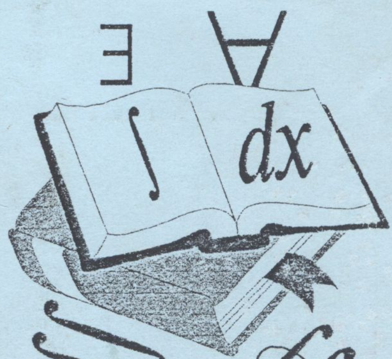
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.А. ВОЙЦЕХОВСЬКИЙ

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ УСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ



ВІННИЦЯ ВДТУ 2000

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.А. ВОЙЦЕХОВСЬКИЙ

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник з вищої математики для студентів усіх спеціальностей. Протокол № 6 від 27 січня 2000р.

ВІННИЦЯ ВДТУ 2000

УДК 517(078.8)

Інтегральне числення. Навчальний посібник з вищої математики для студентів усіх спеціальностей. /О.А. Войцеховський. – В.: ВДТУ, 1999. – с. 116. Укр. мовою./

В навчальному посібнику з інтегрального числення розглядаються основні теоретичні питання даного розділу курсу вищої математики, а також основні геометричні і фізичні застосування визначеного інтеграла.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується прикладами розв'язання задач. З метою закріплення навчального матеріалу пропонуються питання для самоперевірки та задачі для самостійної роботи.

Навчальний посібник призначено для студентів технічних вузів усіх форм навчання та спеціальностей.

Бібліограф. 15 назв, табл. 3, іл. 28.

Рецензенти: П. М. Зузяк, д. ф.-м. н., проф. ВДПУ
В. Л. Карпенко, к. ф.-м. н., проф. ВДТУ
В. М. Михалевич, д. т. н., проф. ВДТУ

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник написано відповідно до діючої програми з вищої математики і призначений для студентів вищих технічних навчальних закладів.

Мета цього посібника допомогти студентам у самостійному вивченні теоретичної частини курсу вищої математики.

В посібнику розглядаються необхідні теоретичні положення, а також основні застосування інтегрального числення функції однієї змінної.

Посібник складається з трьох розділів: в першому розділі розглядаються поняття невизначеного інтеграла і основні методи обчислення невизначених інтегралів; в другому розділі розглядаються поняття визначеного інтеграла, методи його обчислення, включаючи наближені, а також невласні інтеграли і інтеграли, залежні від параметра; в третьому – наведено основні геометричні і фізичні застосування інтегрального числення. До кожного розділу наведено питання для самоперевірки та задачі для самостійної роботи.

Нумерація формул зроблена по розділах. При посиланнях на формули в даному розділі вказується тільки номер формули, наприклад (3), при посиланнях на формулу іншого розділу – номер розділу і номер формули, наприклад (II.5).

Доведення теорем і формул супроводжуються докладно розібраними прикладами. Розв'язання прикладу починається зі знаку △ і закінчується знаком ▲. Початок і кінець доведення теореми відмічаються відповідно знаками □ і ■.

Автор висловлює щиру подяку рецензентам: доктору фізико – математичних наук, професору П. М. Зузяку, професору В. Л. Карпенко, доктору технічних наук, професору В. М. Михалевичу, а також доктору педагогічних наук В. І. Клочко за цінні рекомендації та зауваження.

РОЗДІЛ I

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Задача про відновлення функції за її похідною. Первісна функція і невизначений інтеграл

Основна задача диференціального числення полягає в тому, щоб від заданої функції $f(x)$ знайти її похідну $f'(x)$. Якщо, наприклад, відомо закон прямолінійного руху точки $S = f(t)$ і треба знайти швидкість v і прискорення a в даний момент часу t, то ці задачі розв'язуються за допомогою похідних $v = f'(t)$; $a = v'(t)$. Якщо відомо рівняння кривої $y = f(x)$, а треба знайти рівняння дотичної до цієї кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$, то задача розв'язується також за допомогою похідної. Рівняння дотичної має вигляд $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Проте на практиці доводиться частіше розв'язувати обернені задачі, коли відоме прискорення як функція часу $a = a(t)$, і треба знайти швидкість v в момент часу t та пройдений шлях S за час t точкою, яка рухається прямолінійно; або, знаючи в кожній точці кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кривої, знайти рівняння кривої.

Отже, в першому випадку треба за відомою функцією $a = a(t)$ знайти функцію $v = v(t)$, для якої $a(t)$ є похідною, а потім за функцією $v(t)$ знайти функцію $s(t)$, для якої $v(t)$ є похідною.

У другому випадку за кутовим коефіцієнтом $k = f'(x)$ треба знайти криву $y = f(x)$ таку, щоб кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до цієї кривої, дорівнював би $f'(x)$.

Отже, з математичної точки зору ми дістали таку задачу.

На деякому проміжку (a, b) задано функцію $f(x)$. Треба знайти таку функцію $F(x)$, щоб похідна $F'(x)$ в кожній внутрішній точці проміжку (a, b) дорівнювала б $f(x)$, тобто $F'(x) \equiv f(x)$.

Абстрагуючись від конкретного смислу функцій $f(x)$ і $F(x)$, ми прийдемо до математичних понять *первісної* і *невизначеного інтеграла*.

Означення 1. *Функцію $F(x)$ називають **первісною** для функції $f(x)$ в деякому проміжку, якщо в кожній його точці*

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Приклади. 1. Функція $\sin x$ є первісною для функції $\cos x$ на всій числовій осі, бо $\forall x : (\sin x)' = \cos x$.

2. Функція $\ln|x|$ є первісною для функції $\frac{1}{x}$ на будь-якому проміжку, що не містить точки $x = 0$, бо $\forall x \neq 0 : (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Зауважимо, що коли $F(x)$ – первісна для $f(x)$, то й

$$F(x) + C \tag{2}$$

при будь-якому сталому C також буде первісною, бо

$$[F(x) + C]' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Отже, якщо функція має одну первісну, то має їх і нескінченну множину. Природним стає питання: чи кожну первісну для $f(x)$ можна подати у вигляді (2)? Відповідь на це дає така

Теорема. *Якщо $F(x)$ – одна з первісних функцій для $f(x)$, то кожна інша первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ на тому ж проміжку має вигляд $\Phi(x) = F(x) + C$, де C – деяке число.*

□ $\Phi(x) - F(x) =$ Справді, оскільки

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

то функція $\Phi(x) - F(x)$ є сталою на розглядуваному проміжку: $\Phi(x) - F(x) = C$, де C – деяке число, звідки $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

З геометричної точки зору ця теорема стверджує, що графік будь-якої первісної для $f(x)$ одержується простим зсувом вгору чи вниз графіка функції $y = F(x)$ (рис. 1).

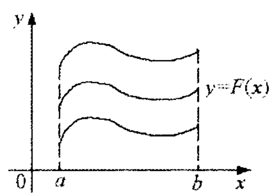


Рис. 1

Означення 2. *Сукупність всіх первісних функцій для даної функції $f(x)$ на деякому проміжку* називають ***невизначеним інтегралом від функції*** *$f(x)$ на цьому проміжку і позначають символом*

$$\int f(x)dx$$

(читають "невизначений інтеграл еф від ікс де ікс").

При цьому $f(x)$ називають *підінтегральною функцією*, а $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*. Символ $\int$ являє собою видовжену латинську букву S і його називають *знаком інтеграла*.

Отже, за означенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{3}$$

де $F(x)$ – яка-небудь первісна для функції $f(x)$, а C – довільна стала.

Приклади. 1. Оскільки, $(\sin x)' = \cos x$, то $\int \cos x dx = \sin x + C$.

2. Оскільки $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, то $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$.

Формула (3) показує, що відшукання якої-небудь первісної і невизначеного інтеграла – задачі майже тотожні. А тому і ту і іншу задачу називають *інтегруванням*.

Природно постає таке важливе питання: чи завжди інтегрування можливе, тобто чи для кожної функції $f(x)$, заданої на деякому проміжку, існує первісна? Виявляється, що не для кожної. Однак якщо $f(x)$ неперервна, то первісна завжди існує. Це твердження ми доведемо пізніше, а поки що приймемо його без доведення і розглядатимемо тільки інтегрування неперервних функцій. У випадку розривної функції мова йтиме тільки про інтегрування в тому чи іншому проміжку її неперервності.

Невизначений інтеграл має таки властивості:

1. *Похідна від інтеграла дорівнює підінтегральній функції:*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = [F(x)+C]' = F'(x)+0 = f(x).$$

2. *Знак диференціала знищує знак інтеграла:*

$$d\int f(x)dx = d[F(x)+C] = [F(x)+C]'dx = f(x)dx.$$

3. *Знак інтеграла знищує знак диференціала з точністю до сталого доданку:*

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C.$$

4. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:*

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx,$$

бо

$$\left[C\int f(x)dx\right]' = C\left[\int f(x)dx\right]' = Cf(x).$$

5. *Інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів:*

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

бо $\left[\int [f(x) \pm g(x)]dx\right]' = \left[\int f(x)dx\right]' \pm \left[\int g(x)dx\right]' = f(x) \pm g(x).$

1.2. Таблиця основних інтегралів. Безпосереднє інтегрування

Нехай u – будь-яка неперервно диференційовна в деякому проміжку функція від x. Користуючись означенням невизначеного інтеграла і таблицею диференціалів елементарних функцій, легко скласти таку таблицю основних інтегралів:

1. $\int 0\cdot du=C$; 2. $\int du=u+C$; 3. $\int u^{\alpha}du=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1)$;

4. $\int \dfrac{du}{u}=\ln|u|+C\ \ (u\neq 0)$;

5. $\int a^{u}du=\dfrac{a^{u}}{\ln a}+C$ (число $a>0,\ a\neq 1$); 6. $\int e^{u}du=e^{u}+C$;

7. $\int \sin u\,du=-\cos u+C$; 8. $\int \cos u\,du=\sin u+C$;

9. $\int \dfrac{du}{\cos^{2}u}=\operatorname{tg}u+C$ (в кожному проміжку, де $\cos u\neq 0$);

10. $\int \dfrac{du}{\sin^{2}u}=-\operatorname{ctg}u+C$ (в кожному проміжку, де $\sin u\neq 0$);

11. $\int \dfrac{du}{a^{2}+u^{2}}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a}+C$ (число $a\neq 0$);

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}}=\arcsin\dfrac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}+C\ (-a<u<a)$.

До цих формул доцільно приєднати ще такі:

13. $\int \dfrac{du}{u^{2}-a^{2}}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|+C\ \ (a\neq 0)$;

14. $\int \operatorname{tg}u\,du=-\ln|\cos u|+C$; 15. $\int \operatorname{ctg}u\,du=\ln|\sin u|+C$;

16. $\int \dfrac{du}{\sin u}=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right|+C$; 17. $\int \dfrac{du}{\cos u}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C$;

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}}=\ln\left|u+\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\right|$;

19. $\int \sqrt{a^{2}-u^{2}}\,du=\dfrac{u}{2}\sqrt{a^{2}-u^{2}}+\dfrac{a^{2}}{2}\arcsin\dfrac{u}{2}+C$;

20. $\int \sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\,du=\dfrac{u}{2}\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\pm\dfrac{a^{2}}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\right|+C$.

Формули 13 – 20 не мають аналогів серед формул диференціалів і будуть виведені пізніше, однак їх легко перевірити диференціюванням. Наприклад, формула (18) справедлива, бо

$$d\left[\ln\left|u+\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\right|+C\right]=\frac{1+\dfrac{u}{\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}}}{u+\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}}du=\frac{du}{\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}}.$$

Всі ці формули вживаються часто і тому потрібно знати їх напам'ять. Обчислення інтегралів з використанням їх основних властивостей і табличних інтегралів називають звичайно безпосереднім інтегруванням. Хоча цей спосіб і здається простим, все ж він вимагає певних навиків і кмітливості.

Приклади.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$;

2. $\int 3x(x^2+1)^5 dx = \frac{3}{2}\int (x^2+1)^5 2x dx =$

$$= \frac{3}{2}\int (x^2+1)^5 d(x^2+1) = \frac{(x^2+1)^6}{4} + C;$$

3. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x} = \int \sin^{-4} x d(\sin x) = \frac{\sin^{-3} x}{-3} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + C$;

4. $\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$;

5. $\int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$;

6. $\int \mathrm{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$;

7. $\int \sqrt{x}(1-x^2) dx = \int \sqrt{x} dx - \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C$;

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx +$

$$+ \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = \mathrm{tg} x - \mathrm{ctg} x + C;$$

9. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

10. $\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg} x - x + C$.

Зауваження. Головна особливість операції інтегрування – її багатозначність. А тому треба мати на увазі, що нерідко різні способи інтегрування однієї і тієї ж самої функції приводять до функцій, різних за своїм виглядом. У таких випадках треба показати, що ці функції відрізняються на сталу. Для цього достатньо показати, що вони мають однакові похідні, рівні підінтегральній функції. Тобто правильність інтегрування перевіряють прямою дією диференціюванням. Наприклад,

$$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

З другого боку

$$\int \sin 2x dx = \int 2\sin x \cos x dx = 2\int \sin x d(\sin x) = \sin^2 x + C.$$

Обидві відповіді правильні, оскільки

$$\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right)' = \left(\sin^2 x + C\right)' = \sin 2x.$$

1.3. Інтегрування за допомогою заміни змінної

Одним з найефективніших методів зведення інтеграла до табличного є метод підстановки або заміни змінної. Він застосовується у двох різних формах в основі яких лежить така

Теорема. *Якщо функція* $u = \varphi(x)$ *на деякому проміжку неперервна разом зі своєю похідною* $\varphi'(x)$, *а функція* $f(u)$ *на відповідному проміжку зміни* u *має первісну* $F(u)$, *то складена функція* $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ *має первісну* $F[\varphi(x)]$.

□ Справді, за правилом диференціювання складеної функції маємо

$$\left(F[\varphi(x)]\right)' = F'[\varphi(x)]\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x). \quad \blacksquare$$

Стисло зміст цієї теореми можна передати так:

Якщо $\int f(u)du = F(u) + C$, то $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C$.

Звідси дістаємо

Правило 1. Для обчислення інтеграла

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$$

записують його у вигляді

$$\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

замінюють тут $\varphi(x)$ на u, обчислюють одержаний інтеграл і в знайденій відповіді виконують обернену заміну u на $\varphi(x)$.

Приклади.

1. $$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int \frac{d\ln x}{1+\ln^2 x} = \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg} \ln x + C.$$

Зауваження. В простих випадках інтегрування здійснюють без введення нової змінної, коли після перетворень підінтегрального виразу стає зрозумілим яка підстановка приводить даний інтеграл до табличного.

2. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

3. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Теорема 2. *Якщо функція $x = \varphi(t)$ на деякому проміжку неперервно диференційовна і строго монотонна, а функція $f(x)$ на відповідному проміжку зміни x неперервна, то*

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \qquad t = \psi(x),$$

де функція $\psi(x)$ обернена для $\varphi(t)$.

□ Справді, нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$. Тоді за теоремою 1:

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C = F(x) + C = \int f(x)dx. \ ■$$

Отже, має місце

Правило 2. Для обчислення інтеграла $\int f(x)dx$ замінюємо x на неперервно диференційовну функцію $\varphi(t)$, яка має обернену функцію $t = \psi(x)$, обчислюємо одержаний інтеграл і в результаті замінюємо t через $\psi(x)$.

Приклади.

1. Обчислити інтеграл $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

△ Зауважуємо, що $a^2 - x^2 \geq 0$, звідки $|x| \leq a$ $(a > 0)$, і тому доцільно застосувати підстановку $x = a\sin t$, $dx = a\cos t dt$. Ця підстановка дозволяє позбутися кореня: $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = |a\cos t|$, і в цьому, зрозуміло, весь смисл розглядуваної підстановки. Можна вважати, що t змінюється на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді значення змінної x заповнюють весь відрізок $[-a, a]$. На цьому відрізку підінтегральна функція неперервна. Оскільки $\cos t > 0$ для всіх $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то арифметичне значення кореня $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$ $(a > 0)$. Далі, на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функція $x = a\sin t$ зростає і має неперервну похідну $x_t' = a\cos t$. Отже, підстановка $x = a\sin t$ задовольняє всі вимоги другого правила заміни змінної, за яким

$$I = a^2\int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}(t + \sin t) + C.$$

Залишається виразити знайдену первісну через змінну x. Для цього з рівності $x = a\sin t$ знаходимо $t = \arcsin\frac{x}{2}$. Потім

$$\frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Тому остаточно дістанемо

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C. \ \blacktriangle$$

2. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Δ Нехай $\sqrt{x^2 \pm a^2} + x = t$. Тоді

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + 1\right)dx = dt \quad \text{або} \quad \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = dt,$$

а

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C. \ \blacktriangle$$

Зауваження. В наведених вище прикладах метод заміни змінної швидко привів до мети. Однак вдалий вибір нової змінної звичайно складає певні труднощі. Для їх успішного подолання необхідно добре володіти технікою диференціювання, вміти "прикидати", що дасть та чи інша підстановка і твердо знати табличні інтеграли.

1.4. Інтегрування частинами

Це другий ефективний метод обчислення інтегралів. Він грунтується на правилі диференціювання добутку.

Нехай u і v неперервно диференційовні функції змінної x. Тоді

$$d(uv) = udv + vdu,$$

звідки

$$udv = d(uv) - vdu,$$

і, отже,

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

Оскільки $\int d(uv) = uv + C$, то

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (4)$$

(сталу C приєднали до тієї сталої, яка одержиться від другого інтеграла).

Рівність (4) називають формулою *інтегрування частинами*. Вона дозволяє обчислення інтеграла $\int udv$ звести до обчислення інтеграла $\int vdu$, який може виявитись більш простим для інтегрування.

Приклади.

1. Обчислити інтеграл $I = \int xe^x dx$.

Δ Нехай $u = x,\ du = dx,\ dv = e^x dx,\ v = \int e^x dx = e^x$. Тоді

$$I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C. \blacktriangle$$

2. Обчислити інтеграл $I = \int \ln x dx$.

$\triangle$ Нехай $u = \ln x,\ du = \frac{dx}{x},\ dv = dx,\ v = \int dx = x$. Тоді

$$I = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C. \blacktriangle$$

Нерідко формулу інтегрування частинами доводиться застосовувати послідовно кілька разів. Так, у наступному прикладі вона застосовується два рази.

3. $$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{matrix} \right| = -x^2 \cos x +$$

$$+ 2x \sin x + 2\int \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2\cos x + C.$$

4. $$I = \int e^{ax} \sin bx dx = \left| \begin{matrix} u = \sin bx & dv = e^{ax} dx \\ du = b\cos bx dx & v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{matrix} \right| = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx -$$

$$-\frac{b}{a}\int e^{ax} \cos bx dx = \left| \begin{matrix} u = \cos bx & dv = e^{ax} dx \\ du = -b\sin bx dx & v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{matrix} \right| = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx -$$

$$-\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin bx dx\right) = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx -$$

$$-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2} e^{ax} - \frac{b^2}{a^2} I.$$

Звідси $I = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$.

5. $$I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{x^2 \pm a^2} & dv = dx \\ du = \dfrac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2 \pm a^2 \mp a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx \pm a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - I \pm a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|.$$

Звідси

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C.$$

6. Обчислити інтеграл $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

Нехай $u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $du=\frac{-2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, $dv=dx$, $v=x$. Тоді

$$I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\int\frac{2nx^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2-a^2)dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}-2na^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1},$$

звідки дістаємо рекурентну формулу для обчислення розглядуваного інтеграла при $n=1,2,3,\ldots$:

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n.$$

Зокрема,

$$\int\frac{dx}{(x^2+16)^2}=\frac{1}{2\cdot1\cdot16}\cdot\frac{x}{x^2+16}+\frac{2\cdot1-1}{2\cdot1\cdot16}\int\frac{dx}{x^2+4^2}=$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{x}{x^2+16}+\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{4}\right)+C.$$

Хоча інтегрування частинами застосовується до вужчого класу функцій, ніж інтегрування підстановкою, однак існують цілі класи інтегралів, наприклад, $\int x^n\ln^m xdx$, $\int x^n\sin bxdx$, $\int x^ne^{ax}dx$, $\int x^n\mathrm{arctg}\,xdx$ та інші, які обчислюються саме за допомогою інтегрування частинами (тут m,n – натуральні, a,b – дійсні числа).

1.5. Інтегрування простих раціональних дробів

До числа простих раціональних дробів відносять дроби таких чотирьох типів:

$$\text{I. }\frac{A}{x-a},\quad\text{II. }\frac{A}{(x-a)^\alpha}\quad(\alpha=2,3,\ldots),$$

$$\text{III. }\frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad\text{IV. }\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^\lambda}\quad(\lambda=2,3,\ldots),$$

де A, M, N, a, p, q – деякі дійсні числа, $\frac{p^2}{4} - q < 0$ (тобто тричлен $x^2 + px + q$, що фігурує у дробах III і IV типів, не має дійсних коренів і, отже, не розкладається на дійсні множники).

Для дробів I і II типів, очевидно,

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^\alpha} = -\frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + C.$$

Для обчислення інтеграла від дробу типу III подамо квадратний тричлен у вигляді

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right),$$

і, враховуючи, що $q - \frac{p^2}{4} > 0$, введемо в розгляд дійсну сталу $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Зробивши підстановку $x + \frac{p}{2} = t$, матимемо:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mt + \left(N - M\frac{p}{2}\right)}{t^2+a^2}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Залишається обчислити інтеграл від дробу типу IV. Використовуючи раніше введені позначення $x + \frac{p}{2} = t$, $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, матимемо:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}dx = \int \frac{Mt + \left(N - M\frac{p}{2}\right)}{(t^2+a^2)^\lambda}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^\lambda} + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\lambda}.$$

Очевидно,

$$\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^\lambda} = \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda} = -\frac{1}{(\lambda-1)(t^2+a^2)^{\lambda-1}} + C,$$

а другий інтеграл, як це показано в кінці попереднього пункту, можна обчислити за рекурентною формулою. Якщо потім від змінної t повернутися до змінної x, то інтегрування дробу типу IV буде повністю завершено.

