МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ ТА СЕРЕДНЬОЇ СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ З ВИЩОЇ ОСВІТИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Ю. І. Волков, Д. А. Найко

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА Й АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ З ЕЛЕМЕНТАМИ ПРОГРАМУВАННЯ МОВОЮ ПАСКАЛЬ

КИЇВ 1990

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ З ВИЩОЇ ОСВІТИ
ВІННИЦЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Ю.І.Волков, Д.А.Найко

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА Й АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ З ЕЛЕМЕНТАМИ ПРОГРАМУВАННЯ МОВОЮ ПАСКАЛЬ

Затверджено Радою Навчально-методичного кабінету з вищої освіти Мінвузу УРСР як навчальний посібник для студентів інженерно-технічних спеціальностей

Київ НМК ВО 1990

УДК 514.122+519.682

Линейная алгебра и аналитическая геометрия с элементами программирования на языке Паскаль: Учеб. пособие / Ю.И.Волков, Д.А.Найко. - К.: УМК ВО, 1990. - 144 с. - На укр. яз.

У посібнику розглянуто основні поняття курсу "Лінійна алгебра й аналітична геометрія", елементи алгоритмічної мови Паскаль, наведено приклади, вправи і бібліотечку програм для розв"язування на ЕОМ деяких задач лінійної алгебри й аналітичної геометрії, що часто виникають на практиці.

Призначений для студентів інженерно-технічних спеціальностей.

Іл. 51. Бібліогр.: 6 назв.

В пособии рассмотрены основные понятия курса "Линейная алгебра и аналитическая геометрия", элементы алгоритмического языка Паскаль, приведены примеры, упражнения и библиотечка программ для решения на ЭВМ некоторых задач линейной алгебры и аналитической геометрии, которые часто возникают на практике.

Предназначено для студентов инженерно-технических специальностей.

Ил. 51. Библиогр.: 6 назв.

ISBN 5-7763-0037-1

ПЕРЕДМОВА

Одним із факторів, які зумовили авторів взятися за написання цього навчального посібника, є те, що нині технічні вузи зовсім не мають математичної літератури, написаної українською мовою.

Крім того, здійснювана в нашій країні реформа вищої школи передбачає посилення прикладної спрямованості вузівського курсу математики, широке впровадження комп"ютерів у навчальний процес, озброєння студентів навичками щодо застосування сучасної обчислювальної техніки.

Ці два фактори і призвели до поєднаного викладу традиційних розділів математики та елементів програмування.

Посібник складається з двох розділів.

У першому розділі розглянуто основні питання курсу "Лінійна алгебра й аналітична геометрія", де виклад теоретичного матеріалу супроводжується великою кількістю прикладів. Після кожного параграфа подається вправи та запитання для самоконтролю.

Другий розділ знайомить читача з елементами алгоритмічної мови Паскаль. Тут розглядаються конкретні задачі, складаються програми для розв"язування цих задач на ЕОМ. У кінці книги наведено бібліотечку програм для розв"язування на ЕОМ деяких задач лінійної алгебри й аналітичної геометрії, які часто виникають на практиці.

Посібник розрахований на студентів інженерно-технічних і сільськогосподарських спеціальностей вузів. Він може бути основою вузівського курсу лекцій, що читається українською мовою.

Розділ I
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА Й АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

§ I.I. МАТРИЦІ

Означення матриці

Довільна множина чисел, розташованих у вигляді прямокутної таблиці, що складається з m рядків і n стовпців, називається $m \times n$-матрицею або матрицею розмірності $m \times n$.

Матриці записують так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} - елементи матриці; i - номер рядка; j - номер стовпця.

Застосовують і такі позначення для матриць:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Скорочено: матриця A або матриця (a_{ij}).

Стовпці матриці A позначають через A_j, $j = 1, 2, \dots, n$. Тоді матрицю записують так: $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Види матриць

Якщо $m = n$ то матриця називається квадратною, а число n називають порядком матриці.

Матриця розмірності $m \times 1$ називається вектор-стовпцем.

Матриця розмірності $1 \times n$ називається вектор-рядком.

Матриця називається нульовою, або нуль-матрицею, якщо всі її елементи дорівнюють нулеві. Нульова матриця позначається символом 0.

Квадратна матриця називається діагональною, якщо вона має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Діагональна матриця, всі діагональні елементи якої рівні між собою, називається скалярною матрицею.

Скалярна матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють I, називається одиничною. Позначається така матриця символом E.

Дії над матрицями

Множення матриці на число найпростіше показати на прикладі:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot 5 = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 & (-1)\cdot 5 & 0\cdot 5 \\ 3\cdot 5 & 2\cdot 5 & (-3)\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 15 & 10 & -15 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно множать число α на матрицю A, тому $\alpha A = A\alpha$. Тобто, щоб помножити матрицю на число або число на матрицю, слід помножити кожний елемент матриці на це число.

Додавання двох матриць також покажемо на прикладі:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5 & 2+3 & 1+(-1) \\ (-1)+1 & 2+2 & (-3)+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, при додаванні матриць додаються їх відповідні елементи, тобто елементи, які стоять на однакових місцях. Зрозуміло, що додавати можна лише матриці однакової розмірності.

Якщо рядки матриці A записати стовпцями, зберігаючи порядок, тобто, перший рядок записати першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем і т.д., то отримана матриця називається транспонованою до матриці A і позначається A^T.

Отже, якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що коли стовпці матриці A записати рядками, то також дістанемо матрицю A^T. Зокрема, $(A^T)^T = A$.

Наприклад, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \\ 8 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

то

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 0 \\ 8 & 6 & 9 & -1 \\ 4 & -7 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць. Матриця-рядок на матрицю-стовпець множиться так: нехай $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - рядок,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - стовпець. Тоді $AB \overset{df}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$ є число (знак $\overset{df}{=}$ означає рівність за означенням).

У загальному випадку матриці перемножуються так. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} -$$

матриця розмірності $m \times n$. Через A_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) позначимо рядки цієї матриці, і нехай

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} \ldots & b_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots & b_{nr} \end{pmatrix} -$$

матриця розмірності $n \times r$. Через B_j ($j = 1, 2, \ldots, r$) позначимо стовпці матриці B.

Знайдемо числа

$$C_{ij} = A_i B_j = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}.$$

Матриця C з елементами C_{ij} називається добутком матриці A на матрицю B. Позначення: $C=AB$.

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + (-3)\cdot 1 \\ 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + 0\cdot(-1) & 3\cdot 1 + 2\cdot 4 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}.$$

Перемножувати можна не будь-які матриці. Перший множник повинен мати стільки стовпців, скільки рядків має другий множник.

Правило знаходження розмірності добутку:

$$(m \times n)\cdot(n \times r) = (m \times r).$$

Рівність матриць. Дві матриці рівні (за означенням) тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову розмірність і їх відповідні елементи рівні.

Поняття рівності матриць застосовується при розв"язуванні матричних рівнянь. Знайдемо, наприклад, матрицю X з рівняння:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2\cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$2\cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді за означенням рівності матриць

$$2x_{11} = -5, \qquad 2x_{12} = -5,$$
$$2x_{21} = 0, \qquad 2x_{22} = -1.$$

Отже,

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Властивості дій над матрицями

З означень дій над матрицями випливає:

1. $1 \cdot A = A \cdot 1 = A, \quad 0 \cdot A = A \cdot 0 = 0;$
2. $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0;$
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = (A\alpha)\beta = A(\alpha\beta);$
4. $A + B = B + A;$
5. $A + (B + C) = (A + B) + C;$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \quad A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta;$
7. $A + 0 = 0 + A = A;$
8. $\alpha(AB) = (\alpha A)B;$
9. $(A + B)C = AC + BC, \quad C(A + B) = CA + CB;$
10. $A(BC) = (AB)C.$
11. Якщо A - квадратна матриця, а E - одинична, то $AE = EA = A$.

Операція множення матриць некомутативна, тобто $AB \neq BA$.

Матрична форма запису системи лінійних рівнянь

У загальному вигляді система лінійних рівнянь записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь можна записати в матричному вигляді:

$$AX = B.$$

Матриця A називається матрицею системи. Іноді систему записують так:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B,$$

де $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - стовпці матриці системи.

Електротехнічна інтерпретація дій над матрицями

Нехай дано чотириполюсник (рис. I), будова якого визначається матрицею

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

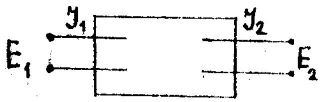

Рис. I

(Чотириполюсником називається частина електричного кола, що розглядається відносно будь-яких двох пар її кінців.) Ця матриця називається передатною матрицею чотириполюсника і є такою, що

$$E_1 = AE_2 + BJ_2,$$

$$J_1 = CE_2 + DJ_2,$$

або

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ J_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_2 \\ J_2 \end{pmatrix}.$$

Наприклад, чотириполюсник, зображений на рис. 2, має передатну матрицю

$$P = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а чотириполюсник, зображений на рис. 3, має передатну матрицю

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}.$$

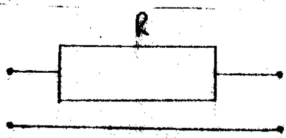

Рис. 2

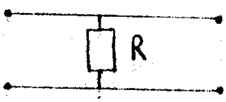

Рис. 3

При так званому каскадному з"єднанні чотириполюсників їх передатні матриці перемножуються. При такому з"єднанні, наприклад, двох чотириполюсників з передатними матрицями P_1 і P_2 дістаємо новий чотириполюсник (рис. 4), передатна матриця якого $P = P_1 \cdot P_2$.

2-01646

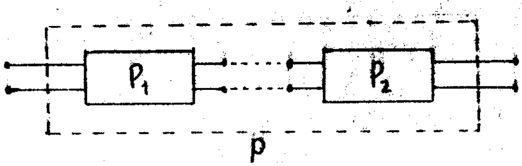

Рис. 4

Цей результат дає змогу знаходити передатні матриці складних чотириполюсників, розчленовуючи їх на простіші.

Приклад. Знайти передатну матрицю чотириполюсника, зображеного на рис. 5.

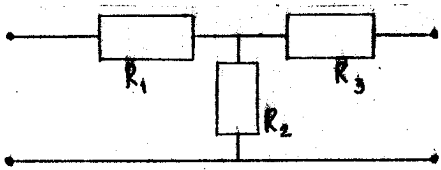

Рис. 5

На цей чотириполюсник можна дивитись як на каскадне з"єднання трьох чотириполюсників (рис. 6). Тому $P = P_1 P_2 P_3$, де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

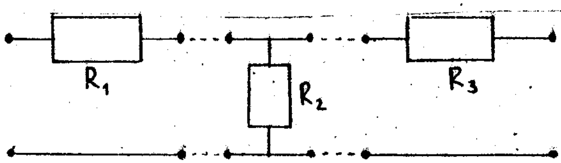

Рис. 6

Отже,

$$P = \begin{pmatrix} 1 + R_1/R_2 & R_3 + R_1 + R_1 R_3/R_2 \\ 1/R_2 & 1 + R_3/R_2 \end{pmatrix}$$

шукана передатна матриця.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається матрицею?
2. Яка матриця називається квадратною?
3. Яка матриця називається одиничною?
4. У чому полягають операції множення матриці на число та додавання двох матриць?
5. Сформулюйте правило множення матриць.
6. За яких умов матрицю A можна помножити на матрицю B ?
7. Сформулюйте властивості дій над матрицями.

Вправи до § 1.1

1. Виконати дії: $A+B$, $B-3A$, A^T+4B, де

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Виконати множення матриць: AB, BA, A^TB^T, AC, AE, EB, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 1.2. ВИЗНАЧНИКИ

Поняття визначника матриці другого порядку

Якщо

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ називається визначником матриці A. (Замість терміна "визначник" вживають також термін "детермінант".)

2*

Позначення визначника матриці A: $\det A$; $\det(A_1, A_2)$; $|A|$, де A_1 – перший стовпець матриці A; A_2 – другий стовпець; або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 13.$$

Властивості визначників матриць другого порядку

1. $\det A = \det A^T$.

2. $\det(A_1, A_2) = -\det(A_2, A_1)$ (якщо поміняти місцями стовпці, то знак визначника зміниться на протилежний).

3. Якщо $A_1 = A_2$, то $\det(A_1, A_2) = 0$.

Ці властивості легко перевіряються.

Повчальним є таке доведення властивості 3. З одного боку, $\det(A_1, A_2) = \det(A_2, A_1)$, оскільки $A_1 = A_2$. З іншого боку, на підставі властивості 2 $\det(A_1, A_2) = -\det(A_2, A_1)$ і, отже, $\det(A_1, A_2) = -\det(A_1, A_2)$, а це можливо лише, коли $\det(A_1, A_2) = 0$.

4. $\det(\alpha A_1, A_2) = \det(A_1, \alpha A_2) = \alpha \det(A_1, A_2)$ (спільний множник елементів стовпця (рядка) можна виносити за знак визначника).

Наслідок: $\det(\alpha A) = \alpha^2 \det A$.

5. $\det(A_1' + A_1'', A_2) = \det(A_1', A_2) + \det(A_1'', A_2)$.

6. $\det(\alpha' A_1' + \alpha'' A_1'', A_2) = \alpha' \det(A_1', A_2) + \alpha'' \det(A_1'', A_2)$.

Це властивість лінійності визначника відносно стовпців.

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 2\cdot 3 + 5\cdot(-4) & 1 \\ 2\cdot 7 + 5\cdot 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Справедливість властивостей 5 і 6 також легко перевірити.

7. Якщо C_1 і C_2 – довільні числа, то

$$\det(A_1 + c_2 A_2, A_2) = \det(A_1, A_2 + c_1 A_1) = \det(A_1, A_2).$$

Тобто, якщо до елементів якогось стовпця матриці додати елементи іншого стовпця, помножені на одне й те саме довільне число, відмінне від нуля, то дістанемо матрицю, визначник якої дорівнює визначнику початкової матриці.

Властивість 7 випливає з властивості лінійності визначника.

Примітка. Іноді замість слів "визначник матриці" кажуть просто "визначник".

Визначники квадратних матриць третього порядку

Якщо матриця

$$A=(A_1,A_2,A_3)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то число $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$ називається визначником матриці A і позначається $\det A$, $|A|$, $\det(A_1,A_2,A_3)$ або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

Властивості визначників третього порядку

1. $\det A=\det A^T$.

2. $\det(A_1,A_2,A_3)=-\det(A_3,A_2,A_1)=\det(A_2,A_1,A_3)=$
$=-\det(A_1,A_3,A_2)$, тобто, якщо поміняти місцями будь-які два стовпці, то визначник змінить знак на протилежний. Аналогічна властивість виконується й відносно рядків.

3. Якщо матриця має два однакових стовпці (рядки), то визначник такої матриці дорівнює нулеві.

4. $\det(\alpha A_1, A_2, A_3) = \alpha \det(A_1, A_2, A_3)$, тобто спільний множник елементів будь-якого стовпця (рядка) можна виносити за знак визначника. Це так звана властивість однорідності визначника відносно стовпця (рядка).

5. $\det(A_1' + A_1'', A_2, A_3) = \det(A_1', A_2, A_3) + \det(A_1'', A_2, A_3)$.

Властивість такого характеру виконується й відносно інших стовпців.

6. Властивість лінійності відносно стовпця (рядка).

$$\det(\alpha' A_1' + \alpha'' A_1'', A_2, A_3) =$$
$$= \alpha' \det(A_1', A_2, A_3) + \alpha'' \det(A_1'', A_2, A_3).$$

Аналогічне виконується й відносно інших стовпців.

7. Якщо до елементів будь-якого стовпця (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка), помножені на одне й те саме число, то визначник не зміниться.

Усі наведені властивості легко доводяться безпосередньою перевіркою.

Означення алгебраїчного доповнення. Нехай a_{ij} - довільний елемент квадратної матриці A. Якщо викреслити рядок і стовпець, у яких стоїть цей елемент, то дістанемо квадратну матрицю, на порядок меншу за початкову. Визначник цієї матриці називається мінором. Мінор, помножений на число $(-1)^{i+j}$, називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} і позначається A_{ij}.

<u>Теорема I</u> (про розклад визначника третього порядку за елементами довільного рядка або стовпця). Якщо A - квадратна матриця третього порядку, то її визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого стовпця (рядка) на їх алгебраїчні доповнення.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

<u>Доведення</u> цієї теореми здійснюється безпосередньою перевіркою.

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 7 - 2\cdot 7 + 0 = 7.$$

Теорема про розклад є основою такого методу обчислення визначника, як метод утворення нулів (у рядку або стовпці).

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2-2 & 3-3 \\ 1 & -1-2 & 2-3 \\ 3 & 1-6 & -2-9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = 33 - 5 = 28.$$

Теорема 2 (про анулювання визначників третього порядку). Сума добутків елементів будь-якого стовпця (рядка) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого стовпця (рядка) цього визначника дорівнює нулеві.

Наприклад,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$$

Доведення здійснюється безпосередньою перевіркою.

Поняття визначника матриці будь-якого (n-го) порядку

Нехай дано квадратну матрицю $A = (a_{ij})$ порядку n. Для того щоб дати означення визначника n-го порядку, необхідно ввести поняття перестановки та інверсії.

Перестановкою n елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів. Різні перестановки одних і тих самих n елементів відрізняються їх порядком (способом упорядкування).

Інверсією називають таке розміщення двох чисел у перестановці, коли більше число стоїть лівіше від меншого. Якщо в перестановці перед якимось числом зліва стоять два більших числа, то вважають, що в цьому випадку є дві інверсії. Загальне число інверсій у перестановці характеризує безпорядок у цій перестановці.

Розглянемо всі можливі перестановки чисел I, 2, ..., n, які позначатимемо: $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Перестановка називається парною, якщо вона має парне число інверсій, і непарною, якщо число інверсій у ній непарне. Наприклад, перестановка (3, 4, I, 2) має чотири інверсії, отже вона парна.

Число

$$\det A \overset{df}{=} \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \tag{I}$$

називається визначником матриці A n-го порядку; тут сума поширюється на всі перестановки $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ чисел I, 2, ..., n; знак "+" береться, якщо перестановка парна, знак "-" береться, якщо перестановка непарна.

Зазначимо, що число доданків в (I) дорівнює числу перестановок з n елементів, тому дорівнює $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n \overset{df}{=} n!$ (читається: n-факторіал).

Властивості визначників n-го порядку

Усі властивості визначників третього порядку виконуються і для визначників n-го порядку, зокрема справедливою є властивість лінійності визначника відносно стовпців (рядків), тобто:

$$\det(A_1, A_2, \ldots, \alpha A_k' + \beta A_k'', \ldots, A_n) = \alpha \det(A_1, A_2, \ldots, A_k', \ldots, A_n) + \beta \det(A_1, A_2, \ldots, A_k'', \ldots, A_n).$$

Для визначників довільного порядку справедливими є також теореми про розклад та анулювання. Теорема про розклад застосовується для обчислення визначника будь-якого порядку, на ній ґрунтується такий метод обчислення визначника, як метод утворення нулів у рядку чи стовпці визначника.

<u>Приклад.</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається визначником другого порядку?
2. Що називається визначником третього порядку?
3. Сформулюйте властивості визначників другого і третього порядків.
4. У чому полягає теорема про розклад визначника за елементами рядка або стовпця?

Вправи до § 1.2

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{vmatrix} = 1$; б) $\begin{vmatrix} x+2 & -3 \\ x-2 & x \end{vmatrix} = 0$.

3. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & x & 0 \\ x & 1 & x \\ a & x & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Довести, що рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

має корені $x = a$, $x = b$.

5. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

методом утворення нулів у рядку або стовпці.

§ 1.3. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Поняття оберненої матриці

Нехай дано квадратну матрицю A. Матриця B називається оберненою до матриці A, якщо

$$AB = BA = E.$$

Якщо така матриця B існує, то вона позначається символом A^{-1}. Таким чином, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Теорема. Якщо $\det A \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} існує і

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}.

Доведення. На підставі теорем про розклад та анулювання

$$A^{-1}A = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}+\dots+A_{n1}a_{n1} & \dots & A_{11}a_{1n}+A_{21}a_{2n}+\dots+A_{n1}a_{nn} \\ A_{12}a_{11}+A_{22}a_{21}+\dots+A_{n2}a_{n1} & \dots & A_{12}a_{1n}+A_{22}a_{2n}+\dots+A_{n2}a_{nn} \\ - & - & - \\ A_{1n}a_{11}+A_{2n}a_{21}+\dots+A_{nn}a_{n1} & \dots & A_{1n}a_{1n}+A_{2n}a_{2n}+\dots+A_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Так само показуємо, що $AA^{-1} = E$. Теорему доведено.

Матриця, транспонована до матриці, яка складається з алгебраїчних доповнень відповідних елементів матриці A, називається приєднаною до матриці A і позначається $\tilde{A}$. Отже, якщо $\det A \neq 0$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}.$$

Приклад.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix};\ \det A=-2;\quad A_{11}=4;\quad A_{12}=-3;\quad A_{21}=-2;\quad A_{22}=1.$$

Звідси

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix},$$

тому

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Матриця, що має обернену, називається неособливою, або невиродженою. Якщо $\det A=0$, то матриця A називається особливою, або виродженою.

Матричний спосіб розв"язування системи лінійних рівнянь

Запишемо систему

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{2}$$

у матричній формі:

$$AX=B.\tag{3}$$

Розв"язати систему (1) – це означає знайти стовпець X, який задовольняє матричне рівняння (3).

Теорема. Якщо визначник матриці A системи (2) не дорівнює нулеві, то розв"язок системи існує, причому $X=A^{-1}B$ є одним з розв"язків.

Доведення. Справді,

$$A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=EB=B,$$

що й треба було довести.

На цій теоремі грунтується матричний спосіб розв"язування систем лінійних рівнянь.

Приклад. Розв"язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = 1; \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

за допомогою матричного способу.

Розв"язання. Позначимо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді система матиме вигляд $AX = B$. Оскільки

$$\det A = 3, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а це означає, що $x = 2$, $y = 1$.

Запитання для самоконтролю

1. Яка матриця називається оберненою до матриці A?
2. Як побудована матриця, обернена до невиродженої матриці A?
3. У чому полягає матричний спосіб розв"язування системи n лінійних рівнянь з n невідомими?

Вправи до § 1.8

1. Дано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити, чи існує обернена матриця A^{-1}, в разі існування знайти її.

2. Те саме для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Розв"язати матричним способом такі системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -x-2y=-4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x-y+z=6 \\ x+5y\quad=-3. \end{cases}$

§ 1.4. НЕВИРОДЖЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Формули Крамера

Система n лінійних рівнянь з n невідомими називається невиродженою, якщо матриця системи невироджена.

Теорема (про єдиність розв"язку невиродженої системи лінійних рівнянь). Невироджена система n лінійних рівнянь з n невідомими має єдиний розв"язок.

Доведення. За попередньою теоремою розв"язок існує. Нехай $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ – якийсь розв"язок. Це означає, що справедливими є такі числові рівності:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 = b_1; \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0 = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \ldots + a_{nn}x_n^0 = b_n \end{cases}$$

або $x_1^0 A_1 + x_2^0 A_2 + \ldots + x_n A_n = B$, де A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ – стовпці матриці системи, а B – вектор-стовпець вільних членів.

Тепер знайдемо визначник матриці, яку дістанемо з матриці A системи, якщо перший стовпець матриці A замінити на стовпець B вільних членів: $\det(B, A_2, A_3, \ldots, A_n) =$

$$= \det(x_1^0 A_1 + x_2^0 A_2 + \ldots + x_n^0 A_n, A_2, A_3, \ldots, A_n) =$$

$$= x_1^0 \det(A_1, A_2, \ldots, A_n) + x_2^0 \det(A_2, A_2, A_3, \ldots, A_n) +$$

$$+ \ldots + x_n^0 \det(A_n, A_2, A_3, \ldots, A_n),$$

на підставі властивості лінійності визначника відносно стовпців.

Однак $\det(A_2, A_2, A_3, \ldots, A_n) = 0$; $\det(A_3, A_2, A_3, \ldots, A_n) = 0$; $\ldots$; $\det(A_n, A_2, A_3, \ldots, A_n) = 0$, оскільки кожний визначник має однакові стовпці. Тому

$$\det(B, A_2, A_3, \ldots, A_n) = x_1^0 \det A = \Delta_1.$$

Цілком аналогічно знаходимо, що

$$\det(A_1, B, A_3, A_4, \dots, A_n) = x_2^\circ \det A = \Delta_2;$$

$$\det(A_1, A_2, B, \dots, A_n) = x_3^\circ \det A = \Delta_3;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\det(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, B) = x_n^\circ \det A = \Delta_n.$$

Оскільки $\det A \neq 0$, то звідси дістанемо

$$x_1^\circ = \frac{\Delta_1}{\det A}; \quad x_2^\circ = \frac{\Delta_2}{\det A}; \dots; x_n^\circ = \frac{\Delta_n}{\det A}. \tag{4}$$

Формули (4) називаються формулами Крамера.

Отже, ми довели єдиність розв"язку та встановили новий метод розв"язування систем лінійних рівнянь.

Приклад. Розв"язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

методом Крамера.

Розв"язання. Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \det A = 3; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Отже, $x_1 = \frac{7}{3}$; $x_2 = \frac{5}{3}$.

Метод Гаусса

У випадку, коли система лінійних рівнянь має велику кількість невідомих, користуватися формулами Крамера незручно, оскільки вони ведуть до громіздких обчислень. На практиці часто застосовують метод виключення невідомих, або метод Гаусса.

Кількість обчислень при розв"язуванні систем рівнянь методом Гаусса на порядок менша, ніж при розв"язуванні методом Крамера.

При розв"язуванні систем методом Гаусса зручно користуватися схемою "єдиного ділення", яку й опишемо.

Нехай дано систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\ell 1}x_1 + \ldots + a_{\ell j}x_j + \ldots + a_{\ell k}x_k + \ldots + a_{\ell n}x_n = b_\ell \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nn}x_n = b_n . \end{cases}$$

Припустимо, що $a_{\ell k} \neq 0$. Помножимо всі рівняння системи, крім ℓ-го, на $a_{\ell k}$ і, користуючись ℓ-м рівнянням, виключимо з нього $a_{\ell k}x_k$, а потім підставимо $a_{\ell k}x_k$ в усі інші рівняння.

Коефіцієнт при x_j в i-му рівнянні після виключення:

$$a'_{ij} = a_{\ell k}a_{ij} - a_{ik}a_{\ell j} = \pm\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{vmatrix},$$

вільний член

$$b'_i = a_{\ell k}b_i - a_{ik}b_\ell = -\begin{vmatrix} a_{ik} & b_i \\ a_{\ell k} & b_\ell \end{vmatrix}.$$

Такий процес слід продовжувати доти, поки не дістанемо одне рівняння з однією змінною (прямий хід), після чого знаходимо цю змінну і всі інші (обернений хід).

