в напрямі осі трубки немає сил, які б їх спричиняли. Визначимо ці геометричні прискорення, розв'язавши диференціальне рівняння  $\ddot{r} - \dot{\varphi}^2r = 0$ . Загальний розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді функції

$$r = Ae^{-kt} + Be^{kt}. \quad (2.30)$$

Перша і друга похідні:

$$\dot{r} = -Ake^{-kt} + Bke^{kt}; \ddot{r} = Ak^2e^{-kt} + Bk^2e^{kt}.$$

Підставимо їхні вирази в диференціальне рівняння і знайдемо значення коефіцієнта  $k$ :

$$Ak^2e^{-kt} + Bk^2e^{kt} - \omega^2 Ae^{-kt} - \omega^2 Be^{kt} = 0 \quad (\dot{\varphi} = \omega),$$

звідки  $A(k^2 - \omega^2) = B(k^2 - \omega^2) = 0$ ;  $k = \pm\omega$ .

Сталі  $A$  і  $B$  знайдемо при  $t_0 = 0$ ,  $r = r_0$ ;  $\dot{r} = \dot{r}_0 = 0$ . Підставивши ці початкові дані в загальний розв'язок і в першу похідну від нього, дістанемо  $A = B = r_0/2$ . Шукані прискорення:

$$a_r^b = \ddot{r} = \frac{r_0\omega^2}{2}(e^{-\omega t} + e^{\omega t}); a_r^{\text{неп}} = -\frac{r_0\omega^2}{2}(e^{-\omega t} + e^{\omega t}).$$

**Векторний (геометричний) спосіб визначення швидкості й прискорення.** Положення рухомої точки відносно абсолютно нерухомого простору задамо її радіусом-вектором  $\vec{r}$ , який виходить з певної точки абсолютно твердого тіла — тіла відліку, незмінно зв'язаного з абсолютним простором (рис. 2.6). У разі руху точки в просторі з часом кінець її радіуса-вектора  $\vec{r}$ , з яким зв'язана рухома точка, описує криву лінію, яка є траєкторією рухомої точки  $A$  (таким чином позначимо матеріальну (геометричну) точку та її положення в просторі) і називається *годографом радіуса-вектора  $\vec{r}$* .

У цьому випадку радіус-вектор  $\vec{r}$  як неперервна однозначна функція часу  $t$  визначає векторне рівняння руху точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.31)$$

Наша задача полягає в тому, щоб за відомим векторним рівнянням руху точки (2.31) визначити її швидкість і прискорення в даний момент часу  $t$  (у будь-який момент часу).

Нехай в момент часу  $t$ , в який треба визначити швидкість і прискорення, рухома точка в просторі опиниться в положенні  $A$ . Через проміжок часу  $\Delta t = t - t_1$ , перемістившись у просторі, вона в момент часу  $t_1$  займе положення  $A_1$ . Найкоротша відстань між положеннями  $A$  і  $A_1$  рухомої точки, що відповідають моментам часу  $t$  і  $t_1$ , називається *вектором переміщення  $\overrightarrow{AA_1}$* . Він виражає приріст  $\Delta\vec{r}$  радіуса-вектора  $\vec{r}$  рухомої точки за час  $\Delta t$ . Тому можна записати:

$$\overrightarrow{AA_1} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_1(t_1) - \vec{r}(t),$$

але  $t_1 = t + \Delta t$ , тоді  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ .

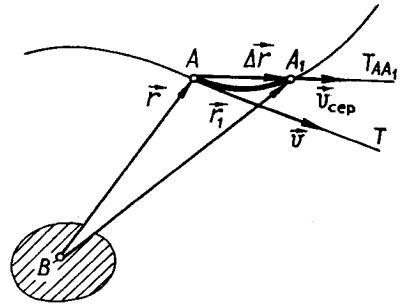


Рис. 2.6

Маючи кінцевий приріст радіуса-вектора  $\Delta\vec{r}$ , що відповідає зміні часу  $\Delta t$ , можна визначити в середньому його зміну за одиницю часу. Для цього розглянемо співвідношення

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_{\text{сеп}}, \quad (2.32)$$

що описує вектор середньої швидкості рухомої точки на даному проміжку часу  $\Delta t$ , за який вона проходить у разі змінного руху дугу  $AA_1$  траєкторії; він напрямлений по хорді  $\Delta\vec{r}$ , яка стягує дугу  $AA_1$ . Змінний рух точки на дузі  $AA_1$  замінюється рівномірним рухом по прямій з середньою швидкістю (рис. 2.6).

Отже, введення середньої швидкості на малому інтервалі часу  $\Delta t$ , дає змогу замінити реально здійснюваний точкою змінний рух по криволінійній траєкторії на уявлюваний з середньою швидкістю (2.32) рівномірний рух по прямій — хорді, що стягує відрізок дуги траєкторії.

Зауважимо, що чим менший інтервал часу  $\Delta t$ , на якому замінюється змінний криволінійний рух на відповідний йому рівномірний прямолінійний, тим точніше характеризує змінний рух точки її середня швидкість  $\vec{v}_{\text{сеп}}$ . Якщо інтервал часу  $\Delta t$ , на якому змінний рух характеризується середньою швидкістю  $\vec{v}_{\text{сеп}}$ , неперервно зменшується до нуля, то за цих умов хорда дедалі менше відрізняється від своєї дуги, а січна  $AA_1$  наближається до свого граничного положення, яке відповідає дотичній до траєкторії в даному на ній положенні рухомої точки  $A$  (рис. 2.6).

Отже, щоб дістати швидкість  $\vec{v}$  в даний момент часу  $t$ , треба у формулі середньої швидкості (2.32) перейти до границі при прямуванні відтинку часу  $\Delta t$  до нуля:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (2.33)$$

**Швидкість точки в разі змінного криволінійного руху в даний момент часу дорівнює першій похідній по часу від радіуса-вектора точки й напрямлена по дотичній до траєкторії в бік руху точки.**

Введемо поняття вектора середнього прискорення і вектора прискорення рухомої точки в даний момент часу. Оскільки вектор швидкості точки в кожному її положенні на криволінійній траєкторії має напрям дотичної, а напрям дотичної в різних положеннях рухомої точки на траєкторії різний, то вектор швидкості має змінюватися за напрямом з часом. Крім того, також змінним буде і модуль вектора швидкості. Отже, швидкість рухомої точки в розглядуваному випадку буде векторною функцією скалярного аргументу, яким є час  $t$ , тобто  $\vec{v} = \vec{v}(t)$ .

Зрозуміло, що зміна векторної функції за кінцевий відтинок часу, а також при певному значенні часу  $t$  не залежить від того, чи початок вектора швидкості  $\vec{v}$  збігається з рухомою точкою і разом з нею рухається, чи перебуває в одній і тій самій нерухомій точці. За таку точку візьмемо початок  $B$  радіуса-вектора  $\vec{r}$  рухомої точки (рис. 2.7).

Під час руху точки по криволінійній траєкторії вектор швидкості  $\vec{v}$  з початком в нерухомій точці  $B$  описує в просторі конічну поверхню з вершиною  $B$ . У цьому разі на конічній поверхні утвориться геометричне місце кінців векторів швидкості  $\vec{v}$  точки, що править за годограф швидкості (рис. 2.7). За годографом швидкості  $\vec{v}$  точки можна знайти її прискорення.

На малому відтинку часу  $\Delta t$  вектор середнього прискорення

$$\vec{a}_{\text{cep}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.34)$$

має напрям приросту вектора швидкості  $\Delta \vec{v}$ . При прямуванні в даній векторній рівності інтервалу часу  $\Delta t$  до нуля відмінність між модулем приросту вектора швидкості  $|\Delta \vec{v}|$  і відповідним йому відрізком дуги на годографі швидкості зникає. І коли модуль  $|\Delta \vec{v}|$  вектора приросту швидкості  $\vec{v}$  досягає нульового значення, напрям вектора приросту швидкості  $\Delta \vec{v}$  збігається з напрямом дотичної до годографа швидкості  $\vec{v}$ , отже, такий самий напрям відповідає і векторній величині — шуканому вектору прискорення рухомої точки в даний момент часу:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{\text{cep}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (2.35)$$

*Прискорення рухомої точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від вектора швидкості по часу або другій похідній від радіуса-вектора по часу і за напрямом збігається з дотичною до годографа вектора швидкості.*

Якщо зіставити годограф вектора швидкості з годографом радіуса-вектора рухомої точки, то можна дійти висновку, що вектор миттєвого прискорення  $\vec{a}$  в загальному випадку руху точки напрямлений у бік угнутості траєкторії рухомої точки (рис. 2.7).

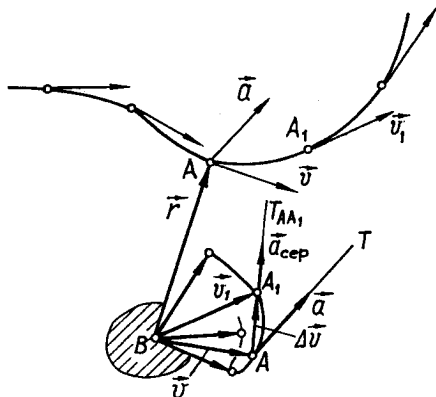


Рис. 2.7

## § 7. Визначення положення матеріальної точки в декартовій (прямокутній) системі координат. Визначення швидкості і прискорення \_\_\_\_\_

У попередньому параграфі було розглянуто два способи вивчення руху точки — натуральний і векторний. Варто звернути увагу на те, що натуральний спосіб застосовують тоді, коли траєкторія рухомої точки заздалегідь відома, векторний — у разі теоретичних досліджень руху.

Крім зазначених способів дослідження руху точки, в кінематиці розроблено третій спосіб вивчення (завдання) руху, який називається координатним і розгляд якого розпочнемо в цьому параграфі.

З'ясуємо суть цього способу. Спочатку введемо декартову (прямокутну) систему координат  $xOyz$ . Для прямолінійного руху точки градували пряму, по якій здійснювався рух, тобто вибирали на ній початок відліку координати  $O$ , додатний і від'ємний напрями, а також кожній точці прямої ставили у відповідність певне число — координату. Таким чином діставали координатну вісь  $Ox$ , на якій нерухомі точки  $B_x$  визначали координатою  $x$ . Це була одна з трьох осей декартової системи координат  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ .

Якщо взяти три взаємно перпендикулярні прямі, що перетинаються в спільній точці  $O$ , й проградуювати їх (як у разі прямолінійного руху точки), вибравши спільну точку  $O$  за початок координат  $x$ ,  $y$  і  $z$ , то дістанемо систему осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  (рис. 2.8). Додатні напрями на осях установлюються від початку  $O$  до відповідних позначень  $x$ ,  $y$  і  $z$  на осях  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ ; протилежний на осях від точки  $O$  напрям — від'ємний.

Введена система осей називається *прямокутною декартовою системою координат*  $xOyz$ , в якій осі розглядаються у такому порядку:  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ . На рис. 2.8 зображено праву систему  $xOyz$ , тобто якщо дивитись навпроти додатного напрямку будь-якої з осей, наприклад осі  $Ox$ , то, щоб сумістити наступну вісь  $Oy$  з третьою  $Oz$ , треба вісь  $Oy$  повернути проти руху годинникової стрілки навколо осі  $Ox$  на  $90^\circ$ .

Зв'яжемо декартову систему координат  $xOyz$  з нерухомим відносно абсолютного простору тілом відліку і за трійкою чисел  $x$ ,  $y$  і  $z$ , які визначають на осях  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , положення нерухомих їх точок  $B_x$ ,  $B_y$  і  $B_z$  відповідно, відшукаємо розташування будь-якої нерухомої точки  $B$  абсолютного простору, яка не лежить на координатних осях.

Для цього з точок  $B_x$ ,  $B_y$  у площині  $xOy$  проводимо перпендикуляри до осей  $Ox$  і  $Oy$ . Позначимо точку їх перетину через  $B_{xy}$ . Аналогічно дістанемо дві інші точки  $B_{yz}$  і  $B_{zx}$  на площинах  $yOz$  і  $zOx$  відповідно (рис. 2.8). Тепер до площин  $xOy$ ,  $yOz$  і  $zOx$  в їхніх точках  $B_{xy}$ ,  $B_{yz}$  і  $B_{zx}$

\* Оскільки в посібнику йдеться тільки про прямокутну декартову систему координат, то називатимемо її спрощено — декартовою системою координат.

поставимо перпендикуляри, перетин яких відповідає шуканій точці  $B$ . Координати  $x$ ,  $y$  і  $z$  допоміжних точок  $B_x$ ,  $B_y$  і  $B_z$ , які розташовані на осях  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , є водночас координатами точки  $B$  простору. Координата  $x$  називається *абсцисою*,  $y$  — *ординатою* і  $z$  — *аплікатою*.

Якщо точка  $B$  задана, то для визначення її декартових координат  $x$ ,  $y$  і  $z$  треба пересуватися в напрямі, зворотному до того, завдяки якому було добуто положення точки  $B$  за її відомими координатами. Зазначимо, що  $B_x$ ,  $B_y$  і  $B_z$  є проєкціями нерухомої точки  $B$  простору на осі декартових координат  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  відповідно, а  $B_{xy}$ ,  $B_{yz}$  і  $B_{zx}$  — її проєкції на координатні площини  $xOy$ ,  $yOz$  і  $zOx$ .

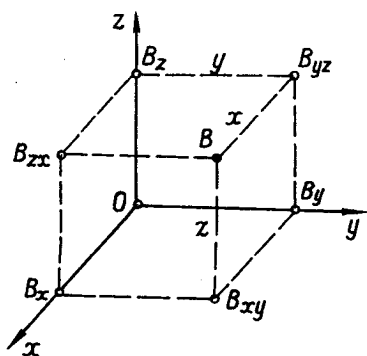


Рис. 2.8

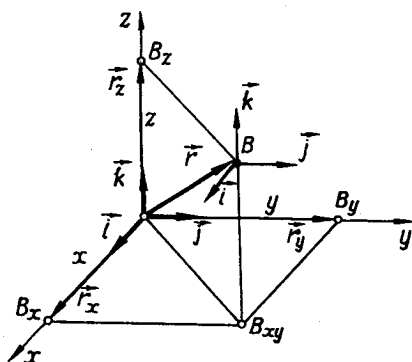


Рис. 2.9

Далі введемо одиничні вектори осей декартових координат. Положення будь-якої нерухомої точки  $B$  абсолютного простору в прямокутній декартовій системі координат  $xOyz$  визначається координатами і записується як  $B(x, y, z)$ . Також  $B$  можна задати радіусом-вектором  $\vec{r}$  — напрямленим відрізком, що сполучає початок  $O$  системи  $xOyz$  з нерухомою точкою  $B$  простору (рис. 2.9). Кожній трійці значень координат  $x$ ,  $y$  і  $z$  точки  $B$  відповідає цілком певний її радіус-вектор  $\vec{r}$ . Отже,  $\vec{r}$  — це вектор-функція координат  $x$ ,  $y$  і  $z$  точки  $B$  простору:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z).$$

Тепер візьмемо будь-яку іншу точку  $B_1$ , нескінченно близьку до точки  $B$ . Тоді нескінченно малий приріст радіуса-вектора  $\vec{r}$  точки  $B$  при переході від неї до  $B_1$  визначається як повний диференціал від вектора-функції  $\vec{r}$  по скалярним змінним  $x$ ,  $y$  і  $z$ :

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dx} dx + \frac{d\vec{r}}{dy} dy + \frac{d\vec{r}}{dz} dz,$$

де  $dx$ ,  $dy$  і  $dz$  — довільні незалежні між собою величини.



Тому для з'ясування геометричного змісту часткових похідних  $\frac{d\vec{r}}{dx}$ ,  $\frac{d\vec{r}}{dy}$  і  $\frac{d\vec{r}}{dz}$  надамо послідовно двом із трьох нескінченно малих приростів  $dx$ ,  $dy$  і  $dz$  нульових значень. Якщо покласти  $dy = dz = 0$ , то з останньої рівності випливає

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dx} dx; \quad \frac{d\vec{r}}{dx} = \frac{d\vec{r}}{dx}.$$

Величина  $\frac{d\vec{r}}{dx}$ , очевидно, є одиничним вектором осі  $Ox$ . Розглянувши інші дві похідні при часткових значеннях  $dx = dy = 0$  і  $dx = dy = 0$ , дістанемо

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{i}, \quad \frac{d\vec{r}}{dy} = \vec{j}, \quad \frac{d\vec{r}}{dz} = \vec{k}; \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Отже, в кожній точці простору відносно декартової системи координат  $xOyz$  маємо три головні напрями, які колінеарні відповідним її осям і визначаються одиничними векторами  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{k}$ . У точці  $O$ , початку відліку координат, також маємо трійку векторів  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , які вказують на додатні напрями осей декартових координат  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  відповідно, а отже, на ці головні напрями в усіх нерухомих точках простору.

Введення ортів (одиничних векторів) осей декартової системи координат дає змогу вектори різної природи подавати у вигляді прямокутних складових, паралельних осям декартової системи координат, і виражати їх через відповідні скалярні величини й одиничні вектори осей. Так, для диференціала радіуса-вектора точки  $B$  маємо:

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}, \quad (2.36)$$

де  $d\vec{x} = dx \vec{i}$ ,  $d\vec{y} = dy \vec{j}$ ,  $d\vec{z} = dz \vec{k}$  — прямокутні складові вектора  $d\vec{r}$ , а множники  $dx$ ,  $dy$  і  $dz$  при одиничних векторах  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{k}$  називаються проєкціями  $d\vec{r}$  на відповідні осі координат.

Зауважимо, що проєкції будь-якого вектора на осі декартових координат цілком визначають за модулем і напрямом його прямокутні складові, паралельні цим осям. Також зазначимо, що векторні рівності вигляду (2.36) називають *розкладом вектора по одиничних ортах* осей декартової системи координат.

Перепишемо векторну рівність (2.36) у вигляді

$$d\vec{r} = d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),$$

звідки дістанемо

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

оскільки  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{k}$  — вектори сталого напрямку.

Отже, маємо розклад радіуса-вектора  $\vec{r}$  нерухомої точки  $B$  простору по одиничних ортах осей декартової системи координат  $xOyz$ . З цієї рівності випливає, що проєкції радіуса-вектора точки  $B$  на координатні осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  дорівнюють її координатам  $x$ ,  $y$  і  $z$ , тобто  $r_x = x$ ,  $r_y = y$ ,  $r_z = z$ .

Тепер розглянемо рух точки  $A$  відносно системи декартових координат  $xOyz$ . Точка  $A$ , рухаючись в абсолютному просторі відносно системи координат  $xOyz$ , незмінно зв'язаних з цим простором, з часом послідовно проходить через відповідні нерухомі точки  $B$  абсолютного простору, положення яких визначається координатами  $x$ ,  $y$  і  $z$ . Тому ці самі координати  $x$ ,  $y$  і  $z$  має і рухома точка  $A$ , для якої вони становлять уже функції часу  $t$ . Отже, рівняння руху точки  $A$  в декартових координатах мають вигляд

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t). \quad (2.37)$$

Вважатимемо, що функції (2.37) є неперервними й однозначними і мають принаймні перші і другі похідні, а незалежна змінна  $t$  задовольняє умову  $0 \leq t < \infty$ .

*Траєкторію рухомої точки  $A$  визначимо як геометричне місце тих нерухомих точок в абсолютному просторі, через які точка  $A$  проходить, здійснюючи свій рух.*

Щоб знайти рівняння траєкторії рухомої точки  $A$ , що зв'язує між собою декартові координати  $x$ ,  $y$  і  $z$ , треба скористатися рівняннями руху (2.37). Для цього беруть одне з рівнянь системи (2.37), наприклад  $x = x(t)$ , розв'язують його відносно часу  $t$ , після чого результат підставляють в інші два рівняння. За такого способу виключення параметра  $t$  шукані рівняння набувають вигляду

$$y = f_1(x); z = f_2(x). \quad (2.38)$$

За траєкторією рухомої точки  $A$  для визначення її положення, крім векторного і координатного способів, застосуємо також натуральний, пов'язаний з введенням дугової координати (рис. 2.9). У такому разі радіус-вектор рухомої точки є складовою функцією часу; а проміжними змінними є декартові координати і дугова координата. Запишемо радіус-вектор рухомої точки  $A$  як складну функцію:

$$\vec{r} = x[s(t)]\vec{i} + y[s(t)]\vec{j} + z[s(t)]\vec{k}.$$

Для визначення вектора швидкості рухомої точки  $A$  візьмемо похідну від радіуса-вектора  $\vec{r}$  по часу  $t$ .

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{ds} \dot{s} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \dot{s} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \dot{s} \vec{k},$$

або

$$\vec{v} = \dot{s} \left( \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \vec{k} \right),$$

де

$$\frac{dx}{ds} = \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{i}); \quad \frac{dy}{ds} = \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{j}); \quad \frac{dz}{ds} = \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{k});$$

$$\vec{\tau} = \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \vec{k}.$$

Тому  $\vec{v} = \dot{s} \vec{\tau}$ , що вже було розглянуто в попередніх параграфах.

Отже, швидкість рухомої точки дорівнює першій похідній по часу від радіуса-вектора рухомої точки і напрямлена по дотичній до кола:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (2.39)$$

Виразимо вектор швидкості  $\vec{v}$  через її прямокутні складові, паралельні осям декартових координат. Для цього візьмемо  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  і підставимо у векторну формулу швидкості (2.39):

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad (2.40)$$

де  $\dot{x}\vec{i} = \vec{v}_x$ ,  $\dot{y}\vec{j} = \vec{v}_y$ ,  $\dot{z}\vec{k} = \vec{v}_z$  — прямокутні складові швидкості точки, паралельні відповідним осям декартових координат  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ , тобто

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z. \quad (2.41)$$

Отже, швидкість рухомої точки в декартових координатах дорівнює векторній сумі її прямокутних складових, паралельних осям декартових координат.

Зауважимо, що множники при ортах у розкладі (2.40), тобто перші похідні по часу від декартових координат  $x$ ,  $y$  і  $z$ , називаються проекціями швидкості точки на осі декартових координат  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ . Також зауважимо, що проекції швидкості за модулем й напрямом цілком визначають прямокутні складові  $\vec{v}_x$ ,  $\vec{v}_y$ ,  $\vec{v}_z$  вектора швидкості точки  $\vec{v}$ .

Виведемо формули модуля швидкості рухомої точки і її напрямних косинусів, виражених через проекції швидкості на декартові осі. Для цього скористаємося рівністю

$$\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \dot{s} \left( \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \vec{k} \right),$$

яку перепишемо у вигляді

$$\left( \dot{x} - \dot{s} \frac{dx}{ds} \right) \vec{i} + \left( \dot{y} - \dot{s} \frac{dy}{ds} \right) \vec{j} + \left( \dot{z} - \dot{s} \frac{dz}{ds} \right) \vec{k} = 0.$$

Сума трьох взаємно перпендикулярних векторів може дорівнювати нулю тоді і тільки тоді, коли кожний із цих векторів є нульовим, тому

$$\dot{x} - \dot{s} \frac{dx}{ds} = 0; \quad \dot{y} - \dot{s} \frac{dy}{ds} = 0; \quad \dot{z} - \dot{s} \frac{dz}{ds} = 0.$$

Врахуємо, що

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{i}) = \vec{\tau} \cdot \vec{i}; & \frac{dy}{ds} &= \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{j}) = \vec{\tau} \cdot \vec{j}; \\ \frac{dz}{ds} &= \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{k}) = \vec{\tau} \cdot \vec{k}; & \dot{s} &= v \cos \angle(\vec{v}, \vec{\tau}) = \vec{v} \cdot \vec{\tau}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{v} &= \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{i}) \cos \angle(\vec{v}, \vec{\tau}); & \dot{x} &= v_x = \frac{dx}{dt}; \\ \frac{\dot{y}}{v} &= \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{j}) \cos \angle(\vec{v}, \vec{\tau}); & \dot{y} &= v_y = \frac{dy}{dt}; \\ \frac{\dot{z}}{v} &= \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{k}) \cos \angle(\vec{v}, \vec{\tau}); & \dot{z} &= v_z = \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Згадаймо, що  $\vec{\tau}$  завжди має напрям відліку додатних значень дугової координати  $s$ , у той час як вектор швидкості  $\vec{v}$  може збігатись за напрямом з одиничним вектором  $\vec{\tau}$  або бути йому протилежним, залежно від того, який знак має похідна по часу від дугової координати  $\dot{s}$ . Косинус кута  $\angle(\vec{v}, \vec{\tau})$  дорівнює або плюс одиниці, коли  $\vec{v}$  і  $\vec{\tau}$  мають один й той самий напрям; при протилежних їхніх напрямках — мінус одиниці.

Покажемо, що праві частини рівностей (2.42) — напрямні косинуси вектора швидкості рухомої точки  $\cos \angle(\vec{v}, \vec{i})$ ,  $\cos \angle(\vec{v}, \vec{j})$ ,  $\cos \angle(\vec{v}, \vec{k})$ . Справді,

$$\begin{aligned} \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{i}) \cos \angle(\vec{v}, \vec{\tau}) &= (\vec{\tau} \cdot \vec{i})(\vec{v} \cdot \vec{\tau}) \frac{1}{v} = \pm \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{i}) = \cos \angle(\vec{v}, \vec{i}); \\ \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{j}) \cos \angle(\vec{v}, \vec{\tau}) &= \pm \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{j}) = \cos \angle(\vec{v}, \vec{j}); \\ \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{k}) \cos \angle(\vec{v}, \vec{\tau}) &= \pm \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{k}) = \cos \angle(\vec{v}, \vec{k}). \end{aligned}$$

Тоді формули набувають вигляду

$$\frac{\dot{x}}{v} = \cos \angle(\vec{v}, \vec{i}); \quad \frac{\dot{y}}{v} = \cos \angle(\vec{v}, \vec{j}); \quad \frac{\dot{z}}{v} = \cos \angle(\vec{v}, \vec{k}). \quad (2.43)$$

Піднесемо до квадрата і почленно додамо обидві частини цих рівностей:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2 \left( \cos^2 \angle(\vec{v}, \vec{i}) + \cos^2 \angle(\vec{v}, \vec{j}) + \cos^2 \angle(\vec{v}, \vec{k}) \right).$$

Але, оскільки

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^2 = \bar{\tau} \cdot \bar{\tau} = 1 &= \left( \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dz}{ds} \bar{k} \right)^2 = \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \angle(\bar{v}, \bar{\tau})} \left( \cos^2 \angle(\bar{v}, \bar{i}) + \cos^2 \angle(\bar{v}, \bar{j}) + \cos^2 \angle(\bar{v}, \bar{k}) \right); \\ \cos^2 \angle(\bar{v}, \bar{\tau}) &= 1, \end{aligned}$$

то

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (2.44)$$

Вираз (2.41) — це формула модуля швидкості рухомої точки, яка дає змогу за відомими рівняннями руху точки в декартових координатах (2.37) визначити модуль швидкості; при цьому треба обчислити перші похідні від  $x$ ,  $y$  і  $z$  по часу  $t$ .

Введемо позначення

$$\cos \angle(\bar{v}, \bar{i}) = \cos \alpha; \quad \cos \angle(\bar{v}, \bar{j}) = \cos \beta; \quad \cos \angle(\bar{v}, \bar{k}) = \cos \gamma$$

і формули (1.70) перепишемо у вигляді

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}}{v}; \quad \cos \beta = \frac{\dot{y}}{v}; \quad \cos \gamma = \frac{\dot{z}}{v}. \quad (2.45)$$

Косинуси кутів між вектором швидкості  $\bar{v}$  і одиничними векторами  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  і  $\bar{k}$  осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  називаються *напрямними косинусами швидкості рухомої точки*. На рис. 2.10 наведено геометричну фігуру — прямокутний паралелепіпед, що відповідає формулам (2.44), (2.45); у цьому паралелепіпеді його сторони є складовими  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$ ,  $\bar{v}_z$  швидкості  $\bar{v}$ , паралельними осям  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  декартових координат, а його діагональ — швидкістю точки  $\bar{v}$ .

Щоб дістати аналогічні формули модуля і напрямних косинусів для прискорення рухомої точки, продиференціюємо вже відому рівність:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}) &= \frac{d}{dt} \left[ \dot{s} \left( \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dz}{ds} \bar{k} \right) \right]; \\ \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} &= \ddot{s} \left( \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dz}{ds} \bar{k} \right) + \dot{s}^2 \left( \frac{d}{ds} \left( \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dz}{ds} \bar{k} \right) \right), \end{aligned}$$

де  $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{n}$ ,  $\bar{\tau} = \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dz}{ds} \bar{k}$ ,  $\frac{ds}{dt} = \dot{s}$  і  $ds = \rho d\varphi$ .

Справді, нескінченно мале переміщення  $ds$  точки по траєкторії з даного на ній положення, що відповідає даному моменту часу  $t$ , можна замінити таким самим нескінченно малим переміщенням, яке здійснюється точкою за нескінченно малий час  $dt$  по колу криви-

зни радіусом  $\rho$ . Отже, елементарна дуга  $ds$  і радіуси  $\rho$  кола кривизни утворюють коловий сектор з нескінченно малим центральним кутом  $d\phi$ . Такий самий кут утворюють одиничні вектори  $\vec{\tau}$  і  $\vec{\tau}_1$  на початку і кінці елемента  $ds$ . Отже, зміна напрямку одиничного вектора  $\vec{\tau}$  за час  $dt$  на переміщенні  $ds$  дорівнює  $d\vec{\tau} = d\phi\vec{n}$ . Поділивши її на  $ds$ , дістанемо записане вище значення векторної похідної  $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ .

У правій частині продиференційованої векторної рівності записано прямокутні компоненти повного прискорення точки — дотичне  $\vec{a}_\tau$  і нормальне  $\vec{a}_n$ , які було розглянуто в попередньому параграфі. У лівій частині — векторна сума трьох прямокутних складових того самого прискорення  $\vec{a}$ , які паралельні відповідним осям  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  декартових координат:

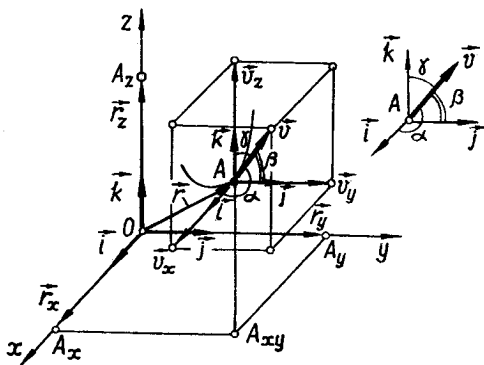


Рис. 2.10

$$\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Та ця сума  $\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$  є результатом диференціювання швидкості по часу або обчислення другої похідної від радіуса-вектора  $\vec{r}$  точки по часу:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Прирівнявши до правої частини вихідної рівності, дістанемо векторну формулу прискорення точки в разі її руху по довільній криволінійній траєкторії:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (2.46)$$

Отже, прискорення рухомої точки дорівнює першій похідній від вектора швидкості по часу або другій похідній від радіуса-вектора по часу і напрямлене в бік угнутості траєкторії.

Тепер повернемося до векторної рівності

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z, \quad (2.47)$$

яка є розкладом прискорення точки на прямокутні компоненти  $\ddot{x}\vec{i} = \vec{a}_x$ ,  $\ddot{y}\vec{j} = \vec{a}_y$  і  $\ddot{z}\vec{k} = \vec{a}_z$ , паралельні осям  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  декартових ко-

ординат відповідно. Множники  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  і  $\ddot{z}$  при одиничних векторах  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{k}$  у розкладі (1.74) називаються *проекціями прискорення  $\vec{a}$*  на осі декартових координат. Ці множники є алгебраїчними величинами і цілком визначають за модулем й напрямом прямокутні складові прискорення по напрямках осей декартових координат, а, отже, і вектор прискорення  $\vec{a}$  точки.

На підставі векторної рівності (2.47) виведемо формули модуля і напрямних косинусів вектора прискорення рухомої точки. Для цього обидві частини (2.47) поділимо на абсолютне значення прискорення  $\vec{a}$ :

$$\frac{\vec{a}}{a} = \frac{\ddot{x}}{a} \vec{i} + \frac{\ddot{y}}{a} \vec{j} + \frac{\ddot{z}}{a} \vec{k}.$$

Зліва маємо одиничний вектор  $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{a}$ , який з вектором прискорення  $\vec{a}$  має однаковий напрям. Якщо тепер розглядувану рівність скалярно помножимо на одиничний вектор  $\vec{a}_0$ , то

$$\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0 = 1 = \frac{\ddot{x}}{a} (\vec{a}_0 \cdot \vec{i}) + \frac{\ddot{y}}{a} (\vec{a}_0 \cdot \vec{j}) + \frac{\ddot{z}}{a} (\vec{a}_0 \cdot \vec{k}).$$

Скалярні добутки  $\vec{a}_0 \cdot \vec{i}$ ,  $\vec{a}_0 \cdot \vec{j}$  і  $\vec{a}_0 \cdot \vec{k}$  дорівнюють косинусам кутів між вектором прискорення  $\vec{a}$  й відповідними одиничними векторами  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{k}$ :

$$\vec{a}_0 \cdot \vec{i} = \cos \angle(\vec{a}, \vec{i}); \quad \vec{a}_0 \cdot \vec{j} = \cos \angle(\vec{a}, \vec{j}); \quad \vec{a}_0 \cdot \vec{k} = \cos \angle(\vec{a}, \vec{k}).$$

Оскільки абсолютні величини  $a_x$ ,  $a_y$  і  $a_z$  відповідають розмірам сторін прямокутного паралелепіпеда з діагоналлю  $a$ , то відношення  $a_x/a$ ,  $a_y/a$  і  $a_z/a$  дорівнюють косинусам кутів між діагоналлю і відповідними сторонами паралелепіпеда (ці кути позначено  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  і  $\gamma^*$ ):

$$\cos \alpha^* = \frac{\ddot{x}}{a}; \quad \cos \beta^* = \frac{\ddot{y}}{a}; \quad \cos \gamma^* = \frac{\ddot{z}}{a}. \quad (2.48)$$

Дані співвідношення визначають напрям прискорення точки  $\vec{a}$  й називаються *формулами напрямних косинусів*. Очевидно, що напрямні косинуси прискорення  $a$  задовольняють умову

$$\cos^2 \alpha^* + \cos^2 \beta^* + \cos^2 \gamma^* = 1.$$

З рівностей (2.48) дістанемо формулу модуля прискорення. Для цього піднесемо їх до квадрата і почленно додамо:

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 = a^2 (\cos^2 \alpha^* + \cos^2 \beta^* + \cos^2 \gamma^*).$$

Врахуємо: сума в дужках дорівнює одиниці. Отже, дістанемо шукану формулу:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (2.49)$$

Формули (2.48) і (2.49) дають змогу за відомими рівняннями руху точки в декартових координатах визначити модуль і напрям прискорення.

рення рухомої точки. Рис 2.11 геометрично ілюструє ці співвідношення.

На завершення розглянемо частковий випадок руху точки в площині  $xOy$  декартових координат. Оскільки апліката  $z$  у разі руху точки по плоскій траєкторії весь час дорівнює нулю, то формулами модуля і напрямних косинусів для швидкості  $v$  (2.12):

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}}{v}; \quad \cos \beta = \frac{\dot{y}}{v}. \quad (2.50)$$

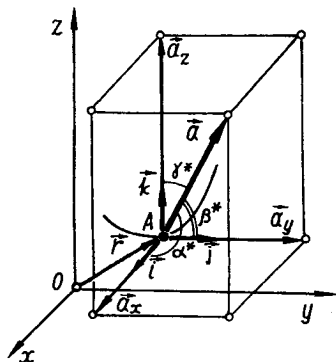


Рис. 2.11

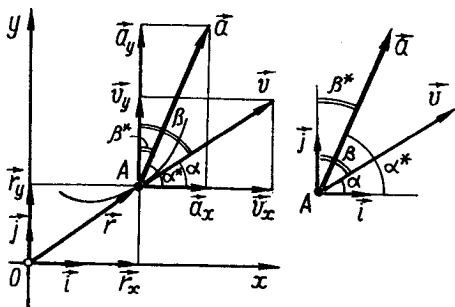


Рис. 2.12

Для прискорення аналогічні формули мають вигляд (рис. 2.12):

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}; \quad (2.51)$$

$$\cos \alpha^* = \frac{\ddot{x}}{a}; \quad \cos \beta^* = \frac{\ddot{y}}{a}; \quad \cos \gamma^* = \frac{\ddot{z}}{a}. \quad (2.52)$$

У разі прямолінійного руху, наприклад, по осі  $Ox$ , маємо два рівняння — рівняння швидкості й рівняння прискорення рухомої точки:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad a_y = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (2.53)$$

які цілком визначають вектори  $\vec{v}$  і  $\vec{a}$ , якщо відоме рівняння прямолінійного руху  $x = x(t)$ .

**Визначення дугової координати.** Якщо задані рівняння руху точки в декартових координатах, то її траєкторія відома. Запровадимо дугову координату і введемо радіус-вектор:

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{ds} ds = d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$$



або, скалярно помноживши на орт дотичної  $\vec{\tau}$ ,

$$ds \vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = \vec{\tau} \cdot \vec{i} dx + \vec{\tau} \cdot \vec{j} dy + \vec{\tau} \cdot \vec{k} dz.$$

Зліва — скалярний добуток двох однакових одиничних векторів  $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}$ , який дорівнює одиниці, справа — скалярні добутки  $\vec{\tau} \cdot \vec{i}$ ,  $\vec{\tau} \cdot \vec{j}$ ,  $\vec{\tau} \cdot \vec{k}$  є напрямними косинусами орта дотичної  $\vec{\tau}$ ; позначимо їх:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{i} = \cos \tilde{\alpha}, \quad \vec{\tau} \cdot \vec{j} = \cos \tilde{\beta}, \quad \vec{\tau} \cdot \vec{k} = \cos \tilde{\gamma},$$

тоді

$$ds = dx \cos \tilde{\alpha} + dy \cos \tilde{\beta} + dz \cos \tilde{\gamma}.$$

Взявши інтеграл від обох частин рівності дістанемо шукану формулу дугової координати:

$$s = s_0 + \int_{t_0}^t \cos \tilde{\alpha} dx + \int_{t_0}^t \cos \tilde{\beta} dy + \int_{t_0}^t \cos \tilde{\gamma} dz, \quad (2.54)$$

де  $dx = \dot{x} dt$ ,  $dy = \dot{y} dt$  і  $dz = \dot{z} dt$  (вважають, що рівняння  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  і  $z = z(t)$  відомі).

У разі руху точки по плоскій кривій, наприклад у декартовій площині  $xOy$ , формула (2.54) набуває вигляду

$$s = s_0 + \int_{t_0}^t \cos \tilde{\alpha} dx + \int_{t_0}^t \cos \tilde{\beta} dy. \quad (2.55)$$

Для визначення дугової координати  $s$  можна використовувати очевидну формулу ( $t_0$  і  $s_0$  — початкові дані руху):

$$s = s_0 \pm \int_{t_0}^t \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (2.56)$$

У разі плоскої кривої

$$s = s_0 \pm \int_{t_0}^t \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (2.57)$$

При користуванні двома останніми співвідношеннями треба додатково вирішувати питання про знак перед радикалом, враховуючи напрями відліку дугової координати  $s$ .

Формули (2.54), (2.55) можна використовувати, коли легко встановлюються залежності кутів  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  і  $\tilde{\gamma}$  від часу  $t$  або іншого параметра, пов'язаного з часом  $t$  (наприклад за умови руху точки по прямій, колу, циклоїді тощо).

## § 8. Криволінійний рівномірний і рівнозмінний рух

**Рівномірний рух точки.** Коли точка рухається по довільній траєкторії, її повне прискорення  $\vec{a}$  має дві прямокутні складові — дотичне  $\vec{a}_\tau$  і нормальне  $\vec{a}_n$  прискорення. Дотичне прискорення, як відомо, характеризує зміну вектора швидкості  $\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau}$  точки лише за її модулем. Отже, якщо на деякому відтинку часу  $\Delta t = t - t_0$  дотичне прискорення  $\vec{a}_\tau$  дорівнює нулю, то модуль швидкості  $v = |\dot{s}\vec{\tau}|$  зберігає своє значення протягом цього відтинку часу  $\Delta t$ . Також сталою має бути проекція швидкості на дотичну, тобто

$$\dot{s} = v_\tau = \text{const.} \quad (2.58)$$

Справді, виконаємо інтегрування диференціального рівняння  $\ddot{s} = 0$  при початкових умовах  $s|_{t=t_0} = s_0$ ,  $\dot{s}|_{t=t_0} = \dot{s}_0 = v$ :

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = 0; \quad d\dot{s} = 0 \cdot dt; \quad \int d\dot{s} = \int 0 \cdot dt; \quad \dot{s} = c_1 = \text{const};$$

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = c_1; \quad ds = c_1 dt; \quad \int ds = c_1 \int dt; \quad s = c_1 t + c_2$$

або, підставивши початкові дані руху,

$$\dot{s} = \dot{s}_0 = v; \quad (2.59)$$

$$s = s_0 + v(t - t_0). \quad (2.60)$$

Це рівняння рівномірного руху точки по криволінійній траєкторії. З нього випливає, що швидкість точки чисельно дорівнює зміні дугової координати за одиницю часу. Якщо при нульовому  $t_0$  має нульове значення дугова координата  $s_0$ , то рівняння (2.59) спрощується і набуває вигляду

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}. \quad (2.61)$$

Зазначимо, що в разі рівномірного руху точки по криволінійній траєкторії зі змінним радіусом кривизни  $\rho$  нормальне її прискорення змінюється як за модулем, так і за напрямом, оскільки

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}.$$

За умови рівномірного руху точки по кривій зі сталим радіусом кривизни  $\rho$  нормальне прискорення змінюється лише за напрямом. Так, рівномірний рух по колу відбувається зі сталим за модулем нормальним прискоренням.

**Рівнозмінний рух точки.** Якщо рух точки по криволінійній траєкторії відбувається зі сталим за модулем дотичним прискоренням  $\vec{a}_\tau$ , то такий рух точки називається рівнозмінним, отже,

$$|\vec{a}_\tau| = |\dot{\vec{s}}_\tau| = \text{const}$$

або

$$\ddot{s} = \text{const.}$$

Позначимо константу  $a_\tau$ , тоді можна записати, що  $\ddot{s} = a_\tau$ , і  $d\dot{s} = a_\tau dt$ . Застосуємо до цієї рівності неозначене інтегрування з такими початковими даними руху:  $s|_{t=t_0} = s_0$ ,  $\dot{s}|_{t=t_0} = \dot{s}_0 = v_0$ . Виконаємо послідовно це інтегрування:

$$\int d\dot{s} = a_\tau \int dt, \quad \dot{s} = a_\tau t + c_1;$$

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = a_\tau t + c_1; \quad \int ds = \int a_\tau t dt + \int c_1 dt; \quad s = \frac{a_\tau t^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Врахувавши початкові дані, дістанемо рівняння швидкості

$$\dot{s} = \dot{s}_0 + a_\tau(t - t_0); \quad a_\tau = \frac{\dot{s} - \dot{s}_0}{t - t_0} \quad (2.62)$$

і рівняння дугової координати

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}_0 + a_\tau(t - t_0); \quad s = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \frac{a_\tau(t - t_0)^2}{2} \quad (2.63)$$

точки в разі її рівнозмінного руху. Для рівноприскореного руху початкова швидкість і дотичне прискорення за знаком збігаються. Для рівносповільненого руху точки характерно те, що її початкова швидкість і дотичне прискорення мають протилежні знаки.

Рівняння (2.63) спрощуються, якщо початковий момент часу вибрати нульовим, а також вважати нульовою початкову дугову координату  $s_0$ :

$$v = \dot{s}_0 + a_\tau t; \quad s = \dot{s}_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (2.64)$$

З цих рівностей при  $\dot{s}_0 = 0$  впливають формули

$$v = a_\tau t, \quad s = \frac{a_\tau t^2}{2}, \quad (2.65)$$

які є рівняннями рівноприскореного руху при нульових початкових умовах.

**§ 9. Криволінійний рух матеріальної точки в полі сталої сили тяжіння Землі як наслідок накладання двох прямолінійних рухів — рівномірного й рівнозмінного**

Дослідимо рух точки в полі сталої сили тяжіння Землі і визначимо кінематичні рівняння, траєкторію, а також інші дані, які стосуються оптимальних характеристик руху. У своїх міркуваннях знехтуємо обертанням Землі навколо власної осі та орбітальним її рухом навколо Сонця, тобто умовно вважатимемо Землю незмінно зв'язаною з абсолютно нерухомим простором. Також знехтуємо впливом на рух атмосферного середовища Землі.

Для визначення положення точки введемо систему декартових координат  $xOyz$  з початком на поверхні Землі. Вісь  $Oy$  напрямимо по вертикалі вгору, а вісь  $Ox$  — горизонтально зліва направо (рис. 2.13). Характер руху точки в полі Землі залежить від того, які початкові дані руху вибрано — значення координат  $x$ ,  $y$  і  $z$ , їхніх перших похідних по часу  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  і  $\dot{z}$  у так званій початковий момент часу  $t = t_0$ . Початкові умови руху позначимо так:

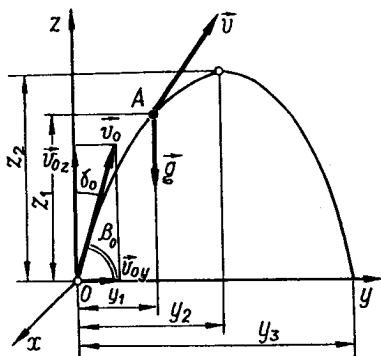


Рис. 2.13

$$x|_{t=t_0} = x_0, \quad y|_{t=t_0} = y_0, \quad z|_{t=t_0} = z_0; \quad \dot{x}|_{t=t_0} = \dot{x}_0, \quad \dot{y}|_{t=t_0} = \dot{y}_0, \quad \dot{z}|_{t=t_0} = \dot{z}_0.$$

Розглянемо початковий момент часу  $t = t_0$  як початок відстежування руху. Часто за початковий момент часу беруть його нульове значення  $t_0 = 0$ .

Нехай точка в нульовий момент часу  $t_0 = 0$  перебуває в точці  $O$ , початку координат  $xOyz$ , і має в цьому положенні швидкість  $\vec{v}_0$ , яка утворює з одиничними ортами  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{k}$  осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  кути  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ ,

$\beta_0$ ,  $\gamma_0$  відповідно. Тоді початкові дані руху такі:

$$x|_{t_0=0} = x_0 = 0, \quad y|_{t_0=0} = y_0 = 0, \quad z|_{t_0=0} = z_0 = 0; \\ \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = \cos\beta_0, \quad \dot{z}_0 = \cos\gamma_0.$$

Матеріальна точка, починаючи свій рух з початку координат з початковою швидкістю  $\vec{v}_0$ , завдяки своїм інерційним властивостям прагне рухатися по прямій в напрямі початкової швидкості  $\vec{v}_0$ . Та

внаслідок дії на неї сталої сили тяжіння  $\vec{G} = -m\vec{g}$  ( $m$  — маса точки,  $g$  — прискорення вільного падіння), напрям якої в кожному положенні рухомої точки вертикальний і паралельний осі  $Oz$ , її рух відхиляється від прямолінійного і стає криволінійним.

Розглядуваний криволінійний рух є рухом зі сталим прискоренням  $\vec{a}$ , яке спричиняється сталою силою тяжіння, а отже, напрямленим також по вертикалі вниз. Це прискорення називається *прискоренням вільного падіння*. Його значення однакове для всіх тіл і дорівнює  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>.

Для визначення кінематичних рівнянь руху точки в розглядуваному випадку виходитимемо з проекцій вектора прискорення на осі декартових координат:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g.$$

Це — система трьох диференціальних рівнянь другого порядку, проінтегрувавши яку, дістанемо залежність декартових координат від часу.

Спочатку виконаємо інтегрування першого рівняння з початковими даними при  $t_0 = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ :

$$d\dot{x} = 0 \cdot dt; \quad \int d\dot{x} = \int 0 \cdot dt; \quad \dot{x} = c_1; \quad x = c_1 t + c_2; \quad x = \dot{x} = 0.$$

Отже, абсциса  $x$  і її похідна по часу для будь-якого моменту часу  $t$  дорівнюють нулю. Це означає, що траєкторія руху точки лежить у декартовій площині  $yOz$  (рис. 2.13). Проінтегруємо друге рівняння:

$$d\dot{y} = 0 \cdot dt; \quad \int d\dot{y} = \int 0 \cdot dt; \quad \dot{y} = c_3 = \text{const}; \\ dy = c_3 dt; \quad \int dy = c_3 \int dt; \quad y = c_3 t + c_4.$$

Підставивши початкові дані  $y_0 = 0, \dot{y}_0 = v_0 \cos \beta_0$ , дістанемо рівняння

$$y = v_0 \cos \beta_0 t \quad (\dot{y} = v_y = v_0 \cos \beta_0), \quad (2.66)$$

яке зветься *рівнянням прямолінійного рівномірного руху матеріальної точки паралельно осі Oy*. Нарешті, проінтегруємо третє рівняння  $\ddot{z} = -g$  при початкових даних  $z_0 = 0, \dot{z}_0 = v_0 \cos \gamma_0$ :

$$d\dot{z} = -g dt; \quad \int d\dot{z} = -g \int dt; \quad \dot{z} = -gt + c_5; \\ dz = -gt dt + c_5 dt; \quad \int dz = -g \int t dt + c_5 \int dt; \quad z = -\frac{gt^2}{2} + c_5 t + c_6.$$

Врахувавши початкові умови руху, дістанемо рівняння швидкості

$$\dot{z} = v_z = -gt + v_0 \cos \gamma_0 \quad (2.67)$$

і рівняння координати

$$z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \cos \gamma_0 t. \quad (2.68)$$

Останні два рівняння визначають прямолінійний рівнозмінний рух матеріальної точки у вертикальному напрямі, паралельному осі  $Oz$ .

Уявімо невеличке кільце, насаджене на горизонтальну прямолінійну дrottину, розташовану паралельно осі  $Oy$ . Припустимо, що це кільце вздовж дrottини рухається згідно з рівнянням  $y = v_0 \cos \beta_0 t$ , а дrottина з кільцем на ній здійснює в площині  $yOz$  рівнозмінний прямолінійний рух відповідно до рівняння (2.68) таким чином, що дrottина під час руху залишається паралельною осі  $Oy$  і її лівий кінець весь час переміщується по вертикальній осі  $Oz$ .

Першу стадію руху точки, коли вона переміщується відносно самої дrottини, яка, в свою чергу, переміщується відносно абсолютно нерухомого простору (паралельно осі  $Oz$ ), назвемо *відносним рухом*. Другу стадію руху точки разом із дrottиною, паралельно осі  $Oz$  відносно абсолютно нерухомої системи декартових координат  $xOyz$ , назвемо *переносним рухом*. Результат накладання відносного і переносного рухів кільця є *абсолютним рухом* точки.

Втім зазначимо, що наведене трактування добутих рівнянь (2.66) і (2.68) є цілком позірним представленням двох прямокутних складових рухів — інерційного руху, паралельного осі  $Oy$ , й рівнозмінного прямолінійного, що здійснюється паралельно осі  $Oz$ . Прямолінійний рівномірний рух точки, паралельний осі  $Oy$ , відбувається згідно із законом інерції, оскільки в напрямі осі  $Oy$  ніякі сили на точку не діють. Прямолінійний рівнозмінний рух паралельно другій декартовій осі  $Oz$  відбувається згідно із другим законом Ньютона (1.19).

На підставі рівнянь (2.66) і (2.68) визначимо траєкторію руху точки в разі її руху в площині  $yOz$  з прискоренням вільного падіння  $g$ . Для цього з рівняння (2.66) знайдемо  $t$  і підставимо його значення в рівняння координати (2.68):

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \beta_0} y^2 + \operatorname{tg} \beta_0 y \quad (\cos \gamma_0 = \sin \beta_0). \quad (2.69)$$

Вираз (2.69) — це рівняння параболи, вітки якої напрямлені вниз (рис. 2.13).

Координати вершини параболи знайдемо з рівнянь

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{gy_2}{v_0^2 \cos^2 \beta_0} + \operatorname{tg} \beta_0 = 0; \quad y_2 = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \beta_0; \quad (2.70)$$

$$z_2 = -\frac{gy_2^2}{2v_0^2 \cos^2 \beta_0} + \operatorname{tg} \beta_0 y_2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta_0}{2g}. \quad (2.71)$$

Підставимо в рівняння траєкторії замість  $z$  його нульове значення і визначимо ординати  $y_1$  і  $y_3$  точок перетину параболи з координатною віссю  $Oy$ :

$$z = 0 = -\frac{gy^2}{2v_0^2 \cos^2 \beta_0} + \operatorname{tg} \beta_0 y,$$

або

$$y \left( \operatorname{tg} \beta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \beta_0} y \right) = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} y = y_1 &= 0, \\ y = y_3 &= \frac{2v_0^2 \cos^2 \beta_0 \operatorname{tg} \beta_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta_0}{g} = 2y_2. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Величина  $z_2$  є найбільшою висотою, якої досягає точка під час свого руху в полі тяжіння Землі. Як видно з формули (2.71), найбільша висота залежить від початкової швидкості  $v_0$  і кута  $\beta_0$ . Величина  $y_3$  називається *дальністю польоту точки*.

З формули (2.66) знайдемо час  $t_2$ , за який досягається найбільша висота:

$$t_2 = \frac{y_2}{v_0 \cos \beta_0} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin \beta_0 \cos \beta_0}{2g v_0 \cos \beta_0} = \frac{v_0 \sin \beta_0}{g}. \quad (2.73)$$

Якщо дане значення помножити на два, то дістанемо значення часу  $t_3$ , за який точка долає дальність польоту  $y_3$ :

$$t_3 = 2t_2 = \frac{2v_0 \sin \beta_0}{g}. \quad (2.74)$$

На підставі залежності дальності польоту  $y_3$  від кута  $\beta_0$  можна знайти, при якому куті  $\beta_0$  дальність польоту буде максимальна. З формули безпосередньо видно, що цей кут має задовольняти рівняння

$$\sin 2\beta_0 = 1.$$

Маємо  $\beta_0 = 45^\circ$ , тоді  $y_{3\max}$  визначається за формулою

$$y_{3\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (2.75)$$

**Парабола безпеки.** Тепер розглянемо сім'ю парабол

$$z = y \operatorname{tg} \beta_0 - \frac{gy^2}{2v_0^2 \cos^2 \beta_0},$$

кожна з яких відповідає певному фіксованому значенню параметра  $\beta_0$ , а початкова швидкість  $v_0$  за модулем однакова для всіх кривих цієї сім'ї. Знайдемо криву, яка відокремлює таку область площини  $yOz$ , точки якої недосяжні для рухомої точки, і другу область, в якій розташовані траєкторії сім'ї. Ця крива називається *обвідною сім'ї парабол*, або *кривою безпеки* (в балістиці).

Лише дві точки шуканої обвідної сім'ї можна знайти безпосередньо. Одна така точка лежить на осі  $Oz$ . Координата її ( $z_1 = z_2$ ) обчислюється за формулою (2.71) при  $\beta_0 = \pi/2$ :

$$z_1 = z_2 = z_{2\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \frac{\pi}{2}}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (2.76)$$

Друга точка — на осі  $Oy$ , координата якої

$$y_{3\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Щоб вивести рівняння шуканої обвідної, треба за основу взяти рівняння параболи

$$z = y \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{gy^2}{2v_0^2 \cos^2 \beta_0} = \varphi(y, \beta_0),$$

яке можна розглядати як рівняння поверхні в координатах  $y$  і  $\beta_0$ . Дана функція в системі координат  $yO\beta_0z$  зображується поверхнею, перерізи якої площинами, перпендикулярними до осі  $O\beta_0$ , є параболи нашої сім'ї  $\left(\frac{\pi}{4} \leq \beta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$  в площині  $yOz$ , точніше — їхніми проекціями на останню.

Тепер візьмемо будь-яку з цих парабол при значенні параметра  $\beta_0 = \beta_{01} \left(\frac{\pi}{4} < \beta_{01} < \frac{\pi}{2}\right)$ . Позначимо її цифрою 1. Також розглянемо дві

близькі до неї параболи 2 і 3, для яких значення параметрів  $\beta_{02}$  і  $\beta_{03}$  відповідають умові  $\beta_{02} < \beta_{01} < \beta_{03}$ . Тепер проведемо площину  $\Pi_1$  перпендикулярно до осі  $Oy$  через точку  $M$  дотику обвідної з проекцією параболи 1 на площину  $yOz$ . Ця площина в перерізі з поверхнею  $z = \varphi(y, \beta_0)$  дасть криву  $f_1(\beta_0, z) = y_1 = \text{const} = 0$ . Остання в свою чергу перетне параболу 1 у точці  $M_1$ , проекція якої на площину  $yOz$  дає попередньо взятую на обвідній точку  $M$ .

Позначимо  $M_2$  і  $M_3$  — точки перетину кривої  $f_1(\beta_0, z) = y_1 = \text{const} = 0$  з сусідніми параболою 2 і 3 відповідно. Тоді значення аплікату  $z_1$ ,  $z_2$  і  $z_3$  точок  $M_1$ ,  $M_2$  і  $M_3$  задовольняють умову  $z_2 < z_1 < z_3$ . Але ці точки, як уже зазначалось, нескінченно близькі. Отже, в точці  $M_1$  дотична до кривої  $f_1(\beta_0, z) = 0$  паралельна площині  $yO\beta_0$ , а це означає, що часткова похідна від функції  $z = \varphi(\beta_0, y)$  по параметру  $\beta_0$  дорівнює нулю



при значеннях  $y = y_1$  і  $\beta_0 = \beta_{01}$  ( $y_1$  і  $\beta_{01}$  є координатами тих точок поверхні, які проектується на обвідну).

Отже, точки обвідної характеризуються тим, що їхні аплікати досягають максимуму при змінненні параметра  $\beta_0$  (на const). Отже, щоб добути рівняння обвідної, треба з рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left( y \operatorname{tg} \beta_0 - \frac{gy^2}{2v_0^2 \cos^2 \beta_0} \right) = 0$$

визначити параметр  $\beta_0$  як функцію координати  $y$ , тобто  $\beta_0 = \Psi(y)$  (цієї залежності відповідає максимум функції  $f_1(\beta_0, z) = 0$ ), і розв'язати сумісно рівняння  $\beta_0 = \Psi(y)$  і рівняння параболи

$$z = y \operatorname{tg} \beta_0 - \frac{gy^2}{2v_0^2 \cos^2 \beta_0}.$$

Виконаємо зазначені дії

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \beta_0} &= \frac{y}{\cos^2 \beta_0} - \frac{gy^2}{2v_0^2} \frac{2 \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\cos^4 \beta_0} = \frac{y}{\cos^2 \beta_0} - \frac{gy^2 \sin \beta_0}{v_0^2 \cos^3 \beta_0} = \\ &= \frac{y}{\cos^2 \beta_0} \left( 1 - \frac{g \operatorname{tg} \beta_0}{v_0^2} y \right), \end{aligned}$$

але

$$\cos^2 \beta_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0},$$

тому

$$\frac{\partial z}{\partial \beta_0} = y(1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0) \left( 1 - y \frac{g}{v_0^2} \operatorname{tg} \beta_0 \right).$$

Прирівнявши до нуля, дістанемо

$$y = 0, \quad \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{v_0^2}{gy},$$

при  $y = 0$  точку обвідної знаходимо окремо. Підставимо  $\beta_0$ , як уже було зазначено, в рівняння параболи:

$$\begin{aligned} z &= \frac{v_0^2 y}{gy} - \frac{gy^2(1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0)}{2v_0^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gy^2}{2v_0^2} - \\ &- \frac{gy^2}{2v_0^2} \frac{v_0^4}{g^2 y^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gy^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g}; \\ z &= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} y^2. \end{aligned} \tag{2.77}$$

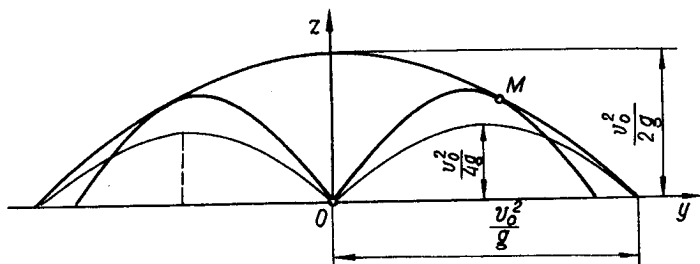


Рис. 2.14

Рівняння (2.77) описує шукану обвідну сім'ї траєкторій точки в разі її руху в полі сталої сили тяжіння Землі — параболи безпеки (рис. 2.14): точка, розпочавши свій рух з початку координат  $Oz$  зі швидкістю  $v_0$  довільного напрямку, ніколи не перетне криву безпеки  $\left(0 < \beta_0 \leq \frac{\pi}{2}\right)$ .

Спочатку звернемо увагу на такі поняття кінематики, як тіло, точка та абсолютно тверде тіло. Геометричним тілом, як відомо з геометрії, називають незмінну частину простору, яка обмежена з усіх боків. Якщо уявити, що весь об'єм геометричного тіла заповнено неперервною речовиною, то маємо абсолютно тверде тіло. Отже, абсолютно тверде тіло є ідеальною моделлю реального матеріального тіла. Як уже було зазначено, вивчення в кінематиці реальних матеріальних тіл замінюється вивченням руху їхніх моделей — матеріальної точки й абсолютно твердого тіла.

Однак у кінематиці можна обійтись зовсім без таких понять, як матеріальна точка й абсолютно тверде тіло, і вивчати рух геометричної точки й геометричного тіла. Проте слід мати на увазі ту обставину, що такі поняття, як змінна швидкість і прискорення, мають лише фізичний зміст для матеріальних тіл, бо фундаментальні закони класичної механіки — закони Ньютона — справедливі для матеріальних тіл.

У дальшому абсолютно тверде тіло назвемо просто тілом. Якщо йтиметься про рух точки тіла, то це означатиме, що рух стосується матеріальної точки — дуже малої частинки абсолютно твердого тіла. Додамо, що точка ототожнюється із центром ваги цієї малої частинки, в якому зосереджена її маса. Крім того, під точкою можна розуміти й тіло кінцевих розмірів, що поступально рухається.

Поступальний рух тіла, про який йдеться далі, є одним з найпростіших видів руху, але водночас дуже поширеним у техніці. Тому його вивчення є надзвичайно важливим. Крім того, в найскладнішому русі тіла можна виділити його поступальну складову з характерними особливостями цього виду руху. Отже, слід зауважити, що найскладніший рух тіла можна трактувати як такий, що складається з поступального й так званого сферичного руху.

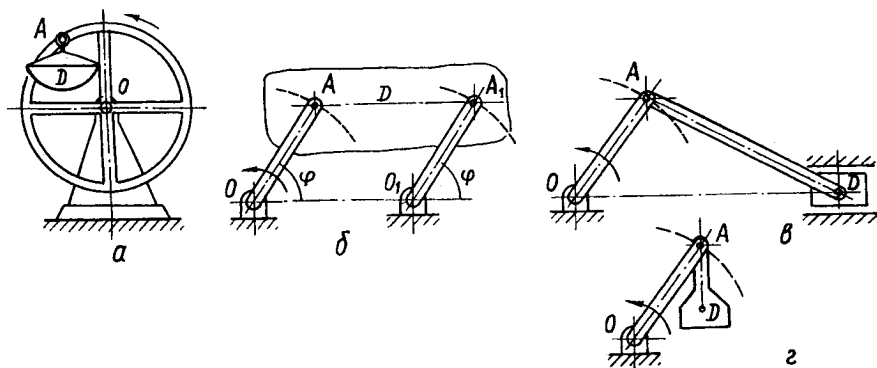


Рис. 3.1

На рис. 3.1 зображено механізми, в яких ланка  $D$  здійснює поступальний рух при обертанні їхніх ведучих ланок  $OA$ . Звертаючи увагу на цей рух механізмів, зазначимо, що поступальний рух тіла  $D$  забезпечується завдяки ідеальному циліндричному шарніру  $A$  і вазі цього тіла. Поступальний рух тіла  $D$  у механізмах (рис. 3.1, б, в) зумовлений в'язями, накладеними на тіло  $D$ .

## § 10. Вільне падіння тіл. Центр ваги тіла \_\_\_\_\_

У природі поширеним прикладом поступального руху тіла є вільне падіння по вертикалі вниз під дією притягання Землі в безповітряному просторі. Г. Галілей детально вивчив властивості цього виду руху: всі частинки тіла рухаються по вертикальних прямих з однаковою швидкістю й прискоренням. Це прискорення називається прискоренням вільного падіння (прискорення земного тяжіння) і для всіх тіл в одному й тому самому місці земної кулі (на одній широті) в разі невеликої висоти падіння порівняно з радіусом Землі має однакове значення, яке дорівнює  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  (для широти  $\varphi = 45^\circ$ ).

У разі якщо тіло, яке поступально рухається, під впливом лише сили земного тяжіння, окремі його частинки, здійснюючи по вертикалі рівноприскорений рух з прискоренням  $g$ , не взаємодіють зі своїми сусідніми частинками (мають місце лише міжмолекулярні зв'язки). Додаткових напружень у тілі, які б спричинялись вільним падінням, немає. Це одна з характерних особливостей вільного падіння тіл (динаміка це вивчає детальніше).

Прискорення вільного падіння  $g$  визначено відносно системи декартових координат  $xOyz$ , незмінно зв'язаної із Землею. Слід зауважити, що в багатьох випадках інженерні розрахунки здійснюються в припущенні, що Земля нерухома і система декартових координат жорстко з нею зв'язана і є абсолютно нерухомою.

Розглянемо поступальний рух тіла в разі його вільного падіння відносно системи декартових координат  $xOyz$ , що незмінно зв'язано із Землею (рис. 3.2). Знайдемо координати такої геометричної точки  $C$ , положення якої залежить від положень усіх складових частинок тіла. Ця шукана точка  $C$  називається *центром ваги тіла*, або його *центром мас*.

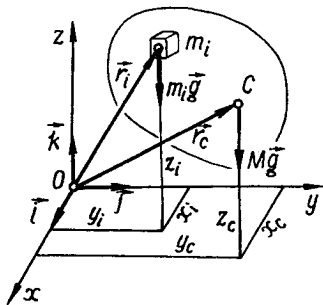


Рис. 3.2

Поділимо мислено тіло на велику кількість малих частинок. Нехай кількість їх —  $n$ , а маси —  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ . Масу всього тіла позначимо  $M$ , тоді

$$M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Оскільки кожна частинка тіла в разі його поступального руху має однакове прискорення  $\vec{a} = \vec{g}$ , то можна помножити дану рівність на вектор  $\vec{a}$ . Якщо положення окремих частинок  $m_i$ , крім декартових координат  $x_i, y_i$  і  $z_i$ , визначити радіусом-вектором  $\vec{r}_i$ , то

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — одиничні вектори осей  $x, y$  і  $z$ , тоді остаточно

$$M \vec{a} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}.$$

Але вектор  $\vec{a}$  зліва є прискоренням певної точки  $C$  з координатами  $x_c, y_c$  і  $z_c$  і радіусом-вектором  $\vec{r}_c$ . Отже,

$$M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2},$$

або

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[ \left( M x_c - \sum_{i=1}^n m_i x_i \right) \vec{i} + \left( M y_c - \sum_{i=1}^n m_i y_i \right) \vec{j} + \left( M z_c - \sum_{i=1}^n m_i z_i \right) \vec{k} \right] = 0.$$

Звідси шукані формули для центра мас тіла:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M}. \quad (3.1)$$

Для суцільного тіла ці формули є наближеними. У точних формулах суми замінено інтегралами:

$$x_C = \frac{1}{M} \int_{(M)} x dm; \quad y_C = \frac{1}{M} \int_{(M)} y dm; \quad z_C = \frac{1}{M} \int_{(M)} z dm. \quad (3.2)$$

На рис. 3.2 сполучимо точку  $C$  із частинками  $m_i$  тіла радіусами-векторами  $\vec{\rho}_i$ . Тоді  $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$  і з формул (3.1) дістанемо

$$\begin{aligned} Mx_C &= \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) x_C + \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_C); \\ My_C &= \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) y_C + \sum_{i=1}^n m_i (y_i - y_C); \\ Mz_C &= \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) z_C + \sum_{i=1}^n m_i (z_i - z_C), \end{aligned}$$

звідки

$$\sum_{i=1}^n m_i (z_i - z_C) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_i (y_i - y_C) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_C) = 0,$$

або

$$\sum_{i=1}^n [m_i (x_i - x_C) \vec{i} + m_i (y_i - y_C) \vec{j} + m_i (z_i - z_C) \vec{k}] = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i = 0. \quad (3.3)$$

**Центр ваги (або центр мас) тіла характеризується тим, що добутки мас частинок тіла на їхні радіуси-вектори, проведені з його центра мас, в сумі дорівнюють нулю.**

Отже, якщо початок будь-якої системи декартових координат сумістити з центром мас  $C$  тіла, а її осі жорстко зв'язати з тілом, то суми добутків мас частинок тіла на їхні координати в цій системі координат дорівнюватимуть нулю. Позначимо таку систему осей  $\xi C \eta \zeta$ , тоді (рис. 3.2)

$$\sum_{i=1}^n m_i \xi_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_i \eta_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_i \zeta_i = 0.$$

Вільне падіння тіла — це такий рух, за якого всі його точки (частинки) рухаються по вертикальних прямих рівноприскорено із прискоренням земного тяжіння і у кожний момент часу мають однакові швидкості. Отже, *вільне падіння тіла як прямолінійний поступальний рух можна замінити рухом його центра мас  $C$* . При цьому  $x_C$  і  $y_C$  лишаються незмінними під час руху. Тому вільне падіння визначається одним рівнянням:

$$\dot{z}_C = z_C(t) = z_{C0} - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 - \dot{z}_{C0}(t - t_0), \quad (3.4)$$

де  $z_{c0}$  і  $\dot{z}_{c0}$  — значення аплікати і швидкості центра мас у початковий момент часу  $t_0$ . Дане рівняння можна дістати інтегруванням диференціального рівняння

$$\frac{d^2 z_c}{dt^2} = \frac{dz_c}{dt} = \ddot{z}_c = -g$$

при початкових даних руху

$$z_c(t_0) = z_{c0}, \quad \dot{z}_c = \dot{z}_c(t_0) = -\dot{z}_{c0}.$$

Справді, інтегруємо перший раз:

$$\dot{z}_c = -\dot{z}_{c0} - g(t - t_0).$$

Інтегруємо вдруге:

$$z_c - z_{c0} = -\dot{z}_{c0} \int_{t_0}^t dt - g \int_{t_0}^t (t - t_0) dt = -\dot{z}_{c0}(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Якщо  $t_0 = 0$  і  $z_{c0} = H$ ,  $\dot{z}_{c0} = 0$ , то

$$\dot{z}_c = v_c = -gt, \quad z_c = H - \frac{gt^2}{2}. \quad (3.5)$$

Для цих початкових даних руху швидкість тіла в момент його падіння на Землю визначається за відомою формулою Галілея

$$v_c = \sqrt{2gH}. \quad (3.6)$$

Інерційний прямолінійний рівномірний рух тіла, умови якого визначаються першим законом Ньютона є найпростішим ідеальним випадком поступального руху тіла. Інерційний поступальний прямолінійний рівномірний рух тіла характеризується тим, що він здійснюється сам по собі без впливу інших матеріальних об'єктів. Тому в разі такого руху додаткових напружень в тілі не виникає, як і в разі вільного падіння тіл.

Зазначимо, що поступальний прямолінійний рівномірний рух тіла також може відбуватись за інших, відмінних від тих умов, про які йдеться в законі інерції; а також коли діючі на тіло сили зрівноважуються, а початкові швидкості точок його однакові як за модулем, так і за напрямом. З кінематичного погляду такий рух нічим не відрізняється від поступального руху за інерцією. Відмінність його від останнього зумовлена додатковими внутрішніми силами, спричиненими дією зрівноважених зовнішніх сил.

## § 11. Теорема про поступальний рух абсолютно твердого тіла

Уже було розглянуто властивості двох найпростіших видів прямолінійного поступального руху тіла — поступальний прямолінійний рівномірний і поступальний прямолінійний рівноприскорений. При обертанні кривошипа  $OA$  (див. рис. 3.1,  $\epsilon$ ) поршень кривошипно-шатунного механізму також здійснює поступальний прямолінійний рух, але нерівномірний і нерівнозмінний. Швидкості й прискорення частинок поршня в кожний даний момент часу однакові, але різні для різних моментів часу. Тут маємо приклад поступального прямолінійного змінного руху тіла. На схемах (рис. 3.1,  $a, б, з$ ) тіло  $D$  перебуває в такому поступальному русі, коли всі його точки рухаються по однакових колах (конгруентних), які при накладанні суміщаються, і мають в кожний момент часу однакові швидкості і прискорення. У загальному випадку поступального руху тіла траєкторії його точок конгруентні, але можуть бути цілком довільної форми.

*Поступальним рухом тіла називається такий його рух, при якому будь-яка пряма, що проходить через будь-які дві його точки, при русі тіла залишається паралельною сама собі.*

На підставі цього означення і поняття абсолютно твердого тіла доведемо теорему, яка розкриває основні властивості поступального руху тіла в найзагальнішому випадку — **теорему про поступальний рух:**

*у разі поступального руху тіла всі його точки рухаються по конгруентних траєкторіях (однакових за формою траєкторіях, які при накладанні суміщаються усіма своїми точками) і в кожний момент часу мають однакові швидкості й прискорення.*

Розглянемо поступальний рух тіла відносно абсолютно нерухомої декартової системи координат  $xOyz$ . Крім того, візьмемо другу систему декартових осей  $\xi C\eta\zeta$  з початком у центрі мас тіла  $C$ . Осі цієї системи жорстко зв'яжемо з тілом. Нехай тіло в початковий момент часу  $t_0$ , в який почнемо вивчати рух, орієнтоване в системі координат  $xOyz$  так, що інші осі  $C\xi$ ,  $C\eta$ ,  $C\zeta$  розташуються паралельно відповідним нерухомим осям  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  (рис. 3.3).

На підставі означення поступального руху і прийнятих умов система осей  $\xi C\eta\zeta$  разом із тілом здійснює поступальний рух, під час якого рухомі осі  $C\xi$ ,  $C\eta$  і  $C\zeta$  залишаються паралельними як своїм початковим положенням, так і нерухомим осям. Для доведення теореми візьмемо в тілі довільну точку  $B$ , координати якої для моменту часу  $t$  у нерухомій системі осей  $xOyz$  є  $x_B$ ,  $y_B$  і  $z_B$ . Визначимо також для



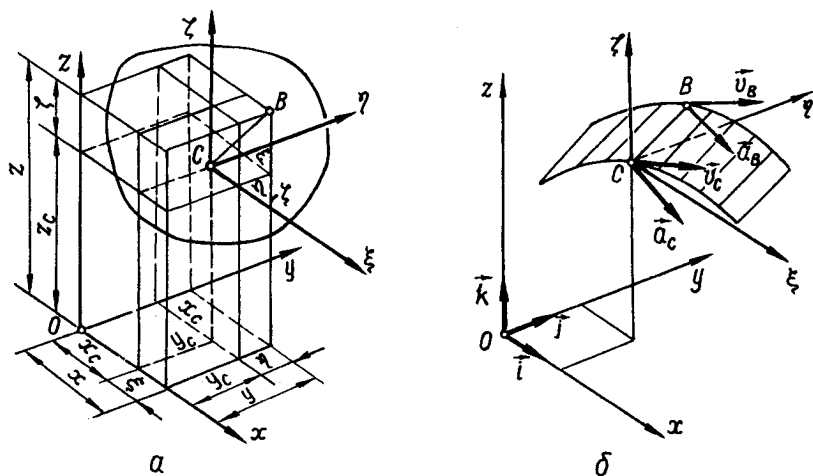


Рис. 3.3

того самого моменту часу  $t$  координати точки  $B$  у рухомій системі  $\xi\eta\zeta$ . Позначимо їх  $\xi_B$ ,  $\eta_B$  і  $\zeta_B$ . Тоді з рис. 3.3,  $a$  встановимо зв'язок між координатами точки  $B$  в обох системах осей:

$$x_B = x_C + \xi_B; \quad y_B = y_C + \eta_B; \quad z_B = z_C + \zeta_B. \quad (3.7)$$

У цих рівностях координати  $\xi_B$ ,  $\eta_B$  і  $\zeta_B$  точки  $B$  не залежать від часу  $t$ , оскільки, згідно з означенням поступального руху і властивостей абсолютно твердого тіла, вектор  $\vec{CB}$  не змінює свого напрямку під час руху тіла. Отже, щоб знайти абсолютні координати  $x_B(t)$ ,  $y_B(t)$  і  $z_B(t)$  точки  $B$  у даний момент часу  $t$  треба до абсолютних координат центра мас тіла  $x_C(t)$ ,  $y_C(t)$  і  $z_C(t)$ , що визначені в цей самий момент часу  $t$ , додати сталі координати  $\xi_B$ ,  $\eta_B$  і  $\zeta_B$ , які визначають положення точки  $B$  відносно тіла.

Отже, положення будь-якої точки тіла в разі його плоско-паралельного руху визначається положенням центра мас тіла, а отже, й самого тіла. Тому кінематичними (остаточними) рівняннями поступального руху тіла є функціональні залежності

$$x_C = x_C(t); \quad y_C = y_C(t); \quad z_C = z_C(t), \quad (3.8)$$

що є скалярною формою рівнянь руху. Якщо помножимо першу, другу і третю рівність на одиничні вектори  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{k}$  осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  і результати додамо, то дістанемо рівняння поступального руху тіла у векторній формі:

$$\vec{r}_C = \vec{r}_C(t). \quad (3.9)$$

Щоб наочніше показати, як від траєкторії центра мас тіла перейти до траєкторії будь-якої його точки, наприклад точки  $B$ , помножимо рівності (3.7) на одиничні вектори осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  і результати додамо. Матимемо векторне рівняння

$$\vec{r}_B = \vec{r}_C + \vec{CB},$$

яке показує: щоб знайти траєкторію точки  $B$ , треба перенести траєкторію центра мас  $C$  тіла в напрямі вектора  $\vec{CB}$  на відстань  $CB$ . У цьому разі кожна точка траєкторії центра мас  $C$  переміститься в напрямі вектора  $\vec{CB}$  на таку саму відстань  $CB$ , що дорівнює модулю вектора  $\vec{CB}$  (рис. 3.3, б). Першу частину теореми доведено.

Для доведення інших тверджень теореми — про однаковість для всіх точок швидкостей і прискорень — скористаємось рівняннями (3.7), в яких  $x_C, y_C$  і  $z_C$  є функціями часу  $t$ , а  $\xi_B, \eta_B$  і  $\zeta_B$  — сталі величини. Після диференціювання цих рівнянь по часу дістанемо:

$$\dot{x}_B = \dot{x}_C; \quad \dot{y}_B = \dot{y}_C; \quad \dot{z}_B = \dot{z}_C$$

або, помноживши на  $\vec{i}, \vec{j}$  і  $\vec{k}$  відповідно й додавши,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C.$$

Отже, доведено, що швидкості всіх точок тіла однакові й дорівнюють швидкості центра мас  $C$ .

Візьмемо другу похідну по часу від функцій (3.7):

$$\ddot{x}_B = \ddot{x}_C; \quad \ddot{y}_B = \ddot{y}_C; \quad \ddot{z}_B = \ddot{z}_C,$$

або

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C.$$

Отже, доведено, що і прискорення всіх точок тіла в разі руху однакові і дорівнюють прискоренню центра мас  $C$  (рис. 3.3, б).

Підсумовуючи викладені міркування, аналіз поступального руху тіла зводиться до вивчення руху однієї його точки, наприклад центра мас  $C$ . Замість точки  $C$  можна було б узяти будь-яку іншу його точку. Та в динаміці центр мас є важливим поняттям. Кінематика точки, яку було вивчено раніше, є основою кінематики поступального руху абсолютно твердого тіла. Також зазначимо, що при розгляді поступального руху тіло вважають матеріальною точкою, яка в разі руху тіла весь час збігається з його центром мас  $C$ ; маса її дорівнює масі тіла. Маємо приклад матеріальної точки кінцевої маси. Слід зауважити, що заміна тіла його моделлю, якою є матеріальна точка, дає

можливість вивчити цілком не лише кінематику поступального руху, а й динамічні властивості цього виду руху.

Якщо траєкторія центра мас  $C$  тіла, що рухається поступально, відома, то, встановивши на цій траєкторії початкову точку  $O_1$  відліку дугової координати  $s_C$ , додатний і від'ємний напрями, можна поступальний рух тіла виразити рівняннями в натуральній формі:

$$s_C = s_C(t). \quad (3.10)$$

Нарешті зауважимо, що формули (3.1) і (3.2) мають загальний характер. У динаміці виведемо ці співвідношення як для тіла, що здійснює довільний рух, так і для механічної системи.

Для довільного поступального руху зазначені формули випливають з тривіальної рівності  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  і теореми про поступальний рух тіла. Врахувавши, що  $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \bar{a}_3 = \dots = \bar{a}_i = \dots = \bar{a}_C$  і помноживши обидві частини вказаної рівності маси всього тіла на прискорення  $\bar{a}_i$ , дістанемо

$$M \bar{a} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i; \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( M \bar{r}_C - \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i \right) = 0.$$

Виконавши інтегрування при нульових початкових даних, дістанемо відомі формули (3.1) і (3.2).

Як приклад застосування викладеної теорії кінематики поступального руху, визначимо траєкторію, швидкість і прискорення тіла  $D$  під час руху механізмів, схеми яких наведено на рис. 3.1.

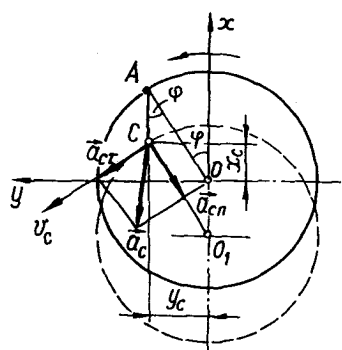


Рис. 3.4

Нехай радіус колеса  $OA$  відомий, а також відома відстань  $AC$  центра мас  $C$  тіла  $D$  від точки  $A$  на колі (див. рис. 3.1, а). Виберемо осі  $Ox$  і  $Oy$ , як показано на рис. 3.4. Вважається, що рух колеса відомий. Тоді, позначивши  $\varphi$  — кут між вертикальною віссю  $Ox$  і радіусом  $OA$ , можна записати рівняння руху центра мас  $C$  тіла  $D$ :

$$x_C = OA \cos \varphi - AC; \quad y_C = OA \sin \varphi.$$

Перенесемо  $AC$  у ліву частину і піднесемо до квадрата обидві рівності, а також виконаємо додавання: дістанемо рівняння кола з центром  $O_1$ . Координатами точки  $O_1$  є, очевидно,  $x_{O_1} = -AC$  і  $y_{O_1} = 0$ .

Оскільки  $\varphi$  залежить від часу, то проекції швидкості точки  $C$ , а отже і тіла  $D$ , виражаються рівностями

$$\dot{x}_C = v_{Cx} = -OA \dot{\varphi} \sin \varphi; \quad \dot{y}_C = v_{Cy} = OA \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

На підставі цих співвідношень можна знайти і модуль швидкості тіла  $D$  за формулою

$$v_D = v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \sqrt{OA^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + OA^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi} = |\dot{\varphi}| \cdot OA.$$

Якщо продиференціювати проекції швидкості точки  $C$  по часу, то дістанемо проекції прискорення цієї точки на осі  $Ox$  і  $Oy$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_D = \ddot{x}_C &= -OA \ddot{\varphi} \sin \varphi - OA \dot{\varphi}^2 \cos \varphi; \\ \ddot{y}_D = \ddot{y}_C &= OA \ddot{\varphi} \cos \varphi - OA \dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Модуль повного прискорення точки  $C$

$$a_D = a_C = \sqrt{OA^2 \ddot{\varphi}^2 + OA^2 \dot{\varphi}^4} = OA \sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}.$$

Очевидно, що  $\ddot{\varphi} \cdot OA = a_{C\tau}$  — це дотичне прискорення, а  $\dot{\varphi}^2 \cdot OA = a_{Cn}$  — нормальне прискорення (рис. 3.4).

Припустимо, що центр мас тіла  $D$  механізму (див. рис. 3.1, б) — точка  $C$  знаходиться посередині відрізка  $AA_1$ , а осі координат  $Ox$  і  $Oy$  спрямовано так, як це показано на рисунку. Тоді, позначивши  $\varphi$  — кут між кривошипом  $CA$  і горизонтальним відрізком  $OO_1$ , можна записати рівняння руху точки  $C$  тіла  $D$ :

$$x_C = OA \cos \varphi + AC; \quad y_C = OA \sin \varphi.$$

Рівнянням траєкторії є

$$(x_C - AC)^2 + y_C^2 = OA^2,$$

що описує коло з центром  $O_1$ , розташованим на осі  $Ox$ . Координати цієї точки дорівнюють  $x_{O_1} = AC$ ,  $y_{O_1} = 0$ .

Проекції швидкості точки  $C$ :

$$\dot{x}_C = -OA \dot{\varphi} \sin \varphi; \quad \dot{y}_C = OA \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

модуль:

$$v_C = v_D = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = |\dot{\varphi}| \cdot OA.$$

За відомими проекціями швидкості визначимо проекції прискорення тіла  $D$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_C = a_{Cx} &= -OA \ddot{\varphi} \sin \varphi - OA \dot{\varphi}^2 \cos \varphi; \\ \ddot{y}_C = a_{Cy} &= OA \ddot{\varphi} \cos \varphi - OA \dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Модуль прискорення визначимо за формулою

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2}.$$

Виконавши відповідні викладки, дістанемо

$$a_C = OA \sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}; \quad a_{C\tau} = \ddot{\varphi} OA; \quad a_{Cn} = \dot{\varphi}^2 OA.$$

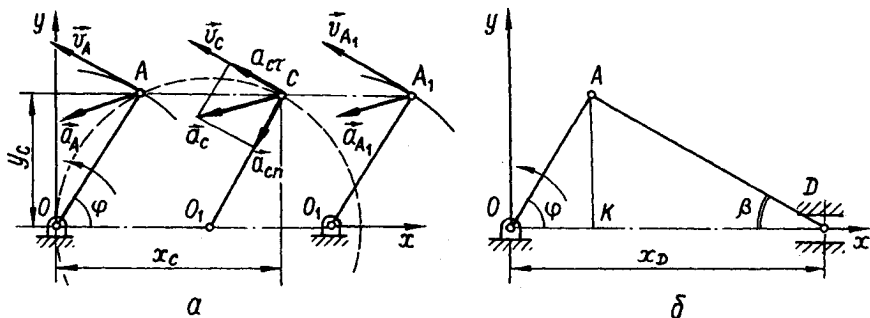


Рис. 3.5

Прискорення точок  $A$ ,  $C$  і  $A_1$  однакові. На рис. 3.5,  $a$  зображено траєкторію точки  $C$ , а також її швидкість і прискорення.

Позначимо  $\varphi$  — кут між кривошипом  $OA$  і горизонтальною прямою  $OD$ , а  $\beta$  — кут між шатуном  $AD$  і тією самою горизонтальною прямою  $OD$ , і почнемо знаходити рівняння руху поршня  $D$  (рис. 3.5,  $b$ ). Напрявивши вісь  $Ox$  горизонтально зліва направо,  $Oy$  — по вертикалі вгору, з трикутника  $OAD$  дістанемо співвідношення

$$OD = x_D = OA \cos \varphi + AD \cos \beta; \quad y_D = 0.$$

Висоту  $AK$  у трикутнику  $OAD$  спочатку знайдемо за відрізком  $OA$ , а потім — за довжиною шатуна  $AD$ . В результаті дістанемо рівність

$$AK = OA \sin \varphi = AD \sin \beta,$$

звідки виразимо синус кута  $\beta$  через кут  $\varphi$ :

$$\sin \beta = (OA/AD) \sin \varphi.$$

Тоді можна знайти косинус кута  $\beta$  за відомою формулою

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - (OA/AD)^2 \sin^2 \varphi}.$$

Запишемо рівняння поступального руху поршня  $D$ :

$$x_D = OA \cos \varphi + AD \sqrt{1 - (OA/AD)^2 \sin^2 \varphi}.$$

Вираз для швидкості поршня  $D$  знайдемо, якщо визначимо похідну по часу абсциси  $x_D$ :

$$\dot{x}_D = v_D = -\dot{\varphi} OA \left( \sin \varphi + \frac{OA}{AD} \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{1 - (OA/AD)^2 \sin^2 \varphi}} \right).$$

У разі відношення  $OA/AD$ , набагато меншого за одиницю, маємо

$$v_D = -\dot{\varphi} OA \sin \varphi (1 + \cos \varphi),$$

або

$$v_D = -v_A \sin \varphi (1 + \cos \varphi),$$

де  $v_A$  — швидкість кінця кривошипа, точки  $A$ .

Для визначення прискорення поршня  $D$  візьмемо похідну по часу від наближеного виразу швидкості  $v_D$ :

$$\begin{aligned} \dot{v}_D = \frac{dv_D}{dt} = a_D &= -\ddot{\varphi} \frac{1}{2} OA \sin 2\varphi - \dot{\varphi}^2 OA \cos 2\varphi - \ddot{\varphi} OA \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 OA \cos \varphi = \\ &= -\ddot{\varphi} OA \sin \varphi (1 + \cos \varphi) - \dot{\varphi}^2 OA (\cos \varphi + \cos 2\varphi), \end{aligned}$$

або

$$a_D = -a_{At} \sin \varphi (1 + \cos \varphi) - a_{An} (\cos \varphi + \cos 2\varphi),$$

де  $a_{At}$  — дотичне прискорення точки  $A$ ;  $a_{An} = \dot{\varphi}^2 \cdot OA$  — нормальне прискорення цієї самої точки.

Відповідно до наближених формул швидкості і прискорення для крайнього правого положення поршня  $D$  маємо такі значення кінематичних величин:  $v_D = 0$ ,  $a_D = -2a_{An} = -2\dot{\varphi}^2 OA$ .

Для визначення траєкторії швидкості і прискорення тіла  $AD$  під час руху механізму (див. рис. 3.1, з), вісь  $Ox$  сумістимо з горизонтальною прямою, як показано на рис. 3.6, а вісь  $Oy$  спрямуємо по вертикалі вгору.

Вважаємо, що для тіла  $AD$  його центр мас — це точка  $D$ . Так само, як і в попередніх випадках, введемо кут  $\varphi$ , який визначає положення стержня  $OA$ . Позначивши на рисунку відрізки, які дорівнюють відповідним координатам точки  $D$  —  $x_D$  і  $y_D$ , з рис. 3.6 знаходимо співвідношення

$$x_D = OA \cos \varphi; \quad y_D = OA \sin \varphi - AD.$$

З них дістанемо рівняння траєкторії тіла  $OD$ :

$$x_D^2 + (y_D + AD)^2 = OA^2.$$

Отже, точка  $D$  рухається по колу радіусом  $OA$  з центром  $O_1$ , який лежить на осі  $Oy$ , нижче точки  $O$ . Відстань  $O_1O$  дорівнює  $AD$ .

Визначимо швидкість тіла  $AD$  у разі його поступального руху. Для цього, як і в попередніх прикладах, диференціюємо координати точки  $D$  по часу:

$$\dot{x}_D = v_{Dx} = -OA \dot{\varphi} \sin \varphi; \quad y_D = v_{Dy} = OA \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

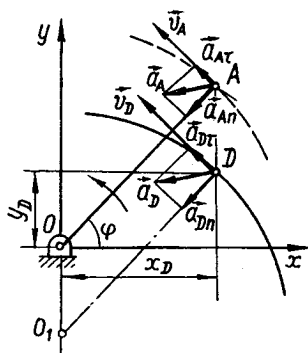


Рис. 3.6

Модуль швидкості

$$v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2} = |\dot{\varphi}| \cdot OA.$$

Диференціюючи другий раз, дістанемо:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_D = a_{Dx} &= -OA \ddot{\varphi} \sin \varphi - OA \dot{\varphi}^2 \cos \varphi; \\ \ddot{y}_D = a_{Dy} &= OA \ddot{\varphi} \cos \varphi - OA \dot{\varphi}^2 \sin \varphi.\end{aligned}$$

За проекціями прискорення  $a_{Dx}$  і  $a_{Dy}$  обчислимо модуль

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = OA \sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4},$$

або

$$a_D = \sqrt{a_{Dt}^2 + a_{Dn}^2}; \quad a_{Dt} = \ddot{\varphi}^2 OA; \quad a_{Dn} = \dot{\varphi}^2 OA.$$

Отже, точка  $D$  рухається по колу такого самого радіуса, як і кінець  $A$  кривошипа  $OA$ . Швидкість  $\vec{v}_D$ , дотичне  $\vec{a}_{Dt}$ , нормальне  $\vec{a}_{Dn}$  і повне прискорення точки  $D$  зображено на рис. 3.6.

## ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ АБСОЛЮТНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

Обертальний рух — дуже поширений в техніці: обертаються маховики, колеса, ротори, кривошипи, вали тощо різноманітних машин і механізмів. У природі обертальний рух спостерігається як складова частина загальніших рухів. Так, Земля здійснює дуже складний рух, в якому можна виділити дуже відомий обертальний рух навколо її власної осі. Та ця власна вісь обертання в свою чергу також переміщується в просторі.

Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі є частковим випадком миттєвого обертального руху, за якого вісь обертання з часом змінює своє положення як відносно самого тіла, так і абсолютно нерухомого простору.

Виявляється, що миттєвий обертальний рух тіла можна розкласти на три складові обертальні рухи, які відбуваються навколо одних і тих самих певним способом вибраних осей власного обертання, прецесії та нутації. Цим окремим складовим властиві характерні ознаки обертальних рухів з нерухомими осями. Отже, вивчення обертального руху тіла навколо нерухомої осі має не лише самостійне значення — воно є підготовчим етапом для ознайомлення з теорією миттєвих обертальних рухів.

Якщо дві будь-які точки абсолютно твердого тіла нерухомо закріпити, то воно рухається так, що й інші його точки, які розташовані на тій самій прямій, на якій лежать дві закріплені точки, залишаються нерухомими. Ця нерухома пряма називається *віссю обертання тіла*. А рух тіла, який воно може здійснювати, маючи нерухому вісь обертання, називають *обертальним рухом*. Для обертального руху характерною особливістю є переміщення всіх точок тіла по колах, площини яких перпендикулярні до осі обертання, а центри цих кіл лежать на нерухомій осі обертання.



## § 12. Рівномірний і рівнозмінний обертальний рух навколо нерухомої осі

Обертальний рух добре відцентрованого точильного каменя верстата після вимкнення електроприводу на порівняно невеликому відтинку часу є прикладом рівномірного обертального руху. В цьому разі центр ваги (центр мас) каменя розташований на горизонтальній осі обертання і вага його зрівноважується реакціями підшипників осі. Окрім сил тертя ковзання в підшипниках осі й сил опору повітря, інших силових впливів немає. Отже, якщо зазначеними силами, як малими величинами, можна знехтувати, то рівномірний обертальний рух каменя триває достатньо довго.

*Рівномірним обертальним рухом тіла навколо нерухомої осі називається такий обертальний рух, коли всі його точки по своїх колах рухаються рівномірно.*

Рівномірний рух точок тіла по колах відбувається при сталих за модулями швидкостях з доцентровими прискореннями.

**Визначення положення тіла в разі обертального руху.** Для визначення положення точок (частинок) відносно самого обертового тіла введемо декартову систему координат  $\xi O\eta\zeta$ , яку вважатимемо незмінно зв'язаною з цим тілом. Нехай вісь обертання тіла — вертикальна, і з нею збігається координатна вісь  $O\zeta$ . Закріплені нерухомо точки тіла на осі обертання позначимо  $O$  і  $A$ . При обертанні тіла разом із ним, як одне ціле, обертається й система координат  $\xi O\eta\zeta$ .

Положення будь-якої точки  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) тіла відносно системи координат  $\xi O\eta\zeta$  визначається постійними для даної точки координатами  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  і  $\zeta_i$ , які при обертанні тіла не залежать від часу. Замість координат  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  і  $\zeta_i$  положення точок  $B_i$  можна визначати кутом  $\alpha_i$ , параметром  $r_i$  і аплікатою  $\zeta_i$ . Кут  $\alpha_i$  — це кут між рухомою півплощиною  $\zeta O\xi$  ( $\Pi$ ) і відстанню  $r_i$  основи перпендикуляра, опущеного з точки  $B_i$  тіла на горизонтальну площину  $\xi O\eta$ , до нерухомої точки  $O$  — початку системи координат  $\xi O\eta\zeta$  (рис. 4.1).

Крім того, для визначення точок  $B_i$  обертового тіла відносно абсолютно нерухомого простору введемо абсолютно нерухому декартову систему координат  $xOyz$  з початком у тій самій нерухомій точці  $O$ . Вісь  $Oz$  спрямуємо по осі обертання вгору, по якій спрямована також вісь  $O\zeta$  першої системи  $\xi O\eta\zeta$ .

Нехай у момент часу  $t_0$ , який називають початковим і починаючи з якого вивчають обертовий рух, відповідні осі обох систем збігаються. Тоді при обертанні тіла, наприклад проти руху годинникової стрілки, через інтервал часу  $\Delta t = t - t_0$  у момент часу  $t$  півплощини (рухома  $\zeta O\xi$  ( $\Pi$ ) і нерухома  $zOx$  ( $\Pi_0$ )) утворюють двограний кут, який позначимо  $\varphi$  (рис. 2.7). Цей кут можна відкладати від нерухомої пів-

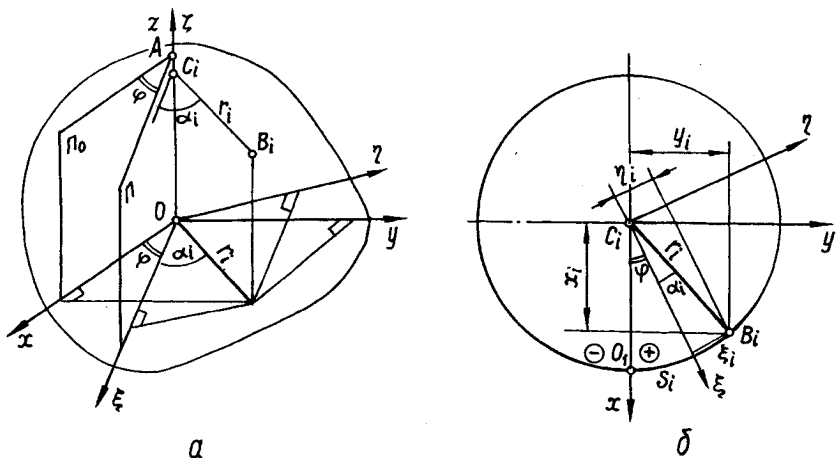


Рис. 4.1

площини  $\Pi_0$  ( $zOx$ ) як проти руху стрілки годинника, так і в його напрямі. У першому випадку кут  $\varphi$  вважають додатним, у другому — від'ємним. Отже, даний двограний кут  $\varphi$  — алгебраїчна величина, назовемо її кутом повороту тіла.

З рис. 2.7, б виводимо співвідношення:

$$x_i = r_i \cos(\alpha_i + \varphi); \quad y_i = r_i \sin(\alpha_i + \varphi); \quad z_i \equiv c_i, \quad (4.1)$$

які визначають положення будь-якої точки  $B_i$  тіла в разі обертально-го руху;  $\alpha_i$ ,  $r_i$  і  $c_i$  не залежать від часу  $t$ ; кут повороту  $\varphi$  є відомою функцією часу  $t$ .

Кожна точка  $B_i$  тіла під час його обертання рухається по колу радіусом  $r_i$  з центром  $C_i$  на осі обертання  $OA$  (рис. 4.1, б). Також положення точки  $B_i$  можна визначати дугою кола  $s_i$  (натуральний спосіб вивчення руху точки). За рис. 4.1, б, запишемо тригонометричне співвідношення:

$$s_i = r_i(\alpha_i + \varphi(t)). \quad (4.2)$$

Вираз (4.2) є рівнянням руху точки  $B_i$  тіла при його обертанні. З рівнянь (4.1) і (4.2) бачимо, що положення кожної точки  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) тіла відносно абсолютно нерухомої системи координат  $xOyz$  у певний момент часу  $t$  буде відоме, якщо також у цей самий момент часу буде відоме значення кута повороту  $\varphi$  тіла. Отже, кут повороту  $\varphi$  тіла, від якого залежать координати  $x_i$ ,  $y_i$  і  $z_i$  кожної його точки  $B_i$ , є тим просторовим параметром, яким однозначно задається положення обертового тіла в просторі.

При обертанні тіла кут повороту  $\varphi$  є однозначною неперервною функцією часу, тому

$$\varphi = \varphi(t). \quad (4.3)$$

Формула (4.3) — рівняння (закон) обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

**Рівняння рівномірного обертального руху.** Тепер, володіючи прийомами для визначення положення як окремих точок тіла, так і самого тіла в разі його обертального руху, можна перейти до дослідження рівномірного обертального руху.

Як було вже зазначено, під час рівномірного обертального руху швидкості окремих його точок за модулем не змінюються. Тому можна записати з урахуванням (4.2):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} [r(\alpha + \varphi)] = \text{const}$$

(індекс  $i$  відкинута).

Звідси дістанемо  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} = \text{const}$ . Похідну  $\dot{\varphi}$  позначимо  $\omega$  і назовемо кутовою швидкістю рівномірного обертального руху. Маємо диференціальне рівняння  $d\varphi = \omega dt$  для визначення залежності кута повороту від часу.

Щоб виконати означене інтегрування, треба задати початкові умови руху. Нехай у початковий момент часу  $t_0$  кут повороту тіла має значення  $\varphi_0$ . Тоді, інтегруючи, дістанемо рівняння рівномірного обертального руху тіла:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega(t - t_0); \quad \varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0). \quad (4.4)$$

Визначимо кутову швидкість цього руху. Рівність (4.4) запишемо у вигляді

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (4.5)$$

З цієї формули випливає, що *кутовою швидкістю тіла в разі рівномірного обертального руху називається величина, яка чисельно дорівнює зміні кута повороту тіла за одиницю часу, тобто кутова швидкість показує наскільки змінюється кут повороту щосекунди.*

Якщо початкові дані руху нульові, тобто  $\varphi_0=0$  при  $t_0=0$ , то рівняння (4.4) спрощується:

$$\varphi = \omega t, \quad (4.6)$$

звідки

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (4.7)$$

Кут повороту  $\varphi$  в системі СІ вимірюється в радіанах (рад.). Як відомо, кут значенням 1 рад — це такий центральний кут, у якого

довжина дуги й довжина радіуса збігаються ( $1 \text{ рад} \cong 57^\circ$ ). На підставі формули (4.7) дістанемо розмірність кутової швидкості:

$$[\omega] = \frac{[\varphi]}{[t]} = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

Отже, якщо в разі рівномірного обертального руху щосекунди кут повороту змінюється на один радіан, то кутова швидкість дорівнює  $\omega = 1 \text{ рад/с} = 1 \text{ с}^{-1}$  (один радіан на секунду).

Звернемо ще увагу на рівняння (4.5). Воно показує, що кутова швидкість характеризує не лише інтенсивність рівномірного обертання, а також визначає, в якому напрямі обертається тіло: при  $\Delta\varphi > 0$  — проти руху годинникової стрілки, при  $\Delta\varphi < 0$  — за рухом стрілки годинника.

**Рівняння рівнозмінного обертального руху.** Дамо означення рівнозмінного обертального руху тіла, що відбувається навколо нерухомої осі.

*Якщо під час обертання тіла його точки перебувають у рівнозмінних рухах на своїх колах, то такий обертальний рух тіла називається рівнозмінним. У цьому разі дотичні прискорення точок за модулем не змінюються.*

Отже, маємо умову

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \text{const.}$$

Але  $s = r(\alpha + \varphi)$ , тому

$$a_\tau = \frac{d^2}{dt^2} (r(\alpha + \varphi)) = \text{const.},$$

звідки

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{a_\tau}{r} = \text{const.}$$

Позначимо другу похідну по часу  $\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ , тоді маємо диференціальне рівняння

$$d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{a_\tau}{r} dt = \varepsilon dt \quad \left(\varepsilon = \frac{a_\tau}{r}\right),$$

де  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  називається кутовою швидкістю тіла в разі його рівнозмінного обертального руху. Бачимо, що кутова швидкість  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  в цьому разі є змінною величиною. Щоб виконати інтегрування і знайти, як змінюється з часом  $\omega$ , треба, як і для рівномірного обертання, задати початкові дані руху. Нехай для початкового моменту часу  $t_0$  кутова

швидкість має значення  $\omega_0$ . Тоді, інтегруючи у відповідних межах записане вище рівняння, дістанемо:

$$\omega - \omega_0 = \frac{a_\tau}{r} (t - t_0),$$

або

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0). \quad (4.8)$$

Бачимо, що кутова швидкість  $\omega$  тіла під час рівнозмінного руху змінюється пропорціонально зміні часу подібно до того, як змінюється кут повороту тіла, коли воно рівномірно обертається. Рівняння (4.8) можна записати у вигляді

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}. \quad (4.9)$$

Зміна кутової швидкості за одиницю часу називається кутовим прискоренням тіла для рівнозмінного обертального руху. Отже, *кутове прискорення рівнозмінного обертального руху тіла — це стала величина, яка чисельно дорівнює зміні кутової швидкості тіла за одиницю часу.*

Під час рівнозмінного обертального руху щосекунди кутова швидкість змінюється на одне й те саме значення, яке і є кутовим прискоренням і також визначається за формулою

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{r}. \quad (4.10)$$

Якщо взяти нульові початкові умови  $\omega_0 = 0$  при  $t_0 = 0$ , то рівняння (4.8) набуде вигляду

$$\omega = \varepsilon t, \quad (4.11)$$

звідки

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}. \quad (4.12)$$

Кутове прискорення в системі СІ вимірюють у  $\text{с}^{-2}$  (з урахуванням виразу (4.2)):

$$[\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}.$$

У разі рівнозмінного обертального руху щосекунди кутова швидкість тіла змінюється на один радіан за секунду, а кутового прискорення —  $\varepsilon = 1 \text{с}^{-2}$ .

Замінивши у формулі  $\omega$  на  $\frac{d\varphi}{dt}$  і помноживши на  $dt$ , дістанемо диференціальне рівняння для знаходження рівняння рівнозмінного обертального руху:

$$d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon(t - t_0) dt.$$

Проінтегруємо його за початковими даними руху: при  $t_0$  кут повороту і кутова швидкість дорівнюють  $\varphi_0$  і  $\omega_0$  відповідно. Тоді

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_{t_0}^t dt + \varepsilon \int_{t_0}^t (t - t_0) dt.$$

Отже, маємо рівняння рівнозмінного обертального руху тіла:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\varepsilon(t - t_0)^2}{2}. \quad (4.13)$$

При  $\varphi_0(t_0) = \varphi_0(0) = 0$  рівняння (4.8) і (4.13) спрощуються і мають вигляд

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon t, \\ \varphi &= \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Якщо, крім того, і  $\omega_0 = 0$ , то

$$\omega = \varepsilon t, \quad \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (4.15)$$

У формулах (4.14) кутове прискорення  $\varepsilon$  може бути додатним або від'ємним, залежно від цього розрізняються два види рівнозмінного обертального руху: при  $\omega_0 > 0$  і  $\varepsilon > 0$  — рівноприскорений, якщо  $\omega_0 > 0$ , а  $\varepsilon < 0$  — рівносповільнений.

*Зауваження.* Якщо за час  $t$  тіло зробить число  $N$  повних обертів, то кут повороту тіла за цей час

$$\varphi = 2\pi N. \quad (4.16)$$

Для рівномірного обертального руху тіла

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = 2\pi \frac{N}{t}.$$

Число обертів, які тіло здійснює за одиницю часу, обертаючись рівномірно, називається *частотою обертання тіла* і позначається  $n = \frac{N}{t}$ :

$$\omega = 2\pi n. \quad (4.17)$$

Якщо частоту визначати в обертах за хвилину, то формула (4.17) набуває вигляду

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad (4.18)$$

де  $\omega$  вимірюють у радіанах за секунду ( $\text{с}^{-1}$ ).

*Примітка.* В обертальних рухах швидкості окремих точок тіла називаються *лінійними швидкостями* та визначаються за формулою

$$v = \omega r. \quad (4.19)$$

**Нормальне прискорення точок тіла для рівномірного і рівнозмінного обертальних рухів.** Під час рівномірного обертального руху тіла кутове прискорення дорівнює нулю, а отже, нулю дорівнює дотичне прискорення точок тіла, у той час як нормальне прискорення точок тіла відмінне від нуля і визначається за формулою

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad (4.20)$$

В разі рівнозмінного обертального руху тіла його точки мають обидві складові прискорення — дотичне  $a_\tau$  і нормальне  $a_n$ , які визначаються за формулами

$$a_\tau = \varepsilon r; \quad a_n = \omega^2 r, \quad (4.21)$$

де  $\varepsilon$  — константа:  $\omega = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0)$ .

Модуль повного прискорення точок тіла визначається як діагональ прямокутника зі сторонами  $a_\tau$  і  $a_n$ :

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (4.22)$$

Напрямок повного прискорення точок визначається кутом  $\beta$  між прискоренням повним  $\vec{a}$  і радіусом кола  $r$ , по якому рухається відповідна точка тіла. Цей кут визначається з формули

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (4.23)$$

На рис. 4.2 для точок диска зображено нормальне  $\vec{a}_n$ , дотичне  $\vec{a}_\tau$  і повне  $\vec{a}$  прискорення у двох варіантах: 1) диск обертається рівномірно (рис. 4.2, а); 2) диск здійснює довільний обертальний рух — (рис. 4.2, б).

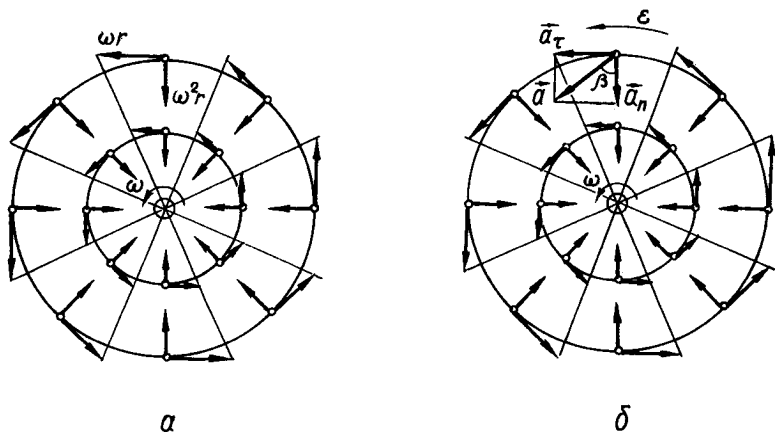


Рис. 4.2

**§ 13. Довільний обертальний рух абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі.  
Кутова швидкість і кутове прискорення**

Ми вже з'ясували, що положення обертового тіла в просторі в той чи інший момент часу визначається кутом повороту  $\varphi$ , і в разі рівномірного обертання тіла його кут повороту є лінійною залежністю від часу  $\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$ , де  $\omega$  — стала кутова швидкість, а для рівнозмінного обертального руху ця залежність визначається квадратичним законом зміни від часу  $\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0) + \frac{\varepsilon(t - t_0)^2}{2}$  ( $\varepsilon$  — константа). Для довільних обертальних рухів закон зміни кута повороту може виражатись будь-якою неперервною однозначною функцією часу

$$\varphi = \varphi(t). \quad (4.24)$$

Це — рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі в самому загальному випадку. Також довільним є закон руху по колах окремих точок обертового тіла

$$s = r(\alpha + \varphi(t)). \quad (4.25)$$

Якщо вибрати масштаби кута повороту і часу —

$$\mu_\varphi = \frac{\varphi}{L_\varphi}; \quad [\mu_\varphi] = \frac{[\varphi]}{[L_\varphi]} = \frac{\text{рад}}{\text{мм}}; \quad \mu_t = \frac{t}{L_t}; \quad [\mu_t] = \frac{[t]}{[L_t]} = \frac{\text{с}}{\text{мм}},$$

то в осях «час — кут повороту» ( $tO\varphi$ ) рівняння обертального руху тіла (4.24) можна зобразити графічно (рис. 4.3).

Для порівняння на рис. 4.4 наведено графіки рівнянь обертального руху тіла при сталій кутовій швидкості (рис. 4.4, а) і сталому кутовому прискоренні (рис. 4.4, б).

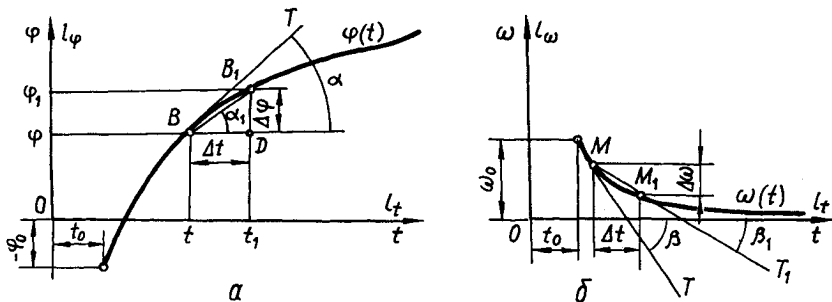


Рис. 4.3



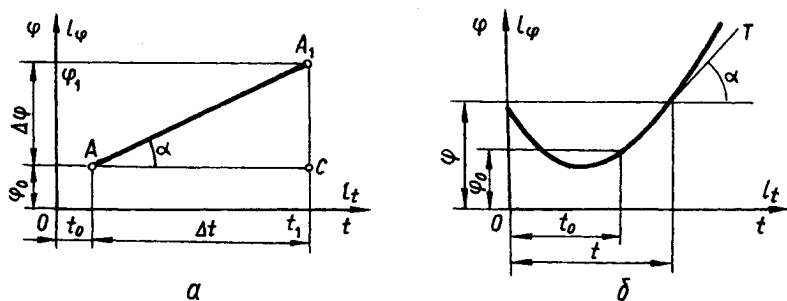


Рис. 4.4

Порівнювати довільні обертальні рухи з допомогою понять кутової швидкості й кутового прискорення, які стосувались часткових випадків обертального руху — рівномірного й рівнозмінного, неможливо. У загальному випадку обертальних рухів немає таких величин, які б упродовж руху залишалися незмінними. Тому треба ввести такі змінні величини, які б характеризували рух у кожний момент часу. До змінних кінематичних характеристик обертальних рухів тіл належать миттєві кутова швидкість і кутове прискорення.

Введемо поняття миттєвої кутової швидкості тіла, скориставшись властивостями рівномірного обертального руху. Візьмемо довільний момент часу  $t$ , якому відповідає кут повороту тіла  $\varphi$  (див. рис. 4.3, а). Також розглянемо інший будь-який момент часу  $t_1$ , який за своїм значенням близький до попереднього моменту  $t$ . Цьому другому моменту часу  $t_1$  відповідає кут повороту  $\varphi_1$ . Різниця  $\Delta t = t_1 - t$  є приростом часу, якому відповідає приріст кута повороту  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ . Значенням  $t$  і  $\varphi$  на кривій графіка (див. рис. 4.3, а) відповідає точка  $B$ , числам  $t_1$  і  $\varphi_1$  — точка  $B_1$ . Через ці точки проходить січна  $BB_1$  кривої, яка утворює з віссю часу кут  $\alpha$ . Бачимо, що при досить малому відтинку часу  $\Delta t = t_1 - t$  хорда  $BB_1$  замало відрізняється від дуги, яку вона стягує. З порівняння графіків (див. рис. 4.3, а і рис. 4.4, а) видно, що на малому відтинку часу  $\Delta t = t_1 - t$  довільний обертальний рух можна замінити з невеликою похибкою відповідним рівномірним обертанням з кутовою швидкістю

$$\omega_{\text{сеп}} = \frac{\varphi_1 - \varphi}{t_1 - t} = \frac{\mu_\varphi}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha_1; \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{L_{\varphi_1 - L}}{L_{t_1 - t}}, \quad (4.26)$$

яка називається *середньою кутовою швидкістю обертального руху тіла*. Чим менший відтинок часу  $\Delta t$ , тим точніше середня кутова швидкість характеризує обертальний рух на цьому відтинку часу. Якщо масштаби кута повороту  $\mu_\varphi$  і часу  $\mu_t$  однакові, то середня кутова

швидкість  $\omega_{\text{сер}}$  дорівнює тангенсу кута нахилу січної  $BT_1$  до осі часу  $Ot$ . З рис. 4.3, *a* видно, що коли приріст часу прямує до нуля, січна  $BT_1$  наближається до дотичної  $BT$  кривої, а кут  $\alpha_1$  між січною й віссю часу до кута  $\alpha$  між дотичною і віссю часу. Отже, середня кутова швидкість  $\omega_{\text{сер}}$  має своїм граничним значенням у відповідному масштабі тангенс кута нахилу дотичної  $BT$  у даний момент часу до графіка кута повороту тіла. Отже, щоб визначити миттєву кутову швидкість, треба обчислити границю

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\mu_{\varphi}}{\mu_t} \lim_{\Delta L_t \rightarrow 0} \frac{\Delta L_{\varphi}}{\Delta L_t} = \frac{\mu_{\varphi}}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha.$$

*Границя, до якої прямує середня кутова швидкість тіла, або, що те саме, відношення приросту кута повороту тіла до відповідного приросту часу при прямуванні останнього до нуля, називається миттєвою кутовою швидкістю тіла, або кутовою швидкістю його в даний момент часу.*

Математично миттєва кутова швидкість тіла для обертового руху визначається першою похідною по часу від кута повороту тіла:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (4.27)$$

а геометрично — в масштабі — тангенсом кута нахилу дотичної в даний момент часу до кривої графіка рівняння обертового руху тіла:

$$\omega = \frac{\mu_{\varphi}}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.28)$$

За допомогою миттєвої кутової швидкості тіла порівнюємо його змінний обертовий рух у кожний даний момент часу з відповідним рівномірним обертанням, в якому стала кутова швидкість дорівнює миттєвій кутовій швидкості даного змінного обертового руху тіла. Кутова швидкість тіла в даний момент часу — це швидкість рівномірного обертового руху, який би тілом здійснювався, починаючи з цього самого моменту часу.

Для змінного обертового руху тіла його кутова швидкість — змінна величина, яка залежить від часу:  $\omega = \omega(t)$ . Цю функцію вважають однозначною й неперервною. Її графік для обертового руху (див. рис. 4.3, *a*) подано на рис. 4.3, *б*. Зазначимо, що на осі часу при побудові кривої  $\omega(t)$  збережений попередній масштаб часу  $\mu_t$ , а на новій осі кутової швидкості  $O\omega$  вибрано масштаб кутової швидкості згідно із формулою

$$\omega = \mu_{\omega} L_{\omega},$$

де  $\mu_{\omega}$  — вказаний масштаб;  $L_{\omega}$  — ординати точок кривої графіка  $\omega = \omega(t)$ , мм.

Значення  $L_\omega$  знаходимо з формули

$$L_\omega = \frac{\mu_\varphi}{\mu_t \mu_\omega} \operatorname{tg} \alpha,$$

де  $\alpha$  — кут між дотичними кривої  $\varphi = \varphi(t)$  на рис. 4.3, а та віссю часу  $Ot$ .

З графіка (див. рис. 4.3, б) видно, що кутова швидкість для розгляданого руху (див. рис. 4.3, а) зменшується з часом, а її значення додатні. Це означає, що обертання тіла відбувається в напрямі, протилежному напрямку обертання за рухом годинникової стрілки, й інтенсивність обертального руху тіла спадає, а обертальний рух — сповільнений.

На підставі формул (4.27) і (4.28) для часткових обертальних рухів (рис. 4.4) дістанемо миттєву кутову швидкість — для рівномірного обертання:

$$\omega = \operatorname{const} = \frac{\mu'_\varphi}{\mu'_t} \operatorname{tg} \alpha,$$

графіком якої є пряма, паралельна осі часу (рис. 4.5); для рівнозмінного обертального руху:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0) = \frac{\mu''_\varphi}{\mu''_t \mu''_\omega} \operatorname{tg} \alpha.$$

Отже, графіком кутової швидкості в цьому разі є пряма, яка нахилена до осі часу, що визначається кутом  $\alpha$  (рис. 4.5, б).

Ординати точок прямих на графіках (рис. 4.5) визначаються відповідно з формул

$$L'_\omega = \frac{\mu'_\varphi}{\mu'_t \mu'_\omega} \operatorname{tg} \alpha'; \quad L''_\omega = \frac{\mu''_\varphi}{\mu''_t \mu''_\omega} \operatorname{tg} \alpha''.$$

Миттєвої кутової швидкості недостатньо для характеристики обертальних рухів тіла. Вводиться друга кінематична величина — миттєве

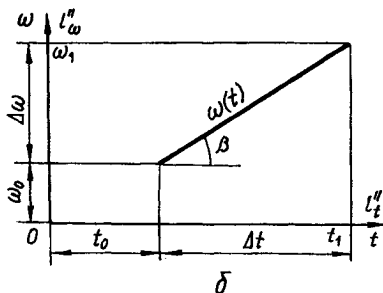
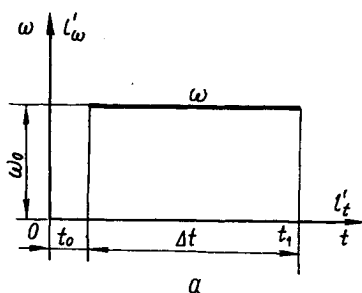


Рис. 4.5

кутове прискорення. Кутове прискорення, як і кутова швидкість, визначають інтенсивність зміни з часом відповідної функції: кутова швидкість — зміни кута повороту, кутове прискорення — зміни кутової швидкості.

Для введення миттєвого кутового прискорення скористаємось графіком кутової швидкості (див. рис. 4.3, б).

Зауважимо: міркування щодо визначення кутового прискорення — позначимо його  $\varepsilon$  — аналогічні тим, які мали місце при введенні поняття кутової швидкості (лише замість розгляду кута повороту треба брати кутову швидкість).

Пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

Позначимо для близьких моментів часу  $t_0$  і  $t_1$  кутову швидкість  $\omega_0$  і  $\omega_1$  відповідно. Тоді відношення приросту кутової швидкості  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$  до відповідного приросту часу  $\Delta t = t_1 - t$  дасть середнє значення кутового прискорення:

$$\varepsilon_{\text{сеп}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1 - t}, \quad (4.29)$$

яке характеризує обертальний рух тіла лише на відтинку часу  $\Delta t = t_1 - t$ . Прямолінійний відрізок  $MM_1$  для малих  $\Delta t$  мало відрізняється від дуги на графіку, який він стягує. Зіставляючи відрізок графіка, що відповідає малому відтинку часу  $\Delta t = t_1 - t$  з графіком кутової швидкості рівнозмінного обертального руху (рис. 4.5, б), дійдемо висновку, що на малих відтинках часу змінний обертальний рух тіла можна наближено замінювати рівнозмінним обертанням з кутовим сталим прискоренням  $\varepsilon$ , яке дорівнює середньому кутовому прискоренню даного змінного обертального руху.

Позначимо  $\beta_1$  — кут між січною  $MT_1$  графіка кутової швидкості і віссю часу  $Ot$ , а  $\beta$  — кут між дотичною  $MT$  до кривої  $\omega(t)$  у момент часу  $t_0$ . Спочатку виразимо середнє кутове прискорення через кут  $\beta_1$ :

$$\varepsilon_{\text{сеп}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mu_\omega}{\mu_t} \frac{L_{\omega_1} - L_\omega}{L_{t_1} - L_t} = \frac{\mu_\omega}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta_1. \quad (4.30)$$

А тепер, щоб дістати миттєве кутове прискорення  $\varepsilon$ , яке відповідає даному моменту часу  $t$ , треба в рівності (4.30) перейти до границі за умови, що відтинки часу наближаються до нуля:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mu_\omega}{\mu_t} \lim_{\Delta L_t \rightarrow 0} \frac{\Delta L_\omega}{\Delta L_t} = \frac{\mu_\omega}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta. \quad (4.31)$$

*Границя, до якої прямує середнє кутове прискорення, або, що одне й те саме, відношення зміни кутової швидкості тіла до відтинку часу, за який ця зміна відбулася, за умови, що відтинки часу прямує до нуля, називається миттєвим кутовим прискоренням тіла в разі змінного обертального руху.*

Математично миттєве кутове прискорення визначається першою похідною по часу від кутової швидкості тіла, або другою похідною по часу від кута повороту тіла:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}; \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (4.32)$$

Геометрично миттєве кутове прискорення в масштабі визначається тангенсом кута між дотичною в даний момент часу до кривої  $\omega(t)$  і віссю часу  $Ot$ :

$$\varepsilon = \frac{\mu_\omega}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta. \quad (4.33)$$

Кутове прискорення тіла в обертальному змінному русі — це кутове прискорення рівнозмінного обертального руху тіла, який би воно здійснювало, починаючи з даного моменту часу.

У загальному випадку змінного обертального руху тіла миттєве кутове прискорення є неперервною функцією часу. На рис. 4.6, а зображено графік кутового прискорення  $\varepsilon$  з використанням формули (4.31).

На підставі загальних формул (4.32) і (4.33) дістанемо відомі кутові прискорення для часткових випадків обертального руху тіла — рівномірного і рівнозмінного відповідно:  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$  та  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \operatorname{const}$  (рис. 4.6, б).

Миттєва кутова швидкість тіла за абсолютним значенням характеризує швидкість зміни кута повороту тіла в кожний даний момент часу, а знак її показує напрям обертання тіла. В разі обертання проти руху годинникової стрілки кутова швидкість тіла має додатне значення, і кутова швидкість від'ємна, якщо тіло обертається в напрямі руху годинникової стрілки.

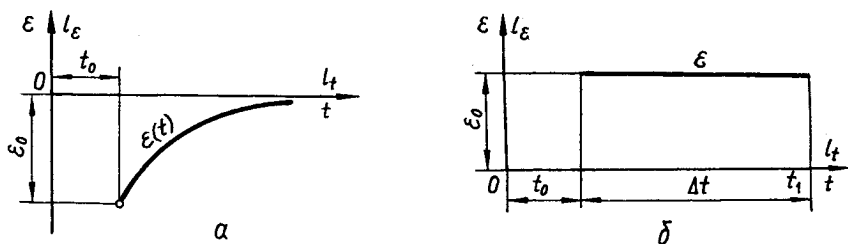


Рис. 4.6

Миттєве кутове прискорення в обертальному русі тіла за абсолютним значенням характеризує в кожний момент часу швидкість зміни кутової швидкості, а знак його відносно знака кутової швидкості вказує на характер обертального руху — прискорений чи сповільнений. При однакових знаках кутової швидкості й кутового прискорення — обертальний рух тіла прискорений, при різних знаках цих величин — обертальний рух тіла сповільнений: збільшення абсолютного значення кутової швидкості відповідає прискореному обертанню, в протилежному разі — сповільненому обертанню.

Зазначимо, що абсолютні кутові прискорення тіл у разі їх обертання навколо нерухомих осей, так само як і лінійні прискорення під час поступальних рухів тіл, спричиняються прикладеними силами. Проте в обертальних рухах вирішальне значення мають не самі прикладені до тіла сили, а їх моменти відносно осі обертання. Також на кутове прискорення впливає розподіл речовини тіла відносно осі обертання.

**Кутова швидкість і кутове прискорення як векторні величини.** Для того щоб задати обертальний рух тіла навколо нерухомих осей, треба знати три елементи — 1) положення нерухомих осей обертання, незмінно зв'язаної з обертовим тілом; 2) абсолютне значення кутової швидкості тіла  $\omega$ , нарешті; 3) напрям обертання тіла навколо нерухомих осей. За цими даними можна також визначити і кутове прискорення тіла. Наведені три обставини обертального руху можна задати однією векторною величиною, якою є вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  тіла, що збігається з віссю обертання тіла. Модуль цього вектора відповідає абсолютному значенню кутової швидкості, тобто  $\omega = |\vec{\omega}|$ , а його напрям на осі пов'язаний із напрямом обертання тіла. Якщо дивитися навпроти напрямку вектора кутової швидкості  $\vec{\omega}$ , то тіло здійснює обертальний рух у напрямі, протилежному рухові стрілки годинника.

Отже, щоб установити за вектором кутової швидкості напрям обертання тіла, треба свій погляд спрямувати паралельно осі обертання так, щоб напрям вектора кутової швидкості був протилежний нашому погляду. В такому випадку виявимо обертання тіла, яке здійснюється протилежно обертанню стрілки годинника.

У разі рівномірного обертального руху вектор кутової швидкості є векторною константою  $\vec{\omega} = \text{const}$ . Для подання обертального руху тіла вектором кутової швидкості зобразимо схему рівномірного обертання диска (див. рис. 4.2, а) в ізометричній проекції (рис. 4.7, а, б). На цих рисунках показано два можливих напрями кутової швидкості.

У разі рівнозмінного обертального руху вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  є змінним вектором. Щоб у цьому випадку виразити кутову швидкість як векторну функцію, введемо вісь проекцій для вектора

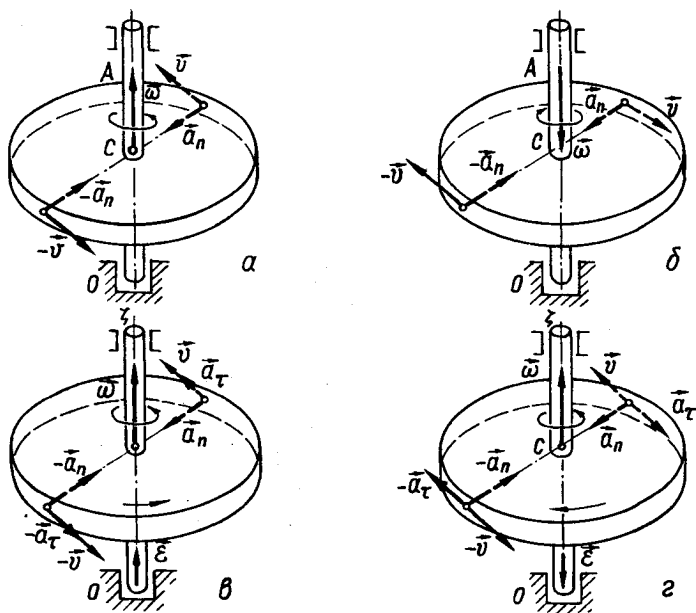


Рис. 4.7

кутової швидкості  $\bar{\omega}$ . Нехай цією віссю буде декартова вісь  $Oz$ , яка збігається з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$ . Введемо одиничний вектор цієї осі  $\bar{\zeta}^0$ , тоді

$$\bar{\omega} = \omega_{\zeta} \bar{\zeta}^0 = (\omega_0 + \varepsilon(t - t_0)) \bar{\zeta}^0.$$

Тоді алгебраїчне значення кутової швидкості  $\omega_{\zeta}$  розглядається як проекція вектора кутової швидкості на вісь  $Oz$ .

На підставі алгебраїчного значення кутової швидкості можна визначити кутове прискорення за формулою  $\varepsilon_{\zeta} = \frac{d\omega_{\zeta}}{dt}$ . Введемо на прикладі рівномірного обертального руху тіла вектор кутового прискорення  $\bar{\varepsilon}$ . Для цього продиференціюємо попередню векторну рівність:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} (\omega_0 + \varepsilon(t - t_0)) \bar{\zeta}^0 = \bar{\varepsilon}_{\zeta}^0.$$

Якщо  $\omega_0 > 0$  і  $\varepsilon_{\zeta} > 0$ , то вектори  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\varepsilon}$  мають однаковий напрям, який збігається з напрямом одиничного вектора  $\bar{\zeta}^0$  осі  $Oz$  (рис. 4.7, в, г). Це відповідає рівноприскореному обертальному руху. При  $\omega_0 > 0$  і

$\varepsilon_c > 0$  вектори  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\varepsilon}$  мають протилежні напрями, що відповідає рівносповільненому обертальному руху тіла (рис. 4.7, з).

На цих схемах зображено циліндр, рівнозмінний обертальний рух якого було розглянуто вище (див. рис. 4.2, б).

У загальному випадку обертального руху тіла навколо нерухомої осі кутова швидкість буде відомою неперервною й однозначною векторною функцією часу  $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$ . Взяти векторну похідну, дістанемо:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \dot{\bar{\omega}}. \quad (4.34)$$

Отже, вектор кутового прискорення визначається першою похідною по часу від вектора кутової швидкості. Ці вектори для випадку обертання тіла навколо нерухомої осі мають спільну вісь, якою є дана нерухома вісь обертання.

Зауважимо: далі буде про те, що в разі так званих миттєвих обертальних рухів, коли вісь обертання в просторі з часом змінює своє положення, вектор кутової швидкості тіла, що рухається, весь час збігається з його рухомою віссю обертання, а вектор кутового прискорення має напрям іншої осі, яка перетинає першу.

Розглянемо інший шлях введення кутової швидкості й кутового прискорення як величин векторних, який ґрунтується на формальних математичних підходах.

Нехай тіло перебуває в довільному обертальному русі навколо нерухомої осі, наприклад вертикальної  $Oz$  (рис. 4.8). Положення будь-якої точки  $B$  тіла визначатимемо радіусом-вектором  $\bar{r}$ , який має початок у точці  $O$  на осі  $Oz$ . Вектор швидкості  $\bar{v}$  цієї точки  $B$  має напрям, перпендикулярний до площини, в якій лежать вісь обертання  $Oz$  тіла, радіус-вектор  $\bar{r}$  і радіус кола  $R$ , по якому рухається взята точка  $B$  тіла. Напрямок даної швидкості залежить від напрямку обертання тіла.

Припустимо, що тіло в нашому випадку обертається в додатному напрямі. Тоді вектор лінійної швидкості  $\bar{v}$  точки  $B$  відповідатиме прийнятому напрямку обертання тіла (рис. 4.8). В будь-якому положенні тіла при його обертанні є три одиничні вектори, напрями яких взаємозв'язані. Це — вектори  $\bar{v}^0$ ,  $\bar{\omega}^0$  і  $\bar{R}^0$ , з них  $\bar{v}^0$  і  $\bar{R}^0$  визначаються співвідношеннями

$$\bar{v}^0 = \frac{\bar{v}}{v}; \quad \bar{R}^0 = \frac{\bar{R}}{R}.$$

Отже, їхні напрями такі, як і у векторів  $\bar{v}$  і  $\bar{R}$ . Походження третього вектора  $\bar{\omega}^0$  буде з'ясовано

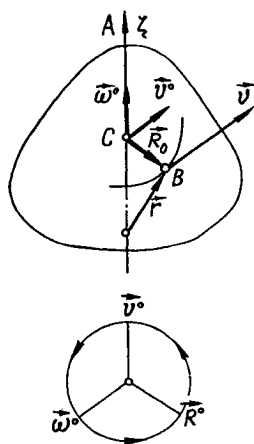


Рис. 4.8



пізніше. Лише зазначимо, що цей одиничний вектор  $\vec{\omega}^\circ$  лежить на осі обертання тіла і напрямлений таким чином, що коли спрямувати свій погляд паралельно осі обертання проти напрямку цього вектора, то тіло обертається проти руху стрілки годинника. Вважаємо, що вектори  $\vec{v}^\circ$ ,  $\vec{\omega}^\circ$  і  $\vec{R}^\circ$  прикладені в центрі  $C$  кола, по якому рухається точка  $B$ . Зазначимо, що ці одиничні вектори взаємно перпендикулярні й завжди зберігають одну й ту саму орієнтацію відносно одного, незалежно ані від напрямку обертання тіла, ані від того, яка точка тіла розглядається. На схемі (рис. 4.8) зображено послідовність векторів один за одним (стрілками на колі показано напрям, в якому треба розглядати дану трійку векторів). Наприклад, якщо дивитись прямо на вектор  $\vec{v}^\circ$ , то, щоб сумістити в площині  $CAB$  другий вектор  $\vec{\omega}^\circ$  з третім  $\vec{R}^\circ$ , треба його повернути проти руху стрілки годинника.