Таким чином, ми обчислили інтеграли від всіх чотирьох простих раціональних дробів і переконалися, що кожний з цих інтегралів є елементарною функцією (бо виражається через логарифм, арктангенс і раціональну функцію).

Приклад. Обчислити інтеграл $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx$.

Δ Виділяючи в знаменнику повний квадрат, одержимо:

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx = \int \frac{6x+5}{(x+2)^2+5}dx = \int \frac{3\cdot 2(x+2)-12+5}{(x+2)^2+5}dx =$$

$$= 3\int \frac{2(x+2)dx}{(x+2)^2+5} - 7\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+(\sqrt{5})^2} =$$

$$= 3\ln(x^2+4x+5) - \frac{7}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C. \blacktriangle$$

1.6. Інтегрування раціональних функцій

Ціла раціональна функція, тобто многочлен

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

інтегрується безпосередньо.

Нехай маємо дробову раціональну функцію, тобто дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени. Якщо степінь чисельника не менший степеня знаменника, то, виконавши ділення, дістанемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де $T(x)$ – деякий многочлен, а $R(x)$ – многочлен степеня меншого, ніж $Q(x)$. Наприклад,

$$\frac{x^5-3x^4+1}{x^3-1} = x^2 - 3x + \frac{x^2-3x+1}{x^3-1} \quad \text{бо} \quad \begin{array}{r|l} -\,x^5-3x^4+1 & x^3-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^5-x^2\qquad} & x^2-3x \\ -\,-3x^4+x^2 & \\ \underline{-3x^4+3x} & \\ x^2-3x+1 & \end{array}$$

Як бачимо, для інтегрування раціональних функцій достатньо навчитися інтегрувати правильні раціональні дроби.

Для нас буде важливим таке твердження: *кожний многочлен $Q(x)$ степеня $n \geq 3$ з дійсними коефіцієнтами можна розкласти єдиним чином на дійсні лінійні і незвідні квадратичні множники:*

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots(x^2+rx+s)^{\mu}, \qquad (5)$$

де всі числа $a, \ldots, b, p, q, \ldots, r, s$ *– дійсні,* $\frac{p^2}{4} - q < 0, \ldots, \frac{r^2}{4} - s < 0$, *всі числа* $\alpha, \ldots, \beta, \lambda, \ldots, \mu$ *– натуральні,* $\alpha + \ldots + \beta + 2\lambda + \ldots + 2\mu = n$, *причому, не обмежуючи загальності, можна вважати коефіцієнт при старшому степені* x *в многочлені* $Q(x)$ *рівним* 1.

Приклади.

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1), \quad x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$$

$$x^3(x^2-3x+2)^2(x^3+1)^2 = x^3(x-1)^2(x-2)^2(x+1)^2(x^2-x+1)^2$$

Виявляється, що інтегрування будь-якого правильного дробу можна звести до інтегрування простих раціональних дробів. Має місце така

Теорема. *Якщо* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *– правильний нескоротний раціональний дріб, знаменник якого подано у вигляді добутку дійсних лінійних і незвідних квадратичних множників:*

$$g(x) = (x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots(x^2+rx+s)^{\mu},$$

то дріб можна подати у вигляді суми простих раціональних дробів:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} + \qquad (6)$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{(x^2+px+q)^{\lambda}} + \ldots +$$

$$+ \frac{R_1x+S_1}{x^2+px+q} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{(x^2+px+q)^{\mu}},$$

де $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, R_1, S_1, R_2, S_2, \ldots$ *– деякі дійсні числа.*

Іншими словами, теорема стверджує, що прості раціональні дроби, у вигляді суми яких подається даний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$, утворюють групи, що відповідають множникам розкладу знаменника $g(x)$, причому число доданків у кожній групі дорівнює показнику степеня згаданого множника (що, однак, не позбавляє можливості перетворення того чи іншого простого дробу в нуль).

Практично розклад конкретного правильного дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ на суму простих раціональних дробів звичайно виконують методом невизначених коефіцієнтів. Для цього розкладають знаменник $g(x)$ на добуток дійсних лінійних і квадратичних множників, записують розклад дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ за схемою (6) з невизначеними коефіцієнтами, потім множенням обох частин на $g(x)$ звільняються від знаменників. Оскільки рівність між многочленом $f(x)$ і многочленом, який буде у правій частині, має місце для всіх значень x *), то коефіцієнти при однакових степенях змінної x рівні між собою. Дістанемо, таким чином, систему n лінійних рівнянь з n невідомими, з якої визначимо невідомі коефіцієнти. Існування єдиного розв'язку такої системи випливає з наведеної теореми.

Приклади.

1. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}dx$.

Δ Розкладаємо підінтегральну функцію на прості дроби:

$$\frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x},$$

звідки

$$3x^2+3x+12 = Ax(x+2) + Bx(x-1) + C(x-1)(x+2). \qquad (7)$$

Не розкриваючи дужок, прирівнюємо коефіцієнти:

$$\begin{array}{ll|l} \text{при} & x^2 & A+B+C = 3, \\ \text{при} & x & 2A-B+C = 3, \\ \text{при} & x^0 & \qquad -2C = 12. \end{array}$$

З цієї системи знаходимо: $C = -6,\ A = 6,\ B = 3$.

У цьому прикладі вигідно скористатися так званим методом частинних значень, який швидше приводить до мети, коли знаменник має тільки дійсні корені. Справді, покладаючи в тотожності (7) по черзі $x = 0,\ 1,\ -2$, дістанемо

$$12 = -2C,\ 18 = 3A,\ 18 = 6B,$$

звідки $C = -6,\ A = 6,\ B = 3$. Отже,

$$\frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x} = \frac{6}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{6}{x},$$

і

$$I = \int \frac{6}{x-1}dx + \int \frac{3}{x+2}dx - \int \frac{6}{x}dx =$$

---

*) Рівність справедлива для всіх x, відмінних від $a, \ldots, b$ за умовою. Для $x = a, \ldots, b$ вона виконується внаслідок неперервності.

$$= 6\ln|x-1| + 3\ln|x+2| - 6\ln|x| + C. \ \blacktriangle$$

2. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{4x}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$.

Δ Тут

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

звідки

$$4x = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2. \qquad (8)$$

У даному випадку для визначення невідомих коефіцієнтів доцільно комбінувати вказані два способи. Беручи $x=1$, знаходимо $B=2$. Більше дійсних коренів знаменник не має. Корисно порівняти коефіцієнти при найвищих степенях x. У правій частині тотожності (8) маємо многочлен третього степеня. Не розкриваючи дужок, неважко обчислити коефіцієнт при x^3. Він дорівнює $A+C$. Оскільки у лівій частині x^3 нема, то $A+C=0$. Щоб одержати ще два рівняння, покладемо в (8) $x=0$ і $x=-1$. Знаходимо

$$0 = -A+B+D; \ -4 = -4A+2B+4(-C+D).$$

З одержаних рівнянь знаходимо: $A=0,\ B=2,\ C=0,\ D=-2$. Отже,

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2+1},$$

тому

$$I = \int\frac{2}{(x-1)^2}dx - \int\frac{2}{x^2+1}dx = -\frac{2}{x-1} - 2\mathrm{arctg}x + C. \ \blacktriangle$$

3. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$.

Δ Тут $\frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$, звідки

$$x^2+2x+7 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1) + (Dx+E)(x-2).$$

Покладаючи $x=2$, знаходимо $15=25A$, $A=\frac{3}{5}$. Порівнюючи коефіцієнти, дістанемо:

$$\begin{array}{ll|rl}
\text{при} & x^4 & A+B=0,\text{звідси} & B=-\frac{3}{5}; \\
\text{при} & x^3 & -2B+C=0,\text{звідси} & C=-\frac{6}{5}; \\
\text{при} & x^2 & 2A+B-2C+D=1,\text{ звідси} & D=-2; \\
\text{при} & x^2 & A-2C-2E=7,\text{звідси} & E=-2.
\end{array}$$

Тоді

$$I=\int\left[\frac{3}{5(x-2)}-\frac{3}{5}\cdot\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{2(x+1)}{(x^2+1)^2}\right]dx=$$

$$=\frac{3}{5}\ln|x-2|-\frac{3}{10}\ln(x^2+1)-\frac{6}{5}\mathrm{arctg}x+\frac{1}{x^2+1}-2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Застосовуючи до останнього інтеграла рекурентну формулу, знайдемо

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x.$$

Отже, $I=\frac{3}{5}\ln|x-2|-\frac{3}{10}\ln(x^2+1)+\frac{1-x}{x^2+1}-\frac{11}{5}\mathrm{arctg}x+C$. ▲

З подання (6) видно, що інтеграл від раціональної функції є елементарною функцією. Однак невірно думати, що інтеграл від кожної елементарної функції завжди буде елементарною функцією. Наприклад, інтеграли

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int\sin x^2dx,\quad \int\cos x^2dx,\quad \int\frac{e^x}{x}dx,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-a^2\sin^2 x}},\quad \int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\frac{\cos x}{x}dx,\quad \int\frac{dx}{\ln x},$$

існування яких забезпечується неперервністю підінтегральних функцій, як давно доведено, не виражаються через елементарні функції. Вони є функціями нової природи, функціями неелементарними (вищими трансцендентними). Далі ми ознайомимося з методом обчислення і цих інтегралів.

Зауваження. Загальний метод не доцільно застосовувати, якщо безпосередньо видно простіший шлях. Наприклад, інтеграл $\int\frac{x^2dx}{x^3-1}$ простіше береться підстановкою $x^3-1=t$, інтеграл $\int\frac{xdx}{x^4+x^2+1}$ – підстановкою $x^2=t$, а інтеграл $\int\frac{x^3dx}{(x+1)^4}$ – підстановкою $x+1=t$.

1.7. Інтегрування деяких ірраціональних виразів

Розглянемо інтеграли від деяких типів ірраціональних функцій, які приводяться до інтегралів від раціональних функцій.

1. Інтеграли, які містять різні радикали з дробово-раціональної функції. Це інтеграли вигляду

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right]dx \qquad (9)$$

де R – раціональна функція своїх аргументів (інакше кажучи R вказує, що над величинами, які знаходяться в квадратних дужках, здійснюються лише раціональні операції: додавання, віднімання, множення і ділення), a, b, c, d – деякі дійсні сталі, m, n, p, q – натуральні.

Нехай k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \dots, \frac{p}{q}$. Якщо ввести підстановку $\frac{ax+b}{cx+d} = t$, то, очевидно, x, $\frac{dx}{dt}$ і вирази $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}$ будуть раціональними функціями змінної t, і інтеграл (9) зведеться до інтеграла від раціонального дробу.

Розглянемо *частинні випадки*.

а) Якщо $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, то дістанемо інтеграл, який містить радикали лише від незалежної змінної x:

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{p}{q}}\right)dx \qquad (9')$$

і раціоналізується підстановкою $x = t^k$.

б) Коли інтеграл містить лише один радикал з дробово-лінійної функції

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}\right]dx \qquad (9'')$$

то, очевидно він раціоналізується підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$.

Приклади.

1. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Δ Насамперед знаходимо спільний знаменник дробових показників степенів $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$. Він дорівнює 12. Тому інтеграл раціоналізується підстановкою $x = t^{12}$, звідки $t = x^{\frac{1}{12}}, \sqrt{x} = t^6, \sqrt[4]{x} = t^3, \sqrt[3]{x^2} = t^8, dx = 12t^{11}dt$.

Отже,

$$I = \int \frac{t^8 - t^3}{t^6} \cdot 12t^{11}dt = 12\int \left(t^{13} - t^8\right)dt = 12\left(\frac{t^{14}}{14} - \frac{t^9}{9}\right) + C =$$

$$= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C. \ \blacktriangle$$

2. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

Δ Нехай

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t, \quad x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Тоді

$$I=\int\frac{1}{\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\cdot t\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt=-\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{t}+C=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C. \ ▲$$

3. Обчислити інтеграл $\int\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt[6]{x-1})}\,dx$.

Δ Нехай

$$\sqrt[12]{x-1}=t, \ x-1=t^{12}, \quad dx=12t^{11}dt.$$

Тоді

$$I=12\int\frac{(t^4+t^3)t^{11}}{t^{12}(1+t^2)}\,dt=12\int\frac{t^3+t^2}{t^2+1}\,dt=12\int\left(t+1+\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=12\left(\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\mathrm{arctg}\,t\right)+C=$$

$$=6\sqrt[6]{x-1}+12\sqrt[12]{x-1}-6\ln\left(\sqrt[6]{x-1}+1\right)-12\,arctg\sqrt[12]{x-1}+C.$$

2. Біноміальні інтеграли. Інтеграли типу

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{10}$$

де m, n, p – раціональні числа, називають *біноміальними інтегралами*.

Якщо p – ціле число, то це інтеграл типу (9'), тому він раціоналізується підстановкою $x=t^k$, де k – спільний знаменник дробів m і n.

Нехай тепер p – дробове число. Виконаємо підстановку

$$x^n=t, \quad x=t^{\frac{1}{n}}, \quad dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt,$$

тоді

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^t\,dt.$$

Бачимо, що при $\frac{m+1}{n}$ цілому одержаний інтеграл типу (9''), тому він раціоналізується підстановкою

$$t=\sqrt[k]{a+bt}=\sqrt[k]{a+bx^n}, \tag{11}$$

де k – знаменник дробу p.

Записавши останній інтеграл у вигляді

$$\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt,$$

бачимо, що при $\frac{m+1}{n}+p$ цілому ми дістали інтеграл типу (9''), тому він раціоналізується підстановкою

$$t=\sqrt[k]{\frac{a+bt}{t}}=\sqrt[k]{ax^{-n}+b}. \qquad (12)$$

Отже, біноміальний інтеграл виражається через елементарні функції, якщо хоча одне з чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле.

Цікаво, що в усіх інших випадках біноміальний інтеграл не виражається через елементарні функції – це було встановлено П.Л. Чебишовим.

Приклади.

1. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$.

∆ Тут $m=-\frac{2}{3}, n=\frac{1}{3}, p=\frac{1}{2}$. Оскільки $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}}=1$, то маємо 2-й випадок інтегровності. Зауваживши, що $k=2$, покладемо $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$ $x=(t^2-1)^3$, $dx=6(t^2-1)^2tdt$. Тоді

$$I=\int\frac{t}{(t^2-1)^2}6(t^2-1)^2tdt=6\int t^2dt=6\frac{t^3}{3}+C=2\sqrt{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}+C. ▲$$

2. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{2+3x^2}}dx=\int x^{-2}(2+3x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$.

∆ У даному випадку $m=-2,\ n=2,\ p=-\frac{1}{2}$, так що $\frac{m+1}{n}+p=-1$ (третій випадок). Застосувавши підстановку

$$t=\sqrt{2x^{-2}+3},\quad x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2-3}},\quad dx=-\frac{\sqrt{2}tdt}{\sqrt{(t^2-3)^3}},$$

дістаємо

$$\int\frac{-\frac{\sqrt{2}tdt}{\sqrt{(t^2-3)^3}}}{\frac{2}{t^2-3}\sqrt{2+3\cdot\frac{2}{t^2-3}}}=-\frac{1}{2}\int dt=-\frac{1}{2}t+C=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{x^2}+3}+C. ▲$$

Зауваження. Можна також показати, що в другому випадку інтеграл раціоналізується підстановкою $a+bx^n=t$, а в третьому – $ax^{-n}+b=t$. В останньому випадку, перед тим як виконувати підстановку, корисно подати підінтегральний вираз у такій формі:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\int x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p dx.$$

3. **Інтегрування квадратичних ірраціональностей**. Мова йтиме про інтеграли типу

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \qquad (13)$$

де $a \neq 0$, b, c – деякі дійсні числа, квадратний тричлен ax^2+bx+c не має рівних коренів, R – раціональна функція відносно x і $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Доведемо, що інтеграл (13) завжди можна перетворити в інтеграл від раціональної функції за допомогою однієї з трьох підстановок, вказаних Л. Ейлером.

Перша підстановка Ейлера. Спочатку розглянемо випадок, коли квадратний тричлен ax^2+bx+c має уявні корені. У цьому випадку $b^2-4ac<0$ і, як це видно з рівності

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right],$$

знак квадратного тричлена збігається зі знаком a. А оскільки за смислом квадратний тричлен (з якого добувається квадратний корінь) додатний, то $a>0$. Отже, можна зробити підстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}. \qquad (14)$$

Піднесенням до квадрату обох частин рівності (14), дістанемо

$$bx+c=t^2\pm 2\sqrt{a}tx,$$

звідки видно, що x, а, отже, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ і $\frac{dx}{dt}$ раціонально виражаються через змінну t.

Друга підстановка Ейлера. Ця підстановка застосовується тоді, коли в квадратному тричлені $c>0$. Підстановка має вигляд

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}.$$

Піднісши обидві частини цієї рівності до квадрата, дістаємо

$$ax^2+bx+c=t^2x^2+2tx\sqrt{c}+c,$$

звідки

$$x=\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}.$$

Отже, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ і $\frac{dx}{dt}$ раціонально виражаються через змінну t.

Третя підстановка Ейлера. Розглянемо випадок, коли квадратний тричлен ax^2+bx+c має дійсні нерівні корені α і β. В цьому випадку

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Застосуємо підстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t,$$

яку можна записати у вигляді

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t.$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи, дістанемо

$$a(x-\alpha)=(x-\beta)t^2.$$

Звідси видно, що x, а отже, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ і $\frac{dx}{dt}$ раціонально виражаються через змінну t.

Приклади.

1. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Δ Тут $a=1>0$, тому застосуємо підстановку $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$. Підносячи до квадрата обидві частини цієї рівності і виконавши зведення подібних членів, одержимо $2x+2xt=t^2-2$, звідки

$$x=\frac{t^2-2}{2(1+t)};\quad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt;$$

$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}.$$

Підставивши знайдені величини в інтеграл, одержимо

$$I=\int\frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{(t^2+4t+4)2(1+t)^2}dt=\int\frac{(t^2+2t+2)dt}{(t+1)(t+2)^2}.$$

Одержаний правильний раціональний дріб розкладаємо на найпростіші дроби:

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{C}{(t+2)^2}.$$

Методом невизначених коефіцієнтів знаходимо $A=1$, $B=0$, $C=-2$. Отже,

$$\int\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}dt=\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C.$$

Повертаючись до змінної x, одержимо

$$I=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C.\ \blacktriangle$$

2. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{9+4x-x^2}}$.

Δ Тут $c=9>0$. Застосуємо другу підстановку Ейлера

$$\sqrt{9+4x-x^2}=tx+\sqrt{9}=tx+3.$$

Піднісши обидві частини до квадрата, маємо

$$9+4x-x^2=t^2x^2+6tx+9,$$

звідки

$$x = \frac{4-6t}{t^2+1}.$$

Тоді

$$dx = \frac{-6(t^2+1)-(4-6t)2t}{(t^2+1)^2}dt = 2\frac{3t^2-4t-3}{(t^2+1)^2}dt;$$

$$\sqrt{9+4x-x^2} = tx+3 = t\frac{4-6t}{t^2+1}+3 = \frac{-3t^2+4t+3}{t^2+1};$$

$$x-2 = \frac{4-6t}{t^2+1}-2 = \frac{-2t^2-6t+2}{t^2+1}.$$

Підставляючи знайдені величини в інтеграл, одержуємо

$$I = \int\frac{dt}{t^2+3t-1} = \int\frac{d\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}} = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}}\right|+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2t+3-\sqrt{13}}{2t+3+\sqrt{13}}\right|+C.$$

Підставивши сюди значення

$$t = \frac{\sqrt{9+4x-x^2}-3}{x},$$

остаточно знаходимо

$$I = \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\sqrt{9+4x-x^2}+(3-\sqrt{13})x-6}{2\sqrt{9+4x-x^2}+(3+\sqrt{13})x-6}\right|+C. \blacktriangle$$

3. Обчислити інтеграл $I = \int\frac{xdx}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3}$.

Δ В даному випадку $a<0$ і $c<0$, тому ні першу, ні другу підстановки Ейлера застосувати не можна. Але квадратний тричлен $7x-10-x^2$ має дійсні корені $\alpha=2, \beta=5$, тому застосуємо третю підстановку Ейлера:

$$\sqrt{7x-10-x^2} = \sqrt{(x-2)(5-x)} = (x-2)t.$$

Звідси

$$5-x = (x-2)t^2; \quad x = \frac{5+2t^2}{1+t^2}; \quad dx = -\frac{6tdt}{(1+t^2)^2};$$

$$(x-2)t = \left(\frac{5+2t^2}{1+t^2}-2\right)t = \frac{3t}{1+t^2}.$$

Отже,

$$I=-\frac{6}{27}\int\frac{5+2t^2}{t^2}dt=-\frac{2}{9}\int\left(\frac{5}{t^2}+2\right)dt=-\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)+C.$$

Підставивши сюди значення

$$t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2},$$

остаточно знаходимо

$$I=\frac{2}{9}\left(\frac{5(x-2)}{\sqrt{7x-10-x^2}}-\frac{2\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}\right)+C. \quad ▲$$

1.8. Спеціальні способи інтегрування деяких квадратичних ірраціональностей

Підстановки Ейлера хоча і мають принципове значення в розв'язанні питання про інтегровність виразів вигляду $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, однак на практиці нерідко приводять до складних обчислень. Тому при інтегруванні вказаних виразів частіше користуються іншими способами. Зупинимося на деяких з них.

а) Інтеграли типу

$$I=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

доцільно обчислювати шляхом виділення повного квадрата у підкореневому виразі і застосування лінійної підстановки.