Коефіцієнт $a_{\ell k}$ називається ведучим. За ведучий елемент зручно брати 1 (якщо такий коефіцієнт є).

Якщо серед коефіцієнтів немає 1, то її можна дістати, поділивши обидві частини якого-небудь рівняння на якийсь ненульовий коефіцієнт при деякій змінній.

<u>Приклад</u>. Методом Гаусса розв"язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 \qquad - x_4 = 0. \end{cases}$$

<u>Розв"язання</u>. Записуємо цю систему схематично у вигляді таблиці. Відзначаючи ведучі елементи, спочатку виключаємо змінну x_1, потім виключаємо x_4 і, нарешті, x_3:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	-1	-2	-3	3
$\boxed{1}$	2	3	-2	6
3	2	-1	2	4
2	-2	0	-1	0
	-5	-8	$\boxed{1}$	-4
	-4	-10	8	-14
	-6	-6	3	-12
	36	$\boxed{54}$		18
	9	18		0
	-162			-324

Останній рядок означає, що $-162x_2 = -324$, звідки $x_2 = 2$. З попередніх рядків з відзначеними елементами знаходимо

$$36x_2 + 54x_3 = 18 \Longrightarrow x_3 = \frac{18 - 36\cdot 2}{54} = -1,$$

$$x_4 = -4 + 5\cdot 2 + 8\cdot(-1) = -2; \quad x_1 = 6 - 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 2\cdot(-2) = 1.$$

Знаходження оберненої матриці методом Гаусса

Нехай потрібно знайти матрицю, обернену до матриці A. Запишемо матричне рівняння $AX = B$, де стовпець B записується в загальному вигляді. Розв"яжемо це рівняння (цю систему лінійних рівнянь) методом Гаусса.

Перший рядок матриці A^{-1} складатиметься з коефіцієнтів при $b_1, b_2, \dots, b_n$ в x_1, другий рядок матриці A^{-1} складатиметься з коефіцієнтів при $b_1, b_2, \dots, b_n$ в x_2 і т.д.

<u>Приклад</u>. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	-1	-2	-8	b_1
1	2	3	-2	b_2
3	2	-1	2	b_3
2	-2	0	-1	b_4
	-5	-8	1	b_1-2b_2
	-4	-10	8	b_3-3b_2
	-6	-6	3	b_4-2b_2
	86	54		$-8b_1+13b_2+b_4$
	9	18		$-3b_1+4b_2+b_4$
	-162			$18(-8b_1+13b_2+b_3)-54(-3b_1+4b_2+b_4)$.

Звідси

$$x_2=\frac{1}{9}\left(-b_1-b_2-2b_4\right),$$

$$x_3=\frac{104}{27}b_1+\frac{229}{54}b_2+\frac{1}{54}b_3-8b_4,$$

$$x_4=\frac{844}{27}b_1+\frac{847}{27}b_2+\frac{4}{27}b_3-\frac{34}{27}b_4,$$

$$x_1=\frac{2764}{27}b_1+\frac{2760}{27}b_2+\frac{13}{27}b_3-\frac{528}{27}b_4.$$

Отже,

$$A^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}2764 & 2760 & 13 & -528\\ -8 & -8 & 0 & 6\\ 104 & \frac{229}{2} & \frac{1}{2} & -216\\ 844 & 847 & 4 & -34\end{pmatrix}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Яка система лінійних рівнянь називається невиродженою?

2. Довести теорему про єдиність розв"язку невиродженої системи лінійних рівнянь.

3. У чому полягає метод Крамера розв"язування систем лінійних рівнянь?

4. У чому полягає метод Гаусса розв"язування систем лінійних рівнянь?

Вправи до § I.4

1. Розв"язати системи рівнянь за формулами Крамера та методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+5y=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x-2y-z=4 \\ 2x+y+z=5. \end{cases}$

2. Застосовуючи метод Гаусса, знайти матрицю A^{-1}, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ I.5. ВЕКТОРИ

Скалярні та векторні величини

Прикладами скалярних величин (скалярів), що зустрічаються, наприклад, у фізиці, є: температура, маса, потенціал, опір. Ці величини характеризуються числом.

Прикладами векторних величин (векторів) є: швидкість, прискорення, сила, напруженість електричного поля тощо. Векторні величини характеризуються числом і напрямом.

Математичним образом векторної величини може бути напрямлений відрізок прямої.

Поняття вектора. Колінеарні та компланарні вектори

Вектором називається напрямлений відрізок прямої.

Будь-який вектор має початок і кінець. Якщо початок вектора позначити A, а кінець – B, то вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$ (рис. 7).

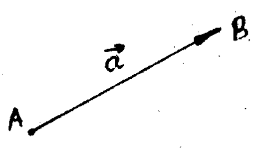

Рис. 7

Початок вектора називають точкою прикладання.

Довжина відрізка, що зображує вектор $\overrightarrow{AB}$, називається модулем вектора або довжиною вектора і позначається $|\overrightarrow{AB}|$. Довжина вектора $\vec{a}$ позначається $|\vec{a}|$.

Вектор називається нульовим (нуль-вектором), якщо його початок і кінець збігаються.

Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать або на одній прямій, або на паралельних прямих.

Вектори рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову довжину і однаковий напрям (рис. 8).

Якщо вектори мають однакову довжину і протилежні напрями, то вони називаються протилежними (рис. 9).

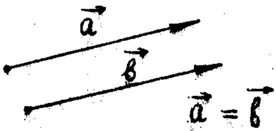

Рис. 8

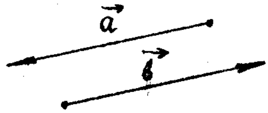

Рис. 9

Вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Лінійні операції над векторами

Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор, який іде з початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, за умови, що вектор $\vec{b}$ прикладено до кінця вектора $\vec{a}$ (рис. 10).

Операція додавання векторів підпорядкована таким властивостям:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативний закон);

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (асоціативний закон);

3. Для кожного вектора $\vec{a}$ існує вектор $\vec{a}'$ такий, що $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$ ($\vec{0}$ - нульовий вектор); $\vec{a}'$ - вектор, протилежний до вектора $\vec{a}$.

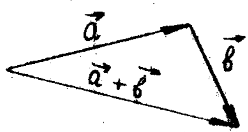

Рис. 10

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ і вектора $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Правило побудови різниці $\vec{a}-\vec{b}$: різниця $\vec{a}-\vec{b}$ прикладених до спільного початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ являє собою вектор, що йде з кінця від"ємника (вектора $\vec{b}$) до кінця зменшуваного вектора $\vec{a}$ (рис. 11).

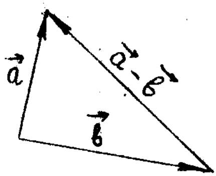

Рис. II

Добутком $\alpha\vec{a}$ ($\vec{a}\alpha$) вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається вектор $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a}$, має довжину $|\alpha||\vec{a}|$ і має напрям, що збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$ і протилежний цьому напряму, якщо $\alpha < 0$.

Операція множення вектора на число підпорядкована таким властивостям:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ \alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b};\\ &2.\ (\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a};\end{aligned}\right\}\quad\text{(дистрибутивні закони)}$$

3. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$.

<u>Теорема</u> (про колінеарні вектори). Якщо вектор $\vec{b}$ колінеарний ненульовому вектору $\vec{a}$, то існує дійсне число λ таке, що $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

<u>Доведення</u>. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені, тоді, очевидно,

$$\lambda=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають протилежні напрями, то

$$\lambda=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

Теорему доведено.

<u>Лінійна комбінація векторів.</u>
<u>Лінійно залежні та лінійно незалежні вектори</u>

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називається вираз

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - будь-які дійсні числа.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються лінійно залежними, якщо знайдуться такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0},$$

тобто лінійна комбінація цих векторів з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дорівнює нульовому вектору.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються лінійно незалежними, якщо їх лінійна комбінація $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$ дорівнює нульовому вектору лише в тому випадку, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дорівнюють нулю.

Зрозуміло, що коли хоча б один з векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ є нульовим, то ці вектори є лінійно залежними.

<u>Теорема 1</u>. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність.

<u>Доведення</u>. 1. Необхідність. Нехай два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні. Тоді існують числа α та β такі, що $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$ і хоча б одне з них, наприклад β, відмінне від нуля. Звідси $\vec{b}=-\frac{\alpha}{\beta}\vec{a}$, а це й означає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

2. Достатність. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Тоді існує число λ таке, що $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ або $\lambda\vec{a}+(-1)\vec{b}=\vec{0}$, а це й означає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні ($-1 \neq 0$). Теорему доведено.

<u>Наслідок</u>. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то вони лінійно незалежні.

<u>Теорема 2</u>. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність.

<u>Доведення</u>. 1. Необхідність. Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно залежні. Тоді знайдуться числа α, β, γ такі, що $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ і хоча б одне з них, наприклад γ відмінне від нуля. Тому

$$\vec{c}=-\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a}-\frac{\beta}{\gamma}\vec{b},$$

або, ввівши позначення $\lambda=-\frac{\alpha}{\gamma}$, $\mu=-\frac{\beta}{\gamma}$ дістанемо

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}.$$

Але, якщо всі три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ мають спільний початок, то вектор $\vec{c}$ є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 12). А це й означає, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лежать в одній площині, тобто компланарні.

2. Достатність. Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. Доведемо, що вони лінійно залежні.

Насамперед виключимо той випадок, коли яка-небудь пара векторів серед векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є колінеарною, бо тоді ця пара векто-

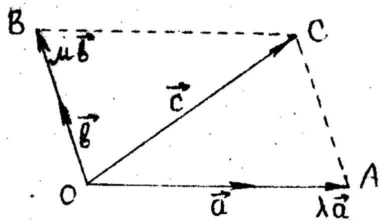

Рис. 12

рів була б лінійно залежною, а, отже, і вся трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ була б лінійно залежною.

Отже, вважаємо, що серед векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ немає колінеарної пари векторів.

Перенесемо три компланарних вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ на одну площину і прикладемо їх до спільного початку O (рис. 12). З кінця вектора $\vec{c}$ проведемо дві прямі, паралельні відповідно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тоді $\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB}$. А оскільки вектор $\vec{OA}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, а вектор $\vec{OB}$ колінеарний вектору $\vec{b}$, то

$$\vec{OA} = \lambda\vec{a}, \quad \vec{OB} = \mu\vec{b}.$$

Отже, $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ або $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$, а це й означає, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно залежні.

<u>Наслідок 1</u>. Для будь-яких неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та будь-якого вектора $\vec{c}$, що лежить в площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, знайдуться такі числа λ і μ, що справджуватиметься рівність:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

<u>Наслідок 2</u>. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарні, то вони лінійно незалежні.

<u>Теорема 3</u>. Будь-які чотири вектори лінійно залежні.

<u>Доведення</u>. Нехай дано довільні чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і $\vec{d}$.

Якщо серед цих векторів які-небудь три вектори компланарні, тоді ця трійка векторів буде лінійно залежною, а, отже, і вся четвірка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ буде лінійно залежною.

Далі будемо вважати, що серед векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і $\vec{d}$ немає компланарної трійки векторів.

Прикладемо всі чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і $\vec{d}$ до спільного початку O. Через кінець $\mathcal{D}$ вектора $\vec{d}$ проведемо площини, які паралельні площинам, що визначаються парами векторів: $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{a}$ і $\vec{c}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 13). Точки перетину проведених площин з прямими, на яких лежать вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, позначимо відповідно буквами A, B і C.

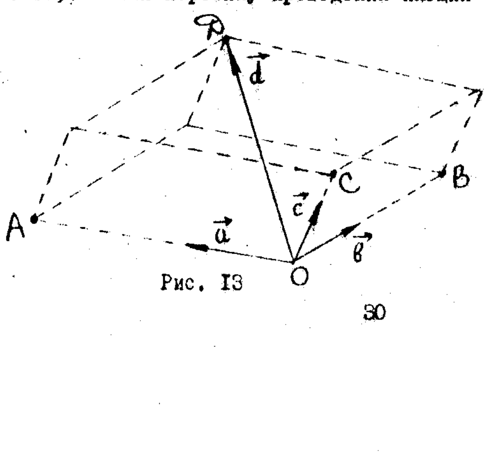

Рис. 13

За побудовою $\vec{d} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, але $\vec{OA} \parallel \vec{a}$, $\vec{OB} \parallel \vec{b}$, $\vec{OC} \parallel \vec{c}$ і тому $\vec{OA} = \lambda\vec{a}$, $\vec{OB} = \mu\vec{b}$, $\vec{OC} = \gamma\vec{c}$. Отже, $\vec{d} =$

$= \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}$ або $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c} + (-1)\vec{d} = \vec{0}$, а це й означає, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ лінійно залежні.

Наслідок. Для будь-яких некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ та для будь-якого вектора $\vec{d}$ знайдуться такі дійсні числа λ, μ і γ, що справджуватиметься рівність:

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Поняття базису

Кажуть, що три лінійно незалежних вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо будь-який вектор простору можна подати у вигляді деякої лінійної комбінації векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Аналогічно визначається базис на площині.

З теорем 1-3 попереднього пункту випливає, що:

1) будь-яка трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ утворює базис в просторі;

2) будь-яка пара неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що лежать у даній площині, утворює базис у цій площині.

Таким чином, якщо $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – довільний базис простору, то для будь-якого вектора $\vec{d}$ знайдуться такі числа λ, μ і γ, що

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Цю рівність прийнято називати розкладом вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, а число λ, μ, γ – координатами вектора $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Координати кожного вектора $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ визначаються однозначно, що легко доводиться методом від супротивного.

Головне значення введення поняття базису полягає в тому, що лінійні операції над векторами стають звичайними лінійними операціями над числами – координатами цих векторів. Тобто, справедливим є таке твердження: при додаванні двох векторів $\vec{d}_1$ і $\vec{d}_2$ їх координати (відносно базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) додаються. При множенні на число α вектора $\vec{d}_1$ усі його координати множаться на це число.

Справді, якщо

$$\vec{d}_1 = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c};$$
$$\vec{d}_2 = \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b} + \gamma_2\vec{c},$$

то, користуючись властивостями операцій над векторами, маємо:

$$\vec{d}_1+\vec{d}_2=(\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b}+\gamma_1\vec{c})+(\lambda_2\vec{a}+\mu_2\vec{b}+\gamma_2\vec{c})=(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}+$$
$$+(\mu_1+\mu_2)\vec{b}+(\gamma_1+\gamma_2)\vec{c};$$
$$\alpha d_1=\alpha(\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b}+\gamma_1\vec{c})=\alpha(\lambda_1\vec{a})+\alpha(\mu_1\vec{b})+\alpha(\gamma_1\vec{c})=$$
$$=(\alpha\lambda_1)\vec{a}+(\alpha\mu_1)\vec{b}+(\alpha\gamma_1)\vec{c}.$$

Слід зазначити, що коли базисні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ взаємно ортогональні (взаємно перпендикулярні) і одиничні, то такий базис називається декартовим. Надалі вектори декартового базису позначатимемо: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Проекція вектора на вісь та її властивості

Нагадаємо, що числовою віссю (або просто віссю) називається пряма, на якій вибрано початкову точку (початок), додатний напрям (що відзначається на рисунках стрілкою) та одиничний відрізок (одиницю масштабу).

Нехай u - деяка вісь, $\vec{AB}$ - вектор, довільно розміщені на площині. Позначимо через A' і B' проекції на вісь u відповідно початку A і кінця B цього вектора (рис. 14). Припустимо, що A' на осі u має координату x_1, а B' - координату x_2.

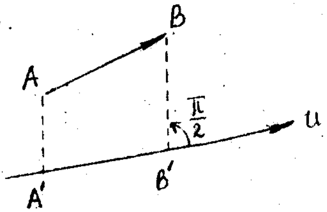

Рис. 14

Різниця $x_2 - x_1$ між координатами проекцій кінця та початку вектора $\vec{AB}$ на вісь u називається проекцією вектора $\vec{AB}$ на цю вісь і позначається $пр_u \vec{AB}$.

Якщо φ - кут між вектором $\vec{a}$ і віссю u, то, очевидно, що

$$пр_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi.$$

Основні властивості проекції вектора на вісь полягають в тому, що лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів.

Надалі запис

$$\vec{d}=(X,Y,Z)$$

означатиме, що X, Y, Z - декартові координати вектора $\vec{d}$, тобто

$$\vec{d}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}.$$

<u>Теорема</u>. Декартові координати X, Y, Z вектора $\vec{d}$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі Ox, Oy, Oz, що визначаються відповідно ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Доведення. Виконавши відповідний рисунок (рис. 15), бачимо, що

$$\vec{d} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC};\quad \vec{OA} = (пр_{Ox}\,\vec{d})\,\vec{i},$$

$$\vec{OB} = (пр_{Oy}\,\vec{d})\,\vec{j},\quad \vec{OC} = (пр_{Oz}\,\vec{d})\,\vec{k}.$$

Отже,

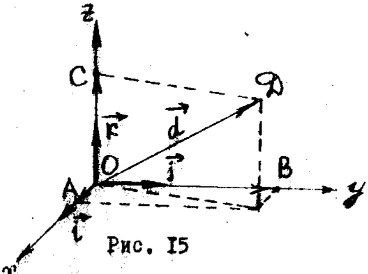

Рис. 15

$$X = пр_{Ox}\,\vec{d},\ Y = пр_{Oy}\,\vec{d},\ Z = пр_{Oz}\,\vec{d} \quad (5)$$

і теорему доведено.

Позначимо через α, β, γ кути нахилу вектора $\vec{d}$ до осей Ox, Oy, Oz. Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\vec{d}$. За таких позначень рівності (5) можна записати у вигляді

$$X = |\vec{d}|\cos\alpha,\quad Y = |\vec{d}|\cos\beta,\quad Z = |\vec{d}|\cos\gamma.$$

Але оскільки $|OD|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2$, $|\vec{d}| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$. Таким чином,

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

звідки дістаємо важливе співвідношення, що пов"язує напрямні косинуси вектора:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Доведемо, що при додаванні двох векторів $\vec{d}_1$ і $\vec{d}_2$ їх проекції на довільну вісь u додаються, а при множенні вектора $\vec{d}_1$ на довільне число α його проекція на довільну вісь u також множиться на число α.

Введемо в просторі систему координат так, щоб вісь u збігалася з віссю Ox. Нехай

$$\vec{d}_1 = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k},\quad \vec{d}_2 = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}.$$

Тоді $\vec{d}_1+\vec{d}_2=(X_1+X_2)\vec{i}+(Y_1+Y_2)\vec{j}+(Z_1+Z_2)\vec{k}$,

$$\alpha\vec{d}_1=(\alpha X_1)\vec{i}+(\alpha Y_1)\vec{j}+(\alpha Z_1)\vec{k},$$

а оскільки $X_1=\text{пр}_u\vec{d}_1$, $X_2=\text{пр}_u\vec{d}_2$;

$$X_1+X_2=\text{пр}_u(\vec{d}_1+\vec{d}_2);\quad \alpha X_1=\text{пр}_u(\alpha\vec{d}_1),$$

то

$$\text{пр}_u(\vec{d}_1+\vec{d}_2)=\text{пр}_u\vec{d}_1+\text{пр}_u\vec{d}_2,$$

$$\text{пр}_u(\alpha\vec{d}_1)=\alpha\,\text{пр}_u\vec{d}_1.$$

Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\overset{df}{=}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,\quad \varphi=\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}.$$

Інше означення: оскільки $|\vec{b}|\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Фізичний зміст скалярного добутку: якщо $\vec{F}$ - сила, $\vec{S}$ - вектор переміщення, то скалярний добуток $\vec{F}\cdot\vec{S}$ - це робота сили $\vec{F}$ при переміщенні на вектор $\vec{S}$.

Властивості скалярного добутку

I. Для того щоб два ненульових вектори були ортогональними, необхідно й достатньо, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулю.

Необхідність. Нехай φ - кут між векторами $\vec{a}\perp\vec{b}$. Якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$ ($\perp$ - символ перпендикулярності векторів), то $\varphi=\frac{\pi}{2}$ і $\cos\varphi=0$, а, отже, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Достатність. Нехай $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Тоді

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=0\Longrightarrow\cos\varphi=0\ \text{ і }\ \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

3. $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

4. $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$, якщо $\vec{a}$ - ненульовий вектор і $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$, якщо $\vec{a}$ - нульовий вектор.

Справедливість властивостей 2-4 випливає з означення скалярного добутку.

5. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Справді,

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})\cdot|\vec{c}|=np_{\vec{c}}\vec{a}\cdot|\vec{c}|+$$
$$+np_{\vec{c}}\vec{b}\cdot|\vec{c}|=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Значення цих властивостей полягає в тому, що вони дають змогу при скалярному множенні векторних многочленів виконувати дії почленно, не турбуючись при цьому про порядок векторних множників і розподіляючи числові множники.

Вираження скалярного добутку через декартові координати співмножників

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначаються своїми декартовими координатами

$$\vec{a}=(X_1,Y_1,Z_1),\quad \vec{b}=(X_2,Y_2,Z_2),$$

то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

Справді,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k})(X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k})=X_1X_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+$$
$$+X_1Y_2(\vec{i}\cdot\vec{j})+X_1Z_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+Y_1X_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+Y_1Y_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+$$
$$+Y_1Z_2(\vec{j}\cdot\vec{k})+Z_1X_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+Z_1Y_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+Z_1Z_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=$$
$$=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

Наслідок 1. Необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\vec{a}=(X_1,Y_1,Z_1)$ і $\vec{b}=(X_2,Y_2,Z_2)$ є рівність

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0.$$

Наслідок 2. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

5*

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$ (позначається символом $\vec{a}\times\vec{b}$), який визначається такими умовами:

а) вектор $\vec{c}$ є перпендикулярним до кожного з векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$;

б) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi,$$

де φ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

в) вектор $\vec{c}$ має такий напрям, що коли дивитися з його кінця, то поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ по найкоротшому шляху може бути здійснений проти руху годинникової стрілки (якщо всі три вектори прикладені до однієї точки), тобто трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є правою.

Наприклад,

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{0}; \qquad \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}; \qquad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j};$$

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}; \qquad \vec{j}\times\vec{j} = \vec{0}; \qquad \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i};$$

$$\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}; \qquad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}; \qquad \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}.$$

Розглянемо фізичну задачу, розв"язання якої приводить до операції векторного добутку двох векторів.

Покажемо, як обчислюється швидкість точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Припустимо, що тверде тіло обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі і нехай M - довільна точка цього тіла (рис. 16). Вектор $\vec{\omega}$ напрямлений по осі обертання тіла в той бік, з якого обертання тіла видно проти руху годинникової стрілки.

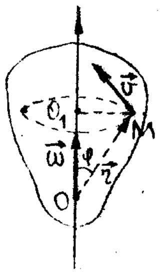

Рис. 16

На осі обертання тіла візьмемо довільну точку O і відкладемо вектори $\vec{ON} = \vec{\omega}$ та $\vec{OM} = \vec{r}$, кут між якими позначимо через φ.

Якщо $\vec{v}$ - вектор лінійної швидкості точки M, який напрямлений по дотичній до кола обертання точки M, то з трикутника OO_1M маємо

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}|d = |\vec{\omega}|\cdot|\vec{r}|\sin\varphi \qquad (d = |O_1M|),$$

де d - відстань від точки M до осі обертання.

Вектор $\vec{v}$ є перпендикулярним до векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$, і якщо дивитися з кінця вектора $\vec{v}$, то найкоротший поворот від $\vec{\omega}$ до $\vec{r}$ здійснюватиметься проти руху годинникової стрілки.

Тому згідно з означенням векторного добутку маємо

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

<u>Примітка</u>. Інколи векторний добуток позначають $[\vec{a}\vec{b}]$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Властивості векторного добутку

З означення векторного добутку легко випливає ряд властивостей цього добутку. Основні з них такі:

1^0. Векторний добуток змінює свій напрям на протилежний при переставлянні співмножників: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

2^0. Скалярні множники можна виносити за знак векторного добутку: $\alpha\vec{a} \times \beta\vec{b} = \alpha\beta(\vec{a} \times \vec{b})$.

3^0. Векторне множення підпорядковане дистрибутивному закону:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

4^0. Векторний добуток вектора самого на себе дорівнює нулю: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

5^0. Модуль вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

Вираження векторного добутку через декартові координати співмножників

<u>Теорема</u>. Якщо

$$\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \quad \vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2),$$

то

$$\vec{a} \times \vec{b} = (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1;\ Z_1 X_2 - Z_2 X_1;\ X_1 Y_2 - X_2 Y_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

<u>Доведення</u>. Справді, користуючись властивостями векторного добутку, маємо:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}) \times (X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}) = X_1X_2(\vec{i}\times\vec{i}) + X_1Y_2(\vec{i}\times\vec{j}) + X_1Z_2(\vec{i}\times\vec{k}) +$$
$$+ Y_1X_2(\vec{j}\times\vec{i}) + Y_1Y_2(\vec{j}\times\vec{j}) + Y_1Z_2(\vec{j}\times\vec{k}) + Z_1X_2(\vec{k}\times\vec{i}) + Z_1Y_2(\vec{k}\times\vec{j}) +$$
$$+ Z_1Z_2(\vec{k}\times\vec{k}) = (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)\vec{i} + (Z_1X_2 - Z_2X_1)\vec{j} + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\vec{k}.$$

Наслідок. Якщо два вектори $\vec{a}=(X_1; Y_1; Z_1)$ і $\vec{b}=(X_2; Y_2; Z_2)$ колінеарні, то їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}.$$

Поділ відрізка в даному відношенні

Задача. Знаючи координати точок $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ та відношення λ, в якому точка M поділяє напрямлений відрізок M_1M_2, знайти координати точки M.

Розв"язання. Через x, y, z позначимо координати точки M. Нехай O - початок координат. Позначимо $\overrightarrow{OM_1}=\vec{r}_1$, $\overrightarrow{OM_2}=\vec{r}_2$, $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ (рис. 17). Оскільки $\overrightarrow{M_1M}=\vec{r}-\vec{r}_1$, а $\overrightarrow{MM_2}=\vec{r}_2-\vec{r}$, то за умовою задачі $\vec{r}-\vec{r}_1=\lambda(\vec{r}_2-\vec{r})$. Звідси, користуючись наслідком з теореми попереднього пункту, маємо:

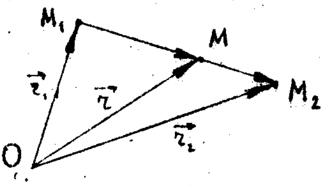

Рис. 17

$$x-x_1=\lambda(x_2-x); \quad y-y_1=\lambda(y_2-y);$$
$$z-z_1=\lambda(z_2-z)$$

або

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},$$

що є розв"язком задачі.