Зазначені вище властивості трійки векторів  $\vec{v}^\circ$ ,  $\vec{\omega}^\circ$  і  $\vec{R}^\circ$  тепер можна записати у вигляді векторної рівності

$$\vec{v}^\circ = \vec{\omega}^\circ \times \vec{R}^\circ.$$

Знаком « $\times$ » позначають так зване векторне множення двох векторів. Згідно з цим правилом вектори в даній рівності мають чергуватися в тому порядку, який відтворено на схемі. Крім того, модуль лівої частини рівності має дорівнювати модулю правої її частини. Отже,

$$|\vec{v}^\circ| = |\vec{\omega}^\circ| \times |\vec{R}^\circ|; \quad 1 = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1.$$

У математиці подібні векторні рівності називають векторним добутком двох векторів. Однією з властивостей цього добутку є те, що модуль векторного добутку  $\vec{\omega}^\circ \times \vec{R}^\circ$  дорівнює звичайному добутку модулів співмножників, помноженому на синус кута між векторами, що було вже використано.

Вектор лінійної швидкості точки  $B$  тіла в разі обертального руху можна визначити за відомою векторною формулою

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Але з трикутника  $OCB$  маємо:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OC} + \vec{R},$$

тому

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = R \dot{\varphi} \vec{v}^\circ = \omega (\vec{\omega}^\circ \times \vec{R}^\circ) R,$$

або

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{R}; \quad \vec{\omega} = \omega \vec{\omega}^\circ; \quad \vec{R} = R \vec{R}^\circ.$$

Назвемо добуток алгебраїчної величини кутової швидкості  $\omega = \dot{\varphi}$  на одиничний вектор  $\vec{\omega}^\circ$  осі  $Oz$  вектором кутової швидкості тіла  $\vec{\omega}$ . По-

вернемося знову до радіуса-вектора  $\vec{r}$ , скориставшись рівністю  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{OC}$ . Остаточо маємо:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (4.35)$$

Це — *формула Ейлера*, яка має загальний характер і може бути застосована також для миттєвих обертальних рухів:

*похідна по часу від радіуса-вектора точки тіла в разі обертально-го руху дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості тіла на радіус-вектор точки.*

Зазначимо, що взаємна орієнтація векторів  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ,  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$  така сама, як і трійки одиничних векторів  $\vec{v}^\circ$ ,  $\vec{\omega}^\circ$  і  $\vec{R}^\circ$ .

Користуючись згадуваною раніше властивістю векторного добутку, перейдемо від векторної рівності (4.3) до відповідної їй рівності модулів

$$v = \omega r \sin \gamma,$$

де  $\gamma$  — кут між віссю  $O\xi$  і радіусом-вектором  $\vec{r}$ . Запишемо з прямокутного трикутника  $OCB$  співвідношення  $R = r \sin \gamma$ . Підставимо його в попередню рівність і визначимо модуль лінійної швидкості  $v = \omega r$ , що збігається з уже відомою формулою. Зазначимо, що вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  є ковзним вектором, його можна прикладати в будь-якій точці осі обертання тіла.

Повернемося до вектора кутової швидкості  $\vec{\omega}$ , який дорівнює

$$\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}^\circ.$$

Декартові осі координат  $O\xi$ ,  $O\eta$  і  $O\zeta$  незмінно зв'яжемо з обертовим тілом так, щоб остання вісь була віссю обертання тіла. Також введемо одиничний вектор  $\vec{\zeta}^\circ$  осі  $O\zeta$ , виразимо вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  через його проекцію на цю вісь:

$$\vec{\zeta}^\circ \cdot \vec{\omega} = \omega \vec{\omega}^\circ \cdot \vec{\zeta}^\circ; \quad \omega_\zeta = \omega \cos \angle(\vec{\zeta}^\circ, \vec{\omega}^\circ); \quad \vec{\omega} = \omega_\zeta \vec{\zeta}^\circ = \dot{\varphi} \vec{\zeta}^\circ = \frac{d\varphi}{dt} \vec{\zeta}^\circ. \quad (4.36)$$

Введемо одиничні вектори  $\vec{\xi}^\circ$ ,  $\vec{\zeta}^\circ$  осей  $O\xi$ ,  $O\eta$  і розглянемо рух точок  $B_\xi$  і  $B_\eta$ , які належать обертовому тілу і які збігаються з кінцями взятих одиничних векторів  $\vec{\xi}^\circ$  і  $\vec{\zeta}^\circ$  (рис. 4.9). Положення точок  $B_\xi$  і  $B_\eta$  визначається відповідними радіусами-векторами  $\vec{OB}_\xi = \vec{\xi}^\circ$  і  $\vec{OB}_\eta = \vec{\eta}^\circ$ . На підставі формули Ейлера (4.35) виразимо лінійні швидкості цих точок через вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  тіла:

$$\vec{v}_{B_\xi} = \vec{\omega} \times \vec{OB}_\xi, \quad \vec{v}_{B_\eta} = \vec{\omega} \times \vec{OB}_\eta, \quad \vec{v}_{B_\xi} = \vec{\omega} \times \vec{\xi}^\circ, \quad \vec{v}_{B_\eta} = \vec{\omega} \times \vec{\eta}^\circ,$$

або, замінивши  $\bar{v}_{B\zeta}$  і  $\bar{v}_{B\eta}$  на  $\frac{d\bar{\xi}^\circ}{dt}$  і  $\frac{d\bar{\eta}^\circ}{dt}$ , дістанемо остаточні формули, які мають місце в найзагальнішому випадку обертального руху тіла:

$$\frac{d\bar{\xi}^\circ}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{\xi}^\circ; \quad \frac{d\bar{\eta}^\circ}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{\eta}^\circ. \quad (4.37)$$

Якщо ці векторні співвідношення вивести першими, то з їхньою допомогою можна дістати формулу Ейлера (4.35). Справді, візьмемо точку  $B$  обертового тіла і її положення в разі обертального руху ви-

значимо її радіусом-вектором  $\bar{r}$ . Виразимо радіус-вектор  $\bar{r}$  через координати  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$  точки  $B$  у рухомій системі координат  $\xi O\eta\zeta$  і відповідні орти цих осей  $\bar{\xi}^\circ$ ,  $\bar{\eta}^\circ$  і  $\bar{\zeta}^\circ$ :

$$\bar{r} = \xi \bar{\xi}^\circ + \eta \bar{\eta}^\circ + \zeta \bar{\zeta}^\circ.$$

При обертанні тіла координати  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$  точки  $B$  зберігають своє стале значення, в той час як одиничні вектори  $\bar{\xi}^\circ$  і  $\bar{\eta}^\circ$  осей  $O\xi$  і  $O\eta$  разом із тілом здійснюють обертальний рух з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$ . Тому орти осей  $\bar{\xi}^\circ$  і  $\bar{\eta}^\circ$  (оди-

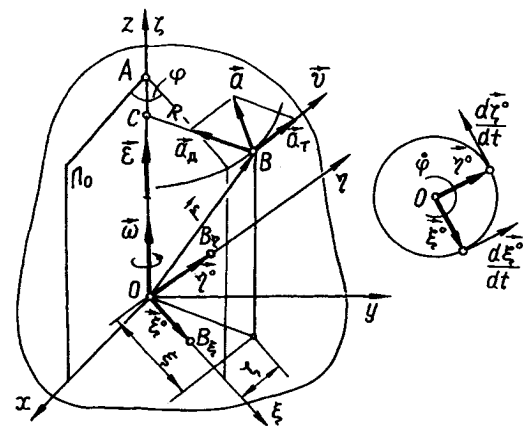


Рис. 4.9

ничний вектор  $\bar{\zeta}^\circ$  — константа) при обертанні тіла розглядаються як векторні функції часу. Отже, продиференціювавши попередню векторну рівність по часу, дістанемо співвідношення:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \xi \frac{d\bar{\xi}^\circ}{dt} + \eta \frac{d\bar{\eta}^\circ}{dt} + \zeta \frac{d\bar{\zeta}^\circ}{dt}.$$

Підставимо в нього векторні похідні (4.37) і виконаємо необхідні математичні викладки

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \xi \bar{\omega} \times \bar{\xi}^\circ + \eta \bar{\omega} \times \bar{\eta}^\circ + \zeta \bar{\omega} \times \bar{\zeta}^\circ = \bar{\omega} \times (\xi \bar{\xi}^\circ + \eta \bar{\eta}^\circ + \zeta \bar{\zeta}^\circ),$$

але вираз у дужках дорівнює радіусу-вектору точки  $B$ . Отже, дістанемо формулу Ейлера

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Використаємо формулу (4.36) для знаходження вектора кутового прискорення  $\bar{\varepsilon}$ . У цій векторній рівності похідна  $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$  є проекцією

вектора  $\bar{\omega}$  на координатну вісь  $O\zeta$ , або алгебраїчне значення кутової швидкості тіла. При обертанні тіла в загальному випадку похідна  $\dot{\varphi}$ , а отже, і вектор кутової швидкості  $\bar{\omega}$  будуть неперервними однозначними функціями часу  $t$ . Диференціюючи (4.36), дістанемо

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\bar{\zeta}^{\circ}) = \ddot{\varphi}\bar{\zeta}^{\circ} = \varepsilon_{\zeta}\bar{\zeta}^{\circ}; \quad \bar{\varepsilon} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \dot{\bar{\omega}}. \quad (4.38)$$

Вектор кутового прискорення тіла в разі обертального руху дорівнює першій похідній по часу від вектора кутової швидкості тіла. З формули  $\bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\bar{\zeta}^{\circ}$  видно, що вектор кутового прискорення, як і вектор кутової швидкості, напрямлений по осі обертання, а в який бік цієї осі — залежить від характеру змінного обертального руху тіла. Якщо обертальний рух тіла прискорений і відбувається проти руху стрілки годинника, то  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\varepsilon}$  за напрямом збігаються (рис. 4.9). При здійсненні тілом сповільненого обертального руху з вектором кутової швидкості попереднього напрямку кутове прискорення має напрям, протилежний до напрямку кутової швидкості.

#### § 14. Лінійна швидкість, дотичне, доцентрове і повне прискорення матеріальної точки абсолютно твердого тіла під час обертального руху навколо нерухомої осі \_\_\_\_\_

**Алгебраїчний (аналітичний) спосіб.** Для знаходження потрібних кінематичних величин скористаємося рівнянням руху окремої точки тіла, що здійснює довільний обертальний рух навколо нерухомої осі. Це рівняння має вигляд, подібно до виразу (4.2):

$$s = R(\alpha + \varphi(t))$$

(індекс « $i$ » відкинута). Взнявши першу похідну по часу від обох його частин, дістанемо алгебраїчне значення лінійної швидкості будь-якої точки  $B$  тіла:

$$v_{\tau} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = R \frac{d}{dt}(\alpha + \varphi) = \dot{\varphi}R, \quad (4.39)$$

де похідна  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  для змінного руху є функцією часу, а отже, миттєвою кутовою швидкістю тіла.

Якщо розглядати абсолютні значення величин  $v_r = \dot{s}$  і  $\omega_c = \dot{\phi}$ , тобто  $v = \left| \frac{ds}{dt} \right|$  і  $\omega = \left| \frac{d\phi}{dt} \right|$ , то маємо

$$v = \omega R. \quad (4.40)$$

*Лінійна швидкість точки тіла в разі обертального руху дорівнює добутку кутової швидкості тіла на радіус кола, по якому рухається точка.*

Зрозуміло, що лінійні швидкості точок тіла перпендикулярні до радіусів кіл, по яких вони рухаються, а також і до осі обертання.

Абсолютні значення лінійних швидкостей точок пропорціональні їхнім відстаням від осі обертання тіла: чим більша віддаленість від його частинки від осі обертання, тим більшу лінійну швидкість частинка має під час обертального руху.

Звернемо увагу на рух прямих, незмінно зв'язаних з обертовим тілом. Будь-яка пряма, що перетинає вісь обертання тіла, здійснює обертальний рух, коли швидкості її точок перпендикулярні до самої прямої, а отже, і до осі обертання, у той час як прямі, паралельні осі, переміщуються поступально. Точки таких прямих для кожного моменту часу мають однакові швидкості як за значенням, так і за напрямом; поступальна швидкість нормальна до цих прямих і до осі обертання.

Швидкості точок прямих, які не перетинають осі обертання тіла і непаралельні їй, уже не перпендикулярні до самих прямих. Проте перпендикулярність осі обертання розглядуваних швидкостей у цьому разі так само має місце, як і для точок усіх інших прямих тіла без винятку.

Повернемося до останнього випадку — руху прямолінійного відрізка тіла, який лежить на прямій, непаралельній його осі обертання, і її не перетинає, після розгляду інших кінематичних величин.

Для визначення нормального прискорення точки тіла під час обертального руху скористаємося відомою формулою кінематики точки:

$$a_n = \frac{v_r^2}{R}.$$

Підставимо значення  $v_r$  з рівності (4.39) й дістанемо таким чином шукану формулу:

$$a_{\text{доц}} = \omega^2 R. \quad (4.41)$$

Нормальні прискорення точок тіла під час обертального руху називають доцентровими прискореннями.

Доцентрове прискорення точки тіла в разі обертального руху дорівнює добутку квадрата кутової швидкості тіла на радіус кола, по якому рухається точка.

Доцентрове прискорення завжди напрямлене до центра кола. Слід зауважити, що величина доцентрового прискорення для однієї й тієї самої точки тіла в разі його змінного обертального руху змінюється з часом. Для одного й того самого моменту часу доцентрове прискорення пропорціональне відстані точки до осі обертання тіла.

Зазначимо, що доцентрове прискорення, як і лінійна швидкість однієї й тієї самої точки тіла, залежить виключно від кутової швидкості тіла — однакової для всіх його точок, бо кутова швидкість характеризує обертальний рух тіла як цілого, а не окремої його точки.

Дотичне прискорення точок тіла в разі обертального руху визначається на підставі формули (4.39), тобто  $v_{\tau} = \dot{\varphi}R$ . Якщо розглядається довільний обертальний рух тіла навколо нерухомої осі, то в цій рівності похідна  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  є неперервною функцією часу. Отже, диференціюючи розглядувану формулу лінійної швидкості по часу, знайдемо шукане дотичне (тангенціальне) прискорення:

$$\frac{dv_{\tau}}{dt} = \ddot{s} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} R = \ddot{\varphi}R.$$

Друга похідна по часу від кута повороту тіла — це проекція його кутового прискорення на нерухому вісь обертання  $Oz$ , тому:

$$a_{\tau} = \varepsilon_z R. \quad (4.42)$$

Це — алгебраїчна величина дотичного прискорення точки тіла в разі його обертального руху. Знак його залежить від знака кутового прискорення. Якщо прискорений обертальний рух тіла відбувається в напрямі проти руху годинникової стрілки, то тангенціальні прискорення точок тіла мають напрям дотичних до відповідних кіл у бік обертання тіла (див. рис. 4.7, в). У сповільненому обертальному русі тіла, що відбувається також у напрямі, протилежному до напрямку руху годинникової стрілки, тангенціальні прискорення його точок напрямлені проти обертання тіла; лінійні і тангенціальні прискорення точок мають протилежні напрями (див. рис. 4.7, з).

Якщо розглядати лише абсолютні значення кутового і тангенціального прискорень, тобто  $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\ddot{\varphi}|$ ,  $a_{\text{тан}} = |\ddot{\varphi}|R$ , то маємо таку формулу тангенціального прискорення точок тіла в разі обертального руху:

$$a_{\text{тан}} = \varepsilon R. \quad (4.43)$$

*Тангенціальне прискорення точки тіла в разі обертального руху дорівнює добутку кутового прискорення тіла на радіус кола, по якому рухається точка.*

З формул (4.42) і (4.43) видно, що тангенціальні прискорення точок тіла для даного моменту часу пропорціональні відстаням цих точок до нерухомої осі обертання.

Щоб дістати тангенціальне прискорення різних точок тіла для цілком конкретного моменту часу, треба радіуси відповідних кіл, по яких рухаються точки, помножити на одне й те саме значення кутового прискорення, яке є характеристикою обертального руху тіла в цілому, а не його окремих точок.

Зазначимо, що доцентрове і тангенціальне прискорення точок є прямокутними складовими повного прискорення цих точок (див. рис. 4.2, б):

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{доц}} + \vec{a}_{\text{тан}}. \quad (4.44)$$

Знайдемо формулу модуля повного прискорення точки тіла, скориставшись теоремою Піфагора, оскільки кут між компонентами прискорень, які додаються, дорівнює прямому:

$$a = \sqrt{a_{\text{тан}}^2 + a_{\text{доц}}^2} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4 R}. \quad (4.45)$$

При рівномірному обертанні, коли кутове прискорення тіла має нульове значення, а також у разі змінного обертального руху в ту мить, коли, наприклад, прискорений обертальний рух змінюється на сповільнений і навпаки — сповільнений на прискорений, повне прискорення точок стає доцентровим; кут між ним і радіусом кола дорівнює нулю. Кутове прискорення  $\varepsilon$  тіла спричиняє в точках тіла дотичні прискорення  $a_{\tau} = \varepsilon R$ , які відхиляють вектор повного прискорення точок від їхніх радіусів у напрямі, протилежному до напрямку обертання тіла, якщо його обертальний рух прискорений (див. рис. 4.2, б; 4.7, в); у сповільнених обертальних рухах вектори повних прискорень точок відхилені від радіусів кіл на кут, який від них відкладається в напрямі обертання тіла (див. рис. 4.7, г).

Позначимо згаданий кут  $\beta$ , тоді з прямокутного трикутника, утвореного вектором повного прискорення точки  $\vec{a}$ , вектором доцентрового прискорення  $\vec{a}_{\text{доц}}$  і відрізком, паралельним вектору тангенціального прискорення  $\vec{a}_{\text{тан}}$  точки, визначимо тангенс цього кута:

$$\text{tg}\beta = \frac{a_{\text{доц}}}{a_{\text{тан}}} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (4.46)$$

У цій формулі кутове прискорення  $\epsilon$  входить як модуль. У який бік від радіуса кола, по якому рухається точка тіла, відкладати кут  $\beta$ ? — У бік, протилежний до напрямку кутового прискорення.

Отже, формули (4.45), (4.46) визначають вектор повного прискорення точки обертового тіла в даний момент часу як за модулем, так і за напрямком.

**Кінематика обертального руху прямолінійного тонкого стержня навколо нерухомої осі, що перпендикулярна до стержня і його не перетинає.** Повернемося до розгляду руху прямої, незмінно зв'язаної з обертовим тілом, яка не перетинає його нерухомої осі обертання і їй не паралельна. Обмежимося вивченням руху прямої в тілі, що перпендикулярна до осі його обертання. Дану пряму в цьому разі замінено прямолінійним тонким стержнем завдовжки  $l$ . Отже, маємо самостійну задачу про обертання стержня навколо нерухомої осі, що перпендикулярна до нього і його не перетинає. Візьмемо частковий випадок, коли під час обертального руху кутова швидкість не змінюється (рис. 4.10).

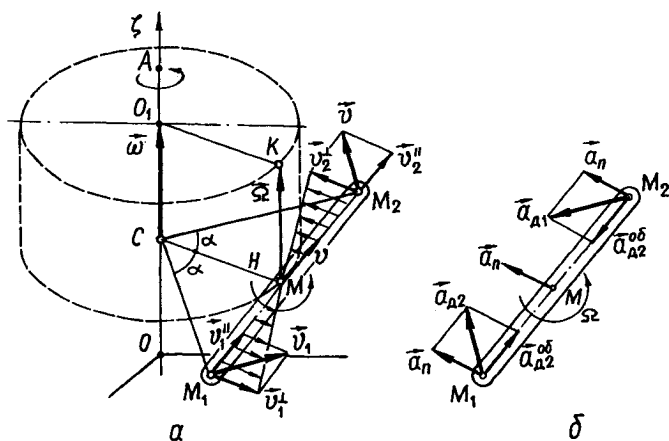


Рис. 4.10

Позначимо середину стержня  $M$ , а його кінці —  $M_1$  і  $M_2$ . Нехай відстань від його середини (точки  $M$ ) до осі обертання  $O\xi$  становить  $H$ . Центр кола, по якому рухається точка  $M$  стержня  $M_1M_2$ , позначимо  $C$ . Кінці  $M_1$  і  $M_2$  стержня рухаються по колу відомого радіуса  $R$ . Лінійні швидкості цих точок  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  не перпендикулярні до самого стержня  $M_1M_2$ : з віссю стержня вони утворюють кут  $\alpha$ , який дорівнює куту між радіусами  $CM_1$ ,  $CM_2$  і висотою  $H$  рівнобедреного три-



кутника  $CM_1M_2$  (рис. 4.10, а). У середині стержня, в точці  $M$ , лінійна швидкість має напрям його осі і за модулем дорівнює  $v = \omega H$ , а в кінцевих його точках лінійні швидкості становлять  $v_1 = v_2 = \omega R$ .

Решта точок стержня також має лінійні швидкості, напрями яких складають зі стержнем відмінні від прямого кути, але їхні складові швидкості, паралельні осі стержня, як і аналогічні складові швидкостей його кінців, однакові за значенням і знаком. Ця спільна складова, очевидно, дорівнює швидкості центра стержня:

$$v_1'' = v_2'' = v_1 \cos \alpha = v_2 \cos \alpha = \omega R \cos \alpha = \omega H = v_{\text{пост}},$$

яку назвемо миттєвою поступальною швидкістю стержня  $M_1M_2$ . Перпендикулярні до стержня складові лінійних швидкостей його кінців  $M_1$  і  $M_2$  визначаються з формули

$$v_1^{\perp} = v_2^{\perp} = v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \alpha = \omega R \sin \alpha = \omega \frac{l}{2} = v_{\text{об}}.$$

Ці швидкості мають протилежні напрями. Назвемо нормальні до стержня складові лінійних швидкостей точок стержня миттєвими обертальними швидкостями.

Отже, рівномірний обертальний рух стержня навколо нерухомої осі можна розглядати як два водночас здійснюваних миттєвих рухи — поступального уздовж осі стержня зі швидкістю  $v_{\text{п.}} = \omega H$ , однаковою для всіх його точок, і обертального навколо миттєвої осі, яка проходить через середину стержня паралельно нерухомій осі обертання.

Визначимо миттєву кутову швидкість стержня. В разі миттєвого обертального руху кутова швидкість стержня  $M_1M_2$  дорівнює відношенню обертальної швидкості його кінця до довжини радіуса  $MM_1 = MM_2 = \frac{l}{2}$  кола, по якому рухаються точки  $M_1$  і  $M_2$  під час миттєвого обертального руху:

$$\Omega = \frac{v_{\text{об.}}}{MM_1} = \frac{\omega \frac{l}{2}}{\frac{l}{2}} = \omega.$$

Бачимо, що миттєва кутова швидкість за абсолютним значенням така сама, як і кутова швидкість рівномірного обертання. Та треба зауважити, що кутова швидкість  $\bar{\omega}$  рівномірного обертання стержня весь час лежить на його нерухомій осі, в той час як миттєва кутова швидкість  $\bar{\Omega}$  під час руху стержня описує циліндр з радіусом основи  $H$ , а кінець вектора кутової швидкості  $\bar{\omega}$ , точка  $K$ , описує коло з радіусом  $O_1K$  верхньої основи цього циліндра (рис. 4.10).

Вектор кутового прискорення миттєвого обертального руху є нульовим, оскільки напрям вектора в абсолютному просторі не змінюється і його похідна  $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\Omega}}{dt} = 0$ .

Лишилося визначити прискорення в разі миттєвого поступального руху стержня й прискорення точок тіла в разі миттєвого обертального руху. Для всіх точок стержня в першому випадку прискорення одне й те саме і дорівнює нормальному прискоренню точки  $M$  стержня, тобто

$$a_{n1} = a_{n2} = \omega^2 R \cos \alpha = \omega^2 H = a_{Mn}.$$

У другому випадку миттєвого руху точки стержня мають лише доцентрові прискорення  $a_{д}^{об}$ , які лежать на осі стержня й напрямлені до його центра  $M$ . Для крайніх точок стержня маємо (рис. 4.10, б):

$$a_{д1}^{об} = a_{д2}^{об} = \Omega^2 \frac{l}{2} = \omega^2 \frac{l}{2}.$$

На прикладі задачі про обертання стержня ми ознайомились з чотирма видами миттєвих рухів, до вивчення яких іще повернемося при розгляді загальніших питань кінематики.

### § 15. Прямокутні складові (проекції) швидкості й прискорення матеріальної частинки абсолютно твердого тіла по осях рухомої і нерухомої декартових систем координат \_\_\_\_\_

**Векторний спосіб визначення кінематичних характеристик точок тіла в разі довільного обертального руху тіла навколо нерухомої осі.** На прикладі обертання стержня (див. § 14) було показано рухи тіла, коли воно в кожний момент часу переміщується поступально і водночас здійснює миттєвий обертальний рух навколо осі, що змінює своє положення відносно абсолютного простору. Довільні рухи з рухомими осями обертання характеризуються, крім миттєвої поступальної швидкості, також миттєвою кутовою швидкістю, яка вже є векторною величиною і разом із віссю обертання змінює свій напрям.

Можна уявити такий рух тіла, коли поступальної складової руху немає, і тіло здійснює лише миттєвий обертальний рух зі змінною за модулем і напрямом кутовою швидкістю. Ця кутова швидкість як вектор визначає положення миттєвої осі обертання тіла, напрям йо-

го оберального руху навколо цієї осі, а також інтенсивність обертання. В цьому разі для кожного моменту часу розподіл лінійних швидкостей точок тіла відповідає формулі Ейлера (4.35).

Про такий вид оберального руху можна дістати уявлення, якщо розглянути обертання тіла з двома нерухомими точками  $O$  і  $A$ , а одну з них, наприклад точку  $A$ , звільнити (див. рис. 4.9). Надалі обертальний рух відбувається навколо нерухомої точки  $O$ . За цих умов напрям осі обертання, а отже, і кутової швидкості тіла, яка збігається з цією віссю, з часом змінюється (рис. 4.11).

Тоді осі  $O\xi$ ,  $O\eta$  і  $O\zeta$ , що жорстко зв'язані з обертовим тілом, у даний момент часу займають положення, показане на рис. 4.11.

Нехай радіус-вектор будь-якої точки  $B$  тіла  $\vec{r}$ . Ввівши одиничні вектори  $\vec{\xi}^\circ$ ,  $\vec{\eta}^\circ$  і  $\vec{\zeta}^\circ$  рухомих осей  $\xi O\eta\zeta$ , виразимо у векторній рівності  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , що визначає лінійну швидкість точки  $B$  тіла, величини  $\vec{v}$ ,  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$  через їхні прямокутні складові по осях  $O\xi$ ,  $O\eta$  і  $O\zeta$ :

$$\vec{v} = v_\xi \vec{\xi}^\circ + v_\eta \vec{\eta}^\circ + v_\zeta \vec{\zeta}^\circ;$$

$$\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{\xi}^\circ + \omega_\eta \vec{\eta}^\circ + \omega_\zeta \vec{\zeta}^\circ;$$

$$\vec{r} = \xi \vec{\xi}^\circ + \eta \vec{\eta}^\circ + \zeta \vec{\zeta}^\circ.$$

Підставимо ці вирази у формулу Ейлера й застосуємо розподільний закон множення, який справедливий і для випадку векторного множення:

$$\begin{aligned} v_\xi \vec{\xi}^\circ + v_\eta \vec{\eta}^\circ + v_\zeta \vec{\zeta}^\circ &= (\omega_\xi \vec{\xi}^\circ + \omega_\eta \vec{\eta}^\circ + \omega_\zeta \vec{\zeta}^\circ) \times (\xi \vec{\xi}^\circ + \eta \vec{\eta}^\circ + \zeta \vec{\zeta}^\circ) = \\ &= \omega_\xi \xi (\vec{\xi}^\circ \times \vec{\xi}^\circ) + \omega_\eta \eta (\vec{\eta}^\circ \times \vec{\eta}^\circ) + \omega_\zeta \zeta (\vec{\zeta}^\circ \times \vec{\zeta}^\circ) + \omega_\xi \eta (\vec{\xi}^\circ \times \vec{\eta}^\circ) + \omega_\xi \zeta (\vec{\xi}^\circ \times \vec{\zeta}^\circ) + \\ &+ \omega_\eta \xi (\vec{\eta}^\circ \times \vec{\xi}^\circ) + \omega_\eta \zeta (\vec{\eta}^\circ \times \vec{\zeta}^\circ) + \omega_\zeta \xi (\vec{\zeta}^\circ \times \vec{\xi}^\circ) + \omega_\zeta \eta (\vec{\zeta}^\circ \times \vec{\eta}^\circ). \end{aligned}$$

Векторні добутки одиничних векторів  $\vec{\xi}^\circ$ ,  $\vec{\eta}^\circ$  і  $\vec{\zeta}^\circ$  знайдемо згідно із таким правилом:

Якщо у векторному добутку двох будь-яких одиничних векторів із трьох —  $\vec{\xi}^\circ$ ,  $\vec{\eta}^\circ$  і  $\vec{\zeta}^\circ$  множене і множник на схемі (рис. 4.11) йдуть один за одним у послідовності, вказаній стрілкою, то значенням такого векторного добутку є третій на схемі вектор. Коли множене і множник на схемі йдуть один за одним у послідовності, протилежній тій, що вказана стрілкою, то значенням векторного добутку є третій вектор, взятий зі знаком «-». Векторні добутки з однаковими множеним і множником дорівнюють нулю.

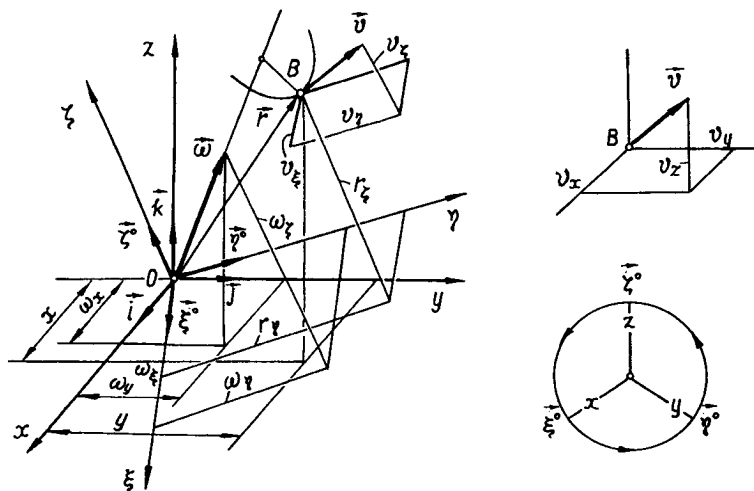


Рис. 4.11

З урахуванням даного умовного правила випишемо значення векторних добутоків, які входять у попередню рівність:

$$\begin{aligned} \xi^{\circ} \times \xi^{\circ} = \eta^{\circ} \times \eta^{\circ} = \zeta^{\circ} \times \zeta^{\circ} = 0; \quad \xi^{\circ} \times \eta^{\circ} = \zeta^{\circ}; \quad \xi^{\circ} \times \zeta^{\circ} = -\eta^{\circ}; \\ \eta^{\circ} \times \xi^{\circ} = -\zeta^{\circ}; \quad \eta^{\circ} \times \zeta^{\circ} = \xi^{\circ}; \quad \zeta^{\circ} \times \xi^{\circ} = \eta^{\circ}; \quad \zeta^{\circ} \times \eta^{\circ} = -\xi^{\circ}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Тому рівність набуває вигляду

$$\begin{aligned} v_{\xi} \xi^{\circ} + v_{\eta} \eta^{\circ} + v_{\zeta} \zeta^{\circ} = \omega_{\xi} \eta \zeta^{\circ} - \omega_{\zeta} \xi \eta^{\circ} - \omega_{\eta} \xi \zeta^{\circ} + \omega_{\eta} \zeta \xi^{\circ} + \omega_{\zeta} \xi \eta^{\circ} - \omega_{\xi} \eta \xi^{\circ} = \\ (\omega_{\eta} \zeta - \omega_{\zeta} \eta) \xi^{\circ} + (\omega_{\zeta} \xi - \omega_{\xi} \zeta) \eta^{\circ} + (\omega_{\xi} \eta - \omega_{\eta} \xi) \zeta^{\circ}, \end{aligned}$$

або, перенісши всі члени в ліву частину рівняння,

$$[v_{\xi} - (\omega_{\eta} \zeta - \omega_{\zeta} \eta)] \xi^{\circ} + [v_{\eta} - (\omega_{\zeta} \xi - \omega_{\xi} \zeta)] \eta^{\circ} + [v_{\zeta} - (\omega_{\xi} \eta - \omega_{\eta} \xi)] \zeta^{\circ} = 0.$$

Векторна сума трьох взаємно перпендикулярних векторів дорівнює нулю в тому і тільки в тому випадку, коли кожний із них є нульовим вектором. Отже, дістанемо такі формули:

$$\begin{aligned} v_{\xi} &= \omega_{\eta} \zeta - \omega_{\zeta} \eta; \\ v_{\eta} &= \omega_{\zeta} \xi - \omega_{\xi} \zeta; \\ v_{\zeta} &= \omega_{\xi} \eta - \omega_{\eta} \xi. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Рівняння (4.48) — це вираз проєкцій вектора лінійної швидкості точки тіла в найзагальнішому випадку його обертального руху на рухомі осі декартової системи координат, незмінно зв'язаної з обертовим тілом.

У співвідношеннях (4.48) координати  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  і  $\bar{\zeta}$  довільної точки  $B$  тіла під час його обертання з часом не змінюються. У той час, як проєкції вектора кутової швидкості  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$  і  $\omega_\zeta$  є функціями часу, оскільки положення миттєвої осі обертання відносно самого тіла, а отже, й системи координат  $\xi O\eta\zeta$  змінюється. Різним моментам часу відповідає різна множина тих точок тіла, які на мить стають нерухомими і утворюють миттєву вісь обертання для тіла.

Від співвідношень (4.48) легко перейти до формул, які визначають проєкції вектора лінійної швидкості довільної точки тіла в загальному випадку його обертального руху на осі абсолютно нерухомої декартової системи координат  $xOyz$  (рис. 4.11). Зрозуміло, що для цього досить у рівностях (4.48) замінити індекси і координати, що відповідають рухомій системі координат  $\xi O\eta\zeta$ , на відповідні індекси і координати нерухомої системи  $xOyz$  (взаємну відповідність осей даних систем координат наведено на схемі (рис. 4.11).

Шукані формули мають вигляд:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y; \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z; \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (4.49)$$

У цих рівностях, які виражають проєкції лінійних швидкостей точок обертального тіла на нерухомі осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ , координати  $x$ ,  $y$  і  $z$  є функціями часу. Крім того, як в рухомій  $\xi O\eta\zeta$ , так і в нерухомій системі координат  $xOyz$  проєкції вектора кутової швидкості  $\bar{\omega}$  на осі обох систем є функціями часу.

Зауважимо: якщо у векторних добутках (4.47) замінити орти  $\bar{\xi}^\circ$ ,  $\bar{\eta}^\circ$  і  $\bar{\zeta}^\circ$  на відповідні орти  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  і  $\bar{k}$  системи  $xOyz$ , то маємо:

$$\begin{aligned} \bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0; \quad \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}; \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}; \\ \bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}; \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}; \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}; \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

У питаннях динаміки, пов'язаних з виведенням диференціальних рівнянь руху абсолютно твердого тіла навколо нерухомої точки надають перевагу кінематичним співвідношенням (4.48). Застосуємо до часткового випадку обертального руху тіла з нерухомою віссю обертання (див. рис. 4.9) співвідношення (4.48) і (4.49). Оскільки в даному випадку координатні осі  $Oz$ ,  $O\zeta$ , а також нерухома вісь обертання тіла збігаються, то проєкції вектора кутової швидкості, який лежить на осі обертання, на нерухомі  $Ox$ ,  $Oy$  і рухомі  $O\xi$ ,  $O\eta$  осі мають нульові значення, тобто  $\omega_x = \omega_y = \omega_\xi = \omega_\eta = 0$ .

Врахуємо цю обставину в загальних формулах (4.48), (4.49):

$$v_{\xi} = -\omega_{\zeta} \eta = -\dot{\varphi} \eta = \frac{d\varphi}{dt} \eta; \quad v_{\eta} = \frac{d\varphi}{dt} \xi; \quad (4.51)$$

$$v_x = -\omega_z y = -\dot{\varphi} y; \quad v_y = \omega_z x. \quad (4.52)$$

У цих співвідношеннях  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  — алгебраїчна величина,  $\xi$  і  $\eta$  — сталі координати, від часу не залежать;  $x, y$  — функції часу.

Дані формули можна дістати безпосереднім проектуванням лінійної швидкості точки  $B$  обертового тіла на відповідні осі (див. рис. 4.9). Вектор швидкості  $\vec{v}$  і декартові площини  $xOy, \xi O\eta$  паралельні, і рухомі осі  $O\xi, O\eta$  в нерухомій площині  $xOy$  обертаються навколо нерухомої осі  $Oz$  ( $O\xi$ ) з кутовою швидкістю  $\omega_{\zeta} = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ . На рис. 4.12

$\varphi$  — кут повороту тіла,  $\alpha$  і  $R$  визначають положення в системі координат усіх тих точок тіла, які мають однакові координати — абсцису й ординату в обох системах координат і вектор лінійної швидкості.

Спочатку запишемо вирази проєкції лінійної швидкості  $\vec{v}$  точки  $B$  на рухомі осі (рис. 4.12):

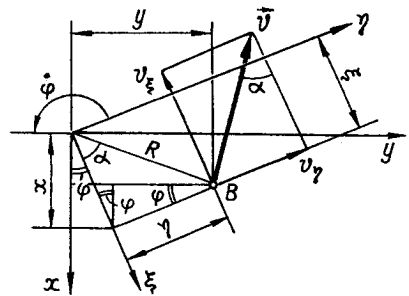


Рис. 4.12

$$v_{\xi} = \vec{v} \cdot \vec{\xi}^{\circ} = \dot{s} \vec{\tau} \cdot \vec{\xi}^{\circ} = \dot{\varphi} R \vec{\tau} \cdot \vec{\xi}^{\circ} = \\ = R \omega_{\zeta} \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{\xi}^{\circ}) = R \omega_{\zeta} \cos(180^{\circ} - 90^{\circ} + \alpha) = -R \omega_{\zeta} \sin \alpha = -\omega_{\zeta} \eta;$$

$$v_{\eta} = \vec{v} \cdot \vec{\eta}^{\circ} = \dot{s} \vec{\tau} \cdot \vec{\eta}^{\circ} = \dot{\varphi} R \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{\eta}^{\circ}) = \omega_{\zeta} R \sin \alpha = \omega_{\zeta} \xi.$$

Проекції вектора лінійної швидкості на нерухомі осі:

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i} = \dot{\varphi} R \vec{\tau} \cdot \vec{i} = \omega_{\zeta} R \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{i}) =$$

$$= \omega_{\zeta} R \cos(90^{\circ} + \varphi + \alpha) = -\omega_{\zeta} R \sin(\varphi + \alpha) = -\omega_{\zeta} y;$$

$$v_y = \vec{v} \cdot \vec{j} = \omega_{\zeta} \vec{\tau} \cdot \vec{j} R = \omega_{\zeta} R \cos \angle(\vec{\tau}, \vec{j}) = \omega_{\zeta} R \cos(\varphi + \alpha) = \omega_{\zeta} x.$$

Продиференціювавши по часу векторну рівність — формулу Ейлера, дістанемо вектор повного прискорення точки тіла в разі обертального руху навколо нерухомої осі:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}} &= (\vec{\omega} \times \vec{r})' = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{a}; \\ \vec{a} &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Покажемо, що  $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$  — це вектор тангенціального прискорення точки  $B$  тіла  $\vec{a}_T$ . Справді,

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \varepsilon \vec{\zeta} \times (\overrightarrow{OC} + \vec{R}) = \dot{\varphi} (\vec{\zeta} \times \vec{R}) = \dot{\varphi} (\vec{\zeta} \times R \vec{R}^\circ) = a_T \vec{\tau}.$$

Модуль цієї складової прискорення  $\vec{a}$  дорівнює модулю векторного добутку  $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ :

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon r \sin \angle(\vec{\zeta}^\circ, \vec{r}) = \varepsilon R.$$

З'ясуємо зміст другого доданку  $\vec{\omega} \times \vec{v}$ :

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \dot{\varphi} \vec{\zeta}^\circ \times \dot{\varphi} R \vec{\tau} = \dot{\varphi}^2 R \vec{\zeta}^\circ \times \vec{\tau} = \omega^2 R \vec{n} = a_n \vec{n}.$$

Це — вектор доцентрового прискорення точки тіла  $\vec{a}_d$  в розглядуваному випадку. Модуль векторного добутку вектора кутової швидкості на вектор лінійної швидкості дорівнює модулю нормального (тангенціального) прискорення точки. Справді,

$$a_d = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin 90^\circ = \omega v = \omega \omega R = \omega^2 R.$$

Отже, маємо прямокутні складові повного прискорення точки тіла:

$$\vec{a}_T = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}; \quad (4.54)$$

$$\vec{a}_d = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (4.55)$$

і повне прискорення точки тіла:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_d = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (4.56)$$

У формулі (4.53) величина  $\vec{\varepsilon}$  — вектор кутового прискорення тіла, дорівнює першій похідній по часу від вектора кутової швидкості тіла, тобто

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (4.57)$$

Ця формула справедлива для будь-якого обертового руху тіла.

Якщо вважати, що вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  при обертанні тіла в кожний момент часу виходить з однієї й тієї самої точки, то кінець цього вектора, точка  $K$ , опише відносно абсолютного простору криву лінію, яка називається *годографом кутової швидкості*  $\vec{\omega}$  (рис. 4.13). Швидкість точки  $K$ , як і швидкість будь-якої іншої точки, має напрям дотичної до кривої, по якій вона рухається, тобто дотичної до годографа вектора кутової швидкості.

Отже,

$$\frac{d \overrightarrow{OK}}{dt} = \vec{u}_K = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}.$$

Але, крім того,

$$\frac{d \overrightarrow{OK}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon},$$

тому

$$\vec{\varepsilon} = \vec{u}_K. \quad (4.58)$$

Звідси робимо висновок, що вектор кутового прискорення не збігається з вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}$ , а має напрям швидкості кінця вектора кутової швидкості  $\vec{u}_K$  і лежить на прямій  $OE$ , яка перетинає миттєву вісь обертання тіла в точці  $O$  (рис. 4.13).

Пряма  $OE$ , на якій лежить вектор кутового прискорення  $\vec{\varepsilon}$ , називається *віссю кутового прискорення*. Для випадку обертального руху тіла навколо нерухомої осі вісь кутового прискорення  $OE$  і нерухома вісь обертання  $Oz$  збігаються. В цьому випадку модуль повного прискорення точки тіла визначається за формулою (4.45), в якій  $R$  — це радіус кола, по якому рухається дана точка. Складові цього прискорення — тангенціальне  $\vec{a}_\tau$  і доцентрове  $\vec{a}_n$  визначаються за формулами (4.41) і (4.43) відповідно, в кожен з яких входить множником один й той самий радіус кола  $R$ .

Також зазначимо, що швидкість точки  $K$  — кінця вектора кутової швидкості  $\vec{u}_K$  напрямлена по нерухомій осі обертання тіла, оскільки з останньою збігається годограф кутової швидкості  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ , а отже, і вектор кутового прискорення (що мають спільну пряму — вісь обертання).

Слід також звернути увагу на векторну формулу (4.53), яка справедлива і для обертального руху тіла навколо нерухомої осі, й для миттєвих обертальних рухів тіл. Зазначимо, що в першому випадку модулі складових  $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ ,  $\vec{\omega} \times \vec{v}$  містять один й той самий лінійний множник — радіус кола  $R$  (див. рис. 4.9):

$$\vec{a}_\tau = |\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon R, \quad \vec{a}_n = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega^2 R.$$

У другому випадку — для миттєвих обертальних рухів модулі векторних добутоків  $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$  і  $\vec{\omega} \times \vec{v}$  містять різні лінійні множники (рис. 4.13):

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = C_1 B \cdot \varepsilon; \quad |\vec{\omega} \times \vec{v}| = CB \cdot \omega^2 = \omega^2 R; \quad CB = R,$$

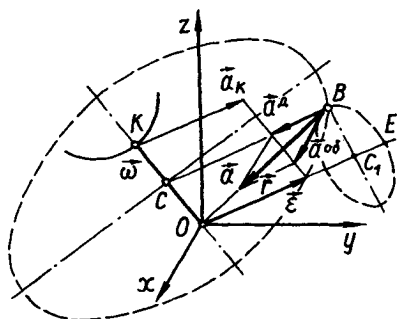


Рис. 4.13



оскільки вісь кутового прискорення  $OE$  і миттєва вісь обертання  $OK$  не збігаються. У цьому разі складові повного прискорення точок називають обертальним прискоренням

$$\bar{a}^{ob} = \bar{\omega} \times \bar{r}; \quad a^{ob} = C_1 B \cdot \varepsilon \quad (4.59)$$

і доцентровим прискоренням

$$\bar{a}^n = \bar{\omega} \times \bar{v}; \quad a^n = \omega^2 \cdot CB = \omega^2 R. \quad (4.60)$$

Маємо повне прискорення:

$$a = \sqrt{(a^{ob})^2 + (a^n)^2} = \sqrt{\varepsilon^2 (BC_1)^2 + \omega^4 (BC)^2}. \quad (4.61)$$

На рис. 4.14 наведено приклад миттєвого обертального руху тіла у вигляді круглого прямого конуса з нерухомою вершиною  $O$ , який котиться без проковзування по нерухомій горизонтальній площині. Миттєвою віссю обертання в цьому разі є твірна конуса, якою він дотикається до площини. Годографом кутової швидкості конуса є коло радіусом  $OK = \omega$ , розташоване в нерухомій площині. При коченні конуса напрям швидкості кінця вектора кутової швидкості  $\bar{u}_k$  визначає напрям вектора кутового прискорення  $\bar{\varepsilon}$ , вісь  $OE$  якого лежить у нерухомій площині й проходить через вершину конуса. Вектори  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\varepsilon}$  на рисунку відповідають ко-

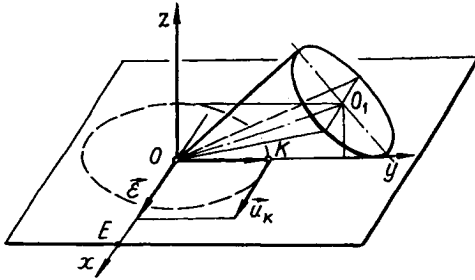


Рис. 4.14

ченню конуса в напрямі руху годинникової стрілки, якщо дивитися на нерухому площину згори.

## СКЛАДНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПРИ НАЙПРОСТІШИХ ПЕРЕНЕСНИХ РУХАХ (ПОСТУПАЛЬНОМУ І ОБЕРТАЛЬНОМУ) НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

У попередніх главах розглянуто кінематику матеріальної точки й абсолютно твердого тіла відносно абсолютно нерухомого простору, тобто системи декартових координат  $xOyz$ , незмінно зв'язаної з абсолютним простором. Усі кінематичні характеристики руху — траєкторія, лінійні, кутові швидкості й прискорення введено в припущенні, що рух точок і тіл розглядався відносно абсолютно нерухомої системи координат  $xOyz$ . Такий рух часто називають абсолютним. Також абсолютними називають траєкторію та відповідні кінематичні величини, якщо їх вивчають для випадку абсолютного руху.

Необхідність вивчення абсолютних рухів зумовлена характером закону інерції й основного закону динаміки — другого закону Ньютона. Річ у тім, що відомі закони Ньютона були ним сформульовані для абсолютних рухів матеріальних тіл. У зв'язку з цим слід зазначити, що Ньютон, формулюючи свої класичні закони механіки, припускав існування абсолютно нерухомого простору.

Втім у механіці виникає потреба розгляду абсолютного руху на його складові — на так звані відносні й переносні рухи. Здебільшого виявляється, що ці складові рухи набагато простіші за своїми властивостями ніж абсолютний рух. Зазначимо, що переносний рух пов'язується з конкретним матеріальним тілом, яке рухається щодо абсолютного простору. Це перше тіло назвемо рухомим тілом (рухомим простором). А будь-яку декартову систему координат, незмінно зв'язану з цим рухомим тілом, назвемо рухомою системою осей. Іноді про саме рухоме тіло (рухомий простір) не згадують, а розглядають лише відповідну рухому систему координат.

Абсолютний рух іншого матеріального тіла — матеріальної точки або абсолютно твердого тіла розглядається як поєднання переносного й відносного. Це друге тіло, рух якого досліджується. Друга складова абсолютного руху тіла — відносний рух — встановлюється відносно рухомої системи координат (рухомого простору). Перша скла-

дова його руху — переносний рух розглядається відносно абсолютної системи осей (абсолютно нерухомого простору).

При вивченні складного руху тіла застосовують три системи декартових координат: 1) абсолютно нерухому; 2) рухому, жорстко зв'язану з рухомим тілом (рухомим простором), з яким пов'язується переносний рух; 3) систему координат, незмінно зв'язану з тілом, складний рух якого розглядається. Звичайно, якщо вивчається складний рух не тіла, а точки, то вводять лише дві системи координат — нерухому й рухому.

У загальних питаннях складного руху рухома система координат може довільно рухатися. Та розглянемо лише такі складні рухи точки, в яких переносним рухом є поступальний, а також обертальний навколо нерухомої осі. Складний рух тіла розглянемо далі.

Слід зазначити, що задача кінематики щодо розкладання абсолютних рухів на складові є досить довільною. Можна безліччю способів розкласти конкретний абсолютний рух точки чи тіла на переносний та відносний (або на кілька відносних і переносних рухів). Однак у конкретних прикладних задачах механіки, пов'язаних із дослідженням руху конкретних механізмів, розклад абсолютного руху будь-якої його ланки або окремих точок ланок визначається конструктивними особливостями механізму.

Наведемо приклади механізмів, на яких проілюструємо розклад абсолютного руху на складові — відносний і переносний (рис. 5.1.).

Нехай призма  $A$  рухається прямолінійно поступально в горизонтальному напрямі відносно абсолютно нерухомої системи осей  $xOyz$  згідно з рівнянням  $x_A = x_A(t)$  ( $y_A = \text{const}$ ). Уздовж похилої верхньої грані призми  $A$  згори вниз рухається мала призма  $B$ . Дослідимо складний рух малої призми  $B$ . Рух тіла  $B$  відносно нерухомої системи координат  $xOyz$ , коли абсолютні координати  $x$  і  $y$  однозначно визначають його положення в будь-який момент часу, є його абсолютним рухом. Рух тіла  $B$  відносно призми  $A$  (відносно поступально рухомої системи осей  $xOyz$ ) у припущенні, що призма  $A$  мислено зупинена, є відносним його рухом; цей рух визначається рівнянням  $x' = x'(t)$ . Поступальний рух призми  $A$  разом із тілом  $B$  відносно абсолютно нерухомої системи осей  $xOyz$ , у припущенні, що відносний рух мислено призупинено, є переносним рухом тіла  $B$ . Маємо приклад абсолютного руху тіла, який можна розкласти на два поступальні складові рухи.

На рис. 5.1, б зображено механізм, що складається з кривошипа  $OK$ , який може обертатися навколо нерухомої горизонтальної осі  $Oz$ , прямолінійного стержня  $BM$  із вертикальними напрямними, що зумовлюють його рух по вертикалі, і, нарешті, насадженого на кривошип  $OK$  повзуна  $B$  (втулки). Розглянемо точку  $B$ , що є центром шарнірного з'єднання стержня  $BM$  і вказаної втулки (повзуна) й визна-

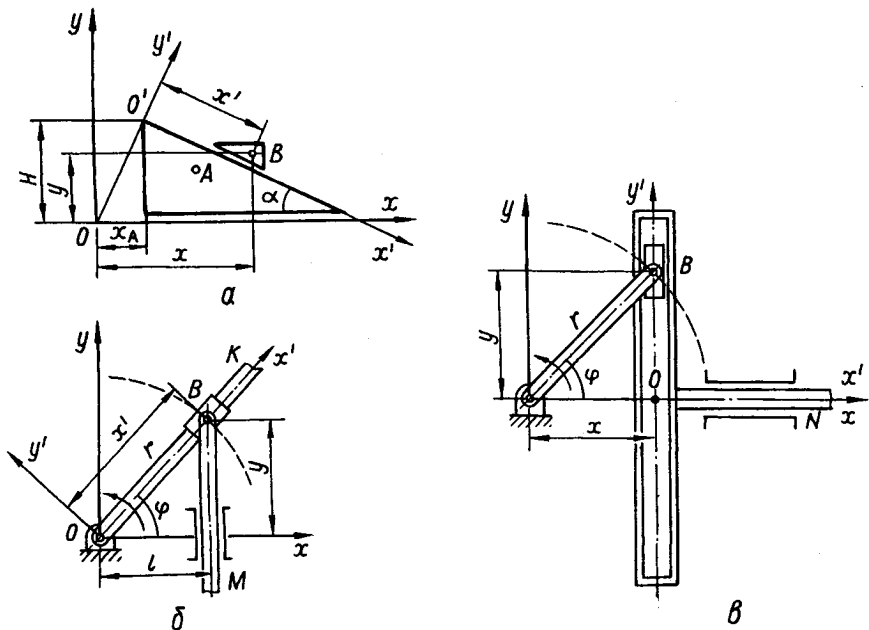


Рис. 5.1

чимо її абсолютний рух. Зауважимо, що рух точки  $B$  по вертикалі (осі  $Oy$ ), який здійснюється згідно з рівнянням  $y = y(t)$  відносно абсолютно нерухомої системи осей  $xOy$ , називається її абсолютним рухом.

Далі абсолютний рух точки  $B$  можна розкласти на два види рухів — відносний, який є рухом повзуна  $B$  щодо кривошипа  $OK$  (в припущенні, що його обертання призупинено на одну мить), і переносного, що є обертанням кривошипа  $OK$  навколо нерухомої горизонтальної осі  $Oz$  разом із втулкою (в припущенні, що відносно переміщення повзуна по кривошипу на мить призупинено). Відносний рух точки  $B$  визначається рівнянням  $x' = x'(t)$ , а переносний —  $\varphi = \varphi(t)$ . Також зазначимо, що відносний рух точки в розглядуваному нами випадку є прямолінійним, а переносний — обертальним (у ньому точка  $B$  описує миттєве коло з миттєвим радіусом  $OB$ ).

У третьому прикладі (рис. 5.1, в) механізм складається з обертально-рухомого кривошипа  $OB$  навколо горизонтальної осі з точкою  $O$ , з поступально-рухомої рамки  $ON$  (цей рух забезпечується горизонтальними напрямними) і каменя  $B$ , який може переміщуватися відносно рамки вздовж її прорізу. У даному випадку рух точки  $B$  по колу радіусом  $r$  відносно абсолютно нерухомої системи осей  $xOy$  є абсолютним її рухом. Абсолютний рух точки  $B$  складається з двох видів

рухів — відносного прямолінійного вздовж осі рамки і переносного поступального прямолінійного, що визначається рухом рамки. Рівняння абсолютного, відносного і переносного рухів точки  $B$  мають вигляд відповідно  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $y' = y'(t)$ ,  $x = f(t)$ .

## § 16. Абсолютний рух як поєднання відносного і переносного рухів

---

У наведених прикладах (рис. 5.1) рух точки  $B$  відносно нерухомої системи осей  $xOy$ , або корпусу механізму, а отже, і Землі, було визначено як абсолютний. Для цього було введено умову — нехтування рухом Землі відносно абсолютного простору. Надалі, визначаючи абсолютний рух тих чи інших ланок механізму, Землю вважають нерухомою відносно абсолютного простору (у багатьох інженерних задачах).

Щоб дістати конкретніше уявлення про абсолютно нерухому систему декартових координат  $xOy$ , вважатимемо, що прямокутна декартова система координат  $xOyz$  з початком у центрі мас Сонячної системи й осями, спрямованими на три відповідні нерухомі зірки, є абсолютно нерухомою декартовою системою координат  $xOyz$ .

*Абсолютним рухом точки  $B$*  називається такий її рух, що здійснюється відносно абсолютно нерухомої декартової системи координат  $xOyz$ .

Траєкторію, швидкість і прискорення точки  $B$  в разі її абсолютного руху називають відповідно абсолютною траєкторією, абсолютною швидкістю і абсолютним прискоренням.

Абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки позначимо так само —  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ , як і раніше.

Для визначення відносного й переносного руху введемо в розгляд рухому декартову систему координат  $x'O'y'z'$ , рух якої відносно абсолютно нерухомої  $xOyz$  наперед задається відповідними кінематичними рівняннями. Зазначимо, що коли йдеться про рухому систему координат  $x'O'y'z'$ , то також мається на увазі те рухоме тіло, з яким вона зв'язана. Так, у першому прикладі (рис. 5.1, *a*) рухомі осі  $x'O'y'z'$  зв'язані з великою призмою  $A$ , в другому прикладі (рис. 5.1, *б*) — з кривошипом  $OK$ , і на рис. 5.1, *в* — з поступально рухомою рамкою  $O'N$ .

Теоретично можна вважати, що замість рухомого тіла є уявлюваний рухомий простір, з яким жорстко зв'язана рухома система осей  $x'O'y'z'$ . Отже, складний рух точки в нашому уявленні пов'язаний з двома абстрактними поняттями — абсолютно нерухомим простором і рухомим простором, або нерухомою  $xOyz$  і рухомою  $x'O'y'z'$  системами координат.

*Переносним рухом точки* в разі її складного руху називається рух рухомої системи координат  $x'O'y'z'$  разом із точкою відносно абсолютно нерухомої системи координат  $xOyz$  у припущенні, що точка і рухома система осей переміщуються як одне ціле.

До понять переносної траєкторії, швидкості й прискорення перейдемо після означення відносного руху точки.

*Відносним рухом точки* в разі її складного руху називається такий її рух, що здійснюється відносно рухомої системи координат у припущенні, що рух рухомої системи осей мислено зупинено.

Проте зазначимо, що в дійсності обидва складові рухи — відносний і переносний — відбуваються водночас.

Траєкторію, швидкість і прискорення точки в разі її відносного руху називають відповідно відносною траєкторією, відносною швидкістю і відносним прискоренням.

Відносні кінематичні величини позначають так само, як і відповідні абсолютні величини, але з індексом «'», який вказує на їх відносний характер. Отже,  $\vec{v}'$ , і  $\vec{a}'$ , — відносна швидкість і відносне прискорення точки.

Тепер визначимо переносні характеристики складного руху точки. Слід одразу зауважити, що кожному моменту часу складного руху точки відповідає певна переносна її траєкторія; одна переносна траєкторія у послідовні моменти часу завдяки відносному руху замінюється на іншу, тобто в загальному випадку складного руху точки різними моментами часу її руху відповідають різні переносні траєкторії. Звичайно, що в часткових випадках складного руху переносна траєкторія точки може бути одна й та сама в різні моменти часу.

*Переносною траєкторією точки* в складному русі називається траєкторія того місця рухомого простору (рухомої системи координат  $x'O'y'z'$ ), в якому розглядувана рухома точка перебуває в даний момент часу, здійснюючи свій відносний рух.

Так, переносними траєкторіями точки  $B$  у разі складного руху (див. рис. 5.1, *а*) є горизонтальні прямі, паралельні осі  $Ox$ , які перетинають верхню грань призми  $A$ . Для точки  $B$  (див. рис. 5.1, *б*) переносними її траєкторіями є концентричні кола з центром у точці  $O$ , що перетинають ті місця на осі кривошипа, в які потрапляє у відповідні моменти часу точка  $B$ , здійснюючи свій відносний рух уздовж кривошипа  $OK$ . В іншому випадку (див. рис. 5.1, *в*) це прямі, паралельні осі  $Ox$ , що перетинають ті місця на осі прорізу рамки, в яких перебуває у відповідні моменти часу точка  $B$ , здійснюючи свій відносний рух уздовж осі прорізу рамки.

Введемо переносні швидкість і прискорення точки в разі її складного руху. Швидкість і прискорення тих точок рухомого простору, в яких у відповідні моменти часу перебуває розглядувана точка, здійснюючи свій відносний рух, називають відповідно переносною швидкістю і переносним прискоренням точки, складний рух якої розглядається. Введемо індекс «e» для  $v$  і  $a$ , який вказує на переносний характер швидкості і прискорення:  $\vec{v}_e$  — переносна швидкість точки,  $\vec{a}_e$  — переносне прискорення точки.

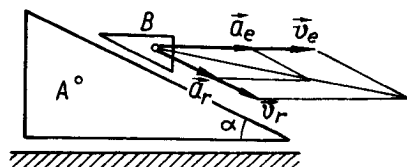


Рис. 5.2

Для випадків складного руху точки  $B$ , наведених на рис. 5.1, зобразимо відповідні кінематичні характеристики. Якщо прямолінійний відносний рух точки  $B$  (див. рис. 5.1, а) є прискореним і відбувається згори вниз, і призма  $A$  також прискорено рухається в напрямі осі  $Ox$ , то величини  $\vec{v}_r$ ,  $\vec{a}_r$ ,  $\vec{v}_e$  і  $\vec{a}_e$  для даного моменту часу будуть такими, як показано на рис. 5.2.

На рис. 5.3 зображено лише швидкості. Зазначимо, що відносного і переносного прискорень недостатньо для характеристики прискорених складних рухів точки в разі її переносного обертального руху, коли утворюється так зване коріолісове прискорення  $\vec{a}_k$ , про яке йдеться далі.

Якщо в третьому прикладі (див. рис. 5.1, в) вважати, що кривошип  $OB$  здійснює прискорений обертальний рух у напрямі, протилежному руху стрілки годинника, то абсолютна лінійна швидкість  $\vec{v}$  точки  $B$  напрямлена нормально до кривошипа  $OB$  у бік його обертання. Абсолютні тангенціальне  $\vec{a}_t$  і доцентрове  $\vec{a}_d$  прискорення мають для точки  $B$  напрямі, які вказано на рис. 5.4. Вважатимемо, що для положення механізму, заданого кутом  $\varphi$ , відносний рух точ-

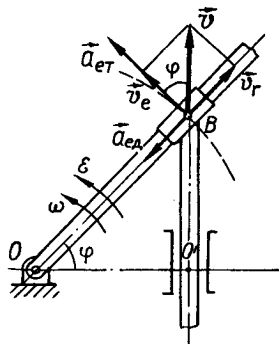


Рис. 5.3

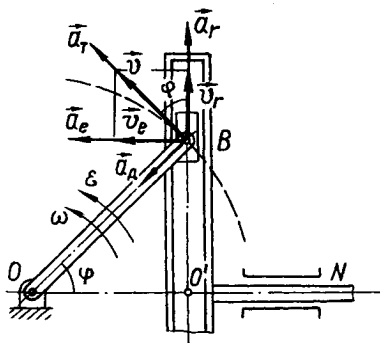


Рис. 5.4

ки  $B$  є прискореним, тоді відстанемо, що відносна швидкість  $\vec{v}_r$ , і відносне прискорення  $\vec{a}_r$ , її напрямлені вертикально вгору. Нарешті, переносна швидкість  $\vec{v}_e$  і переносне прискорення  $\vec{a}_e$  точки  $B$  мають горизонтальний напрям справа наліво.

### § 17. Теорема про абсолютну швидкість і абсолютне прискорення матеріальної точки в разі переносного поступального руху

Викладемо теореми, які дають змогу визначити абсолютні швидкість і прискорення точки за відомими її відносними швидкістю і прискоренням у разі поступального переносного руху. Ці часткові теореми стосуються наведених прикладів складного руху точки (див. рис. 5.1). Для дослідження складного руху в нашому випадку введемо дві системи координат: абсолютно нерухому  $xOyz$  і поступально рухому  $x'O'y'z'$  причому осі останньої орієнтовані таким чином, що під час поступального руху лишаються паралельними нерухомим осям (рис. 5.5). Візьмемо точку  $B$  і розглянемо її абсолютний рух як складний. Тоді її рух відносно поступально рухомих осей  $x'O'y'z'$  буде відносним. Позначимо  $\vec{v}_r$  і  $\vec{a}_r$  — відносні швидкість і прискорення точки  $B$ .

Поступальний рух системи осей  $x'O'y'z'$  відносно нерухомих осей  $xOyz$  є переносним рухом точки  $B$ . Як уже було зазначено, переносна швидкість  $\vec{v}_e$  і переносне прискорення  $\vec{a}_e$  розглядуваної точки  $B$  — це швидкість і прискорення тієї точки  $B'$  поступально рухомого простору, з якою в даний момент часу збігається точка  $B$ :  $\vec{v}_{B'} = \vec{v}_e, \vec{a}_{B'} = \vec{a}_e$ .

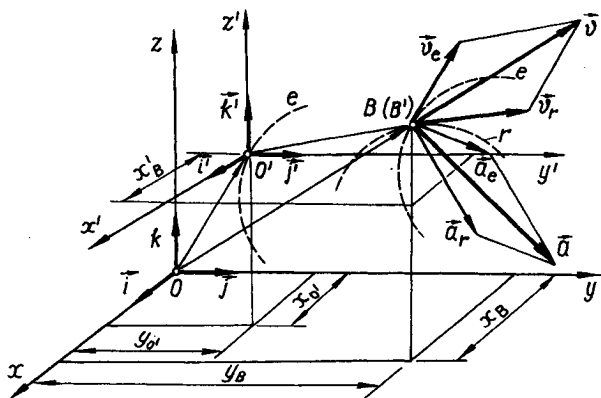


Рис. 5.5



Позначивши абсолютні швидкість і прискорення точки  $B$  у разі складного руху відповідно  $\vec{v}$  і  $\vec{a}$ , сформулюємо теорему.

**Теорема про абсолютну швидкість.** Абсолютна швидкість точки в разі складного руху точки дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкостей:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \quad (5.1)$$

**Теорема про абсолютне прискорення.** Абсолютне прискорення точки в разі складного руху точки дорівнює векторній сумі відносного й переносного прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e. \quad (5.2)$$

Доведемо першу теорему. Позначимо  $x'_B, y'_B, z'_B$  — координати будь-якої точки  $B'$  поступально рухомого простору в системі координат  $x'O'y'z'$ . Точка  $B'$  відносно системи  $x'O'y'z'$  перебуває в спокої. Отже, її координати  $x'_B, y'_B, z'_B$  від часу не залежать. З рис. 5.5 запишемо співвідношення між координатами точки  $B'$  у рухомій і нерухомій системах:

$$x_B = x_O + x'_B; \quad y_B = y_O + y'_B; \quad z_B = z_O + z'_B, \quad (5.3)$$

де  $x_O, y_O, z_O$  — абсолютні координати початку  $O'$  рухомої системи  $x'O'y'z'$ , які є функціями часу. Рівності (5.3) є рівнянням руху будь-якої точки  $B'$  рухомого простору, або рухомої системи координат  $x_Oy_Oz_O$ , яка здійснює абсолютний рух відносно системи  $x'O'y'z'$ .

Координати таких точок  $B'$  рухомого простору, через які в певній послідовності в часі проходить у разі складного руху точка  $B$ , завдяки відносній складовій її руху, визначають відносні координати точки  $B$ , тому

$$x'_B(t) = x'_B; \quad y'_B(t) = y'_B; \quad z'_B(t) = z'_B.$$

Звернемо увагу на те, що в цих рівностях величини в лівих частинах стосуються однієї й тієї самої точки  $B$ , а справа — величини, які стосуються різних точок  $B'$  рухомого простору. Враховуючи це, введемо поняття відносної траєкторії точки  $B$  у разі складного руху.

Геометричне місце точок рухомого простору (рухомої системи координат), через які проходить у разі складного руху точка  $B$ , здійснюючи відносну складову частину свого руху, називається *відносною траєкторією точки в разі складного руху*.

Неперервні однозначні функції відносних координат точки в разі її складного руху називають *рівняннями відносного руху точки в разі складного руху*, тобто

$$x'_B = x'_B(t); \quad y'_B = y'_B(t); \quad z'_B = z'_B(t), \quad (5.4)$$

та є водночас рівняннями відносної траєкторії в параметричній формі.

*Переносною траєкторією точки* в разі складного руху в даний фіксований момент часу  $t^*$  називається геометричне місце точок абсолютно нерухомого простору, через які проходить завдяки переносному рухові та точка рухомого простору, з якою в цей фіксований момент часу  $t^*$  збігається точка, яка здійснює складний рух.

На підставі цього означення рівняння переносної траєкторії в разі складного руху точки  $B$  має для даного фіксованого моменту часу  $t^*$  такий вигляд:

$$\begin{aligned}x_B(t) &= x_{O'}(t) + x'_B(t^*); \\y_B(t) &= y_{O'}(t) + y'_B(t^*); \\z_B(t) &= z_{O'}(t) + z'_B(t^*).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Функції

$$x_{O'} = x_{O'}(t), \quad y_{O'} = y_{O'}(t), \quad z_{O'} = z_{O'}(t)\tag{5.6}$$

визначають поступальний рух рухомого простору (рухомої системи координат). Величини  $x'_B(t^*)$ ,  $y'_B(t^*)$  і  $z'_B(t^*)$  беруться з рівнянь відносного руху (5.4), якщо в них замість  $t$  підставити значення даного моменту часу  $t^*$ , в який точка  $B'$  рухомого простору, що описує в абсолютному просторі переносну траєкторію, і точка  $B$ , що здійснює складний рух, збігаються.

Рівняння (5.5) є також рівняннями переносного руху точки  $B$  у разі її складного руху. Ще раз зауважимо, що переносні траєкторія, рівняння руху, швидкість і прискорення точки під час складного руху зумовлюються абсолютним рухом тієї чи іншої точки, що належить рухомому простору, і присвоюються іншій точці, яка, здійснюючи свій складний рух, у відповідні моменти часу збігається з відповідними точками рухомого простору.

*Абсолютною траєкторією* в разі складного руху точки називають геометричне місце точок абсолютно нерухомого простору, через які точка проходить під час складного руху.

З рис. 5.5 запишемо параметричні рівняння абсолютної траєкторії:

$$x_B = x_B(t); \quad y_B = y_B(t); \quad z_B = z_B(t).\tag{5.7}$$

Ці рівності водночас є рівняннями абсолютного руху точки.

На підставі рівнянь відносного, переносного й абсолютного руху точки та за рис. 5.5 дістанемо рівняння складного руху точки  $B$ :

$$\begin{aligned}x_B &= x_{O'}(t) + x'_B(t); \\y_B &= y_{O'}(t) + y'_B(t); \\z_B &= z_{O'}(t) + z'_B(t).\end{aligned}\tag{5.8}$$

Ці рівняння зв'язують абсолютні, переносні й відносні координати точки в разі складного її руху.

Для доведення теореми про абсолютну швидкість точки в разі складного її руху достатньо функціональні залежності (5.8) продиференціювати по часу:

$$\begin{aligned}\dot{x}_B &= \dot{x}_{O'} + \dot{x}'_B; \\ \dot{y}_B &= \dot{y}_{O'} + \dot{y}'_B; \\ \dot{z}_B &= \dot{z}_{O'} + \dot{z}'_B,\end{aligned}\tag{5.9}$$

де

$$\begin{aligned}\dot{x}_{O'} &= \frac{dx_{B'}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_{O'} + x'_{B'}(t^*)) = v_{ex}; \\ \dot{y}_{O'} &= \frac{dy_{B'}}{dt} = \frac{d}{dt}(y_{O'} + y'_{B'}(t^*)) = v_{ey}; \\ \dot{z}_{O'} &= \frac{dz_{B'}}{dt} = \frac{d}{dt}(z_{O'} + z'_{B'}(t^*)) = v_{ez}\end{aligned}\tag{5.10}$$

(похідні визначаються при  $t = t^*$ ).

Ці величини є проєкціями вектора переносної швидкості  $\vec{v}_e$  точки  $B$  на нерухомі осі декартових координат. Другі члени в рівностях (5.9) є проєкціями вектора відносної швидкості  $\vec{v}_r$  точки  $B$  на поступально рухомі, або на абсолютно нерухомі осі декартових координат:

$$\begin{aligned}\dot{x}'_B &= \frac{dx'_B}{dt} = v_{Brx'} = v_{Brx} = v_{rx}; \\ \dot{y}'_B &= \frac{dy'_B}{dt} = v_{Bry'} = v_{Bry} = v_{ry}; \\ \dot{z}'_B &= \frac{dz'_B}{dt} = v_{Brz'} = v_{Brz} = v_{rz},\end{aligned}\tag{5.11}$$

оскільки під час руху точки зберігається паралельність відповідних осей — рухомих і нерухомих.

Ліві частини співвідношень (5.9) є проєкціями вектора абсолютної швидкості точки  $B$  на абсолютно нерухомі осі:

$$\dot{x}_B = \frac{dx_B}{dt} = v_{Bx} = v_x; \quad \dot{y}_B = \frac{dy_B}{dt} = v_{By} = v_y; \quad \dot{z}_B = \frac{dz_B}{dt} = v_{Bz} = v_z.\tag{5.12}$$

Враховавши формули (5.10) — (5.12), виразу (5.9) надамо вигляду:

$$\begin{aligned}v_x &= v_{rx} + v_{ex}; \\ v_y &= v_{ry} + v_{ey}; \\ v_z &= v_{rz} + v_{ez}.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Отже, маємо *теорему про проєкцію абсолютної швидкості точки в разі складного руху на нерухому вісь декартових координат.*

*Проекція абсолютної швидкості на будь-яку з осей абсолютно нерухомої декартової системи координат дорівнює сумі проєкцій відносної і переносної швидкостей на ту саму вісь.*

Трьом скалярним рівностям (5.13) відповідає одна векторна, яка виражає першу теорему, сформульовану на початку цього параграфу. Помноживши почленно обидві частини кожної формули (5.13) на відповідні одиничні орти  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{k}$  нерухомих осей, і після цього додавши їх, дістанемо векторне рівняння

$$v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = v_{rx} \vec{i} + v_{ry} \vec{j} + v_{rz} \vec{k} = v_{ex} \vec{i} + v_{ey} \vec{j} + v_{ez} \vec{k}.$$

Вектори  $v_x \vec{i}$ ,  $v_y \vec{j}$  і  $v_z \vec{k}$ , як відомо, називаються прямокутними складовими по нерухомих осях декартових координат, тобто можна записати, що  $v_x \vec{i} = \vec{v}_x$ ,  $v_y \vec{j} = \vec{v}_y$  і  $v_z \vec{k} = \vec{v}_z$ . Та абсолютна швидкість  $\vec{v}$  є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, сторони якого є прямокутними складовими абсолютної швидкості. Отже, таке співвідношення між підсумковим вектором  $\vec{v}$  і його прямокутними складовими  $\vec{v}_x$ ,  $\vec{v}_y$  і  $\vec{v}_z$  виражають векторною рівністю

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z. \quad (5.14)$$

Аналогічно можна записати й інші дві векторні рівності:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{rx} + \vec{v}_{ry} + \vec{v}_{rz}; \quad (5.15)$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{ex} + \vec{v}_{ey} + \vec{v}_{ez}. \quad (5.16)$$

Зрозуміло: якщо справедливі формули (5.13), то мають місце і векторні рівності

$$\begin{aligned} \vec{v}_x &= \vec{v}_{rx} + \vec{v}_{ex}; \\ \vec{v}_y &= \vec{v}_{ry} + \vec{v}_{ey}; \\ \vec{v}_z &= \vec{v}_{rz} + \vec{v}_{ez}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Врахувавши (5.14) — (5.16) у векторному рівнянні, яке є наслідком трьох скалярних (5.13), остаточно дістанемо векторну формулу

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e,$$

яка математично виражає першу теорему. Формально теорему доведено.

Відносну і переносну траєкторії позначено індексами « $r$ » і « $e$ » відповідно (рис. 5.5). Відносна і переносні швидкості точки  $B$  в кожний момент часу дотичні до її відносної і переносної траєкторій відповідно, які в загальному випадку складного руху точки перетинаються.

На рис. 5.6,  $a$  показано геометричну інтерпретацію векторних формул (5.14) — (5.17). Векторна формула (5.1) є математичним вираженням правила паралелограма швидкостей, згідно з яким абсолютну швидкість геометрично зображують діагоналлю паралело-

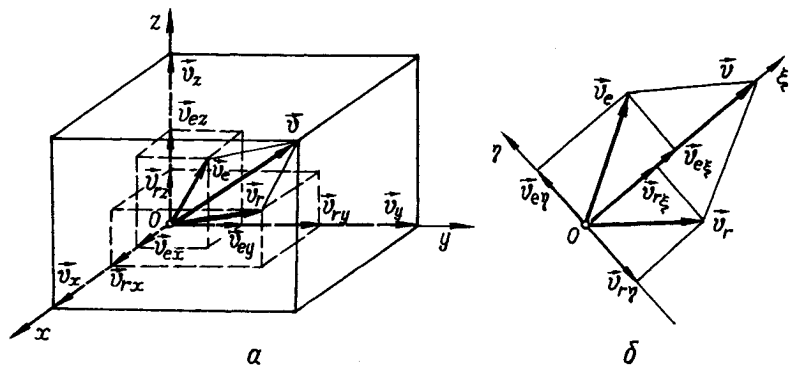


Рис. 5.6

грама, сторони якого є відносною і переносною швидкостями. На рис. 5.6, б координатна площина, на якій лежить паралелограм швидкостей  $\vec{v}_r$ ,  $\vec{v}_e$  і  $\vec{v}$ , суміщена з площиною рисунка, тому запишемо:

$$\begin{aligned}\vec{v}_r &= \vec{v}_{r\xi} + \vec{v}_m; \\ \vec{v}_e &= \vec{v}_{e\xi} + \vec{v}_{e\eta}.\end{aligned}$$

Підставимо цей результат у формулу (5.1) і врахуємо, що  $\vec{v}_m = -\vec{v}_{e\eta}$ , оскільки  $\vec{v}_\eta = \vec{v}_m + \vec{v}_{e\eta} = 0$ . Отже, дістанемо векторну рівність

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_{r\xi} + \vec{v}_m + \vec{v}_{e\xi} + \vec{v}_{e\eta} = \vec{v}_{r\xi} + \vec{v}_{e\xi},$$

яка є вихідною для доведення того, що фігура  $Ov_r v_e$  — паралелограм\*.

Доведемо другу теорему (5.2). Для цього скористаємося векторною рівністю

$$\dot{x}_B \vec{i} + \dot{y}_B \vec{j} + \dot{z}_B \vec{k} = \dot{x}_O \vec{i} + \dot{y}_O \vec{j} + \dot{z}_O \vec{k} + \dot{x}'_B \vec{i}' + \dot{y}'_B \vec{j}' + \dot{z}'_B \vec{k}',$$

яка є наслідком трьох скалярних рівнянь (5.13);  $\dot{x}'_B, \dot{y}'_B$  і  $\dot{z}'_B$  — це проєкції відносної швидкості  $\vec{v}_r$  точки  $B$  на осі рухомі, а  $\vec{i}', \vec{j}'$  і  $\vec{k}'$  — орти рухомих осей. Продиференціюємо по часу:

$$\ddot{x}_B \vec{i} + \ddot{y}_B \vec{j} + \ddot{z}_B \vec{k} = \ddot{x}_O \vec{i} + \ddot{y}_O \vec{j} + \ddot{z}_O \vec{k} + \ddot{x}'_B \vec{i}' + \ddot{y}'_B \vec{j}' + \ddot{z}'_B \vec{k}',$$

оскільки одиничні вектори  $\vec{i}', \vec{j}'$  і  $\vec{k}'$  з часом свого напрямку не змінюють. Звідси:

$$\vec{a} = \ddot{x}_B \vec{i} + \ddot{y}_B \vec{j} + \ddot{z}_B \vec{k} = \ddot{x}_O \vec{i} + \ddot{y}_O \vec{j} + \ddot{z}_O \vec{k} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z; \quad (5.18)$$

$$\vec{a}_e = \ddot{x}_O \vec{i} + \ddot{y}_O \vec{j} + \ddot{z}_O \vec{k} = \ddot{x}_O \vec{i} + \ddot{y}_O \vec{j} + \ddot{z}_O \vec{k} = \vec{a}_{ex} + \vec{a}_{ey} + \vec{a}_{ez}; \quad (5.19)$$

$$\vec{a}_r = \ddot{x}'_B \vec{i}' + \ddot{y}'_B \vec{j}' + \ddot{z}'_B \vec{k}' = \ddot{x}'_B \vec{i}' + \ddot{y}'_B \vec{j}' + \ddot{z}'_B \vec{k}' = \vec{a}_{rx} + \vec{a}_{ry} + \vec{a}_{rz}. \quad (5.20)$$

Загальну рівність з другими похідними можна переписати інакше:

\* Пропонується довести це самостійно.

$$[a_x - (a_{rx} + a_{ex})]\vec{i} + [a_y - (a_{ry} + a_{ey})]\vec{j} + [a_z - (a_{rz} + a_{ez})]\vec{k} = 0.$$

Маємо суму трьох взаємно перпендикулярних векторів, яка дорівнює нулю. Це можливо, коли проекції їх на відповідні осі декартових координат мають нульове значення. Дістанемо для проекцій прискорень у разі складного руху точки  $B$  такі скалярні формули:

$$\begin{aligned} a_x &= a_{rx} + a_{ex}; \\ a_y &= a_{ry} + a_{ey}; \\ a_z &= a_{rz} + a_{ez}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Сформулюємо *скалярну теорему про проекції абсолютного прискорення*:

*проекція абсолютного прискорення точки в разі складного руху на будь-яку із трьох абсолютно нерухомих осей декартових координат дорівнює сумі проекцій відносного і переносного прискорень на ту саму вісь.*

Як наслідок цієї теореми справедливі також векторні рівності:

$$\begin{aligned} \vec{a}_x &= \vec{a}_{rx} + \vec{a}_{ex}; \\ \vec{a}_y &= \vec{a}_{ry} + \vec{a}_{ey}; \\ \vec{a}_z &= \vec{a}_{rz} + \vec{a}_{ez}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Додавши їх з урахуванням (5.18) — (5.20), дістанемо векторну теорему про абсолютне прискорення точки в разі складного руху (5.2):

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = \vec{a}_{rx} + \vec{a}_{ry} + \vec{a}_{rz} + \vec{a}_{ex} + \vec{a}_{ey} + \vec{a}_{ez} = \vec{a}_r + \vec{a}_e.$$

На рис. 5.7 наведено геометричну інтерпретацію векторних рівнянь (5.18) — (5.20), (5.22) і (5.2).

Для того щоб довести, що абсолютне прискорення  $\vec{a}$  точки  $B$  у разі складного руху — це діагональ паралелограма, побудованого на

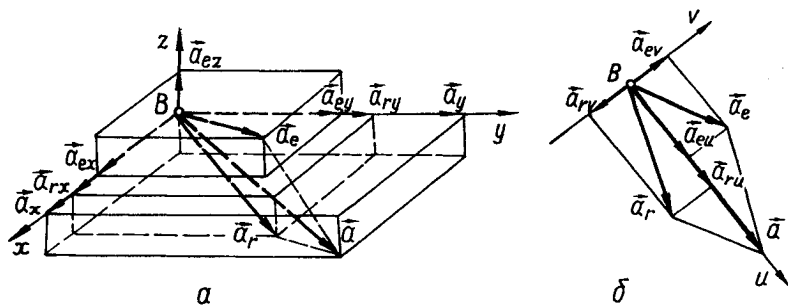


Рис. 5.7

відносному  $\vec{a}_r$ , і переносному  $\vec{a}_e$  прискореннях як на сторонах, введемо ортогональну систему двох осей  $Bu$  і  $Bv$ . Дані осі напрямлені таким чином, що одна з них, наприклад вісь  $Bu$ , збігається з абсолютним прискоренням  $\vec{a}$ . Тоді абсолютне прискорення не має прямокутної складової  $\vec{a}_v$ , паралельної другій осі  $Bv$ , отже

$$a_v = a_{ev} - a_{rv} = 0; \quad a_u = a_{eu} + a_{ru} = a.$$

З першої рівності впливає, що в прямокутних трикутниках  $Ba_{eu}a_e$  і  $Ba_{ru}a_r$  катети  $a_{eu}a_e$  і  $a_{ru}a_r$  рівні (рис. 5.7, б). Друга рівність показує, що довжина  $Ba$  вектора  $\vec{a}$  дорівнює сумі довжин катетів  $Ba_{eu}$  і  $Ba_{ru}$  цих прямокутних трикутників. Сполучивши кінці векторів  $\vec{a}_r$  і  $\vec{a}_e$  з кінцем вектора  $\vec{a}$ , маємо чотирикутник  $Ba_eaa_r$ , в якому протилежні сторони  $Ba_e$  і  $aa_r$ , а також  $Ba_r$  і  $a_ea$  попарно рівні і паралельні, бо трикутник  $Ba_{eu}a_e$  рівний трикутнику  $aa_{ru}a_r$ , а трикутник  $Ba_{ru}a_r$  — відповідно  $aa_{eu}a_e$ , оскільки  $a_{ru}a = a_{eu}$ ,  $a_{eu}a = a_{ru}$ . Отже, даний чотирикутник є паралелограмом, що й треба було довести.

На завершення зробимо деякі зауваження, які стосуються кінематики складного руху точки, які було розглянуто в §§ 16 і 17. Насамперед зазначимо, що теореми про абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки в разі складного руху розглянуто в припущенні, що переносний рух є поступальним. Додамо, що в загальному випадку відносного й переносного поступального руху траєкторії точки в складових рухах можуть бути довільними кривими. Тому відносне й переносне прискорення, що, як відомо, напрямлені в бік угнутості відповідних траєкторій складових рухів, мають за таких умов обидві прямокутні складові — дотичні  $\vec{a}_r^t$ ,  $\vec{a}_e^t$  та нормальні  $\vec{a}_r^n$ ,  $\vec{a}_e^n$ . Тому абсолютне прискорення  $\vec{a}$  на підставі векторної формули (5.2) запишеться у вигляді:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e = \vec{a}_r^t + \vec{a}_e^t + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^n. \quad (5.23)$$

На рис. 5.5 було зображено лише прискорення  $\vec{a}_r$ ,  $\vec{a}_e$  і  $\vec{a}$  (абсолютну траєкторію не показано). У векторній формулі (5.23) абсолютні значення нормальних складових прискорень можна знайти з формул

$$\vec{a}_r^n = \frac{v_r^2}{R_r}; \quad \vec{a}_e^n = \frac{v_e^2}{R_e}, \quad (5.24)$$

де  $R_r$  і  $R_e$  — радіуси кривизни відносної і переносної траєкторій відповідно.

Алгебраїчно дотичні складових прискорень виражаються похідними

$$a_e^t = \frac{dv_{et}}{dt} = \frac{ds_e}{dt} = \frac{d^2s_e}{dt^2} = \ddot{s}_e; \quad a_r^t = \frac{dv_{rt}}{dt} = \ddot{s}_r,$$

де  $v_{et} = \dot{s}_e$  і  $v_{rt} = \dot{s}_r$  — похідні по часу від відносної і переносної дугових координат (якщо відносний і переносний рухи задано натуральним способом).

**Застосування теорем про абсолютну швидкість і абсолютне прискорення для визначення кінематичних величин у разі складного руху точки для випадку переносного поступального руху.** Спочатку розв'яжемо задачу з двома призмами (див. рис. 5.1, *a*). За рівнянням відносного руху  $x' = x'(t)$  призми *B* і рівнянням поступального переносного руху  $x_A = x_O = x_O(t)$  призми *A* запишемо рівняння складного руху призми *B*:

$$\begin{aligned}x &= x_O + x' \cos \alpha; \\ y &= H - x' \sin \alpha,\end{aligned}$$

де  $H$  і  $\alpha$  — константи. Вигляд цих рівнянь свідчить про те, що абсолютний рух призми *B* також є поступальним, як і його складові.

На підставі рівняння складного руху можна визначити проекції швидкості й прискорення абсолютного руху призми *B* на осі нерухомої системи координат. Взявши першу похідну по часу від обох частин попередніх рівностей, дістанемо:

$$\begin{aligned}v_x &= \dot{x} = \dot{x}_O + \dot{x}' \cos \alpha; \\ v_y &= -\dot{x}' \sin \alpha.\end{aligned}$$

За проекціями  $v_x$  і  $v_y$  знайдемо модуль абсолютної швидкості:

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}_O^2 + 2\dot{x}_O \dot{x}' \cos \alpha + (\dot{x}')^2 \cos^2 \alpha + (\dot{x}')^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{\dot{x}_O^2 + (\dot{x}')^2 + 2\dot{x}_O \dot{x}' \cos \alpha}.\end{aligned}$$

Напрямок вектора абсолютної швидкості визначимо, скориставшись відомими з кінематики точки формулами напрямних косинусів:

$$\begin{aligned}\cos \angle(\vec{v}, x) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}_O + \dot{x}' \cos \alpha}{\sqrt{\dot{x}_O^2 + (\dot{x}')^2 + 2\dot{x}_O \dot{x}' \cos \alpha}}; \\ \cos \angle(\vec{v}, y) &= \frac{v_y}{v} = \frac{-\dot{x}' \sin \alpha}{\sqrt{\dot{x}_O^2 + (\dot{x}')^2 + 2\dot{x}_O \dot{x}' \cos \alpha}}.\end{aligned}$$

За відомими проекціями абсолютної швидкості призми *B* на нерухомі осі знайдемо аналогічні величини для абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = \ddot{x}_O + \ddot{x}' \cos \alpha; \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} = -\ddot{x}' \sin \alpha.\end{aligned}$$

Модуль абсолютного прискорення призми *B* має значення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}_O^2 + (\ddot{x}')^2 + 2\ddot{x}_O \ddot{x}' \cos \alpha}.$$



I, нарешті, вирази для напрямних косинусів вектора абсолютного прискорення призми  $B$  мають такий вигляд:

$$\cos \angle(\vec{a}, x) = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}_0 + \dot{x}' \cos \alpha}{\sqrt{\ddot{x}_0^2 + (\dot{x}')^2 + 2\ddot{x}_0 \dot{x}' \cos \alpha}};$$

$$\cos \angle(\vec{a}, y) = \frac{a_y}{a} = \frac{\dot{x}' \sin \alpha}{\sqrt{\ddot{x}_0^2 + (\dot{x}')^2 + 2\ddot{x}_0 \dot{x}' \cos \alpha}}.$$

Даний шлях розв'язання задачі на визначення абсолютної швидкості й абсолютного прискорення точки ґрунтується на використанні рівнянь складного руху з дальшим їх диференціюванням по часу без детального аналізу окремих складових рухів — відносного й переносного.

Інший спосіб розв'язання задачі, ґрунтується на детальному аналізі окремих складових рухів, коли абсолютні кінематичні характеристики визначаються на основі даних, добутих при розгляді відносного і переносного рухів точки.

Застосуємо останній спосіб розв'язання попередньої задачі. Спочатку знайдемо відносну швидкість і відносне прискорення призми  $B$ . Для цього візьмемо першу і другу похідні по часу від рівняння відносного руху:

$$v_r = \frac{dx'}{dt} = \dot{x}' = v_{rx'};$$

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{d^2 x'}{dt^2} = \ddot{x}' = a_{rx'}.$$

Тепер, використовуючи рівняння переносного руху призми  $B$ , визначимо переносні швидкість і прискорення:

$$v_e = \frac{dx_{0'}}{dt} = \dot{x}_{0'} = v_{ex};$$

$$a_e = \frac{dv_e}{dt} = \frac{d^2 x_{0'}}{dt^2} = \ddot{x}_{0'} = a_{ex}.$$

За цими величинами та на підставі теорем (5.1) і (5.2) та теореми косинусів знайдемо абсолютну швидкість і абсолютне прискорення призми  $B$ :

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos \alpha} = \sqrt{(\dot{x}')^2 + \dot{x}_{0'}^2 + 2\dot{x}_{0'} \dot{x}' \cos \alpha};$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_e^2 + 2a_r a_e \cos \alpha} = \sqrt{(\ddot{x}')^2 + \ddot{x}_{0'}^2 + 2\ddot{x}_{0'} \ddot{x}' \cos \alpha}.$$

На рис. 5.2 було зображено відносні, переносні та абсолютні швидкості й прискорення.

У другому прикладі (див. рис. 5.3) розглянемо визначення лише швидкостей, оскільки переносним рухом точки  $B$  є обертальний, а теорема про абсолютне прискорення доведена для випадку складного руху, коли переносна складова — поступальний рух. У попередній задачі заздалегідь напрям абсолютної швидкості призми  $B$  не був відомий. Особливість розглядуваної задачі полягає в тому, що напрям векторів відносної, переносної і абсолютної швидкостей наперед відомі. Ці величини будуть цілком визначені, якщо рівняння обертового переносного руху точки  $B$  відоме. Нехай кут  $\varphi$  між кривошипом  $OK$  і горизонтом задано як функцію часу. Тоді переносна швидкість точки  $B$  визначається за відомою формулою

$$v_e = \dot{\varphi} \cdot OB = \omega \cdot OB.$$

Відрізок  $OB$  обчислимо з прямокутного трикутника  $OO'B$ :

$$OB = \frac{l}{\cos \varphi}.$$

Підставивши  $OB$  в попередню формулу переносної швидкості, маємо

$$v_e = \dot{\varphi} \frac{l}{\cos \varphi}.$$

Абсолютна швидкість напрямлена по вертикалі вгору і є діагоналлю прямокутника, в якому довжина однієї його сторони відома — це значення переносної швидкості. Також відомий кут між швидкостями  $\vec{v}_e$  і  $\vec{v}$ . Отже, кутом  $\varphi$  і переносною швидкістю  $v_e$  цілком визначаються абсолютна і відносна швидкості точки  $B$  (даний чотирикутник побудовано на рис. 5.3). З трикутника  $Bv_e v$  знаходимо абсолютну і відносну швидкості:

$$v = \frac{v_e}{\cos \varphi} = \frac{l\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} = \frac{l\omega}{\cos^2 \varphi};$$

$$v_r = v \sin \varphi = \frac{l\omega \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

В останньому прикладі складного руху точки  $B$  (див. рис. 5.1, в, 5.4) її абсолютний рух відбувається по колу сталого радіуса  $OB$ . Цей рух можна наперед задати рівнянням обертового руху  $\varphi = \varphi(t)$  кривошипа  $OB$ , що містить розглядувану точку  $B$ , складний рух якої досліджується. В цьому разі рух — це відносний прямолінійний рух точки  $B$  у прорізі рамки по вертикалі, а переносний — рух точки  $B$  по горизонталі — визначаються її абсолютним рухом.

В іншому випадку заданням, наприклад переносного поступального руху рамки — переносного руху точки  $B$ , можна визначити відносний й абсолютний її рухи.

Дослідимо складний рух точки  $B$  у першому випадку. Якщо кут  $\varphi$  між кривошипом  $OB$  і горизонтальною прямою є заданою неперервною однозначною функцією часу  $\varphi = \varphi(t)$ , то абсолютна швидкість  $v$  точки  $B$ , як лінійна швидкість кінця кривошипа  $OB$ , дорівнює

$$v = \dot{\varphi} \cdot OB = \omega \cdot OB.$$

З трикутника швидкостей  $Bv, v$  знайдемо відносну швидкість:

$$v_r = \dot{\varphi} \cdot OB \cos \varphi = \omega \cdot OB \cos \varphi.$$

Горизонтальний катет у цьому трикутнику є переносною швидкістю

$$v_e = v \cos(90^\circ - \varphi) = \omega \cdot OB \sin \varphi.$$

Далі знайдемо прямокутні складові абсолютного прискорення точки  $B$  — тангенціальне  $a_r$  і доцентрове  $a_d$ :

$$a_r = \ddot{\varphi} \cdot OB = \varepsilon \cdot OB;$$

$$a_d = \dot{\varphi}^2 \cdot OB = \omega^2 \cdot OB = \omega^2 r,$$

тоді повне абсолютне прискорення точки  $B$ :

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_d^2} = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

За відносною швидкістю точки  $B$  диференціюванням по часу дістанемо відносне прискорення:

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = \ddot{\varphi} r \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 r \sin \varphi = r(\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi).$$

Переносне прискорення точки  $B$  можна визначити диференціюванням по часу її переносної швидкості:

$$a_e = \frac{dv_e}{dt} = \ddot{\varphi} r \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 r \cos \varphi = r(\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi).$$

Такі самі вирази для останніх двох прискорень — відносного і переносного — дістанемо, якщо вектори абсолютних складових прискорень — тангенціального і доцентрового спроекуємо на вертикальну і горизонтальну прямі відповідно:

$$a_r = a_r \cos \varphi - a_d \sin \varphi = r(\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi);$$

$$a_e = a_r \sin \varphi + a_d \cos \varphi = r(\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi).$$

Тепер задамо поступальний рух точки  $B$  рівнянням руху рамки (див. рис. 5.1,  $\theta$ )  $x_O = x_O(t)$  й дістанемо рівняння відносного руху точки  $B$ :

$$O'B = y' = r \sin \varphi = \sqrt{r^2 - x_O^2}.$$

Рівняння обертального руху кривошипа  $OB$  має вигляд:

$$\cos \varphi = \frac{x_{O'}}{r}.$$

Переносна швидкість точки  $B$

$$v_e = \dot{x} = \dot{x}_{O'}.$$

Щоб знайти відносну швидкість, треба взяти похідну по часу від рівняння відносного руху:

$$v_r = \frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{r^2 - x_{O'}^2}) = \frac{\dot{x}_{O'}}{\sqrt{r^2 - x_{O'}^2}}.$$

Визначимо абсолютну швидкість точки  $B$ :

$$v = r \dot{\varphi}; \quad -\dot{\varphi} \sin \varphi = \frac{\dot{x}_{O'}}{r}; \quad \dot{\varphi} = -\frac{\dot{x}_{O'}}{\sin \varphi}; \quad v = -\frac{\dot{x}_{O'}}{\sin \varphi}.$$

Знайдемо прискорення для складного руху точки  $B$ . Продиференціюємо по часу переносну швидкість  $v_e$ :

$$a_e = \frac{dv_e}{dt} = \ddot{x} = \ddot{x}_{O'}.$$

Взявши похідну по часу від відносної швидкості точки  $B$ , дістанемо

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = \ddot{y}' = \frac{\ddot{x}_{O'} \sqrt{r^2 - x_{O'}^2} + \frac{x_{O'} \dot{x}_{O'}^2}{\sqrt{r^2 - x_{O'}^2}}}{r^2 - x_{O'}^2} = \frac{\ddot{x}_{O'}(r^2 - x_{O'}^2) + x_{O'} \dot{x}_{O'}^2}{(r^2 - x_{O'}^2) \sqrt{r^2 - x_{O'}^2}}.$$

Доцентрова складова абсолютного прискорення

$$a_d = \frac{v^2}{r} = r \dot{\varphi}^2 = \frac{\dot{x}_{O'}^2}{r \sin^2 \varphi} = \frac{r \dot{x}_{O'}^2}{r^2 - x_{O'}^2},$$

оскільки

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{x_{O'}^2}{r^2}.$$

Тангенціальне прискорення в разі абсолютного руху точки  $B$  знайдемо за формулою  $a_t = \ddot{\varphi} r$ , де кутове прискорення можна дістати диференціюванням:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}_{O'}}{r \sin \varphi} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\dot{x}_{O'}^2 x_{O'} + \ddot{x}_{O'}(r^2 - x_{O'}^2)}{r^2 - x_{O'}^2}.$$

Тоді

$$a_{\tau} = \frac{\dot{x}_{O'}^2 x_{O'} + \ddot{x}_{O'}(r^2 - x_{O'}^2)}{r^2 - x_{O'}^2}.$$

Отже, вираз для повного абсолютного прискорення точки  $B$  має вигляд:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{\dot{x}_{O'}^4 r^2}{(r^2 - x_{O'}^2)^2} + \frac{[\dot{x}_{O'}^2 x_{O'} + \ddot{x}_{O'}(r^2 - x_{O'}^2)]^2}{(r^2 - x_{O'}^2)^2}} = \\ &= \frac{1}{r^2 - x_{O'}^2} \sqrt{\dot{x}_{O'}^4 r^2 + [\dot{x}_{O'}^2 x_{O'} + \ddot{x}_{O'}(r^2 - x_{O'}^2)]^2}. \end{aligned}$$

### § 18. Теорема про абсолютну швидкість і абсолютне прискорення матеріальної точки у разі переносного обертального руху навколо нерухомиї осі

---

Передусім зауважимо, що теорема про абсолютну швидкість у разі складного руху точки, яку було розглянуто в попередньому параграфі, для переносного поступального руху має загальний характер. У разі складних рухів з непоступальними переносними складовими лише дещо ускладнюється визначення переносних швидкостей. Тому формулювання цієї теореми лишається таким самим. Наперед зазначимо, що для переносних обертальних рухів навколо нерухомих, а також і миттєвих осей, переносні швидкості визначаються як добуток кутової швидкості переносного обертання на радіус кола, по якому рухається точка  $B'$  рухомого простору. З цією точкою в даний момент часу збігається точка, що перебуває в складному русі, тобто  $v_e = \omega R$ . Якщо, крім обертального руху, рухома система осей  $x'O'y'z'$  здійснює водночас і поступальний зі швидкістю  $\vec{v}_{O'}$ , де  $\vec{v}_{O'}$  — швидкість початку  $O'$  рухомих осей, то переносну швидкість точки можна визначити за формулою  $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

Теорема про абсолютне прискорення для складного руху точки з переносним обертальним характером суттєво відрізняється від наведеного в попередньому параграфі. У складових рухах точки з переносним обертальним рухом, окрім відомих відносного й переносного прискорень, з'являється третя складова абсолютного прискорення — так зване *прискорення Коріоліса*, або *поворотне прискорення*. Воно зумовлене для кожного моменту часу додатковою зміною напрямку відносної швидкості, яка трапляється внаслідок обертання рухомої системи осей, з одного боку, з іншого — додатковою зміною пере-

носної швидкості точки, яка спричиняється її відносним переміщенням в обертовому просторі (обертальній системі осей).

Подібних додаткових змін у швидкостях не спостерігається в разі поступальних переносних рухів. Це пояснюється тим, що в певний момент часу швидкості усіх точок поступально рухомого простору однакові і зміни їх у часі однакові для всіх його точок; у наступний момент часу швидкість поступального руху буде інша, та, знову ж таки, для всіх точок рухомого простору одна й та сама. У кожний даний момент часу зміна відносної і переносної швидкостей точки під час складного руху для випадку такого найпростішого переносного руху, яким є поступальний, відбувається лише завдяки тому, що складові рухи — відносний і переносний (поступальний) є змінними.

Якщо переносний поступальний і відносний рухи будуть рівномірними прямолінійними, то прискорення — відносного, переносного й абсолютного — немає. Інша картина спостерігається для рівномірного переносного обертального руху та відносного прямолінійного рівномірного. Тут відносне прискорення має також нульове значення, а переносне — лише доцентрову компоненту. Третя складова — прискорення Кориоліса — відмінна від нуля, якщо відносний рух точки не відбувається паралельно осі переносного обертання.

**Формула поворотного прискорення для деяких випадків складного руху точки.** Нехай маємо горизонтальну платформу, яка рівномірно обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . На платформі по прямій, яка перетинає вісь обертання, рухається точ-

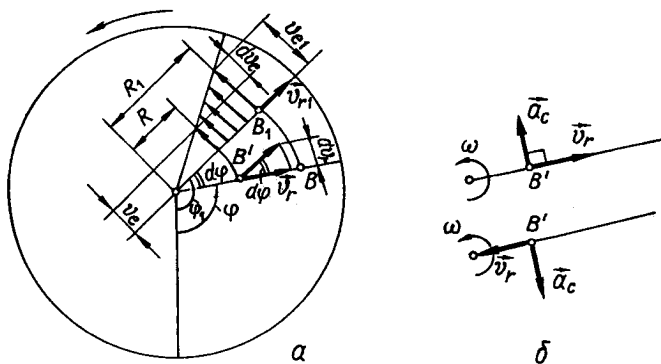


Рис. 5.8

ка  $B$  зі сталою за модулем відносною швидкістю  $v_r$ . Для даного випадку складного руху точки знайдемо формулу поворотного прискорення (прискорення Кориоліса). На рис. 5.8 стрілкою показано напрям обертання платформи (проти руху стрілки годинника). Точка  $B$  відносно платформи рухається від осі до її краю.

У цьому випадку переносне прискорення точки  $B$  дорівнює доцентровому  $a_e = \omega^2 R$ , оскільки  $a_{er} = \varepsilon R = \frac{d\omega}{dt} R = 0$ .

Дослідимо детальніше ті зміни, які відбуваються з відносною й переносною швидкостями точки  $B$  в разі її складного руху. На погляд спостерігача, незмінно зв'язаного з нерухомою системою координат, точка  $B$ , здійснюючи по платформі свій відносний прямолінійний рух зі сталою швидкістю  $v_r$  за нескінченно малий час  $dt$ , пройде такого самого порядку малості відрізок шляху  $dR$ , на якому переносна швидкість  $v_e$  точки  $B$  змінюється, як показано на рис. 5.8, *a*. Значення переносної швидкості точки на початку і кінці елементарного відрізка  $dR$  дорівнюють відповідно  $v_e = \omega R$ ,  $v_{e1} = \omega R_1$ .

Тоді за час  $dt$ , за який точка  $B$  під час відносного руху пройшла шлях  $dR = R_1 - R = v_r dt$ , відбулася зміна переносної швидкості:

$$dv_e = v_{e1} - v_e = \omega (R_1 - R) = \omega v_r dt.$$

Поділивши цю рівність на  $dt$ , дістанемо прискорення

$$\frac{dv_e}{dt} = \omega v_r,$$

яке визначається для моменту часу  $t$ , що відповідає початку елементарного відрізка  $dR$ , і має напрям, перпендикулярний до відносної швидкості  $\bar{v}_r$ . Це так звана перша частина поворотного прискорення, яке спричинене зміною переносної швидкості внаслідок відносного переміщення точки  $B$  по платформі.

За той самий час  $dt$ , за який точка  $B$ , перебуваючи у відносному русі, пододала шлях  $dR$ , платформа повернулася на нескінченно малий кут  $d\varphi$ . Порівняємо напрямки відносної швидкості  $\bar{v}_r$  точки  $B$  у двох її відносних положеннях, що визначаються радіусами  $R$  і  $R_1$ . В разі складного руху ці положення  $B$  і  $B'$  точки, яким відповідають моменти часу  $t$  і  $t_1$ , розташовані на спільній прямій відносно платформи (радіусі платформи). Однак дана пряма в моменти часу  $t$  і  $t_1$  відносно абсолютно нерухомого простору посідає різні положення внаслідок переносного обертання платформи — відповідно кути  $\varphi$  і  $\varphi_1$  (рис. 5.8).

Отже, відносні швидкості  $\bar{v}_r$  і  $\bar{v}_{r1}$  у моменти часу  $t$  і  $t_1$  утворюють між собою кут  $d\varphi = \varphi_1 - \varphi$  (вектор  $\bar{v}_{r1}$  з точки  $B'$  перенесено в положення  $B$ , що відповідає моменту часу  $t$ ). Відстань між кінцями векторів  $\bar{v}_r$  і  $\bar{v}_{r1}$ , прикладених у точці  $B$  радіуса платформи в положенні, яке визначається в момент часу  $t$  кутом  $\varphi$ , дорівнює зміні відносної швидкості  $dv_r$  за час  $dt$ . Зазначимо, що ця нескінченно мала зміна напрямку відносної швидкості  $dv_r$  спричинена лише внаслідок обертання платформи, тобто наявністю переносного обертального руху.

Можемо записати

$$dv_r = v_r d\varphi.$$

Поділимо на  $dt$ , дістанемо рівність

$$\frac{dv_r}{dt} = v_r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Та  $\frac{d\varphi}{dt}$  дорівнює кутовій швидкості платформи  $\omega$ . Тому остаточно маємо другу частину поворотного прискорення точки  $B$  у цьому випадку складного руху точки  $\frac{dv_r}{dt} = v_r \omega$ . Напрями й абсолютні значення похідних  $\frac{dv_r}{dt}$  і  $\frac{dv_e}{dt}$  збігаються. Сумою їх є поворотне прискорення:

$$\frac{dv_r}{dt} + \frac{dv_e}{dt} = 2\omega v_r = a_c.$$

Поворотне прискорення завжди напрямлене перпендикулярно до відносної швидкості точки, яка перебуває в складному русі. У даному випадку, коли точка рухається по радіусу платформи в напрямі від її осі, поворотне прискорення  $\vec{a}_c$  напрямлене в бік обертання платформи (індексом «с» позначено поворотне прискорення  $\vec{a}_c$ ). Якщо точка в попередньому разі рухається відносно платформи по радіусу до осі обертання, то прискорення Коріоліса  $\vec{a}_c$  має напрям, протилежний попередньому (рис. 5.8, б).

У нашому випадку складного руху точки абсолютне прискорення дорівнює (див. далі рис. 5.10, а)

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

або

$$a = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (2\omega v_r)^2},$$

оскільки кут між ними прямий. А в разі довільного складного руху, щоб визначити абсолютне прискорення точки, треба користуватись векторною рівністю

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

де вектор прискорення Коріоліса визначається за формулою

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r.$$

Якщо точка здійснює відносний рух не по радіусу платформи, а вздовж кола радіусом  $R$  з центром на осі обертання, то легко вивести формулу поворотного прискорення і для цього випадку складного руху точки (рис. 5.9).

Для відносного руху точки  $B$  розглянемо її два нескінченно близькі положення  $B'$  і  $B_1$ , яким відповідають моменти часу  $t$  і  $t_1$



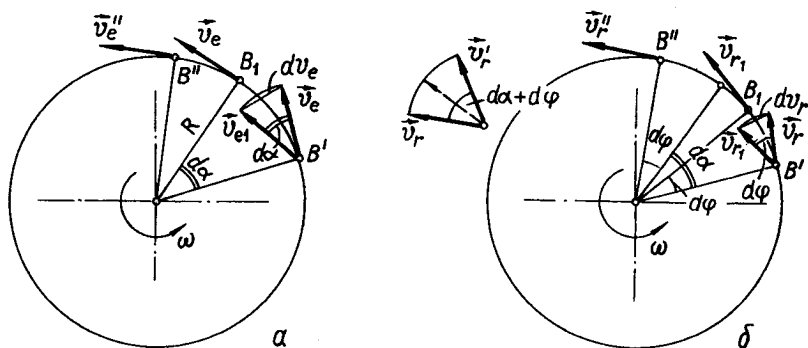


Рис. 5.9

відповідно. За нескінченно малий час  $dt = t_1 - t$  точка  $B$ , рухаючись між зазначеними положеннями, пройде нескінченно малу дугу кола  $ds$ . Оскільки відносний рух точки  $B$  рівномірний, то можна записати, що  $ds = v_r dt$ . З іншого боку,  $ds = R d\alpha$ . Прирівнявши їхні праві частини, дістанемо

$$d\alpha = \frac{v_r}{R} dt.$$

Зауважимо, що це співвідношення добуته незалежно від переносного руху платформи.

Тепер розглянемо даний момент часу  $t$ , в який точка  $B$  на платформі має положення  $B'$ . Нехай у цьому положенні  $v_e$  — переносна швидкість точки  $B$ . Візьмемо в цей самий момент часу точку диска  $B_1$ , в якій перебувала під час відносного руху точка  $B$  у момент часу  $t_1$ . Позначимо  $\vec{v}_{e1}$  лінійну швидкість цієї точки диска (це не переносна швидкість точки  $B$  у момент часу  $t_1 = t + dt$ ). Порівняємо напрям лінійної швидкості  $\vec{v}_{e1}$  точки  $B_1$  платформи в момент часу  $t$  з переносною швидкістю  $\vec{v}_e$  точки  $B$ , яка збігається в цей самий момент часу  $t$  з точкою  $B'$  на колі платформи.

Для цього перенесемо вектор  $\vec{v}_{e1}$  з точки  $B_1$  у точку  $B'$ , лінійна швидкість якої є переносною швидкістю  $\vec{v}_e$  точки  $B$  у момент  $t$ . Бачимо, що кут між цими векторами дорівнює нескінченно малому куту  $d\alpha$ . Відрізок, що сполучає кінці векторів  $\vec{v}_e$  і  $\vec{v}_{e1}$ , визначає зміну лінійної швидкості точок платформи, що відповідає малому куту  $d\alpha$ .

Отже, маємо співвідношення  $dv_e = v_e d\alpha$ , або  $\frac{dv_e}{d\alpha} = v_e$ .

У цій рівності  $\alpha$  — кутовий відносний параметр, що визначає положення точок кола платформи, для яких розглядаються лінійні швидкості в даний момент часу  $t$ . Отже, швидкість зміни лінійної швидкості точок кола платформи залежно від кута  $\alpha$  є величиною

сталою й дорівнює лінійній швидкості. Тепер, якщо параметром  $\alpha$  визначати положення точки  $B$  у разі відносного її руху по колу платформи зі сталою за модулем відносною швидкістю  $v_r$ , то має місце залежність, добута раніше:

$$d\alpha = \frac{v_r}{R} dt.$$

Зіставимо її з попередньою:

$$\frac{dv_e}{dt} = \frac{v_e}{R} v_r.$$

Але  $\frac{v_e}{R} = \omega$ , отже, дістанемо першу частину поворотного прискорення точки  $B$  у нашому випадку переносного руху:

$$\frac{dv_e}{dt} = \omega v_r.$$

Ця частина прискорення зумовлена зміною в даний момент часу переносної швидкості точки завдяки її відносному переміщенню по колу платформи зі сталою відносною швидкістю  $v_r$ .

Щоб знайти другу частину поворотного прискорення точки  $B$ , треба розглянути нескінченно малу зміну напрямку вектора відносної швидкості  $\vec{v}_r$  точки  $B$ , яка відбувається лише завдяки нескінченно малому повороту платформи на кут  $d\varphi$ . З рис. 5.9, б запишемо:

$$dv_r = v_r d\varphi.$$

Поділивши на нескінченно малий час  $dt$ , за який відбулася зміна кута повороту платформи на  $d\varphi$ , дістанемо формулу другої частини поворотного прискорення:

$$\frac{dv_r}{dt} = v_r \frac{d\varphi}{dt} = \omega v_r.$$

Додавши обидві частини, дістанемо повне поворотне прискорення точки  $B$  у разі складного руху, коли відносним є рівномірний рух по колу, а переносний рух — це рівномірне обертання навколо нерухомої осі.

Зауважимо, що при виведенні формули прискорення Коріоліса визначали лише зміну напрямку вектора переносної швидкості, зумовлену відносним переміщенням  $d\alpha$  ( $\cup B'B_1 = s_r$ ) у припущенні, що платформа, маючи в даний момент часу кутову швидкість  $\omega$ , не здійснює повороту  $d\varphi$  (рис. 5.9, а), з одного боку, а з іншого — визначали зміну напрямку вектора відносної швидкості, зумовлену лише переносним обертанням  $d\varphi$  ( $\cup B'B_1 = s_e$ ) у припущенні, що точка  $B$ , маючи відносну швидкість, з даного положення  $B'$  не здійснює відносного переміщення  $d\alpha$  (рис. 5.9, б).

Якщо врахувати повну зміну напрямів векторів відносної й переносної швидкостей точки  $B$  на її повному переміщенні  $d\psi = d\alpha + d\varphi$ , то дістанемо абсолютне прискорення точки  $B$  у разі її складного руху. Справді, повна зміна напрямів як відносної, так і переносної швидкостей точки  $B$  за нескінченно малий проміжок часу  $dt$

$$dv_r + dv_e = v_r d\psi + v_e d\psi.$$

Поділивши на  $dt$ , дістанемо

$$a = \frac{dv_r}{dt} + \frac{dv_e}{dt} = v_r \left( \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right) + v_e \left( \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right),$$

де  $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds_r}{dt} \frac{1}{R} \right) = \frac{v_r}{R}$ ;  $v_e \frac{d\alpha}{dt} = \omega R \frac{v_r}{R} = \omega v_r$ ;  $v_e \frac{d\varphi}{dt} = \omega^2 R$ .

Остаточно дістанемо абсолютне прискорення точки в цьому випадку складного руху:

$$a = \frac{v_r^2}{R} + \omega^2 R + 2\omega v_r.$$

Отже, маємо алгебраїчну суму, оскільки відносне нормальне прискорення  $a_m = \frac{v_r^2}{R}$ , переносне нормальне прискорення  $a_{en} = \omega^2 R$  і прискорення Кориоліса напрямлені по спільній прямій у бік осі обертання платформи (рис. 5.10, б).

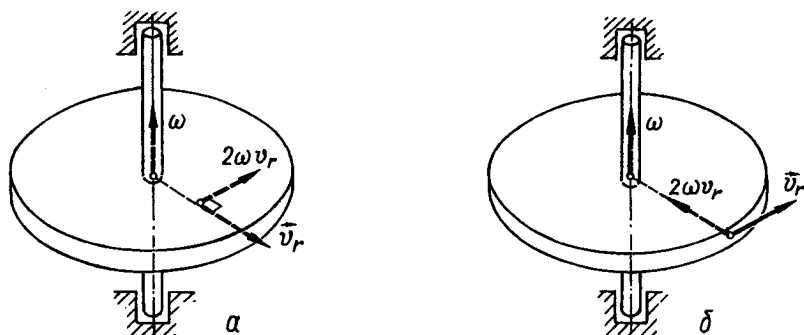


Рис. 5.10

При вивченні прискорення Кориоліса було розглянуто часткові випадки складного руху точки, коли вектор відносної швидкості лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання, і за модулем не змінюється, а також незмінною лишається і кутова швидкість переносного обертання. Зазначимо, що зміна модулів як відносних, так і

переносних швидкостей у разі складного руху точки призведе до появи дотичних відносного й переносного прискорень, а вигляд формули прискорення Кориоліса залишиться той самий; залежність від часу абсолютних значень величин  $\omega$  і  $v_r$  зумовить збільшення лише модуля цього прискорення.

В інших випадках, коли точка, складно рухаючися з переносним обертанням, має відносну швидкість, не перпендикулярну до осі переносного обертання, то в разі визначення прискорення Кориоліса треба враховувати лише перпендикулярну до осі її складову  $\vec{v}_r^\perp$ . Річ у тім, що при переносному обертальному русі паралельна осі обертання складова  $\vec{v}_r''$  відносної швидкості ніяких додаткових змін щодо напрямку не знає.

Якщо вектор відносної швидкості  $\vec{v}_r$  точки  $B$  під час її складного руху утворює з вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}$  кут  $\gamma$ , то, щоб вирішити питання про поворотне прискорення  $\vec{a}_c$ , у даному випадку слід спроектувати для даного моменту часу вектор відносної швидкості  $\vec{v}_r$  точки на площину  $\Pi$ , перпендикулярну осі переносного обертання. Далі отриману проекцію  $\vec{v}_r^\perp$  у зазначеній площині  $\Pi$  належить розкласти на дві прямокутні складові  $\vec{v}_m^\perp$  і  $\vec{v}_n^\perp$ , перша з яких лежить на прямій, яка перетинає вісь обертання, а друга — перпендикулярна до цієї прямої (рис. 5.11).

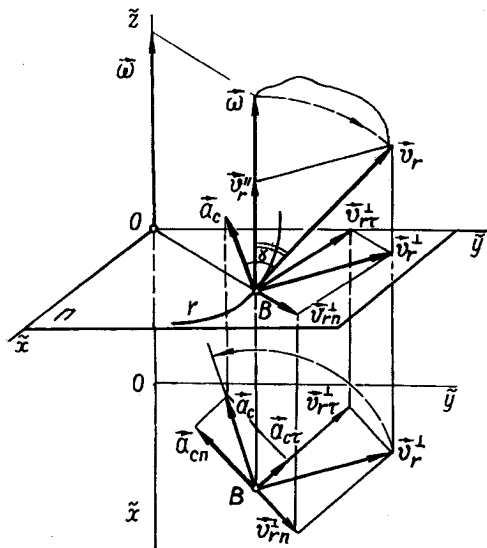


Рис. 5.11

На підставі складових  $\vec{v}_m^\perp$  і  $\vec{v}_n^\perp$  можна визначити відповідні поворотні прискорення:

$$a_{ct} = 2\omega \vec{v}_m^\perp; \quad a_{cn} = 2\omega \vec{v}_n^\perp.$$

Їхні напрями показано на рис. 5.11.

Легко зрозуміти, що векторна сума поворотних прискорень  $a_{ct}$  і  $a_{cn}$  є повним прискоренням Кориоліса  $\vec{a}_c = \vec{a}_{ct} + \vec{a}_{cn}$ . Обчислимо його модуль:

$$a_c = \sqrt{a_{ct}^2 + a_{cn}^2} = 2\omega \sqrt{(v_n^\perp)^2 + (v_m^\perp)^2} = 2\omega v_r^\perp.$$

Напря́м поворотного прискорення  $\bar{a}_c$  можна знайти, зівставивши трикутники, наприклад  $Ba_{ct}a_c$  і  $Bv_{\pi}^{\perp}v_r^{\perp}$ :

$$\frac{a_{ct}}{v_m^{\perp}} = 2\omega; \quad \frac{a_{cn}}{v_{\pi}^{\perp}} = 2\omega; \quad \frac{a_c}{v_r^{\perp}} = 2\omega; \quad \frac{a_{ct}}{a_{cn}} = \frac{v_m^{\perp}}{v_{\pi}^{\perp}}.$$

Отже, ці трикутники подібні. Крім того, якщо сторони  $Ba_{ct}$  і  $v_{\pi}^{\perp}v_r^{\perp}$ , а також  $a_{ct}a_c$  і  $Ba_{\pi}^{\perp}$  взаємно перпендикулярні, то і треті їхні сторони  $Ba_c$  і  $Bv_r^{\perp}$  утворюють між собою прями́й кут. Але останні є векторами прискорення Коріоліса і відносної швидкості ( $\bar{a}_c$ ,  $v_r^{\perp}$  відповідно).

У формулі  $a_c = 2\omega v_r^{\perp}$  множник  $v_r^{\perp}$  виразимо через кут  $\gamma$  і модуль вектора відносної швидкості  $v_r$  (рис. 5.11):  $v_r^{\perp} = v_r \sin \gamma$ . Дістанемо:

$$a_c = 2\omega v_r \sin \gamma.$$

Але цьому виразу відповідає також модуль векторного добутку двох векторів  $\bar{\omega}$  і  $\bar{v}_r$ . Отже, дістанемо векторну формулу прискорення Коріоліса:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r.$$

**Виведення теореми про абсолютне прискорення.** Нехай маємо деякий абсолютний рух точки  $B$ , розглядатимемо його як складний. Тоді, окрім абсолютно нерухомої системи координат  $xOyz$ , треба ввести рухому декартову систему координат  $x'O'y'z'$ . Вважатимемо, що з цією системою координат незмінно зв'язаний простір, який разом із нею перебуває в обертальному русі навколо нерухомої осі, наприклад осі  $O'z'$ , яка збігається з віссю  $Oz$  абсолютно нерухомої декартової системи координат  $xOyz$ , (рис. 5.12). Далі припустимо, що даний обертальний рух є змінним із кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$  і кутовим при-

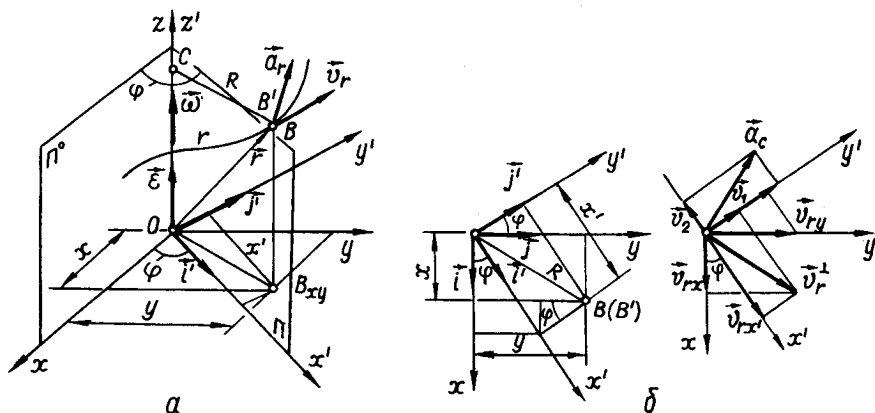


Рис. 5.12

скоренням  $\bar{\epsilon}$ . Якщо розглядати прискорений обертальний рух навколо вертикальної нерухомої осі  $Oz$ , то вектори кутової швидкості і кутового прискорення  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\epsilon}$ , які збігаються з цією віссю, мають однакові напрями при обертанні системи осей  $x'O'y'z'$  проти руху стрілки годинника, якщо дивитися вздовж осі обертання згори вниз,  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\epsilon}$  напрямлені знизу вгору.

Введемо одиничні вектори  $\bar{i}', \bar{j}'$  і  $\bar{k}'$  рухомих осей відповідно  $Ox'$ ,  $O'y'$  і  $Oz'$ . Тоді під час розглядуваного обертового руху одиничні вектори  $\bar{i}'$  і  $\bar{j}'$  разом із своїми осями  $Ox'$  і  $O'y'$  переміщуються в нерухомій горизонтальній площині системи  $xOyz$ , обертаючися навколо осі  $Oz$ . Кінці одиничних векторів  $\bar{i}'$  і  $\bar{j}'$  в площині  $xOy$  описують кола одиничних радіусів із центром на осі обертання. Лінійні швидкості точок рухомого простору, радіуси-вектори яких є одиничними векторами  $\bar{i}'$  і  $\bar{j}'$ , визначаються за формулами Ейлера (4.38):

$$\frac{d\bar{i}'}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}'; \quad \frac{d\bar{j}'}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}'; \quad \frac{d\bar{k}'}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}' = 0, \quad (5.25)$$

де  $\bar{\omega}$  — кутова швидкість у нашому випадку;  $\bar{k}' = \overrightarrow{\text{const}}$ .

Як і при вивченні обертового руху, введемо кут повороту  $\varphi$  — двогранний кут між нерухомою півплощиною  $xOz$  ( $\Pi^\circ$ ) і рухомою  $x'O'z'$  ( $\Pi$ ) (див. рис. 3.7, а, рис. 5.12); його залежність від часу є рівнянням  $\varphi = \varphi(t)$  обертового руху рухомої системи осей  $x'O'y'z'$  відносно нерухомої  $xOyz$ . Похідні  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_z$ ,  $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \epsilon_z$  визначають алгебраїчні значення кутової швидкості і кутового прискорення відповідно. Тоді можна записати, що  $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{k}'$  і  $\bar{\epsilon} = \ddot{\varphi}\bar{k}'$ .

Вивчаючи складний рух точки  $B$ , її рух відносно обертової системи координат  $x'O'y'z'$  (рухомого простору), задамо координатами в цій системі тих точок рухомого простору, через які проходить точка  $B$ :

$$x' = x'(t); \quad y' = y'(t); \quad z' = z'(t). \quad (5.26)$$

Ці залежності є рівняннями відносного руху точки  $B$ . Помноживши (5.26) на одиничні вектори  $\bar{i}'$ ,  $\bar{j}'$  і  $\bar{k}'$  та виконавши додавання, дістанемо вираз для радіуса-вектора точки  $B$ :

$$\bar{r} = x'(t)\bar{i}' + y'(t)\bar{j}' + z'(t)\bar{k}', \quad (5.27)$$

що є водночас і відносним, і абсолютним радіусом-вектором.

Однак його зміни в рухомій і нерухомій системах координат залежно від часу різні: в рухомій — його зміна визначається лише величинами  $x'$ ,  $y'$  і  $z'$ , оскільки  $\bar{i}'$ ,  $\bar{j}'$  і  $\bar{k}'$  у цій системі координат із часом не змінюють свого напрямку: відносно нерухомих осей змінюються з часом як величини відносних координат точки  $B$ , так і напрями ортів рухомих осей  $Ox'$  і  $O'y'$ .

Якщо рівняння відносного руху точки  $B$  (5.26) продиференціюємо по часу, то дістанемо проекції вектора відносної швидкості  $\bar{v}_r$  на рухомі осі:

$$v_{rx'} = \dot{x}' = \frac{dx'}{dt}; \quad v_{ry'} = \dot{y}' = \frac{dy'}{dt}; \quad v_{rz'} = \dot{z}' = \frac{dz'}{dt}. \quad (5.28)$$

Після множення на орти  $\bar{i}'$ ,  $\bar{j}'$  і  $\bar{k}'$  та додавання дістанемо розклад вектора відносної швидкості точки  $B$  на прямокутні складові по рухомих осях (одиничних ортах):

$$\bar{v}_r = v_{rx'}\bar{i}' + v_{ry'}\bar{j}' + v_{rz'}\bar{k}', \quad (5.29)$$

де  $\bar{v}_{rx'} = \dot{x}'\bar{i}'$ ,  $\bar{v}_{ry'} = \dot{y}'\bar{j}'$  і  $\bar{v}_{rz'} = \dot{z}'\bar{k}'$  є прямокутними складовими вектора  $\bar{v}_r$ , паралельними відповідним осям  $x'$ ,  $y'$  і  $z'$  (компоненти).

Візьмемо похідну по часу від рівностей (5.28) і виконаємо ті самі математичні дії, що й при визначенні відносної швидкості:

$$\bar{a}_r = \ddot{x}'\bar{i}' + \ddot{y}'\bar{j}' + \ddot{z}'\bar{k}'. \quad (5.30)$$

Маємо розклад вектора відносного прискорення точки  $B$  на прямокутні складові, паралельні відповідним осям.

У рівності (5.30)  $a_{rx'} = \ddot{x}'$ ,  $a_{ry'} = \ddot{y}'$  і  $a_{rz'} = \ddot{z}'$  — проекції відносного прискорення  $\bar{a}_r$  на рухомі осі;  $\bar{a}_{rx'} = \ddot{x}'\bar{i}'$ ,  $\bar{a}_{ry'} = \ddot{y}'\bar{j}'$  і  $\bar{a}_{rz'} = \ddot{z}'\bar{k}'$  — це вже згадувані вище прямокутні складові (компоненти).

Якщо точку рухомого простору, з якою в даний момент часу збігається розглядувана точка  $B$ , позначити  $B'$ , а її координати в нерухомій системі координат —  $x'_e$ ,  $y'_e$  і  $z'_e$ , то радіус-вектор цієї точки рухомого простору можна виразити такою векторною рівністю:

$$\bar{r} = x'_e\bar{i} + y'_e\bar{j} + z'_e\bar{k}, \quad (5.31)$$

де  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  і  $\bar{k}$  — одиничні вектори нерухомої системи.

Скалярні множники при цих одиничних векторах є рівняннями переносного руху точки  $B$ :

$$x'_e = x'_e(t); \quad y'_e = y'_e(t); \quad z'_e = z'_e(t). \quad (5.32)$$

Радіус-вектор  $\bar{r}$ , виражений формулою (5.31), називається переносним для точки  $B$ . Зауважимо, що в ній величини  $x'_e$ ,  $y'_e$  і  $z'_e$  є абсолютними координатами не точки  $B$ , яка здійснює складний рух, а іншої точки —  $B'$ , що належить рухомому простору.

Установимо залежність абсолютних координат (5.32) точки  $B'$  від її відносних координат і кута повороту тіла  $\varphi$ , скориставшись рис. 5.12,  $b$  і не звертаючи уваги на відносний рух точки  $B$ :

$$\begin{aligned} x'_e &= x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi; \\ y'_e &= x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi; \\ z'_e &= z''. \end{aligned} \quad (5.33)$$

У цих співвідношеннях координати точки  $B$  нерухомого простору позначено двома штрихами, на відміну від позначень одним штрихом відносних координат точки  $B$ . Звернемо увагу на те, що координати  $x''$ ,  $y''$  і  $z''$  від часу не залежать, бо вони розглядаються відносно рухомої системи координат  $x'O'y'z'$ .

Переносну швидкість  $\vec{v}_e$  і прямокутні складові переносного прискорення  $\vec{a}_e$  — тангенціальне  $\vec{a}_t$  і доцентрове  $\vec{a}_d$  — точки  $B$  під час її складного руху знайдемо, скориставшись рівняннями (5.33) з урахуванням тієї обставини, що для даного моменту часу  $t'$  значення координат  $x''$ ,  $y''$  і  $z''$  беруться з рівнянь (5.26) з підстановкою в них значення часу  $t'$ , тобто  $x'' = x'(t')$ ,  $y'' = y'(t')$ ,  $z'' = z'(t')$ .