Приклад.

Обчислити інтеграл $I=\int\frac{x+2}{\sqrt{2+4x-x^2}}dx$.

∆ Оскільки $2+4x-x^2=6-(x-2)^2$, то підстановка $x-2=t$ дає

$$I=\int\frac{t+5}{\sqrt{6-t^2}}dt=\int\frac{tdt}{\sqrt{6-t^2}}+5\int\frac{dt}{\sqrt{6-t^2}}=-\sqrt{6-t^2}+5\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}}+C=$$

$$=-\sqrt{2+4x-x^2}+5\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}}+C. ▲$$

б) Інтеграли типу

$$I=\int\frac{Ax+B}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

приводяться до попереднього випадку підстановкою $\alpha x+\beta=\frac{1}{y}$.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-3}}$.

Δ Нехай $x = \frac{1}{y}$. Тоді $dx = -\frac{dy}{y^2}$, $\sqrt{5x^2-3} = \frac{\sqrt{5-y^2}}{|y|}$. Оскільки $y > 0$ при $x > 0$, то $\sqrt{5x^2-3} = \frac{1}{y}\sqrt{5-3y^2}$, а

$$I = -\int \frac{dy}{y^2 \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}\sqrt{5-3y^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{5-3y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}y)}{\sqrt{5-(\sqrt{3}y)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{5}} + C = -\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{5}} + C.$$

При $x < 0$, очевидно, $I = \frac{1}{3}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{5}} + C$.

Зауваження. Підстановкою $x = \frac{1}{y}$ можна обчислити і такі інтеграли

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}.$$

в) Інтеграли типу

$$I = \int \frac{Ax\,dx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}$$

доцільно обчислювати підстановкою $\sqrt{ax^2+c} = t$.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{xdx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$.

Δ Нехай $\sqrt{x^2+4} = t$. Тоді $x^2 = t^2 - 4$, $xdx = tdt$, тому

$$I = \int \frac{tdt}{[2(t^2-4)+1]t} = \int \frac{dt}{2t^2-7} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}\,t)^2 - 7} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-\sqrt{7}}{\sqrt{2}t+\sqrt{7}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+4}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+4}+\sqrt{7}}\right| + C.\ \blacktriangle$$

г) Інтеграли типу

$$I = \int \frac{A\,dx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}$$

доцільно обчислювати підстановкою $\sqrt{ax^2+c} = xt$.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$.

Δ Нехай $\sqrt{x^2+4}=xt$. Тоді $x^2=\frac{4}{t^2-1}$, $xdx=-\frac{4tdt}{(t^2-1)^2}$ і

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{dx}{xt}=\frac{xdx}{x^2t}=-\frac{4tdt}{(t^2-1)^2}:\frac{4t}{t^2-1}=\frac{dt}{1-t^2}.$$

Тому

$$\int\frac{\frac{dt}{1-t^2}}{2\cdot\frac{4}{t^2-1}+1}=-\int\frac{dt}{t^2+7}=-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{7}}+C.\blacktriangle$$

Зауваження. Для обчислення інтеграла типу

$$I=\int\frac{A\,dx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}$$

подамо його у вигляді суми інтегралів в) і г).

д) Якщо в інтегралах вигляду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ згорнути тричлен і виконати належну лінійну підстановку, то зведемо їх до інтегралів

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\quad \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\quad \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,$$

які за допомогою відповідних тригонометричних підстановок $x=a\sin t$, $x=a\operatorname{tg}t$, $x=\frac{a}{\cos t}$ зводяться до інтегралів від виразів, раціональних відносно синуса і косинуса.

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

Δ Нехай $x=\operatorname{tg}t$. Тоді $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$. Тому

$$I=\int\cos t\,dt=\sin t+C=\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.\ \blacktriangle$$

е) Інтеграли вигляду

$$\int\frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

де $P_m(x)$ – многочлен степеня m, обчислюються за формулою зведення:

$$\int\frac{P_m(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $P_{m-1}(x)$ – многочлен степеня $m-1$, а λ – деяке стале число.

Коефіцієнти многочлена $P_{m-1}(x)$ і стале число λ знаходяться методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

Δ Тут $P_m(x)=x^3-x-1$. Отже $P_{m-1}(x)=Ax^2+Bx+D$. Будемо шукати інтеграл у вигляді

$$\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=(Ax^2+Bx+D)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Щоб визначити коефіцієнти A, B, D і λ, продиференціюємо ліву і праву частину останньої рівності

$$I'=\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2}+$$

$$+(Ax^2+Bx+D)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Зводимо до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники

$$x^3-x-1=(2Ax+B)(x^2+2x+2)+(Ax^2+Bx+D)(x+1)+\lambda.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь:

$$2A+A=1,\quad B+4A+B+A=0,$$
$$2B+4A+D+B=-1,\quad 2B+D+\lambda=-1.$$

Розв'язуючи систему, одержуємо $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{5}{6}$, $D=\frac{1}{6}$, $\lambda=\frac{1}{2}$.

Таким чином,

$$I=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.\ \blacktriangle$$

1.9. Інтегрування деяких тригонометричних виразів

1. Універсальна тригонометрична підстановка. Нехай під знаком інтеграла знаходиться раціональна функція від тригонометричних функцій $\sin x$, $\cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$. Оскільки всі тригонометричні функції виражаються раціонально через $\sin x$ і $\cos x$, то достатньо розглянути інтеграл вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx. \tag{15}$$

Враховуючи, що синус і косинус виражаються раціонально через тангенс половинного кута

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

і похідна арктангенса раціональна, зауважуємо, що інтеграл (15) за допомогою підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ *) зводиться до інтеграла від раціональної функції

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R(t)dt.$$

Приклад.

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

2. Деякі частинні випадки. Універсальна тригонометрична підстановка нерідко приводить до громіздких викладок, і тому доводиться звертатись до інших підстановок.

а) Нехай функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$, тобто

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

тоді $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ також раціональна відносно $\sin x$ і $\cos x$. Крім того

$$\frac{R(\sin x, -\cos x)}{-\cos x} = \frac{-R(\sin x, \cos x)}{-\cos x} = \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x},$$

тобто функція $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ парна відносно $\cos x$ і тому може містити $\cos x$ тільки в парних степенях, які раціонально виражаються через $\sin x$. З рівності

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x dx = \int R_1(\sin x)d(\sin x)$$

видно, що в цьому випадку застосовна підстановка $\sin x = t$.

---

*) Ця рівність тягне за собою використовувану нами рівність тільки при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ або $-\pi < x < \pi$. Однак внаслідок періодичності функції $R(\sin x, \cos x)$ цього цілком достатньо.

б) Аналогічно, якщо

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ підстановкою $\cos x = t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції.

Приклади.

1. Обчислити інтеграл $I = \int \cos^3 xdx$.

Δ Нехай $\sin x = t$, тоді $\cos xdx = dt$ і

$$I = \int \cos^2 x \cdot \cos xdx = \int (1-t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C. \blacktriangle$$

2. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$.

Δ Нехай $\cos x = t$. Тоді $-\sin xdx = dt$ і тому

$$I = -\int \frac{\sin^3 x}{t^2} \cdot \frac{dt}{\sin x} = -\int \frac{1-t^2}{t^2}dt = \int \frac{t^2-1}{t^2}dt = \int dt - \int \frac{dt}{t^2} =$$

$$= t + \frac{1}{t} = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C. \blacktriangle$$

в) Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то $\int R(\sin x, \cos x)dx$ підстановкою $\operatorname{tg} x = t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\operatorname{tg} x \cos x, \cos x)dx =$$

$$= \int R(\operatorname{tg} x \cos x, \cos x)\cos^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int R_1(\operatorname{tg} x)d(\operatorname{tg} x) = \int R_1(t)dt,$$

враховуючи, що парні степені косинуса виражаються раціонально через $\operatorname{tg} x$.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

Δ Нехай $\operatorname{tg} x = t$. Тоді $\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$, $dx = \frac{dt}{t^2+1}$.

Тому

$$I = \int \frac{(t^2+1)^2(t^2+1)}{t^4(t^2+1)}dt = \int \frac{t^4+2t^2+1}{t^4}dt = \int dt + 2\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t^4} =$$

$$= t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C. \blacktriangle$$

Зауваження 1. Частинними випадками інтеграла типу в) є інтеграли $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ і $\int R(\operatorname{ctg} x)dx$, які беруться відповідно підстановками $\operatorname{tg} x = t$

і $\operatorname{ctg} x = t$. Однак в багатьох випадках обчислення спрощується, якщо скористатись співвідношеннями

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \qquad 1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Приклади.

1. $\int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)dx = \int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg} x dx =$

$$= \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

2. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x} = \int \frac{\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^4 x}dx = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^4 x} - \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} -$

$$-\int \frac{\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}dx = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x} + \int dx = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + x + C.$$

Зауваження 2. Хоча інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ відноситься до типу в), однак у випадку парних m і n обчислювати його простіше заміною парних степенів $\sin x$ і $\cos x$ синусами і косинусами кратних кутів, використовуючи формули $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

Приклад. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2}{8}dx =$

$$= \tfrac{1}{8}\int dx + \tfrac{1}{8}\int \cos 2x dx - \tfrac{1}{8}\int \cos^2 2x dx - \tfrac{1}{8}\int \cos^3 x dx =$$

$$= \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{16}\sin 2x - \tfrac{1}{16}\int (1+\cos 4x)dx - \tfrac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x)d(\sin 2x) =$$

$$= \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{16}\sin 2x - \tfrac{1}{16}x - \tfrac{1}{64}\sin 4x - \tfrac{1}{16}\sin 2x + \tfrac{1}{48}\sin^3 x + C =$$

$$= \tfrac{1}{16}x - \tfrac{1}{64}\sin 4x + \tfrac{1}{48}\sin^3 x + C.$$

г) *Інтегрування добутку синусів і косинусів різних аргументів.* Формули

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

дозволяють добутки синусів і косинусів подати у вигляді лінійних комбінацій синусів і косинусів і можуть бути використані для інтегрування добутків синусів і косинусів.

Повторне застосування цих формул дозволяє обчислити інтеграл типу $\int \cos ax \cos bx \ldots \cos cx dx$ і аналогічні йому від добутків лінійних функцій від x або синусів і косинусів, яке б не було число множників.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int \cos x \cos 3x \cos 5x dx$.

Δ Оскільки $\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$, то

$$\cos x \cos 3x \cos 5x = \frac{1}{2}(\cos 2x \cos 5x + \cos 4x \cos 5x) =$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 7x + \cos x + \cos 9x).$$

Тому

$$I = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{28}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{36}\sin 9x + C. \blacktriangle$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. У чому полягає задача обернена до задачі про відшукання похідної? Дайте означення первісної функції.
2. Чому, крім однієї первісної $F(x)$ для даної функції $f(x)$, існує ще безліч первісних? Доведіть, що всі первісні для даної функції відрізняються на сталу.
3. Дайте означення невизначеного інтеграла. Чому його називають невизначеним? Який його геометричний смисл?
4. Сформулюйте і доведіть основні властивості невизначеного інтеграла.
5. Доведіть формули табличних інтегралів.
6. Чому у формулі $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ під знаком логарифма береться не сама функція u, а її модуль $|u|$?
7. У чому полягає і на чому основана перевірка правильності виконання інтегрування?
8. У чому різниця між виразами: $d\int f(x)dx$ і $\int dF(x)dx$?
9. У чому полягає і на чому оснований метод розкладання при інтегруванні функцій?
10. Сформулюйте і доведіть теореми, які лежать в основі правила заміни змінної під знаком інтеграла.
11. Виведіть формули для обчислення інтегралів
$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$
12. У чому полягає метод інтегрування частинами і коли ним доцільно користуватись? Укажіть типи інтегралів, які можна обчислювати тільки цим методом.
13. Виведіть формулу для обчислення інтеграла $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du$.
14. Виведіть формули для обчислення інтегралів вигляду

$$\int e^{ax}\sin bx dx, \qquad \int e^{ax}\cos bx dx.$$

15. Виведіть формулу для обчислення інтеграла вигляду $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.
16. Доведіть інтегровність найпростіших (елементарних) дробів.
17. Сформулюйте теорему, яка лежить в основі інтегрування раціональних дробів.
18. У чому полягає застосування методу невизначених коефіцієнтів до розкладання правильного дробу в суму елементарних?
19. За допомогою яких функцій виражається в скінченному вигляді інтеграл від будь-якої раціональної функції?
20. Як обчислюються інтеграли вигляду:

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{p}{q}}\right)dx, \qquad \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}\right]dx.$$

21. Як інтегруються біноміальні диференціали?
22. Інтеграли якого типу інтегруються за допомогою підстановок Ейлера? Розгляньте вказані три підстановки.
23. Як доцільно обчислювати інтеграли вигляду:

$$I = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \qquad I = \int \frac{Ax+B}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx?$$

24. Як доцільно обчислювати інтеграли вигляду:

$$I = \int \frac{Ax\,dx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}, \qquad I = \int \frac{B\,dx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}?$$

25. Чи можна інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ обчислювати за допомогою тригонометричних підстановок? Якщо так, то як це можна зробити?
26. Як обчислюються інтеграли вигляду: $\int R(\sin x, \cos x)dx$?
27. В яких випадках підінтегральний вираз інтеграла вигляду: $\int R(\sin x, \cos x)dx$ раціоналізується за допомогою підстановок $\cos x = t$, $\sin x = t$, $\operatorname{tg} x = t$?
28. Як обчислюються інтеграли вигляду: $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ і $\int R(\operatorname{ctg} x)dx$?
29. Як обчислюються інтеграли вигляду: $\int \sin^m x \cos^n x dx$?
30. Як обчислюються інтеграли вигляду:

$$\int \sin ax \cos bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx, \quad \int \sin ax \sin bx dx?$$

31. Як обчислюються інтеграли вигляду:

$$\int f(e^x)dx, \quad \int P(x)e^{ax}dx, \quad \int x^{\alpha}P(\ln x)dx?$$

32. Як обчислюються інтеграли вигляду:

$$\int P(x)\sin axdx, \quad \int P(x)\sin^k xdx, \quad \int P(\arcsin x)dx?$$

33. Як обчислюються інтеграли вигляду:

$$\int P(x)\arcsin xdx, \quad \int P(x)\operatorname{arctg} xdx, \quad \int P(x)\ln|R(x)|dx?$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Використовуючи таблицю основних формул інтегрування, знайти такі інтеграли:

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$. *Відп.* $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

2. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$. *Відп.* $e^x+e^{-x}+C$

3. $\int \frac{\sin^3 x+1}{\sin^2 x}dx$. *Відп.* $-\cos x-\operatorname{ctg} x+C$.

4. $\int\left(\sec^2 x-\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$. *Відп.* $\operatorname{tg} x-2\arcsin\frac{x}{2}+C$.

5. $\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}}-\frac{b}{x^2}+3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$. *Відп.* $4a\sqrt{x}+\frac{b}{x}+\frac{9}{5}cx^{\frac{5}{3}}+C$.

6. $\int \frac{2x^3-3x\sqrt[3]{x}+5x\sqrt[5]{x^2}}{x\sqrt{x}}dx$. *Відп.* $\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{18}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{50}{9}\sqrt[10]{x^9}+C$.

7. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$. *Відп.* $\sin x-\cos x+C$.

8. $\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}}dx$. *Відп.* $2x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

9. $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}dx$. *Відп.* $-\frac{2}{x}+\operatorname{arctg} x+C$.

10. $\int \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x}dx$. *Відп.* $\sin x-\cos x+C$.

Використовуючи метод підстановки, знайти інтеграли:

11. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$. *Відп.* $\frac{1}{3}\ln^3 x+C$. 12. $\int e^{\sin x}\cos xdx$. *Відп.* $e^{\sin x}+C$.

13. $\int(\sin 15x-\cos 3x)dx$. *В.* $-\frac{1}{15}\cos 5x-\frac{1}{3}\sin 3x+C$.

14. $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$. *Biðn.* $-\frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2\right|+C$.

15. $\int \sin^5 2x\cos 2xdx$. *Biðn.* $\frac{1}{12}\sin^6 2x+C$.

16. $\int \sec^2 3x(\operatorname{tg} 3x+1)^4 dx$. *Biðn.* $\frac{1}{15}(\operatorname{tg}3x+1)^5+C$.

17. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{1+2\cos x}}$. *Biðn.* $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+2\cos x)^2}+C$.

18. $\int \cos^3 2x\sin x\cos xdx$. *Biðn.* $-\frac{1}{16}\cos^4 2x+C$.

18. $\int \cos^3 2x\sin x\cos xdx$. *Biðn.* $-\frac{1}{16}\cos^4 2x+C$.

19. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Biðn.* $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$.

20. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$. *Biðn.* $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x+C$.

21. $\int \frac{dx}{\arccos^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$. *Biðn.* $\frac{1}{\arccos x}+C$.

22. $\int \frac{dx}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}$. *Biðn.* $\ln(\arcsin x)+C$.

23. $\int \frac{x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$. *Biðn.* $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+C$.

24. $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$. *Biðn.* $\operatorname{arctg}(\ln x)+C$.

25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. *Biðn.* $\arcsin(\ln x)+C$.

26. $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$. *Biðn.* $\arcsin(\sin^2 x)+C$.

27. $\int \frac{\cos xdx}{4-\sin^2 x}$. *Biðn.* $\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}+C$.

28. $\int \frac{\sec^2 xdx}{3-4\operatorname{tg}^2 x}$. *Biðn.* $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}-2\operatorname{tg} x}+C$.

29. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{25\sin^2 x-1}}$. *Biðn.* $\frac{1}{5}\ln\left|5\sin x+\sqrt{25\sin^2 x-1}\right|+C$.

30. $\int \frac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}}dx$. *Biðn.* $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}-\ln(x+\sqrt{3+x^2})+C$.

31. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$. *Відп.* $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

32. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$. *Відп.* $\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

33. $\int \frac{(5x-1)dx}{2x^2-8x-1}$. *Відп.* $\frac{5}{4}\ln\left(x^2-4x-\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{(x-2)\sqrt{2}-3}{(x-2)\sqrt{2}+3}\right|+C$.

34. $\int \frac{2x+3}{2x^2+x+1}dx$. *Відп.* $\frac{1}{2}\ln(2x^2+3x+1)+\frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}+C$.

35. $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2+3x+1}$. *Відп.* $\frac{3}{2}\ln(x^2+3x+1)-\frac{13}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C$.

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-4x^2}}$. *Відп.* $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+1}{2}$.

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$. *Відп.* $\ln\left|(x+3)+\sqrt{x^2+6x+5}\right|+C$.

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. *Відп.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+C$.

39. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$. *Відп.* $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$.

40. $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$. *Відп.* $-2\sqrt{8-2x-x^2}-5\arcsin\frac{x+1}{3}+C$.

Використовуючи метод інтегрування частинами, знайти інтеграли:

41. $\int x\ln x dx$. *Відп.* $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$.

42. $\int x^2\cos x dx$. *Відп.* $(x^2-1)\sin x+2x\cos x+C$.

43. $\int e^{2x}x^3dx$. *Відп.* $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)+C$.

44. $\int x\sec^2 x dx$. *Відп.* $x\operatorname{tg}x+\ln\cos x+C$.

45. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$. *Відп.* $x\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

46. $\int \frac{\ln x dx}{1+x^2}$. *Відп.* $\ln\frac{x}{1+x}-\frac{\ln x}{1+x}+C$.

47. $\int (1-x-x^2)\cos 3x dx$. *Відп.* $\frac{1}{3}\left(\frac{11}{9}-x-x^2\right)\sin 3x-\frac{1}{9}(1+2x)\cos 3x+C$.

48. $\int e^x\sin x dx$. *Відп.* $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

49. $\int \sin(\ln x)dx$. *Відп.* $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$.

50. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$. *Відп.* $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

Обчислити невизначені інтеграли від раціональних функцій.

51. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$. *Відп.* $\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{2}{5}\ln|x+2|+\frac{3}{20}\ln|x-3|+C$.

52. $\int \frac{(2x^2+5)dx}{(x-2)(x+3)(x-4)}$. *Відп.* $-\frac{13}{10}\ln|x-2|+\frac{23}{35}\ln|x+3|+\frac{37}{14}\ln|x-4|+C$.

53. $\int \frac{x^4-3x^3-3x-1}{x^3-x^2-2x}dx$. *Відп.* $\frac{x^2}{2}+x+\ln x-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}(x+1)+C$.

54. $\int \frac{dx}{x^4-13x^2+36}$. *Відп.* $\frac{1}{30}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+\frac{1}{20}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C$.

55. $\int \frac{(x^2-2x+2)dx}{(x^2+x-2)(x^2-3x)}$. *Відп.* $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2(x-3)}{(x+2)^2(x-1)}\right|+C$.

56. $\int \frac{x^2dx}{(x+1)(x-1)^2}$. *Відп.* $\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{4}\ln|x-1|+C$

57. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$. *Відп.* $-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+C$.

58. $\int \frac{x^2dx}{(x+1)^2(x+1)}$. *Відп.* $\ln|x+1|+\frac{4}{x+2}+C$.

59. $\int \frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}dx$. *Відп.* $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{3}\ln(x^2+2)-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

60. $\int \frac{2xdx}{(1+x)(1+x)^2}$. *Відп.* $\frac{x-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln|1+x|+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C$.

61. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$. *Відп.* $\ln\frac{(x^2-2x+5)^{3/2}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

62. $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$. *Відп.* $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

63. $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+x^2+4x+4}$. *Відп.* $\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

64. $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^3-3x^2+3x-1}$. *Відп.* $\ln|x-1|-\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

65. $\int \frac{x^4dx}{x^4-2x^2+1}$. *Відп.* $\frac{2x^3-3x}{2(x^2-1)}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

Обчислити невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

66. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1-\sqrt[3]{x})}dx$. *Відп.* $\frac{3}{2}x^{2/3}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

67. $\int \frac{3\sqrt{x}dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$. *Відп.* $\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{4x^{\frac{1}{2}}}{3}+4x^{\frac{1}{3}}+16x^{\frac{1}{6}}+32\ln\left|x^{\frac{1}{6}}-2\right|+C$.