Зауваження. Користуючись наведеним способом міркувань, легко встановлюємо, що коли $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - початок вектора, а $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - його кінець, то координати вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1),$$

а його довжина

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятих у певному порядку (позначається $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$), називається число, що дорівнює векторному добутку двох перших векторів, помноженому скалярно на третій вектор:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

З цього означення випливає ряд властивостей мішаного добутку. Основними з них є такі:

1^0. Мішаний добуток не змінюється при коловому переставлянні співмножників і змінює знак на протилежний при переставлянні двох будь-яких співмножників:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

2^0. Скалярні множники можна винести за знак мішаного добутку:

$$(\lambda\vec{a})(\mu\vec{b})(\nu\vec{c})=(\lambda\mu\nu)(\vec{a}\vec{b}\vec{c}).$$

3^0. Мішаний добуток дистрибутивний відносно додавання:

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d}=\vec{a}\vec{c}\vec{d}+\vec{b}\vec{c}\vec{d}.$$

4^0. Мішаний добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі три вектори компланарні.

5^0. Модуль мішаного добутку дорівнює об"єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, як на ребрах.

Щоб переконатися в справедливості властивості 5^0, досить зазначити, що $|\vec{a}\times\vec{b}|$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто площа основи паралелепіпеда, а $|пр_{(\vec{a}\times\vec{b})}\vec{c}|$ – висота паралелепіпеда (рис. 18), і справджуються рівності: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=$ $=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot пр_{(\vec{a}\times\vec{b})}\vec{c}$.

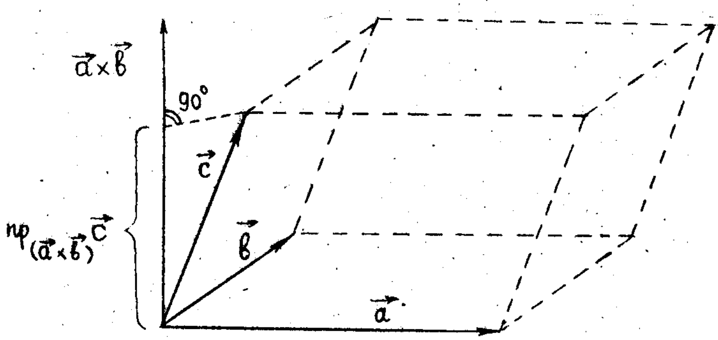

Рис. 18

Вираження мішаного добутку через декартові координати співмножників

Теорема. Нехай

$$\vec{a}=(X_1,Y_1,Z_1),\ \vec{b}=(X_2,Y_2,Z_2),\ \vec{c}=(X_3,Y_3,Z_3).$$

Тоді

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Доведення. Справді,

$$\vec{a}\times\vec{b}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1;\ Z_1X_2-Z_2X_1;\ X_1Y_2-X_2Y_1),$$

тому

$$\vec{c}=(X_3;\ Y_3;\ Z_3),$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)X_3+$$

$$+(Z_1X_2-Z_2X_1)Y_3+(X_1Y_2-X_2Y_1)Z_3=$$

$$=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}X_3-\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}Y_3+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}Z_3=$$

$$=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Теорему доведено.

Приклад. Знайти об"єм піраміди з вершинами $S(1;\ 2;\ 1)$, $A(-1;\ 0;\ 2)$, $B(-2;\ 1;\ 0)$, $C(3;\ 1;\ 1)$ (рис. 19).

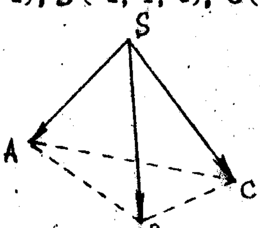

Рис. 19

Оскільки $\vec{SA}=(-2;\ -2;\ 1)$, $\vec{SB}=(-3;\ -1;\ -1)$, $\vec{SC}=(2;\ -1;\ 0)$, то, користуючись властивістю 5^0 мішаного добутку, матимемо

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{SA}\,\vec{SB}\,\vec{SC}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right|=\frac{11}{6}.$$

Подвійний векторний добуток

Подвійним векторним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається вектор

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Можна показати, що для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справджується формула

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Можна було б навести приклади інших добутків векторів, але всі вони є тими чи іншими комбінаціями векторного і скалярного добутків.

Запитання для самоконтролю

I. Які вектори називаються колінеарними, компланарними, рівними?

2. Чи можуть два вектори, модулі яких рівні, бути не рівними? Якщо так, то за яких умов?

3. Сформулюйте властивості операцій додавання векторів та множення вектора на число.

4. Які вектори називаються лінійно залежними, лінійно незалежними?

5. Доведіть теореми про лінійну залежність двох векторів, трьох векторів, чотирьох векторів.

6. Що називається базисом у просторі, на площині?

7. Що називається проекцією вектора на вісь? Сформулюйте властивості проекцій.

8. Які числа називаються напрямними косинусами вектора?

9. Сформулюйте означення скалярного добутку векторів. Його властивості та фізичний зміст.

I0. Як виражається скалярний добуток векторів через координати співмножників?

II. Запишіть формули для знаходження кута між двома векторами та довжини вектора.

I2. Сформулюйте означення векторного добутку двох векторів. Його властивості та фізичний зміст.

I3. Як виражається векторний добуток двох векторів через координати векторів-співмножників?

I4. Сформулюйте означення мішаного добутку векторів. Його властивості та геометричне тлумачення.

15. Як виражається мішаний добуток векторів через декартові координати співмножників?

16. Чому дорівнює площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах?

17. Чому дорівнює об"єм паралелепіпеда, тетраедра, побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ як на ребрах?

Вправи до § I.5

I. Яку умову повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ щоб:
а) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; б) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$; в) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$?

2. У правильному шестикутнику $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ маємо $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{A_1A_6}=\vec{b}$. Розкласти за базисом $\vec{a},\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1A_5}$.

3. Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основі.

4. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=(-2;\ 3;\ \beta)$ і $\vec{b}=(\alpha;\ -6;\ 2)$ колінеарні?

5. Дано вектори: $\vec{a}=(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}=(-1;\ 3;\ 2)$, $\vec{c}=(7;\ -3;\ 5)$, $\vec{d}=(-6;\ 10;\ 3)$ в деякому базисі. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис у просторі, і знайти розклад вектора $\vec{d}$ за цим базисом.

6. Дано координати вершин піраміди $A_1(4;\ 2;\ 5)$, $A_2(0;\ 7;\ 2)$, $A_3(0;\ 2;\ 7)$, $A_4(1;\ 5;\ 0)$. Знайти: 1) довжину ребра A_1A_2; 2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4; 3) площу грані $A_1A_2A_3$; 4) об"єм піраміди.

§ I.6. РІВНЯННЯ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ (пряма на площині)

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Інколи, щоб підкреслити довільність деякої точки M, називатимемо її біжучою, або змінною точкою.

Складемо рівняння прямої, яка утворює з віссю Ox кут φ $(\varphi\neq\frac{\pi}{2})$ і перетинає вісь Oy в точці $(0;\ b)$ (рис. 20).

Нехай $M(x;\ y)$ – біжуча точка цієї прямої. Тоді очевидно, що

$$\frac{y-b}{x}=\operatorname{tg}\varphi.$$

Число $tg\varphi = k$ називають кутовим коефіцієнтом прямої. Отже,

$$\frac{y-b}{x} = k \Rightarrow y = kx + b -$$

шукане рівняння прямої.

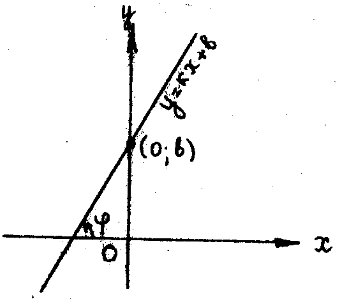

Рис. 20

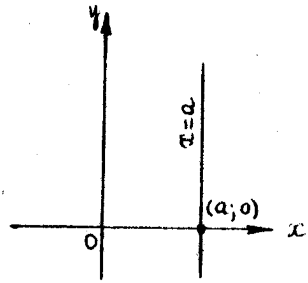

Рис. 21

Якщо пряма вертикальна, то їй відповідає рівняння $x = a$ (рис. 21).

Рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямі

А. Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно даному вектору $\vec{N} = (m; n)$.

Нехай $M(x, y)$ - біжуча точка прямої (рис. 22). Тоді

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0); \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{N} \Rightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} -$$

шукане рівняння прямої.

Вектор $\vec{N}$ називається напрямним вектором прямої.

Б. Складемо рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M_0(x_{00}, y_{00})$ і має кутовий коефіцієнт k.

Нехай $M(x, y)$ - біжуча точка прямої, а φ - кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі Ox, тобто $k = tg\varphi$ (рис. 23). Тоді

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = tg\varphi = k,$$

6*

звідки дістаємо шукане рівняння прямої:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

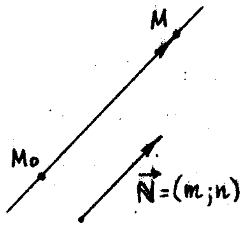

Рис. 22

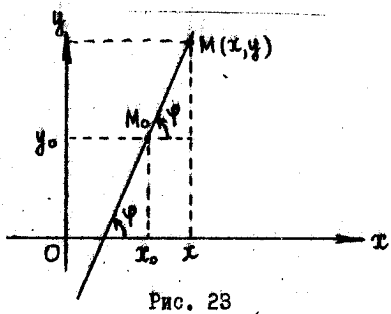

Рис. 23

B. Складемо рівняння прямої, яка перпендикулярна до даного вектора $\vec{N} = (A, B)$ і проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0)$.

Нехай $M(x,y)$ - біжуча точка цієї прямої. Тоді $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. А оскільки $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює нулеві, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Останнє рівняння і є шуканим рівнянням прямої (рис. 24).

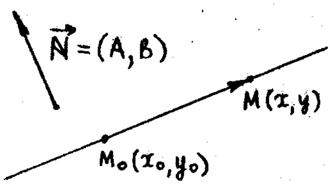

Рис. 24

Вектор, перпендикулярний до прямої, називається нормальним вектором цієї прямої.

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

Складемо рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 25).

Якщо $M(x,y)$ – біжуча точка цієї прямої, то $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$, а $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$. А оскільки $\overrightarrow{M_1M}\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$, то координати цих векторів пропорційні, тобто

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (6)$$

Останнє рівняння і є шуканим рівнянням прямої.

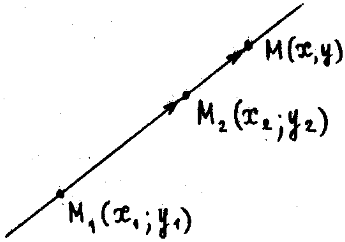

Рис. 25

Зауваження. Могло трапитися, що, наприклад, $x_2-x_1=0$. Тоді рівняння (6) матиме вигляд:

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (7)$$

Незважаючи на недоречність цієї рівності, такий запис вважається зручним. Звільнившись від знаменників у (7), матимемо:

$$x-x_1=0\cdot\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=0,$$

тобто $x=x_1=const$ – рівняння прямої (7). (Символом $const$ позначаємо сталу величину.)

Кут між двома прямими

Нехай дві прямі визначаються рівняннями $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$ (рис. 26), а φ – один із суміжних кутів між ними. Тоді $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$.

Тому

$$tg\varphi=tg(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{tg\varphi_1-tg\varphi_2}{1+tg\varphi_1\cdot tg\varphi_2}.$$

Але оскільки $tg\varphi_1=k_1$, $tg\varphi_2=k_2$, то

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

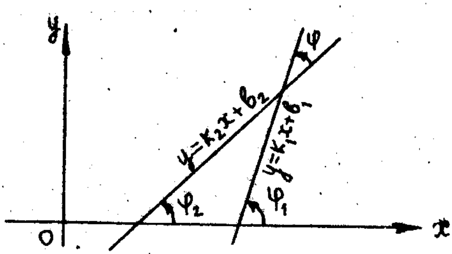

Рис. 26

З останньої рівності випливають умови паралельності та перпендикулярності двох прямих з кутовими коефіцієнтами k_1, k_2 : умова паралельності: $k_1 = k_2$; умова перпендикулярності: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(2; -3)$ перпендикулярно до прямої $y = 3x - 2$.

Кутовий коефіцієнт шуканої прямої $k = -\frac{1}{3}$, тому її рівняння таке: $y + 3 = -\frac{1}{3}(x-2)$ (див. с. 43-44).

Загальне рівняння прямої на площині

У загальному вигляді рівняння прямої записується так:

$$Ax + By + C = 0. \tag{8}$$

Очевидно, що при $B \neq 0$ рівняння (8) рівносильне рівнянню $y = kx + b$, де $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Теорема. Вектор $\vec{N} = (A, B)$ перпендикулярний до прямої, що визначається рівнянням (8).

Доведення. Нехай $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ - деякі точки, що лежать на прямій (8). Це означає, що

$$Ax_1 + By_1 + C = 0; \tag{9}$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0. \tag{10}$$

Віднімаючи від рівності (10) рівність (9), маємо:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0. \tag{11}$$

Рівність (11) означає, що вектор $\vec{N} = (A, B)$ перпендикулярний до вектора $\vec{S} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. А оскільки вектор $\vec{S}$ лежить на прямій (8), то теорему доведено.

Наслідок. Позначимо через φ кут між прямими, що визначаються рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Тоді, згідно з означенням скалярного добутку векторів, маємо

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \tag{12}$$

де $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$; $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$.

З (12) випливає, що коли прямі задано загальними рівняннями, то умовою їх перпендикулярності є рівність

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

Умовою їх паралельності є рівність

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

<u>Зауваження</u>. Якщо $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$, то рівняння (8) можна записати у вигляді

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (13)$$

де $a=-\frac{C}{A}$; $b=-\frac{C}{B}$. Рівняння (13) називається рівнянням прямої у відрізках. Така назва рівняння пов"язана з тим, що пряма, яка визначається рівнянням (13), перетинає осі Ox і Oy відповідно в точках $(a;0)$ і $(0;b)$.

<u>Відстань від точки до прямої</u>

Нехай потрібно знайти відстань від деякої точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої, що визначається рівнянням $Ax+By+C=0$, тобто знайти відстань $d=|\overrightarrow{MK}|$ (рис. 27).

Позначимо через $\bar{x}, \bar{y}$ координати точки K. Тоді

$$\overrightarrow{M_0K}=(\bar{x}-x_0;\ \bar{y}-y_0).$$

Але вектори $\overrightarrow{M_0K}$ і $\vec{N}=(A,B)$ колінеарні. Тому $|\overrightarrow{M_0K}\cdot\vec{N}|=|\overrightarrow{M_0K}|\cdot|\vec{N}|$ або

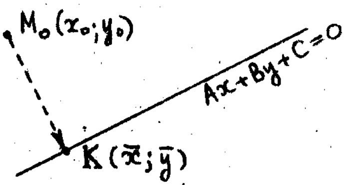

Рис. 27

$$|(\bar{x}-x_0)A+(\bar{y}-y_0)B|=|\overrightarrow{M_0K}|\cdot|\vec{N}|=d\cdot|\vec{N}|. \qquad (14)$$

Внаслідок того, що точка $K(\bar{x},\bar{y})$ лежить на прямій, тобто $A\bar{x}+B\bar{y}+C=0$ або $A\bar{x}+B\bar{y}=-C$, з рівності (14) матимемо рівність $d\cdot|\vec{N}|=|Ax_0+By_0+C|$. Звідси

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (15)$$

оскільки $|\vec{N}|=\sqrt{A^2+B^2}$.

Приклад. Знайти висоту $|AK|$ трикутника ABC, якщо $A(2;\ 3)$; $B(-1;\ 2)$; $C(1;\ -1)$ (рис. 28).

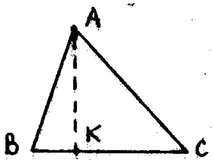

Рис. 28

Рівняння сторони (прямої) BC має вигляд (див. п. 3):

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y+1}{2-(-1)},$$

звідки

$$3x+2y-1=0. \qquad (16)$$

Користуючись формулою (15), знаходимо відстань від точки A до прямої BC що визначається рівнянням (16):

$$|AK|=\frac{3\cdot 2+2\cdot 3-1}{\sqrt{9+4}}=\frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Який геометричний зміст чисел 3 й 4 у рівнянні прямої $y=3x+4$?

2. Які координати має напрямний вектор прямої $x+2=\frac{1}{3}(y-4)$?

3. Який кут утворює пряма $y+1=-(x+3)$ з додатним напрямом осі Ox?

4. Які координати має нормальний вектор прямої $x+2=\frac{1}{3}(y-4)$?

5. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точки $A(a_1;a_2)$ і $B(b_1;b_2)$.

6. Виведіть формули для знаходження кута між двома прямими, якщо: а) прямі задано рівняннями $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$; б) прямі задано загальними рівняннями.

7. Виведіть формулу для знаходження відстані від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$.

Вправи до § 1.6

1. Знайти кутовий коефіцієнт прямої $3x+5y-7=0$.

2. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку (1; -2) паралельно до прямої $3x+5y-7=0$.

3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку (2; 0) і перпендикулярна до вектора $\vec{a}=(3;\ 4)$.

4. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ і одну з його вершин $O(0;\ 0)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника.

5. Знайти відстань від точки $A(1;\ 2)$ до прямих: а) $2x+4y-5=0$; б) $2x+8y+1=0$; в) $x+y=0$.

6. Знайти кут між прямими $x+y=2$ і $2x-2y=3$.

§ 1.7. РІВНЯННЯ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ З ТРЬОМА ЗМІННИМИ (площина в просторі)

Загальне рівняння площини

Введемо в просторі декартову систему координат $Oxyz$. Нехай деякий вектор $\vec{N}$ має координати A, B, C.

Складемо рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N}$ (рис. 29).

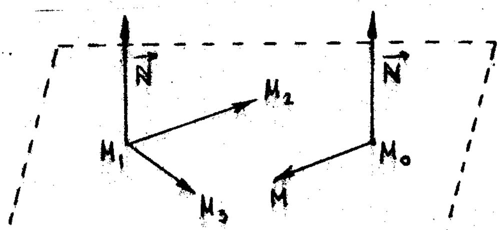

Рис. 29

Нехай $M(x;y)$ – біжуча точка цієї площини. Оскільки вектори $\vec{N}=(A, B, C)$ і $\vec{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулеві, тобто

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \quad (17)$$

Розкривши дужки в (17) і позначивши $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, дістанемо

$$Ax+By+Cz+D=0. \quad (18)$$

Рівняння (18) називається загальним рівнянням площини.

Отже, коли вектор $\vec{N}=(A, B, C)$ перпендикулярний до площини, то рівняння цієї площини має вигляд (18).

Покажемо, що справедливе й обернене твердження, тобто така теорема.

Теорема. Якщо деяка площина задана рівнянням (18), то вектор $\vec{N}=(A,B,C)$ перпендикулярний до цієї площини.

Доведення. Нехай точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, лежать у площині (18). Це означає, що

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0;$$
$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0;$$
$$Ax_3+By_3+Cz_3+D=0.$$

Звідси

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0;$$
$$A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)+C(z_3-z_1)=0,$$

а це означає, що вектор $\vec{N}=(A,B,C)$ перпендикулярний до векторів $M_1M_2=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ і $M_1M_3=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$, які лежать у площині (18). Проте M_1, M_2, M_3 - довільні точки площини, отже, вектор $\vec{N}=(A,B,C)$ перпендикулярний до площини, що визначається рівнянням (18) (рис. 29). Теорему доведено.

Зауваження. У випадку, коли $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$, рівняння (18) рівносильне рівнянню:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{19}$$

де $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$. Рівняння (19) називається рівнянням площини у відрізках. Площина, що визначається рівнянням (19), перетинає координатні осі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ і $(0,0,c)$.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай площина визначається трьома точками M_1, M_2 і M_3, координати яких відомі: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$.

Розглянемо довільну точку $M(x;y;z)$ цієї площини (рис. 30).

Введемо допоміжні вектори $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ і $\overline{M_1M}$, що мають координати:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1);$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1);$$
$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1).$$

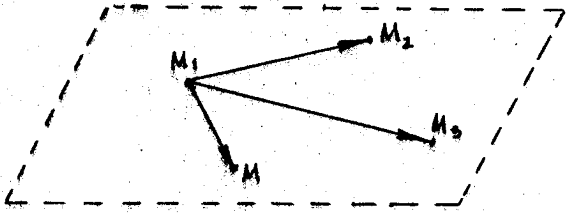

Рис. 80

Оскільки ці вектори компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулеві, тобто
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння і є рівнянням площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ і $M_3(x_3;y_3;z_3)$.

Відстань від точки до площини

Нехай потрібно знайти відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$.

Через $K(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ позначимо точку перетину цієї площини з перпендикуляром, проведеним через точку M_0 (рис. 81).

Наше завдання полягає в тому, щоб знайти довжину вектора $\overrightarrow{MK}$, тобто $d=|\overrightarrow{MK}|$. Але оскільки вектори $\vec{N}=(A,B,C)$ і $\overrightarrow{MK}$ колінеарні, то $|\overrightarrow{MK}|\cdot|\vec{N}| = |\overrightarrow{MK}\cdot\vec{N}|$.

Проте $MK=(\bar{x}-x_0;\bar{y}-y_0;\bar{z}-z_0)$. Тому

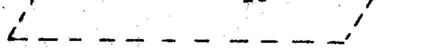

Рис. 81

$$|A(\bar{x}-x_0)+B(\bar{y}-y_0)+C(\bar{z}-z_0)| = d\cdot|\vec{N}|. \qquad (20)$$

На підставі того, що

$$A\bar{x}+B\bar{y}+C\bar{z}+D=0 \iff A\bar{x}+B\bar{y}+C\bar{z}=-D$$

(точка $K(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ належить площині), з рівності (20) матимемо

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|\bar{N}|},$$

або, остаточно,

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Кутові співвідношення

Нехай дві площини задано загальними рівняннями:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \qquad (21)$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad (22)$$

Оскільки кут φ між площинами дорівнює куту між нормальними векторами цих площин, то, згідно з означенням скалярного добутку, справджується рівність

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

З цього співвідношення випливає, що рівність

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

є умовою перпендикулярності площин (21) і (22), а рівність

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

є умовою паралельності цих площин.

Запитання для самоконтролю

1. Як знайти відстань від точки до площини?

2. Запишіть: загальне рівняння площини; рівняння площини, що проходить через три дані точки; рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора.

3. Запишіть формулу для знаходження кута між двома площинами, які задано загальними рівняннями.

Вправи до § 1.7

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;\ 1;\ 1)$; $M_2(3;\ 0;\ 1)$; $M_3(1;\ 2;\ 0)$.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(1;\ 3;\ -4)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (-1;\ 0;\ 2)$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1;\ 1;\ 1)$ паралельно площині $-2x+y-z+1=0$. Знайти відстань між цими площинами.

4. Знайти кут між площинами $P_1: x-y+1=0$; $P_2: y-z+1=0$.

§ 1.8. СИСТЕМИ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ТРЬОМА ЗМІННИМИ (пряма в просторі)

Загальні рівняння прямої в просторі

Пряма в просторі є лінією перетину двох площин, тому аналітично її можна задати за допомогою системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (23)$$

Слід зазначити, що оскільки вектори $\vec{N}_1=(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{N}_2=(A_2;B_2;C_2)$ перпендикулярні до площини і з системи (23), то вектор $\vec{S}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ перпендикулярний як до вектора $\vec{N}_1$, так і до вектора $\vec{N}_2$ і внаслідок цього паралельний прямій (23) (рис. 32).

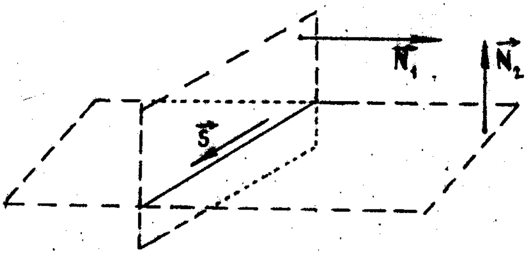

Рис. 32

Будь-який вектор, паралельний прямій, називається напрямним вектором цієї прямої.

Отже, вектор $\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ – напрямний вектор прямої, що визначається загальними рівняннями (23).

Канонічні рівняння прямої

Задання прямої за допомогою рівнянь (23) не завжди зручне. Частіше застосовуються інші способи задання.

Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно заданому вектору $\vec{s}=(l; m; n)$.

Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка цієї прямої. Розглянемо вектор

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0).$$

Вектори $\vec{s}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарні (рис. 88), тому

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (24)$$

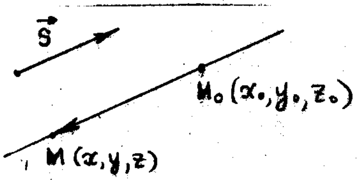

Рис. 88

Рівняння (24) повністю визначають пряму і називаються канонічними рівняннями прямої.

Канонічні рівняння легко скласти, якщо пряма визначається двома точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. У цьому випадку за напрямний вектор $\vec{s}$ можна взяти вектор

$$\overrightarrow{M_1M}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1).$$

Тому канонічні рівняння прямої матимуть вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (25)$$

Часто доводиться від загальних рівнянь прямої переходити до її канонічних рівнянь. У такому разі найпростіше скласти їх, знайшовши які-небудь два розв"язки системи (23), а потім записати (25).

__Приклад__. Скласти канонічні рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ x+3y-z+4=0. \end{cases} \qquad (26)$$

Підставляючи в (26), наприклад, $z=0$, матимемо:

$$\begin{cases} 2x-3y=2 \\ x+3y=4. \end{cases}$$

Звідси $x = -\frac{2}{3}$; $y = -\frac{10}{9}$. Отже, точка $M_1(-\frac{2}{3}; -\frac{10}{9}; 0)$ лежить на прямій. Поклавши в (26) $z = 4$, дістанемо:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ x + 3y = 0. \end{cases}$$

Звідси $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{9}$. Отже, і точка $M_2(-\frac{2}{3}; \frac{2}{9}; 2)$ лежить на прямій. Тому напрямний вектор $\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2}$ має координати 0; $\frac{4}{3}$; 4. Отже, канонічні рівняння прямої (26) будуть такими:

$$\frac{x + \frac{2}{3}}{0} = \frac{y + \frac{10}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{z}{4}. \qquad (27)$$

<u>Зауваження</u>. Оскільки перша координата напрямного вектора дорівнює нулю, то з (27) випливає, що абсциса будь-якої точки прямої задовольняє умову $x + \frac{2}{3} = 0$. Це означає, що пряма (27) лежить у площині $x = -\frac{2}{3}$, яка паралельна до координатної площини Oyz.

Параметричні рівняння прямої

Позначимо відношення (24) через t. Якщо точка рухається по прямій, то t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. Маємо

$$\frac{x - x_0}{l} = t; \quad \frac{y - y_0}{m} = t; \quad \frac{z - z_0}{n} = t$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \quad -\infty < t < +\infty. \end{cases} \qquad (28)$$

Це параметричні рівняння прямої.