Визначимо проекції переносної швидкості  $\vec{v}_e$  на нерухомі осі:

$$v_{ex} = \dot{x}'_e = x''(-\omega \sin \varphi) - y''\omega \cos \varphi = -\omega(x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi) = -\omega y'_e;$$

$$v_{ey} = \dot{y}'_e = x''\omega \cos \varphi + y''\omega \sin \varphi = \omega(x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi) = -\omega x'_e,$$

модуль її

$$v_e = \sqrt{v_{ex}^2 + v_{ey}^2} = \sqrt{\omega^2((x'_e)^2 + (y'_e)^2)} = \omega R.$$

Диференціюванням цих проекцій дістанемо проекції переносного прискорення:

$$a_{ex} = \ddot{x}'_e = -\omega \dot{y}'_e - \omega \dot{y}'_e = -\varepsilon y'_e - \omega^2 x'_e = a_{e\text{нх}} + a_{e\text{тх}};$$

$$a_{ey} = \ddot{y}'_e = \omega \dot{x}'_e + \omega \dot{x}'_e = \varepsilon x'_e + (-\omega^2 y'_e) = a_{e\text{ну}} + a_{e\text{ту}};$$

$$a_{ez} \equiv 0,$$

де

$$a_{e\text{нх}} = -\varepsilon y'_e, \quad a_{e\text{ну}} = \varepsilon x'_e; \quad a_{e\text{тх}} = -\omega^2 x'_e, \quad a_{e\text{ту}} = -\omega^2 y'_e.$$

Модуль дотичного переносного прискорення точки  $B$

$$a_{e\text{т}} = \sqrt{a_{e\text{тх}}^2 + a_{e\text{ту}}^2} = \sqrt{\omega^4(x'_e)^2 + \omega^4(y'_e)^2} = \omega^2 R. \quad (5.34)$$

За його проекціями дістанемо модуль нормального прискорення точки  $B$ :

$$a_{e\text{н}} = \sqrt{a_{e\text{нх}}^2 + a_{e\text{ну}}^2} = \sqrt{\varepsilon^2(y'_e)^2 + \varepsilon^2(x'_e)^2} = \varepsilon R. \quad (5.35)$$

Повне переносне прискорення має модуль

$$a_e = \sqrt{a_{e\text{т}}^2 + a_{e\text{н}}^2} = \sqrt{a_{e\text{т}}^2 + a_{e\text{н}}^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (5.36)$$

Тепер визначимо прискорення Кориоліса  $\vec{a}_c$ . Для цього запишемо рівняння абсолютного руху точки  $B$  у разі її складного руху. Їх можна дістати з рівнянь (5.33), якщо абсолютні координати  $x'_e$ ,  $y'_e$  і  $z'_e$  точки  $B'$  замінити на абсолютні координати іншої точки — точки  $B$ , складний рух якої розглядається і яка в даний момент часу збігається з попередньою точкою  $B'$  рухомого простору. Крім того, в цих самих



співвідношеннях відносні величини  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$ , які визначають положення точки  $B'$  у рухомій системі координат  $x'O'y'z'$ , треба замінити на координати (5.26). Отже,

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi; \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi; \\z &= z'.\end{aligned}\tag{5.37}$$

У даних рівняннях усі величини залежать від часу, і якщо виконати в них диференціювання в разі сталого кута повороту  $\varphi$ , то, очевидно, дістанемо остаточно проекції відносної швидкості  $\vec{v}$ , точки  $B$  на нерухомі осі координат  $xOyz$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_{rx} = \dot{x}' \cos \varphi - \dot{y}' \sin \varphi; \\ \dot{y} &= v_{ry} = \dot{x}' \sin \varphi + \dot{y}' \cos \varphi; \\ \dot{z} &= \dot{z}',\end{aligned}$$

де  $\dot{x}' = v_{rx}'$ , і  $\dot{y}' = v_{ry}'$  є проекціями вектора відносної швидкості  $\vec{v}$ , на рухомі осі  $x'O'y'z'$ . Тепер на підставі залежностей (5.37) для даного моменту часу  $t'$  визначимо зміни абсолютних проекцій вектора відносної швидкості точки  $B$ , зумовлені виключно зміною кута повороту рухомої системи осей:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dv_{rx}}{dt}\right)_{\substack{\dot{x}'=\text{const} \\ \dot{y}'=\text{const}}} &= -\omega \dot{x}' \sin \varphi - \omega \dot{y}' \cos \varphi = -\omega(v_{rx}' \sin \varphi + v_{ry}' \cos \varphi); \\ \left(\frac{dv_{ry}}{dt}\right)_{\substack{\dot{x}'=\text{const} \\ \dot{y}'=\text{const}}} &= \omega \dot{x}' \cos \varphi - \omega \dot{y}' \sin \varphi = \omega(v_{rx}' \cos \varphi - v_{ry}' \sin \varphi).\end{aligned}$$

Скориставшись рис. 5.12, б, значення похідних  $\frac{dv_{rx}}{dt}$ ,  $\frac{dv_{ry}}{dt}$  подамо у вигляді

$$\left(\frac{dv_{rx}}{dt}\right)_{\substack{\dot{x}'=\text{const} \\ \dot{y}'=\text{const}}} = -\omega v_{ry}', \quad \left(\frac{dv_{ry}}{dt}\right)_{\substack{\dot{x}'=\text{const} \\ \dot{y}'=\text{const}}} = \omega v_{rx}'.\tag{5.38}$$

Ці похідні є абсолютними проекціями першої частини вектора поворотного прискорення (прискорення Кориоліса). Ще лишилося розглянути зміни абсолютних проекцій вектора переносної швидкості точки  $B$  у даний момент часу  $t'$ , які спричинюються виключно її відносним переміщенням, тобто змінами відносних проекцій вектора відносної швидкості точки  $B$ . Для знаходження похідних

$$\left(\frac{dv_{ex}}{dt}\right)_{\substack{\varphi=\text{const} \\ \dot{\varphi}=\text{const}}}, \quad \left(\frac{dv_{ey}}{dt}\right)_{\substack{\varphi=\text{const} \\ \dot{\varphi}=\text{const}}}$$

візьмемо раніше розглянуті вирази абсолют-

них проекцій вектора переносної швидкості точки  $B$  і продиферен-

ціємомо їх по часу  $t$  з урахуванням умови  $x'' = x'(t)$ ,  $y'' = y'(t)$ ,  $z'' = z'(t)$  при сталих  $\varphi$  і  $\dot{\varphi}$ :

$$\left(\frac{dv_{ex}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-\omega\dot{x}' \sin \varphi - \omega\dot{y}' \cos \varphi) = -\omega(\dot{x}' \sin \varphi + \dot{y}' \cos \varphi);$$

$$\left(\frac{dv_{ey}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\omega\dot{x}' \cos \varphi - \omega\dot{y}' \sin \varphi) = \omega(\dot{x}' \cos \varphi - \dot{y}' \sin \varphi)$$

або, скориставшись рис. 5.12, б,

$$\left(\frac{dv_{ex}}{dt}\right)_{\substack{\varphi=\text{const} \\ \dot{\varphi}=\text{const}}} = -\omega(v_{rx} \sin \varphi + v_{ry} \cos \varphi) = -\omega v_{ry}; \quad \left(\frac{dv_{ey}}{dt}\right)_{\substack{\varphi=\text{const} \\ \dot{\varphi}=\text{const}}} = \omega v_{rx}. \quad (5.39)$$

Дані похідні є проекціями другої частини поворотного прискорення  $\vec{a}_c$  на нерухомі осі. На підставі (5.38) і (5.39) дістанемо

$$a_{cx} = \frac{dv_{rx}}{dt} + \frac{dv_{ex}}{dt} = -2\omega v_{ry};$$

$$a_{cy} = \frac{dv_{ry}}{dt} + \frac{dv_{ey}}{dt} = 2\omega v_{rx}.$$
(5.40)

Запишемо векторну рівність (рис. 5.12, б)

$$\vec{v}_r^\perp = \vec{v}_{rx} + \vec{v}_{ry} = \vec{v}_{rx'} + \vec{v}_{ry'},$$

в якій  $\vec{v}_r^\perp$  — це складова вектора відносної швидкості точки  $B$ , перпендикулярної до осі переносного обертання; друга складова його,  $\vec{v}_r^\parallel$ , паралельна осі обертання. Позначимо  $\gamma = \angle(\vec{\omega}, \vec{v}_r)$  — кут між вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}$  і вектором відносної швидкості  $\vec{v}_r$ , тоді

$$v_r^\perp = v_r \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{v}_r) = v_r \sin \gamma; \quad (5.41)$$

також справедлива векторна рівність

$$\vec{v}_r = \vec{v}_r^\parallel + \vec{v}_r^\perp.$$

На підставі (5.40) дістанемо

$$\vec{a}_c = a_{cx} \vec{i} + a_{cy} \vec{j} = -2\omega v_{ry} \vec{i} + 2\omega v_{rx} \vec{j} = 2\omega(v_{rx} \vec{j} - v_{ry} \vec{i}). \quad (5.42)$$

З'ясуємо зміст векторної суми в дужках. Згідно з цією формулою, щоб дістати напрям прискорення Кориоліса  $\vec{a}_c$ , треба векторний прямокутник зі сторонами  $\vec{v}_{rx}$ ,  $\vec{v}_{ry}$  і діагоналлю  $\vec{v}_r^\perp$  або прямокутник зі сторонами  $\vec{v}_{rx'}$ ,  $\vec{v}_{ry'}$  і тією самою діагоналлю  $\vec{v}_r^\perp$  повернути в площині, перпендикулярній до осі переносного обертання і яка проходить через точку  $B$ , на кут  $90^\circ$  у напрямі переносного обертання (рис. 5.12, б). Новий напрям діагоналі зазначених прямокутників — проекції вектора відносної швидкості  $\vec{v}_r$  точки  $B$  на перпендикуляр-

ну до осі площину і є напрямом прискорення Кориоліса  $\bar{a}_c$ , його модуль дорівнює подвоєному добутку кутової швидкості  $\omega$  на проекцію відносної швидкості точки на перпендикулярну до осі переносного обертання площину

$$a_c = 2\omega\bar{v}_r^\perp = 2\omega\bar{v}_r \sin \gamma. \quad (5.43)$$

Це — модуль подвоєного векторного добутку двох векторів  $\bar{\omega}$  і  $\bar{v}_r$ . Отже, маємо векторну формулу прискорення Кориоліса:

$$\bar{a} = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r. \quad (5.44)$$

Маючи всі складові прискорення точки в разі складного її руху:  $\bar{a}_r$ ,  $\bar{a}_e$  і  $\bar{a}_c$ , можна на підставі вже розглянутих часткових векторних теорем про прискорення записати **математичний вираз теореми про абсолютне прискорення**, яка стосується не лише нашого випадку складного руху, а й складних рухів з будь-яким переносним обертальним рухом:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \quad (5.45)$$

**Абсолютне прискорення точки в разі складного руху дорівнює векторній сумі прискорень відносного, переносного і кориолісового прискорень.**

Для доведення того, що складові прискорення  $\bar{a}_r$ ,  $\bar{a}_e$  і  $\bar{a}_c$  додаються за правилами векторного додавання (5.45), треба двічі продиференціювати по часу рівняння складного руху точки (5.37) і знайти таким чином вирази абсолютних проекцій вектора абсолютного прискорення  $\bar{a}$  точки на нерухомі осі декартових координат  $xOyz$  через проекції складових прискорень  $\bar{a}_r$ ,  $\bar{a}_e$  і  $\bar{a}_c$  на ці самі нерухомі осі.

На підставі правила, за яким визначаються проекції абсолютного прискорення точки на нерухомі осі через проекції на ці самі осі відносного, переносного і кориолісового прискорення, та застосування теореми Піфагора дістанемо висновок, що задача на визначення абсолютного прискорення за його складовими зводиться до побудови прямокутного паралелепіпеда прискорень, а це відображає правило додавання векторних величин. На підставі (5.37) дістанемо такі вирази проекцій на нерухомі осі:

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x}' \cos \varphi - \dot{x}'\dot{\varphi} \sin \varphi - \ddot{y}' \sin \varphi - \dot{y}'\dot{\varphi} \cos \varphi - \ddot{\varphi}(x' \sin \varphi + \\ &+ y' \cos \varphi) - \dot{\varphi}(\dot{x}' \sin \varphi + x'\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{y}' \cos \varphi - y'\dot{\varphi} \sin \varphi) = \\ &= \ddot{x}' \cos \varphi - \ddot{y}' \sin \varphi - \ddot{\varphi}(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) - \dot{\varphi}^2(x' \cos \varphi - \\ &- y' \sin \varphi) - 2\dot{\varphi}\dot{x}' \sin \varphi - 2\dot{\varphi}\dot{y}' \cos \varphi = \ddot{x}' \cos \varphi - \ddot{y}' \sin \varphi - \ddot{\varphi}y - \\ &- \dot{\varphi}^2 x - 2\dot{\varphi}v_{rx} = a_{rx} + a_{ex} + a_{cx}; \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} a_y &= \ddot{x}' \sin \varphi + \ddot{y}' \cos \varphi - \dot{\varphi}^2(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + \ddot{\varphi}(x' \cos \varphi - \\ &- y' \sin \varphi) + 2\dot{\varphi}\dot{x}' \cos \varphi - 2\dot{\varphi}\dot{y}' \sin \varphi = \ddot{x}' \sin \varphi + \ddot{y}' \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 y + \\ &+ \ddot{\varphi}x + 2\dot{\varphi}v_{ry} = a_{ry} + a_{ey} + a_{cy}; \end{aligned}$$

$$a_z = \ddot{z}' = a_{rz}. \quad (5.47)$$

Проекції складових прискорень мають вигляд

$$\begin{aligned} a_{rx} &= \ddot{x}' \cos \varphi - \dot{y}' \sin \varphi; & a_{ry} &= \ddot{x}' \sin \varphi + \dot{y}' \cos \varphi; & a_{rz} &= \ddot{z}'; \\ a_{ex} &= -\ddot{\varphi}y - \dot{\varphi}^2 x; & a_{ey} &= -\dot{\varphi}^2 y + \ddot{\varphi}x; & a_{ez} &\equiv 0; \\ a_{cx} &= -2\dot{\varphi}v_{rx}; & a_{cy} &= 2\dot{\varphi}v_{ry}; & a_{cz} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Цей результат сформулюємо як окрему *теорему про абсолютне прискорення*:

*проекції абсолютного прискорення точки в разі складного руху на нерухомі осі декартових координат дорівнює сумі проекцій відносного, переносного і коріолісового прискорень на ці самі нерухомі осі декартових координат.*

Помножимо рівності, що виражають дану теорему, на відповідні одиничні орти  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{k}$  нерухомих осей:

$$\begin{aligned} a_x \vec{i} &= a_{rx} \vec{i} + a_{ex} \vec{i} + a_{cx} \vec{i}; \\ a_y \vec{j} &= a_{ry} \vec{j} + a_{ey} \vec{j} + a_{cy} \vec{j}; \\ a_z \vec{k} &= a_{rz} \vec{k}. \end{aligned}$$

Після їх додавання, дістанемо

$$a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_{rx} \vec{i} + a_{ry} \vec{j} + a_{rz} \vec{k} + a_{ex} \vec{i} + a_{ey} \vec{j} + a_{cx} \vec{i} + a_{cy} \vec{j}.$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}; & \vec{a}_r &= a_{rx} \vec{i} + a_{ry} \vec{j} + a_{rz} \vec{k}; \\ \vec{a}_e &= a_{ex} \vec{i} + a_{ey} \vec{j}; & \vec{a}_c &= a_{cx} \vec{i} + a_{cy} \vec{j}; \\ \vec{a} &= \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \end{aligned}$$

Отже, наслідком скалярних рівностей є векторна формула (5.45).

Часто теорему (5.45) називають теоремою Коріоліса. Її можна вивести також виключно векторним способом, скориставшись формулами Ейлера (5.25).

Для того щоб векторно довести дану теорему, скористаємося формулою кінематики точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

в якій

$$\vec{r} = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}',$$

де  $x'$ ,  $y'$  і  $z'$  — відносні координати точки  $B$ , складний рух якої розглядається, а  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$  і  $\vec{k}'$  — одиничні орти осей системи  $x'O'y'z'$ .

Продиференціюємо по часу  $t$  у векторній рівності  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  радіус-вектор  $\vec{r}$ :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}.$$

Скористаємося формулами (5.25):

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_r + x'\vec{\omega} \times \vec{i}' + y'\vec{\omega} \times \vec{j}' + z'\vec{\omega} \times \vec{k}' = \vec{v}_r + \\ &+ \vec{\omega} \times (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \end{aligned}$$

Це — теорема про абсолютну швидкість точки  $B$  у разі складного руху для переносного обертального руху. Модуль вектора переносної швидкості в даній формулі  $v_e = \omega R$ .

Знов продиференціюємо векторну рівність  $\vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$ :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{\omega} \times \vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}') + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \\ &+ \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') = \vec{x}''\vec{i}' + \vec{y}''\vec{j}' + \vec{z}''\vec{k}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \dot{x}'\vec{\omega} \times \vec{i}' + \\ &+ \dot{y}'\vec{\omega} \times \vec{j}' + \dot{z}'\vec{\omega} \times \vec{k}' + \vec{\omega} \times (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}') + x''\vec{\omega} \times \vec{i}' + \\ &+ y''\vec{\omega} \times \vec{j}' + z''\vec{\omega} \times \vec{k}') = \vec{a}_r + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}, \end{aligned}$$

де  $\vec{a}_e = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_e = \vec{a}_{er} + \vec{a}_{en}$  є відоме переносне прискорення, а  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$  є прискорення Кориоліса. Отже, дістанемо відому теорему Кориоліса

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

Як приклад застосування теореми (5.45) визначимо абсолютне прискорення повзуна  $B$  (див. рис. 5.3) за відомим законом обертального руху кривошипа  $OK$ . Маємо переносне дотичне прискорення повзуна  $B$

$$a_e = \ddot{\varphi} \cdot OB = \frac{l\ddot{\varphi}}{\cos \varphi}.$$

Це прискорення перпендикулярне до кривошипа; його напрям визначається знаком похідної  $\ddot{\varphi} = \varepsilon$ . Знайдемо нормальне переносне прискорення точки  $B$ :

$$a_{en} = \dot{\varphi}^2 \cdot OB = \dot{\varphi}^2 \frac{l}{\cos \varphi}.$$

Диференціюючи по часу рівняння відносного руху

$$x' = \frac{l}{\cos \varphi},$$

дістанемо відносне прискорення точки  $B$ :

$$v_r = \dot{x}' = \frac{dx'}{dt} = l \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\cos \varphi} \right) = \frac{l \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \dot{\varphi} = l \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \dot{\varphi}.$$

Відносна швидкість повзуна  $B$  під час обертання кривошипа  $OK$  проти руху стрілки годинника напрямлена по осі цього кривошипа до його центра  $O$ . Отже, прискорення Коріоліса повзуна  $B$  має напрям, якого набуває відносна швидкість, якщо її вектор повернути в напрямі обертання кривошипа  $OK$  на кут  $90^\circ$ . За формулою (5.43) знаходимо модуль прискорення Коріоліса:

$$a_c = 2\dot{\varphi}v_r \sin 90^\circ = 2\dot{\varphi}^2 \frac{l \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi}.$$

Знаходимо останню складову абсолютного прискорення повзуна  $B$  — відносне прискорення  $\bar{a}_r$ :

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{dv_r}{dt} = \ddot{x}' = l \frac{d}{dt} \left( \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \dot{\varphi} \right) = l \frac{\cos^3 \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\cos^4 \varphi} \dot{\varphi}^2 + \frac{l \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \ddot{\varphi} = \\ &= l \left( \frac{1}{\cos \varphi} - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos \varphi} \right) \dot{\varphi}^2 + l \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \ddot{\varphi} = \frac{l}{\cos \varphi} \left[ (1 - 2 \operatorname{tg}^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \ddot{\varphi} \right]. \end{aligned}$$

На підставі всіх складових  $\bar{a}_r$ ,  $\bar{a}_{er}$ ,  $\bar{a}_{en}$  і  $\bar{a}_c$  визначимо абсолютне прискорення  $\bar{a}$  повзуна  $B$ . Для цього спроектуємо відносне прискорення  $\bar{a}_r$ , переносні його компоненти  $\bar{a}_{er}$  і  $\bar{a}_{en}$ , а також прискорення Коріоліса  $\bar{a}_c$  — на вертикальну вісь  $Oy$ , вздовж якої напрямлене абсолютне прискорення  $\bar{a}$ . Алгебраїчна сума цих проєкцій дає шукане прискорення:

$$\begin{aligned} a &= a_y = a_{ry} + a_{ery} + a_{eny} + a_{cy} = a_r \sin \varphi + a_{er} \cos \varphi - \\ &- a_{en} \sin \varphi - a_c \cos \varphi = \cos \varphi (a_{er} - a_c) + \sin \varphi (a_r - a_{en}) = \\ &= \cos \varphi l \left( \frac{\ddot{\varphi}}{\cos \varphi} - 2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \dot{\varphi}^2 \right) + \operatorname{tg} \varphi \left[ \dot{\varphi}^2 (1 - 2 \operatorname{tg}^2 \varphi) + \operatorname{tg} \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \right] l = \\ &= l \left[ \ddot{\varphi} - 2 \operatorname{tg} \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \operatorname{tg} \varphi \left( (1 - 2 \operatorname{tg}^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi - \dot{\varphi}^2 \right) \right]; \\ a &= l \left[ \ddot{\varphi} - 2 \dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi (\operatorname{tg} \varphi (\ddot{\varphi} - 2 \dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \varphi)) \right] = l (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) (\ddot{\varphi} - 2 \dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \varphi). \end{aligned}$$

Пропонується самостійно визначити абсолютне прискорення повзуна при часткових значеннях кута  $\varphi$ :  $0^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $90^\circ$ .

**Прискорення Коріоліса та його визначення. Правило Жуковського.** Звернемо увагу на векторну формулу прискорення Коріоліса (поворотного прискорення)  $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$ . Згідно з цією векторною рівністю прискорення Коріоліса дорівнює векторному добутку векторів кутової і відносної швидкостей. Воно перпендикулярне до площини, в якій лежать зазначені вектори. У який бік по даному перпендикуляру напрямлене коріолісове прискорення визначається властивістю векторного добутку двох векторів.

Відповідно до цієї властивості шуканий вектор, що є векторним добутком двох інших векторів, напрямлений у такий бік по перпендикуляру до площини перемножуваних векторів, що коли дивитися навпроти його напрямку на вказану площину, то найкоротший поворот у цій площині першого вектора у векторному добутку до суміщення з його другим має здійснюватися проти руху стрілки годинника (див. рис. 5.11).

Наведене вище правило щодо напрямку прискорення Коріоліса можна подати в іншому формулюванні, яке ґрунтується на виведеній раніше векторній формулі (5.42):

$$\vec{a}_c = 2\omega(\vec{v}_{rx}\vec{j} - \vec{v}_{ry}\vec{i}).$$

*Прискорення Коріоліса має такий напрям, якого набуває проекція вектора відносної швидкості точки на перпендикулярну до осі переносного обертання площину, після того, як дану проекцію повернути в цій площині на кут  $90^\circ$  у напрямі переносного обертання (див. рис. 5.11).*

На підставі формули (5.43)  $a_c = 2\omega v_r^\perp$ .

Абсолютне значення прискорення Коріоліса дорівнює подвоєній кутовій швидкості переносного обертання, помноженій на модуль проекції відносної швидкості точки на перпендикулярну до осі переносного обертання площину.

Зауважимо, що правило, за яким установлюється напрям коріолісового прискорення, було вперше сформульовано М.Є. Жуковським і ввійшло в літературу як *правило Жуковського*.

ВЕКТОРНИЙ СПОСІБ ДОСЛІДЖЕННЯ  
ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ  
АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

Повернемося знову до кінематики абсолютно твердого тіла, вивчення якої було розпочато раніше з найпростіших видів руху — поступального й обертального. Добуті теоретичні результати, що стосуються цих часткових випадків руху, а також положення кінематики вже розглянутого складного руху точки можна покласти в основу висвітлення кінематики складнішого руху тіла — так званого плоскопаралельного руху. Цей вид руху дуже поширений в техніці. Внаслідок роботи багатьох плоских механізмів машин окремі їхні ланки здійснюють плоскопаралельний рух, як, наприклад, шатун  $AB$  кривошипно-повзункового механізму (див. рис. 3.1,  $\epsilon$ ) у разі обертання кривошипа  $OA$ . Характерним для цього випадку руху шатуна  $AB$  є те, що завдяки різним за формою траєкторіям його кінцевих точок (точка  $A$  описує коло радіусом  $OA$ , а точка  $B$  горизонтальну пряму, які лежать в одній площині) вісь шатуна не залишається паралельною самі собі, як трапляється в разі поступальних рухів тіла: вона не лише поступально переміщується в просторі, а й повертається відносно нього.

Можна кінцеві точки стержня  $AB$  примусити рухатись по взаємно перпендикулярних прямих  $Oy$  і  $Ox$  відповідно, а його середину шарнірно прикріпити до кривошипа  $OC$ , який приводиться в обертальний рух. Дістанемо механізм еліпсографа (рис. 6.1,  $a$ ), в якому його стержень  $AB$  здійснює плоскопаралельний рух під час обертання кривошипа  $OC$ . Проміжні точки між  $A$  і  $C$ , а також точки між  $C$  і  $B$  описують еліпс. Тому даний механізм і називають еліпсографом.

На рис. 6.1,  $b$  наведено механізм, в якому кінцева точка  $B$  стержня  $AB$  через шарнір з'єднана з центром колеса, яке може котитись без проковзування по горизонтальній прямій  $Ox$ . Під час обертання кривошипа  $OA$  стержень і колесо здійснюють плоскопаралельний рух, тобто будь-яка пряма, незмінно зв'язана з цими ланками, переміщуючись з одного положення в інше відносно нерухомих осей  $xOy$ , змінює також і свій напрям. Крім того, вкажемо на іншу, найголов-



нішу ознаку плоскопаралельного руху, а саме: точки ланок рухаються паралельно деякій нерухомій площині, наприклад декартовій площині  $xOy$ , яка називається основною при дослідженні даного виду руху тіла. Також зазначимо, що траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок тіла в разі його плоскопаралельного руху паралельні основній площині.

На рис. 6.1, *в* зображено механізм, який складається з нерухомого колеса 2, кривошипа  $OA$  з горизонтальною віссю обертання  $O$  і колеса 1 з горизонтальною віссю  $A$  на кінці кривошипа  $OA$ . Колесо 1 торкається нерухомого колеса 2. Під час обертання кривошипа  $OA$  колесо 1 котиться без проковзування (зчеплення коліс 1 і 2 здійснюється за допомогою зубців) по ободу нерухомого колеса 2. У даному плоскому механізмі колесо 1 перебуває в плоскопаралельному русі, який характеризується двома ознаками: всі точки колеса 1 рухаються паралельно нерухомій вертикальній площині, а будь-яка його пряма, наприклад радіус, що сполучає центр  $A$  з точкою обода  $B$ , переміщується поступально і водночас обертається.

На підставі розглянутих прикладів дістанемо означення плоскопаралельного руху абсолютно твердого тіла:

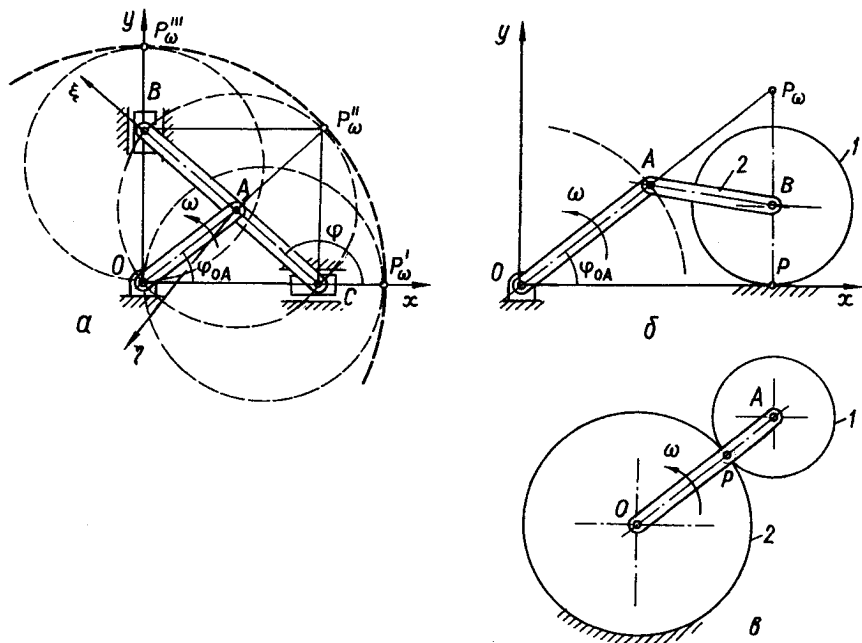


Рис. 6.1

плоскопаралельним рухом називається такий рух абсолютно твердого тіла, коли всі його точки (частинки) рухаються паралельно деякій нерухомій площині (основній площині).

### § 19. Плоскопаралельний рух абсолютно твердого тіла як рух плоскої фігури у власній площині

Нехай маємо такий плоскопаралельний рух, коли точки тіла рухаються паралельно площині  $xOy$  абсолютно нерухомої декартової системи координат  $xOyz$  (рис. 6.2). Досліджуючи даний плоскопаралельний рух, немає потреби розглядати тіло як тривимірну область, обмежену поверхнею тіла, а як двовимірну область у вигляді плоскої фігури.

Доведемо *допоміжну теорему про плоскопаралельний рух*:

*плоскопаралельний рух тіла, який здійснюється паралельно даній нерухомій площині, цілком визначається рухом у цій площині плоскої фігури, що є проекцією тіла на цю саму площину.*

Для доведення цього твердження окремо розглянемо ті точки тіла, які розташовані на прямих, перпендикулярних до нерухомої площини  $xOy$ , паралельно якій відбувається плоскопаралельний рух тіла. Позначимо одну з точок на кожній з цих перпендикулярних до площини  $xOy$  прямих  $A_1, B_1, C_1, \dots$ , а їхні проекції, а також решту точок, розташованих на спільних перпендикулярних прямих, на нерухому площину  $xOy$  —  $A, B, C, \dots$  відповідно (рис. 6.2).

Згідно з означенням плоскопаралельного руху абсолютно твердого тіла всі ті точки тіла, які розташовані на спільній, перпендикулярній до нерухомої площини  $xOy$  прямій, мають лише перпендикулярні до

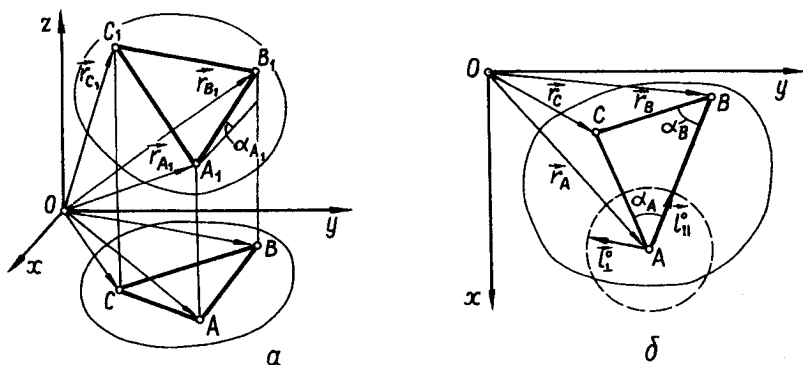


Рис. 6.2

цієї прямої переміщення. А тому розглядувані прямі  $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$ , незмінно зв'язані з тілом, в разі його плоскопаралельного руху здійснюють рух поступальний. У цьому разі кінематичний стан точок тіла, розташованих на прямих  $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$ , такий самий, як і їхніх проекцій  $A, B, C, \dots$  на нерухому площину. Отже, якщо спроекувати тіло на нерухому площину  $xOy$ , то дістанемо плоску фігуру, кінематичний стан точок якої визначає кінематичний стан тіла в цілому.

У разі плоскопаралельного руху тіла плоска фігура, що є проекцією тіла на нерухому площину  $xOy$ , виконує в цій площині рух, який також називається плоскопаралельним. Нерухому площину  $xOy$ , в якій плоска фігура перебуває в стані плоскопаралельного руху, називають власною площиною плоскої фігури. Отже, доведено, що плоскопаралельний рух плоскої фігури у власній площині цілком відображає плоскопаралельний рух тіла, яке замінюється даною плоскою фігурою.

Якщо під точками  $A_1, B_1, C_1, \dots$  розуміти будь-які точки прямих  $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$ , то кінематичний зв'язок між точками  $A, B, C, \dots$  плоскої фігури і відповідними точками  $A_1, B_1, C_1, \dots$  тіла можна подати такими векторними рівняннями:

$$\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_A + \overrightarrow{AA_1}; \quad \vec{r}_{B_1} = \vec{r}_B + \overrightarrow{BB_1}; \quad \vec{r}_{C_1} = \vec{r}_C + \overrightarrow{CC_1}, \dots, \quad (6.1)$$

де  $\overrightarrow{AA_1} = \text{const}_1, \overrightarrow{BB_1} = \text{const}_2, \overrightarrow{CC_1} = \text{const}_3, \dots$ , а  $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t), \vec{r}_{B_1} = \vec{r}_{B_1}(t), \vec{r}_{C_1} = \vec{r}_{C_1}(t); \vec{r}_A = \vec{r}_A(t), \vec{r}_B = \vec{r}_B(t), \vec{r}_C = \vec{r}_C(t)$  є функціями часу.

Перейдемо до **основної теореми про плоскопаралельний рух**:

*плоскопаралельний рух абсолютно твердого тіла цілком визначається рухом у нерухомій площині проекції на цю площину, паралельно якій здійснюється плоскопаралельний рух будь-якого прямолінійного відрізка, незмінно зв'язаного з тілом і неперпендикулярного до нерухомої площини.*

Покажемо, що рух будь-якого прямолінійного відрізка, який сполучає дві точки плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху у власній площині, водночас визначає рух плоскої фігури, а отже, й плоскопаралельний рух тіла, яке прийнято за плоску фігуру.

Задамо рух відрізка  $AB$  плоскої фігури (рис. 6.2) векторними рівняннями

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t); \quad \vec{r}_B = \vec{r}_B(t), \quad (6.2)$$

або

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t); \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(t), \quad (6.3)$$

де  $\overrightarrow{AB}(t)$  є векторною функцією скалярного аргумента  $t$ , абсолютне значення якої  $|\overrightarrow{AB}| = AB$  з часом не змінюється, оскільки плоска фігура є проекцією абсолютно твердого тіла на нерухому площину.

Якщо рівняння (6.2) або (6.3) відомі, то положення відрізка  $AB$  у кожний момент часу можна знайти. Нехай у момент часу  $t$  положення відрізка  $AB$  плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху відоме (рис. 6.2, б). Тоді, щоб в цей самий момент часу  $t$  визначити положення будь-якої іншої точки плоскої фігури, наприклад точки  $C$ , треба через точки  $A$  і  $B$  відрізка  $AB$  під заданими кутами до нього  $\alpha_A$  і  $\alpha_B$  провести прямі до їхнього перетину; точка перетину і буде положенням шуканої точки  $C$  плоскої фігури в даний момент часу  $t$ . Отже, за відомим положенням відрізка  $AB$  плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху у власній площині можна визначити положення усіх точок плоскої фігури.

Та положення точки  $C$  визначає положення всіх тих точок тіла, які розташовані на перпендикулярній до нерухомої площини  $xOy$  прямої  $CC_1$  (6.1):

$$\vec{r}_{C_1} = \vec{r}_C + \overrightarrow{CC_1}.$$

Також з рис. 6.1, б запишемо векторні рівняння

$$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \overrightarrow{AC}, \quad \vec{r}_C = \vec{r}_B + \overrightarrow{BC}.$$

Оскільки положення точки  $C$  визначається положеннями точок  $A$  і  $B$ , то можна виразити вектори  $\overrightarrow{AC}$  і  $\overrightarrow{BC}$  через одиничні вектори  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  і  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$ , які пов'язані з напрямом вектора  $\overrightarrow{AB}$ . Одиничні вектори  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  і  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$  виводяться з умови

$$\vec{l}_{\parallel}^{\circ} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \quad \angle(\vec{l}_{\parallel}^{\circ}, \vec{l}_{\perp}^{\circ}) = \frac{\pi}{2}.$$

Звідси видно, що вектор  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  завжди збігається за напрямом з вектором  $\overrightarrow{AB}$ . Другий одиничний вектор  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$  напрямлений перпендикулярно до вектора  $\overrightarrow{AB}$  у такий бік, в який напрямлений перший одиничний вектор  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$ , коли його повернути в нерухомій площині  $xOy$  навколо точки  $A$  проти руху стрілки годинника на  $90^{\circ}$ .

З рис. 6.2 виведемо векторні рівняння, що відображають кінематичний зв'язок між плоскопаралельним рухом плоскої фігури і відповідним йому плоскопаралельним рухом абсолютно твердого тіла:

$$\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_A + \overrightarrow{AA_1}; \quad \vec{r}_{B_1} = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}; \quad \vec{r}_{C_1} = \vec{r}_A + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1},$$

де

$$\overrightarrow{AC} = \psi_{\parallel}(AB, \alpha_A, \alpha_B) \vec{l}_{\parallel}^{\circ} + \psi_{\perp}(AB, \alpha_A, \alpha_B) \vec{l}_{\perp}^{\circ};$$

$$\overrightarrow{BC} = \theta_{\parallel}(AB, \alpha_A, \alpha_B) \vec{l}_{\parallel}^{\circ} + \theta_{\perp}(AB, \alpha_A, \alpha_B) \vec{l}_{\perp}^{\circ}.$$

Скалярні множники при  $\vec{l}_{\parallel}$  і  $\vec{l}_{\perp}$  виводяться з трикутника  $ABC$  на підставі теореми синусів:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin \alpha_B}{\sin \alpha_A}; \quad \frac{AC}{AB} = \frac{\sin \alpha_A}{\sin(\alpha_A + \alpha_B)};$$

$$\psi_{\perp} = \frac{\sin \alpha_B \sin \alpha_A}{\sin(\alpha_A + \alpha_B)} AB; \quad \psi_{\parallel} = \frac{\sin \alpha_B \cos \alpha_A}{\sin(\alpha_A + \alpha_B)} AB;$$

$$\theta_{\perp} = \frac{AB \sin \alpha_A \sin \alpha_B}{\sin(\alpha_A + \alpha_B)}; \quad \theta_{\parallel} = -\frac{AB \sin \alpha_A \cos \alpha_B}{\sin(\alpha_A + \alpha_B)}.$$

Також з рис. 6.1,  $a$  можна записати формулу, яка пов'язує довжини відрізків  $AB$  і  $A_1B_1$ :

$$A_1B_1 = AB \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_A}.$$

Отже, наведені викладки дають змогу зробити висновок, що прямолінійний відрізок, який сполучає будь-які точки плоскої фігури під час її плоскопаралельного руху у власній площині, цілком визначає положення і рух плоскої фігури, а отже, й плоскопаралельний рух відповідного їй абсолютно твердого тіла. Теорему доведено.

Рівняння (6.2) або (6.3) є векторними рівняннями плоскопаралельного руху плоскої фігури у власній площині, а векторні рівняння

$$\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_A + \vec{AA}_1; \quad \vec{r}_{B_1} = \vec{r}_A + \vec{AB} + \vec{BB}_1, \quad (6.4)$$

або

$$\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_A + \vec{AA}_1; \quad \vec{A_1B_1} = \vec{AB} + \vec{BB}_1 - \vec{AA}_1 \quad (6.5)$$

відповідають плоскопаралельному руху абсолютно твердого тіла. Далі розглянемо лише рівняння (6.2) або (6.3). Точку  $A$  плоскої фігури, рівняння руху якої відоме,

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t) \quad (6.6)$$

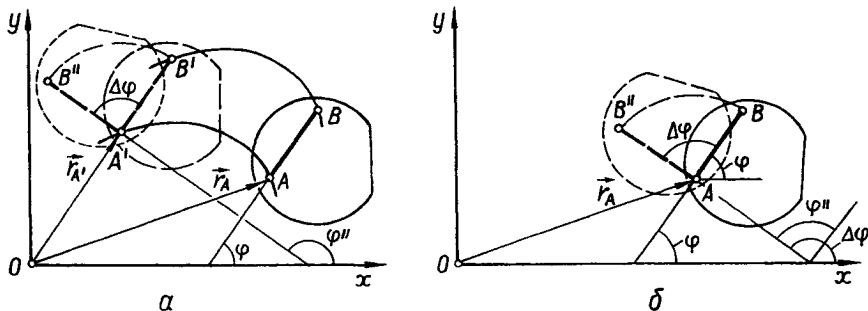


Рис. 6.3

назвемо полюсом. Якщо векторна функція  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(t) = \overrightarrow{\text{const}}$ , то рівняння (6.6) визначають поступальний рух плоскої фігури (рис. 6.3, а). В разі сталого  $\vec{r}_A$  функція  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(t)$  визначає обертальний рух плоскої фігури у власній площині (рис. 6.3, б).

Одночасна зміна векторних функцій  $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$  і  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(t)$  спричиняє плоскопаралельний рух плоскої фігури (рис. 6.3, а), коли вектор  $\overrightarrow{AB}$  зі сталим модулем  $|\overrightarrow{AB}|$  змінює свій напрям унаслідок зміни кута між незмінно зв'язаною з плоскою фігурою прямою, з якою збігається розглядуваний вектор  $\overrightarrow{AB}$ , і нерухомою віссю  $Ox$  або  $Oy$ . Цей кут на рисунку позначено  $\varphi$  і називається *кутом повороту плоскої фігури*, а отже, й відповідного їй абсолютно твердого тіла, плоскопаралельний рух якого замінено рухом даної плоскої фігури.

Зазначимо, що кут повороту плоскої фігури є абсолютною величиною, яка визначається відносно нерухомої системи координат  $xOy$ . Отже, обидва рівняння (6.3) встановлюються відносно абсолютного простору (нерухомих осей  $xOy$ ). Також звернемо увагу на те, що вершина кута повороту  $\varphi$  плоскої фігури не є сталою точкою, на відміну від вершини кута повороту тіла навколо нерухомої осі; одна сторона цього кута повороту  $\varphi$  — це нерухома пряма  $Ox$ , а друга — рухома. Отже, плоскопаралельний рух тіла характеризується тим, що в цьому разі немає сталої осі обертання. За вісь обертання можна взяти будь-яку пряму тіла, перпендикулярну до площини, паралельно якій здійснюється плоскопаралельний рух. Можна умовно вважати, що вершина кута повороту  $\varphi$  збігається з полюсом  $A$  плоскої фігури. Тому плоскопаралельний рух плоскої фігури у власній площині характеризується рухом полюса  $A$  (довільно вибраної точки) і обертальним рухом плоскої фігури навколо полюса. Рух полюса описується векторним рівнянням (6.6), а обертальний рух навколо полюса визначається другим рівнянням (6.3), тобто векторною функцією

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(t), \quad (6.7)$$

яка виражається через скалярну величину — кут повороту плоскої фігури  $\varphi$ .

Зазначимо, що кут повороту  $\varphi$  відкладається від уявної прямої, що паралельна осі  $Ox$  і проходить через полюс  $A$  плоскої фігури. Даний кут має додатне значення, якщо він відкладається від зазначеної прямої проти руху стрілки годинника, в протилежному разі його значення від'ємне.

На підставі рівнянь руху полюса (перше рівняння (6.3) або (6.6)) та обертання плоскої фігури навколо полюса (друге рівняння (6.6))

можна дослідити рух будь-якої точки плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху. Так, для точки  $B$  плоскої фігури маємо векторну рівність

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A(t) + \overrightarrow{AB}(t), \quad (6.8)$$

яка є рівнянням руху окремої точки плоскої фігури у векторній формі. Щодо цієї векторної формули (при розгляді властивостей векторної функції  $\overrightarrow{AB}(t)$  вважається, що полюс  $A$  мислено зупинено. В такому разі кінець  $B$  вектора  $AB$ , який обертається відповідно до закону  $\varphi = \varphi(t)$ , описує коло радіусом  $AB$  з центром  $A$ .

## § 20. Теорема про швидкість і прискорення точок тіла \_\_\_\_\_

**Теорема про швидкість.** Швидкість будь-якої точки плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху дорівнює векторній сумі двох швидкостей — швидкості полюса і обертальної швидкості даної точки під час обертання плоскої фігури навколо полюса.

Математично ця теорема про паралелограм швидкостей записується у вигляді

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}. \quad (6.9)$$

□ Щоб визначити швидкість будь-якої точки плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху, треба продиференціювати по часу рівняння (6.5), записавши його попередньо у вигляді

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A(t) + AB\vec{l}_{\parallel}^{\circ}.$$

Маємо

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + AB \frac{d\vec{l}_{\parallel}^{\circ}}{dt},$$

або

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + AB \frac{d\vec{l}_{\parallel}^{\circ}}{dt}. \quad (6.10)$$

У цій рівності  $\vec{v}_A$  — це швидкість полюса  $A$ , яку мають у даний момент часу всі точки плоскої фігури. Швидкості полюса  $\vec{v}_A$  відповідає поступальний рух плоскої фігури. Ця швидкість для всіх точок плоскої фігури в даний момент часу  $t$  є першою складовою повних

абсолютних швидкостей цих точок, які для різних точок плоскої фігури різні, оскільки на поступальний рух зі швидкістю  $\vec{v}_A$  накладається обертальний у припущенні, що плоска фігура обертається у власній площині навколо полюса  $A$ .

Другий векторний доданок в останній рівності є тією додатковою швидкістю, яка зумовлена обертальним рухом плоскої фігури у власній площині навколо полюса  $A$  і для різних точок має різні модуль і напрям. Позначимо  $\vec{v}_{AB}$  другу складову швидкості точки  $B$ , тоді

$$\vec{v}_{AB} = AB \frac{d\vec{l}_{\parallel}^{\circ}}{dt}. \quad (6.11)$$

Похідна по часу від одиничного вектора  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  характеризує обертальний рух плоскої фігури в цілому і визначає напрям другої складової швидкості точки  $B$ , спричиненої обертанням відрізка  $AB$  навколо точки  $A$ .

Розкриємо зміст похідної  $\frac{d\vec{l}_{\parallel}^{\circ}}{dt}$ . Її можна розглядати як відношення нескінченно малого приросту  $d\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  одиничного вектора  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  до відповідного нескінченно малого приросту відтинку часу  $dt$ . Вектор  $d\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  напрямлений по перпендикуляру до відрізка  $AB$  у бік другого одиничного вектора  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$  (рис. 6.4, див. рис. 6.2, б), якщо обертальний рух плоскої фігури відбувається проти руху стрілки годинника. Проекція приросту  $d\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  на напрям  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$  дорівнює  $\phi \vec{l}_{\perp}^{\circ}$ . Отже,  $d\vec{l}_{\parallel}^{\circ} = d\phi \vec{l}_{\perp}^{\circ}$ , тоді

$$\frac{d\vec{l}_{\parallel}^{\circ}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \vec{l}_{\perp}^{\circ} = \dot{\phi} \vec{l}_{\perp}^{\circ}.$$

Похідну  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$  назвемо кутовою швидкістю плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху. Підставимо її у векторну рівність (6.1), маємо

$$\vec{v}_{AB} = AB \dot{\phi} \vec{l}_{\perp}^{\circ} = v_{AB} \vec{l}_{\perp}^{\circ} \cdot \vec{l}_{\perp}^{\circ}. \quad (6.12)$$

Добуток  $AB \dot{\phi}$  є алгебраїчною величиною і називається проекцією обертальної швидкості точки  $B$  під час обертання плоскої фігури навколо полюса на вектор  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$ . Векторну величину  $\vec{v}_{AB} = v_{AB \vec{l}_{\perp}^{\circ}} \vec{l}_{\perp}^{\circ}$  назвемо

обертальною швидкістю точки  $B$  у разі плоскопаралельного руху плоскої фігури при її обертанні навколо полюса  $A$ . Підставивши (6.11) в (6.10), дістанемо векторну рівність (6.9). Теорему про швидкість точок плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху доведено. ■



На рис. 6.4 наведено геометричну інтерпретацію векторної формули (6.9), яка виражає доведену теорему. При точці  $B$  на швидкості полюса  $\vec{v}_A$  і обертальній швидкості  $\vec{v}_{AB}$  побудовано паралелограм швидкостей, діагональ якого є абсолютною швидкістю точки  $B$ . Зазначимо, що обертальна швидкість  $\vec{v}_{AB}$  точки  $B$  лежить на перпендикулярній до відрізка  $AB$  прямій, яка проходить через точку  $B$ , напрямлена в бік кутової швидкості  $\phi$  плоскої фігури і за модулем дорівнює добутку абсолютного значення кутової швидкості плоскої фігури на довжину відрізка, що сполучає дану точку  $B$  з полюсом  $A$ , тобто

$$v_{AB} = \omega AB. \quad (6.13)$$

Це формула модуля обертальної швидкості точки плоскої фігури.

Отже, для певного моменту часу в кожній точці плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху можна побудувати паралелограм швидкостей, в якого одна сторона — це швидкість  $\vec{v}_A$  полюса  $A$ , а друга сторона відповідає обертальним швидкостям  $\vec{v}_{AB}, \vec{v}_{AC}, \dots$  відповідних точок  $B, C, \dots$  при обертанні плоскої фігури навколо одного й того самого полюса  $A$ . Для вибраного полюса  $A$  його швидкість  $\vec{v}_A$  є абсолютною, в інших точках плоскої фігури абсолютна швидкість зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на поступальній швидкості, швидкості полюса  $A$  і обертальній швидкості. Однакову для всіх точок плоскої фігури швидкість полюса і обертальні їхні швидкості, різні для різних точок, які визначаються відносно одного й того ж самого полюса, називають відповідно переносною і відносними швидкостями точок при розгляді плоскопаралельного руху як складового.

Застосуємо теорему про швидкість (6.9) для визначення швидкості точки  $C$  плоскої фігури (рис. 6.4, а, див. рис. 6.2, б). За полюс візь-

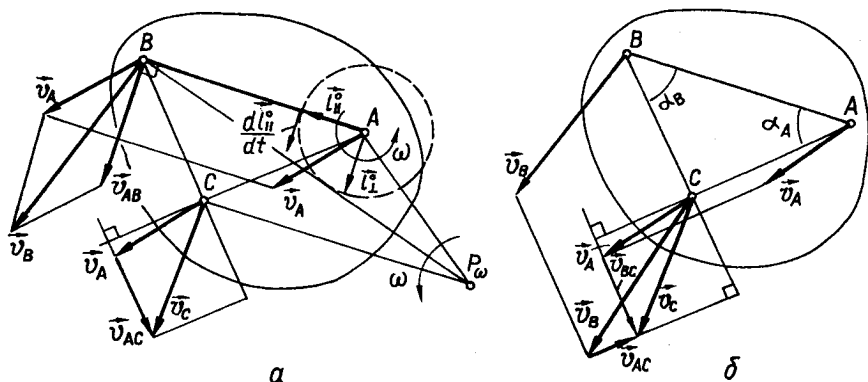


Рис. 6.4

мемо саме точку  $A$ . Тоді для точки  $C$  теорема про швидкість має вигляд

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC}. \quad (6.14)$$

Цю векторну рівність геометрично можна трактувати не як паралелограм швидкостей, а як трикутник швидкостей, в якому першою стороною є швидкість полюса  $\vec{v}_A$ , а другою — оберտальна швидкість  $\vec{v}_{AC}$  при обертанні плоскої фігури навколо полюса  $A$ . Третя сторона має бути шуканою абсолютною швидкістю  $\vec{v}_C$ , яка замикає трикутник швидкостей. У трикутнику швидкостей, який розглядається як формальна геометрична фігура, перша сторона  $\vec{v}_A$  і третя — абсолютна швидкість  $\vec{v}_C$  прикладені в тій точці, швидкість якої знаходиться, а друга сторона є обертальною швидкістю, яка мислено перенесена паралельно з точки, в якій вона справді прикладена.

Отже, щоб побудувати трикутник швидкостей і за його допомогою визначити абсолютну швидкість даної точки плоскої фігури, належить:

- з полюса в дану точку, швидкість якої треба знайти, паралельно (без зміни модуля й напрямку) перенести швидкість полюса;
- з кінця перенесеного в дану точку вектора швидкості полюса, перпендикулярного до відрізка, що сполучає полюс з даною точкою, відкласти в напрямі обертання плоскої фігури обертальну (відносну) швидкість, користуючись формулою (6.13);
- сполучити початок швидкості полюса з кінцем обертальної швидкості, дістати абсолютну (шукану) швидкість даної точки, яка має напрям від точки плоскої фігури в бік кінця вектора обертальної швидкості.

На рис. 6.4, *a* при точці  $C$  побудовано трикутник швидкостей. За полюс взято ту саму точку  $A$ , що й при побудованні паралелограма швидкостей при точці  $B$ . А на рис. 4.6, *b* знайдено швидкість тієї самої точки  $C$  на підставі розгляду двох різних полюсів — точок  $A$  і  $B$ , швидкості яких уже відомі. Взавши за полюс точку  $A$ , маємо рівняння (6.14). Якщо за полюс править друга точка плоскої фігури — точка  $B$ , то на підставі теореми про швидкість ту саму швидкість можна виразити векторною рівністю

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{BC}. \quad (6.15)$$

Розглядаючи і цю рівність як трикутник швидкостей, маємо при точці  $C$  (рис. 6.4, *b*) два трикутники швидкостей зі спільною замикальною стороною  $\vec{v}_C$ , оскільки розглядаються два полюси. Зазначимо, що в цьому разі не треба визначати модулі обертальних швидкостей  $\vec{v}_{AC} = \omega AC$  і  $\vec{v}_{BC} = \omega BC$ . Щоб дістати кінцеву точку вектора  $\vec{v}_C$  абсолютної швидкості точки  $C$ , досить знайти точку перетину перпендикулярів до відрізків  $AC$  і  $BC$ , проведених через кінці векторів  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  абсолютних швидкостей точок  $A$  і  $B$ , перенесених у точку  $C$ , яка і буде шуканим кінцем вектора швидкості  $\vec{v}_C$  точки  $C$ .

**Теорема про прискорення.** Прискорення будь-якої точки плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху дорівнює векторній сумі двох видів прискорень — прискорення полюса й обертального прискорення даної точки в разі обертання плоскої фігури навколо полюса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}. \quad (6.16)$$

Якщо обертальне прискорення точки представити у вигляді векторної суми двох прямокутних складових — дотичного обертального прискорення  $\vec{a}_{AB}^{\tau}$  і нормального обертального прискорення  $\vec{a}_{AB}^n$ , то векторну формулу (6.16) можна подати інакше:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^{\tau}, \quad (6.17)$$

або прискорення точки плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху дорівнює векторній сумі трьох видів прискорень — прискорення полюса, нормального обертального і дотичного обертального прискорень.

□ Для доведення теореми скористаємося формулами (6.14) і (6.12). Щоб мати векторну рівність, яка б визначала прискорення точки  $B$ , треба взяти векторну похідну по часу від обох частин співвідношення  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + AB\dot{\phi}\vec{l}_{\perp}^{\circ}$ . Дістанемо:

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_A + AB\ddot{\phi}\vec{l}_{\perp}^{\circ} + AB\dot{\phi}\frac{d\vec{l}_{\perp}^{\circ}}{dt}.$$

Але в третьому члені похідна  $\frac{d\vec{l}_{\perp}^{\circ}}{dt}$  напрямлена по дотичній до кола, яке описує кінець одиничного вектора  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$  внаслідок його обертання навколо точки  $A$  (полюса) з кутовою швидкістю  $\dot{\phi}$ , у бік обертання плоскої фігури (рис. 6.4, а). З рисунка знаходимо похідну

$$\frac{d\vec{l}_{\perp}^{\circ}}{dt} = \dot{\phi}\vec{l}_{\parallel}^{\circ}.$$

Підставивши цей вираз у формулу прискорення точки  $B$ , матимемо

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_A + AB\ddot{\phi}\vec{l}_{\perp}^{\circ} + AB\dot{\phi}^2(-\vec{l}_{\parallel}^{\circ}). \quad (6.18)$$

Перший член — це прискорення полюса  $\vec{a}_A = \dot{\vec{v}}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt}$ .

Позначимо другий член

$$\vec{a}_{AB}^{\tau} = AB\ddot{\phi}\vec{l}_{\perp}^{\circ}. \quad (6.19)$$

Дана векторна величина називається дотичним обертальним прискоренням точки  $B$  при обертанні плоскої фігури навколо полюса  $A$  або просто обертальним прискоренням точки  $B$ .

Останню складову позначимо:

$$\vec{a}_{AB}^n = -AB\dot{\varphi}^2\vec{l}_{\parallel}^{\circ}. \quad (6.20)$$

Це — нормальне обертальне прискорення точки  $B$  у разі обертання плоскої фігури навколо полюса  $A$ , або просто нормальне обертальне прискорення точки  $B$ .

Величина  $AB\dot{\varphi}$  є проекцією вектора  $\vec{a}_{AB}^{\tau}$  на напрям одиничного вектора  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$ , а друга похідна по часу від кута повороту  $\varphi$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (6.21)$$

називається кутовим прискоренням плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху. Якщо кутова швидкість  $\dot{\varphi}$  і кутове прискорення  $\ddot{\varphi}$  мають додатні значення, то обертальний рух плоскої фігури навколо полюса  $A$  прискорений і відбувається проти руху стрілки годинника. В цьому випадку дотичне обертальне прискорення  $\vec{a}_{AB}^{\tau}$  за напрямом збігається з одиничним ортом  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$  (6.19). Коли кутова швидкість має додатне значення, а кутове прискорення — від'ємне, тобто коли обертальний рух плоскої фігури навколо полюса сповільнений, дотичне обертальне прискорення  $\vec{a}_{AB}^{\tau}$  точки  $B$  має напрям, який збігається з напрямом руху стрілки годинника і протилежний напрямку одиничного вектора  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$ .

Нормальне обертальне прискорення  $\vec{a}_{AB}^n$  згідно з формулою (6.20) завжди напрямлене вздовж відрізка, що сполучає дану точку, для якої воно визначається, з полюсом плоскої фігури, до цього полюса.

На підставі формул (6.19) і (6.20) векторна рівність (6.18) набуває вигляду

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{\tau} + \vec{a}_{AB}^n. \quad (6.22)$$

Якщо векторно додати прямокутні складові  $\vec{a}_{AB}^{\tau}$ ,  $\vec{a}_{AB}^n$ , то дістанемо повне обертальне прискорення точки  $B$ .

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AB}^{\tau} + \vec{a}_{AB}^n. \quad (6.23)$$

Для модулів  $a_{AB}^{\tau}$ ,  $a_{AB}^n$  і  $a_{AB}$  маємо

$$a_{AB}^{\tau} = \varepsilon AB; \quad (6.24)$$

$$a_{AB}^n = \omega^2 AB; \quad (6.25)$$

$$a_{AB} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (6.26)$$

Введемо кут  $\beta = \angle(\vec{a}_{AB}^n, \vec{a}_{AB})$ , який відкладається від відрізка  $AB$  до вектора обертального прискорення точки  $B$ , тоді

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \angle(\vec{a}_{AB}^n, \vec{a}_{AB}) = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (6.27)$$

Формули (6.26), (6.27) визначають модуль і напрям вектора оберального прискорення точки плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху за відомими значеннями кутової швидкості і кутового прискорення плоскої фігури.

Для визначення напрямку вектора оберального прискорення  $\vec{a}_{AB}$  можна скористатися таким умовним правилом: напрям вектора оберального прискорення  $\vec{a}_{AB}$  відповідає тому напрямку, якого набуде вектор нормального оберального прискорення  $\vec{a}_{AB}^n$ , якщо його повернути навколо точки  $B$  на кут  $\beta$  (6.27) у напрямку, протилежному до обертання плоскої фігури, в разі прискореного оберального руху плоскої фігури, і повернути його на кут  $\beta$  (6.27) навколо точки  $B$  в напрямку обертання, в разі сповільненого оберального руху плоскої фігури.

Якщо підставити (6.23) в рівність (6.22), то дістанемо формулу (6.16). Теорему доведено. ■

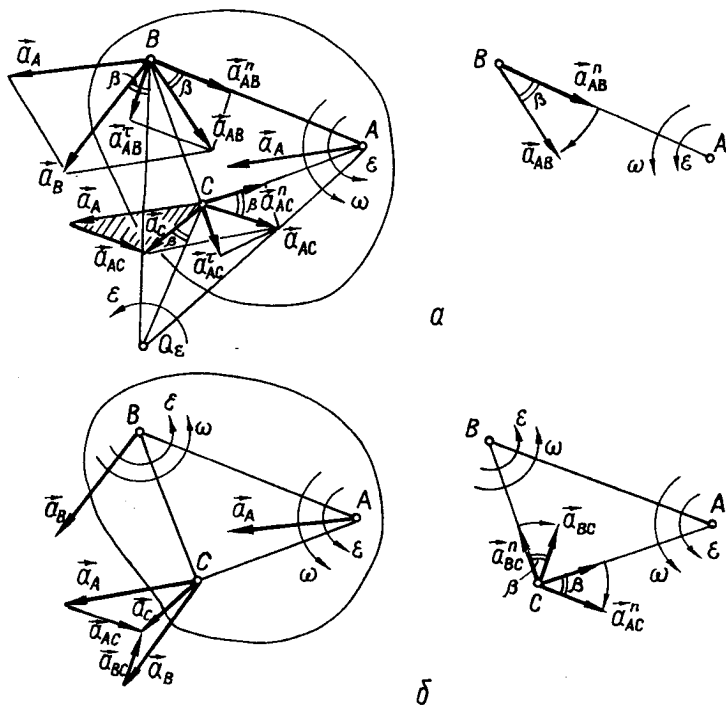


Рис. 6.5

На рис. 6.5 наведено геометричну інтерпретацію векторних формул (4.16) і (4.17), які виражають теорему про прискорення у разі сповільненого оберального руху плоскої фігури.

Для визначення прискорення іншої точки плоскої фігури — точки  $C$  за відомими прискореннями  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_B$  двох точок фігури  $A$  і  $B$  розглянуто два полюси  $A$  і  $B$ . Якщо за полюс править точка  $A$ , то прискорення точки  $C$  виражається як  $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{AC}$ . Якщо за полюс беруть точку  $B$ , то те саме прискорення для точки  $C$  визначається векторною рівністю  $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{BC}$ . Кожну з цих рівностей геометрично можна розглядати як трикутник прискорень, у якого першою стороною є прискорення відповідного полюса, другою — обертальне прискорення точки  $C$  при обертанні плоскої фігури навколо відповідного полюса, а третя сторона його — шукане абсолютне прискорення  $\vec{a}_C$  точки  $C$ .

*У трикутнику прискорень, побудованому для даної точки плоскої фігури, кінці векторів прискорення полюса і шуканого абсолютно-го прискорення збігаються відповідно з початком і кінцем вектора обертального прискорення, перенесеного з даної точки, в якій він насправді прикладений.*

На рис. 6.5, *a* в точці  $C$  побудовано трикутник прискорень за відомим прискоренням  $\vec{a}_A$  полюса  $A$ , кутовою швидкістю  $\dot{\varphi}$  і кутовим прискоренням  $\ddot{\varphi}$  (заштрихований трикутник). Також зображено в точці  $C$  прямокутні складові  $\vec{a}_{AC}^\tau$ ,  $\vec{a}_{AC}^n$  обертального прискорення  $\vec{a}_{AC}$ . На рис. 6.5, *б* прискорення точки  $C$  є спільною стороною двох трикутників прискорень: перший  $Ca_Aa_C$  відповідає полюсу  $A$ , а другий трикутник прискорень  $Ca_Ba_C$  — полюсу  $B$ . Абсолютне прискорення точки  $C$  знайдено за відомими прискореннями  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_B$  двох точок плоскої фігури. В цьому разі, щоб дістати  $\vec{a}_C$ , досить знати напрями відповідних обертальних прискорень  $\vec{a}_{AC}$  і  $\vec{a}_{BC}$ , які визначаються кутом  $\beta = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ , оскільки

$$\vec{a}_B - \vec{a}_A = \vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AB}^\tau \vec{l}_\perp + \vec{a}_{AB}^n (-\vec{l}_\parallel),$$

а  $\omega^2$  і  $\varepsilon$  можна знайти з формул

$$\omega^2 = \frac{a_{AB}^n}{AB}, \quad \varepsilon = \frac{a_{AB}^\tau}{AB}.$$

Справді, кінець вектора шуканого абсолютного прискорення  $\vec{a}_C$  відповідає перетину прямих, проведених через кінці векторів прискорень точок  $A$  і  $B$  паралельно відповідним обертальним прискоренням  $\vec{a}_{AC}$  і  $\vec{a}_{BC}$ .

Отже, було розглянуто два випадки, в яких задачу на визначення прискорень точок плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху можна розв'язати. Перший (рис. 6.5, *a*), коли вихідними даними є відомі прискорення полюса, кутова швидкість і кутове прискорення. Другий випадок — розв'язання задачі ґрунтується на вихідних даних,

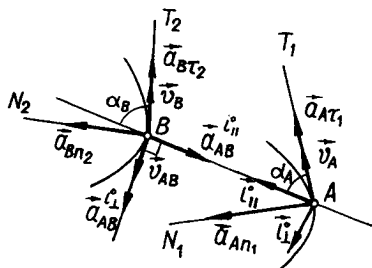


Рис. 6.6

якими є відомі прискорення двох точок плоскої фігури (рис. 6.5, б). Найчастіше трапляється в кінематиці плоскопаралельного руху третій випадок, коли відомо траєкторії двох точок плоскої фігури, абсолютні дотичне й нормальне прискорення однієї з них, наприклад точки  $A$ , яку вибирають за полюс, і швидкість другої точки. При цьому вважають, що кутова швидкість плоскої фігури наперед відома або її можна знайти.

Позначивши в розглядуваному випадку другу точку  $B$  і ввівши дотичні  $AT_1$ ,  $BT_2$  й головні нормалі  $AN_1$ ,  $BN_2$  траєкторій точок  $A$  і  $B$  відповідно, а також зобразивши складові прискорення в цих точках (рис. 6.6), запишемо векторні рівності

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BT_2} + \vec{a}_{Bn_2}; \quad (6.28)$$

$$\vec{a}_{BT_2} + \vec{a}_{Bn_2} = \vec{a}_{AT_1} + \vec{a}_{An_1} + \vec{a}_{AB}^{l_{\parallel}} + \vec{a}_{AB}^{l_{\perp}}, \quad (6.29)$$

де  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$  і  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  — одиничні вектори, які вказують на додатні напрями на відрізьку  $AB$  і перпендикулярній до нього прямій, з якою збігається вектор поперечної складової обертального прискорення  $\vec{a}_{AB}^{l_{\perp}}$  (дотичне обертальне  $\vec{a}_{AB}^{l_{\parallel}}$  і нормальне обертальне  $\vec{a}_{AB}^{l_{\perp}}$  прискорення доцільно назвати відповідно поперечним і поздовжнім обертальним прискоренням).

Введемо кути  $\alpha_A = \angle(\vec{a}_{AT_1}, \vec{l}_{\parallel}^{\circ})$  і  $\alpha_B = \angle(\vec{a}_{BT_2}, \vec{l}_{\parallel}^{\circ})$  спроекуємо векторну рівність (6.29) на напрями одиничних векторів  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$  і  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$ . Дістанемо рівняння

$$\begin{aligned} -a_{BT_2} \sin \alpha_B \cdot \vec{l}_{\perp}^{\circ} + a_{BT_2} \cos \alpha_B \cdot \vec{l}_{\parallel}^{\circ} + a_{Bn_2} \cos \alpha_B \cdot \vec{l}_{\perp}^{\circ} + a_{Bn_2} \sin \alpha_B \cdot \vec{l}_{\parallel}^{\circ} = \\ = -a_{AT_1} \sin \alpha_A \cdot \vec{l}_{\perp}^{\circ} + a_{AT_1} \cos \alpha_A \cdot \vec{l}_{\parallel}^{\circ} + a_{An_1} \cos \alpha_A \cdot \vec{l}_{\perp}^{\circ} + \\ + a_{An_1} \sin \alpha_A \cdot \vec{l}_{\parallel}^{\circ} - a_{AB}^{l_{\parallel}} \vec{l}_{\parallel}^{\circ} + a_{AB}^{l_{\perp}} \vec{l}_{\perp}^{\circ} = 0, \end{aligned}$$

або, згрупувавши члени зі спільними множниками  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  і  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$ ,

$$\begin{aligned} (a_{BT_2} \cos \alpha_B + a_{Bn_2} \sin \alpha_B - a_{AT_1} \cos \alpha_A - a_{An_1} \sin \alpha_A + a_{AB}^{l_{\parallel}}) \vec{l}_{\parallel}^{\circ} + \\ + (-a_{BT_2} \sin \alpha_B + a_{Bn_2} \cos \alpha_B - a_{AT_1} \sin \alpha_A - \\ - a_{An_1} \cos \alpha_A - a_{AB}^{l_{\perp}}) \vec{l}_{\perp}^{\circ} = 0. \end{aligned}$$

Сума двох взаємно перпендикулярних векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли кожний із цих векторів є нульовим. Дістанемо два скалярні рівняння:

$$\begin{aligned} a_{B_{r_2}} \cos \alpha_B + a_{B_{n_2}} \sin \alpha_B - a_{A_{t_1}} \cos \alpha_A - a_{A_{n_1}} \sin \alpha_A + a_{AB}^{l_1} &= 0; \\ -a_{B_{r_2}} \sin \alpha_B + a_{B_{n_2}} \cos \alpha_B - a_{A_{t_1}} \sin \alpha_A - & \\ -a_{A_{n_1}} \cos \alpha_A - a_{A_{n_1}} \sin \alpha_A + a_{AB}^{l_1} &= 0, \end{aligned} \quad (6.30)$$

де  $a_{B_{n_2}} = v_B^2 / \rho_2$ ;  $a_{AB}^{l_1} = \omega^2 AB$ ;  $a_{A_{t_1}}$  і  $a_{A_{n_1}}$  — задані.

Невідомі прискорення  $\vec{a}_{B_{r_2}}$  точки  $B$  і поперечне обертальне прискорення  $\vec{a}_{AB}^{l_1}$ . Отже, для визначення цих невідомих маємо систему двох рівнянь (6.30). Повне абсолютне прискорення точки  $B$  знаходять за формулою (6.29), а кутове прискорення плоскої фігури — за формулою (6.24).

Зауважимо, що при складанні рівнянь виду (6.30) рекомендується поперечне обертальне прискорення  $\vec{a}_{AB}^{l_1}$  напрямляти в бік вектора  $\vec{l}_1^\circ$ , що відповідає додатному значенню кутового прискорення  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ . Якщо з розв'язку рівнянь дістанемо від'ємне  $a_{AB}^{l_1}$ , то це означає, що й кутове прискорення плоскої фігури від'ємне. Дані рівняння уніфіковані, їх складають за певною схемою.

### Застосування теорем про швидкість і прискорення

Нехай у механізмі еліпсографа (див. рис. 6.1, *a*) кривошип обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_{OA} = \dot{\varphi}_{OA}$  і для даного моменту часу кут між  $OA$  і горизонтальною прямою дорівнює  $\varphi_{OA} = \varphi_0$ . Визначимо швидкість  $\vec{v}_B$  і прискорення  $\vec{a}_B$  точки  $B$  стержня  $CB$  еліпсографа, а також кутову швидкість  $\omega$  й кутове прискорення  $\varepsilon$  при  $AB = BC = OA = r$  (рис. 6.7).

При розв'язуванні цієї задачі за полюс беремо точку  $A$  стержня  $CB$ , оскільки для неї за відомою кутовою швидкістю  $\omega_0$  кривошипа  $OA$  можна обчислити швидкість  $\vec{v}_B$  і прискорення  $\vec{a}_B$ .

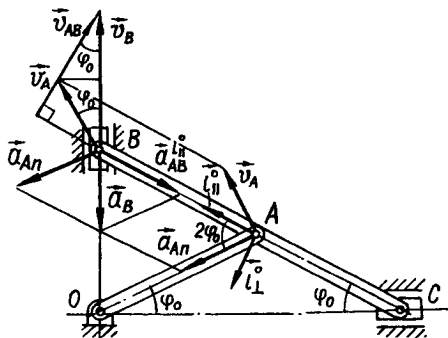


Рис. 6.7



За відомими формулами кінематики обертального руху знаходимо

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0 r; \quad a_A = a_{An} = \omega_0^2 \cdot OA = \omega_0^2 r.$$

Швидкість  $v_A$  перпендикулярна до кривошипа  $OA$  і напрямлена в бік його обертання, а прискорення полюса  $A$  є нормальним (доцентровим), отже, напрямлене по кривошипу до його центра  $O$ .

Спочатку знайдемо швидкості точки  $B$  стержня  $CB$  і його кутову швидкість  $\omega$ . Для цього при точці  $B$  будуємо трикутник швидкостей, скориставшись теоремою про прискорення:  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}$ .

Перша сторона цього трикутника відома — це швидкість  $v_A$  полюса  $A$ , перенесена в точку  $B$ . Другою стороною є обертальна швидкість  $\vec{v}_{AB}$ , а третя, замикальна сторона в трикутнику відповідає шуканій швидкості  $\vec{v}_B$ , яка лежить на вертикальній напрямній  $OB$ . Щоб дістати швидкості  $\vec{v}_{AB}$  і  $\vec{v}_B$ , треба через кінець вектора  $v_A$ , прикладеного в точці  $B$ , провести до перетину з вертикальною напрямною  $OB$  пряму, перпендикулярну до  $CB$ .

Точка перетину цих прямих дає третю вершину трикутника швидкостей. Зрозуміло, що побудований трикутник швидкостей  $Bv_A v_B$  є рівнобедреним. Отже,

$$v_A = v_{AB} = \omega_0 r; \quad v_B = 2v_A \cos \varphi_0 = 2\omega_0 r \cos \varphi_0.$$

Врахуємо, що  $v_{AB} = AB \omega$ , і тоді  $\omega = \omega_0$ , оскільки  $r = AB$ . Отже, стержень  $BC$  здійснює плоскопаралельний рух, коли кутова швидкість  $\omega$  не змінюється і за абсолютним значенням дорівнює кутовій швидкості  $\omega_0$  кривошипа  $OA$ , а за напрямом — протилежна останній.

Умова  $\omega = \omega_0 = \text{const}$  забезпечує нульове значення  $\varepsilon$  — кутового прискорення стержня. Проте швидкість точки  $B$  змінна і залежить від положення кривошипа, бо  $v_B = 2\omega_0 r \cos \varphi_0$ .

Для визначення прискорення точки  $B$  скористаємося теоремою про прискорення (6.17) і на її підставі складемо рівняння виду (6.30):

$$-a_{An} \sin 2\varphi_0 + a_B \cos \varphi_0 - a_{AB}^{li} = 0;$$

$$-a_{An} \cos 2\varphi_0 + a_B \sin \varphi_0 + a_{AB}^{li} = 0.$$

Помножимо перше рівняння на  $\sin \varphi_0$ , а друге — на  $\cos \varphi_0$ , після чого результати додамо. Дістанемо:

$$a_{AB}^{li} \sin \varphi_0 = -\omega_0^2 r (\sin \varphi_0 \sin 2\varphi_0 + \cos \varphi_0 \cos 2\varphi_0 - \cos \varphi_0),$$

або

$$a_{AB}^{li} = -2\omega_0^2 r \cos \varphi_0 (\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0) = 0.$$

Отже, поперечне обертальне прискорення точки  $B$  дорівнює нулю. Але  $a_{AB}^{li} = \varepsilon r$ , тому  $\varepsilon = 0$ , що вже раніше доведено.

З другого рівняння вихідної системи визначимо прискорення точки  $B$ :

$$a_B \sin \varphi_0 = a_{An} \cos 2\varphi_0 - a_{AB}^{II} = -\omega_0^2 r (1 - \cos 2\varphi_0) = -\omega_0^2 r \cdot 2 \sin^2 \varphi_0;$$

$$a_B = -2\omega_0^2 r \sin \varphi_0.$$

Прискорення точки  $B$  при кутах  $\varphi_{01} = 0$ ,  $\varphi_{02} = 45^\circ$ ,  $\varphi_{03} = 90^\circ$  відповідно дорівнює (рис. 6.8):

$$v_{B_1} = 2\omega_0 r \cos \varphi_{01} = 2\omega_0 r, \quad a_{B_1} = 0;$$

$$v_{B_2} = 2\omega_0 r \cos 45^\circ = \sqrt{2}\omega_0 r, \quad a_{B_2} = \omega_0^2 r \sin 45^\circ = -\sqrt{2}\omega_0^2 r;$$

$$v_{B_3} = 2\omega_0 r \cos 90^\circ = 0, \quad a_{B_3} = -2\omega_0^2 r \sin 90^\circ = -2\omega_0^2 r.$$

На рис. 6.8 наведено вектори швидкостей і прискорень точки  $C$  стержня еліпсографа для зазначених положень кривошипа  $OA$  (читачеві пропонується самостійно провести необхідні розрахунки стосовно кінематичних величин точки  $C$  стержня еліпсографа).

Проаналізуємо кінематичний рух іншого механізму (рис. 6.1, б). При обертанні кривошипа  $OA$  дві ланки — стержень  $AB$  і колесо — здійснюють плоскопаралельний рух. Обчислимо лінійні і кутові швидкості й прискорення як для ланки  $AB$ , так і для колеса за умови, що кривошип  $OA$  обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\varphi_{OA} = \omega_0$  проти руху стрілки годинника (рис. 6.9).

Виберемо таке співвідношення між лінійними розмірами ланок:  $OA = AB = 2PB = r$ . Припустимо, що кут повороту  $\varphi_0$  кривошипа  $OA$  змінюється в межах  $30^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$ .

Спочатку знайдемо швидкість  $\vec{v}_A$  і прискорення  $\vec{a}_A$  точки  $A$ :

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0 r; \quad a_A = a_{An} = \omega_0^2 \cdot OA = \omega_0^2 r.$$

Оскільки швидкість і прискорення точки  $A$  ланки  $AB$  у разі її плоскопаралельного руху відомі, то цю точку виберемо за полюс. У да-

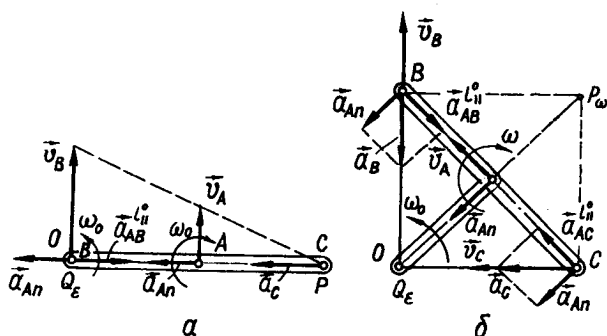


Рис. 6.8

ному випадку маємо задачу на визначення швидкості і прискорення точки  $B$  плоскої фігури 2 за відомими швидкістю і прискоренням полюса  $A$  та прямою, на якій лежать вектори абсолютних швидкості й прискорення точки  $B$ .

Зазначимо, що в кінематиці плоскопаралельного руху можна виділити три способи розв'язування задач: геометричний (векторний), аналітичний (метод проєкцій) і графічний.

Геометричне визначення швидкостей й прискорень у разі плоскопаралельного руху ґрунтується безпосередньо на векторних рівняннях (6.9) і (6.17). Геометричним зображенням рівняння (6.9) є трикутник швидкостей (рис. 6.9), побудову якого вже розглянуто, а векторного рівняння  $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^i + \vec{a}_{AB}^l$  — чотирикутник прискорень (рис. 6.9). У ньому одною стороною є прискорення полюса  $\vec{a}_A = \vec{a}_{An}$ , другою — поздовжнє обертальне прискорення  $\vec{a}_{AB}^i$ , третьою стороною є поперечне обертальне прискорення  $\vec{a}_{AB}^l$ , замикає цей чотирикутник шукане прискорення  $\vec{a}_B$  точки  $B$ . Видно, що четвертий, замикальний вектор має напрям, протилежний обходу контура чотирикутника в напрямі його першої сторони  $\vec{a}_{An}$ . У чотирикутнику прискорень кінці векторів  $\vec{a}_{AB}^i$ ,  $\vec{a}_B$  збігаються у точці перетину прямої, перпендикулярної до відрізка  $AB$ , і прямої, на якій лежить прискорення точки  $B$ . У цьому випадку швидкість і прискорення центра  $B$  колеса 1, яке за умовою задачі котиться без проковзування, напрямлені по горизонтальній прямій.

Після того, як трикутник швидкостей і чотирикутник прискорень побудовано, за формулами тригонометрії визначаються їхні сторони.

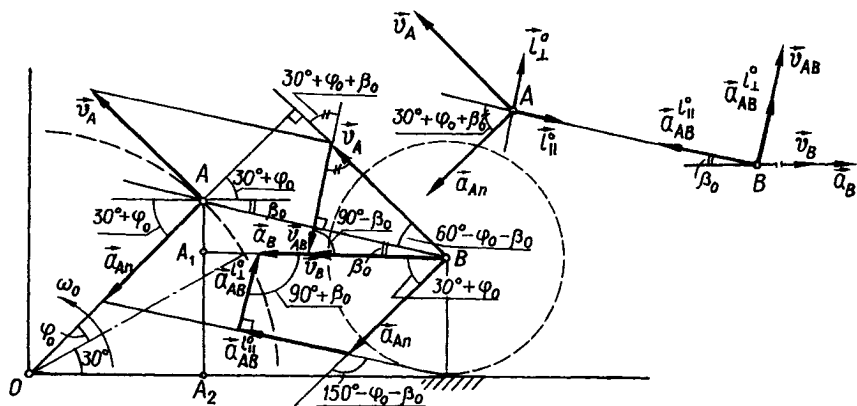


Рис. 6.9

Так, за теоремою синусів знаходимо з трикутника швидкостей швидкість точки  $B$ :

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\sin(30^\circ + \varphi_0 + \beta_0)}{\sin(90^\circ - \beta_0)};$$

$$v_B = \omega_0 r \frac{\sin(30^\circ + \varphi_0) \cos \beta_0 + \sin \beta_0 \cos(30^\circ + \varphi_0)}{\cos \beta_0}.$$

Синус кута  $\beta_0$  знайдемо з розгляду трикутників  $BA_1A$  і  $AA_1O$ :

$$AA_1 = AA_2 - A_1A_2; \quad AA_1 = AB \sin \beta_0 = r \sin \beta_0; \quad A_1A_2 = 1/2;$$

$$AA_2 = OA \sin(30^\circ + \varphi_0) = r \sin(30^\circ + \varphi_0);$$

$$\sin \beta_0 = \sin(30^\circ + \varphi_0) - 1/2.$$

Тоді за відомою тригонометричною тотожністю

$$\cos \beta_0 = \sqrt{1 - [\sin(30^\circ + \varphi_0) - 1/2]^2}.$$

Підставивши значення  $\sin \beta_0$  і  $\cos \beta_0$  у вихідну формулу для  $v_B$ , дістанемо

$$v_B = \omega_0 r \left\{ \sin(30^\circ + \varphi_0) + \frac{[\sin(30^\circ + \varphi_0) - 1/2] \cos(30^\circ + \varphi_0)}{\sqrt{1 - [\sin(30^\circ + \varphi_0) - 1/2]^2}} \right\}.$$

При  $\varphi_0 = 0, 30$  і  $60^\circ$  швидкість точки  $B$  має такі значення:

$$v_{B_1} = \omega_0 r / 2; \quad v_{B_2} = \omega_0 r \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(\sqrt{3}/2 - 1/2)1/2}{1/2\sqrt{2\sqrt{3}}} \right) =$$

$$= \frac{\omega_0 r}{2} \left( \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \right) = 1,06 \omega_0 r; \quad v_{B_3} = \omega_0 r.$$

З того самого трикутника швидкостей на підставі теореми синусів дістанемо вираз для обертальної швидкості точки  $B$ :

$$\frac{v_{AB}}{v_A} = \frac{\sin(60^\circ - \varphi_0)}{\sin(90^\circ - \beta_0)}; \quad v_{AB} = v_A \frac{\sin(60^\circ - \varphi_0)}{\sqrt{1 - [\sin(30^\circ + \varphi_0) - 1/2]^2}}.$$

За формулою (6.13) знайдемо вираз для кутової швидкості стержня  $AB$ :

$$\omega_2 = \frac{v_{AB}}{AB} = \frac{\omega_0 \sin(60^\circ - \varphi_0)}{\sqrt{1 - [\sin(30^\circ + \varphi_0) - 1/2]^2}}.$$

Для кутів  $\varphi_{01} = 0^\circ$ ,  $\varphi_{02} = 30^\circ$  і  $\varphi_{03} = 60^\circ$  маємо кутову швидкість

$$\omega_{21} = \frac{\omega_0 \sqrt{3}}{2}; \quad \omega_{22} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\sqrt{3}}}; \quad \omega_{23} = 0.$$

З розв'язку видно, що в разі вертикального положення кривошипа  $OA$  швидкості всіх точок стержня однакові за модулем й напрямом і мають горизонтальний напрям. Такий рух стержня називають миттєво поступальним.

Розглянувши чотирикутник прискорень (рис. 6.9), виведемо два скалярні рівняння для визначення  $\varepsilon_2$  і  $a_B$ :

$$a_B = a_{A_n} \cos(30^\circ + \varphi_0) + a_{AB}^{\parallel} \cos\beta_0 - a_{AB}^{\perp} \sin\beta_0 = 0;$$

$$a_{A_n} \sin(30^\circ + \varphi_0) - a_{AB}^{\parallel} \sin\beta_0 - a_{AB}^{\perp} \cos\beta_0 = 0.$$

Розв'язком є такі вирази:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{AB}^{\perp}}{AB} = \frac{\omega_0^2 \sin(30^\circ + \varphi_0) - \omega_2^2 \sin\beta_0}{\cos\beta_0};$$

$$a_B = \frac{\omega_0^2 r [\cos\beta_0 \cos(30^\circ + \varphi_0) - \sin\beta_0 \sin(30^\circ + \varphi_0)] \omega_2^2 r}{\cos\beta_0}.$$

У положеннях кривошипа  $OA$ , які характеризуються значеннями кута  $\varphi_0$ :  $0$ ,  $30$  і  $60^\circ$ ,

$$\varepsilon_{21} = \frac{\omega_0^2}{2}; \quad \varepsilon_{22} = 2,64 \omega_0^2; \quad \varepsilon_{23} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \omega_0^2 = 1,15 \omega_0^2.$$

$$a_{B_1} = \omega_0^2 r \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,16 \omega_0^2 r; \quad a_{B_2} = 1,77 \omega_0^2 r; \quad a_{B_3} = -\omega_0^2 r \frac{\sqrt{3}}{3} = -0,58 \omega_0^2 r.$$

Розв'яжемо попередню задачу методом проекцій. Рівняння виду (6.30) можна уніфікувати, якщо дотримуватись при їх складанні певного правила. Звернемось до загального випадку (див. рис. 6.6). У вибраному полюсі  $A$  зображують швидкість  $\vec{v}_A$ , прямокутні складові прискорення  $\vec{a}_{A_{t_1}}$  і  $\vec{a}_{A_{n_1}}$ . У точці  $B$ , прискорення якої треба за умовою задачі визначити, зображуємо невідомі прямокутні складові  $\vec{a}_{B_{t_2}}$  і  $\vec{a}_{B_{n_2}}$  прискорення  $\vec{a}_B$ , поздовжнє і поперечне обертальні прискорення  $\vec{a}_{AB}^{\parallel}$  і  $\vec{a}_{AB}^{\perp}$ , а також обертальну швидкість  $\vec{v}_{AB}$ . Після введення кутів  $\alpha_A$  і  $\alpha_B$ , а також одиничних векторів  $\vec{l}_\perp$ ,  $\vec{l}_\parallel$ , які встановлюють додатні напрями при проектуванні швидкостей і прискорень, складаючи рівняння виду (6.30), проекції дотичного і нормального прискорень  $\vec{a}_{B_{t_2}}$  і  $\vec{a}_{B_{n_2}}$  точки  $B$  на напрями ортів  $\vec{l}_\perp$  і  $\vec{l}_\parallel$  записують у лівих частинах рівностей (6.30) зі своїми знаками, а проекції інших прискорень  $\vec{a}_{A_{t_1}}$ ,  $\vec{a}_{A_{n_1}}$ ,  $\vec{a}_{AB}^{\perp}$  і  $\vec{a}_{AB}^{\parallel}$  на ті самі напрями записують в лівих частинах (6.30) з протилежними знаками.

Також можна скласти уніфіковані рівняння для визначення швидкостей  $\vec{v}_B, \vec{v}_{AB}$ , якщо скористатися векторною формулою (6.9) і рис. 6.6. Маємо:

$$\begin{aligned} -v_B \sin \alpha_B + v_{AB} + v_A \sin \alpha_A &= 0; \\ v_B \cos \alpha_B - v_A \cos \alpha_A &= 0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Складемо рівняння проєкцій для визначення швидкостей і прискорень у розглядуваному нами випадку плоскопаралельного руху стержня  $AB$  (див. рис. 6.9):

$$\begin{aligned} v_B \sin \beta_0 - v_A \cos(30^\circ + \varphi_0 + \beta_0) - v_{AB} &= 0; \\ v_B \cos \beta_0 + v_A \sin(30^\circ + \varphi_0 + \beta_0) &= 0; \\ a_B \sin \beta_0 - a_{AB}^i + a_{An} \sin(30^\circ + \varphi_0 + \beta_0) &= 0; \\ a_B \cos \beta_0 + a_{AB}^{ii} + a_{An} \cos(30^\circ + \varphi_0 + \beta_0) &= 0. \end{aligned}$$

З перших двох рівнянь виведемо вирази для швидкості точки  $B$  і кутової швидкості стержня  $AB$ :

$$\begin{aligned} v_B &= -\frac{v_A \sin(30^\circ + \varphi_0 + \beta_0)}{\cos \beta_0} = \\ &= -v_A \frac{[\sin(30^\circ + \varphi_0) \cos \beta_0 + \cos(30^\circ + \varphi_0) \sin \beta_0]}{\cos \beta_0}, \\ v_{AB} &= v_B \sin \beta_0 - v_A \cos(30^\circ + \varphi_0 + \beta_0), \quad \omega_2 = \frac{v_{AB}}{AB} = \frac{v_{AB}}{r} = \\ &= \frac{1}{r} v_A \left[ \frac{\sin(30^\circ + \varphi_0) \sin \beta_0 \cos \beta_0 + \cos(30^\circ + \varphi_0) \sin^2 \beta_0}{\cos \beta_0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(30^\circ + \varphi_0) \cos \beta_0 - \sin(30^\circ + \varphi_0) \sin \beta_0}{\cos \beta_0} \right] = -\frac{1}{r} v_A \frac{\cos(30^\circ + \varphi_0)}{\cos \beta_0} = \\ &= -\omega_0 \frac{\cos(30^\circ + \varphi_0)}{\cos \beta_0}. \end{aligned}$$

Дістанемо розв'язок решти двох рівнянь:

$$\begin{aligned} \cos \beta_0 a_{AB}^i &= \varepsilon_2 r \cos \beta_0 = \omega_0^2 r [\cos \beta_0 \sin(30^\circ + \varphi_0 + \beta_0) - \\ &- \sin \beta_0 \cos(30^\circ + \varphi_0 + \beta_0)] = \omega_0^2 r \sin(30^\circ + \varphi_0) - \omega_2^2 r \sin \beta_0; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\omega_0^2 \sin(30^\circ + \varphi_0) - \omega_2^2 \sin \beta_0}{\cos \beta_0}; \\ a_B &= -\frac{\omega_0^2 r [\cos(30^\circ + \varphi_0) \cos \beta_0 - \sin(30^\circ + \varphi_0) \sin \beta_0] + \omega_2^2 r}{\cos \beta_0}. \end{aligned}$$

Порівнюючи результати двох розглянутих способів визначення кінематичних характеристик у разі плоскопаралельного руху на прикладі механізму (рис. 6.1, б) бачимо, що вони збігаються. Рівняння (6.30) і (6.31), в основі яких лежить метод проекцій, зручно використовувати при розв'язуванні задачі на ПК за допомогою математичної програми Mathcad 8/2000.

Дослідимо кінематику плоскопаралельного руху колеса  $I$  (котка) механізму (рис. 6.9, див. рис. 6.1, б). Визначимо кутові і лінійні швидкості й прискорення колеса і в положенні, коли кривошип  $OA$  збігається з вертикаллю, тобто при  $\varphi_0 = 60^\circ$ . За даними розв'язку швидкість і прискорення центра  $B$  колеса  $v_B = v_A = \omega_0 r$ ,  $a_B = -\omega_0^2 r \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Це відповідає сповільненому руху центра  $B$  колеса, яке котиться без проковзування по горизонтальній нерухомій прямій.

Застосуємо геометричний спосіб і знайдемо швидкість, прискорення будь-якої точки обода колеса, а також його кутові швидкість й прискорення в заданому положенні механізму. Приймавши точку  $B$  за полюс, на підставі теореми про швидкість (6.9) побудуємо трикутник швидкостей для точки дотику колеса з нерухомою прямою, по якій відбувається кочення. Оскільки швидкість цієї точки дорівнює нулю, то маємо  $\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{v}_{BP} = 0$ , геометричним зображенням якої є частковий випадок трикутника швидкостей: сторони  $\vec{v}_B$  і  $\vec{v}_{BP}$  збігаються, маючи протилежні напрями, а третя сторона  $\vec{v}_P$  стягнута в точку. Отже, за відомою швидкістю  $v_B$  полюса знайдемо обертальну швидкість  $v_{BP}$  точки дотику колеса з нерухомою прямою (рис. 6.10, а):

$$v_{BP} = v_B = \omega_0 r = v_A.$$

Звідси дістанемо кутову швидкість колеса

$$\omega_1 = v_{BP} / BP = \omega_0 r \frac{2}{r} = 2\omega_0 r.$$

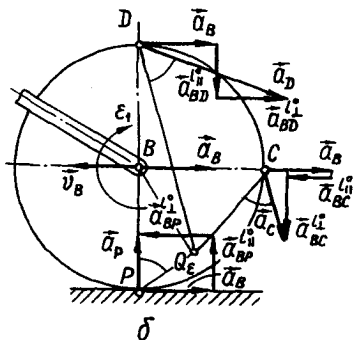
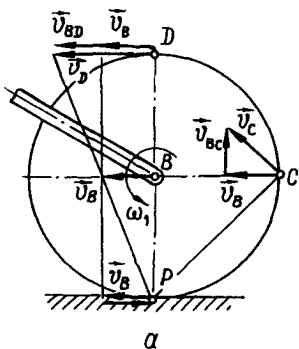


Рис. 6.10

На напрям обертання колеса вказує напрям вектора  $\vec{v}_{BP}$ . Для точки  $C$  обода колеса, яка лежить на горизонтальному діаметрі, маємо  $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{BC}$ , геометричною інтерпретацією якого є рівнобедрений прямокутний трикутник  $Cv_Bv_C$ , з якого  $v_C = \sqrt{v_B^2 + v_{BC}^2}$ .

Розглянемо точку  $D$  обода на вертикальному діаметрі  $PD$ . Для неї трикутник швидкостей  $\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{BD}$  вироджується в одновимірну фігуру, в якій вектори  $\vec{v}_B$ ,  $\vec{v}_{BD}$  і  $\vec{v}_D$  мають спільний напрям. Довжини даних векторів зв'язані співвідношенням  $v_D = v_B + v_{BD} = 2v_B$ .

Напрямок вектора швидкості точки  $D$  перпендикулярний до вертикального діаметра  $PD$ , а модуль швидкості  $v_D$  удвічі більший за модуль швидкості полюса  $v_B$ .

Завершуючи розгляд швидкостей, зазначимо, що всі точки обода колеса мають однакові за модулем обертальні швидкості, а напрям їх різний для різних точок обода.

Перейдемо до визначення прискорень. Для точок колеса  $P$ ,  $C$  і  $D$  векторні рівності, що виражають теорему про прискорення, мають вигляд

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= \vec{a}_B + \vec{a}_{BP}^{\parallel} + \vec{a}_{BP}^{\perp}; \\ \vec{a}_C &= \vec{a}_B + \vec{a}_{BC}^{\parallel} + \vec{a}_{BC}^{\perp}; \\ \vec{a}_D &= \vec{a}_B + \vec{a}_{BD}^{\parallel} + \vec{a}_{BD}^{\perp}.\end{aligned}$$

Кожна з цих рівностей геометрично зображується відповідним чотирикутником прискорень (рис. 6.10, б). Прискорення точки  $P$  — миттєвого центра швидкостей визначається з прямокутника прискорень:

$$a_P = a_{BP}^{\perp} = BP\omega_1^2 = 4\omega_0^2 \frac{r}{2} = 2\omega_0^2 r = 2a_{An}.$$

Розглянувши чотирикутник прискорень для точки  $C$ , запишемо

$$a_C = \sqrt{(a_B - \vec{a}_{BC}^{\parallel})^2 + (a_{BC}^{\perp})^2}.$$

Тут

$$\begin{aligned}a_{BC}^{\perp} &= a_{BP}^{\perp} = 2\omega_0^2 r = 2a_{An}, \\ a_{BC}^{\parallel} &= a_{BP}^{\parallel} = \varepsilon_1 \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{r}{2} \frac{1}{BP} \frac{dv_B}{dt} = a_B = \omega_0^2 r \frac{\sqrt{3}}{3},\end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned}a_C &= \sqrt{(a_B - 4a_{An})^2 + a_B^2} = \sqrt{\left(\omega_0^2 r \frac{\sqrt{3}}{3} - 4\omega_0^2 r\right)^2 + \omega_0^4 r^2 \frac{1}{3}} = \\ &= \sqrt{\omega_0^4 r^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 4\right)^2 + \omega_0^4 r^2 \frac{1}{3}} = 3,44 \omega_0^2 r = 3,44 a_{An}.\end{aligned}$$



Зауважимо, що при зображенні чотирикутників прискорень на рис. 6.10, б для поздовжнього обертального прискорення  $\vec{a}_{BP}^i, \dots$  вибрано інший масштаб  $\mu_a^i$  ніж для прискорень  $\vec{a}_B$  і  $\vec{a}_{BP}^i, \dots$  ( $a_{BP}^i = \mu_a^i b p^i$ ;  $b p^i = 10$  мм;  $a_{BP}^i = \mu_a^i b p^i$ ;  $b p^i = 15$  мм). Такий вибір масштабу не вплинув на форму чотирикутників прискорень.

Скориставшись чотирикутником прискорень для точки  $B$ , маємо:

$$\begin{aligned} a_D &= \sqrt{(a_B + a_{BD}^i)^2 + (a_{BD}^i)^2} = \sqrt{4a_B^2 + 4a_{An}^2} = \\ &= 2\sqrt{\omega_0^4 r^2 \frac{1}{3} + \omega_0^4 r^2} = \omega_0^2 r \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,16 a_{An}. \end{aligned}$$

Проведено кінематичний аналіз ще одного плоского механізму (див. рис. 6.1, в). При обертанні кривошипа  $OA$  з кутовою швидкістю  $\omega_0$  колесо  $1$  котиться без ковзання по нерухомому колесу  $2$ . Отже, точка дотику  $P$  коліс  $1$  і  $2$  нерухома, тобто є миттєвим центром швидкостей колеса  $1$ . Розв'язуючи задачу на визначення лінійних і кутових швидкостей та прискорень колеса  $1$ , виберемо за полюс його центр  $A$ . Швидкість і прискорення полюса  $A$  визначимо за даними обертального руху кривошипа  $OA$ . Нехай кривошип  $OA$  має сталу кутову швидкість  $\omega_0$ . Також прийнемо, що  $OA = r_1 + r_2$ , де  $r_1$  і  $r_2$  — радіуси коліс — відповідно рухомого  $1$  і нерухомого  $2$ .

Скориставшись формулою лінійної швидкості точки тіла в разі обертального руху, дістанемо швидкість полюса  $A$

$$v_A = \omega_0 (r_1 + r_2).$$

Точка  $A$ , що є кінцем кривошипа  $OA$ , рухається рівномірно по колу радіуса  $r_1 + r_2$  зі швидкістю  $v_A$ . Отже, її прискорення має лише доцентрову компоненту (рис. 6.11)

$$a_A = a_{An} = \frac{v_A^2}{r_1 + r_2} = \omega_0^2 (r_1 + r_2),$$

як і в попередній задачі, коли вихідними даними були швидкість і прискорення полюса  $A$  та положення центра швидкостей колеса  $1$  в разі його плоскопаралельного руху. Як і в попередньому випадку, кутову швидкість  $\omega_1$  колеса  $1$  знайдемо, застосувавши теорему про швидкість до миттєвого центра швидкостей  $P$ :

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{AP} = 0;$$

$$v_{AP} = v_A = \omega_0 (r_1 + r_2); \quad \omega_1 = \frac{v_{AP}}{AP} = \frac{\omega_0 (r_1 + r_2)}{r_1}.$$

Тут векторна рівність, що визначає швидкість точки  $P$ , відповідає паралелограму (рис. 6.11,  $a$ ) з нульовою довжиною його діагоналі  $\vec{v}_P$ : швидкість полюса  $\vec{v}_A$  і оберտальна швидкість  $\vec{v}_{AP}$ , маючи однаковий модуль і протилежні напрями, прикладені у миттєвому центрі  $P$  швидкостей.

У точках  $C$  і  $B$  колеса на підставі теореми про швидкість ( $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC}$ ,  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}$ ) побудовані паралелограми швидкостей, які є прямокутниками. З них дістанемо швидкості  $v_C$  і  $v_B$ :

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + v_{AC}^2} = \sqrt{2} v_A; \quad v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{AB}^2} = \sqrt{2} v_A.$$

Для точки  $D$  паралелограм швидкостей виродився в одновимірну фігуру — три вектори  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_{AD}$  і  $\vec{v}_D$  однакового напрями і прикладені в спільній точці  $D$ . Отже, для визначення швидкості точки  $D$  колеса замість векторної рівності  $\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{AD}$  маємо скалярний вираз  $v_D = v_A + v_{AD}$ , звідки  $v_D = v_A + v_A = 2v_A$ .

Визначимо прискорення тих самих точок, спочатку — кутове прискорення  $\epsilon_1$ . Воно в даному випадку дорівнює нулю, оскільки

$$\epsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{r_1 + r_2}{r_1} \frac{d\omega_0}{dt} = 0.$$

Тому для точок  $P$ ,  $C$ ,  $D$  і  $B$  поперечні оберտальні прискорення є нульовими, тобто

$$a_{AP}^{\perp} = a_{AC}^{\perp} = a_{AD}^{\perp} = \epsilon_1 r_1 = 0.$$

Для повздовжніх оберտальних прискорень маємо:

$$a_{AP}^{\parallel} = a_{AC}^{\parallel} = a_{AD}^{\parallel} = a_{AB}^{\parallel} = \omega_1^2 r_1 = \omega_0^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{r}.$$

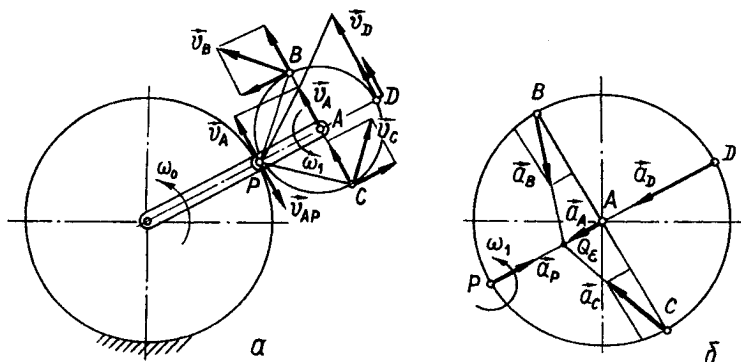


Рис. 6.11

На підставі теореми про прискорення

$$\begin{aligned}\bar{a}_P &= \bar{a}_A + \bar{a}_{AP}^{\prime\prime} + \bar{a}_{AP}^{\prime} = \bar{a}_A + \bar{a}_{AP}^{\prime\prime}; & \bar{a}_D &= \bar{a}_A + \bar{a}_{AD}^{\prime\prime} + \bar{a}_{AD}^{\prime} = \bar{a}_A + \bar{a}_{AD}^{\prime\prime}; \\ \bar{a}_C &= \bar{a}_A + \bar{a}_{AC}^{\prime\prime} + \bar{a}_{AC}^{\prime} = \bar{a}_A + \bar{a}_{AC}^{\prime\prime}; & \bar{a}_B &= \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^{\prime\prime} + \bar{a}_{AB}^{\prime} = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^{\prime\prime},\end{aligned}$$

або (рис. 6.11, б)

$$\begin{aligned}a_P &= a_{AP}^{\prime\prime} - a_A = \omega_0^2(r_1 + r_2) \frac{r_1 + r_2}{r_1} - \omega_0^2(r_1 + r_2) = \omega_0^2(r_1 + r_2) \frac{r_2}{r_1}; \\ a_D &= a_A + a_{AP}^{\prime\prime} = \omega_0^2(r_1 + r_2) + \omega_0^2(r_1 + r_2) \frac{r_1 + r_2}{r_1} = \omega_0^2(r_1 + r_2) \frac{2r_1 + r_2}{r_1}; \\ a_D &= a_B = \frac{\omega_0^2(r_1 + r_2)}{r_1} \sqrt{2r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2}.\end{aligned}$$

## § 21. Миттєвий центр швидкостей і миттєвий центр прискорень плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху \_\_\_\_\_

У разі плоскопаралельного руху плоскої фігури друге рівняння

$$v_B \cos \alpha_B - v_A \cos \alpha_A = 0 \quad (6.32)$$

системи (6.31), яка є наслідком теореми про швидкість (6.9), виражає загальну властивість, яка характерна не лише для цього виду руху, а справедлива в найзагальнішому випадку руху абсолютно твердого тіла. Відповідно до рівнянь (6.32) ця властивість полягає в тому, що *прямокутні складові швидкостей точок прямолінійного відрізка плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху паралельні цьому відрізку, однакові за модулем і напрямом, тобто*

$$\bar{v}_A^{\prime\prime} = \bar{v}_B^{\prime\prime} = \dots \quad (6.33)$$

Через точки  $A$  і  $B$  відрізка  $AB$  плоскої фігури (рис. 6.12) проведемо перпендикулярно до швидкостей  $\bar{v}_A$  і  $\bar{v}_B$  цих точок прямі  $AP$  і  $BP$ , де  $P$  — їхня точка перетину. На підставі рівнянь (6.32) і (6.33) можна зробити висновок, що точки плоскої фігури, які розташовані на прямих  $AP$  і  $BP$ , не мають напрямлених уздовж них прямокутних складових швидкостей. Тому точка перетину  $P$  нерухома для даного моменту часу, це відповідає даному положенню плоскої фігури для випадку її плоскопаралельного руху. Справді, якщо складові  $\bar{v}_p^{\prime}$  і  $\bar{v}_p^{\prime\prime}$  швидкості  $\bar{v}_p$ , паралельні відповідним прямим  $AP$  і  $BP$ , дорівнюють нулю ( $\bar{v}_p^{\prime} = 0$ ,  $\bar{v}_p^{\prime\prime} = 0$ ), то швидкість  $\bar{v}_p$  як результуюча цих складових ( $\bar{v}_p = \bar{v}_p^{\prime} + \bar{v}_p^{\prime\prime}$ ) також дорівнює нулю. Отже, точка  $P$  плоскої фігури, яка лежить на перетині перпендикулярів, проведених через інші точ-

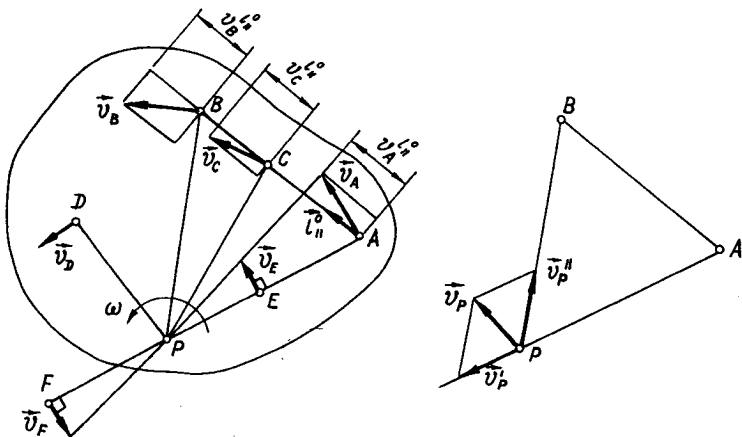


Рис. 6.12

ки плоскої фігури до напрямку швидкостей цих точок, є тим нерухомим центром, навколо якого в даний момент часу обертається плоска фігура під час свого плоскопаралельного руху. Цю точку  $P$  називають миттєвим центром швидкостей плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху.

Для абсолютно твердого тіла, плоскопаралельний рух якого замінено рухом даної плоскої фігури, миттєвому центру швидкостей  $P$  відповідає миттєва вісь обертання, що проходить через цей миттєвий центр швидкостей перпендикулярно до руху точок тіла. З рис. 6.12 видно, що відносно миттєвого центра швидкостей  $P$  швидкості всіх точок плоскої фігури є лінійними, оскільки вони перпендикулярні до прямолінійних відрізків, які сполучають дані точки з миттєвим центром швидкостей  $P$ , напрямлені в бік обертання плоскої фігури і дорівнюють добутку кутової швидкості на відстані точок до миттєвого центра швидкостей. Отже, можна записати співвідношення

$$v_A = AP\omega; \quad v_C = CP\omega; \quad v_B = BP\omega, \quad (6.34)$$

або

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_B}{BP} = \text{const.} \quad (6.35)$$

На підставі (6.35) дістанемо

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{CP}{AP}; \quad \frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP}. \quad (6.36)$$

Якщо задано швидкість однієї точки плоскої фігури, наприклад швидкість точки  $A$ , а також відомо положення миттєвого центра

швидкостей  $P$  у даний момент часу, тобто відрізок  $AP$ , то можна визначити швидкості решти точок плоскої фігури:

$$v_B = v_A \frac{BP}{AP}; \quad v_C = v_A \frac{CP}{AP}; \quad v_D = v_A \frac{DP}{AP}. \quad (6.37)$$

Крім того, якщо вектори швидкості точок відрізка в даний момент часу мають різні напрями (прямолінійний відрізок  $AB$ ) (рис. 6.12), то положення миттєвого центра  $P$  відповідає перетину перпендикулярів до векторів швидкостей точок, проведених через ці точки. Коли швидкості точок відрізка перпендикулярні до нього і напрямлені в один бік, але мають різні модулі (відрізок  $AE$ ), то миттєвий центр швидкостей  $P$  розташований на перетині продовження цього відрізка і прямої, що проходить через кінці векторів швидкостей точок. Якщо в останньому разі швидкості кінців відрізка мають протилежні напрями (відрізок  $EF$ ), то, на відміну від попереднього випадку, миттєвий центр швидкостей  $P$  лежить на самому відрізку між його кінцями.

Ці висновки щодо розташування миттєвого центра швидкостей  $P$  на плоскій фігурі відносно різних її прямолінійних відрізків для даного моменту часу стосуються найзагальнішого випадку плоскопаралельного руху. Може трапитися так, що в якийсь момент часу кутова швидкість як певна функція часу  $\omega = \omega(t)$  може набувати нульового значення. У цьому разі для даного моменту швидкості всіх точок плоскої фігури однакові як за модулем, так і за напрямом. Рух плоскої фігури за таких умов називають миттєво поступальним. Даний частковий кінематичний стан плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху характерний лише для даного моменту часу: кутова швидкість  $\omega$  змінює свій напрям на протилежний.

У разі миттєво поступального руху плоскої фігури вважають, що її миттєвий центр швидкостей  $P$  розташований у нескінченності. Повертаючись до розв'язку задачі (див. рис. 6.9, *a*), на підставі (6.35) можна для вертикального положення кривошипа  $OA$  ( $\varphi_0 = 60^\circ$ ) рис. 6.13 записати

$$\omega_{23} = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{v_A}{\infty} = 0; \quad \omega_{23} = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{v_B}{\infty} = 0. \quad (6.38)$$

Крім геометричного способу визначення лінійних і кутових швидкостей, на підставі теореми про швидкість (6.9) у разі плоскопаралельного руху застосовується спосіб миттєвого центра швидкостей. Останній спосіб ґрунтується на залежностях (6.35) і (6.37), його можна використовувати для перевірки розв'язку задачі, отриманим іншим способом.

Розглянемо поняття миттєвого центра обертання плоскої фігури для її плоскопаралельного руху. Миттєвий центр швидкостей  $P$ , як

уже зазначалось, є точкою, яка незмінно зв'язана з плоскою фігурою і швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Плоска фігура, перебуваючи в плоскопаралельному русі в своїй нерухомій площині, в кожний даний момент часу всіма своїми точками збігається з відповідними нерухомими точками цієї нерухомої площини. З однією із цих точок нерухомої площини в даний момент часу збігається миттєвий центр швидкостей  $P_v$  плоскої фігури під час її руху. Позначимо вказану нерухому точку  $P_\omega$  (миттєвому центру швидкостей  $P_v$  припишемо індекс « $\omega$ ») і назовемо миттєвим центром обертання плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху.

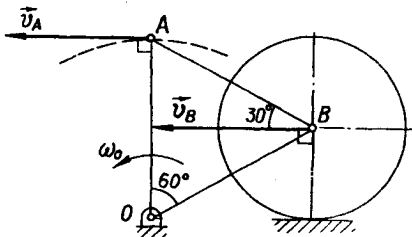


Рис. 6.13

На рис. 6.1, а, б, 6.4, а, 6.7, б показано положення миттєвих центрів обертання відповідних ланок точкою  $P_\omega$ , якщо миттєвий центр швидкостей  $P_v$  даних ланок механізмів виходить за їхні межі. Якщо миттєвий центр швидкостей на цих рисунках розташований у межах відповідної ланки, то його позначають  $P_v$ .

Зазначимо, що через миттєвий центр обертання  $P_\omega$  плоскої фігури проходить відповідна йому миттєва вісь обертання тіла, плоскопаралельний рух якого замінено рухом даної плоскої фігури. В кожний момент часу в разі плоскопаралельного руху тіло і відповідна йому плоска фігура здійснюють навколо миттєвої осі, незмінно зв'язаної з ними і перпендикулярної до нерухомої площини, паралельно якій відбувається рух, поворот на нескінченно малий кут з кутовою швидкістю  $\omega$ .

З кінематики обертального руху відомо, що кутовою швидкістю є векторна величина  $\vec{\omega}$ , і вектор кутової швидкості збігається з віссю обертання тіла. Так само і для плоскопаралельного руху в кожний момент часу можна вважати, що вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  збігається із миттєвою віссю обертання  $P_\omega P_v$ , що перпендикулярна до плоскої фігури, рухом якої замінено даний плоскопаралельний рух тіла.

**Миттєвий центр прискорень.** Якщо розглядати плоскопаралельний рух у певний момент часу, то при переході від точки до точки плоскої фігури їхня швидкість за модулем й напрямом неперервно змінюється і може набути будь-якого значення, а отже, зокрема й нульового. Точку плоскої фігури з нульовим значенням швидкості ми назвали миттєвим центром швидкостей  $P_v$ . Водночас вектор прискорення неперервно змінюється у просторі від точки до точки плоскої фігури як за значенням, так і за напрямом. Звичайно, що в даний момент часу в неперервному полі векторів прискорень з якими завгодно модулями й напрямками, знайдеться точка з нульовим прискорен-

ням. Ця точка плоскої фігури називається миттєвим центром прискорень. Позначимо це як  $Q_\epsilon$ ,  $Q_a$ .

Розглянемо точку  $Q$  плоскої фігури, яка в даний момент часу є миттєвим центром прискорень. Тоді для цієї точки

$$\frac{d\vec{v}_Q}{dt} = \vec{a}_Q = 0. \quad (6.39)$$

Швидкість  $\vec{v}_Q$  напрямлена по дотичній до траєкторії точки  $Q$ , її можна подати у вигляді

$$\vec{v}_Q = \dot{s}\vec{\tau}, \quad (6.40)$$

де  $s$  — дугова координата, яка визначає положення точки  $Q$  на траєкторії;  $\vec{\tau}$  — одиничний вектор дотичної до траєкторії точки  $Q$ , яка в даний момент часу править за миттєвий центр прискорень  $Q_a$ .

Підставивши вираз (6.40) у рівність (6.39) і взявши похідну по часу, дістанемо

$$0 = \dot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n} = \frac{dv_{Q\tau}}{dt}\vec{\tau} + \frac{v_{Q\tau}^2}{\rho}\vec{n}, \quad (6.41)$$

звідки

$$\frac{dv_{Q\tau}}{dt} = 0; \quad \frac{v_{Q\tau}^2}{\rho} = 0; \quad a_{Q\tau} = a_{Qn} = 0,$$

оскільки сума двох взаємно перпендикулярних векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли кожний з векторів є нульовим. Рівність нулю дотичного прискорення точки  $Q$  означає, що швидкість  $\vec{v}_Q$  точки  $Q$  в положенні миттєвого центра прискорень  $Q_a$  досягає екстремуму. Нормальне прискорення  $\vec{a}_{Qn}$  при нерівній нулю швидкості  $\vec{v}_Q$  в даній точці  $Q_a$  траєкторії набуде нульового значення, якщо в цій точці радіус кривизни  $\rho$  дорівнює нескінченності. Отже, траєкторія точки  $Q$  плоскої фігури в положенні, коли ця точка у відповідний момент часу стає миттєвим центром прискорень  $Q_a$ , має в загальному випадку плоскопаралельного руху перегин.

Ввівши поняття миттєвого центра прискорень  $Q_a$  і з'ясувавши характер зміни швидкості точки  $Q$  плоскої фігури в положенні миттєвого центра прискорень  $Q_a$ , визначимо прискорення точок плоскої фігури для її плоскопаралельного руху, прийнявши до уваги миттєвий центр прискорень  $Q_a$ .

При визначенні прискорення будь-якої точки  $B$  плоскої фігури скористаємося теоремою швидкостей (6.9), взявши за полюс миттєвий центр прискорень  $Q_a$ , тоді

$$\vec{v}_B = \vec{v}_Q + \vec{v}_{QB},$$

або, замінивши  $\vec{v}_{QB}$  на  $QB\dot{\phi}\vec{l}_\perp^\circ$ ,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_Q + QB\dot{\phi}\vec{l}_\perp^\circ,$$

де  $\vec{l}_\perp^\circ$  — одиничний вектор додатних напрямів швидкості  $\vec{v}_{QB}$  і поперечного обертального прискорення  $\vec{a}_{QB}^i$  точки  $B$  (одиничний вектор  $\vec{l}_\parallel^\circ$  визначає додатний напрям на відрізки  $Q_aB$ ).

Щоб дістати прискорення точки  $B$ , треба продиференціювати по часу останню векторну рівність:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}}{dt} + QB \dot{\varphi} \frac{d\vec{l}_\perp^\circ}{dt} + QB \ddot{\varphi} \vec{l}_\perp^\circ,$$

тут

$$\frac{d\vec{v}_Q}{dt} = 0; \quad \frac{d\vec{l}_\perp^\circ}{dt} = -\vec{l}_\parallel^\circ \dot{\varphi}.$$

Тоді

$$\vec{a}_B = -QB \dot{\varphi}^2 \vec{l}_\parallel^\circ + QB \ddot{\varphi} \vec{l}_\perp^\circ,$$

або

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{QB}^i + \vec{a}_{QB}^t. \quad (6.42)$$

*Прискорення будь-якої точки плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху дорівнює векторній сумі поздовжнього і поперечного обертальних прискорень даної точки при обертанні плоскої фігури навколо миттєвого центра прискорень.*

Модулі  $a_{QB}^i$  і  $a_{QB}^t$  визначаються за формулами

$$a_{QB}^t = QB \omega^2; \quad (6.43)$$

$$a_{QB}^i = QB \varepsilon, \quad (6.44)$$

де  $\omega$  і  $\varepsilon$  — абсолютні значення кутової швидкості й кутового прискорення. При заданих  $\dot{\varphi}$  і  $\ddot{\varphi}$  можна вказати на напрям шуканого прискорення  $\vec{a}_B$ , якщо ввести кут  $\beta = \angle(\vec{a}_{QB}^t, \vec{a}_B)$  (кут між напрямом поздовжнього обертального прискорення  $\vec{a}_{QB}^t$  точки  $B$  і повного її прискорення  $\vec{a}_B$ ). З трикутника  $Ba_{QB}^t a_B$  виведемо формулу даного кута  $\beta$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_{QB}^i}{a_{QB}^t} = \frac{\varepsilon QB}{\omega^2 QB} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (6.45)$$

Домовимось щодо знаку введеного кута  $\beta$ . Якщо миттєвий обертальний рух плоскої фігури навколо миттєвого центра прискорень  $Q_a$  є прискореним, то для того, щоб дістати напрям прискорення  $\vec{a}_B$  точки  $B$ , треба кут  $\beta$ , значення якого у формулі (6.45) вважається додатним, відкладати від поздовжнього обертального прискорення  $\vec{a}_{QB}^t$  в напрямі, протилежному до напрямку миттєвого обертання плоскої



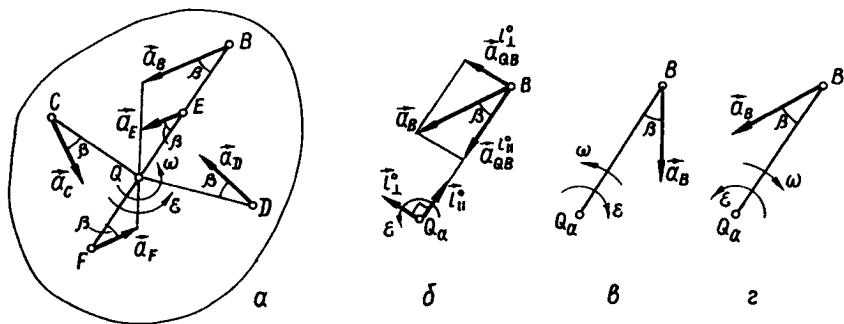


Рис. 6.14

фігури навколо миттєвого центра прискорення  $Q_a$  (рис. 6.14, а, б). При сповільненому миттєвому обертанні плоскої фігури навколо миттєвого центра прискорень  $Q_a$  кут  $\beta$  відкладається в напрямі миттєвого обертального руху (рис. 6.14, в, з).

Модуль прискорення точки  $B$  плоскої фігури визначається за формулою

$$a_B = QB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (6.46)$$

яка випливає з векторної рівності (6.42) і співвідношень (6.43) і (6.44). Якщо треба визначити прискорення інших будь-яких точок, наприклад,  $C, D, E$  і  $F$  за відомими для даного моменту часу  $\phi$  і  $\dot{\phi}$ , а також положенням миттєвого центра прискорень  $Q_a$ , то треба застосувати формули (6.45) і (6.46):

$$a_C = QC\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$a_D = QD\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$a_E = QE\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$a_F = QF\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

або

$$\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{a_B}{QB} = \frac{a_C}{QC} = \frac{a_D}{QD} = \frac{a_E}{QE} = \text{const.} \quad (6.47)$$

Звідси дістанемо

$$a_C = a_B \frac{CQ}{BQ}; \quad a_D = a_B \frac{DQ}{BQ}; \quad a_E = a_B \frac{EQ}{BQ}; \quad a_F = a_B \frac{FQ}{BQ}, \quad (6.48)$$

які дають змогу за відомим прискоренням однієї точки  $B$  плоскої фігури і відомим положенням миттєвого прискорення  $Q_a$  визначити прискорення інших точок плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху.

Розглянувши рис. 6.14 і прийнявши до уваги формули (6.46) — (6.48), зазначаємо:

- миттєвий центр прискорень  $Q_a$  — це такий центр, відносно якого прискорення всіх точок плоскої фігури в даний момент розподіляються так само, як розподіляються прискорення точок тіла в разі обертального руху навколо нерухомої осі, які розташовані в будь-якому перерізі тіла площиною, перпендикулярною до осі обертання, відносно точки перетину площини і осі;

- кут нахилу прискорень усіх точок плоскої фігури до відповідних відрізків, які сполучають ці точки з миттєвим центром прискорень  $Q_a$ , має одне й те саме значення;

- абсолютні (повні) прискорення точок плоскої фігури пропорційні їхнім відстаням до миттєвого центра прискорень  $Q_a$ ;

- положення миттєвого центра прискорень знаходять на підставі величин  $\vec{a}_A$ ,  $\dot{\varphi}$  і  $\ddot{\varphi}$  за формулами

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}; \quad (6.49)$$

$$\beta = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega}, \quad (6.50)$$

а кут  $\beta$  відкладають від вектора прискорення  $\vec{a}_A$  в напрямі кутового прискорення  $\ddot{\varphi}$ ;

- за прискореннями двох точок  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_B$  плоскої фігури визначають  $\omega$  і  $\varepsilon$  (рис. 6.15):

$$\begin{aligned} -a_B \cos \alpha_B - a_A \cos \alpha_A + \omega^2 AB &= 0; \\ a_B \sin \alpha_A - a_A \sin \alpha_A - \varepsilon AB &= 0, \end{aligned} \quad (6.51)$$

після чого в напрямі  $\ddot{\varphi}$  під кутом  $\beta$  (6.50) від векторів прискорень  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_B$  через точки  $A$  і  $B$  проводять прямі до їхнього перетину в шуканому миттєвому центрі прискорень  $Q_a$ .

Як приклад застосування способу миттєвих центрів швидкостей і прискорень для дослідження кінематики плоскопаралельного руху розглянемо кочення колеса радіусом  $r$  без проковзування по нерухомій прямій, коли центр колеса  $A$  рухається зі сталою швидкістю  $\vec{v}_0$  (рис. 6.16). У такому випадку центр  $A$  колеса є миттєвим центром прискорень  $Q_a$ , а миттєвим центром швидкостей  $P_v$  — відповідна точка обода колеса, в якій воно в даний момент часу торкається нерухомої прямої.

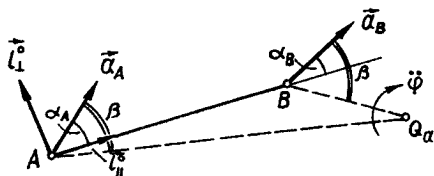


Рис. 6.15

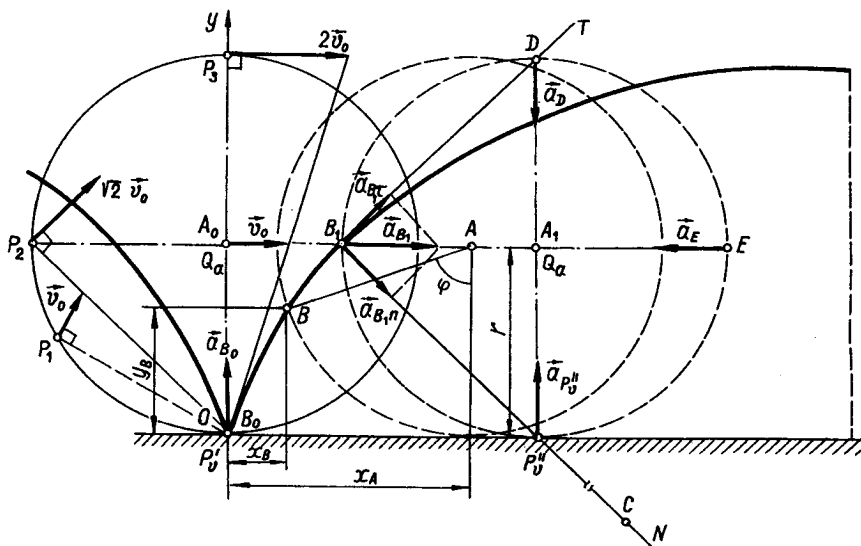


Рис. 6.16

На підставі формул (6.37) визначимо швидкості точок  $P_1$ ,  $P_2$  і  $P_3$ :

$$v_{P_1} = v_0 \frac{P_1 P'_v}{A_0 P'_v} = v_0 \frac{r}{r} = v_0; \quad v_{P_2} = v_0 \frac{P_2 P'_v}{r} = v_0 \frac{r\sqrt{2}}{r} = \sqrt{2}v_0;$$

$$v_{P_3} = v_0 \frac{P_3 P'_v}{r} = v_0 \frac{2r}{r} = 2v_0.$$

При розрахунку швидкості точки  $P_1$  довжину відрізка вибрано рівною радіусу  $r$  колеса. Напрямок миттєвого обертання колеса навколо точки  $P'_v$  визначається напрямом швидкостей його точок  $A_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , ... . У даному випадку коло в послідовні моменти часу здійснює елементарні повороти навколо миттєвих центрів обертання  $P'_v$ , з якими збігаються миттєві центри швидкостей  $P'_\omega$ , у напрямі руху стрілки годинника. В разі сталої швидкості центра  $A_0$  колеса кутова швидкість  $\omega$  його елементарних поворотів навколо миттєвих центрів обертання  $P'_\omega$  також залишається незмінною:

$$\omega = \frac{v_0}{A_0 P'_v} = \frac{v_0}{r}.$$

У цьому випадку кочення колеса його центр  $A$  в усі моменти часу є миттєвим центром прискорень  $Q$ . Отже, приймаючи його за полюс, на підставі формул (6.45) і (6.46) дістанемо абсолютні значення і напрями прискорень точок  $B$ ,  $D$ ,  $E$  і  $P'_v$ :

$$a_{P_v} = a_{B_1} = a_D = a_E = \omega^2 r = \frac{v_0^2}{r};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_{QP}^{i'}}{a_{QP}^{ii'}} = \frac{a_{QB_1}^{i'}}{a_{QB_1}^{ii'}} = \frac{a_{QD}^{i'}}{a_{QD}^{ii'}} = \frac{a_{QE}^{i'}}{a_{QE}^{ii'}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{0}{\omega^2} = 0.$$

Очевидно, що прискорення цих точок однакові за модулем і напрямлені до центра  $A$  колеса, який є миттєвим центром прискорень  $Q$ , оскільки за умовою задачі точка  $A$  по горизонтальній прямій рухається не помірно.

Визначивши лінійні, кутові швидкості і прискорення колеса в разі його плоскопаралельного руху, дослідимо рух його окремої точки, яка в початковий момент часу  $t_0 = 0$  є миттєвим центром швидкостей  $P_v$ . Позначимо цю точку  $B$ , а її положення в початковий момент часу  $t_0 = 0$  позначимо  $B_0$ . Введемо нерухомі осі  $Ox$  і  $Oy$ , початок  $O$  яких збігається з миттєвим центром швидкостей  $P_v$ , яким у нульовий момент часу стала розглядувана точка  $B$  обода колеса, складемо рівняння траєкторії точки  $B$ .

Позначимо абсцису і ординату точки  $B$  у довільний момент часу  $t$  відповідно  $x_B$  і  $y_B$ , тоді (рис. 6.16):

$$\begin{aligned} x_B &= x_A - r \sin \varphi = v_0 t - r \sin \varphi; \\ y_B &= r - r \cos \varphi = r(1 - \cos \varphi), \end{aligned}$$

але кут  $\varphi$  як функція часу визначається з умови кочення колеса по нерухомій прямій без проковзування  $x_A = r \varphi$ :

$$\varphi = \frac{x_A}{r} = \frac{v_0 t}{r}.$$

Тому рівняння траєкторії точки обода колеса в параметричній формі набуде вигляду

$$\begin{aligned} x_B &= v_0 t - r \sin \frac{v_0}{r} t, \\ y_B &= r(1 - \cos \frac{v_0}{r} t). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Ці рівняння описують криву, яка називається циклоїдною. За один оберт колеса під час його кочення без проковзування точка  $B$  його обода описує одну вітку. На рис. 6.16 зліва від осі  $Oy$  зображено частину вітки циклоїди точки  $B$ , по якій вона рухалась до моменту часу  $t_0 = 0$ , в який ця точка посіла положення миттєвого центра обертання  $P'_v$ . Справа від осі  $Oy$  зображено ту частину циклоїди, по якій розглядувана точка  $B$  рухається після виходу в нульовий момент часу з положення  $B_0$ , в якому вона була миттєвим центром швидкостей  $P'_v$ .

При проходженні точкою  $B$  положення миттєвого центра швидкостей  $P'_v$  колеса її траєкторія терпить злом. В точці злomu  $P'_v$  ліва і права вітки циклоїди мають спільну дотичну, перпендикулярну до

нерухомої прямої, по якій котиться колесо. Оскільки швидкість  $\vec{v}_{B_0\tau}$  точки  $B$  у місці перелому траєкторії дорівнює нулю, то нормальне її прискорення  $a_{B_0} = \frac{v_{B_0\tau}^2}{\rho}$  також дорівнює нулю. Отже, точка  $B$  колеса в

положенні миттєвого центра швидкостей  $P'_v$  має лише дотичну складову прискорення, тобто

$$\vec{a}_{B_0} = \vec{a}_{P'_v} = \vec{a}_{B_0\tau} = \frac{d\vec{v}_{B_0\tau}}{dt}.$$

Це прискорення  $a_{B_0\tau}$  можна знайти, якщо розглянути елементарний поворот  $d\phi$  з кутовою швидкістю  $\omega = \frac{v_0}{r}$  колеса навколо миттєвого центра обертання  $P'_\omega$ , яким через елементарний відтинок часу  $dt$  стає нескінченно близька до точки  $B$  колеса інша точка  $B'$  його обода. При елементарному повороті колеса навколо нового миттєвого центра обертання  $P'_\omega$  точка  $B$ , вийшовши зі стану спокою із дотичним прискоренням  $a_{B_0\tau} = \frac{dv_{B_0\tau}}{dt}$ , за час  $dt$  набуває приросту швидкості

$$dv_{B_0\tau} = a_{B_0\tau} dt.$$

Але, з іншого боку, цей приріст

$$dv_{B_0\tau} = \omega \tilde{P}_\omega B \cong \omega \tilde{P}_\omega P'_\omega,$$

де  $\tilde{P}_\omega P'_\omega = r d\phi$ , тому

$$\omega r d\phi = a_{B_0\tau} dt,$$

поділивши на  $dt$ , дістанемо раніше добуту формулу прискорення миттєвого центра швидкостей:

$$a_{B_0\tau} = \omega r \frac{d\phi}{dt} = \omega^2 r.$$

Швидкість  $V_{P'_v}$ , з якою рухається слід від миттєвого центра швидкостей  $P'_v$  в разі плоскопаралельного руху плоскої фігури, називається швидкістю переміщення миттєвого центра швидкостей. У випадку кочення колеса без проковзування по нерухомій прямій швидкість  $V_{P'_v}$  переміщення миттєвого центра швидкостей дорівнює швидкості руху центра колеса, тобто

$$V_{P'_v} = v_0 = \frac{r d\phi}{dt} = r\omega. \quad (6.53)$$

Конкретніші уявлення про швидкість переміщення миттєвого центра швидкостей дістанемо за умови, що колесо і нерухома пряма, по якій відбувається кочення, з'єднані між собою в точці дотику кільцем нескінченно малого радіуса. Тоді швидкість цього кільця під

час кочення колеса без проковзування по нерухомій прямій буде зазначеною швидкістю. За час  $dt$  при коченні відділяє колесо на нерухомій прямій елементарну дугу  $ds_{P_v}$ . Ця дуга буде шляхом, пройденим кільцем, що рухається разом із точкою дотику  $P_v$ , за нескінченно малий час  $dt$ , тому

$$V_{P_v} = \frac{ds_{P_v}}{dt}.$$

У частковому випадку плоскопаралельного руху, яким є кочення колеса,  $ds_{P_v} = d\varphi \cdot r$  і справедлива формула (6.52). З урахуванням цієї формули запишемо вираз для дотичного прискорення (повного прискорення) точки  $B$  обода колеса, яка в даний момент часу посідає положення миттєвого центра швидкостей  $P_v$ :

$$a_{P_v} = \omega V_{P_v}, \quad (6.54)$$

тобто в положенні миттєвого центра швидкостей  $P_v$  прискорення точки  $B$  обода колеса при його коченні без проковзування по нерухомій прямій дорівнює добутку кутової швидкості колеса на швидкість переміщення миттєвого центра швидкостей  $P_v$ .

Слід зазначити, що формула (6.54) — загальна. Для розглядуваного випадку плоскопаралельного руху величина  $V_{P_v}$  визначається за формулою (6.53). У разі довільного плоскопаралельного руху швидкість миттєвого центра швидкостей

$$V_{P_v} = \frac{ds_{P_v}}{dt} = \omega \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 \pm \rho_2}, \quad (6.55)$$

де  $\rho_1$  і  $\rho_2$  — радіуси кривизни так званих рухомої й нерухомої центротид (про це буде далі).

Отже, знайдено прискорення точки обода колеса в початковій точці циклоїди. Тепер визначимо швидкість і прискорення цієї точки  $B$  у довільному її положенні на циклоїді (рис. 6.16), скориставшись рівняннями (6.52) і формулою (2.42). Абсолютну швидкість точки  $B$  можна дістати за відомою формулою (2.49):

$$v_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2},$$

де

$$\begin{aligned} \dot{x}_B = v_{Bx} &= \frac{d}{dt} [r(\varphi - \sin \varphi)] = \omega r(1 - \cos \varphi); \\ \dot{y}_B = v_{By} &= \frac{d}{dt} [r(1 - \cos \varphi)] = \omega r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Підставивши ці вирази в попередній, дістанемо

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = r\omega \sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = \\ &= \sqrt{2} r\omega \sqrt{1 - \cos \varphi} = 2r\omega \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Проекції прискорення точки  $B$  на осі декартових координат

$$\ddot{x}_B = a_{Bx} = r\omega^2 \sin \varphi;$$

$$\ddot{y}_B = a_{By} = r\omega^2 \cos \varphi.$$

Підставивши у формулу (2.51), знайдемо:

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{(r\omega^2)(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = r\omega^2.$$

Отже, підтверджуються розрахунки, добуті на підставі кінематики плоскопаралельного руху. У зв'язку з цим в кінематиці існують два підходи до вивчення руху точки того чи іншого тіла. В першому випадку застосовують положення кінематики точки незалежно від того, який вид руху здійснює тіло. Другий підхід ґрунтується на кінематиці того чи іншого виду руху тіла, причому здебільшого визначають кінематичні характеристики руху, що справедливі для певного моменту часу, який відповідає певному положенню тіла в просторі. Метод кінематики точки дає змогу визначити кінематичні величини як певні функції часу, а через це — обчислювати ці величини для будь-якого моменту часу.

Повне прискорення точки  $B$  у разі руху по циклоїді складається з двох абсолютних прямокутних компонент — дотичного  $\bar{a}_{B\tau}$  і нормального  $\bar{a}_{Bn}$  прискорень, тобто

$$a_B = \sqrt{a_{B\tau}^2 + a_{Bn}^2}; \quad \bar{a}_B = \bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn}. \quad (6.56)$$

Нормальне прискорення  $\bar{a}_{Bn}$  напрямлене по головній нормалі  $BN$  у бік центра кривизни  $C$  траєкторії. Також на головній нормалі  $BN$  до траєкторії лежить миттєвий центр швидкостей  $P_v$  плоскої фігури, рух точки якої розглядається. Центр кривизни  $C$  і миттєвий центр обертання  $P_\omega (P_v)$  — це різні точки: перша характеризує геометричну властивість траєкторії окремої точки тіла в околі її положення на цій траєкторії, друга відображає спільну для всіх точок тіла властивість.