68. $\int \frac{5x+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}(x+\sqrt[5]{x^4})}dx$. *Відп.* $15\sqrt[3]{x}+15\ln(\sqrt[12]{x}+1)+C$.

69. $\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$. *Відп.* $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$.

70. $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. *Відп.* $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x+C$.

71. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x^2}$. *Відп.* $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

72. $\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}\cdot\frac{dx}{x^2}$. *Відп.* $C-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}$.

73. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$. *Відп.* $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$.

74. $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$. *Відп.* $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2}+C$.

75. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$. *Відп.* $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{x^2-9}}+C$.

76. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. *Відп.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C$.

77. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. *Відп.* $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C$.

78. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$. *Відп.* $-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1+x}{x}+C$.

79. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}$. *Відп.* $\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}\right|+C$.

80. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$. *Відп.* $-\frac{2}{\sqrt{x^2+2x}}+C$.

81. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$. *Відп.* $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$.

82. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. *Відп.* $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

83. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$. *Відп.* $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$.

84. $\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}dx$. *Відп.* $\frac{10x^{\frac{2}{3}}-16}{15}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}+C$.

85. $\int x^3\left(2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$. *Відп.* $\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}(3x^2-2)}{15}+C$.

Обчислити невизначені інтеграли від тригонометричних функцій.

86. $\int \sin^5 x dx$. *Відп.* $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$.

87. $\int \sin^2 x\cos^3 x dx$. *Відп.* $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$.

88. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$. *Відп.* $\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}+C$.

89. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}dx$. *Відп.* $2\ln|\cos x|+\frac{1}{2\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{2}+C$.

90. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos x}}$. *Відп.* $\frac{5}{14}\sqrt[5]{\cos^{14} x}-\frac{5}{4}\sqrt[5]{\cos^4 x}+C$.

91. $\int \cos^4 x dx$. *Відп.* $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$.

92. $\int \sin^4 x\cos^4 x dx$. *Відп.* $\frac{3x}{128}-\frac{\sin 4x}{128}+\frac{\sin 8x}{1024}+C$.

93. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$. *Відп.* $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x-x+C$.

94. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$. *Відп.* $-\operatorname{ctg} x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+C$.

95. $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$. *Відп.* $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x-x+C$.

96. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$. *Відп.* $\operatorname{tg} x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{3}{2}x+C$.

97. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$. *Відп.* $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln\operatorname{tg} x+C$.

98. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}$. *Biđn.* $\frac{5}{4}\sqrt[5]{\operatorname{tg}^4 x}+C$.

99. $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^3 x}$. *Biđn.* $\frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x}+\frac{3}{2}\sin x-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$.

100. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$. *Biđn.* $\cos x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

101. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$. *Biđn.* $\frac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$.

102. $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$. *Biđn.* $\frac{1}{2}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)+C$.

103. $\int \sin 2x\sin 5x dx$. *Biđn.* $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$.

104. $\int \cos x\cos 3x\cos 5x dx$. *Biđn.* $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\sin x\right)+C$.

105. $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$. *Biđn.* $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C$.

106. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\cos^2 x}$. *Biđn.* $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}+C$.

107. $\int \frac{dx}{3+\sin 2x}$. *Biđn.* $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg} x+1}{2\sqrt{2}}+C$.

108. $\int \frac{2\operatorname{tg} x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$. *Biđn.* $\ln(\operatorname{tg}^2 x+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}+C$.

109. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-2\sin x\cos x-3\cos^2 x}$. *Biđn.* $\operatorname{arctg}(1-\operatorname{tg} x)+C$

110. $\int \frac{(1-\operatorname{ctg} x)dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}$. *Biđn.* $\frac{1}{2}\ln(\operatorname{ctg}^2 x+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}+C$.

РОЗДІЛ II

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум

Задача про площу. Фігуру, обмежену лініями $x=a$, $x=b$, $y=0$ і $y=f(x)$, де $f(x)$ – неперервна невід'ємна функція на відрізку $[a;b]$, називають *криволінійною трапецією* (рис. 2). Нам треба з'ясувати, що доцільно розуміти під площею криволінійної трапеції і знайти метод для її обчислення.

З цією метою природно поділити основу трапеції, відрізок $[a;b]$, на n малих частин точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$$

і через кожну з них провести пряму, паралельну осі Oy, до перетину з кривою $y=f(x)$. При цьому криволінійна трапеція поділиться на n смужок.

Внаслідок неперервності на кожній частині $[x_i;x_{i+1}]$ функція $f(x)$ змінюється мало. Тому без великої похибки функцію на $[x_i;x_{i+1}]$ можна вважати сталою і рівною $f(\xi_i)$, де ξ_i – деяка точка відрізка $[x_i;x_{i+1}]$.

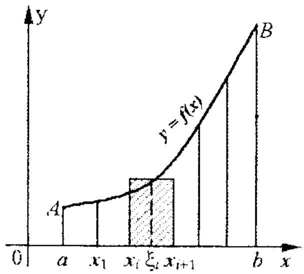


Рис. 2

Замінимо i–ту смужку прямокутником з основою $[x_i;x_{i+1}]$ і висотою $f(\xi_i)$. Тоді вся трапеція заміниться деякою "східчастою" фігурою, складеною з окремих прямокутників. Оскільки площа i–го прямокутника дорівнює $f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$, то площа всієї східчастої фігури дорівнюватиме

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i).$$

Природно чекати, що при зменшенні всіх частинних проміжків ця сума все краще виражатиме площу криволінійної трапеції $aABb$. Позначаючи через λ довжину найбільшого частинного відрізка: $\lambda=\max(x_{i+1}-x_i)$, за площу криволінійної трапеції $aABb$ доцільно прийняти скінченну границю

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i), \qquad (1)$$

якщо вона існує.

Задача про пройдений шлях. Поставимо задачу визначити шлях, пройдений матеріальною точкою за проміжок часу від моменту α до моменту β, якщо відома швидкість руху точки як функція часу: $v = v(x)$.

Для розв'язання цієї задачі поділимо даний проміжок часу на малі проміжки, обмежені моментами

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = \beta .$$

Природно вважати, що на кожному проміжку від t_i до t_{i+1} швидкість змінюється мало. Тому без значної похибки можна вважати її на вказаному проміжку сталою і рівною $v(\tau_i)$, де τ_i – деяка точка відрізка $[t_i;t_{i+1}]$. В такому випадку, шлях, пройдений матеріальною точкою за час $t_{i+1}-t_i$, наближено дорівнюватиме $v(\tau_i)(t_{i+1}-t_i)$, а весь шлях, пройдений точкою за час від α до β, наближено дорівнюватиме

$$\sum_{i=0}^{n-1} v(\tau_i)(t_{i+1}-t_i).$$

Нехай $\lambda = \max(t_{i+1}-t_i)$. Тоді природно чекати, що точно пройдений шлях виразиться границею

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n-1} v(\tau_i)(t_{i+1}-t_i). \qquad (2)$$

Означення визначеного інтеграла. Абстрагуючись від конкретного трактування змінних, припустимо, що функція $f(x)$ визначена і обмежена на деякому відрізку $[a;b]$. Поділимо відрізок $[a;b]$ на частини точками поділу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b \qquad (3)$$

і найбільшу з різниць $(x_{i+1}-x_i)$ позначимо через λ: $\lambda = \max(x_{i+1}-x_i)$. В межах кожного відрізка $[x_i;x_{i+1}]$ візьмемо довільну точку ξ_i і складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i), \qquad (4)$$

яку називають *інтегральною*.

Означення 1. *Число I називається границею інтегральної суми σ при $\lambda \to 0$, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що при всякому поділі, для якого $\lambda < \delta$, і при довільному виборі точок ξ_i справджується нерівність*

$$|\sigma - I| < \varepsilon, \qquad (5)$$

і записують це як звичайно

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I. \qquad (6)$$

Число I, якщо воно існує, залежить, очевидно, тільки від вигляду функції $f(x)$ і від відрізка $[a;b]$.

Означення 2. *Границю інтегральної суми (число I) називають **визначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають*

$$I = \int_a^b f(x)dx. \qquad (7)$$

Якщо для функції $f(x)$ визначений інтеграл існує, то її називають *інтегровною на відрізку* $[a;b]$.

2.2. Існування визначеного інтеграла

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегровна на ньому.*

□ Поділимо відрізок $[a;b]$ довільним чином на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b \qquad (8)$$

і нехай $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i)$. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона буде неперервною і на будь-якій його частині, тому існують найменше і найбільше значення функції $\min\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) = m_i$ і $\max\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) = M_i$. Суми

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \quad \text{і} \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

називають відповідно *нижньою* і *верхньою інтегральними сумами* функції $f(x)$ для поділу (8) відрізка $[a;b]$. Геометричний зміст цих сум видно з рис. 3.

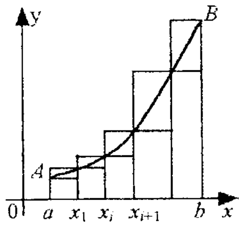


Рис. 3

Оскільки $m_i \le f(x) \le M_i$ для будь-якого $x \in [x_i; x_{i+1}]$, то будь-яка інша інтегральна сума

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

для того ж поділу (8) міститься між s і S:

$$s \le \sigma \le S. \qquad (9)$$

Нижні і верхні інтегральні суми мають такі властивості:

1. *Від приєднання нових точок поділу нижня сума s не зменшується, а верхня сума S не збільшується.*

□ Справді, очевидно, достатньо обмежитись випадком приєднання однієї нової точки поділу x', яка нехай міститься між точками x_i і x_{i+1}: $x_i < x' < x_{i+1}$. Якщо через s' позначити нову нижню інтегральну суму, то від попередньої s вона відрізняється тільки тим, що в сумі s i-тий доданок $m_i(x_{i+1} - x_i)$ замінюється на суму двох: $m_i'(x' - x_i) + m_i''(x_{i+1} - x')$, де $m_i' = \min\limits_{x_i \le x \le x'} f(x)$, $m_i'' = \min\limits_{x' \le x \le x_{i+1}} f(x)$. Оскільки $m_i' \ge m_i$, $m_i'' \ge m_i$, то

$$m_i'(x' - x_i) + m_i''(x_{i+1} - x') \ge m_i(x' - x_i + x_{i+1} - x') = m_i(x_{i+1} - x_i)$$

і тому $s' \ge s$. Аналогічно доводиться, що $S' \le S$. ■

2. *Кожна нижня інтегральна сума не перевищує будь-якої верхньою інтегральної суми.*

□ Дійсно, нехай s_1 – нижня сума, складена для одного поділу, а S_2 – верхня сума, складена для другого поділу. Об'єднуючи точки першого і другого поділів, дістанемо третій поділ з інтегральними сумами s_3 і S_3. За першою властивістю $s_1 \le s_3$ і $S_3 \le S_2$. Оскільки, крім того, $s_3 \le S_3$ внаслідок (9), то $s_1 \le S_2$. ■

За другою властивістю множина $\{s\}$ всіх нижніх інтегральних сум обмежена зверху (будь-якою верхньою сумою S), а тому існує скінченна точна верхня межа $\sup\{s\} = I$, причому

$$s \le I \le S, \tag{10}$$

яка б не була верхня сума S. З нерівностей (9) і (10) дістаємо

$$|I - \sigma| \le S - s = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i). \tag{11}$$

Але неперервна на $[a;b]$ функція $f(x)$ рівномірно неперервна на ньому:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a;b] : |x'' - x'| < \delta \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon,$$

тому, зокрема, $M_i - m_i < \varepsilon$ при $\lambda < \delta$. З нерівності (11) одержуємо

$$|I - \sigma| < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = (b - a)\varepsilon$$

при $\lambda < \delta$, а це означає, що $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$, тобто інтеграл $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ існує.

Можна також показати, що:

1. *Кожна монотонна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ інтегровна на ньому.*

2. *Кожна обмежена на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$, що має скінченну множину точок розриву, інтегровна на ньому.*

2.3. Властивості визначеного інтеграла

Припускатимемо, що всі інтеграли, які нижче розглядаються, існують.

1. *Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt. \tag{12}$$

Це твердження безпосередньо випливає з означення інтеграла як числа, рівного границі інтегральних сум.

2. *Інтеграл з однаковими межами дорівнює за означенням нулю*:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \tag{13}$$

тобто формулу (13) потрібно розглядати як природне поширення поняття інтеграла на відрізок нульової довжини.

3. *При переставленні меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак*:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{14}$$

Ця формула виражає узагальнення поняття інтеграла на випадок, коли відрізок $[a;b]$ при $a < b$ пробігається у напрямку від b до a (в цьому випадку в інтегральній сумі всі різниці $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ мають від'ємний знак).

4. $\int_a^b dx = b - a$ при $a \lessgtr b$. (15)

Справді, якщо $a < b$, то

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} (b-a) = b - a.$$

Коли ж $a \geq b$, то за властивістю 3 маємо:

$$\int_a^b dx = -\int_b^a dx = -(a-b) = b - a.$$

5. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла*:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx. \tag{16}$$

Дійсно, маємо

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} cf(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} c \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

6. *Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від кожної з цих функцій*:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \qquad (17)$$

Дійсно, маємо

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i\right) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

7. *Які б не були числа* $a,\ b,\ c$, *завжди має місце рівність*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (18)$$

Дійсно, нехай спочатку $a < c < b$. Оскільки границя інтегральної суми не залежить від способу поділу відрізка $[a;b]$ на частини, то можна прийняти, що точка c є точкою поділу відрізка. Якщо $c = x_k$, то інтегральну суму можна подати у вигляді двох сум:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=k}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Кожна з цих сум є інтегральною для функції $f(x)$ відповідно для відрізків $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$. Переходом до границі в останній рівності при $\lambda \to 0$ ми й дістаємо рівність (18).

Суть доведеного полягає в тому, що інтеграл по всьому відрізку виявився рівним сумі інтегралів по його частинах.

Інші випадки розміщення точок $a,\ b,\ c$ легко зводяться до попереднього. Нехай, наприклад, $a < b < c$. Тоді за доведеним

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

звідки

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

8. *Якщо функція* $f(x)\ge 0$ *на відрізку* $[a;b]$ *і* $a<b$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0. \tag{19}$$

Справді, кожна інтегральна сума такої функції невід'ємна, тому і границя невід'ємна.

9. *Якщо* $f(x)\ge g(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *і* $a<b$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx, \tag{20}$$

тобто нерівності можна почленно інтегрувати.

Справді,

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx \ge 0,$$

бо $f(x)-g(x)\ge 0$ на $[a;b]$.

10. *Якщо функція* $f(x)$ *задана на відрізку* $[a;b]$, *де* $a<b$, *то*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \tag{21}$$

Дійсно, проінтегрувавши нерівність $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$, маємо

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

а це рівносильно нерівності (21).

Теорема про середнє. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то знайдеться точка* $\xi\in[a;b]$, *в якій*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{22}$$

□ Справді, нехай $a<b$. Оскільки $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то вона набуває на цьому відрізку найменше значення m і найбільше значення M, так що для всіх $x\in[a;b]$ матимемо: $m\le f(x)\le M$. Почленним інтегруванням звідси дістаємо:

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx,$$

тобто

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a), \tag{23}$$

або

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M .$$

Оскільки число

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

міститься між найменшим і найбільшим значеннями неперервної на $[a;b]$ функції $f(x)$, то знайдеться точка $\xi \in [a;b]$ така, що

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \qquad (24)$$

а це рівносильно рівності (22).

Якщо $a > b$, то за доведеним

$$\int_b^a f(x)dx = f(\xi)(a-b),$$

і щоб дістати формулу (22) для цього випадку, достатньо переставити межі інтегрування.

При $a = b$ формула (22), очевидно, має місце. ■

Зокрема, для $f(x) \ge 0$ на $[a;b]$ формула (22) геометрично виражає той факт, що для кожної криволінійної трапеції $aABb$ завжди існує рівновеликий їй прямокутник з тією ж основою і висотою, рівною деякій ординаті кривої $y = f(x)$ (рис. 4).

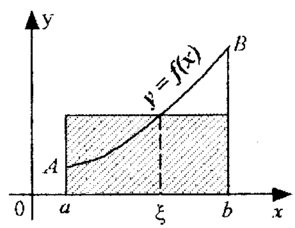


Рис. 4

Приклади.

1. Оцінити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$.

Δ Дослідимо поведінку функції $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. З цією метою знаходимо похідну $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2}$. Оскільки $\cos x > 0$, $x - \operatorname{tg} x < 0$ для $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, то $f'(x) < 0$. Отже, $f(x)$ спадає на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ – найбільше, а $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ – найменше її значення на вказаному відрізку. Тому за формулою (23) маємо

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

або

$$\frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}. \blacktriangle$$

2. Знайти середнє значення функції $f(x) = \cos^2 x$ на відрізку $[0; \pi]$.

Δ За формулою (24) маємо:

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2\pi}(x + \frac{1}{2\pi}\sin 2x)\Big|_0^\pi = \frac{1}{2} \blacktriangle$$

2.4. Існування первісної функції. Формула Ньютона-Лейбніца

Нехай функція неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді вона неперервна, а отже інтегровна, на будь-якому відрізку $[a;x]$, $a \le x \le b$. Інтеграл $\int_a^x f(t)dt$, очевидно, є функцією x, визначеною на відрізку $[a;b]$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Теорема 1. *Похідна визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею дорівнює підінтегральній функції в точці диференціювання*:

$$\frac{d}{dt}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

□ Зафіксуємо будь-яку точку $x \in [a;b]$ і надамо x приросту $\Delta x \ne 0$, але такого, щоб точка $x + \Delta x \in [a;b]$. Тоді функція $\Phi(x)$ одержить приріст

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Оскільки за властивістю адитивності

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

то

$$\Delta\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

звідки за теоремою про середнє

$$\Delta\Phi(x) = f(\xi)\Delta x, \qquad \text{де } \xi \in [x; x+\Delta x].$$

Почленним діленням на $\Delta x \neq 0$ і переходом до границі при $\Delta x \to 0$ з використанням неперервності функції $f(x)$ знаходимо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Отже, в точці x існує похідна $\Phi'(x)$, причому $\Phi'(x) = f(x)$, що рівнозначно рівності, яку доводимо.■

Ця теорема дозволяє довести одну з основних теорем інтегрального числення – теорему про існування первісної.

Теорема 2. *Для кожної функції* $f(x)$, *неперервної на відрізку* $[a;b]$, *існує на ньому первісна, а, отже, і невизначений інтеграл.*

□ Дійсно, для неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$, за теоремою про існування визначеного інтеграла, існує функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \le x \le b.$$

Оскільки $\Phi'(x) = f(x)$, то ця функція є первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. ■

Як показано вище, неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ має на ньому первісні, причому однією з них є функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Нехай $F(x)$ – будь-яка первісна для $f(x)$ на $[a;b]$. Оскільки первісні $\Phi(x)$ і $F(x)$ відрізняються сталим доданком, то має місце рівність

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \qquad a \le x \le b,$$

де C – деяке число. Підставляючи в цю рівність $x = a$, матимемо:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a).$$

Таким чином, для будь-якого $x \in [a;b]$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$$

звідки, зокрема, при $x = b$ одержуємо

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \tag{25}$$

Це і є *формула Ньютона – Лейбніца* – основна формула інтегрального числення. Вона показує, що визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює приросту її первісної на відрізку інтегрування.

Нерідко для стислості різницю $F(b)-F(a)$ позначають символом $F(x)\big|_a^b$. Тоді формула (25) набере вигляду

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b. \qquad (26)$$

Беручи до уваги, що $\int f(x)dx = F(x)+C$ і

$$\int f(x)dx\Big|_a^b = [F(x)+C]\big|_a^b = F(b)+C-F(a)-C = F(b)-F(a) = F(x)\big|_a^b,$$

формулу (26) можна записати у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b. \qquad (27)$$

Тепер стає зрозумілою схожість у позначеннях невизначеного і визначеного інтегралів.

Формула (27) дає спосіб обчислення визначених інтегралів через невизначений інтеграл.

Приклади.

1. $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int \frac{dx}{x}\Big|_1^2 = \ln|x|\big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

2. $\int_a^b \sin x dx = \int \sin x dx\Big|_a^b = -\cos x\big|_a^b = -\cos b + \cos a$.

2.5. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема 1. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, а відрізок $[a;b]$ є множиною значень деякої неперервної диференційовної функції $x=\varphi(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то має місце формула*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (28)$$

□ Нехай $F(x)$ – деяка первісна для функції $f(x)$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \qquad (29)$$

Оскільки функції $F(x)$ і $x=\varphi(t)$ диференційовні на відповідних відрізках, то складена функція $F[\varphi(t)]$ диференційовна на відрізку $[\alpha;\beta]$. За правилом диференціювання складеної функції знаходимо:

$$\left(F[\varphi(t)]\right)' = F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t),$$

тобто функція $F[\varphi(t)]$ є первісною для функції $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$. За формулою Ньютона-Лейбніца та умовами $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ знаходимо

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) \qquad (30)$$

і залишається порівняти (29) і (30). ■

Формула (28) показує, що якщо обчислено інтеграл, що стоїть у лівій частині цієї формули, то також обчислено інтеграл, що стоїть у правій частині, і навпаки. Цю формулу називають ***формулою заміни змінної під знаком визначеного інтеграла***.