Якщо ввести вектори $\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$ і $\vec{r} = (x; y; z)$, то система (28) рівносильна такому векторному рівнянню:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{S},$$

яке називається векторним рівнянням прямої.

Відстань від точки до прямої

Знайдемо відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до прямої, напрямний вектор якої позначимо через $\vec{s}$.

Візьмемо на прямій певну точку $K(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ і розглянемо паралелограм, побудований на векторах $\vec{s}$ і $\overrightarrow{KM_0}$ (рис. 34). Його площа, з одного боку, дорівнює $d \cdot |\vec{s}|$, а з іншого – $|\vec{s} \times \overrightarrow{KM_0}|$. Тому шукану відстань d можна знайти з рівності

$$d = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{KM}|}{|\vec{s}|}.$$

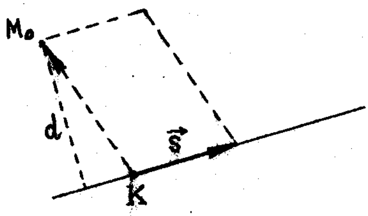

Рис. 34

Приклад. Знайти відстань від точки $M_0(1; -1; 2)$ до прямої

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}.$$

Тут $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 2$, тому $K(1; 0; 2)$ і $\overrightarrow{KM_0} = (0; -1; 0)$, а $\vec{s} = (2; -1; 3)$, $|\vec{s}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$. Векторний добуток

$$\vec{s} \times \overrightarrow{KM_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{k}; \quad |\vec{s} \times \overrightarrow{KM_0}| = \sqrt{9 + 0 + 4} = \sqrt{13}.$$

Отже $d = \sqrt{\dfrac{13}{14}}$.

Кутові співвідношення

Знаючи напрямні вектори прямих та нормальні вектори площин, можна знаходити кути між прямими та кути між прямими й площинами.

Наприклад, якщо $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ – напрямний вектор однієї прямої, $\vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2)$ – напрямний вектор іншої прямої, а φ – кут між цими прямими, то

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Звідси дістаємо, що рівність

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

є умовою паралельності цих прямих, а рівність

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \text{ —}$$

умовою перпендикулярності даних прямих.

Якщо α - кут між напрямним вектором деякої прямої та нормальним вектором деякої площини, то кут β між прямою та площиною доповнює кут α до 90^0. Тому, знайшовши кут α на підставі означення скалярного добутку векторів, знаходимо й кут β між прямою та площиною.

Запитання для самоконтролю

I. Виведіть загальні, параметричні та канонічні рівняння прямої в просторі.

2. Виведіть векторне рівняння прямої в просторі.

3. Як перетворити загальні рівняння прямої в канонічні рівняння прямої? Розглянути приклад.

4. Як визначається кут між прямою та площиною? Запишіть умови паралельності та перпендикулярності прямих.

Вправи до § I.6

I. Скласти канонічні рівняння прямої

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$$

2. Знайти точку перетину прямої

$$\begin{cases} 2x+y-z-3=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$$

з координатною площиною Oxy.

3. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;\ 3;\ -1)$ паралельно вектору $\vec{a} = (-2;\ 2;\ 1)$.

4. Записати рівняння прямої, що проходить через точку (3; 0; 2) перпендикулярно до площини $-x+z-1=0$.

5. Знайти кут φ між прямими

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{\sqrt{2}}; \qquad \frac{x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

6. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку (-2; -1; -8) і паралельна вектору $\vec{n} = (2;\ 1;\ 5)$.

8-01646

§ 1.9. РІВНЯННЯ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ
(криві другого порядку)

Рівняння кола

Складемо рівняння кола з центром у деякій точці $A(a;b)$ і радіусом R (рис. 35). Нехай $M(x;y)$ – біжуча точка кола. Відстань від M до A дорівнює R. Квадрат цієї відстані дорівнює $(x-a)^2+(y-b)^2$. Таким чином, рівняння кола має вигляд

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

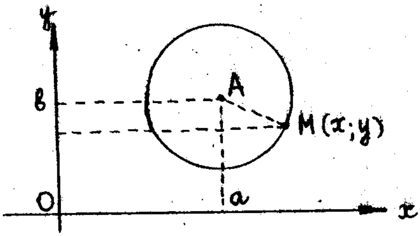

Рис. 35

Ясно, що коли центр кола збігається з початком координат, то рівняння кола має вигляд

$$x^2+y^2=R^2.$$

Еліпс

Еліпсом називається лінія, яка при певному виборі системи координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a=const, \qquad b=const.$$

Виходячи з рівняння еліпса, можна дослідити його форму та властивості. Зокрема легко бачити, що абсциса x будь-якої точки еліпса задовольняє нерівність

$$|x|\leq a. \tag{29}$$

Точки з координатами $(c;0)$ і $(-c;0)$, де $c=\sqrt{a^2-b^2}$, називаються фокусами еліпса (рис. 36).

Число $e=\frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом еліпса. З означення ексцентриситета випливає, що $0\leq e<1$. Відрізок A_1A_2 називається більшою віссю, а відрізок B_1B_2 – меншою віссю еліпса. При збільшенні e, тобто при наближенні його до одиниці, відношення півосей еліпса $\frac{b}{a}$ зменшується, еліпс набуває форми дедалі більш розтягнутого вздовж осі Ox овала.

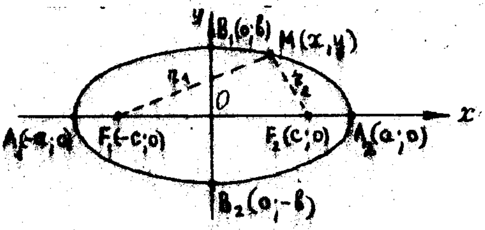

Рис. 86

<u>Теорема</u> (характеристична властивість еліпса). Нехай r_1 – відстань від довільної точки $M(x;y)$ еліпса до лівого фокуса, а r_2 – до правого фокуса. Тоді

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

<u>Доведення</u>. Враховуючи рівняння еліпса, маємо

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2} =$$

$$= \sqrt{x^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)+c^2+2xc} = \sqrt{a^2+2xc+\frac{c^2x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a+\frac{c}{a}x\right|.$$

Але з (29) випливає, що $a+\frac{c}{a}x > 0$, тому $r_1 = a+\frac{c}{a}x$.

Аналогічно з'ясовуємо, що

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \left|a-\frac{c}{a}x\right| = a-\frac{c}{a}x.$$

Отже, $r_1 = a+ex$, $r_2 = a-ex$ і в результаті $r_1+r_2=2a$.

<u>Гіпербола</u>

Гіперболою називається лінія, яка при певному виборі системи координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a=const, \quad b=const.$$

Виходячи з цього рівняння, можна дослідити форму та основні властивості гіперболи. Зокрема, легко бачити, що абсциса будь-якої точки гіперболи задовольняє нерівність

$$|x| \geq a. \tag{30}$$

Точки з координатами $(c; 0)$ і $(-c; 0)$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, називаються фокусами гіперболи (рис. 87). Число $e = \frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи. Очевидно, що $e > 1$.

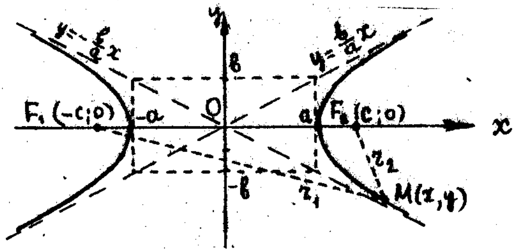

Рис. 87

Теорема (характеристична властивість гіперболи). Нехай r_1 – відстань від довільної точки $M(x, y)$ гіперболи до лівого фокуса, а r_2 – до правого фокуса. Тоді

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Доведення. З урахуванням рівняння гіперболи маємо

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + c^2 - b^2 + 2xc} = \sqrt{x^2\frac{c^2}{a^2} + 2xc + a^2} =$$

$$= \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|\frac{xc}{a} + a\right| = \begin{cases} a + ex, & \text{якщо } x > 0, \\ -a - ex, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Аналогічно до цього можна показати, що

$$r_2 = \begin{cases} -a + ex, & \text{якщо } x > 0, \\ a - ex, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Звідси

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a, & \text{якщо } x > 0, \\ -2a, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$$

або $|r_1 - r_2| = 2a$, що й треба було довести.

Асимптоти гіперболи. Покажемо, що прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ є асимптоти гіперболи.

Дійсно, розглянемо частину гіперболи, що лежить у першій чверті координатної площини.

Для цієї частини гіперболи рівняння гіперболи можна переписати так:

$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\,.$$

Але якщо $x \to +\infty$, то $\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \to \frac{b}{a}x$, адже якщо $x \to +\infty$, то $\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \to 1$. Це й означає, що пряма $y = \frac{b}{a}x$ - асимптота гіперболи.

Крім того, з нерівності $\frac{b}{a}x > \frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ випливає, що гіпербола в першій чверті розміщена під асимптотою.

На підставі властивостей симетрії робимо висновок, що пряма $y = \frac{b}{a}x$ є асимптота обох віток гіперболи.

Те саме можна сказати й про пряму $y = -\frac{b}{a}x$.

На підставі тих самих властивостей симетрії дістанемо, що гіпербола розміщена між асимптотами.

Парабола

Параболою називається лінія, яка при певному виборі системи координат задається рівнянням

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \tag{31}$$

Парабола, що задана рівнянням (31), - це крива, для якої вісь Ox є вісь симетрії.

Точка $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ називається фокусом параболи. Пряма $x = -\frac{p}{2}$ називається директрисою параболи (рис. 38).

<u>Теорема</u> (характеристична властивість параболи). Відстань від будь-якої точки параболи до фокуса дорівнює відстані від цієї точки до директриси.

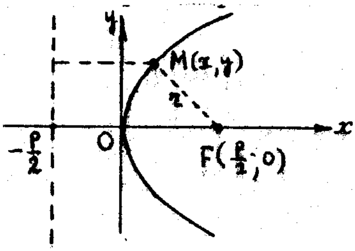

Рис. 38

Доведення. Нехай $M(x,y)$ – довільна точка параболи, а r – відстань від цієї точки до фокуса. Тоді

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=$$

$$=\sqrt{x^2+\frac{p^2}{4}+px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=$$

$$=x+\frac{p}{2},$$

а це і є відстань від точки M до директриси. Теорему доведено.

Запитання для самоконтролю

I. Якими рівняннями визначаються еліпс, гіпербола, парабола?

2. Сформулюйте та доведіть характеристичні властивості еліпса, гіперболи, параболи.

3. Якими рівняннями визначаються асимптоти гіперболи?

4. Що називається директрисою параболи?

5. Які точки називаються фокусами еліпса, гіперболи, параболи?

6. Що називається ексцентриситетом еліпса, параболи?

Вправи до § I.9

I. Скласти рівняння кривої, сума квадратів відстаней від кожної точки якої до точок $M_1(3;\,0)$ і $M_2(-3;\,0)$ дорівнює 50.

2. Скласти рівняння кривої, сума відстаней від кожної точки якої до точок $F_1(-2;\,0)$ і $F_2(2;\,0)$ дорівнює $2\sqrt{5}$.

3. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(-1;\,0)$, яке проходить через точку $M(2;\,6)$.

4. Побудувати еліпс $9x^2+25y^2=225$. Знайти: а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет.

5. Побудувати гіперболу $16x^2-9y^2=144$. Знайти: а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот.

6. Побудувати такі параболи та знайти їх параметри p: а) $y^2=6x$; б) $x^2=5y$; в) $y^2=-4x$; г) $x^2=-y$.

7. Знайти рівняння дотичної до параболи $y^2=8x$, яка паралельна прямій $2x+2y-3=0$.

§ 1.10. РІВНЯННЯ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ТРЬОМА ЗМІННИМИ (поверхні другого порядку)

Циліндри і конуси другого порядку

Поверхня, яка при певному виборі системи координат (у просторі) описується рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

називається конічною поверхнею, або просто конусом. Можна показати, що лінія перетину конуса з будь-якою площиною $z=const\neq 0$, тобто площиною, паралельною площині Oxy, є еліпс (рис. 39). Перетин конуса з площиною $x=const\neq 0$ чи $y=const\neq 0$ є гіпербола.

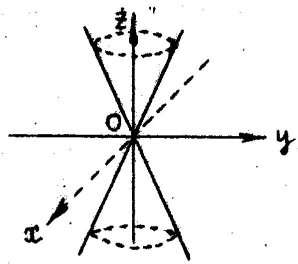

Рис. 39

Поверхня, яка при певному виборі системи координат описується рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

називається еліптичним циліндром. Перетин цієї поверхні з довільною площиною $z=const$ є еліпс (рис. 40).

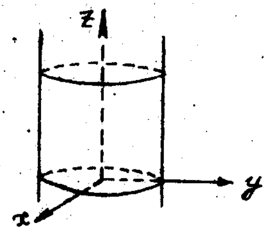

Рис. 40

Поверхня, яка при певному виборі системи координат описується рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

називається гіперболічним циліндром. Перетин цієї поверхні з довільною площиною $z=const$ є гіпербола (рис. 41).

Поверхня, яка при певному виборі системи координат описується рівнянням

$$y^2=2px,\quad p>0,$$

називається параболічним циліндром. Перетин цієї поверхні з довільною площиною $z=const$ є парабола (рис. 42).

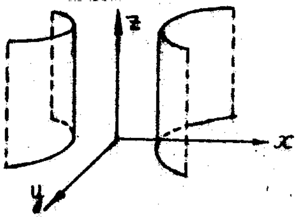

Рис. 4I

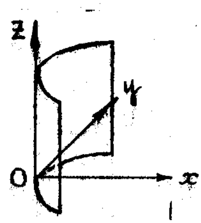

Рис. 42

Поверхні обертання

Нехай в площині Oyz задано криву, що визначається рівнянням $F(Y, Z) = 0$. Нехай ця крива обертається навколо осі Oy, описуючи деяку поверхню. Знайдемо рівняння цієї поверхні обертання.

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка отриманої поверхні. Проведемо через цю точку площину, перпендикулярну до осі Oy. Ця площина перетне вісь Oy в точці B з координатами $(0; y; 0)$, а задану криву в точці A з координатами $(0; y; z)$, причому $y = Y$, $z = Z$. З рис. 43 видно, що

$$|BM| = \sqrt{x^2 + z^2}; \quad |AB| = |BM| = |Z|, \quad Z = \pm\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Підставляючи в рівняння кривої замість Y та Z отримані значення, дістаємо рівняння поверхні обертання:

$$F(y; \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

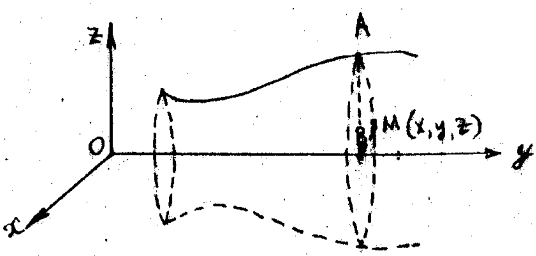

Рис. 43

Приклад. Якщо пряма $z = ky$ обертається навколо осі Oy, то в результаті дістаємо поверхню, яка описується рівнянням: $\pm\sqrt{x^2+z^2} = ky$ або $x^2+z^2=k^2y^2$, тобто маємо рівняння конуса.

Еліпсоїд

Розглянемо в площині Oyz еліпс

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Будемо обертати цей еліпс навколо осі Oy, дістаючи поверхню обертання, яка, на підставі результату попереднього пункту, описується рівнянням

$$\frac{x^2+z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Отримана поверхня називається еліпсоїдом обертання.

Еліпсоїдом загального виду, або просто еліпсоїдом, називається поверхня, утворена внаслідок рівномірного стиснення еліпсоїда обертання до однієї з його площин симетрії, наприклад до Oxy (або шляхом розтягнення в протилежних напрямах). Рівняння еліпсоїда загального виду (рис. 44) таке:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Якщо $a=b=c=R$, то еліпсоїд перетворюється в сферу радіуса R, рівняння якої $x^2+y^2+z^2=R^2$.

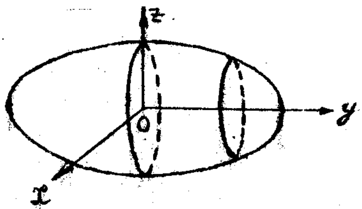

Рис. 44

Гіперболоїд

Нехай крива

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

обертається навколо осі Oz. Дістанемо поверхню, що описується рівнянням

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ця поверхня називається однопорожнинним гіперболоїдом обертання.

9-01646

Однопорожнинним гіперболоїдом загального виду, або просто однопорожнинним гіперболоїдом, називається поверхня, утворена внаслідок стиснення (або розтягнення) однопорожнинного гіперболоїда обертання до однієї з його площин симетрії. Рівняння однопорожнинного гіперболоїда загального виду (рис. 45) таке:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

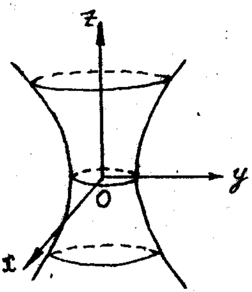

Рис. 45

Будемо обертати гіперболу

$$\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

навколо осі Oy. При цьому дістаємо поверхню, що визначається рівнянням

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

і називається двопорожнинним гіперболоїдом обертання.

Двопорожнинним гіперболоїдом загального виду, або просто двопорожнинним гіперболоїдом, називається поверхня, утворена рівномірним стисненням (або розтягненням) двопорожнинного гіперболоїда обертання до однієї з його площин симетрії. Двопорожнинний гіперболоїд загального виду (рис. 46) описується таким рівнянням:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

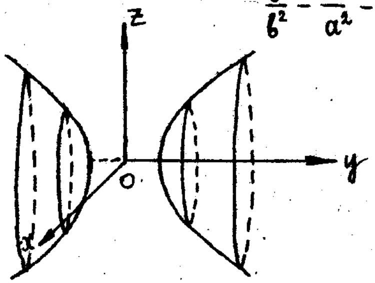

Рис. 46

Параболоїди

Нехай крива

$$Y^2=2pZ$$

обертається навколо осі Oz. Дістанемо поверхню, рівняння якої

$$x^2+y^2=2pz.$$

Ця поверхня називається параболоїдом обертання.

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, утворена рівномірним стисненням (розтягненням) параболоїда обертання до однієї з його площин симетрії. Рівняння еліптичного параболоїда (рис. 47) таке:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz.$$

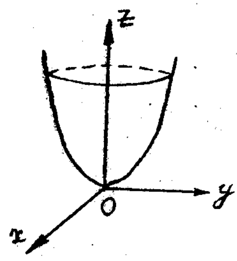

Рис. 47

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, описана параболою, яка рухається в просторі так, що її площина залишається весь час паралельною заданій площині, наприклад Oyz, а вершина O' ковзає по нерухомій параболі, розміщеній у перпендикулярній площині, наприклад, Oxz. Напрями осей обох парабол (рухомої і нерухомої) протилежні. Можна показати, що рівняння гіперболічного параболоїда має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz.$$

Ця поверхня зображена на рис. 48.

Поверхнями, розглянутими в цьому параграфі, вичерпуються можливі види поверхонь другого порядку.

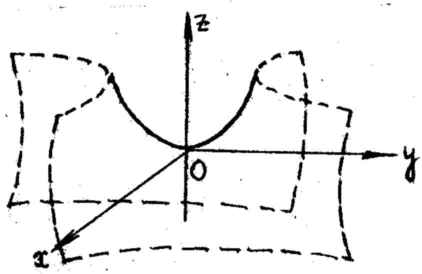

Рис. 48

Запитання для самоконтролю

1. Якими рівняннями визначаються циліндри і конуси другого порядку?

2. Як дістати рівняння поверхні, отриманої внаслідок обертання кривої $f(x,y)=0$ навколо осі Ox?

3. Записати рівняння еліпсоїда загального виду та еліпсоїда обертання.

4. Записати рівняння однопорожнинного та двопорожнинного гіперболоїдів загального виду.

5. Якими рівняннями визначаються еліптичний та гіперболічний параболоїди?

6. Зобразити всі можливі види поверхонь другого порядку на малюнках.

Вправи до § I.10

1. Знайти рівняння кривої, яка є перетином площини $x = -2$ з еліпсоїдом

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{8} = 1.$$

2. Записати рівняння однопорожнинного гіперболоїда, який проходить через точки $(-1; 1; -1)$, $(1; 0; 0)$, $(1; -4; 4)$.

3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1; \\ y = 0 \end{cases}$$

навколо осі Oz.

4. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи

$$\begin{cases} y^2 = 5z; \\ x = 0. \end{cases}$$

навколо осі Oz.

§ I.11. ЗАГАЛЬНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Поняття лінійної залежності стовпців

Нехай дано стовпці

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \ \dots \ ; \ C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

і нехай $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ - числа. Тоді стовпець $\alpha A + \beta B + \dots + \gamma C$ називається лінійною комбінацією стовпців $A, B, \dots, C$.

Стовпці $A, B, \dots, C$ називаються лінійно залежними, якщо знайдуться такі числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, з яких хоча б одне не дорівнює нулю, що справджується рівність:

$$\alpha A + \beta B + \dots + \gamma C = O, \tag{82}$$

де O - стовпець, що складається з нулів.

Стовпці $A, B, \ldots, C$ називаються лінійно незалежними, якщо рівність (32) можлива лише у випадку, коли

$$\alpha = \beta = \ldots = \gamma = 0.$$

Ясно, що стовпці $A, B, \ldots, C$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один з них є лінійною комбінацією інших.

Ранг матриці

Розглянемо довільну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мінором k-го порядку матриці A називають визначник k-го порядку, який утворений з елементів матриці A, що стоять на перетині будь-яких k рядків і будь-яких k стовпців цієї матриці A.

Якщо матриця A не нульова, то знайдеться таке ціле додатне число r^*, що виконуватимуться такі дві умови: 1) матриця A містить мінор r^*-го порядку, відмінний від нуля; 2) будь-який мінор порядку r^*+1 і вище (якщо такі мінори існують) дорівнює нулеві.

Число r^*, що задовольняє умови 1 і 2, називається рангом матриці A.

Коротко: рангом матриці називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Той мінор r^*-го порядку, який відмінний від нуля, називається базисним. Рядки й стовпці, на перетині яких стоїть базисний мінор, називаються базисними рядками і базисними стовпцями.

Приклад. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & -2 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Тут усі мінори 3 і 4-го порядків дорівнюють нулеві, а, наприклад, мінор, що стоїть на перетині другого і третього рядків та другого і третього стовпців

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

не дорівнює нулеві. Отже, ранг цієї матриці дорівнює 2, а мінор

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

є базисний; тут існують і інші базисні мінори.

Слід зазначити, що ранг матриці не змінюється, якщо поміняти місцями два рядки (стовпці) матриці, або якщо до якого-небудь рядка (стовпця) додати лінійну комбінацію інших рядків (стовпців), оскільки при таких перетвореннях визначник зберігає властивість бути рівним нулю. Такі перетворення матриці називаються елементарними і використовуються при знаходженні рангу матриці.

Теорема (про базисний мінор). Базисні рядки (стовпці) є лінійно незалежні. Будь-який стовпець (рядок) матриці A є лінійна комбінація базисних стовпців (рядків).

Доведення. Якби базисні стовпці були лінійно залежні, то один з них був би лінійною комбінацією інших, не змінюючи порядку базисного мінора, можна було б відняти від цього стовпця вказану лінійну комбінацію і дістати стовпець, що цілком складається з нулів. Це суперечило б тому, що базисний мінор відмінний від нуля.

Отже, базисні стовпці лінійно незалежні.

Доведемо другу частину теореми. Не порушуючи загальності, вважаємо, що базисний мінор розміщений у лівому верхньому кутку матриці, тобто на перших r рядках і на перших r стовпцях матриці A.

Нехай j і k - довільні числа, причому $1 \leq j \leq n$ і $1 \leq k \leq m$. Розглянемо визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник дорівнює нулеві. Адже, якщо $j \leq r$ або $k \leq r$, то він має два однакових стовпці або рядки. Якщо $j > r$ і $k > r$, то цей визначник є мінор ($r+1$)-го порядку і, отже, дорівнює нулеві (адже ранг матриці дорівнює r).

Розкладемо цей визначник за елементами останнього рядка. Дістанемо

$$A_{k1}a_{k1} + A_{k2}a_{k2} + \dots + A_{kr}a_{kr} + A_{kj}a_{kj} = 0.$$

Алгебраїчні доповнення не залежать від k позначимо їх так:

$$A_{k1}=c_1;\ A_{k2}=c_2;\ \dots;\ A_{kr}=c_r;\ A_{kj}=C_{r+1}.$$

Зауважимо, що $C_{r+1}\neq 0$, адже це базисний мінор. Тому

$$a_{kj}=-\frac{c_1}{c_{r+1}}a_{k1}-\frac{c_2}{c_{r+1}}a_{k2}-\dots-\frac{c_r}{c_{r+1}}a_{kr}$$

(для всіх k = I, 2, ..., m). Це й означає, що j-й стовпець є лінійна комбінація перших r базисних стовпців. Теорему доведено.

Однорідні системи лінійних рівнянь

У загальному вигляді однорідна система лінійних рівнянь записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \tag{83}$$

Ця система завжди має нульовий розв"язок, який називається тривіальним. Розглянемо питання про нетривіальні розв"язки системи (83).

Теорема (про нетривіальні розв"язки однорідної системи). Однорідна система (83) має нетривіальні розв"язки тоді і тільки тоді, коли ранг матриці цієї системи менший за число невідомих.

Доведення. Необхідність. Нехай система (83) має нетривіальні розв"язки, тобто існують числа $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, серед яких принаймні одне відмінне від нуля, такі, що

$$x_1^0A_1+x_2^0A_2+\dots+x_n^0A_n=O,$$

де $A_1, A_2, \dots, A_n$ – стовпці матриці системи. Це означає, що стовпці $A_1, A_2, \dots, A_n$ лінійно залежні, внаслідок чого на підставі теореми про базисний мінор вони не всі можуть бути базисними, тому ранг матриці A менший за n.

Достатність. Нехай ранг r матриці A менший за n. Тоді, відповідно до теореми про базисний мінор, стовпці $A_1, A_2, \dots, A_n$ лінійно залежні. Це означає, що існують числа $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, серед яких хоча б одне не дорівнює нулю, і справджується рівність:

$$x_1^0A_1+x_2^0A_2+\dots+x_n^0A_n=O.$$

Іншими словами, числа $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ дають нетривіальний розв"язок системи (38). Теорему доведено.

Будемо записувати розв"язки однорідної системи у вигляді стовпців і позначати буквою X з індексами.

Для розв"язків однорідної системи справджуються такі властивості:

I^0. Якщо стовпець X_0 є розв"язок системи (38), то для будь-якого числа α стовпець αX_0 також є розв"язком системи (38).