Швидкість  $\bar{v}_B$  і дотичне прискорення  $\bar{a}_{B\tau}$  точки  $B$  напрямлені по дотичній до циклоїди і перпендикулярні до прямої, на якій лежать миттєвий центр швидкостей колеса  $P_v$  і центр кривизни  $C$  циклоїди в розглядуваному положенні на ній точки  $B$  (рис. 6.16). Якщо виходити з кінематики точки, то швидкість точки  $B$  колеса

$$\bar{v}_B = \frac{ds_B}{dt} \bar{\tau},$$

де  $ds_B$  — елемент дуги кола кривизни радіусом  $\rho$ ;  $\bar{\tau}$  — одиничний вектор дотичної  $BT$  до циклоїди;  $s_B$  — дугова координата точки  $B$  з початком відліку в точці  $B_0(P'_v)$ .

Ту саму швидкість, виходячи з положень кінематики плоскопаралельного руху, можна подати у вигляді

$$\vec{v}_B = BP_v \dot{\varphi} \vec{l}_1^\circ = -\omega P_v B \vec{l}_1^\circ = \omega P_v B \vec{\tau},$$

де  $\omega$  — спільна характеристика для всіх точок колеса, а  $d\varphi P_v B$  не дорівнює приросту  $ds_B$  дугової координати  $s_B$  точки  $B$  за елементарний відтинок часу  $dt$ ;  $P_v B d\varphi$  — елемент дуги кола радіусом  $P_v B$  з центром  $P_v$ .

За формулою кінематики точки (6.56) абсолютне прискорення  $\vec{a}_B$  розкладається на дві абсолютні складові  $\vec{a}_{B\tau}$  і  $\vec{a}_{Bn}$ :

$$\vec{a}_{B\tau} = \frac{d^2 s_B}{dt^2} \vec{\tau} = \ddot{s}_B \vec{\tau}; \quad \vec{a}_{Bn} = \frac{v_{B\tau}^2}{\rho} \vec{n}.$$

На підставі теорем кінематики плоскопаралельного руху те саме прискорення  $\vec{a}_B$  має вже три складові:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{P_v} + \vec{a}_{P_v B}^{\parallel} + \vec{a}_{P_v B}^{\perp}; \quad \vec{a}_{P_v B}^{\parallel} = \omega^2 P_v B, \quad \vec{a}_{P_v B}^{\perp} = \varepsilon P_v B.$$

Перша складова  $\vec{a}_{P_v}$  — абсолютна, а решта —  $\vec{a}_{P_v B}^{\parallel}$  і  $\vec{a}_{P_v B}^{\perp}$  є відносні складові. Прискорення  $\vec{a}_{P_v B}^{\perp}$ , як і  $\vec{a}_{B\tau}$ , збігаються з дотичною  $BT$ , а складові  $\vec{a}_{P_v B}^{\parallel}$  і  $\vec{a}_{Bn}$  — з головною нормаллю  $BN$ .

Після цих зауважень повертаємось до формули (6.56). У ній невідомі  $a_{B\tau}$  і  $a_{Bn}$ . Для того щоб визначити дотичне прискорення  $a_{B\tau}$ , скористаємось формулою

$$a_{B\tau} = \frac{d^2 s_B}{dt^2} = \ddot{s}_B,$$

в якій

$$s_B = \int_0^l \cos \tilde{\alpha} dx_B + \int_0^l \cos \tilde{\beta} dy_B.$$

Введемо кути  $\tilde{\alpha} = \angle(\vec{\tau}, \vec{i})$  і  $\tilde{\beta} = \angle(\vec{\tau}, \vec{j})$  і знайдемо їх (6.17):

$$\tilde{\alpha} = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}; \quad \tilde{\beta} = 90^\circ - (90^\circ - \frac{\varphi}{2}) = \frac{\varphi}{2},$$

дістанемо

$$s_B = \int_0^l \sin \frac{\varphi}{2} dx_B + \int_0^l \cos \frac{\varphi}{2} dy_B.$$

Але

$$dx_B = d[r(\varphi - \sin \varphi)] = r(1 - \cos \varphi) d\varphi;$$

$$dy_B = d[r(1 - \cos \varphi)] = r \sin \varphi d\varphi,$$



тоді

$$s_B = r \int_0^{\varphi} \left[ \sin \frac{\varphi}{2} (1 - \cos \varphi) + \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right] d\varphi =$$

$$= r \int_0^{\varphi} \left( 2 \sin^3 \frac{\varphi}{2} + 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 4r \left( 1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right) = 8r \sin^2 \frac{\varphi}{4}. \quad (6.57)$$

Тепер за виразом дугової координати  $s_B$  точки  $B$  можна обчислити дотичне прискорення:

$$a_{B\tau} = \ddot{s}_B = \frac{d^2}{dt^2} \left( 8r \sin^2 \frac{\varphi}{4} \right) = r\omega^2 \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (6.58)$$

За повним і дотичним прискореннями знайдемо нормальне прискорення:

$$a_{Bn} = \sqrt{a_B^2 - a_{B\tau}^2} = \sqrt{(r\omega^2)^2 - (r\omega^2 \cos \frac{\varphi}{2})^2} = r\omega^2 \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (6.59)$$

Якщо вирази для  $a_{B\tau}$  і  $a_{Bn}$  підставити у формулу (6.56) і виконати відповідні дії, то дістанемо сталі значення прискорення точки  $B$  під час її руху по циклоїді. У будь-якому положенні точки  $B$  на циклоїді її повне прискорення напрямлене по радіусу колеса до його центра  $A$ :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B\tau} \vec{\tau} + \vec{a}_{Bn} \vec{n} = r\omega^2 \left( \cos \frac{\varphi}{2} \vec{\tau} + \sin \frac{\varphi}{2} \vec{n} \right),$$

але з рис. 6.16 маємо, що  $\vec{l}_{||}^\circ = \cos \frac{\varphi}{2} \vec{\tau} + \sin \frac{\varphi}{2} \vec{n}$ , тоді

$$\vec{a}_B = r\omega^2 \vec{l}_{||}^\circ, \quad (6.60)$$

що й треба було довести.

За формулою кінематики точки (2.19) визначимо радіус кривизни циклоїди в будь-якій її точці:

$$\rho = \frac{v_B^2}{a_{Bn}} = \frac{4r^2 \omega^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{r\omega^2 \sin \frac{\varphi}{2}} = 4r \sin \frac{\varphi}{2} = 2BP_v = BC. \quad (6.61)$$

Отже, радіус кривизни циклоїди в будь-якій її точці дорівнює подвоєній довжині відрізка, що сполучає точку циклоїди з миттєвим центром швидкостей  $P$ .

## ГРАФІЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

У шостій главі при розгляді кінематики плоскопаралельного руху викладено векторні теореми про швидкість і прискорення, а також на їхній основі — геометричний метод визначення кінематичних характеристик плоскопаралельного руху. Суть цього методу полягає в заміні векторних рівнянь, що виражають теореми про швидкість і прискорення, їхніми геометричними образами у вигляді трикутників швидкостей, чотирикутників або п'ятикутників прискорень, сторони яких є натуральними значеннями відповідних швидкостей і прискорень точок тіла в разі плоскопаралельного руху, з наступним розв'язанням суто геометричної задачі на визначення шуканих кінематичних величин із застосуванням відомих скалярних формул геометрії й тригонометрії.

У цій главі вивчається графічний метод визначення кутових і лінійних характеристик плоскопаралельного руху. Цей метод пов'язаний з введенням лінійного масштабу, а також масштабів швидкості й прискорення, з графічною побудовою так званих планів швидкостей і прискорень. Побудова планів швидкостей і прискорень ґрунтується на векторних теоремах про швидкість і прискорення кінематики плоскопаралельного руху з використанням масштабів швидкості і прискорення. Розглядуваним методом знаходять кінематичні величини шляхом вимірювання довжин відповідних прямолінійних відрізків на планах швидкостей і прискорень з урахуванням введених масштабів.

Графічний метод широко застосовується при кінематичному дослідженні плоских механізмів.

### § 22. Лінійний масштаб і масштаби швидкостей і прискорень

---

Розглянемо будь-яке тіло в натурі (наприклад шатун кривошипно-шатунного механізму), яке здійснює плоско-

паралельний рух паралельно деякій нерухомій площині  $\Pi$ . Плоску фігуру, яка є проекцією розглядуваного тіла на дану нерухому площину  $\Pi$  (проекція шатуна на площину, паралельно якій він рухається), назвемо *плоскою фігурою в натурі*. Лінійні її розміри в метрах, м, або в сантиметрах, см, назвемо *натуральними лінійними розмірами*. Натуральні лінійні довжини будь-яких прямолінійних відрізків плоскої фігури в натурі позначимо  $l_{AB}, l_{CD}, l_{EF}, \dots$ .

Якщо плоску фігуру в натурі зобразити в будь-якому лінійному масштабі, то дістанемо її схему. На схемі плоскої фігури прямолінійні відрізки  $AB, CD, EF, \dots$  зображують у масштабі відповідні їм прямолінійні відрізки з натуральними розмірами  $l_{AB}, l_{CD}, l_{EF}, \dots$ . Відношення

$$\frac{l_{AB}}{AB} = \frac{l_{CD}}{CD} = \frac{l_{EF}}{EF} = \dots \quad (7.1)$$

називають *лінійним масштабом* і позначають  $\mu_l$ . Отже,

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB}. \quad (7.2)$$

Довжини відрізків  $AB, CD, EF, \dots$  на схемі плоскої фігури вимірюють у міліметрах, мм, тоді розмірність лінійного масштабу

$$[\mu_l] = \frac{[l_{AB}]}{[AB]} = \text{м/мм}, \text{ см/мм}. \quad (7.3)$$

Модулі швидкостей і прискорень точок тіла в натурі в разі його плоскопаралельного руху називають *натуральними величинами* і позначають, як і раніше,  $v_A, v_B, v_C, \dots; a_A, a_B, a_C, \dots; \vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C, \dots; \vec{a}_A, \vec{a}_B, \vec{a}_C, \dots$  — вектори цих швидкостей і прискорень. Натуральні величини швидкостей і прискорень вимірюють у м/с або в см/с і в м/с<sup>2</sup> або в см/с<sup>2</sup> відповідно.

На схемах (планах швидкостей і прискорень) вектори  $\vec{v}_A, \dots$  і  $\vec{a}_A, \dots$  зображуються в певних масштабах напрямленими відрізками, які позначаються  $\overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ob}, \overrightarrow{oc}, \dots$  і  $\overrightarrow{oa_1}, \overrightarrow{ob_1}, \overrightarrow{oc_1}, \dots$ . Довжини цих відрізків відкладають на схемах в міліметрах. Відношення

$$\frac{v_A}{oa} = \frac{v_B}{ob} = \frac{v_C}{oc} = \dots; \quad \frac{a_A}{oa_1} = \frac{a_B}{ob_1} = \frac{a_C}{oc_1} = \dots$$

називають відповідно *масштабом швидкостей* і *масштабом прискорень*. Отже, позначивши їх  $\mu_v$  і  $\mu_a$ , дістанемо

$$\mu_v = \frac{v_A}{oa} = \frac{v_B}{ob} = \frac{v_C}{oc} = \dots; \quad \mu_a = \frac{a_A}{oa_1} = \frac{a_B}{ob_1} = \frac{a_C}{oc_1} = \dots, \quad (7.4)$$

$$[\mu_v] = \frac{[v_A]}{[oa]} = \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}, \quad \frac{\text{см}}{\text{с} \cdot \text{мм}}; \quad \mu_v = \frac{v_A}{oa}; \quad (7.5)$$

$$[\mu_a] = \frac{[a_A]}{[oa_1]} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}, \quad \frac{\text{см}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}; \quad \mu_a = \frac{a_A}{oa_1}. \quad (7.6)$$

За відомими довжинами відрізків  $oa, ob, oc, \dots$  і  $o_1a_1, o_1b_1, o_1c_1, \dots$  на схемах і масштабах швидкостей і прискорень  $\mu_v$  і  $\mu_a$  визначають відповідні натуральні величини:

$$v_A = oa \mu_v, \quad v_B = ob \mu_v, \quad v_C = oc \mu_v, \dots; \quad (7.7)$$

$$a_A = o_1a_1 \mu_a, \quad a_B = o_1b_1 \mu_a, \quad a_C = o_1c_1 \mu_a, \dots \quad (7.8)$$

або

$$\vec{v}_A = \overrightarrow{oa} \mu_v, \quad \vec{v}_B = \overrightarrow{ob} \mu_v, \quad \vec{v}_C = \overrightarrow{oc} \mu_v, \dots; \quad (7.9)$$

$$\vec{a}_A = \overrightarrow{o_1a_1} \mu_a, \quad \vec{a}_B = \overrightarrow{o_1b_1} \mu_a, \quad \vec{a}_C = \overrightarrow{o_1c_1} \mu_a. \quad (7.10)$$

Нехай треба зобразити на схемі складові векторної рівності (6.9), яка виражає теорему про швидкість точки плоскої фігури для її плоскопаралельного руху. Поділимо швидкість на вибраний масштаб швидкостей  $\mu_v$ :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}; \quad \frac{\vec{v}_B}{\mu_v} = \frac{\vec{v}_A}{\mu_v} + \frac{\vec{v}_{AB}}{\mu_v}. \quad (7.11)$$

Але на підставі (7.9)

$$\overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oa} + \frac{\vec{v}_{AB}}{\mu_v}.$$

Бачимо, що геометричні вектори  $\overrightarrow{oa}$  і  $\overrightarrow{ob}$ , які на схемі відповідають натуральним швидкостям  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_B$ , мають бути прикладені в одній і тій самій точці  $o$ , яка називається полюсом, і паралельні відповідним швидкостям. Розглянемо відношення  $\vec{v}_{AB}/\mu_v$ . Це — геометричний вектор, паралельний обертальній швидкості  $\vec{v}_{AB}$  точки  $B$  при обертанні плоскої фігури відносно полюса  $A$ , і в масштабі зображує цю швидкість. Отже, даний геометричний вектор  $\vec{v}_{AB}/\mu_v$  своїм початком має збігатися з кінцем геометричного вектора  $\overrightarrow{oa}$ , а кінцем — з кінцем геометричного вектора  $\overrightarrow{ob}$ . Тому цей вектор  $\vec{v}_{AB}/\mu_v$  треба позначити  $\overrightarrow{ab}$ . Остаточо дістанемо:

$$\overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ab}. \quad (7.12)$$

Нагадаємо, що довжини векторів у цьому рівнянні вимірюють у міліметрах. Геометричні вектори  $\overrightarrow{oa}$  і  $\overrightarrow{ob}$  називаються променями, точки  $a$  і  $b$  — вершинами їх, а  $\overrightarrow{ab}$  — вектор, що сполучає вершини променів. Промені  $\overrightarrow{oa}$  і  $\overrightarrow{ob}$  на схемі в масштабі  $\mu_v$  зображують абсолютні швидкості точок  $A$  і  $B$  тіла в разі плоскопаралельного руху, а вектор  $\overrightarrow{ab}$ , який сполучає вершини променів  $a$  і  $b$ , в масштабі  $\mu_v$  зображує обертальну швидкість  $\vec{v}_{AB}$  точки  $B$  відносно точки  $A$ . На схемі векторній рівності (7.12) відповідає геометричний трикутник  $oab$ , сторони якого вимірюють у лінійних одиницях. Цей трикутник

подібний відповідному трикутнику швидкостей  $v_A v_B$  з коефіцієнтом подібності  $\mu_v$  і однакою з ним розташований.

Якщо за полюс взяти точку  $B$ , то на підставі теореми про швидкість можна записати векторну рівність, яка визначає швидкість іншої точки плоскої фігури  $C$ :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{BC}. \quad (7.13)$$

Поділимо на масштаб швидкостей  $\mu_v$  та дістанемо відповідну геометричну рівність

$$\vec{oc} = \vec{ob} + \vec{bc}. \quad (7.14)$$

Вважатимемо точку  $C$  за полюс, тоді для точки  $D$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{CD} \quad (7.15)$$

або з урахуванням масштабу

$$\vec{od} = \vec{oc} + \vec{cd}. \quad (7.16)$$

Векторні рівняння (7.12) і (7.14), як і (7.16), геометрично зображують трикутники  $obc$  і  $ocd$ , подібні відповідним трикутникам швидкостей  $Cv_B v_C$  і  $Dv_C v_D$  і однакою з ними розташовані (зберігається паралельність відповідних сторін); коефіцієнтом подібності цих трикутників є  $\mu_v$ . Дані геометричні рівняння (7.12), (7.14), (7.16) використовують для графічного знаходження кінематичних величин — кутових і лінійних швидкостей у разі плоскопаралельного руху тіла.

На підставі теореми про прискорення точок плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху для її точок  $A, B, C$  і  $D$  запишемо векторні рівняння прискорень:

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{li} + \vec{a}_{AB}^{li}; & \vec{a}_C &= \vec{a}_B + \vec{a}_{BC}^{li} + \vec{a}_{BC}^{li}; \\ \vec{a}_D &= \vec{a}_C + \vec{a}_{CD}^{li} + \vec{a}_{CD}^{li}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Поділивши на масштаб прискорень  $\mu_a$  і увівши позначення

$$\frac{\vec{a}_{AB}^{li}}{\mu_a} = \vec{a}_1 m_1; \quad \frac{\vec{a}_{AB}^{li}}{\mu_a} = m_1 b_1; \quad \frac{\vec{a}_{BC}^{li}}{\mu_a} = b_1 m_2; \quad \frac{\vec{a}_{BC}^{li}}{\mu_a} = m_2 c_1; \quad \frac{\vec{a}_{CD}^{li}}{\mu_a} = c_1 m_3; \quad \frac{\vec{a}_{CD}^{li}}{\mu_a} = m_3 d_1,$$

дістанемо геометричні рівняння (їхніми геометричними образами є чотирикутники, подібні відповідним чотирикутникам прискорень з коефіцієнтом подібності  $\mu_a$ ):

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 b_1 &= \vec{a}_1 a_1 + \vec{a}_1 m_1 + \vec{a}_1 b_1; & a_1 b_1 &= a_1 m_1 + m_1 b_1; \\ \vec{a}_1 c_1 &= \vec{a}_1 b_1 + \vec{b}_1 m_2 + \vec{m}_2 c_1; & b_1 c_1 &= b_1 m_2 + m_2 c_1; \\ \vec{a}_1 d_1 &= \vec{a}_1 c_1 + \vec{c}_1 m_3 + \vec{m}_3 d_1; & c_1 d_1 &= c_1 m_3 + m_3 d_1, \end{aligned} \quad (7.18)$$

або

$$\vec{a}_1 b_1 = \vec{a}_1 a_1 + \vec{a}_1 b_1; \quad \vec{a}_1 c_1 = \vec{a}_1 b_1 + \vec{b}_1 c_1; \quad \vec{a}_1 d_1 = \vec{a}_1 c_1 + \vec{c}_1 d_1. \quad (7.19)$$

Векторні рівняння (7.14) — (7.17) застосовують у разі графічного знаходження кінематичних величин плоскопаралельного руху.

**§ 23. Графічний метод визначення кутових і лінійних швидкостей і прискорень у разі плоскопаралельного руху за допомогою побудови відповідних планів**

Скористаємося виведеними у попередньому параграфі векторними формулами для графічного визначення кінематичних величин у разі плоскопаралельного руху тіла. Нехай маємо плоскопаралельний рух плоскої фігури в натурі. Розглянемо її точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  (рис. 7.1). Сполучимо їх і дістанемо чотирикутник  $ABCD$ . Позначимо натуральні довжини їхніх сторін  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ,  $l_{CD}$  і  $l_{DA}$  (лінійні розміри прямолінійних відрізків плоскої фігури виражають у метрах або сантиметрах).

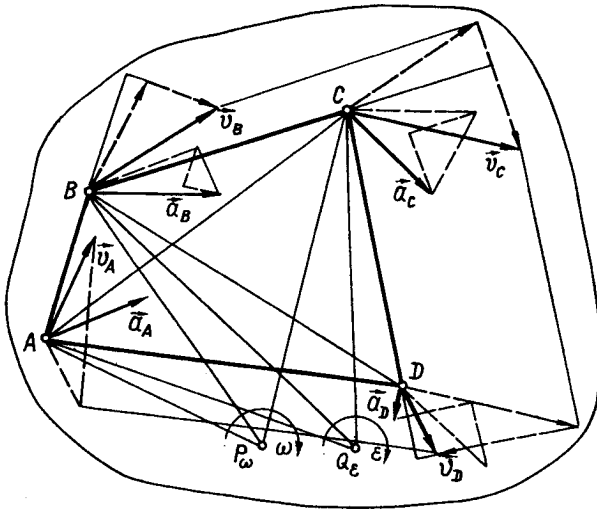


Рис. 7.1

Введемо лінійний масштаб  $\mu_l$  і побудуємо схему заданої плоскої фігури відповідно до рівностей

$$AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l}; \quad BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l}; \quad CD = \frac{l_{CD}}{\mu_l}; \quad DA = \frac{l_{DA}}{\mu_l}.$$

Схему плоскої фігури в масштабі  $\mu_l$  побудовано на рис. 7.2. Ця схема відповідає певному положенню плоскої фігури в натурі у разі її плоскопаралельного руху.

Нехай у розглянутому положенні (див. рис. 7.1) плоска фігура має швидкості і прискорення точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$ :  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$ ,  $\vec{v}_C$ ,  $\vec{v}_D$  і  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{a}_B$ ,  $\vec{a}_C$ ,

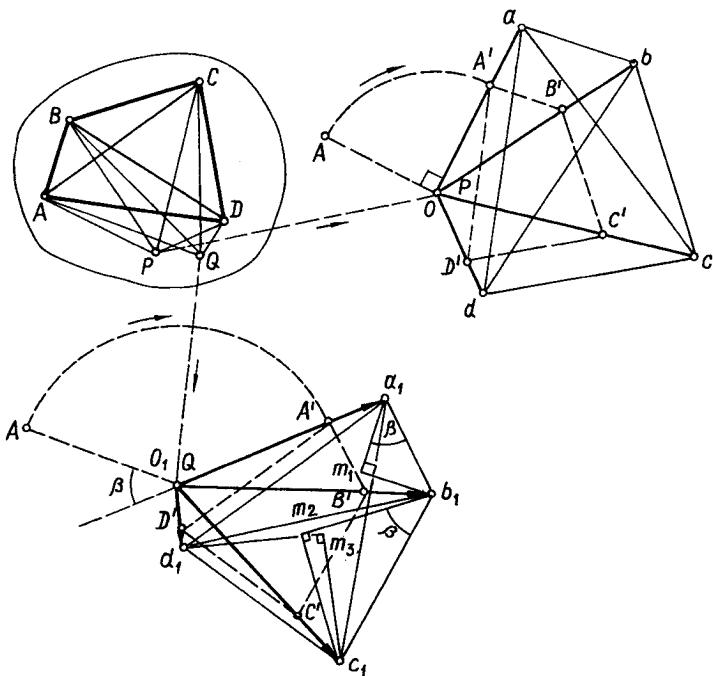


Рис. 7.2

$\bar{a}_D$ . Якщо за полюси послідовно брати точки  $A, B, C$  і  $D$ , то вектори натуральних швидкостей і прискорень визначаються рівняннями (7.10), (7.13), (7.15) і (7.17), геометричною інтерпретацією яких на рис. 7.1 є відповідні трикутники швидкостей і чотирикутники прискорень. Також на рис. 7.1 показано положення для даного моменту часу  $t$  миттєвого центра обертання  $P_\omega$  і миттєвого центра прискорень  $Q_\varepsilon$  плоскої фігури. Натуральні відстані точок  $A, B, C$  і  $D$  до миттєвих центрів  $P_\omega$  і  $Q_\varepsilon$  визначаються формулами

$$l_{AP_\omega} = \frac{v_A}{\omega}, \quad l_{BP_\omega} = \frac{v_B}{\omega}, \quad l_{CP_\omega} = \frac{v_C}{\omega}, \quad l_{DP_\omega} = \frac{v_D}{\omega};$$

$$l_{AQ_\varepsilon} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}, \quad l_{BQ_\varepsilon} = \frac{a_B}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}, \quad l_{CQ_\varepsilon} = \frac{a_C}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}, \quad l_{DQ_\varepsilon} = \frac{a_D}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Тоді на перетині геометричних відрізків

$$AP = \frac{l_{AP_\omega}}{\mu_l}, \quad BP = \frac{l_{BP_\omega}}{\mu_v}, \quad CP = \frac{l_{CP_\omega}}{\mu_v}, \quad DP = \frac{l_{DP_\omega}}{\mu_v}$$

на схемі (рис. 7.2) знайдемо положення миттєвого центра обертання  $P$ , якому на плоскій фігурі в натурі (див. рис. 7.1) відповідає точка  $P_\omega$ , а на перетині відрізків

$$AQ = \frac{l_{AQ_\epsilon}}{\mu_a}, \quad BQ = \frac{l_{BQ_\epsilon}}{\mu_a}, \quad CQ = \frac{l_{CQ_\epsilon}}{\mu_a}, \quad DQ = \frac{l_{DQ_\epsilon}}{\mu_a}$$

— положення миттєвого центра прискорень  $Q$ , якому відповідає на рис. 7.1 точка  $Q_\epsilon$ .

Розглядуваний плоскопаралельний рух є прискореним і має напрям руху стрілкою годинника. На підставі наведених у § 22 і § 23 даних, що описуються кінематикою плоскопаралельного руху, виконаємо такі дії. Виберемо довільно на площині у різних її місцях точки  $o$  й  $o_1$  та з'єднаємо їх з миттєвими центрами швидкостей і прискорень  $P$  і  $Q$  відповідними відрізками  $Po$  і  $Qo_1$  (рис. 7.2). Позначимо на відрізку  $Po$  стрілкою напрям від  $P$  до  $o$ . Перенесемо паралельно в цьому напрямі фігуру  $PABCD$  таким чином, щоб миттєвий центр швидкостей  $P$ , переміщуючись по прямій, збігався з точкою  $o$ . Повернувши перенесену в точку  $o$  фігуру  $PABCD$  у напрямі кутової швидкості  $\omega$  на кут  $90^\circ$ , дістанемо фігуру  $oA'B'C'D'$ . Збільшивши довжини відрізків  $oA'$ ,  $oB'$ ,  $oC'$  і  $oD'$  даної фігури в  $\omega \frac{\mu_l}{\mu_v}$

разів, де  $\omega$  — кутова швидкість плоскої фігури в даний момент часу,  $\mu_l$  і  $\mu_v$  — масштаби лінійний і швидкісний, дістанемо нові відрізки, які позначимо  $oa$ ,  $ob$ ,  $oc$  і  $od$ . Сполучивши їхні кінці відрізками  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ , дістанемо плоску фігуру  $oabcd$ , яка подібна попередній фігурі  $oA'B'C'D'$ , а отже, і вихідній фігурі:

$$oa = oA' \omega \frac{\mu_l}{\mu_v} = PA \mu_l \frac{\omega}{\mu_v} = l_{P_oA} \omega \frac{1}{\mu_v} = \frac{v_A}{\mu_v};$$

$$ob = oB' \omega \frac{\mu_l}{\mu_v} = PB \mu_l \frac{\omega}{\mu_v} = l_{P_oB} \omega \frac{1}{\mu_v} = \frac{v_B}{\mu_v};$$

$$oc = oC' \omega \frac{\mu_l}{\mu_v} = PC \mu_l \frac{\omega}{\mu_v} = l_{P_oC} \omega \frac{1}{\mu_v} = \frac{v_C}{\mu_v};$$

$$od = oD' \omega \frac{\mu_l}{\mu_v} = PD \mu_l \frac{\omega}{\mu_v} = l_{P_oD} \omega \frac{1}{\mu_v} = \frac{v_D}{\mu_v};$$

$$ab = A'B' \omega \frac{\mu_l}{\mu_v} = AB \omega \frac{\mu_l}{\mu_v} = \frac{l_{AB} \omega}{\mu_v} = \frac{v_{AB}}{\mu_v};$$

$$bc = B'C' \omega \frac{\mu_l}{\mu_v} = BC \mu_l \frac{\omega}{\mu_v} = \frac{l_{BC} \omega}{\mu_v} = \frac{v_{BC}}{\mu_v};$$

$$cd = C'D' \omega \frac{\mu_l}{\mu_v} = CD \mu_l \frac{\omega}{\mu_v} = \frac{l_{CD} \omega}{\mu_v} = \frac{v_{CD}}{\mu_v}.$$



Ці формули показують, що довжини відрізків  $oa$ ,  $ob$ ,  $oc$  і  $od$  у масштабі  $\mu_v$  визначають модулі швидкостей  $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$  і  $\vec{v}_D$  точок  $A, B, C$  і  $D$  плоскої фігури (див. рис. 7.1), довжини відрізків  $ab$ ,  $bc$  і  $cd$  у масштабі  $\mu_v$  визначають модулі обертальних швидкостей  $\vec{v}_{AB}, \vec{v}_{BC}$  і  $\vec{v}_{CD}$  точок  $B, C$  і  $D$  при обертанні плоскої фігури навколо полюсів  $A, B$  і  $C$  відповідно.

Зіставивши трикутники  $oab$ ,  $obc$  і  $ocd$  фігури  $oabcd$  з відповідними трикутниками швидкостей  $Bv_A v_B, Cv_B v_C$  і  $Dv_C v_D$ , дістанемо висновок, що вектори  $\vec{oa}, \vec{ob}, \vec{oc}$  і  $\vec{od}$  мають напрями швидкостей  $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$  і  $\vec{v}_D$ , а вектори  $\vec{ab}, \vec{bc}$  і  $\vec{cd}$  (рис. 7.2) мають напрями обертальних швидкостей  $\vec{v}_{AB}, \vec{v}_{BC}$  і  $\vec{v}_{CD}$  (див. рис. 7.1).

Дана замкнута геометрична фігура  $oabcd$  складається з векторів, які входять в рівняння (7.12), (7.14) і (7.16). Якщо помножити обидві частини цих рівностей на масштаб швидкостей  $\mu_v$ , то дістанемо векторні формули (7.11), (7.13) і (7.15). Отже, ця фігура геометрично зображує в масштабі як абсолютні швидкості будь-яких точок плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху, так і їхні відносні швидкості — обертальні навколо полюсів.

Дана плоска фігура називається *планом швидкостей*. Точка  $o$  називається полюсом, вектори  $\vec{oa}, \vec{ob}, \vec{oc}$  і  $\vec{od}$  — променями, а точки  $a, b, c$  і  $d$  — вершинами плану швидкостей; відрізки  $\vec{ab}, \vec{bc}, \vec{cd}, \vec{ac}, \vec{ad}$  і  $\vec{bd}$ , що сполучають вершини плану швидкостей, визначають у масштабі  $\mu_v$  відносні швидкості. Також зазначимо, що полюс  $o$  є зображенням точки плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

План швидкостей дає змогу визначити кінематичні характеристики плоскопаралельного руху лише для певного моменту часу шляхом попереднього вимірювання відрізків і проведенням обчислень з урахуванням результату цих вимірювань за формулами

$$v_A = oa \mu_v; v_B = ob \mu_v; v_C = oc \mu_v; v_D = od \mu_v, \dots; \\ \omega = \frac{ab \mu_v}{AB \mu_l} = \frac{bc \mu_v}{BC \mu_l} = \frac{cd \mu_v}{CD \mu_l} = \frac{ac \mu_v}{AC \mu_l} = \frac{bd \mu_v}{BD \mu_l} = \frac{ad \mu_v}{AD \mu_l}. \quad (7.20)$$

Тепер, поступально переміщуючи фігуру  $QABCD$  у напрямі відрізка  $Qo_1$ , сумістимо її миттєвий центр прискорень  $Q$  з точкою  $o_1$ . Сторона  $OA$  займе положення  $o_1A$  (рис. 7.2). Якщо з цього положення в напрямі кутового прискорення  $\epsilon$  повернути багатокутник  $o_1ABCD$  навколо точки  $o_1$  на кут  $180^\circ - \beta$ , де  $\beta = \text{arctg}(\epsilon/\omega^2)$ , то новим положенням його буде  $o_1A'B'C'D'$  (рис. 7.2).

У п'ятикутнику  $o_1A'B'C'D'$ , подібному фігурі  $QABCD$ , перенесеній з початкового положення у нове, збільшимо довжини його сторін  $o_1A'$ ,  $o_1B'$ ,  $o_1C'$  і  $o_1D'$  у

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \mu_l}{\mu_a} \quad (7.21)$$

разів. Кінці нових сторін позначимо  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  і  $d_1$ . Сполучивши їх між собою відрізками  $a_1b_1$ ,  $b_1c_1$ ,  $c_1d_1$ ,  $a_1c_1$ ,  $a_1d_1$  і  $b_1d_1$ , дістанемо плоску фігуру  $o_1a_1b_1c_1d_1$ , яка подібна фігурі  $QABCD$ , тоді

$$o_1a_1 = o_1A' \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \frac{\mu_l}{\mu_a} = \frac{QA \mu_l \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\mu_a} = \frac{a_A}{\mu_a};$$

$$o_1b_1 = o_1B' \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \frac{\mu_l}{\mu_a} = \frac{QB \mu_l \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\mu_a} = \frac{a_B}{\mu_a};$$

$$o_1c_1 = o_1C' \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \frac{\mu_l}{\mu_a} = \frac{QC \mu_l \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\mu_a} = \frac{a_C}{\mu_a};$$

$$o_1d_1 = o_1D' \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \frac{\mu_l}{\mu_a} = \frac{QD \mu_l \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\mu_a} = \frac{a_D}{\mu_a};$$

$$a_1b_1 = A'B' \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \frac{\mu_l}{\mu_a} = \frac{AB \mu_l \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\mu_a} = \frac{a_{AB}}{\mu_a};$$

$$b_1c_1 = B'C' \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \frac{\mu_l}{\mu_a} = \frac{BC \mu_l \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\mu_a} = \frac{a_{BC}}{\mu_a};$$

$$c_1d_1 = C'D' \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \frac{\mu_l}{\mu_a} = \frac{CD \mu_l \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\mu_a} = \frac{a_{CD}}{\mu_a}.$$

З останніх формул випливає, що довжини прямолінійних відрізків фігури  $o_1a_1b_1c_1d_1$ , які виходять зі спільної точки  $o_1$ , помножені на масштаб прискорення  $\mu_a$ , дорівнюють відповідним абсолютним прискоренням точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху:

$$a_A = o_1a_1 \mu_a, \quad a_B = o_1b_1 \mu_a, \quad a_C = o_1c_1 \mu_a, \quad a_D = o_1d_1 \mu_a.$$

Довжини прямолінійних відрізків  $a_1b_1$ ,  $b_1c_1$  і  $c_1d_1$ , помножені на масштаб прискорення  $\mu_a$ , дорівнюють обертальним прискоренням точок  $B$ ,  $C$  і  $D$  при обертанні плоскої фігури навколо полюсів  $A$ ,  $B$  і  $C$  відповідно:

$$a_{AB} = a_1b_1 \mu_a, \quad a_{BC} = b_1c_1 \mu_a, \quad a_{CD} = c_1d_1 \mu_a.$$

Порівнюючи геометричні трикутники  $o_1a_1b_1$ ,  $o_1b_1c_1$  і  $o_1c_1d_1$  з трикутниками прискорень, побудованими при точках  $B$ ,  $C$  і  $D$  плоскої

фігури (див. рис. 7.1), дістанемо висновок, що вектори  $\vec{o_1 a_1}$ ,  $\vec{o_1 b_1}$ ,  $\vec{o_1 c_1}$  і  $\vec{o_1 d_1}$  (рис. 7.2) мають напрями прискорень точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$ , а вектори  $\vec{a_1 b_1}$ ,  $\vec{b_1 c_1}$  і  $\vec{c_1 d_1}$  — напрями відповідних обертальних прискорень цих самих точок.

Якщо з точки  $a_1$  провести пряму паралельно  $BA$ , а через точку  $b_1$  — пряму перпендикулярно до  $AB$ , і точку перетину цих прямих позначити  $m_1$ , то дістанемо два вектори  $\vec{a_1 m_1}$  і  $\vec{m_1 b_1}$ . Перший з них у масштабі  $\mu_a$  зображує поздовжнє обертальне прискорення точки  $B$   $\vec{a}_{AB}^{\parallel} = \vec{a_1 m_1} \mu_a$ , а другий — поперечне прискорення цієї самої точки  $\vec{a}_{AB}^{\perp} = \vec{m_1 b_1} \mu_a$ .

Так само будуючи точки  $m_2$  і  $m_3$ , дістанемо вектори  $\vec{b_1 m_2}$  і  $\vec{m_2 c_1}$ , а також вектори  $\vec{c_1 m_3}$  і  $\vec{m_3 d_1}$ . Напрявлені відрізки  $\vec{b_1 m_2}$  і  $\vec{c_1 m_3}$  у масштабі  $\mu_a$  зображують поздовжні обертальні прискорення точок  $C$  і  $D$ , а спрявлені відрізки  $\vec{m_2 c_1}$  і  $\vec{m_3 d_1}$  — поперечні обертальні прискорення цих точок. Отже,

$$\vec{a}_{BC}^{\parallel} = \vec{b_1 m_2} \mu_a, \quad \vec{a}_{BC}^{\perp} = \vec{m_2 c_1} \mu_a; \quad \vec{a}_{CD}^{\parallel} = \vec{c_1 m_3} \mu_a, \quad \vec{a}_{CD}^{\perp} = \vec{m_3 d_1} \mu_a.$$

Векторні геометричні чотирикутники  $o_1 a_1 m_1 b_1$ ,  $o_1 b_1 m_2 c_1$  і  $o_1 c_1 m_3 d_1$  (рис. 7.2) математично записуються векторними рівностями (7.18) і (7.19). У цих чотирикутниках кути  $(\vec{a_1 b_1}, \vec{a_1 m_1})$ ,  $(\vec{b_1 c_1}, \vec{b_1 m_2})$  і  $(\vec{c_1 d_1}, \vec{c_1 m_3})$  однакові, відповідають куту  $\beta$ , який утворюють обертальні прискорення  $\vec{a}_{AB}$ ,  $\vec{a}_{BC}$  і  $\vec{a}_{CD}$  з прямолінійними відрізками  $BA$ ,  $CB$  і  $DC$  відповідно. Такий самий кут  $\beta$  утворюють повні прискорення точок плоскої фігури  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{a}_B$ ,  $\vec{a}_C$  і  $\vec{a}_D$  з відрізками  $AQ_e$ ,  $BQ_e$ ,  $CQ_e$  і  $DQ_e$ , які сполучають точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  з миттєвим центром прискорень  $Q_e$ .

Плоска замкнена фігура, утворена спрямленими прямолінійними відрізками, які в масштабі прискорень зображують прискорення точок плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху, називається планом прискорень. Вектори на плані прискорень, які в масштабі зображують абсолютні прискорення точок плоскої фігури, називаються його променями. Точка  $o_1$ , з якої виходять промені плану прискорень і яка зображує миттєвий центр прискорень плоскої фігури, називається полюсом плану прискорень. Другі кінці променів  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  і  $d_1$  називаються вершинами плану прискорень.

Якщо план прискорень плоскої фігури для випадку її плоскопаралельного руху у даний момент часу, що відповідає її миттєвому

положенню, побудовано, то можна обчислити прискорення будь-яких точок тіла в разі плоскопаралельного руху, а також кутову швидкість і кутове прискорення плоскої фігури:

$$\begin{aligned}
 a_A &= a_1 a_1 \mu_a, & a_B &= a_1 b_1 \mu_a, & a_C &= a_1 c_1 \mu_a, & a_D &= a_1 d_1 \mu_a, \dots; \\
 \omega^2 &= \frac{a_1 m_1 \mu_a}{AB \mu_l} = \frac{b_1 m_2 \mu_a}{BC \mu_l} = \frac{c_1 m_3 \mu_a}{CD \mu_l} = \dots; & (7.22) \\
 \varepsilon &= \frac{m_1 b_1 \mu_a}{AB \mu_l} = \frac{m_2 c_1 \mu_a}{BC \mu_l} = \frac{m_3 d_1 \mu_a}{CD \mu_l} = \dots
 \end{aligned}$$

Напрямок кутового прискорення установлюється за напрямом векторів  $\vec{m_1 b_1}$ ,  $\vec{m_2 c_1}$  і  $\vec{m_3 d_1}$ .

Зазначимо, що напрям кутового прискорення  $\varepsilon$  плоскої фігури можна визначити за кутом  $\beta$ . Напрямок повороту відрізків  $a_1 b_1$ ,  $b_1 c_1$  і  $c_1 d_1$  навколо їх початкових точок  $a_1$ ,  $b_1$  і  $c_1$ , щоб сумістити їх найкоротшим шляхом з відповідними відрізками  $a_1 m_1$ ,  $b_1 m_2$  і  $c_1 m_3$  на плані прискорень, залежить від напрямку кутового прискорення  $\varepsilon$ . У цьому випадку кут  $\beta$  відкладається (здійснюється зазначений поворот) за рухом стрілки годинника. Отже, кутове прискорення також напрямлене за рухом стрілки годинника.

Напрямок кутової швидкості плоскої фігури встановлюється за напрямом відрізків  $ab$ ,  $bc$  і  $cd$  на плані швидкостей.

За вихідні дані для побудови планів швидкостей і прискорень можна брати:

- швидкість і прискорення будь-якої точки плоскої фігури, кутова швидкість і кутове прискорення;
- швидкість і прискорення будь-якої точки плоскої фігури, траєкторія іншої її точки;
- швидкість і прискорення будь-яких двох точок плоскої фігури.

Розглянемо побудову планів швидкостей і прискорень у першому випадку вихідних даних (рис. 7.3). Нехай лінійний масштаб  $\mu_l$ , масштаби швидкостей  $\mu_v$  і прискорень  $\mu_a$  вибрано такими, що мають місце співвідношення

$$\mu_v = \omega \mu_l; \quad \mu_a = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\omega} \mu_v.$$

Візьмемо на плоскій фігурі в натурі, яка здійснює плоскопаралельний рух, чотири точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$ . Сполучивши їх, дістанемо чотирикутник  $ABCD$ , натуральні довжини сторін якого  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ,  $l_{CD}$ ,  $l_{DA}$ . На підставі натуральних величин швидкості і прискорення точки  $A$ , а також значення кутової швидкості і кутового прискорення плоскої

фігури в даному її положенні, знайдемо положення миттєвого центра швидкостей  $P$  і миттєвого центра прискорень  $Q$  фігури:

$$AP = \frac{v_A}{\omega}; \quad AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}; \quad \beta = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

За натуральними лінійними розмірами плоскої фігури в натурі і лінійним масштабом  $\mu_l$ , побудуємо схему плоскої фігури (рис. 7.3). Геометричні фігури  $PABCD$  і  $OABCD$  подібні відповідним п'ятикутникам на плоскій фігурі в натурі з коефіцієнтом подібності  $\mu_l = \frac{\mu_v}{\omega}$ :

$$\frac{l_{PA}}{PA} = \frac{l_{PB}}{PB} = \frac{l_{PC}}{PC} = \frac{l_{PD}}{PD} = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{l_{BC}}{BC} = \frac{l_{CD}}{CD} = \frac{l_{DA}}{DA} = \mu_l = \frac{\mu_v}{\omega};$$

$$\frac{l_{QA}}{QA} = \frac{l_{QB}}{QB} = \frac{l_{QC}}{QC} = \frac{l_{QD}}{QD} = \mu_l = \frac{\mu_v}{\omega}.$$

Для даного співвідношення між масштабами  $\mu_l$ ,  $\mu_v$  і  $\mu_a$  довжини променів на планах швидкостей і прискорень мають значення:

$$oa = PA, \quad ob = PB, \quad oc = PC, \quad od = PD;$$

$$a_1b_1 = QA, \quad a_1c_1 = QB, \quad a_1d_1 = QC, \quad a_1d_1 = QD.$$

Також справедливі рівності

$$ab = AB, \quad bc = BC, \quad cd = CD, \quad da = DA;$$

$$a_1b_1 = AB, \quad b_1c_1 = BC, \quad c_1d_1 = CD, \quad d_1a_1 = DA.$$

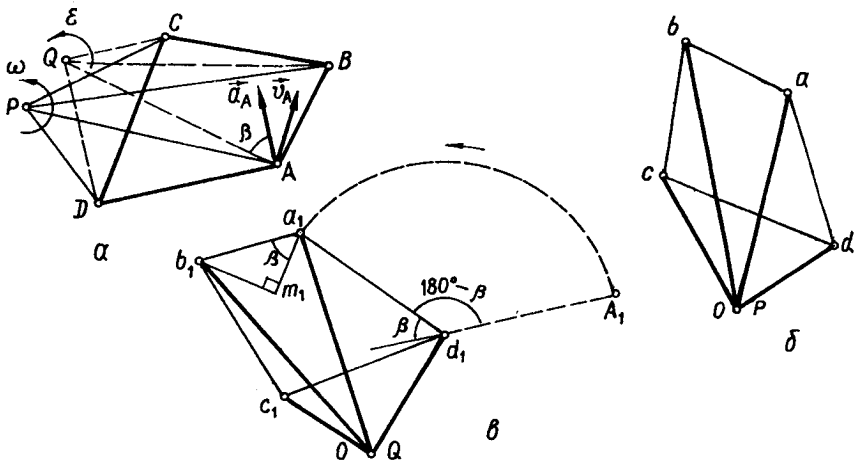


Рис. 7.3

Щоб у даному випадку дістати план швидкостей, треба п'ятикутник  $PABCD$  повернути в напрямі кутової швидкості (проти руху стрілки годинника) на кут  $90^\circ$  (рис. 7.3, б). За даним планом швидкостей дістанемо шукані швидкості:

$$v_B = ob \omega \mu_v, \quad v_C = oc \omega \mu_v, \quad v_D = od \omega \mu_v.$$

План прискорень знайдемо з п'ятикутника  $OABCD$  (рис. 7.3, а), який треба повернути в напрямі кутового прискорення  $\epsilon$  на кут  $180^\circ - \beta$ , де  $\beta = \text{arctg} \frac{\epsilon}{\omega^2}$  (рис. 7.3, в). Вимірюванням довжин відрізків

(променів)  $o_1a_1, o_1c_1, o_1d_1$  і множенням їх на масштаб прискорень  $\mu_a$  дістанемо натуральні значення абсолютних прискорень точок  $B, C$  і  $D$ :

$$a_B = o_1a_1 \mu_a, \quad a_C = o_1c_1 \mu_a, \quad a_D = o_1d_1 \mu_a.$$

Побудуємо план швидкостей і план прискорень у другому випадку вихідних даних, коли відомі швидкість і прискорення однієї точки плоскої фігури в даний момент часу і траєкторія руху другої точки (рис. 7.4). У такому разі за відомими  $\vec{v}_A$  і  $\vec{a}_A$  і вибраними масштабами  $\mu_v$  і  $\mu_a$  побудуємо промені  $\vec{oa}$  і  $\vec{o_1a_1}$  (рис. 7.4, б, в). Їхні напрями паралельні  $\vec{v}_A$  і  $\vec{a}_A$ , а довжини

$$oa = \frac{v_A}{\mu_v}, \quad o_1a_1 = \frac{a_A}{\mu_a}.$$

Для побудови на планах швидкості і прискорення шуканих променів  $\vec{ob}$  і  $\vec{o_1b_1}$  застосуємо векторні рівняння

$$\begin{aligned} \vec{ob} &= \vec{oa} + \vec{ab}; \\ \vec{o_1b_1} &= \vec{o_1a_1} + \vec{a_1m_1} + \vec{m_1b_1}. \end{aligned}$$

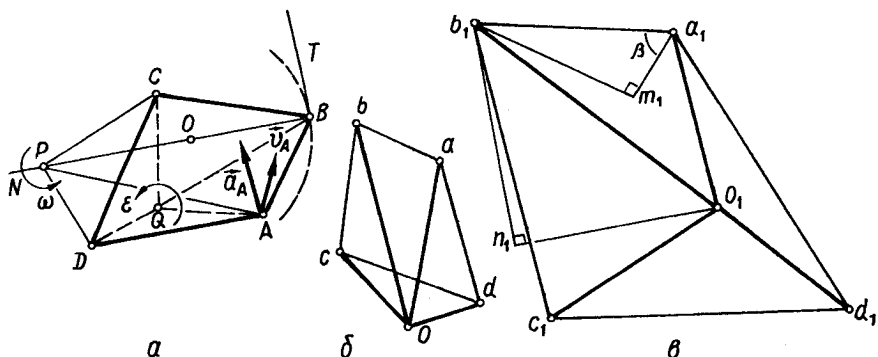


Рис. 7.4

У першій векторній рівності довжин відрізків  $ob$  і  $ab$  невідомі. Оскільки траєкторія точки  $B$  наперед відома (траєкторію показано на рис. 7.4,  $a$  штриховою лінією), то шуканий промінь  $\overrightarrow{ob}$  паралельний дотичній  $BT$  до траєкторії точки  $B$ . Вектор  $\overrightarrow{ab}$  перпендикулярний стороні  $AB$  чотирикутника  $ABCD$  плоскої фігури (рис. 7.4,  $a$ ) як вектор, що в масштабі  $\mu_v$  зображує обертальну швидкість  $\vec{v}_{AB}$  точки  $B$  плоскої фігури при її обертанні навколо точки  $A$  як полюса. Отже, вершина  $b$  невідомого променя  $\overrightarrow{ob}$  розташована на перетині прямої, яка проходить через полюс  $o$  паралельно дотичній  $BT$ , і перпендикулярна до сторони  $AB$ , проведеного через вершину  $a$  променя  $\overrightarrow{oa}$  (рис. 7.4,  $b$ ).

Інші дві вершини  $c$  і  $d$  променів  $\overrightarrow{oc}$  і  $\overrightarrow{od}$  є вершинами чотирикутника  $abcd$ , подібного основному  $ABCD$  і повернутого відносно останнього проти руху стрілки годинника на кут  $90^\circ$ . Далі для завершення побудови плану швидкостей розв'язується суто геометрична задача на побудову: за відомою стороною  $ab$  і кутами з вершинами  $A, B, C$  треба побудувати чотирикутник  $abcd$ . Сполучивши вершини  $c$  і  $d$  знайденого чотирикутника  $abcd$  з полюсом  $o$ , дістанемо шукані промені  $oc$  і  $od$ .

Вимірявши довжини  $ob, oc$  і  $od$  і врахувавши масштаб  $\mu_v$ , дістанемо

$$v_B = ob\mu_v, \quad v_C = oc\mu_v, \quad v_D = od\mu_v.$$

Напрямок кутової швидкості  $\omega$  плоскої фігури в даному її положенні визначається за напрямом вектора  $\overrightarrow{ab}$  або інших векторів  $\overrightarrow{bc}$  і  $\overrightarrow{cd}$ , а модуль її — за формулою

$$\omega = \frac{ab\mu_v}{AB\mu_l} = \frac{bc\mu_v}{BC\mu_l} = \frac{cd\mu_v}{CD\mu_l}. \quad (7.23)$$

Миттєвий центр швидкостей  $P$  на схемі плоскої фігури (7.4,  $a$ ) розташований на перетині перпендикулярів до  $oc$  і  $od$ , проведених через точки  $C$  і  $D$  плоскої фігури.

Повернемося до другої векторної рівності (7.20). Вектор  $\overrightarrow{a_1b_1}$  ні за модулем, ні за напрямом невідомий, а вектор  $\overrightarrow{m_1b_1}$  перпендикулярний до сторони  $AB$ . Вектор  $\overrightarrow{a_1m_1}$  паралельний  $BA$  і напрямлений від  $B$  до  $A$ , його модуль визначається за даними плану швидкостей (рис. 7.4,  $b$ ) на підставі формули

$$a_1m_1 = \omega^2 \frac{AB\mu_l}{\mu_a} = \frac{(ab)^2\mu_v^2}{AB\mu_l\mu_a}. \quad (7.24)$$

Маємо задачу на побудову чотирикутника  $o_1 a_1 m_1 b_1$ , в якого одна сторона  $\overrightarrow{o_1 b}$  цілком невідома — це його замикальна четверта сторона, а також невизначена довжина третьої сторони  $\overrightarrow{m_1 b_1}$ ; інші дві сторони задано. Обмежуючись цими даними, виконати побудову не можна.

Для того щоб задача мала розв'язок, треба скористатися іншими вихідними даними. Траєкторію точки  $B$  задано. Отже, відомий і радіус кривизни  $\rho$ . Тому шукане прискорення точки  $B$  можна розкласти на дотичне і нормальне:  $\vec{a}_B = \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{B\tau}$ . За модулем нормальне прискорення

$$a_{Bn} = \frac{v_B^2}{l\rho},$$

де

$$v_B = ob\mu_v,$$

а  $l\rho$  — радіус кривизни траєкторії.

Це прискорення напрямлене по головній нормалі  $BN$ , яка проходить через центр кривизни  $O$  і миттєвий центр швидкостей  $P$  (рис. 7.4, а). Про дотичне прискорення  $\vec{a}_{B\tau}$  відомо, що воно напрямлене по дотичній  $BT$ .

Поділивши останню векторну рівність на масштаб прискорення  $\mu_a$ , дістанемо геометричну векторну рівність  $\overrightarrow{o_1 b_1} = \overrightarrow{o_1 n_1} + \overrightarrow{n_1 b_1}$ , яку на плані прискорень зображують прямокутним трикутником  $o_1 n_1 b_1$ . Для знаходження вершини  $b_1$  променя  $\overrightarrow{o_1 b_1}$  маємо векторне рівняння

$$\overrightarrow{o_1 n_1} + \overrightarrow{n_1 b_1} = \overrightarrow{o_1 a_1} + \overrightarrow{a_1 m_1} + \overrightarrow{m_1 b_1},$$

де

$$o_1 n_1 = \frac{v_B^2}{l\rho\mu_a} = \frac{(ob)^2 \mu_v^2}{\rho\mu_l\mu_a}. \quad (7.25)$$

Якщо з вершини  $a_1$  і полюса  $o_1$  відкласти відрізки  $a_1 m_1$  і  $o_1 n_1$  в напрямках, паралельних до  $BA$  і  $BN$  відповідно, то шукана вершина  $b_1$  розташована на перетині перпендикулярів до  $\overrightarrow{a_1 m_1}$  і  $\overrightarrow{o_1 n_1}$ , проведених через кінці  $m_1$  і  $n_1$  відповідно. Сполучивши точки  $a_1$ ,  $b_1$  і  $o_1$ , дістанемо векторний трикутник

$$\overrightarrow{o_1 b_1} = \overrightarrow{o_1 a_1} + \overrightarrow{a_1 b_1},$$

усі сторони якого визначені. Для того щоб дістати інші промені  $\overrightarrow{o_1 c_1}$  і  $\overrightarrow{a_1 d_1}$ , треба за стороною  $a_1 b_1$  і кутами з вершинами  $A$ ,  $B$  і  $C$



побудувати чотирикутник  $a_1 b_1 c_1 d_1$ , подібний основному  $ABCD$  і повернутий відносно останнього проти руху стрілки годинника на кут  $180^\circ - \beta$ , де  $\beta$  можна знайти з прямокутного трикутника  $a_1 m_1 b_1$  на плані прискорень як кут між векторами  $\overrightarrow{a_1 b_1}$  і  $\overrightarrow{a_1 m_1}$  (рис. 7.4, в). Після цього треба сполучити вершини чотирикутника  $c_1$  і  $d_1$  з полюсом  $o_1$  плану прискорень.

З плану прискорень знайдемо

$$a_B = o_1 b_1 \mu_a, \quad a_C = o_1 c_1 \mu_a, \quad a_D = o_1 d_1 \mu_a;$$

$$\varepsilon = \frac{m_1 b_1 \mu_a}{AB \mu_l}, \quad \angle(\overrightarrow{a_1 b_1}, \overrightarrow{a_1 m_1}) = \beta.$$

Зазначимо, що напрям кутового прискорення відповідає напрямку вектора  $\overrightarrow{m_1 b_1}$  на плані прискорень. Миттєвий центр прискорень  $Q$  на схемі плоскої фігури (рис. 7.4, а) розташований на перетині проведених через точки  $C$  і  $D$  прямих, які утворюють з променями  $\overrightarrow{o_1 c_1}$  і  $\overrightarrow{o_1 d_1}$  кут  $\beta$ ; цей кут відкладається від променів  $\overrightarrow{o_1 c_1}$  і  $\overrightarrow{o_1 d_1}$  проти руху стрілки годинника.

Побудова планів швидкостей і прискорень у третьому випадку, коли швидкості і прискорення двох точок плоскої фігури задаються після того, як побудовано трикутника

$$\overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ab}, \quad \overrightarrow{o_1 b_1} = \overrightarrow{o_1 a_1} + \overrightarrow{a_1 b_1},$$

не відрізняється від розглянутих перших двох випадків. У напрямках  $\overrightarrow{v_A}$ ,  $\overrightarrow{v_B}$ ,  $\overrightarrow{a_A}$  і  $\overrightarrow{a_B}$  відкладемо від полюсів  $o$  і  $o_1$  відрізки

$$oa = \frac{v_A}{\mu_v}, \quad ob = \frac{v_B}{\mu_v}; \quad o_1 a_1 = \frac{a_A}{\mu_a}, \quad o_1 b_1 = \frac{a_B}{\mu_a}.$$

Сполучивши вершини  $a$  і  $b$ ,  $a_1$  і  $b_1$  променів  $\overrightarrow{oa}$ ,  $\overrightarrow{ob}$  і  $\overrightarrow{o_1 a_1}$ ,  $\overrightarrow{o_1 b_1}$ , дістанемо вектори  $\overrightarrow{ab}$  і  $\overrightarrow{a_1 b_1}$ , які в масштабі зображують обертальну швидкість  $\overrightarrow{v_{AB}}$  і обертальне прискорення  $\overrightarrow{a_{AB}^l}$  точки  $B$  плоскої фігури при її обертанні навколо полюса  $A$ . Далі графічна побудова така сама, як і в перших двох випадках.

## § 24. Графічний метод визначення кутових, лінійних швидкостей і прискорень за допомогою відповідних миттєвих центрів \_\_\_\_\_

Крім графічного способу визначення лінійних і кутових швидкостей плоскопаралельного руху за допомогою побудови плану швидкостей, можна скористатись іншим, незалежним від нього, також графічним способом, який називається способом миттєвого центра швидкостей.

Якщо вихідними даними є швидкість  $\vec{v}_A$  будь-якої точки  $A$  плоскої фігури і кутова її швидкість  $\omega$ , то, побудувавши за натуральними розмірами і вибраним лінійним масштабом  $\mu_l$  схему плоскої фігури, можна знайти на ній положення миттєвого центра швидкостей  $P$ , відклавши від точки  $A$  по перпендикуляру до напрямку швидкості  $\vec{v}_A$  відрізок завдовжки

$$AP = \frac{l_{AP}}{\mu_l} = \frac{v_A}{\omega \mu_l}. \quad (7.26)$$

Для того щоб знайти швидкості решти точок  $B, C, D, \dots$  плоскої фігури, сполучимо їх із знайденим миттєвим центром швидкостей  $P$ . Вимірявши довжини відрізків  $BP, CP, DP, \dots$  і врахувавши масштаб швидкостей  $\mu_v$ , дістанемо шукані швидкості

$$v_B = v_A \frac{AP}{BP}, \quad v_C = v_A \frac{AP}{CP}, \quad v_D = v_A \frac{AP}{DP}, \dots \quad (7.27)$$

Напрямок їх можна знайти за відомою кутовою швидкістю (див. рис. 7.3, *a*).

У разі вихідних даних, коли швидкість однієї точки  $A$  плоскої фігури відома як за модулем, так і за напрямком, а для другої точки  $B$  задано траєкторію руху, можна визначити положення миттєвого центра швидкостей  $P$  і кутову швидкість  $\omega$  таким чином. Через точки  $A$  і  $B$  до напрямку  $\vec{v}_A$  і дотичної до траєкторії точки  $B$  проводять перпендикуляри. Точка їх перетину є миттєвим центром швидкостей  $P$ . Кутову швидкість  $\omega$  плоскої фігури можна визначити, попередньо вимірявши довжину відрізка  $AP$ , за формулою

$$\omega = \frac{v_A}{l_{AP}} = \frac{v_A}{AP \mu_l}. \quad (7.28)$$

Швидкості точок  $B, C, D, \dots$  дістають вимірюванням довжин відрізків  $BP, CP, DP, \dots$  на схемі плоскої фігури (рис. 7.4, *a*) та обчисленням за відомими формулами (7.27).

Якщо задано швидкості  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_B$  двох точок  $A$  і  $B$  плоскої фігури, то кутову швидкість у разі плоскопаралельного руху можна знайти ана-

літично (6.30). Подальше графічне розв'язання провадиться за вже розглянутою раніше схемою.

У разі графічного визначення прискорень точок плоскої фігури для плоскопаралельного руху за допомогою миттєвого центра прискорень  $Q$ , якщо відомі  $\vec{a}_A$ ,  $\omega$  і  $\varepsilon$ , користуються формулою

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4 \mu_I}} = \frac{l_{AQ}}{\mu_I} \quad (7.29)$$

і співвідношенням (6.50). Відрізок  $AQ$  відкладають на прямій, яка утворює з вектором прискорення  $\vec{a}_A$  кут  $\beta$ . Цей кут відкладають від  $\vec{a}_A$  у напрямі відомого кутового прискорення  $\varepsilon$  (див. рис. 7.3, а). Точку  $Q$  з'єднуємо з такими точками  $B, C, D, \dots$  на схемі плоскої фігури, прискорення яких треба знайти. Вимірявши довжини відрізків  $BQ, CQ, DQ, \dots$ , за відомими формулами (6.48) дістанемо:

$$a_B = a_A \frac{AQ}{BQ}; \quad a_C = a_A \frac{AQ}{CQ}; \quad a_D = a_A \frac{AQ}{DQ}; \quad \dots \quad (7.30)$$

Напрями прискорень  $\vec{a}_B, \vec{a}_C, \vec{a}_D, \dots$  встановлюються за напрямом кутового прискорення  $\varepsilon$ . Бачимо, що в цьому разі можна обійтись без даних плану прискорень. Але це неможливо, якщо прагнути визначити графічно за допомогою миттєвого центра прискорень  $Q$  прискорення всіх точок плоскої фігури, коли відомі прискорення однієї її точки  $A$  і траєкторія другої її точки  $B$ , або замість траєкторії відома пряма, в якій лежить вектор прискорення  $\vec{a}_B$ . Тоді, відповідно до векторних рівнянь

$$\vec{ob} = \vec{oa} + \vec{ab}, \quad \vec{o_1 n_1} + \vec{n_1 b_1} = \vec{o_1 a_1} + \vec{a_1 m_1} + \vec{m_1 b_1}$$

і формули (7.25), треба частково побудувати плани швидкостей і прискорень (рис. 7.4, б, в), а саме: геометричний трикутник  $oab$  і геометричний чотирикутник  $o_1 a_1 m_1 b_1$ . Отже, крім указаних даних, належить знати ще швидкість  $\vec{v}_A$  тієї самої точки  $A$  (рис. 7.4, а).

Визначивши за даними планів швидкостей і прискорень на підставі формул (7.23) і (7.26) кутову швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$ , графічне розв'язання продовжують, як і раніше, з використанням співвідношень (7.29) і (7.30). Зауважимо: якщо відома пряма, на якій лежить вектор прискорення  $\vec{a}_B$  другої точки  $B$ , то для побудови на плані прискорень геометричного чотирикутника  $o_1 a_1 m_1 b_1$  досить використати першу векторну рівність (7.18).

Якщо прискорення точок плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху лежать за миттєвим центром прискорень  $Q$  у випадку, коли вихідними даними є прискорення  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_B$  двох точок плоскої

фігури, то, побудувавши геометричний трикутник  $o_1a_1b_1$  на плані прискорень (рис. 7.4, *в*), можна знайти кутову швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$ , якщо через вершину  $a_1$  провести пряму, паралельну відрізку  $BA$  на схемі плоскої фігури, а через вершину  $b_1$  — перпендикуляр до цього самого відрізка  $BA$ . Точка  $m_1$  перетину цієї прямої і перпендикуляра є вершиною прямокутного трикутника  $a_1m_1b_1$  з катетами  $a_1m_1$  і  $m_1b_1$ . Вимірявши їхні довжини, за формулами (7.22) можна обчислити кутову швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$ , а далі графічне розв'язання задачі здійснюється на підставі формул (7.29) і (7.30).

## § 25. Визначення швидкості та прискорення матеріальних частинок абсолютно твердого тіла в системі декартових координат

Спочатку знайдемо кінематичні рівняння плоскопаралельного руху плоскої фігури у власній площині, а також кінематичні рівняння руху окремих точок плоскої фігури. Нехай маємо деякий плоскопаралельний рух абсолютно твердого тіла, який замінено відповідним йому плоскопаралельним рухом плоскої фігури у власній нерухомій площині  $xOy$  (рис. 8.1). Для того щоб мати змогу

розглядати відносно плоскої фігури різні її точки, незмінно зв'яжемо з нею систему декартових координат  $\xi A\eta$  з початком у довільній точці  $A$  плоскої фігури ( $A$  є полюсом плоскої фігури). Введена рухома система осей  $\xi A\eta$  разом із площиною фігурою здійснює в нерухомій площині  $xOy$  заданий плоскопаралельний рух.

Абсолютні координати полюса  $A$  позначимо  $x_A$  і  $y_A$ , а кут, який утворює рухома вісь  $A\xi$  з нерухомою віссю  $Ox$ , —  $\varphi$ . Також розглянемо на плоскій фігурі довільну точку  $B$ . Її координати в рухомій  $\xi A\eta$  і нерухо-

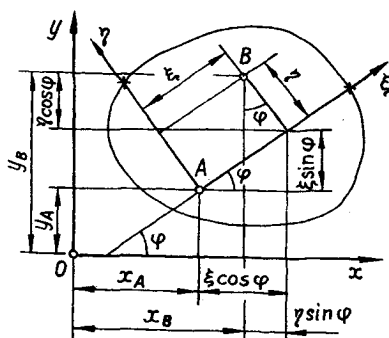


Рис. 8.1

мій  $xOy$  системах є  $\xi$ ,  $\eta$  і  $x_B$ ,  $y_B$  відповідно. Якщо для даного моменту часу положення всіх точок плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху в нерухомій системі  $xOy$  відомо, то відомо і положення плоскої фігури.

З'ясуємо, які скалярні, незалежні між собою параметри однозначно визначають положення плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху. Для цього виразимо абсолютні координати  $x_B$  і  $y_B$  точки  $B$  плоскої фігури через координати  $\xi$  і  $\eta$  цієї точки в системі осей  $\xi A\eta$ . З рис. 8.1 запишемо:

$$\begin{aligned}x_B &= x_A + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \\y_B &= y_A + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi.\end{aligned}\tag{8.1}$$

Тут  $\xi$  і  $\eta$  від часу не залежать, а  $x_A$ ,  $y_A$  і  $\varphi$  — функції часу. Ці співвідношення показують, що задання трьох величин — абсолютних координат  $x_A$ ,  $y_A$  полюса  $A$  і кутової координати  $\varphi$ , також абсолютної, цілком визначає положення всіх точок плоскої фігури, а отже, і положення плоскої фігури. Неперервні, однозначні і незалежні між собою функції часу  $t$

$$\begin{aligned}x_A &= x_A(t); \\y_A &= y_A(t); \\ \varphi &= \varphi(t)\end{aligned}\tag{8.2}$$

називаються кінематичними рівняннями плоскопаралельного руху плоскої фігури у власній площині, а отже, і рівняннями плоскопаралельного руху абсолютно твердого тіла, який замінено відповідним йому рухом плоскої фігури.

Функції (8.2) повинні мати принаймні першу і другу похідні по часу. Кут  $\varphi$  називають кутом повороту плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху у власній нерухомій площині  $xOy$ . Він є додатною величиною, якщо його відкладати від нерухомої осі  $Ox$  проти руху стрілки годинника. У протилежному разі кут повороту  $\varphi$  від'ємний.

Співвідношення (8.1), в яких  $\xi$  і  $\eta$  не залежать від часу, а величини  $x_A$ ,  $y_A$  є функціями часу відповідно до рівнянь (8.1), називаються кінематичними рівняннями руху точок плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху.

Якщо рівняння (8.1) задані, то, продиференціювавши по часу обидві частини виразів (8.1), дістанемо

$$\begin{aligned}\dot{x}_B &= \dot{x}_A + (-\dot{\xi} \sin \varphi - \eta \dot{\varphi} \cos \varphi) = \dot{x}_A - \dot{\varphi}(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi); \\ \dot{y}_B &= \dot{y}_A + (\dot{\xi} \cos \varphi - \eta \dot{\varphi} \sin \varphi) = \dot{y}_A + \dot{\varphi}(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi).\end{aligned}\tag{8.3}$$

Щоб з'ясувати зміст цих виразів, введемо одиничні вектори рухомих  $\xi_A \eta$  і нерухомих  $xOy$  осей:  $\xi^\circ$ ,  $\eta^\circ$  і  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ , також одиничні вектори  $\vec{l}_{\parallel}^\circ$  і  $\vec{l}_{\perp}^\circ$  відповідно поздовжнього і поперечного напрямів відрізка  $AB$ , що сполучає точку  $B$  плоскої фігури з її полюсом  $A$  (рис. 8.1), та виведемо векторні співвідношення

$$\vec{\xi}^\circ = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi; \quad \vec{\eta}^\circ = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi;\tag{8.4}$$

$$\vec{l}_{\parallel}^\circ = \vec{\xi}^\circ \cos \alpha + \vec{\eta}^\circ \sin \alpha; \quad \vec{l}_{\perp}^\circ = -\vec{\xi}^\circ \sin \alpha + \vec{\eta}^\circ \cos \alpha.\tag{8.5}$$

Також маємо, що

$$\xi = AB \cos \alpha; \quad \eta = AB \sin \alpha.\tag{8.6}$$

Помножимо першу рівність системи (8.3) на одиничний вектор  $\vec{i}$ , а другу — на  $\vec{j}$  і додамо їх:

$$\begin{aligned} \dot{x}_B \vec{i} + \dot{y}_B \vec{j} &= \dot{x}_A \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j} - \dot{\varphi}(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \vec{i} + \dot{\varphi}(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \vec{j} = \\ &= \vec{v}_A + \dot{\varphi} \xi (\cos \varphi \vec{j} - \sin \varphi \vec{i}) - \dot{\varphi} \eta (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}). \end{aligned}$$

Врахувавши (8.4), дістанемо

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \dot{\varphi} \xi \vec{\eta}^\circ - \dot{\varphi} \eta \vec{\xi}^\circ = \vec{v}_A + \dot{\varphi}(\xi \vec{\eta}^\circ - \eta \vec{\xi}^\circ).$$

Скориставшись формулами (8.5) і (8.6), маємо

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + AB \dot{\varphi} \vec{l}_\perp^\circ.$$

Але на підставі формули (8.12) величина  $AB \dot{\varphi} \vec{l}_\perp^\circ$  є обертальною швидкістю  $\vec{v}_{AB}$  точки  $B$  при обертанні плоскої фігури навколо полюса  $A$ . Отже, остаточно

$$\vec{v}_{AB} = AB \dot{\varphi} \vec{l}_\perp^\circ; \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}.$$

Це — відома теорема (6.9) про швидкість точок плоскої фігури. На підставі перших похідних (8.3) обчислимо другі:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_B &= \ddot{x}_A - \ddot{\varphi}(\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) - \dot{\varphi}^2(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi); \\ \ddot{y}_B &= \ddot{y}_A + \ddot{\varphi}(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - \dot{\varphi}^2(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Щоб з'ясувати зміст цих рівностей, домножимо їх на  $\vec{i}$  та  $\vec{j}$ , відповідно дістанемо їхню векторну суму:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_B \vec{i} + \ddot{y}_B \vec{j} &= \ddot{x}_A \vec{i} + \ddot{y}_A \vec{j} - \dot{\varphi}^2[(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \vec{i} + (\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) \vec{j}] + \\ &+ \ddot{\varphi}[(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \vec{j} - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \vec{i}] = \ddot{a}_A - \dot{\varphi}^2[(\xi \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) + \\ &+ \eta(\cos \varphi \vec{j} - \sin \varphi \vec{i})] + \ddot{\varphi}[\xi(\cos \varphi \vec{j} - \sin \varphi \vec{i}) - \eta(\sin \varphi \vec{j} + \cos \varphi \vec{i})]. \end{aligned}$$

Якщо скористатися формулами (8.4) — (8.6), то останню рівність можна перетворити таким чином:

$$\ddot{a}_B = \ddot{a}_A - \dot{\varphi}^2 AB \vec{l}_{\parallel}^\circ + \ddot{\varphi} AB \vec{l}_\perp^\circ.$$

Відповідно до вже відомих формул (6.18) — (6.20) маємо

$$\ddot{a}_{AB}^{\parallel^\circ} = -\dot{\varphi}^2 AB \vec{l}_{\parallel}^\circ; \quad \ddot{a}_{AB}^{\perp^\circ} = \ddot{\varphi} AB \vec{l}_\perp^\circ,$$

де  $\ddot{a}_{AB}^{\parallel^\circ}$  — поздовжнє обертальне прискорення точки  $B$  при обертанні плоскої фігури навколо полюса  $A$  (напряма його протилежний до одиничного вектора  $\vec{l}_{\parallel}^\circ$ );  $\ddot{a}_{AB}^{\perp^\circ}$  — поперечне обертальне прискорення точки  $B$  при обертанні плоскої фігури навколо полюса  $A$ ; якщо  $\ddot{\varphi} > 0$ , то напрями  $\ddot{a}_{AB}^{\perp^\circ}$  і  $\vec{l}_\perp^\circ$  збігаються, при  $\ddot{\varphi} < 0$  вектори  $\ddot{a}_{AB}^{\perp^\circ}$  і  $\vec{l}_\perp^\circ$  мають протилежні напрями.

Отже, це — відома теорема про прискорення точок плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху (6.16, 6.17): їхню геометричну інтерпретацію наведено на рис. 6.5.

## § 26. Рівняння рухомої й нерухомої центрів \_\_\_\_\_

Розглянемо рівняння (8.3), які визначають проекції швидкостей точок плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху на нерухомі осі декартових координат  $xOy$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_B &= \dot{x}_A - \dot{\varphi}(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi); \\ \dot{y}_B &= \dot{y}_A + \dot{\varphi}(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi).\end{aligned}\quad (8.8)$$

Знайдемо серед точок плоскої фігури ту її точку  $P$ , швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Позначимо  $\xi_P$  і  $\eta_P$  — координати цієї точки в рухомих осях  $\xi A \eta$ , а в нерухомих  $xOy$  —  $x_P$  і  $y_P$ . Тоді можна записати, що  $\dot{x}_P = \dot{y}_P = 0$ , і рівняння за цих умов набувають вигляду

$$\begin{aligned}\xi_P \sin \varphi + \eta_P \cos \varphi &= \frac{\dot{x}_A}{\dot{\varphi}}; \\ \xi_P \cos \varphi - \eta_P \sin \varphi &= -\frac{\dot{y}_A}{\dot{\varphi}}.\end{aligned}$$

Розв'яжемо дану систему рівнянь відносно шуканих координат  $\xi_P$  і  $\eta_P$ . Для цього перше рівняння помножимо на  $\sin \varphi$ , а друге — на  $\cos \varphi$  і результати додамо:

$$\begin{aligned}\xi_P \sin^2 \varphi + \eta_P \cos \varphi \sin \varphi &= \frac{\dot{x}_A}{\dot{\varphi}} \sin \varphi; \\ \xi_P \cos^2 \varphi - \eta_P \sin \varphi \cos \varphi &= -\frac{\dot{y}_A}{\dot{\varphi}} \cos \varphi; \\ \xi_P (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) &= \frac{1}{\dot{\varphi}} (\dot{x}_A \sin \varphi - \dot{y}_A \cos \varphi).\end{aligned}$$

Звідси дістанемо

$$\xi_P = \frac{1}{\dot{\varphi}} (\dot{x}_A \sin \varphi - \dot{y}_A \cos \varphi).$$

Щоб знайти другу координату  $\eta_P$ , помножимо ті самі рівняння на  $\cos \varphi$  і  $\sin \varphi$  відповідно:

$$\begin{aligned}\xi_P \sin \varphi \cos \varphi + \eta_P \cos^2 \varphi &= \frac{\dot{x}_A}{\dot{\varphi}} \cos \varphi; \\ \xi_P \cos \varphi \sin \varphi - \eta_P \sin^2 \varphi &= -\frac{\dot{y}_A}{\dot{\varphi}} \sin \varphi.\end{aligned}$$



Їхня різниця становить

$$\eta_P = \frac{1}{\dot{\varphi}} (\dot{x}_A \cos \varphi + \dot{y}_A \sin \varphi).$$

Отже, знайдено систему двох рівнянь

$$\begin{aligned} \xi_P &= \frac{1}{\dot{\varphi}} (\dot{x}_A \sin \varphi - \dot{y}_A \cos \varphi); \\ \eta_P &= \frac{1}{\dot{\varphi}} (\dot{x}_A \cos \varphi + \dot{y}_A \sin \varphi), \end{aligned} \quad (8.9)$$

яка визначає на плоскій фігурі в системі рухомих осей  $\xi_A \eta$  точку  $P$ , швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Таку точку плоскої фігури називають миттєвим центром швидкостей. У праву частину рівнянь (8.9) входять відомі функції часу, які задають рух полюса та обертання плоскої фігури відносно нерухомих осей  $xOy$ . Для того щоб знайти координати  $\xi_P$  і  $\eta_P$ , треба на підставі (8.2) обчислити похідні  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{x}_A$  і  $\dot{y}_A$  й підставити їхні значення в співвідношення (8.9). У правих частинах останніх містяться функції часу. Отже, система рівнянь (8.9) — це параметричні рівняння певної кривої лінії, яка є геометричним місцем миттєвих центрів швидкостей  $P$ , незмінно зв'язаних з плоскою фігурою в разі її плоскопаралельного руху. Ця крива називається *рухомою центроїдою*.

Під час плоскопаралельного руху точки рухомої центроїди у відповідні послідовні моменти часу одна за одною на мить зупиняються, щоб стати миттєвим центром швидкостей  $P$ . Можна казати, що рухома центроїда — це геометричне місце таких точок плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху, які у відповідній часовій послідовності на мить зупиняються в положенні миттєвого центра швидкостей, щоб змінити напрям своєї швидкості на протилежний. Детальніші дослідження свідчать, що траєкторії точок, розташованих на рухомій центроїді, в положеннях миттєвого центра швидкостей мають злом зі спільною дотичною (див. рис. 6.16).

Тепер знайдемо рівняння нерухомої центроїди, розв'язавши сумісно систему рівнянь:

$$\begin{aligned} x_P &= x_A + \xi_P \cos \varphi - \eta_P \sin \varphi; \\ y_P &= y_A + \xi_P \sin \varphi + \eta_P \cos \varphi; \\ \xi_P \sin \varphi + \eta_P \cos \varphi &= \frac{\dot{x}_A}{\dot{\varphi}}; \\ \xi_P \cos \varphi - \eta_P \sin \varphi &= -\frac{\dot{y}_A}{\dot{\varphi}}, \end{aligned}$$

які впливають з (8.1) і (8.7) з урахуванням умов  $x_B = x_P$ ,  $y_B = y_P$ , а також  $\dot{x}_B = \dot{y}_P = 0$ .

Підставивши в перші два рівняння останньої системи  $-\frac{\dot{y}_A}{\dot{\varphi}}, \frac{\dot{x}_A}{\dot{\varphi}}$

відповідно до двох її інших рівнянь, дістанемо

$$\begin{aligned}x_P &= x_A - \frac{\dot{y}_A}{\dot{\varphi}}; \\y_P &= y_A + \frac{\dot{x}_A}{\dot{\varphi}}.\end{aligned}\tag{8.10}$$

Це — рівняння нерухомої центроїди — геометричного місця миттєвих центрів обертання плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху. Нерухома центроїда лежить в нерухомій площині  $xOy$ , в якій відбувається плоскопаралельний рух плоскої фігури. У кожний момент часу при плоскопаралельному русі рухома і нерухома центроїди торкаються одна одної в спільній точці  $P$ , не перетинаючись у точці дотику, в якій збігаються миттєвий центр швидкостей  $P_v$  і миттєвий центр обертання  $P_e$ , мають спільну дотичну. У точці дотику рухомої і нерухомої центроїд відповідна точка рухомої центроїди змінює напрям власної швидкості на протилежний, унаслідок чого траєкторія її зазнає зламу.

Щоб знайти параметричні рівняння нерухомої центроїди відповідно до рівнянь (8.10), треба виконати дії, які вказано в правих частинах, над заданими функціями (8.2). Маючи параметричні рівняння, неважко перейти до нерухомої центроїди в абсолютних координатах  $x_P$  і  $y_P$ .

Розглянемо вивід рівнянь рухомої і нерухомої центроїд для механізму еліпсографа (див. рис. 6.1, *a*). Спочатку запишемо рівняння плоскопаралельного руху стержня  $CB$  еліпсографа у вигляді (8.2). Початок рухомих осей  $\xi A\eta$  сумістимо із серединою стержня  $CB$ , тобто з кінцем  $A$  кривошипа  $OA$  механізму. Вісь  $A\xi$  напрямимо вздовж  $CB$  з додатним напрямом від  $A$  до  $B$ , а другу вісь  $A\eta$  напрямимо таким чином, щоб вона з попередньою утворювала праву декартову систему координат. Також введемо кут повороту  $\varphi$  стержня  $CB$  як додатний кут між осями  $Ox$  і  $A\xi$  ( $\varphi = \angle(Ox, A\xi)$ ).

З рис. 6.1, *a* дістанемо рівняння плоскопаралельного руху стержня  $CB$ :

$$\begin{aligned}\varphi &= 180^\circ - \varphi_{OA}; \\x_A &= r \cos \varphi_{OA}; \\y_A &= r \sin \varphi_{OA},\end{aligned}\tag{8.11}$$

де  $\varphi_{OA}$  — кут повороту кривошипа  $OA = r$ .

Підставимо ці величини в рівняння (8.10) і виконаємо відповідні дії:

$$\begin{aligned}x_P &= x_A - \frac{\dot{y}_A}{\dot{\varphi}} = r \cos \varphi_{OA} - \frac{r \dot{\varphi}_{OA} \cos \varphi_{OA}}{-\dot{\varphi}_{OA}} = 2r \cos \varphi_{OA}; \\y_P &= y_A + \frac{\dot{x}_A}{\dot{\varphi}} = r \sin \varphi_{OA} + \frac{-r \dot{\varphi}_{OA} \sin \varphi_{OA}}{-\dot{\varphi}_{OA}} = 2r \sin \varphi_{OA}.\end{aligned}$$

Параметром є кут повороту кривошипа  $OA$ . Виключивши його з рівнянь, дістанемо рівняння нерухої центроїди стержня  $CB$ :

$$x_p^2 + y_p^2 = 4r^2. \quad (8.12)$$

Це — рівняння кола з радіусом, який дорівнює подвоєній довжині кривошипа  $OA$ , і центром, розташованим на осі обертання кривошипа. Рівняння рухої центроїди стержня  $CB$  дістанемо, якщо в співвідношення (8.9) підставимо (8.11):

$$\begin{aligned} \xi_p &= \frac{1}{-\dot{\varphi}_{OA}} (-r \dot{\varphi}_{OA} \sin \varphi_{OA} \sin \varphi_{OA} - r \dot{\varphi}_{OA} \cos \varphi_{OA} \cos(180^\circ - \varphi_{OA})) = \\ &= r \sin^2 \varphi_{OA} - r \cos^2 \varphi_{OA} = -r \cos 2\varphi_{OA}; \\ \eta_p &= \frac{1}{-\dot{\varphi}_{OA}} (-r \dot{\varphi}_{OA} \sin \varphi_{OA} \cos \varphi_{OA} + r \dot{\varphi}_{OA} \sin \varphi_{OA} \cos \varphi_{OA}) = \\ &= -2r \sin \varphi_{OA} \cos \varphi_{OA} = -r \sin 2\varphi_{OA}. \end{aligned}$$

Отже, параметричні рівняння рухої центроїди стержня еліпсографа мають вигляд

$$\xi_p = -r \cos 2\varphi_{OA}; \quad \eta_p = -r \sin 2\varphi_{OA}. \quad (8.13)$$

Піднесемо обидві частини цих рівностей до квадрата і після цього додамо їх:

$$\xi_p^2 + \eta_p^2 = r^2. \quad (8.14)$$

Це — рівняння рухої центроїди стержня еліпсографа в системі осей  $\xi_A \eta$ , яке описує коло радіусом  $r$  з центром  $A$  на середині стержня  $CB$ . Тепер застосуємо рівняння (8.1) і (8.2) для аналітичного визначення кінематичних характеристик плоскопаралельного руху стержня  $CB$  еліпсографа (див. рис. 6.1,  $a$ ).

Розглянемо частковий випадок, коли кутова швидкість  $\omega_{OA}$  кривошипа  $OA$  є сталою. Тоді рівняння плоскопаралельного руху лінійки  $CB$  (8.11) набувають вигляду

$$\begin{aligned} x_A &= r \cos \omega_0 t; \\ y_A &= r \sin \omega_0 t; \\ \varphi &= \pi - \omega_0 t. \end{aligned} \quad (8.15)$$

За цими рівняннями знаходимо швидкість і прискорення середньої точки  $A$  (полюса) стержня, а також його кутову швидкість і кутове прискорення:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= \dot{x}_A = -r \omega_0 \sin \omega_0 t; & v_{Ay} &= \dot{y}_A = r \omega_0 \cos \omega_0 t; \\ v_A &= \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = \sqrt{(r \omega_0)^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t)} = r \omega_0; \\ a_{Ax} &= \ddot{x}_A = -r \omega_0^2 \cos \omega_0 t; & a_{Ay} &= \ddot{y}_A = -r \omega_0^2 \sin \omega_0 t; \\ a_A &= \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \sqrt{(r \omega_0^2)^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t)} = r \omega_0^2; \\ \omega &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(\pi - \omega_0 t)}{dt} = -\omega_0; & \varepsilon &= \frac{d\omega}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Застосуємо загальні рівняння (8.1) і визначимо швидкості й прискорення точок  $B$  і  $C$  стержня механізму:

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \xi_B = r; & \eta &\equiv \eta_B = 0; \\ x_B &= x_A + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi = r \cos \omega_0 t - r \cos \omega_0 t = 0; \\ y_B &= y_A + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi = r \sin \omega_0 t + r \sin \omega_0 t = 2r \sin \omega_0 t; \\ v_{By} &= v_B = \dot{y}_B = 2r \omega_0 \cos \omega_0 t; \\ a_{By} &= a_B = \ddot{y}_B = -2r \omega_0^2 \sin \omega_0 t; \\ x_C &= x_A + \xi_C \cos \varphi - \eta_C \sin \varphi = r \cos \omega_0 t + r \cos \omega_0 t; \\ y_C &= y_A + \xi_C \sin \varphi + \eta_C \cos \varphi = r \sin \omega_0 t - r \sin \omega_0 t; \\ x_C &= 2r \cos \omega_0 t; & y_C &\equiv 0; \\ v_{Cx} &= v_C = -2r \omega_0 \sin \omega_0 t; & a_{Cx} &= a_C = -2r \omega_0^2 \cos \omega_0 t.\end{aligned}$$

Маємо загальні формули для визначення швидкості і прискорення точки  $C$  стержня  $CB$ . На рис. 6.9 в положеннях кривошипа  $OA$  при  $\varphi_{01} = \varphi_{OA} = 0$ ,  $\varphi_{02} = \varphi_{OA} = 45^\circ$  і  $\varphi_{03} = \varphi_{OA} = 90^\circ$  зображено за даними розрахунків вектори швидкостей і прискорень точки  $C$  лінійки еліпсографа. Наведемо ці розрахунки, скориставшись добутими формулами для  $v_{Cx}$  і  $a_{Cx}$ :

$$\begin{aligned}v_{Cx} &= v_{C1} = -2r \omega_0 \cdot 0 = 0; & v_{C2} &= -2r \omega_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}r \omega_0; & v_{C3} &= -2r \omega_0; \\ a_{Cx} &= a_{C1} = -2r \omega_0^2; & a_{C2} &= -2r \omega_0^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}r \omega_0^2; & a_{C3} &= 0.\end{aligned}$$

Також для зазначених положень кривошипа  $OA$  за формулами  $x_P = 2r \cos \varphi_{OA}$ ,  $y_P = 2r \sin \varphi_{OA}$  знайдемо положення миттєвого центра швидкостей стержня:

$$\begin{aligned}x_{P1} &= 2r; & x_{P2} &= 2r \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}r; & x_{P3} &= 0; \\ y_{P1} &= 0; & y_{P2} &= 2r \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}r; & y_{P3} &= 2r.\end{aligned}$$

На завершення цього параграфу застосуємо загальні рівняння (8.1) і (8.2) для запису кінематичних рівнянь руху точки  $B$  обода колеса (див. рис. 4.18), яке котиться без проковзування по нерухомій горизонтальній прямій. Вважають, що центр колеса має сталу швидкість  $v_0$ . Спочатку запишемо рівняння плоскопаралельного руху колеса, прийнявши його центр  $A$  за полюс. Нехай у початковий момент часу  $t_0$ , який беруть за нульовий, колесо при коченні перебуває в положенні, в якому його центр  $A_0$  розташований на вертикальній осі  $Oy$  (див. рис. 6.16). Рухомі осі  $\xi A \eta$  в початковому положенні колеса спрямуємо таким чином: вісь  $A\xi$  по вертикалі вниз, а вісь  $A\eta$  — відповідно горизонтально в напрямі зліва направо (рис. 8.2).

При даному виборі осей  $\xi A \eta$  початковий кут повороту колеса має від'ємне значення  $\varphi = -90^\circ$ . З рис. 8.2 видно, що кут повороту в

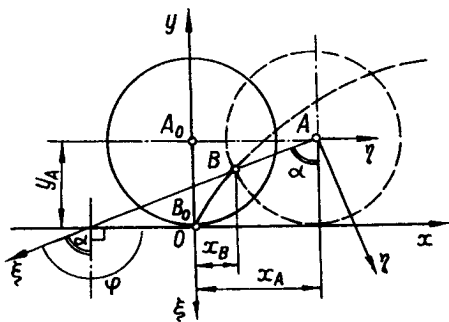


Рис. 8.2

Маючи рівняння плоскопаралельного руху колеса, на підставі рівнянь (8.1) виведемо рівняння руху точки  $B$  обода колеса, яка в початковий момент  $t_0 = 0$  містилася на початку системи осей  $xOy$ .

У нашому випадку  $\xi_B = r$  і  $\eta_B = 0$ . Тоді

$$x_B = x_A + \xi \cos \varphi - \eta \cos \varphi = v_0 t + r \cos \varphi;$$

$$y_B = y_A + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi = R + r \sin \varphi.$$

Враховуючи, що  $\varphi = -\frac{\pi}{2} - \alpha = -\frac{\pi}{2} - \frac{v_0}{r} t$ , дістанемо шукані рівняння

$$x_B = v_0 t - r \sin \frac{v_0 t}{r}; \quad y_B = r(1 - \cos \frac{v_0 t}{r}),$$

що збігаються з формулами (6.52).

поточний момент часу  $t$   $\varphi = -\frac{\pi}{2} - \alpha$ , де  $\alpha$  — кут повороту

колеса, який задовольняє умову кочення без ковзання

$$x_A = v_0 t = \alpha r.$$

Отже, шукані рівняння руху колеса матимуть вигляд

$$x_A = v_0 t, \quad y_A = r, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{v_0}{r} t,$$

$\alpha = \frac{v_0}{r} t$  має абсолютне значення.

## ГЕОМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

### § 27. Теореми про кінцеве переміщення плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху. Миттєвий центр обертання та миттєвий центр швидкостей

---

Плоскопаралельним рухом абсолютно твердого тіла називається такий його рух, коли всі точки тіла переміщуються паралельно одній із площин абсолютно нерухомої прямокутної (декартової) системи координат  $xOyz$ . Нехай деякий плоскопаралельний рух тіла відбувається паралельно нерухомій декартовій площині  $xOy$  (див. рис. 8.2).

Нерухому площину  $xOy$ , паралельно якій тіло рухається, назвемо *основною площиною*. Вважатимемо, що тіло в разі плоскопаралельного руху складається з безлічі (сім'ї) паралельних між собою та незмінно зв'язаних з тілом прямих, перпендикулярних до нерухомої площини  $xOy$ , паралельно якій відбувається заданий рух тіла.

Кожна пряма цієї сім'ї на підставі означення плоскопаралельного руху і властивостей абсолютно твердого тіла відповідно поступально рухається, причому траєкторії, швидкості й прискорення всіх точок, розташованих на окремій такій прямій даної сім'ї, однакові. Отже, поступальний рух кожної прямої такої сім'ї можна замінити рухом будь-якої точки, незмінно зв'язаної з цією прямою. Такою доцільно взяти точку перетину відповідної прямої сім'ї з основною площиною  $xOy$ . Отже, на основній площині дістанемо геометричне місце неперервно розташованих точок, кінематичний стан яких визначає поступальні рухи прямих, що належать до розглядуваної сім'ї та на які замінено тіло в разі його плоскопаралельного руху. Утворене таким чином на основній площині геометричне місце точок є незмінюваною плоскою фігурою, рух якої в основній площині  $xOy$  цілком визначає плоскопаралельний рух тіла.

Звівши вивчення плоскопаралельного руху тіла до відповідного йому руху плоскої фігури в основній площині  $xOy$ , з'ясуємо, при яких вихідних даних положення плоскої фігури в основній площині буде однозначно визначено. Оскільки плоска фігура як проекція абсолютно твердого тіла на основну площину є незмінюваною в разі

плоскопаралельного руху, то відстані між точками  $A, B, C, D, \dots$ , задовольняють умови:

$$AB = \text{const}; AC = \text{const}; BC = \text{const}; AD = \text{const}; CD = \text{const}, \dots$$

Положення точки  $A$  плоскої фігури в основній площині  $xOy$  задамо двома відрізками  $OA_x$  і  $A_xA$ , паралельними відповідним осям  $Ox$  і  $Oy$ . Задавши відстань  $OB_x$  від початку  $O$  нерухомих осей  $xOy$  до проекції другої точки  $B$  плоскої фігури на вісь  $Ox$ , дістанемо положення точки  $B$ , оскільки воно міститься на перетині прямої, що проходить через точку  $B_x$  паралельно осі  $Oy$ , і дуги кола радіусом  $AB$  з центром у точці  $A$ . На підставі положення відрізка  $AB$  в основній площині легко знайти відрізки  $OC_x, C_xC$ , які однозначно визначають положення третьої точки  $C$ . Справді, відносно відрізка  $AB$  (плоскої фігури) точка  $C$  міститься на перетині дуг кіл радіусами  $AC$  і  $BC$  з центрами  $A$  і  $B$  відповідно: опустивши з даної точки  $C$  перпендикуляр на нерухому вісь  $Ox$ , дістанемо шукані відрізки  $OC_x, C_xC$ . Так само визначаються положення решти точок плоскої фігури в основній площині за відомим положенням прямолінійного відрізка  $AB$ , незмінно зв'язаного з плоскою фігурою.

Отже, підсумовуючи ці міркування, дістанемо висновок: положення і рух плоскої фігури в основній площині цілком визначаються положенням і рухом прямолінійного відрізка, незмінно зв'язаного з плоскою фігурою. Вихідними даними мають бути три лінійні відрізки  $OA_x, A_xA$  і  $OB_x$ , тобто три декартові координати  $x_A, y_A$  і  $x_B$ . Зауважимо, що лінійну координату  $x_B$  можна замінити кутовою координатою  $\varphi$ , що є кутом між прямою, в якій лежить відрізок  $AB$ , і додатним напрямом нерухомої осі  $Ox$ . Кутовий параметр  $\varphi$  вважається додатним, якщо він відкладається від осі  $Ox$  проти руху стрілки годинника. Кут  $\varphi$  визначає напрям прямої, на якій лежить відрізок  $AB$  плоскої фігури. Відклавши від точки  $A$  на цьому напрямі відрізок  $AB$ , дістанемо його положення в основній площині.

Момент часу  $t_0$ , в який починають вивчати плоскопаралельний рух, називають *початковим моментом*. У початковий момент часу на плоскій фігурі вибирають довільно точку  $A$ , через яку проводять нерухомі декартові осі  $Ox$  і  $Oy$  основної площини  $xOy$ . На осі  $Ox$  у цей самий момент часу  $t_0$  вибирають другу точку  $B$  фігури. Отже, в початковий момент часу координати точки  $A$  відрізка  $AB$  дорівнюють нулю, також дорівнює нулю і кутова координата, тобто

$$x_A(t_0) = y_A(t_0) = \varphi(t_0) = 0.$$

Через відтинок часу  $\Delta t = t - t_0$  у разі плоскопаралельного руху плоскої фігури положення її прямолінійного відрізка  $AB$  в основній площині визначається двома координатами  $x_A, y_A$  точки  $A$  і кутовим параметром  $\varphi$ . Точку  $A$  називають *полюсом плоскої фігури*, а кутову координату  $\varphi$  — *кутом повороту плоскої фігури*. Абсолютні декартові

координати полюса  $A$  і кут повороту плоскої фігури, як неперервні і однозначні, принаймні двічі диференційовані по часу функції

$$\begin{aligned}x_A &= x_A(t), \\y_A &= y_A(t), \\ \varphi &= \varphi(t)\end{aligned}\tag{9.1}$$

є кінематичними рівняннями плоскопаралельного руху плоскої фігури в основній площині  $xOy$ .

Головний висновок про те, що плоскопаралельний рух тіла задається трьома незалежними між собою параметрами, які часто називають *узagalьненими координатами*, можна обґрунтувати також аналітично. Властивість незмінюваності плоскої фігури під час її плоскопаралельного руху у власній площині  $xOy$  можна виразити математично:

$$\begin{aligned}(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 &= AB^2 = \text{const}; \\(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 &= AC^2 = \text{const}; \\(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_A)^2 &= BC^2 = \text{const}; \\(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 &= AD^2 = \text{const}; \\(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 &= CD^2 = \text{const},\end{aligned}\tag{9.2}$$

де  $x_C, y_C, x_D$  і  $y_D$  — декартові координати точок  $C$  і  $D$ .

Співвідношення (9.2), які зв'язують абсолютні координати чотирьох точок  $A, B, C$  і  $D$  плоскої фігури, характеризують незмінюваність трикутників  $ABC$  і  $ACD$ . Подібними рівняннями можна зв'язати координати решти точок плоскої фігури. Якщо для трикутника  $ABC$  записано три співвідношення, то розгляд кожної з наступних точок  $D, E, \dots$  дає по два рівняння. Отже, якщо число точок плоскої фігури позначити  $n$ , а кількість рівнянь вигляду (9.2), які можна записати, —  $L$ , то дістанемо рівність

$$L = 2(n - 3) - 3 = 2n - 3.\tag{9.3}$$

У формулі (9.3)  $n \geq 3$ , а  $2n$  дорівнює числу координат, які входять в систему рівнянь, кількість яких  $L$ . Для будь-якого натурального числа, що задовольняє умову  $n \geq 3$ , різниця між числом декартових координат  $2n$  і кількістю рівнянь  $L$ , які зв'язують ці координати, є величиною сталою і дорівнює трьом, тобто

$$N = 2n - L = 3.\tag{9.4}$$

Число «3» означає, що в системі п'яти рівнянь (9.2) лише три декартові координати є незалежними, а решту координат можна виразити через незалежні. За незалежні координати можна взяти абсцису і ординату точки  $A$  ( $x_A$  і  $y_A$ ), а також абсцису  $x_B$  або ординату  $y_B$  точки  $B$ . Друга координата точки  $B$  визначається з першого рівняння системи (9.2). Отже, використовуючи співвідношення вигляду (9.2), до-



ведено, що положення плоскої фігури в своїй площині в разі плоскопаралельного руху однозначно задається трьома незалежними параметрами. Це означає, що абсолютні декартові координати будь-яких точок абсолютно твердого тіла під час його плоскопаралельного руху паралельно одній з нерухомих декартових площин системи координат  $xOy$  можна виразити через три незалежні параметри.

**Теорема про повертання і поступальне переміщення.** У разі плоскопаралельного руху плоску фігуру у власній площині можна перевести з одного її положення в інше двома послідовними й незалежними один від одного переміщеннями — повертанням навколо довільно взятої точки на плоскій фігури в її першому положенні на цілком певний кут, який утворюють між собою напрямки одного й того самого прямолінійного відрізка плоскої фігури в її першому й другому положеннях, і довільним поступальним переміщенням між проміжним після повороту положенням і другим положенням.

Доведення теореми розглянемо на прикладі плоскопаралельного руху ланки  $AB$  (прямолінійного стержня) плоского механізму, яким є антипаралелограм (див. далі рис. 10.2). У ньому ланка  $O_1O_2$  нерухома, а кривошипи  $O_1A$  і  $O_2B$  обертаються навколо нерухомих центрів  $O_1$  і  $O_2$  відповідно:  $O_1A = O_2B$ ,  $O_1O_2 = AB$  і  $O_1A > AB$ .

Під час плоскопаралельного руху стержня  $AB$  антипаралелограма (рис. 9.1) точки  $A$  і  $B$  рухаються по колах однакового радіуса з центрами  $O_1$  і  $O_2$  відповідно (рис. 9.1, а). У цьому разі вирази (9.1) і (8.1) є цілком конкретними функціями часу. Виберемо будь-які два положення ланки  $AB$  у разі плоскопаралельного руху —  $A_1B_1$  і  $A_2B_2$ . Їм відповідають моменти часу  $t_1$  і  $t_2$ , підставивши які в рівняння (9.1) і (8.1), дістанемо координати точок  $A$  і  $B$ , а також кут повороту стержня  $AB$  в його першому і другому положеннях.

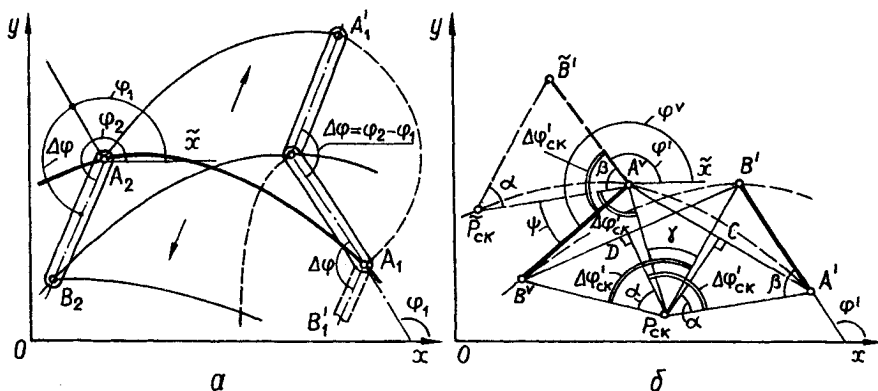


Рис. 9.1

Визначимо кут між напрямками  $A_1B_1$  і  $A_2B_2$ , яким відповідає ланка  $AB$  у першому і другому її положеннях. З рис. 9.1, *a* встановимо, що цей кут  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Діставши даний кут  $\Delta\varphi$ , повернемо ланку  $AB$  у першому її положенні  $A_1B_1$  навколо точки  $A_1$  або  $B_1$  проти руху стрілки годинника на кут  $\Delta\varphi$ . Як наслідок маємо проміжні після повороту положення  $A_1B'_1$  або  $B_1A'_1$ . Ланка  $AB$  у цих проміжних положеннях паралельна цій самій ланці в її другому положенні  $A_2B_2$  (рис. 9.1, *a*). Для того щоб знайти друге положення  $A_2B_2$ , треба з проміжного положення  $A_1B'_1$  або  $B_1A'_1$  переміщувати поступально стержень  $AB$  таким чином, щоб, наприклад, точка його  $A$  рухалася по колу радіусом  $O_1A$  з центром у точці  $O_1$  з положення  $A_1$  в положення  $A_2$  (при проміжному положенні  $A_1B'_1$ ), або щоб точка  $B$  рухалася по колу радіусом  $O_2B$  із центром  $O_2$  з положення  $B_1$  у  $B_2$  в разі другого проміжного положення  $B_1A'_1$  стержня  $AB$ ). Зауважимо, що поступальне переміщення ланки  $AB$  між будь-яким її проміжним положенням і другим кінцевим можна здійснювати довільним поступальним рухом, коли точки ланки  $AB$  не обов'язково мають рухатися по тих траєкторіях, по яких вони рухаються в разі дійсного плоскопаралельного руху між розглядуваними положеннями  $A_1B_1$  і  $A_2B_2$ . Теорему доведено.

З доведеної теореми випливають два наслідки.

**Наслідок 1.** Плоскопаралельний рух тіла між двома його положеннями можна розглядати як одночасне здійснення двох рухів — поступального, який визначається рухом довільно вибраної в тілі точки (полюса), і цілком певного обертального навколо полюса з кутом повороту, що визначається заданими положеннями тіла. Отже, поступальних рухів між двома певними положеннями тіла може бути безліч залежно від того, яку точку тіла вибрано за полюс. Обертальний рух навколо полюса між двома заданими положеннями тіла — одного виду, та може мати різні центри обертання, які залежать від вибору полюса.

**Наслідок 2.** Плоскопаралельний рух тіла в послідовні неперервно розташовані один за одним моменти часу є водночас здійснюванні два види рухів — миттєво поступальний, що визначається рухом полюса, і миттєво обертальний навколо полюса.

**Теорема про скінченне повертання (теорема Шаля).** У разі плоскопаралельного руху плоску фігуру в нерухомій площині з одного положення в інше можна перемістити лише одним скінченим повертанням навколо деякої нерухомої точки — центра скінченного повертання на кут, який утворюють напрямки будь-якого відрізка плоскої фігури в її першому і другому положеннях.

Доведемо цю теорему на прикладі плоскопаралельного руху стержня  $AB$  антипаралелограма (див. далі рис. 9.1, *b*, рис. 9.4). В розглядуваному разі виберемо довільно два положення  $A'B'$  і  $A''B''$  ланки  $AB$  у

нерухомій площині  $xOy$ , між якими плоскопаралельний рух здійснюється відповідно до другого наслідку теореми про повертання і поступальне переміщення. Кінці стержня описують кола радіусами  $O_1A$  і  $O_2B$  з центрами  $O_1$  і  $O_2$ .

Для доведення через середини  $C$  і  $D$  прямолінійних відрізків  $A'A^\vee$  і  $B'B^\vee$ , які сполучають кінці стержня  $AB$  у його першому і другому положеннях, проведемо до них перпендикуляри. Позначимо їхню точку перетину  $P_{CK}$  і назовемо її *центром скінченного повертання*. Сполучимо даний центр  $P_{CK}$  з кінцями стержня  $AB$  у його положеннях  $A'B'$  і  $A^\vee B^\vee$ . У результаті дістанемо трикутники  $P_{CK}A'B'$ ,  $P_{CK}A'A^\vee$ ,  $P_{CK}A^\vee B^\vee$  і  $P_{CK}B'B^\vee$ .

Зауважимо, що трикутники  $P_{CK}A'A^\vee$  і  $P_{CK}B'B^\vee$  є рівнобедреними за побудовою, тобто  $P_{CK}A' = P_{CK}A^\vee$  і  $P_{CK}B' = P_{CK}B^\vee$  (геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців даного прямолінійного відрізка, є перпендикуляр до цього відрізка, проведений через його середину), а трикутники  $P_{CK}A'B'$  і  $P_{CK}A^\vee B^\vee$  рівні, оскільки в них  $A'B' = A^\vee B^\vee$ ,  $P_{CK}A' = P_{CK}A^\vee$  як сторони рівнобедреного трикутника  $P_{CK}A'A^\vee$ , і  $P_{CK}B' = P_{CK}B^\vee$  як сторони рівнобедреного трикутника  $P_{CK}B'B^\vee$ . З рівності сторін цих трикутників випливає рівність відповідних кутів.

Легко бачити, що кути  $(P_{CK}A', P_{CK}A^\vee)$  і  $(P_{CK}B', P_{CK}B^\vee)$  рівні, бо кожний з них є сумою тих самих двох кутів  $\alpha$  і  $\gamma$ , тобто  $\Delta\varphi'_{CK} = \alpha + \gamma$ . Тепер повернемо трикутник  $P_{CK}A'B'$  навколо центра  $P_{CK}$  проти руху стрілки годинника на кут  $\Delta\varphi'_{CK}$ , тоді трикутники  $P_{CK}A'B'$  і  $P_{CK}A^\vee B^\vee$  збігаються. Точки  $A'$  і  $B'$ , описавши кола радіусами  $P_{CK}A'$  і  $P_{CK}B'$  із центром  $P_{CK}$ , сумістяться з відповідними точками  $A^\vee$  і  $B^\vee$ . Отже, замінено дійсний плоскопаралельний рух між двома скінченними положеннями плоскої фігури довільним обертальним рухом навколо центра скінченного обертання з цілком певним кутом повороту, що визначається граничними положеннями плоскої фігури, стосовно яких замінюється плоскопаралельний рух на обертальний.

З рис. 9.2 видно, що кут повороту  $\Delta\varphi'$ , яким ланка  $AB$  з першого її крайнього положення переводиться в її друге граничне положення, дорівнює різниці

$$\Delta\varphi' = \varphi^\vee - \varphi',$$

де  $\varphi'$  — кут між напрямом  $A'B'$  відрізка  $AB$  у першому його положенні і додатним напрямом осі  $Ox$  (або між  $A^\vee B'$  і  $A^\vee x$ );  $\varphi^\vee$  — кут між напрямом  $A^\vee B^\vee$  відрізка  $AB$  в його другому положенні і тією самою декартовою віссю  $Ox$ .

Справді, перемістивши трикутник  $P_{CK}A'B'$  без зміни напрямку його сторін в положення, коли його вершина  $A'$  збігається з точкою  $A^\vee$ , бачимо, що кут між напрямом  $A^\vee P_{CK}$  і  $A^\vee P_{CK}$  дорівнює куту між сторонами  $P_{CK}A'$  і  $P_{CK}A^\vee$ . Отже,

$$\angle \vec{B}'A' \vec{P}_{CK} = \angle \vec{P}_{CK} A' P_{CK} = \beta + \psi = \Delta\varphi'_{CK} = \varphi' - \varphi'.$$

Теорему доведено.

### Наслідки з теореми Шаля.

1. У кожний момент часу плоскопаралельний рух (плоскої фігури, тіла) є миттєвим обертальним рухом навколо нерухомого миттєвого центра обертання (миттєвої осі обертання).

2. Плоскопаралельний рух в часі й просторі є неперервно здійснюваними миттєвими обертальними рухами навколо неперервно розташованих миттєвих центрів (миттєвих осей) обертання.

Справедливість першого наслідку можна довести, якщо в момент часу  $t$  розглянути положення  $AB$  плоскої фігури в основній площині, а в попередній і близький до  $t$  момент часу  $t'$  — положення  $A'B'$ , то на підставі теореми Шаля за час  $\Delta t = t - t'$  з попереднього  $A'B'$  у близьке до нього наступне положення  $AB$  плоску фігуру можна перемістити повертанням її навколо центра скінченного обертання  $P_{CK}$  на цілком певний кут (рис. 9.2)

$$\Delta\varphi_{CK} = \Delta\varphi = \varphi - \varphi',$$

який визначається положеннями  $A'B'$  і  $AB$ . Даний обертальний рух за час  $\Delta t = t - t'$  з кутом повороту  $\Delta\varphi_{CK}$  навколо точки  $P_{CK}$  характеризується середньою кутовою швидкістю

$$\omega_{\text{сеп}} = \frac{\Delta\varphi_{CK}}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi'}{t - t'}.$$

Якщо час  $t'$  необмежено наблизити до  $t$ , то положення  $A'B'$  необмежено наблизиться до  $AB$ , а  $P_{CK}$  — до свого граничного положення  $P$  — миттєвого центра обертання. Також набуде граничного значення середня кутова швидкість:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_{CK}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi - \varphi'}{t - t'} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Це — миттєва кутова швидкість плоскої фігури в разі її обертання навколо миттєвого центра обертання  $P$ .

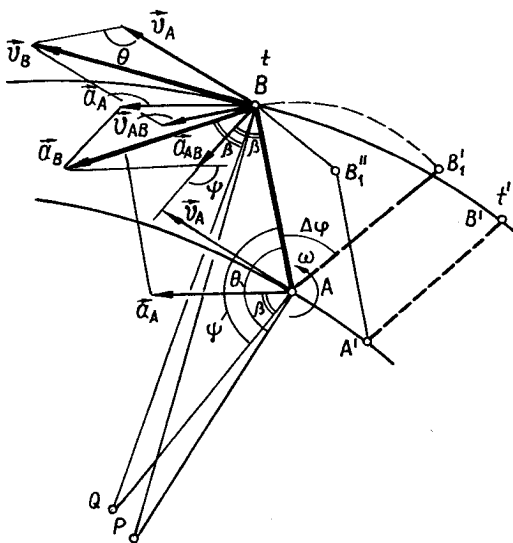


Рис. 9.2

Якщо в даний момент часу  $t$  кутова швидкість  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , а положення миттєвого центра обертання —  $P$ , то для плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху можна визначити швидкість точки  $B$  (рис. 9.2):

$$v_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BB'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2DP_{CK} \sin \frac{\Delta\varphi_{CK}}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} DP_{CK} \times$$

$$\times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi_{CK}}{2}}{\frac{\Delta\varphi_{CK}}{2}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_{CK}}{\Delta t} = BP\omega,$$

яка напрямлена в бік кутової швидкості  $\omega$  і перпендикулярна до відрізка  $BP$ , що сполучає точку  $B$  із миттєвим центром обертання  $P$ .

Справедливість другого наслідку теореми Шаля можна довести через такі міркування. Скінченний відтинок часу  $\Delta t = t_n - t_0$ , протягом якого вивчається плоскопаралельний рух, поділимо на велику кількість малих відтинків часу:

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0; \Delta t_2 = t_2 - t_1; \Delta t_3 = t_3 - t_2; \dots; \Delta t_i = t_i - t_{i-1}; \Delta t_n = t_n - t_{n-1}.$$

Відповідно до кожного такого елементарного відтинку часу  $\Delta t_i$  ( $i=1; 2; 3; \dots; n$ ) розглянемо два положення  $A_{i-1}B_{i-1}$  і  $A_iB_i$ , що відповідають моментам часу  $t_{i-1}$  і  $t_i$ . На підставі теореми Шаля плоскопаралельний рух на кожному окремому відтинку часу  $\Delta t_i$  між відповідними цим відтинком положеннями  $A_{i-1}B_{i-1}$  і  $A_iB_i$  замінено скінченним повертанням навколо відповідних центрів обертання  $P_{CK}$  на кут  $\Delta\varphi_i$ . Така заміна справжнього плоскопаралельного руху послідовністю скінченних обертань навколо дискретно розташованих на нерухомій площині центрів обертань є наближеною. Але, якщо кількість відтинків часу в інтервалі  $\Delta t = t_n - t_0$  необмежено збільшувати, а значення кожного елементарного відтинку  $\Delta t_i$  необмежено зменшувати, то дедалі менше відрізнятимуться між собою сусідні положення плоскої фігури, що відповідають моментам часу  $t_{i-1}$  і  $t_i$  на кінцях елементарних відтинків  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ . У границі при  $n \rightarrow \infty$  і  $\Delta t_i \rightarrow 0$  замість скінченних поворотів навколо центрів скінченного обертання дістанемо миттєві обертання плоскої фігури навколо миттєвих центрів обертання, які розташовуються на нерухомій площині неперервно.

Отже, плоскопаралельний рух є послідовністю здійснюваних у часі неперервних миттєвих обертань з миттєвими кутовими швидкостями  $\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  навколо неперервно розташованих у нерухомій площині миттєвих центрів обертання.

Скористаємося наслідками теореми про повертання і поступальне переміщення плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху для визначення миттєвої кутової швидкості  $\omega$  та лінійних швидкостей

точок  $A$  і  $B$  плоскої фігури. З рис. 9.2 граничним переходом знайдемо кутову швидкість

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\angle B'_1 A B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

У даний момент часу  $t$  точка  $B$  має дві швидкості — від поступально-го руху:

$$v_B^{\text{пост}} = v_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cup A' A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cup B'' B}{\Delta t},$$

що визначається швидкістю полюса  $A$ , і обертального руху, якщо за центр обертання взяти полюс  $A$ :

$$v_{AB} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AB'_1 \Delta \varphi}{\Delta t} = AB \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = AB \omega.$$

Поступальна швидкість точки  $B$  має напрям дотичної до траєкторії полюса  $A$ . Обертальна швидкість точки  $B$  перпендикулярна до відрізка  $AB$  і напрямлена в бік кутової швидкості плоскої фігури. Ці швидкості між собою утворюють певний кут. З іншого боку, за теоремою Шаля швидкість тієї самої точки  $B$

$$v_B = BP \omega.$$

На рис. 9.2 у вигляді векторів  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_{AB}$  і  $\vec{v}_B$  подано швидкості токи  $B$ . Знайдемо правило, за яким можна визначити абсолютну (результуючу) швидкість точки  $B$ , якщо маємо швидкість полюса  $A$  (швидкість поступального руху плоскої фігури) і обертальну швидкість цієї самої точки  $B$  у разі обертального руху плоскої фігури, а центром обертання взято точку  $A$  (полюс). Відомо, що миттєвий центр обертання  $P$  розташований на перетині перпендикулярів до напрямку швидкостей  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_B$ , проведених через точки  $A$  і  $B$ . Розглянемо трикутник  $BPA$  і визначимо за теоремою косинусів довжину його сторони  $BP$ , позначивши протилежний цій стороні кут  $\theta$ :

$$BP^2 = AP^2 + AB^2 - 2AP \cdot AB \cos \theta.$$

Помножимо цю рівність на квадрат кутової швидкості  $\omega^2$ :

$$(BP \omega)^2 = (AP \omega)^2 + (AB \omega)^2 - 2AP \omega \cdot AB \omega \cos \theta.$$

Але, згідно з теоремою Шаля,

$$BP \omega = v_B; \quad AP \omega = v_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CP_{CK} \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \Delta \varphi}{\cos \frac{\Delta \varphi}{2} \Delta t};$$

$$\angle(AP_{CK}, AC) = 90^\circ - \frac{\Delta \varphi}{2}; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta \varphi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}; \quad AB \omega = v_{AB},$$

тоді

$$v_B^2 = v_A^2 + v_{AB}^2 - 2v_A v_{AB} \cos \theta.$$

Це співвідношення означає, що геометрично швидкості  $v_A$ ,  $v_{AB}$  і  $v_B$  утворюють трикутник швидкостей, в якому першою стороною є швидкість полюса  $v_A$ , другою — обертальна швидкість  $v_{AB}$  і третьою — результуюча швидкість  $v_B$ . Добудувавши даний трикутник швидкостей до паралелограма, дістанемо шукане правило: швидкість точки  $B$  плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на швидкості полюса і обертальній швидкості даної точки, якщо за центр обертання плоскої фігури взяти полюс. Це — правило паралелограма швидкостей, яке подають у вигляді

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}.$$

Застосування розглянутих геометричних теорем про плоскопаралельний рух для визначення миттєвої кутової швидкості і миттєвого кутового прискорення дає однаковий результат, оскільки ці кінематичні характеристики не залежать від того, яку точку вибрано за центр обертання плоскої фігури.

Нехай положення  $AB$  плоскої фігури фіксоване та відповідає моменту часу  $t$ , а положення  $A'B'$  змінюється і наближається до  $AB$ . Тоді в граничному переході

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega - \omega'}{t - t'} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t},$$

$\omega$  і  $t$  — фіксовані, а  $\omega'$  і  $t'$  змінні, коли наближаються до фіксованих  $\omega$  і  $t$ , а центр обертання  $P_{СК}$  наближається до миттєвого центра  $P$ . Отже,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Прискорення точок плоскої фігури в разі плоскопаралельного руху, якщо розглядати лише поступальний її рух, можна визначити за дійсним переміщенням полюса  $A$  по відомій наперед траєкторії від положення  $A'$  в момент часу  $t'$  до наступного положення  $A$  у фіксований момент часу  $t$ . Друга точка  $B$  прямолінійного відрізка плоскої фігури рухається по такій самій траєкторії, як і полюс  $A$  (траєкторії всіх точок плоскої фігури в разі поступального руху, що визначається полюсом, конгруентні). Раніше моменту часу  $t'$  точка  $B$  опиняється в положенні  $B'_1$ , а пізніше моменту часу  $t$  — у положенні  $B$ . Цьому відповідає умова  $\cup A'A = \cup B'_1B$ . Нехай друге положення  $AB$  фіксоване, а перше  $A'B'$  беремо дедалі ближчим до фіксованого  $AB$ . Позначимо швидкість точок  $A$  і  $B$  у положеннях  $A'$  і  $B'_1$  через  $v'_A = v_{B'_1}^n$ , а в положеннях у фіксований момент  $t$  —  $v_A = v_B^n$ . Тоді дотична складова прискорення полюса, а отже, й поступальна дотична складова точки  $B$  визначається як границя

$$a_{At} = a_B^n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_A - v'_A}{t - t'} = \frac{\Delta v_{At}}{\Delta t} = \frac{dv_{At}}{dt}.$$

Якщо позначити  $C_{кр}$  — центр кривизни траєкторії полюса  $A$  в його положенні на цій траєкторії в момент часу  $t$ , то границя зміни напрямку швидкості полюса  $A$  при наближенні точки  $A'$  до точки  $A$  (коли відтинок часу  $\Delta t = t - t'$  прямує до нуля) є нормальною складовою прискорення полюса:

$$a_{An} = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{v_A^2}{AC_{кр}}.$$

Зазначимо, що центр кривизни  $C_{кр}$  і миттєвий центр обертання  $P$  лежать на спільній прямій (головній нормалі). За даними складовими  $a_{At}$  і  $a_{An}$  знайдемо прискорення полюса  $A$ :

$$a_A = \sqrt{a_{At}^2 + a_{An}^2}, \quad \text{tg} \angle(\bar{a}_{An}, \bar{a}_A) = \frac{a_{At}}{a_{An}}.$$

Це прискорення дорівнює поступальному прискоренню точки  $B$  відрізка  $AB$  плоскої фігури в її фіксованому положенні в момент часу  $t'$ :

$$\bar{a}_B^n = \bar{a}_A = \bar{a}_{At} + \bar{a}_{An}.$$

Щоб зобразити прискорення  $\bar{a}_B^n = \bar{a}_A$  в точці  $B$ , треба вектор  $\bar{a}_A$  з полюса  $A$  паралельно, без зміни його модуля й напрямку, перенести в дану точку  $B$  (рис. 9.2).

Обертальне прискорення  $\bar{a}_{AB}$  точки  $B$  знайдемо, якщо розглянемо лише обертальний рух плоскої фігури навколо полюса  $A$ . У цьому разі точка  $B$  рухається по дузі  $\cup B_1' B$  кола радіусом  $AB_1' = AB$  з центром  $A$ . При визначенні цього прискорення перше положення плоскої фігури вважається змінним, тобто, коли  $t'$  зростає до фіксованого  $t$ ,  $A'B'$  розташовується якнайближче до  $AB$ , а сторона  $AB$  кута  $\angle BAB_1' = \Delta\varphi$ , обертаючись навколо полюса  $A$ , прагне суміститися з другим положенням  $AB$  плоскої фігури в момент часу  $t$ , в який треба знайти вираз для обертального прискорення точки  $B$ .

З рис. 9.2 шляхом граничного переходу знайдемо шукане поперечне обертальне прискорення точки  $B$ :

$$a_{AB}^t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AB(\omega - \omega')}{t - t'} = AB \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega - \omega'}{t - t'} = AB \varepsilon.$$

Застосуванням границі також дістанемо другу прямокутну складову обертального прискорення — поздовжнє обертальне прискорення:

$$a_{AB}^n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2AB \omega \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AB \omega \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = AB \omega^2.$$



Отже, модуль і напрям повного обертального прискорення точки  $B$  плоскої фігури в заданому положенні  $AB$  у момент часу  $t$  виражаються формулами

$$a_{AB} = \sqrt{(a_{AB}^{\perp})^2 + (a_{AB}^{\parallel})^2} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Розглянуті геометричні теореми не дають прямої відповіді на запитання: як за відомими двома складовими прискореннями  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_{AB}$  знайти повне абсолютне прискорення точки  $B$  плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху. Проте, ґрунтуючись на цих теоремах, виведено правило паралелограма швидкостей, оскільки складові швидкості  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_{AB}$  точки  $B$  визначалися незалежно від визначення результуючої абсолютної швидкості цієї самої точки (останню швидкість було знайдено за миттєвим центром обертання).

Щоб дістати правило паралелограма для прискорень, треба незалежно визначити спочатку абсолютне прискорення точки  $B$ . Для цього модуль й напрям повних прискорень точок тіла в разі обертального руху навколо нерухомої осі визначають за формулами

$$a_B = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

а лінійні швидкості тих самих точок —  $v_B = R\omega$ , де  $R$  — відстань точок тіла до осі обертання, яка є геометричним місцем точок, швидкості й прискорення яких під час обертання тіла дорівнюють нулю. Отже, в разі обертального руху тіла навколо нерухомої осі її точки є водночас центрами швидкостей і центрами прискорень.

Точка  $P_v$ , яка незмінно зв'язана з плоскою фігурою і збігається з миттєвим центром обертання  $P$ , у даний момент часу має нульову швидкість. Ця точка  $P_v$  плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху називається миттєвим центром швидкостей. Тепер, якщо за полюс взяти миттєвий центр швидкостей  $P_v$ , то швидкості точок плоскої фігури

$$v_B = BP_v \cdot \omega,$$

де  $BP_v$  — відстань точки  $B$  до миттєвого центра швидкостей  $P_v$ .

Введемо таку точку плоскої фігури  $Q$ , щоб відстані до неї, наприклад точок  $A$  і  $B$  плоскої фігури, в даний момент часу в разі її плоскопаралельного руху і прискорення цих точок  $a_A$  і  $a_B$  задовольняли співвідношення

$$a_A = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \\ a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

де прискорення  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_B$  утворюють з відрізками  $AQ$  і  $BQ$  кут  $\beta$ . Він відкладається від векторів  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_B$  у напрямі кутового прискорення  $\varepsilon$

плоскої фігури. З першої формули за відомим прискоренням полюса  $a_A$  і кутом  $\beta$  визначимо положення шуканої точки  $Q$  (положення цієї точки цілком визначається прискоренням  $a_A$  полюса  $A$  і величинами  $\omega$ ,  $\varepsilon$ ):

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Сполучивши другу точку  $B$  плоскої фігури, прискорення якої треба знайти, з  $Q$ , дістанемо довжину відрізка  $BQ$ . На підставі  $BQ$  і кута  $\beta$  дістанемо шукане прискорення точки  $B$ :

$$a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad a_B = a_A \frac{BQ}{AQ}.$$

Тепер встановимо правило, яке виражає співвідношення між модулями й напрямками складових прискорень  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{a}_{AB}$  точки  $B$  і її результуючим прискоренням  $\vec{a}_B$ . Для цього розглянемо геометричний трикутник  $QAB$  (рис. 9.2), в якому кут, протилежний стороні  $BQ$ , позначимо  $\psi$ , і запишемо теорему косинусів:

$$(BQ)^2 = (AQ)^2 + (AB)^2 - 2AQ \cdot AB \cos \psi.$$

Помножимо почленно цю рівність на  $(\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4})^2$ :

$$(BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4})^2 = (AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4})^2 + (AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4})^2 - 2(AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4})(AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4})\cos \psi,$$

але

$$BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_B; \quad AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A; \quad AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_{AB}.$$

Отже, дістанемо

$$a_B^2 = a_A^2 + a_{AB}^2 - 2a_A a_{AB} \cos \psi.$$

Крім того, мають місце пропорції

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{a_{AB}}{AB} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Добуті результати показують, що прискорення  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{a}_{AB}$  і  $\vec{a}_B$  утворюють трикутник прискорень  $Ba_{AB}$   $a_B$ , подібний геометричному трикутнику  $BAQ$  і повернутий відносно останнього на кут  $\beta$  (коефіцієнтом подібності цих трикутників є  $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ ). З рис. 9.2 видно, що абсолютне прискорення  $\vec{a}_B$  є водночас діагоналлю паралелограма, побудованого на складових прискореннях — переносному  $\vec{a}_A$  і відносному  $\vec{a}_{AB}$ . Даний паралелограм називається паралелограмом прискорень, а вершина  $Q$  геометричного трикутника  $QAB$ , незмінно зв'язаного в даний момент часу з плоскою фігурою і сторони якого пропорціональні сторонам трикутника прискорень з коефіцієнтом пропорційності  $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ , називається *миттєвим центром прискорень*.

Отже, якщо за полюс взято довільну точку  $A$  плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху, то абсолютне прискорення будь-якої іншої її точки  $B$  визначається за правилом паралелограма прискорень:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB} = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{\perp} + \vec{a}_{AB}^{\parallel}.$$

Якщо за полюс взяти не довільну точку плоскої фігури, а її миттєвий центр прискорень  $Q$ , то для точки  $B$  плоскої фігури її прискорення

$$\vec{a}_B = \vec{a}_Q + \vec{a}_{QB} = \vec{a}_Q + \vec{a}_{QB}^{\perp} + \vec{a}_{QB}^{\parallel},$$

де

$$a_{QB}^{\perp} = QB\omega^2; \quad a_{QB}^{\parallel} = QB\varepsilon.$$

Але

$$a_{QB} = a_B = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \sqrt{(a_{QB}^{\perp})^2 + (a_{QB}^{\parallel})^2},$$

звідки

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{QB}^{\perp} + \vec{a}_{QB}^{\parallel}.$$

Зіставивши її з основною векторною рівністю:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_Q + \vec{a}_{QB}^{\perp} + \vec{a}_{QB}^{\parallel},$$

дістанемо висновок, що прискорення миттєвого центра прискорень  $Q$  дорівнює нулю ( $\vec{a}_Q = 0$ ).

## § 28. Рухомі і нерухомі центроїди

Повернемося до розгляду плоскопаралельного руху ланки  $AB$  механізму антипаралелограма (рис. 9.3, 9.4) у разі її дійсного руху відмітимо два скінченні положення ланки  $AB$ ,  $A_1B_1$  і  $A_2B_2$ , яким відповідають моменти часу  $t_1$  і  $t_2$ . Протягом скінченного відтинку часу  $\Delta t = t_2 - t_1$  між положеннями  $A_1B_1$  і  $A_2B_2$  ланка  $AB$  здійснює плоскопаралельний рух, коли її крайні точки  $A$  і  $B$  описують кола радіусами  $O_1B$  і  $O_2B$  з центрами  $O_1$  і  $O_2$  відповідно.

Поділимо інтервал часу  $\Delta t = t_2 - t_1$  на елементарні:

$$\Delta t'_1 = t' - t_1; \quad \Delta t''_2 = t'' - t'; \quad \Delta t'''_3 = t''' - t''; \quad \Delta t^{IV}_4 = t^{IV} - t'''; \\ \Delta t^V_5 = t^V - t^{IV}; \quad \Delta t^{VI}_6 = t^{VI} - t^V \quad \text{і} \quad \Delta t^{VII} = t_2 - t^{VI}.$$

Нехай у моменти часу  $t_1, t', t'', t''', t^{IV}, t^V, t^{VI}$  і  $t_2$  ланка  $AB$  займе свої дійсні положення в разі плоскопаралельного руху  $A_1B_1, A'B', A''B'', A'''B''', A^{IV}B^{IV}, A^VB^V, A^{VI}B^{VI}$  і  $A_2B_2$ . Застосуємо теорему Шаля й замінемо дійсний рух між зазначеними положеннями  $A_1B_1$  і  $A'B', A''B''$  і  $A'''B''', A^{IV}B^{IV}, A^VB^V$  і  $A^{VI}B^{VI}$ ,

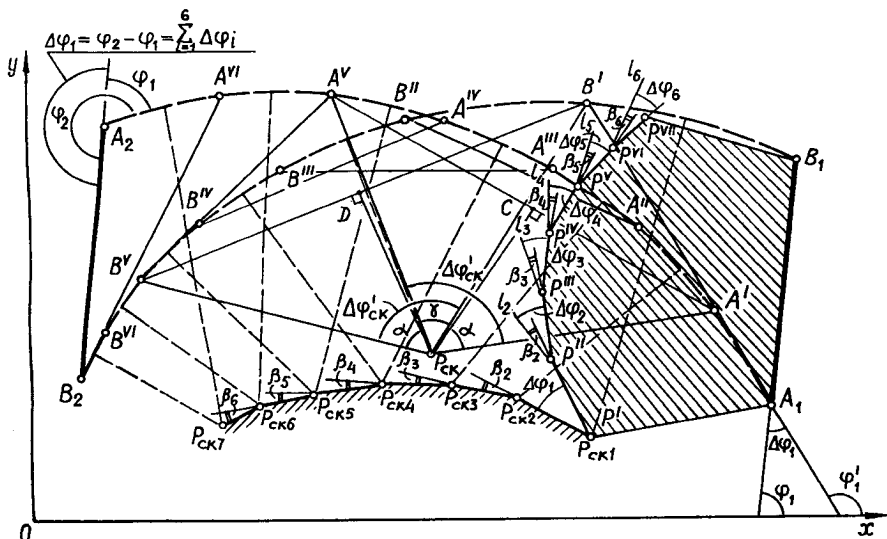


Рис. 9.3

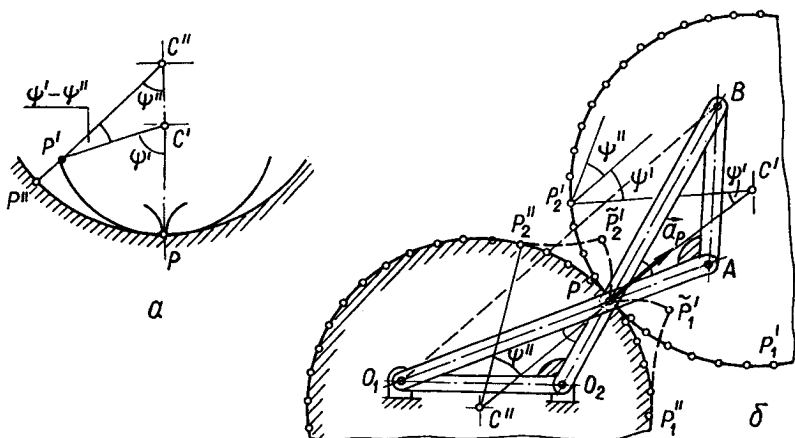


Рис. 9.4

$A^V B^V$  і  $A_2 B_2$  скінченними поворотами навколо відповідних центрів  $P_{CK1}$ ,  $P_{CK2}$ ,  $P_{CK3}$ ,  $P_{CK4}$ ,  $P_{CK5}$ ,  $P_{CK6}$  і  $P_{CK7}$  на кути (рис. 9.3)  $\Delta\varphi_1 = \varphi' - \varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_2 = \varphi'' - \varphi'$ ,  $\Delta\varphi_3 = \varphi''' - \varphi''$ ,  $\Delta\varphi_4 = \varphi^{IV} - \varphi'''$ ,  $\Delta\varphi_5 = \varphi^V - \varphi^{IV}$ ,  $\Delta\varphi_6 = \varphi^{VI} - \varphi^V$  і  $\Delta\varphi_7 = \varphi_2 - \varphi^{VI}$ .