Приклади. 1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Δ Застосуємо підстановку $x=\sin t$. Тут $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, функція $x=\sin t$ та її похідна $\cos t$ неперервні на відрізку $[0,\frac{\pi}{2}]$. При зміні t від 0 до $\frac{\pi}{2}$ значення функції $x=\sin t$ не виходить за межі відрізка $[0;1]$. Застосовуючи формулу (28), дістанемо

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{\pi}{4}. \ ▲$$

2. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \ln x \frac{dx}{x}$.

Δ Застосуємо підстановку $\ln x = t$. Оскільки $t=0$ при $x=1$, $t=\ln 2$ при $x=2$, то

$$\int_1^2 \ln x\frac{dx}{x} = \int_0^{\ln 2} t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\ln^2 2. \ ▲$$

Зауваження. При застосуванні підстановки $\psi(x)=t$ треба пам'ятати, що функція $x=\varphi(t)$ (яка одержується з рівняння $\psi(x)=t$, якщо його розв'язати відносно x) повинна задовольняти всі умови заміни змінної у визначеному інтегралі. Якщо хоча одна з цих умов не виконується, то формула (28) може привести до помилкового результату.

Приклад. Очевидно $I=\int_{-1}^{1} dx = 2$, однак коли покласти $t=x^2$, то $t=1$ при $x=-1$ і $x=1$, тому $I=\int_1^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 0$ як інтеграл з однаковими межами.

Помилка тут сталася від того, що функція $t = x^2$ має дві обернені функції $x = \sqrt{t}$ при $x \geq 0$ та $x = -\sqrt{t}$ при $x < 0$ і значення жодної з них для розглядуваних значень t не заповнюють відрізка інтегрування $[-1;1]$. Щоб дістати правильну відповідь, треба подати заданий інтеграл у вигляді суми двох таких інтегралів:

$$\int_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} dx$$

і в першому інтегралі покласти $x = -\sqrt{t}$, а в другому – $x = \sqrt{t}$. Тоді одержимо

$$I_1 = \int_{-1}^{0} dx = -\int_{1}^{0} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} t^{-\frac{1}{2}} dt = t^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 1,$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} dx = \int_{0}^{1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} t^{-\frac{1}{2}} dt = t^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 1,$$

$$I = I_1 + I_2 = 2.$$

Переконаємося, що

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \tag{31}$$

якщо $f(x)$ *парна,*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \tag{32}$$

якщо $f(x)$ *непарна, і*

$$\int_{a+l}^{b+l} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx, \tag{33}$$

якщо $f(x)$ *періодична з періодом* l.

З геометричної точки зору ці формули очевидні, коли інтеграли трактувати як площі з урахуванням знаків. Для аналітичного доведення формул (31) і (32) зауважимо, що завжди

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx. \tag{34}$$

У першому інтегралі праворуч виконаємо заміну змінної $x = -t$. У випадку парності $f(x)$ будемо мати

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx, \tag{35}$$

а у випадку непарності $f(x)$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx. \qquad (36)$$

З (34) і (35) випливає (31), а з (34) і (36) – (32).

Нехай $x = t + l$. Використовуючи періодичність $f(x)$, дістанемо

$$\int_{a+l}^{b+l} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(t+l)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Приклади.

1. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ внаслідок парності підінтегральної функції.

2. $\int_{-5}^{5} \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx = 0$, внаслідок непарності підінтегральної функції.

3. $\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$, оскільки підінтегральна функція періодична з періодом π.

2.6. Інтегрування частинами

Теорема. *Якщо функції* $u(x)$ *і* $v(x)$ *мають неперервні похідні на відрізку* $[a;b]$, *то справедлива така формула інтегрування частинами для визначених інтегралів*:

$$\int_{a}^{b} udv = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} vdu. \qquad (37)$$

□ Оскільки функція uv є первісною для функції $u'v+uv'$, то за формулою Ньютона – Лейбніца

$$\int_{a}^{b} (u'v+uv')dx = uv\Big|_{a}^{b}.$$

Звідси, використовуючи властивість 6 визначених інтегралів, дістаємо

$$\int_{a}^{b} u'vdx + \int_{a}^{b} uv'dx = uv\Big|_{a}^{b},$$

звідки і випливає формула (37).

Приклади.

1. $\int_1^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{vmatrix} = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \frac{dx}{x} =$

$$= (x \ln x - x)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

2. $\int_1^2 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = (xe^x - e^x)\Big|_1^2 = e^2.$

2.7. Наближене обчислення визначених інтегралів

Очевидно, що є сенс наближено обчислювати тільки ті визначені інтеграли, в існуванні яких ми впевнені на основі деякої теоретичної ознаки. До наближеного обчислення визначеного інтеграла звертаються в тих випадках, коли важко чи зовсім неможливо обчислити їх точно. Оскільки визначений інтеграл геометрично виражає площу плоскої фігури, то його наближене значення можна тлумачити як наближене значення площі відповідної фігури. Звідси випливає, що різні способи наближеного обчислення площ можна вважати за способи наближеного обчислення відповідних визначених інтегралів.

Метод наближеного обчислення інтегралів за допомогою прямокутників базується на тому, що інтегральні суми прямують до визначеного інтеграла коли довжина найбільшого з частинних відрізків поділу прямує до нуля.

Нехай задана неперервна функція $f(x) \ge 0$ на відрізку $[a,b]$. Поділимо відрізок $[a,b]$ на рівні частини точками $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ і позначимо $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Довжина кожного з частинних відрізків дорівнюватиме $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Оскільки границя інтегральної суми не залежить від вибору точок ξ_i, то візьмемо, наприклад, $\xi_i = x_{i-1}$. Тепер можна записати

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}). \qquad (38)$$

Якби ми взяли $\xi_i = x_i$, то дістали

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n). \qquad (39)$$

Формули (38) і (39) називають *формулами прямокутників*.

Похибка формули прямокутників $\delta(n) \le \frac{(b-a)^2}{2n} \max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$.

Метод наближеного обчислення інтегралів за допомогою трапецій полягає в заміні елементарної криволінійної трапеції прямокутною трапецією. Обчислення площі так одержаної прямолінійної фігури приводить нас до наближеної рівності

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2},$$

або

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \right), \qquad (40)$$

яку називають ***формулою трапецій***.

Звернемо увагу на те, що права частина формули трапецій є середнє арифметичне правих частин формул прямокутників (38) і (39). Геометрично очевидно, що формула трапецій дає більшу точність наближення, ніж формула прямокутників.

Похибка формули трапецій $\delta(n) \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max\limits_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right|$.

Якщо дугу елементарної криволінійної трапеції замінити на дугу параболи, то можна вивести так звану параболічну формулу (Сімпсона):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + \right.$$

$$\left. +4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) \right], \qquad (41)$$

яка дає результат ще точніший, ніж формула трапецій.

Похибка формули Сімпсона $\delta(n) \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right|$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$ за формулою Ньютона – Лейбніца і за наближеними формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона, розбиваючи інтервал інтегрування на 8 рівних частин. Оцінити похибку одержаних результатів, одержаних за наближеними формулами.

Δ За формулою Ньютона – Лейбніца маємо

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^9 (6x-5)^{\frac{1}{2}} d(6x-5) = \frac{1}{9}(6x-5)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = 38.$$

Далі ділимо відрізок інтегрування $[1;9]$ на 8 рівних частин, знаходимо довжину однієї частини $h=1$, точки поділу x_i, відповідні значення y_i підінтегральної функції $y=\sqrt{6x-5}$ в цих точках: $x_0 = 1$; $x_1 = 2$; … ; $x_8 = 9$; $y_0 = \sqrt{1} = 1{,}0000$; $y_1 = \sqrt{7} = 2{,}6458$; $y_2 = \sqrt{13} = 3{,}6056$;

$y_3 = \sqrt{19} = 4,3589$; $y_4 = \sqrt{25} = 5,0000$; $y_5 = \sqrt{31} = 5,5678$; $y_6 = \sqrt{37} = 6,0828$; $y_7 = \sqrt{43} = 6,5574$; $y_8 = \sqrt{49} = 7,0000$ і обчислюємо інтеграл за наближеними формулами.

За формулою прямокутників (38) $I = \sum_{i=0}^{7} y_i = 34,8183$.

Абсолютна похибка цього наближеного значення (з недостачею) дорівнює $38 - 34,8183 = 3,1817$, а відносна – $\delta = \frac{3,1817}{38} \cdot 100\% \approx 8,37\%$.

За формулою прямокутників (39) $I = \sum_{i=1}^{8} y_i = 40,8183$.

Абсолютна похибка цього наближеного значення (з надлишком) дорівнює $2,8183$, а відносна – $\delta = \frac{2,8183}{38} \cdot 100\% \approx 7,42\%$.

За формулою трапецій $I \approx 4 + \sum_{i=1}^{7} y_i = 37,8183$,

Абсолютна похибка цього результату складає $0,1817$, а відносна – $\delta = \frac{0,1817}{38} \cdot 100\% \approx 0,48\%$.

За формулою Сімпсона $I \approx \frac{1}{3}(8 + 4 \cdot 19,1299 + 2 \cdot 14,6884) \approx 37,9655$.

Абсолютна похибка складає всього $0,0345$, а відносна – $\delta = \frac{0,0345}{38} \cdot 100\% \approx 0,09\%$.

2.8. Невласні інтеграли

2.8.1. ІНТЕГРАЛИ З НЕСКІНЧЕННИМИ МЕЖАМИ ІНТЕГРУВАННЯ

Для існування визначеного інтеграла необхідно, щоб проміжок інтегрування був скінченним, а підінтегральна функція обмежена на ньому: в іншому випадку множина інтегральних сум не буде обмеженою. Можливі випадки, коли одна або обидві умови не виконуються, тобто коли проміжок інтегрування нескінченний або підінтегральна функція не обмежена. Такі інтеграли називаються *невласними*. Розрізняють невласні інтеграли першого і другого роду в залежності від того, чи маємо ми справу з нескінченним проміжком інтегрування чи з необмеженою підінтегральною функцією.

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ при всякому $b > a$.

Означення 1. *Якщо існує скінченна границя* $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, *то її на-*

вають невласним інтегралом функції $f(x)$ *від* a *до* $+\infty$ *і позначають* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, *тобто*

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx. \qquad (42)$$

У цьому випадку говорять, що невласний інтеграл (42) *існує* або *збігається*, в протилежному випадку – *не існує* або *розбігається*.

Легко вияснити геометричний зміст невласного інтеграла у випадку, коли $f(x)\ge 0$. Якщо інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ виражає площу області, яка обмежена кривою $y=f(x)$, віссю абсцис і прямими $x=a$, $x=b$, то природно вважати, що невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ виражає площу необмеженої (нескінченної) області, яка міститься між лініями $y=f(x)$, $x=a$ і віссю абсцис.

Приклад.

Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ $(a>0)$.

Δ Нехай $\alpha\ne 1$. Тоді

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \int\limits_a^b x^{-\alpha}dx = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_a^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Тому, якщо $\alpha>1$, то

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Коли ж $\alpha<1$, то

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty.$$

Нехай $\alpha=1$. Тоді

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln a) = +\infty.$$

Отже, невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ збігається при $\alpha>1$ і розбігається при $\alpha\le 1$.

Перша ознака збіжності. *Якщо додатна на проміжку* $[a;+\infty)$, $a > 0$, *функція* $f(x)$ *задовольняє нерівність* $f(x) \le \frac{M}{x^{\alpha}}$, *де* M *і* α *– деякі додатні числа, причому* $\alpha > 1$, *то невласний інтеграл* (42) *збігається.*

Коли ж $f(x) \ge \frac{M}{x^{\alpha}}$, *де* M *і* α *– деякі додатні числа, причому* $\alpha \le 1$, *то невласний інтеграл* (42) *розбігається.*

□ Оскільки $f(x) > 0$, то при $b \to +\infty$ інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ не спадає. Крім того, $f(x) \le \frac{M}{x^{\alpha}}$, то він обмежений зверху, бо

$$\int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b \frac{dx}{x^{\alpha}} < M\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

Тому існує скінченна границя

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

а це означає, що інтеграл (42) збігається.

Коли ж $f(x) \ge \frac{M}{x^{\alpha}}$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge M\int_a^b \frac{dx}{x^{\alpha}},$$

а оскільки при $\alpha \le 1$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^{\alpha}} = +\infty,$$

то й інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ не має скінченної границі, тобто інтеграл (42) розбігається.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Δ Оскільки $1 \le x < +\infty$, то $1 + x^2 > x^2$, звідки $\sqrt{1+x^2} > x$. Аналогічно, $\sqrt[3]{1+x^3} > x$. Тому

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^3}}<\frac{1}{x^2}.$$

Отже, заданий інтеграл збігається. ▲

2. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

Δ Оскільки $2\le x<+\infty$, то $x^2-1<x^2$, звідки $\sqrt{x^2-1}<x$. Тому

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}}>\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x}>\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}>\frac{1}{x}.$$

Отже, даний інтеграл розбігається. ▲

Друга ознака збіжності *Якщо для додатної на проміжку* $[a;+\infty)$, $a>0$, *функції* $f(x)$ *при* $\alpha>1$ *існує скінченна границя*

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}f(x)=A, \qquad (43)$$

то невласний інтеграл (42) *збігається. Цей же інтеграл розбігається, коли при* $\alpha\le 1$ *існує скінченна чи нескінченна границя*

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}f(x)=A\neq 0. \qquad (44)$$

□ Нехай при $\alpha>1$ існує границя (43). За означенням границі:

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall x: x>N\Rightarrow x^{\alpha}f(x)<A+\varepsilon.$$

Звідси $f(x)<\frac{M}{x^{\alpha}}$, де $M=A+\varepsilon$. Тому за першою ознакою існує інтеграл $\int\limits_N^{+\infty}f(x)dx$. З очевидної нерівності

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_a^{N}f(x)dx+\int\limits_N^{+\infty}f(x)dx \qquad (45)$$

та з існування обох інтегралів справа випливає існування інтеграла зліва.

Нехай тепер при $\alpha\le 1$ існує границя (44). Очевидно, що $A>0$. Тоді

$$\forall M\in(0;A)\exists N>0\forall x: x>N\Rightarrow x^{\alpha}f(x)>M.$$

Звідси $f(x)>\frac{M}{x^{\alpha}}$. Тому за першою ознакою інтеграл $\int\limits_N^{+\infty}f(x)dx$ розбігається, а з ним, внаслідок рівності (45), розбігатиметься і інтеграл (42). ■

Приклади.

1. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Δ Оскільки

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^3}}=\frac{1}{x\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\cdot x\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}},$$

то добуток $x^2 f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}}$, очевидно, прямує до 1 при $x\to+\infty$.

Показник $\alpha=2>1$, отже, цей інтеграл збігається. ▲

2. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

Δ Оскільки

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}},$$

то добуток

$$x^{\frac{1}{3}}f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\to 1$$

при $x\to+\infty$. Показник $\alpha=\frac{1}{3}<1$, отже, інтеграл розбігається. ▲

Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ при кожному $a<b$, то за означенням приймають

$$\int\limits_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b}f(x)dx,$$

коли ця границя існує і скінченна.

Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ при будь-яких a і b, то за означенням приймають

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{+\infty}f(x)dx,$$

де c – деяке число (байдуже яке), коли обидва інтеграли правої частини існують (збігаються).

2.8.2. ІНТЕГРАЛИ ВІД НЕОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ

Означення. *Нехай функція* $f(x)$ *інтегровна на відрізку* $[a;b-\varepsilon]$ *при як завгодно малому* $\varepsilon>0$, *але необмежена на інтервалі* $[b-\varepsilon,b]$. *Якщо* існує *скінченна границя* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$, *то цю границю називають* ***невлас-***

ним інтегралом функції $f(x)$ від a до b і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$, тобто

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (46)$$

У цьому випадку говорять, що невласний інтеграл (46) *існує* або *збігається*, в протилежному випадку – *не існує* або *розбігається*.

Приклад.

Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ $(b>a)$.

Δ Підінтегральна функція перетворюється в нескінченність при $x=b$, в інших точках вона неперервна і, отже, інтегровна. Нехай $\alpha\neq 1$. Тоді

$$\int\limits_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}=-\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_a^{b-\varepsilon}=\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Тому, якщо $\alpha<1$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}=\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Коли ж $\alpha>1$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}=+\infty.$$

Нехай $\alpha=1$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)}=\lim_{\varepsilon\to 0}[-\ln(b-x)]\Big|_a^{b-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]=+\infty.$$

Отже, невласний інтеграл $\int\limits_a^b\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ збігається при $\alpha<1$ і розбігається при $\alpha\geq 1$.▲

Перша ознака збіжності. *Якщо додатна на півінтервалі* $[a,b)$ *функція* $f(x)$ *в точці* b *має нескінченний розрив:* $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=+\infty$ *і задовольняє нерівність* $f(x)\leq\frac{M}{(b-x)^{\alpha}}$, *де* M *і* α *– деякі додатні числа, причому* $\alpha<1$, *то інтеграл* (46) *збігається. Коли ж* $f(x)\geq\frac{M}{(b-x)^{\alpha}}$ *де* M *і* α *– деякі додатні числа, причому* $\alpha\geq 1$, *то інтеграл* (46) *розбігається.*

□ Оскільки $f(x)>0$, то при $\varepsilon\to 0$ інтеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ не спадає.

Крім того, якщо $f(x) \le \frac{M}{(b-x)^{\alpha}}$, то він обмежений зверху, бо

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \le M \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} < M \int_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}.$$

Тому існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

а це означає, що інтеграл (46) збігається.

Коли ж $f(x) \ge \frac{M}{(b-x)^{\alpha}}$, то

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \ge \int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(b-x)^{\alpha}}dx,$$

а оскільки при $\alpha \ge 1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = +\infty,$$

то не існує і скінченної границі $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, тобто інтеграл (46) розбігається. ■

Приклади.

1. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

Δ Підінтегральна функція в точці $x = 1$ перетворюється в нескінченність. Оскільки $0 \le x < 1$, то $x^3 \le x$, $1 - x^3 \ge 1 - x$, $\sqrt{1-x^3} \ge (1-x)^{\frac{1}{2}}$ і

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \le \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Тут $M = 1 > 0$, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Отже, даний інтеграл збігається. ▲

2. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2(1-x)}$.

Δ Підінтегральна функція в точці $x = 1$ перетворюється в нескінченність. Оскільки $0 \le x < 1$, то $1 - x > 0$, $\sin(1-x) < 1 - x$, $\sin^2(1-x) < (1-x)^2$, $f(x) = \frac{1}{\sin^2(1-x)} > \frac{1}{(1-x)^2}$. Тут $M = 1 > 0$, $\alpha = 2 > 1$, тому цей інтеграл розбігається. ▲

Друга ознака збіжності. *Якщо додатна на півінтервалі* $[a,b)$ *функція* $f(x)$ *в точці* b *має нескінченний розрив:* $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty$ *і в цій точці при* $\alpha<1$ *існує скінченна границя*

$$\lim_{x\to b-0}(b-x)^{\alpha} f(x)=A\geq 0, \tag{47}$$

то інтеграл (46) *збігається. Коли ж при* $\alpha\geq 1$ *існує скінченна чи нескінченна границя*

$$\lim_{x\to b-0}(b-x)^{\alpha} f(x)=A>0, \tag{48}$$

то інтеграл (46) *розбігається.*

□ Нехай при $\alpha<1$ існує границя (47). Тоді

$$\forall M>A\exists c\in[a;b)\forall x\in[c;b): M>(b-x)^{\alpha} f(x)$$

або $f(x)<\dfrac{M}{(b-x)^{\alpha}}$. Тому за першою ознакою інтеграл $\int\limits_c^b f(x)dx$ збігається, а з ним, внаслідок очевидної рівності

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx, \tag{49}$$

збігається інтеграл (46).

Нехай при $\alpha\geq 1$ існує границя (48). Тоді

$$\forall M\in(0;A)\exists c\in[a;b)\forall x\in[c;b): M<(b-x)^{\alpha} f(x)$$

або

$$f(x)>\frac{M}{(b-x)^{\alpha}}.$$

Тому за першою ознакою інтеграл $\int\limits_c^b f(x)dx$ розбігається, а з ним, як це видно з рівності (49), розбігатиметься й інтеграл (46). ■

Приклади.

1. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

Δ Запишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+x^2}}.$$

Звідси $(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}>0$ і $\alpha=\frac{1}{2}<1$, то цей інтеграл збігається. ▲

2. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin^2(1-x)}$.

Δ Подамо підінтегральну функцію у такому вигляді

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2(1-x)}=\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\left(\frac{1-x}{\sin(1-x)}\right)^2,$$

звідси $(1-x)^2 f(x)=\left(\frac{1-x}{\sin(1-x)}\right)^2$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^2 f(x)=1$ і $\alpha=2>1$, то цей інтеграл розбігається. ▲

Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a+\varepsilon;b]$ при довільно малому $\varepsilon>0$ і необмежена в інтервалі $(a;a+\varepsilon)$, то за означенням приймають

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \tag{50}$$

коли ця границя існує і скінченна.

Коли функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ необмежена тільки в околі точки ξ: $a<\xi<b$, то приймають

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^\xi f(x)dx+\int\limits_\xi^b f(x)dx. \tag{51}$$

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ необмежена тільки в околі точки a і в околі точки b, то приймають

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx, \tag{52}$$

де c – будь-яка точка інтервалу $(a;b)$.

2.9. Інтеграли, залежні від параметра. Гамма-функція

Диференціювання інтегралів, залежних від параметра. Нехай дано інтеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx, \tag{53}$$

в якому підінтегральна функція залежить від деякого параметра α. Якщо параметр α буде змінюватися, то буде змінюватися і значення визначеного інтеграла. Таким чином, визначений інтеграл (53) є функцією від α.