<u>Доведення</u>. Запишемо систему (38) у матричній формі

$$AX = O. \tag{38'}$$

Оскільки X_0 є розв"язок матричного рівняння (38'), то

$$AX_0 = O.$$

Тому, підставивши замість X в (38') стовпець αX_0, на підставі властивостей операцій над матрицями маємо

$$A(\alpha X_0) = \alpha A X_0 = \alpha O = O,$$

що й треба було довести.

2^0. Якщо X_1 і X_2 - розв"язки системи (38), то й стовпець $X_1 + X_2$ є розв"язком системи (38).

Справді, оскільки

$$AX_1 = O, \quad AX_2 = O,$$

то, відповідно до властивостей операцій над матрицями, маємо

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = O,$$

що й треба було довести.

<u>Наслідок</u>. Будь-яка лінійна комбінація розв"язків однорідної системи лінійних рівнянь також є розв"язком цієї системи, тобто, якщо стовпці $X_1, X_2, \ldots, X_\ell$ - розв"язки, то стовпець

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_\ell X_\ell$$

також є розв"язок ($c_1, c_2, \ldots, c_\ell$ - довільні числа).

Поняття загального розв"язку однорідної системи лінійних рівнянь

Нехай дано однорідну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (34)$$

або в матричній формі

$$AX = O. \qquad (35)$$

Із властивостей розв"язків системи лінійних однорідних рівнянь /с. 71, 72/ випливає, що з будь-яких двох частинних розв"язків цієї системи можна дістати безліч розв"язків даної системи як різні лінійні комбінації цих розв"язків. У зв"язку з цим виникає питання, чи не можна всі розв"язки системи (34) подати як лінійні комбінації кількох певних розв"язків. Виявляється, справді, завжди можна знайти так звану фундаментальну систему розв"язків, характерну тим, що кожний розв"язок системи (34) є якоюсь лінійною комбінацією розв"язків фундаментальної системи.

Цілком зрозуміло, що фундаментальна система розв"язків має бути лінійно незалежною системою стовпців, бо в противному разі один з розв"язків сам був би лінійною комбінацією інших розв"язків даної системи рівнянь, тому його можна було б відкинути.

Загальним розв"язком системи (34) називається розв"язок, що залежить від довільних сталих, з якого при відповідному виборі цих сталих можна дістати будь-який розв"язок системи (34). Іншими словами, загальний розв"язок - це лінійна комбінація фундаментальної системи розв"язків.

Наведемо деякі міркування з питання про знаходження загального розв"язку системи (34).

Припустимо, як і раніше, що ранг r матриці системи A менший за число невідомих n і базисний мінор розміщений у верхньому лівому кутку системи. Тоді перші r рядків матриці системи є базисними і за теоремою про базисний мінор /с. 69-71/ кожний рядок матриці, починаючи з $(r+1)$-го, є лінійною комбінацією перших r рядків цієї матриці. Мовою системи рівнянь це означає, що кожне з рівнянь системи, починаючи з $(r+1)$-го, є лінійною комбінацією (наслідком) перших r рівнянь системи, тобто будь-який розв"язок перших r рівнянь системи (34) буде розв"язком і решти рівнянь цієї системи.

Таким чином, для знаходження всіх розв"язків системи досить знайти всі розв"язки лише перших r рівнянь системи.

Розглянемо перші r рівнянь системи, записавши їх у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2r}x_r=-a_{2,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2n}x_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{36}$$

Якщо надати невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ довільних значень $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$, то система (36) перетвориться в квадратну систему r лінійних рівнянь з r невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_r$, причому визначник цієї системи є базисний мінор, що відмінний від нуля. Така система має єдиний розв"язок, який визначається формулами Крамера при вибраних заздалегідь сталих $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$. Позначимо через X_1 розв"язок системи (36) при $C_1=1,\ C_2=0, \ldots, C_{n-r}=0$, через X_2 – розв"язок системи (36) при $C_1=0,\ C_2=1,\ C_3=0, \ldots$ $\ldots, C_{n-r}=0$ і т.д., через X_{n-r} – розв"язок системи (36) при $C_1=0,\ C_2=0, \ldots, C_{n-r}=1$.

Можна довести, що всі ці розв"язки $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ рівняння (35) (чи системи (34)) є лінійно незалежні і будь-який інший розв"язок

$$X=c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_{n-r}X_{n-r}, \tag{37}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ – довільні сталі. Отже, (37) є загальний розв"язок системи (34).

<u>Приклад</u>. Знайти загальний розв"язок системи

$$\begin{cases} x_1+6x_2+4x_3+x_4+7x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3\qquad+2x_5=0 \\ -2x_1+4x_2+3x_3+x_4+5x_5=0 \\ 5x_1-2x_2-2x_3-x_4-3x_5=0. \end{cases} \tag{38}$$

У п. 2 відзначено, що ранг матриці системи (38) дорівнює 2, отже, система (38) рівносильна такій системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1+6x_2=-4x_3-x_4-7x_5 \\ 3x_1+2x_2=-x_3\qquad-2x_5, \end{cases} \tag{39}$$

бо мінор матриці системи (39)

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-16$$

відмінний від нуля.

Покладаючи $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, знаходимо X_1. Маємо:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 = -1, \end{cases}$$

звідки

$$x_1 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-2}{-16} = \frac{1}{8}; \quad x_2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{13}{16}.$$

Отже,

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{13}{16} \end{pmatrix}.$$

Покладаючи в (89) $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, дістаємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases}$$

звідки

$$x_1 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}; \quad x_2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3}{16}.$$

Таким чином,

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{16} \end{pmatrix}.$$

Якщо в (89) прийняти $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, то система (89) матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = -7 \\ 3x_1 + 2x_2 = -2, \end{cases}$$

звідки

$$x_1 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}; \quad x_2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{19}{16}.$$

Отже,

$$X_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}\\ -\frac{19}{16}\end{pmatrix}.$$

Таким чином, загальний розв"язок системи (38) набирає вигляду:

$$X=c_1\begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\ -\frac{13}{16}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\ -\frac{3}{16}\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}\\ -\frac{19}{16}\end{pmatrix}.$$

Неоднорідні системи лінійних рівнянь

У загальному вигляді неоднорідна система лінійних рівнянь (система неоднорідних лінійних рівнянь) може бути записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (40)$$

або в матричній формі

$$AX=B.$$

Матриця

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

називається розширеною матрицею системи (40).

Теорема Кронекера - Капеллі. Для того щоб система лінійних рівнянь (40) була сумісною (мала розв"язок), необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи і ранг розширеної матриці системи були рівні.

Доведення. а) Необхідність. Нехай система (40) сумісна, тобто існують числа $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ такі, що справедливі рівності:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+\ldots+a_{1n}x_n^0=b_1\\ a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+\ldots+a_{2n}x_n^0=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1^0+a_{m2}x_2^0+\ldots+a_{mn}x_n^0=b_m. \end{cases} \qquad (41)$$

Позначимо через r ранг матриці A. За теоремою про базисний мінор будь-який стовпець основної матриці системи є лінійною комбінацією базисних стовпців цієї матриці. Проте з рівностей (41) випливає, що й стовпець

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

розширеної матриці A_1 є лінійна комбінація стовпців матриці A, а отже, і базисних стовпців. Це означає, що ранг матриці A_1 також дорівнює r.

б) Достатність. Нехай ранги матриць A і A_1 рівні. Тоді r базисних стовпців матриці A є також базисними стовпцями розширеної матриці A_1. За теоремою про базисний мінор останній стовпець розширеної матриці є лінійна комбінація зазначених r базисних стовпців. Але в такому разі стовпець B_0 є лінійна комбінація всіх стовпців матриці A, тобто існують числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ такі, що справедливі рівності (41). Це означає, що ці числа будуть розв"язками системи (40), тобто система (40) сумісна. Теорему доведено.

Ми довели теорему про існування розв"язків неоднорідної системи лінійних рівнянь. Щодо числа цих розв"язків, можна зауважити таке.

Нехай r_1 - ранг розширеної матриці системи A_1.

Якщо $r = r_1 = n$ (n - число невідомих), то система (40) має єдиний розв"язок, який можна знайти методом Гаусса. Втім, цей розв"язок можна знайти і за формулами Крамера, відкинувши спочатку лінійно залежні рівняння системи, якщо такі є (вони є, коли $m > n$).

Якщо $r = r_1 < n$, то система (40) має безліч розв"язків. У цьому разі загальним розв"язком системи (40) називають розв"язок, що залежить від довільних сталих, з якого при відповідному виборі цих сталих можна дістати будь-який з інших розв"язків системи (40).

Можна показати, що, коли $\bar{X}$ - довільний розв"язок системи (41), а X_0 - загальний розв"язок відповідної однорідної системи, то загальний розв"язок неоднорідної системи (40) має вигляд

$$X = \bar{X} + X_0. \tag{42}$$

Частинний розв"язок $\bar{X}$ неоднорідної системи знаходять так.

Замінюють систему (40) такою рівносильною їй системою (вважаємо, що базисний мінор розміщений у лівому верхньому куті матриці системи):

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Беручи в цій системі $x_{r+1}=\ldots=x_n=0$, розв"язують систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=b_r \end{cases},$$

розв"язок якої позначимо через $\tilde{X}$. Очевидно, що

$$\overline{X}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_r,0,\ldots,0),$$

де $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_r)=\tilde{X}$ і є частинним розв"язком неоднорідної системи (40).

Для знаходження загального розв"язку досить знайти X_0 (розв"язавши (40) при $b_1=0,\ b_2=0,\ \ldots,\ b_m=0$) і скористатись співвідношенням (42).

Нарешті, якщо $r_1>r$, то з теореми Кронекера - Капеллі випливає, що система (40) не має розв"язку.

Альтернатива Фредгольма для систем лінійних рівнянь

Нехай дано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mm}x_m=b_m. \end{cases} \qquad (43)$$

Запишемо відповідну однорідну систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mm}x_m=0 \end{cases} \qquad (44)$$

та дві системи
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m = c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \dots + a_{mm}y_m = c_m \end{cases} \qquad (45)$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m = 0; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \dots + a_{mm}y_m = 0, \end{cases} \qquad (46)$$
матриці яких є транспонованими відносно матриць систем (43) і (44).

<u>Теорема</u>. Можливі два випадки:

а) система (44) має єдиний (тривіальний) розв"язок;

б) система (44) має нетривіальний розв"язок.

У випадку а: система (43) має єдиний розв"язок при будь-яких $b_1, b_2, \dots, b_m$, система (46) має єдиний (тривіальний) розв"язок, система (45) має єдиний розв"язок при будь-яких $c_1, c_2, \dots, c_m$.

У випадку б: число лінійно незалежних розв"язків системи (44) дорівнює $m - r$, де r - ранг матриці системи. Стільки ж лінійно незалежних розв"язків має й система (46). У цьому випадку система (43) має розв"язок тоді і тільки тоді, коли вектор
$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$
ортогональний до будь-якого розв"язку системи (46), тобто, якщо
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$
якийсь розв"язок системи (46), то $b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m = 0$.
Система (45) має розв"язок тоді й тільки тоді, коли вектор
$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$
ортогональний до будь-якого розв"язку систем.. (44).

Запитання для самоконтролю

1. Що називається лінійною комбінацією стовпців? За яких умов стовпці $A, B, \dots, C$ називаються лінійно залежними?

2. Що називається рангом матриці?

3. Сформулюйте та доведіть теорему про нетривіальні розв"язки однорідної системи рівнянь.

4. Який розв"язок називається загальним розв"язком однорідної системи?

5. Сформулюйте та доведіть теорему Кронекера - Капеллі.

6. Яка структура загального розв"язку неоднорідної системи лінійних рівнянь?

Вправи до § 1.11

1. Чи є лінійно залежними вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$: 1) $\vec{a} = (3;\ 0;\ 4)$, $\vec{b} = (3;\ 1;\ 2)$; 2) $\vec{a} = (1;\ 2;\ -1;\ 3)$, $\vec{b} = (2;\ 4;\ -2;\ 6)$?

2. Чому дорівнює ранг матриці: $A = (1;\ 0;\ 3)$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 6 & -8 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}?$$

3. Знайти ранг матриці A, якщо:

1) $$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 8 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$ 2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

звівши її за допомогою елементарних перетворень до "ступінчастого" вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix},$$

(під "діагональними" елементами $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{r-1,r-1}$ стоять нулі).

Нагадаємо, що елементарними перетвореннями матриці A називаються такі дії над матрицею:

а) переставляння двох стовпців;

б) викреслювання нульового рядка;

в) додавання до одного з рядків матриці іншого рядка, помноженого на довільне число, відмінне від нуля.

Відомо, що елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

4. Знайти фундаментальну систему розв"язків та загальний розв"язок таких однорідних систем:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0; \\ -2x_1-4x_2+6x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0; \\ -x_1+x_2+x_3=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0; \\ -x_1-x_2+2x_3=0; \\ 2x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0; \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0; \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0; \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$

5. Знайти загальний розв"язок неоднорідної системи рівнянь, використовуючи фундаментальну систему розв"язків відповідної однорідної системи:

$$\begin{cases} 7x_1-5x_2-5x_3+5x_4+4x_5=3; \\ -2x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0; \\ 4x_1-3x_2-3x_3+3x_4+3x_5=2; \\ x_1-x_2-x_3+x_4+2x_5=1. \end{cases}$$

§ I.12. ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ

Поняття лінійного простору

Множина L елементів $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$ довільної природи називається лінійним (векторним) простором, якщо виконуються такі три умови:

1. Існує правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам $\vec{x}$ і $\vec{y}$ з множини L ставиться у відповідність третій елемент $\vec{z}$ з цієї множини. Цей елемент називають сумою елементів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ і позначають символом $\vec{x}+\vec{y}$.

2. Існує правило, за допомогою якого будь-якому елементу $\vec{x}$ з множини L і будь-якому дійсному числу λ ставиться у відповідність деякий елемент $\vec{u}$ з множини L, який називається добутком елемента $\vec{x}$ на число λ і позначається символом $\vec{u}=\lambda\vec{x}$ або $\vec{u}=\vec{x}\lambda$.

3. Вказані два правила підпорядковані таким аксіомам:

1^0) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ (переставна властивість);

2^0) $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ (сполучна властивість);

3^0) існує нульовий елемент $\vec{0}$ такий, що $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ для довільного елемента $\vec{x}$;

4^0) для кожного елемента $\vec{x}$ існує протилежний елемент $\vec{x}'$ такий, що $\vec{x}+\vec{x}'=\vec{0}$;

5^0) $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$ для довільного елемента $\vec{x}$;

6^0) $\lambda(\mu\vec{x})=(\lambda\mu)\vec{x}$ (сполучна відносно числових множників властивість);

7^0) $(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$ (розподільна відносно суми числових множників властивість);

8^0) $\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$ (розподільна відносно суми елементів властивість).

Приклади конкретних лінійних просторів:

1. Множина дійсних чисел.
2. Множина векторів на площині.
3. Множина векторів у просторі.
4. Множина всіх матриць однакової розмірності.
5. Множина всіх розв"язків однорідної системи лінійних рівнянь.
6. Множина всіх многочленів, степені яких не перевищують заданого числа n.
7. Множина всіх функцій, неперервних на даному відрізку.

Приклади множин, що не є лінійними просторами:

1. Множина всіх векторів простору, з якої вилучено вектори, що паралельні деякій прямій ℓ.
2. Множина всіх многочленів, степені яких точно дорівнюють натуральному числу n.
3. Множина всіх многочленів з невід"ємними коефіцієнтами, степені яких не перевищують заданого натурального n.

Інколи елементи довільного лінійного простору називають векторами.

Поняття лінійної залежності елементів лінійного простору

Множина векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ лінійного простору L називається лінійно залежною системою векторів, якщо існують такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, серед яких принаймні одне відмінне від нуля, що виконується рівність:

$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k=\vec{0}. \qquad (47)$$

У противному разі, тобто коли (47) виконується лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, система векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ називається лінійно незалежною.

Вираз, що стоїть ліворуч у рівності (47), називається лінійною комбінацією векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$.

Базис і координати. Розмірність лінійного простору

Множина лінійно незалежних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ лінійного простору L називається базисом цього простору, якщо для кожного елемента $\vec{x}$ простору L знайдуться числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такі, що справджується рівність

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n. \tag{48}$$

При цьому рівність (48) називається розкладом вектора $\vec{x}$ за елементами базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються координатами вектора $\vec{x}$ (відносно даного базису).

Теорема. Кожний елемент $\vec{x}$ лінійного простору L може бути розкладений за елементами базису єдиним способом.

Доведення. Дійсно, припустимо, що поряд з розкладом (48) має місце ще й такий розклад:

$$\vec{x} = x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 + \ldots + x_n'\vec{e}_n.$$

Віднімаючи від цієї рівності рівність (48), дістанемо

$$(x_1' - x_1)\vec{e}_1 + (x_2' - x_2)\vec{e}_2 + \ldots + (x_n' - x_n)\vec{e}_n = \vec{0}. \tag{49}$$

Але оскільки вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно незалежні, то рівність (49) можлива лише, коли

$$x_1' - x_1 = 0, \quad x_2' - x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n' - x_n = 0,$$

тобто, коли

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad \ldots, \quad x_n' = x_n.$$

Теорему доведено.

Лінійний простір L називається n-вимірним, якщо в ньому існує n лінійно незалежних елементів, а будь-яка система, що складається з $n+1$ елементів, лінійно залежна. При цьому число n називається розмірністю простору L. Розмірність простору позначають символом $\dim L$. Наприклад, множина рядків $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, у якій введено операцію додавання елементів (рядків):

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \dots,\ x_n+y_n)$$

та операцію множення елемента на число α:

$$\alpha\vec{x}=(\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \dots,\ \alpha_n x_n)$$

є n-вимірним лінійним простором. До того ж за базис тут можна взяти елементи:

$$\vec{e}_1=(1,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0),$$
$$\vec{e}_2=(0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{e}_n=(0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1).$$

Перетворення координат вектора при заміні базису

Нехай

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \dots,\ \vec{e}_n; \tag{50}$$

$$\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \dots,\ \vec{e}\,'_n - \tag{51}$$

два довільно вибраних базиси n-вимірного лінійного простору L. Кожний вектор базису (51), як і будь-який вектор простору L, однозначно лінійно виражається через вектори базису (50). Нехай

$$\begin{aligned} \vec{e}\,'_1&=a_{11}\vec{e}_1+a_{12}\vec{e}_2+\dots+a_{1n}\vec{e}_n,\\ \vec{e}\,'_2&=a_{21}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\dots+a_{2n}\vec{e}_n,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \vec{e}\,'_n&=a_{n1}\vec{e}_1+a_{n2}\vec{e}_2+\dots+a_{nn}\vec{e}_n. \end{aligned} \tag{52}$$

У такому разі кажуть, що перехід від базису (50) до базису (51) задається матрицею

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тобто матрицею системи (52).

Записавши систему (52) у вигляді матричного рівняння і розв"язавши його відносно матриці

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix},$$

легко встановлюємо, що обернений перехід, тобто перехід від базису (51) до базису (52), задається матрицею A^{-1}, оберненою до матриці A. Нехай

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нехай, далі, $\vec{x}$ - довільний елемент лінійного простору L, який у базисі (50) має координати $x_1, x_2, \dots, x_n$, а в базисі (51) - $x_1', x_2', \dots, x_n'$. Тобто виконуються рівності:

$$\vec{x} = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' + \dots + x_n'\vec{e}_n' = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n. \qquad (53)$$

Підставляючи в (53) замість $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ їхні значення з розкладів за базисом (51), дістанемо

$$\vec{x} = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' + \dots + x_n'\vec{e}_n' =$$

$$= x_1(b_{11}\vec{e}_1' + b_{12}\vec{e}_2' + \dots + b_{1n}\vec{e}_n') +$$

$$+ x_2(b_{21}\vec{e}_1' + b_{22}\vec{e}_2' + \dots + b_{2n}\vec{e}_n') +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ x_n(b_{n1}\vec{e}_1' + b_{n2}\vec{e}_2' + \dots + b_{nn}\vec{e}_n').$$

Звідси, прирівнявши множники при $\vec{e}_i'$ ($i = 1, 2, \dots, n$), матимемо систему

$$\begin{cases} x_1' = b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + \dots + b_{n1}x_n \\ x_2' = b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{n2}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = b_{1n}x_n + b_{2n}x_2 + \dots + b_{nn}x_n \end{cases}$$

або матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

де $B = (A^{-1})^T$.

Отже, якщо перехід від базису (50) до базису (51) здійснюється за допомогою невиродженої матриці A, то перехід від координат довільного елемента в базисі (50) до координат цього елемента в базисі (51) здійснюється за допомогою матриці $(A^{-1})^T$, транспонованої відносно матриці A^{-1}.

Приклад. Нехай L – множина векторів на площині з декартовим базисом $\vec{i}, \vec{j}$. Повернувши даний базис на кут φ, дістанемо новий базис $\vec{i}', \vec{j}'$. Знайти формули перетворення координат.

Виразимо $\vec{i}'$ та $\vec{j}'$ через вектори $\vec{i}$ і $\vec{j}$. Для цього знайдемо координати x, y вектора $\vec{i}'$. З рис. 49 бачимо, що $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$.

Отже,

$$\vec{i}' = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}.$$

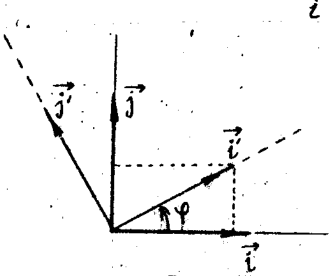

Рис. 49

Аналогічно

$$\vec{j}' = -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}.$$

Тому

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Таким чином, якщо деякий вектор $\vec{a}$ в базисі $\vec{i}, \vec{j}$ має координати a_1, a_2, а в базисі $\vec{i}', \vec{j}'$ – координати a_1', a_2', то

$$a_1' = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi;$$
$$a_2' = -a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi.$$

Запитання для самоконтролю

1. Дайте означення лінійного простору.

2. Що називається базисом лінійного простору?

3. Що називається розмірністю лінійного простору?

4. Нехай перехід від базису $\{\vec{e}_i\}$ лінійного простору L до базису $\{\vec{e}\,'_i\}$ цього простору здійснюється за допомогою невиродженої матриці A. Як здійснюється перехід від координат довільного елемента $\vec{a}\in L$ в базисі $\{\vec{e}_i\}$ до координат цього елемента в базисі $\{\vec{e}\,'_i\}$?

Вправи до § I.12

1. Довести, що множина ℓ_2, елементами якої є послідовності дійсних чисел

$$\vec{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

які задовольняють умову

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$$

з операціями

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)+(y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)=$$
$$=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n,\ldots),$$
$$\alpha\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n,\ldots),$$

є лінійним простором.

2. Довести, що множина L збіжних послідовностей

$$\vec{x}=(x_1, x_2, \ldots)$$

з покоординатними операціями додавання і множення на число також є лінійним простором.

3. Нехай перехід від декартового базису $\vec{i},\vec{j}$ на площині до базису $\vec{i}\,',\vec{j}\,'$ здійснюється поворотом площини на 45^0 навколо центра координат. Записати матрицю переходу від базису $\vec{i},\vec{j}$ до базису $\vec{i}\,',\vec{j}\,'$.

§ I.13. ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ

Поняття евклідового простору

Лінійний простір L називається евклідовим, якщо виконані такі дві умови:

1. Існує правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам $\vec{x}$ і $\vec{y}$ цього простору ставиться у відповідність дійсне число, яке називається скалярним добутком цих елементів і позначається символом $\vec{x}\cdot\vec{y}$ або $(\vec{x},\vec{y})$.

2. Вказане правило знаходження скалярного добутку підпорядковане таким аксіомам:

1^0) $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$ (переставна властивість);

2^0) $(\vec{x}_1+\vec{x}_2)\cdot\vec{y}=\vec{x}_1\cdot\vec{y}+\vec{x}_2\cdot\vec{y}$ (розподільна властивість);

3^0) $\lambda\vec{x}\cdot\vec{y}=\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y})$ для будь-якого дійсного числа λ;

4^0) $\vec{x}\cdot\vec{x}>0$, якщо $\vec{x}$ - ненульовий елемент; $\vec{x}\cdot\vec{x}=0$, якщо $\vec{x}$ - нульовий елемент.

Приклади конкретних евклідових просторів:

1. Лінійний простір звичайних тривимірних векторів із звичайним скалярним добутком векторів.

2. Множина неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій, де скалярний добуток двох функцій $x(t)$ і $y(t)$ введено у вигляді

$$\int_a^b x(t)y(t)dt.$$

(Справедливість аксіом 1-4 легко перевірити.) Як правило, цей простір позначають $C[a,b]$.

3. n-вимірний лінійний простір упорядкованих сукупностей

$$\vec{x}=(x_1;x_2;\ldots;x_n),\ \vec{y}=(y_1;y_2;\ldots;y_n),\ \vec{z}=(z_1;z_2;\ldots;z_n),\ldots$$

n дійсних чисел, якщо скалярний добуток будь-яких двох елементів $\vec{x}=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$, $\vec{y}=(y_1;y_2;\ldots;y_n)$ визначається рівністю

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.$$

Цей простір часто позначають символом E^n.

Норма. Ортогональність

Число $\|\vec{x}\|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$ називається нормою елемента $\vec{x}$ евклідового простору.

Норма має такі властивості:

1^0) $\|\vec{x}\|>0$, якщо $\vec{x}$ - ненульовий елемент;

2^0) $\|\vec{x}\|=0$, якщо $\vec{x}$ - нульовий елемент;

3^0) $\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{x}\|$ для будь-якого дійсного числа λ.

У звичайному тривимірному просторі E^3 норма вектора - це його довжина.

Елементи $\vec{x}$ і $\vec{y}$ евклідового простору називаються ортогональними, якщо $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$.

<u>Теорема Піфагора</u>. Якщо елементи $\vec{x}$ і $\vec{y}$ евклідового простору ортогональні, то

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2.$$

<u>Доведення</u>. Справді, спираючись на означення норми та властивості скалярного добутку, маємо

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{x}+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{y}\cdot\vec{y}=\|\vec{x}\|^2+0+\|\vec{y}\|^2.$$

<u>Нерівність Коші - Буняковського</u>

<u>Теорема</u>. Для будь-яких двох елементів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ довільного евклідового простору справджується нерівність

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2\le\|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2.$$

<u>Доведення</u>. Нехай λ - довільне дійсне число. Тоді на підставі властивості 4 скалярного добутку дістаємо

$$(\lambda\vec{x}-\vec{y})\cdot(\lambda\vec{x}-\vec{y})\ge 0.$$

Звідси

$$\lambda^2\|\vec{x}\|^2-2\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y})+\|\vec{y}\|^2\ge 0.$$

А це, як відомо, означає, що дискримінант квадратного тричлена відносно λ є не додатне число, тобто

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2-\|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2\le 0,$$

що й треба було довести.