Сполучивши центри скінченного обертання прямолінійними від-  
різками  $P_{CK1}P_{CK2}$ ,  $P_{CK2}P_{CK3}$ ,  $P_{CK3}P_{CK4}$ ,  $P_{CK4}P_{CK5}$ ,  $P_{CK5}P_{CK6}$  і  $P_{CK6}P_{CK7}$ , діста-  
немо на нерухомій площині  $xOy$ , в якій здійснює свій рух механізм  
антипаралелограма, ламану лінію  $P_{CK1}P_{CK2}P_{CK3}P_{CK4}P_{CK5}P_{CK6}P_{CK7}$ .

Позначимо кути між продовженнями сторін цієї ламаної і наступ-  
ними її сторонами як  $\beta_1=0$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\beta_4$ ,  $\beta_5$  і  $\beta_6$  (рис. 9.3).

На плоскій фігурі, з якою незмінно зв'язана ланка  $AB$  механізм-  
у, побудуємо також ламану зі сторонами  $P'P'' = P_{CK1}P_{CK2}$ ,  $P''P''' =$   
 $= P_{CK2}P_{CK3}$ ,  $P'''P^{IV} = P_{CK3}P_{CK4}$ ,  $P^{IV}P^V = P_{CK4}P_{CK5}$ ,  $P^V P^{VI} = P_{CK5}P_{CK6}$  і  
 $P^{VI}P^{VII} = P_{CK6}P_{CK7}$ . У початковий момент часу  $t_1$  інтервалу  $\Delta t = t_2 - t_1$   
до повороту ланки  $AB$  навколо першого центра  $P_{CK1}$  на кут  $\Delta\varphi_1$  перші  
вершини  $P_{CK1}$  і  $P'$  збігаються (точка  $P'$  належить заштрихованій плос-  
кій фігурі). Першу сторону  $P'P''$  другої ламаної проведемо під кутом  
 $\Delta\varphi_1$ , який відкладається від відрізка  $P_{CK1}P_{CK2}$  у напрямі руху стрілки  
годинника. Цей кут дорівнює різниці між кутами  $\varphi'_1$  і  $\varphi_1$ , які утворюю-  
ють положення  $A'B'$  і  $A_1B_1$  із додатним напрямом осі  $Ox$  (рис. 9.3).

Для того щоб побудувати другу сторону  $P''P'''$  цієї ламаної, споч-  
атку з точки  $P''$  проводять пряму  $P''l_2$  під кутом  $\beta_2$ , який відклада-  
ється від продовження сторони  $P'P''$  (позначеного штриховою лі-  
нією) в напрямі, протилежному до руху стрілки годинника. Від отри-  
маної прямої  $P''l_2$  під кутом  $\Delta\varphi_2$  у напрямі руху стрілки годинника  
розташовується друга шукана сторона  $P''P'''$ . Решту сторін ламаної,  
незмінно зв'язаною з ланкою  $AB$ , можна побудувати аналогічно. За-  
значимо, що кути

$$l_2 P''P' = P_{CK3}P_{CK2}P_{CK1}; \quad l_3 P'''P'' = P_{CK4}P_{CK3}P_{CK2}; \quad l_4 P^{IV}P''' = P_{CK5}P_{CK4}P_{CK3};$$

$$l_5 P^V P^{IV} = P_{CK6}P_{CK5}P_{CK4}; \quad l_6 P^{VI}P^V = P_{CK7}P_{CK6}P_{CK5},$$

а також кут

$$A_2B_2, \quad A_2X = \varphi_2.$$

Повний кут повороту ланки  $AB$  при здійсненні нею скінченних  
поворотів є

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 + \dots + \Delta\varphi_1.$$

За нерухомою та рухомою ламаними подамо рух ланки відповідно  
до теореми Шаля. Повернемо заштриховану плоску фігуру проти ру-  
ху стрілки годинника навколо першого центра  $P_{CK1}$  на кут  $\Delta\varphi_1$ . Тоді  
сторони  $P'P''$  і  $P_{CK1}P_{CK2}$  збігаються, також збігаються промінь  $P''l_2$  і  
друга сторона  $P_{CK2}P_{CK3}$  ламаної на нерухомій площині.

Після повороту навколо наступного центра  $P_{CK2}$  на кут  $\Delta\varphi_2$  проти  
руху стрілки годинника сторона  $P''P'''$  ламаної на заштрихованій ру-  
хомій плоскій фігурі збігається з відповідною стороною  $P_{CK2}P_{CK3}$  ла-  
маної на нерухомій площині, а вершини  $P'$  і  $P_{CK1}$  ламаних відокрем-  
люються. Вершини  $P''$  і  $P_{CK2}$  збігаються, а сторона  $PP'$  виявляється  
повернутою на кут  $\Delta\varphi$  відносно нерухомого відрізка  $P_{CK2}P_{CK1}$ .

Переміщуючи в такий спосіб далі заштриховану плоску фігуру, плоскопаралельний рух ланки  $AB$  можна замінити наближеним рухом — коченням рухомої ламаної лінії, незмінно зв'язаної з плоскою фігурою, без ковзання по нерухомій ламаній. Назвемо вершини  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$ ,  $P^{IV}$ ,  $P^V$ ,  $P^{VI}$  і  $P^{VII}$  на нерухомій плоскій фігурі слідами відповідних центрів скінченного обертання на нерухомій площині. Слід  $P^{VII}$  збігається з останнім центром  $P_{СКТ}$ , коли заштрихована плоска фігура повернеться на сумарний кут  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

Уявімо, що в інтервалі часу  $\Delta t = t_2 - t_1$  кількість елементарних відтинків  $\Delta t_i$  нескінченно зростає, а значення кожного з них зменшується до нуля. Тоді положення плоскої фігури, які відповідають моментам на кінцях окремих елементарних відтинків часу  $\Delta t_i$ , нескінченно наближуються одне до одного. В границі замість рухомої та нерухомої ламаних дістанемо неперервні криві.

Одна з неперервних кривих, яка незмінно зв'язана з основною площиною і є геометричним місцем миттєвих центрів обертання  $P$  плоскої фігури, називається *нерухомою центроїдою*.

Друга неперервна крива, яка є геометричним місцем слідів, які залишають на плоскій фігурі її миттєві центри обертання  $P$  під час плоскопаралельного руху, називається *рухомою центроїдою*. Рухома центроїда утворена з таких точок плоскої фігури, швидкості яких у певній часовій послідовності набувають нульових значень відповідно до рівнянь плоскопаралельного руху.

Отже, рухома центроїда — це геометричне місце таких точок плоскої фігури, кожна з яких у відповідний для неї момент часу, збігаючись із відповідним миттєвим центром обертання  $P$  на основній площині, зупиняється на мить для того, щоб плоска фігура в цю мить здійснила миттєвий поворот навколо миттєвого центра обертання  $P$ . Неперервно розташовані точки на рухомій центроїді є миттєвими центрами швидкостей  $P_v$ .

У кожний момент часу в разі плоскопаралельного руху плоскої фігури миттєвий центр швидкостей  $P_v$  та миттєвий центр обертання  $P$  збігаються, забезпечуючи дотик рухомої та нерухомої центроїд.

Також зазначимо, що в певний момент часу в разі плоскопаралельного руху лише одна точка  $P_v$  плоскої фігури, а саме та, яка розташована на рухомій центроїді і яка збігається з миттєвим центром обертання  $P$  на нерухомій центроїді, зупиняється на мить для того, щоб правити за миттєвий центр швидкостей. Решта точок на рухомій центроїді в цей самий момент часу мають відмінні від нуля швидкості, рухаючися кожна по власній траєкторії.

У границі (рис. 9.3) рухома й нерухома ламані стають неперервними кривими (рис. 9.4), які є відповідно рухомою й нерухомою центроїдами. З геометричної картини граничного переходу від наближених «ламаних центроїд» до точних центроїд впливає, що рухома й нерухома центроїди в кожний момент часу в разі плоскопара-

лельного руху плоскої фігури дотикаються одна одній і мають у точці дотику спільну дотичну. Оскільки в точці дотику центроїд у певний момент часу певна точка плоскої фігури, а саме та, яка належить рухомій центроїді, в положенні миттєвого центра обертання  $P$ , який є нерухомою точкою на нерухомій центроїді, на мить зупиняється, тобто стає миттєвим центром швидкостей  $P_v$  плоскої фігури, то в точці дотику центроїд немає переміщення рухомої центроїди відносно нерухомої в напрямі їхньої спільної дотичної. Отже, під час плоскопаралельного руху плоскої фігури в своїй площині рухома центроїда котиться по нерухомій без проковзування.

У випадку антипаралелограма (рис. 9.4) рухомою центроїдою є еліпс з фокусами в кінцевих точках  $A$  і  $B$  ланки  $AB$  і півосями — великою

$$a = \frac{O_1A}{2} = \frac{O_2B}{2}$$

і малою

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{(O_1A)^2 + (A_2B)^2}.$$

Також нерухомою центроїдою ланки  $AB$  є еліпс з такими самими півосями і фокусами в точках  $O_1$  і  $O_2$ . З рис. 9.4 встановимо, що трикутники  $PAB$  і  $PO_1O_2$  рівні — це випливає з рівності трикутників  $O_1O_2B$  і  $BAO_1$ , оскільки за умовою  $AB = O_1O_2$  і  $O_1A = O_2B$ . Тому сума відстаней точок обох центроїд від центрів  $O_1$  і  $O_2$  кривошипів  $O_1A$  і  $O_2B$  —  $O_1P + O_2P = BP + AP = O_1A = O_2B = \text{const}$ , а також точок  $A$  і  $B$  ланки  $AB$  у будь-якому положенні механізму є величиною незмінною, що характерно для кривих, якими є еліпси.

Зауважимо, що в разі плоскопаралельного руху тіла, який замінено відповідним йому плоскопаралельним рухом плоскої фігури у власній площині, рухома циліндрична поверхня з перпендикулярними до основної площини твірними (на цій поверхні лежить рухома центроїда) котиться по нерухомій циліндричній поверхні, твірні якої також перпендикулярні до основної площини і перетинають нерухому центроїду, без проковзування.

Зазначені рухома й нерухома циліндричні поверхні називають відповідно *рухомими* і *нерухомими аксоїдами*. Отже, в разі плоскопаралельного руху тіла рухомий аксоїд котиться по нерухомому без проковзування. Коченню рухомого аксоїда по нерухомому відповідає кочення рухомої центроїди по нерухомій у разі плоскопаралельного руху плоскої фігури, яким замінено відповідний йому плоскопаралельний рух тіла.

Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі є частковим випадком плоскопаралельного руху. Його можна наближено уявити як рух, коли рухомий круглий аксоїд нескінченно малого радіуса котиться без проковзування по нерухомому круглому аксоїду також із не-

скінченно малим радіусом і геометричною віссю, що збігається з нерухомою віссю обертання тіла.

Дослідимо докладніше характер руху точки рухомої центроїди в околі миттєвого центра обертання  $P$ . Нехай для певного плоскопаралельного руху рухомої й нерухомої центроїди побудовано (рис. 9.4, *a*). Тоді положення плоскої фігури в кожний даний момент часу можна визначити положенням рухомої центроїди відносно нерухомої. Доведимо, що точки рухомої центроїди, крім тієї точки, яка в даний момент часу є спільною точкою дотику обох центроїд, позначати  $P'$ , а відповідні їм точки на нерухомій центроїді —  $P''$ .

Припустимо, що рухома центроїда обертається проти руху стрілки годинника. Розглянемо в момент часу  $t$  точку  $P$  дотику центроїд. Нехай з цією точкою збігаються точки  $P'$  і  $P''$ . Простежимо за рухомою точкою  $P'$ , яка раніше моменту часу  $t_1$  порівняно з  $t$  перебувала на власній траєкторії в положенні  $P'_1$ , коли миттєвим центром обертання була точка  $P''_1$ . Через відтинок часу  $\Delta t = t - t_1$  точка  $P'_1$ , описавши ділянку траєкторії  $\cup P'_1 P$ , у момент часу  $t$  повернеться в положення миттєвого центра обертання  $P$  і стане миттєвим центром швидкостей  $P$ . Пізніше моменту часу  $t_2 > t$  ця сама точка  $P'$ , яка в момент  $t$  мала положення  $P$ , рухаючись по власній траєкторії, набуде на ній положення  $P'_2$ , подолавши за час  $\Delta t = t_2 - t$  шлях  $\cup P P'_2$ . Тоді миттєвим центром обертання стає точка  $P''_2$ , з якою в момент часу  $t_2$  збігається точка  $P'_2$  рухомої центроїди (відрізки  $P'_2 C'$  і  $P''_2 C''$  збігаються з головними нормаллями до відповідних центроїд, а відрізок  $C' C''$  лежить на спільній нормаллі до центроїд в точці дотику  $P$ ).

З умови кочення без ковзання можна записати:

$$\cup P P'_2 = \cup P P''_2.$$

З рис. 9.4, *a* видно, що за час  $\Delta t = t_2 - t$  рухома центроїда, прокотившись по нерухомій на її ділянці  $\cup P P''_2$ , повернеться на кут  $\Delta\varphi = \psi' + \psi''$ , а в іншому разі (рис. 9.4, *b*) — на кут  $\Delta\varphi = \psi' - \psi''$ , де  $\psi'$  і  $\psi''$  — це кути, які утворюються відрізками  $P'_2 C'$  і  $P''_2 C''$  зі спільною нормаллю до центроїд в їхній точці дотику  $P$ .

Ці кути можна виразити відповідними дугами центроїд:

$$\psi' = \frac{\cup P P'_2}{P C'}; \quad \psi'' = \frac{\cup P P''_2}{P C''}.$$

Для випадку зовнішнього дотику центроїд

$$\Delta\varphi = \cup P P''_2 \left( \frac{1}{P C'} + \frac{1}{P C''} \right),$$

для випадку внутрішнього дотику

$$\Delta\varphi = \cup P P''_2 \left( \frac{1}{P C'} - \frac{1}{P C''} \right).$$



Якщо відтинок часу  $\Delta t = t_2 - t$  вважати нескінченно малим, то приріст швидкості точки  $\vec{P}'$  на відрізку шляху  $\cup P\vec{P}'_2$  можна визначити за формулою

$$\Delta v_{\vec{P}'_2} = (\omega + \Delta\omega)\vec{P}'_2 P''_2,$$

де  $\omega$  — кутова швидкість плоскої фігури в момент часу  $t$ ;  $\Delta\omega$  — приріст кутової швидкості за час  $\Delta t = t_2 - t$ ;  $\vec{P}'_2 P''_2$  — відстань від точки  $\vec{P}'_2$  до миттєвого центра обертання  $\vec{P}''_2$ , внаслідок обертання навколо якого утворився приріст швидкості  $\Delta v_{\vec{P}'_2}$ .

Далі врахуємо, що точка  $\vec{P}'$  у положенні миттєвого центра обертання  $P$ , в якому вона править за миттєвий центр швидкостей  $P_v$ , має нульове нормальне прискорення

$$a_{P_v, n} = \frac{v_{P_v}^2}{\rho} = 0,$$

де  $\rho$  — радіус кривизни траєкторії точки  $\vec{P}'$  у положенні  $P$ , а її дотичне прискорення  $a_{P_v, \tau}$  відмінне від нуля.

Знайдемо це прискорення, скориставшись граничним переходом:

$$\begin{aligned} a_{P_v, \tau} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\vec{P}'_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \omega \frac{\vec{P}'_2 P''_2}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{P}'_2 P''_2 = \\ &= \omega \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{P}'_2 P''_2}{\Delta t} + \omega \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{P}'_2 P''_2. \end{aligned}$$

Але  $\vec{P}'_2 P''_2 \cong P''_2 P$ , тоді

$$a_{P_v, \tau} = \omega \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P''_2 P}{\Delta t} + \omega \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{P}'_2 P = \omega \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P''_2 P}{\Delta t} = \omega \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \frac{1}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{PC'} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{PC''}}.$$

Границя

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

дорівнює кутовій швидкості плоскої фігури в момент часу  $t$ , коли точка плоскої фігури  $\vec{P}$  має положення миттєвого центра швидкостей  $P_v$ , а границі

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{PC'} = \frac{1}{\rho_1}; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{PC''} = \frac{1}{\rho_2},$$

де  $\rho_1$  — радіус кривизни рухомої центроїди в точці дотику  $P$ ;  $\rho_2$  — радіус кривизни в тій самій точці нерухомої центроїди.

Отже, шукане прискорення

$$a_{P_v, \tau} = a_{P_v} = \frac{\omega^2 \rho_1 \rho_2}{\rho_1 \pm \rho_2}.$$

Зауважимо, що траєкторія точки  $P$ , яка належить рухомій центроїді і збігається з миттєвим центром обертання  $P$ , терпить злам, вершина якого ділить криву траєкторії на дві вітки зі спільною дотичною, що збігається з нормаллю до центроїда у точці дотику  $P$ . Уздовж цієї дотичної до центра кривизни  $C_1$  рухомої центроїди напрямлене дотичне прискорення  $\vec{a}_{P_v}$  миттєвого центра швидкостей  $P_v$  плоскої фігури (рис. 9.4, а). Можна вважати, що нерухомою центроїдою є геометричне місце точок, в яких траєкторії точок плоскої фігури, що лежать на рухомій центроїді, у відповідні моменти часу терплять злам.

Скористаємося рис. 9.2 і виразимо швидкість  $v_P$  миттєвого центра прискорень  $Q$  через прискорення миттєвого центра швидкостей  $P_v$ :

$$v_Q = QP\omega,$$

але

$$QP = \frac{a_{P_v}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Отже,

$$v_Q = \frac{\omega^3 \rho_1 \rho_2}{\rho_1 \pm \rho_2} = \frac{\omega a_{P_v}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Добуті формули показують, що миттєвий центр швидкостей  $P_v$  і миттєвий центр прискорень  $Q$  можуть збігатися лише в разі обертального руху тіла навколо нерухомої осі, коли, як уже зазначалося, рухомою і нерухомою центроїдами є кола нескінченно малого радіуса  $\Delta r$ :

$$\rho_1 = \rho_2 = \Delta r.$$

Від формул

$$v_Q = \omega^3 \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 \pm \rho_2} = \omega^3 \frac{\Delta r^2}{2\Delta r}; \quad a_{P_v} = \omega^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \omega^2 \frac{\Delta r^2}{2\Delta r}$$

перейдемо до границі при  $\Delta r$ , що прямує до нуля, дістанемо

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} v_Q = \omega^3 \frac{1}{2} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta r = 0; \quad \lim_{\Delta r \rightarrow 0} a_{P_v} = \omega^2 \frac{1}{2} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta r = 0.$$

§ 29. Додавання двох видів плоскопаралельного руху навколо миттєвих паралельних осей в однакових напрямках із різними за модулями кутовими швидкостями \_\_\_\_\_

У деяких випадках розв'язання задач кінематики плоскопаралельного руху набагато спрощується, коли плоскопаралельний рух плоскої фігури в нерухомій площині розглядати як складений з двох видів руху — так званих відносного й переносного. Особливо це стосується розкладу абсолютного плоскопаралельного руху на два і більше окремих видів. Це доречно, наприклад, у разі складних плоских механізмів, коли для деяких його ланок на підставі викладеної в попередніх главах теорії плоскопаралельного руху важко розв'язати завдання знаходження миттєвих центрів швидкостей. Тоді розгляд взаємних плоскопаралельних рухів ланок механізму допомагає конкретизувати задачу на знаходження не лише миттєвих центрів швидкостей, а й інших кінематичних характеристик руху.

Теорема, які визначають властивості плоскопаралельного руху, було встановлено щодо абсолютно нерухомої декартової системи координат  $xOy$ , а всі поняття — лінійні й кутові швидкості та

прискорення, а також миттєві центри швидкостей і прискорень належать до абсолютних кінематичних характеристик (позначимо їх надалі індексом «а»).

При викладі даної теми будемо виходити з уже відомої теорії складного руху точки.

Нехай маємо деякий абсолютний плоскопаралельний рух плоскої фігури  $S_1$ , що відбувається в основній декартовій площині  $x_3O_3y_3$ . Цю площину також назвемо плоскою фігурою, яку позначимо  $S_3$  (рис. 10.1).

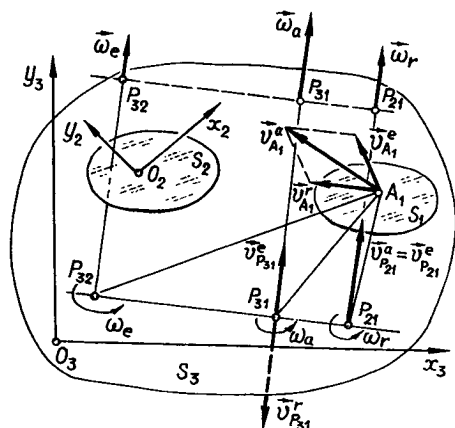


Рис. 10.1

Крім того, розглянемо абсолютний плоскопаралельний рух іншої плоскої фігури  $S_2$  у тій самій нерухомій площині  $x_3O_3y_3$  ( $S_3$ ). З плоскою фігурою  $S_2$  незмінно зв'яжемо рухомою системою координат  $x_2O_2y_2$ .

На підставі рухомої  $x_2O_2y_2$  й нерухомої  $x_3O_3y_3$  системи координат розкладемо абсолютну швидкість  $\vec{v}_A^a$  будь-якої точки  $A_1$  плоскої фігури  $S_1$  в разі її абсолютного плоскопаралельного руху відносно  $S_3$  на відносну  $\vec{v}_A^r$  щодо рухомої плоскої фігури  $S_2(x_2O_2y_2)$  і переносну  $\vec{v}_A^e$ , яка дорівнює абсолютній швидкості тієї точки, незмінно зв'язаної з рухомою площею фігурою, з якою в даний момент часу збігається розглядувана точка  $A_1$ :

$$\vec{v}_A^a = \vec{v}_A^r + \vec{v}_A^e. \quad (10.1)$$

Але відносна  $\vec{v}_A^r$  і переносна  $\vec{v}_A^e$  швидкості точки  $A$  плоскої фігури  $S_1$  за модулем визначаються співвідношеннями

$$v_A^r = P_{21}A_1\omega_r; \quad v_A^e = P_{32}A_1\omega_e, \quad (10.2)$$

де  $P_{21}$  і  $P_{32}$  — відносний і переносний миттєві центри швидкостей плоскої фігури  $S_1$ ;  $\omega_r$  і  $\omega_e$  — відносна і переносна кутові швидкості  $S_1$ .

Назвемо плоскопаралельний рух плоскої фігури  $S_1$  відносно рухомої плоскої фігури  $S_2(x_2O_2y_2)$  з відносним миттєвим центром швидкостей  $P_{21}$  і відносною миттєвою кутовою швидкістю  $\omega_r$  відносним плоскопаралельним рухом. А абсолютний плоскопаралельний рух рухомої плоскої фігури  $S_2(x_2O_2y_2)$  відносно нерухомої основної площини  $x_3O_3y_3$  ( $S_3$ ) в припущенні, що плоска фігура  $S_1$ , складний рух якої розглядається як одне ціле з рухомою площею фігурою  $S_2$ , в даний момент часу здійснює миттєве обертання навколо переносного миттєвого центра швидкостей  $P_{32}$  з переносною кутовою швидкістю  $\omega_e$ , називається переносним плоскопаралельним рухом даної плоскої фігури  $S_1$ .

Доведемо теорему, яка дає змогу за відомими відносним і переносним миттєвими центрами швидкостей плоскої фігури в разі її складного плоскопаралельного руху знайти положення абсолютного миттєвого центра швидкостей  $P_a$ :

**Теорема про три миттєві центри швидкостей.** У разі складного плоскопаралельного руху плоскої фігури її абсолютний миттєвий центр швидкостей лежить на тій самій прямій, що й відносний і переносний миттєві центри швидкостей, і ділить відстань між ними на відрізки, обернено пропорціональні абсолютним значенням відносної і переносної кутових швидкостей:

$$\frac{P_{31}P_{32}}{P_{31}P_{21}} = \frac{P_aP_e}{P_aP_r} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (10.3)$$

Доведення цієї теореми досить просте. Проведемо через миттєві центри обертання  $P_{21}$  і  $P_{32}$  ( $P_r$  і  $P_e$ ) пряму (рис. 10.1). Слід розрізняти

відносний миттєвий центр обертання  $P_{21}$  і відносний миттєвий центр швидкостей  $P_r$ : миттєвий центр швидкостей  $P_r$  належить плоскій фігурі, а миттєвий відносний центр обертання — рухомій плоскій фігурі  $S_2$ ; у кожний даний момент часу ці точки збігаються. Те саме стосується точок  $P_{31}$  і  $P_e$ : переносний миттєвий центр обертання належить нерухомій площині  $x_3 O_3 y_3$  ( $S_3$ ), а переносний миттєвий центр швидкостей — рухомій площині  $x_2 O_2 y_2$  ( $S_2$ ); вони збігаються в кожний даний момент часу в разі складного руху плоскої фігури  $S_1$ .

Для доведення теореми також визначимо абсолютну швидкість відносного миттєвого центра швидкостей  $P_r$  ( $P_{21}$ ), скориставшись положенням переносного і абсолютного миттєвих центрів обертання  $P_{32}(P_e)$ ,  $P_{31}(P_a)$ :

$$\vec{v}_{P_r}^a = \vec{v}_{P_r}^r + \vec{v}_{P_r}^e.$$

Але відносна швидкість  $\vec{v}_{P_r}^r$  дорівнює нулю, отже,

$$\vec{v}_{P_r}^a = \vec{v}_{P_r}^e,$$

або за абсолютними значеннями

$$v_{P_r}^a = v_{P_r}^e; \quad \omega_a P_a P_r = \omega_e P_e P_r. \quad (10.4)$$

Оскільки одна й та сама швидкість відносного миттєвого центра швидкостей  $P_r$  перпендикулярна до відрізків  $P_{32}P_{21}$  і  $P_{31}P_{21}$ , то це можливо, коли абсолютний миттєвий центр швидкостей  $P_a$  лежить на спільній прямій з точкою  $P_e$ , що й треба було довести в першій частині теореми.

Співвідношення (10.3) доведемо, якщо застосуємо теорему про абсолютну швидкість точки в разі складного руху до миттєвого центра швидкостей  $P_a$ :

$$\vec{v}_{P_{31}}^a = \vec{v}_{P_a}^a = \vec{v}_{P_a}^r + \vec{v}_{P_a}^e = 0; \quad \vec{v}_{P_a}^r = -\vec{v}_{P_a}^e; \quad \omega_r P_a P_r = \omega_e P_a P_e, \quad (10.5)$$

або

$$\frac{P_a P_r}{P_a P_e} = \frac{\omega_e}{\omega_r}. \quad (10.6)$$

На підставі цих залежностей доведемо іншу теорему про складний плоскопаралельний рух плоскої фігури — теорему про додавання миттєвих кутових швидкостей у разі складного обертального руху тіла або складного плоскопаралельного руху.

До обох частин рівності (10.6) додамо по одиниці і виконаємо відповідні дії:

$$\frac{P_a P_e}{P_a P_r} + 1 = \frac{\omega_r}{\omega_e} + 1; \quad \frac{P_a P_r + P_a P_e}{P_a P_r} = \frac{\omega_r + \omega_e}{\omega_e} = \frac{P_e P_r}{P_a P_r}. \quad (10.7)$$

Крім того, із співвідношення (10.4) маємо:

$$\omega_a = \omega_e \frac{P_e P_r}{P_a P_r}. \quad (10.8)$$

Розглянувши (10.7) і (10.8) сумісно, дістанемо шуканий результат:

$$\omega_a = \omega_r + \omega_e. \quad (10.9)$$

Це — *теорема про додавання миттєвих кутових швидкостей одного напрямку в разі паралельних миттєвих осей обертання*:

*абсолютна кутова швидкість плоскої фігури під час її складного плоскопаралельного руху дорівнює сумі модулів відносної і переносної кутових швидкостей.*

Якщо перейти до абсолютно твердого тіла, складний плоскопаралельний рух якого замінено відповідним йому рухом плоскої фігури, то замість миттєвих центрів обертання  $P_{21}$ ,  $P_{32}$  і  $P_{31}$  ( $P_r$ ,  $P_e$ , і  $P_a$ ) маємо паралельні між собою миттєві осі обертання: відносну, переносну та абсолютну. На рис. 10.1 площина миттєвих осей тіла суміщена з основною площиною  $x_3 O_3 y_3$ , паралельно якій здійснюються складові плоскопаралельні рухи, де на миттєвих осях зображено вектори відповідних кутових швидкостей  $\bar{\omega}_r$ ,  $\bar{\omega}_e$  і  $\bar{\omega}_a$ . У векторному вигляді скалярну рівність (10.9) можна подати як

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_e. \quad (10.10)$$

### § 30. Теорема про три миттєві центри швидкостей (центри обертання)

На рис. 10.2 наведено багатоланковий плоский механізм з двома ступенями вільності. У ньому ланка  $O_2 B_2 A_2$  у вигляді незмінюваного трикутника і кривошип  $O_3 A_1$  під час руху механізму

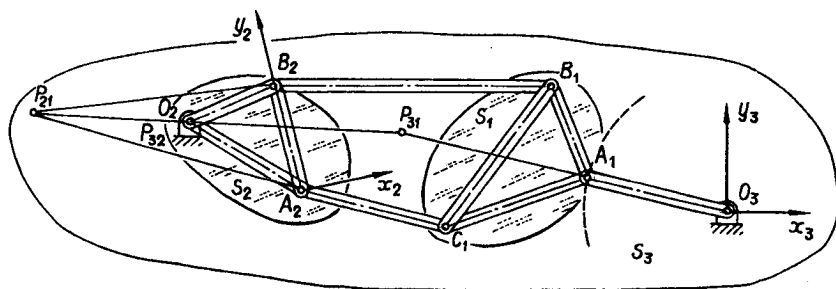


Рис. 10.2

обертаються навколо нерухомих центрів  $O_2$  і  $O_3$ . Знайдемо для ланки  $A_1B_1C_1$  абсолютний миттєвий центр швидкостей  $P_{31}$  ( $P_{a1}$ ), скориставшись зазначеною теоремою. За переносний рух ланки  $S_1$  візьмемо обертальний рух плоскої фігури  $S_2$ , незмінно зв'язаної з трикутником  $O_2A_2B_2$ , абсолютний миттєвий центр швидкостей  $P_{32}$  (переносний миттєвий центр швидкостей ланки  $A_1B_1C_1$  ( $S_1$ )) якої збігається з нерухомим центром обертання  $O_2$ .

Для відшукування відносного миттєвого центра швидкостей  $P_{21}$  ( $P_{r1}$ ) ланки  $S_1$  розглянемо її відносний плоскопаралельний рух щодо ланки  $S_2$  ( $x_2, O_2, y_2$ ). Відносні швидкості точок  $B_1$  і  $C_1$  плоскої фігури  $S_1$  щодо  $S_2$ , яку вважають при знайденні відносного руху  $S_2$  умовно нерухомою, перпендикулярні до стержнів  $C_1A_2$  і  $B_1B_2$ . Тому відносний миттєвий центр швидкостей  $P_{21}$  ( $P_{r1}$ ) лежить на перетині продовжень осей ланок  $C_1A_2$  і  $B_1B_2$ . Згідно з теоремою про три миттєві центри швидкостей шуканий абсолютний миттєвий центр швидкостей ланки  $A_1B_1C_1$  лежить на спільній прямій із миттєвими центрами  $P_{21}$  і  $P_{32}$  ( $O_2$ ). Звернемо увагу на абсолютну швидкість точки  $A_1$  плоскої фігури  $S_1$  — вона перпендикулярна до кривошипа  $O_3A_1$ . Звідси дістанемо висновок, що абсолютний миттєвий центр швидкостей  $P_{31}$  ( $P_{a1}$ ) ланки  $S_1$  лежить на прямій, яка збігається з віссю ланки  $O_3A_1$ . Отже, шукана точка  $P_{31}$  буде перетином продовжень прямих  $P_{21}O_2$  і  $O_3A_1$  (рис. 10.2).

**Висновок з теореми про три миттєві центри швидкостей:** може статися так, що взаємний плоскопаралельний (відносний) рух двох плоских фігур є миттєво поступальним. Тоді відносні швидкості точок однієї плоскої фігури відносно другої між собою паралельні, а відносний миттєвий центр швидкостей  $P_r$  (взаємний миттєвий центр швидкостей  $P_{21}$  ( $P_{12}$ )) лежить на нескінченності (рис. 10.3). Отже, переносний і абсолютний миттєві центри швидкостей розглядуваної плоскої фігури лежать на прямій, перпендикулярній до відносних швидкостей точок фігури.

Як приклад розглянемо механізм інверсора Ліпкіна (рис. 10.3). У ньому стержневий паралелограм  $A_1A_2B_2B_1$  трьома вершинами  $A_1$ ,  $A_2$  і  $B_2$  шарнірно прикріплений до кривошипів  $A_1O_3$ ,  $O_3B_2$  і  $O_2A_2$  з нерухомими центрами  $O_3$  і  $O_2$ . Знайдемо абсолютний миттєвий центр швидкостей  $P_{31}$  ( $P_{a1}$ ) ланки  $A_1B_1$  ( $S_1$ ), яка у разі відносного плоскопаралельного руху щодо ланки  $A_2B_2$  ( $S_2$ ) переміщується поступально. Відразу звернемо увагу на те, що відносні швидкості точок стержня  $A_1B_1$  ( $S_1$ ) (у припущенні, що стержень  $A_2B_2$  мислено зупинено) в разі згаданого поступального руху ланки  $A_1B_1$  щодо другої ланки  $A_2B_2$  перпендикулярні до стержнів  $A_1A_2$  і  $B_1B_2$  паралелограма  $A_1A_2B_2B_1$ .

Це означає, що відносний миттєвий центр швидкостей  $P_{21}$  ланки  $A_1B_1$  лежить на нескінченності. Вже відомо, що пряма, на якій мають лежати миттєві центри швидкостей  $P_{32}$  і  $P_{31}$  ланки  $A_1B_1$ , розташову-

ється паралельно стержням  $A_1A_2$  і  $B_1B_2$ . Розглянувши для точок  $A_2$  і  $B_2$  абсолютні швидкості, перпендикулярні до відповідних кривошипів  $O_2A_2$  і  $O_3B_2$ , з'ясуємо, що абсолютний миттєвий центр швидкостей стержня  $A_2B_2$  (переносний для ланки  $A_1B_1$ ) є точкою перетину осей кривошипів  $O_2A_2$  і  $O_3B_2$  — це точка  $P_{32}$ .

Також зазначимо, що, оскільки абсолютна швидкість точки  $A_1$  ланки  $A_1B_1$  перпендикулярна до кривошипа  $O_3A_1$ , то абсолютний миттєвий центр швидкостей  $P_{31}$  ланки  $A_1B_1$  лежить на продовженні осі кривошипа  $O_3A_1$ . Отже, щоб дістати шуканий миттєвий центр швидкостей  $P_{31}$ , досить з точки  $P_{32}$  провести паралельно стержням  $A_1A_2$  і  $B_1B_2$  пряму до перетину з віссю ланки  $O_3A_1$ : цей перетин і є шуканим центром  $P_{31}$  (рис. 10.3).

**Застосування теореми про додавання миттєвих кутових швидкостей.** Розглянемо планетарний механізм (рис. 10.4) і визначимо абсолютну кутову швидкість  $\omega_a$  колеса  $I$  за формулами (10.6) і (10.9). Колесо  $I$  механізму перебуває в складному плоскопаралельному русі. Воно обертається відносно кривошипа  $OA$  навколо власної осі  $A$  з відносною кутовою швидкістю  $\omega_r$  і водночас разом із кривошипом — навколо нерухомої осі  $O$  з переносною кутовою швидкістю  $\omega_a = \omega_e$ . Зазначимо, що обидва складові обертальні рухи відбуваються в напрямі проти руху стрілки годинника.

Відносний і переносний миттєві центри швидкостей  $P_r$  і  $P_e$  колеса  $I$  збігаються з точками  $A$  та  $O$  відповідно, а абсолютний  $P$  — з точкою дотику рухомого й нерухомого коліс. Тому, за виразом (10.6):

$$\omega_r = \omega_e \frac{P_a P_e}{P_a P_r} = \omega_e \frac{r_2}{r_1} = \omega_e \frac{r_2}{r_1}.$$

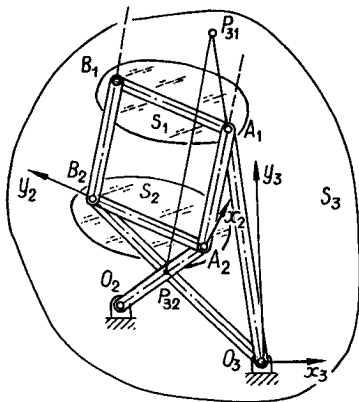


Рис. 10.3

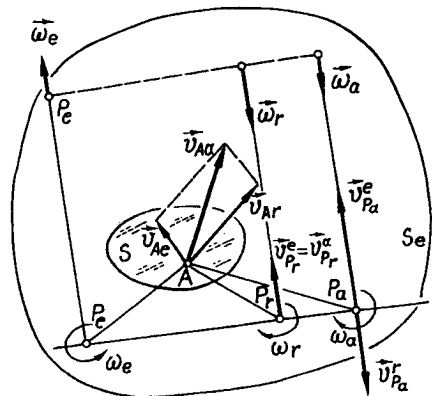


Рис. 10.4



Шукану кутову швидкість  $\omega_a$  дістанемо з формули (10.9), врахувавши знайдену відносну кутову швидкість:

$$\omega_a = \omega_r + \omega_e = \omega_e \frac{r_2}{r_1} + \omega_e = \omega_e \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) = \omega \frac{r_1 + r_2}{r_1}.$$

**Векторний спосіб доведення теореми про додавання кутових швидкостей у разі складного плоскопаралельного руху.** Скористаємося уявленнями про складні плоскопаралельні рухи як миттєві обертальні рухи плоскої фігури навколо відповідних миттєвих центрів обертання, формулою Ейлера (4.35), а також теоремою про абсолютну швидкість (5.1).

На підставі останньої теореми для точки  $A_1$  плоскої фігури  $S_1$  можна записати векторну рівність (див. рис. 10.1)

$$\vec{v}_A^a = \vec{v}_A^r + \vec{v}_A^e.$$

Але, згідно з теоремою Ейлера (4.35),

$$\begin{aligned} \vec{v}_A^r &= \bar{\omega}_r \times \overrightarrow{P_{21}A_1}; & \vec{v}_A^e &= \bar{\omega}_e \times \overrightarrow{P_{32}A_1}; & \vec{v}_A^a &= \bar{\omega}_a \times \overrightarrow{P_{31}A_1}; \\ \bar{\omega}_a \times \overrightarrow{P_{31}A_1} &= \bar{\omega}_r \times \overrightarrow{P_{21}A_1} + \bar{\omega}_e \times \overrightarrow{P_{32}A_1}. \end{aligned}$$

Вважатимемо геометричний трикутник  $P_{31}A_1P_{32}$  векторним, тоді

$$\overrightarrow{P_{31}A_1} = \overrightarrow{P_{31}P_{32}} + \overrightarrow{P_{32}A_1}.$$

Наведемо також ще дві векторні рівності, які є результатом векторної інтерпретації відповідних геометричних трикутників:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_{21}A_1} &= \overrightarrow{P_{21}P_{31}} + \overrightarrow{P_{31}A_1}; & \overrightarrow{P_{32}A_1} &= \overrightarrow{P_{32}P_{31}} + \overrightarrow{P_{31}A_1}; \\ \bar{\omega}_a \times \overrightarrow{P_{31}A_1} &= \bar{\omega}_r \times \overrightarrow{P_{31}A_1} + \bar{\omega}_e \times \overrightarrow{P_{31}A_1} + \bar{\omega}_r \times \overrightarrow{P_{21}P_{31}} + \bar{\omega}_e \times \overrightarrow{P_{32}P_{31}}. \end{aligned}$$

Врахуємо, що

$$\bar{\omega}_r \times \overrightarrow{P_{21}P_{31}} = \vec{v}_{P_{31}}^r = \vec{v}_{P_{31}}^a - \vec{v}_{P_{31}}^e; \quad \vec{v}_{P_{31}}^a = 0; \quad \vec{v}_{P_{31}}^r = -\vec{v}_{P_{31}}^e.$$

Бачимо, що

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_r \times \overrightarrow{P_{21}P_{31}} &= -\vec{v}_{P_{31}}^e; & \bar{\omega}_e \times \overrightarrow{P_{32}P_{31}} &= \vec{v}_{P_{31}}^e; \\ \bar{\omega}_r \times \overrightarrow{P_{21}P_{31}} + \bar{\omega}_e \times \overrightarrow{P_{32}P_{31}} &= -\vec{v}_{P_{31}}^e + \vec{v}_{P_{31}}^e = 0. \end{aligned}$$

Векторний вираз

$$\bar{\omega}_r \times \overrightarrow{P_{21}P_{31}} + \bar{\omega}_e \times \overrightarrow{P_{32}P_{31}} = 0 \quad (10.11)$$

визначає положення абсолютної миттєвої осі обертання з вектором абсолютної кутової швидкості  $\bar{\omega}_a$ , якщо йдеться про складний обертальний рух тіла, або положення абсолютного миттєвого центра обертання плоскої фігури в разі складного плоскопаралельного руху.

Отже,

$$\vec{\omega}_a \times \overrightarrow{P_{31}A_1} = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{P_{31}A_1} + \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{P_{31}A_1},$$

з якої остаточно дістанемо

$$[\vec{\omega}_a - (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e)] \times \overrightarrow{P_{31}A_1} = 0; \quad \vec{\omega}_a - (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) = 0.$$

**Застосування теореми про швидкість точки плоскої фігури для доведення теореми про додавання кутових швидкостей у разі складного плоскопаралельного руху.** Розглянемо складний плоскопаралельний рух плоскої фігури  $S$  в основній площині  $x_a O_a y_a$  (рис. 10.5), який складається з відносного плоскопаралельного руху плоскої фігури  $S$  щодо іншої плоскої фігури  $S_e$  ( $x_e O_e y_e$ ) з миттєвою відносною кутовою швидкістю  $\omega_r$  та відносним миттєвим центром швидкостей  $P_r$  і переносного плоскопаралельного руху з миттєвою переносною кутовою швидкістю  $\omega_e$  та миттєвим переносним центром швидкостей  $P_e$ . Результуючим рухом є абсолютний плоскопаралельний рух плоскої фігури з кутовою швидкістю  $\omega_a$  і миттєвим центром швидкостей  $P_a$ .

За полюс виберемо точку  $A$  плоскої фігури  $S$ . Нехай  $\vec{v}_{Aa}$  — абсолютна швидкість полюса  $A$ . Тоді абсолютна швидкість будь-якої точки плоскої фігури  $S$  на підставі теореми (6.9) має вигляд

$$\vec{v}_{Ba} = \vec{v}_{Aa} + \vec{v}_{AB}. \quad (10.12)$$

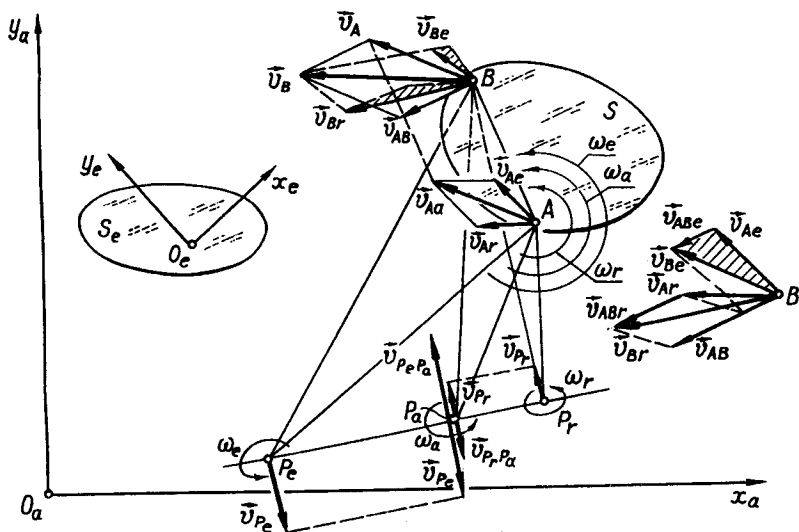


Рис. 10.5

Але в разі складного плоскопаралельного руху плоскої фігури абсолютні швидкості її точок  $A$  і  $B$  можна розкласти на відносні і переносні складові відповідно до теореми (5.1):

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{v}_{Ar} + \vec{v}_{Ae}; \quad \vec{v}_{Ba} = \vec{v}_{Br} + \vec{v}_{Be}.$$

Підставимо ці величини в рівність (10.12):

$$\vec{v}_{Br} + \vec{v}_{Be} = \vec{v}_{Ar} + \vec{v}_{Ae} + \vec{v}_{AB},$$

звідки

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{Br} - \vec{v}_{Ar} + \vec{v}_{Be} - \vec{v}_{Ae}.$$

Введемо позначення

$$\vec{v}_{ABr} = \vec{v}_{Br} - \vec{v}_{Ar}; \quad \vec{v}_{ABe} = \vec{v}_{Be} - \vec{v}_{Ae},$$

тоді

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{ABr} + \vec{v}_{ABe}. \quad (10.13)$$

З'ясуємо зміст складових  $\vec{v}_{ABr}$  і  $\vec{v}_{ABe}$  обертальної швидкості  $\vec{v}_{AB}$  точки  $B$  плоскої фігури в разі її обертання з абсолютною кутовою швидкістю  $\omega_a$  навколо полюса  $A$ . Для відносного плоскопаралельного руху плоскої фігури, якщо розглядати її миттєве обертання навколо миттєвого центра швидкостей  $P_r$ , мають місце векторні формули

$$\vec{v}_{Ar} = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{P_r A}; \quad \vec{v}_{Br} = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{P_r B}.$$

Також, з урахуванням миттєвого повороту плоскої фігури навколо переносного миттєвого центра швидкостей  $P_e$  у разі переносного плоскопаралельного руху плоскої фігури, можна записати

$$\vec{v}_{Ae} = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{P_e A}; \quad \vec{v}_{Be} = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{P_e B}.$$

За цими чотирма векторними співвідношеннями відстанемо

$$\begin{aligned} \vec{v}_{AB} &= \vec{\omega}_r \times (\overrightarrow{P_r B} - \overrightarrow{P_r A}) + \vec{\omega}_e \times (\overrightarrow{P_e B} - \overrightarrow{P_e A}) = \\ &= \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{AB}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Зіставивши (10.13) і (10.14), маємо

$$\vec{v}_{ABr} = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{AB}; \quad \vec{v}_{ABe} = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{AB}, \quad (10.15)$$

або за абсолютними значеннями

$$v_{ABr} = \omega_r \cdot AB; \quad v_{ABe} = \omega_e \cdot AB; \quad v_{AB} = v_{ABr} + v_{ABe}. \quad (10.16)$$

Вектори  $\vec{v}_{ABr}$  і  $\vec{v}_{ABe}$  перпендикулярні до прямолінійного відрізка  $AB$  плоскої фігури  $S$  і за напрямками збігаються з напрямками відносної  $\omega_r$  і переносної  $\omega_e$  кутових швидкостей. Вважають, що плоска фігура  $S$  у складових рухах обертається навколо полюса  $A$  з кутовими швидкостями  $\omega_r$  і  $\omega_e$  відповідно (рис. 10.5).

Отже, для складових плоскопаралельних рухів — відносного і переносного — справедливі теореми, аналогічні теоремі (6.9):

$$\vec{v}_{Br} = \vec{v}_{Ar} + \vec{v}_{ABr}; \quad \vec{v}_{Be} = \vec{v}_{Ae} + \vec{v}_{ABe}. \quad (10.17)$$

Значимо, що при дослідженні складного плоскопаралельного руху з використанням даних формул треба вважати, що відносне, переносне і абсолютне обертання здійснюються навколо вибраного полюса (рис. 10.5).

На підставі теорем (10.17) можна знайти співвідношення між кутовими швидкостями  $\omega_r$ ,  $\omega_e$  і  $\omega_a$  в разі складного плоскопаралельного руху. Для виведення теореми про додавання кутових швидкостей застосуємо формули (10.15) і (10.16), виразивши  $\vec{v}_{AB}$  через  $\vec{\omega}_a$  і  $\overrightarrow{AB}$ :

$$\vec{v}_{AB} = \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{AB},$$

маємо:

$$\vec{\omega}_a \times \overrightarrow{AB} = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{AB}; \quad [\vec{\omega}_a - (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e)] \times \overrightarrow{AB} = 0; \quad \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e.$$

Для того щоб дістати співвідношення (10.3), застосуємо теорему (6.9), взявши за полюси відносний  $P_r$  і переносний  $P_e$  миттєві центри швидкостей плоскої фігури  $S$ . Тоді, визначаючи абсолютну швидкість абсолютного миттєвого центра швидкостей  $P_a$  фігури  $S$ , маємо

$$\begin{aligned} \vec{v}_{P_a} &= \vec{v}_{P_r} + \vec{v}_{P_r P_a} = 0; \\ \vec{v}_{P_a} &= \vec{v}_{P_e} + \vec{v}_{P_e P_a} = 0, \end{aligned}$$

де (рис. 10.5)

$$\begin{aligned} \vec{v}_{P_r} &= \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{P_r P_a}; & \vec{v}_{P_r P_a} &= \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{P_r P_a}; \\ \vec{v}_{P_e} &= \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{P_e P_a}; & \vec{v}_{P_e P_a} &= \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{P_e P_a}. \end{aligned}$$

Підставивши останні чотири величини у вихідні співвідношення і перейшовши до скалярних значень у векторних рівняннях, дістанемо результат:

$$\omega_e \cdot P_r P_e = \omega_a \cdot P_a P_r; \quad \omega_r \cdot P_r P_e = \omega_a \cdot P_e P_a.$$

Шукане співвідношення (10.3) є відношенням останніх рівностей.

### § 31. Додавання двох видів плоскопаралельного руху навколо миттєвих осей з протилежними напрямками і з різними за модулями кутовими швидкостями

Розглянемо складний плоскопаралельний рух плоскої фігури  $S$ , коли відносне і переносне миттєві обертання навколо відповідних миттєвих центрів швидкостей  $P_r$  і  $P_e$  здійснюються в різних напрямках із різними за абсолютним значенням кутовими

швидкостями  $\omega_r$  і  $\omega_e$  при  $\omega_r > \omega_e$  (див. рис. 10.4). Видно, що переносне обертання — обертання плоскої фігури  $S_e$  разом із плоскою фігурою  $S$ , складний рух якої розглядається, — навколо  $P_e$  з кутовою швидкістю  $\omega_e$  відбувається проти руху стрілки годинника, а відносне обертання навколо  $P_r$  з кутовою швидкістю  $\omega_r$  плоскої фігури  $S$  щодо  $S_e$  — за рухом стрілки годинника.

Виведемо співвідношення між кутовими швидкостями  $\omega_r$ ,  $\omega_e$  і  $\omega_a$ , які мають місце в розглядуваному випадку складного плоскопаралельного руху плоскої фігури  $S$ . Застосувавши теорему про абсолютну швидкість точки в разі складного руху (5.1) до абсолютного миттєвого центра швидкостей  $P_a$  плоскої фігури  $S$ , маємо

$$\bar{v}_{P_a}^a = \bar{v}_{P_a}^r - \bar{v}_{P_a}^e = v_{P_a}^r - v_{P_a}^e = 0,$$

але

$$v_{P_a}^r = P_r P_a \omega_r; \quad v_{P_a}^e = P_e P_a \omega_e.$$

Підставимо у вихідну рівність:

$$P_r P_a \omega_r = P_e P_a \omega_e,$$

звідки

$$\frac{P_e P_a}{P_r P_a} = \frac{\omega_r}{\omega_e}, \quad (10.18)$$

яка визначає положення абсолютного миттєвого центра швидкостей  $P_a$  у нашому випадку: абсолютний миттєвий центр швидкостей  $P_a$  ділить відстань між відносним і переносним миттєвими центрами швидкостей  $P_r$  і  $P_e$  зовнішнім чином на відрізки, обернено пропорційні абсолютним значенням відносної і переносної кутовим швидкостям  $\omega_r$ ,  $\omega_e$  складного плоскопаралельного руху.

Для виведення теореми про додавання кутових швидкостей від обох частин (10.18) відніmemo одиницю та виконаємо відповідні перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_r}{\omega_e} - 1 &= \frac{P_e P_a}{P_r P_a} - 1; \\ \omega_r - \omega_e &= \frac{P_e P_r}{P_r P_a} \omega_e. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Крім того, застосуємо теорему (5.1) до відносного миттєвого центра  $P_r$  плоскої фігури  $S$ , яка за наших умов руху має вигляд

$$\bar{v}_{P_r}^a = \bar{v}_{P_r}^r + \bar{v}_{P_r}^e,$$

але

$$\bar{v}_{P_r}^r = 0; \quad v_{P_r}^e = P_e P_r \omega_e; \quad v_{P_r}^a = P_a P_r,$$

тому

$$v_{P_r}^e = v_{P_r}^a; \quad P_a P_r \omega_a = P_e P_r \omega_e,$$

звідки

$$\omega_a = \omega_e \frac{P_e P_r}{P_a P_r}.$$

Підставимо цю величину у формулу (10.19) і дістанемо математичний вираз *теорема про додавання кутових швидкостей*:

$$\omega_a = \omega_r - \omega_e, \quad (10.20)$$

*абсолютна кутова швидкість плоскої фігури в разі її складного плоскопаралельного руху при протилежних напрямках відносного й переносного обертань дорівнює різниці абсолютних значень відносної і переносної кутових швидкостей складових рухів.*

Застосуємо векторний спосіб для дослідження складного плоскопаралельного руху. На підставі теореми про абсолютну швидкість точки в разі складного руху (5.1) для довільної точки  $A$  плоскої фігури (див. рис. 10.4) можна записати

$$\vec{v}_{Ae} = \vec{v}_{Ar} + \vec{v}'_{Ae}.$$

Але, згідно з теоремою Ейлера,

$$\vec{v}_{Ae} = \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{P_a A}; \quad \vec{v}_{Ar} = -\vec{\omega}_r \times \overrightarrow{P_r A}; \quad \vec{v}'_{Ae} = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{P_e A}.$$

Далі вважаємо, що геометричні трикутники  $P_r A P_a$  і  $P_e A P_a$  є векторними з напрямками сторін

$$\overrightarrow{P_r A} = \overrightarrow{P_r P_a} + \overrightarrow{P_a A}; \quad \overrightarrow{P_e A} = \overrightarrow{P_e P_a} + \overrightarrow{P_a A}.$$

Підставивши їх у вихідну формулу і виконавши відповідні алгебраїчні дії, дістанемо векторний вираз

$$[\vec{\omega}_a - (\vec{\omega}_e - \vec{\omega}_r)] \times \overrightarrow{P_a A} = -\vec{\omega}_r \times \overrightarrow{P_r P_a} + \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{P_e P_a},$$

в якому праворуч від знака рівності міститься векторна величина, що дорівнює нулю. Справді, абсолютна швидкість точки  $P_a$  визначається формулою

$$\vec{v}_{P_a} = \vec{v}_{P_a}^r + \vec{v}_{P_a}^e,$$

або

$$\vec{v}_{P_a} = -\vec{\omega}_r \times \overrightarrow{P_r P_a} + \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{P_e P_a},$$

але  $\vec{v}_{P_a}^e = 0$ , отже,

$$-\vec{\omega}_r \times \overrightarrow{P_r P_a} + \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{P_e P_a} = 0; \quad \frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{P_e P_a}{P_r P_a}. \quad (10.21)$$

З векторної рівності

$$[\vec{\omega}_a - (\vec{\omega}_e - \vec{\omega}_r)] \times \overrightarrow{P_a A} = 0$$

дістанемо шуканий результат

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e - \vec{\omega}_r. \quad (10.22)$$

На рис. 10.4 вектори  $\vec{\omega}_r$ ,  $\vec{\omega}_e$  і  $\vec{\omega}_a$  кутових швидкостей сумішені з площиною, в якій здійснюється рух плоскої фігури  $S$ . Відповідно до формул (10.21) і (10.22) абсолютна кутова швидкість  $\vec{\omega}_a$  має напрям більшої за модулем складової кутових швидкостей  $\vec{\omega}_r$  і  $\vec{\omega}_e$  і розташована за відрізком  $P_e P_r$  з боку більшої за модулем складової кутової швидкості (при  $\omega_r > \omega_e$  — справа від вектора  $\vec{\omega}_r$ ). Також зазначимо, що формула (10.21) визначає положення абсолютного миттєвого центра швидкостей  $P_a$  фігури  $S$  на продовженні відрізка, що сполучає миттєві центри швидкостей  $P_e$  і  $P_r$ .

### § 32. Пара обертань

Повернемося до векторної рівності, з якої виведено співвідношення (10.21) і (10.22):

$$[\vec{\omega}_a - (\vec{\omega}_e - \vec{\omega}_r)] \times \vec{P}_a A = -\vec{\omega}_r \times \vec{P}_r P_a + \vec{\omega}_e \times \vec{P}_e P_a.$$

Його можна подати в іншому вигляді, якщо врахувати

$$\vec{P}_e P_a = \vec{P}_e P_r + \vec{P}_r P_a,$$

тоді

$$\vec{\omega}_a \times \vec{P}_a A - (\vec{\omega}_e - \vec{\omega}_r) \times \vec{P}_r A = \vec{\omega}_e \times \vec{P}_e P_r \quad (10.23)$$

(вважаємо модуль  $\omega_e$ , а також вектор  $\vec{P}_a A$  змінними величинами).

Досліджуючи кінематичний стан плоскої фігури  $S$  у разі її складного плоскопаралельного руху за умови  $\omega_e = \omega_r$ , перейдемо у векторній рівності (10.23) до границі, коли  $\omega_a$  за абсолютним значенням наближається до відносної кутової швидкості  $\omega_r$ :

$$\lim_{\omega_e \rightarrow \omega_r} (\vec{\omega}_a \times \vec{P}_a A) - \lim_{\omega_e \rightarrow \omega_r} (\omega_e - \omega_r) \times \vec{P}_r A = \lim_{\omega_e \rightarrow \omega_r} \vec{\omega}_e \times \vec{P}_e P_r. \quad (10.24)$$

У границі праворуч маємо сталий вектор

$$\vec{\omega}_r \times \vec{P}_e P_r = \text{const}. \quad (10.25)$$

Від векторної рівності (10.24) перейдемо до скалярної:

$$\lim_{\omega_a \rightarrow 0} P_a A \omega_a = P_a P_r \omega = \text{const}; \quad \omega_r = \omega_e = \omega.$$

Отже, границя

$$\lim_{\omega_a \rightarrow 0} P_a A \omega_a$$

є скінченною величиною і дорівнює добутку модуля кутової швидкості складових рухів на відстань між відносним і переносним миттєвими центрами швидкостей. Це можливо, коли  $P_a A$  дорівнює нескінченності.

У разі складного плоскопаралельного руху при протилежних напрямках відносної та переносної кутових швидкостей і однакових їх абсолютних значеннях абсолютний миттєвий центр швидкостей плоскої фігури лежить на нескінченності, а абсолютна кутова швидкість плоскої фігури дорівнює нулю.

Покажемо, що в даному випадку маємо миттєвий поступальний рух плоскої фігури, коли швидкості всіх її точок однакові як за модулем, так і за напрямком, і перпендикулярні до відрізка, що сполучає відносний та переносний миттєві центри швидкостей.

Розглянемо трикутник швидкостей  $Av_{Aa}v_{Ar}$  з кутом  $\gamma$  і геометричний трикутник  $P_r P_e A$  з кутом  $P_e A P_r$ . З трикутника швидкостей запишемо

$$v_{Aa}^2 = v_{Ar}^2 + v_{Ae}^2 - 2v_{Ar}v_{Ae} \cos \gamma. \quad (10.26)$$

Такий самій залежності відповідають сторони геометричного трикутника  $P_r P_e A$ :

$$(P_e P_r)^2 = (P_r A)^2 + (P_e A)^2 - 2P_r A \cdot P_e A \cos \angle(P_e A P_r). \quad (10.27)$$

Помножимо почленно обидві частини останньої рівності на квадрат кутової швидкості складових обертальних рухів плоскої фігури:

$$(P_e P_r \omega)^2 = (P_r A \omega)^2 + (P_e A \omega)^2 - 2P_r A \omega \cdot P_e A \omega \cos \gamma. \quad (10.28)$$

Величини праворуч  $P_r A \omega = v_{Ar}$ ,  $P_e A \omega = v_{Ae}$  є відносною і переносною швидкостями точок плоскої фігури. Тому (10.28) набуває вигляду

$$(P_e P_r \omega)^2 = v_{Ar}^2 + v_{Ae}^2 - 2v_{Ar}v_{Ae} \cos \gamma. \quad (10.29)$$

З порівняння формул (10.26) і (10.29) випливає, що абсолютна швидкість точок плоскої фігури в разі її складного руху є

$$v_{Aa} = P_e P_r \omega = \lim_{\omega_a \rightarrow 0} (P_e A \omega_a). \quad (10.30)$$

Також встановлюємо, що трикутник швидкостей  $Av_{Aa}v_{Ar}$  і геометричний трикутник  $P_r P_e A$  подібні. Отже, абсолютні швидкості точок плоскої фігури перпендикулярні до прямої, яка проходить через миттєві центри швидкостей  $P_r$  і  $P_e$  (рис. 10.6).

Кінематичний стан тіла, коли воно водночас перебуває у відносному й переносному обертальних складових рухах навколо паралельних осей з протилежними за напрямком й однаковими за абсолютним значенням відносною і переносною кутовими швидкостями, називається *парою обертань*.

Пара обертань графічно подається у вигляді двох паралельних, протилежно напрямлених й однакових за модулем векторів відносної і переносної кутових швидкостей з відрізком, що сполучає відносний і переносний миттєві центри швидкостей плоскої фігури (рис. 10.6). Цей відрізок називається *плечем пари обертань*.



Відносна і переносна кутові швидкості пари обертань називаються її кутовими швидкостями. Добуток абсолютного значення кутових швидкостей пари обертань на її плече називається моментом пари обертань. Відповідно до формул (10.25) і (10.30) момент пари обертань за напрямом і абсолютним значенням дорівнює швидкості точок тіла (плоскої фігури). Наведемо векторний і скалярний вирази для моменту пари обертань (рис. 10.7):

$$\vec{v} = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{P_r P_e} = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{P_e P_r} = \vec{\omega} \times \vec{r}; \quad (10.31)$$

$$v = P_r P_e \omega_r = P_e P_r \omega_e = \omega H. \quad (10.32)$$

Отже, пара обертань кінематично еквівалентна поступальному руху тіла (плоскої фігури), її момент визначає швидкість поступального руху.

Як приклад розглянемо механізм паралелограма, який наведено раніше на рис. 2.1, б. Поступальний рух тіла  $D$  зі швидкістю  $v = OA \omega$ , перпендикулярною до кривошипа  $OA$ , можна інтерпретувати як пару обертань з кутовими швидкостями  $\omega_r$  і  $\omega_e$ , плечем  $OA = P_e P_r$  і парою моментом (рис. 10.8):

$$\vec{v} = \vec{v}_A = \vec{v}_A = \dots = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{AO} = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OA}.$$

Тіло  $D$  у разі складного руху обертається навколо миттєвого центра швидкостей  $P_r$ , що збігається з точкою  $A$ , з відносною кутовою швидкістю

$$\omega_e = \frac{d\varphi_r}{dt} < 0$$

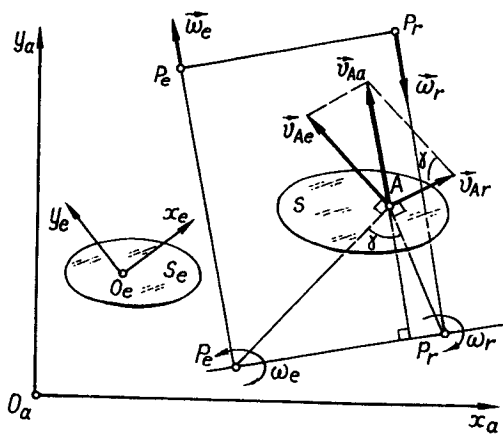


Рис. 10.6

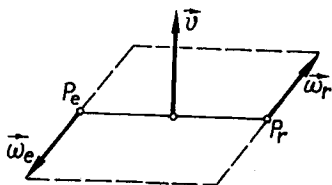


Рис. 10.7

відносно кривошипа  $OA$  за рухом стрілки годинника, й водночас — навколо миттєвого центра швидкостей  $P_e$ , що збігається з центром  $O$  кривошипа  $OA$ , переносною кутовою швидкістю

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} > 0$$

у напрямі проти руху стрілки годинника.

Накладання цих двох оберտальних рухів з протилежними напрямками й однаковими за абсолютним значенням кутовими швидкостями складових рухів дає результуючий поступальний рух із зазначеною вище швидкістю, яка, наприклад для точки  $A_1$ , виражається векторною рівністю

$$\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_1}^r + \vec{v}_{A_1}^e = -\vec{\omega}_r \times \overrightarrow{AA_1} + \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OA_1}.$$

Тут  $\vec{v}_{A_1}^e = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OA_1}$ ,  $v_{A_1}^e = OA_1 \omega_e$  є переносною швидкістю точки  $A_1$ , траєкторією якої під час переносного оберտального руху є коло радіусом  $OA_1$  з центром  $O$ , а  $\vec{v}_{A_1}^r = -\vec{\omega}_r \times \overrightarrow{AA_1}$ ,  $v_{A_1}^r = AA_1 \omega_r$  є відносною швидкістю точки  $A_1$  щодо кривошипа  $OA$ , траєкторія якої — коло радіусом  $AA_1$  з центром  $A$  ( $P_r$ ).

На рис. 10.8 зображено пару обертань, якою замінено поступальний рух ланки  $D$  ( $AA_1$ ).

Іншим прикладом пари обертань є складний рух шестерні із власною віссю обертання  $O_2$  на кінці важеля  $O_1O_2$  планетарного механізму (рис. 10.9). Рухомо й нерухомо шестерні мають однакові радіуси  $R$ , а проміжна потрібна для зміни напрямку відносного оберտального руху шестерні на кінці кривошипа  $O_1O_2$  (важеля).

Абсолютний рух великої шестерні на кінці  $O_2$  важеля  $O_1O_2$  можна розглядати як складний плоскопаралельний рух, що є наслідком накладання відносного оберտального руху з кутовою швидкістю  $\omega_r$ , який відбувається навколо миттєвого центра швидкостей  $P_r$  ( $O_2$ ) за рухом стрілки годинника відносно важеля  $O_1O_2$ , на переносний оберտальний рух колеса разом із важелем та її малою шестернею з переносною кутовою швидкістю  $\omega_e$ , який відбувається навколо центра  $P_e$  ( $O_1$ ) проти руху стрілки годинника.

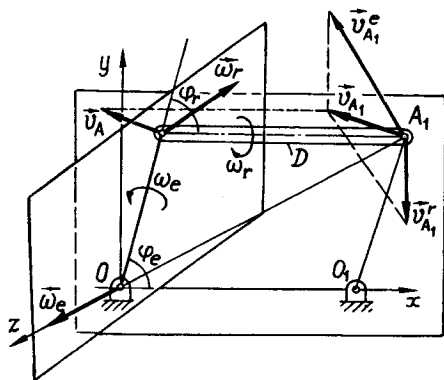


Рис. 10.8

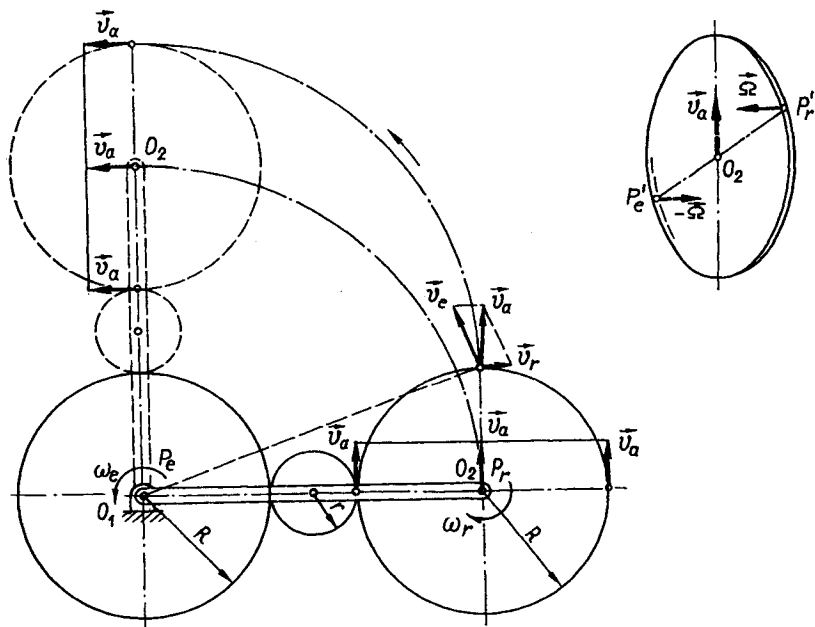


Рис. 10.9

Пояснимо, чому в даному випадку відносна і переносна кутові швидкості однакові за абсолютним значенням. Для цього уявімо спостерігача, незмінно зв'язаного з важелем  $O_1O_2$ . Спостерігачеві здаватиметься, що відносно нього важіль нерухомий, а велике колесо, яке раніше перебувало в стані спокою, обертається відносно важеля навколо точки  $O_1$  ( $P_e$ ) в напрямі обертання стрілки годинника з кутовою швидкістю  $-\omega_e$ , а мале колесо обертається навколо власної осі проти руху стрілки годинника з відносною кутовою швидкістю

$$\omega'_r = \frac{v'_r}{r} = \frac{\omega_e R}{r}.$$

Відносна кутова швидкість іншого великого колеса визначається відносною швидкістю точок на ободах коліс і його радіусом:

$$\omega_r = \frac{v'_r}{R} = \frac{\omega_e R}{R} = \omega_e,$$

оскільки проковзування між колесами немає.

Отже, в даному разі маємо пару обертань, яка характеризує поступальний рух великого колеса на кінці  $O_2$  важеля  $O_1O_2$  планетарного механізму (рис. 10.10)

$$v = O_2O_1\omega_r = O_1O_2\omega_e; \quad \vec{v} = \vec{\omega}_r \times \vec{O_2O_1} = \vec{\omega}_e \times \vec{O_1O_2}.$$

Зрозуміло, що один й той самий поступальний рух плоскої фігури у своїй площині можна замінити безліччю парами обертань з однаковим за напрямом і абсолютним значенням моментом (див. рис. 10.9):

$$\vec{v} = \vec{\omega}_r \times \vec{O_2O_1} = \vec{\Omega} \times \vec{P'_rP'_e}; \quad O_1O_2\omega_r = \Omega D; \quad \Omega = \omega_r \frac{O_1O_2}{2R}.$$

На рис. 10.9 наведено траєкторію, абсолютні, а також відносні й переносні швидкості кінців одного й того самого радіуса розглядува-

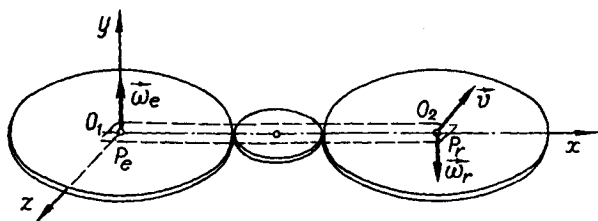


Рис. 10.10

ного колеса в разі поступального руху, який характеризується парою обертань (рис. 10.10).

Розгляд кінематики руху абсолютно твердого тіла навколо нерухомої точки зумовлений не лише застосуванням її положень у третій частині теоретичної механіки — динаміці, а й великим її прикладним значенням, особливо в теорії гіроскопічних приладів. Крім того, саме в явищах руху тіла навколо нерухомої точки виразніше проявляється векторний характер таких важливих кінематичних величин, як кутова швидкість й кутове прискорення, а також лінійна швидкість і лінійне прискорення.

Особливістю руху тіла з однією нерухомою точкою є та обставина, що вектори кутової швидкості і кутового прискорення не колінарні між собою, а розташовані на різних прямих, які перетинаються в нерухомій точці тіла, на відміну від обертального руху тіла навколо нерухомої осі або плоскопаралельного руху, коли ці вектори збігаються з віссю обертання. Тому визначення прискорень точок тіла з однією нерухомою точкою суттєво відрізняється від визначення цих величин у разі обертального й плоскопаралельного рухів.

Крім того, кутова швидкість й кутове прискорення для даного виду руху тіла не визначаються відповідно як перша і друга похідні по часу від кута повороту тіла, оскільки функціональної залежності кута повороту тіла від часу в цьому разі немає. Тут може йтися лише про нескінченно малі зміни кута повороту і кутової швидкості. Все це пояснюється зміною положення миттєвої осі обертання тіла як відносно саме тіла, так і відносно нерухомого простору.

### § 33. Визначення положення тіла з однією нерухомою точкою за допомогою кутів Ейлера \_\_\_\_\_

**Напрямні косинуси і співвідношення між ними.** Візьмемо декартові системи координат — нерухому  $xOy$  і рухому  $\xi O\eta$  зі спільним нерухомим початком  $O$  (рис. 11.1). Вважаємо, що

рух системи  $\xi O\eta\zeta$  задано, тобто функціональну залежність кутів, які утворюють рухомі осі  $O\xi$ ,  $O\eta$  і  $O\zeta$  з осями нерухомої системи  $xOyz$ , від часу виявлено. В разі осі  $O\xi$  її кути з осями  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  позначимо  $\alpha_{\xi x}$ ,  $\alpha_{\xi y}$  і  $\alpha_{\xi z}$ . Кути, які утворюють осі  $O\eta$  і  $O\zeta$  з нерухомими осями відповідно  $\alpha_{\eta x}$ ,  $\alpha_{\eta y}$ , і  $\alpha_{\eta z}$ ;  $\alpha_{\zeta x}$ ,  $\alpha_{\zeta y}$ , і  $\alpha_{\zeta z}$ .

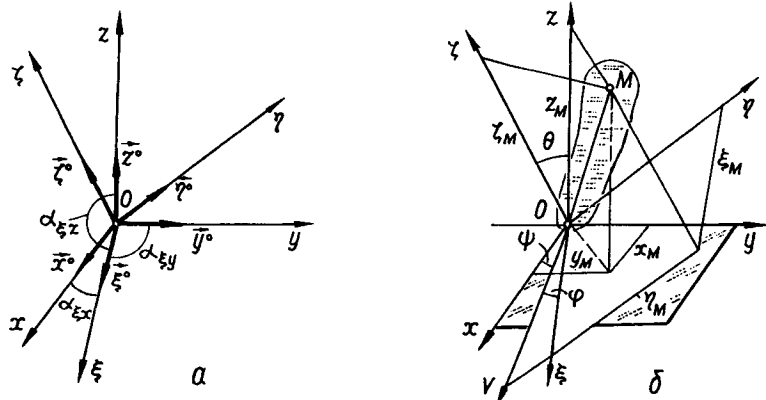


Рис. 11.1

Також введемо одиничні координатні вектори як рухомих, так і нерухомих осей:  $\bar{\xi}^0$ ,  $\bar{\eta}^0$  і  $\bar{\zeta}^0$  та  $\bar{x}^0$ ,  $\bar{y}^0$  і  $\bar{z}^0$  відповідно (рис. 11.1, а). Тепер розкладемо одиничні вектори рухомих осей по осях нерухомої системи координат  $xOyz$ :

$$\begin{aligned}\bar{\xi}^0 &= \bar{x}^0 \cos \alpha_{\xi x} + \bar{y}^0 \cos \alpha_{\xi y} + \bar{z}^0 \cos \alpha_{\xi z}; \\ \bar{\eta}^0 &= \bar{x}^0 \cos \alpha_{\eta x} + \bar{y}^0 \cos \alpha_{\eta y} + \bar{z}^0 \cos \alpha_{\eta z}; \\ \bar{\zeta}^0 &= \bar{x}^0 \cos \alpha_{\zeta x} + \bar{y}^0 \cos \alpha_{\zeta y} + \bar{z}^0 \cos \alpha_{\zeta z}.\end{aligned}\quad (11.1)$$

У рівностях (11.1) множники при одиничних векторах  $\bar{x}^0$ ,  $\bar{y}^0$  і  $\bar{z}^0$  називаються напрямними косинусами відповідної пари декартових осей.

Якщо кожну із залежностей (11.1) помножити скалярно саму на себе, то дістанемо першу групу співвідношень між напрямними косинусами:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}^0 \cdot \bar{\xi}^0 &= \cos^2 \alpha_{\xi x} + \cos^2 \alpha_{\xi y} + \cos^2 \alpha_{\xi z} = 1; \\ \bar{\eta}^0 \cdot \bar{\eta}^0 &= \cos^2 \alpha_{\eta x} + \cos^2 \alpha_{\eta y} + \cos^2 \alpha_{\eta z} = 1; \\ \bar{\zeta}^0 \cdot \bar{\zeta}^0 &= \cos^2 \alpha_{\zeta x} + \cos^2 \alpha_{\zeta y} + \cos^2 \alpha_{\zeta z} = 1.\end{aligned}\quad (11.2)$$

Щоб дістати другу групу співвідношень між напрямними косинусами, скалярно перемножимо векторні рівності (11.1) одну на одну в різних комбінаціях:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}^{\circ} \cdot \bar{\eta}^{\circ} &= \cos \alpha_{\xi x} \cos \alpha_{\eta x} + \cos \alpha_{\xi y} \cos \alpha_{\eta y} + \cos \alpha_{\xi z} \cos \alpha_{\eta z} = 0; \\ \bar{\xi}^{\circ} \cdot \bar{\zeta}^{\circ} &= \cos \alpha_{\xi x} \cos \alpha_{\zeta x} + \cos \alpha_{\xi y} \cos \alpha_{\zeta y} + \cos \alpha_{\xi z} \cos \alpha_{\zeta z} = 0; \\ \bar{\eta}^{\circ} \cdot \bar{\zeta}^{\circ} &= \cos \alpha_{\eta x} \cos \alpha_{\zeta x} + \cos \alpha_{\eta y} \cos \alpha_{\zeta y} + \cos \alpha_{\eta z} \cos \alpha_{\zeta z} = 0.\end{aligned}\quad (11.3)$$

Отже, дев'ять напрямних косинусів зв'язані шістьма співвідношеннями, що їх можна розглядати як систему із шістьма невідомими напрямними косинусами. Решту — три напрямних косинуси, вибір яких довільний, вважають незалежними між собою; їм можна надавати будь-яких числових значень, залежно від яких набувають відповідних значень інші шість залежних напрямних косинусів. Тобто положення рухомої декартової системи координат  $\xi O\eta\zeta$  відносно нерухомої  $xOy$  визначається заданням лише будь-яких за вибором трьох напрямних косинусів.

Однак положення рухомої системи координат відносно нерухомої можна задати іншою трійкою незалежних між собою параметрів, наприклад трьома кутами Ейлера, про які буде йтися далі.

**Кути Ейлера.** Введемо кути Ейлера, які однозначно визначають положення рухомої декартової системи координат  $\xi O\eta\zeta$  відносно нерухомої  $xOy$  зі спільним початком  $O$ . Нехай осі  $O\xi$ ,  $O\eta$  і  $O\zeta$  збігаються з осями  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  відповідно. Із цього положення здійснимо послідовно один за одним три незалежні один від одного повороти навколо певних осей рухомої системи  $\xi O\eta\zeta$  відносно нерухомої  $xOy$ .

По-перше, повернемо систему координат  $\xi O\eta\zeta$  навколо прямої, з якою збігаються осі  $Ox$  і  $O\xi$ , на кут  $\theta$  проти руху стрілки годинника, якщо дивитися на нерухому площину  $yOz$  навпроти додатного напрямку осі  $Ox$  ( $O\xi$ ). Дану пряму, навколо якої відбувається перший поворот системи осей на кут  $\theta$  і яка є лінією перетину площин  $\xi O\eta\zeta$  і  $xOy$ , позначимо  $Ov$  і назвемо *лінією вузлів*; її додатним напрямом є напрям від початку  $O$  систем координат вздовж лінії вузлів  $Ov$ . Це означає, що коли дивитися вздовж лінії вузлів  $Ov$  навпроти її додатного напрямку (від  $v$  до  $O$ ), то кут  $\theta$  між осями  $Oz$  і  $O\zeta$  відкладається від останньої проти руху стрілки годинника. Перший кут повороту  $\theta$  рухомої системи координат навколо лінії вузлів називається *кутом нутації* (рис. 11.2).

Далі, щоб дістати другий кут повороту, який позначимо  $\psi$  і назвемо *кутом прецесії*, повернемо систему координат  $\xi O\eta\zeta$  при сталому куті нутації  $\theta$  навколо осі  $Oz$  проти руху стрілки годинника на зазначений кут  $\psi$ , якщо дивитися на площину  $xOy$  вздовж осі  $Oz$  навпроти її додатного напрямку. Тоді рухома вісь  $O\zeta$  опише конічну поверхню з

віссю  $Oz$ , а лінія вузлів  $Ov$  разом із віссю  $O\xi$ , відокремившись від нерухомої осі  $Ox$ , опише в нерухомій площині плоский кут  $(Ox, Ov) = \psi$ . Також додамо, що лінія вузлів  $Ov$  перпендикулярна до плоского кута  $\theta$ , утвореного осями  $Oz$  і  $O\xi$ , а рухома площина  $\xi O\eta$  з нерухомою  $xOy$  складає кут  $\theta$  (рис. 11.2). Вісь  $Oz$ , навколо якої відбувається поворот рухомих осей на кут  $\psi$ , називається *віссю прецесії*.

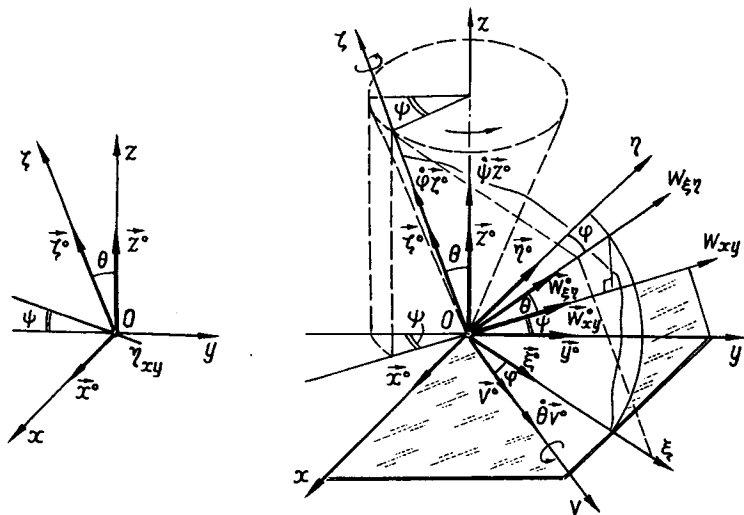


Рис. 11.2

Нарешті, щоб дістати третій шуканий кут повороту, який позначимо  $\varphi$  і назовемо *кутом власного обертання*, треба повернути систему координат  $\xi O\eta\zeta$  навколо осі  $O\xi$  на зазначений кут  $\varphi$  проти руху стрілки годинника, якщо дивитися на площину  $\xi O\eta$  вздовж осі  $O\xi$  навпроти її додатного напрямку; вважають, що кути  $\theta$  і  $\psi$  лишаються незмінними. Також додамо, що в разі власного обертання осі  $O\xi$  і  $O\eta$  переміщуються в площині, нахиленій під кутом  $\theta$  до нерухокої площини  $xOy$ , та відповідній осям  $Ov$ ,  $O\xi$  і  $O\eta$ . Крім того, рухома вісь  $O\xi$  утворює з лінією вузлів  $Ov$  кут  $\varphi$ . Введемо кут власного обертання  $\varphi$ , тоді вісь  $O\xi$  називається *віссю власного обертання*.

Розглянуті кути  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  є класичними *кутами Ейлера*, які однозначно визначають положення рухокої системи координат  $\xi O\eta\zeta$  з нерухоким початком  $O$  відносно абсолютного простору, тобто нерухокої декартової системи  $xOy$ . Після трьох поворотів рухокої системи  $\xi O\eta\zeta$  навколо осей  $Ov$ ,  $Oz$  і  $O\xi$  на кути відповідно  $\theta$ ,  $\psi$ , і  $\varphi$  вона набу-



ває цілком певне положення відносно нерухомих осей  $xOyz$ , яке також визначається однозначно розглянутими раніше дев'ятьма напрямними косінусами, зв'язаними між собою шістьма співвідношеннями (11.2) і (11.3). Отже, дістанемо висновок, що дев'ять напрямних косінусів можна виразити через кути Ейлера.

Установимо залежності напрямних косінусів  $\cos \alpha_{\xi x}$ ,  $\cos \alpha_{\eta x}$ ,  $\cos \alpha_{\zeta x}$ ,  $\cos \alpha_{\xi y}$ ,  $\cos \alpha_{\eta y}$ ,  $\cos \alpha_{\zeta y}$ ,  $\cos \alpha_{\xi z}$ ,  $\cos \alpha_{\eta z}$ ,  $\cos \alpha_{\zeta z}$  від введених кутів Ейлера  $\theta$ ,  $\psi$ , і  $\varphi$ . Спочатку вкажемо на три характерні площини:  $xOy$ , в якій лежить додаткова вісь  $Ow_{xy}$  і утворює з  $Oy$  кут  $\psi$ ;  $vOw_{\xi\eta}$  — площина, нахилена під кутом  $\theta$  до нерухомої площини  $xOy$  та відповідна осям  $O\xi$  і  $O\eta$  (пряма  $Ow_{\xi\eta}$  перпендикулярна до лінії вузлів  $Ov$ , а додаткова вісь  $Ow_{xy}$  є проекцією на площину  $xOy$  прямої  $Ow_{\xi\eta}$ , і тому становить з останньою кут  $\theta$ ); площина  $w_{xy}Oz$ , в якій лежать також  $Ow_{\xi\eta}$  і  $Oz$ .

Введемо одиничні вектори лінії вузлів  $Ov$  і додаткових осей  $Ow_{xy}$  й  $Ow_{\xi\eta}$  відповідно:  $\vec{v}^\circ$ ,  $\vec{w}_{xy}^\circ$  і  $\vec{w}_{\xi\eta}^\circ$ . Розкладемо в площині  $xOy$  одиничний вектор  $\vec{w}_{xy}^\circ$  по осях  $Ox$  і  $Oy$ :

$$\vec{w}_{xy}^\circ = \vec{y}^\circ \cos \psi - \vec{x}^\circ \sin \psi. \quad (11.4)$$

Розклавши одиничний вектор  $\vec{w}_{\xi\eta}^\circ$  у площині  $w_{xy}Oz$  по напрямках  $\vec{w}_{xy}^\circ$  і  $\vec{z}^\circ$ , дістанемо

$$\vec{w}_{\xi\eta}^\circ = \vec{z}^\circ \sin \theta + \vec{w}_{xy}^\circ \cos \theta. \quad (11.5)$$

Також у нерухомій площині  $xOy$  одиничний вектор  $\vec{v}^\circ$  лінії вузлів виразимо через орти  $\vec{x}^\circ$  і  $\vec{y}^\circ$  осей  $Ox$  і  $Oy$ :

$$\vec{v}^\circ = \vec{x}^\circ \cos \psi + \vec{y}^\circ \sin \psi. \quad (11.6)$$

Векторні співвідношення (11.4) — (11.6) покладемо в основу для розкладу одиничних векторів  $\vec{\xi}^\circ$ ,  $\vec{\eta}^\circ$  і  $\vec{\zeta}^\circ$  осей  $O\xi$ ,  $O\eta$  і  $Oz$  по ортах  $\vec{x}^\circ$ ,  $\vec{y}^\circ$  і  $\vec{z}^\circ$  нерухомих осей  $Ox$ ,  $Oy$ , і  $Oz$ .

Спочатку одиничні вектори  $\vec{\xi}^\circ$ ,  $\vec{\eta}^\circ$  і  $\vec{\zeta}^\circ$  виразимо через допоміжні орти  $\vec{v}^\circ$ ,  $\vec{w}_{\xi\eta}^\circ$  і  $\vec{w}_{xy}^\circ$ , а також  $\vec{z}^\circ$ :

$$\vec{\xi}^\circ = \vec{v}^\circ \cos \varphi + \vec{w}_{\xi\eta}^\circ \sin \varphi; \quad (11.7)$$

$$\vec{\eta}^\circ = \vec{v}^\circ \sin \varphi + \vec{w}_{\xi\eta}^\circ \cos \varphi; \quad (11.8)$$

$$\vec{\zeta}^\circ = \vec{w}_{xy}^\circ \sin \theta + \vec{z}^\circ \cos \theta. \quad (11.9)$$

Розкладемо вектор  $\vec{\xi}^\circ$  по ортах  $\vec{x}^\circ$ ,  $\vec{y}^\circ$  і  $\vec{z}^\circ$ , для цього підставимо в рівність (11.7) вирази для  $\vec{v}^\circ$ ,  $\vec{w}_{\xi\eta}^\circ$  і  $\vec{w}_{xy}^\circ$  відповідно за формулами (11.4) — (11.6):

$$\begin{aligned} \vec{\xi}^\circ &= \vec{v}^\circ \cos \varphi + \vec{w}_{\xi\eta}^\circ \sin \varphi = \cos \varphi (\vec{x}^\circ \cos \psi + \vec{y}^\circ \sin \psi) + \\ &+ \sin \varphi (\vec{z}^\circ \sin \theta + \vec{w}_{xy}^\circ) = \vec{x}^\circ \cos \varphi \cos \psi + \vec{y}^\circ \cos \varphi \sin \psi + \\ &+ \vec{z}^\circ \sin \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta (\vec{y}^\circ \cos \psi - \vec{x}^\circ \sin \psi). \end{aligned}$$

Остаточно маємо шукану векторну залежність між векторами  $\bar{\xi}^\circ$ ,  $\bar{x}^\circ$ ,  $\bar{y}^\circ$  і  $\bar{z}^\circ$ :

$$\bar{\xi}^\circ = \bar{x}^\circ (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi) + \bar{y}^\circ (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \sin \psi) + \bar{z}^\circ \sin \varphi \sin \theta. \quad (11.10)$$

Скориставшись векторними формулами (11.8), (11.4) — (11.6), дістанемо:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^\circ = & -\bar{v}^\circ \sin \varphi + \bar{w}^\circ_{\xi\eta} \cos \varphi = -\sin \varphi (\bar{x}^\circ \cos \psi + \bar{y}^\circ \sin \psi) + \\ & + \cos \varphi (\bar{z}^\circ \sin \theta + \bar{w}^\circ_{xy} \cos \theta) = -\bar{x}^\circ \sin \varphi \cos \psi - \bar{y}^\circ \sin \varphi \sin \psi + \\ & + \bar{z}^\circ \cos \varphi \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta (\bar{y}^\circ \cos \psi - \bar{x}^\circ \sin \varphi), \end{aligned}$$

або

$$\bar{\eta}^\circ = \bar{x}^\circ (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi) + \bar{y}^\circ (\cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + \bar{z}^\circ \cos \varphi \sin \theta. \quad (11.11)$$

Нарешті виведемо третю векторну рівність, що пов'язує одиничний вектор  $\bar{\zeta}^\circ$  рухомої осі  $Oz$  з ортами  $\bar{x}^\circ$ ,  $\bar{y}^\circ$  і  $\bar{z}^\circ$  нерухомих осей. Для цього у формулу (11.9) підставимо значення  $\bar{w}^\circ_{xy}$  відповідно до виразу (11.4):

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}^\circ = & -\bar{w}^\circ_{xy} \sin \theta + \bar{z}^\circ \cos \theta = \\ = & -\sin \theta (\bar{y}^\circ \cos \psi - \sin \psi \bar{x}^\circ) + \bar{z}^\circ \cos \theta; \\ \bar{\zeta}^\circ = & \bar{x}^\circ \sin \theta \sin \psi - \bar{y}^\circ \sin \theta \cos \psi + \bar{z}^\circ \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.12)$$

З порівняння добутих шойно формул для  $\bar{\xi}^\circ$ ,  $\bar{\eta}^\circ$  і  $\bar{\zeta}^\circ$  згідно з рівностями (11.10) — (11.12) з раніше виведеними співвідношеннями (11.1) дістанемо вирази дев'яти напрямних косинусів через кути Ейлера:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{\xi x} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi; \\ \cos \alpha_{\eta x} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi; \\ \cos \alpha_{\zeta x} &= \sin \theta \sin \psi; \\ \cos \alpha_{\xi y} &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi; \\ \cos \alpha_{\eta y} &= \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi; \\ \cos \alpha_{\zeta y} &= -\sin \theta \cos \psi; \\ \cos \alpha_{\xi z} &= \sin \varphi \sin \theta; \\ \cos \alpha_{\eta z} &= \cos \varphi \sin \theta; \\ \cos \alpha_{\zeta z} &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.13)$$

**Визначення положення абсолютно твердого тіла з однією нерухомою точкою.** Прикладами тіл, що рухаються навколо нерухомої точки, можуть бути іграшка — дзига (рис. 11.3), гіроскоп у кардановому підвісі (рис. 11.4), бігун у дробильному млині (рис. 11.5). У першому випадку (рис. 11.3) нерухомою точкою є вершина конуса дзиги, якою вона торкається дна опорної лунки на нерухомій горизонтальній поверхні під час її так званого прецесійного руху: дзига здійснює власне

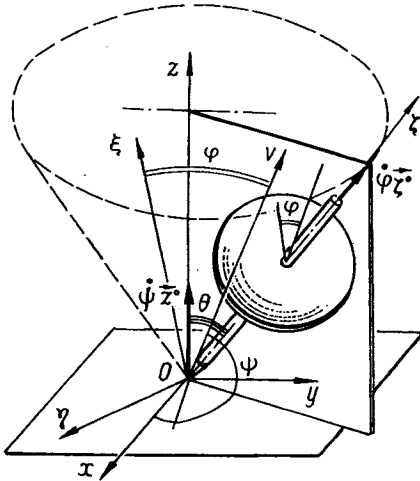


Рис. 11.3

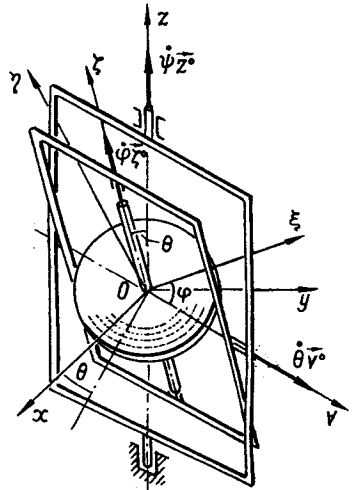


Рис. 11.4

обертання навколо матеріальної осі симетрії  $O\xi$  з певною кутовою швидкістю  $\varphi$ , і, крім того, разом із віссю  $O\xi$  обертається навколо нерухомої осі  $Oz$  з кутовою швидкістю прецесії  $\Psi$ . За цих умов кут нутації  $\theta$  можна вважати незмінним.

Гіроскоп — це масивне тіло (наприклад, однорідний круглий диск на рис. 11.4) з матеріальною віссю симетрії, центр ваги якого збігається з нерухомою точкою. Нерухомість центра ваги гіроскопа досягається завдяки його закріпленню за допомогою двох рамок — внутрішньої і зовнішньої. Зовнішня рамка має вертикальну нерухомию вісь обертання  $Oz$ , навколо якої обидві рамки прецесійно рухаються з кутовою швидкістю  $\Psi$ . Водночас внутрішня рамка разом із гіроскопом перебуває в нутаційному русі навколо горизонтальної осі — лінії вузлів  $O\nu$  — з кутовою швидкістю нутації  $\theta$ . Крім того, гіроскоп обертається навколо власної осі симетрії  $O\xi$  відносно внутріш-

ної рамки з кутовою швидкістю власного обертання  $\phi$  (також на рис. 11.4 показано кути Ейлера).

Схему дробильного млина, в чаші якого рухаються млинові колеса (бігуни), наведено на рис. 11.5. Під час роботи дробильного млина бігун виконує чисте кочення по дну млинової чаші, а точка  $O$  перетину осі вертикального привідного вала і власної осі  $O\xi$  бігуна є нерухомою, навколо неї сферично рухається бігун.

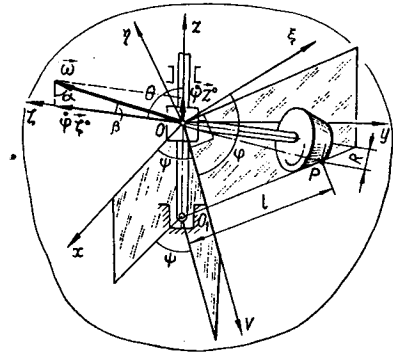


Рис. 11.5

Рух тіла з однією нерухомою точкою  $O$  розглянемо відносно нерухомої декартової системи координат  $xOyz$  з початком у нерухомій точці  $O$  тіла. Для визначення положення тіла в цьому разі незмінно зв'яжемо з ним осі рухомої системи декартових координат  $\xi O\eta\zeta$  з початком в нерухомій точці  $O$  (рис. 11.1, б). Тоді кути Ейлера однозначно визначають положення рухомих осей  $\xi O\eta\zeta$  відносно нерухомих  $xOyz$ , а отже, і тіла в разі його сферичного руху. Тому кінематичними рівняннями руху тіла з однією нерухомою точкою є функціональні залежності кутів Ейлера від часу:

$$\theta = \theta(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \phi = \phi(t). \quad (11.14)$$

На підставі рівнянь руху тіла навколо нерухомої точки (11.14) можна вивести рівняння руху окремої його точки  $M$  з координатами  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$  в рухомій системі  $\xi O\eta\zeta$  відносно абсолютно нерухомої  $Oxyz$ .

### § 34. Визначення швидкостей і прискорень точок тіла

Рівняння руху точок тіла. З рис. 11.1 запишемо вираз для радіуса-вектора  $\vec{r} = \vec{OM}$ :

$$\vec{r} = \vec{OM} = \xi \vec{\xi}^0 + \eta \vec{\eta}^0 + \zeta \vec{\zeta}^0, \quad (11.15)$$

де  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$  — власні координати точки  $M$ , а  $\vec{\xi}^0$ ,  $\vec{\eta}^0$  і  $\vec{\zeta}^0$  — одиничні вектори рухомих осей  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$ .

Підставимо в (11.15)  $\bar{\xi}^\circ$ ,  $\bar{\eta}^\circ$  і  $\bar{\zeta}^\circ$  з векторних співвідношень (11.1):

$$\begin{aligned} \vec{r} = & \xi(\bar{x}^\circ \cos \alpha_{\xi x} + \bar{y}^\circ \cos \alpha_{\xi y} + \bar{z}^\circ \cos \alpha_{\xi z}) + \eta(\bar{x}^\circ \cos \alpha_{\eta x} + \\ & + \bar{y}^\circ \cos \alpha_{\eta y} + \bar{z}^\circ \cos \alpha_{\eta z}) + \zeta(\bar{x}^\circ \cos \alpha_{\zeta x} + \bar{y}^\circ \cos \alpha_{\zeta y} + \\ & + \bar{z}^\circ \cos \alpha_{\zeta z}) = \bar{x}^\circ(\xi \cos \alpha_{\xi x} + \eta \cos \alpha_{\eta x} + \zeta \cos \alpha_{\zeta x}) + \\ & + \bar{y}^\circ(\xi \cos \alpha_{\xi y} + \eta \cos \alpha_{\eta y} + \zeta \cos \alpha_{\zeta y}) + \\ & + \bar{z}^\circ(\xi \cos \alpha_{\xi z} + \eta \cos \alpha_{\eta z} + \zeta \cos \alpha_{\zeta z}). \end{aligned} \quad (11.16)$$

Та, з іншого боку, такий самий радіус-вектор  $\vec{r}$  виражається через абсолютні координати  $x$ ,  $y$  і  $z$  й одиничні вектори  $\bar{x}^\circ$ ,  $\bar{y}^\circ$  і  $\bar{z}^\circ$  нерухомих осей  $xOyz$ :

$$\vec{r} = x \bar{x}^\circ + y \bar{y}^\circ + z \bar{z}^\circ. \quad (11.17)$$

Множники при однакових ортах у правих частинах залежностей (11.16) і (11.17) рівні між собою. Отже,

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha_{\xi x} + \eta \cos \alpha_{\eta x} + \zeta \cos \alpha_{\zeta x}; \\ y &= \xi \cos \alpha_{\xi y} + \eta \cos \alpha_{\eta y} + \zeta \cos \alpha_{\zeta y}; \\ z &= \xi \cos \alpha_{\xi z} + \eta \cos \alpha_{\eta z} + \zeta \cos \alpha_{\zeta z}. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Якщо в (11.18) виразити напрямні косинуси кутів між нерухомими і рухомими осями через кути Ейлера за формулами (11.13), то дістанемо шукані рівняння руху будь-якої точки тіла для його руху навколо нерухомої точки (вибирають ту чи іншу точку тіла заданням власних координат  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$ ):

$$\begin{aligned} x &= \xi(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi) + \eta(-\sin \varphi \cos \psi - \\ & - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi) + \zeta(\sin \theta \sin \psi); \\ y &= \xi(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi) + \eta(\cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \\ & - \sin \varphi \sin \psi) + \zeta(-\sin \theta \cos \psi); \\ z &= \xi(\sin \varphi \sin \theta) + \eta(\cos \varphi \sin \theta) + \zeta \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Значимо, що в даних рівняннях власні координати  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$ , які задають положення точки тіла відносно системи координат  $\xi O\eta\zeta$ , незмінно зв'язані з тілом, не залежать від часу.

**Визначення швидкостей точок тіла.** Для визначення проєкцій швидкостей точок тіла в разі його сферичного руху на нерухомі декартові осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  треба, очевидно, від лівих і правих частин рівностей (11.19) взяти перші похідні по часу, оскільки кути Ейлера  $\theta$ ,  $\psi$  і  $\varphi$  у виразах координат  $x$ ,  $y$ , і  $z$  є функціями часу.

Для цього скористаємося рівняннями (11.18):

$$\dot{x} = v_x = \xi(\cos \alpha_{\xi x})' + \eta(\cos \alpha_{\eta x})' + \zeta(\cos \alpha_{\zeta x})';$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = v_y &= \xi(\cos \alpha_{\xi y})' + \eta(\cos \alpha_{\eta y})' + \zeta(\cos \alpha_{\zeta y})'; \\ \dot{z} = v_z &= \xi(\cos \alpha_{\xi z})' + \eta(\cos \alpha_{\eta z})' + \zeta(\cos \alpha_{\zeta z})'. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Візьмемо похідні по часу від правих частин виразів (11.13):

$$\begin{aligned} (\cos \alpha_{\xi x})' &= -\dot{\varphi}(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi) - \\ &- \dot{\psi}(\sin \psi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi) + \dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta \sin \psi; \\ (\cos \alpha_{\xi y})' &= \dot{\varphi}(\cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + \\ &+ \dot{\psi}(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi); \\ (\cos \alpha_{\xi z})' &= \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta; \\ (\cos \alpha_{\eta x})' &= \dot{\varphi}(\sin \varphi \cos \theta \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi) + \\ &+ \dot{\psi}(\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi) + \dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta \sin \psi; \\ (\cos \alpha_{\eta y})' &= -\dot{\psi}(\sin \varphi \cos \theta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) - \\ &- \dot{\varphi}(\cos \varphi \cos \theta \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) - \dot{\theta} \cos \varphi \cos \psi; \\ (\cos \alpha_{\eta z})' &= -\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta; \\ (\cos \alpha_{\zeta x})' &= \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi; \\ (\cos \alpha_{\zeta y})' &= -\dot{\theta} \cos \theta \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi; \\ (\cos \alpha_{\zeta z})' &= -\dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Підставимо похідні (11.21) у (11.20), тоді дістанемо шукані формули проєкцій швидкості точки тіла в разі його руху навколо нерухомої точки:

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x &= \dot{\varphi}[\cos \theta \sin \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) - \cos \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\ &+ \dot{\psi} \{ \sin \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) + \cos \psi [\zeta \sin \theta - \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] \} + \\ &+ \dot{\theta} \sin \psi [\sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \zeta \cos \theta]; \\ \dot{y} = v_y &= \dot{\varphi}[\cos \theta \cos \psi (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - \sin \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\ &+ \dot{\psi} \{ \cos \psi (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \sin \psi [\zeta \sin \theta - \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \\ &+ \zeta \sin \theta] \}; \\ \dot{z} = v_z &= \dot{\varphi} \sin \theta (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \dot{\theta} [\cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \\ &- \zeta \sin \theta]. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Бачимо, що проєкції швидкості точок тіла на нерухомі декартові осі  $xOy$  залежать від кутів Ейлера та їх похідних.

**Визначення прискорень точок тіла.** Продиференціювавши формули (11.22) по часу, дістанемо вирази для проєкцій прискорення точок

тіла в разі його сферичного руху на ті самі нерухомі осі декартових координат:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} = a_x = & \ddot{\varphi} [\cos \theta \sin \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) - \cos \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\
 & + \ddot{\psi} \{ \sin \psi (\eta \cos \varphi - \xi \cos \varphi) + \cos \psi [\zeta \sin \theta - \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] \} + \\
 & + \ddot{\theta} \sin \psi [\sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \zeta \cos \theta] + \\
 & + \dot{\varphi}^2 [\cos \theta \sin \psi (\eta \cos \varphi + \xi \sin \varphi) - \cos \psi (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)] + \\
 & + \dot{\psi}^2 \{ \cos \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) - \sin \psi [\zeta \sin \theta - \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] \} + \\
 & + \dot{\theta}^2 [\sin \psi \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \zeta \sin \psi \sin \theta] + \\
 & + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} [\cos \theta \cos \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) + \sin \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\
 & + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \\
 & + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \psi [\sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \zeta \cos \theta]; \\
 \ddot{y} = a_y = & \ddot{\varphi} [\cos \theta \cos \psi (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - \sin \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\
 & + \ddot{\psi} \{ \cos \psi (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \sin \psi [\zeta \sin \theta - \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] \} - \\
 & - \ddot{\theta} \cos \psi [\sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \zeta \cos \theta] + \tag{11.23} \\
 & + \dot{\varphi}^2 [\sin \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) - \cos \theta \cos \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\
 & + \dot{\psi}^2 \{ \sin \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) - \cos \psi [\cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \zeta \sin \theta] \} + \\
 & + \dot{\theta}^2 \cos \psi [\zeta \sin \theta + \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\
 & + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} [\cos \theta \sin \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) - \cos \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\
 & + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) + \\
 & + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \psi [\sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \zeta \cos \theta]; \\
 \ddot{z} = a_z = & \ddot{\varphi} \sin \theta (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \ddot{\theta} [\sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \\
 & - \zeta \sin \theta] - \dot{\varphi}^2 \sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \dot{\theta}^2 \sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \\
 & + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \varphi (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi).
 \end{aligned}$$

**Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі.** Якщо осі  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$  збігаються з відповідними осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  нерухомої системи координат, з часом  $\theta$  і  $\psi$  не змінюються, а кут власного обертання є функцією часу, то це — випадок обертального руху тіла навколо нерухомої осі  $Oz$ , з якою збігається і власна вісь  $O\zeta$ . Тоді за формулами (11.19), (11.22) і (11.23) маємо відповідно:

$$\begin{aligned}
 x &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \\
 y &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi; \\
 z &= \zeta,
 \end{aligned} \tag{11.24}$$

$$\begin{aligned}
v_x = \dot{x} &= -\omega(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi); \\
v_y = \dot{y} &= \omega(\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi); \\
v_z &= 0 (\omega = \dot{\varphi}),
\end{aligned}
\tag{11.25}$$

$$\begin{aligned}
a_x = \ddot{x} &= -\varepsilon(\eta \cos \varphi + \xi \sin \varphi) + \omega^2 (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi); \\
a_y = \ddot{y} &= \varepsilon(\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) - \omega^2 (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi); \\
a_z &= 0.
\end{aligned}
\tag{11.26}$$

Рівняння (11.24) дістанемо, якщо скористаємося співвідношеннями (4.11) і рис. 4.1 (індекс «i» в позначеннях  $x_i, y_i, z_i$  і  $\alpha_i$  опущено):

$$\begin{aligned}
x = r \cos(\alpha + \varphi) &= r (\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \\
y = r \sin(\alpha + \varphi) &= r (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi.
\end{aligned}$$

Візьмемо першу і другу похідні по часу від обох частин цих рівностей, тоді маємо формули (11.25) і (11.26). Справді,

$$\begin{aligned}
\dot{x} = v_x &= [\xi(-\sin \varphi) - \eta \cos \varphi] \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi); \\
\dot{y} = v_y &= \xi \dot{\varphi} \cos \varphi - \eta \dot{\varphi} \sin \varphi = \dot{\varphi} (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi); \\
\ddot{x} = a_x = \dot{v}_x &= -\ddot{\varphi} (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \dot{\varphi} (\xi \dot{\varphi} \cos \varphi - \eta \dot{\varphi} \sin \varphi) = \\
&= -\ddot{\varphi} (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \dot{\varphi}^2 (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi); \\
\ddot{y} = a_y = \dot{v}_y &= \ddot{\varphi} (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \dot{\varphi} (-\xi \dot{\varphi} \sin \varphi - \eta \dot{\varphi} \cos \varphi) = \\
&= \ddot{\varphi} (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - \dot{\varphi}^2 (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi).
\end{aligned}$$

Врахуємо (11.24) у формулах (11.25) і (11.26) та дістанемо

$$\begin{aligned}
v_x = \dot{x} &= -\omega(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) = -\omega y = \omega_y z - \omega_z y, \\
v_y = \dot{y} &= \omega(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) = \omega x = \omega_z x - \omega_x z,
\end{aligned}
\tag{11.27}$$

де  $\omega_x$  і  $\omega_y$  дорівнюють нулю,

$$\begin{aligned}
a_x = \ddot{x} &= -\varepsilon(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \omega^2 (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) = -\varepsilon y - \omega^2 x; \\
a_y = \ddot{y} &= \varepsilon(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - \omega^2 (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) = \varepsilon x - \omega^2 y.
\end{aligned}
\tag{11.28}$$

Звернемо увагу на те, що складові векторів швидкості й прискорення точки тіла в разі обертального руху навколо нерухомої осі, паралельні відповідним нерухомим декартовим осям  $xOy$ , визначаються відповідними похідними по часу від абсолютних декартових координат.

Визначимо складові (проекції) абсолютної швидкості  $\vec{v}$  точки тіла в розглядуваному разі, паралельні рухомим осям  $O\xi$  і  $O\eta$ . Для цього спочатку вектор  $\vec{v}$  розкладемо по ортах  $\vec{i}$  і  $\vec{j}$  нерухомих осей  $xOyz$ :

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}.$$



Тепер, щоб знайти  $v_{\xi}, v_{\eta}$ , помножимо скалярно останню векторну рівність спочатку на орт  $\vec{\xi}$ , а потім — на орт  $\vec{\eta}$ :

$$\vec{v} \cdot \vec{\xi}^0 = v \cos \angle(\vec{v}, \xi) = v_{\xi} = \dot{x} \vec{i} \cdot \vec{\xi}^0 + \dot{y} \vec{j} \cdot \vec{\xi}^0 = \dot{x} \cos \alpha_{x\xi} + \dot{y} \cos \alpha_{y\xi};$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\eta}^0 = v \cos \angle(\vec{v}, \eta) = v_{\eta} = \dot{x} \vec{i} \cdot \vec{\eta}^0 + \dot{y} \vec{j} \cdot \vec{\eta}^0 = \dot{x} \cos \alpha_{x\eta} + \dot{y} \cos \alpha_{y\eta}.$$

З рис. 4.1, б визначимо, що

$$\cos \alpha_{x\xi} = \cos \varphi; \quad \cos \alpha_{y\xi} = \sin \varphi; \quad \cos \alpha_{x\eta} = -\sin \varphi; \quad \cos \alpha_{y\eta} = \cos \varphi.$$

Враховавши це і формули (11.25), дістанемо шукані складові швидкості  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} v_{\xi} &= (-\omega \xi \sin \varphi - \omega \eta \cos \varphi) \cos \varphi + (\omega \xi \cos \varphi - \omega \eta \sin \varphi) \sin \varphi = \\ &= -\omega \xi \sin \varphi \cos \varphi - \omega \eta \cos^2 \varphi + \omega \xi \cos \varphi \sin \varphi - \omega \eta \sin^2 \varphi = -\omega \eta; \quad (11.29) \\ v_{\eta} &= (-\omega \xi \sin \varphi - \omega \eta \cos \varphi)(-\sin \varphi) + (\omega \xi \cos \varphi - \omega \eta \sin \varphi) \cos \varphi = \\ &= \omega \xi \sin^2 \varphi + \omega \eta \cos \varphi \sin \varphi + \omega \xi \cos \varphi \cos \varphi - \omega \eta \sin \varphi \cos \varphi = \omega \xi. \end{aligned}$$

Зуважимо, що знайдені проєкції швидкості  $\vec{v}$  (11.29) на осі  $O\xi$  і  $O\eta$ , які разом із тілом обертаються навколо нерухомої осі  $Oz$ , не дорівнюють похідним по часу від відповідних координат  $\xi$  і  $\eta$ , оскільки останні не залежать від часу (їхні похідні мають нульове значення).

Повернемося до формул (11.27), праві частини яких можна геометрично інтерпретувати. Величини  $|\omega_z y| = |\omega_y z - \omega_z y|$ ,  $|\omega_z x| = |\omega_z x - \omega_x z|$  є площами паралелограмів, які розташовані у координатних площинах  $yOz$ ,  $xOz$  і мають спільну сторону  $\omega_z = \omega$  на осі  $Oz$ . Другі сторони цих паралелограмів  $r_{yz}$  і  $r_{xz}$  є гіпотенузами прямокутних трикутників з катетами  $y$ ,  $z$  і  $x$ ,  $z$  відповідно (рис. 11.6).

Отже,

$$|\omega_z y| = S_{yz} = r_{yz} \omega_z \sin \angle(\omega_z, r_{yz});$$

$$|\omega_z x| = S_{xz} = r_{xz} \omega_z \sin \angle(\omega_z, r_{xz}).$$

Втім, з іншого боку, ці площі можна виразити через площу паралелограма, дві сторони якого,  $\omega$  і  $r$ , утворюють на координатних площинах  $xOz$  і  $yOz$  відповідні проєкції  $\omega_z$ ,  $r_{xz}$  і  $\omega_z$ ,  $r_{yz}$ :

$$S_{xz} = S \cos \angle(\vec{v}^0, \vec{j}), \quad S_{yz} = S \cos \angle(\vec{v}^0, \vec{i}),$$

де  $(\vec{v}^\circ, \vec{j}), (\vec{v}^\circ, \vec{i})$  — кути між площиною паралелограма  $O\omega O_1 r$  і координатними площинами  $xOz$  і  $yOz$  відповідно.

З рівнянь (11.27) дістанемо:

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2 = (\omega_x y)^2 + (\omega_y x)^2.$$

Введемо розглянуті площі з урахуванням тотожності

$$\cos^2 \angle(\vec{v}^\circ, \vec{i}) + \cos^2 \angle(\vec{v}^\circ, \vec{j}) = 1,$$

тоді

$$v^2 = S^2, \quad v = S.$$

Та площа паралелограма  $O\omega O_1 r$  має величину  $S = \omega r \sin \gamma$ , отже,  $v = \omega r \sin \gamma$ . Це — модуль векторного добутку двох векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$ , тому  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

Отже, виведено векторну формулу Ейлера для обертового руху тіла навколо нерухомої осі на підставі кінематики руху тіла з однією нерухомою точкою.

Нарешті, за співвідношеннями (11.28) дістанемо формулу (2.32):

$$\begin{aligned} a_x^2 + a_y^2 &= (\varepsilon y + \omega^2 x)^2 + (\varepsilon x - \omega^2 y)^2 = \\ &= \varepsilon^2 y^2 + \omega^4 x^2 + 2\varepsilon y \omega^2 x + \varepsilon^2 x^2 + \omega^4 y^2 - 2\varepsilon x \omega^2 y = \\ &= \varepsilon^2 (x^2 + y^2) + \omega^4 (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(\varepsilon^2 + \omega^4) = a^2; \end{aligned}$$

$$a = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

### § 35. Розклад руху абсолютно твердого тіла з однією нерухомою точкою на три види обертового руху — нутацію, прецесію і власне обертання. Кутова швидкість і кутове прискорення

**Вираження компонент швидкості точки тіла через абсолютні координати.** Спочатку виведемо співвідношення між напрямними косинусами  $\cos \alpha_{x\xi}, \cos \alpha_{x\eta}, \cos \alpha_{x\zeta}; \cos \alpha_{y\xi}, \cos \alpha_{y\eta}, \cos \alpha_{y\zeta}; \cos \alpha_{z\xi}, \cos \alpha_{z\eta}, \cos \alpha_{z\zeta}$ .

Розкладемо орти абсолютних осей  $xOyz$  по одиничних ортах рухомих осей  $\xi O\eta\zeta$ :

$$\begin{aligned} \vec{x}^\circ &= \vec{\xi}^\circ \cos \alpha_{x\xi} + \vec{\eta}^\circ \cos \alpha_{x\eta} + \vec{\zeta}^\circ \cos \alpha_{x\zeta}; \\ \vec{y}^\circ &= \vec{\xi}^\circ \cos \alpha_{y\xi} + \vec{\eta}^\circ \cos \alpha_{y\eta} + \vec{\zeta}^\circ \cos \alpha_{y\zeta}; \\ \vec{z}^\circ &= \vec{\xi}^\circ \cos \alpha_{z\xi} + \vec{\eta}^\circ \cos \alpha_{z\eta} + \vec{\zeta}^\circ \cos \alpha_{z\zeta}. \end{aligned} \tag{11.30}$$

Перемноживши скалярно одну на одну векторні рівності (11.30) з урахуванням співвідношень  $\bar{x}^\circ \cdot \bar{y}^\circ = 0$ ,  $\bar{x}^\circ \cdot \bar{z}^\circ = 0$ ,  $\bar{y}^\circ \cdot \bar{z}^\circ = 0$ , дістанемо:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{x\xi} \cos \alpha_{y\xi} + \cos \alpha_{x\eta} \cos \alpha_{y\eta} + \cos \alpha_{x\zeta} \cos \alpha_{y\zeta} &= 0; \\ \cos \alpha_{x\xi} \cos \alpha_{z\xi} + \cos \alpha_{x\eta} \cos \alpha_{z\eta} + \cos \alpha_{x\zeta} \cos \alpha_{z\zeta} &= 0; \\ \cos \alpha_{y\xi} \cos \alpha_{z\xi} + \cos \alpha_{y\eta} \cos \alpha_{z\eta} + \cos \alpha_{y\zeta} \cos \alpha_{z\zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Власні координати точки тіла  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$  виразимо через абсолютні її координати  $x$ ,  $y$  і  $z$ . Для цього векторну рівність

$$\bar{r} = x \bar{x}^\circ + y \bar{y}^\circ + z \bar{z}^\circ$$

спочатку помножимо скалярно на орт  $\bar{\xi}^\circ$ , потім — на орт  $\bar{\eta}^\circ$  і, нарешті, на орт  $\bar{\zeta}^\circ$  з урахуванням, що  $\bar{r} \cdot \bar{\xi}^\circ = \cos \angle(\bar{r}, \bar{\xi}^\circ) = \xi$ ;  $\bar{r} \cdot \bar{\eta}^\circ = \cos \angle(\bar{r}, \bar{\eta}^\circ) = \eta$ ;  $\bar{r} \cdot \bar{\zeta}^\circ = \cos \angle(\bar{r}, \bar{\zeta}^\circ)$ .

Маємо:

$$\begin{aligned} \xi &= x \bar{x}^\circ \cdot \bar{\xi}^\circ + y \bar{y}^\circ \cdot \bar{\xi}^\circ + z \bar{z}^\circ \cdot \bar{\xi}^\circ; \\ \eta &= x \bar{x}^\circ \cdot \bar{\eta}^\circ + y \bar{y}^\circ \cdot \bar{\eta}^\circ + z \bar{z}^\circ \cdot \bar{\eta}^\circ; \\ \zeta &= x \bar{x}^\circ \cdot \bar{\zeta}^\circ + y \bar{y}^\circ \cdot \bar{\zeta}^\circ + z \bar{z}^\circ \cdot \bar{\zeta}^\circ, \end{aligned}$$

або, ввівши відповідні напрямні косинуси,

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \alpha_{x\xi} + y \cos \alpha_{y\xi} + z \cos \alpha_{z\xi}; \\ \eta &= x \cos \alpha_{x\eta} + y \cos \alpha_{y\eta} + z \cos \alpha_{z\eta}; \\ \zeta &= x \cos \alpha_{x\zeta} + y \cos \alpha_{y\zeta} + z \cos \alpha_{z\zeta}. \end{aligned} \quad (11.32)$$

На підставі формул напрямних косинусів (11.13) і (11.32) компоненти швидкостей (11.22) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x &= (x \cos \alpha_{x\xi} + y \cos \alpha_{y\xi} + z \cos \alpha_{z\xi})(\dot{\varphi} \cos \alpha_{x\eta} - \dot{\psi} \cos \alpha_{y\xi} + \\ &+ \dot{\theta} \sin \psi \cos \alpha_{z\xi}) + (x \cos \alpha_{x\eta} + y \cos \alpha_{y\eta} + z \cos \alpha_{z\eta})(-\dot{\varphi} \cos \alpha_{x\xi} - \\ &- \dot{\psi} \cos \alpha_{y\eta} + \dot{\theta} \cos \varphi \cos \alpha_{x\xi}) + (x \cos \alpha_{x\zeta} + y \cos \alpha_{y\zeta} + z \cos \alpha_{z\zeta}) \times \\ &\times (-\dot{\psi} \cos \alpha_{y\zeta} + \dot{\theta} \sin \psi \cos \alpha_{z\zeta}); \\ \dot{y} = v_y &= (x \cos \alpha_{x\xi} + y \cos \alpha_{y\xi} + z \cos \alpha_{z\xi})(\dot{\varphi} \cos \alpha_{y\eta} + \dot{\psi} \cos \alpha_{x\xi} + \\ &+ \dot{\theta} \sin \varphi \cos \alpha_{y\zeta}) + (x \cos \alpha_{x\eta} + y \cos \alpha_{y\eta} + z \cos \alpha_{z\eta})(-\dot{\varphi} \cos \alpha_{y\xi} + \\ &+ \dot{\psi} \cos \alpha_{x\eta} + \dot{\theta} \cos \varphi \cos \alpha_{y\zeta}) + (x \cos \alpha_{x\zeta} + y \cos \alpha_{y\zeta} + z \cos \alpha_{z\zeta}) \times \\ &\times (\dot{\psi} \cos \alpha_{x\zeta} - \dot{\theta} \cos \psi \cos \alpha_{z\zeta}); \\ \dot{z} = v_z &= (x \cos \alpha_{x\xi} + y \cos \alpha_{y\xi} + z \cos \alpha_{z\xi})(\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi) + \end{aligned} \quad (11.33)$$

$$+ (x \cos \alpha_{x\eta} + y \cos \alpha_{y\eta} + z \cos \alpha_{z\eta})(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) + \\ + (x \cos \alpha_{x\zeta} + y \cos \alpha_{y\zeta} + z \cos \alpha_{z\zeta})(-\dot{\theta} \sin \theta).$$

Спочатку розглянемо вираз для компоненти  $x$ . Розкриємо дужки і згрупуємо члени з однаковою абсолютною координатою. Винесемо спільну координату за дужки у розглядуваному виразі й дістанемо суму трьох членів вигляду  $x[\dots]$ ,  $y[\dots]$  і  $z[\dots]$ . Розкриємо зміст кожного з цих членів. Запишемо перший  $x[\dots]$ :

$$x \{ \dot{\varphi} (\cos \alpha_{x\zeta} \cos \alpha_{x\eta} - \cos \alpha_{x\eta} \cos \alpha_{x\zeta}) - \dot{\psi} (\cos \alpha_{x\zeta} \cos \alpha_{y\zeta} + \\ + \cos \alpha_{x\eta} \cos \alpha_{y\eta} + \cos \alpha_{x\zeta} \cos \alpha_{y\zeta}) + \dot{\theta} [\sin \psi (\cos \alpha_{x\zeta} \cos \alpha_{z\zeta} + \\ + \cos \alpha_{x\zeta} \cos \alpha_{z\zeta}) - \cos \varphi \cos \alpha_{x\eta} \cos \alpha_{x\zeta}] \}.$$

Тут вирази в круглих дужках при  $\dot{\varphi}$  і  $\dot{\psi}$  дорівнюють нулю (11.31), тому

$$\dot{\theta} [\sin \psi (\cos \alpha_{x\zeta} \cos \alpha_{z\zeta} + \cos \alpha_{x\zeta} \cos \alpha_{z\zeta}) - \cos \varphi \cos \alpha_{x\eta} \cos \alpha_{x\zeta}].$$

З урахуванням (11.31) можна записати

$$x \dot{\theta} [\cos \varphi \cos \alpha_{x\eta} \cos \alpha_{x\zeta} + \sin \psi (-\cos \alpha_{x\eta} \cos \alpha_{z\eta})].$$

Замінімо напрямні косинуси  $\cos \alpha_{x\eta}$  і  $\cos \alpha_{x\zeta}$  їхніми виразами (11.13), дістанемо:

$$x \dot{\theta} [\cos \alpha_{x\eta} (\cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \cos \varphi \sin \theta \sin \psi)] = 0.$$

Проаналізуємо відповідно другий член  $y[\dots]$ :

$$y \{ \dot{\varphi} (\cos \alpha_{y\zeta} \cos \alpha_{x\eta} - \cos \alpha_{y\eta} \cos \alpha_{x\zeta}) - \dot{\psi} (\cos^2 \alpha_{y\zeta} + \cos^2 \alpha_{y\eta} + \\ + \cos^2 \alpha_{y\zeta}) + \dot{\theta} (\sin \psi (\cos \alpha_{y\zeta} + \cos \alpha_{z\zeta} + \cos \alpha_{y\zeta} \cos \alpha_{z\zeta}) + \\ + \cos \varphi \cos \alpha_{y\eta} \cos \alpha_{x\zeta}) \} = y \{ -\dot{\psi} + \dot{\varphi} [(\cos \varphi \sin \psi + \\ + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi)(-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi) - (\cos \varphi \cos \theta - \\ - \sin \varphi \sin \psi)(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi) + \dot{\theta} \cos \alpha_{y\eta} \times \\ \times (\cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \psi \cos \varphi \sin \theta)] \} = -(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) y;$$

$$y[\dots] = -(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta).$$

Знайдемо значення третьої величини  $z[\dots]$ :

$$z \{ [\sin \psi (1 - \cos^2 \alpha_{z\eta}) + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \sin \psi] \dot{\theta} + \dot{\varphi} (-\sin^2 \varphi \sin \theta \cos \psi - \\ - \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \cos \theta \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \sin \psi - \\ - \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \psi) \} = z (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta);$$

$$z[\dots] = z (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta).$$

Отже, залежність компоненти швидкості точки тіла, паралельної нерухомій осі  $Ox$ , від абсолютних координат  $x$ ,  $y$  і  $z$  має вигляд

$$v_x = (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta)z - (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)y. \quad (11.36)$$

Обчислимо вираз другої компоненти  $\dot{y} = v_y$ :

$$\begin{aligned} v_y = & x [\dot{\phi} (\cos \alpha_{x\xi} \cos \alpha_{\eta y} - \cos \alpha_{x\eta}) + \dot{\psi} (\cos^2 \alpha_{x\xi} + \cos^2 \alpha_{x\eta} + \cos^2 \alpha_{x\xi}) + \\ & + \dot{\theta} (\cos \alpha_{x\xi} \cos \alpha_{\zeta y} \sin \phi + \cos \alpha_{x\eta} \cos \alpha_{y\xi} \cos \phi - \cos \alpha_{x\xi} \cos \alpha_{z\xi} \cos \psi)] + \\ & + y [\dot{\phi} (\cos \alpha_{y\xi} \cos \alpha_{y\xi} - \cos \alpha_{y\eta} \cos \alpha_{y\xi}) + \dot{\psi} (\cos \alpha_{y\xi} \cos \alpha_{x\xi} + \\ & + \cos \alpha_{y\eta} \cos \alpha_{x\eta} + \cos \alpha_{y\xi} \cos \alpha_{x\xi}) + \dot{\theta} (\sin \phi \cos \alpha_{y\xi} \cos \alpha_{y\xi} + \\ & + \cos \phi \cos \alpha_{y\eta} \cos \alpha_{y\xi} - \cos \psi \cos \alpha_{y\xi} \cos \alpha_{z\xi})] + z [\dot{\phi} \cos \alpha_{z\xi} \cos \alpha_{y\eta} - \\ & - \cos \alpha_{z\eta} \cos \alpha_{y\xi}) + (\cos \alpha_{z\xi} \cos \alpha_{x\xi} + \cos \alpha_{z\eta} \cos \alpha_{x\eta} + \cos \alpha_{z\xi} \cos \alpha_{x\xi})\dot{\psi} + \\ & + \dot{\theta} (\sin \phi \cos \alpha_{z\xi} \cos \alpha_{y\xi} + \cos \phi \cos \alpha_{z\eta} \cos \alpha_{y\xi} - \cos \psi \cos \alpha_{y\xi} \cos \alpha_{x\xi})]. \end{aligned}$$

Перетворимо член  $y[\dots]$ . Бачимо, що перший і другий його доданки дорівнюють нулеві; знайдемо третій доданок:

$$\begin{aligned} & \dot{\theta} \cos \alpha_{y\xi} (\sin \phi \cos \alpha_{y\xi} + \cos \phi \cos \alpha_{y\eta} - \cos \psi \cos \alpha_{x\xi}) = \\ & = \dot{\theta} \cos \alpha_{y\xi} (\sin \phi \cos \phi \sin \psi + \sin^2 \phi \cos \theta \cos \psi + \\ & + \cos^2 \phi \cos \psi \cos \theta - \cos \phi \sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta) = 0. \end{aligned}$$

Отже, коефіцієнт при  $y$  в розкладі  $v_y$  має нульове значення.