1. Припустимо, що $f(x,\alpha)$ і $f'_\alpha(x,\alpha)$ – неперервні функції при

$$c\le\alpha\le d \quad \text{і} \quad a\le x\le b. \tag{54}$$

Знайдемо похідну інтеграла за параметром α:

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha).$$

Для знаходження цієї похідної відмітимо, що

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\frac{1}{\Delta\alpha}\left[\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]=$$

$$=\int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx.$$

Застосовуючи теорему Лагранжа до підінтегральної функції, будемо мати

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}=f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha),\quad \text{де } 0<\theta<1.$$

Оскільки $f'_\alpha(x,\alpha)$ неперервна в замкненій області (54), то

$$f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)=f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon,$$

де величина ε, залежна від $x,\alpha,\Delta\alpha$, прямує до нуля при $\Delta\alpha\to 0$. Таким чином,

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b[f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon]dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx+\int_a^b \varepsilon dx.$$

Переходячи до границі при $\Delta\alpha\to 0$, одержуємо

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx,$$

або

$$\left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx.$$

Ця формула називається *формулою Лейбніца*.

2. Припустимо тепер, що в інтегралі (53) межі інтегрування a і b є функціями від α:

$$I(\alpha)=\Phi[\alpha,a(\alpha),b(\alpha)]=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx. \qquad (53')$$

$\Phi[\alpha,a(\alpha),b(\alpha)]$ є складеною функцією від α, причому a і b є проміжними аргументами. Для того щоб знайти похідну від $I(\alpha)$, застосуємо правило диференціювання функції кількох змінних

$$I'(\alpha)=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}. \qquad (55)$$

На підставі теореми про диференціювання визначеного інтеграла за змінною верхньою межею одержуємо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\alpha)dx=f[b(\alpha),\alpha],$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\alpha)dx=-\frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x,\alpha)dx=-f[a(\alpha),\alpha].$$

Для знаходження $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ застосуємо формулу Лейбніца:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx.$$

Підставляючи у формулу (55) одержані вирази для похідних, будемо мати:

$$I'_\alpha=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx+f[b(\alpha),\alpha]\frac{db}{d\alpha}-f[a(\alpha),\alpha]\frac{da}{d\alpha}. \qquad (56)$$

Гамма-функція. Розглянемо інтеграл, залежний від параметра α:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \qquad (57)$$

Покажемо, що цей невласний інтеграл існує (збігається) при $\alpha>0$. Представимо його у вигляді суми

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Перший інтеграл в правій частині збігається, оскільки

$$0<\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx<\int_0^1 x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha}.$$

Другий інтеграл також збігається. Дійсно, нехай n – ціле число таке, що $n>\alpha-1$. Тоді, очевидно,

$$0<\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx<\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}dx<+\infty.$$

Останній інтеграл обчислюється інтегруванням частинами з урахуванням того, що

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x}=0 \qquad (58)$$

при будь-якому цілому додатному k. Отже, інтеграл (57) визначає деяку функцію α. Її позначають $\Gamma(\alpha)$ і називають *гамма-функцією*:

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \qquad (59)$$

Інтеграл, що стоїть в правій частині рівності (59), називається *інтегралом Ейлера другого роду*. Ця функція неелементарна, відіграє велику роль в математиці і, поряд з деякими іншими функціями, які найчастіше зустрічаються в прикладних задачах, відноситься до числа ***спеціальних функцій.***

Розглянемо найважливіші властивості функції $\Gamma(x)$. Інтегрування частинами дає

$$\Gamma(x+1)=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{x}dt=-t^{x}e^{-t}\Big|_{0}^{+\infty}+x\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt,$$

тобто

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x). \qquad (60)$$

Ця формула називається *формулою зведення.* Якщо $x=n,\ n\in N$ то, беручи до уваги, що $\Gamma(1)=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}dt=1$, одержимо:

$$\Gamma(n+1)=n!$$

Записавши формулу зведення у вигляді

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}, \qquad (61)$$

можна визначити функцію $\Gamma(x)$ при $-1<x<0$.

Дійсно, оскільки $x+1>0$, то $\Gamma(x+1)$ визначається однозначно через інтеграл Ейлера, а тим самим однозначно визначається і $\Gamma(x)$ за допомогою рівності (61). Тепер за допомогою тієї ж рівності (61) визначається $\Gamma(x)$ при $-2<x<-1$. Аналогічно можна визначити функцію $\Gamma(x)$ для всіх від'ємних x, за винятком $x=-1,-2,\ldots$. При цих виключених значеннях x а також при $x=0$ функція $\Gamma(x)$ ***не визначена***, що безпосередньо випливає з формули (61). Більш детальне вивчення показує, що $\Gamma(x)$ у всіх точках x, за винятком $x=0,-1,-2,\ldots$, не тільки неперервна, але і диференційовна.

До гамма – функції зводиться *бета – функція* , яка визначається за допомогою рівності

$$B(x,y)=\int\limits_{0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \qquad (62)$$

Інтеграл, що стоїть в правій частині рівності, називається *функцією Ейлера першого роду.* Можна показати, що він збігається лише при $x>0$ і

$y>0$. Зв'язок між функціями гамма і бета встановлюється формулою

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{63}$$

яку наводимо без доведення.

Обчислимо величину $B(x,1-x)=\Gamma(x)\Gamma(1-x)$. Маємо:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=B(x,1-x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}dt=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\frac{dt}{t}.$$

Зробимо заміну змінної $\tau=\frac{t}{1-t}$. Звідси $t=\frac{\tau}{1+\tau}$, $dt=\frac{d\tau}{(1+\tau)^2}$, а нові межі інтегрування будуть 0 і $+\infty$. Тому одержуємо

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\int_0^{+\infty}\frac{\tau^{x-1}}{1+\tau}d\tau.$$

Останній інтеграл, як відомо, дорівнює $\frac{\pi}{\sin\pi x}$. Отже,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}. \tag{64}$$

Ця рівність називається *формулою доповнення.* З неї при $x=\frac{1}{2}$ випливає, що $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Як розв'язується задача про площу криволінійної трапеції?
2. Як розв'язується задача про пройдений шлях?
3. Що таке інтегральна сума? Який її геометричний смисл?
4. Дайте означення визначеного інтеграла. Чи залежить його величина від способу поділу відрізка $[a;b]$? А від вибору точок ξ_i?
5. Який геометричний і фізичний зміст визначеного інтеграла?
6. Сформулюйте і доведіть основні властивості визначеного інтеграла, вираженого рівностями.
7. Сформулюйте і доведіть основні властивості визначеного інтеграла, вираженого нерівностями.
8. Сформулюйте і доведіть теорему про середнє. Який її геометричний смисл?
9. Сформулюйте і доведіть теорему про диференціювання визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею. Де в процесі доведення використано умову неперервності підінтегральної функції?

10. Чому дорівнює: а) $\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{b} f(t)dt$; б) $\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ за умови, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $a < x < b$?
11. Відомо, що неперервна в даному проміжку функція завжди має на ньому первісну. З якої властивості визначеного інтеграла це випливає?
12. Виведіть формулу Ньютона – Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла.
13. Виведіть формулу заміни змінної під знаком визначеного інтеграла.
14. Розгляньте інтегрування парних, непарних і періодичних функцій.
15. Виведіть формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла.
16. Який геометричний смисл ідеї наближеного обчислення визначених інтегралів? Виведіть формули для наближеного обчислення визначених інтегралів способом прямокутників, трапецій і з'ясуйте ідею визначення похибки при цьому обчисленні.
17. Дайте означення невласного інтеграла з необмеженим проміжком інтегрування. Який його геометричний зміст? Сформулюйте і доведіть найпростіші ознаки його збіжності.
18. Дайте означення невласного інтеграла від необмеженої функції. Який його геометричний зміст? Сформулюйте і доведіть найпростіші ознаки його збіжності.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Складаючи інтегральну суму і переходячи до границі, обчислити визначений інтеграл.

1. $\int\limits_{0}^{1} xdx$. *Вказівка*. Відрізок $[0;1]$ розбити на n рівних частин. *Відп.* $\frac{1}{2}$.

2. $\int\limits_{1}^{2} x^2dx$. *Вказівка*. Відрізок $[1;2]$ розбити на n рівних частин. *Відп.* $\frac{7}{3}$.

3. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x}$. *Вказівка*. Відрізок $[1;2]$ розбити на n частин так, щоб точки поділу утворювали геометричну прогресію зі знаменником $q = \sqrt[n]{2}$. *Відп.* $\ln 2$.

Оцінити такі інтеграли:

4. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{9+x^2}dx$. *Відп.* $3 \le \int\limits_{0}^{1} \sqrt{9+x^2}dx \le \sqrt{10}$.

5. $\int\limits_{0}^{\pi/2} x\sin xdx$. *Відп.* $0 \le \int\limits_{0}^{\pi/2} x\sin xdx \le \frac{\pi^2}{4}$.

6. $\int\limits_1^e x^2 \ln x dx$. *Відп.* $0 \le \int\limits_1^e x^2 \ln x dx \le e^2(e-1)$.

7. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3}$. *Відп.* $\frac{2}{9} \le \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3} \le \frac{2}{7}$.

8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$. *Відп.* $\frac{2\pi}{13} \le \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \le \frac{2\pi}{7}$.

Користуючись формулою Ньютона – Лейбніца, обчислити визначені інтеграли.

9. $\int\limits_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$. *Відп.* $1-\ln 2$. 10. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$. *Відп.* $\frac{\pi}{12}$. 11. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$. *Відп.* 0.

12. $\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx$. *Відп.* $\frac{\pi}{8}$. 13. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$. *Відп.* $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$.

14. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x(x+2)^2}$. *Відп.* $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{24}$. 15. $\int\limits_{-2}^{-4} \frac{dx}{1-x^2}$. *Відп.* $\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}$.

16. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$. *Відп.* $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. 17. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$. *Відп.* $\frac{\pi}{4}$.

Обчислити визначені інтеграли:

18. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$. *Відп.* $\frac{\pi}{2}$. 19. $\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+2x} dx$. *Відп.* $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$.

20. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. *Відп.* $4-2\ln 3$. 21. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$. *Відп.* $\sqrt{3}-\pi/3$.

22. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$. *Відп.* $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. 23. $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx$. *Відп.* $1-\frac{2}{e}$.

24. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}$. *Відп.* $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 25. $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \sin x dx$. *Відп.* $-4\pi^2$.

26. $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$. *Відп.* $\frac{\pi a^2}{4}$. 27. $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$. *Відп.* $\frac{\pi-2}{4}$.

28. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$. *Відп.* 3. 29. $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2} dx$. *Відп.* $\frac{81\pi}{8}$.

30. $\int\limits_{\ln 3}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$. *Відп.* $\ln\frac{4}{3}$. 31. $\int\limits_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx$. *Відп.* $\frac{3(\pi-2)}{2}$.

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність

41. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)^2}$. *Відп.* $\ln 2 - \frac{1}{2}$. 42. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$. *Відп.* $1-\ln 2$.

43. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$. *Відп.* 1. 44. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. *Відп.* π.

45. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$. *Відп.* Інтеграл розбігається.

46. $\int\limits_0^{+\infty} x \sin x dx$. *Відп.* Інтеграл розбігається.

47. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$. *Відп.* 0,5. 48. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2}$. *Відп.* $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

49. $\int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$. *Відп.* 0,5. 50. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$. *Відп.* $\pi^2/8$.

51. $\int\limits_0^{1} \ln x dx$. *Відп.* -1. 52. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$. *Відп.* $14\frac{4}{7}$.

53. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x}$. *Відп.* Розбігається. 54. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$. *Відп.* Розбігається.

55. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. *Відп.* π. 56. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Відп.* π.

57. $\int\limits_0^{1} \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^2}} dx$. *Відп.* $-625/187$. 58. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{1-x^3}$. *Відп.* Розбігається.

59. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$. *Відп.* Розбігається. 60. $\int\limits_0^{1} x \ln x dx$. *Відп.* $-0,25$.

Дослідити невласні інтеграли на збіжність

61. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$. *Відп.* Розбігається. 62. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$. *Відп.* Розбігається.

63. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx$. *Відп.* Розбігається. 64. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}} dx$. *Відп.* Розбігається.

65. $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$. *Відп.* Збігається. 66. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}(1/x)}{1+x\sqrt{x}} dx$. *Відп.* Збігається.

РОЗДІЛ III

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Визначений інтеграл знаходить широке застосування при розв'язуванні задач геометрії, механіки, фізики і техніки.

Одна з основних схем застосування визначеного інтеграла базується на означенні інтеграла як границі інтегральної суми. Для обчислення деякої величини u діють так:

1. Розбиваємо u на велике число n малих доданків елементів Δu_i:

$$u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i .$$

2. Знаходимо наближене значення кожного елемента Δu_i у вигляді добутку $\Delta u_i \approx f(x_i)\Delta x$ і потім обчислюємо наближене значення u у вигляді інтегральної суми

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \qquad (1)$$

де x – один з параметрів величини u, який змінюється у відомому інтервалі $a \le x \le b$; $f(x)$ – функція, яка задана або визначається з умови задачі; $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ – точки відрізка $[a,b]$, які при розбитті u на n елементів розбивають цей відрізок на n рівних частин, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Тут при знаходженні наближеного значення малого елемента Δu_i використовують різні припущення. Наприклад, тут припустимо малі криволінійні відрізки замінювати хордами, що їх стягують; змінну силу (або швидкість) на малих проміжках шляху можна замінювати сталою силою (або швидкістю), припускаючи, що вона незмінно зберігає на всьому малому проміжку шляху ту величину і той напрямок, які вона мала в початковій або кінцевій точці цього малого проміжку і т. д.

3. Якщо з умови задачі випливає, що при $n \to \infty$ похибка наближеної рівності (1) прямує до нуля, то шукана величина u буде чисельно дорівнювати визначеному інтегралу $u = \int_a^b f(x)dx$.

Друга схема полягає в тому, що складається співвідношення між диференціалами розглядуваних величин і від цього співвідношення інтегруванням переходимо до співвідношення між самими величинами. При застосуванні цієї схеми:

1. Покладаємо, що деяка частина шуканої величини U є невідома функція $u(x)$, де x – один з параметрів величини U, який змінюється у відомому з умови задачі інтервалі $a \le x \le b$.

2. Знайдемо диференціал du функції $u(x)$, тобто наближену величину (головну частину) її приросту Δu при зміні x на малу величину dx у вигляді $du = f(x)dx$, де $f(x)$ – функція від x, яка задана або визначається з умови задачі.

При цьому також використовуються різні припущення, які в загальному зводяться до того, що при зміні x на малу величину dx зміна функції $u(x)$ вважається пропорційною dx.

3. Переконавшись, що диференціал du знайдено вірно і що при $dx \to 0$ нескінченно малі Δu і du будуть еквівалентними, знайдемо шукану величину U, інтегруючи du в межах від $x = a$ до $x = b$:

$$U = \int_a^b f(x)dx.$$

Якій з двох схем віддати перевагу, залежить від конкретної задачі. Так за першою схемою легко одержати формули для обчислення площі криволінійної трапеції в декартових координатах, площі криволінійного сектора в полярних координатах, довжини дуги плоскої кривої, об'єму тіла за площами паралельних перерізів тощо.

Друга схема зручна при одержанні формул для обчислення роботи змінної сили, величини тиску рідини на вертикальну стінку і розв'язанні інших практичних задач.

3.1. ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

3.1.1. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПЛОСКИХ ФІГУР

Раніше ми означили площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ і $y = f(x)$, де $f(x)$ – неперервна додатна функція, як скінченну границю

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Внаслідок інтегровності неперервної функції, ця границя існує і виражається інтегралом:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Отже, вказана криволінійна трапеція має площу, яка обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Приклад. Обчислити площу фігури, яка обмежена віссю Ox і синусоїдою $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ (рис. 5).

Δ Очевидно, ця площа дорівнює

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2. \blacktriangle$$

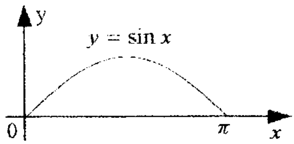


Рис. 5

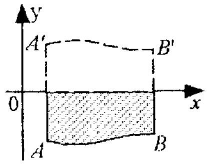


Рис. 6

Якщо $f(x)$ неперервна і від'ємна, то інтеграл від цієї функції матиме від'ємне значення. Площа криволінійної трапеції $aABb$ (рис. 6) в цьому випадку обчислюється за формулою

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю Ox і параболою $y = x^2 - 4x$ (рис. 7).

Δ Оскільки функція $y = x^2 - 4x$ на відрізку $[0, 4]$ недодатна, то шукана площа

$$S = -\int_0^4 (x^2 - 4x)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}.$$

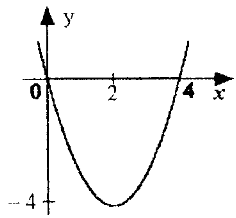


Рис. 7

Нехай функція $f(x)$ змінює знак в точці c: $a < c < b$ (рис. 8). Тоді площа заштрихованої фігури дорівнюватиме $S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$.

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю Ox і косинусоїдою $y = \cos x$, $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$ (рис. 9).

Δ Оскільки функція $y = \cos x$ на відрізку $[0, \frac{\pi}{2}]$ невід'ємна, а на відрізку $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ недодатна, то шукана площа

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=3. \blacktriangle$$

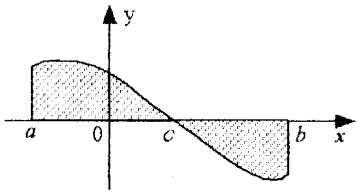


Рис. 8

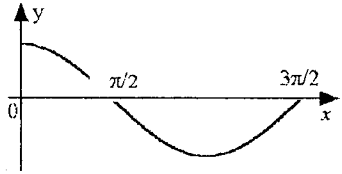


Рис. 9

Якщо плоска фігура, площу якої треба обчислити, не є криволінійною трапецією, тоді намагаються виразити шукану площу як алгебраїчну суму площ деяких криволінійних трапецій. Наприклад, для площі S фігури, зображеної на рис. 10, дістанемо

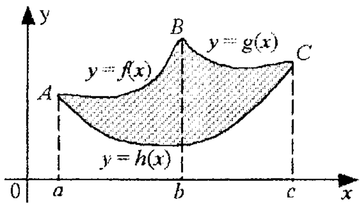


Рис. 10

$$S=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c g(x)dx-\int_a^c h(x)dx.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=x^2-3x$ і прямою $3x+y-4=0$ (рис. 11).

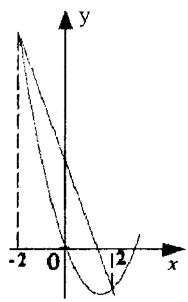


Рис. 11

Δ Знаходимо точки перетину параболи і прямої. Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} y=x^2-3x, \\ y=4-3x, \end{cases}$$

дістаємо $x_1=-2,\ x_2=2$. Тоді площа фігури

$$S=\int_{-2}^{2}[(4-3x)-(x^2-3x)]dx=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=$$

$$=2\int_0^2(4-x^2)dx=2\left(4x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2=2\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}. \blacktriangle$$

Нехай крива $y=f(x),\ a\le x\le b$, задана в параметричній формі: $x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t)$, де $\varphi(t)$ – функція монотонна і має неперервну похідну $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$. Тоді за формулою заміни змінної у визначеному інтегралі дістанемо

$$S=\int_a^b y dx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (3)$$

Приклади.

1. Обчислити площу фігури, обмежену еліпсом $x = a\cos t, y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ (рис. 12).

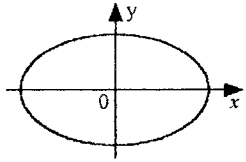


Рис. 12

Δ Внаслідок симетрії кривої відносно осей координат достатньо обчислити частину фігури, що міститься у першому квадранті.

$$S = 4\int_0^a ydx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t \cdot a(-\sin t)dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab . \blacktriangle$$

2. Знайти площу петлі кривої $x = \frac{t}{3}(6-t)$; $y = \frac{t^2}{8}(6-t)$.

Δ Нас буде цікавити загальний вигляд кривої і точки її самоперетину. Обидві функції $x(t)$ і $y(t)$ визначені на всій числовій осі $-\infty < x < \infty$.

Точка самоперетину характерна тим, що в ній збігаються абсциси (і ординати) при різних значеннях параметра. Оскільки $x = 3 - \frac{1}{3}(t-3)^2$, то абсциси збігаються при значеннях параметра $t = 3 \pm \lambda$. Щоб функція $y(t)$ набувала при цих самих значеннях параметра t одне і теж саме значення, повинна виконуватися рівність $\frac{(3+\lambda)^2}{8}(3-\lambda) = \frac{(3-\lambda)^2}{8}(3+\lambda)$ при $\lambda \ne 0$, звідки $\lambda = \pm 3$.

Таким чином, при $t_1 = 0$ і при $t_2 = 6$ маємо $x(t_1) = x(t_2) = 0$ і $y(t_1) = y(t_2) = 0$, тобто точка $(0,0)$ є єдиної точкою самоперетину. Коли t змінюється від 0 до 6, точки кривої лежать в першій чверті. При зміні t від 0 до 3 точка $M(x,y)$ описує нижню частину петлі, оскільки у вказаному проміжку $x(t)$ і $y(t)$ зростають, а потім функція $x(t)$ починає спадати, в той час як $y(t)$ спочатку ще зростає. На рис. 13 вказано обхід кривої, який відповідає зростанню t.