<u>Нерівність трикутника (Мінковського)</u>

<u>Теорема</u>. Якщо $\vec{x}$ і $\vec{y}$ - довільні елементи евклідового простору, то

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|\le\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|.$$

<u>Доведення</u>. Нехай $\vec{x}$ і $\vec{y}$ - довільно вибрані вектори евклідового простору. Тоді

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|=\sqrt{(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})}=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{y}\cdot\vec{y}}.$$

Але оскільки, за нерівністю Коші - Буняковського, $(\vec{x}\cdot\vec{y})\le\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$, то

$$\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{y}\cdot\vec{y}}\le\sqrt{\|\vec{x}\|^2+2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|^2}=$$
$$=\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|.$$

Тому

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|\le\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|.$$

Теорему доведено.

Ортонормований базис скінченновимірного евклідового простору

Лінійні простори, що мають скінченну розмірність, називаються скінченновимірними.

Кажуть, що базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ n-вимірного евклідового простору є ортонормований, якщо елементи цього базису є попарно ортогональні, а норма кожного елемента базису дорівнює одиниці, тобто

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k=\begin{cases}1, & \text{якщо } i=k;\\ 0, & \text{якщо } i\ne k.\end{cases}$$

Можна показати, що в будь-якому n-вимірному евклідовому просторі існує ортонормований базис.

Теорема. Координати довільного елемента евклідового простору відносно ортонормованого базису дорівнюють скалярним добуткам цього елемента на відповідні базисні елементи.

Доведення. Справді, якщо деякий елемент $\vec{x}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ має координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тобто

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n,$$

то

$$\vec{x}\cdot\vec{e}_k=(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_k=$$
$$=x_1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_k)+x_2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_k)+\ldots+x_k(\vec{e}_k\cdot\vec{e}_k)+\ldots x_n(\vec{e}_n\cdot\vec{e}_k)=$$
$$=x_k\cdot 1,$$

що й треба було довести.

Рівняння гіперплощини та прямої в E^n

Нехай $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - деякий фіксований вектор евклідового простору E^n (див. с. 87-88). Множина всіх векторів $\vec{x}$ таких, що $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ називається гіперплощиною.

Нехай $\vec{s}$ і $\vec{x}_0$ - деякі фіксовані вектори простору E^n. Множина векторів $\vec{x}$ простору E^n таких, що $\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{s}\cdot t$, $-\infty<t<+\infty$, називається прямою в E^n.

Як бачимо, підхід до визначення понять гіперплощини та прямої в E^n такий самий, як і до визначення понять площини та прямої в E^3 (див. § I.7, I.8).

Запитання для самоконтролю

I. Що таке евклідів простір?

2. Доведіть, що в довільному евклідовому просторі справедливі теорема Піфагора, нерівність Коші - Буняковського, нерівність трикутника.

3. Який базис евклідового простору називається ортонормованим?

4. Доведіть, що координати довільного елемента евклідового простору відносно ортонормованого базису дорівнюють скалярним добуткам цього елемента на відповідні базисні елементи.

Вправи до § I.I3

I. Довести, що $C[a,b]$ є евклідовим простором (див. приклад 2).

2. Довести, що лінійний простір ℓ_2 (див. вправу I до § I.I2) із скалярним добутком

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

є евклідовим простором.

3. З'ясувати, чи утворює евклідів простір множина векторів площини $\vec{x}=(x_1, x_2)$, $\vec{y}=(y_1, y_2)$, ..., якщо скалярний добуток ввести у вигляді $\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_2+x_2y_1$.

I2*

§ 1.14. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Поняття лінійного оператора

Нехай V і W - деякі лінійні простори. Якщо кожному елементу $\vec{x}$ з простору V ставиться у відповідність елемент $\vec{y}$ з простору W, то кажуть, що задано оператор (відображення) A, що діє з V у W. При цьому використовується позначення $\vec{y} = A(\vec{x})$ або $\vec{y} = A\vec{x}$.

Оператор A, що діє з V у W, називається лінійним, якщо для будь-яких елементів $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ простору V і будь-якого числа λ виконуються співвідношення:

1) $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2$ (властивість адитивності);

2) $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}$ (властивість однорідності).

Якщо W - множина дійсних чисел, то лінійний оператор, що діє з V у W, називається лінійною формою, або функціоналом.

Якщо $V = W$, то лінійний оператор називається лінійним перетворенням простору V.

Операції над лінійними операторами

Нехай A і B - деякі лінійні оператори, що діють з V у W. Сумою цих операторів називається лінійний оператор $A+B$, що визначається рівністю

$$(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}.$$

Добутком лінійного оператора A на число λ називається лінійний оператор λA, що визначається рівністю

$$(\lambda A)\vec{x} = \lambda(A\vec{x}).$$

Назвемо нульовим лінійний оператор, що визначається рівністю

$$O\vec{x} = \vec{0},$$

(тут $\vec{x}$ - довільний елемент простору V).

Якщо символом A позначимо оператор, що визначається співвідношенням

$$-A\vec{x} = (-1)A\vec{x} \tag{53}$$

для будь-якого $\vec{x} \in V$, то $-A$ буде лінійним оператором і, очевидно, справджуватиметься співвідношення: $A + (-A) = O$, тобто оператор $-A$ є протилежним для оператора A. Отже, співвідношенням (53) визначається протилежний лінійний оператор.

Лінійне перетворення $\mathcal{E}$ простору V, що визначається рівністю

$$\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x},$$

де $\vec{x}$ - довільний елемент простору V, називається одиничним (тотожним) оператором простору V.

Нехай лінійні оператори A і B діють з V у V. Добутком цих операторів називається лінійний оператор AB, що визначається рівністю

$$(AB)\vec{x} = A(B\vec{x}).$$

Лінійні перетворення простору V мають такі властивості:

1) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$;
2) $(A+B)C = AC + BC$;
3) $A(B+C) = AB + AC$;
4) $(AB)C = A(BC)$.

Спираючись на властивість 4, можна визначити добуток довільного числа лінійних перетворень. Зокрема, k-й степінь лінійного перетворення A визначається за формулою

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{-співмножників}}$$

У такому разі зрозуміло, що

$$A^{k+m} = A^k A^m.$$

Ядро, образ, ранг лінійного перетворення

Розглянемо лінійні перетворення простору V, тобто лінійні оператори, що діють з V у V.

Лінійний оператор B простору V називається оберненим до оператора A, якщо

$$AB = BA = \mathcal{E},$$

де $\mathcal{E}$ - одиничний оператор. Оператор, обернений до оператора A, позначають символом A^{-1}.

Ядром лінійного оператора A називається множина всіх тих елементів $\vec{x}$ простору V, для яких $A\vec{x} = \vec{0}$. Ядро позначають символом $\ker A$.

Можна довести, що рівність
$$\ker A = \vec{0}$$
є необхідною й достатньою умовою для того, щоб існував оператор A^{-1}, обернений до оператора A.

Образом лінійного оператора A називається множина (позначається $im\,A$) всіх елементів $\vec{y}$ простору V, які можна подати у вигляді:
$$\vec{y} = A\vec{x}, \quad \vec{x} \in V.$$

Якщо розмірність $\dim V$ простору V дорівнює n, то можна переконатися у справедливості такої рівності:
$$\dim(im\,\mathcal{A}) + \dim(\ker\mathcal{A}) = n.$$

Рангом лінійного оператора A (позначається $rang\,A$) називається розмірність його образу, тобто
$$rang\,\mathcal{A} = \dim(im\,\mathcal{A}).$$

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай V - простір звичайних тривимірних векторів (вважаємо, що початок кожного вектора збігається з початком системи координат, оскільки розглядаємо вільні вектори), а ℓ - деяка пряма, що проходить через початок координат. Нехай A - оператор проектування векторів простору на пряму ℓ. Зрозуміло, що оператор A лінійний. Ядром цього оператора є множина всіх векторів, перпендикулярних до прямої ℓ, тому $\dim(\ker A) = 2$.

Образом оператора A є множина всіх векторів, колінеарних прямій ℓ, отже, $\dim(im\,A) = 1$.

Таким чином, ранг оператора A дорівнює 1.

Приклад 2. Нехай V - множина всіх векторів площини, A - поворот вектора площини на кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ядро оператора A складається лише з нульового вектора, а його образ збігається з V. Отже,
$$\dim(\ker\mathcal{A}) = 0, \quad \dim(im\,\mathcal{A}) = 2, \quad rang\,\mathcal{A} = 2,$$
тому для A існує обернений оператор (поворот на кут $-\frac{\pi}{4}$).

Приклад 3. Нехай V - множина всіх многочленів степеня $\leq n$. Через $\mathcal{D}$ позначимо оператор диференціювання.

Ядром оператора $\mathcal{D}$ є множина многочленів нульового степеня, тобто множина R усіх дійсних чисел, тому $\dim(\ker\mathcal{D}) = \dim R = 1$. Образом оператора $\mathcal{D}$ є множина всіх многочленів степеня $n-1$. Оскільки базис цього простору

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$$

складається з $n+1$ елементів, то

$$\dim V = n+1,\quad \dim(\operatorname{im}\mathcal{D}) = n,\quad \operatorname{rang}\mathcal{D} = n.$$

<u>Приклад 4</u>. Нехай $V = E^3$, а λ - число. Оператор A визначимо за допомогою рівності

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x},\quad \vec{x}\in V,$$

(оператор A - гомотетія). Тут

$$\ker\mathcal{A} = \vec{0},\quad \operatorname{im}\mathcal{A} = E^3,\quad \operatorname{rang}\mathcal{A} = 3.$$

<u>Матриці лінійних операторів у вибраному базисі лінійного простору</u>

Зафіксуємо в лінійному просторі V деякий базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Нехай $\vec{x}$ - довільний елемент простору V і

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k -$$

розклад $\vec{x}$ за вибраним базисом.

Нехай A - лінійний оператор, що діє з V у W. Зафіксуємо в просторі W базис $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_m$. Взявши $A\vec{e}_k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\vec{p}_j$, дістанемо

$$\mathcal{A}\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\vec{p}_j = \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\Big)\vec{p}_j .$$

Таким чином, якщо $\vec{y} = A\vec{x}$ і елемент $\vec{y}$ у базисі $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_m$ має координати $y_1, y_2, \ldots, y_m$, то

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k,\quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

або детальніше

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n . \end{cases} \tag{54}$$

Матричний запис системи (54) має вигляд $\vec{y} = A\vec{x}$, де

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається матрицею лінійного оператора A у вибраному базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Слід зазначити, що k-й стовпець (k = I, 2, ..., n) матриці A складається з координат вектора $A\vec{e}_k$, тому для знаходження матриці оператора A досить знайти образи базисних векторів простору V.

Приклад I. Матриця одиничного оператора $\mathcal{E}$, що діє в E^n в E^n, має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

тобто є одиничною матрицею.

Приклад 2. Нехай V - множина векторів площини, а $\vec{i}, \vec{j}$ - вектори декартового базису цієї площини. Якщо A - оператор проектування на вісь Ox, то

$$A\vec{i} = \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{j} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тому матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

визначає оператор проектування в базисі $\vec{i}, \vec{j}$.

Приклад 3. Нехай $V = E^2$, A - поворот на кут φ, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Тоді (рис. 50)

$$\mathcal{A}\vec{i} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}\vec{j} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix},$$

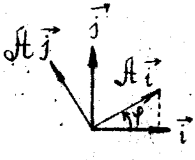

Рис. 50

тому матриця

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

визначає оператор повороту на кут φ в просторі E^2 (див. § I.13, приклад 8).

Приклад 4. Нехай $V=E^2$, $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$. Тоді

$$\mathcal{A}\vec{i}=\lambda\vec{i}=\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix},\quad \mathcal{A}\vec{j}=\lambda\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Матриця A є матрицею гомотетії з коефіцієнтом λ.

Приклад 5. Нехай $V=E^2$, A – симетричне відображення відносно осі Ox. Зрозуміло, що

$$A\vec{i}=\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ A\vec{j}=-\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}-$$

матриця симетричного відображення (що є лінійним оператором) відносно осі Ox у просторі E^2.

Приклад 6. Нехай V_n – множина многочленів степеня $\leq n$, $A=\mathcal{D}$ – оператор диференціювання. У цьому просторі базис складається з многочленів $1;\ x;\ x^2;\ \dots;\ x^n$.

Кожний елемент (многочлен) $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ цього простору будемо зображати у вигляді

$$\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A1=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ Ax=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ Ax^2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix};\dots;\ Ax^n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\n\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix} -$$

матриця оператора диференціювання, що діє з V_n в V_{n-1}.

Як бачимо, кожному оператору у наведених прикладах відповідає певна матриця. Виявляється, що справедливе й таке загальне твердження:

Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ - базис лінійного простору V, $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_m$ - базис лінійного простору W і $A=(a_{ij})$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$ - матриця розмірності $m \times n$. Тоді існує єдиний лінійний оператор $\mathcal{A}$, матрицею якого в заданих базисах є матриця A, причому

$$rang\, \mathcal{A} = rang\, A.$$

Зв"язок між матрицями лінійного перетворення в різних базисах

Нехай V - лінійний простір, $\mathcal{A}$ - лінійне перетворення цього простору. Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ і $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ - деякі два базиси простору V. Матрицю переходу від базису $\{\vec{e}_k\}$ до базису $\{\vec{e}\,'_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) позначимо через P.

<u>Теорема</u>. Якщо оператор $\mathcal{A}$ в базисі $\{\vec{e}_k\}$ задається матрицею A, а в базисі $\{\vec{e}\,'_k\}$ він задається матрицею A', то

$$A' = PAP^{-1}. \tag{55}$$

<u>Доведення</u>. Візьмемо довільний елемент $\vec{x}$ простору і нехай відносно базису $\{\vec{e}_k\}$ він має координати

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X,$$

а відносно базису $\{\vec{e}'_k\}$ –

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = X'.$$

Позначимо елемент $A\vec{x}$ через $\vec{y}$, тобто $A\vec{x} = \vec{y}$. Нехай $y_1, y_2, \ldots, \ldots, y_n$ – координати елемента $\vec{y}$ у базисі $\{\vec{e}_k\}$, а $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ – координати елемента $\vec{y}$ у базисі $\{\vec{e}'_k\}$.

Тоді відповідно до § 1.12 (див. с. 84 – 87) маємо рівності:

$$X' = PX, \quad Y' = PY, \tag{56}$$

де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Але оскільки за умовою теореми

$$Y = AX, \tag{57}$$

а

$$Y' = A'X', \tag{58}$$

то, підставляючи в (58) замість X' і Y' їхні значення з (56), дістаємо

$$PY = A'PX.$$

Звідси, з урахуванням (57), маємо $PAX = A'PX$ або

$$PA = A'P. \tag{59}$$

Помноживши обидві частини рівності (59) на P^{-1} справа, дістанемо (55). Теорему доведено.

Характеристичне рівняння лінійного оператора

Нехай A - квадратна матриця оператора A в деякому базисі, а E - одинична матриця такого самого порядку, що й матриця A. Тоді, якщо

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix},$$

де λ - деяке невідоме.

Матриця $A-\lambda E$ називається характеристичною матрицею матриці A. Визначник $|A-\lambda E|$ матриці $A-\lambda E$ є многочленом n-го степеня від λ і називається характеристичним многочленом оператора A. З попередньої теореми (с.98) випливає, що цей многочлен не залежить від вибору базису, в якому задається оператор, а визначається самим цим оператором A.

Рівняння

$$det(A-\lambda E)=0$$

називається характеристичним рівнянням оператора A, а корені цього рівняння - характеристичними коренями оператора A.

Весь набір характеристичних коренів оператора A (кожний корінь береться з тією кратністю, яку він має в характеристичному рівнянні) називається спектром лінійного оператора.

Власні вектори й власні значення лінійного оператора

Нехай оператор A діє з лінійного простору V у V, тобто є лінійним перетворенням простору V.

Число λ називається власним значенням оператора A, якщо існує ненульовий вектор $\vec{x}$ такий, що

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}. \tag{60}$$

Вектор $\vec{x}$, що задовольняє умову (60), називається власним вектором оператора A.

Якщо вектор $\vec{x}$ – власний, то й вектор $\alpha\vec{x}$ також власний з тим самим власним значенням.

Якщо, наприклад, $A = \mathcal{E}$ – одиничний оператор, то будь-який елемент простору є власний з власним значенням, що дорівнює I.

У разі, коли оператор A – гомотетія площини з коефіцієнтом подібності k, то будь-який вектор площини є власний з власним значенням, що дорівнює k.

Якщо A – поворот векторів площини на кут $\frac{\pi}{4}$, то оператор A не має власних векторів.

Виберемо в просторі V деякий базис. Нехай матриця оператора A в цьому базисі має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} -$$

власний вектор оператора A, а це означає, що

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 . \end{cases} \tag{61}$$

Оскільки система (6I) однорідна, то вона має нетривіальні розв"язки лише за умови, що визначник матриці цієї системи дорівнює нулеві, тобто

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (62)$$

Рівняння (62) є характеристичне рівняння оператора A.

Таким чином, для знаходження власних векторів оператора A слід розв"язати спочатку рівняння (62), а потім систему (6I).

Приклад. Знайти власні вектори і власні значення оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Розв"язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник цього рівняння і спрощуючи його, дістанемо

$$(1-\lambda)^2(1+\lambda) = 0.$$

Отже, власні значення оператора $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Знайдемо власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda = 1$. Для цього розв"яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0. \end{cases} \iff x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Звідси $x_1 = 2x_2 - x_3$, тому будь-який вектор виду

$$\begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

де x_2 і x_3 - довільні числа, є власним вектором з власним значенням $\lambda = 1$. Наприклад, вектори

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

і будь-яка лінійна комбінація цих векторів

$$C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

є власними векторами, що відповідають власному значенню $\lambda = 1$.

Знайдемо власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda = -1$. Для цього розв"яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0; \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0; \\ 12x_1 - 24x_2 + 14x_3 = 0. \end{cases} \qquad (68)$$

Оскільки ранг матриці системи (68) дорівнює 2, то (68) рівносильна такій системі:

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = -3x_3; \\ 5x_1 - 9x_2 = -5x_3 \end{cases},$$

звідки, взявши $x_3 = 1$ і користуючись формулами Крамера, знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 5 & -9 \end{vmatrix} = -6; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -5; \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{5}{6}.$$

Отже, вектор

$$C \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix},$$

де C - довільне число, є власним вектором оператора з власним значенням $\lambda = -1$.

Зрозуміло, що власні значення оператора збігаються з характеристичними коренями оператора.

Може статися так, що власні вектори лінійного оператора A, що діє з V у V, утворюють базис простору V. Тоді, виявляється, матриця оператора A має діагональний вигляд відносно цього базису. Це доводить така теорема.

Теорема. Для того щоб матриця A лінійного оператора A n-вимірного лінійного простору V в даному базисі $\{\vec{e}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ була діагональною, необхідно й достатньо, щоб базисні вектори $\vec{e}_k$ були власними векторами цього оператора.

Доведення. Якщо базисні вектори $\vec{e}_k$ є власними векторами оператора A, то

$$\mathcal{A}\vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{64}$$

або

$$\mathcal{A}\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \ \mathcal{A}\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \ \ldots; \ \mathcal{A}\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тоді, відповідно до с. 95 - 98, матриця оператора A матиме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Навпаки, нехай матриця лінійного оператора A має вигляд (65). Тоді, знову ж таки відповідно до с. 95 - 98, справджуватимуться співвідношення (64), а це означає, що базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ є власними векторами оператора A. Теорему доведено.

Можна показати, що, коли власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ оператора A n-вимірного лінійного простору різні, то власні вектори, які відповідають цим значенням, утворюють лінійно незалежну систему. Тому у разі, коли оператор A має n різних характеристичних коренів, матриця оператора A в деякому базисі є діагональною.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається лінійним оператором?
2. Що називається лінійним функціоналом, лінійним перетворенням?
3. Дайте означення суми лінійних операторів та добутку лінійного оператора на число.

4. Який лінійний оператор називається нульовим, протилежним, тотожним?

5. Які властивості має лінійне перетворення простору? Що таке ядро, образ, ранг лінійного перетворення?

6. Яка матриця називається матрицею лінійного оператора?

7. Як пов"язані між собою матриці лінійного оператора в різних базисах?

8. Яке рівняння називається характеристичним рівнянням лінійного оператора?

9. Що таке власні вектори і власні значення лінійного оператора?

10. Який зв"язок між власними значеннями лінійного оператора та його спектром?

11. Доведіть рівносильність таких тверджень:

а) матриця лінійного оператора A є діагональною в даному базисі $\{\vec{e}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

б) базисні вектори $\vec{e}_k$ є власними векторами оператора A.

Вправи до § 1.14

1. Нехай $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ - довільний вектор тривимірного векторного простору. З"ясувати, чи буде оператор A лінійним, якщо:

а) $A\vec{x} = (x_3, x_2, x_3)$;

б) $A\vec{x} = (x_2, x_1 - 4, x_3)$.

2. Знайти матрицю оператора A, якщо A - ортогональне проектування тривимірного векторного простору E^3 на вісь Oy.

3. Лінійне перетворення A двовимірного векторного простору E^2 задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 25 \\ 144 & 60 \end{pmatrix}.$$

Знайти ядро лінійного перетворення.

4. Лінійне перетворення A двовимірного векторного простору переводить вектор $\vec{a}_1 = (1, -1)^T$ в вектор $\vec{b}_1 = (2, 0)^T$; вектор $\vec{a}_2 = (-1, 2)^T$ - в вектор $\vec{b}_2 = (-3, 1)$. Знайти матрицю цього перетворення в звичайному декартовому базисі.

5. Знайти власні значення і власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Знайти матрицю лінійного перетворення, яке переводить вектор $(x_1;\ x_2;\ x_3)$ в вектор $(x_1'';\ x_2'';\ x_3'')$, якщо

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_2' = 6x_1 + 7x_2 + x_3 \\ x_3' = 9x_1 + x_2 + 8x_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = -x_1' + 3x_2' - 2x_3' \\ x_2'' = -4x_1' + x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = 3x_1' - 4x_2' + 5x_3'. \end{cases}$$

§ 1.15. ПОНЯТТЯ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ТА ЗВЕДЕННЯ ЇЇ ДО ГОЛОВНИХ ОСЕЙ

Означення квадратичної форми

Квадратичною формою від двох змінних x_1 і x_2 називається вираз

$$\Phi(x_1, x_2) = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2,$$

квадратичною формою від трьох змінних x_1, x_2 і x_3 називається вираз

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + A_1x_1x_2 + A_2x_1x_3 + A_3x_2x_3$$

і т.д.

Ми розглядатимемо лише квадратичні форми від двох змінних.

Нехай дано квадратичну форму

$$\Phi(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2. \tag{66}$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \tag{67}$$

називається матрицею квадратичної форми.

За допомогою матриці A квадратичну форму (66) можна записати так:

$$\Phi(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що матриця квадратичної форми є симетричною матрицею.

На матрицю A будемо дивитись як на матрицю деякого лінійного оператора A, що діє з евклідового простору E^2 в E^2. (Відповідно до § 1.14 (с. 95 – 98) такий оператор існує, причому єдиний.)

Теорема. Якщо лінійний оператор A простору E^2 задається симетричною матрицею (67), то його власні значення є дійсними числами, а власні вектори, що відповідають різним власним значенням, взаємно ортогональні.

Доведення. Розв"язуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0,$$

знаходимо

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - (ac-b^2)} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Отже, λ_1 і λ_2 - дійсні числа.

Нехай $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (це буде тоді, коли $b \neq 0$, $a \neq c$). Знайдемо власні вектори, що відповідають значенням λ_1 і λ_2. Координати цих векторів є розв"язками системи рівнянь:

$$\begin{cases} (a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0 \\ bx_1 + (c-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

при відповідних значеннях λ.

Якщо $\lambda = \lambda_1$, то

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\dfrac{(a-\lambda_1)x_1}{b} \end{pmatrix},$$

де x_1 - довільне.

Якщо $\lambda = \lambda_2$, то

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} x_1' \\ -\dfrac{(a-\lambda_2)x_1'}{b} \end{pmatrix},$$

де x_1' - довільне.

Знайдемо скалярний добуток власних векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$:

$$\vec{m}\cdot\vec{n} = x_1 x_1' \left(1 + \frac{(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)}{b^2}\right) =$$

$$= x_1 x_1' \left(1 + \frac{\lambda_1\lambda_2 - a(\lambda_1+\lambda_2) + a^2}{b^2}\right).$$

Але $\lambda_1\lambda_2 = ac - b^2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$, тому

$$\vec{m}\cdot\vec{n} = x_1 x_1' (1-1) = 0,$$

звідки й випливає ортогональність векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$. Теорему доведено.

Зведення квадратичної форми до головних осей

Вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$, отримані в попередньому пункті, можна пронормувати і взяти за базисні. У цьому новому базисі вектор (x_1, x_2) простору E^2 буде мати, взагалі кажучи, інші координати, які позначимо x_1', x_2'. Згідно з теоремою § 1.14 (с. 100), матриця квадратичної форми

$$\Phi(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \tag{68}$$

в новому базисі матиме діагональний вигляд

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Інакше кажучи, квадратична форма (68) у новому базисі перетвориться в такий вираз:

$$\Phi_1(x_1', x_2') = (x_1', x_2')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2. \tag{69}$$

Перехід від заданої квадратичної форми виду (68) до квадратичної форми виду (69) називається зведенням квадратичної форми до головних осей $\vec{m}$ і $\vec{n}$ (зведенням квадратичної форми до канонічного виду).

Приклад. Квадратичну форму

$$\Phi(x, y) = x^2 - 8xy + 7y^2$$

звести до головних осей.

Розв"язання. Матриця цієї квадратичної форми має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв"язуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0,$$

знаходимо $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$.

Отже,

$$\Phi_1(x', y') = 9(x')^2 - (y')^2.$$

Знайдемо ортонормований базис нової системи координат, тобто – орти головних осей.

Якщо в системі

$$\begin{cases} (1-\lambda)x - 4y = 0; \\ -4x + (7-\lambda)y = 0 \end{cases} \tag{70}$$

взяти $\lambda = 9$, то знайдемо власний вектор

$$\begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix},$$

який після нормування матиме вигляд

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Якщо в (70) взяти $\lambda = 1$, то знайдемо власний вектор

$$\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix},$$

який після нормування матиме вигляд

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Відповідно до § 1.12, матриця переходу від декартового базису $\vec{i}, \vec{j}$, у якому задано квадратичну форму $\Phi(x,y)$, до базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ буде такою:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Застосування квадратичних форм при дослідженні рівнянь другого порядку

Будь-яке рівняння другого порядку з двома змінними може бути записане у вигляді:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{71}$$

Для з"ясування питання, яку криву визначає рівняння (7I) та для її побудови достатньо дослідити квадратичну форму

$$ax^2+2bxy+cy^2. \qquad (72)$$

Якщо власні вектори матриці квадратичної форми (72) взяти за базисні, то відносно цього базису рівняння кривої другого порядку спроститься й набуде вигляду:

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3 x'+\lambda_4 y'+\lambda_5=0. \qquad (73)$$

У разі, якщо $\lambda_1\lambda_2>0$, маємо справу з кривою еліптичного типу. Якщо $\lambda_1\lambda_2<0$, то крива гіперболічного типу. Якщо $\lambda_1\lambda_2=0$, то дана крива є крива параболічного типу.