Перетворимо вираз для  $v_y$  у першому члені  $x[\dots]$ :

$$\dot{\psi} (\cos^2 \alpha_{x\xi} + \cos^2 \alpha_{x\eta} + \cos^2 \alpha_{x\xi}) = \dot{\psi},$$

$$\begin{aligned} a \quad & \dot{\phi} (\cos \alpha_{x\xi} \cos \alpha_{y\eta} - \cos \alpha_{x\xi} \cos \alpha_{y\xi}) = \dot{\phi} [(\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi) \times \\ & \times (\cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi) - (-\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \cos \theta \sin \psi) \times \\ & \times (\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi)] = \dot{\phi} [\cos^2 \phi \cos \theta (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) + \\ & + \cos^2 \phi \sin^2 \psi \cos \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \psi \cos \theta] = \dot{\phi} \cos \theta [(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \times \\ & \times \cos^2 \psi + \sin^2 \psi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)] = \dot{\phi} \cos \theta. \end{aligned}$$

Нескладно довести, що третій доданок у  $x[\dots]$  дорівнює нулю, справді,

$$\dot{\theta} \{[\sin \phi (\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi) + \cos \phi (-\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \cos \theta \sin \psi)] \cos \alpha_{y\xi} - \cos \psi \cos \theta \sin \theta \sin \psi\},$$

але

$$\cos \alpha_{y\xi} = -\sin \theta \cos \psi,$$

тому

$$\dot{\theta}(\sin \psi \cos \theta \sin \theta \cos \psi - \sin \theta \cos \theta \cos \psi \sin \psi) = 0.$$

Отже, третій доданок у виразі  $x[\dots]$

$$x(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta).$$
 (11.37)

У виразі  $z[\dots]$

$$\dot{\psi}(\cos \alpha_{z\xi} \cos \alpha_{x\xi} + \cos \alpha_{z\eta} \cos \alpha_{y\xi} + \cos \alpha_{z\xi} \cos \alpha_{x\xi}) = 0.$$

Визначимо перший доданок:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\cos \alpha_{z\xi} \cos \alpha_{y\eta} - \cos \alpha_{z\eta} \cos \alpha_{y\xi}) &= \dot{\phi}[\sin \phi \sin \theta (\cos \phi \cos \theta \cos \psi - \\ &- \sin \phi \sin \psi) - \cos \phi \sin \theta (\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi)] = \\ &= -\dot{\phi}[\sin \theta \sin \psi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)] = -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi. \end{aligned}$$

Перетворимо третій доданок у члені  $z[\dots]$  виразу компоненти  $v_z$ :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}[\cos \alpha_{y\xi} (\sin \phi - \cos \alpha_{z\xi} + \cos \phi \cos \alpha_{z\eta}) - \cos \psi \cos^2 \alpha_{z\xi}] &= \\ = \dot{\theta}[\cos \alpha_{y\xi} (\sin^2 \phi \sin \theta + \cos^2 \phi \sin \theta) - \cos \psi \cos^2 \theta] &= \\ = \dot{\theta}(-\sin^2 \theta \cos \psi - \cos \psi \cos^2 \theta) = -\dot{\theta} \cos \psi. \end{aligned}$$

Отже,

$$z[\dots] = -z(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi). \quad (11.38)$$

Використовуючи формули (11.37) і (11.38), запишемо другу компоненту  $v_y$  швидкості точки тіла у разі сферичного руху:

$$v_y = (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)x - (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)z. \quad (11.39)$$

Лишається виразити третю компоненту  $v_z$  через ті самі абсолютні координати  $x$ ,  $y$  і  $z$ .

$$\begin{aligned} v_z = \dot{z} &= (x \cos \alpha_{x\xi} + y \cos \alpha_{y\xi} + z \cos \alpha_{z\xi})(\dot{\phi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi) + \\ &+ (x \cos \alpha_{x\eta} + y \cos \alpha_{y\eta} + z \cos \alpha_{z\eta})(\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) + \\ &+ (x \cos \alpha_{x\xi} + y \cos \alpha_{y\xi} + z \cos \alpha_{z\xi})(-\dot{\theta} \sin \theta). \end{aligned}$$

Після розкриття дужок і групування членів дістанемо:

$$\begin{aligned} v_z = x[\dot{\phi}(\sin \theta \cos \phi \cos \alpha_{x\xi} - \sin \theta \sin \phi \cos \alpha_{x\eta}) + \dot{\theta}(\sin \phi \cos \theta \cos \alpha_{x\xi} + \\ + \cos \theta \cos \phi \cos \alpha_{x\eta} - \sin \theta \cos \alpha_{x\xi})] + y[\dot{\phi}(\sin \theta \cos \phi \cos \alpha_{y\xi} - \\ - \sin \theta \sin \phi \cos \alpha_{y\eta}) + \dot{\theta}(\cos \theta \sin \phi \cos \alpha_{y\xi} + \cos \theta \cos \phi \cos \alpha_{y\eta} - \\ - \sin \theta \cos \alpha_{y\xi})] + z[\dot{\phi}(\sin \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + \\ + \dot{\theta}(\sin \phi \cos \theta \cos \alpha_{z\xi} + \cos \phi \cos \theta \cos \alpha_{z\eta} - \sin \theta \cos \alpha_{z\xi})]. \end{aligned}$$

Перетворимо окремі члени:

$$\begin{aligned} & \dot{\varphi} \sin \theta (\cos \varphi \cos \alpha_{x\xi} - \sin \varphi \cos \alpha_{x\eta}) = \dot{\varphi} \sin \theta (\cos^2 \varphi \cos \psi + \\ & + \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \sin \psi + \sin^2 \varphi \cos \psi + \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \sin \psi = \\ & = \dot{\varphi} \sin \theta [\cos \psi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)] = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi; \\ & \dot{\theta} [\cos \theta (\sin \varphi \cos \alpha_{x\xi} - \cos \varphi \cos \alpha_{x\eta}) - \sin \theta \cos \alpha_{x\xi}] = \\ & = \dot{\theta} [\cos \theta (\sin \varphi \cos \varphi \cos \psi - \sin^2 \varphi \cos \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi - \\ & - \cos^2 \varphi \cos \theta \sin \psi - \sin^2 \theta \sin \psi) = \dot{\theta} (-\cos^2 \theta \sin^2 \varphi \sin \psi - \\ & - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \sin \psi - \sin^2 \theta \sin \psi) = -\sin \psi [\cos^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \\ & + \sin^2 \theta] \dot{\theta} = -\dot{\theta} \sin \psi; \end{aligned}$$

$$x[\dots] = -(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)x;$$

$$\begin{aligned} & \dot{\varphi} \sin \theta (\cos \varphi \cos \alpha_{y\xi} - \sin \varphi \cos \alpha_{y\eta}) = \dot{\varphi} \sin \theta (\cos^2 \varphi \sin \psi + \\ & + \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \cos \psi + \sin^2 \varphi \sin \psi) = \\ & = \dot{\varphi} \sin \theta (\sin \psi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)) = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi; \\ & \dot{\theta} [\cos \theta (\sin \varphi \cos \alpha_{y\xi} + \cos \varphi \cos \alpha_{y\eta}) - \sin \theta \cos \alpha_{y\xi}] = \\ & = \dot{\theta} [\cos \theta (\sin \varphi \cos \varphi \sin \psi + \sin^2 \varphi \cos \theta \cos \psi + \cos^2 \varphi \cos \theta \cos \psi - \\ & - \cos \varphi \sin \varphi \sin \psi) + \sin^2 \theta \cos \psi] = \dot{\theta} \cos \psi; \end{aligned}$$

$$y[\dots] = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi)y;$$

$$\begin{aligned} & \dot{\varphi} \sin \theta (\cos \varphi \cos \alpha_{z\xi} - \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta) = \\ & = \dot{\varphi} \sin \theta (\cos \varphi \sin \varphi \sin \theta - \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta) = 0; \\ & \dot{\theta} [\cos \theta (\sin \varphi \cos \alpha_{z\xi} + \cos \varphi \cos \alpha_{z\eta}) - \sin \theta \cos \alpha_{z\xi}] = \\ & = \dot{\theta} [\cos \theta (\sin^2 \varphi \sin \theta + \cos^2 \varphi \sin \theta) - \sin \theta \cos \theta] = \\ & = \dot{\theta} [\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta] = 0; \end{aligned}$$

$$z[\dots] = 0.$$

За добутими результатами перетворень запишемо вираз для складової вектора швидкості точки  $v_z$ :

$$v_z = \dot{z} = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi)y - (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)x. \quad (11.40)$$

У формулах (11.36), (11.39) і (11.40) введемо позначення:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi; \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta, \end{aligned} \quad (11.41)$$

тоді

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y; \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z; \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Розкриємо геометричний зміст величин у правих частинах рівностей (11.42):  $x$ ,  $y$  і  $z$  є алгебраїчними значеннями складових радіуса-вектора  $\vec{r}$  точки  $M$  тіла, паралельних відповідним нерухомим осям  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ , тому

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = x \vec{x}^0 + y \vec{y}^0 + z \vec{z}^0. \quad (11.43)$$

Оскільки вважаємо, що  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  і  $\omega_z$  відповідають прямолінійним відріzkам, що збігаються з відповідними осями  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ , то їх можна розглядати як прямокутні складові деякого вектора  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{x}^0 + \omega_y \vec{y}^0 + \omega_z \vec{z}^0 = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z. \quad (11.44)$$

Також відомо, що  $v_x$ ,  $v_y$  і  $v_z$  пов'язані векторно:

$$\vec{v} = v_x \vec{x}^0 + v_y \vec{y}^0 + v_z \vec{z}^0 = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z. \quad (11.45)$$

Для того щоб з'ясувати геометричний зміст величин  $\omega_y z - \omega_z y$ ,  $\omega_z x - \omega_x z$ ,  $\omega_x y - \omega_y x$ , побудуємо, наприклад, в декартовій площині  $yOz$  на векторах  $\vec{\omega}_{yz} = \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z$ ,  $\vec{r}_{yz} = \vec{r}_y + \vec{r}_z$  як на сторонах паралелограм з кутом при вершині  $O_{\alpha_{yz}}$  й обчислимо його площу  $S_{yz}$ . З рис. 11.7 виведемо, що ця площа визначається співвідношенням

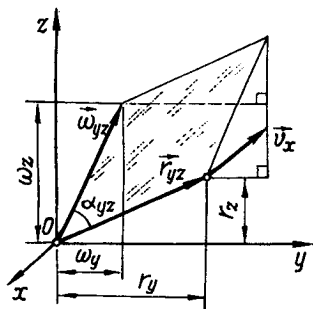


Рис. 11.7

$$\begin{aligned} S_{yz} &= \left| \frac{1}{2} \omega_y \omega_z + \frac{1}{2} xz + \right. \\ &+ \left. \omega_z x - \frac{1}{2} xz - \frac{1}{2} \omega_y \omega_z - z\omega_y \right| = \\ &= \left| \omega_z x - z\omega_y \right|. \end{aligned} \quad (11.46)$$

Отже, модуль складової

$$\begin{aligned} |v_x| &= \left| \omega_y z - \omega_z y \right| = \\ &= S_{yz} = \omega_{yz} r_{yz} \sin \alpha_{yz}. \end{aligned} \quad (11.47)$$

Аналогічні міркування щодо інших двох величин дають змогу записати:

$$|v_y| = S_{xz} = \omega_{xz} r_{xz} \sin \alpha_{xz} = \left| \omega_z x - \omega_x z \right|; \quad (11.48)$$

$$|v_z| = S_{xy} = \omega_{xy} r_{xy} \sin \alpha_{xy} = \left| \omega_x y - \omega_y x \right|. \quad (11.49)$$



Отже, абсолютні значення складових  $v_x$ ,  $v_y$  і  $v_z$  вектора швидкості точки тіла в разі його сферичного руху чисельно дорівнюють площам паралелограмів на координатних площинах  $yOz$ ,  $xOz$  і  $xOy$ , які побудовані на векторах  $\vec{r}_{yz}$ ,  $\vec{\omega}_{yz}$ ;  $\vec{\omega}_{zx}$ ,  $\vec{r}_{zx}$  і  $\vec{\omega}_{xy}$ ,  $\vec{r}_{xy}$  відповідно.

**Теорема Ейлера.** Праві частини у формулах (11.47) — (11.49) є модулями відповідних векторних добутків двох векторів:

$$\begin{aligned} |\omega_y z - \omega_x y| &= \omega_{yz} r_{yz} \sin \alpha_{yz} = |\vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_{yz}|; \\ |\omega_z x - \omega_x z| &= \omega_{zx} r_{zx} \sin \alpha_{zx} = |\vec{\omega}_{zx} \times \vec{r}_{zx}|; \\ |\omega_x y - \omega_y x| &= \omega_{xy} r_{xy} \sin \alpha_{xy} = |\vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_{xy}|, \end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned} \vec{v}_x &= \vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_{yz}; \\ \vec{v}_y &= \vec{\omega}_{zx} \times \vec{r}_{zx}; \\ \vec{v}_z &= \vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_{xy}. \end{aligned} \tag{11.50}$$

Перепишемо (11.43) і (11.44) у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \frac{1}{2}(\vec{r}_{yz} + \vec{r}_{zx} + \vec{r}_{xy}); \\ \vec{\omega} &= \frac{1}{2}(\vec{\omega}_{yz} + \vec{\omega}_{zx} + \vec{\omega}_{xy}), \end{aligned}$$

складемо векторний добуток двох векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$ :

$$\begin{aligned} 4\vec{\omega} \times \vec{r} &= \vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_{yz} + \vec{\omega}_{zx} \times \vec{r}_{zx} + \vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_{xy} + \vec{\omega}_{yz} \times \\ &\times (\vec{r}_{yx} + \vec{r}_{zx}) + \vec{\omega}_{zx} \times (\vec{r}_{zy} + \vec{r}_{xy}) + \vec{\omega}_{xy} \times (\vec{r}_{zx} + \vec{r}_{yz}). \end{aligned}$$

Та легко бачити, що  $\vec{r}_{yx} + \vec{r}_{zx} = \vec{r}_{yz} + 2\vec{r}_x$ ;  $\vec{r}_{zy} + \vec{r}_{xy} = \vec{r}_{zx} + 2\vec{r}_y$ ;  $\vec{r}_{zx} + \vec{r}_{yz} = \vec{r}_{xy} + 2\vec{r}_z$ , тому, підставивши ці величини у попередню рівність, дістанемо

$$\begin{aligned} 2\vec{\omega} \times \vec{r} &= \vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_{yz} + \vec{\omega}_{zx} \times \vec{r}_{zx} + \vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_{xy} + \\ &+ \vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_x + \vec{\omega}_{zx} \times \vec{r}_y + \vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_z = \\ &= \vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_{yz} + \vec{\omega}_{zx} \times \vec{r}_{zx} + \vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_{xy} + \vec{\omega}_y \times \vec{r}_x + \\ &+ \vec{\omega}_z \times \vec{r}_x + \vec{\omega}_z \times \vec{r}_y + \vec{\omega}_x \times \vec{r}_y + \vec{\omega}_x \times \vec{r}_z + \vec{\omega}_y \times \vec{r}_z = \\ &= \vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_{yz} + \vec{\omega}_{zx} \times \vec{r}_{zx} + \vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_{xy} + (\vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z) \times \\ &\times (\vec{r}_y + \vec{r}_z) + (\vec{\omega}_z + \vec{\omega}_x) \times (\vec{r}_z + \vec{r}_x) + (\vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y) \times (\vec{r}_x + \vec{r}_y) = \\ &= \vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_{yz} + \vec{\omega}_{zx} \times \vec{r}_{zx} + \vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_{xy} + \vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_{yz} + \vec{\omega}_{zx} \times \vec{r}_{zx} + \\ &+ \vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_{xy} = 2(\vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_{yz} + \vec{\omega}_{zx} \times \vec{r}_{zx} + \vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_{xy}); \\ \vec{\omega} \times \vec{r} &= \vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_{yz} + \vec{\omega}_{zx} \times \vec{r}_{zx} + \vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_{xy}. \end{aligned} \tag{11.51}$$

З векторних рівностей (11.50) маємо:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = \vec{\omega}_{yz} \times \vec{r}_{yz} + \vec{\omega}_{xz} \times \vec{r}_{xz} + \vec{\omega}_{xy} \times \vec{r}_{xy}. \quad (11.52)$$

Прирівняємо ліві частини (11.51) і (11.52) та знайдемо шукану формулу Ейлера:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (11.53)$$

де  $\vec{\omega}$  — вектор миттєвої кутової швидкості тіла в разі його руху навколо нерухомої точки.

Нерухома пряма, яка в даний момент часу незмінно зв'язана з тілом і навколо якої тіло здійснює миттєвий обертальний рух, називається миттєвою віссю обертання. Згідно з (11.53) швидкість точки тіла з однією нерухомою точкою дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла на радіус-вектор точки.

На підставі властивостей векторного добутку двох векторів зазначимо, що в разі сферичного руху тіла швидкість його точки перпендикулярна до площини, утвореної кутовою швидкістю і радіусом-вектором точки, і напрямлена в такий бік, що, коли дивитися навпроти її напрямку, то для суміщення кутової швидкості з радіусом-вектором треба здійснити навколо їхньої спільної точки найкоротший поворот проти руху стрілки годинника (рис. 11.8). З формули Ейлера визначимо модуль швидкості точки, розкривши модуль векторного добутку двох векторів:

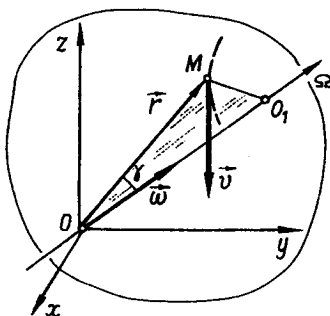


Рис. 11.8

$$v = \omega r \sin \gamma, \quad (11.54)$$

де  $\gamma$  — кут між вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}$  і радіусом-вектором точки  $\vec{r}$ .

Якщо позначити відстань розглядуваної точки до миттєвої осі  $O\Omega$  обертання  $R$ , то з прямокутного трикутника  $OO_1M$  можна записати  $R = r \sin \gamma$ , тому формула (11.54) набуває вигляду

$$v = \omega R. \quad (11.55)$$

Зауважимо, що відповідно до формули (11.54) модуль швидкості точки тіла в разі сферичного руху геометрично зображується площею паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$  (рис. 11.8).

**Проекції кутової швидкості на нерухомі осі декартових координат.** Підставимо (11.43) і (11.44) у формулу Ейлера (11.53) з використанням очевидних векторних співвідношень

$$\begin{aligned}\bar{x}^\circ \times \bar{x}^\circ &= \bar{y}^\circ \times \bar{y}^\circ = \bar{z}^\circ \times \bar{z}^\circ = 0; \\ \bar{x}^\circ \times \bar{y}^\circ &= \bar{z}^\circ, \quad \bar{x}^\circ \times \bar{z}^\circ = -\bar{y}^\circ, \quad \bar{y}^\circ \times \bar{z}^\circ = \bar{x}^\circ, \\ \bar{z}^\circ \times \bar{x}^\circ &= \bar{y}^\circ, \quad \bar{y}^\circ \times \bar{x}^\circ = -\bar{z}^\circ, \quad \bar{z}^\circ \times \bar{y}^\circ = -\bar{x}^\circ,\end{aligned}$$

внаслідок чого дістанемо:

$$\bar{v} = (\omega_y z - \omega_z y) \bar{x}^\circ + (\omega_z x - \omega_x z) \bar{y}^\circ + (\omega_x y - \omega_y x) \bar{z}^\circ. \quad (11.56)$$

Тут множники при одиничних ортах  $\bar{x}^\circ$ ,  $\bar{y}^\circ$  і  $\bar{z}^\circ$  є проекціями  $\bar{v}$  на нерухомі осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  відповідно до (11.42);  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  і  $\omega_z$  (11.41) — проекціями вектора миттєвої кутової швидкості тіла на ті самі осі.

Отже, формули (11.41) визначають проекції миттєвої кутової швидкості тіла з однією нерухомою точкою на нерухомі осі декартових координат, виражені через кути Ейлера та їхні похідні по часу.

**Проекції миттєвої кутової швидкості на рухомі осі.** Помножимо вираз (11.44) скалярно спочатку на  $\bar{\xi}^\circ$ , потім — на  $\bar{\eta}^\circ$  і на  $\bar{\zeta}^\circ$ :

$$\begin{aligned}\bar{\omega} \cdot \bar{\xi}^\circ &= \omega_\xi = \omega_x \cos \alpha_{x\xi} + \omega_y \cos \alpha_{y\xi} + \omega_z \cos \alpha_{z\xi}; \\ \bar{\omega} \cdot \bar{\eta}^\circ &= \omega_\eta = \omega_x \cos \alpha_{x\eta} + \omega_y \cos \alpha_{y\eta} + \omega_z \cos \alpha_{z\eta}; \\ \bar{\omega} \cdot \bar{\zeta}^\circ &= \omega_\zeta = \omega_x \cos \alpha_{x\zeta} + \omega_y \cos \alpha_{y\zeta} + \omega_z \cos \alpha_{z\zeta},\end{aligned}$$

або, скориставшись формулами (11.41),

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \cos \alpha_{x\xi} + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) \cos \alpha_{y\xi} + \\ &+ (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \alpha_{z\xi}; \\ \omega_\eta &= (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \cos \alpha_{x\eta} + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) \cos \alpha_{y\eta} + \\ &+ (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \alpha_{z\eta}; \\ \omega_\zeta &= (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \cos \alpha_{x\zeta} + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) \cos \alpha_{y\zeta} + \\ &+ (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \alpha_{z\zeta}.\end{aligned}$$

Замінімо напрямні косинуси відповідно до (11.13) й дістанемо проміжні вирази шуканих проекцій:

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi) + \\ &+ (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi) + \\ &+ (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \sin \varphi \sin \theta;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{\eta} = & (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)(-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi) + \\ & + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)(\cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + \\ & + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \varphi \sin \theta;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{\zeta} = & (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \sin \theta \sin \psi + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) \times \\ & \times (-\sin \theta \cos \psi) + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta;\end{aligned}$$

Перетворимо вираз  $\omega_{\xi}$ :

$$\begin{aligned}\omega_{\xi} = & \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \sin \varphi \cos \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \cos^2 \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \psi \sin \varphi - \\ & - \dot{\theta} \cos \psi \sin \varphi \cos \theta \sin \psi + \dot{\theta} \sin^2 \psi \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \cos \varphi \sin \psi - \\ & - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \cos^2 \psi \cos \theta + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi \sin \theta + \\ & + \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi \cos \psi \sin \varphi = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta.\end{aligned}$$

Спростимо проміжний вираз наступної компоненти  $\omega_{\eta}$ :

$$\begin{aligned}\omega_{\eta} = & -\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \sin \psi \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \cos \theta \sin^2 \psi - \\ & - \dot{\theta} \sin \varphi \cos^2 \psi - \dot{\theta} \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \sin \psi + \\ & + \dot{\theta} \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \times \cos^2 \psi \cos \varphi - \\ & - \dot{\theta} \sin^2 \psi \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \cos \psi \sin \psi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \varphi + \\ & + \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta.\end{aligned}$$

Нарешті, знайдемо третю проекцію швидкості тіла на нерухому вісь  $O\zeta$ :

$$\begin{aligned}\omega_{\zeta} = & \dot{\varphi} \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \sin \theta \cos \psi + \\ & + \dot{\varphi} \sin^2 \theta \cos^2 \psi + \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \cos^2 \theta = \\ = & \dot{\varphi} [\sin^2 \theta (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) + \cos^2 \theta] + \dot{\psi} \cos \theta = \\ = & \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.\end{aligned}$$

Отже, маємо такі формули для проекцій миттєвої кутової швидкості тіла на нерухомі осі  $\xi O\eta\zeta$ :

$$\begin{aligned}\omega_{\xi} &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta; \\ \omega_{\eta} &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta; \\ \omega_{\zeta} &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.\end{aligned}\tag{11.57}$$

**Проекції швидкості точки тіла на рухомі осі.** Якщо вектор швидкості  $\vec{v}$  записати у вигляді

$$\vec{v} = \vec{v}_x \vec{x}^\circ + \vec{v}_y \vec{y}^\circ + \vec{v}_z \vec{z}^\circ$$

і послідовно скалярно помножити цю векторну рівність на орти  $\vec{\xi}^\circ$ ,  $\vec{\eta}^\circ$  і  $\vec{\zeta}^\circ$ , то з використанням формул (11.22) можна дістати вирази для шуканих проекцій. Ці вирази містять лінійно власні координати  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$  точки тіла, множники при яких залежать від кутів Ейлера та їхніх похідних по часу (пропонуємо читачеві самостійно визначити шукані проекції цим способом).

Наведемо коротший шлях, який приводить до очікуваного результату. У формулі Ейлера (11.53) вектори  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$  виразимо через одиничні орти  $\vec{\xi}^\circ$ ,  $\vec{\eta}^\circ$  і  $\vec{\zeta}^\circ$  нерухомих осей:

$$\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{\xi}^\circ + \omega_\eta \vec{\eta}^\circ + \omega_\zeta \vec{\zeta}^\circ; \quad \vec{r} = \xi \vec{\xi}^\circ + \eta \vec{\eta}^\circ + \zeta \vec{\zeta}^\circ,$$

тоді

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega_\xi \vec{\xi}^\circ + \omega_\eta \vec{\eta}^\circ + \omega_\zeta \vec{\zeta}^\circ) \times (\xi \vec{\xi}^\circ + \eta \vec{\eta}^\circ + \zeta \vec{\zeta}^\circ).$$

Після векторного множення многочлена на многочлен дістанемо векторну рівність

$$\begin{aligned} \vec{v} = & \omega_\xi \xi (\vec{\xi}^\circ \times \vec{\xi}^\circ) + \omega_\eta \eta (\vec{\eta}^\circ \times \vec{\eta}^\circ) + \omega_\zeta (\zeta^\circ \times \zeta^\circ) + \omega_\xi \eta (\vec{\xi}^\circ \times \vec{\eta}^\circ) + \\ & + \omega_\eta \zeta (\vec{\eta}^\circ \times \vec{\zeta}^\circ) + \omega_\xi \zeta (\vec{\xi}^\circ \times \vec{\zeta}^\circ) + \omega_\xi \xi (\vec{\zeta}^\circ \times \vec{\xi}^\circ) + \omega_\eta \xi (\vec{\eta}^\circ \times \vec{\xi}^\circ) + \omega_\zeta \eta (\vec{\zeta}^\circ \times \vec{\eta}^\circ). \end{aligned}$$

Оскільки справедливі векторні співвідношення

$$\begin{aligned} \vec{\xi}^\circ \times \vec{\xi}^\circ = \vec{\eta}^\circ \times \vec{\eta}^\circ = \vec{\zeta}^\circ \times \vec{\zeta}^\circ = 0; \quad \vec{\xi}^\circ \times \vec{\eta}^\circ = \vec{\zeta}^\circ; \quad \vec{\xi}^\circ \times \vec{\zeta}^\circ = -\vec{\eta}^\circ; \\ \vec{\eta}^\circ \times \vec{\xi}^\circ = -\vec{\zeta}^\circ; \quad \vec{\eta}^\circ \times \vec{\zeta}^\circ = \vec{\xi}^\circ; \quad \vec{\zeta}^\circ \times \vec{\xi}^\circ = \vec{\eta}^\circ; \quad \vec{\zeta}^\circ \times \vec{\eta}^\circ = -\vec{\xi}^\circ, \end{aligned}$$

то остаточно маємо

$$\vec{v} = (\omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta) \vec{\xi}^\circ + (\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta) \vec{\eta}^\circ + (\omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi) \vec{\zeta}^\circ. \quad (11.58)$$

Звідси дістанемо шукані формули проекцій швидкості точок тіла на рухомі осі  $\xi \Omega \eta \zeta$ :

$$v_\xi = \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta, \quad v_\eta = \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta, \quad v_\zeta = \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi \quad (11.59)$$

або, скориставшись (11.57),

$$\begin{aligned} v_\xi &= (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \zeta - (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \eta; \\ v_\eta &= (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \xi - (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi) \zeta; \\ v_\zeta &= (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi) \eta - (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \xi. \end{aligned} \quad (11.60)$$

Зауважимо, що у формулах (11.60) проекції абсолютних швидкостей точок тіла в разі сферичного руху на рухомі осі не дорівнюють похідним по часу від відповідних власних координат точок.

**Швидкості нутації, прецесії і власного обертання.** Оскільки  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , у формулах (11.41) є проєкціями вектора миттєвої кутової швидкості  $\vec{\omega}$  тіла на нерухомі осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ , то

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2.$$

Підставимо в цей вираз  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  і  $\omega_z$  відповідно до формул (11.41):

$$\begin{aligned} \omega^2 = & (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi)^2 + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi)^2 + \\ & + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 = \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \\ & + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi - 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \\ & + \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta = \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta, \end{aligned}$$

звідки дістанемо модуль кутової швидкості

$$\omega = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta}, \quad (11.61)$$

де  $\dot{\theta} = d\theta/dt$  — *кутова швидкість нутації*.

Вектор  $\theta\vec{v}^\circ$  кутової швидкості нутації напрямлений по осі вузлів у такий бік, що коли дивитися навпроти нього на площину, утворену осями  $Oz$  і  $O\zeta$ , то рухома система  $\xi O\eta\zeta$  навколо лінії вузлів обертається проти руху стрілки годинника (в припущенні, що  $\phi$  і  $\psi$  не змінюються, див. рис. 11.2, 11.4). Похідна  $\dot{\psi} = d\psi/dt$  називається *кутовою швидкістю прецесії*. Вектор кутової швидкості прецесії  $\dot{\psi}\vec{z}^\circ$  напрямлений по нерухомій осі  $Oz$  в такий бік, що коли дивитися навпроти нього на площину  $xOy$ , то тіло разом із осями  $\xi O\eta\zeta$  обертається навколо осі прецесії  $Oz$  проти руху стрілки годинника (в припущенні, що  $\theta$  і  $\phi$  не змінюються, див. рис. 11.2 — 11.5). Величина  $\dot{\phi} = d\phi/dt$  називається *кутовою швидкістю власного обертання*. Вектор кутової швидкості власного обертання  $\dot{\phi}\vec{\zeta}^\circ$  напрямлений по осі власного обертання  $O\zeta$  у такий бік, що коли дивитися навпроти нього, то тіло разом із осями  $O\xi$  і  $O\eta$  обертається навколо осі власного обертання проти руху стрілки годинника (в припущенні, що  $\theta$  і  $\psi$  не змінюються, див. рис. 11.2 — 11.5).

*Отже, рух тіла з однією нерухомою точкою, тобто миттєвий обертальний рух навколо миттєвої нерухомої осі з абсолютною миттєвою кутовою швидкістю можна розкласти на три складові обертальні рухи: відносний навколо власної осі з власною кутовою швидкістю, переносний навколо нерухомої осі прецесії з кутовою швидкістю прецесії і переносний навколо лінії вузлів з кутовою швидкістю нутації.*

Якщо вважати сферичний рух тіла складним, та абсолютну швидкість будь-якої його точки можна подати як векторну суму відносної

$$\vec{v}_{\varphi r} = \dot{\phi} \vec{\zeta}^{\circ} \times \vec{r}$$

і двох переносних

$$\vec{v}_{\psi e} = \dot{\psi} \vec{z}^{\circ} \times \vec{r}, \quad \vec{v}_{\theta e} = \dot{\theta} \vec{v}^{\circ} \times \vec{r},$$

тому

$$\vec{v} = \vec{v}_{\varphi r} + \vec{v}_{\psi e} + \vec{v}_{\theta e} = \dot{\phi} \vec{\zeta}^{\circ} \times \vec{r} + \dot{\psi} \vec{z}^{\circ} \times \vec{r} + \dot{\theta} \vec{v}^{\circ} \times \vec{r}.$$

З іншого боку, на підставі формули Ейлера така сама абсолютна швидкість точки

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Прирівняємо праві частини двох останніх векторних рівностей:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{\phi} \vec{\zeta}^{\circ} \times \vec{r} + \dot{\psi} \vec{z}^{\circ} \times \vec{r} + \dot{\theta} \vec{v}^{\circ} \times \vec{r},$$

або, після винесення за дужки радіуса-вектора точки,

$$[\vec{\omega} - (\dot{\phi} \vec{\zeta}^{\circ} + \dot{\psi} \vec{z}^{\circ} + \dot{\theta} \vec{v}^{\circ})] \times \vec{r} = 0; \quad \vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{\zeta}^{\circ} + \dot{\psi} \vec{z}^{\circ} + \dot{\theta} \vec{v}^{\circ}. \quad (11.62)$$

Це — формула розкладу вектора миттєвої кутової швидкості тіла в разі сферичного руху на кутові швидкості власного обертання, прецесії і нутації.

У виразі (11.62) кутові швидкості  $\dot{\phi} \vec{\zeta}^{\circ}$  і  $\dot{\psi} \vec{z}^{\circ}$  утворюють між собою кут і під час руху тіла перпендикулярні до кутової швидкості нутації  $\dot{\theta} \vec{v}^{\circ}$ . Для того щоб визначити кутову швидкість  $\vec{\omega}$  за формулою (11.62), треба спочатку векторно додати кутові швидкості  $\dot{\psi} \vec{z}^{\circ}$  і  $\dot{\phi} \vec{v}^{\circ}$ . За теоремою косинусів знаходимо:

$$\omega_{\psi\phi} = |\dot{\psi} \vec{z}^{\circ} + \dot{\phi} \vec{v}^{\circ}| = \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta,$$

тоді формула (11.62) набуває вигляду

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{v}^{\circ} + \vec{\omega}_{\psi\phi}; \quad \omega_{\psi\phi} = \dot{\psi} \vec{z}^{\circ} + \dot{\phi} \vec{v}^{\circ}. \quad (11.63)$$

Кут між векторами  $\vec{\omega}_{\psi\phi}$  і  $\dot{\theta} \vec{v}^{\circ}$  дорівнює  $90^{\circ}$ , тому

$$\omega = \sqrt{\omega_{\psi\phi}^2 + \dot{\theta}^2} = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta},$$

що збігається з (11.61).

На завершення викладу питання про кутові швидкості, звернемося ще до наведених прикладів. Дзига (див. рис. 11.3) під час власного сферичного руху здійснює два види складових рухів — власне обертання з кутовою швидкістю  $\dot{\phi} \vec{\zeta}^{\circ}$  і прецесію з кутовою швидкістю  $\dot{\psi} \vec{z}^{\circ}$ . Тому результируючий рух дзиги має миттєву кутову швидкість (11.63)

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{\zeta}^{\circ} + \dot{\psi} \vec{z}^{\circ},$$

абсолютне значення якої

$$\omega = \sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta}.$$

Звідси видно, що під час руху дзиги сторони і діагональ паралелограма кутових швидкостей не змінюються. Отже, паралелограм кутових швидкостей обертається навколо своєї сторони  $\dot{\psi}\vec{z}^0$  зі сталою кутовою швидкістю прецесії  $\dot{\psi}$ , і миттєва вісь обертання  $O\Omega$  разом із вектором миттєвої кутової швидкості  $\vec{\omega}$  описує в просторі конус з вершиною в нерухомій точці  $O$  і кутом розхилу

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{\dot{\phi} \sin \theta}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta}} \right).$$

Такий конус називається *нерухомим аксоїдом*. Геометричне місце миттєвих осей обертання, незмінно зв'язаних з тілом (дзигою), є також конусом з вершиною в нерухомій точці і кутом розхилу  $\beta = \theta - \alpha$ . Цей конус називається *рухомим аксоїдом*. Геометрично сферичний рух дзиги трактують як кочення без проковзування рухомого аксоїда по нерухомому (рис. 11.9). Дана геометрична властивість є загальною для будь-якого руху тіла з однією нерухомою точкою. Проте слід зауважити, що в загальному випадку сферичного руху аксоїдами є довільні конічні поверхні, оскільки має місце ще нутаційний рух з кутовою швидкістю нутації.

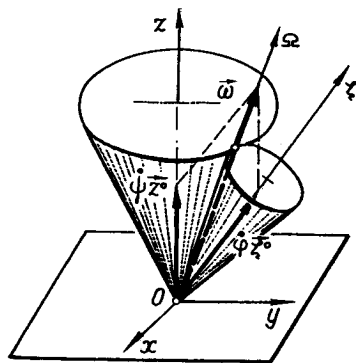


Рис. 11.9

У разі сферичного руху бігуна дробильного млина (див. рис. 11.5) миттєва вісь обертання проходить через нерухому точку  $O$  на приводному валу і проміжну точку  $P$  на твірній, якою конічна поверхня бігуна торкається дна млинової чаші. Покажемо, що внутрішній  $M_1$  і зовнішній  $M_2$  кінцевим точкам твірної конічної поверхні бігуна відповідають різні за абсолютним значенням і знаком швидкості.

Швидкість точки  $M_1$

$$v_{M_1} = v_{1\psi} - v_{1\phi} = (l - M_1 P) \dot{\psi} - R_1 \dot{\phi}.$$

Але для шуканої нерухомої точки  $P$  на твірній має виконуватися умова  $\psi l = \phi R$ , тому

$$v_{M_1} = \dot{\phi} \left[ (l - M_1 P) \frac{R}{l} - R_1 \right].$$



Аналогічні міркування стосуються швидкості точки  $M_2$ :

$$v_{M_2} = \dot{\phi} \left[ (l + PM_2) \frac{R}{l} - R_2 \right].$$

З порівняння виразів швидкостей  $v_{M_1}$  і  $v_{M_2}$  дістанемо висновок, що швидкість віддаленішої від осі приводного вала точки на твірній  $M_2$  більша за швидкість точки  $M_1$  на тій самій твірній, розташованій ближче до осі  $O_1O$ ; а  $v_1 < 0$ ,  $v_2 > 0$ .

На рис. 11.5 зображено паралелограм кутових швидкостей, з якого видно, що рухомих аксоїдом є конус із вершиною в нерухомій точці  $O$  і віссю, яка збігається з віссю вала бігуна; кут при вершині цього конуса визначається з формули

$$\sin \beta = \frac{\dot{\psi} \sin \theta}{\sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta}}.$$

Рухомих аксоїдом бігуна є конус із вершиною в нерухомій точці  $O$ , вертикальною віссю  $OO_1$  і кутом розхилу  $2(\theta - \alpha)$ . Основою цього конуса є коло радіусом  $O_1P$  на дні чаші (рис. 11.10).

Нарешті звернемо увагу на раніше розглянутий сферичний рух прямого конуса з вершиною в нерухомій точці  $O$ , який котиться без ковзання по нерухомій горизонтальній прямій (див. рис. 4.14). Тут нерухомим аксоїдом є нерухома горизонтальна площина, а рухомих — поверхня тіла.

**Кутове прискорення.** Для розгляду кутового прискорення тіла під час його руху навколо нерухомої точки скористаємося формулою Ейлера (11.53). У векторній рівності  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  в разі здійснення тілом сферичного руху радіус-вектор окремої точки тіла  $\vec{r}$  змінюється лише за напрямом, тобто є векторною функцією часу, якою також є і миттєва кутова швидкість  $\vec{\omega}$  тіла, оскільки вона змінюється під час руху за модулем й напрямом. Продиференціюємо дану векторну рівність по часу:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega} \times \vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Тут похідна по часу від вектора миттєвої кутової швидкості тіла

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$$

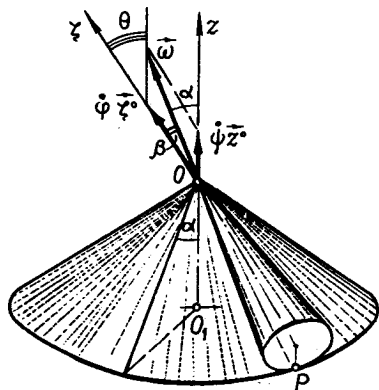


Рис. 11.10

називається *кутовим прискоренням тіла* під час його руху навколо нерухомої точки. Позначимо цю похідну  $\bar{\epsilon}$ , тоді

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \dot{\bar{\omega}}. \quad (11.64)$$

Для розглядуваного виду руху тіла навколо нерухомої точки  $O$  кінець вектора миттєвої кутової швидкості тіла описує в нерухомому просторі криву, яку називають у загальному випадку *годографом змінного вектора* з початком у нерухомій точці  $O$ , у нашому випадку *годографом кутової швидкості*. Зрозуміло, що вектор швидкості  $\bar{u}_k$ , з якою рухається кінець вектора кутової швидкості  $\bar{\omega}$  по її годографу, дорівнює похідній  $\bar{u}_k = d\bar{\omega}/dt$  і має напрям дотичної до годографа, проведеної через кінець  $K$  вектора  $\bar{\omega}$ . Проте ця сама похідна (11.64) визначає кутове прискорення тіла  $\bar{\epsilon}$ , вектор якого виходить з нерухомої точки  $O$  тіла і в якій також прикладена миттєва кутова швидкість  $\bar{\omega}$ . Отже, кутове прискорення  $\bar{\epsilon}$  лежить на осі  $OE$ , яка проходить через нерухому точку  $O$  тіла паралельно швидкості  $\bar{u}_k$ , і геометрично дорівнює швидкості, з якою описується годограф, тобто  $\bar{\epsilon} = \bar{u}_k$ .

З урахуванням

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}; \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$$

і використовуючи введене  $\bar{\epsilon}$ , можна записати

$$\bar{a} = \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (11.65)$$

Це — векторна формула прискорення точки тіла в разі сферичного руху.

Розкриємо зміст її доданків  $\bar{\epsilon} \times \bar{r}$ ,  $\bar{\omega} \times \bar{v}$ . Перший вектор напрямлений перпендикулярно до площини, утвореної віссю  $OE$  кутового прискорення  $\bar{\epsilon}$  і радіусом-вектором  $\bar{r}$  точки, прискорення якої визначається (11.65), в той бік, що коли дивитися на зазначену площину навпроти напрямку цього вектора, то для суміщення вектора кутового прискорення з радіусом-вектором треба здійснити поворот першого вектора навколо їхньої спільної точки на найменший кут проти руху стрілки годинника (рис. 11.11). Тоді модуль

$$|\bar{\epsilon} \times \bar{r}| = \epsilon r \sin \delta,$$

де  $\delta$  — кут між векторами  $\bar{\epsilon}$  і  $\bar{r}$ .

Якщо з точки  $M$  тіла на вісь кутового прискорення  $OE$  опустити перпендикуляр і позначити його довжину  $h$ , то з утвореного прямокутного трикутника  $OM_eM$  можна записати  $h = r \sin \delta$ . Позначимо  $a_{об}$  — модуль  $|\bar{\epsilon} \times \bar{r}|$ , тоді

$$a_{об} = \epsilon h, \quad (11.66)$$

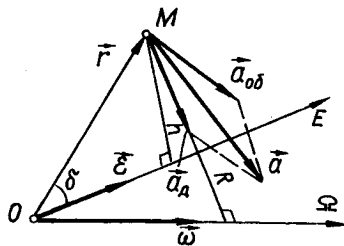


Рис. 11.11

або у векторній формі

$$\vec{a}_{об} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (11.67)$$

Останні формули визначають так зване обертальне прискорення точки тіла в разі сферичного руху.

Другий шуканий вектор  $\vec{\omega} \times \vec{v}$  напрямлений по перпендикуляру, опущеному з точки  $M$  тіла на миттєву вісь обертання  $O\Omega$ , від точки  $M$  до миттєвої осі обертання. Позначимо його  $\vec{a}_d$  і назовемо доосьовим прискоренням точки тіла. Модуль цього прискорення

$$a_d = \omega v \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{v}),$$

а кут між векторами  $\vec{\omega}$  і  $\vec{v}$  є прямим. З урахуванням

$$v = \omega MM_\omega = \omega R \quad (R = MM_\omega)$$

маємо

$$a_d = \omega^2 R, \quad (11.68)$$

або у векторній формі

$$\vec{a}_d = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (11.69)$$

Формули (11.66) — (11.69) визначають складові повного прискорення точки тіла в разі сферичного руху. Підставимо їхні вирази в рівність (11.65) і дістанемо вектор повного (результуючого) прискорення точки (рис. 11.11):

$$\vec{a} = \vec{a}_{об} + \vec{a}_d. \quad (11.70)$$

Як видно з формул (11.68) і (11.69), доосьове прискорення так само визначається, як і доцентрове (нормальне) прискорення точки тіла в разі обертового руху навколо нерухомої осі, де осі кутового прискорення і кутової швидкості збігаються. Обертальне прискорення, на відміну від тангенціального в обертовому русі, визначається відносно осі кутового прискорення. Отже, кут між обертальним і доосьовим прискореннями в загальному випадку сферичного руху не є прямим. Тому з формули (11.70) модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{a_{об}^2 + a_d^2 + 2a_{об}a_d \cos \nu}. \quad (11.71)$$

Звернемо увагу на те, що лише для обертового руху тіла навколо нерухомої осі складові прискорення

$$\vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (11.72)$$

окремої точки тіла збігаються з відповідними дотичними

$$\vec{a}_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{\tau}^0 \quad (11.73)$$

і нормальним

$$\bar{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}^\circ \quad (11.74)$$

складовими прискорення тієї самої точки. В інших випадках руху тіла — плоскопаралельному й сферичному зазначені складові (11.72) не збігаються з величинами (11.73) і (11.74).

Річ в тім, що в разі останніх двох видів руху абсолютна вісь кутових швидкості  $O\Omega$  і абсолютна вісь кутового прискорення  $OE$  є різними прямими тіла. Миттєва абсолютна вісь кутової швидкості  $O\Omega$  є геометричним місцем точок тіла з абсолютними нульовими швидкостями, і абсолютні лінійні швидкості, а також доосьові абсолютні прискорення точок тіла визначаються кутовою швидкістю  $\omega$  та відстанню  $R$  до осі кутової швидкості. Вісь кутового прискорення  $OE$  є геометричним місцем точок тіла, абсолютні прискорення яких у даний момент часу дорівнюють нулю, а обертальні прискорення точок тіла визначаються кутовим прискоренням та відстанню точок до осі кутового прискорення.

У разі плоскопаралельного руху тіла зазначені осі відділені одна від одної і паралельні між собою: вісь кутової швидкості  $R\Omega$  проходить через миттєвий центр швидкостей  $P$  та інші точки тіла з нульовими абсолютними швидкостями, а вісь кутового прискорення  $QE$  проходить через миттєвий центр прискорень  $Q$  тіла і ті його точки, прискорення яких у даний момент часу є нульовими. Водночас тут розглядаються також і відносні осі кутової швидкості і кутового прискорення  $A\Omega$  і  $AE$ , які між собою збігаються і проходять через вибраний полюс  $A$  тіла. Ці осі відповідають геометричному місцю точок тіла, відносні швидкості і відносні прискорення яких дорівнюють нулю; проте їхні абсолютні швидкості і прискорення відмінні від нуля. Для цих осей визначаються відносні доосьове та обертальне прискорення точок, які для плоскопаралельного руху називаються відповідно обертальним нормальним і обертальним дотичним прискореннями.

В разі обертального руху тіла навколо нерухомої осі збігаються осі кутової швидкості  $O\Omega$  й кутового прискорення  $OE$  та утворюють нерухому вісь обертання  $Oz$  — геометричне місце точок тіла, для яких швидкості й прискорення під час обертання тіла дорівнюють нулю. Саме тому доосьове і обертальне прискорення точки тіла, що для даного виду руху називаються доцентровим і тангенціальним прискореннями, взаємно перпендикулярні і мають у своїх математичних виразах однаковий радіус кола, по якому рухається точка тіла.

Це стосується і відносних переносних доосьових і відносних і переносних обертальних прискорень точок тіла в разі його сферичного

руху. Власна вісь обертання  $O\zeta$  тіла відповідає геометричному місцю одних і тих самих його точок, відносні швидкості й прискорення яких під час власного обертання тіла з кутовою швидкістю  $\dot{\varphi}\zeta^{\circ}$  і кутовим прискоренням  $\ddot{\varphi}\zeta^{\circ}$  дорівнюють нулю протягом всього часу, коли тіло рухається. У цьому разі складового обертального руху, тобто для власного обертання, формули доосьового й обертального прискорень мають вигляд

$$\vec{a}_d^{\varphi r} = \dot{\varphi}\zeta^{\circ} \times \dot{\varphi}\zeta^{\circ} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_{o6}^{\varphi r} = \ddot{\varphi}\zeta^{\circ} \times \vec{r}. \quad (11.75)$$

Вісь прецесії  $Oz$  є нерухомою прямою в абсолютному просторі, в різні моменти сферичного руху з нею збігаються різні точки тіла, швидкості й прискорення яких у разі складового прецесійного обертання дорівнюють нулю. Доосьове й обертальне прискорення точок тіла при його обертанні навколо осі прецесії визначаються формулами

$$\vec{a}_d^{\varphi e} = \dot{\varphi}\zeta^{\circ} \times \dot{\varphi}\zeta^{\circ} \times \vec{r}; \quad \vec{a}_{o6}^{\varphi e} = \ddot{\varphi}\zeta^{\circ} \times \vec{r}. \quad (11.76)$$

Вісь нутації  $Ov$  також є геометричним місцем тих точок тіла, швидкості й прискорення яких у кожний момент часу під час прецесійного обертання дорівнюють нулю, а в різні моменти часу з віссю прецесії збігаються різні точки тіла із зазначеним кінематичним станом. Для заданого складового руху тіла прискорення мають вигляд

$$\vec{a}_d^{\theta e} = \dot{\theta}\bar{v}^{\circ} \times \dot{\theta}\bar{v}^{\circ} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_{o6}^{\theta e} = \ddot{\theta}\bar{v}^{\circ} \times \vec{r}. \quad (11.77)$$

Повернемося до виразів при розгляді теореми Коріоліса у випадку довільного переносного руху.

**Проекції кутового прискорення на нерухомі й рухомі осі декартових координат.** Для визначення проєкцій вектора кутового прискорення  $\vec{\epsilon}$  тіла в разі його руху навколо нерухомих осей на нерухомі осі  $xOyz$  скористаємося векторною формулою  $\vec{\epsilon} = d\vec{\omega}/dt$ . Розкладемо вектори  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\epsilon}$  по осях нерухомих осей:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{x}^{\circ} + \omega_y \vec{y}^{\circ} + \omega_z \vec{z}^{\circ};$$

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_x \vec{x}^{\circ} + \epsilon_y \vec{y}^{\circ} + \epsilon_z \vec{z}^{\circ}.$$

Підставимо ці вирази у вихідну рівність і продиференціюємо. Потім запишемо всі члени в одній частині рівності з множниками  $\vec{x}^{\circ}$ ,  $\vec{y}^{\circ}$  і  $\vec{z}^{\circ}$  та дістанемо:

$$\left(\epsilon_x - \frac{d\omega_x}{dt}\right)\vec{x}^{\circ} + \left(\epsilon_y - \frac{d\omega_y}{dt}\right)\vec{y}^{\circ} + \left(\epsilon_z - \frac{d\omega_z}{dt}\right)\vec{z}^{\circ} = 0,$$

звідки

$$\epsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}; \quad \epsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}; \quad \epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (11.78)$$

В разі сферичного руху тіла проекції кутового прискорення на нерухомі декартові осі дорівнюють першим похідним по часу від відповідних проекцій кутової швидкості тіла на ті самі осі.

Продиференціюємо по часу вирази (11.41) відповідно до формул (11.78), тоді шукані проекції кутового прискорення на нерухомі осі:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + \\ &+ \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi; \\ \varepsilon_y &= \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi + \\ &+ \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi; \\ \varepsilon_z &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta.\end{aligned}\quad (11.79)$$

Для того щоб знайти проекції кутового прискорення на рухомі осі, виразимо вектори  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$  через орти цих осей:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega_\xi \vec{\xi}^\circ + \omega_\eta \vec{\eta}^\circ + \omega_\zeta \vec{\zeta}^\circ; \\ \vec{\varepsilon} &= \varepsilon_\xi \vec{\xi}^\circ + \varepsilon_\eta \vec{\eta}^\circ + \varepsilon_\zeta \vec{\zeta}^\circ,\end{aligned}$$

потім

$$\begin{aligned}\varepsilon_\xi \vec{\xi}^\circ + \varepsilon_\eta \vec{\eta}^\circ + \varepsilon_\zeta \vec{\zeta}^\circ &= \frac{d}{dt} (\omega_\xi \vec{\xi}^\circ + \omega_\eta \vec{\eta}^\circ + \omega_\zeta \vec{\zeta}^\circ) = \dot{\omega}_\xi \vec{\xi}^\circ + \dot{\omega}_\eta \vec{\eta}^\circ + \dot{\omega}_\zeta \vec{\zeta}^\circ + \\ &+ \omega_\xi \dot{\vec{\xi}}^\circ + \omega_\eta \dot{\vec{\eta}}^\circ + \omega_\zeta \dot{\vec{\zeta}}^\circ; \quad \dot{\vec{\xi}}^\circ = \vec{\omega} \times \vec{\xi}^\circ, \quad \dot{\vec{\eta}}^\circ = \vec{\omega} \times \vec{\eta}^\circ, \quad \dot{\vec{\zeta}}^\circ = \vec{\omega} \times \vec{\zeta}^\circ\end{aligned}$$

Оскільки

$$\omega_\xi \dot{\vec{\xi}}^\circ + \omega_\eta \dot{\vec{\eta}}^\circ + \omega_\zeta \dot{\vec{\zeta}}^\circ = \vec{\omega} \times (\omega_\xi \vec{\xi}^\circ + \omega_\eta \vec{\eta}^\circ + \omega_\zeta \vec{\zeta}^\circ) = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0,$$

то

$$\left(\varepsilon_\xi - \frac{d\omega_\xi}{dt}\right) \vec{\xi}^\circ + \left(\varepsilon_\eta - \frac{d\omega_\eta}{dt}\right) \vec{\eta}^\circ + \left(\varepsilon_\zeta - \frac{d\omega_\zeta}{dt}\right) \vec{\zeta}^\circ = 0,$$

відки

$$\varepsilon_\xi = \frac{d\omega_\xi}{dt}; \quad \varepsilon_\eta = \frac{d\omega_\eta}{dt}; \quad \varepsilon_\zeta = \frac{d\omega_\zeta}{dt}. \quad (11.80)$$

Проекції кутового прискорення тіла на рухомі осі дорівнюють похідним по часу від відповідних проекцій кутової швидкості на ці самі осі.

Шукані проекції кутового прискорення на рухомі осі дістанемо, якщо скористаємося щойно виведеними формулами (11.80) і відповідно до них продиференціюємо формули (11.57):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\xi &= \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta) = \ddot{\theta} \cos \varphi + \ddot{\psi} \sin \varphi \sin \theta - \\
&\quad - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta; \\
\varepsilon_\eta &= \frac{d}{dt} (-\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta) = -\ddot{\theta} \sin \varphi + \ddot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \\
&\quad - \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta; \\
\varepsilon_\zeta &= \frac{d\omega_\zeta}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = \ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta.
\end{aligned} \tag{11.81}$$

**Вираження проєкцій прискорення точок тіла на нерухомі й рухомі осі через проєкції на ці осі кутової швидкості й кутового прискорення.** Запишемо розклад векторів  $\vec{r}$ ,  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$  по ортах нерухомих осей:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= x \vec{x}^\circ + y \vec{y}^\circ + z \vec{z}^\circ; \\
\vec{\omega} &= \omega_x \vec{x}^\circ + \omega_y \vec{y}^\circ + \omega_z \vec{z}^\circ; \\
\vec{\varepsilon} &= \varepsilon_x \vec{x}^\circ + \varepsilon_y \vec{y}^\circ + \varepsilon_z \vec{z}^\circ.
\end{aligned}$$

Підставимо ці вирази у формулу (11.65). Повне прискорення точки тіла в разі сферичного руху

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= (\varepsilon_x \vec{x}^\circ + \varepsilon_y \vec{y}^\circ + \varepsilon_z \vec{z}^\circ) \times (x \vec{x}^\circ + y \vec{y}^\circ + z \vec{z}^\circ) + \\
&\quad + (\omega_x \vec{x}^\circ + \omega_y \vec{y}^\circ + \omega_z \vec{z}^\circ) \times (x \vec{x}^\circ + y \vec{y}^\circ + z \vec{z}^\circ) = \\
&= [(\varepsilon_x z - \varepsilon_z y) + (\omega_x \dot{z} - \omega_z \dot{y})] \vec{x}^\circ + \\
&\quad + [(\varepsilon_z x - \varepsilon_x z) + (\omega_z \dot{x} - \omega_x \dot{z})] \vec{y}^\circ + \\
&\quad + [(\varepsilon_x y - \varepsilon_y x) + (\omega_x \dot{y} - \omega_y \dot{x})] \vec{z}^\circ
\end{aligned} \tag{11.82}$$

(при розкритті дужок враховано, що векторні добутки однакових ортів осей мають нульові значення, а різних — дорівнюють одиничним векторам  $\vec{x}^\circ$ ,  $\vec{y}^\circ$  і  $\vec{z}^\circ$  з тим чи іншим знаком відповідно до формул  $\vec{x}^\circ \times \vec{y}^\circ = \vec{z}^\circ$ ,  $\vec{x}^\circ \times \vec{z}^\circ = -\vec{y}^\circ$ ,  $\vec{y}^\circ \times \vec{z}^\circ = \vec{x}^\circ$ ,  $\vec{z}^\circ \times \vec{x}^\circ = \vec{y}^\circ$ ,  $\vec{y}^\circ \times \vec{x}^\circ = -\vec{z}^\circ$ ,  $\vec{z}^\circ \times \vec{y}^\circ = -\vec{x}^\circ$ ).

З (11.82) дістанемо шукані проєкції прискорення точки тіла:

$$\begin{aligned}
a_x &= \varepsilon_y z + \varepsilon_z y + \omega_y \dot{z} + \omega_z \dot{y}; \\
a_y &= \varepsilon_z x + \varepsilon_x z + \omega_z \dot{x} + \omega_x \dot{z}; \\
a_z &= \varepsilon_x y + \varepsilon_y x + \omega_x \dot{y} + \omega_y \dot{x}.
\end{aligned}$$

Остаточно маємо з урахуванням співвідношень (11.42):

$$\begin{aligned}
a_x &= \varepsilon_y z + \varepsilon_z y + \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x; \\
a_y &= \varepsilon_z x + \varepsilon_x z + \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z; \\
a_z &= \varepsilon_x y + \varepsilon_y x + \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z.
\end{aligned}
\tag{11.83}$$

Для отримання формул (11.83) відповідно кожній величині  $a_x, a_y, a_z$  було додано по два однакових члена з протилежними знаками:  $\omega_x^2 \xi - \omega_x^2 \xi; \omega_y^2 \eta - \omega_y^2 \eta; \omega_z^2 \zeta - \omega_z^2 \zeta$ . Якщо застосувати розклад векторів  $\vec{r}, \vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$  по ортах рухомих осей

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \xi \vec{\xi}^{\circ} + \eta \vec{\eta}^{\circ} + \zeta \vec{\zeta}^{\circ}; \\
\vec{\omega} &= \omega_x \vec{\xi}^{\circ} + \omega_y \vec{\eta}^{\circ} + \omega_z \vec{\zeta}^{\circ}; \\
\vec{\varepsilon} &= \varepsilon_x \vec{\xi}^{\circ} + \varepsilon_y \vec{\eta}^{\circ} + \varepsilon_z \vec{\zeta}^{\circ}
\end{aligned}$$

і формули (11.65) і (11.57), то дістанемо шукані вирази для проекцій прискорення  $\vec{a}$  на рухомі осі  $O\xi, O\eta$  і  $O\zeta$ :

$$\begin{aligned}
a_x &= \varepsilon_y \zeta + \varepsilon_z \eta + \omega_x (\omega_x \xi + \omega_y \eta + \omega_z \zeta) - \omega^2 \xi; \\
a_y &= \varepsilon_z \xi + \varepsilon_x \zeta + \omega_y (\omega_x \xi + \omega_y \eta + \omega_z \zeta) - \omega^2 \eta; \\
a_z &= \varepsilon_x \eta + \varepsilon_y \xi + \omega_z (\omega_x \xi + \omega_y \eta + \omega_z \zeta) - \omega^2 \zeta
\end{aligned}
\tag{11.84}$$

### § 36. Додавання двох видів руху абсолютно твердого тіла з однією нерухомою точкою (навколо осей, що перетинаються)

Прикладом такого складного руху тіла є сферичний рух конічного колеса 2 у триланковому зубчастому планетарному механізмі круглих конічних коліс із зовнішнім зачепленням (рис. 11.12). Колесо 1 жорстко зв'язано зі стояком. Колесо 2 обертається із власною (відносною) кутовою швидкістю  $\dot{\varphi}z^{\circ} = \vec{\omega}$ , навколо осі  $O\zeta$  водила 3, яке разом із власною віссю  $O\zeta$  прецесійно (переносно) обертально рухається навколо нерухомої осі  $Oz$  (осі прецесії) з переносною кутовою швидкістю  $\dot{\psi}z^{\circ} = \vec{\omega}_e$ . На рис. 11.12,  $b$  радіуси коліс 1 і 2 позначено  $r_1$  і  $r_2$  відповідно.

Зрозуміло, що наведений випадок складного обертального руху тіла зводиться до руху, вже розглянутого, сферичного. Кут між осями переносного й відносного обертань дорівнює куту нутації  $\theta$ , що під час руху має сталі значення. Миттєвою віссю обертання результуючого руху колеса 2 є спільна твірна конічних поверхонь зі спільною вершиною у нерухомій точці  $O$  і кутами розхилу  $2\delta_1$  і  $2\delta_2$ . Також на-



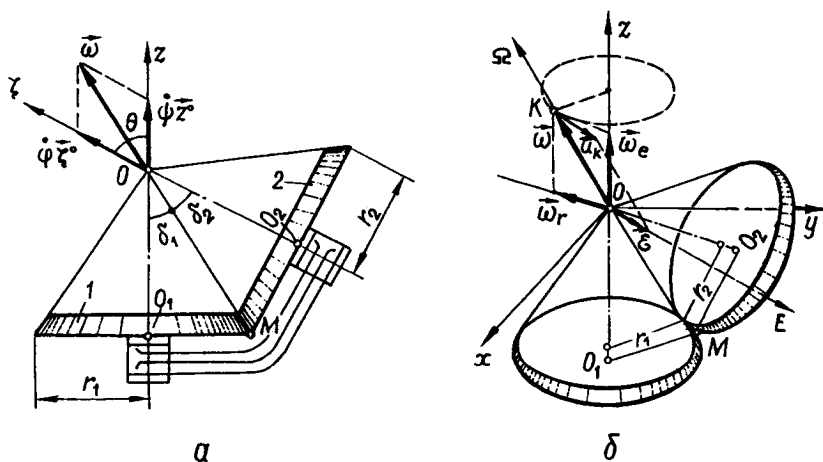


Рис. 11.12

ведено паралелограм кутових швидкостей. Отже, маємо просторовий рух конічного колеса навколо нерухомої точки  $O$ .

При дослідженні даного руху треба скористатися відомою формулою (11.62). Оскільки  $\theta = \text{const}$ , то

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{\zeta}^{\circ} + \dot{\psi} \bar{z}^{\circ} + \dot{\theta} \bar{v}^{\circ} = \dot{\varphi} \bar{\zeta}^{\circ} + \dot{\psi} \bar{z}^{\circ},$$

або

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_e. \quad (11.85)$$

Це перша формула, яка визначає за відомими відносною і переносною кутовими швидкостями тіла абсолютну його швидкість; ця формула виражає **правило паралелограма кутових швидкостей**:

*абсолютна кутова швидкість тіла в разі складного обертального руху навколо осей, що перетинаються, зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на відносній і переносній кутових швидкостях.*

Дістанемо другу формулу — співвідношення між відносною й переносною складовими кутовими швидкостями, а також радіусами  $r_1$  і  $r_2$  коліс. Для цього треба скористатися умовою кочення колеса 2 без проковзування по нерухомому колесу 1: відносна швидкість точок дотику коліс дорівнює нулю, тобто

$$\bar{v}'_{21} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \overrightarrow{OM} - 0 = (\dot{\varphi} \bar{\zeta}^{\circ} + \dot{\psi} \bar{z}^{\circ}) \times \overrightarrow{OM} = 0.$$

Тут  $\bar{v}_1 = 0$ , оскільки колесо 1 за умовою нерухоме.

З трикутників  $OO_1M$  і  $OO_2M$  можна записати

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \vec{r}_1, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_2} + \vec{r}_2, \overrightarrow{OO_1} = -OO_1\vec{z}^\circ, \overrightarrow{OO_2} = -OO_2\vec{\zeta}^\circ,$$

тоді основна векторна рівність набуде вигляду

$$\dot{\psi} \vec{z}^\circ \times (-OO_1\vec{z}^\circ + \vec{r}_1) + \dot{\psi} \vec{\zeta}^\circ \times (-OO_2\vec{\zeta}^\circ + \vec{r}_2) = 0,$$

або

$$\dot{\psi} \vec{\zeta}^\circ \times \vec{r}_2 + \dot{\psi} \vec{z}^\circ \times \vec{r}_1 = 0, (-\dot{\psi} r_2 + \dot{\psi} r_1) \vec{x}^\circ = 0,$$

звідки

$$\dot{\psi} r_1 = \dot{\psi} r_2; \quad \omega_e r_1 = \omega_r r_2. \quad (11.86)$$

Ці вирази визначають передаточне число.

На підставі правила паралелограма кутових швидкостей з рис. 11.12 дістанемо модуль абсолютної кутової швидкості

$$\omega = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_r \omega_e \cos \theta}; \quad \theta = \delta_1 + \delta_2. \quad (11.87)$$

**Приклад 1.** Застосуємо викладену теорію кінематики сферичного руху тіла до дослідження механізму диференціала, який складається з рамки 3 з насадженим на її вісь  $O\zeta$  сателітом (сукупністю двох конічних коліс радіусами  $r_1$  і  $r_2$ , нерухомо скріплених між собою), двох конструктивно незв'язаних між собою конічних коліс радіусами  $R_1$  і  $R_2$  зі спільною віссю обертання  $Oz$ , спарених з конічними колесами сателіта (рис. 11.13). Вісь обертання рамки 3 збігається з віссю  $Oz$  незалежних коліс.

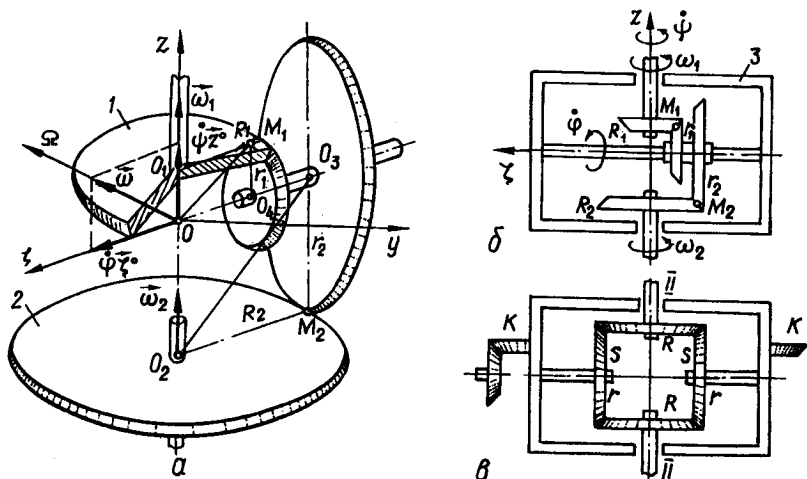


Рис. 11.13

У даній задачі сателіт рухається сферично навколо нерухомої точки перетину  $O$  осей коліс і рамки механізму. Вісь  $O\zeta$  власного обертання сателіта збігається з горизонтальною віссю рамки. Віссю прецесії сателіта є вертикальна вісь  $Oz$ , спільна для рамки  $Z$  і конічних коліс — верхнього й нижнього (рис. 11.13, б). Отже, кут нутації  $\theta$  є незмінним і дорівнює  $90^\circ$ , а лінія вузлів  $Ov$  паралельна площинам коліс сателіта і під час його руху утворює прямий кут з власною віссю  $O\zeta$ .

Кінематичне дослідження руху механізму диференціала полягає у знаходженні залежностей між кутовою швидкістю рамки  $\dot{\psi}$  і кутовими швидкостями конічних коліс  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , а також між власною кутовою швидкістю  $\dot{\phi}$  сателіта і кутовими швидкостями  $\omega_1$  і  $\omega_2$ .

Для сферичного руху сателіта запишемо перше векторне рівняння

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{\zeta}^\circ + \dot{\psi} \vec{z}^\circ. \quad (11.88)$$

Вектори кутових швидкостей ланок механізму зображено на рис. 11.13, а. Абсолютна кутова швидкість  $\vec{\omega}$  сателіта лежить у площині  $zO\zeta$  і разом із нею та сателітом обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю прецесії  $\dot{\psi}$ .

Інші два рівняння запишемо з умови кочення коліс сателіта без проковзування по верхньому і нижньому колесах. Для точок ободів верхнього колеса і спареного із ним колеса сателіта швидкості

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1 = \vec{\omega}_1 \times (\vec{r}_1 + \vec{R}_1), \quad \vec{v}_1' = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1 = \vec{\omega} \times (\vec{r}_1 + \vec{R}_1).$$

У точці дотику  $M_1$  цих коліс має виконуватись умова

$$\vec{v}_1' - \vec{v}_1 = (\vec{\omega} - \vec{\omega}_1) \times (\vec{r}_1 + \vec{R}_1) = 0. \quad (11.89)$$

Запишемо аналогічні формули для іншої пари коліс:

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2 = \vec{\omega}_2 \times (\vec{r}_2 + \vec{R}_2), \quad \vec{v}_2' = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_2 = \vec{\omega} \times (\vec{r}_2 + \vec{R}_2).$$

У точці дотику  $M_2$  цих коліс має місце умова

$$\vec{v}_2' - \vec{v}_2 = (\vec{\omega} - \vec{\omega}_2) \times (\vec{r}_2 + \vec{R}_2) = 0. \quad (11.90)$$

На підставі (11.88) рівняння (11.89) і (11.90) набувають вигляду

$$\begin{aligned} (\dot{\phi} \vec{\zeta}^\circ + \dot{\psi} \vec{z}^\circ - \vec{\omega}_1 \vec{z}^\circ) \times (\vec{r}_1 + \vec{R}_1) &= 0, \\ (\dot{\phi} \vec{\zeta}^\circ + \dot{\psi} \vec{z}^\circ - \vec{\omega}_2 \vec{z}^\circ) \times (\vec{r}_2 + \vec{R}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (11.91)$$

Але радіуси коліс можна подати у вигляді

$$\vec{R}_1 = -R_1 \vec{\zeta}^\circ, \quad \vec{r}_1 = r_1 \vec{z}^\circ, \quad \vec{R}_2 = -R_2 \vec{\zeta}^\circ, \quad \vec{r}_2 = -r_2 \vec{z}^\circ.$$

Введемо ці вирази у рівності (11.91):

$$\begin{aligned} (\dot{\phi} \vec{\zeta}^\circ + \dot{\psi} \vec{z}^\circ - \vec{\omega}_1 \vec{z}^\circ) \times (-R_1 \vec{\zeta}^\circ + r_1 \vec{z}^\circ) &= 0; \\ (\dot{\phi} \vec{\zeta}^\circ + \dot{\psi} \vec{z}^\circ - \vec{\omega}_2 \vec{z}^\circ) \times (-R_2 \vec{\zeta}^\circ - r_2 \vec{z}^\circ) &= 0. \end{aligned}$$

Після векторного множення маємо

$$\begin{aligned} & -\dot{\phi} R_1 \bar{\zeta}^\circ \times \bar{\zeta}^\circ - R_1 \dot{\psi} \bar{z}^\circ \times \bar{\zeta}^\circ + R_1 \omega_1 \bar{z}^\circ \times \bar{\zeta}^\circ + r_1 \dot{\phi} \bar{\zeta}^\circ \times \bar{z}^\circ + \\ & + r_1 \dot{\psi} \bar{z}^\circ \times \bar{z}^\circ - \bar{\omega}_1 r_1 \bar{z}^\circ \times \bar{z}^\circ = 0; \\ & -\dot{\phi} R_2 (\bar{\zeta}^\circ \times \bar{\zeta}^\circ) - \dot{\psi} R_2 (\bar{z}^\circ \times \bar{\zeta}^\circ) + \bar{\omega}_2 R_2 (\bar{z}^\circ \times \bar{\zeta}^\circ) - \\ & - \dot{\phi} r_2 (\bar{\zeta}^\circ \times \bar{z}^\circ) - \dot{\psi} r_2 (\bar{z}^\circ \times \bar{z}^\circ) - \bar{\omega}_2 r_2 (\bar{z}^\circ \times \bar{z}^\circ) = 0. \end{aligned}$$

З урахуванням векторних співвідношень

$$\bar{\zeta}^\circ \times \bar{\zeta}^\circ = \bar{z}^\circ \times \bar{z}^\circ = 0; \quad \bar{z}^\circ \times \bar{\zeta}^\circ = \bar{v}^\circ, \quad \bar{\zeta}^\circ \times \bar{z}^\circ = -\bar{v}^\circ$$

маємо таку систему векторних рівнянь:

$$\begin{aligned} (-R_1 \dot{\psi} + R_1 \omega_1 - r_1 \dot{\phi}) \bar{v}^\circ &= 0; \\ (-R_2 \dot{\psi} + R_2 \bar{\omega}_2 + r_2 \dot{\phi}) \bar{v}^\circ &= 0, \end{aligned}$$

звідки дістанемо шукані співвідношення між кутовими швидкостями ланок розглядуваного механізму диференціала:

$$\begin{aligned} (\bar{\omega}_1 - \dot{\psi}) R_1 &= r_1 \dot{\phi}, \\ (\bar{\omega}_2 - \dot{\psi}) R_2 &= -r_2 \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (11.92)$$

де  $\dot{\phi} \equiv \omega_r$  — відносна кутова швидкість сателіта (кутова швидкість відносно рамки  $\mathcal{J}$ );  $\omega_1$  і  $\omega_2$  — абсолютні кутові швидкості верхнього й нижнього коліс;  $\dot{\psi}$  — абсолютна кутова швидкість рамки, або переносна кутова швидкість сателіта ( $\omega_e \equiv \dot{\psi}$ ).

Розв'яжемо систему (11.92) і знайдемо переносну і відносну кутові швидкості сателіта (як уже зазначалось, переносна кутова швидкість сателіта є водночас абсолютною кутовою швидкістю рамки диференціала):

$$\omega_e = \frac{r_2 R_1 \omega_1 + r_1 R_2 \omega_2}{r_1 R_2 + r_2 R_1}; \quad (11.93)$$

$$\omega_r = \frac{R_1 R_2 (\omega_1 - \omega_2)}{r_1 R_2 + r_2 R_1}. \quad (11.94)$$

Якщо перейти від розглядуваного механізму диференціала до механізму автомобільного диференціала (рис. 11.13,  $\theta$ ), то, прийнявши, що  $r_1 = r_2 = r$  і  $R_1 = R_2 = R$ , дістанемо

$$\omega_e = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \quad (11.95)$$

$$\omega_r = \frac{R}{r} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}. \quad (11.96)$$

Щоб передати обертальний рух вала  $I$  двигуна до ведучих коліс автомобіля, встановлюються дві спарені конічні шестірні — одна на привідному валу  $I$ , а друга  $K$  жорстко зв'язана з кожухом диференціала (рис. 11.13,  $\theta$ ). Рух від двигуна до коліс автомобіля передається через сателіти  $S$  і півосі  $II$  з жорстко на них закріпленими конічними колесами. З формул (11.95) і (11.96) випливає, що при однакових кутових швидкостях коліс автомобіля (рух по

прямий) кожух (рамка) диференціала обертається з середньою кутовою швидкістю між кутовими швидкостями коліс, а сателіти не обертаються відносно кожуха. На криволінійних участках шляху сателіти здійснюють власний рух щодо кожуха диференціала.

**Приклад 2.** Крутий тонкий диск радіусом  $R$  котиться без проковзування по нерухомій горизонтальній площині так, що його власна вісь обертання  $C\zeta$  (горизонтальна і проходить через центр диска перпендикулярно до його площини, рис. 11.14), обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_c = \psi$ . Треба визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення найвищої точки  $M$  диска, якщо відстань від його центра  $O$  до вертикальної осі  $Oz$  переносного обертання  $OC = h$ .

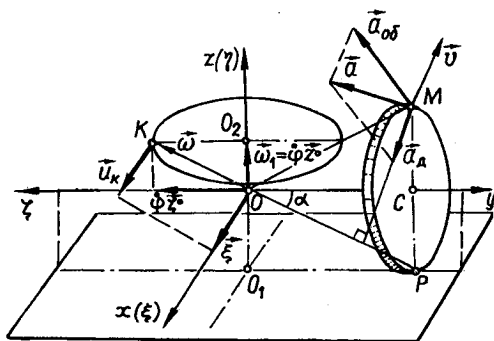


Рис. 11.14

У задачі маємо справу зі сферичним рухом диска навколо нерухомого центра  $O$  — точки перетину осей  $C\zeta$  і  $Oz$ . З точки  $O$  проведемо дві інші нерухомі осі  $Ox$  і  $Oy$  системи  $xOy$ . Визначимо шукану швидкість у положенні диска, коли його власна вісь  $C\zeta$  розташована паралельно осі  $Oy$ . Тоді дві інші нерухомі осі  $C\xi$  і  $C\eta$  проходять паралельно осям

$Ox$  і  $Oz$ , а ось вузлів  $Ov$  для даного положення диска збігається з нерухомою віссю  $Ox$ .

Установивши взаємне розташування рухомих й нерухомих осей декартових координат у вибраному положенні диска для його сферичного руху, запишемо координати — власні і абсолютні — для розглядуваної точки  $M$ , а також кути Ейлера:  $x = 0, y = h, z = 2R, \xi = 0, \eta = R, \zeta = 0; \varphi = \psi = 0, \theta = 90^\circ$ .

Дану задачу розв'яжемо на підставі формул (11.62), (11.22) і (11.23) кінематики руху тіла з однією нерухомою точкою. За формулою (11.62) у точці  $O$  побудуємо прямокутник кутових швидкостей  $\varphi \zeta^\circ, \psi z^\circ$  і  $\bar{\omega}$  та знайдемо кутову швидкість власного обертання:

$$\bar{\phi} = \bar{\omega}_c \operatorname{ctg} \alpha = h/R.$$

Отже, кутові швидкості прецесії і власного обертання диска  $\psi = \omega_c, \bar{\phi} = h/R$  є сталими, а кутова швидкість нутації  $\theta$  дорівнює нулю.

Підставимо значення  $\xi = \zeta = 0, \eta = R, \varphi = \psi = 0, \theta = \pi/2, \dot{\psi} = \omega_c, \bar{\phi} = h/R, \theta = 0$  у формули (11.22) і знайдемо проєкції вектора шуканої швидкості точки диска на нерухомі декартові осі  $Ox, Oy$  і  $Oz$ :

$$\dot{x} = v_x = -\omega_1 h - \omega_1 h = -2\omega_1 h, \quad \dot{y} = v_y = 0, \quad \dot{z} = v_z = 0.$$

Отже, швидкість найвищої точки диска в заданому положенні ( $\varphi = \psi = 0, \theta = \pi/2$ ) колінеарна осі  $Ox$  і за напрямом їй протилежна, оскільки від власного обертання швидкість

$$v_{rx} = -\dot{\varphi}R = -\omega_1 \frac{h}{R} R = -\omega_1 h,$$

а в разі прецесійного руху швидкість  $v_{ex} = -\omega_1 h$ , тому абсолютна швидкість

$$v_x = v_{rx} + v_{ex} = -2\omega_1 h.$$

Підставивши у формули (11.23) значення  $\varphi = \psi = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $\xi = 0$ ,  $\eta = R$ ,  $\zeta = -h$ ;  $\dot{\varphi} = \omega_1 h/R$ ,  $\dot{y} = \omega_1$ ,  $\theta = 0$ ;  $\ddot{\varphi} = \ddot{\psi} = \ddot{\theta} = 0$ , дістанемо проекції прискорення точки диска на нерухомі осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ :

$$\ddot{x} = a_x = 0; \quad \ddot{y} = a_y = -\omega_1^2 h - 2\omega_1^2 h = -3\omega_1^2 h; \quad \ddot{z} = a_z = -\omega_1^2 \frac{h^2}{R^2} R.$$

Тоді модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{9\omega_1^4 h^2 + \omega_1^4 \frac{h^4}{R^2}} = \omega_1^2 \frac{h}{R} \sqrt{9R^2 + h^2}.$$

Добуті результати свідчать, що вектор знайденого прискорення найвищої точки диска під час його кочення без проковзування по нерухомій горизонтальній площині лежить у площині  $yOz$ .

Такий самий результат можна дістати, якщо при визначенні шуканого прискорення скористатися формулами (11.66), (11.68) і (11.71). За формулою (11.66)  $a_{o6} = \varepsilon h_\varepsilon = \varepsilon \cdot OM$ , де  $\varepsilon$  — швидкість кінця вектора миттєвої кутової швидкості  $\vec{\omega}$  диска, тобто

$$\varepsilon = u_K = \left| \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right| = \omega \omega_1 \cos \alpha.$$

Величину  $\omega$  можна знайти з прямокутника кутових швидкостей (рис. 11.14):

$$\omega = \frac{\dot{\psi}}{\sin \alpha} = \frac{\omega_1}{\sin \alpha},$$

тоді

$$\varepsilon = \frac{\omega_1^2}{\sin^2 \alpha} \cos \alpha = \omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha = \omega_1^2 \frac{h}{R}.$$

Тому шукана компонента обертального прискорення точки

$$a_{o6} = \omega_1^2 \frac{h}{R} \cdot OM.$$

З рис. 11.14 на підставі формули (11.68) дістанемо доосьове прискорення

$$a_n = \omega^2 R_\omega = \frac{\omega_1^2}{\sin^2 \alpha} \cdot OM \sin 2\alpha = \frac{2\omega_1^2}{\sin^2 \alpha} \cdot OM \frac{h}{OM} \frac{R}{OM} = 2\omega_1^2 \cdot OM \frac{h}{R}.$$

Вектор цього прискорення  $\vec{a}_n$  напрямлений по перпендикуляру  $R_\omega$ , опущеному з точки  $M$  диска на його миттєву вісь обертання  $PO$ , до миттєвої осі обертання, а вектор обертального прискорення  $\vec{a}_{o6}$  — по перпендикуляру  $h_\varepsilon = OM$ , опущеному з точки  $M$  на вісь кутового прискорення  $OE$ , до осі кутового прискорення. Вектор кутового прискорення  $\vec{\varepsilon}$  (вісь  $OE$ ) збігається з нерухомою віссю  $Ox$  і має з нею однаковий напрям.

За формулою (11.71) запишемо модуль повного прискорення точки  $M$  диска:

$$a = \sqrt{a_{\text{об}}^2 + a_n^2} = \sqrt{4\omega_1^4 OM^2 \frac{h^4}{R^2} + \omega_1^4 OM^2 \frac{h^2}{R^2} + 4\omega_1^4 \frac{h^2}{R^2} \cdot OM^2 \cos \nu},$$

де  $\nu = 90^\circ + (90^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - 2\alpha$ , або

$$a = \omega_1^2 \frac{h}{R} \sqrt{5 \cdot OM^2 - 4 \cdot OM^2 \cos 2\alpha} = \omega_1^2 \frac{h}{R} \cdot OM \sqrt{5 - 4 \cos 2\alpha},$$

де  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{h}{OM}\right)^2 - \left(\frac{R}{OM}\right)^2 = \frac{h^2 - R^2}{OM^2}$ .

Отже,

$$\begin{aligned} a &= \omega_1^2 \frac{h}{R} \cdot OM \sqrt{5 - 4 \frac{h^2 - R^2}{OM^2}} = \omega_1^2 \frac{h}{R} \cdot OM \frac{1}{OM} \sqrt{5 \cdot OM^2 - 4(h^2 - R^2)} = \\ &= \omega_1^2 \frac{h}{R} \sqrt{5h^2 + 5R^2 - 4h^2 + 4R^2} = \omega_1^2 \frac{h}{R} \sqrt{9R^2 + h^2}, \end{aligned}$$

що збігається з попереднім результатом.

Для скорочення в дальшому замість терміна «абсолютно тверде тіло» вживатимемо термін «тіло», як в інших главах, де йшлося про рух абсолютно твердого тіла.

Вивчати властивості загального руху тіла можна двома шляхами. Один з них ґрунтується на теоремі Ейлера—Даламбера про поступальне переміщення і поворот, а інший пов'язаний із введенням узагальнених незалежних між собою параметрів, які однозначно визначають в абсолютному просторі положення тіла. Обидва шляхи свідчать, що кінематика загального руху тіла базується на основних положеннях кінематики поступального та сферичного руху тіла, подібно до того, як властивості поступального й обертового руху тіла з нерухомою віссю обертання були підґрунтям для вивчення кінематики плоскопаралельного руху.

Однак, на відміну від плоскопаралельного руху тіла, де поступальний й обертовий рухи, накладаючись один на одний, утворюють миттєвий обертовий рух тіла навколо нерухомої миттєвої осі, в загальному випадку руху тіла його миттєвий поступальний і миттєвий обертовий рухи не спричиняють результуючого руху з нерухомою миттєвою віссю обертання. Крім того, загальний рух тіла можна розглядати з трьох різних точок зору.

Перша — загальний рух тіла є сукупністю двох миттєвих рухів — поступального й обертового навколо рухомої миттєвої осі. Друга — загальний рух тіла є наслідком двох миттєвих обертових рухів навколо двох відцентрових миттєвих осей, які між собою не перетинаються. Інший підхід — це уявлення про загальний рух тіла як миттєвий гвинтовий рух, коли тіло здійснює миттєвий обертовий рух навколо так званої гвинтової осі й водночас поступально рухається паралельно миттєвій гвинтовій осі.

У природі й техніці загальний вид руху тіл досить поширений. Наприклад, рух небесних тіл, коли на рух центра мас тіл накладається і сферичний рух. У техніці це гіроскопи в гіроскопічних системах, встановлених на рухомих наземних об'єктах тощо.



**§ 37. Розклад руху абсолютно твердого тіла на поступальний із полюсом і обертальний навколо миттєвої осі, що проходить через полюс. Рівняння загального випадку руху**

Введемо декартову систему координат  $x'O'y'z'$ , незмінно зв'язану з абсолютним простором, відносно якої розглянемо загальний рух тіла. Для даного випадку руху тіла характерно, що всі його точки без винятку перебувають у русі відносно нерухомих осей  $O'x'$ ,  $O'y'$  і  $O'z'$ ; а ці абсолютні переміщення точок є наслідком, як буде показано в дальшому, поступальних переміщень тіла як цілого вздовж нерухомих осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  та його поворотів навколо них.

Розгляд загального випадку руху тіла почнемо зі сферичного руху (рис. 12.1). Вважаємо, що нерухома точка  $O$ , навколо якої тіло рухається, належить деякій платформі, з якою незмінно зв'язані декартові осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ . Уявімо, що платформа разом із осями  $xOy$

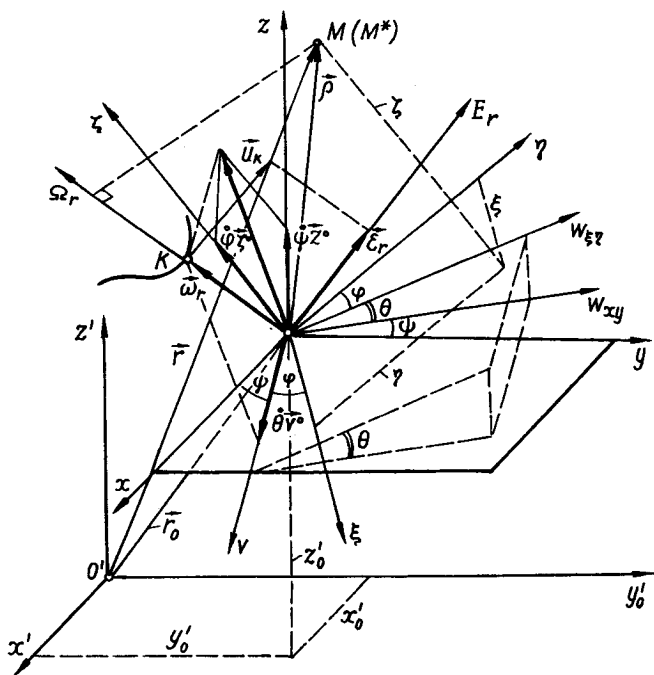


Рис. 12.1

і тілом, закріпленим на ній в точці  $O$ , з якогось моменту часу набуває поступального руху відносно введеної раніше нерухомої системи координат  $x'O'y'z'$ . За таких умов дістанемо вже загальний випадок руху тіла, коли воно набуває поступальних переміщень уздовж нерухомих осей, а також здійснює повороти навколо них, оскільки тіло й далі перебуває в сферичному русі, та вже навколо рухомої точки  $O$ .

Для того щоб дослідити кінематику загального руху тіла, треба ввести три декартові системи координат — нерухомих  $x'O'y'z'$ , незмінно зв'язану з абсолютним простором; поступально рухомих  $xOyz$  з початком  $O$  в довільній точці тіла, осі якої  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  під час руху тіла лишаються паралельними відповідним нерухомих осям  $O'x'$ ,  $O'y'$  і  $O'z'$ ; і, нарешті, рухомих системи координат  $\xi O \eta \zeta$ , незмінно зв'язану з тілом, рух якої розглядається.

Цілком зрозуміло, що положення рухомих осей  $\xi O \eta \zeta$ , а отже, і тіла, визначається дев'ятьма напрямними косинусами відповідно до формул (11.13), які виражаються через три Ейлерові кути  $\varphi$ ,  $\psi$  і  $\theta$ . Звідси виходить, що за кутами Ейлера задаємо положення тіла відносно поступально рухомих системи координат  $xOyz$  у загальному випадку його руху. Абсолютні координати точки  $O$  тіла, в якій розташований початок поступально рухомих системи координат  $xOyz$ , визначають положення поступально рухомих системи координат  $xOyz$  в абсолютному просторі. Точку  $O$  тіла з абсолютними координатами  $x'_0$ ,  $y'_0$  і  $z'_0$ , яку вибирають для визначення положення поступально рухомих системи координат  $xOyz$  при вивченні загального руху тіла, називають *полюсом тіла*.

Зважаючи на вказані три абсолютні координати полюса  $O$  і три кути Ейлера, можна записати шукані рівняння руху тіла в розглядуваному випадку. Справді, під час руху тіла величини  $x'_0$ ,  $y'_0$ ,  $z'_0$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  є функціями часу, тому дістанемо шість функціональних залежностей:

$$\begin{aligned} x'_0 &= x'_0(t); & \varphi &= \varphi(t); \\ y'_0 &= y'_0(t); & \psi &= \psi(t); \\ z'_0 &= z'_0(t); & \theta &= \theta(t), \end{aligned} \quad (12.1)$$

які називаються *рівняннями загального руху тіла*, або *законом загального руху тіла*, оскільки функціональні залежності (12.1) дають змогу передбачити положення, а отже, і рух тіла.

Перші три залежності (12.1)

$$x'_0 = x'_0(t), y'_0 = y'_0(t), z'_0 = z'_0(t), \quad (12.2)$$

які визначають положення поступально рухомої системи координат  $xOyz$  в абсолютному просторі, називаються *рівняннями переносного поступального руху тіла* в його загальному абсолютному складовому русі.

Інші три залежності (12.1)

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad (12.3)$$

які визначають положення тіла і незмінно зв'язаних з ним рухомих осей  $\xi O \eta \zeta$  відносно поступально рухомої системи координат  $xOyz$ , називаються *рівняннями відносного сферичного руху тіла навколо полюса  $O$*  в разі складного загального випадку руху тіла.

**Розклад загального руху тіла на поступальний, що визначається рухом полюса, і обертальний навколо миттєвої осі, що проходить через полюс.** Рівняння (12.1) показують, що загальний рух тіла можна розглядати як складений з поступального, що визначається рухом полюса  $O$ , і миттєвого обертального руху навколо миттєвої рухомої осі, яка проходить через цей полюс, тобто сферичного руху навколо полюса.

При розгляді першої складової руху — поступального руху — треба в даний момент часу  $t$  уявити, що відносного сферичного руху тіла немає. Тоді за рівняннями (12.2) переносну швидкість і переносне прискорення усіх точок тіла визначають відповідно як першу і другу похідні по часу від абсолютних координат  $x'_0$ ,  $y'_0$  і  $z'_0$  полюса  $O$ :

$$v_{ex'} = \frac{dx'_0}{dt} = \dot{x}'_0; \quad v_{ey'} = \frac{dy'_0}{dt} = \dot{y}'_0; \quad v_{ez'} = \frac{dz'_0}{dt} = \dot{z}'_0; \quad (12.4)$$

$$a_{ex'} = \frac{d^2 x'_0}{dt^2} = \ddot{x}'_0; \quad a_{ey'} = \frac{d^2 y'_0}{dt^2} = \ddot{y}'_0; \quad a_{ez'} = \frac{d^2 z'_0}{dt^2} = \ddot{z}'_0. \quad (12.5)$$

Якщо ввести одиничні вектори  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$  і  $\vec{k}'$  нерухомих осей  $x'O'y'z'$ , то від скалярних формул (12.4) і (12.5) можна перейти до векторів переносної швидкості і переносного прискорення точок тіла, а саме:

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= \dot{x}'_0 \vec{i}' + \dot{y}'_0 \vec{j}' + \dot{z}'_0 \vec{k}' = \frac{d}{dt} (x'_0 \vec{i}' + y'_0 \vec{j}' + z'_0 \vec{k}') = \\ &= \frac{d(\vec{O}_1 \vec{O})}{dt} = \dot{\vec{r}}_0; \end{aligned} \quad (12.6)$$

$$\vec{a}_e = \ddot{x}'_0 \vec{i}' + \ddot{y}'_0 \vec{j}' + \ddot{z}'_0 \vec{k}' = \frac{d}{dt} (\dot{x}'_0 \vec{i}' + \dot{y}'_0 \vec{j}' + \dot{z}'_0 \vec{k}') = \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \ddot{\vec{r}}_0. \quad (12.7)$$

Для того щоб знайти переносні координати точок тіла в його переносній складовій загального руху в даний момент часу, треба скористатися формулами координат точок тіла в разі сферичного руху (11.19), які тепер будуть відносними координатами:

$$\begin{aligned}
 x_r &= \xi(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi) + \eta(-\sin \varphi \cos \psi - \\
 & - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi) + \zeta(\sin \theta \sin \psi); \\
 y_r &= \xi(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi) + \eta(\cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \\
 & - \sin \varphi \sin \psi) + \zeta(-\sin \theta \cos \psi); \\
 z_r &= \xi \sin \varphi \sin \theta + \eta \cos \varphi \sin \theta + \zeta \cos \theta.
 \end{aligned}
 \tag{12.8}$$

Додавши ці відносні величини  $x_r$ ,  $y_r$  і  $z_r$  при фіксованих кутах Ейлера  $\varphi^*$ ,  $\psi^*$  і  $\theta^*$  до відповідних абсолютних координат  $x'_0$ ,  $y'_0$  і  $z'_0$  вибраного полюса  $O$  тіла, дістанемо переносні координати точок  $M$  з власними координатами  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$ :

$$x'_e = x'_0 + x_r; y'_e = y'_0 + y_r; z'_e = z'_0 + z_r. \tag{12.9}$$

Ці формули визначають абсолютні координати двох різних точок  $M^*$  і  $M$ , які в кожний даний момент часу збігаються — перша  $M^*$  належить до так званого поступально рухомого простору, з яким незмінно зв'язана поступально рухома система координат  $xOyz$ , а  $M$  є точкою тіла. Зауважимо, що переносна швидкість (12.4) і переносне прискорення (12.5) стосуються точки  $M$  тіла, загальний рух якого вивчається, але ці величини визначаються за рухом точки  $M^*$  поступально рухомого простору при фіксованих кутах Ейлера  $\varphi$ ,  $\psi$  і  $\theta$ . Величини (12.4) і (12.5) можна знайти з формул (12.9), диференціюючи їх по часу при сталих відносних координатах  $x_r$ ,  $y_r$  і  $z_r$ .

Від трьох скалярних рівностей (12.9) можна перейти до однієї векторної, якщо кожен з них помножити на відповідні орти нерухомих або поступально рухомих осей, що одне й те саме,  $\vec{i}' = \vec{x}^0$ ,  $\vec{j}' = \vec{y}^0$  і  $\vec{k}' = \vec{z}^0$ :

$$\begin{aligned}
 x'_e \vec{i}' + y'_e \vec{j}' + z'_e \vec{k}' &= x'_0 \vec{i}' + y'_0 \vec{j}' + z'_0 \vec{k}' + x_r \vec{x}^0 + y_r \vec{y}^0 + z_r \vec{z}^0; \\
 \vec{r}_e &= \vec{r}'_0 + \vec{p}^*.
 \end{aligned}
 \tag{12.10}$$

При визначенні векторів  $\vec{v}_e$  і  $\vec{a}_e$  радіус-вектор  $\vec{p}$  (рис. 12.1) вважається сталим, бо він є радіусом-вектором точки  $M^*$ , з якою збігається точка тіла  $M$ .

Зауважимо, що поступальна складова загального руху тіла в даний момент часу є однією із складових нескінченної множини поступальних рухів, які можна розглядати, якщо за полюс брати різні точки тіла; а переносячи поступально рухома систему  $xOyz$  в різні точки тіла відповідно до рівнянь (12.2) змінюються координати  $x'_0$ ,  $y'_0$  і  $z'_0$ , а отже, швидкості і прискорення поступальної складової руху.

Проаналізуємо другу складову загального руху тіла — відносний сферичний рух навколо полюса. На підставі положень кінематики сферичного руху навколо нерухомих точки і рівнянь (12.3) це миттєвий обертальний рух навколо рухомих миттєвої осі  $O\Omega$ , яка проходить через рухома точку тіла — полюс  $O$ ; миттєва вісь обертан-

ня  $O\Omega$  є геометричним місцем точок тіла з однаковими швидкостями і прискореннями, які дорівнюють швидкості і прискоренню полюса.

Якщо у формулі (11.62) величину  $\bar{\omega}$  вважати миттєвою відносною кутовою швидкістю обертальної складової загального руху тіла, то

$$\bar{\omega}_r = \dot{\varphi}\bar{\zeta}^\circ + \dot{\psi}\bar{z}^\circ + \dot{\theta}\bar{v}^\circ, \quad (12.11)$$

де  $\dot{\varphi}\bar{\zeta}^\circ$ ,  $\dot{\psi}\bar{z}^\circ$  і  $\dot{\theta}\bar{v}^\circ$  — відносні кутові швидкості власного обертання, прецесії і нутації відповідно. Слід зазначити, що в розглядуваному випадку вісь прецесії  $Oz$  вже не є нерухомою, на відміну від випадку абсолютного сферичного руху, де вона нерухома; на рухомі осі власного обертання  $O\zeta$  і нутації  $Ov$  додатково накладається в загальному випадку руху тіла поступальний рух (вісь прецесії  $Oz$  рухається поступально).

Миттєва відносна кутова швидкість (12.11) напрямлена вздовж миттєвої осі обертання тіла  $O\Omega_r$  (рис. 12.1). На підставі векторної формули (11.64) запишемо вираз для кутового прискорення відносного сферичного руху:

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{d\bar{\omega}_r}{dt} = \dot{\bar{\omega}}_r. \quad (12.12)$$

Використовуючи геометричну інтерпретацію векторної похідної  $d\bar{\omega}_r/dt$ , маємо

$$\bar{u}_K = \frac{d\overrightarrow{OK}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}_r}{dt}, \quad (12.13)$$

або

$$\bar{\varepsilon}_r = \bar{u}_K. \quad (12.14)$$

Отже, вектор кутового прискорення  $\bar{\varepsilon}_r$  в обертальній складовій загального руху тіла — у разі відносного сферичного руху навколо полюса — збігається з віссю кутового прискорення  $OE_r$ , яка проходить через полюс  $O$  паралельно вектору швидкості  $\bar{u}_K$  кінця  $K$  миттєвої кутової швидкості  $\bar{\omega}_r$  під час його руху по годографу (рис. 12.1).

З'ясуємо, чи впливає вибір полюса  $O$  на кінематику відносного сферичного руху тіла навколо полюса  $O$  в розглядуваному випадку загального руху тіла. Для цього в деякий певний момент під час загального руху тіла виберемо в ньому за полюси декілька точок  $O_1, O_2, O_3, \dots$  (рис. 12.2). З ними сумісно початки поступально рухомих декартових осей  $x_1O_1y_1z_1, x_2O_2y_2z_2, x_3O_3y_3z_3, \dots$ ; нехай введені осі під час руху тіла лишаються паралельними відповідним нерухомих осям декартової системи координат  $x'O'y'z'$ . Крім того, з точками  $O_1, O_2, O_3, \dots$  сумісно початки інших декартових систем  $\xi_1O_1\eta_1\zeta_1, \xi_2O_2\eta_2\zeta_2,$

$\xi_3 O_3 \eta_3 \zeta_3, \dots$ , а їх осі незмінно зв'яжемо з рухомим тілом так, щоб відповідні осі цих систем були паралельні між собою.

Як уже було зазначено раніше, характер поступального руху декартових систем  $x_1 O_1 y_1 z_1, x_2 O_2 y_2 z_2, x_3 O_3 y_3 z_3, \dots$  визначається рухом полюсів  $O_1, O_2, O_3, \dots$  відповідно. Декартові системи  $\xi_1 O_1 \eta_1 \zeta_1, \xi_2 O_2 \eta_2 \zeta_2, \xi_3 O_3 \eta_3 \zeta_3, \dots$  разом із тілом здійснюють загальний рух відносно абсолютно нерухомої декартової системи координат  $x' O' y' z'$ , а відносно поступально рухомих систем — відносний сферичний рух.

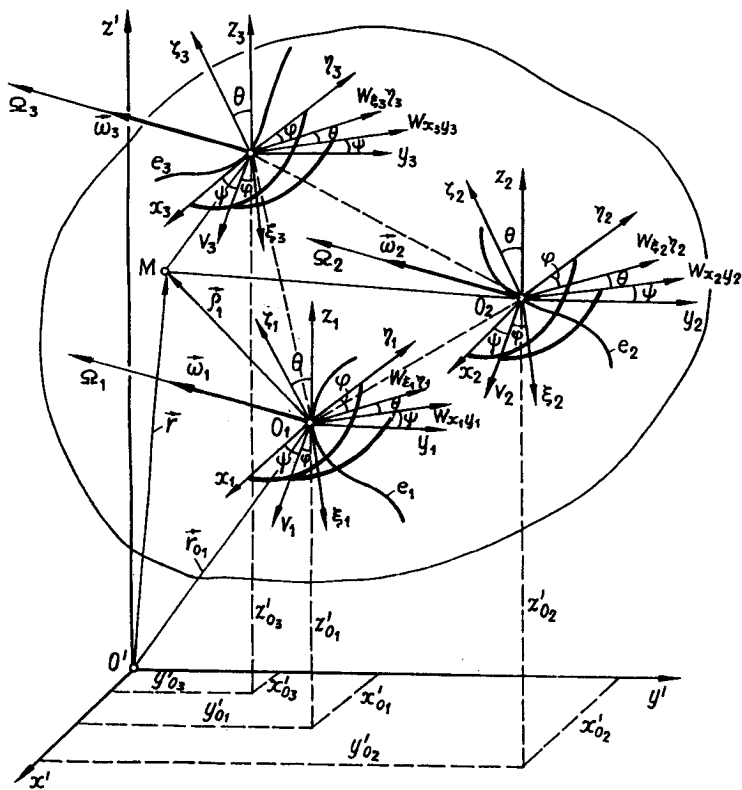


Рис. 12.2

Останні рухи відрізняються між собою лише положенням в тілі миттєвих осей обертання  $O_1 \Omega_1, O_2 \Omega_2, O_3 \Omega_3, \dots$ , які між собою паралельні і проходять через полюси  $O_1, O_2, O_3, \dots$ . Цілком зрозуміло, що згідно з формулами (12.11), (12.13) кінематичні характеристики відносних сферичних рухів навколо полюсів  $O_1, O_2, O_3, \dots$  однакові, оскільки

для всіх відносних сферичних рухів функціональні залежності  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\psi = \psi(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$  однакові (рис. 12.2).

Отже, вибір полюса  $O$  не впливає на кінематичні характеристики відносного сферичного руху тіла навколо полюса; проте миттєва вісь обертання тіла у разі відносного сферичного руху паралельно переміщується при переході від одного полюса до іншого; під час руху окремої точки тіла  $M$  обидві його складові — переносна і відносна залежать від вибору полюса.

### § 38. Швидкість і прискорення точок тіла. Теорема Копіоліса

Швидкість і прискорення окремих точок тіла в загальному випадку руху знайдемо, якщо скористаємося векторною рівністю (12.10), в якій  $\rho$  становить радіус-вектор  $\bar{\rho}$  точки  $M$  тіла ( $\bar{\rho}^*$  — радіус-вектор точки  $M^*$ , незмінно зв'язаної з поступально рухомим простором),

$$\bar{r} = \bar{r}_O + \bar{\rho}, \quad (12.15)$$

або, якщо ввести одиничні вектори рухомих осей  $\xi O \eta \zeta$ ,

$$\bar{r} = \bar{r}_O + \xi \bar{\xi}^o + \eta \bar{\eta}^o + \zeta \bar{\zeta}^o,$$

де  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$  — незалежні від часу власні координати точки  $M$ , що визначають положення точки  $M$  тіла в рухомій системі координат  $\xi O \eta \zeta$ .

На підставі векторного рівняння руху точки  $M$  тіла, яке пов'язує положення полюса  $O$  і положення розглядуваної точки  $M$  тіла в разі його сферичного руху навколо полюса, продиференціюємо обидві частини його по часу і таким чином дістанемо шукану швидкість:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}_O + \xi \dot{\bar{\xi}}^o + \eta \dot{\bar{\eta}}^o + \zeta \dot{\bar{\zeta}}^o,$$

але, згідно з формулами Ейлера (4.38),

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}_O + \xi(\bar{\omega} \times \bar{\xi}^o) + \eta(\bar{\omega} \times \bar{\eta}^o) + \zeta(\bar{\omega} \times \bar{\zeta}^o).$$

Винесемо спільний множник  $\bar{\omega}$  у векторних добутках за дужки:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}_O + \bar{\omega} \times (\xi \bar{\xi}^o + \eta \bar{\eta}^o + \zeta \bar{\zeta}^o).$$

Введемо заміну відповідно до відомих співвідношень:

$$\xi \bar{\xi}^o + \eta \bar{\eta}^o + \zeta \bar{\zeta}^o = \bar{\rho},$$

дістанемо остаточно

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (12.16)$$

Введемо позначення  $\dot{\vec{r}}_O = \vec{v}_O \equiv \vec{v}_e$ ,  $\vec{v}_r \equiv \vec{v}_{OM}^{06} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ , де  $\vec{v}_O$  — швидкість полюса  $O$  або поступальна складова точки  $M$  тіла; її ще можна назвати переносною швидкістю точки  $M$ ,  $\vec{v}_r$  — відносна швидкість точки  $M$  у разі сферичного руху навколо полюса  $O$  або обертальна швидкість точки  $M$  тіла в разі миттєвого обертального руху навколо миттєвої осі  $O\Omega$ , що проходить через полюс  $O$ . Отже, дістанемо **теорему про абсолютну швидкість точки тіла в разі його загального руху**:

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM}^{06} = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (12.17)$$

*Швидкість точки тіла в разі загального руху дорівнює векторній сумі швидкості полюса й обертальній швидкості навколо полюса,*

або:

*абсолютна швидкість точки тіла в разі його загального руху дорівнює векторній сумі двох швидкостей: переносної поступальної швидкості, що визначається рухом полюса, і відносної швидкості цієї точки у разі відносного сферичного руху навколо полюса.*

Зауважимо, що векторна формула виражає правило паралелограма швидкостей для загального руху тіла.

Векторній рівності (12.16) відповідає три скалярні (в проекціях на абсолютні декартові осі  $O'x'y'z'$ ):

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x}'_O + \dot{x}'_r; & \dot{x}'_r &\equiv \dot{x}'_r; \\ \dot{y}' &= \dot{y}'_O + \dot{y}'_r; & \dot{y}'_r &\equiv \dot{y}'_r; \\ \dot{z}' &= \dot{z}'_O + \dot{z}'_r; & \dot{z}'_r &\equiv \dot{z}'_r, \end{aligned} \quad (12.18)$$

або на підставі формул (11.22):

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x}'_O + \dot{\phi} [\cos \theta \sin \psi (\eta \sin \phi - \xi \cos \phi) - \cos \psi (\xi \sin \phi + \eta \cos \phi)] + \\ &+ \dot{\phi} \{ \sin \psi (\eta \sin \phi - \xi \cos \phi) + \cos \psi [\zeta \sin \theta - \cos \theta (\xi \sin \phi + \eta \cos \phi)] \} + \\ &+ \dot{\theta} \sin \psi [\sin \theta (\xi \sin \phi + \eta \cos \phi) + \zeta \cos \theta]; \\ \dot{y}' &= \dot{y}'_O + \dot{\phi} [\cos \theta \cos \psi (\xi \cos \phi - \eta \sin \phi) - \sin \psi (\xi \sin \phi + \\ &+ \eta \cos \phi)] + \dot{\phi} \{ \cos \psi (\xi \cos \phi - \eta \sin \phi) + \\ &+ \sin \psi [\zeta \sin \theta - \cos \theta (\xi \sin \phi + \eta \cos \phi) + \zeta \sin \theta] \}; \\ \dot{z}' &= \dot{z}'_O = \dot{\phi} \sin \theta (\xi \cos \phi - \eta \sin \phi) + \dot{\theta} [\cos \theta (\xi \sin \phi + \eta \cos \phi) - \zeta \sin \theta]. \end{aligned} \quad (12.19)$$



Скориставшись відомими формулами (11.36), (11.39) і (11.40), виразимо проекції швидкості точки  $M$  тіла на нерухомі декартові осі через координати її в поступально рухомій системі  $xOyz$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x}'_0 + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta)z - (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)y; \\ \dot{y}' &= \dot{y}'_0 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)x - (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)z; \\ \dot{z}' &= \dot{z}'_0 + (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi)y - (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi)x, \end{aligned} \quad (12.20)$$

або, врахувавши співвідношення (11.41),

$$\begin{aligned} v_{x'} &= \dot{x}' + \dot{x}'_0 + \omega_y z - \omega_z y; \\ v_{y'} &= \dot{y}' + \dot{y}'_0 + \omega_z x - \omega_x z; \\ v_{z'} &= \dot{z}' + \dot{z}'_0 + \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \quad (12.21)$$

де  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  і  $\omega_z$  — проекції вектора миттєвої кутової швидкості  $\bar{\omega}$  на поступально рухомі осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  відповідно.

Для відшукування прискорення точки  $M$  тіла в розглядуваному разі продиференціюємо по часу обидві частини векторної рівності (12.16), що визначає швидкість цієї точки:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \ddot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \frac{d(\xi \bar{\xi}^0 + \eta \bar{\eta}^0 + \zeta \bar{\zeta}^0)}{dt},$$

або, виконавши диференціювання до кінця,

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\xi \dot{\bar{\xi}}^0 + \eta \dot{\bar{\eta}}^0 + \zeta \dot{\bar{\zeta}}^0).$$

Замінімо тут похідні від координатних ортів по часу на їхні значення відповідно до формул (4.38) і в добутих векторних добутках винесемо за дужки спільний множник  $\bar{\omega}$ . Маємо наступний вираз для шуканого прискорення:

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{\rho}, \quad (12.22)$$

де

$$\ddot{\bar{r}}_0 = \bar{a}_0 \equiv \bar{a}_e \quad (12.23)$$

є прискоренням полюса  $O$  або переносним прискоренням точки  $M$  тіла в разі поступального його руху разом із системою декартових координат  $xOyz$  відносно абсолютно нерухомих осей  $x'O'y'z'$  у припущенні, що сферичний рух тіла навколо полюса  $O$  на мить мислено припинено;

$$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} = \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} = \bar{a}_{er}^{06} \quad (12.24)$$

— це обертальна складова повного відносного прискорення  $\vec{a}_r$  точки  $M$  у разі відносного сферичного руху, який здійснюється тілом відносно поступально рухомої системи осей  $xOyz$  із початком у полюсі  $O$ ; і, нарешті,

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{v}_r = -\omega^2 \vec{h}_\omega = \vec{a}_r^{\text{д}} \quad (12.25)$$

є другою складовою повного відносного прискорення  $\vec{a}_r$ , яку називають доосьовим прискоренням точки  $M$ .

Отже, повне відносне прискорення точки  $M$  тіла під час його відносного сферичного руху відносно полюса  $O$  має векторну форму

$$\vec{a}_r^{\text{сф}} = \vec{a}_r^{\text{д}} + \vec{a}_{er}^{\text{об}}, \quad (12.26)$$

а абсолютне її прискорення

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_{\omega r} + \vec{a}_{er}; \quad \vec{a} = \vec{a}_O + \vec{a}_r^{\text{сф}} \quad (12.27)$$

(у позначеннях останніх двох прискорень залишено лише індекси « $\omega$ » і « $e$ »). Модулі прискорень

$$a_{\omega r} = |\vec{a}_{\omega r}| = \omega^2 h_\omega; \quad (12.28)$$

$$a_{er} = |\vec{a}_{er}| = \varepsilon h_e, \quad (12.29)$$

а відносне доосьове прискорення  $\vec{a}_{\omega r}$  точки  $M$  напрямлене до миттєвої осі обертання  $O\Omega$  по перпендикуляру до неї, опущеному з точки  $M$ ; відносне обертальне прискорення  $\vec{a}_{er}$  точки  $M$  напрямлене перпендикулярно до площини, в якій лежать вісь  $OE$  кутового прискорення  $\vec{\varepsilon}$  і відносний радіус-вектор  $\vec{\rho}$  точки  $M$ , у той від неї бік, що коли дивитися вздовж вектора кутового прискорення  $\vec{\varepsilon}$  навпроти його напрямку, то вектор обертального прискорення  $\vec{a}_{er}$  прагне цю площину повернути навколо осі  $OE$  кутового прискорення проти руху стрілки годинника.

Відповідно до векторної рівності (12.27) можна сформулювати **теорему про прискорення точки тіла в разі його загального руху:**

*прискорення точки тіла в разі його загального руху дорівнює векторній сумі переносного прискорення поступального руху разом із полюсом і відносних доосьового та обертального прискорень, зумовлених відносним сферичним рухом тіла навколо полюса, або прискорення точки тіла в разі загального руху дорівнює векторній сумі прискорення полюса і прискорення точки під час сферичного руху тіла навколо полюса.*

Якщо у виразі (12.27) складові  $\vec{a}$  і  $\vec{a}_O$  прискорення спроектувати на абсолютні осі системи  $xOyz$ , а прискорення  $\vec{a}_r^{\text{сф}}$  — на поступально рухомі осі системи  $xOyz$ , то можна записати такі три скалярні співвідношення для визначення прискорення точки  $M$  тіла в разі загального руху:

$$\ddot{x}' = \ddot{x}'_O + \ddot{x}_r; \quad \ddot{y}' = \ddot{y}'_O + \ddot{y}_r; \quad \ddot{z}' = \ddot{z}'_O + \ddot{z}_r. \quad (12.30)$$

Виразимо величини  $\ddot{x}_r$ ,  $\ddot{y}_r$  і  $\ddot{z}_r$  через кути Ейлера та їхні похідні для точки  $M$  тіла з власними координатами  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$ , скориставшись формулами (11.23):

$$\begin{aligned}
 a_{x_r} = \ddot{x}' = \ddot{x}'_0 + \ddot{\varphi} [\cos \theta \sin \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) - \cos \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\
 + \ddot{\psi} \{ \sin \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) + \cos \psi [\zeta \sin \theta - \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] \} + \\
 + \ddot{\theta} \sin \psi [\sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \zeta \cos \theta] + \\
 + \dot{\varphi}^2 [\cos \theta \sin \psi (\eta \cos \varphi + \xi \sin \varphi) - \cos \psi (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)] + \quad (12.31) \\
 + \dot{\psi}^2 \{ \cos \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) - \sin \psi [\zeta \sin \theta - \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] \} + \\
 + \dot{\theta}^2 [\sin \psi \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \zeta \sin \psi \sin \theta] + \\
 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} [\cos \theta \cos \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) + \sin \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\
 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \\
 + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \psi [\sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \zeta \cos \theta];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{y_r} = \ddot{y}' = \ddot{y}'_0 + \ddot{\varphi} [\cos \theta \cos \psi (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - \sin \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\
 + \ddot{\psi} \{ \cos \psi (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \sin \psi [\zeta \sin \theta - \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] \} - \\
 - \ddot{\theta} \cos \psi [\sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \zeta \cos \theta] + \\
 + \dot{\varphi}^2 [\sin \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) - \cos \theta \cos \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \quad (12.32) \\
 + \dot{\psi}^2 \{ \sin \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) - \cos \psi [\cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \zeta \sin \theta] \} + \\
 + \dot{\theta}^2 \cos \psi [\zeta \sin \theta + \cos \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\
 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} [\cos \varphi \sin \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) - \cos \psi (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] + \\
 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \psi (\eta \sin \varphi - \xi \cos \varphi) + \\
 + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \psi [\sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \zeta \cos \theta];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{z_r} = \ddot{z}' = \ddot{z}'_0 + \ddot{\varphi} \sin \theta (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \ddot{\theta} [\sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \\
 - \zeta \sin \theta] - \dot{\varphi}^2 \sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \dot{\theta}^2 \sin \theta (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \quad (12.33) \\
 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \varphi (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi).
 \end{aligned}$$

Векторній рівності (12.22) з урахуванням (12.25) відповідають три скалярних у проєкціях на відповідні декартові осі:

$$\begin{aligned}
 a_{x_r} = \ddot{x}'_0 + \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_y \dot{z} - \omega_z \dot{y}; \\
 a_{y_r} = \ddot{y}'_0 + \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_z \dot{x} - \omega_x \dot{z}; \\
 a_{z_r} = \ddot{z}'_0 + \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_x \dot{y} - \omega_y \dot{x}, \quad (12.34)
 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} a_{x'} &= \ddot{x}'_0 + \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y - \omega_z z) - \omega^2 x; \\ a_{y'} &= \ddot{y}'_0 + \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y - \omega_z z) - \omega^2 y; \\ a_{z'} &= \ddot{z}'_0 + \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y - \omega_z z) - \omega^2 z. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Тут кутові кінематичні величини  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  та  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  визначаються за формулами (11.41) і (11.79).

На рис. 12.3 наведено геометричну інтерпретацію векторних формул (12.17) і (12.27), що виражають теореми про абсолютні швидкість і прискорення точки тіла в разі загального руху. На рис. 12.3, *a* зображено для точки *M* тіла паралелограм швидкостей, а на рис. 12.3, *б* — чотирикутник прискорень.

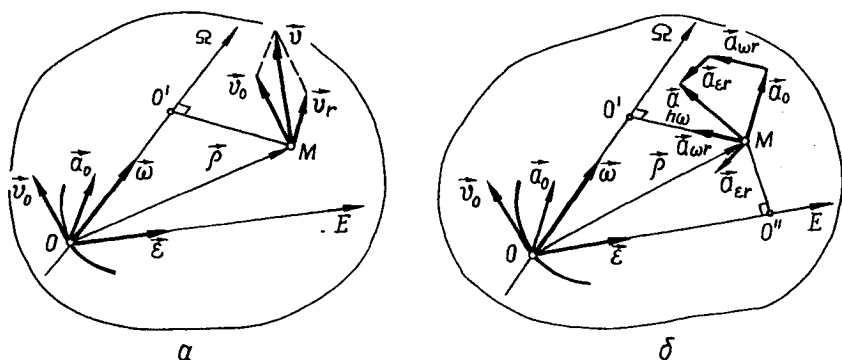


Рис. 12.3

**Гвинтовий рух.** Досі загальний рух тіла вважали поєднанням поступального, що визначається рухом полюса *O*, і сферичного навколо цього полюса. Це — один погляд на кінематику загального руху тіла. З іншого боку, такий вид руху розглядають як неперервну низку здійснюваних у часі послідовних так званих миттєвих гвинтових рухів, кожний з яких є одночасним накладанням двох миттєвих рухів — обертального навколо так званої гвинтової осі і поступального, який відбувається паралельно гвинтовій осі.

Нехай у разі деякого загального руху тіла вибраний полюс *O* має швидкість  $\vec{v}_0$ , а миттєва кутова швидкість під час руху тіла навколо полюса становить  $\vec{\omega}$ , кут між векторами  $\vec{v}_0$ ,  $\vec{\omega}$  дорівнює  $\alpha$  (рис. 12.4). У даний момент часу *t* поступальна швидкість  $\vec{v}_0$  для всіх точок тіла однакова як за модулем, так і за напрямом. На ці поступальні швидкості точок накладаються в даний момент часу

обертальні швидкості  $\vec{v}_r^{ob}$ , зумовлені сферичним рухом тіла навколо полюса  $O$ , який є обертальним навколо миттєвої осі  $O\Omega$  із кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Вектори обертальних швидкостей  $\vec{v}_r^{ob}$  точок тіла залежно від положення точок відносно миттєвої осі  $O\Omega$  мають які завгодно напрями і модулі та розташовані в площинах, перпендикулярних до миттєвої осі обертання  $O\Omega$ .

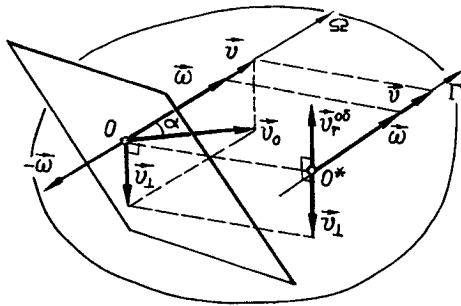


Рис. 12.4

Поступальну швидкість  $\vec{v}_0$  усіх точок тіла розкладемо на дві складові  $\vec{v}$  і  $\vec{v}_\perp$  у взаємно перпендикулярних напрямках. Напрямок складової  $\vec{v}$  вибрано паралельним миттєвій осі обертання тіла  $O\Omega$ . Отже, маємо векторну рівність

$$\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_\perp, \quad (12.36)$$

де модулі складових

$$v = v_0 \cos \alpha, \quad v_\perp = v_0 \sin \alpha. \quad (12.37)$$

Цілком зрозуміло, що в тілі в даний момент часу існує така пряма — позначимо її  $O^*\Gamma$ , — для всіх точок якої поступальна складова швидкість  $\vec{v}_\perp$  і швидкість обертальна  $\vec{v}_r^{ob}$  мають однаковий модуль, але протилежно напрямлені, тому

$$\vec{v}_\perp = \vec{v}_r^{ob}.$$

Якщо відстань між осями  $O\Omega$  і  $O^*\Gamma$  відповідає відрізку  $OO^*$ , то його довжина визначається співвідношенням

$$OO^* = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega}. \quad (12.38)$$

Оскільки сума швидкостей

$$\vec{v}_\perp + \vec{v}_r^{ob} = 0$$

для всіх точок осі  $O^*\Gamma$ , то ці точки мають лише поступальну складову швидкість

$$v = v_0 \cos \alpha, \quad (12.39)$$

тому ця вісь  $O^*\Gamma$  в даний момент часу не обертається навколо миттєвої осі  $O\Omega$ .

Отже, вона є тією миттєвою віссю, навколо якої тіло здійснює в даний момент часу обертальний рух і водночас зі швидкістю (12.39) поступально переміщується паралельно осі  $O\Gamma$ . Дана вісь  $O\Gamma$  називається *миттєвою гвинтовою віссю тіла*.

Знайдемо кутову швидкість, з якою тіло в даний момент часу здійснює миттєве обертання навколо гвинтової осі  $O\Gamma$ . Для цього поступальну складову руху тіла зі швидкістю

$$\vec{v}_\perp = v_o \sin \alpha \quad (12.40)$$

замінімо парюю обертань  $(\vec{\omega}, -\vec{\omega})$  з моментом

$$\vec{v}_\perp = \overrightarrow{OO^*} \times \vec{\omega}. \quad (12.41)$$

Плече цієї пари  $(\vec{\omega}, -\vec{\omega})$  є відстанню між осями  $O\Omega$  і  $O\Gamma$ , тому кутові швидкості  $-\vec{\omega}$  і  $\vec{\omega}$ , розташовані на осі  $O\Omega$ , дають в сумі нуль. Кутова швидкість  $\vec{\omega}$  збігається з гвинтовою віссю  $O\Gamma$ .

Отже, доведемо, що в разі загального руху тіла, що характеризується швидкістю  $\vec{v}_o$  полюса  $O$  і миттєвою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  під час сферичного руху навколо полюса, які утворюють між собою довільний кут  $\alpha$ , у кожний момент часу існує гвинтова вісь  $O\Gamma$ , навколо якої тіло здійснює миттєвий обертальний рух з такою самою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  і водночас переміщується миттєво поступально, паралельно гвинтовій осі зі швидкістю  $\vec{v}$ , яка є прямокутною складовою швидкості полюса  $O$  (рис. 12.5).

Зауважимо, що завдання загального руху тіла через поступальний разом із полюсом і сферичний навколо полюса принципово не відрізняється від подання розглядуваного руху як миттєвого гвинтового. В обох випадках маємо по суті справу із накладанням двох видів руху миттєвого поступального і миттєвого сферичного. Проте в останньому разі представлення загального руху тіла є простішим, оскільки швидкість поступального руху і кутова швидкість обертального руху колінеарні між собою.

Практичне значення має так званий *перманентний гвинтовий рух тіла*, коли кінематичні параметри  $\vec{v}$  і  $\vec{\omega}$  є сталими під час руху тіла. Прикладом такого руху є рух гайки при її загвинчуванні на болт.

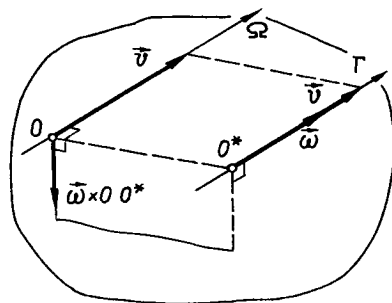


Рис. 12.5

**Перманентний гвинтовий рух.** У цьому разі всі точки тіла мають однакову поступальну швидкість  $\vec{v}$ , паралельну гвинтовій осі  $O\Gamma$ . Крім того, на поступальний рух зі швидкістю  $\vec{v}$  накладається обертальний рух тіла навколо гвинтової осі із кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . У випадку перманентного гвинтового руху, як уже було зазначено, величини  $\vec{v}$  і  $\vec{\omega}$  з часом не змінюються.

Розглянемо кінематику даного виду гвинтового руху: введемо нерухому декартову систему осей  $x'O'y'z'$ , вісь якої  $O'z'$  напрямимо по гвинтовій осі, а інші дві осі  $O'x'$  і  $O'y'$ , як показано на рис. 12.6.

У цій задачі за відомими кінематичними параметрами перманентного гвинтового руху  $\vec{v}$ ,  $\vec{\omega}$  дослідимо рух окремої точки тіла, тобто траєкторію, швидкість, дотичне і нормальне прискорення, а також повне прискорення.

Задачу можна розв'язати двома способами. Перший полягає в тому, що на самому початку запишемо рівняння руху точки, наприклад, в декартових координатах і на підставі цих рівнянь проведемо розрахунки. Другий спосіб пов'язаний із застосуванням теорії кінематики загального руху тіла.

Спочатку застосуємо перший спосіб. Нехай у початковий момент часу  $t_0 = 0$  деяка точка тіла  $M$  у разі перманентного гвинтового руху лежить на осі  $O'x'$  у положенні  $M_0$  на відстані  $O'M_0$  від осі  $O'z'$ , тобто в нерухомій декартовій площині  $x'O'z'$ .

Вважаємо, що в початковому положенні точки  $M_0$  з нерухомою площиною збігається інша площина  $\Pi$  — рухома, незмінно зв'язана з тілом, а отже, і з розглядуваною точкою  $M$  тіла.

За деякий час  $t_0$  після нульового (початкового), внаслідок одночасно здійснюваних тілом у разі його перманентного гвинтового руху поступальних переміщень  $z' = vt$ , паралельно гвинтовій осі зі сталою швидкістю  $v$ , і повороту на кут  $\varphi = \omega t$  навколо гвинтової осі зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$  точка  $M$  з початкового положення  $M_0$  на осі  $O'x'$  переміститься у положення  $M$  з координатами  $x', y', z'$  (рис. 12.6). Рухома півплощина  $\Pi$  разом із точкою  $M$  переміститься у додатному напрямі осі  $O'z'$  на відстань  $z' = vt$  і водночас повернеться навколо осі  $O'z'$  проти руху стрілки годинника на кут  $\varphi = \omega t$  відносно нерухомої площини  $x'O'z'$ .

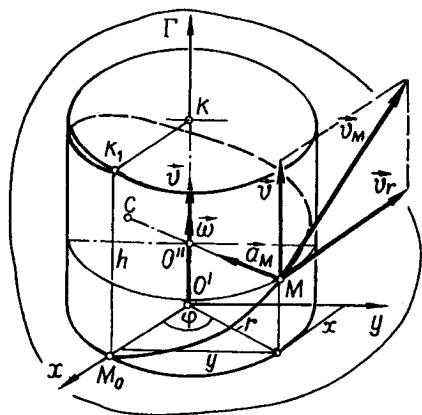


Рис. 12.6

Оскільки відстань розглядуваної точки  $M$  тіла від гвинтової осі  $O' \Gamma (O'z')$  з часом не змінюється, то залежність декартових координат від часу має вигляд

$$\begin{aligned}x' &= r \cos \omega t, \\y' &= r \sin \omega t, \\z' &= vt.\end{aligned}\tag{12.42}$$

Співвідношення (12.42) є рівняннями руху окремої точки  $M$  тіла під час перманентного гвинтового руху в координатній формі, які показують, що точка  $M$  рухається по круговій циліндричній поверхні з радіусом  $r = O'M_0$  по кривій, яка називається *гвинтовою лінією*.

Рівняння гвинтової лінії в координатах  $x'$ ,  $y'$  і  $z'$  знайдемо, якщо за допомогою третього співвідношення (12.42) з перших двох виключимо час  $t$ :

$$x' = r \cos\left(\frac{\omega}{v}z'\right); \quad y' = r \sin\left(\frac{\omega}{v}z'\right).\tag{12.43}$$

Перше рівняння визначає циліндричну поверхню з напрямною, яка є косинусоїдою, і твірними, паралельними декартовій осі  $O'y'$ . Друге рівняння (12.43) — циліндрична поверхня з паралельними осі  $O'x'$  твірними і напрямною синусоїдою. Перетин цих двох циліндричних поверхонь дає гвинтову лінію.

Величину

$$\frac{v}{\omega} = p\tag{12.44}$$

називають *параметром гвинта*. Через параметр  $p$  рівняння (12.43) подають у вигляді

$$x' = r \cos \frac{z'}{p}; \quad y' = r \sin \frac{z'}{p}.\tag{12.45}$$

Рухом півплощина  $\Pi$  разом із точкою  $M$  і тілом здійснює повний оберт під час гвинтового руху за період

$$T = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}\tag{12.46}$$

і водночас зміщується вздовж гвинтової осі від площини  $x'O'y'$  на відстань

$$h = z' = v \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi p.\tag{12.47}$$

Ця величина називається *кроком гвинта* та показує, яке зміщення по твірній циліндричній поверхні набула точка тіла в разі гвинтового руху за один повний поворот тіла навколо гвинтової осі (за один



оберт гайки при загвинчуванні її зміщення вздовж осі болта дорівнює кроку гвинта  $h$ ).

Якщо циліндричну поверхню кругового циліндра радіусом  $r$ , що відповідає відстані рухомої точки  $M$  тіла від гвинтової осі, і висотою  $H = O'K$ , що дорівнює кроку гвинта  $h$  (12.47), з однією віткою гвинтової лінії на ній, розвернути у площину, то вона має вигляд площі прямокутника зі сторонами

$$AB = 2\pi r, \quad BC = h = 2\pi r \quad (12.48)$$

і діагоналлю  $AC$ , яка є випрямленою віткою гвинтової лінії (рис. 12.7). З прямокутного трикутника запишемо

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{2\pi r}; \quad \sin \gamma = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (2\pi r)^2}}, \quad (12.49)$$

це — кут підйому гвинтової лінії.

Визначимо швидкості точки тіла в разі гвинтового руху. Для цього застосуємо положення і формули кінематики точки. Обчислимо похідні по часу від величин (12.42) і таким чином дістанемо проекції швидкості точки  $M$  на нерухомі декартові осі:

$$\begin{aligned} v_{x'} &= \dot{x}' = -r \omega \sin \omega t; \\ v_{y'} &= \dot{y}' = r \omega \cos \omega t; \\ v_{z'} &= \dot{z}' = v = \text{const}, \end{aligned} \quad (12.50)$$

на підставі яких знайдемо модуль швидкості точки:

$$\begin{aligned} v_M &= \sqrt{(\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 + (\dot{z}')^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + v^2} = \sqrt{v^2 + r^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (12.51)$$

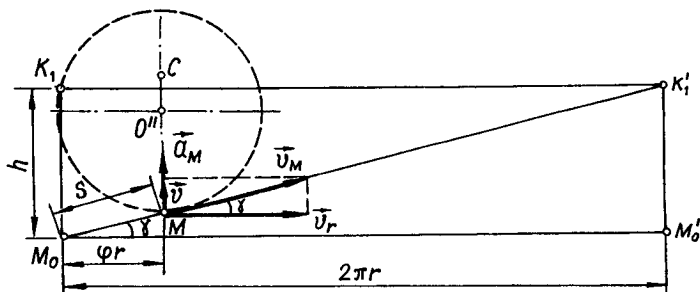


Рис. 12.7

Тоді напрям шуканої швидкості визначається напрямними косинусами:

$$\begin{aligned}\cos \angle(\bar{v}_M, x') &= \frac{v_{x'}}{v_M} = -\frac{r \omega}{\sqrt{v^2 + r^2 \omega^2}} \sin \omega t; \\ \cos \angle(\bar{v}_M, y') &= \frac{v_{y'}}{v_M} = \frac{r \omega}{\sqrt{v^2 + r^2 \omega^2}} \cos \omega t; \\ \cos \angle(\bar{v}_M, z') &= \frac{v_{z'}}{v_M} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + r^2 \omega^2}} = \text{const.}\end{aligned}\quad (12.52)$$

Звернемо увагу на те, що кут між вектором швидкості точки і гвинтовою віссю лишається під час руху тіла незмінним:

$$\angle(\bar{v}_M, z') = \frac{\pi}{2} - \gamma = \text{const},$$

оскільки

$$\cos \angle(\bar{v}_M, z') = \sin \gamma = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}.$$

Продиференціювавши по часу вирази (12.50), дістанемо проекції прискорення точки  $M$  тіла для випадку гвинтового руху на нерухомі осі системи  $x'O'y'z'$ :

$$\begin{aligned}a_{x'} &= \ddot{x}' = -r \omega^2 \cos \omega t; \\ a_{y'} &= \ddot{y}' = -r \omega^2 \sin \omega t; \\ a_{z'} &= \ddot{z}' = 0.\end{aligned}\quad (12.53)$$

Тоді модуль вектора  $\bar{a}_M$  і його напрямні косинуси:

$$\begin{aligned}a_M &= \sqrt{a_{x'}^2 + a_{y'}^2 + a_{z'}^2} = \sqrt{(r \omega^2)^2} = r \omega^2 = \text{const}; \\ \cos \angle(\bar{a}_M, x') &= \frac{a_{x'}}{a_M} = -\cos \omega t; \quad \angle(\bar{a}_M, x') = \pi - \omega t; \\ \cos \angle(\bar{a}_M, y') &= \frac{a_{y'}}{a_M} = -\sin \omega t; \quad \angle(\bar{a}_M, y') = \frac{\pi}{2} + \omega t; \\ \cos \angle(\bar{a}_M, z') &\equiv 0; \quad \angle(\bar{a}_M, z') = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\quad (12.54)$$

Значення кутів (12.55) показують, що прискорення точки тіла в разі перманентного гвинтового руху, яке за модулем не змінюється з часом, у будь-який момент часу напрямлене по радіусу циліндричної поверхні в бік гвинтової осі  $O' \Gamma$ .

Звернемо увагу на радіус кривизни гвинтової лінії, яка в розглядуваному випадку гвинтового руху тіла є траєкторією його окремої точки. Радіус кривизни  $\rho$  можна визначити за відомою з кінематики точки формулою

$$\rho = \frac{v_M^2}{a_{Mn}}, \quad (12.55)$$

де  $v_M$  — швидкість точки (12.51),  $a_{Mn}$  — нормальне прискорення точки  $M$ .

Нормальне прискорення знайдемо з формули повного прискорення точки при натуральному способі задання руху:

$$a_{Mn} = \sqrt{a_{Mn}^2 + a_{Mt}^2}. \quad (12.56)$$

Залежність дугової координати точки  $M$  від часу можна легко встановити з рис. 12.7, якщо початком її відліку взяти початкове положення  $M_0$  рухомої точки тіла на гвинтовій лінії:

$$s = \sqrt{\omega^2 r^2 t^2 + v^2 t^2} = t \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}.$$

Тоді дотичне прискорення точки  $M$

$$a_{Mt} = \ddot{s} \equiv 0,$$

а нормальне

$$a_{Mn} = \sqrt{a_{Mn}^2 - a_{Mt}^2} = \omega^2 r = a_M = \text{const}. \quad (12.57)$$

Отже, нормальне прискорення точки тіла в разі перманентного гвинтового руху дорівнює повному її прискоренню.

За необхідними даними для визначення радіуса кривизни гвинтової лінії, на підставі формули (12.55) дістанемо

$$\rho = \frac{v^2 + (\omega^2 r)}{\omega^2 r} = \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \frac{1}{r} + r = \frac{\rho^2}{r} + r = r(1 + \text{tg}^2 \gamma). \quad (12.58)$$

Звідси бачимо, що центр кривизни гвинтової лінії в даному положенні на ній розглядуваної точки  $M$  лежить на продовженні радіуса  $r$ , що сполучає положення на траєкторії точки  $M$  і центр  $O''$  кола на гвинтовій осі, по якому рухалась би точка  $M$ , якби поступальна швидкість під час гвинтового руху мала нульове значення. Зауважимо, що площа кола кривизни у кожній точці гвинтової лінії з декартовою площиною  $x'O'y'$  становить один і той самий кут (12.49).

Для визначення аналогічних кінематичних характеристик точок тіла в разі перманентного гвинтового руху скористаємося теоремами (12.17) і (12.27). У формулі (12.17) теореми про абсолютну швидкість точки в разі загального руху тіла стосовно перманентного гвинтового руху кут між складовими  $\vec{v}_e$  і  $\vec{v}_r$  є прямим. Отже,

$$v_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{v^2 + (\omega r)^2}.$$

На підставі (12.27) дістанемо

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{or} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}; \quad a_M = \omega^2 r,$$

оскільки  $\vec{a}_{en} = 0$ , бо  $\vec{\varepsilon} \equiv 0$  і  $\vec{a}_e = \vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ .

Отже, абсолютне прискорення точки  $M$  тіла в розглядуваному разі дорівнює її доосьовому прискоренню, напрямленому в бік осі  $O'\Omega$  кутової швидкості  $\vec{\omega}$  по перпендикуляру до гвинтової осі, який її перетинає.

**Теорема Коріоліса про абсолютне прискорення матеріальної точки у разі довільного переносного руху.** Раніше було розглянуто теорему Коріоліса для часткового випадку переносного руху, яким є обертальний рух навколо нерухомої осі. Тепер, на підставі кінематики загального руху введемо теорему Коріоліса про абсолютне прискорення для загального випадку переносного руху, яким є загальний рух тіла.

Нехай маємо абсолютно нерухому декартову систему координат  $x'O'y'z'$  і тіло, що відносно неї здійснює заданий загальний рух. Крім нерухомої системи координат введемо рухому  $\xi O\eta\zeta$ , незмінно зв'язану з тілом і яка разом із ним виконує відомий загальний рух щодо нерухомих осей  $x'O'y'z'$  (рис. 12.8).

Далі розглянемо точку  $M$ , яка може бути матеріальною або просто геометричною і для якої встановимо теорему про абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в разі складного руху. Вивчаючи складний рух точки  $M$ , уявимо, що абсолютно тверде тіло, яке разом із системою координат  $\xi O\eta\zeta$  рухається, для рухомої точки  $M$  є проникним. Це означає, що тим самим введено в розгляд ідеалізовану картину переносного руху, коли рухоме матеріальне тіло замінюється на абстрактний простір, з яким незмінно зв'язана введена система координат  $\xi O\eta\zeta$  і який разом із нею здійснює відносно абсолютного простору загальний рух.

Крім рухомої точки  $M$ , яка перебуває в будь-якому відносному русі щодо рухомої системи координат  $\xi O\eta\zeta$ , розглянемо також іншу точку  $M^*$ , що незмінно зв'язана з введеним уявним рухомим простором (системою  $\xi O\eta\zeta$ ) і з якою в кожний момент часу збігаються розглядувана у випадку складного руху точка  $M$ .