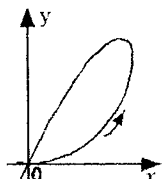


Рис. 13

Шукану площу в даному випадку зручно знаходити за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_0^6 (xy' - yx')dx = \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{t^2(6-t)^2}{24}dt = \frac{27}{5} . \blacktriangle$$

Іноді площу фігур зручно обчислювати в полярних координатах. Фігуру *OAB* (рис. 14), обмежену лініями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – неперервна невід'ємна функція, називають *криволінійним сектором*. Криволінійний сектор відіграє роль, аналогічну криволінійній трапеції. До поняття площі криволінійного сектора доцільно підійти так. Поділимо відрізок $[\alpha,\beta]$ точками φ_i на n частин, проведемо промені $\varphi=\varphi_i$ і розглянемо елементарні кругові сектори з радіусами $\rho_i=\rho(\tau_i)$, де $\tau_i\in[\varphi_i,\varphi_{i+1}]$, і центральними кутами $\Delta\varphi_i=\varphi_{i+1}-\varphi_i$. Оскільки площа елементарного кругового сектора рівна $\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_i$, а площа заштрихованої східчастої фігури дорівнює $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\rho_i^2\Delta\varphi_i$, то площу S криволінійного сектора OAB доцільно визначити як скінченну границю

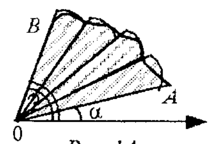


Рис. 14

$$S=\lim_{\max\Delta\varphi_i\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\rho^2(\tau_i)\Delta\varphi_i.$$

Але ця границя існує (внаслідок інтегровності неперервної функції $\rho^2(\varphi)$) і виражається інтегралом:

$$\lim_{\max\Delta\varphi_i\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\rho^2(\tau_i)\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\varphi)d\varphi,$$

тому криволінійний сектор має площу, яка обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (4)$$

Приклади.

1. Обчислити площу круга радіуса R.

Δ Як відомо, рівняння кола в полярних координатах задається так: $\rho=R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$. Тому площа круга дорівнюватиме:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}R^2d\varphi=\frac{1}{2}R^2\varphi\Big|_0^{2\pi}=\pi R^2.\blacktriangle$$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

Δ Ця крива, очевидно, є неперервною, обмеженою, замкненою (внаслідок періодичності $\cos\varphi$) і симетричною відносно полярної осі (рис.15). Тому шукана площа дорівнює подвоєній площі криволінійного сектора OAB. Дуга ABO описується кінцем полярного радіуса ρ при зміні полярного кута φ від 0 до π. Застосовуючи формулу (4), дістанемо

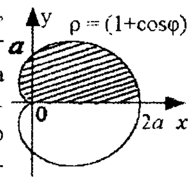


Рис. 15

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi\rho^2d\varphi=a^2\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^2d\varphi=a^2\int_0^\pi(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=$$

$$= a^2\left[\int_0^{\pi} d\varphi + 2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right] =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2. \blacktriangle$$

3. Знайти площу петлі декартового листа $x^3 + y^3 = 3axy$.

Δ Перейдемо до полярних координат за формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тоді дане рівняння перепишеться у вигляді

$$\rho^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3a\rho^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

або

$$\rho = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} = \frac{3a\sin 2\varphi}{(\sin\varphi + \cos\varphi)(2 - \sin 2\varphi)}.$$

З цього рівняння випливає, по-перше, що $\rho = 0$ при $\varphi = 0$ і при $\varphi = \pi/2$ і, по-друге, $\rho \to \infty$ при $\varphi \to 3\pi/4$ і $\varphi \to -3\pi/4$. Останнє означає, що декартів лист має асимптоту, рівняння якої $y = -x - a$.

Отже, петля декартового листа описується при зміні φ від 0 до $\pi/2$ і лежить в першій чверті.

Таким чином, шукана площа дорівнює

$$S_{OAO} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}d\varphi.$$

Користуючись симетрією кривої відносно бісектриси $y = x$, тобто відносно променя $\varphi = \pi/4$, одержимо

$$S_{OAO} = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}d\varphi = \left|\begin{matrix} tg\varphi = z, & \varphi = 0 \to z = 0, \\ \dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, & \varphi = \frac{\pi}{4} \to z = 1 \end{matrix}\right| =$$

$$= 9a^2\int_0^1\frac{z^2dz}{(1+z^3)^2} = 3a^2\int_0^1\frac{d(1+z^3)}{(1+z^3)^2} = \frac{-3a^2}{1+z^3}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}a^2. \blacktriangle$$

3.1.2. ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ

Розглянемо тіло T, що міститься між паралельними площинами $x = a$ і $x = b$ (рис. 16). Припустимо, що в перерізі тіла T кожною площиною, перпендикулярною до осі Ox, одержується фігура $F(x)$, що має площу $S(x)$, причому $S(x)$ є неперервною функцією аргумента x. Нам потрібно з'ясувати, що доцільно розуміти під об'ємом цього тіла і знайти метод для його обчислення.

З цією метою поділимо відрізок $[a,b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

і проведемо площини $x = x_i$, $i = 1,2,\ldots,n-1$. Ці площини розрізають тіло T на n тонких шарів. Внаслідок неперервності, на кожному частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ функція $S(x)$ змінюється мало. Тому без великої похибки функцію на $[x_i, x_{i+1}]$ можна вважати сталою і рівною $S(\xi_i)$, де ξ_i – деяка точка відрізка $[x_i, x_{i+1}]$.

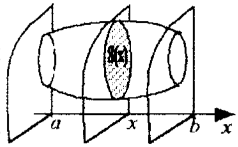


Рис. 16

Таким чином, у простих випадках i-й шар можна наближено прийняти за прямий циліндр з об'ємом $S(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ (ми приймаємо, що об'єм прямого циліндра дорівнює добуткові площі основи на висоту). Тому величину суми

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} S(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

природно вважати наближеною мірою об'єму V тіла T. Позначимо через λ довжину найбільшого частинного відрізка: $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i)$. За об'єм тіла T доцільно прийняти скінченну границю

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} S(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

якщо вона існує. Але внаслідок інтегровності неперервної функції ця границя існує і дорівнює визначеному інтегралу:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} S(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b S(x)dx.$$

Отже, розглядуване тіло T має об'єм V, який обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (5)$$

Приклади.

1. Обчислити об'єм піраміди, площа основи якої B, а висота H.

Δ Помістимо початок координат у вершині піраміди і направимо вісь Ox по висоті піраміди (рис. 17). Але площі основи піраміди та її перерізу, паралельного основі, відносяться як квадрати їх відстаней від вершини:

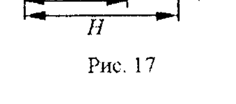


Рис. 17

$$\frac{S(x)}{B} = \frac{x^2}{H^2},$$

звідки

$$S(x) = \frac{B}{H^2}x^2.$$

Оскільки площа перерізу $S(x)$ неперервна функція відстані x, то

$$V = \int_0^x \frac{B}{H^2}x^2dx = \frac{B}{3H^2}x^2\Big|_0^H = \frac{1}{3}BH. \blacktriangle$$

2. Знайти об'єм тіла, яке утворилося внаслідок перетину двох циліндрів $x^2 + y^2 = a^2$ і $y^2 + z^2 = a^2$.

Δ Побудуємо восьму частину тіла, яка розташована в першому октанті (рис. 18).

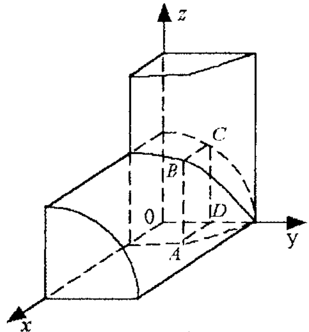


Рис. 18

Будь-який переріз цієї частини тіла площиною, паралельною площині xOy, представляє собою квадрат. Площу перерізу $ABCD$, який відстоїть від площини xOy на відстані $OD = h$, знайдемо як площу квадрата зі стороною

$$AD = DC = \sqrt{a^2 - h^2};$$
$$S(h) = a^2 - h^2,\ 0 \le h \le a.$$

Весь шуканий об'єм, згідно з формулою (5), виражається інтегралом

$$V = 8\int_0^a (a^2 - h^2)dh = 8\left(a^2h - \frac{h^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{16}{3}a^3. \blacktriangle$$

Зупинимося на одному важливому випадку загальної формули (5). Нехай на відрізку $[a, b]$ задана додатна неперервна функція $f(x)$. Криволінійну трапецію, яку утворює дана функція, будемо обертати навколо осі Ox: дістанемо тіло обертання (рис. 19). Поперечним перерізом цього тіла буде круг радіуса $f(x)$,

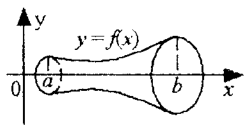


Рис. 19

і площа якого $S(x) = \pi[f(x)]^2$. Тому об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2dx. \qquad (6)$$

Приклад. Криволінійна трапеція, яка обмежена однією "аркою" циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і віссю Ox, обертається навколо осі Ox. Знайти об'єм відповідного тіла обертання (рис. 20)

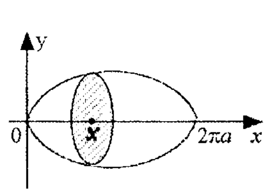


Рис. 20

Δ За формулою (6)

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx$$

Робимо заміну змінної, покладаючи $x = a(t - \sin t)$. Це дає

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\tfrac{5}{2} t - 4\sin t + \tfrac{3}{4}\sin 2t + \tfrac{1}{3}\sin^3 t \right)\Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3 . \blacktriangle$$

3.1.3. ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИН ДУГ

В шкільному курсі математики розглядається питання про обчислення довжин відрізків прямої, довжини кола, а також його частин. В застосуваннях математики виникає потреба в обчисленні довжин дуг довільних кривих. Однак, щоб обчислити довжину довільної кривої, треба бути впевненим, що розглядувана крива має скінченну довжину.

В середній школі довжиною кола називають границю послідовності периметрів вписаних в коло правильних многокутників (при необмеженому подвоєнні числа сторін). Однак це означення не можна застосувати до довільних кривих. Дамо загальне означення поняття довжини кривої.

Означення 1. *Нехай дана дуга плоскої кривої AB. Розіб'ємо її на n частин точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ і, сполучивши кожні дві сусідні точки відрізком прямої, одержимо ламану, вписану в дугу AB. Розглянемо всі можливі вписані ламані і позначимо множину їх периметрів через P. Якщо множина P обмежена зверху, то дуга AB називається* ***спрямлюваною*** *(такою, що має довжину), а точна верхня межа множини P –* ***довжиною дуги*** *AB.*

Означення 2. *Нехай крива AB представляє собою графік неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $y = f(x)$. Якщо $f'(x)$ неперервна на $[a,b]$, то AB називають* ***гладкою кривою***.

Має місце теорема

Теорема. *Гладка крива є спрямлюваною кривою і її довжина обчислюється за формулою*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx . \tag{7}$$

□ Виконаємо розбиття T відрізка $[a,b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

проведемо через ці точки перпендикуляри до осі Ox до перетину з графіком функції $f(x)$ і розглянемо ламану з вершинами в одержаних точках перетину (рис. 21). Периметр цієї ламаної позначимо через P_T. Доведемо спочатку, що множина $\{P_T\}$ обмежена зверху.

Розглянемо ланку M_iM_{i+1} цієї ламаної і знайдемо її довжину Δp_i. Маємо

$$\Delta p_i = \sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

Застосовуємо до функції $f(x)$ на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ теорему Лагранжа:

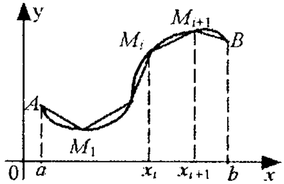


Рис. 21

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c_i)(x_{i+1} - x_i),$$

де $x_i < c_i < x_{i+1}$, і позначимо $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$. Тоді одержимо

$$\Delta p_i = \sqrt{[f'(c_i)]^2(\Delta x_i)^2 + (\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$$

За умовою, функція $f'(x)$, а, значить, і $[f'(x)]^2$ неперервна на відрізку $[a, b]$; отже, вона досягає на ньому свого найбільшого значення M^2, а тому $\sqrt{1+[f'(c_i)]^2} \le \sqrt{1+M^2}$. Таким чином, $\Delta p_i \le \sqrt{1+M^2}\,\Delta x_i$.

Використовуючи ці нерівності, для периметра ламаної одержуємо оцінку:

$$P_T = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta p_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+M^2} \cdot \Delta x_i = \sqrt{1+M^2} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \sqrt{1+M^2}\,(b-a).$$

Отже, для будь-якого розбиття T маємо $P_T \le \sqrt{1+M^2}\,(b-a)$, а це і означає, що множина периметрів вписаних в дугу AB ламаних обмежена зверху, тобто дана крива спрямлювана.

Очевидно, величину суми

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta p_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$$

природно вважати наближеною мірою довжини L дуги AB. Звідки переходом до границі за умови $\Delta x_i \to 0$ одержуємо

$$L = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta p_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Цей інтеграл існує, оскільки внаслідок неперервності $f'(x)$ на $[a, b]$ неперервна і вся підінтегральна функція. ■

Наслідок 1. *Якщо крива задана параметричними рівняннями* $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in [t_1, t_2]$, *функції* $x'(t)$ і $y'(t)$ *неперервні в* (t_1, t_2), *причому* $x'(t)$ *зберігає в* (t_1, t_2) *сталий знак, то*

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \qquad (8)$$

□ При заданих умовах маємо $y' = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. Переходячи у формулі (7) до нової змінної інтегрування t, одержимо (вважаємо для певності $x'(t) > 0$)

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\, x'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \blacksquare$$

Наслідок 2. *Якщо крива задана в полярній системі координат рівнянням* $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, і $\rho(\varphi)$ *є неперервною і має неперервну похідну* $\rho'(\varphi)$ *на відрізку* $[\alpha, \beta]$, *то крива є спрямлюваною і її довжина дорівнює*

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi. \qquad (9)$$

□ Це саме так, бо скориставшись формулами $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, знайдемо

$$x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2 = \rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi).$$

Підставляючи $x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)$ у формулу (8), дістанемо формулу (9). ■

Приклади.

1. Знайти довжину дуги ланцюгової лінії $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $0 \le x \le 1$.

Δ Маємо

$$y' = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x});\ 1 + (y')^2 = 1 + \tfrac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2;$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Використовуючи формулу (7), знаходимо

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}(e - \tfrac{1}{e}). \blacktriangle$$

2. Обчислити довжину астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Δ Знайдемо

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

Оскільки астроїда симетрична відносно осей координат (рис. 22), то для відшукання довжини всієї астроїди достатньо знайти довжину її вітки, яка знаходиться в першому квадранті $(0 \le t \le \frac{\pi}{4})$ і одержаний результат помножити на 4. Таким чином, довжина астроїди дорівнює

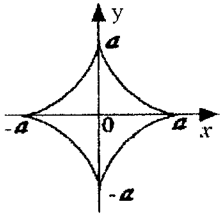


Рис. 22

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}\, dt = 6a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 6a. \blacktriangle$$

3. Знайти довжину першого витка архімедової спіралі $\rho = a\varphi$.

Δ Перший виток архімедової спіралі утворюється при зміні полярного кута φ від 0 до 2π. Тому

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi =$$

$$= a\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \frac{1}{2}\ln(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a\left(\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right). \blacktriangle$$

Розглянемо тепер випадок замкненої кривої (точки A і B збігаються). Означення довжини дуги для замкненої кривої вже не підходить. В цьому випадку ламана лінія, вписана в криву, може стягуватися в точку (рис. 23), а, отже, периметр такої ламаної, якщо найбільша сторона прямує до нуля, теж прямуватиме до нуля. Якщо крива не є замкненою, то коли найбільша сторона прямує до нуля, то ламана лінія щільніше прилягатиме до кривої. Тому природно за довжину кривої взяти границю периметра ламаної лінії, що і було нами зроблено.

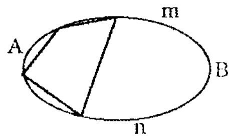


Рис. 23

Проте замкнену криву можна за допомогою довільно вибраних на ній точок A і B розглядати як суму двох незамкнених дуг $\smile AmB + \smile BnA$. Тоді, якщо кожна дуга є спрямлюваною, то за довжину замкненої кривої $AnBmA$ береться сума довжин кожної дуги. При цьому доводиться, що сума довжин незамкнених кривих не залежить від вибору на кривій точок A і B.

3.1.4. КРИВИНА КРИВОЇ

Розглянемо одне поняття, яке характеризує певну геометричну властивість кривої – поняття кривини кривої.

Розглядаючи ту чи іншу криву, ми бачимо, що в різних точках крива має неоднаковий ступінь викривлення. Так, парабола $y = x^2$ поблизу початку координат більш викривлена, ніж в точках, які знаходяться далі від початку координат. Коло в усіх своїх точках має однакове викривлення.

Різні криві відрізняються одна від одної своїм ступенем викривлення. Так, пряма лінія не має викривлення. Коло малого радіуса більш викривлене, ніж коло великого радіуса.

Виникає запитання: що ж брати за міру кривини кривої в її окремих точках? Щоб відповісти на це запитання, припустимо, що до кривої в кожній точці можна провести дотичну і що крива є спрямлюваною.

Припустимо, наприклад, що крива задана в декартовій системі координат рівнянням $y = f(x)$, де функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ має похідні до другого порядку включно.

Візьмемо на кривій дві точки M і M_1 (рис. 24) і в цих точках проведемо дотичні. Нехай дотична MN утворює з додатним напрямом осі Ox кут φ_1, а пряма M_1N_1 – кут φ_2.

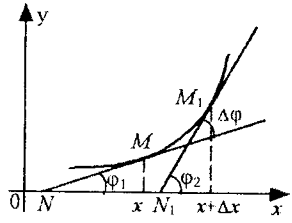


Рис. 24

Означення 1. ***Кутом суміжності кривої*** *на певному інтервалі називається кут між дотичними до цієї кривої в крайніх точках інтервалу.*

Означення 2. ***Середньою кривиною*** *на певному інтервалі називається відношення кута суміжності кривої на інтервалі до довжини відповідної дуги, тобто*

$$K = \frac{\Delta\varphi}{\Delta L}.$$

Означення 3. ***Кривиною кривої (функції) в даній точці називається*** *границя середньої кривини кривої на інтервалі, який містить точку, за умови, що довжина інтервалу прямує до нуля, тобто*

$$K(x) = \lim_{\Delta x \to 0} K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta L}.$$

Має місце

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ двічі диференційовна в точці x, причому $f''(x)$ неперервна, то*

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}.$$

□ Дійсно, маємо (рис.24)

$$\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = f'(x) \Rightarrow \varphi_1 = \operatorname{arctg} f'(x),$$
$$\operatorname{tg}\varphi_2 = f'(x+\Delta x) \Rightarrow \varphi_2 = \operatorname{arctg} f'(x+\Delta x).$$

Застосовуючи теорему Лагранжа до функції $\operatorname{arctg} f'(x)$ на відрізку $[x, x+\Delta x]$, одержуємо

$$\Delta\varphi = \left|\operatorname{arctg} f'(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} f'(x)\right| = \left|(\operatorname{arctg} f'(x))'\right|_{x=c} \cdot \Delta x,$$

або $\Delta\varphi = \dfrac{|f''(c)|\Delta x}{1+f'^2(c)}$, $c \in (x, x+\Delta x)$.

За формулою (8) і теоремою про середнє значення інтеграла маємо

$$\Delta L = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+f'^2(x)}dx = \sqrt{1+f'^2(c_1)} \cdot \Delta x, \; c_1 \in (x, x+\Delta x).$$

Нарешті,

$$K(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|f''(c)|}{(1+f'^2(c))\sqrt{1+f'^2(c_1)}} = \frac{|f''(x)|}{(1+f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}. \; ■$$

Означення 1. *Поверхню, утворену обертанням кривої навколо деякої осі, називають* ***поверхнею обертання***.

Означення 2. ***Площею поверхні обертання*** *кривої AB навколо даної осі* ***називають скінченну границю, до якої прямують площі поверхонь обертання ламаних, вписаних у криву*** AB, ***при прямуванні до нуля найбільшої з довжин ланок цих ламаних.***

Умови, за яких поверхня обертання має площу, дає така

Теорема. *Якщо крива AB, задана рівнянням $y = f(x)$, $a \le x \le b$, де $f(x)$* ***– невід'ємна і неперервна разом зі своєю похідною функція, обертається навколо осі Ox, то площа поверхні обертання обчислюється за формулою***

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \qquad (10)$$

☐ Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

і впишемо в криву AB ламану лінію з вершинами $M_i(x_i, f(x_i))$, де $i = \overline{0,n}$. При обертанні ламаної $M_0M_1 \ldots M_n$ навколо осі Ox одержиться поверхня, що складається з бічних поверхонь n зрізаних конусів. Розглянемо i-ий конус (рис. 25). Його висота дорівнює $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, радіуси основ – $f(x_i)$ і $f(x_{i+1})$ відповідно, твірна – $c_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}$. Але за теоремою Лагранжа $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)\Delta x_i$,

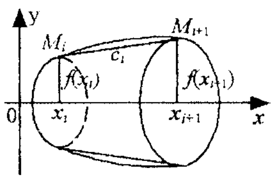


Рис. 25

де $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$, то $c_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i$. Отже, для площі поверхні обертання ламаної матимемо

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i.$$

Подамо цю суму у вигляді двох сум:

$$S_n = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i +$$

$$+ \pi \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i. \qquad (11)$$

Перша сума правої частини рівності (11) є інтегральною сумою для неперервної функції $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$ на відрізку $[a,b]$, тому ця сума при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ має границею інтеграл $2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

Доведемо, що друга сума правої частини рівності (11) прямує до нуля при $\lambda \to 0$. Справді, внаслідок рівномірної неперервності функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що як тільки відрізок $[a,b]$ поділено на частини з довжинами меншими δ, тобто $\delta < \lambda$, то

$$|f(x_i) - f(\xi_i)| < \varepsilon \text{ і } |f(x_{i+1}) - f(\xi_i)| < \varepsilon.$$

Тоді

$$|f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)| \le |f(x_i) - f(\xi_i)| + |f(x_{i+1}) - f(\xi_i)| < 2\varepsilon,$$

і, отже,

$$\left|\pi\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i\right| \le$$

$$\le \pi\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)|\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i <$$

$$< 2\pi\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i < 2\pi\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}c_i \le 2\pi S\varepsilon$$

Оскільки $2\pi S$ – стале число, а ε як завгодно мале, то звідси випливає, що розглядувана сума при $\lambda \to 0$ прямує до нуля. Отже, переходом до границі в рівності (11) при $\lambda \to 0$ дістаємо формулу (10). ■

Приклад. Визначити площу поверхні кульового шару.