Цілком зрозуміло, що для переходу від рівняння (7I) до рівняння (73) необхідно знати матрицю переходу від початкового базису до нового.

<u>Приклад</u>. З"ясувати, яку лінію виражає рівняння

$$x^2-8xy+7y^2=9$$

і побудувати її.

<u>Розв"язання</u>. Використовуючи приклад з попереднього пункту, бачимо, що відносно базису

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

це рівняння матиме вигляд

$$9(x')^2-(y')^2=9$$

або

$$(x')^2-\frac{(y')^2}{9}=1.$$

Останнє рівняння є рівнянням гіперболи, для якої півосі $a=1$, $b=3$ (рис. 5I).

<u>Зауваження</u>. Нехай відносно декартового базису $\{\vec{i},\vec{j}\}$ простору E^2 деяка крива другого порядку задається рівнянням (7I).

Тоді, якщо відносно іншого базису $\{\vec{i}',\vec{j}'\}$ ця крива задається рівнянням

$$a'x^2+c'y^2+d'x+e'y+f'=0$$

(відсутній добуток xy), то перехід від базису $\{\vec{i},\vec{j}\}$ до базису $\{\vec{i'},\vec{j'}\}$ є поворот відносно початку координат на певний кут φ.

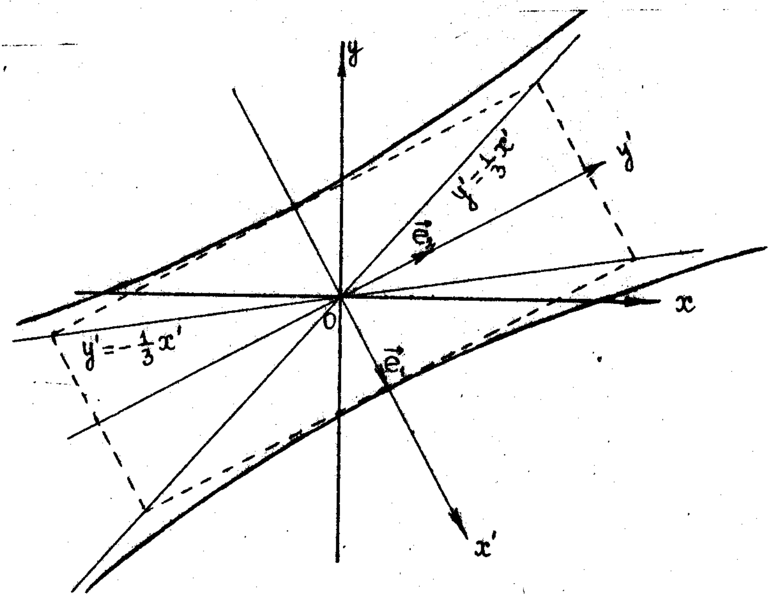

Рис. 51

Якщо відносно нового базису $\{\vec{i'},\vec{j'}\}$ крива (71) задається рівнянням

$$a''x^2+2b''xy+c''y^2+f''=0$$

(відсутні перші степені змінних x і y), то перехід від базису $\{\vec{i},\vec{j}\}$ до базису $\{\vec{i'},\vec{j'}\}$ здійснюється за допомогою деякого паралельного перенесення простору E^2.

<u>Запитання для самоконтролю</u>

1. Що називається квадратичною формою?
2. Яка матриця називається матрицею квадратичної форми?

3. Доведіть теорему про те, що для лінійного оператора з E^2 із симетричною матрицею власні значення є дійсними числами, а власні вектори, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.

4. Що значить звести квадратичну форму до головних осей?

5. Як використовується поняття квадратичної форми при вивченні рівнянь другого порядку?

Вправи до § I.I5

З'ясувати тип кривих другого порядку та звести їх до головних осей:

1. $3x^2+2y^2-6x-12y+15=0$.
2. $x^2-2y^2+4y-4=0$.
3. $3x^2-6x+3y^2-12y+15=0$.
4. $x^2-2y^2+4y-2=0$.
5. $4x-3y^2+12y-12=0$.

Розділ 2
ЕЛЕМЕНТИ ПРОГРАМУВАННЯ МОВОЮ ПАСКАЛЬ

Мова Паскаль з'явилась в 1970 р. завдяки зусиллям директора Інституту інформатики Швейцарської вищої політехнічної школи, автора багатьох праць в області програмування Н.Вірта. За основу мови Паскаль було взято мову АЛГОЛ-60, звідки запозичено структуру та форму виразів. Реалізація мови Паскаль виявилася надійною і водночас ефективною на існуючих обчислювальних машинах, у тому числі й на персональних комп'ютерах, котрі все більше й більше заповнюють комп'ютерний вакуум.

Мета цієї частини книги - дати скорочений варіант мови Паскаль. Будь-яка програма, що написана з використанням цього варіанту, буде вірною й для іншої версії, що використовується в обчислювальній практиці. Засвоєння скороченого варіанту мови Паскаль може стати надійною базою для глибшого вивчення цієї мови, а також інших поширених мов програмування. Для подальшого вивчення рекомендуємо книги [I-6].

§ 2.1. ПРИКЛАД НАЙПРОСТІШОЇ ПРОГРАМИ

Нехай потрібно додати два вектори $\vec{a}_1 = (x_1; y_1)$ і $\vec{a}_2 = (x_2; y_2)$ і результати обчислень надрукувати. Програма для розв"язування цієї задачі має такий вигляд:

<u>Приклад 1.</u>

```
PROGRAM SUMA;
VAR
  X1,Y1,X2,Y2:REAL;
BEGIN
  X1:=1.2;Y1:=2.3;X2:=-0.5;Y2:=0.1;
  WRITELN(X1+X2,Y1+Y2)
END.
```

Цей приклад показує, що програма складається з трьох частин. Перша частина, яка називається заголовком, - перший рядок програми. Програма названа *SUMA*, проте її можна було б назвати й по-іншому, наприклад, *VCTRS*. Доцільно вибирати ім"я програми так, щоб воно несло деяку інформацію про зміст програми, хоч це й не обов"язково. Перед словом *SUMA* стоїть слово *PROGRAM* - це одне з кількох так званих зарезервованих слів, яке говорить машині про те, що читається заголовок програми. З іншою метою слово *PROGRAM* використовувати забороняється.

Далі йде частина програми, де описуються змінні. Вона розпочинається з іншого зарезервованого слова, а саме, зі слова *VAR*. Після цього слова вказуються імена змінних, які використовуються при розв"язуванні задачі, і їх тип. У прикладі 1 використовуються чотири змінні. Усі вони мають тип *REAL*, а це означає, що вони можуть бути довільними дійсними числами.

Ім"я змінної завжди починається з літери і може мати довільну довжину, але в цілому ряді версій мови Паскаль значущими є лише перші 8 символів. Наприклад, змінну *Y1* можна було б назвати *ORDINATA*. Зарезервовані слова не можуть бути іменами змінних.

Нарешті, третя частина називається тілом програми. У цій частині вказуються дії, які потрібно виконувати при розв"язуванні задачі. Ці дії називаються операторами. Послідовність операторів розміщується між зарезервованими словами *BEGIN* і *END*. За своїм призначенням ці слова подібні до двох дужок, перша з яких - відкриваюча, а друга - закриваюча, тому називаються операторними дужками. Оператори відокремлюються один від одного таким символом, як крапка з комою. Цей символ має важливе значення в мові Паскаль і потрібно слідкувати за правильним його використанням.

Перший рядок тіла програми містить чотири оператори присвоєння. (:=) - символ оператора присвоєння (те, що написано в дужках). Призначення цього оператора - надавати конкретних значень змінним. У прикладі I такими змінними є *X1*, *Y1*, *X2*, *Y2*. Значеннями змінних можуть бути не тільки числа, а й вирази.

У другому рядку тіла програми використано оператор (точніше - процедуру) *WRITELN*, який призначений для виведення результатів. У наведеному прикладі за вказівкою *WRITELN* будуть надруковані числа 0.7 і 2.4.

Для того щоб знайти координати суми двох уже інших векторів, необхідно змінити програму, переписавши перший рядок тіла програми з іншими даними. Проте програма може бути складена так, що її можна використовувати багаторазово, не переписуючи рядки з операторами присвоєння. Для цього користуються операторами введення інформації з терміналу *READ* і *READLN*. Ці оператори вважатимемо еквівалентними, бо пояснення їх відмінностей потребує глибшого їх вивчення.

Отже, запишемо досконалішу програму.

Приклад 2.

```
PROGRAM SUMA2;
VAR
   X1,Y1,X2,Y2:REAL;
BEGIN
   WRITELN('ВВЕДІТЬ КООРДИНАТИ ВЕКТОРІВ');
   READ(X1,Y1,X2,Y2);WRITELN(X1+X2,Y1+Y2)
END.
```

Приступивши до виконання оператора *READ*, електронно-обчислювальна машина (ЕОМ) переходить у стан очікування введення даних. Після введення чотирьох чисел кожній із змінних *X1*, *X2*, *Y1*, *Y2* присвоюється відповідне значення. При введенні даних потрібно використовувати між числами "пропуски" ("інтервали"): ␣ - знак пропуску.

§ 2.2. СТАНДАРТНІ ФУНКЦІЇ, ВМОНТОВАНІ В МОВУ ПАСКАЛЬ

Наведемо список функцій, які є в усіх версіях мови. У першій колонці запишемо звичайне позначення функції, а в другій - її позначення мовою Паскаль:

$\|x\|$	ABS(X)
$arctg\,x$	ARCTAN(X)
e^x	EXP(X)
$\ln x$	LN(X)
$\lg x$	LOG(X)
$\sin x$	SIN(X)
$\cos x$	COS(X)
x^2	SQR(X)
$\sqrt{x}$	SQRT(X)
Додавання	+
Віднімання	-
Множення	*
Ділення	/
Цілочисельне ділення	DIV
Остача від ділення	MOD
Ціла частина числа x	TRUNC(X)
Значення числа x, заокруглене до найближчого цілого	ROUND(X)

§ 2.3. РОЗГАЛУЖЕННЯ ЗА ОДНІЄЮ УМОВОЮ

Для ознайомлення з новими операторами наведемо приклад програми для знаходження кута між векторами в просторі E^2 та проаналізуємо її.

Приклад 8.

```
PROGRAM KUT;
CONST
   PI=3.1415926;
VAR
   X1,Y1,X2,Y2,P,M1,M2,C:REAL;
BEGIN
   WRITELN('ВВЕДІТЬ КООРДИНАТИ ВЕКТОРІВ');READ(X1,Y1,X2,Y2);
   P:=X1*X2+Y1*Y2;M1:=SQRT(X1*X1+Y1*Y1);
   M2:=SQRT(X2*X2+Y2*Y2);C:=P/(M1*M2);
   IF C<>0 THEN FI:=ARCTAN(SQRT(1/SQR(C)-1)) ELSE FI:=PI/2;
   IF P<0 THEN FI:=-FI;WRITELN('FI=',FI)
END.
```

Програма KUT містить оператор $IF \dots THEN \dots ELSE$, який дає змогу використати результат істинності умовного висловлення (бульового виразу) для вибору способу виконання програми. Цей оператор називається умовним оператором розгалуження. Умовне висловлення $C <> 0$ означає висловлення $C \neq 0$. Якщо це висловлення істинне, то змінній $F1$ присвоюється значення $arctg\sqrt{\frac{1}{c^2} - 1}$. У противному разі, тобто, коли $C = 0$, то $F1 = \pi/2$.

У програмі KUT використовується ще один умовний оператор $IF \dots \dots THEN$. У такій послідовності оператор, що розміщений зразу після символу $THEN$, виконується лише тоді, коли умовне висловлення $P < 0$ виявляється істинним. Якщо ж це висловлення хибне, то виконується другий по порядку від символу $THEN$ оператор. У даному випадку буде виконуватись оператор $WRITELN$.

Програма прикладу 3 має одну особливість. А саме, у другому рядку з"явилося нове зарезервоване слово $CONST$. Такі рядки програма матиме тоді, коли одне й те саме числове значення з"являється кілька разів у різних місцях програми. Тоді такому числу зручно присвоїти ім"я - описати його як константу. У даному разі числу π присвоено ім"я PI. Розділ, у якому описуються константи, передує розділу, в якому описуються змінні, і цей розділ відзначається зарезервованим словом $CONST$. Мова Паскаль містить вмонтовану константу $MAXINT = 32767$ - найбільше за абсолютним значенням ціле число, яке можна подати типом $INTEGER$.

§ 2.4. ТИПИ ДАНИХ

У мові Паскаль є три вмонтованих типи даних. Крім того, передбачено можливість для програміста створювати свої типи даних.

Вмонтовані типи: $REAL$, $INTEGER$, $BOOLEAN$. Якщо в задачі використовуються довільні дійсні числа, то застосовують тип $REAL$, при обробці таких чисел враховуються перші шість значущих цифр. Записується число звичайним способом або з плаваючою крапкою (замість коми використовується крапка). Наприклад,

$$10.327 \quad \text{або} \quad 1.0327E+1;$$
$$0.003245 \quad \text{або} \quad 3.245E-3.$$

Для зображення цілих чисел застосовується тип $INTEGER$. В арифметиці цілих чисел використовуються ті самі операції, що й в арифметиці дійсних чисел, за винятком ділення. При цілочисельному діленні використовується зарезервоване слово DIV, наприклад, $1001\ DIV\ 143 = 7$.

Якщо при діленні чисел з"являється остача, то вона відкидається, наприклад, 10 *DIV* 3 = 3, але 10/3 = 3.33333.

Якщо змінній типу *REAL* присвоюється значення типу *INTEGER*, то ціле значення автоматично перетворюється в дійсне. Проте змінним типу *INTEGER* не можна присвоювати дійсних значень.

У мові Паскаль є функції перетворення типів: *TRUNC(X)*, *ROUND(X)*. Значенням функції *TRUNC(X)* є ціла частина числа *X*. Значенням функції *ROUND(X)* є заокруглене значення числа *X* до найближчого цілого. Наприклад, *TRUNC* (-3.14) = -3, *ROUND*(5.7) = 6, *ROUND*(1.5) = 2. Цілі і дійсні змінні не можна використовувати в одному арифметичному виразі.

При розв"язуванні різних задач змінними можуть бути не тільки числа, а й інші типи даних. Одним з таких типів є тип даних *BOOLEAN*, тобто булеві або логічні змінні. Вони можуть мати тільки два значення: *TRUE* (істинне) або *FALSE* (хибне).

Бульові змінні або, що те саме, умовні висловлення можуть набувати кількох різних форм, зокрема вони можуть бути просто сталими, наприклад, *ABC* := *TRUE*. Бульові вирази часто використовуються при перевірці різних відношень між змінними. Позначення деяких відношень:

= дорівнює,
< менше за,
<= менше за... або дорівнює,
> більше за,
>= більше за... або дорівнює,
<> не дорівнює.

Наприклад, якщо *CAB* і *BAC* - імена змінних і потрібно перевірити, чи рівні ці змінні, то записують висловлення: *CAB* = *BAC*. Якщо змінні рівні, то це висловлення набуде значення *TRUE*. Якщо вони не рівні, то - *FALSE*. Зазначимо, що знак = відрізняється від знака присвоєння :=.

Одні бульові вирази можна діставати з інших бульових виразів за допомогою трьох логічних операцій: *END*(і), *OR* (або) і *NOT* (не). Крім того, мова Паскаль має бульову функцію *ODD(X)* з цілочисельним аргументом. Якщо *X* - парне, то *ODD(X)*:= *TRUE*, якщо *X* - непарне, то *ODD(X)* := *FALSE*.

§ 2.5. МАСИВИ

Алгоритмічна мова Паскаль має типи даних, якими подаються цілі множини значень. У програмуванні n-вимірна множина елементів з однаковими властивостями називається масивом. Наприклад, у запису

VECTOR : ARRAY [1..3] OF REAL

масив VECTOR містить три значення типу REAL. Перша координата вектора описується у вигляді: VECTOR [1], друга - VECTOR [2], третя - VECTOR [3].

Масив VECTOR - найпростіший приклад одновимірного масиву. У мові Паскаль передбачено можливість використовувати дво-, три- і більше вимірні масиви. Матриці, наприклад, можна задавати, використовуючи двовимірні масиви. Так, масивом

MATPIX : ARRAY [1..3, 1..5] OF INTEGER

задається матриця розмірності 3x5 з цілими елементами. Число MATRIX [3, 5] - елемент цієї матриці, який міститься в третьому рядку і п"ятому стовпці.

Приклади програм з масивами будуть наведені далі.

§ 2.6. СКЛАДОВИЙ ОПЕРАТОР

Якщо за деякої умови потрібно виконати деяку послідовність операторів, то бажано було б усю послідовність взяти в уявні дужки. У мові Паскаль таку можливість передбачено. Для цього послідовність операторів, яка розглядається як єдиний оператор, необхідно розмістити між зарезервованими словами BEGIN і END. Після символу BEGIN ставиться пропуск, після END ставиться крапка з комою. Перед END також ставиться пропуск. Конструкція BEGIN...END називається складовим оператором. Складовий оператор часто використовується в умовних операторах.

Прикладом використання складового оператора може бути такий фрагмент деякої програми:

```
IF X1*X2+Y1*Y2=0 THEN
   BEGIN
      X1:=X1+1;Y1:=Y1+1
   END;
WRITELN(X1*X2+Y1*Y2);
```

§ 2.7. ЦИКЛІЧНІ ОПЕРАТОРИ

Цикл - це послідовність операторів, яка в програмі може виконуватися багаторазово. Мова Паскаль має три конструкції для організації циклу.

I. Оператор *WHILE*. При виконанні цього оператора деяка послідовність операторів буде повторюватись доти, поки булевий вираз, який у програмі записано зразу після символу *WHILE*, є істинним. Форма запису цього оператора така:

WHILE - булевий вираз - *DO* - наступний оператор.

Якщо булевий вираз виявиться хибним, коли оператор *WHILE* виконується вперше, то вказаний після символу *DO* оператор взагалі не буде виконуватись.

Складемо програму для розв"язування такої задачі. Нехай маємо числову послідовність, серед членів якої є нулі. Треба знайти кількість перших членів цієї послідовності, відмінних від нуля.

Приклад 4.

```
PROGRAM SQNC1;
VAR
  X:REAL;K:INTEGER;
BEGIN
  READ(X);K:=0;
  WHILE X<>0 DO
  BEGIN
   WRITE('ВВЕДІТЬ НАСТУПНИЙ ЧЛЕН ПОСЛІДОВНОСТІ');
   READ(X);K:=K+1
  END;
  WRITELN(K)
END.
```

Кожного разу, коли вводиться число, відмінне від нуля, змінна *K* збільшується на одиницю. Отже, цикл *WHILE* буде виконуватися стільки разів, скільки в заданій послідовності є перших членів, відмінних від нуля.

2. Оператор *REPEAT ... UNTIL*. Якщо в самого початку виконання оператора *WHILE*, висловлення, яке в програмі записане після символу *WHILE*, є хибним, то виконавча частина цього оператора взагалі не буде працювати. Для створення циклу, який виконуватиметься хоча б один раз, існує оператор *REPEAT ... UNTIL*. Цей оператор працює

подібно до оператора *WHILE*. Відмінність полягає в тому, що оператор *WHILE* перевіряє умову до виконання дій, а оператор *REPEAT* перевіряє умову після цього.

Якщо скористатися оператором *REPEAT*, то програма, наведена в попередньому параграфі, матиме такий вигляд:

Приклад 5.

```
PROGRAM SQNC;
VAR
 X:REAL;K:INTEGER;
BEGIN
   K:=-1;
   REPEAT
     READ(X);K:=K+1
   UNTIL X=0;
   WRITELN(K)
END.
```

Звернемо увагу на початкове значення змінної K. Воно дорівнює мінус одиниці, адже, якщо перший член послідовності дорівнює нулеві, то відповідь також є числом нуль.

Наведемо ще один приклад використання оператора *REPEAT*.

Нехай потрібно розв"язати кілька систем лінійних рівнянь другого порядку. Запишемо систему символічно:

$$\begin{cases} A1 \cdot X + B1 \cdot Y = C1; \\ A2 \cdot X + B2 \cdot Y = C2. \end{cases}$$

Програма для розв"язування однієї системи така.

Приклад 6.

```
PROGRAM LINS1;
VAR
  A1,B1,C1,A2,B2,C2,X,Y,DET:REAL;
BEGIN
  WRITE('ВВЕДІТЬ КОЕФІЦІЄНТИ СИСТЕМИ');
  READ(A1,B1,C1,A2,B2,C2);DET:=A1*B2-A2*B1;
  IF DET<>0 THEN
    BEGIN
      X:=(C1*B2-C2*B1)/DET;Y:=(A1*C2-A2*C1)/DET
    END
```

```
    ELSE WRITELN('СИСТЕМА НЕ МАЄ РОЗВ"ЯЗКУ АБО НЕОЗНАЧЕНА');
    WRITELN(X,Y)
END.
```

З допомогою цієї програми можна розв"язувати всі запропоновані системи лінійних рівнянь. Але при цьому виникає одна незручність: для розв"язування нової системи рівнянь треба запускати цю програму в ЕОМ заново. Це займає досить багато часу. Для того щоб уникнути цього і мати можливість користуватися складеною програмою багаторазово, наведену програму потрібно дещо змінити.

Приклад 7.

```
PROGRAM LINS2;
VAR
    A1,B1,C1,A2,B2,C2,X,Y,DET:REAL;
BEGIN
  REPEAT
     WRITE('ВВЕДІТЬ КОЕФІЦІЄНТИ СИСТЕМИ');
     READ(A1,B1,C1,A2,B2,C2);DET:=A1*B2-A2*B1;
     IF DET<>0 THEN
       BEGIN
        X:=(C1*B2-C2*B1)/DET;Y:=(A1*C2-A2*C1)/DET
       END
     ELSE WRITELN('СИСТЕМА НЕ МАЄ РОЗВ"ЯЗКУ АБО НЕОЗНАЧЕНА');
     WRITELN(X,Y)
  UNTIL (A1=0) AND (B1=0)
END.
```

(У прикладах 6 і 7 символом *DET* позначено визначник системи.)

Після того як системи рівнянь будуть розв"язані, для зупинки програми треба ще раз ввести коефіцієнти якої-небудь системи, аби лише $A1 = 0$ і $B1 = 0$. Ця остання система буде розв"язана і робота ЕОМ за програмою закінчиться. Остання система рівнянь може бути використана для контролю правильності обчислень.

8. Оператор організації циклу з лічильником. Такий оператор має вигляд: *FOR* ... *TO* ... *DO*. Він побудований так, що його виконавча частина спрацьовуватиме наперед вибране число раз. Такий оператор використовується досить часто. Наприклад, при введенні багатовимірних векторів, матриць тощо, як правило, використовується оператор *FOR*. Складемо програму для знаходження довжини N-вимірного вектора, де, наприклад, $N \leqslant 10$.

Приклад 8.

```
PROGRAM NORMA;
VAR
  V:ARRAY[1..10] OF REAL;S,DL:REAL;I,N:INTEGER;
BEGIN
 WRITE('ВВЕДІТЬ N ');READ(N);S:=0;
 WRITE('ВВЕДІТЬ КООРДИНАТИ ВЕКТОРА' );
 FOR I:=1 TO N DO
   BEGIN READ(V[I]);S:=S+SQR(V[I]) END;
 DL:=SQRT(S);WRITELN(DL)
END.
```

Наведемо ще один приклад використання оператора *FOR*. Складемо програму для знаходження сліду матриці порядку N ($N \leqslant 10$). (Слідом матриці називається сума її діагональних елементів).

Приклад 9.

```
PROGRAM TREC;
VAR
 A:ARRAY[1..10,1..10] OF REAL;I,J,K:INTEGER;TR:REAL;
BEGIN
  WRITE('ВВЕДІТЬ N'); READ(N); TR:=0;
  WRITE('ВВЕДІТЬ МАТРИЦЮ A' );
  FOR I:=1 TO N DO FOR J:=1 TO N DO READ(A[I,J]);
  FOR K:=1 TO N DO TR:=TR+A[K,K];WRITELN(TR)
END.
```

Зауваження. Для введення матриці в машину необхідно послідовно вводити її рядки.

Ще раз звернемо увагу на оператор введення матриці для її обробки:

```
FOR I:=1 TO N DO FOR J:=1 TO N DO READ(A[I,J]);
```

Змінна, яка в програмі стоїть після символу *FOR*, називається змінною циклу, або управляючою змінною. Значення, якого набуває ця змінна на початку циклу, називається початковим значенням змінної циклу. Число, що йде після *TO*, називається кінцевим значенням змінної циклу.

Цикл, організований за спадними значеннями змінної, має вигляд:

```
FOR K:=N1 DOWNTO N2 DO...;
```

Тут значення $N1$ кожного разу зменшується на одиницю, поки змінна циклу K не дорівнюватиме числу $N2$.

§ 2.8. БЕЗУМОВНІ ПЕРЕХОДИ

Іноді доводиться переходити від одного місця програми до іншого. Такий перехід називається безумовним. Він може бути здійснений за таких умов.

1. Оператор, до якого треба перейти, повинен мати мітку у вигляді цілого числа, яке належить відрізку [0; 9999]. Наприклад, оператор *END* з міткою 100 записується так: 100: *END*.

2. На початку програми цю мітку слід описати в розділі опису міток. Цей розділ розміщується між заголовком програми і розділом, у якому описуються константи. Для цього використовують зарезервоване слово *LABEL*, наприклад, *LABEL* 100;.

3. У тому місці програми, звідки виконується перехід, потрібно поставити оператор *GOTO* із заданою міткою, наприклад, *GOTO* 100;.

Взагалі кажучи, будь-яку програму з використанням *GOTO* можна змінити так, що в ній не використовуватиметься оператор безумовного переходу. Найчастіше цей оператор використовується в таких випадках:

1) при передчасному завершенні циклу;

2) при передчасному виході з програми.

Наведемо приклад програми для розв"язування системи лінійних рівнянь з двома змінними, в якій використовується оператор *GOTO*.