Виводячи теорему про абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки  $M$  у разі складного руху в найзагальнішій постановці задані, скористаємося векторним способом. Отже, введемо три радіуси-вектори:  $\vec{r}_O$  визначає положення початку  $O$  рухомої системи координат  $\xi O\eta\zeta$ ,  $\rho$  — положення рухомої точки  $M$  під час відносного руху щодо системи  $\xi O\eta\zeta$  і радіус-вектор  $\vec{r}$  — положення рухомої точки  $M$  в разі абсолютного її руху.

Для випадку складного руху точки радіуси-вектори  $\vec{r}_O$ ,  $\vec{\rho}$  і  $\vec{r}$  є векторними функціями часу. Вважаємо, що  $\vec{\rho}(t)$  і  $\vec{r}_O(t)$  є наперед відомими-

ми залежностями від часу, а також відома миттєва кутова швидкість  $\bar{\omega}$  у разі сферичного руху навколо полюса  $O$  (початку  $O$  рухомих координат  $\xi O\eta\zeta$ ).

Введемо одиничні вектори  $\bar{\xi}^\circ, \bar{\eta}^\circ$  і  $\bar{\zeta}^\circ$  осей системи  $\xi O\eta\zeta$ , які при здійсненні системою  $\xi O\eta\zeta$  переносного сферичного руху є векторними функціями часу:  $\bar{\xi}^\circ = \bar{\xi}^\circ(t), \bar{\eta}^\circ = \bar{\eta}^\circ(t), \bar{\zeta}^\circ = \bar{\zeta}^\circ(t)$ . Також введемо орти  $\bar{i}', \bar{j}'$  і  $\bar{k}'$  нерухомої системи координат  $x'O'y'z'$ , які, на відміну від перших ортів, у разі складного руху є сталими величинами. Тоді, якщо швидкість і прискорення полюса  $O$  позначити відповідно  $\bar{v}_o$  і  $\bar{a}_o$ , а радіус-вектор  $\bar{r}_o$  розкласти по ортах нерухомих осей, то

$$\bar{v}_o = \dot{\bar{r}}_o = \dot{x}'_o \bar{i}' + \dot{y}'_o \bar{j}' + \dot{z}'_o \bar{k}'; \quad (12.59)$$

$$\bar{a}_o = \ddot{\bar{r}}_o = \ddot{x}'_o \bar{i}' + \ddot{y}'_o \bar{j}' + \ddot{z}'_o \bar{k}'. \quad (12.60)$$

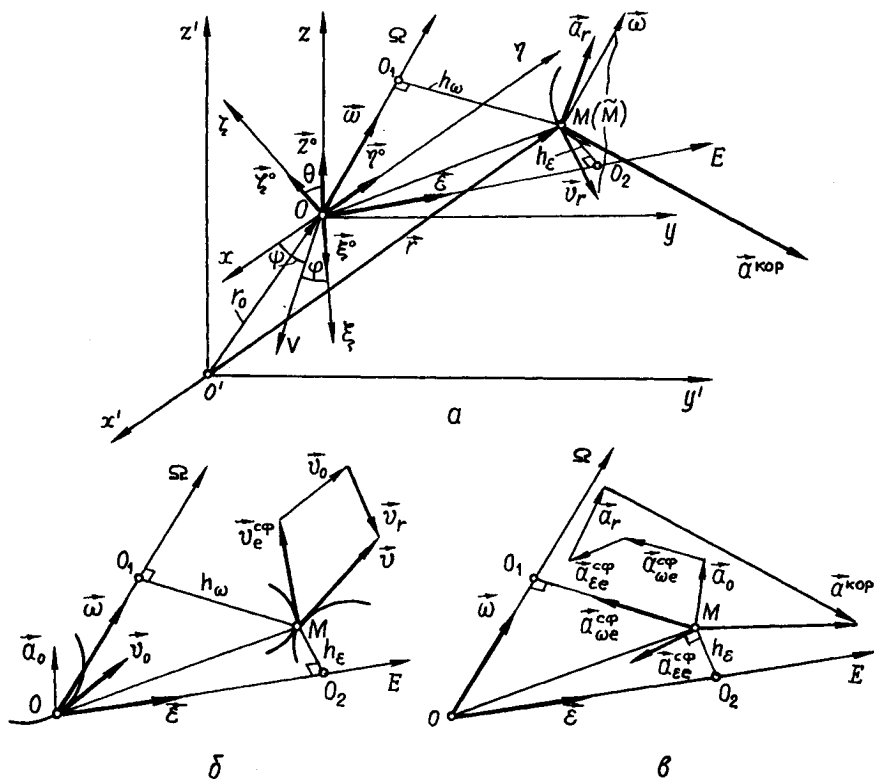


Рис. 12.8

Щоб з'ясувати суть кінематичних величин (12.59) і (12.60) у разі складного руху точки  $M$ , введено третю декартову систему  $x'O'y'z'$  з початком у полюсі  $O$ , яка рухається поступально відносно нерухомої системи  $x'O'y'z'$ ; її осі весь час лишаються паралельними відповідним нерухомим осям системи  $x'O'y'z'$ . Далі уявимо, що з поступально рухомою системою координат  $xOyz$  незмінно зв'язаний деякий простір, усі точки якого мають швидкість і прискорення, які визначаються рівностями (12.59) і (12.60). Позначимо точки поступально рухомого простору, з якими під час складного руху збігаються рухома точка  $M$ , через  $\bar{M}$ , швидкість і прискорення якої

$$\bar{v}_{\bar{M}} = \bar{v}_O, \quad \bar{a}_{\bar{M}} = \bar{a}_O \quad (12.61)$$

називають відповідно поступальною переносною швидкістю рухомої точки  $M$  і поступальним переносним прискоренням точки  $M$ , тобто

$$\bar{v}_{M}^{\text{пост}} = \bar{v}_{\bar{M}} = \bar{v}_O, \quad \bar{a}_{M}^{\text{пост}} = \bar{a}_{\bar{M}} = \bar{a}_O. \quad (12.62)$$

Отже, швидкість і прискорення  $\bar{v}_O$  і  $\bar{a}_O$  полюса  $O$  є відповідно переносною поступальною швидкістю і переносним поступальним прискоренням точки  $M$  в разі її складного руху. Переносна поступальна швидкість і переносне поступальне прискорення точки  $M$  в разі складного руху дорівнюють відповідно швидкості і прискоренню тієї точки  $\bar{M}$  поступально рухомого простору (системи координат  $xOyz$ ), з якою під час складного руху збігається точка  $M$ .

Отже, з загального руху системи координат  $\xi O\eta\zeta$  разом із незмінно зв'язаним з нею відповідним простором виділено поступальний рух зі швидкістю  $\bar{v}_O$  і прискоренням  $\bar{a}_O$ . Далі належить розглянути другу складову загального руху системи  $\xi O\eta\zeta$  — її сферичний рух навколо полюса  $O$  відносно поступально рухомої системи координат  $xOyz$ .

Позначимо  $M^*$  — точки простору, який разом із осями здійснює зазначений сферичний рух. Тоді швидкість і прискорення цих точок  $M^*$  відносно поступально рухомої системи координат  $xOyz$  на підставі формул (11.53) і (11.70)

$$\bar{v}_{M^*}^{\text{сф}} = \bar{\omega} \times \bar{\rho}; \quad (12.63)$$

$$\bar{a}_{M^*}^{\text{сф}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{\rho}, \quad (12.64)$$

де  $\bar{\omega}$  — кутова швидкість сферичного руху навколо полюса  $O$ ;  $\bar{\varepsilon}$  — кутове прискорення сферичного руху; вектор  $\bar{\omega}$  напрямлений по миттєвій осі обертання  $O\Omega$  осей  $\xi O\eta\zeta$ , яка проходить через полюс  $O$ , а вектор  $\bar{\varepsilon}$  напрямлений по осі  $OE$  кутового прискорення, що також проходить через початок систем координат  $xOyz$  і  $\xi O\eta\zeta$  та не збігається з віссю кутової швидкості.

Швидкість  $\bar{v}_{M^*}^{cf}$  і прискорення  $\bar{a}_{M^*}^{cf}$ , що в даний момент часу має точка  $M^*$  (внаслідок сферичного руху системи  $\xi O\eta\zeta$ ), з якою збігається під час складного руху точка  $M$ , називається відповідно переносною швидкістю

$$\bar{v}_{Me}^{cf} = \bar{v}_{M^*}^{cf} \quad (12.65)$$

і переносним прискоренням

$$\bar{a}_{Me}^{cf} = \bar{a}_{M^*}^{cf} \quad (12.66)$$

сферичного руху.

Нарешті, положення рухомої точки  $M$  відносно рухомої системи координат  $\xi O\eta\zeta$  визначається радіусом-вектором  $\rho$ . Розкладемо його по ортах  $\bar{\xi}^\circ, \bar{\eta}^\circ$  і  $\bar{\zeta}^\circ$ :

$$\rho = \xi \bar{\xi}^\circ + \eta \bar{\eta}^\circ + \zeta \bar{\zeta}^\circ. \quad (12.67)$$

Якщо візьмемо першу і другу похідні по часу від обох частин рівності (12.67) у припущенні, що вектори  $\bar{\xi}^\circ, \bar{\eta}^\circ$  і  $\bar{\zeta}^\circ$  не змінюються, тобто умовно припинемо сферичний рух системи  $\xi O\eta\zeta$ , то дістанемо відносну швидкість

$$\bar{v}_{Mr} = \dot{\xi} \bar{\xi}^\circ + \dot{\eta} \bar{\eta}^\circ + \dot{\zeta} \bar{\zeta}^\circ \quad (12.68)$$

і відносне прискорення

$$\bar{a}_{Mr} = \ddot{\xi} \bar{\xi}^\circ + \ddot{\eta} \bar{\eta}^\circ + \ddot{\zeta} \bar{\zeta}^\circ \quad (12.69)$$

рухомої точки.

Підсумуємо кінематику розглядуваного відносного руху точки  $M$ : траєкторія, швидкість і прискорення точки  $M$  під час її руху відносно рухомої системи координат  $\xi O\eta\zeta$  (у припущенні, що поступальну і сферичну складові руху мислено припинено), називається відотною траєкторією, відотною швидкістю і відносним прискоренням відповідно.

Зауважимо, що траєкторія, швидкість і прискорення розглядуваного руху точки  $M$  відносно абсолютно нерухомої системи координат  $x'O'y'z'$  називається відповідно абсолютною траєкторією, абсолютною швидкістю і абсолютним прискоренням. Запишемо вирази для абсолютної швидкості  $\bar{v}_a$  і абсолютного прискорення  $\bar{a}_a$  точки  $M$ , скориставшись розкладом радіуса-вектора  $\bar{r}$  цієї точки по ортах  $\bar{\xi}^\circ, \bar{\eta}^\circ$  і  $\bar{\zeta}^\circ$  координатних осей системи  $x'O'y'z'$ :

$$\bar{r} = x' \bar{i}' + y' \bar{j}' + z' \bar{k}'. \quad (12.70)$$

Для цього продиференціюємо по часу два рази обидві частини рівності (12.70):

$$\bar{v}_{M_a} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}' \bar{i}' + \dot{y}' \bar{j}' + \dot{z}' \bar{k}'; \quad (12.71)$$

$$\vec{a}_{M_a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}' \vec{i}' + \ddot{y}' \vec{j}' + \ddot{z}' \vec{k}'. \quad (12.72)$$

Абсолютний рух точки  $M$  розглянемо як складний, тобто такий, що є наслідком накладання відносного і двох переносних рухів — поступального переносного й сферичного переносного. Вираження абсолютної швидкості точки  $M$  у разі складного руху через відносну і переносні швидкості встановлюється теоремою про абсолютну швидкість.

**Теорема про абсолютну швидкість:** абсолютна швидкість точки  $M$  в разі складного руху дорівнює векторній сумі переносної поступальної швидкості, що є сумою швидкості полюса, переносної швидкості, зумовленої сферичним рухом навколо полюса, і відносної швидкості:

$$\vec{v}_{Ma} = \vec{v}_{Me}^{\text{пост}} + \vec{v}_{Me}^{\text{сф}} + \vec{v}_{Mr}. \quad (12.73)$$

Накладання двох рухів — відносного і переносного сферичного призводить до додаткових змін напрямів векторів відносної і переносної швидкостей точки у випадку складного руху. Ці зміни, які виявляються спостерігачем, незмінно зв'язаним з абсолютно нерухомою системою координат  $x'O'y'z'$  в напрямках відносної і переносної швидкостей, і які є наслідком взаємних впливів відносного на переносний сферичний рух і переносного сферичного на відносний, визначаються додатковим прискоренням — прискоренням Коріоліса. Отже, під час складного руху точка  $M$ , крім таких складових прискорень, як переносне поступальне та переносне, зумовлене сферичним рухом, і відносне прискорення має прискорення Коріоліса. Векторний зв'язок абсолютного прискорення точки у випадку складного руху з іншими зазначеними складовими прискореннями описує теорема Коріоліса.

**Теорема про абсолютне прискорення (теорема Коріоліса):** абсолютне прискорення точки в разі складного руху дорівнює векторній сумі відносного прискорення, переносного поступального прискорення, що складається з прискорення полюса, переносного прискорення, зумовленого сферичним рухом навколо полюса, і прискорення Коріоліса:

$$\vec{a}_{Ma} = \vec{a}_{Mr} + \vec{a}_{Me}^{\text{пост}} + \vec{a}_{Me}^{\text{сф}} + \vec{a}_M^{\text{кор}}. \quad (12.74)$$

Якщо другу і третю складові в рівності (12.74) розглянути в сумі

$$\vec{a}_{Me} = \vec{a}_{Me}^{\text{пост}} + \vec{a}_{Me}^{\text{сф}}; \quad (12.75)$$

$$\vec{a}_{Me}^{\text{сф}} = \vec{a}_{\omega e}^{\text{об}} + \vec{a}_{\omega e}^{\text{л}}, \quad (12.76)$$

то теорему можна сформулювати інакше:

абсолютне прискорення точки під час складного руху для загального випадку переносного руху дорівнює векторній сумі відносного



прискорення, переносного прискорення і прискорення Коріоліса (індекси «М», «а» відкинута):

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}^{\text{кор}}. \quad (12.77)$$

Доведемо теорему про абсолютну швидкість. У разі складного руху точки М радіуси-вектори  $\bar{r}$ ,  $\bar{r}_O$  і  $\bar{\rho}$  пов'язані між собою:

$$\bar{r} = \bar{r}_O + \bar{\rho}.$$

Запишемо цю рівність інакше з урахуванням (12.67):

$$\bar{r} = \bar{r}_O + \xi \bar{\xi}^\circ + \eta \bar{\eta}^\circ + \zeta \bar{\zeta}^\circ.$$

Тут усі векторні величини є векторними функціями часу  $t$ . Продиференціюємо останню рівність по часу:

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_O + \dot{\xi} \bar{\xi}^\circ + \dot{\eta} \bar{\eta}^\circ + \dot{\zeta} \bar{\zeta}^\circ + \xi \dot{\bar{\xi}}^\circ + \eta \dot{\bar{\eta}}^\circ + \zeta \dot{\bar{\zeta}}^\circ. \quad (12.78)$$

На підставі формул Ейлера (11.53) суму останніх трьох членів запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \xi \dot{\bar{\xi}}^\circ + \eta \dot{\bar{\eta}}^\circ + \zeta \dot{\bar{\zeta}}^\circ &= \xi(\bar{\omega} \times \bar{\xi}^\circ) + \eta(\bar{\omega} \times \bar{\eta}^\circ) + \zeta(\bar{\omega} \times \bar{\zeta}^\circ) = \\ &= \bar{\omega} \times (\xi \bar{\xi}^\circ + \eta \bar{\eta}^\circ + \zeta \bar{\zeta}^\circ) = \bar{\omega} \times \bar{\rho}. \end{aligned}$$

Підставимо в основну рівність (12.78), тоді

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_O + \dot{\xi} \bar{\xi}^\circ + \dot{\eta} \bar{\eta}^\circ + \dot{\zeta} \bar{\zeta}^\circ + \bar{\omega} \times \bar{\rho}.$$

На підставі формул (12.59), (12.68), (12.62) і (12.63) дістанемо остаточно

$$\bar{v}_{Ma} = \bar{v}_{Me}^{\text{пост}} + \bar{v}_{Me}^{\text{сф}} + \bar{v}_{Me}.$$

Теорему доведено.

Доведемо теорему Коріоліса. Запишемо (12.78) у вигляді

$$\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times (\xi \bar{\xi}^\circ + \eta \bar{\eta}^\circ + \zeta \bar{\zeta}^\circ) + \dot{\xi} \bar{\xi}^\circ + \dot{\eta} \bar{\eta}^\circ + \dot{\zeta} \bar{\zeta}^\circ.$$

Продиференціюємо по часу:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \dot{\bar{\omega}} \times (\xi \bar{\xi}^\circ + \eta \bar{\eta}^\circ + \zeta \bar{\zeta}^\circ) + \bar{\omega} \times [(\dot{\xi} \bar{\xi}^\circ + \dot{\eta} \bar{\eta}^\circ + \dot{\zeta} \bar{\zeta}^\circ) + \\ &+ (\xi \dot{\bar{\xi}}^\circ + \eta \dot{\bar{\eta}}^\circ + \zeta \dot{\bar{\zeta}}^\circ)] + \dot{\xi} \bar{\xi}^\circ + \dot{\eta} \bar{\eta}^\circ + \dot{\zeta} \bar{\zeta}^\circ + \xi \dot{\bar{\xi}}^\circ + \eta \dot{\bar{\eta}}^\circ + \zeta \dot{\bar{\zeta}}^\circ. \end{aligned}$$

Після врахування формул Ейлера і заміни відомих виразів на відповідні величини, дістанемо:

$$\dot{\bar{v}}_{Ma} = \dot{\bar{v}}_O = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{a}_r + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r,$$

або, використовуючи (12.62), (12.64), (12.66), (12.69) і (12.72),

$$\vec{a}_{Ma} = \vec{a}_{Me}^{\text{пост}} + \vec{a}_{Me}^{\text{об}} + \vec{a}_M^{\text{л}} + \vec{a}_{Mr} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \quad (12.79)$$

Новий член

$$\vec{a}_{Mc} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r, \quad (12.80)$$

є тим додатковим прискоренням, яке було названо прискоренням Коріоліса.

З урахуванням (12.80) векторна формула (12.79) набуває вигляду

$$\vec{a} = \vec{a}_e^{\text{пост}} + \vec{a}_{ee}^{\text{об}} + \vec{a}_{\omega e}^{\text{л}} + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

Теорему доведено.

Звернемо увагу на визначення модуля й напрямку прискорення Коріоліса. Згідно з (12.80) модуль прискорення Коріоліса точки в разі складного руху у випадку загального переносного руху дорівнює подвоєному добутку модулів миттєвої кутової швидкості переносного сферичного руху і відносної швидкості точки на синус кута між цими швидкостями:

$$a_c = 2\omega v_r \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{v}_r). \quad (12.81)$$

Напрямок прискорення Коріоліса можна знайти безпосередньо з формули (12.80) і ґрунтуючись на властивостях векторного добутку двох векторів. Якщо, не змінюючи модуля й напрямку, кутову швидкість перенести в положення рухомої точки, якою вона набуває під час відносного руху і в якому визначається напрям прискорення Коріоліса, то дістанемо трійку прикладених в одній точці векторів: прискорення Коріоліса, кутову і відносну швидкості. Прискорення Коріоліса перпендикулярне до кутової та відносної швидкостей і має такий напрям, що коли дивитися навпроти нього, то для суміщення кутової швидкості з відсною треба першу повернути проти руху стрілки годинника на менший із кутів, які утворюють між собою кутову і відносна швидкості.

Установимо інше правило для визначення напрямку прискорення Коріоліса. Для цього розкладемо вектор відносної швидкості точки на дві складові у напрямках: паралельному миттєвій кутовій швидкості, і перпендикулярно до миттєвої кутової швидкості, тоді

$$\vec{v}_r = \vec{v}_r'' + \vec{v}_r^\perp. \quad (12.82)$$

У формулі (12.80) замість величини  $\vec{v}_r$ , запишемо її вираз відповідно до (12.82):

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_r'' + \vec{v}_r^\perp).$$

Розкриємо дужки:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r'' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r^\perp,$$

де  $\vec{v}_r''$  — вектор колінеарний з вектором  $\vec{\omega}$ , а  $\vec{v}_r^+$  становить з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  прямий кут.

Отже, врахувавши, що векторний добуток двох колінеарних векторів дорівнює нулю, дістанемо:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r^+. \quad (12.83)$$

З геометричної інтерпретації векторної рівності (12.83) (рис. 12.9) виведемо шукане правило, яке називається **правилом Жуковського**.

*Напрямок прискорення Коріоліса відповідає напрямку проекції вектора відносної швидкості на площину, перпендикулярну до миттєвої осі обертання, якщо цю проекцію повернути в зазначеній площині в напрямі миттєвого переносного обертання на кут  $90^\circ$ .*

Векторна рівність (12.73), що виражає теорему про абсолютну швидкість, геометрично зображується чотирикутником швидкостей (див. рис. 12.8,б), замикальна сторона якого є абсолютною швидкістю. Векторні рівності (12.74), і (12.75), що виражають теорему Коріоліса, геометрично зображуються шестикутником прискорень (рис. 12.8, в), замикальна сторона якого є абсолютним прискоренням.

Докладніше про прискорення Коріоліса йдеться в § 18.

**Приклад на застосування теорем про абсолютну швидкість і абсолютне прискорення.** Круговий циліндр радіусом  $r$  і висотою  $h$  здійснює гвинтовий рух згідно з рівняннями

$$x'_0 = \frac{a}{2} t^2, \quad (12.84)$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{2} t^2, \quad (12.85)$$

де  $a$  і  $\varepsilon$  — сталі.

Гвинтова вісь  $O'G$  збігається з геометричною віссю  $OO_1$  циліндра (рис. 12.9).

Відносно циліндра по його боковій поверхні рухається точка  $M$  відповідно до закону

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos kt; \\ \eta &= r \sin kt; \\ \zeta &= bt, \end{aligned} \quad (12.86)$$

де  $k$  і  $b$  пов'язані з висотою  $h$  циліндра формулою

$$h = \frac{b}{k} 2\pi.$$

Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки  $M$  у разі складного руху.

Розв'язання.

1. Визначимо абсолютну швидкість точки  $M$  за теоремою (12.73) про абсолютну швидкість точки в разі складного руху при загальному переносному русі:

$$\vec{v}_{Ma} = \vec{v}_{Me}^{\text{пост}} + \vec{v}_{Me}^{\text{сф}} + \vec{v}_{Mr}. \quad (12.87)$$

Порівнюючи задані в умові задачі рівняння відносного руху точки (12.86), а також співвідношення (12.87) з (12.42) і (12.47), бачимо, що точка  $M$  у разі відносного руху описує гвинтову лінію, геометричні властивості якої нами вивчено. Швидкість точки  $M$  у цьому разі

$$\vec{v}_{Mr} = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2} = \sqrt{r^2 k^2 \sin^2 kt + r^2 k^2 \cos^2 kt + b^2} = \sqrt{r^2 k^2 + b^2}; \quad (12.88)$$

її напрям збігається з дотичною  $MT$  до гвинтової лінії і становить з гвинтовою віссю кут  $\angle(90^\circ - \gamma)$ , де

$$\text{tg } \gamma = \frac{h}{2\pi r}. \quad (12.89)$$

Поступальна переносна швидкість точки  $M$  спричинена поступальним рухом циліндра вздовж гвинтової осі  $Oz'$ . Тому, продиференціювавши по часу рівняння (12.84), дістанемо

$$\vec{v}_{Me}^{\text{пост}} = \frac{dx'_0}{dt} = at. \quad (12.90)$$

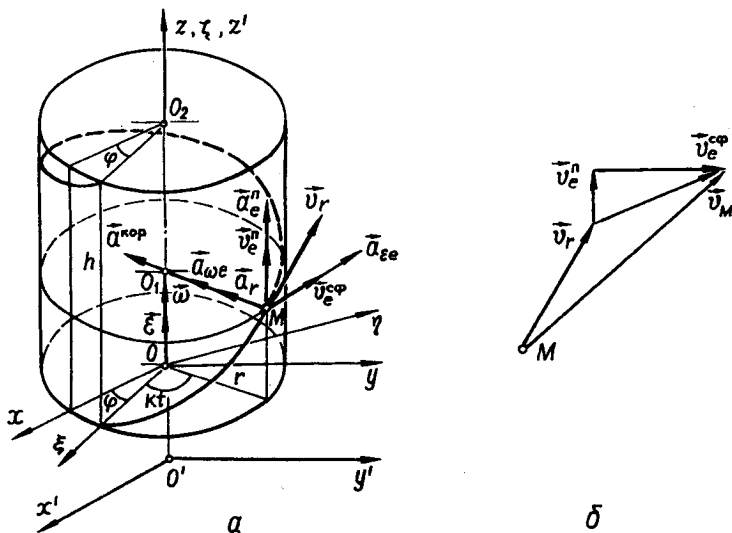


Рис. 12.9

Ця швидкість точки  $M$  напрямлена по твірній циліндра знизу вгору (рис. 12.9).

Взявши похідну по часу від рівняння (12.85), дістанемо переносну швидкість точки  $M$ , зумовлену обертальним рухом циліндра навколо гвинтової осі  $Oz$ :

$$\vec{v}_{\omega\epsilon}^{\text{сф}} = \dot{\varphi} r = \frac{d\left(\frac{\epsilon}{2} t^2\right)}{dt} = \epsilon r t. \quad (12.91)$$

Знайдена швидкість  $\vec{v}_{\omega\epsilon}^{\text{сф}}$  напрямлена по дотичній до кола радіусом  $r$ , по якому в даний момент часу рухається та точка  $M$  на боковій поверхні циліндра, з якою в цей самий момент часу збігається розглядувана в разі складного руху точка  $M$ , у бік обертання циліндра.

Маючи вектори  $\vec{v}_{Me}^{\text{пост}}$ ,  $\vec{v}_{Me}^{\text{сф}}$  і  $\vec{v}_{Mr}$ , можна на підставі (12.87) побудувати замкнений чотирикутник швидкостей, замикальна сторона якого зображує шукану абсолютну швидкість  $\vec{v}_{Ma}$  (рис. 12.9, б). Спочатку додамо швидкості  $\vec{v}_{Me}^{\text{пост}}$  і  $\vec{v}_{Me}^{\text{сф}}$ :

$$\vec{v}_{Ma} = \sqrt{(\vec{v}_{Me}^{\text{пост}})^2 + (\vec{v}_{Me}^{\text{сф}})^2} = \sqrt{a^2 t^2 + \epsilon^2 r^2 t^2} = t \sqrt{a^2 + \epsilon^2 r^2}.$$

Кут  $\alpha$  між векторами  $\vec{v}_{Me}^{\text{пост}}$  і  $\vec{v}_{Me}$  знайдемо за формулою

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\vec{v}_{Me}^{\text{сф}}}{\vec{v}_{Me}^{\text{пост}}} = \frac{\epsilon r}{a}.$$

Тоді кут між сторонами  $\vec{v}_{Mr}$  і  $\vec{v}_{Me}$  має значення

$$270^\circ - (\alpha + \gamma).$$

За теоремою косинусів знаходимо вираз для абсолютної швидкості точки  $M$ :

$$\begin{aligned} v_{Ma} &= \sqrt{v_{Mr}^2 + v_{Me}^2 - 2v_{Mr}v_{Me} \cos[270^\circ - (\alpha + \gamma)]} = \\ &= \sqrt{v_{Mr}^2 + v_{Me}^2 - 2v_{Mr}v_{Me} \sin(\alpha - \gamma)} = \\ &= \sqrt{r^2 k^2 + b^2 + (a^2 + \epsilon^2 r^2) t^2} + \sqrt{(r^2 k^2 + b^2)(a^2 + \epsilon^2 r^2)} \cdot \sin(\alpha + \gamma). \end{aligned}$$

Проведемо перетворення:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \gamma) &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma = \frac{\epsilon r a}{a \sqrt{a^2 + \epsilon^2 r^2}} \cos \gamma + \\ &+ \frac{1 \cdot a}{\sqrt{a^2 + \epsilon^2 r^2}} \sin \gamma = \frac{\epsilon r \cos \gamma + a \sin \gamma}{\sqrt{a^2 + \epsilon^2 r^2}}; \\ 2t \sqrt{(r^2 k^2 + b^2)(a^2 + \epsilon^2 r^2)} \cdot \sin(\alpha + \gamma) &= \\ &= 2t \sqrt{r^2 k^2 + b^2} (\epsilon r \cos \gamma + a \sin \gamma), \end{aligned}$$

тоді остаточно

$$v_{Ma} = \sqrt{r^2 k^2 + b^2 + (\varepsilon^2 r^2 + a^2) t^2 + 2t \sqrt{r^2 k^2 + b^2} (\varepsilon r \cos \gamma + a \sin \gamma)}.$$

Цю саму величину можна знайти методом проекцій. Для цього введемо систему двох взаємно перпендикулярних осей проекцій  $\tilde{x}\tilde{M}\tilde{y}$  і спроекуємо на них векторну рівність (12.87), дістанемо

$$\begin{aligned} v_{\tilde{x}} &= v_{\tilde{x}}^{\text{пост}} + v_{\tilde{x}}^{\text{сф}} + v_{\tilde{x}}; \\ v_{\tilde{y}} &= v_{\tilde{y}}^{\text{пост}} + v_{\tilde{y}}^{\text{сф}} + v_{\tilde{y}}, \end{aligned}$$

або, підставивши проекції,

$$\begin{aligned} v_{\tilde{x}} &= \varepsilon r t + \sqrt{r^2 k^2 + b^2} \cos \gamma; \\ v_{\tilde{y}} &= a t + \sqrt{r^2 k^2 + b^2} \sin \gamma. \end{aligned}$$

Остаточно шукану абсолютну швидкість точки  $M$  дістанемо, якщо скористаємося теоремою Піфагора:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_{\tilde{x}}^2 + v_{\tilde{y}}^2} = \sqrt{(\varepsilon r t + \sqrt{r^2 k^2 + b^2} \cos \gamma)^2 + (a t + \sqrt{r^2 k^2 + b^2} \sin \gamma)^2} = \\ &= \sqrt{\varepsilon^2 r^2 t^2 + (r^2 k^2 + b^2) \cos^2 \gamma + (2a t \sin \gamma + 2r t \varepsilon \cos \gamma) \sqrt{r^2 k^2 + b^2} + a^2 t^2 + (r^2 k^2 + b^2) \sin^2 \gamma} = \\ &= \sqrt{(a^2 + \varepsilon^2 r^2) t^2 + (r^2 k^2 + b^2) + 2t(a \sin \gamma + r \varepsilon \cos \gamma) \sqrt{r^2 k^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Для встановлення напрямку вектора абсолютної швидкості  $\vec{v}$  точки  $M$  визначають кути, які утворює даний вектор з осями проекцій  $M\tilde{x}$  і  $M\tilde{y}$ , з формул напрямних косинусів:

$$\cos \angle(\vec{v}, \tilde{x}) = \frac{v_{\tilde{x}}}{v} = \frac{\varepsilon r t + \sqrt{r^2 k^2 + b^2} \cos \gamma}{\sqrt{(a^2 + \varepsilon^2 r^2) t^2 + (r^2 k^2 + b^2) + 2t \sqrt{r^2 k^2 + b^2} (a \sin \gamma + r \varepsilon \cos \gamma)}};$$

$$\cos \angle(\vec{v}, \tilde{y}) = \frac{v_{\tilde{y}}}{v} = \frac{a t + \sqrt{r^2 k^2 + b^2} \sin \gamma}{\sqrt{(a^2 + \varepsilon^2 r^2) t^2 + (r^2 k^2 + b^2) + 2t \sqrt{r^2 k^2 + b^2} (a \sin \gamma + r \varepsilon \cos \gamma)}}.$$

2. Визначимо абсолютне прискорення точки  $M$  за теоремою (12.74) і (12.75):

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{Mr} + \vec{a}_{Mc}^{\text{пост}} + \vec{a}_{M\omega}^{\text{с}} + \vec{a}_{Mc}^{\text{с}} + \vec{a}_{M}^{\text{коп}}. \quad (12.92)$$

Спочатку розглянемо відносне прискорення  $\vec{a}_{Mr}$  точки  $M$ :

$$\begin{aligned} a_{Mr} &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \sqrt{r^2 k^4 \sin^2 kt + r^2 k^4 \cos^2 kt + 0} = \\ &= \sqrt{r^2 k^4 (\sin^2 kt + \cos^2 kt)} = r k^2, \end{aligned} \quad (12.93)$$

а напрям збігається з радіусом  $r$  кола (рис. 12.9, а).

Модуль переносного поступального прискорення точки  $M$

$$a_{M\epsilon}^{\text{пост}} = \ddot{x}'_O = \frac{d^2\left(\frac{a}{2}t^2\right)}{dt^2} = a = \text{const.} \quad (12.94)$$

Ці прискорення напрямлене по твірній циліндра по вертикалі вгору.

Визначаємо інші переносні складові прискорень точки  $M$  — обертальне  $\bar{a}_{M\epsilon}^e$  і доосьове  $\bar{a}_{M\omega}^e$ :

$$\bar{a}_{M\epsilon}^e = \ddot{\phi}r = r \frac{d^2\left(\frac{\epsilon}{2}t^2\right)}{dt^2} = \epsilon r = \text{const}; \quad (12.95)$$

$$\bar{a}_{M\omega}^e = \dot{\phi}^2 r = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 r = \omega^2 r = \text{const.} \quad (12.96)$$

Перше прискорення напрямлене по радіусу кола до гвинтової осі, як і вектор відносного прискорення  $\bar{a}_{Mr}$ , а друге — по дотичній до кола в бік обертання циліндра, оскільки  $\omega$  і  $\epsilon$  за знаком збігаються.

П'ята складова абсолютного прискорення точки  $M$  — прискорення Кориоліса  $\bar{a}_M^{\text{коп}}$  визначається за формулою (12.81):

$$a_M^{\text{коп}} = 2\omega v_{Mr} \sin(90^\circ - \gamma) = 2\epsilon t \sqrt{r^2 k^2 + b^2} \cdot \cos \gamma,$$

але

$$\cos \gamma = \frac{2\pi r}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}$$

(враховано (12.88)), дістанемо

$$a_M^{\text{коп}} = \frac{4\pi\epsilon r \sqrt{r^2 k^2 + b^2} \cdot \cos \gamma}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}} t. \quad (12.97)$$

Для того щоб дістати напрям прискорення Кориоліса, треба скористатися правилом Жуковського, згідно з яким вектор відносної швидкості  $\bar{v}_{Mr}$  точки  $M$  розкладають на дві прямокутні складові  $\bar{v}_{Mr}''$  і  $\bar{v}_{Mr}'$ , перша з яких колінеарна з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$ , а друга перпендикулярна до неї; перпендикулярну складову  $\bar{v}_{Mr}'$  повертають в напрямі переносного обертання на кут  $90^\circ$ . Новий напрям таким чином повернутої складової  $\bar{v}_{Mr}'$  і напрям прискорення Кориоліса збігаються. Отже, прискорення Кориоліса напрямлене по радіусу  $r$  кола до осі  $Oz'$  (рис. 12.9, *a*). Нагадаємо, що такий самий напрям мають і прискорення  $\bar{a}_{M\omega}^e$ ,  $\bar{a}_{Mr}^e$ .

За модулями й напрямками складових прискорень, які входять в праву частину векторної рівності (12.92), обчислимо абсолютне прискорення точки  $M$  у цьому випадку її складного руху. Прискорення  $\bar{a}_{Mr}$ ,  $\bar{a}_{M\omega}^e$  і  $\bar{a}_M^{\text{коп}}$  мають спільний напрям, тому

$$a_{MN} = a_{Mr} + a_{M\omega}^e + a_M^{\text{коп}} = r k^2 + \omega^2 r + \frac{4\pi\epsilon r \sqrt{r^2 k^2 + b^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}} t \cos \gamma.$$

Даний результуючий вектор і розглядувані прискорення є сторонами прямокутного паралелепіпеда з діагоналлю, яка зображує шукане абсолютне прискорення.

З рис. 12.9,  $a$ , на підставі теореми Піфагора, дістанемо модуль абсолютного прискорення точки  $M$ :

$$\begin{aligned} a_M &= \sqrt{a_{MN}^2 + (a_M^n)^2 + (a_{M\epsilon}^\epsilon)^2} = \\ &= \sqrt{\left( r k^2 + \omega^2 r + \frac{4\pi\epsilon r \sqrt{r^2 k^2 + b^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}} t \right)^2 + a^2 + \epsilon^2 r^2}. \end{aligned}$$



## § 39. Графічне дослідження кінематики кривошипно-шатунного механізму. Плани швидкостей і прискорень

Розглянемо графічне визначення кінематичних величин у разі плоскопаралельного руху тіла на прикладі кривошипно-шатунного механізму.

Сформулюємо задачу.

Кривошипно-шатунний механізм складається з кривошипа  $OA$  завдовжки  $l_{OA} = r = 0,2$  м, який перебуває в обертальному русі навколо горизонтальної осі зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_{OA} = 10$  с<sup>-1</sup>,  $T$ -подібного шатуна  $ACBD$  з лінійними розмірами  $l_{AB} = l = 0,3$  м і

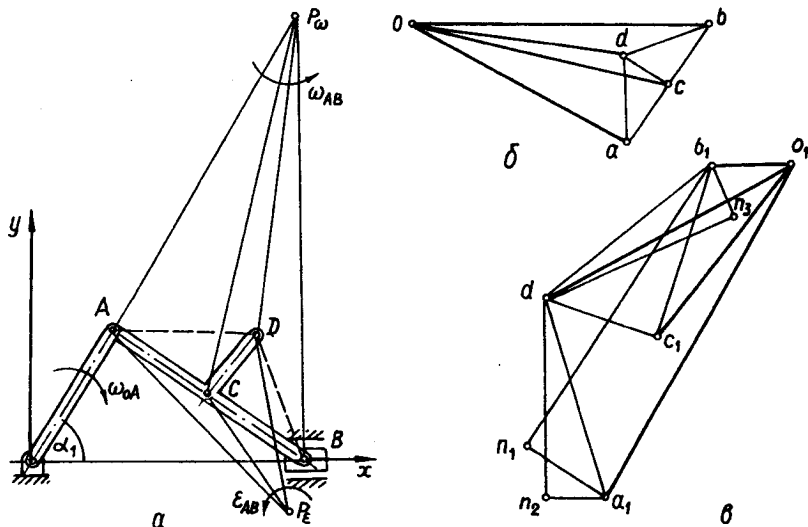


Рис. 13.1

$l_{CD} = h = 0,1 \text{ м}$  ( $l_{AC} = l_{CB}$ ) і повзуна  $B$ , який лежить на спільній горизонтальній прямій з центром  $O$  кривошипа  $OA$  (рис. 13.1,  $a$ ).

За допомогою побудови планів швидкостей і прискорень визначити кутову швидкість й кутове прискорення шатуна  $ACBD$ , лінійні швидкості та прискорення його точок  $B$ ,  $C$  і  $D$ , а також положення миттєвого центра швидкостей і прискорень шатуна  $ACBD$  у положенні механізму, коли кривошип  $OA$  утворює з горизонтальною прямою  $OB$  кут  $\alpha_1 = 60^\circ$ .

Суть графічного методу знаходження потрібних кінематичних величин у разі плоскопаралельного руху полягає в тому (див. § 22), що за натуральними значеннями вихідних даних задачі та відповідними масштабами на підставі векторних теорем (6.9), (6.16) геометрично будуються лінійні плоскі фігури взаємопов'язаних трикутників (чотирикутників, сторони яких у прийнятому масштабі зображують як абсолютні натуральні значення кінематичних характеристик, так і їх напрям). У кінематиці ці замкнені лінійні плоскі геометричні фігури, або векторні діаграми, називаються *планами швидкостей і прискорень*. За планами швидкостей і прискорень через вимірювання довжин і визначення напрямів їх відповідних сторін знаходять шукані миттєві кінематичні величини певного плоскопаралельного руху з урахуванням відповідних масштабів.

При розв'язуванні задачі графічним методом можна дотримуватися певного алгоритму.

1. За натуральними значеннями довжин ланок механізму виберемо масштаб довжин і в цьому масштабі побудуємо схему механізму.

2. За відомим натуральним значенням швидкості відповідної точки ведучої ланки механізму виберемо оптимальне значення масштабу швидкостей і на підставі векторних рівнянь (7.12), (7.16), що виражають в масштабі теорему про швидкість точок тіла в разі плоскопаралельного руху побудуємо план швидкостей.

3. За відомим натуральним значенням прискорення відповідної точки ведучої ланки механізму виберемо оптимальне значення масштабу прискорень і на підставі векторних рівнянь (7.18), (7.19), що виражають в масштабі теорему про прискорення точок тіла в разі плоскопаралельного руху, з використанням плану швидкостей побудуємо план прискорень.

4. Вимірюванням відповідних довжин у міліметрах і встановленням напрямів сторін на планах швидкостей і прискорень з урахуванням масштабів швидкостей і прискорень визначимо шукані кінематичні величини.

Розв'язування задачі. Задані в умові задачі лінійні величини  $r = 0,2 \text{ м}$ ,  $l = 0,3 \text{ м}$  і  $h = 0,1 \text{ м}$  назвемо натуральними значеннями довжин (натуральними розмірами) ланок механізму. Лінійні дов-

жини ланок механізму на його схемі (рис. 13.1, а) позначимо  $OA$ ,  $AB$ ,  $CB$ ,  $CD$  і виразимо в міліметрах:

$$OA = 40 \text{ мм}, AB = 60 \text{ мм}, AC = CB = 30 \text{ мм}, CD = 20 \text{ мм}.$$

Тоді, відповідно до формул (7.1) — (7.3), маємо лінійний масштаб

$$\mu_l = r/OA = 0,2 \text{ м}/40 \text{ мм} = 0,005 \text{ м}/\text{мм}.$$

Побудуємо у вибраному масштабі  $\mu_l = 0,5 \text{ см}/\text{мм} = 0,005 \text{ м}/\text{мм}$  схему кривошипно-шатунного механізму. Для цього проведемо горизонтальну пряму, на якій виберемо точку  $O$  — центр кривошипа  $OA$ . З точки  $O$  під заданим кутом  $\alpha_1 = 60^\circ$  накреслимо промінь, на якому відкладемо відрізок  $OA = 40 \text{ мм}$ . Розхилом циркуля  $AB = 60 \text{ мм}$  з точки  $A$  опишемо дугу до перетину з горизонтальною прямою. Утворена точка перетину  $B$  є центром повзуна. Сполучимо точку  $A$  з точкою  $B$ , дістанемо зображення другої ланки механізму — шатуна  $AB$ . Також перпендикулярно до ланки  $AB$  через її середину проведемо відрізок  $CD$  завдовжки  $20 \text{ мм}$  (рис. 13.1, б).

Маємо схему механізму, перейдемо до другого пункту. Визначимо лінійну швидкість точки  $A$  кривошипа  $OA$ :

$$v_A = \omega_{OA} r = 10 \cdot 0,2 = 25 \text{ м}/\text{с}.$$

За довжиною відрізка  $oa$ , що на плані швидкостей зображує швидкість  $v_A = 2 \text{ м}/\text{с}$ , на підставі формули (7.5) дістанемо масштаб швидкостей:

$$\mu_v = \frac{v_A}{oa} = \frac{2 \text{ м}/\text{с}}{50 \text{ мм}} = 0,04 \text{ м}/(\text{с} \cdot \text{мм}).$$

Побудуємо поетапно план швидкостей. Відкладемо від довільно взятої на площині точки  $o$  перпендикулярно до кривошипа  $OA$  (рис. 13.2) у напрямі його обертання відрізок  $oa = 50 \text{ мм}$ . Цей напрямлений відрізок назвемо планом швидкостей для кривошипа  $OA$ ;

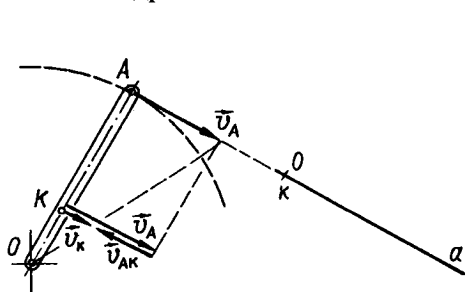


Рис. 13.2

$\vec{oa}$  є променем,  $o$  — полюсом,  $a$  — вершиною плану швидкостей. Запишемо зв'язок між променем  $\vec{oa}$  і вектором швидкості  $\vec{v}_A$  точки  $A$ :

$$\vec{v}_A = \mu_v \vec{oa}.$$

За планом швидкостей для кривошипа  $OA$  можна знайти графічне зображення швидкості будь-якої точки, що ле-

жить на кривошипі. Так, для точки  $K$  на кривошипі  $OA$ , яка розташована від його центра  $O$  на відстані  $l_{OK} = 0,006$  м, маємо

$$\vec{v}_K = \overrightarrow{ok} \mu_v = \frac{OK}{OA} \overrightarrow{oa} \mu_v. \quad (13.1)$$

У точці  $K$  на підставі теореми (6.9) подано геометричну інтерпретацію векторної рівності  $\vec{v}_K = \vec{v}_A + \vec{v}_{AK}$ , якій відповідають рівняння

$$\frac{\vec{v}_K}{\mu_v} = \frac{\vec{v}_A}{\mu_v} + \frac{\vec{v}_{AK}}{\mu_v}; \quad \overrightarrow{ok} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ak}, \quad (13.2)$$

де  $\overrightarrow{ok}$ , як і  $\overrightarrow{oa}$ , є променем,  $k$  — вершина його, вектор  $\overrightarrow{ak}$ , що сполучає вершини  $a$  і  $k$ , зображує на плані швидкостей у масштабі  $\mu_v$  обертальну швидкість точки  $K$  при обертанні кривошипа  $OA$  навколо полюса  $A$  (рис. 13.2).

Як підсумок наведемо формули

$$\vec{v}_A = oa \mu_v; \quad \vec{v}_K = ok \mu_v; \quad \vec{v}_{AK} = ak \mu_v, \quad (13.3)$$

які визначають за планом швидкостей кінематичні величини кривошипа  $OA$  при заданому положенні механізму.

Будуючи план швидкостей шатуна  $ACBD$ , спочатку на підставі формули (6.9) в точках  $B$ ,  $C$  і  $D$  зобразимо трикутники швидкостей, які описуються векторними рівняннями

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}; \quad (13.4)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC}; \quad \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{BC}; \quad (13.5)$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{AD}; \quad \vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{BD}. \quad (13.6)$$

Зауважимо, що при розгляді точок  $C$  і  $D$  вибирають два полюси  $A$  і  $B$ , а сторони даних трикутників швидкостей визначають натуральні величини швидкостей. Поділивши векторні рівності (13.4) — (13.6) на масштаб швидкостей  $\mu_v$ , дістанемо векторні рівняння для графічного знаходження швидкостей  $\vec{v}_B$ ,  $\vec{v}_C$  і  $\vec{v}_D$ :

$$\overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ab}; \quad (13.7)$$

$$\overrightarrow{oc} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ac}, \quad \overrightarrow{oc} = \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{bc}; \quad (13.8)$$

$$\overrightarrow{od} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ad}, \quad \overrightarrow{od} = \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{bd}. \quad (13.9)$$

(13.7)—(13.9) геометрично зображені замкненими трикутниками, сторони яких є лінійними величинами, вираженими в одиницях довжини (мм) на відміну від сторін трикутників швидкостей (13.4) — (13.6), які виражені в одиницях швидкості.

Для побудовання геометричного трикутника швидкостей  $oab$  (рис. 13.3) спочатку від довільної точки  $o$  відкладають відрізок  $oa$ , потім через його початок  $o$  проводять пряму, колінеарну вектору  $\vec{v}_B$ , а через кінець  $a$  — пряму, перпендикулярну до відрізка  $AB$ ; точка пе-

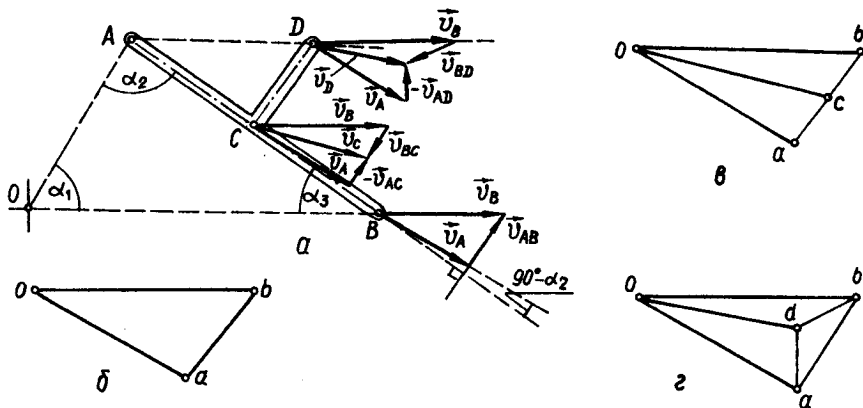


Рис. 13.3

ретину цих прямих  $b$  є кінцем невідомого вектора  $\vec{ob}$ , що є розв'язком векторного рівняння (13.7). Помноживши знайдений вектор  $\vec{ob}$  на масштаб  $\mu_v$ , дістанемо шукану швидкість точки  $B$ , тобто

$$\vec{v}_B = \mu_v \vec{ob}; \quad v_B = \mu_v \cdot ob. \quad (13.10)$$

Легко побачити, що розв'язком векторних рівнянь (13.8) є вектор  $\vec{oc}$  (рис. 13.3,  $\theta$ ), кінець якого  $c$  ділить відрізок  $ab$  у такому самому відношенні, в якому точка  $C$  ділить  $AB$  на схемі механізму. Тому

$$ac = ab \frac{AC}{AB}; \quad bc = ab \frac{BC}{AB}, \quad (13.11)$$

а також

$$\vec{v}_C = \mu_v \vec{oc}. \quad (13.12)$$

Розв'язком векторних рівнянь (13.9) є вектор  $\vec{od}$ , кінець якого  $d$  лежить не на спільній прямій, як це мало місце у випадку точки  $C$ , а на перетині прямих, перпендикулярних до відрізків  $AD$  і  $BD$  і які

проходять через точки  $a$  і  $b$  (рис. 13.3,  $\varepsilon$ ). Отже, враховуючи (13.6), з рис. 13.3  $a$ ,  $b$  виведемо формули

$$ac = bc \frac{AC}{BC} = ab \frac{AC}{AB}; \quad (13.13)$$

$$bc = ac \frac{BC}{AC} = ab \frac{BC}{AB}. \quad (13.14)$$

Звернемо увагу на геометричну фігуру (рис. 13.3,  $\varepsilon$ ): вона містить трикутник  $oab$ . Якщо з нею сумістити фігуру (рис. 13.3,  $\sigma$ ) і провести відрізок  $cd$ , то дістанемо шуканий план швидкостей (див. рис. 13.1,  $\delta$ ) для розглядуваного плоского кривошипно-шатунного механізму (див. рис. 13.1,  $a$ ) в заданому його положенні. Також розглянемо деякі поняття, що стосуються плану швидкостей. Точка  $o$  називається *полюсом плану швидкостей*. Ця точка для даного положення механізму зображує ті його точки, швидкості яких дорівнюють нулю. Прямолінійні відрізки на плані швидкостей  $\vec{oa}$ ,  $\vec{ob}$ ,  $\vec{oc}$  і  $\vec{od}$ , які виходять зі спільної точки — полюса  $o$  і які в масштабі  $\mu_v$  зображують модулі й напрями абсолютних швидкостей точок ланок механізму, називають *променями плану швидкостей*. Кінці їх —  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $d$  — називають *вершинами плану швидкостей*, а прямолінійні відрізки  $ab$ ,  $bc$ ,  $ac$  і  $cd$ , що сполучають вершини плану швидкостей — *замикальними сторонами*, які в масштабі  $\mu_v$  зображують модулі й напрями оберտальних швидкостей точок ланок механізму відносно полюсів.

На завершення розгляду другого пункту розв'язування задачі за даними побудованого плану швидкостей визначимо величини  $\vec{v}_B$ ,  $\vec{v}_C$ ,  $\vec{v}_D$  і  $\omega_{AB}$ :

$$v_B = \mu_v \cdot ob = 0,04 \cdot 61 = 2,44 \text{ м/с}; \quad (13.15)$$

$$v_C = \mu_v \cdot oc = 0,04 \cdot 54 = 2,16 \text{ м/с}; \quad (13.16)$$

$$v_D = \mu_v \cdot od = 0,04 \cdot 45 = 1,80 \text{ м/с}; \quad (13.17)$$

$$\omega_{AB} = \frac{ab\mu_v}{l} = \mu_v \frac{ab}{AB\mu_l} = \frac{\mu_v ab}{\mu_l AB} = \frac{0,04 \cdot 31}{0,005 \cdot 59} = 4,20 \text{ с}^{-1}. \quad (13.18)$$

Варто звернути увагу на визначення за планом швидкостей напрямів як абсолютних швидкостей точок, так і оберտальних швидкостей цих точок навколо відповідних полюсів. Швидкості першого виду мають напрями променів від полюса  $o$  до вершин плану швидкостей. Для того щоб визначити напрям оберտальної швидкості будь-якої точки ланки механізму відносно того чи іншого полюса на плані швидкостей, треба на ньому розглянути два промені, які визначають абсолютні швидкості даної точки і даного полюса, і від-

різок, що сполучає вершини цих променів, тобто треба для замкненого трикутника із зазначеними сторонами скористатись формулами (13.7) — (13.9).

Наприклад, нехай треба визначити напрям обертальної швидкості точки  $D$  ланки  $ACBD$  при її обертанні навколо полюса  $C$ . Тоді на плані швидкостей (рис. 13.1,  $\vartheta$ ) розглянемо векторний трикутник  $abc$ , в якому співвідношення між довжинами і напрямками його сторін визначає векторна рівність  $\overrightarrow{od} = \overrightarrow{oc} + \overrightarrow{cd}$ . З цієї рівності видно, що вектор  $\overrightarrow{cd}$  вказує на напрям обертальної швидкості  $\vec{v}_{CD}$ , а також

визначає її модуль, тобто  $\vec{v}_{CD} = \mu_v \overrightarrow{cd}$ ;  $v_{CD} = \mu_v \cdot cd$ . Напрямок кутової швидкості ланки механізму визначається напрямом обертальних швидкостей точок, що належать одній і тій самій ланці. В розглядуваному випадку, як видно з плану швидкостей, шатун  $ACBD$  в заданому його положенні здійснює миттєве обертання проти руху стрілки годинника (центром обертання беруть будь-яку точку шатуна, а також, звісно, і його миттєвий центр швидкостей).

Після того, як план швидкостей для даного положення механізму побудовано і визначено кутову швидкість, відповідно до третього пункту будують план прискорень.

Визначимо повне прискорення кінця  $A$  кривошипа  $OA$ . За відомою формулою кінематики обертального руху:

$$a_A = r\sqrt{\omega_{OA}^4 + \varepsilon_{OA}^2} = \omega_{OA}^2 r = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ м/с}^2,$$

оскільки  $\omega_{OA}$  є сталою.

Встановивши довжину в міліметрах відрізка  $o_1 a_1$ , який на плані прискорень зображує абсолютне прискорення точки  $A$  шатуна  $AB$ , виберемо масштаб прискорень  $\mu_a$ . Нехай  $o_1 a_1 = 100$  мм, тоді

$$\mu_a = \frac{a_A}{o_1 a_1} = \frac{20 \text{ м/с}^2}{100 \text{ мм}} = 0,2 \text{ м/с}^2 \cdot \text{мм}. \quad (13.19)$$

На підставі масштабу прискорень почнемо побудову плану прискорень: з довільної точки  $o_1$  (полюса плану прискорень) паралельно кривошипу  $OA$  в напрямі від його кінця  $A$  до центра  $O$  відкладемо вектор  $\overrightarrow{o_1 a_1}$  завдовжки  $o_1 a_1 = 100$  мм (рис. 13.4  $a, б$ ).

Зауважимо, що, як і в разі плану швидкостей, вектори  $\overrightarrow{o_1 a_1}$ ,  $\overrightarrow{o_1 b_1}$ ,  $\overrightarrow{o_1 c_1}$ ,  $\overrightarrow{o_1 d_1}$ , які виходять зі спільної точки — полюса  $o_1$  і в масштабі  $\mu_a$  зображують абсолютні прискорення точок  $A, B, C, D$  ланок механізму, називаються променями плану прискорень.

Запишемо векторне співвідношення між величинами  $\vec{a}_A$  і  $\overrightarrow{o_1 a_1}$ :

$$\vec{a}_A = \mu_a \overrightarrow{o_1 a_1}. \quad (13.20)$$

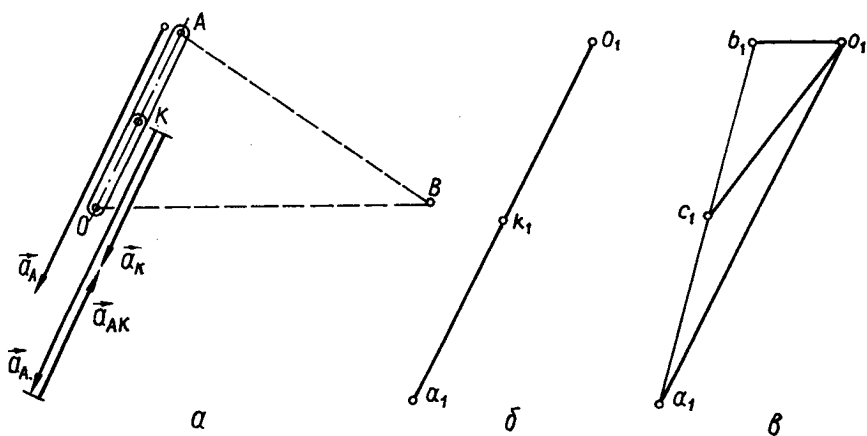


Рис. 13.4

Напрявлений відрізок  $\overrightarrow{a_1 k_1}$  є по суті планом прискорень для кривошипа  $OA$ , оскільки дає змогу графічно визначити прискорення будь-якої точки даного кривошипа. Зазначимо, що обертальний рух тіла навколо нерухомої осі є частковим випадком плоскопаралельного руху. Тому для визначення прискорення будь-якої точки кривошипа  $OA$ , наприклад точки  $K$  ( $l_{OK} = r/2 = 0,1$  м) можна скористатися теоремою про прискорення точки тіла в разі плоскопаралельного руху (6.16):

$$\vec{a}_K = \vec{a}_A + \vec{a}_{AK} = \vec{a}_A + \vec{a}_{AK}^n; \quad \vec{a}_{AK}^t = 0. \quad (13.21)$$

Вираз (13.21) є векторним рівнянням, що визначає прискорення точки  $K$  кривошипа і яке геометрично зображується при точці  $K$  одновимірною фігурою; величини  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{a}_K$  і  $\vec{a}_{AK}$  лежать на спільній прямій, що збігається з віссю  $OA$  кривошипа. На плані прискорень (рис. 13.4, б) промінь  $\overrightarrow{a_1 k_1}$  визначає в масштабі  $\mu_a$  модуль і напрям прискорення точки  $K$  кривошипа відповідно до векторного співвідношення

$$\vec{a}_K = \mu_a \overrightarrow{a_1 k_1}, \quad (13.22)$$

а відрізок  $\overrightarrow{a_1 k_1}$ , що сполучає вершини  $a_1$  і  $k_1$  променів  $\overrightarrow{a_1 a_1}$  і  $\overrightarrow{a_1 k_1}$ , в тому самому масштабі визначає модуль і напрям обертального прискорення точки  $K$  ланки  $OA$  при обертанні її навколо полюса  $A$  згідно з формулою

$$\vec{a}_{AK} = \mu_a \overrightarrow{a_1 k}. \quad (13.23)$$



Наведемо значення прискорення точки  $K$ :

$$a_K = a_1 k_1 \mu_a = \mu_a \frac{OK}{OA} a_1 = 0,2 \cdot \frac{20}{40} \cdot 100 = 10 \text{ м/с}^2.$$

Обертальне прискорення  $\vec{a}_{AK}$  можна знайти через відому кутову швидкість:

$$a_{AK} = \omega_{OA}^2 r/2 = a_1 k_1 \mu_a = 50 \cdot 0,2 = 10 \text{ м/с}^2.$$

Стосовно побудови променя  $\vec{a}_1 b_1$ , який на плані прискорень в масштабі  $\mu_a$  зображує невідоме прискорення  $a_B$  точки  $B$  шатуну  $ACBD$ , зазначимо, що у випадку, коли траєкторією точки, прискорення якої визначається, є пряма, то промінь  $\vec{a}_1 b_1$  відшукується на підставі лише однієї теореми кінематики плоскопаралельного руху (6.17), тобто

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^i + \vec{a}_{AB}^n. \quad (13.24)$$

Це — замкнений чотирикутник прискорень при точці  $B$  ланки  $AB$  на механізмі в натурі (умовно на його схемі (рис. 13.5,  $a$ )).

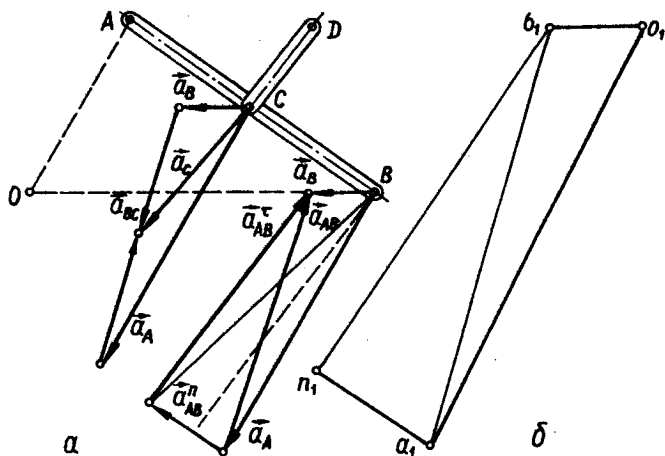


Рис. 13.5

Поділивши (13.24) на масштаб прискорень  $\mu_a$  і ввівши позначення  $\vec{a}_1 b_1 = \vec{a}_B / \mu_a$ ;  $\vec{a}_1 o_1 = \vec{a}_A / \mu_a$ ;  $\vec{a}_1 n_1 = \vec{a}_{AB}^n / \mu_a$ ;  $\vec{n}_1 b_1 = \vec{a}_{AB}^i / \mu_a$ , дістанемо векторне рівняння для графічного визначення величин  $\vec{a}_B$  і  $\varepsilon_{AB}$  за допомогою плану прискорень:

$$\vec{a_1 b_1} = \vec{a_1 a_1} + \vec{a_1 n_1} + \vec{n_1 b_1}. \quad (13.25)$$

Остання векторна рівність (13.25) графічно подається як замкнений чотирикутник  $a_1 a_1 n_1 b_1$  зі сторонами, які мають розмірність довжини, на відміну від чотирикутника прискорень (рис. 13.5, а), де його сторони є натуральними значеннями відповідних прискорень.

Чотирикутник  $a_1 a_1 n_1 b_1$  подібний до чотирикутника прискорень при точці  $B$  з коефіцієнтом подібності  $\mu_a$ . Його замикальна сторона  $\vec{a_1 b_1}$  є шуканим променем, перша сторона  $\vec{a_1 a_1}$  — відомий промінь, друга — вектор  $\vec{a_1 n_1}$  паралельний шатуну  $AB$  і має напрям від точки  $B$  до полюса  $A$ ; модуль цього вектора обчислюється за формулою

$$a_1 n_1 = \frac{a_{AB}^n}{\mu_a} = \frac{\omega_{OA}^2 l}{\mu_a} = \frac{ab^2 \mu_v^2}{AB \cdot \mu_l \mu_a}, \quad (13.26)$$

де  $ab$  — відома величина, її значення беруть з плану швидкостей (див. рис. 13.1, в).

Знайдемо шукане значення:

$$a_1 n_1 = \frac{31^2 \cdot 0,04^2}{60 \cdot 0,005 \cdot 0,2} = 25,6 \text{ мм}. \quad (13.27)$$

Третя сторона розглядуваного чотирикутника  $a_1 a_1 n_1 b_1$  — вектор  $\vec{n_1 b_1}$ , перпендикулярний до осі  $AB$  шатуну  $ABCD$ ; його довжину треба визначити. Четверта сторона, замикальна, лежить на відомій горизонтальній прямій, по якій поступально рухається повзун  $B$  механізму.

Отже, знаходження променя  $\vec{a_1 b_1}$  зводиться до розв'язування суто геометричної задачі на побудову: за двома сторонами  $\vec{a_1 a_1}$  і  $\vec{a_1 n_1}$  і напрямками двох інших  $\vec{n_1 b_1}$  і  $\vec{a_1 b_1}$  треба побудувати чотирикутник  $a_1 a_1 n_1 b_1$ . Наведена на рис. 13.5, б геометрична фігура є по суті планом прискорень для кривошипно-шатунного механізму в заданому його положенні. Вектор  $\vec{a_1 b_1}$  є шуканим променем, який в масштабі  $\mu_a$  зображує прискорення повзуна  $B$ :

$$\vec{a_B} = \mu_a \vec{a_1 b_1}; \quad a_B = \mu_a \cdot a_1 b_1. \quad (13.28)$$

Вимірявши довжину променя  $a_1 b_1$  в міліметрах і підставивши цей результат в формулу (13.28), обчислимо шукане прискорення точки  $B$ :

$$a_B = 0,2 \cdot 20 = 4,0 \text{ м/с}^2. \quad (13.29)$$

Маємо також, що відрізок  $a_1 b_1$  (вектор  $\overrightarrow{a_1 b_1}$ ), який сполучає кінці променів  $\overrightarrow{a_1 a_1}$  і  $\overrightarrow{a_1 b_1}$ , зображує в масштабі  $\mu_a$  оберталине прискорення точки  $B$  шатуна  $ACBD$  при його обертанні навколо полюса  $A$ :

$$\bar{a}_{AB} = \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^t = \overrightarrow{a_1 n_1} \mu_a + \overrightarrow{n_1 b_1} \mu_a = \mu_a \overrightarrow{a_1 b_1}, \quad (13.30)$$

тому

$$\frac{a_1 b_1}{AB} = \frac{\mu_l}{\mu_a} \sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}. \quad (13.31)$$

З цієї формули можна визначити кутове прискорення  $\varepsilon_{AB}$ . Та його можна знайти й за відомим співвідношенням

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^t}{l}$$

і виразити оберталине прискорення  $a_{AB}^t$  через відрізок  $a_1 n_1$  на плані прискорень (рис. 13.5, б):

$$\varepsilon_{AB} = \frac{n_1 b_1 \mu_a}{AB \mu_l} = \frac{88 \cdot 0,2}{60 \cdot 0,005} = 58,7 \text{ c}^{-2}. \quad (13.32)$$

Зауважимо, що напрям знайденого кутового прискорення  $\varepsilon_{AB}$  встановлюється за напрямом вектора  $\overrightarrow{n_1 b_1}$  на плані прискорень.

За кутовим прискоренням  $\varepsilon_{AB}$  обчислимо кут, який утворюють оберталині дотичні прискорення точок шатуна  $ACBD$  з відрізками, які сполучають дані точки з полюсами:

$$\beta_{AB} = \angle(\bar{a}_{AB}, \bar{a}_{AB}^n) = \text{arctg} \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \text{arctg} \frac{n_1 b_1}{a_1 n_1} = \text{arctg} \frac{86}{26} = 73^\circ.$$

Цей кут також можна виміряти транспортиром на плані прискорень — це кут між векторами  $\overrightarrow{a_1 b_1}$  і  $\overrightarrow{a_1 n_1}$ ; за даними вимірювання

$$\beta_{AB} = \angle(\overrightarrow{a_1 b_1}, \overrightarrow{a_1 n_1}) = 74^\circ. \quad (13.33)$$

Знайдемо прискорення  $a_C$  середньої точки  $C$  шатуна  $ACBD$ . Взв'явши за полюси точки  $A$  і  $B$  шатуна, виразимо прискорення точки  $C$  векторними рівностями:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}; \quad \bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{BC}, \quad (13.34)$$

які на схемі механізму в точці  $C$  геометрично зображують два трикутники зі спільною замикальною стороною  $\bar{a}_C$  (рис. 13.5, а). Поділимо (13.34) на масштаб прискорень  $\mu_a$ :

$$\overrightarrow{a_1 c_1} = \overrightarrow{a_1 a_1} + \overrightarrow{a_1 c_1}; \quad \overrightarrow{a_1 c_1} = \overrightarrow{a_1 b_1} + \overrightarrow{b_1 c_1}. \quad (13.35)$$

Графічно рівняння (13.35) подаються у вигляді фігури  $a_1 a_1 c_1 b_1$  (рис. 13.5, в), подібної фігури, утвореній прискореннями  $\vec{a}_B, \vec{a}_A, \vec{a}_{CA}, \vec{a}_C, \vec{a}_{BC}$  й зображеній у точці  $C$  ланки  $AB$ , з коефіцієнтом подібності  $\mu_a$ . Оскільки точка  $C$  лежить на спільній прямій з полюсами  $A$  і  $B$ , то обертальні прискорення  $\vec{a}_{AC}$  і  $\vec{a}_{BC}$  точки  $C$  навколо полюсів  $A$  і  $B$  становлять з прямою  $AB$  однакові кути. Кут, який вектори  $\vec{a}_{AC}$  і  $\vec{a}_{BC}$  утворюють з  $AB$ ,  $\beta_{AB} = 73^\circ$ . Зазначимо, що модулі  $\vec{a}_{AC}$  і  $\vec{a}_{BC}$  рівні, тому

$$\frac{a_{AC}}{a_{BC}} = \frac{l_{AC} \sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}}{l_{BC} \sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}} = \frac{l_{AC}}{l_{BC}} = \frac{\mu_l \cdot AC}{\mu_l \cdot BC} = \frac{AC}{BC}.$$

З цієї пропорції дістанемо співвідношення

$$a_1 c_1 = \frac{AC}{AB} a_1 b_1; \quad b_1 c_1 = \frac{BC}{AB} a_1 b_1, \quad (13.36)$$

з яких випливає: для знаходження променя  $\overrightarrow{a_1 c_1}$ , що в масштабі зображує прискорення точки  $C$  ланки  $AB$ , треба полюс  $o_1$  на плані прискорень (рис. 13.5, в) сполучити з тією точкою  $c_1$  на відрізку  $a_1 b_1$ , який зображує обертальне прискорення  $\vec{a}_{AB}$  точки  $B$  відносно точки  $A$  ланки, що ділить цей відрізок так само, як точка  $C$  ланки ділить відстань між її кінцями  $A$  і  $B$ .

Вимірявши довжину променя  $\overrightarrow{a_1 c_1}$ , обчислимо прискорення точки  $C$ :

$$a_C = \mu_a \cdot a_1 c_1 = 0,2 \cdot 55 = 11 \text{ м/с}^2. \quad (13.37)$$

Лишається побудувати промінь  $o_1 d_1$  і визначити прискорення точки  $D$  ланки  $ACBD$ . Зауважимо, що модуль й напрям шуканого прискорення  $\vec{a}_C$  невідомі. У подібних випадках, коли точка  $D$ , незмінно зв'язана з ланкою  $ACBD$ , лежить поза відрізком  $AB$  і не на його продовженні, то для відшукування на плані прискорень вершини  $d_1$  променя  $\overrightarrow{a_1 d_1}$  потрібні векторні рівності

$$\begin{aligned} \vec{a}_D &= \vec{a}_A + \vec{a}_{AD} = \vec{a}_A + \vec{a}_{AD}^n + \vec{a}_{AD}^t; \\ \vec{a}_D &= \vec{a}_B + \vec{a}_{BD} = \vec{a}_B + \vec{a}_{BD}^n + \vec{a}_{BD}^t. \end{aligned} \quad (13.38)$$

Якщо поділимо (13.39) на масштаб  $\mu_a$ , то дістанемо векторні рівняння, за допомогою яких знайдемо шуканий промінь  $\overrightarrow{a_1 d_1}$ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_1 d_1} &= \overrightarrow{a_1 a_1} + \overrightarrow{a_1 d_1} = \overrightarrow{a_1 a_1} + \overrightarrow{a_1 n_2} + \overrightarrow{n_2 d_1}; \\ \overrightarrow{a_1 d_1} &= \overrightarrow{a_1 b_1} + \overrightarrow{b_1 d_1} = \overrightarrow{a_1 b_1} + \overrightarrow{b_1 n_3} + \overrightarrow{n_3 d_1}. \end{aligned} \quad (13.39)$$

На рис. 13.6, *a* в точці *D* побудовано чотирикутники прискорень відповідності до (13.38). Цій геометричній фігурі натуральних значень прискорень відповідає подібна фігура з коефіцієнтом подібності  $\mu_a$  зі сторонами, які мають розмірність довжини, та є частиною плану прискорень (рис. 13.6, *б*).

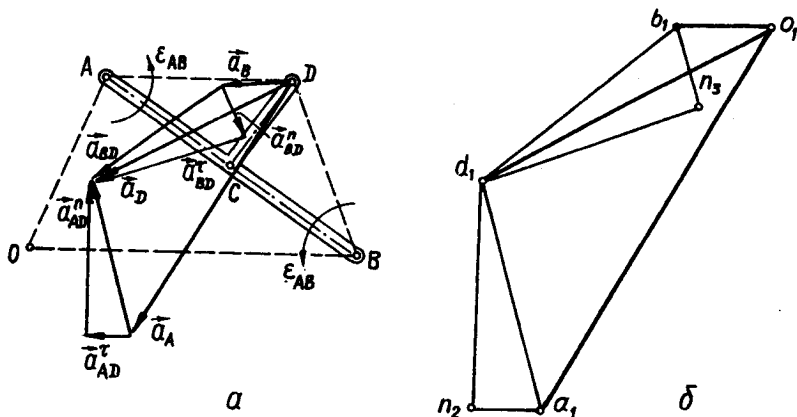


Рис. 13.6

Вершина  $d_1$  променя  $o_1d_1$  лежить на перетині прямих  $a_1d_1$  і  $b_1d_1$ , проведених через вершини  $a_1$  і  $b_1$  променів  $\overrightarrow{o_1a_1}$  і  $\overrightarrow{o_1b_1}$  під кутом  $\beta_{AB}$  до відрізків  $DA$  і  $DB$ , або на перетині перпендикулярів до відрізків  $DB$  і  $DA$ , проведених через точки  $n_3$  і  $n_2$ , оскільки довжини відрізків  $b_1n_3$  і  $a_1n_2$ , паралельних  $DB$  і  $DA$  відповідно, відомі з плану швидкостей:

$$b_1n_3 = \frac{ab^2\mu_v^2 \cdot BD}{AB^2\mu_l\mu_a} = \frac{31^2 \cdot 0,04^2 \cdot 36}{60^2 \cdot 0,005 \cdot 0,2} = 15,4 \text{ мм};$$

$$a_1n_2 = \frac{ab^2\mu_v^2 \cdot AD}{AB^2\mu_l\mu_a} = \frac{31^2 \cdot 0,04^2 \cdot 36}{AB^2\mu_l\mu_a} = 15,4 \text{ мм.}$$
(13.40)

Вимірявши в міліметрах довжину променя  $o_1d_1$  на плані прискорень (див. рис. 13.1, *в*, 13.6, *б*) і підставивши результат у формулу  $a_D = o_1d_1\mu_a$ , визначимо прискорення точки  $D$ :

$$a_D = 72 \cdot 0,2 = 14,4 \text{ м/с}^2.$$
(13.41)

За окремими фрагментами плану прискорень, шляхом їх накладання одного на одного таким чином, щоб однойменні промені

збігалися, дістанемо план прискорень (див. рис. 13.1, *в*) для заданого кривошипно-шатунного механізму.

**Метод миттєвого центра швидкостей і миттєвого центра прискорень.** Визначення кутових і лінійних швидкостей за цим методом є незалежним від побудови плану швидкостей, у той час як знаходження кутових і лінійних прискорень з використанням миттєвого центра прискорень пов'язане з даними плану прискорень.

Спочатку розглянемо метод миттєвого центра швидкостей. Миттєвий центр швидкостей  $P'_\omega$  кривошипа  $OA$  збігається з його центром  $O$ , а миттєвий центр швидкостей  $P''_\omega$  шатуна  $ACBD$  лежить на перетині перпендикулярів до напрямів швидкостей точок  $A$  і  $B$  ланки  $ACBD$ , проведених через ці точки (рис. 13.1, *а*). Позначимо відрізки, що сполучають миттєвий центр швидкостей  $P''_\omega$  ланки  $ACBD$  з її точками  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  відповідно  $AP''_\omega$ ,  $BP''_\omega$ ,  $CP''_\omega$  і  $DP''_\omega$ , тоді

$$v_B = v_A \frac{BP''_\omega}{AP''_\omega}; v_C = \frac{v_A \cdot CP''_\omega}{AP''_\omega}; v_D = \frac{v_A \cdot DP''_\omega}{AP''_\omega}. \quad (13.42)$$

Результати вимірювань дають:  $AP''_\omega = 97$  мм;  $BP''_\omega = 118$  мм;  $CP''_\omega = 103$  мм;  $DP''_\omega = 86$  мм. Підставимо значення швидкості  $v_A$  і дані (13.43) у формули (13.42) і знайдемо швидкості:

$$\begin{aligned} v_B &= 2 \cdot \frac{118}{97} = 2,43 \text{ м/с}; \\ v_C &= 2 \cdot \frac{103}{97} = 2,29 \text{ м/с}; \\ v_D &= 2 \cdot \frac{86}{97} = 1,77 \text{ м/с}. \end{aligned} \quad (13.43)$$

Також обчислимо кутову швидкість ланки  $ACBD$  за даними миттєвого центра швидкостей:

$$\begin{aligned} \omega_{AB} &= \frac{v_B}{\mu_l \cdot AP''_\omega} = \frac{v_B}{\mu_l \cdot BP''_\omega} = \frac{v_C}{\mu_l \cdot CP''_\omega} = \frac{v_D}{\mu_l \cdot DP''_\omega} = \\ &= \frac{2,0}{0,005 \cdot 97} = 4,12 \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \quad (13.44)$$

Визначимо кутове і лінійні прискорення за даними миттєвого центра прискорень  $P_\epsilon$ . Миттєвий центр прискорень для кривошипа  $OA$  збігається з його центром  $O$ . Миттєвий центр прискорень  $P_\epsilon$  шатуна  $ACBD$  можна знайти, якщо через точки  $A$  і  $B$  провести прямих до їх перетину під кутом  $\beta_{AB} = 74^\circ$  до напрямів  $\vec{a_1 a_1}$  і  $\vec{a_1 b_1}$ ;  $\beta_{AB}$  відкладається від зазначених напрямів проти руху стрілки годинника, оскільки в нашому випадку кутове прискорення  $\epsilon_{AB}$  має такий самий на-

прям ( $\varepsilon_{AB} > 0$ ). На цьому перетині знаходиться миттєвий центр прискорень (рис. 13.1, *a*).

Сполучимо точки *C* і *D* із знайденим миттєвим центром прискорень  $P_\varepsilon$  і запишемо формули для визначення прискорень:

$$a_B = a_A \frac{BP_\omega}{AP_\omega}; \quad a_C = a_A \frac{CP_\omega}{AP_\omega}; \quad a_D = a_A \frac{DP_\omega}{AP_\omega}; \quad (13.45)$$

$$\varepsilon_{AB} = \sqrt{\frac{a_A^2}{\mu_I^2 AP_\omega^2} - \omega_{AB}^4}.$$

За вимірюваннями відстані точок *A*, *B*, *C* і *D* від миттєвого центра прискорень  $P_\varepsilon$  становлять  $AP_\varepsilon = 66$  мм;  $BP_\varepsilon = 13$  мм;  $CP_\varepsilon = 36$  мм;  $DP_\varepsilon = 47$  мм. Підставимо у формули (13.45) і обчислимо шукані прискорення:

$$a_B = 20 \cdot \frac{13}{66} = 3,93 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C = 20 \cdot \frac{36}{66} = 10,9 \text{ м/с}^2; \quad (13.46)$$

$$a_D = 20 \cdot \frac{47}{66} = 14,2 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{AB} = \sqrt{\frac{a_A^2}{\mu_I^2 (AP_\varepsilon)^2} - \omega_{AB}^4} = \sqrt{\frac{400}{25 \cdot 10^{-6} \cdot 66^2} - 288} = 58,2 \text{ с}^{-2}. \quad (13.47)$$

**Властивості планів швидкостей і прискорень.** Проаналізувавши графічне розв'язування задачі на визначення кінематичних величин плоского механізму, сформулюємо основні властивості плану швидкостей і плану прискорень.

**Властивості плану швидкостей**

1. План швидкостей, побудований для даного положення плоского механізму (миттєвий план швидкостей), дає змогу графічно визначити швидкості не лише тих точок, промені яких уже є на плані швидкостей, а й будь-яких інших точок ланок механізму.

2. План швидкостей плоского механізму є поєднанням планів швидкостей усіх його ланок (у даному випадку — кривошипа, шатуна і повзуна).

3. План швидкостей окремої ланки механізму є геометричною фігурою, подібною відповідній геометричній фігурі, утвореній лініями, що сполучають ті чи інші точки ланки, і відрізками, що сполучають ці точки з миттєвим центром обертання цієї ланки, але повернуту відносно останньої в напрямі кутової швидкості ланки на прямиий кут.

4. Промені плану швидкостей в масштабі визначають вектори абсолютних швидкостей відповідних точок ланок механізму, а відрізки, що сполучають вершини променів, визначають обертальні швидкості точок при обертанні ланок навколо відповідних полюсів.

5. Полюс плану швидкостей зображує ті точки ланок механізму, які в даний момент часу нерухомі.

#### Властивості плану прискорень

1. План прискорень у масштабі відображає розподіл прискорень точок ланок механізму при конкретному його положенні в певний момент часу.

2. План прискорень дає змогу визначити прискорення не лише тих точок ланок механізму, для яких він побудований, а й будь-яких інших точок.

3. План прискорень механізму є поєднанням в одній геометричній фігурі планів прискорень окремих його ланок.

4. План прискорень окремої ланки механізму є геометричною фігурою, подібною до відповідної геометричної фігури на схемі механізму, утвореної відрізками, які сполучають відповідні точки ланки і миттєвий центр прискорень, але повернутою відносно останньої в напрямі кутового прискорення на кут  $180^\circ - \beta_{AB}$ .

5. Полюс плану прискорень зображує ті точки ланок механізму, які в даний момент часу мають нульові значення прискорень.

### § 40. Побудова плану швидкостей і плану прискорень для багатоланкового механізму \_\_\_\_\_

Вкажемо на деякі особливості у разі графічного визначення кутових і лінійних швидкостей та прискорень на певному прикладі багатоланкового механізму (рис. 13.7), які можливі при побудуванні планів швидкостей і прискорень стосовно добутих за їхніми даними кінематичних величин механізму.

Дослідимо графічно кінематику плоского багатоланкового механізму на прикладі задачі.

Для даного положення багатоланкового механізму (рис. 13.7) графічно, побудовою планів швидкостей і прискорень, визначити швидкості й прискорення точок  $B$ ,  $D$  і  $C$ , а також кутові швидкості й прискорення ланок  $AC$ ,  $CD$  і  $BO_2$  механізму, якщо відомо, що кривошип  $O_1A$  обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_{O_1A}$ , яка відповідає частоті обертання  $n = 50$  об/хв. Лінійні розміри ланок механізму в натурі:  $l_{O_1A} = 0,2$  м,  $l_{O_2B} = 0,5$  м,  $l_{AC} = 1$  м,  $l_{BC} = 0,2$  м,  $l_{DC} = 0,7$  м і



$l_{O_1 O_2} = 0,5$  м. Положення механізму задається кутом  $\varphi$  між горизонтальною прямою  $O_1 x_1$  і віссю кривошипа  $O_1 A$ , який дорівнює  $135^\circ$ .

Побудова плану швидкостей і прискорень для даного багатоланкового механізму не відрізняється по суті від аналогічної задачі на побудову векторних діаграм швидкості і прискорення з кривошипно-шатунним механізмом, яку було розглянуто у попередньому параграфі. Однак у розглядуваній задачі при визначенні прискорення точки  $B$  ланки  $AB$ , яка здійснює плоскопаралельний рух, треба, крім теореми кінематики плоскопаралельного руху

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t, \quad (13.48)$$

застосувати векторну рівність

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt}, \quad (13.49)$$

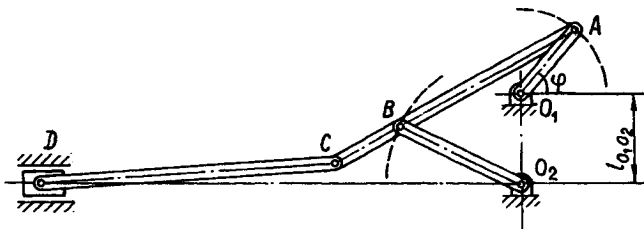


Рис. 13.7

яка визначає повне прискорення точки  $B$  стержня  $ABC$  під час її руху по колу радіусом  $O_2 B$ .

У формулі (13.49) величина  $\vec{a}_{Bn}$  є нормальним прискоренням точки  $B$  у разі обертального руху кривошипа  $O_2 B$ , яке має напрям від кінця  $B$  кривошипа  $O_2 B$  до його центра  $O_2$ . Друга складова повного прискорення точки  $B$  — дотичне прискорення  $\vec{a}_{Bt}$  — напрямлена по дотичній до кола, по якому рухається точка  $B$ , і перпендикулярна до кривошипа  $O_2 B$ .

Векторна рівність (13.48) геометрично зображує чотирикутник прискорень із замикальною стороною  $\vec{a}_B$  при точці  $B$  ланки  $AC$  механізму. Водночас векторна рівність (13.49) геометрично зображує трикутник прискорень з тією самою замикальною стороною  $\vec{a}_B$  в цій самій точці  $B$  ланки  $AB$ . З рис. 13.8, *a* видно, що кінець вектора прискорення  $\vec{a}_B$  точки  $B$  лежить на перетині прямих, з якими збігаються обертальне дотичне прискорення  $\vec{a}_{AB}^t$  точки  $B$  стержня  $AB$  при його обертанні навколо полюса  $A$  і дотичне прискорення  $\vec{a}_{Bt}$  цієї точки  $B$  у разі її руху по колу радіусом  $O_2 B$ .

На підставі теорем (13.48), (13.49) діленням на масштаб прискорення  $\mu_a$  дістанемо векторні рівняння, які на плані прискорень визначають промінь  $\vec{o_1 b_1}$ :

$$\vec{o_1 b_1} = \vec{o_1 a_1} + \vec{a_1 n_1} + \vec{n_1 b_1}, \quad (13.50)$$

$$\vec{o_1 b_1} = \vec{o_1 m_1} + \vec{m_1 b_1}, \quad (13.51)$$

де  $\vec{o_1 b_1} = \frac{\vec{a}_B}{\mu_a}$ ;  $\vec{o_1 a_1} = \frac{\vec{a}_A}{\mu_a}$ ;  $\vec{a_1 n_1} = \frac{\vec{a}_{AB}^n}{\mu_a}$ ;  $\vec{n_1 b_1} = \frac{\vec{a}_{AB}^{\tau}}{\mu_a}$ ;  $\vec{o_1 m_1} = \frac{\vec{a}_{Bn}}{\mu_a}$ ;  $\vec{m_1 b_1} = \frac{\vec{a}_{B\tau}}{\mu_a}$ .

З рівнянь (13.50) і (13.51) випливає, що вершина  $b_1$  променя  $\vec{o_1 b_1}$  є перетином перпендикулярів  $\vec{n_1 b_1}$  і  $\vec{m_1 b_1}$ , проведених на плані прискорень (рис. 13.8, б) через точки  $n_1$  і  $m_1$  до стержня  $AB$  і кривошипа  $O_2 B$  відповідно.

Звернемо увагу на побудову на плані прискорень променя  $\vec{o_1 c_1}$ , який зображує прискорення точки  $C$  (кінця стержня  $ABC$ ). Дана ситуація суттєво не відрізняється від випадку, коли точка  $C$  лежить між кінцями  $A$  і  $B$  стержня  $AB$  (див. рис. 13.1, в). Зрозуміло, що вершина  $c_1$  шуканого променя  $\vec{o_1 c_1}$  розташовується на продовженні відрізка  $\vec{o_1 b_1}$  на плані прискорень: цей відрізок сполучає вершини променів  $\vec{o_1 a_1}$  і  $\vec{o_1 b_1}$  (рис. 13.9, а, б).

Розглянемо цей випадок докладніше. Якщо за полюс при визначенні прискорення точки  $C$  взяти точки  $A$  і  $B$  стержня  $ABC$ , то дістанемо такі векторні рівності:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{AC}; \quad (13.52)$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{BC}; \quad (13.53)$$

які в точці  $C$  геометрично зображують трикутники прискорень зі спільною замикальною стороною  $\vec{a}_C$ ; причому вектори  $\vec{a}_{AC}$  і  $\vec{a}_{BC}$  розташовані на спільній прямій (рис. 13.9, а).

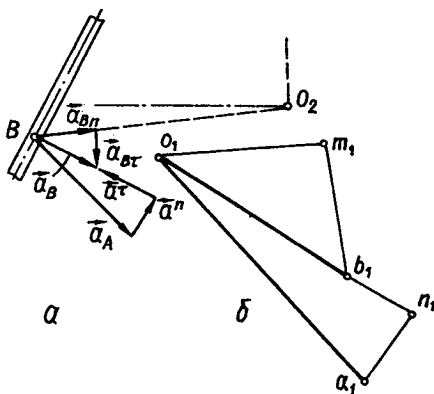


Рис. 13.8

Поділимо вирази (13.52) і (13.53) на масштаб прискорень:

$$\frac{\vec{a}_C}{\mu_a} = \frac{\vec{a}_A}{\mu_a} + \frac{\vec{a}_{AC}}{\mu_a}; \quad \frac{\vec{a}_C}{\mu_a} = \frac{\vec{a}_B}{\mu_a} + \frac{\vec{a}_{BC}}{\mu_a}.$$

Введемо позначення  $\vec{a}_C/\mu_a = \vec{a}_1c_1$ ;  $\vec{a}_A/\mu_a = \vec{a}_1a_1$ ;  $\vec{a}_{AC}/\mu_a = \vec{a}_1c_1$ ;  $\vec{a}_B/\mu_a = \vec{a}_1b_1$ ;  $\vec{a}_{BC}/\mu_a = \vec{b}_1c_1$ , тоді дістанемо векторні рівняння для визначення положення вершини  $c_1$  променя  $a_1c_1$  на продовженні відрізка  $a_1b_1$ :

$$\vec{a}_1c_1 = \vec{a}_1a_1 + \vec{a}_1c_1;$$

$$\vec{a}_1c_1 = \vec{a}_1b_1 + \vec{b}_1c_1. \quad (13.54)$$

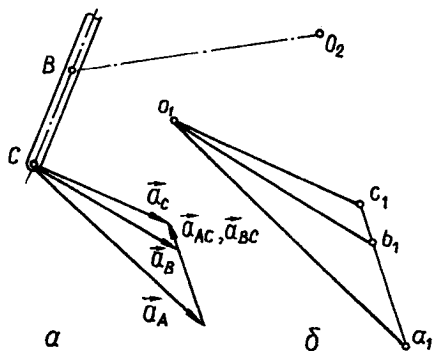


Рис. 13.9

Векторним трикутникам прискорень в точці  $C$  ланки  $AC$  (рис. 13.9,  $a$ ) відповідають два трикутники  $a_1c_1b_1$  і  $a_1b_1a_1$  із спільною стороною  $a_1b_1$ . Сторони трикутників  $a_1c_1b_1$  і  $a_1b_1a_1$  мають лінійну розмірність, водночас сторони трикутників прискорень (13.52), (13.53) мають розмірність прискорення. З подібності трикутників на плані прискорень

(рис. 13.9,  $b$ ) і трикутників прискорень на схемі механізму (рис. 13.9,  $a$ ) виведемо співвідношення для визначення положення вершини  $c_1$  променя  $a_1c_1$ :

$$\frac{a_{AB}}{a_1b_1} = \frac{a_{BC}}{b_1c_1}; \quad b_1c_1 = \frac{a_{BC}}{a_{AB}} a_1b_1 = \frac{\omega_{BC}^2 l_{BC}}{\omega_{AB}^2 l_{AB}} a_1b_1;$$

$$b_1c_1 = \frac{BC}{AB} a_1b_1. \quad (13.55)$$

На рис. 13.10 наведено графічний розв'язок задачі: схема механізму в масштабі  $\mu_l = 0,01$  м/мм (рис. 13.10,  $a$ ); план швидкостей (рис. 13.10,  $b$ ) з масштабом  $\mu_v = 0,021$  м/с·мм; план прискорень (рис. 13.10,  $в$ ) з масштабом  $\mu_a = 0,0551$  м/с<sup>2</sup>·мм, а також масштабом  $\mu_{av} = 0,02755$  м/с<sup>2</sup>·мм.

За даними плану швидкостей (рис. 13.10,  $b$ ) визначимо лінійні і кутові швидкості: спочатку запишемо виміряні довжини променів і відрізків, що сполучають вершини променів:

$$ob = 57 \text{ мм}, \quad oc = 64 \text{ мм}, \quad od = 46 \text{ мм}; \quad (13.56)$$

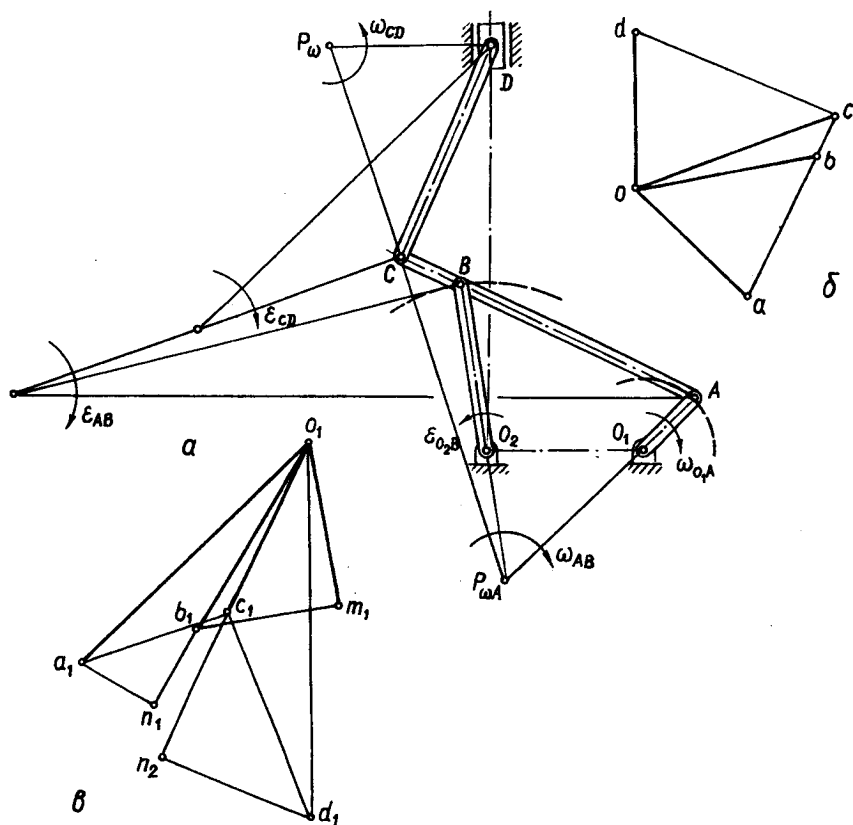


Рис. 13.10

$$ab = 50 \text{ мм}, cd = 66 \text{ мм}. \quad (13.57)$$

Лінійну швидкість кінця  $A$  кривошипа  $O_1A$  дістанемо за даними умови задачі:

$$v_A = \omega_{O_1A} l_{O_1A} = \frac{\pi n}{30} l_{O_1A} = \frac{3,1414 \cdot 50}{30} \cdot 0,20 = 1,05 \text{ м/с}. \quad (13.58)$$

Швидкості решти точок ланок дістанемо множенням довжин променів (13.56) на масштаб швидкостей  $\mu_v$ :

$$\begin{aligned} v_B &= \mu_v \cdot ob = 0,021 \cdot 57 = 1,20 \text{ м/с}; \\ v_C &= \mu_v \cdot oc = 0,021 \cdot 64 = 1,34 \text{ м/с}; \\ v_D &= \mu_v \cdot od = 0,021 \cdot 46 = 0,95 \text{ м/с}. \end{aligned} \quad (13.59)$$

Значення кутових швидкостей ланок механізму дістанемо з використанням (13.57) і масштабів швидкостей і довжин:

$$\omega_{AB} = \frac{ab\mu_v}{AB\mu_l} = \frac{50 \cdot 0,021}{80 \cdot 0,01} = 1,31 \text{ с}^{-1}; \quad (13.60)$$

$$\omega_{O_2B} = \frac{ob\mu_v}{O_2B\mu_l} = \frac{57 \cdot 0,021}{49 \cdot 0,01} = 2,44 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{CD} = \frac{cd\mu_v}{CD\mu_l} = \frac{66 \cdot 0,021}{70 \cdot 0,01} = 1,98 \text{ с}^{-1}.$$

Напрями  $\omega_{AB}$ ,  $\omega_{O_2B}$  і  $\omega_{DC}$  визначимо на підставі напрямів векторів  $\vec{ab}$ ,  $\vec{ob}$  і  $\vec{dc}$ .

Ті самі кінематичні величини — лінійні і кутові швидкості — можна також знайти за методом миттєвого центра швидкостей (рис. 13.10, а). Спочатку вимірюємо відстані точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  ланок від відповідних миттєвих центрів швидкостей:  $AP_{AB}^\omega = 82$  мм;  $BP_{AB}^\omega = 94$  мм;  $CP_{AB}^\omega = 106$  мм;  $DP_{CD}^\omega = 47$  мм;  $CP_{CD}^\omega = 94$  мм;  $O_2B = 50$  мм. За цими даними й на підставі відомих з кінематики плоскопаралельного руху співвідношень (6.37) обчислимо шукані величини:

$$v_B = v_A \frac{BP_{AB}^\omega}{AP_{AB}^\omega} = 1,05 \cdot \frac{94}{82} = 1,20 \text{ м/с};$$

$$v_C = v_A \frac{CP_{AB}^\omega}{AP_{AB}^\omega} = 1,05 \cdot \frac{106}{82} = 1,35 \text{ м/с}; \quad (13.61)$$

$$v_D = v_C \frac{DP_{CD}^\omega}{CP_{CD}^\omega} = 1,35 \cdot \frac{47}{68} = 0,93 \text{ м/с};$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}^\omega \mu_l} = \frac{1,05}{82 \cdot 0,01} = 1,30 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{O_2B} = \frac{v_B}{O_2B \mu_l} = \frac{1,20}{50 \cdot 0,01} = 2,40 \text{ с}^{-1}; \quad (13.62)$$

$$\omega_{CD} = \frac{v_C}{CP_{CD}^\omega \mu_l} = \frac{1,35}{68 \cdot 0,01} = 1,99 \text{ с}^{-1}.$$

Порівняємо результати проведених обчислень (табл. 13.1).

Таблиця 13.1

| Кінематичні величини<br>багатоланкового механізму     | За планами |            |
|---|------------|------------|
|   | швидкостей | прискорень |
| <b>Швидкість<br/>точки, м/с</b>                       |            |            |
| $v_A$   | 1,05       | 1,05       |
| $v_B$   | 1,20       | 1,20       |
| $v_C$   | 1,34       | 1,35       |
| $v_D$   | 0,95       | 0,93       |
| <b>Кутова<br/>швидкість<br/>ланки, с<sup>-1</sup></b> |            |            |
| $\omega_{O_1A}$                                       | 5,23       | 5,23       |
| $\omega_{AB}$   | 1,31       | 1,30       |
| $\omega_{CD}$   | 1,98       | 1,99       |
| $\omega_{O_2B}$                                       | 2,44       | 2,40       |

За даними плану прискорень визначимо лінійні й кутові прискорення: вимірюємо довжини променів і відрізків, які сполучають вершини променів, а також урахуємо масштаб прискорень  $\mu_a$ . Прискорення кінця кривошипа  $O_1A$ , точки  $A$ , яке було вихідним при побудованні плану прискорень, обчислимо за даними умови задачі:

$$a_A = a_{An} = \omega_{O_1A}^2 l_{O_1A} = \frac{v_A^2}{l_{O_1A}} = \frac{1,05^2}{0,2} = 5,51 \text{ м/с}^2. \quad (13.63)$$

Запишемо результати вимірювань відрізків на плані прискорень:  $a_1a_1 = 100$  мм,  $a_1b_1 = 68$  мм,  $a_1c_1 = 61$  мм,  $a_1d_1 = 118$  мм;  $n_1b_1 = 26$  мм,  $n_2d_1 = 47$  мм,  $m_1b_1 = 44$  мм. На підставі цих даних обчислимо шукані кінематичні величини:

$$\begin{aligned} a_B &= \mu_a \cdot a_1b_1 = 0,0551 \cdot 68 = 3,75 \text{ м/с}^2; \\ a_C &= \mu_a \cdot a_1c_1 = 0,0551 \cdot 61 = 3,36 \text{ м/с}^2; \\ a_D &= \mu_a \cdot a_1d_1 = 0,0551 \cdot 118 = 6,56 \text{ м/с}^2; \end{aligned} \quad (13.64)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{AB} &= \frac{n_1b_1 \mu_a}{AB \mu_1} = \frac{26 \cdot 0,0551}{80 \cdot 0,01} = 1,79 \text{ с}^{-2}; \\ \varepsilon_{O_2B} &= \frac{m_1b_1 \mu_a}{O_2B \mu_1} = \frac{44 \cdot 0,0551}{50 \cdot 0,01} = 4,85 \text{ с}^{-2}; \\ \varepsilon_{CD} &= \frac{n_2d_1 \mu_a}{CD \mu_1} = \frac{47 \cdot 0,0551}{70 \cdot 0,01} = 3,69 \text{ с}^{-2}. \end{aligned} \quad (13.65)$$

Також вимірюємо на плані прискорень кути  $\beta_{AB}$ ,  $\beta_{CD}$  і  $\beta_{O_2B}$ , які утворюють обертальні прискорення точок ланок  $AB$ ,  $CD$  і  $O_2B$  з осями цих ланок:

$$\beta_{AB} = -44^\circ, \beta_{CD} = -43^\circ, \beta_{O_2B} = 40^\circ. \quad (13.66)$$

Лишається за положеннями миттєвих центрів прискорень ланок  $AB$ ,  $CD$  і  $O_2B$  на схемі механізму (рис. 13.10, а) знайти ті самі кінематичні величини, які було одержано за допомогою плану прискорень. Вимірюємо відстані точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  ланок механізму  $AB$ ,  $CD$  до їх миттєвих центрів прискорень  $P_{AB}^e$ ,  $P_{CD}^e$  і  $P_{O_2B}^e$ :  $AP_{AB}^e = 211$  мм,  $BP_{AB}^e = 144$  мм,  $CP_{AB}^e = 129$  мм,  $DP_{CD}^e = 121$  мм,  $CP_{CD}^e = 63$  мм. На підставі пропорцій (6.48) обчислимо шукані прискорення:

$$\begin{aligned} a_B &= a_A \frac{BP_{AB}^e}{AP_{AB}^e} = 5,51 \cdot \frac{144}{211} = 3,76 \text{ м/с}^2; \\ a_C &= a_A \frac{CP_{AB}^e}{AP_{AB}^e} = 5,51 \cdot \frac{129}{211} = 3,37 \text{ м/с}^2; \\ a_D &= a_C \frac{DP_{CD}^e}{CP_{CD}^e} = 3,36 \cdot \frac{121}{63} = 6,45 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (13.67)$$

Кутові прискорення ланок  $AB$ ,  $CD$  і  $O_2B$  можна просто обчислити за формулою (6.50) і з урахуванням значень (13.65) і (13.66):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{AB} &= \omega_{AB}^2 \operatorname{tg} \beta_{AB} = 1,30^2 \operatorname{tg} 44^\circ = 1,63 \text{ с}^{-2}; \\ \varepsilon_{DC} &= \omega_{DC}^2 \operatorname{tg} \beta_{DC} = 1,99^2 \operatorname{tg} 43^\circ = 3,53 \text{ с}^{-2}; \\ \varepsilon_{O_2B} &= \omega_{O_2D}^2 \operatorname{tg} \beta_{O_2D} = 2,40^2 \operatorname{tg} 40^\circ = 4,83 \text{ с}^{-2}. \end{aligned} \quad (13.68)$$

Порівняємо результати графічного розв'язку задачі (табл. 13.2).

Нарешті звернемо увагу на напрями кутових швидкостей і кутових прискорень ланок даного плоского механізму. Насамперед зазначимо, що напрями кутових швидкостей ланок  $AB$ ,  $CD$  і  $BO_2$  встановлюються напрями векторів  $\overrightarrow{ab}$ ,  $\overrightarrow{cd}$  і  $\overrightarrow{ob}$ , оскільки точки  $B$ ,  $D$  ланок  $ABC$ ,  $CD$  і  $BO_2$  при їх обертанні (в даному положенні механізму) навколо полюсів  $A$ ,  $C$  і  $O_2$  мають лінійні швидкості  $\vec{v}_{AB} = \mu_v \overrightarrow{ab}$ ,  $\vec{v}_{CD} = \mu_v \overrightarrow{cd}$ ,  $\vec{v} = \vec{v}_B = \mu_v \overrightarrow{ob}$ . Напрями кутових прискорень цих самих ланок визначаються напрями векторів  $\overrightarrow{n_1 b_1}$ ,  $\overrightarrow{n_2 d_1}$  і  $\overrightarrow{m_1 b_1}$  на

Таблиця 13.2

| Кінематичні величини багатоланкового механізму | За планом прискорень | За методом миттєвого центра швидкостей |
|--|----------------------|--|
| Прискорення точки, $m/c^2$                     |                      |  |
| $a_A$  | 5,51                 | 5,51                                   |
| $a_B$  | 3,75                 | 3,76                                   |
| $a_C$  | 3,36                 | 3,37                                   |
| $a_D$  | 6,56                 | 6,45                                   |
| Кутове прискорення ланки, $c^{-2}$             |                      |  |
| $\varepsilon_{AB}$                             | -1,79                | -1,63                                  |
| $\varepsilon_{DC}$                             | -3,69                | -3,53                                  |
| $\varepsilon_{O_2B}$                           | 4,85                 | 4,83                                   |
| $\varepsilon_{O_1A}$                           | 0                    | 0                                      |

плані прискорень, оскільки точки  $B, D$  ланок  $ABC, CD$  і  $O_2B$  при їх обертанні навколо полюсів  $A, C$  і  $O_2$  мають обертальні дотичні прискорення

$$\vec{a}_{AB}^x = \mu_a \vec{n}_1 b_1, \vec{a}_{CD}^x = \mu_a \vec{cd},$$

$$\vec{a}_{O_2B}^x = \vec{a}_{Bc} = \mu_a \vec{m}_1 b_1.$$

У табл. 13.1 і 13.2 враховано знаки кутових швидкостей і прискорень. Отже, відповідно до зроблених зауважень дістанемо висновок, що всі ланки розглядуваного механізму в заданому положенні здійснюють обертання проти руху стрілки годинника, причому обертальний рух для ланок  $O_1A, ABC$  і  $CD$  є сповільненим, а для ланки  $O_2B$  — прискореним обертальним рухом (рис. 13.10).

Стосовно вибору масштабів при графічному розв'язуванні задач на визначення кінематичних величин цілком зрозуміло, що чим менші значення масштабів як лінійного,

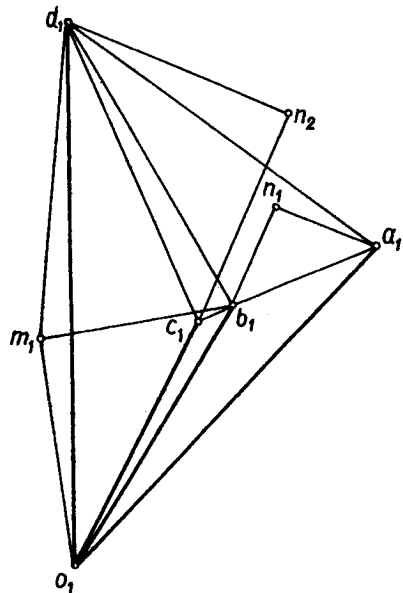


Рис. 13.11



так і масштабів швидкостей і прискорень, тим точніші результати розв'язку задачі.

На рис. 13.11 наведено план прискорень для розглядуваного багатоланкового механізму з масштабом  $\mu_a = 0,0276 \text{ м/с}^2 \cdot \text{мм}$ , а далі в табл. 13.3 подано результати розв'язання даної задачі за планом прискорень із зазначеним масштабом (попередні лінійний масштаб і масштаб швидкостей збережено) і методом проєкцій для їх зіставлення.

#### § 41. Векторне (геометричне) визначення лінійних, кутових швидкостей і прискорень кривошипно-шатунного механізму

Векторний спосіб визначення як лінійних, так і кутових швидкостей і прискорень полягає в тому, що векторні теореми кінематики, на підставі яких досліджується той чи інший вид руху, розглядаються у вигляді багатокутників швидкостей або прискорень, залежно від того, які кінематичні величини треба знайти — швидкості чи прискорення. У простіших задачах кінематики, наприклад задачах кінематики плоскопаралельного руху такими багатокутниками є їхні часткові випадки — трикутники швидкостей і чотирикутники прискорень, які можна замінити трикутниками прискорень.

Для знаходження невідомих кінематичних величин геометричним методом багатокутники швидкостей і прискорень будуть схематично без введення відповідних масштабів, на відміну від графічного розв'язання задач, коли масштаби вводять обов'язково, але така побудова враховує геометричні властивості досліджуваних матеріальних тіл.

Помітною особливістю розглядуваного способу розв'язування задач кінематики є те, що невідомі величини — сторони багатокутників швидкостей і прискорень — визначаються на підставі теорем геометрії, а також формул і положень тригонометрії, які відображають співвідношення між елементами в багатокутниках швидкостей і прискорень.

Проілюструємо геометричний метод на прикладі задачі з кривошипно-шатунним механізмом (див. § 39), яку вже розв'язано графічно, тобто за допомогою побудови планів швидкостей і прискорень.

Розв'язування задачі розпочнемо з визначення швидкості кінця  $A$  кривошипа  $O_1A$  за його відомою кутовою швидкістю  $\omega_{O_1A} = 10 \text{ с}^{-1}$  і довжиною  $r = 0,2 \text{ м}$ :

$$v_A = \omega_{O_1A} r = 10 \cdot 0,2 = 2 \text{ м/с.} \quad (13.69)$$

Вектор знайденої швидкості напрямлений по перпендикуляру до кривошипа  $O_1A$  в бік його обертання за рухом стрілки годинника (див. рис. 13.3, *a*).

За значенням і напрямом швидкості точки  $A$  можна відшукати швидкості точки  $B$  шатуна  $ACBD$ , оскільки пряма, на якій лежить вектор швидкості  $\vec{v}_B$  точки  $B$ , відома — вона має горизонтальне положення і проходить через центр  $O$  кривошипа й центр  $B$  повзуна механізму. Запишемо теорему кінематики плоскопаралельного руху (6.9):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}. \quad (13.70)$$

Цю векторну рівність розглянемо як замкнений трикутник швидкостей, в якому замикальною стороною є вектор швидкості  $\vec{v}_B$  точки  $B$ ; його модуль і напрям невідомі, їх треба визначити. Першою стороною трикутника швидкостей вважаємо відому швидкість  $\vec{v}_A$  кінця  $A$  кривошипа — це швидкість полюса  $A$ , а другою його стороною — оберտальна швидкість  $\vec{v}_{AB}$  точки  $B$  при обертанні ланки  $ACBD$  навколо полюса  $A$ . Про останню швидкість знаємо, що її вектор перпендикулярний до відрізка  $AB$ , але в який бік вона напрямлена — невідомо, також невідоме її значення.

Для того щоб побудувати трикутник швидкостей відповідно до векторної формули (13.70) треба розв'язати суто геометричну задачу: за відомою однією стороною і прямими, паралельними двом іншим сторонам, побудувати трикутник. У цьому разі з полюса  $A$  без зміни модуля й напрямку переносимо його швидкість  $\vec{v}_A$  у точку  $B$  — це перша сторона. Через кінець відомого вектора  $\vec{v}_A$  з початком у точці  $B$  проводимо до відрізка  $AB$  перпендикуляр до перетину з прямою, на якій лежить вектор швидкості  $\vec{v}_B$ . Дістанемо шуканий трикутник з вершинами на початку і кінці вектора швидкості полюса  $\vec{v}_A$ , а в зазначеній точці перетину (див. рис. 13.3, *a*) розташована його третя вершина.

Напрями шуканих швидкостей — оберտальної  $\vec{v}_{AB}$  і швидкості точки  $B$  можна знайти за напрямом обходу по контуру побудованого трикутника швидкостей у напрямі швидкості полюса  $\vec{v}_A$ : оберտальна швидкість  $\vec{v}_{AB}$  збігається з напрямом обходу, а швидкість  $\vec{v}_B$  точки  $B$  протилежна йому.

Не звертаючи уваги на напрями сторін у трикутнику швидкостей, розглянемо суто геометричну задачу на визначення трикутника із застосуванням теореми синусів:

$$\frac{v_B}{\sin \angle(\vec{v}_A, \vec{v}_{AB})} = \frac{v_A}{\sin \angle(\vec{v}_B, \vec{v}_{AB})}; \quad \frac{v_{AB}}{\sin \angle(\vec{v}_A, \vec{v}_B)} = \frac{v_A}{\sin \angle(\vec{v}_B, \vec{v}_{AB})}$$

Підставимо значення кутів  $\angle(\vec{v}_A, \vec{v}_{AB}) = 84,74^\circ$ ;  $\angle(\vec{v}_B, \vec{v}_{AB}) = 54,74^\circ$ ;  $\angle(\vec{v}_A, \vec{v}_B) = 30^\circ$ :

$$v_B = v_A \frac{\sin \angle(\vec{v}_A, \vec{v}_{AB})}{\sin \angle(\vec{v}_B, \vec{v}_{AB})} = 2,0 \cdot \frac{\sin 84,74^\circ}{\sin 54,74^\circ} = 2,44 \text{ м/с};$$

$$v_{AB} = v_A \frac{\sin \angle(\vec{v}_A, \vec{v}_B)}{\sin \angle(\vec{v}_B, \vec{v}_{AB})} = 2,0 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 54,74^\circ} = 1,22 \text{ м/с}.$$

За обертальною швидкістю  $\vec{a}_{AB}$  точки  $B$  навколо полюса  $A$  і довжиною відрізка  $l_{AB} = l = 0,3$  м дістанемо значення кутової швидкості  $\omega_{AB}$  ланки  $ACBD$ :

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \frac{1,22}{0,3} = 4,08 \text{ с}^{-1}. \quad (13.71)$$

Зауважимо, що вектор  $\vec{a}_{AB}$  умовно перенесено з точки  $B$  у кінець вектора  $\vec{v}_A$ . За напрямом обертальної швидкості  $\vec{v}_{AB}$  точки  $B$  навколо полюса  $A$  встановимо напрям кутової швидкості ланки  $ACBD$ ; вона напрямлена проти руху стрілки годинника (рис. 13.12).

На рис. 13.3, а в точці  $C$  ланки  $ACBD$  на підставі векторних рівнянь

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC}; \quad \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{BC},$$

що виражають теорему (6.9), яку застосовано двічі: коли за полюс править точка  $A$ , і коли полюсом є інша точка ланки  $ACBD$  — точка  $B$ , побудовано два замкнених трикутники швидкостей  $v_A v_{AC} v_C$  і  $v_B v_{BC} v_C$ .

З трикутника швидкостей  $v_B v_{BC} v_C$  (рис. 13.3) на підставі теореми косинусів запишемо:

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + v_{BC}^2 - 2v_B v_{BC} \cos \angle(\vec{v}_B, \vec{v}_{BC})}. \quad (13.72)$$

Обертальна швидкість точки  $C$  при обертанні ланки  $ACBD$  навколо полюса  $B$

$$v_{BC} = \omega_{AB} l/2 = 4,08 \cdot 0,15 = 0,612 \text{ м/с}.$$

Тоді з формули (13.72) дістанемо швидкість точки  $C$ :

$$v_C = \sqrt{2,44^2 + 0,612^2 - 2 \cdot 2,44 \cdot 0,612 \cdot \cos 54,74^\circ} = 2,15 \text{ м/с}.$$

В точці  $D$  ланки  $ACBD$  на підставі векторних рівнянь

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{AD}; \quad \vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{BD}$$

побудовано два трикутники швидкостей  $v_B v_{BD} v_D$  і  $v_A v_{AD} v_D$ . З одного із них, наприклад  $v_A v_{AD} v_D$ , за теоремою косинусів знайдемо швидкість точки  $D$ :

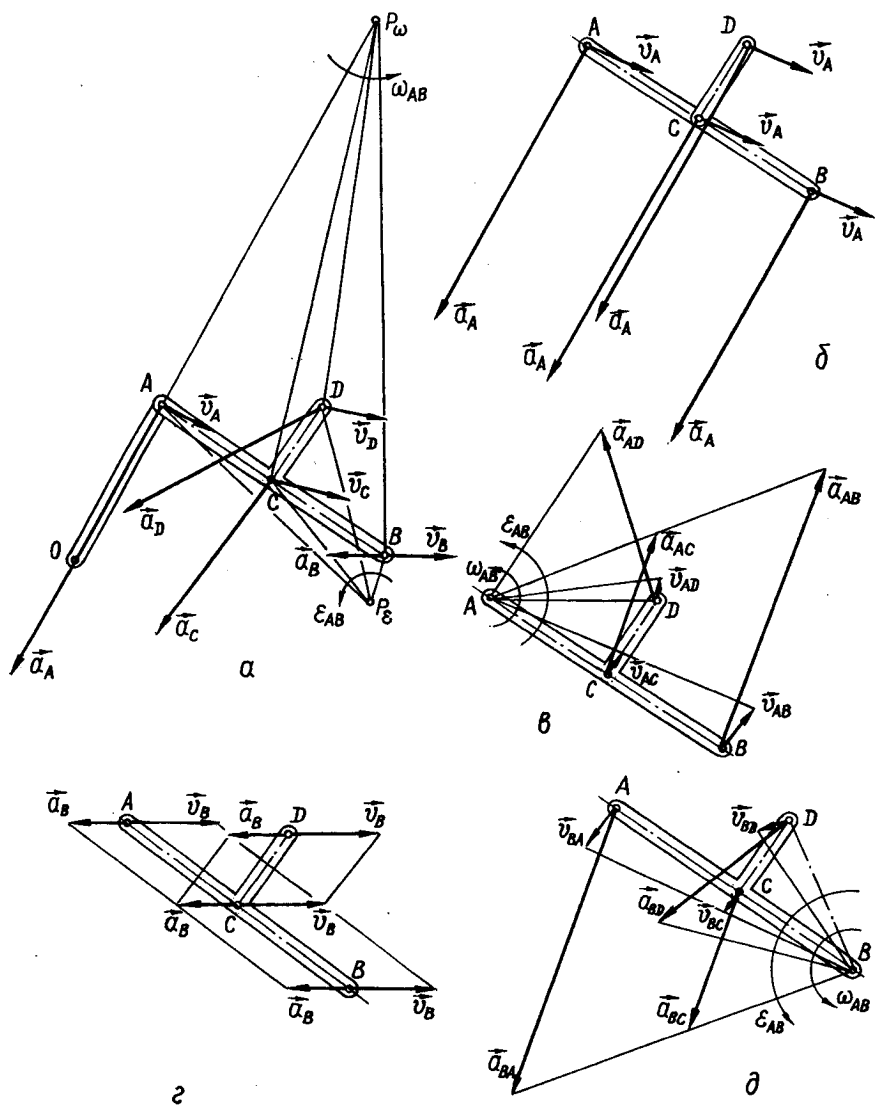


Рис. 13.12

$$v_D = \sqrt{v_A^2 + v_{AD}^2 - 2v_A v_{AD} \cos \angle(\vec{v}_A, \vec{v}_{AD})}.$$

Оскільки обертальна швидкість точки  $B$  навколо полюса  $A$

$$v_{AD} = \omega_{AB} l_{AD} = \omega_{AB} \sqrt{l_{AC}^2 + l_{CD}^2} = 4,08 \cdot \sqrt{0,15^2 + 0,1^2} = 0,736 \text{ м/с},$$

то шукана швидкість

$$v_D = \sqrt{4 + 0,736^2 - 2 \cdot 2 \cdot 0,736 \cdot \cos 60,65^\circ} = 1,76 \text{ м/с}.$$

За добутих значенням кутової швидкості  $\omega_{AB}$  ланки  $ACBD$  можна визначити прискорення точок  $B$ ,  $C$  і  $D$ , а також кутове прискорення ланки.

На рис. 13.5,  $a$  на підставі векторної рівності

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t,$$

що виражає теорему про прискорення точки тіла в разі його плоскопаралельного руху (6.16), побудовано чотирикутник прискорень  $a_A a_{AB}^n a_{AB}^t a_B$  у точці  $B$  ланки  $ACBD$ . Його можна замінити трикутником прискорень  $a_A a_{AB} a_B$ , оскільки

$$\vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t = \vec{a}_{AB} \text{ і } \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}.$$

Прискорення точки  $A$  (полюса  $A$ ) як кінця кривошипа  $OA$  є нормальним  $\vec{a}_{An}$ , оскільки  $\omega_{OA}$  — стала,  $a_{At} = 0$  і напрямлене вздовж осі кривошипа  $OA$  до його центра  $O$ . Його величина

$$a_A = a_{An} = \omega_{OA}^2 r = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ м/с}^2.$$

Звернемо увагу на чотирикутник прискорень у точці  $B$ . У векторній рівності (13.73), яка геометрично відповідає замкненому чотирикутнику  $a_A a_{AB}^n a_{AB}^t a_B$ , прискорення  $\vec{a}_A$  полюса  $A$  є першою стороною цього чотирикутника, обертальне нормальне прискорення  $\vec{a}_{AB}^n$  — його другою стороною, обертальне дотичне  $\vec{a}_{AB}^t$  — третьою, і четвертою замикальною є шукане прискорення  $\vec{a}_B$  точки  $B$ .

Розглянемо напрями окремих прискорень. Прискорення  $\vec{a}_A$  полюса  $A$  вже визначено. Обертальне нормальне прискорення  $\vec{a}_{AB}^n$  точки  $B$  колінарне відріzkу  $AB$  і має напрям від точки  $B$  до полюса  $A$ ,

$$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 l = 4,08^2 \cdot 0,3 = 4,99 \text{ м/с}^2. \quad (13.73)$$

Про обертальне дотичне прискорення  $\vec{a}_{AB}^t$  точки  $B$  відомо, що воно перпендикулярне до відрізка  $AB$ , а в який бік по перпендикуляру до  $AB$  воно напрямлене, невідомо; цей напрям належить визначити.

Модуль і напрям прискорення  $a_B$  точки  $B$  невідомі, як і прискорення  $\vec{a}_{AB}^{\cdot}$ , але відомо, на якій прямій лежить вектор  $\vec{a}_B$ : це — горизонтальна пряма  $OB$ . Сторони  $a_{AB}^{\cdot}$  і  $a_B$  можна знайти, якщо через кінець вектора  $\vec{a}_{AB}^n$  до  $AB$  провести перпендикулярну пряму. Точка її перетину з горизонтальним відрізком  $OB$  є спільним кінцем шуканих векторів прискорень  $\vec{a}_{AB}^{\cdot}$  і  $\vec{a}_B$ .

Зауважимо: якщо в чотирикутнику прискорень  $a_A a_{AB}^n a_{AB}^{\cdot} a_B$  точку  $B$  вважати першою його вершиною, кінець вектора  $\vec{a}_A$  — другою, кінець вектора  $\vec{a}_{AB}^n$  — третьою, то його четверта вершина лежить на перетині прямих, по яких напрямлені повне прискорення  $\vec{a}_B$  даної точки  $B$  і його обертальне дотичне прискорення  $\vec{a}_{AB}^{\cdot}$ .

На завершення розгляду питання про напрями прискорень у чотирикутнику прискорень  $a_A a_{AB}^n a_{AB}^{\cdot} a_B$  зазначимо, що складові прискорень  $\vec{a}_{AB}^n$  і  $\vec{a}_{AB}^{\cdot}$  в дійсності прикладені в точці  $B$ , результуюче прискорення якої вже знаходили; напрями прискорень  $\vec{a}_B$ ,  $a_{AB}^n$ ,  $\vec{a}_{AB}^{\cdot}$  мають збігатися з напрямом обходу по контуру чотирикутника в напрями першої сторони — прискорення  $\vec{a}_A$  полюса, а напрям  $\vec{a}_B$  протилежний до обходу по контуру.

Для того щоб визначити значення прискорень  $\vec{a}_{AB}^{\cdot}$  і  $\vec{a}_B$ , відрізком  $BL$  поділимо чотирикутник прискорень на два трикутники:  $BLa_B$  і  $Ba_AL$ . За теоремою косинусів знайдемо проміжне значення  $BL$ , що має розмірність прискорення:

$$\begin{aligned} BL &= \sqrt{(a_{AB}^n)^2 + a_A^2 - 2a_{AB}^n a_A \cos \angle(\vec{a}_A, \vec{a}_{AB}^n)} = \\ &= \sqrt{4,99^2 + 20^2 - 2 \cdot 4,99 \cdot 20 \cdot \cos 84,74^\circ} = 20,17 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (13.74)$$

Далі розглянемо кути в трикутнику  $BLa_B$ . Кут між векторами  $\vec{a}_{AB}^{\cdot}$  і  $\vec{a}_B$

$$\angle(\vec{a}_{AB}^{\cdot}, \vec{a}_B) = 360^\circ - (84,74^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 125,26^\circ;$$

$$\angle(\vec{a}_A, \vec{a}_B) = 180^\circ - (\angle(\vec{OA}, \vec{AB})) + \angle(\vec{BO}, \vec{BA})) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Кут між напрямками  $\vec{BL}$  і  $\vec{a}_{AB}^n$  дістанемо за теоремою синусів:

$$\begin{aligned} \angle(\vec{BL}, \vec{a}_{AB}^n) &= \arcsin \left[ a_A \frac{\sin \angle(\vec{a}_{AB}^n, -\vec{a}_A)}{BL} \right] = \\ &= \arcsin \frac{20 \cdot \sin 84,74^\circ}{20,17} = 80,89^\circ, \end{aligned}$$

а кут між напрямками  $\vec{a}_{AB}^{\cdot}$  і  $\vec{LB}$

$$\angle(\vec{a}_{AB}^{\cdot}, \vec{LB}) = 90^\circ - \angle(\vec{BL}, \vec{a}_{AB}^n) = 90^\circ - 80,89^\circ = 9,11^\circ.$$

На підставі знайдених кутів обчислимо за теоремою синусів прискорення точки  $B$ :

$$a_B = LB \frac{\sin \angle(\vec{a}_{AB}^{\tau}, \overrightarrow{LB})}{\sin \angle(\vec{a}_{AB}^{\tau}, \vec{a}_B)} = 20,17 \frac{\sin 9,11^{\circ}}{\sin 125,26^{\circ}} =$$

$$= \frac{20,17 \cdot 0,1583}{0,8165} = 3,9 \text{ м/с}^2.$$
(13.75)

Для того щоб знайти обертальне дотичне прискорення  $\vec{a}_{AB}^{\tau}$  точки  $B$ , треба спочатку визначити кут між вектором  $\vec{a}_B$  і відрізком  $BL$ :

$$\angle(\vec{a}_B, \overrightarrow{BL}) = \angle(\vec{a}_B, \vec{a}_A) - \angle(\overrightarrow{BL}, \vec{a}_A) =$$

$$= 60^{\circ} - (180^{\circ} - 80,89^{\circ} - \angle(\vec{a}_{AB}^n, -\vec{a}_A)) =$$

$$= 60^{\circ} - (180^{\circ} - 80,89^{\circ} - 84,74^{\circ}) = 45,63^{\circ}.$$

За теоремою синусів

$$a_{AB}^{\tau} = LB \frac{\sin \angle(\vec{a}_B, \overrightarrow{BL})}{\sin \angle(\vec{a}_{AB}^{\tau}, \vec{a}_B)} = 20,17 \frac{\sin 45,63^{\circ}}{\sin 125,26^{\circ}} = 17,658 \text{ м/с}^2.$$

За відомим обертальним прискоренням  $a_{AB}^{\tau}$  і відрізком  $AB$  визначимо абсолютне значення кутового прискорення  $\epsilon_{AB}$  ланки  $ACBD$ :

$$\epsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^{\tau}}{l} = \frac{17,658}{0,30} = 58,9 \text{ с}^{-2}.$$
(13.76)

Напрямок кутового прискорення  $\epsilon_{AB}$  встановимо за напрямом вектора дотичного обертального прискорення  $\vec{a}_B$ , прикладеного в точці  $B$  ланки  $ACBD$ . У розглядуваному випадку обертальний рух ланки навколо полюса  $A$  є прискореним і тому величини  $\epsilon_{AB}$  і  $\vec{a}_B$  мають однаковий напрям, протилежний обертанню стрілки годинника.

Для визначення прискорення точки  $C$  ланки на рис. 13.5,  $a$  в точці  $C$  зображено два трикутники прискорення  $Ca_Aa_{AC}$  і  $Ca_Ba_{BC}$  згідно із векторними рівностями  $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{AC}$ ,  $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{BC}$ . Зазначимо, що потреби в побудованні чотирикутника прискорень для визначення прискорення точки  $C$  немає, оскільки кутові характеристики ланки  $ACBD$  — кутову швидкість і кутове прискорення — знайдено. Крім того, точка  $C$ , прискорення якої треба відшукати, лежить на одному відрізку з точками  $A$  і  $B$ , прискорення яких уже відомі. У такому випадку повні обертальні прискорення  $\vec{a}_{AC}$  і  $\vec{a}_{BC}$  точки  $C$  навколо полюсів  $A$  і  $B$  відповідно напрямлені по спільній прямій, яка проходить через точку  $C$  (прискорення  $\vec{a}_{AC}$  і  $\vec{a}_{BC}$  при зображенні трикутників

прискорень переносяться паралельно з точки  $C$  у напрямі прискорень полюсів  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_B$  в їхні кінці) під кутом до осі  $AB$  ланки  $ACBD$

$$\beta_{AB} = \arctg \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \arctg \frac{58,9}{4,08^2} = 74,22^\circ. \quad (13.77)$$

Для визначення прискорення точки  $C$  розглянемо один із наведених замкнутих трикутників прискорень (рис. 13.5,  $a$ ), наприклад, трикутник  $Ca_Aa_{AC}$ . У цьому трикутнику першою стороною є відоме прискорення  $\vec{a}_A$  полюса  $A$ , другою — обертальне прискорення  $\vec{a}_{AC}$  точки  $C$  при обертанні ланки навколо полюса з кутовою швидкістю  $\omega_{AB}$  і кутовим прискоренням  $\varepsilon_{AB}$ , а третьою замикальною стороною — шукане прискорення  $\vec{a}_C$ . Отже, за теоремою косинусів

$$a_C = \sqrt{a_A^2 + a_{AC}^2 - 2a_A a_{AC} \cos \angle(-\vec{a}_A, \vec{a}_{AC})}. \quad (13.78)$$

Обертальне прискорення

$$\begin{aligned} a_{AC} &= \sqrt{(a_{AC}^t)^2 + (a_{AC}^n)^2} = \frac{l}{2} \sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4} = \\ &= \frac{0,3}{2} \cdot \sqrt{(58,9)^2 + 4,08^2} = 0,15 \cdot \sqrt{3747} = 9,18 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (13.79)$$

Кут між сторонами  $a_{AC}$  і  $a_A$  визначимо з очевидного співвідношення:

$$\angle(-\vec{a}_A, \vec{a}_{AC}) = 84,74^\circ - \beta_{AB} = 84,74^\circ - 74,22^\circ = 10,52^\circ. \quad (13.80)$$

Підставимо знайдені величини (13.79) і (13.80) в основну формулу (13.78), тоді прискорення  $\vec{a}_C$ :

$$a_C = \sqrt{400 + 84,27 - 2 \cdot 20 \cdot 9,18 \cdot \cos 10,52^\circ} = 11,1 \text{ м/с}^2. \quad (13.81)$$

Визначимо прискорення точки  $D$  ланки  $ACBD$  (див. 13.6,  $a$ ). На підставі векторних формул

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{AD}, \quad \vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{BD}, \quad (13.82)$$

або

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t, \quad \vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{BD}^n + \vec{a}_{BD}^t. \quad (13.83)$$

В точці  $D$  побудовано як трикутники, так і чотирикутники прискорень. Тут розглядаються два обертальні прискорення точки  $D$ : її обертальне прискорення  $\vec{a}_{AD}$  навколо полюса  $A$  і обертальне прискорення  $\vec{a}_{BD}$  навколо полюса  $B$ . Напрями цих відносних прискорень встановлюються на підставі правила обходу по контуру відповідного трикутника прискорень. Так, при обході контура трикутника при-



скорень  $Da_A a_{AD}$  у напрямі прискорення полюса  $\bar{a}_A$  напрям обертального прискорення  $\bar{a}_{AD}$  збігається з обходом, а напрям шуканого прискорення  $\bar{a}_D$  протилежний до нього.

Як і в разі відшукування прискорення точки  $C$  прискорення даної точки  $D$  знаходимо за теоремою косинусів:

$$a_D = \sqrt{a_A^2 + a_{AD}^2 - 2a_A a_{AD} \cos \angle(-\bar{a}_A, \bar{a}_{AD})}, \quad (13.84)$$

де

$$\begin{aligned} a_{AD} &= \sqrt{(a_{AD}^t)^2 + (a_{AD}^n)^2} = l_{AD} \sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4} = \\ &= \sqrt{0,15^2 + 0,1^2} \cdot \sqrt{58,9^2 + 4,08^2} = 11,03 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

А кут між сторонами  $a_{AD}$  і  $a_A$

$$\begin{aligned} \angle(-\bar{a}_A, \bar{a}_{AD}) &= \angle(-\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) - [180^\circ - (180^\circ - \\ &- (35,26^\circ - \arctg 2/3) - \beta_{AB} = 120^\circ - 75,79^\circ = 44,21^\circ. \end{aligned}$$

Підставимо знайдені значення у вихідну формулу (13.84) і обчислимо шукане прискорення:

$$a_D = \sqrt{20^2 + 11,03^2 - 2 \cdot 20 \cdot 11,03 \cdot \cos 44,21^\circ} = 14,3 \text{ м/с}^2. \quad (13.85)$$

На завершення розгляду геометричного способу визначення кінематичних величин кривошипно-шатунного механізму наведемо векторну картину розподілу швидкостей і прискорень у разі плоскопаралельного руху ланки  $ACBD$  механізму (рис. 13.12). На рис. 13.12,  $a$  при заданому положенні механізму подано абсолютні (результуючі) швидкості і прискорення точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  ланки, а на рис. 13.12,  $b$ ,  $v$  її результуючий миттєвий рух представлено відповідно поступальним з миттєвими швидкістю і прискоренням полюса  $A$  і миттєвим обертальним з абсолютними кутовою швидкістю  $\omega_{AB}$  та кутовим прискоренням  $\varepsilon_{AB}$  навколо полюса  $A$ . Можна побачити, що остання складова результуючого руху ланки є прискореним обертальним рухом, який здійснюється в даний момент часу проти руху стрілки годинника.

Зауважимо, що один і той самий миттєвий рух ланки  $ACBD$ , як і плоскопаралельний рух взагалі, можна нескінченною кількістю способів представити як поступальний і обертальний залежно від того, яку точку ланки ми виберемо за полюс. Так, на рис. 13.12,  $z$ ,  $d$  розглядуваний рух ланки представлено відповідно миттєвим поступальним зі швидкістю й прискоренням іншої точки ланки — полюса  $B$  і миттєвим обертальним навколо цього полюса  $B$  з такими самими абсолютними кутовими швидкістю й прискоренням, як і в разі обертання навколо полюса  $A$ .

Також на рис. 13.12, *a* в даному положенні механізму зображено миттєві центри швидкостей і прискорень, які позначено через  $P_{\omega}$  і  $P_{\varepsilon}$  відповідно. Розподіл швидкостей точок ланки  $ACBD$  відносно миттєвого центра швидкостей  $P_{\omega}$  аналогічний розподілу швидкостей точок тіла в разі обертального руху навколо нерухомої осі відносно самої осі. Також і розподіл прискорень точок ланки відносно миттєвого центра прискорень  $P_{\varepsilon}$  такий самий, як і в разі руху з перманентною віссю обертання.

#### § 42. Метод проекцій визначення кінематичних величин кривошипно-шатунного механізму \_\_\_\_\_

Метод проекцій визначення векторних величин тієї чи іншої фізичної природи дуже поширений у механіці. Його суть полягає в тому, що векторні теореми механіки, на підставі яких базується розв'язування задачі, попередньо записують як системи алгебраїчних рівнянь шляхом проектування векторних величин на певним чином вибрані взаємно перпендикулярні осі проекцій, тобто векторні величини замінюються їх прямокутними складовими, паралельними заданим напрямом (наприклад, осям прямокутних декартових координат або певним чином вибраним одиничним векторам).

Зазначений перехід від векторних рівнянь, які виражають теореми механіки, до рівнянь скалярних з дальшим визначенням за прямокутними компонентами векторних величин ґрунтується по суті на теоремі Піфагора. Якщо треба розв'язати плоску задачу механіки, то кожній векторній рівності методу проекцій відповідає система двох алгебраїчних рівнянь для визначення шуканих величин. У просторових задачах переходять від одного векторного рівняння до трьох скалярних.

Зауважимо, що метод проекцій широко застосовують у разі розв'язування складних задач механіки за допомогою комп'ютера.

В основу цього методу для задач кінематики плоскопаралельного руху покладено теореми про швидкість і прискорення точок тіла в разі його плоскопаралельного руху (6.9), (6.22) з подальшим знайденням на їх підставі алгебраїчних рівнянь вигляду (6.30).

Покажемо, як застосовують даний метод проекцій до визначення кінематичних величин кривошипно-шатунного механізму, який розглянуто вище, коли лінійні і кутові швидкості та прискорення було знайдено векторним методом.

Для того щоб на підставі теорем (6.91), (6.22) скласти скалярні рівняння вигляду (6.30) для визначення швидкості і прискорення точки  $B$  ланки  $ACBD$  за полюс візьмемо точку  $A$  і з неї побудуємо два орти  $\vec{l}_{\parallel}$  і  $\vec{l}_{\perp}$ , перший з них указує на напрям від полюса  $A$  до точки  $B$ , а

другий за напрямом збігається обертальним дотичним прискоренням  $\vec{a}_{AB}^{\tau}$  точки  $B$  навколо полюса  $A$  в припущенні, що відрізок  $AB$  здійснює миттєвий прискорений обертальний рух навколо полюса проти руху стрілки годинника (рис. 13.13).

Якщо траєкторії полюса і точки, швидкість і прискорення якої треба визначити, наперед відомі, то вводять дотичну і головну нормаль, уздовж додатних напрямів яких і спрямовують вектори швидкостей полюса і розглядуваної точки (по дотичних), а також їх абсолютні дотичні і нормальні прискорення. Відносні складові Обертальне нормальне прискорення точки напрямляють протилежно орту  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$ , обертальне дотичне — в напрямі орта  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$ .

Отже, розрахункова схема має вигляд, поданий на рис. 13.13, а, а векторні формули

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^{\tau} = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{l_{\parallel}^{\circ}} + \vec{a}_{AB}^{l_{\perp}^{\circ}}$$

переходять відповідно у рівності

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A - \vec{v}_{AB} = 0; \quad (13.86)$$

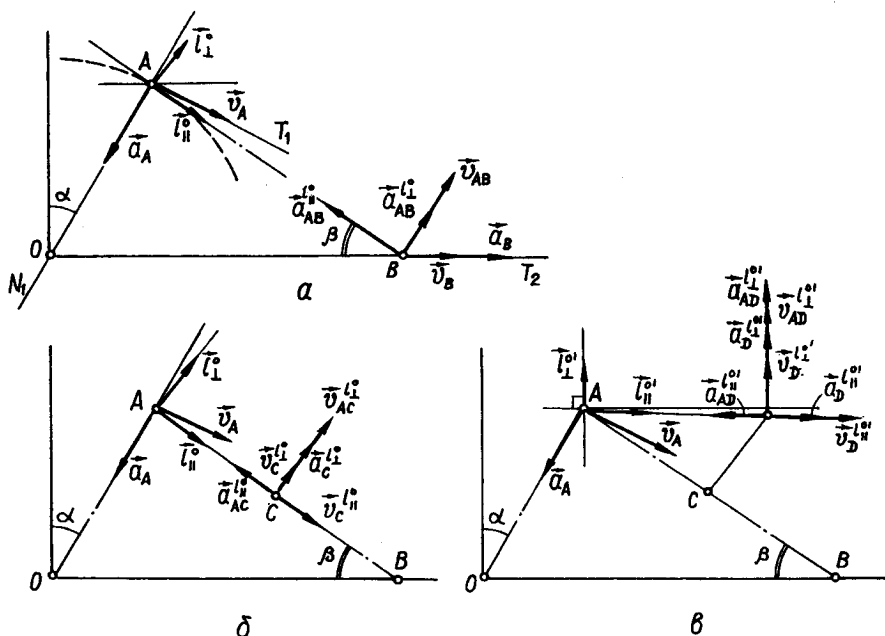


Рис. 13.13

$$\bar{a}_{Bx} + \bar{a}_{By} - \bar{a}_{Ax} - \bar{a}_{Ay} - \bar{a}_{AB}^{\prime\prime} - \bar{a}_{AB}^{\prime} = 0. \quad (13.87)$$

За схемою (рис. 13.13, а) з урахуванням (13.86) і (13.87) складемо шукані скалярні рівняння в проекціях на напрямки ортів

$$\vec{l}_{\parallel}^{\circ}) \quad v_B \sin(90^{\circ} - \beta) - v_A \cos(\beta - \alpha) = 0; \quad (13.88)$$

$$\vec{l}_{\perp}^{\circ}) \quad v_B \cos(90^{\circ} - \beta) - v_{AB} - v_A \sin(\beta - \alpha); \quad (13.89)$$

$$\vec{l}_{\perp}^{\circ}) \quad a_{Bx_2} \cos(90^{\circ} - \beta) - a_{AB}^{\prime} + a_{Ay_1} \cos(\beta - \alpha) = 0; \quad (13.90)$$

$$\vec{l}_{\parallel}^{\circ}) \quad a_{Bx_2} \cos\beta + a_{AB}^{\prime\prime} - a_{Ay_1} \cos(90^{\circ} + \alpha - \beta) = 0. \quad (13.91)$$

Слід врахувати, що при складанні рівнянь (13.88) — (13.91) проекції векторів  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_{AB}$ ,  $\vec{a}_{Ax_1}$ ,  $\vec{a}_{Ay_1}$ ,  $\vec{a}_{AB}^{\prime\prime}$  і  $\vec{a}_{AB}^{\prime}$  на орти  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  і  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$  беруть із знаками, протилежними тим, які ці проекції мають на розрахунковій схемі.

Підставимо в рівняння (13.88) — (13.91) відомі величини:

$$\begin{aligned} v_B \cos 35,26^{\circ} - 2 \cdot \cos 5,26^{\circ} &= 0; \\ v_B \sin 35,26^{\circ} - v_{AB} - 2 \cdot \sin 5,26^{\circ} &= 0; \\ a_B \sin 35,26^{\circ} - a_{AB}^{\prime} + 20 \cdot \cos 5,26^{\circ} &= 0; \\ a_B \cos 35,26^{\circ} + a_{AB}^{\prime\prime} - 20 \cdot \cos 84,74^{\circ} &= 0. \end{aligned} \quad (13.92)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (13.92). З першого рівняння дістанемо швидкість точки  $B$ :

$$v_B = \frac{2 \cdot \cos 5,26^{\circ}}{\cos 35,26^{\circ}} = 2,44 \text{ м/с},$$

з другого — обертальну швидкість точки  $B$  навколо полюса  $A$ :

$$\begin{aligned} v_{AB} &= v_B \sin 35,26^{\circ} - 2 \cdot \sin 5,26^{\circ} = \\ &= 2,44 \cdot \sin 35,26^{\circ} - 2 \cdot \sin 5,26^{\circ} = 1,225 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Кутова швидкість шатуна

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \frac{1,225}{0,3} = 4,08 \text{ с}^{-1}. \quad (13.93)$$

Додатні значення величин  $v_B$  і  $\varepsilon_{AB}$  свідчать про те, що ланка  $ACBD$  обертається проти руху стрілки годинника, коли точка  $B$  рухається по горизонтальній прямій  $OB$  зліва направо.

Розв'язком четвертого рівняння (13.92) є прискорення точки  $B$ :

$$\begin{aligned} a_B &= \frac{20 \cdot \cos 84,74^\circ - \omega_{AB}^2 l}{\cos 35,26^\circ} = \\ &= \frac{20 \cdot \cos 84,74^\circ - 4,08^2 \cdot 0,3}{\cos 35,26^\circ} = -3,87 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Розв'яжемо третє рівняння системи (13.92) відносно невідомої величини  $a_{AB}^i$ :

$$\begin{aligned} a_{AB}^i &= a_B \sin 35,26^\circ - 20 \cdot \cos 5,26^\circ = \\ &= -3,87 \cdot 0,5773 + 19,9158 = 17,68 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

За відомим обертальним дотичним прискоренням  $a_{AB}^i$  точки  $B$  і довжиною  $l$  відрізка  $AB$  обчислимо кутове прискорення ланки  $ACBD$ :

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^i}{l} = \frac{17,68}{0,3} = 58,9 \text{ с}^{-2}. \quad (13.94)$$

Визначимо швидкості і прискорення точок  $C$  і  $D$  ланки  $ACBD$ . Маємо розрахункові схеми для складання алгебраїчних рівнянь з невідомими величинами (рис. 13.13,  $a$ ,  $\theta$ ). Слід зауважити, що для точки  $C$ , яка лежить на відрізку  $AB$ , використовуються ті самі орти  $\vec{l}_\parallel$  і  $\vec{l}_\perp$ , а при знаходженні швидкості і прискорення точки  $D$  беруть нові напрями вздовж  $AD$  і перпендикулярно до  $AD$  — орти  $\vec{l}_\parallel$  і  $\vec{l}_\perp$ .

Оскільки траєкторії точок  $C$  і  $D$  невідомі, то вектори  $\vec{v}_C$ ,  $\vec{v}_D$ ,  $\vec{a}_C$  і  $\vec{a}_D$  розкладемо в напрямках введених ортів. Отже, величини  $\vec{v}_C$  і  $\vec{a}_C$  знайдемо за рівняннями

$$\begin{aligned} \vec{l}_\perp^\circ) -v_A \sin 5,26^\circ - v_{AC}^i + v_C^i &= 0; \\ \vec{l}_\parallel^\circ) -v_A \cos 5,26^\circ + v_C^{\parallel i} &= 0; \\ \vec{l}_\parallel^\circ) -a_A \cos 84,74^\circ + a_C^{\parallel i} + \omega_{AB}^2 l/2 &= 0; \\ \vec{l}_\perp^\circ) a_A \cos 5,26^\circ + a_C^{\perp i} - a_{AC}^i &= 0. \end{aligned} \quad (13.95)$$

З перших двох рівнянь системи (13.95) дістанемо невідомі  $v_C^{\parallel i}$  і  $v_C^i$ :

$$\begin{aligned} v_C^{\parallel i} &= v_A \cos 5,26^\circ = 2 \cdot 0,9958 = 1,9916 \text{ м/с}; \\ v_C^i &= v_{AC}^i + v_A \sin 5,26^\circ = \omega_{AB}^2 l/2 + v_A \cdot 0,0917 = \\ &= 4,08 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,0917 = 0,7958 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

За теоремою Піфагора обчислимо модуль  $v_C$ :

$$v_C = \sqrt{(v_C^{\prime\prime})^2 + (v_C^{\prime})^2} = \sqrt{1,9916^2 + 0,7958^2} = 2,14 \text{ м/с.}$$

Тоді можна визначити кут між напрямом вектора швидкості  $\vec{v}_C$  і відрізком  $CB$ :

$$\angle(\vec{v}_C, I_{\parallel}^{\circ}) = \arctg \frac{v_C^{\prime}}{v_C^{\prime\prime}} = \arctg \frac{0,7958}{1,9916} = 22^{\circ}.$$

Розв'язком двох інших рівнянь системи (13.95) є

$$a_C^{\prime\prime} = a_A \cos 84,74^{\circ} - \omega_{AB}^2 l/2 = 100 \cdot 0,2 \cdot 0,0917 - 4,08^2 \cdot 0,15 = -0,6661 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C^{\prime} = a_{AC}^{\prime} - a_A \cos 5,26^{\circ} = \varepsilon_{AB} l/2 - a_A \cos 5,26^{\circ} = 58,92 \cdot 0,15 - 20 \cdot 0,9958 = -11,078 \text{ м/с}^2.$$

Модуль прискорення точки  $C$

$$a_C = \sqrt{(a_C^{\prime\prime})^2 + (a_C^{\prime})^2} = \sqrt{0,6661^2 + 11,078^2} = 11,1 \text{ м/с}^2,$$

тоді кут між векторами  $\vec{a}_C$  і  $I_{\parallel}^{\circ}$

$$\angle(\vec{a}_C, I_{\parallel}^{\circ}) = \arccos \frac{a_C^{\prime\prime}}{a_C} = \arccos \left( \frac{0,6661}{11,09} \right) = 93,4^{\circ}.$$

З рис. 13.13 дістанемо систему рівнянь для знаходження швидкості і прискорення точки  $D$  ланки  $ACBD$ :

$$\vec{I}_{\perp}^{\circ} \cdot v_D^{\prime} + v_{AD}^{\prime} + v_A \sin \delta = 0;$$

$$\vec{I}_{\parallel}^{\circ} \cdot v_D^{\prime} - v_A \cos \delta = 0;$$

$$\vec{I}_{\perp}^{\circ} \cdot a_D^{\prime} + a_{AD}^{\prime} + a_A \cos \delta = 0;$$

$$\vec{I}_{\parallel}^{\circ} \cdot a_D^{\prime} + a_{AD}^{\prime} + a_A \sin \delta = 0,$$

(13.96)

а кут

$$\begin{aligned} \delta = \angle(\vec{v}_A, \vec{I}_{\parallel}^{\circ}) &= \angle(\vec{a}_A, -\vec{I}_{\perp}^{\circ}) = \angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) - 5,26^{\circ} = \\ &= 33,69^{\circ} - 5,26^{\circ} = 28,43^{\circ}. \end{aligned}$$

За першими двома рівняннями системи (13.96) знайдемо

$$v_D^{\perp} = v_A \cos \delta = 2 \cdot \cos 28,43^\circ = 1,7588 \text{ м/с};$$

$$\begin{aligned} v_D^{\parallel} &= v_{AD}^{\parallel} - v_A \sin \delta = \omega_{AB} \sqrt{l_{AC}^2 + l_{CD}^2} - v_A \sin \delta = \\ &= 4,08 \cdot \sqrt{0,15^2 + 0,10^2} - 2 \cdot \sin 28,43^\circ = -0,2161 \text{ м/с}, \end{aligned}$$

а за ними — модуль швидкості точки  $D$ :

$$v_D = \sqrt{(v_D^{\perp})^2 + (v_D^{\parallel})^2} = \sqrt{1,7588^2 + 0,2161^2} = 1,77 \text{ м/с}.$$

Кут між вектором  $\vec{v}_D$  і відрізком  $AD$

$$\angle(\vec{v}_D, AD) = \arccos \frac{v_D^{\perp}}{v_D} = \arccos \left( \frac{1,7588}{1,7719} \right) = 6,97^\circ.$$

#### § 43. Аналітичне визначення лінійних, кутових швидкостей і прискорень кривошипно-шатунного механізму

Аналітичний метод розв'язування задач механіки взагалі є найзагальнішим, що ґрунтується не на векторних теоремах і рівняннях подібно до графічного, геометричного та методу проєкцій, а на скалярних рівняннях, записаних у тих чи інших координатних системах, наприклад, у прямокутній декартовій системі координат; дає змогу розв'язувати задачі в загальному вигляді, з урахуванням всіх можливих станів руху механічних об'єктів.

Особливого значення набуває аналітичне визначення механічних величин тоді, коли передбачається програмування задач для дальшого їхнього розв'язання на електронно-обчислювальних машинах з метою здобуття загальної картини руху з графічним поданням результатів розв'язку.

Розглядуваний метод найчастіше застосовує скалярні рівняння в прямокутних декартових координатах, що надає цим рівнянням найпростішого вигляду порівняно з використанням інших координатних систем. Досить просто перейти від результатів аналітичного розв'язку задачі в скалярній формі до їх представлення за допомогою теореми Піфагора у вигляді векторних величин, оскільки попередньо знайдені аналітичним методом невідомі є проєкціями відповідних векторних величин на декартові прямокутні осі.

При аналітичному, геометричному та методі проєкцій дістають точніші результати розв'язку задач порівняно з добутими графічним способом.

При аналітичному розв'язуванні задач кінематики плоскопаралельного руху використовують рівняння (8.1), (8.3) і (8.7), перші два (8.1) у декартових координатах визначають закон руху окремих точок тіла, а (8.3) — проєкції їх швидкостей на ці осі, і, нарешті третя система двох рівнянь (8.7) — проєкції прискорення.

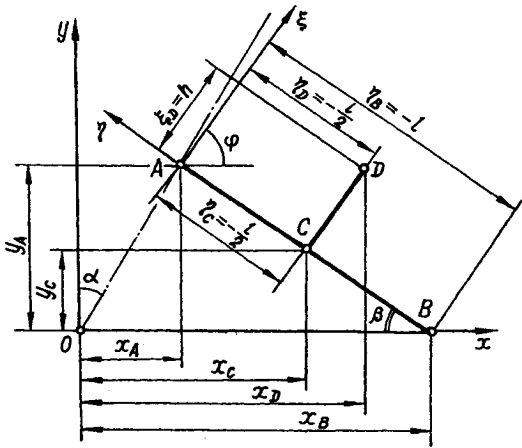


Рис. 13.14

Покажемо, як на підставі даних співвідношень (8.1), (8.2) і (8.7) можна знайти кінематичні величини на прикладі задачі з кривошипно-шатунним механізмом, яку було розглянуто в попередніх параграфах.

Використаємо (8.1),

$$x_B = x_A + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \quad (13.97)$$

$$y_B = y_A + \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi,$$

і запишемо закон руху повзуна  $B$  (рис. 13.14):

$$x_B = r \sin \alpha - l \sin \varphi; \quad (13.98)$$

$$0 = r \cos \alpha - l \cos \varphi. \quad (13.99)$$

З другої рівності (13.99) виразимо кут  $\varphi$  через  $\alpha$ :

$$\varphi = \arccos\left(\frac{r}{l} \cos \alpha\right),$$

або

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{r}{l} \cos \alpha\right), \quad (13.100)$$

де

$$\alpha = \omega_{OA} t = 10 t. \quad (13.101)$$



Підставимо величини (13.100) і (13.101) у формулу (13.98):

$$\begin{aligned}
 x_B &= r \sin \alpha + l \sin \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{r}{l} \cos \alpha \right) \right] = \\
 &= r \sin \alpha + l \cos \left[ \arcsin \left( \frac{r}{l} \cos \alpha \right) \right] = \\
 &= r \sin \alpha + l \sqrt{1 - \left( \frac{r}{l} \right)^2 \cos^2 \alpha}; \\
 x_B &= 0,2 \cdot \sin 10t + 0,3 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t} \text{ м/с.}
 \end{aligned} \tag{13.102}$$

Швидкість повзуна  $B$  знайдемо із співвідношення (8.3),

$$\dot{x}_B = r \dot{\alpha} \cos \alpha + \phi l \cos \phi, \tag{13.103}$$

продиференціювавши (13.100) по часу:

$$\dot{x}_B = r \omega_{OA} \cos \alpha + \frac{l \dot{\alpha} \frac{r}{l} \sin \alpha}{2 \sqrt{1 - \left( \frac{r}{l} \right)^2 \cos^2 \alpha}} \cos \phi,$$

але відповідно до (13.100)

$$\cos \phi = \cos \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{r}{l} \cos \alpha \right) \right] = \sin \left[ \arcsin \left( \frac{r}{l} \cos \alpha \right) \right] = \frac{r}{l} \cos \alpha,$$

тому

$$\dot{x}_B = r \omega_{OA} \left[ \cos \alpha + \frac{r}{l} \frac{\sin 2\alpha}{2 \sqrt{1 - (r/l)^2 \cos^2 \alpha}} \right].$$

Після підстановки заданих в умові задачі числових значень дістанемо залежність швидкості повзуна  $B$  від часу:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_B &= 0,2 \cdot 10 \left[ \cos 10t + \frac{2}{3} \frac{\sin 20t}{2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}} \right]; \\
 \dot{x}_B &= 2 \cos 10t + \frac{2}{3} \frac{\sin 20t}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}} \text{ м / с.}
 \end{aligned} \tag{13.104}$$

Якщо підставимо в (13.104) значення кута  $\alpha = 30^\circ$ , то дістанемо

$$v_B = \dot{x}_B = 2 \cdot 0,866 + \frac{2}{3} \cdot 0,866 \sqrt{\frac{2}{3}} = 2,44 \text{ м/с.}$$

Розглянемо наступну — третю систему рівнянь (8.7),

$$\ddot{x}_B = \ddot{x}_A - \ddot{\phi}(\xi \sin \phi + \eta \cos \phi) - \dot{\phi}^2 (\xi \cos \phi - \eta \sin \phi); \quad (13.105)$$

$$\ddot{y}_B = \ddot{y}_A + \ddot{\phi}(\xi \cos \phi - \eta \sin \phi) - \dot{\phi}^2 (\xi \sin \phi + \eta \cos \phi).$$

Останнє рівняння (13.105), а також друге з системи (8.3) з урахуванням умов  $\dot{y}_B = \ddot{y}_B = 0$ ,  $0 = -r \omega_{OA}^2 \cos \alpha + \ddot{\phi} l \sin \phi + \dot{\phi}^2 l \cos \phi$ ;  $0 = -r \omega_{OA} \sin \alpha + \dot{\phi} l \sin \phi$ , дають можливість визначити кутову швидкість й кутове прискорення ланки  $ACBD$  як функції часу:

$$\dot{\phi} = \omega_{AB} = \omega_{OA} \frac{r \sin \alpha}{l \sin \phi} = \frac{k}{l} \omega_{OA} \frac{\sin \alpha}{\sin \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{r}{l} \cos \alpha \right) \right]} = \quad (13.106)$$

$$= \frac{r}{l} \omega_{OA} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - (r/l)^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{20}{3} \frac{\sin 10t}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}};$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = \varepsilon_{AB} &= \frac{r \omega_{OA}^2 \cos \alpha - \omega_{AB}^2 l \cos \phi}{l \sin \phi} = \\ &= \frac{200}{3} \frac{\cos 10t}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}} \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^2 \frac{\sin^2 10t}{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t} \right]. \end{aligned} \quad (13.107)$$

Знайдемо кутову швидкість  $\omega_{AB}$  і кутове прискорення  $\varepsilon_{AB}$  при  $\alpha = 30^\circ$  матимуть значення:

$$\omega_{AB} = \frac{20}{3} \frac{\sin 30^\circ}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 30^\circ}} = 4,08 \text{ с}^{-1};$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{200}{3} \frac{\cos 30^\circ}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 30^\circ}} \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^2 \frac{\sin^2 30^\circ}{1 - \frac{4}{9} \cos^2 30^\circ} \right] = 58,9 \text{ с}^{-2}.$$

Тепер можна знайти залежність прискорення повзуна  $B$  від часу, скориставшись формулами (13.105)–(13.107):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_B = a_B &= -r \omega_{OA}^2 \sin \alpha + \ddot{\varphi} l \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 l \sin \varphi = \\ &= -r \omega_{OA}^2 \sin \alpha + \frac{r^2}{l} \omega_{OA}^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r}{l} \cos^2 \alpha}} \times \\ &\quad \times \left\{ \cos^2 \alpha \left[ 1 - \left( \frac{r}{l} \right)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \frac{r}{l} \cos^2 \alpha} \right] - \sin^2 \alpha \right\} = \\ &= \frac{40}{3 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}} \left[ \cos^2 10t \left( 1 - \frac{4}{9} \frac{\sin^2 10t}{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t} \right) - \sin^2 10t \right] = \\ &= 20 \sin 10t \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (13.108)$$

Підставимо в (13.108) замість  $10t$  його значення  $30^\circ$  і виконаємо обчислення:

$$\begin{aligned} a_B &= \frac{40}{3 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 30^\circ}} \left[ \cos^2 30^\circ \left( 1 - \frac{4}{9} \frac{\sin^2 30^\circ}{1 - \frac{4}{9} \cos^2 30^\circ} \right) - \sin^2 30^\circ \right] - 10 = \\ &= -3,87 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Отже, добуто прискорення повзуна  $B$  кривошипно-шатунного механізму в заданому його положенні.

Дослідимо рух точки  $C$  ланки  $ACBD$ . Спочатку займемося її рівняннями руху, скориставшись (8.1) і даними рис. 13.14. Дістаємо:

$$x_C = r \sin \alpha + \frac{l}{2} \sin \varphi;$$

$$y_C = r \cos \alpha - \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Підставимо сюди (13.100) і виконаємо відповідні перетворення:

$$x_C = r \sin \alpha + \frac{l}{2} \sin \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{r}{l} \cos \alpha \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= r \sin \alpha + \frac{l}{2} \cos \left[ \arcsin \left( \frac{r}{l} \cos \alpha \right) \right] = \\
 &= r \sin \alpha + \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{r}{l} \cos^2 \alpha} =
 \end{aligned} \tag{13.109}$$

$$= 0,2 \sin 10t + 0,15 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t} \text{ м;}$$

$$y_c = r \cos \alpha + \frac{l}{2} \cos \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{r}{l} \cos \alpha \right) \right] = \tag{13.110}$$

$$= r \cos \alpha - \frac{r}{2} \cos \alpha = \frac{r}{2} \cos \alpha = 0,1 \cos 10t \text{ м.}$$

(13.109) і (13.110) є шукані рівняння руху точки *C*. Щоб знайти її траєкторію в координатах *x* і *y*, треба в рівняннях (13.109), (13.110) позбутися параметра *t*.

Можна уникнути  $\alpha$  в рівняннях

$$x_c = x = r \sin \alpha + \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{r}{l} \cos^2 \alpha}; \tag{13.111}$$

$$y_c = y = \frac{r}{2} \cos \alpha,$$

з другої рівності (13.111)  $\cos \alpha = 2y/r$ , тоді

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{r^2} y^2}.$$

Тепер підставимо вирази для  $\sin \alpha$  і  $\cos \alpha$  у перше співвідношення системи (13.111):

$$x = r \sqrt{1 - \frac{4}{r^2} y^2} + \frac{l}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{r}{l} \right)^2 \frac{4}{r^2} y^2}.$$

Останню рівність подамо у вигляді

$$x - r \sqrt{1 - \frac{4}{r^2} y^2} = \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{l^2} y^2}.$$

Після піднесення обох частин до квадрату і зведення подібних членів

$$x^2 + r^2 \left( 1 - \frac{4}{r^2} y^2 \right) - 2rx \sqrt{1 - \frac{4}{r^2} y^2} = \frac{l^2}{4} \left( 1 - \frac{4}{l^2} y^2 \right),$$

або, перенісши член з радикалом у правий бік рівності,

$$x^2 + r^2 \left(1 - \frac{4}{r^2} y^2\right)^2 - \frac{l^2}{4} \left(1 - \frac{4}{l^2} y^2\right) = 2rx \sqrt{1 - \frac{4}{r^2} y^2}.$$

Позбавившись радикала і виконавши необхідні перетворення, нарешті дістанемо шукане рівняння траєкторії точки  $C$  шатуну  $ACBD$ :

$$\begin{aligned} x^4 + 9y^4 + 10x^2y^2 - \left(2r^2 + \frac{l^2}{2}\right)x^2 - \\ - 6\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)y^2 + \left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (13.112)$$

Отже, точка  $C$  рухається по кривій четвертого порядку.

Якщо довжини кривошипа  $OA$  і шатуну  $AB$  збігаються, то рівняння (13.112) переходить у рівняння еліпса. Справді, при  $r = l$

$$x^4 + 9y^4 + 10x^2y^2 - \frac{5}{2}r^2x^2 - \frac{9}{2}r^2y^2 + \left(\frac{3}{4}r^2\right)^2 = 0,$$

або

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 + 9y^4 + 9x^2y^2 - \frac{9}{4}r^2x^2 - \\ - \frac{1}{4}r^2x^2 - \frac{9}{4}r^2y^2 - \frac{9}{4}r^2y^2 + \frac{r^2}{4} \frac{9}{4}r^2 = 0. \end{aligned}$$

Розклавши на множники, дістанемо

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)(x^2 + 9y^2) - \frac{9}{4}r^2(x^2 + y^2) - \\ - \frac{1}{4}r^2(x^2 - 9y^2) + \frac{1}{4}r^2 \frac{9}{4}r^2 = 0, \end{aligned}$$

або

$$\left(\frac{r^2}{4} - x^2 - y^2\right)\left(x^2 + 9y^2 - \frac{9}{4}r^2\right) = 0,$$

звідки

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2; \quad \frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}r\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}r\right)^2} = 1. \quad (13.113)$$

Ці рівняння показують, що при  $r = l$  точка  $C$  рухається по колу радіусом  $r/2$ , якщо вона лежить на кривошипі  $OA$ , і траєкторією точки  $C$  буде еліпс, якщо вона лежить на шатуні  $AB$  (у даному випадку  $C$  є серединою  $AB$ ).

Швидкість точки  $C$  визначимо, скориставшись рівняннями (8.3) і рис. 13.14:

$$\begin{aligned}\dot{x}_C &= r \omega_{OA} \cos \alpha + \omega_{AB} \frac{l}{2} \cos \varphi; \\ \dot{y}_C &= -r \omega_{OA} \sin \alpha + \omega_{AB} \frac{l}{2} \sin \varphi,\end{aligned}$$

або, врахувавши (13.100) і (13.106),

$$\begin{aligned}\dot{x}_C = v_{Cx} &= 2 \cos 10t \left[ 1 + \frac{\sin 10t}{3\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}} \right] \text{ м/с}, \\ \dot{y}_C = v_{Cy} &= -\sin 10t \text{ м/с}.\end{aligned} \quad (13.114)$$

При  $\alpha = 30^\circ$

$$v_{Cx} = 2 \cdot 0,866 \cdot \left( 1 + \frac{0,5}{3\sqrt{\frac{2}{3}}} \right) = 2,09 \text{ м/с}; \quad v_{Cy} = -\sin 30^\circ = -0,50 \text{ м/с}.$$

Залежність модуля швидкості точки  $C$  від часу

$$\begin{aligned}v_C &= \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \\ &= \sqrt{4 \cos^2 10t \left( 1 + \frac{\sin 10t}{3\sqrt{1 - \left(\frac{4}{9}\right) \cos^2 10t}} \right)^2 + \sin^2 10t} \text{ м/с},\end{aligned} \quad (13.115)$$

а при  $\alpha = 30^\circ$

$$v_C = \sqrt{2,09^2 + 0,50^2} = 2,15 \text{ м/с}.$$

Напрямок вектора швидкості  $\vec{v}_C$  знайдемо, визначаючи напрямні кути з формул напрямних косинусів:

$$\angle(\vec{v}_C, x) = \arccos \frac{v_{Cx}}{v} = \arccos \frac{2,09}{2,15} = 13^\circ;$$

$$\angle(\vec{v}_C, y) = \arccos \frac{v_{Cy}}{v} = \arccos \left( -\frac{0,50}{2,15} \right) = 103^\circ.$$

Проекції прискорення точки  $C$  на осі координат  $xOy$  визначимо, скориставшись рівностями (8.7) з урахуванням положення точки  $C$  в системі осей  $\xi A\eta$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_C = a_{Cx} &= -r \omega_{OA}^2 \sin \alpha + \varepsilon_{AB} \frac{l}{2} \cos \varphi - \omega_{AB}^2 \frac{l}{2} \sin \varphi; \\ \ddot{y}_C = a_{Cy} &= -r \omega_{OA}^2 \cos \alpha + \varepsilon_{AB} \frac{l}{2} \sin \varphi + \omega_{AB}^2 \frac{l}{2} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (13.116)$$

або, врахувавши співвідношення (13.100),

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= -r \omega_{OA}^2 \sin \alpha + \frac{r}{2} \varepsilon_{AB} \cos \alpha - \frac{l}{2} \omega_{AB}^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2 \alpha}; \\ a_{Cy} &= -r \omega_{OA}^2 \cos \alpha + \frac{l}{2} \varepsilon_{AB} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2 \alpha} + \omega_{AB}^2 \frac{r}{2} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (13.117)$$

Підставимо в (13.117) значення кута  $\alpha = 30^\circ$  і обчислимо величини  $a_{Cx}$  і  $a_{Cy}$ :

$$a_{Cx} = -20 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 58,92 \cdot 0,866 - 0,15 \cdot 4,08^2 \sqrt{\frac{2}{3}} = -6,94 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -20 \cdot 0,866 + 0,15 \cdot 58,92 \sqrt{\frac{2}{3}} + 4,08^2 \cdot 0,1 \cdot 0,866 = -8,66 \text{ м/с}^2.$$

Модуль прискорення точки  $C$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{6,94^2 + 8,66^2} = 11,1 \text{ м/с}^2.$$

Напрямні кути вектора прискорення  $\vec{a}_C$  з осями координат  $xOy$  матимуть значення:

$$\angle(\vec{a}_C, x) = \arccos \frac{a_{Cx}}{a_C} = \arccos \left( -\frac{6,94}{11,1} \right) = 152^\circ;$$

$$\angle(\vec{a}_C, y) = \arccos \frac{a_{Cy}}{a_C} = \arccos \left( -\frac{8,66}{11,1} \right) = 118^\circ.$$

Проведемо розрахунок кінематичних величин для точки  $D$  ланки  $ACBD$ . Для цього застосуємо аналітичні рівняння (8.1), (8.3) і (8.7). Вони в нашому випадку набудуть вигляду:

$$\begin{cases} x_D = r \sin \alpha - h \cos \varphi + \frac{l}{2} \sin \varphi; \\ y_D = r \cos \alpha + h \sin \varphi - \frac{l}{2} \cos \varphi, \end{cases} \quad (13.118)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_D = r \omega_{OA} \cos \alpha - \omega_{AB} (h \sin \varphi - \frac{l}{2} \cos \varphi); \\ \dot{y}_D = -r \omega_{OA} \sin \alpha + \omega_{AB} (h \cos \varphi + \frac{l}{2} \sin \varphi), \end{cases} \quad (13.119)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_D = -r \omega_{OA}^2 \sin \alpha - \varepsilon_{AB} (h \sin \varphi - \frac{l}{2} \cos \varphi) - \omega_{AB}^2 (h \cos \varphi + \frac{l}{2} \sin \varphi); \\ \ddot{y}_D = -r \omega_{OA}^2 \cos \alpha + \varepsilon_{AB} (h \cos \varphi + \frac{l}{2} \sin \varphi) - \omega_{AB}^2 (h \sin \varphi - \frac{l}{2} \cos \varphi). \end{cases} \quad (13.120)$$

Врахувавши (13.118) значення відповідних величин і виконавши перетворення, запишемо рівняння руху точки  $D$ :

$$\begin{aligned} x_D &= 0,2 \sin 10t - \frac{1}{15} \cos 10t + 0,15 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}; \\ y_D &= 0,2 \cos 10t + 0,1 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}. \end{aligned} \quad (13.121)$$

Після врахування відомих величин і виконання нескладних математичних дій дістанемо вирази проєкцій швидкостей точки  $D$  на осі координат:

$$\dot{x}_D = v_{Dx} = r \omega_{OA} \cos \alpha - \omega_{AB} (h \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2 \alpha} - \frac{r}{2} \cos \alpha); \quad (13.122)$$

$$\dot{y}_D = v_{Dy} = -r \omega_{OA} \sin \alpha + \omega_{AB} (h \frac{r}{l} \cos \alpha + \frac{l}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2 \alpha}),$$

Обчислимо значення проєкцій (13.122) при  $\alpha = 30^\circ$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_D &= 0,2 \cdot 10 \cos 30^\circ - 4,08 (0,1 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos^2 30^\circ} - \\ &- 0,1 \cos 30^\circ) = -1,75 \text{ м/с}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_D &= -0,2 \cdot 10 \sin 30^\circ + 4,08 (0,1 \frac{2}{3} \cos 30^\circ + \\ &+ 0,15 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos^2 30^\circ}) = -0,2 \text{ м/с}. \end{aligned}$$



Тоді модуль

$$v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2} = \sqrt{1,75^2 + 0,27^2} = 1,77 \text{ м/с.}$$

За проєкціями і модулем швидкості точки  $D$  знайдемо величини напрямних кутів, які утворює вектор швидкості  $\vec{v}_D$  з осями координат  $Ox$  і  $Oy$ :

$$\angle(\vec{v}_D, x) = \arccos \frac{v_{Dx}}{v_D} = \arccos \left( -\frac{1,75}{1,77} \right) = 171^\circ,$$

$$\angle(\vec{v}_D, y) = \arccos \frac{v_{Dy}}{v_D} = \arccos \left( -\frac{0,27}{1,77} \right) = 81^\circ.$$

Тепер визначимо прискорення точки  $D$ . Для цього спочатку виразимо його проєкції на декартові осі через змінний кут  $\alpha$  повороту кривошипа  $OA$  механізму, підставивши величину кута  $\varphi$  (13.100) у рівняння (13.120) і виконавши відповідні дії:

$$a_{Dx} = \ddot{x}_{Dx} = -r \omega_{OA}^2 \sin \alpha - \varepsilon_{AB} \left( h \sqrt{1 - \left( \frac{r}{l} \right)^2} \cos^2 \alpha - \right. \\ \left. - \frac{r}{2} \cos \alpha \right) - \omega_{AB}^2 \left( h \frac{r}{l} + \frac{l}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{r}{l} \right)^2} \cos^2 \alpha \right); \quad (13.123)$$

$$a_{Dy} = \ddot{y}_D = -r \omega_{OA}^2 \cos \alpha + \varepsilon_{AB} \left( h \frac{r}{l} \cos \alpha + \right. \\ \left. + \frac{l}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{r}{l} \right)^2} \cos^2 \alpha \right) - \omega_{AB}^2 \left( h \sqrt{1 - \left( \frac{r}{l} \right)^2} \cos^2 \alpha - \frac{r}{2} \cos \alpha \right),$$

їх значення при  $\alpha = 30^\circ$

$$a_{Dx} = -0,2 \cdot 100 \sin 30^\circ - 58,92 \left( 0,1 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 30^\circ} - \frac{0,2}{2} \cos 30^\circ \right) - \\ - 4,08^2 \left( 0,1 \frac{2}{3} + 0,15 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 30^\circ} \right) = -12,71 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Dy} = -0,2 \cdot 100 \cos 30^\circ + 58,92 \left( 0,1 \frac{2}{3} \cos 30^\circ + 0,15 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \frac{3}{4}} \right) - \\ - 4,08^2 \left( 0,1 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \frac{3}{4}} - 0,1 \cos 30^\circ \right) = -6,61 \text{ м/с}^2,$$

тоді модуль прискорення точки  $D$

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = \sqrt{12,71^2 + 6,61^2} = 14,3 \text{ м/с}^2.$$

За відомими проекціями  $a_{Dx}$ ,  $a_{Dy}$  і модулем  $a_D$  знаходимо напрямні кути між вектором прискорення точки  $D$  і декартовими осями  $Ox$  і  $Oy$ :

$$\angle(\vec{a}_D, x) = \arccos\left(\frac{a_{Dx}}{a_D}\right) = \arccos\left(-\frac{12,71}{14,3}\right) = 153^\circ;$$

$$\angle(\vec{a}_D, y) = \arccos\left(\frac{a_{Dy}}{a_D}\right) = \arccos\left(-\frac{6,61}{14,3}\right) = 117^\circ.$$

**Аналітичне визначення положення миттєвого центра швидкостей (обертання) та рівнянь рухомої і нерухомої центрорід.** Щоб знайти миттєвий центр швидкостей  $P$  ланки  $ABCD$  розглядуваного плоского механізму, а також рівняння рухомої та нерухомої центрорід даної ланки зазначеним методом, застосуємо аналітичні рівняння (8.9) і (8.10). Випишемо їх:

$$\xi_{P_0} = \xi_P = \frac{1}{\phi} (\dot{x}_A \sin \phi - \dot{y}_A \cos \phi); \quad (13.124)$$

$$\eta_{P_0} = \eta_P = \frac{1}{\phi} (\dot{x}_A \cos \phi + \dot{y}_A \sin \phi),$$

$$x_{P_0} = x_P = x_A - \frac{\dot{y}_A}{\phi}; \quad (13.125)$$

$$y_{P_0} = y_P = y_A + \frac{\dot{x}_A}{\phi}.$$

Спочатку займемося визначенням координат миттєвого центра швидкостей  $P$  у нашому випадку в рухомій системі осей  $\xi_A\eta$ . Для цього співвідношення (13.124) перетворимо у відповідності з уже знайденими кінематичними величинами і даними умови задачі:

Значення похідних  $\dot{x}_A$  і  $\dot{y}_A$  будуть:

$$\dot{x}_A = \frac{d}{dt}(r \sin \alpha) = r \dot{\alpha} \cos \alpha = r \omega_{OA} \cos \alpha = 2 \cos 10t \text{ м/с};$$

$$\dot{y}_A = \frac{d}{dt}(r \cos \alpha) = -r \dot{\alpha} \sin \alpha = -r \omega_{OA} \sin \alpha = -2 \sin 10t \text{ м/с}.$$

Підставивши їх в рівняння (13.124), а також врахувавши формулу (13.100) і виконавши елементарні дії, дістанемо:

$$\xi_P = r \frac{\omega_{OA}}{\omega_{AB}} \left( \cos \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2 \alpha} - \frac{r}{2} \sin 2\alpha \right);$$

$$\eta_P = r \frac{\omega_{OA}}{\omega_{AB}} \left( \frac{r}{l} \cos^2 \alpha - \sin \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2 \alpha} \right),$$

або, застосувавши формулу (13.106) і рівняння  $\alpha = \omega_{OA}t = 10t$ :

$$\xi_P = \left( 0,3 \frac{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}{\sin 10t} + 0,2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t} \right) \cos 10t; \quad (13.126)$$

$$\eta_P = 0,3 \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}}{\sin 10t} \left( \frac{2}{3} \cos^2 10t - \sin 10t \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t} \right).$$

Це — рівняння рухомої центрної.

Підставимо в (13.126) числові значення і знайдемо координати миттєвого центра швидкостей ланки:

$$\xi_P = \left( 0,3 \frac{2}{3} \cdot 2 + 0,2 \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \cos 30^\circ = 0,49 \text{ м};$$

$$\eta_P = 0,3 \frac{2}{3} \cdot 2 \left( \frac{2}{3} \frac{3}{4} - 0,5 \sqrt{\frac{2}{3}} \right) = 0,04 \text{ м}.$$

За координатами  $\xi_P$ ,  $\eta_P$  обчислимо відстань від полюса  $A$  до миттєвого центра швидкостей  $P$ :

$$l_{AP} = \sqrt{\xi_P^2 + \eta_P^2} = \sqrt{0,49^2 + 0,04^2} = 0,49 \text{ м}.$$

Порівняємо це значення з тим ( $AP_\omega = 97$  мм), яке отримано графічним шляхом:

$$l_{AP_\omega} = AP_\omega \mu_l = 97 \cdot 0,005 = 0,485 \cong 0,49 \text{ м}.$$

Переходимо до рівнянь (13.125). Підставимо в них величини

$$x_A = r \sin \alpha, \quad y_A = -r \cos \alpha;$$

$$\dot{x}_A = r \omega_{OA} \cos \alpha, \quad \dot{y}_A = -r \omega_{OA} \sin \alpha$$

і дістанемо вирази для координат миттєвого центра швидкостей  $P$  ланки  $ACBD$  розглядуваного механізму в нерухомих осях  $xOy$ :

$$\begin{aligned}x_p &= r \sin \alpha + r \frac{\omega_{OA}}{\omega_{AB}} \sin \alpha = \left(1 + \frac{\omega_{OA}}{\omega_{AB}}\right) r \sin \alpha; \\y_p &= r \cos \alpha + r \frac{\omega_{OA}}{\omega_{AB}} \cos \alpha = \left(1 + \frac{\omega_{OA}}{\omega_{AB}}\right) r \cos \alpha,\end{aligned}\quad (13.127)$$

або, з урахуванням формули (13.106) і рівняння  $\alpha = \omega_{OA}t = 10t$ ,

$$\begin{aligned}x_p &= 0,2 \sin 10t + 0,3 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}; \\y_p &= \left(0,2 + 0,3 \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 10t}}{\sin 10t}\right) \cos 10t.\end{aligned}\quad (13.128)$$

Обчислимо координати (13.127):

$$\begin{aligned}x_p &= 0,2 \cdot 0,5 + 0,3 \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,34 \text{ м}; \\y_p &= \left(0,2 + 0,3 \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2\right) \cos 30^\circ = 0,60 \text{ м}.\end{aligned}$$

Відстань миттєвого центра швидкостей  $P$  від початку  $O$  осей  $xOy$ :

$$l_{OP_\omega} = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = \sqrt{0,34^2 + 0,60^2} = 0,69 \text{ м}.\quad (13.129)$$

Обчислимо її:

$$l_{OP_\omega} = OP_\omega \mu_l = (OA + AP_\omega) \mu_l = (40 + 97) \cdot 0,005 = 0,69 \text{ м},$$

що збігається зі значенням (13.129).

На завершення розгляду аналітичного методу визначення кінематичних величин для крипошипно-шатунного механізму звернемо увагу на вид рівняння нерухомої центрної його ланки  $ACBD$  (13.127):

$$x_p^2 + y_p^2 = r^2 \left(1 + \frac{\omega_{OA}}{\omega_{AB}}\right)^2 = R^2,$$

або, врахувавши формулу кутової швидкості ланки  $ACBD$  (13.106),

$$x_p^2 + y_p^2 = R^2 = r^2 \left[ 1 + \frac{l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2 10t}}{\sin 10t} \right]^2.$$

Отже, рівнянням нерухомої центрної в нерухомих осях  $xOy$  є коло змінного радіуса  $R(t)$ , радіус цього кола змінюється з часом відповідно до закону

$$R(t) = r \left[ 1 + \frac{l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos 10t}}{\sin 10t} \right].$$

#### § 44. Метод проєкцій. Визначення кінематичних величин багатоланкового механізму \_\_\_\_\_

Метод проєкцій, який розглянуто на прикладі задачі з кривошипно-шатунним механізмом (див. § 42), є найдоцільнішим, коли йдеться про визначення кінематичних величин у певний момент часу, що відповідає заданому положенню механізму. Його застосування до кінематичного аналізу плоского багатоланкового механізму дає змогу відразу записати систему з необхідною кількістю рівнянь для визначення лінійних і кутових швидкостей і прискорень усіх його ланок, та розв'язувати задачу на електронно-обчислювальних машинах.

Першим етапом цього методу є введення для кожної наступної ланки комплексу двох ортів, які встановлюють на ланці два основні взаємно перпендикулярні напрями — від вибраного на ланці полюса до тієї її точки, швидкість і прискорення якої належить відшукати, і напрям, перпендикулярний до відрізка, що сполучає полюс із зазначеною точкою. Вказані два основні напрями на кожній ланці — це напрями, в яких вектори швидкостей і прискорень точок розкладають на прямокутні компоненти. Також на цьому етапі визначають кути між введеними ортами і шуканими векторними величинами.

На другому етапі визначають проєкції векторів швидкостей і прискорень точок ланок на основні напрями та складання системи рів-

нянь з невідомими кінематичними величинами. При цьому слід до-  
тримуватися таких умов:

а) вектори відомих швидкостей і прискорень полюса ланки не пе-  
реносять в ту її точку, швидкість і прискорення якої треба знайти;

б) при складанні системи рівнянь проекції швидкостей і прискорення полюсів, а також проекцій обертальних швидкостей і прискорень розглядуваних точок, перед внесенням цих проекцій у відповідні рівняння, змінюють на протилежні до тих знаків, які мають визначувані проекції вказаних векторів на розрахунковій схемі.

Відповідно до першого етапу пояснимо складання розрахункової схеми (рис. 13.15).

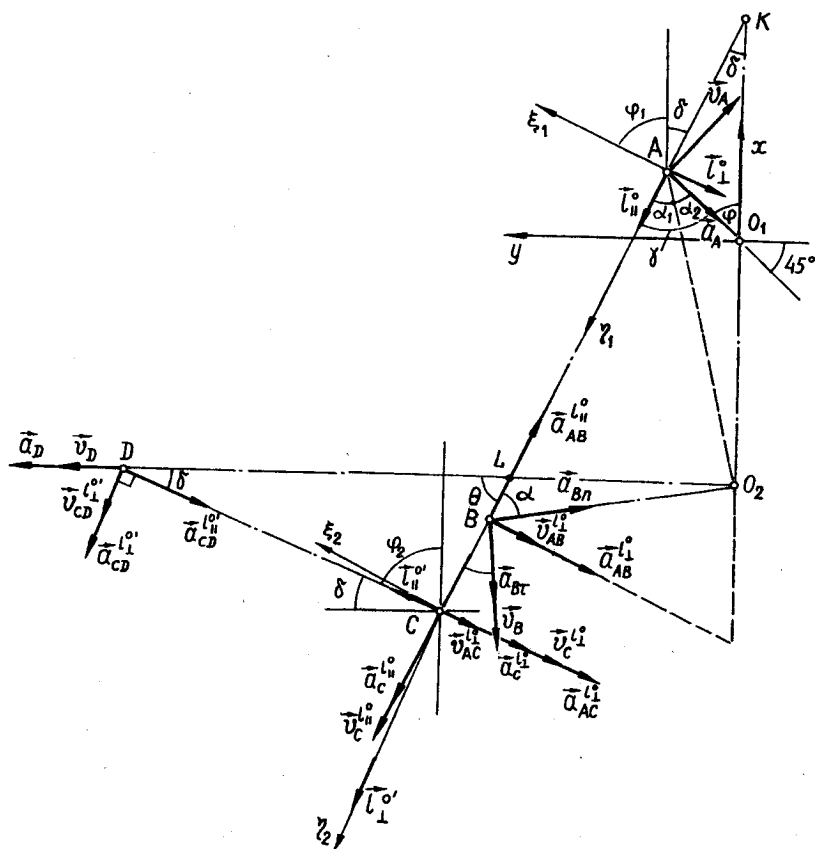


Рис. 13.15

Розглянемо ланку  $ABC$ . За полюс виберемо її точку  $A$ , оскільки швидкість і прискорення її можна знайти за відомою частотою обертання  $n = 50$  об/хв. кривошипа  $O_1A$  і його довжиною  $r = 0,2$  м. Зобразимо в полюсі  $A$  відомі вектори  $\vec{v}_A$  і  $\vec{a}_A$ , а також одиничні вектори  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  і  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$ . Перший з них вказує на додатний напрям уздовж ланки від її полюса  $A$  до точок  $B$  і  $C$ , а другий — на доданий напрям обертальних швидкостей і обертальних дотичних прискорень точок  $B$  і  $C$  ланки відносно полюса  $A$  (обертальні нормальні прискорення точок ланки відносно полюса для прийнятого напрямку поздовжнього орта  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  мають протилежний орту  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  напрям).

Першою точкою на ланці  $ABC$ , яку треба розглянути, має бути точка  $B$ , оскільки її траєкторія задалегідь відома — це коло з радіусом  $R = O_2B = 0,5$  м. Не звертаючи уваги на те, що кривошип  $O_1A$  обертається за рухом годинникової стрілки, вважаємо додатним напрямом дотичної  $BT_1$  до кола той, якому відповідає рух точки  $B$  по колу проти руху стрілки годинника (осі  $BT_1$  і  $BN_1$  не зображуємо). У точці  $B$  покажемо абсолютну швидкість  $\vec{v}_B$ , абсолютні дотичне і нормальне прискорення  $\vec{a}_{Bt}$ ,  $\vec{a}_{Bn}$ , а також відносну обертальну швидкість  $\vec{v}_{AB}^L$  та відносні обертальні дотичне й нормальне прискорення  $\vec{a}_{AB}^L$ ,  $\vec{a}_{AB}^{\prime L}$  (обертальні поперечне і поздовжнє прискорення). Останні три вектори напрямимо по поперечному орту  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$ .

Точка  $C$  є спільною для ланок  $AC$  і  $CD$  та має особливість кінематичного стану — траєкторія її не відома. Тому при тому самому полюсі  $A$  абсолютні швидкість  $\vec{v}_C$  і прискорення  $\vec{a}_C$  точки  $C$  розкладемо в напрямках попередніх орт  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$ ,  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$ . Прямокутні складові  $\vec{v}_C$  і  $\vec{a}_C$  цих напрямів становлять  $\vec{v}_C^{\prime \parallel}$ ,  $\vec{v}_C^{\prime \perp}$ ,  $\vec{a}_C^{\prime \parallel}$ ,  $\vec{a}_C^{\prime \perp}$ . Крім того, зобразимо відносні величини  $\vec{v}_{AC}^L$ ,  $\vec{a}_{AC}^L$ ,  $\vec{a}_{AC}^{\prime L}$ .

Далі дослідимо ланку  $CD$ . За полюс виберемо іншу точку —  $C$ , швидкість і прискорення якої вже знайдені. У новому полюсі  $C$  введемо нові орти  $\vec{l}_{\parallel}^{\circ}$  і  $\vec{l}_{\perp}^{\circ}$ . Тут дотична  $DT_2$  збігається з горизонтальною прямою, по якій рухається повзун  $D$ . Нехай додатним напрямом осі  $DT_2$ , а, отже, і векторів  $\vec{v}_D$  і  $\vec{a}_D$  є напрям від  $O_2$  до  $D$ . При побудові розрахункової схеми ланки  $CD$  в її полюсі  $C$  лишаються складові  $\vec{v}_C^{\prime \perp}$ ,  $\vec{v}_C^{\prime \parallel}$ ,  $\vec{a}_C^{\prime \perp}$ ,  $\vec{a}_C^{\prime \parallel}$ , а в точці  $D$  зображують вектори  $\vec{v}_D$ ,  $\vec{a}_D$ ,  $\vec{v}_{CD}^L$ ,  $\vec{a}_{CD}^L$ ,  $\vec{a}_{CD}^{\prime L}$  відповідно до встановлених напрямів.

Визначимо головні кути, які увійдуть в рівняння через проекції відповідних кінематичних величин:

$$\angle(AB, AO_1) = \gamma; \quad \angle(BA, BO_2) = \alpha; \quad \angle(DO_2, DC) = \delta;$$

$$\angle(\vec{l}_1^{\circ}, \vec{l}_1^{\circ}) = \nu; \quad \gamma = \angle(AB, AO_2) + \angle(AO_2, AO_1) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

З трикутників  $AO_1O_2$  і  $AO_2B$  за теоремою косинусів запишемо співвідношення, яке пов'язує кути  $\alpha$  і  $\varphi$ :

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + l_1^2 - r^2 - h^2 - 2rh \cos \varphi}{2Rl_1},$$

де  $r = O_1A = 0,2$  м,  $R = O_2B = 0,5$  м,  $h = O_1O_2 = 0,5$  м,  $l_1 = AB = AC - BC = 1 - 0,2 = 0,8$  м,  $\varphi = \omega t$ , або, врахувавши значення довжин,

$$\cos \alpha = \frac{1}{4}(3 - \cos \varphi); \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{(3 - \cos \varphi)^2}{16}}. \quad (13.130)$$

До трикутників  $ABO_2$ ,  $AO_1O_2$  застосуємо теорему синусів і виразимо кути  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  через кут  $\varphi$ , який визначає положення механізму:

$$\sin \alpha_1 = \frac{O_2B}{AO_2} \sin \alpha = \frac{O_2B \sin \alpha}{\sqrt{r^2 + h^2 + 2rh \cos \varphi}};$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{O_1O_2}{AO_2} \sin \varphi = \frac{O_1O_2 \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + h^2 + 2rh \cos \varphi}},$$

або, підставивши значення довжин,

$$\sin \alpha_1 = 0,9285 \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + 0,6897 \cos \varphi}}; \quad (13.131)$$

$$\sin \alpha_2 = 0,9285 \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + 0,6897 \cos \varphi}}. \quad (13.132)$$

Введемо додатковий кут  $\theta = \angle(AL, LO_2) = \angle(LD, LC)$  і до трикутників  $ADO_2$  і  $LCD$  застосуємо теорему синусів:

$$\frac{AL}{\sin \angle(O_2L, O_2A)} = \frac{AO_2}{\sin \theta}; \quad \frac{\sin \delta}{CL} = \frac{\sin \theta}{DC},$$

де  $CL = AC - AL$ ,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \angle(KA, KO_1) = \frac{\pi}{2} - (\gamma - \varphi) = \frac{\pi}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi);$$

$$\angle(O_2L, O_2A) = \pi - \theta - \alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \gamma - \alpha_1 - \varphi = \frac{\pi}{2} - (\varphi - \alpha_2).$$



Тоді останні дві формули приводять до такої залежності між кутами  $\delta$  і  $\varphi$ :

$$\sin \delta = 1,4286[\cos(\varphi - \alpha_1 - \alpha_2) - 0,5385 \times \cos(\varphi - \alpha_2) \sqrt{1 + 0,6897 \cos \varphi}]. \quad (13.133)$$

Тут  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  виражаються через кут  $\varphi$  залежностями (13.131), (13.132).

Лишилося встановити залежність між кутами  $\nu = \angle(\vec{l}_{II}, \vec{l}_1)$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\delta$ ,  $\varphi$ . З рис. 13.15 запишемо співвідношення

$$\nu = \frac{\pi}{2} - [\pi - \angle(CD, CA)] = -\frac{\pi}{2} + \angle(CD, CA);$$

$$\angle(CD, CA) = \pi - \delta - \theta = \frac{\pi}{2} - \delta - \varphi + \alpha_1 + \alpha_2,$$

звідки

$$\nu = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \delta - \varphi + \alpha_1 + \alpha_2,$$

або

$$\nu = \alpha_1 + \alpha_2 - (\delta + \varphi). \quad (13.134)$$

На підставі формул (13.130) — (13.134) при  $\varphi = 45^\circ$  дістанемо головні кути:

$$\alpha = 55,0247^\circ; \quad \alpha_1 = 38,5916^\circ; \quad \alpha_2 = 32,5668^\circ; \quad (13.135)$$

$$\delta = 21,4696^\circ; \quad \nu = 4,6889^\circ; \quad \gamma = 71,1584^\circ.$$

Перш ніж перейти до складання рівнянь для визначення шуканих кінематичних величин заданого механізму, обчислимо кутову швидкість  $\omega = \dot{\varphi}$  кривошипа  $O_1A$ , а також лінійної швидкості  $v_A$  і нормального прискорення  $a_{An}$  його кінця  $A$ :

$$\omega = -\frac{\pi n}{30} = -\frac{3,1416 \cdot 50}{30} = -5,2360 \text{ с}^{-1}; \quad (13.136)$$

$$v_A = |\omega| r = 5,2360 \cdot 0,2 = 1,0472 \text{ м/с}; \quad (13.137)$$

$$a_A = a_{An} = \omega^2 r = 5,2360^2 \cdot 0,2 = 5,4831 \text{ м/с}^2. \quad (13.138)$$

Виконавши розрахункову схему і визначивши головні кути, складемо систему рівнянь в проекціях на введені орти для знаходження кінематичних величин при заданому положенні розглядуваного механізму, яке характеризується кутом  $\varphi = 45^\circ$ . З розрахункової схеми (13.15) дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_{\parallel}^{\circ}) \quad & v_B \sin \alpha + v_A \sin \gamma = 0; \\
\bar{I}_{\perp}^{\circ}) \quad & -v_{AB}^i + v_B \cos \alpha - v_A \cos \gamma = 0; \\
\bar{I}_{\parallel}^{\circ}) \quad & v_C^{ii} + v_A \sin \gamma = 0; \\
\bar{I}_{\perp}^{\circ}) \quad & v_C^{ii} - v_A \cos \gamma - v_{AC}^i = 0; \\
\bar{I}_{\parallel}^{\circ}) \quad & v_D \cos \delta + v_C^i \cos \nu - v_C^{ii} \sin \nu = 0; \\
\bar{I}_{\perp}^{\circ}) \quad & -v_{CD}^i + v_D \sin \delta - v_C^{ii} \cos \nu - v_C^i \sin \nu = 0; \\
\bar{I}_{\parallel}^{\circ}) \quad & a_{Bt} \sin \alpha - a_{Bn} \cos \alpha - a_A \cos \gamma + a_{AB}^{ii} = 0; \\
\bar{I}_{\perp}^{\circ}) \quad & -a_{AB}^i + a_{Bt} \cos \alpha + a_{Bn} \sin \alpha - a_A \sin \gamma = 0; \\
\bar{I}_{\parallel}^{\circ}) \quad & a_C^{ii} - a_A \cos \gamma + a_{AC}^{ii} = 0; \\
\bar{I}_{\perp}^{\circ}) \quad & a_C^i - a_A \sin \gamma - a_{AC}^i = 0; \\
\bar{I}_{\parallel}^{\circ}) \quad & a_D \cos \delta + a_C^i \cos \nu - a_C^{ii} \sin \nu + a_{CD}^{ii} = 0; \\
\bar{I}_{\perp}^{\circ}) \quad & -a_{CD}^i - a_C^{ii} \cos \nu - a_C^i \sin \nu + a_D \sin \delta = 0,
\end{aligned} \tag{13.139}$$

де

$$\begin{aligned}
v_{AB}^i &= \omega_{AB} l_1; \quad v_{AC}^i = \omega_{AB} L; \quad v_{CD}^i = \omega_{CD} l_2; \\
a_{Bn} &= \frac{v_B^2}{R}; \quad a_{AB}^{ii} = \omega_{AB} l_1; \quad a_{AC}^{ii} = \omega_{AB}^2 L; \\
a_{CD}^{ii} &= \omega_{CD}^2 l_2; \quad a_{AB}^i = \varepsilon_{AB} l_2.
\end{aligned} \tag{13.140}$$

З розв'язку першого рівняння системи (13.139) маємо швидкість точки  $B$ :

$$v_B = -v_A \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = -1,0472 \frac{\sin 71,1584^\circ}{\sin 55,0247^\circ} = -1,21 \text{ м/с.}$$

З другого рівняння системи (13.139) дістанемо:

$$\begin{aligned}
\omega_{AB} &= \frac{v_B \cos \alpha - v_A \cos \gamma}{l_1} = \\
&= -\frac{1,2095 \cos 55,0247^\circ + 1,0472 \cos 71,1584^\circ}{0,8} = -1,29 \text{ с}^{-1}.
\end{aligned}$$

Далі знайдемо прямокутні складові швидкості точки  $C$  ланки  $ABC$ , скориставшись третім і четвертим рівняннями системи:

$$v_C^{\prime\prime} = -v_A \sin \gamma = -1,0472 \sin 71,1584^\circ = -0,9911 \text{ м/с};$$

$$\begin{aligned} v_C^{\prime} &= v_A \cos \gamma + v_{AC}^{\prime} = v_A \cos \gamma + \omega_{AB} L = \\ &= 1,0472 \cos 71,1584^\circ - 1,2894 \cdot 1 = -0,9512 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Тоді модуль швидкості точки  $C$

$$v_C = \sqrt{(v_C^{\prime\prime})^2 + (v_C^{\prime})^2} = \sqrt{0,9911^2 + 0,9512^2} = 1,37 \text{ м/с}.$$

Розв'яжемо п'яте рівняння системи й обчислимо швидкість повзуна  $D$ :

$$\begin{aligned} v_D &= \frac{1}{\cos \delta} (v_C^{\prime\prime} \sin \nu - v_C^{\prime} \cos \nu) = \frac{1}{\cos 21,4696^\circ} \times \\ &\times (-0,9911 \sin 4,6889^\circ + 0,9513 \cos 4,6889^\circ) = 0,93 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Кутову швидкість ланки  $CD$  визначимо з такого рівняння системи:

$$\begin{aligned} \omega_{CD} &= \frac{-v_C^{\prime} \sin \nu - v_C^{\prime\prime} \cos \nu + v_D \sin \delta}{l_2} = \\ &= \frac{0,9512 \sin 4,6889^\circ + 0,9911 \cos 4,6889^\circ + 0,9318 \cdot 0,3660}{0,7} = 2,01 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Знайдемо прискорення, розв'язуючи далі систему рівнянь (13.139). Дотичне прискорення точки  $B$  ланки  $ABC$ , якщо скористаємося сьомим рівнянням системи та формулою (13.140) нормального прискорення  $a_{Bn}$ ,

$$\begin{aligned} a_{Bn} &= \frac{a_{Bn} \cos \alpha + a_A \cos \gamma - a_{AB}^{\prime\prime}}{\sin \alpha} = \frac{v_B^2 \cos \alpha + a_A \cos \gamma - \omega_{AB}^2 l_1}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{0,5^{-1} \cdot 1,2095^2 \cos 55,0247^\circ + 5,4831 \cos 71,1584^\circ - 1,2894^2 \cdot 0,8}{\sin 55,0247^\circ} = \\ &= 2,58 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Нормальне прискорення точки  $B$

$$a_{Bn} = \frac{v_B^2}{R} = \frac{1,2095^2}{0,5} = 2,9258 \text{ м/с}^2.$$

За дотичним  $a_{B\tau}$  і нормальним  $a_{Bn}$  прискореннями знайдемо повне прискорення точки  $B$ :

$$a_B = \sqrt{a_{B\tau}^2 + a_{Bn}^2} = \sqrt{2,5847^2 + 2,9258^2} = 3,90 \text{ м/с}^2.$$

Також визначимо кут, між вектором прискорення  $\vec{a}_B$  і кривошипом  $BO_2$ :

$$\angle(\vec{a}_B, BO_2) = \operatorname{arctg} \frac{a_{B\tau}}{a_B} = \operatorname{arctg} \frac{2,5847}{3,9040} = 33,5^\circ.$$

Розв'язавши восьме рівняння системи, дістанемо кутове прискорення ланки  $ABC$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{AB} &= \frac{a_{B\tau} \cos \alpha + a_{Bn} \sin \alpha - a_A \sin \gamma}{l_1} = \\ &= \frac{2,5847 \cos 55,0247^\circ + 2,9258 \sin 55,0247^\circ - 5,4831 \sin 71,1584^\circ}{0,8} = -1,64 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

З наступних двох рівнянь системи маємо прямокутні складові  $a_C^{\parallel}$ ,  $a_C^{\perp}$  прискорення точки  $C$ :

$$a_C^{\parallel} = a_A \cos \gamma - a_{AC}^{\parallel} = 5,4831 \cos 71,1584^\circ - 1,2894^2 \cdot 1 = 0,1082 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C^{\perp} = a_A \sin \gamma + a_{AC}^{\perp} = 5,4831 \sin 71,1584^\circ - 1,6378 \cdot 1 = 3,5515 \text{ м/с}^2.$$

Тоді повне прискорення точки  $C$

$$a_C = \sqrt{\left(a_C^{\parallel}\right)^2 + \left(a_C^{\perp}\right)^2} = \sqrt{0,1082^2 + 3,5515^2} = 3,55 \text{ м/с}^2.$$

Кути, які утворює вектор  $\vec{a}_C$  з напрямками  $\vec{l}_{\parallel}^\circ$ ,  $\vec{l}_{\perp}^\circ$ ,

$$\angle(\vec{a}_C, \vec{l}_{\parallel}^\circ) = \arccos \frac{a_C^{\parallel}}{a_C} = \arccos \frac{0,1082}{3,5531} = 88^\circ;$$

$$\angle(\vec{a}_C, \vec{l}_{\perp}^\circ) = \arccos \frac{a_C^{\perp}}{a_C} = \arccos \frac{3,5515}{3,5531} = 2^\circ.$$

Прискорення повзуна  $D$  визначимо з передостаннього рівняння системи:

$$\begin{aligned} a_D &= \frac{a_C^{\parallel} \sin \nu - a_C^{\perp} \cos \nu - a_{CD}^{\parallel}}{\cos \delta} = \frac{a_C^{\parallel} \sin \nu - a_C^{\perp} \cos \nu - \omega_{CD}^2 l_2}{\cos \delta} = \\ &= \frac{0,1082 \sin 4,6889^\circ - 3,5515 \cos 4,6889^\circ - 2,0094^2 \cdot 0,7}{\cos 21,4696^\circ} = -6,8 \text{ м/с}^2, \end{aligned}$$

а кутове прискорення ланки  $CD$  — з останнього:

$$\varepsilon_{CD} = \frac{-a_C^{\text{II}} \cos \nu - a_C^{\text{I}} \sin \nu + a_D \sin \delta}{l_2} =$$

$$= \frac{0,1082 \cos 4,6889^\circ + 3,5515 \sin 4,6889^\circ + 6,8307 \sin 21,469^\circ}{0,7} = -4,14 \text{ с}^{-2}.$$

Порівняємо знайдені кінематичні величини багатоланкового механізму за методом проєкцій (табл. 13.3) та добуті графічно. Зауважимо, що значення кінематичних величин графічного розв'язку в даній таблиці відповідають масштабу прискорень  $\mu_a = 0,0276 \text{ м/с}^2 \cdot \text{мм}$ .

На рис. 13.11 наведено план прискорень з масштабом  $\mu_a = 0,0276 \text{ м/с}^2 \cdot \text{мм}$ .

Таблиця 13.3

| Кінематичні величини багатоланкового механізму | Метод    |           | Кінематичні величини багатоланкового механізму | Метод    |           |
|--|----------|-----------|--|----------|-----------|
|  | проєкцій | графічний |  | проєкцій | графічний |
| Швидкість точки, м/с:                          |          |           | Прискорення точки, м/с <sup>2</sup> :          |          |           |
| $v_A$  | 1,05     | 1,05      | $a_A$  | 5,48     | 5,48      |
| $v_B$  | -1,21    | -1,20     | $a_B$  | 3,90     | 3,80      |
| $v_C$  | 1,37     | 1,34      | $a_C$  | 3,55     | 3,42      |
| $v_D$  | 0,93     | 0,95      | $a_D$  | -6,83    | -6,72     |
| Кутова швидкість ланки, с <sup>-1</sup> :      |          |           | Кутове прискорення ланки, с <sup>-2</sup> :    |          |           |
| $\omega$                                       | -5,24    | -5,24     | $\varepsilon$                                  | 0        | 0         |
| $\omega_{AB}$                                  | -1,29    | -1,31     | $\varepsilon_{AB}$                             | -1,64    | -1,72     |
| $\omega_{CD}$                                  | 2,01     | 1,98      | $\varepsilon_{CD}$                             | -4,14    | -3,98     |
| $\omega_{O_2B}$                                | 2,42     | 2,44      | $\varepsilon_{O_2B}$                           | 5,17     | 5,02      |

#### § 45. Аналітичне визначення кінематичних величин багатоланкового механізму

У § 43 викладено суть аналітичного методу розв'язання задач кінематики і на прикладі кривошипно-шатунного механізму проілюстровано аналітичне знаходження кінематичних величин у разі плоскопаралельного руху.

У даній задачі з кривошипно-шатунним механізмом було розглянуто плоскопаралельний рух однієї його ланки  $AB$ . Тому аналітичне розв'язання задачі є порівняно просте. За полюс було взято спільну для шатуна  $AB$  і ведучого кривошипа  $OA$  точку  $A$  і з нею суміщено початок рухомої системи декартових координат  $\xi A\eta$ , осі якої незмінно зв'язані з ланкою  $AB$ , та спрямовано вісь  $A\eta$  уздовж відрізка  $AB$ . Також введено абсолютно нерухому декартову систему координат  $xOy$  з початком у центрі  $O$  кривошипа  $OA$  для визначення абсолютних кінематичних величин під час руху механізму. За відомим оберտальним рухом ведучої ланки  $OA$  складено рівняння руху полюса  $A$  в нерухомих осях  $xOy$ , а також встановлено рівняння оберտального руху рухомої системи  $\xi A\eta$  відносно нерухомої  $xOy$ .

Отже, добуто рівняння плоскопаралельного руху ланки  $AB$  кривошипно-шатунного механізму. На підставі цих рівнянь і загальних аналітичних співвідношень кінематики плоскопаралельного руху (8.1), (8.3) і (8.7), аналітично було досліджено рух розгляданого механізму.

Розглянемо аналітичне визначення кінематичних величин в разі руху плоского багатоланкового механізму, графічне дослідження якого було виконано в § 40, а за методом проєкцій — у § 44. Для багатоланкового механізму (рис. 13.16), коли дві його ланки  $ABC$  і  $CD$  здійснюють плоскопаралельний рух, аналітичний розв'язок задачі ускладнюється, оскільки вже для двох ланок треба знайти рівняння плоскопаралельного руху.

Зауважимо, що обрані для кінематичного дослідження механізми належать до механічних систем з одним ступенем вільності, тобто заданий рух ведучої ланки механізму з одним ступенем вільності цілком визначає рух усіх інших його ланок. Отже, в багатоланковому механізмі за відомим рівнянням оберտального руху ведучого кривошипа  $O_1A$

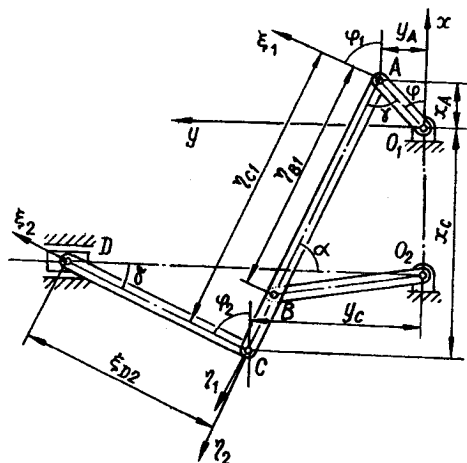


Рис. 13.16

$$\varphi = \varphi(t)$$

$$(13.141)$$

можна скласти як рівняння плоскопаралельного руху першої ланки  $ABC$

$$x_A = x_A[\varphi(t)], y_A = y_A[\varphi(t)], \varphi_1 = \varphi_1[\varphi(t)], \quad (13.142)$$

так і рівняння плоскопаралельного руху другої ланки  $CD$  механізму

$$x_C = x_C[\varphi(t)], y_C = y_C[\varphi(t)], \varphi_2 = \varphi_2[\varphi(t)]. \quad (13.143)$$

На підставі рівнянь (13.141) — (13.143) і загальних аналітичних формул кінематики плоскопаралельного руху (8.1), (8.3) і (8.7), які пов'язують кінематичні величини руху окремих точок тіла з відповідними кінематичними величинами руху полюса та обертального руху тіла навколо полюса, можна аналітично дослідити плоскопаралельний рух ланок  $ABC$  і  $CD$ , а отже, і рух механізму в цілому.

З урахуванням загальних зауважень перейдемо безпосередньо до аналітичного розв'язування задачі з багатоланковим механізмом (рис. 13.16). Умову задачі наведено в § 40.

Введемо абсолютно нерухому декартову систему координат  $xOy$  з початком в центрі  $O_1$  кривошипа  $O_1A$ , вісь  $O_1x$  якої направимо по вертикалі вгору, тоді друга вісь  $O_1y$  набуде горизонтальне положення і напрям справа наліво. Крім того, введемо дві рухомі декартові системи  $\xi_1 A \eta_1$  і  $\xi_2 C \eta_2$ , осі яких незмінно зв'яжемо з ланками  $ABC$  і  $CD$  відповідно, а початки їх сумістимо з полюсами  $A$  і  $C$ : вісь  $A \eta_1$  спрямуємо вздовж ланки  $ABC$ , а вісь другої системи  $\xi_2 C \eta_2$  — вздовж ланки  $CD$ . Тоді  $A \xi_1$  і  $C \xi_2$  утворюють з додатним напрямом нерухомої осі  $O_1x$  відповідно кути

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi); \quad (13.144)$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad (13.145)$$

де  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  і  $\delta$  визначаються з формул (13.131) — (13.133).

Рівняння (13.141) обертального руху ведучої ланки  $O_1A$  має вигляд

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega t, \quad (13.146)$$

оскільки за умовою задачі (див. § 40) кривошип  $O_1A$  обертається зі сталою кутовою швидкістю

$$\omega = \dot{\varphi} = -\omega^* = -5,24 \text{ с}^{-1} = \text{const},$$

де  $\omega^* = |\omega| = 5,2360 \text{ с}^{-1}$ .

З рис. 13.16 запишемо рівняння руху полюса  $A$  (13.142):

$$x_A = r \cos \varphi, y_A = r \sin \varphi, \quad (13.147)$$

які разом із рівністю (13.144) становлять систему рівнянь плоскопаралельного руху ланки  $ABC$ .

Для того щоб скласти рівняння руху полюса  $C$ , застосуємо формули кінематики плоскопаралельного руху (8.1) до точки  $C$ , взявши полюсом точку  $A$ :

$$x_C = x_A - \eta_{C_1} \sin \varphi_1;$$

$$y_C = y_A - \eta_{C_1} \cos \varphi_1,$$

або, врахувавши (13.144) і (13.147),

$$x_C = r \cos \varphi - L \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi);$$

$$y_C = r \sin \varphi + L \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi).$$

Якщо замість  $r$  і  $L$  підставимо їхні значення 0,2 м, 1,0 м, дістанемо шукані рівняння руху полюса  $C$  у вигляді

$$\begin{cases} x_C = 0,2 \cos \varphi - \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi); \\ y_C = 0,2 \sin \varphi + \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi). \end{cases} \quad (13.148)$$

Система рівнянь (13.148), (13.145) є рівняннями плоскопаралельного руху ланки  $CD$ .

Застосуємо співвідношення (8.1) і запишемо рівняння руху точок  $B$  і  $D$  механізму, врахувавши (13.147) і (13.148):

$$\begin{cases} x_B = 0,2 \cos \varphi - 0,8 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi); \\ y_B = 0,2 \sin \varphi + 0,8 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi), \end{cases} \quad (13.149)$$

$$\begin{cases} x_D = 0,2 \cos \varphi - \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) + 0,7 \sin \delta; \\ y_D = 0,2 \sin \varphi + \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) + 0,7 \cos \delta. \end{cases} \quad (13.150)$$

Щоб за формулами (8.3) і (8.7) визначити прямокутні складові абсолютних швидкостей і прискорень точок  $B$ ,  $C$  і  $D$ , треба спочатку знайти кутові швидкості й прискорення ланок  $ABC$  і  $CD$ . Для цього продиференціюємо по часу рівняння (13.144) і (13.145).

Продиференціювавши (13.144) по часу перший раз, дістанемо кутову швидкість ланки  $ABC$ :

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{AB} = -(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 - \omega) = \omega - (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2). \quad (13.151)$$

Для визначення похідних  $\dot{\alpha}_1$ ,  $\dot{\alpha}_2$  скористаємося формулами (13.131), (13.132).

Продиференціюємо їх по часу:

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{0,9285}{\cos \alpha_1} \left[ \frac{\dot{\alpha} \cos \alpha (1 + 0,6897 \cos \varphi) + 0,3448 \sin \alpha \sin \varphi \omega}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^{1,5}} \right]; \quad (13.152)$$



$$\dot{\alpha}_2 = \frac{0,9285}{\cos \alpha_2} \omega \frac{\cos \varphi (1 + 0,6897 \cos \varphi) + 0,3448 \sin^2 \varphi}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^{1,5}}. \quad (13.153)$$

Знайдемо  $\dot{\alpha}$ , скориставшись формулою (13.130):

$$\begin{aligned} (\cos \alpha)' &= \frac{1}{4} \frac{d}{dt} (3 - \cos \varphi) = \frac{1}{4} \omega \sin \varphi = \dot{\alpha} (-\sin \alpha); \\ \dot{\alpha} &= -\frac{\omega \sin \varphi}{4 \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (13.154)$$

При  $\varphi = 45^\circ$  за умовами (13.135)

$$\dot{\alpha} = -\frac{\omega \sin 45^\circ}{4 \sin 55,0247^\circ} = -0,2157\omega \quad (13.155)$$

Тоді визначимо величини (13.152), (13.153) при  $\varphi = 45^\circ$  з урахуванням (13.154):

$$\begin{aligned} (\dot{\alpha}_1)_{\varphi=45^\circ} &= \frac{0,9285\omega}{\cos 38,5916^\circ} \left[ \frac{-0,2157 \cos 55,0247^\circ (1 + 0,6897 \cos 45^\circ)}{(1 + 0,6897 \cos 45^\circ)^{1,5}} + \right. \\ &+ \left. \frac{0,3449 \sin 55,0247^\circ \sin 45^\circ}{(1 + 0,6897 \cos 45^\circ)^{1,5}} \right] = 0,0104\omega; \end{aligned} \quad (13.156)$$

$$\begin{aligned} (\dot{\alpha}_2)_{\varphi=45^\circ} &= \frac{0,9285\omega}{\cos 32,5668^\circ} \times \\ &\times \frac{\cos 45^\circ (1 + 0,6897 \cos 45^\circ) + 0,3449 \sin^2 45^\circ}{(1 + 0,6897 \cos 45^\circ)^{1,5}} = 0,7427\omega. \end{aligned} \quad (13.157)$$

Значення кутової швидкості ланки  $ABC$  дістанемо, якщо (13.156) і (13.157) підставимо у вихідну формулу (13.151):

$$\begin{aligned} \omega_{AB} &= -(0,0104\omega + 0,7427\omega) + \omega = \\ &= 0,2469(-5,2360) = -1,29 \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \quad (13.158)$$

Кутове прискорення ланки  $ABC$  знайдемо, якщо продиференціюємо (13.151) по часу:

$$\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_{AB} = -(\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2). \quad (13.159)$$

Величини  $\ddot{\alpha}_1$  і  $\ddot{\alpha}_2$  дістанемо з похідних по часу від (13.152) і (13.153).

Вираз для  $\ddot{\alpha}_1$  має вигляд

$$\ddot{\alpha}_1 = \frac{\dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} + \frac{0,9285}{\cos \alpha_1} (\dot{j}_3 + 0,3448 \omega \dot{j}_4), \quad (13.160)$$

де

$$\begin{aligned} \dot{f}_3 = & \frac{[\ddot{\alpha} \cos \alpha (1 + 0,6897 \cos \varphi) - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha (1 + 0,6897 \cos \varphi) -}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^3} \\ & \frac{-0,6897 \dot{\alpha} \omega \cos \alpha \sin \varphi (1 + 0,6897 \cos \varphi)^{1,5}}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^3} + \\ & + \frac{1,5 \cdot 0,6897 \omega \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \varphi (1 + 0,6897 \cos \varphi)^{1,5}}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^3}; \end{aligned} \quad (13.161)$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_4 = & \frac{(\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \varphi + \omega \sin \alpha \cos \varphi)(1 + 0,6897 \cos \varphi)^{1,5}}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^3} + \\ & + \frac{1,5 \cdot 0,6897 \omega \sin \alpha \sin^2 \varphi (1 + 0,6897 \cos \varphi)^{0,5}}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^3}; \end{aligned} \quad (13.162)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{\omega}{4} \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right)' = -\frac{\omega}{4} \frac{\omega \cos \varphi \sin \alpha - \dot{\alpha} \sin \varphi \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}. \quad (13.163)$$

При заданому положенні механізму

$$(\ddot{\alpha})_{\varphi=45^\circ} = -0,2483 \omega^2, \quad (13.164)$$

тоді

$$(\dot{f}_3)_{\varphi=45^\circ} = -0,1645 \omega^2; \quad (\dot{f}_4)_{\varphi=45^\circ} = 0,4281 \omega. \quad (13.165)$$

Згідно з формулами (13.155), (13.160) і (13.165) дістанемо

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 = & \frac{0,0104^2 \sin 38,5916^\circ}{\cos 38,5916^\circ} \omega^2 + \frac{0,9285 \omega^2}{\cos 38,5916^\circ} \times \\ & \times (-0,1645 + 0,3449 \cdot 0,4281) = -0,0199 \omega^2. \end{aligned} \quad (13.166)$$

Вираз для  $\ddot{\alpha}_2$  знайдемо, якщо візьмемо похідну по часу від  $\dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2$ :

$$(\dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2)' = \ddot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2.$$

Далі, на підставі (13.153) дістанемо

$$\begin{aligned} 0,9285 \omega \frac{d}{dt} \left[ \frac{(1 + 0,6897 \cos \varphi) \cos \varphi}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^{1,5}} + \frac{0,344 \sin^2 \varphi}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^{1,5}} \right] = \\ = 0,9285 \omega (\dot{f}_1 + 0,3449 \dot{f}_2) = \ddot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2, \end{aligned} \quad (13.167)$$

де

$$\dot{f}_1 = \frac{-\omega[\sin \varphi(1 + 0,6897 \cos \varphi) + 0,6897 \cdot 0,5 \sin 2\varphi](1 + 0,6897 \cos \varphi)^{1,5}}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^3} + \frac{15 \cdot 0,6897 \cdot 0,5 \sin 2\varphi(1 + 0,6897 \cos \varphi)^{1,5}}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^3} \omega; \quad (13.168)$$

$$\dot{f}_2 = \frac{\sin 2\varphi(1 + 0,6897 \cos \varphi)^{1,5} + 1,5 \cdot 0,6897 \sin^3 \varphi(1 + 0,6897 \cos \varphi)^{0,5}}{(1 + 0,6897 \cos \varphi)^3} \omega. \quad (13.169)$$

Шукані часткові значення величин (13.168) і (13.169):

$$(\dot{f}_1)_{\varphi=45^\circ} = -0,4847\omega; \quad (\dot{f}_2)_{\varphi=45^\circ} = 0,6866\omega. \quad (13.170)$$

Тоді рівняння (13.167) з урахуванням (13.170) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & 0,9285\omega^2(-0,4847 + 0,3449 \cdot 0,6866) = \\ & = \ddot{\alpha}_2 \cos 32,5668^\circ - 0,7427^2 \sin 32,5668^\circ \omega^2, \end{aligned}$$

звідки друга похідна  $\ddot{\alpha}_2$ , з урахуванням відомих величин (13.155) і (13.135),

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_2 = \omega^2 \left[ \frac{0,7427^2 \sin 32,5668^\circ}{\cos 32,5668^\circ} + \right. \\ \left. + \frac{0,9285}{\cos 32,5668^\circ} (-0,4847 + 0,3449 \cdot 0,6866) \right] = -0,0792\omega^2. \end{aligned} \quad (13.171)$$

Повернемося до вихідної формули (13.159) і визначимо кутове прискорення  $\varepsilon_{AB}$  ланки  $AB$ , використовуючи знайдені величини (13.166) і (13.171):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{AB} = -(\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2) = -(-0,0199\omega^2 + 0,0792\omega^2) = \\ = -0,0593\omega^2 = -0,0593 \cdot (-5,2360) = -1,63 \text{ c}^{-2}. \end{aligned} \quad (13.172)$$

Для визначення кутової швидкості ланки  $CD$  продиференціюємо по часу її рівняння обертального руху (13.166):

$$\omega_{CD} = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}{dt} = -\dot{\delta}. \quad (13.173)$$

Величину похідної  $\dot{\delta}$  знайдемо з рівняння, яке дістанемо після диференціювання співвідношення (13.133):

$$\begin{aligned} \dot{\delta} \cos \delta = & 1,4286 \left\{ (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 - \omega) \sin(\varphi - \alpha_1 - \alpha_2) - \right. \\ & - 0,5385 \left[ (\dot{\alpha}_2 - \omega) \sin(\varphi - \alpha_2) \sqrt{1 + 0,6897 \cos \varphi} - \right. \\ & \left. \left. - \cos(\varphi - \alpha_2) \frac{0,5 \cdot 0,6897 \omega \sin \varphi}{\sqrt{1 + 0,6897 \cos \varphi}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13.174)$$

Введемо позначення

$$F_1 = (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 - \omega) \sin(\varphi - \alpha_1 - \alpha_2); \quad (13.175)$$

$$F_2 = (\dot{\alpha}_2 - \omega) \sin(\varphi - \alpha_2) \sqrt{1 + 0,6897 \cos \varphi}; \quad (13.176)$$

$$F_3 = \cos(\varphi - \alpha_2) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + 0,6897 \cos \varphi}} \quad (13.177)$$

і поділимо (13.174) на  $\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta}$ , тоді

$$\dot{\delta} = \frac{1,5351}{\cos \delta} \{F_1 - 0,5385[F_2 - 0,3449\omega F_3]\}, \quad (13.178)$$

$$(\dot{\delta})_{\varphi=45^\circ} = 0,3843 \omega.$$

Тоді шукана кутова швидкість ланки  $CD$  на підставі (13.173)

$$(\omega_{CD})_{\varphi=45^\circ} = -\dot{\delta} = -0,3843 \omega = 0,3843 \cdot 5,2360 = 2,01 \text{ c}^{-1}. \quad (13.179)$$

Щоб знайти кутове прискорення  $\varepsilon_{CD}$  ланки  $CD$ , треба продиференціювати двічі по часу рівняння (13.166) і один раз співвідношення (13.178):

$$\varepsilon_{CD} = \ddot{\delta} = -\dot{\delta}; \quad (13.180)$$

$$\ddot{\delta} = \frac{\dot{\delta}^2 \sin \delta}{\cos \delta} + \frac{1,4286}{\cos \delta} \{\dot{F}_1 - 0,5385[\dot{F}_2 - 0,3449\omega \dot{F}]\}. \quad (13.181)$$

Часткове значення

$$(\ddot{\delta})_{\varphi=45^\circ} = 0,151 \omega^2 = 0,151 \cdot 27,4157 = 4,14.$$

Отже, на підставі (13.179),

$$(\varepsilon_{CD})_{\varphi=45^\circ} = (\ddot{\delta})_{\varphi=45^\circ} = -4,14 \text{ c}^{-2}. \quad (13.182)$$

Наведемо загальні вирази для похідних  $\dot{F}_1$ ,  $\dot{F}_2$  і  $\dot{F}_3$ , які входять у співвідношення (13.181):

$$\begin{aligned} \dot{F}_1 &= (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2) \sin(\varphi - \alpha_1 - \alpha_2) - \\ &- (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 - \omega)^2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi); \end{aligned} \quad (13.183)$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_2 &= \ddot{\alpha}_2 \sin(\varphi - \alpha_2) \sqrt{1 + 0,6897 \cos \varphi} - (\dot{\alpha}_2 - \omega)^2 \times \\ &\times \cos(\alpha_2 - \omega) \sqrt{1 + 0,6897 \cos \varphi} - 0,3449 \omega \sin \varphi \times \\ &\times (1 + 0,6897 \cos \varphi)^{-1,5} (\dot{\alpha}_2 - \omega) \sin(\varphi - \alpha_2); \end{aligned} \quad (13.184)$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_3 &= -(\omega - \dot{\alpha}_2) \sin(\varphi - \alpha_2) \sin \varphi (1 + 0,6897 \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}} + \\ &+ \cos(\varphi - \alpha_2) \left[ \omega \cos \varphi (1 + 0,6897 \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}} + 0,3449 \times \right. \\ &\left. \times \omega \sin^2 \varphi (1 + 0,6897 \cos \varphi)^{-\frac{3}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (13.185)$$

Часткові значення величин (13.183)–(13.185) такі:

$$\begin{aligned} (\dot{F}_1)_{\varphi=45^\circ} &= -0,0808 \omega^2; \quad (\dot{F}_2)_{\varphi=45^\circ} = -0,047 \omega^2; \\ (\dot{F}_3)_{\varphi=45^\circ} &= 0,6268 \omega. \end{aligned} \quad (13.186)$$

Визначивши кутові швидкості й кутові прискорення ланок  $ABC$  та  $CD$  розглядуваного механізму (рис. 13.16), можна визначити за формулами (8.3), (8.7) лінійні швидкості і прискорення точок  $B$ ,  $C$  і  $D$  його ланок.

Знайдемо проекції швидкості  $\vec{v}_B$  точки  $B$  ланки  $ABC$  на підставі формул (8.3):

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= \dot{x}_B = v_{Ax} - \dot{\varphi}_1 \eta_{B_1} \cos \varphi_1 = \\ &= v_A \sin \varphi - \dot{\varphi}_1 \eta_{B_1} \cos \left[ \frac{\pi}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) \right] = \\ &= v_A \sin \varphi - \omega_{AB} l_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) = \\ &= 1,047 \cdot 0,707 + 1,29 \cdot 0,8 \sin 26,2^\circ = 1,196 \text{ м/с}; \\ v_{By} &= v_{Ay} - \omega_{AB} l_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) = \\ &= -v_A \cos \varphi - \omega_{AB} l_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) = \\ &= -1,047 \cdot 0,707 - 1,29 \cdot 0,8 \cos 26,2^\circ = 0,186 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Модуль

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{1,429 + 0,035} = 1,21 \text{ м/с.}$$

Кути між вектором швидкості  $\vec{v}_B$  і нерухомими осями  $Ox$  і  $Oy$

$$\angle(\vec{v}_B, x) = \arccos \frac{v_{Bx}}{v_B} = \arccos \frac{1,196}{1,21} = 9^\circ;$$

$$\angle(\vec{v}_B, y) = \arccos \frac{v_{By}}{v_B} = \arccos \frac{0,186}{1,21} = 81^\circ.$$

За формулами (8.7) дістанемо вирази для шуканих проекцій прискорення точки  $B$  на нерухомі осі  $xOy$ :

$$a_{Bx} = a_{Ax} - \ddot{\varphi}_1 \eta_{B_1} \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \eta_{B_1} \sin \varphi_1;$$

$$a_{By} = a_{Ay} - \ddot{\varphi}_1 \eta_{B_1} \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 \eta_{B_1} \cos \varphi_1,$$

або, за формулами (13.144), (13.151) і (13.159),

$$a_{Bx} = a_{Ax} - \varepsilon_{AB} l_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) + \omega_{AB}^2 l_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi);$$

$$a_{By} = a_{Ay} - \varepsilon_{AB} l_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) - \omega_{AB}^2 l_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi).$$

Після підстановки значень дістанемо

$$a_{Bx} = -3,877 + 1,64 \cdot 0,8 \sin 26,2^\circ + 1,29^2 \cdot 0,8 \cos 26,2^\circ = -2,104 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{By} = -3,877 + 1,64 \cdot 0,8 \cos 26,2^\circ - 1,29^2 \cdot 0,8 \sin 26,2^\circ = -3,292 \text{ м/с}^2.$$

Визначимо модуль і напрям прискорення точки  $B$ :

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{2,104^2 + 3,292^2} = 3,91 \text{ м/с}^2.$$

$$\angle(\vec{a}_B, x) = \arccos \frac{a_{Bx}}{a_B} = \arccos \left( -\frac{2,104}{3,91} \right) = 123^\circ;$$

$$\angle(\vec{a}_B, y) = \arccos \frac{a_{By}}{a_B} = \arccos \left( -\frac{3,292}{3,92} \right) = 147^\circ.$$

Якщо застосувати загальні формули кінематики плоскопаралельного (8.3) до точки  $C$  ланки  $AC$ , то дістанемо такі вирази для проекцій швидкості  $\vec{v}_C$  на осі  $Ox$  і  $Oy$ :

$$v_{Cx} = v_{Ax} - \dot{\varphi}_1 \eta_{C_1} \cos \varphi_1 = v_{Ax} - \omega_{AB} l_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi);$$

$$v_{Cy} = v_{Ay} - \dot{\varphi}_1 \eta_{C_1} \sin \varphi_1 = v_{Ay} - \omega_{AB} l_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi).$$

Після підстановки відповідних значень шукані величини

$$v_{Cx} = 0,741 + 1,29 \sin 26,2^\circ = 1,310 \text{ м/с};$$

$$v_{Cy} = -0,741 + 1,29 \cos 26,2^\circ = 0,416 \text{ м/с}.$$

За проєкціями  $v_{Cx}$  і  $v_{Cy}$  знайдемо модуль швидкості точки  $C$

$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \sqrt{1,310^2 + 0,416^2} = 1,37 \text{ м/с}.$$

Застосуємо формули напрямних косинусів (2.45) і визначимо кути, які утворює вектор швидкості  $\vec{v}_C$  точки  $C$  з декартовими осями  $xOy$ :

$$\angle(\vec{v}_C, x) = \arccos \frac{v_{Cx}}{v_C} = \arccos \frac{1,31}{1,37} = 18^\circ;$$

$$\angle(\vec{v}_C, y) = \arccos \frac{v_{Cy}}{v_C} = \arccos \frac{0,416}{1,37} = 72^\circ.$$

Знайдемо прискорення цієї самої точки. Skorистаємося загальними аналітичними формулами (8.7) кінематики плоскопаралельного руху. Крім того, застосуємо співвідношення (13.144), (13.151), (13.159), а також (13.135).

Відповідно до (8.7) проєкції прискорення точки  $C$  на нерухомі осі системи  $xOy$  мають вигляд:

$$a_{Cx} = a_{Ax} - \ddot{\varphi}_1 \eta_{C1} \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \eta_{C1} \sin \varphi_1;$$

$$a_{Cy} = a_{Ay} - \ddot{\varphi}_1 \eta_{C1} \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \eta_{C1} \cos \varphi_1,$$

або

$$a_{Cx} = a_{Ax} - \varepsilon_{AB} L_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) + \omega_{AB}^2 l_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi);$$

$$a_{Cy} = a_{Ay} - \varepsilon_{AB} L_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) + \omega_{AB}^2 l_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi).$$

Підставимо значення:

$$a_{Cx} = -3,877 + 1,64 \sin 26,2^\circ + 1,29^2 \cos 26,2^\circ = -1,660 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -3,877 + 1,64 \cos 26,2^\circ - 1,29^2 \sin 26,2^\circ = -3,140 \text{ м/с}^2.$$

Обчислимо модуль прискорення  $\bar{a}_C$ :

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{1,66^2 + 3,14^2} = 3,55 \text{ м/с}^2.$$

Також знайдемо напрямні кути між вектором  $\bar{a}_C$  та осями  $Ox$  і  $Oy$ :

$$\angle(\vec{a}_C, x) = \arccos \frac{a_{Cx}}{a_C} = \arccos \left( -\frac{1,66}{3,55} \right) = 118^\circ;$$

$$\angle(\vec{a}_C, y) = \arccos \frac{a_{Cy}}{a_C} = \arccos \left( -\frac{3,14}{3,55} \right) = 152^\circ.$$

Тепер точку  $C$ , швидкість і прискорення якої вже знайдено, приймемо за полюс ланки  $CD$  і визначимо за відомими кутовою швидкістю  $\omega_{CD}$  і кутовим прискоренням  $\varepsilon_{CD}$  лінійну швидкість  $\vec{v}_D$  та лінійне прискорення  $\vec{a}_D$  точки  $D$  ланки  $CD$ .

Згідно з загальними формулами (8.31)

$$v_{Dx} = v_{Cx} - \dot{\varphi}_2 \xi_{D_2} \sin \varphi_2;$$

$$v_D = v_D = v_{Cy} + \dot{\varphi}_2 \xi_{D_2} \cos \varphi_2,$$

або, якщо врахувати (13.145), (13.173),

$$v_{Dx} = v_{Cx} - \omega_{CD} l_2 \cos \delta;$$

$$v_{Dy} = v_{Cy} + \omega_{CD} l_2 \sin \delta.$$

Підстановка відповідних числових даних дає такі шукані проекції швидкості повзуна  $D$ :

$$v_{Dx} = 1,310 - 2,01 \cdot 0,7 \cos 21,4696^\circ = 1,31 - 1,31 = 0 \text{ м/с};$$

$$v_D = v_{Dx} = 0,416 + 2,01 \cdot 0,7 \cos 21,5^\circ = 0,93 \text{ м/с},$$

а за значенням проекцій вектора  $\vec{v}_D$  на декартові осі знайдемо його модуль і напрямні кути:

$$v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2} = \sqrt{0 + 0,93^2} = 0,93 \text{ м/с};$$

$$\angle(\vec{v}_D, x) = \arccos \frac{v_{Dx}}{v_D} = \arccos 0 = 90^\circ;$$

$$\angle(\vec{v}_D, y) = \arccos \frac{v_{Dy}}{v_D} = \arccos 1 = 0^\circ.$$

За формулами (8.7) маємо:

$$a_{Dx} = a_{Cx} - \ddot{\varphi}_2 \xi_{D_2} \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \xi_{D_2} \cos \varphi_2;$$

$$a_{Dy} = a_{Cy} + \ddot{\varphi}_2 \xi_{D_2} \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \xi_{D_2} \sin \varphi_2,$$

або

$$a_{Dx} = a_{Cx} - \varepsilon_{CD} l_2 \cos \delta + \omega_{CD}^2 l_2 \sin \delta;$$

$$a_{Dy} = a_{Cy} - \varepsilon_{CD} l_2 \sin \delta + \omega_{CD}^2 l_2 \cos \delta.$$



При заданих числових даних шукані проекції прискорення точки  $D$

$$a_{Dx} = -1,66 + 4,14 \cdot 0,7 \cos 21,5^\circ - 2,01^2 \cdot 0,7 \sin 21,5^\circ = 0 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_{Dy} = -3,14 - 4,14 \cdot 0,7 \sin 21,5^\circ - 2,01^2 \cdot 0,7 \cos 21,5^\circ = -6,83 \text{ м/с}^2 .$$

Оскільки повзун  $D$  рухається прямолінійно паралельно осі  $Oy$ , то напрямні кути вектора  $\vec{a}_D$  можна легко встановити без обчислень.

#### § 46. Геометричне визначення кінематичних величин багатоланкового механізму

У § 41 викладено суть геометричного (векторного) визначення кутових, лінійних швидкостей і прискорень у разі плоскопаралельного руху на прикладі кривошипно-шатунного механізму. Розглянемо геометричний (векторний) метод розв'язування задачі з багатоланковим механізмом, яку було досліджено графічно у § 40 (умову задачі наведено в § 40, а схему механізму — на рис. 13.7).

Для визначення кутових швидкостей і прискорень ланок  $ABC$ ,  $O_2B$ , і  $CD$ , а також лінійних швидкостей і прискорень точок  $B$ ,  $C$  і  $D$  ланок механізму (див. рис. 13.7) розглядуватим методом скористаємося векторними формулами кінематики плоскопаралельного руху (6.9), (6.16) і (6.17), що виражають теореми про абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точок тіла.

На підставі векторних рівностей (6.9), (6.16) і (6.17) зобразимо

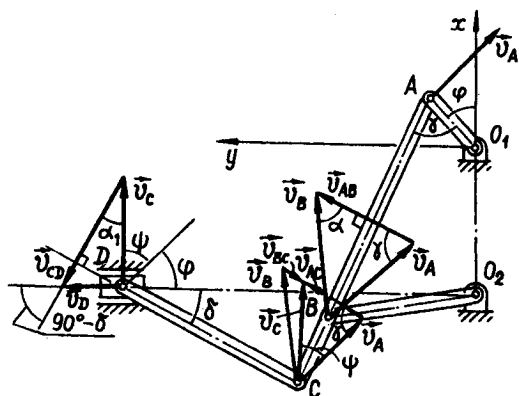


Рис. 13.17

в точках  $B$ ,  $C$  і  $D$  трикутники швидкостей і трикутники (чотирикутники) прискорень. Далі знаходження відповідних кінематичних величин полягає в розв'язанні геометричних задач на визначення сторін трикутників швидкостей і трикутників прискорень.

Для визначення шуканих кутових і лінійних швидкостей застосуємо теорему синусів і косинусів до трикутників швидкостей (рис. 13.17).

З трикутника швидкостей  $Bv_A v_{AB}$  згідно з теоремою синусів запишемо

$$\frac{v_A}{\sin \alpha} = \frac{v_B}{\sin \gamma},$$

звідки

$$v_B = \frac{v_A \sin \gamma}{\sin \alpha}. \quad (13.187)$$

Скориставшись даними (13.135), (13.137), обчислимо значення швидкості точки  $B$  за формулою (13.187):

$$v_B = \frac{1,0472 \sin 71,1584^\circ}{\sin 55,0247^\circ} = 1,2095 \cong 1,21 \text{ м/с.}$$

З того самого трикутника швидкостей ( $Bv_A v_{AB}$ ), застосовуючи до нього вдруге теорему синусів,

$$\frac{v_{AB}}{\sin(180^\circ - \alpha - \gamma)} = \frac{v_A}{\sin \alpha},$$

дістанемо кутову швидкість ланки  $ABC$ :

$$v_{AB} = v_A \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha} = 1,0472 \frac{\cos 36,1831^\circ}{\sin 55,0247^\circ} = 1,0315 \text{ м/с; } (13.188)$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l_1} = \frac{1,0315}{0,8} = 1,2894 \cong 1,29 \text{ с}^{-1}. \quad (13.189)$$

Швидкість другої точки  $C$  ланки  $ABC$  механізму знайдемо з трикутника швидкостей  $Cv_A v_{AC}$  (застосуємо до нього теорему косинусів):

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + v_{AC}^2 - 2v_A v_{AC} \cos \gamma}, \quad (13.190)$$

де  $v_{AC} = \omega_{AB} l_1 = 1,2894 \cdot 1 = 1,2894 \text{ м/с.}$

Підставимо відповідні дані у формулу (13.190) й обчислимо

$$v_C = \sqrt{1,0472^2 + 1,2894^2 - 2 \cdot 1,0472 \cdot 1,2894 \cos 71,1584^\circ} = 1,3737 \cong 1,37 \text{ м/с.} \quad (13.191)$$

Далі з трикутника швидкостей  $Dv_C v_{CD}$  треба визначити швидкість повзуна  $D$  і кутову швидкість ланки  $CD$ .

Кутову швидкість  $\omega_{CD}$  визначимо з формули

$$\omega_{CD} = \frac{v_{CD}}{l_2}; \quad \frac{v_{CD}}{\sin(180^\circ - \psi - \varphi)} = \frac{v_C}{\sin(90^\circ - \delta)}, \quad (13.192)$$

де кут  $\psi$  можна знайти за теоремою синусів:

$$\frac{\sin \psi}{\omega_{AB}} = \frac{\sin \gamma}{v_C}; \quad \psi = \arcsin \frac{1,2894 \sin 71,1584^\circ}{1,3737} = 62,6649^\circ,$$

застосованою до трикутника швидкостей  $Cv_A v_{AC}$ :

$$v_{CD} = 1,3737 \frac{\cos 17,6649^\circ}{\cos 21,4696^\circ} 1,4065 \cong 1,41 \text{ м/с};$$

$$\omega_{CD} = \frac{1,4065}{0,7} = 2,0093 \cong 2,01 \text{ с}^{-1}. \quad (13.193)$$

Щоб дістати значення швидкості повзуна  $D$  з теореми синусів

$$\frac{v_D}{\sin \alpha_1} = \frac{v_C}{\cos \delta}, \quad (13.194)$$

треба мати значення кута  $\alpha_1$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 180^\circ - [(90^\circ - \delta) + (180^\circ - \varphi - \psi)] = \\ &= -90^\circ + \delta + \varphi + \psi = -90^\circ + 21,4696^\circ + 45^\circ + \\ &+ 62,6649^\circ = 39,1345^\circ. \end{aligned}$$

Повернемося до формули (13.194) і знайдемо шукану швидкість повзуна  $D$ :

$$v_D = 1,3737 \frac{0,6311}{0,9306} = 0,9316 \cong 0,93 \text{ м/с}.$$

Так само можна визначити і кутову швидкість кривошипа  $O_2B$ :

$$\omega_{O_2B} = \frac{v_B}{R} = \frac{1,2095}{0,5} = 2,4190 \cong 2,42 \text{ с}^{-1}. \quad (13.195)$$

Знайдемо кутові та лінійні прискорення. У чотирикутнику  $B234$  сторони  $a_A$ ,  $a_{Bn}$ ,  $a_{AB}^n$  відомі, оскільки

$$a_{Bn} = \frac{v_B^2}{R} = \frac{1,2095^2}{0,5} = 2,9258 \cong 2,93 \text{ м/с}^2; \quad (13.196)$$

$$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 l = 1,2894^2 \cdot 0,8 = 1,3300 \approx 1,33 \text{ м/с}^2. \quad (13.197)$$

З рис. 13.18 видно, що вектор прискорення точки  $B$  є спільною стороною прямокутного трикутника прискорень  $B21$  і чотирикутника прискорень  $B431$ . Якщо нам вдасться у прямокутному трикутнику  $B21$  визначити сторону  $a_{B_1}$ , то за формулою

$$a_B = \sqrt{a_{B_1}^2 + a_{Bn}^2} \quad (13.198)$$

знайдемо шукане прискорення  $a_B$ . У зв'язку з цим розглянемо трикутник прискорень  $213$ :

$$\angle 1 = \angle(\vec{a}_{B_1}, \vec{a}_{AB}^n) = \pi - \alpha,$$

а два інші кути треба знайти — це кути  $\beta_1, \beta_2$ .

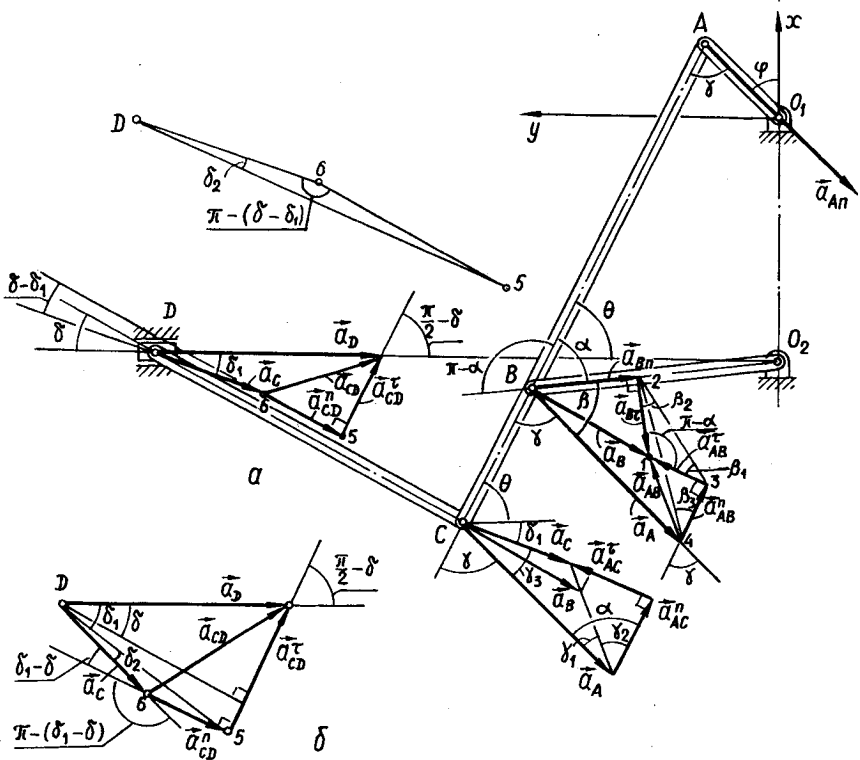


Рис. 13.18

Насамперед обчислимо сторону 42 трикутника  $B24$  за теоремою косинусів

$$l_{42} = \sqrt{a_A^2 + a_{Bn}^2 - 2a_A a_{Bn} \cos \beta}, \quad (13.199)$$

де  $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - 55,0247^\circ - 71,1584^\circ = 53,8169^\circ$ .

Підставимо дані (13.196) і (13.197) у формулу (13.199):

$$l_{42} = \sqrt{5,4831^2 + 2,9258^2 - 2 \cdot 5,4831 \cdot 2,9258 \cos 53,8169^\circ} = 4,4365 \text{ м/с}^2.$$

Наперед треба знати величину кута  $\beta_3$ , який знайдемо, розглянувши трикутник  $B42$  і застосувавши до нього теорему синусів

$$\frac{a_{Bn}}{\sin(\gamma - \beta_3)} = \frac{l_{42}}{\sin \beta}, \quad (13.200)$$

звідки проміжне рівняння

$$\gamma - \beta_3 = \arcsin \frac{2,9258 \sin 53,8169^\circ}{4,4365} = 38,9974^\circ,$$

розв'язавши яке, дістанемо шуканий кут

$$\beta_3 = \gamma - 38,9974^\circ = 71,1584^\circ - 32,1610^\circ = 38,9974^\circ.$$

З трикутника 423 за теоремою косинусів, враховуючи (13.199), маємо

$$\begin{aligned} l_{32} &= \sqrt{(a_{AB}^n)^2 + l_{42}^2 - 2a_{AB}^n l_{42} \cos \beta_3} = \\ &= \sqrt{1,33^2 + 4,4365^2 - 2 \cdot 1,33 \cdot 4,4365 \cos 38,9974^\circ} = 3,5043 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (13.201)$$

Застосування теореми синусів до трикутника 423 дасть змогу знайти раніше згадуваний кут  $\beta_1$ :

$$\cos \beta_1 = \frac{l_{42}}{l_{32}} \sin \beta_3; \quad \beta_1 = \arccos \left( \frac{4,4365}{4,2749} \sin 38,9974^\circ \right) = 37,1853^\circ,$$

тоді

$$\beta_2 = \alpha - \beta_1 = 55,0247^\circ - 37,1853^\circ = 17,8394^\circ.$$

Отже, можна обчислити дотичне прискорення точки  $B$  ланки  $O_2B$ , розглянувши трикутник 123 і застосувавши до нього теорему синусів

$$\frac{a_{Bt}}{\sin \beta_1} = \frac{l_{32}}{\sin \alpha}. \quad (13.202)$$

Підставимо в (13.202) значення  $l_{32}$  (13.201) і кутів  $\beta_1, \alpha$ :

$$a_{B_t} = l_{32} \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha} = 3,5043 \frac{\sin 37,1853^\circ}{\sin 55,0247^\circ} = 2,5848 \cong 2,58 \text{ м/с}^2. \quad (13.203)$$

За дотичним прискоренням  $a_{B_t}$  точки  $B$  кривошипа  $O_2B$  знайдемо його кутове прискорення

$$\varepsilon_{O_2B} = \frac{a_{B_t}}{R} = \frac{2,5848}{0,5} = 5,17 \text{ с}^{-2}.$$

Підставимо значення  $a_{B_t}$  (13.203) і  $a_{B_n}$  (13.196) у формулу (13.198):

$$a_B = \sqrt{2,5848^2 + 2,9258^2} = 3,9040 \cong 3,90 \text{ м/с}^2.$$

Це — прискорення точки  $B$ .

Також з трикутника  $123$  запишемо:

$$\frac{a_{AB}^i}{\sin \beta_2} = \frac{l_{34}}{\sin \alpha}. \quad (13.204)$$

Підставимо в (13.204) відповідні значення і знайдемо дотичне обертальне прискорення точки  $B$  при обертанні ланки  $ABC$  навколо полюса  $A$ :

$$a_{AB}^i = l_{34} \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha} = 3,5043 \frac{\sin 17,8394^\circ}{\sin 55,0247^\circ} = 1,3102 \text{ м/с}^2. \quad (13.205)$$

Тоді кутове прискорення  $\varepsilon_{AB}$  ланки  $ABC$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^i}{l_2} = \frac{1,3102}{0,8} = 1,6377 \cong 1,64 \text{ с}^{-2}. \quad (13.206)$$

Прискорення другої точки  $C$  ланки  $ABC$  можна визначити з трикутника прискорень  $Ca_Aa_{AC}$ . В ньому сторона  $a_{AC}$  відома, оскільки

$$a_{AC} = l_1 \sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4} = \sqrt{1,6377^2 + 1,2894^2} = 2,3337 \cong 2,33 \text{ м/с}^2.$$

Також відома сторона  $a_A$ , а кут (рис. 13.18)

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha - \gamma_2 = \alpha - \arctg \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \\ &= 55,0247^\circ - \arctg \frac{1,6377}{1,2894^2} = 26,5907^\circ. \end{aligned}$$

За двома сторонами  $a_A, a_{AC}$  і кутом  $\gamma_1$  між ними трикутника  $Ca_A a_{AC}$  знайдемо третю сторону

$$\begin{aligned} a_C &= \sqrt{a_A^2 + a_{AC}^2 - 2a_A a_{AC} \cos \gamma_1} = \\ &= \sqrt{2,3337^2 + 5,4831^2 - 2 \cdot 2,3337 \cdot 5,4831 \cos 26,5907^\circ} = \quad (13.207) \\ &= 3,5533 \cong 3,55 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Отже, маємо і прискорення точки  $C$ .

Лишається обчислити кінематичні величини ланки  $CD$ . Для цього скористаємося зображенням у точці  $D$  чотирикутником прискорень  $D65a_D$ , в якому відомими є дві сторони  $a_C$  і  $a_{CD}^n$ , бо з урахуванням (13.192)

$$a_{CD}^n = \omega_{CD}^2 l_2 = 2,0093^2 \cdot 0,7 = 2,8261 \cong 2,83 \text{ м/с}^2. \quad (13.208)$$

Розглянемо кути. Кут між векторами  $\vec{a}_C$  і  $\vec{a}_D$  позначено на рис. 13.18  $\delta_1$ , який, очевидно,

$$\delta_1 = 180^\circ - (\gamma + \gamma_3 - \theta). \quad (13.209)$$

Найвірогідніше, що чотирикутник  $D65a_D$  є опуклим (рис. 13.18, б). Якщо в ньому сполучимо вершини  $D$  і  $5$ , то дістанемо додатковий трикутник  $D56$ , в якому  $\angle 6 = \angle(\vec{a}_C, \vec{a}_{CD}^n) = \pi - (\delta_1 - \delta)$ , а один з гострих кутів позначимо  $\delta_2$ .

Кут  $\gamma_3$ , який входить у співвідношення (13.209), знайдемо з трикутника прискорень  $Ca_A a_{AC}$  точки  $C$ :

$$\gamma_3 = \arcsin \frac{a_{AC} \sin \gamma_1}{a_C} = \arcsin \frac{2,3337 \sin 26,5907^\circ}{3,5533} = 17,0976^\circ.$$

Тоді на підставі (13.209) дістанемо

$$\delta_1 = 180^\circ - (71,584^\circ + 17,0976^\circ + 63,8416^\circ) = 27,9024^\circ.$$

З трикутника  $D56$  за теоремою косинусів

$$\begin{aligned} l_{DS} &= \sqrt{a_C^2 + (a_{CD}^n)^2 + 2a_C a_{CD}^n \cos(\delta_1 - \delta)} = \\ &= \sqrt{3,5533^2 + 2,8261^2 + 2 \cdot 3,5533 \cdot 2,8261 \cos(27,9024^\circ - 21,4696^\circ)} = \quad (13.210) \\ &= 6,3695 \text{ м/с}^2, \end{aligned}$$

а також

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \arcsin \left[ \frac{a_{CD}^n}{l_{DS}} \sin(\delta_1 - \delta) \right] = \\ &= \arcsin \left[ \frac{2,8261}{6,3695} \sin(27,9024^\circ - 21,4696^\circ) \right] = 2,8494^\circ. \end{aligned}$$

Знайдемо кут

$$\delta_1 - \delta_2 = 27,9024^\circ - 2,8494^\circ = 25,0530^\circ.$$

Тепер за двома кутами  $\delta_1 - \delta_2 = \angle(\bar{a}_D, D5)$ ,  $\pi/2 - \delta$  та одною стороною  $D5$  знайдемо дві інші сторони  $a_D$  і  $a_{CD}^i$  трикутника  $D5a_D$ :

$$a_{CD}^i = l_{D5} \frac{\sin(\delta_1 - \delta_2)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)} = 6,3695 \frac{\sin 25,0530^\circ}{\cos 21,4696^\circ} = 2,8983 \text{ м/с}^2; \quad (13.211)$$

$$\begin{aligned} a_D &= a_{CD}^i \frac{\sin[90^\circ - (25,0530^\circ - 21,4696^\circ)]}{\sin 25,0530^\circ} = \\ &= 2,8983 \cdot \frac{\cos(25,0530^\circ - 21,4696^\circ)}{\sin 25,0530^\circ} = 6,83 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (13.212)$$

Таке значення (13.212) має прискорення повзуна  $D$  розглядуваного механізму.

Лишилося визначити кутове прискорення  $\varepsilon_{CD}$  ланки  $CD$ . З урахуванням (13.211) маємо таке значення шуканої величини  $\varepsilon_{CD}$ :

$$\varepsilon_{CD} = \frac{a_{CD}^i}{l_2} = \frac{2,8983}{0,7} = 4,14 \text{ с}^{-2}.$$

Геометрично задачу розв'язано.

Нарешті зауважимо, що значення кінематичних величин, добутих за трьома методами — проєкцій, аналітичним і геометричним — збігаються. Коли треба оцінити точність графічного розв'язку задачі, то за точні значення відповідних величин приймають ті їхні значення, які дістають за трьома названими методами.

Використаємо дані табл. 13.3 і оцінимо точність графічного методу щодо «точних» методів визначенням відповідних відносних похибок  $\delta$  результатів. Відносні похибки мають індекс, що вказує на кінематичну величину, для якої визначається похибка, а наближеним значенням кінематичних величин, отриманих графічно, присвоїти індекс «Г». На підставі табл. 13.3 дістанемо такі відносні похибки:

$$\delta_{v_B} = \frac{|v_B - v_B^r|}{v_B} 100\% = \frac{1,21 - 1,20}{1,21} \cdot 100\% = 0,91\%;$$

$$\delta_{v_C} = \frac{|v_C - v_C^r|}{v_C} 100\% = \frac{1,37 - 1,34}{1,37} \cdot 100\% = 2,19\%;$$



$$\delta_{v_D} = \frac{|v_D - v_D^r|}{v_D} 100\% = \frac{0,95 - 0,93}{0,93} \cdot 100\% = 2,15\%;$$

$$\delta_{\omega_{AB}} = \frac{|\omega_{AB} - \omega_{AB}^r|}{\omega_{AB}} 100\% = \frac{1,31 - 1,29}{1,29} \cdot 100\% = 1,55\%;$$

$$\delta_{\omega_{CD}} = \frac{|\omega_{CD} - \omega_{CD}^r|}{\omega_{CD}} 100\% = \frac{2,01 - 1,98}{2,01} \cdot 100\% = 2,97\%;$$

$$\delta_{\omega_{O_2B}} = \frac{|\omega_{O_2B} - \omega_{O_2B}^r|}{\omega_{O_2B}} 100\% = \frac{2,44 - 2,42}{2,42} \cdot 100\% = 0,83\%;$$

$$\delta_{a_B} = \frac{|a_B - a_B^r|}{a_B} 100\% = \frac{3,90 - 3,80}{3,90} \cdot 100\% = 2,56\%;$$

$$\delta_{a_C} = \frac{|a_C - a_C^r|}{a_C} 100\% = \frac{3,55 - 3,42}{3,55} \cdot 100\% = 3,66\%;$$

$$\delta_{a_D} = \frac{|a_D - a_D^r|}{a_D} 100\% = \frac{6,83 - 6,72}{6,83} \cdot 100\% = 1,61\%;$$

$$\delta_{\varepsilon_{AB}} = \frac{|\varepsilon_{AB} - \varepsilon_{AB}^r|}{\varepsilon_{AB}} 100\% = \frac{1,72 - 1,64}{1,64} \cdot 100\% = 4,88\%;$$

$$\delta_{\varepsilon_{CD}} = \frac{|\varepsilon_{CD} - \varepsilon_{CD}^r|}{\varepsilon_{CD}} 100\% = \frac{4,14 - 3,98}{4,14} \cdot 100\% = 3,86\%;$$

$$\delta_{\varepsilon_{O_2B}} = \frac{|\varepsilon_{O_2B} - \varepsilon_{O_2B}^r|}{\varepsilon_{O_2B}} 100\% = \frac{5,17 - 5,02}{5,17} \cdot 100\% = 2,90\%.$$

## **СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

---

1. *Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф.* Теоретическая механика. Статика. Кинематика. К.: Вища шк., 1989. 420 с.
2. *Павловский М. А., Путята Т. В.* Теоретическая механика. К.: Вища шк., 1985. 327 с.
3. *Кінематика та динаміка точки. Комп'ютерний курс / М. А. Павловський, Л. Ю. Акінфієва, А.І. Юрокін, С. Я. Свістунов.* К.: Либідь, 1993. 245 с.
4. *Кільчевський Н. А.* Курс теоретичної механіки. К.: Вища шк., 1972. Т. 1. 375 с.
5. *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики: В 2 т. М.: Наука, 1984. Т. 1. 362 с.
6. *Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики. М.: Наука, 1976. 400 с.
7. *Павловський М. А., Акінфієва Л. Ю.* Програма навчальної дисципліни «Теоретична механіка». К.: ІСДО, 1993. 116 с.
8. *Мещерский И. В.* Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1972. 258 с.
9. *Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. В 3 т. М.: Наука, 1964. Т. 1. 664 с.
10. *Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А. А. Яблонского.* М.: Высшая шк., 1968. 366 с.

## З М І С Т

---

|              |   |           |
|--------------|---|-----------|
|              | Передмова . . . . .   | 3         |
|              | Вступ . . . . .   | 4         |
| <b>Глава</b> | <b>ПРЯМОЛІНІЙНИЙ РУХ</b>  |           |
| <b>1</b>     | <b>МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ. . . . .</b>  | <b>7</b>  |
|              | § 1. Закон інерції. Прямолінійний рівномірний рух . . . . .   | 7         |
|              | § 2. Вільне падіння матеріальної точки поблизу Землі<br>як прямолінійний рівнозмінний рух. Другий закон Ньютона . . .   | 11        |
|              | § 3. Довільний прямолінійний рух. . . . .   | 15        |
| <b>Глава</b> | <b>КРИВОЛІНІЙНИЙ РУХ</b>  |           |
| <b>2</b>     | <b>МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ. . . . .</b>  | <b>20</b> |
|              | § 4. Рівномірний і рівнозмінний рух по колу. . . . .  | 20        |
|              | § 5. Довільний рух по колу. Швидкість і прискорення<br>як векторні величини . . . . .   | 22        |
|              | § 6. Рух по довільній кривій. Вектори миттєвої швидкості й<br>миттєвого прискорення . . . . .   | 28        |
|              | § 7. Визначення положення матеріальної точки в декартовій<br>(прямокутній) системі координат. Визначення швидкості<br>і прискорення. . . . .                              | 38        |
|              | § 8. Криволінійний рівномірний і рівнозмінний рух . . . . .   | 49        |
|              | § 9. Криволінійний рух матеріальної точки в полі<br>сталого сили тяжіння Землі як наслідок накладання<br>двох прямолінійних рухів — рівномірного й рівнозмінного. . . . . | 51        |

|              |   |            |
|--------------|---|------------|
| <i>Глава</i> | <b>ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ АБСОЛЮТНО</b>   |            |
| <b>3</b>     | <b>ТВЕРДОГО ТІЛА . . . . .</b>  | <b>58</b>  |
|              | § 10. Вільне падіння тіл. Центр ваги тіла . . . . .   | 59         |
|              | § 11. Теорема про поступальний рух абсолютно твердого тіла . . . . .  | 63         |
| <i>Глава</i> | <b>ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА</b>  |            |
| <b>4</b>     | <b>НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ . . . . .</b>  | <b>71</b>  |
|              | § 12. Рівномірний і рівнозмінний обертальний рух<br>навіколо нерухомої осі . . . . .  | 72         |
|              | § 13. Довільний обертальний рух абсолютно твердого тіла<br>навіколо нерухомої осі. Кутова швидкість<br>і кутове прискорення . . . . .   | 79         |
|              | § 14. Лінійна швидкість, дотичне, доцентрове і повне<br>прискорення матеріальної точки абсолютно<br>твердого тіла під час обертального руху навіколо<br>нерухомої осі . . . . .       | 91         |
|              | § 15. Прямокутні складові (проекції) швидкості<br>й прискорення матеріальної частинки абсолютно<br>твердого тіла по осях рухомої і нерухомої декартових<br>систем координат . . . . . | 97         |
| <i>Глава</i> | <b>СКЛАДНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПРИ</b>  |            |
| <b>5</b>     | <b>НАЙПРОСТІШИХ ПЕРЕНОСНИХ РУХАХ</b>  |            |
|              | <b>(ПОСТУПАЛЬНОМУ І ОБЕРТАЛЬНОМУ)</b>   |            |
|              | <b>НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ . . . . .</b>  | <b>105</b> |
|              | § 16. Абсолютний рух як поєднання<br>відносного і переносного рухів . . . . .   | 108        |
|              | § 17. Теорема про абсолютну швидкість і абсолютне<br>прискорення матеріальної точки в разі переносного<br>поступального руху . . . . .  | 111        |
|              | § 18. Теорема про абсолютну швидкість і абсолютне<br>прискорення матеріальної точки у разі переносного<br>обертального руху навіколо нерухомої осі . . . . .                          | 124        |
| <i>Глава</i> | <b>ВЕКТОРНИЙ СПОСІБ ДОСЛІДЖЕННЯ</b>   |            |
| <b>6</b>     | <b>ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ</b>  |            |
|              | <b>АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА . . . . .</b>  | <b>143</b> |
|              | § 19. Плоскопаралельний рух абсолютно твердого тіла<br>як рух плоскої фігури у власній площині. . . . .   | 145        |

|  |     |
|--|-----|
| § 20. Теореми про швидкість і прискорення точок тіла . . . . .                       | 150 |
| § 21. Миттєвий центр швидкостей і миттєвий центр прискорень плоскої фігури . . . . . | 170 |

**Глава**  
**7**

**ГРАФІЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА. . . . . 185**

|   |     |
|---|-----|
| § 22. Лінійний масштаб і масштаби швидкостей і прискорень . . . . .   | 185 |
| § 23. Графічний метод визначення кутових і лінійних швидкостей і прискорень у разі плоскопаралельного руху за допомогою побудови відповідних планів . . . . . | 189 |
| § 24. Графічний метод визначення кутових, лінійних швидкостей і прискорень за допомогою відповідних миттєвих центрів . . . . .                                | 201 |

**Глава**  
**8**

**АНАЛІТИЧНИЙ СПОСІБ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА . . . . . 204**

|  |     |
|--|-----|
| § 25. Визначення швидкості та прискорення матеріальних частинок абсолютно твердого тіла в системі декартових координат . . . . . | 204 |
| § 26. Рівняння рухомої і нерухомої центроїд . . . . .  | 207 |

**Глава**  
**9**

**ГЕОМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА . . . . . 213**

|   |     |
|---|-----|
| § 27. Теореми про кінцеве переміщення плоскої фігури в разі її плоскопаралельного руху. Миттєвий центр обертання та миттєвий центр швидкостей . . . . . | 213 |
| § 28. Рухома і нерухома центроїди . . . . .   | 226 |

**Глава**  
**10**

**СКЛАДНИЙ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА . . . . . 234**

|   |     |
|---|-----|
| § 29. Додавання двох видів плоскопаралельного руху навколо миттєвих паралельних осей в однакових напрямках із різними за модулям кутовими швидкостями . . . . . | 234 |
|---|-----|

|  |     |
|--|-----|
| § 30. Теорема про три миттєві центри швидкостей<br>(центри обертання) . . . . .  | 237 |
| § 31. Додавання двох видів плоскопаралельного руху навколо<br>миттєвих осей з протилежними напрямками і з різними<br>за модулями кутовими швидкостями. . . . . | 243 |
| § 32. Пара обертань. . . . .   | 246 |

**Глава  
11**

**РУХ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО  
НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ . . . . . 252**

|   |     |
|---|-----|
| § 33. Визначення положення тіла з однією нерухомою<br>точкою за допомогою кутів Ейлера . . . . .  | 252 |
| § 34. Визначення швидкостей і прискорень точок тіла. . . . .  | 259 |
| § 35. Розклад руху абсолютно твердого тіла з однією<br>нерухомою точкою на три види обертального руху —<br>нутацію, прецесію і власне обертання.<br>Кутова швидкість і кутове прискорення . . . . . | 265 |
| § 36. Додавання двох видів руху абсолютно твердого тіла<br>з однією нерухомою точкою (навколо осей,<br>що перетинаються) . . . . .  | 287 |

**Глава  
12**

**ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК РУХУ АБСОЛЮТНО  
ТВЕРДОГО ТІЛА . . . . . 295**

|   |     |
|---|-----|
| § 37. Розклад руху абсолютно твердого тіла на поступальний<br>із полюсом і обертальний навколо миттєвої осі,<br>що проходить через полюс. Рівняння загального<br>випадку руху . . . . . | 296 |
| § 38. Швидкість і прискорення точок тіла.<br>Теорема Коріоліса. . . . .   | 302 |

**Глава  
13**

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ КІНЕМАТИКИ  
ПЛОСКИХ МЕХАНІЗМІВ . . . . . 328**

|   |     |
|---|-----|
| § 39. Графічне дослідження кінематики<br>кривошипно-шатунного механізму.<br>Плани швидкостей і прискорень . . . . . | 328 |
| § 40. Побудова плану швидкостей і плану прискорень<br>для багатоланкового механізму . . . . .                       | 343 |

|  |            |
|--|------------|
| § 41. Векторне (геометричне) визначення лінійних, кутових швидкостей і прискорень кривошипно-шатунного механізму . . . . . | 352        |
| § 42. Метод проєкцій визначення кінематичних величин кривошипно-шатунного механізму . . . . .                              | 361        |
| § 43. Аналітичне визначення лінійних, кутових швидкостей і прискорень кривошипно-шатунного механізму . . . . .             | 366        |
| § 44. Метод проєкцій. Визначення кінематичних величин багатоланкового механізму . . . . .                                  | 380        |
| § 45. Аналітичне визначення кінематичних величин багатоланкового механізму . . . . .                                       | 388        |
| § 46. Геометричне визначення кінематичних величин багатоланкового механізму . . . . .                                      | 400        |
| <i>Список рекомендованої літератури . . . . .</i>  | <i>409</i> |

Навчальне видання

**Токар Анатолій Максимович**

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

**Кінематика**

*Методи і задачі*

Художник оправи *О.Г. Григiр*  
Художній редактор *Т.О. Щур*  
Технічний редактор *Л.І. Швець*  
Коректори *А.І. Бараз, Л.Ф. Іванова, А.В. Бородавко*

Підл. до друку 08.10.01. Формат 60 × 84/16. Папір офс. №1. Гарнітура Таймс.  
Офсетний друк. Умов.-друк. арк. 24,18. Умов. фарбовідб. 24,64.  
Обл.-вид. арк. 24,15. Вид. № 3919. Зам. № 1-176.

Оригінал-макет виготовлено інженером-програмістом *О.В. Кузьменком*  
та операторами *А.М. Теплоком, А.В. Гуторовою*

Видавництво «Либідь» при Київському університеті,  
252004 Київ, вул. Пушкінська, 32

Свідоцтво про державну реєстрацію № 404 від 26.04.2000 р.

Віддруковано відповідно якості наданих діапозитивів  
на ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»  
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4



**Токар А. М.**  
Т51 Теоретична механіка. Кінематика: Методи і задачі: Навч. посібник. — К.: Либідь, 2001. — 416 с.  
ISBN 966-06-0099-2.

У посібнику викладено основи кінематики — другої частини теоретичної механіки. Докладно висвітлено теорію рухів на підставі різних методів дослідження — векторного, графічного, аналітичного та методу проекцій. Розглянуто застосування теорії до розв'язування задач кінематики механізмів. Наведено певні аналітичні формули, передбачені для програмування задач на електронно-обчислювальних машинах, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання для самостійної роботи студентів.

Для студентів технічних спеціальностей вищих закладів освіти.

Т 1603030000 – 052  
2001

ББК 22.21я73