<u>Приклад 10</u>.

```
PROGRAM LINSS;
LABEL
  10;
VAR
  A1,B1,S1,A2,B2,S2,DET,X,Y:REAL;
BEGIN
  WRITE('ВВЕДІТЬ КОЕФІЦІЄНТИ СИСТЕМИ');
  READ(A1,B1,C1,A2,B2,C2);DET:-A1*B2-A2*B1;
  IF DET:=0 THEN GOTO 10 ELSE
  WRITELN((C1*B2-C2*B1)/DET,(A1*C2-A2*C1)/DET)
10:END.
```

16*

§ 2.9. ФУНКЦІЇ, ЯКІ ВИЗНАЧАЮТЬСЯ САМИМ ПРОГРАМІСТОМ

Мова Паскаль має стандартні функції, які подано в § 2.2. Але можна будувати й інші функції, які необхідно використати в програмі. Припустимо, що треба добути кубічний корінь з деякого числа. У Паскалі такої функції немає, але програміст може визначити її сам. Назвемо, наприклад, цю функцію іменем *SCRT*. Ця функція має один дійсний аргумент, її значення також є дійсним числом. Наприклад, *SCRT* (8.0) = 2.0; *SCRT*(0.001) = 0.1. Після того як така функція описана, її можна використовувати як стандартну.

У програмі опис функцій розміщують між описом змінних і тілом програми.

Приклад 11.

```
FUNCTION SCRT(X:REAL):REAL;
   VAR
     Z:REAL;
   BEGIN
     Z:=X;IF Z:=0 THEN SCRT:=0;IF Z>0 THEN SCRT:=EXP(LN(Z)/3);
     IF Z<0 THEN SCRT:=-EXP(LN(-Z)/3)
   END;
```

Першим рядком розділу програми, в якому описується функція, є заголовок функції. Заголовок визначає ім"я функції, число й тип аргументів, а також тип значень функції. Ім"я функції має починатися з літери, складається з літер і цифр і не повинно збігатися з зарезервованими словами.

Значення функції не може бути масивом.

Наступною після заголовка йде описова частина (внутрішній опис). Змінними, які вводяться в межах опису функції, не можна скористатися в основній програмі. Це тимчасові змінні, які використовуються тільки в межах самої функції (у розглядуваному вище прикладі такою змінною є змінна Z).

Останнім елементом опису функції є тіло функції. Воно складається з послідовності операторів, які дають значення функції. У тілі функції можна використовувати будь-який оператор мови Паскаль. Щоб вказати значення функції, використовують оператор присвоєння з іменем функції ліворуч. Аргументом функції може бути й масив.

Складемо, наприклад, програму для знаходження проекції одного N-вимірного вектора на інший (нехай, наприклад, $N \leqslant 10$).

Приклад 12.

```
PROGRAM PROEC;
CONST
  N=10;
TYRE
  VECTOR=ARRAY[1..N] OF REAL;
VAR
  A,B:VECTOR;I:INTEGER;PRAB:REAL;
FUNCTION NORM(C:VECTOR):REAL;
  VAR
    L:VECTOR;J:INTEGER;S:REAL;
  BEGIN
   L:=C;S:=0;FORJ:=1 TO N DO S:=S+SQR(L[J]);
   NORM:=SQRT(S)
  END;{ФУНКЦІЇ NORM}
FUNCTION SCPR(C1,C2:VECTOR):REAL;
   VAR
     L1,L2:VECTOR;M:INTEGER;S1:REAL;
   BEGIN
    L1:=C1;L2:=C2;S1:=0;FOR M:=1 TO N DO S1:=S1+L1[M]*L2[M];
    SCPR:=S1
END;{ФУНКЦІЇ SCPR }
BEGIN
  WRITE('ВВЕДІТЬ ВЕКТОРИ A I B');
   FOR I:=1 TO N DO READ(A[I],B[I]);PRAB:=SCPR(A,B)/NORM(B);
   WRITELN(PRAB)
END.{ПРОГРАМИ}
```

У цій програмі описано дві функції *NORM* і *SCPR*. Перша з них дає змогу знаходити довжину вектора, а друга - скалярний добуток двох векторів.

Звертаємо увагу читача на особливості цієї програми.

По-перше, перед розділом програми, в якому описуються змінні, стоїть розділ опису типів; крім стандартних, програміст може створювати нові типи. У даній програмі створено тип *VECTOR*,який визначається як одновимірний масив.

По-друге, в трьох місцях програми в фігурних дужках записано деякі слова - це коментарі, на них машина не реагує. Коментарі потрібні для кращого розуміння програми.

§ 2.10. ПРОЦЕДУРИ

Процедура - частина програми, яка розв"язує деяку частинну задачу. У мові Паскаль є такі вмонтовані процедури:

WRITE , WRITELN , READ , READLN .

Нові процедури описуються подібно до того, як описуються функції, що визначаються самим програмістом.

Приклад 13.

```
PROCEDURE STARPRINT(K:INTEGER);
VAR
  I:INTEGER;
BEGIN
    FOR I:=1 TO K DO WRITE('*')
END;
```

Якщо програма звертається до процедури *STARPRINT*, то буде надрукований рядок, який складається з зірочок. Аргумент *K* визначає кількість зірочок, які будуть надруковані.

Описавши процедуру, її можна використовувати так, як і звичайний оператор мови Паскаль.

Наведемо приклад програми, де використовується процедура *STARPRINT*.

Приклад 14.

```
PROGRAM FIGURA;
VAR
  J:INTEGER;
PROCEDURE STARPRINT(K:INTEGER);
VAR
 I:INTEGER;
BEGIN
      FOR I:=1 TO K DO WRITE('*')
END;
BEGIN
  FOR J:=8 DOWNTO 2 DO
     BEGIN   STARPRINT(J);WRITELN END;
  FOR J:=2 TO 8 DO
          BEGIN   STARPRINT(J);WRITELN END
END.
```

У результаті виконання цієї програми дістанемо таку фігуру:

```
******
*****
***
**
**
***
****
*****
******
```

§ 2.II. ТИПИ ДАНИХ, ЯКІ ВИЗНАЧАЮТЬСЯ ПРОГРАМІСТОМ

У § 2.9 описано тип даних *VECTOR*, який визначається самим програмістом. Отже, мова Паскаль має такі засоби, які дають змогу створювати додаткові типи даних. Наприклад, змінну *MONTH*, значеннями якої є місяці року, можна описати так:

MONTH: (JAN, FEB, MARCH, APRIL, MAY,

JUNE, JULY, AUG, SEPT, OCT, NOV, DEC).

Це приклад даних переліченого типу. Цей тип даних є множиною елементів, які явно вказуються і при цьому така множина вважається впорядкованою (порядок у множині визначається порядком елементів при їх переліку).

Інтервальний тип даних - це відрізок якого-небудь іншого (що називається базовим) типу даних. Наприклад, *DAYS* :I. .7. За базовий можна брати перераховуваний тип даних, проте, наприклад, тип даних *REAL* не можна використовувати як базовий.

Для опису типів даних використовується два способи. Один з них полягає в тому, що тип даних визначається в тій частині програми, де описуються змінні. Другий спосіб полягає в тому, що тип даних описується окремо і визначається його ім"я. Наприклад,

PLANETS = (MERCUR, VENUS, ERDE, MARS,

JUPIT, SATURN, PLUTON, URAN, NEPTUN) -

тип даних з іменем *PLANETS*.

Розділ програми, в якому описуються типи даних, розміщений між описом констант і описом змінних. Описові типів у програмі передує зарезервоване слово *TYPE*.

Наведемо приклад програми, де описується такий тип даних, як матриці. Це програма для знаходження добутку матриць.

Приклад 15.

```
PROGRAM PRMATR;
CONST
   N=10;
TYPE
   MATRIX-ARRAY[1..N,1..N] OF REAL;
VAR
  I,J,K:INTEGER;A,B,C:MATRIX;
BEGIN
   WRITE('ВВЕДІТЬ МАТРИЦЮ A');
   FOR I:=1 TO N DO FOR J:=1 TO N DO READ(A[I,J]);
      WRITE('ВВЕДІТЬ МАТРИЦЮ B');
      FOR I:=1 TO N DO FOR J:=1 TO N DO READ(B[I,J]);
   S:=0;
      FOR I:=1 TO N DO FOR J:=1 TO N DO
      BEGIN
        FOR K:=1 TO N DO S:=S+A[I,K]*B[K,J];C[I,J]:=S;
      END;
         FOR I:=1 TO N DO BEGIN FOR J:=1 TO N DO WRITE(C[I,J]);
            WRITELN   END
END
```

§ 2.12. СТРУКТУРА ПРОГРАМИ, СКЛАДЕНОЇ МОВОЮ ПАСКАЛЬ

1. Заголовок.
2. Опис міток.
3. Означення констант.
4. Опис типів даних.
5. Опис змінних.
6. Опис функцій і процедур.
7. Тіло.

За винятком заголовка і тіла будь-який елемент програми може бути відсутнім.

§ 2.13. БІБЛІОТЕЧКА ПРОГРАМ

Наводимо кілька важливих програм, які часто використовуються на практиці. Програми відлагоджено і перевірено на ДОК-3.

```
      PROGRAM GAUSS;{для розвязування системи лінійних рівнянь}
LABEL
   10,11,12,13;
VAR
   FIL:TEXT;Y:ARRAY[1..15] OF REAL;A:ARRAY[1..15,1..16] OF REAL;
   T:REAL;U,I,J,K,M,N:INTEGER;
BEGIN
   REWRITE(FIL,'MX1:GAUSS.DAT');
 REPEAT
  WRITE('Введіть U');READ(U);
  FOR I:=1 TO U DO
    BEGIN
     WRITE('Введіть рядок A');WRITELN(FIL);FOR J:=1 TO U+1 DO
     BEGIN READ(A[I,J]);WRITE(FIL,A[I,J]) END
    END;WRITELN(FIL);
  N:=0;
 10:N:=N+1;FOR K:=N TO U DO IF A[K,N]<>0 THEN GOTO 11;GOTO 13;
 11:IF K=N THEN GOTO 12;J:=U+1;FOR M:=N TO J DO
    BEGIN T:=A[N,M];A[N,M]:=A[K,M];A[K,M]:=T END;
 12:FOR J:=U+1 DOWNTO N DO A[N,J]:=A[N,J]/A[N,N];
    M:=U+1;FOR I:=K+1 TO U DO FOR J:=N+1 TO M DO
    A[I,J]:=A[I,J]-A[I,N]*A[N,J];IF N<>U THEN GOTO 10;
    FOR I:=U DOWNTO 1 DO
    BEGIN
     Y[I]:=A[I,M];WRITE(Y[I]);WRITELN(FIL,'Y[',I:2,']=',Y[I]);
     FOR K:=I-1 DOWNTO 1 DO A[K,M]:=A[K,M]-A[K,I]*Y[I] END;
 13:WRITE('GAUSS')
    UNTIL U=1;
    CLOSE(FIL)
 END.
```

```
PROGRAM DET;{для знаходження визначника матриці}
LABEL 10;
CONST CN=15;
VAR
  A:ARRAY[1..CN,1..CN] OF REAL;T,D,M:REAL;I,J,K,N:INTEGER;
BEGIN
 WRITELN('Введіть N ');READ(N);WRITELN('Введіть матрицю A');
 FOR I:=1 TO N DO FOR K:=1 TO N DO READ(A[I,K]);
  D:=1;
  FOR K:=1 TO N DO
   BEGIN M:=0;
     FOR I:=K TO N DO
       BEGIN T:=A[I,K];
         IF ABS(T) > ABS(M) THEN
            BEGIN M:=T;J:=I END
       END;
     IF M=0 THEN BEGIN D:=0;GOTO 10 END;
     IF J <> K THEN
        BEGIN D:=-D;
          FOR I:=K TO N DO
            BEGIN T:=A[J,I];A[J,I]:=A[K,I];A[K,I]:=T
               END
        END;
      FOR I:=K+1 TO N DO
        BEGIN T:=A[I,K]/M;
          FOR J:=K+1 TO N DO
            A[I,J]:=A[I,J]-T*A[K,J]
        END;
      D:=D*A[K,K]
    END;
 10:WRITELN('DET A=',D)
 END.
```

```
PROGRAM INV;{для знаходження оберненої матриці}
LABEL 10,20;
CONST CN=15;CN1=30;
VAR
  MO,M1:ARRAY[1..CN,1..CN] OF REAL;A:ARRAY[1..CN,1..CN1] OF REAL;
  I,J,K,M,N,S:INTEGER;T:REAL;
BEGIN
   WRITELN('Введіть N');READ(N);WRITELN('Введіть матрицю MO');
   FOR I:=1 TO N DO FOR K:=1 TO N DO READ(MO[I,K]);
     M:=2*N;S:=0;
   FOR I:=1 TO N DO
     FOR J:=1 TO M DO
         IF J <= N THEN A[I,J]:=MO[I,J] ELSE
            IF J=N+I THEN A[I,J]:=1.0 ELSE A[I,J]:=0.0;
     FOR I:=1 TO N DO
       BEGIN K:=I;
 10:          IF A[K,I]=0 THEN
    BEGIN S:=1;
      IF K < N THEN K:=K+1 ELSE GOTO 20;
      GOTO 10
    END;
 IF S=1 THEN
    FOR J:=1 TO M DO
      BEGIN T:=A[K,J];A[K,J]:=A[I,J];A[I,J]:=T
      END;
 FOR J:=M DOWNTO I DO A[I,J]:=A[I,J]/A[I,I];
 FOR K:=1 TO N DO
   IF K <> I THEN
    FOR J:=M DOWNTO I DO
       A[K,J]:=A[K,J]-A[I,J]*A[K,I]
END;
FOR I:=1 TO N DO BEGIN
  FOR J:=1 TO N DO BEGIN M1[I,J]:=A[I,J+N];
      WRITE(M1[I,J]) END;WRITELN END;S:=0;
20:;
END.
```

```
  PROGRAM JACOBI;{для знаходження власних значень і векторів}
LABEL
  10,11,12;
VAR
  FIL:TEXT;A,S:ARRAY[1..15,1..15] OF REAL;N:INTEGER;EPS:REAL;
  N1,N2,THR,MU,OM,ST,CT,INT1,V1,V2,V3:REAL;I,J,P,Q,IND:INTEGER;
BEGIN
  REWRITE(FIL,'MX1:JACOBI.DAT');
  WRITE('введіть N,EPS');READ(N,EPS);
  FOR I:=1 TO N DO
   BEGIN
    WRITE('введіть I-ий рядок матриці A');WRITELN(FIL);
    FOR J:=1 TO N DO
    BEGIN READ(A[I,J]);WRITE(FIL,A[I,J]) END
   END;WRITELN(FIL);
 FOR I:=1 TO N DO
   FOR J:=1 TO I DO
    IF I=J THEN S[I,J]:=1 ELSE S[I,J]:=0;S[J,I]:=0;
    INT1:=0;
    FOR I:=2 TO N DO
     FOR J:=1 TO I-1 DO INT1:=INT1+2*A[I,J]*A[I,J];
 IF INT1=0 THEN GOTO 12;
  THR:=SQRT(INT1);N1:=THR;N2:=(EPS/N)*N1;IND:=0;
10:THR:=THR/N;
11:FOR Q:=2 TO N DO
    FOR P:=1 TO Q-1 DO
     IF ABS(A[P,Q])>=THR THEN
      BEGIN IND:=1;
       V1:=A[P,P];V2:=A[P,Q];V3:=A[Q,Q];
       MU:=SQR(0.5*(V1-V3));
       IF MU=0 THEN OM:=-1 ELSE
       OM:=(ABS(V3-V1)/(V3-V1))*V2/SQRT(V2*V2+MU);
       ST:=OM/SQRT(2*(1+SQRT(1-OM*OM)));
       CT:=SQRT(1-ST*ST);
       FOR I:=1 TO N DO
        BEGIN
         IF (I<>P) AND (I<>Q) THEN
         BEGIN INT1:=A[I,P];MU:=A[I,Q];A[I,Q]:=INT1*ST+MU*CT;
         A[Q,I]:=A[I,Q];A[I,P]:=INT1*CT-MU*ST;A[P,I]:=A[I,P];
         END;
```

```
        INT1:=S[I,P];MU:=S[I,Q];S[I,Q]:=INT1*ST+MU*CT;

        S[I,P]:=INT1*CT-MU*ST
        END;
 MU:=ST*ST;OM:=CT*CT;INT1:=ST*CT;
 A[P,P]:=V1*OM+V3*MU-2*V2*INT1;
 A[Q,Q]:=V1*MU+V3*OM+2*V2*INT1;
 A[Q,P]:=(V1-V3)*INT1+V2*(OM-MU);A[P,Q]:=A[Q,P]
END;
IF IND=1 THEN BEGIN IND:=0; GOTO 11 END;
IF THR>N2 THEN GOTO 10;WRITELN(FIL);WRITELN(FIL);
WRITELN(FIL,'власні вектори - стовпці');
 FOR I:=1 TO N DO
   BEGIN WRITELN;WRITELN(FIL);
    FOR J:=1 TO N DO BEGIN WRITE(S[I,J]);WRITE(FIL,S[I,J]) END
  END;WRITELN;WRITELN(FIL);WRITELN(FIL);WRITELN(FIL);
WRITELN(FIL,'власні значення');WRITELN(FIL);
 FOR I:=1 TO N DO
  BEGIN
    WRITE(A[I,I]);WRITE(FIL,A[I,I])
  END;
12:CLOSE(FIL)
END.
```

§ I.I

I. $A+B=\begin{pmatrix} 3 & I & -4 \\ 5 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $B-3A=\begin{pmatrix} -I & I & 8 \\ -8 & I2 & -I4 \\ 7 & I2 & 0 \end{pmatrix}$;

$$A^T+4B=\begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 \\ I2 & -4 & -I0 \\ I3 & 28 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $AB=\begin{pmatrix} I & -5 & I0 \\ -I & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} II & 6 & 8 \\ -I & -I & -I \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$;

$$A^TB^T=\begin{pmatrix} II & -I & 3 \\ 6 & -I & 4 \\ 3 & -I & -2 \end{pmatrix};\ AC=\begin{pmatrix} -2 \\ I \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$AE=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -I \\ -I & 0 & 0 \\ 2 & I & I \end{pmatrix};\ EB=\begin{pmatrix} I & 0 & 4 \\ 0 & -I & -4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ I.2.

I. а) I4; б) -I; в) I; г) $-4ab$. 2. а) $x=0$; б) $x_1=I$, $x_2=-6$. 3. а) -5; б) 0; в) 35; г) 5. 5. -4.

§ I.3

I. $A^{-1}=\begin{pmatrix} I & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. 2. $A^{-1}=\begin{pmatrix} I & -4 & -3 \\ I & -5 & -3 \\ -I & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

3. а) $x=2$, $y=I$; б) $x=2$, $y=-I$, $z=I$.

§ I.4

I. а) $x=-I$, $y=I$; б) $x=3$, $y=-I$; в) $x=3$, $y=0$, $z=-I$.

2. $A^{-1}=\begin{pmatrix} I & -4 & -3 \\ I & -5 & -3 \\ -I & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

§ I.5

I. а) $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=90^0$; б) $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})<90^0$; в) $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})>90^0$.
2. $\overrightarrow{A_1A_3}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{A_1A_4}=2\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{A_1A_5}=\vec{a}+2\vec{b}$. 4. $\alpha=4$, $\beta=-I$. 5. $\vec{d}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. 6. I) $|\overrightarrow{A_1A_2}|=5\sqrt{2}$; 2) $\cos\varphi=42/5\sqrt{86}$; 3) $S=I5$; 4) $V=35/3$.

§ I.6

I. $K = -5/3$. 2. $y+2=-\frac{5}{3}(x-1)$. 3. $3(x-2)+4y=0$.
4. $2x-3y=0$, $3x+2y=0$. 5. а) $d=\sqrt{5}/2$; б) $d=19/\sqrt{68}$;
в) $d=3/\sqrt{2}$. 6. $\varphi=90^0$.

§ I.7

I. $x+y-3=0$. 2. $-x+2z-7=0$. 3. $2x-y+z-2=0$;
$d=1/\sqrt{6}$. 4. $\cos(\widehat{P_1, P}) = 1/2$.

§ I.8

I. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$. 2. (2, -I, 0). 3. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{1}$.
4. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{1}$. 5. $\cos\varphi=1/2$, $\varphi=\pi/3$. 6. $x=-2+2t$,
$y=-1+t$, $z=-8+5t$.

§ I.9

I. $x^2+y^2=16$. 2. $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. 3. $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.
4. а) $a=5$, $b=3$; б) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$; в) $e=4/5$.
5. а) $a=3$, $b=4$; б) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; в) $e=5/3$;
г) $y=\pm\frac{4}{3}x$. 6. а) $p=3$; б) $p=5/2$; в) $p=2$; г) $p=1/2$.
7. $x+y+2=0$.

§ I.I0

I. $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{6}=1$. 2. $x^2+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{16}=1$. 3. $\frac{x^2+y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$.
4. $x^2+y^2=5z$ – еліптичний параболоїд обертання.

§ I.II

I. I) Ні, бо $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$ тільки коли $\alpha=\beta=0$; 2) Так, бо
$\vec{a}+(-\frac{1}{2})\vec{b}=\vec{0}$. 2. $rang A=2$; $rang B=4$; $rang C=3$.
3. а) $X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $c_1X_1+c_2X_2$ – загальний розв"язок;
б) $X_1=(1, 0, 1)^T$, c_1X – загальний розв"язок; в) система має тільки тривіальний розв"язок.

г)
$$X_1=\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix},\quad c_1X_1+c_2X_2$$ – загальний розв"язок.

4. $\bar{X}=(0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3})^T$ – частинний розв"язок неоднорідної системи,

$$\bar{X}+c_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-5/3\\1/3\end{pmatrix}$$ – загальний розв"язок неоднорідної системи.

§ I.I2

I. Вказівка. Скористатися елементарною нерівністю

$$(c_1+c_2)^2\leqslant 2c_1^2+2c_2^2.$$

3. $$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}.$$

§ I.I3

3. Ні, бо порушується аксіома 4^0 евклідового простору.

§ I.I4

I. а) Так; б) Ні. 2. $$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

3. $$\ker A=\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}\cdot C,\quad C=const.$$ 4. $$A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}.$$

5. $$\lambda_1=1,\ c_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix};\quad \lambda_2=0,\ c_2\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

6. $$A=\begin{pmatrix}-1&3&-2\\-4&1&2\\3&-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&5\\6&7&1\\9&1&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&16&-18\\8&-3&-3\\33&-14&51\end{pmatrix}.$$

§ I.15

1. Крива еліптичного типу; $\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{(y')^2}{(\sqrt{3})^2}=1$ - еліпс.

2. Крива гіперболічного типу; $\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{(y')^2}{1}=1$ - гіпербола.

3. Крива еліптичного типу; $(x')^2+(y')^2=0$ - точка $O(0;\ 0)$.

4. Крива гіперболічного типу; $(x')^2-2(y')^2=0$ - пара прямих, що перетинаються.

5. Крива параболічного типу; $x'=\frac{3}{4}(y')^2$ - парабола.

УКРАЇНСЬКО-РОСІЙСЬКИЙ СЛОВНИК МАТЕМАТИЧНИХ ТЕРМІНІВ

Алгебраїчне доповнення - алгебраическое дополнение
Асимптота - асимптота

Базис - базис

Вектор - вектор
Визначник - определитель
Від"ємник - вычитаемое
Віднімання - вычитание
Відношення - отношение
Відображення - отображение
Відрізок - отрезок
Відстань - расстояние
Вісь - ось
Власний вектор - собственный вектор

Гіпербола - гипербола
Гіперболоїд - гиперболоид

Двопорожнинний - двухполостный
Диференціювання - дифференцирование
Ділене - делимое
Ділення - деление
Дільник - делитель
Добуток - произведение
Довжина - длина
Додавання - сложение
Дужки - скобки
Доповнення - дополнение

Еліпс - эллипс
Еліпсоїд - эллипсоид

Зменшуване - уменьшаемое

Інверсія - инверсия

Канонічні рівняння - канонические уравнения
Квадратична форма - квадратическая форма

Коефіцієнт подібності - коэффициент подобия
Коло - окружность
Конус - конус
Корені рівняння - корни уравнения
Круг - круг
Кут - угол
Кутовий - угловой

Лінійність - линейность

Матриця - матрица
Мінор - минор
Мішаний добуток - смешанное произведение
Множення - умножение

Напрям - направление
Напрямний вектор - направляющий вектор
Невироджений - невырожденный

Одиничний - единичный
Однопорожнинний гіперболоїд - однополостный гиперболоид
Однорідність - однородность
Оператор - оператор
Остача - остаток

Парабола - парабола
Паралельне перенесення - параллельный перенос
Параметричні - параметрические
Парний - четный
Перенесення - перенос
Перестановка - перестановка
Перетворення - преобразование
Площина - плоскость
Поверхня обертання - поверхность вращения
Подвійний добуток - двойное произведение
Подібність - подобие
Поділ - деление
Похідна - производная
Проекція - проекция
Простір - пространство

Протилежний - противоположный
Пряма - прямая

Ранг - ранг
Рівність - равенство
Рівняння - уравнение
Різниця - разность
Розв"язок - решение
Розклад за базисом - разложение по базису
Розмірність - размерность

Скінченновимірний - конечномерный
Співвідношення - соотношение, соотношения
Стала величина - постоянная величина
Сумісна система - совместная система
Сфера - сфера

Транспонування - транспонирование

Характеристичний - характеристический

Швидкість - скорость

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Йенсен К., Вирт Н. Паскаль. Руководство для пользователя и описание языка. - М.: Финансы и статистика, 1982.
2. Грогоно П. Программирование на языке Паскаль. - М.: Мир, 1982.
3. Прайс Д. Программирование на языке Паскаль. Практическое руководство. - М.: Мир, 1987.
4. Абрамов С.А., Зима Е.В. Начала программирования на языке Паскаль. - М.: Наука, 1987.
5. Семашко Г.Л., Салтыков А.И. Программирование на языке Паскаль. - М.: Наука, 1988.
6. Перминов О.И. Программирование на языке Паскаль. - М.: Радио и связь, 1988.

ЗМІСТ

Министерство высшего и среднего специального образования УССР
Учебно-методический кабинет по высшему образованию
Винницкий политехнический институт

Учебное издание

Волков Юрий Иванович
Найко Дмитрий Антонович

Линейная алгебра и аналитическая геометрия
с элементами программирования на языке Паскаль

Учебное пособие

Киев УМК ВО 1990
На украинском языке

Навчальне видання

Волков Юрій Іванович
Найко Дмитро Антонович

Лінійна алгебра й аналітична геометрія
з елементами програмування мовою Паскаль

Навчальний посібник

Редактор Р.С.Ділова
Коректори: Т.М.Божко
Ю.С.Сергійко

Темплан 1990, поз. 37

Підп. до друку 24.01.90. Формат 60×84 1/16. Папір друк. № 3. Друк офсетний. Ум. др. арк. 8,37. Ум. фарбо-відб. 8,6
Облік.-вид. арк. 7,9. Тираж 700.
Зам. № 01646р. Ціна 25 к.

НМК ВО при Мінвузі УРСР
252135, м. Київ, проспект Перемоги, 10.

РОВО «Укрвузполіграф».
252151, Київ, вул. Волинська, 60.

3