∆ Площа поверхні, одержаної від обертання дуги кола $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $a \le x \le b$, навколо осі Ox дорівнює

$$S = 2\pi\int\limits_a^b \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = 2\pi R\int\limits_a^b dx = 2\pi R(b-a).\ ▲$$

Якщо поверхня одержується обертанням навколо осі Ox кривої, заданої параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то, виконавши заміну змінної під знаком визначеного інтеграла у формулі (10), дістанемо таку формулу для обчислення площі цієї поверхні

$$S = 2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt. \qquad (12)$$

Приклад. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox однієї арки циклоїди: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

∆ За формулою (12) знаходимо

$$S = 2\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \tfrac{t}{2}\, dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin \tfrac{t}{2} - \cos^2 \tfrac{t}{2} \sin \tfrac{t}{2}\right) dt = \tfrac{64}{3}\pi a^3 . \blacktriangle$$

3.2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ У МЕХАНІЦІ ТА ФІЗИЦІ

3.2.1. МОМЕНТИ

Згідно з другим законом механіки $\vec{F} = m\vec{a}$. Відомо, що мірою поступального руху є маса m. Для обертального руху другий закон механіки має вигляд $\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$, де $\vec{M}$ – момент імпульсу, $\vec{\varepsilon}$ – кутове прискорення, I – момент інерції тіла відносно осі обертання. Таким чином, мірою інерції обертального руху (аналогом маси у випадку поступального руху) є момент інерції.

Означення. ***Моментом інерції матеріальної точки*** *з масою m і радіусом-вектором $\vec{r}$ відносно початку координат є*

$$I_0 = mr^2,$$

а відносно координатних осей Ox і *Oy –*

$$I_x = my^2, \quad I_y = mx^2.$$

Отже, $I_0 = I_x + I_y$.

Для однорідної кривої $y = f(x)$ виділимо елемент дуги dl і застосуємо наведені формули. Дістаємо

$$dI_0 = r^2 dm = (x^2 + y^2)\rho dl = (x^2 + y^2)\rho\sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

звідки, інтегруючи, одержуємо

$$I_0 = \rho \int_a^b (x^2 + y^2)\sqrt{1 + y'^2}\, dx, \qquad (13)$$

де ρ – густина кривої.

Аналогічно

$$I_x = \rho \int_a^b y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \qquad I_y = \rho \int_a^b x^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (14)$$

Приклад.

Знайти момент інерції однорідного кола радіуса R відносно центра.

Δ Маємо

$$I_0 = 4\rho \int_0^R R^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\rho R^3 \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4\rho R^3 . \blacktriangle$$

Розглянемо тепер *статичний момент*. Статичний момент зв'язаний із задачами статики. Як відомо з фізики, статичний момент точки відносно деякої прямої (осі) дорівнює добутку маси m на відстань точки до прямої. Користуючись вище наведеними позначеннями, запишемо статичний момент точки відносно початку координат

$$M_0 = mr,$$

а відносно осей координат

$$M_x = my, \quad M_y = mx.$$

Для однорідної кривої $y = f(x)$ аналогічно до попереднього маємо

$$M_0 = \rho\int_a^b \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \tag{15}$$

$$M_x = \rho\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad M_y = \rho\int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{16}$$

Очевидно, $M_0 \neq M_x + M_y$.

Приклад.

Знайти статичний момент верхньої частини еліпса

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

відносно осі Ox.

Δ Згідно з формулою (16) маємо

$$M_x = \int_{-a}^{a} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{y^2 + (yy')^2}\,dx.$$

Оскільки для еліпса

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \text{і} \quad yy' = -\frac{b^2}{a^2}x,$$

то

$$\sqrt{y^2 + (yy')^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2},$$

де ε – ексцентриситет еліпса, $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. Отже,

$$M_x = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}\,dx = \frac{2b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}\,dx =$$

$$= \frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} + \frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right) = b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

У випадку кола, тобто при $a = b$, будемо мати $M_x = 2a^2$, оскільки при цьому $\varepsilon = 0$ і $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon} = 1$. ▲

З механіки відомо, що координати центра мас системи матеріальних точок $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ... , $M_n(x_n, y_n)$ з масами m_1, m_2, ... , m_n визначаються формулами

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Нехай тепер маси неперервно розподілені вздовж деякої спрямлюваної кривої $y = f(x)$, $a \le x \le b$, довжини L. Вважатимемо криву однорідною, тобто маса розподілена по кривій рівномірно так, що лінійна густина ρ стала. Для простоти покладемо $\rho = 1$.

Маючи формули для статичних моментів кривої, легко вивести формули для координат центра мас цієї кривої. Дійсно, нехай точка $C(x_c, y_c)$ є центр мас даної кривої. Це означає, що коли в точці $C(x_c, y_c)$ зосередити всю масу кривої, яка в даному разі дорівнює довжині дуги L, то статичний момент цієї маси збігається із статичним моментом всієї кривої відносно розглядуваної осі. Внаслідок цього матимемо такі рівності:

$$Lx_c = \int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad Ly_c = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Звідси знаходимо координати центра мас

$$x_c = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad y_c = \frac{1}{L}\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \tag{17}$$

або

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx}, \quad y_c = \frac{\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx}. \tag{17'}$$

Зауваження. Координати центра мас $C(x_c, y_c)$ плоскої матеріальної дуги AB графіка функції $y = f(x)$, яка має лінійну густину $\rho = \rho(x)$, визначається за формулами

$$x_c = \frac{\int_a^b x\rho(x)\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x)\sqrt{1 + y'^2}\,dx}, \quad y_c = \frac{\int_a^b y\rho(x)\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x)\sqrt{1 + y'^2}\,dx}.$$

Розглянемо більш детально в (17) другу формулу. Запишемо її у вигляді

$$y_c L = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на 2π

$$2\pi y_c L = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

У правій частині останньої рівності одержали число, що виражає площу поверхні, яка утворюється обертанням кривої навколо осі абсцис. Ліву частину цієї рівності можна розглядати як добуток довжини дуги L кривої на довжину кола, радіус якого дорівнює ординаті y_c центра мас.

Отже, ми довели так звану теорему Гульдіна.

Теорема 1 (Гульдіна). *Площа поверхні, утвореної обертанням дуги кривої навколо осі, яка її не перетинає і лежить з кривою в одній площині, дорівнює добутку довжини дуги L цієї кривої на довжину кола, яке описує центр мас кривої, тобто*

$$S = 2\pi y_c L. \qquad (18)$$

Приклади.

1. Знайти центр мас півкола $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \le t \le \pi$.

△ Внаслідок симетрії $x_c = 0$. За першою теоремою Гульдіна маємо

$$y_c = \frac{S}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi\cdot\pi R} = \frac{2}{\pi}R.$$

Таким чином, центр мас півкола знаходиться у точці $C\left(0, \frac{2}{\pi}R\right)$. ▲

2. Знайти площу поверхні тора (так називають тіло, утворене обертанням круга навколо осі, яка його не перетинає і лежить у площині круга).

△ Вибираємо осі координат, як показано на рис. 26. Центр мас кола, очевидно, збігається з його центром. Відстань цього центра від осі Ox позначимо через d ($d = y_c$). Тоді площа поверхні тора за формулою (18) дорівнює

$$S_T = 2\pi d\cdot 2\pi R = 4\pi dR. \ ▲$$

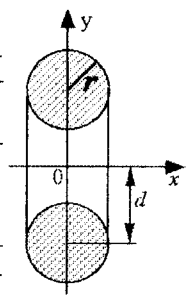


Рис. 26

Розглянемо тепер задачу про знаходження статичного моменту і координат центра мас плоского матеріального тіла (пластинки). Припустимо, що плоска фігура однорідна і поверхнева густина дорівнює ρ. Нехай ця фігура є криволінійна трапеція $aABb$, яка зображена на рис. 27. І нехай крива AB задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ є неперервна функція на відрізку $[a,b]$.

Виділимо смужку завширшки dx. Вважатимемо, що дана смужка настільки вузька, що її можна вважати прямокутником, висота якого дорівнює $y = f(x)$. Тоді маса цієї смужки дорівнюватиме $dm = \rho y dx$. Припустимо також, що вся маса смужки зосереджена всередині прямокутника в точці $P\left(x, \frac{y}{2}\right)$. Тоді, враховуючи означення статичного моменту відносно координатних осей, можемо записати

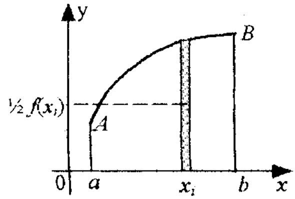


Рис. 27

$$dM_x = \frac{y}{2} dm = \frac{1}{2} \rho y^2 dx, \quad dM_y = x dm = \rho x y dx,$$

звідки, інтегруючи, одержуємо

$$M_x = \frac{1}{2} \rho \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \rho \int_a^b x y dx. \tag{19}$$

Можна показати, що моменти інерції однорідної криволінійної трапеції обчислюються за формулами

$$I_x = \frac{1}{3} \int y^3 dx, \quad I_y = \int x^2 y dx. \tag{20}$$

Зауваження. Якщо фігура G обмежена неперервними кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, причому $f_1(x) \le f_2(x)$ на відрізку $[a, b]$, і відрізками прямих $x = a$, $x = b$, у випадку сталої поверхневої густини $\rho = 1$ статичні моменти обчислюються за формулами

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx, \quad M_y = \int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx. \tag{19'}$$

Маючи формули для статичних моментів, легко вивести формули і для координат центра мас розглядуваної плоскої фігури. Справді, нехай точка $C(x_c, y_c)$ є центр мас даної фігури і її площа дорівнює S. Тоді статичні моменти точки $C(x_c, y_c)$ відносно координатних осей дорівнюють статичним моментам відносно цих осей всієї криволінійної фігури. Тому дістаємо (приймаючи $\rho = 1$)

$$M_x = S y_c = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = S x_c = \int_a^b x y dx.$$

Звідси знаходимо координати центра мас плоскої фігури

$$x_c = \frac{\int_a^b x y dx}{S}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{S}. \tag{21}$$

Запишемо другу з формул (21) у вигляді

$$y_c S = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на число 2π, одержимо

$$2\pi y_c S = \pi\int_a^b y^2 dx.$$

Помічаємо, що у правій частині останньої рівності одержали число, яке виражає об'єм тіла, утвореного обертанням даної фігури навколо осі абсцис. Ліву частину цієї рівності можна розглядати як добуток площі S фігури на довжину кола, радіус якого дорівнює ординаті y_c центра мас.

Отже, ми довели так звану другу теорему Гульдіна.

Теорема 2 (Гульдіна). *Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі, що її не перетинає, дорівнює добутку площі фігури S на довжину кола, яке описує центр мас даної фігури, тобто*

$$V = 2\pi y_c S. \tag{22}$$

Приклади. 1. Знайти статичні моменти і координати центра мас криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y^2 = f_2^2(x) = 2px$ і прямими $y = f_1(x) = 0$ і $x = 0$.

Δ За формулами (19') знаходимо

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 f_2^2(x)dx = \frac{1}{2}\cdot 2p\int_0^1 xdx = \frac{p}{2};$$

$$M_y = \int_0^1 xf_2(x)dx = \sqrt{2p}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5}.$$

Обчислюємо площу цієї криволінійної трапеції

$$S = \sqrt{2p}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3}.$$

Тепер знаходимо координати центра мас:

$$x_c = M_y/S = 3/5, \quad y_c = M_x/S = (3/8)\sqrt{2p}. \ ▲$$

2. Знайти координати центра мас плоскої фігури G, обмеженої однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ і віссю Ox.

Δ Застосуємо другу теорему Гульдіна. Об'єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо осі Ox, дорівнює

$$V = \pi\int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt = 5\pi a^3.$$

Площа фігури G дорівнює

$$S = \int_0^{2\pi a} ydx = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$

Нехай y_c – ордината центра мас. Згідно з другою теоремою Гульдіна, $S\cdot 2\pi y_c = V$, звідки $y_c = 5a/6$. Із симетрії фігури G відносно прямої $x=\pi a$ випливає, що абсциса центра мас $x_c = \pi a$. ▲

Зауваження. Якщо фігура обмежена кривими $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, причому $f_1(x)\le f_2(x)$ на відрізку $[a,b]$, поверхнева густина фігури $\rho=\rho(x)$, то знаходження координат її центра мас $C(x_c, y_c)$ виконується за формулами

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\rho(x)[f_2(x)-f_1(x)]dx}{\int\limits_a^b \rho(x)[f_2(x)-f_1(x)]dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b \rho(x)[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx}{\int\limits_a^b \rho(x)[f_2(x)-f_1(x)]dx}. \qquad (21')$$

3.2.3. РОБОТА ЗМІННОЇ СИЛИ

Нехай тіло, яке знаходиться під дією деякої сили F, переміщується по прямій лінії, напрямок якої співпадає з напрямком діючої сили. Прийнято казати, що при такому переміщенні тіла сила F виконує деяку роботу A. При цьому, якщо величина сили F залишається незмінною при русі тіла, то робота A сили F виражається добутком цієї сили на довжину шляху S, який пройшло тіло: $A = F\cdot s$. Якщо сила F при русі тіла змінює свою величину, то роботу цієї сили вимірюють таким чином. Припустимо, що в кожній точці шляху сила F має певну величину. Позначивши через x змінну величину шляху, який відраховується від деякої точки O прямої, ми можемо сказати, що сила F є деяка неперервна функція x: $F=f(x)$. Нехай початкова і кінцева точки шляху відстоять від початку O на відстані a і b. Для обчислення роботи A розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на елементарні відрізки $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{0,n-1}$, $x_0=a$, $x_n=b$, і будемо вважати силу F сталою на кожному такому відрізку і рівною $f(x_i)$, роботу на цьому відрізку $dA = f(x_i)dx_i$. На підставі загальної схеми застосування інтеграла для обчислення всієї шуканої роботи A одержуємо формулу $A=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Приклади.

1. Яку роботу потрібно виконати, щоб тіло маси m підняти з поверхні Землі, радіус якої R, на висоту h.

∆ На тіло маси m діє сила тяжіння F, яка обернено пропорційна квадрату відстані тіла від центра Землі і направлена до центра Землі. За законом всесвітнього тяжіння

$$F = k\frac{mM}{x^2},$$

де x – відстань від тіла до центра Землі, M – маса Землі. Покладаючи $kmM = K$, одержимо $F(x) = K/x^2$, $R \le x \le h+R$, R – радіус Землі. При $x = R$ сила $F(R)$ буде вагою тіла, тобто $F(R) = mg = K/R^2$, звідки $K = mgR^2$ і $F(x) = mgR^2/x^2$.

Таким чином, диференціал роботи дорівнює

$$dA = F(x)dx = \frac{mgR^2}{x^2}dx.$$

Інтегруючи, одержимо

$$A = \int_R^{R+h} F(x)dx = mgR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -mgR^2 \left.\frac{1}{x}\right|_R^{R+h} = \frac{mgRh}{R+h}. \ \blacktriangle$$

2. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружну пружину на 0,1 м, якщо сила в 1 Н розтягує цю пружину на 0,01 м?

Δ Реакція F пружної пружини, один кінець якої закріплено, виражається, згідно з законом Гука, формулою $F = cx$, де c – коефіцієнт жорсткості пружини, x – деформація. Оскільки для деформації пружини на 0,01 м потрібно прикласти силу в 1 Н, то сталу c знаходимо з умови

$$1\,\text{Н} = c \cdot 0{,}01\,\text{м}, \quad c = \frac{1}{0{,}01}\ \text{Н/м} = 100\,\text{Н/м}.$$

Елементарна робота пружної сили (реакція пружини) наближено визначається виразом

$$dA = -cxdx,$$

де dx – елементарне переміщення, яке направлене в сторону, протилежну силі F. Повну роботу знайдемо, проінтегрувавши в межах $[0; 0{,}1]$ одержаний вираз:

$$A = -c\int_0^{0{,}1} xdx = -100 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0{,}1} = -0{,}5\,\text{Дж}.$$

Таким чином, робота пружної сили від'ємна. Шукана робота дорівнює $|A| = 0{,}5$ Дж. $\blacktriangle$

3. Обчислити роботу, яку потрібно виконати щоб викачати воду, що наповнює бочку циліндричної форми висотою h і радіусом основи R.

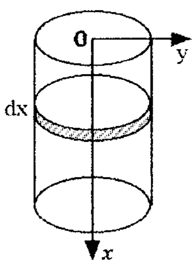


Рис. 27

Δ Виділимо на глибині x елементарний шар води (рис. 27). Тоді об'єм елементарного шару води буде дорівнювати $dV = \pi R^2 dx$. Елементарна робота dA, яку треба виконати для підйому цього шару води на висоту x дорівнює $dA = \rho g x \pi R^2 dx$, де ρ – густина води, g – прискорення вільного падіння. Отже, вся робота буде дорівнювати

$$A=\int_0^h dA=\int_0^h \rho g x\pi R^2 dx=\rho g\pi R^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^h=\frac{1}{2}\rho g\pi R^2 h^2 .\blacktriangle$$

4. Вертикальна гребля має форму трапеції, верхня основа якої дорівнює a, нижня – b $(a>b)$, а висота – h. Знайти силу тиску води на греблю.

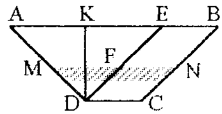


Рис. 28

Δ Введемо систему координат як показано на рис. 28 і виділимо на відстані x від початку відліку диференціал площі dS : $dS=MN\cdot dx$. З подібності трикутників ADE і MFD випливає $\frac{ML}{AE}=\frac{DF}{DK}$ або $\frac{ML}{a-b}=\frac{h-x}{h}$. Звідки $ML=\frac{(a-b)(h-x)}{h}$. Тоді $MN=\frac{(a-b)(h-x)}{h}+b=\frac{ah-ax-bx}{h}$. Таким чином, $dS=\frac{ah-ax-bx}{h}dx$ і диференціал сили тиску води на греблю дорівнює

$$dP=xdS=\frac{1}{h}(ahx-ax^2-bx^2)dx.$$

Звідси

$$P=\frac{1}{h}\int_0^h(ahx-ax^2-bx^2)dx=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}ahx^2-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{3}bx^3\right)\Big|_0^h=\frac{1}{6}(a+2b)h^2.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Як за допомогою визначеного інтеграла обчислюють площу фігури, заданої в декартових координатах?
2. Виведіть формулу для обчислення площі фігури, заданої в полярній системі координат.
3. Виведіть формулу для обчислення об'єму тіла. За якою формулою обчислюється об'єм тіла обертання навколо Ox? Навколо осі Oy?
4. Яку криву називають спрямлюваною? Що розуміють під довжиною кривої?
5. Виведіть формулу для обчислення довжини гладкої кривої, заданої в прямокутних і полярних координатах.
6. Виведіть формулу для диференціала дуги. Які рівняння кривої називають натуральними?
7. Дайте означення кривини кривої в звичайній точці і виведіть формулу для її обчислення.
8. Що розуміють під площею поверхні тіла обертання? Виведіть формули для обчислення площі поверхні тіла обертання.
9. Виведіть формули для обчислення координат центра ваги плоскої матеріальної кривої.
10. Виведіть формули для обчислення координат центра ваги плоскої матеріальної фігури.

11. Сформулюйте і доведіть першу теорему Гульдіна.
12. Сформулюйте і доведіть другу теорему Гульдіна.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислення площ плоских фігур

1. Обчислити площу фігури, яка обмежена віссю Ox, гіперболою $xy=1$ і прямими $x=2$ і $x=4$. *Відп.* $\ln 2$.

2. Обчислити площу фігури, яка обмежена кривою $y=2+\sin x$, віссю Ox і прямими $x=\pi$ і $x=2\pi$. *Відп.* $2(\pi-1)$.

3. Обчислити площу фігури, яка обмежена параболами $y=x^2$, $y=x^2/2$ і прямою $y=3x$. *Відп.* $27/2$

4. Обчислити площу фігури, яка обмежена параболами $x=3y^2/4+1$ і $x=y^2$. *Відп.* $8/3$.

5. Обчислити площу фігури, яка міститься між кривими $y^2=4x-x^2$ і $y^2=2x$. *Відп.* $0,95$.

6. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y=1/(1+x^2)$ і $y=x^2/2$. *Відп.* $\pi/2-1/3$.

7. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y=8/(1+x^2)$, $x^2=4y$. *Відп.* $4,95$.

8. Обчислити площу фігури, яка обмежена петлею лінії $x=3t^2$, $y=3t-t^3$. *Відп.* $72\sqrt{3}/5$.

9. Обчислити площу фігури, яка обмежена петлею лінії $x=t^2-1$, $y=t^3-t$. *Відп.* $8/15$.

10. Обчислити площу фігури, яка обмежена петлею лінії $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$. *Відп.* $8/15$.

11. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $y=x$, $y=-x/\sqrt{3}$. *Відп.* $25\pi/4$.

12. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y^2=x+5$, $y=-x+4$. *Відп.* $9\sqrt{2}$.

13. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $4y=8x-x^2$ і $4y=x+6$. *Відп.* $49/24$.

14. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y=2^x$, $y=2x-x^2$, $x=0$, $x=2$. *Відп.* $3,02$.

15. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y=4t^2-6t$, $x=2t$ і віссю Ox. *Відп.* $9/2$.

17. Обчислити площу астроїди $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. *Відп.* $3a^2\pi/8$.

18. Обчислити площу фігури, яка обмежена віссю Ox і однією аркою циклоїди $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$. *Відп.* 12π.

19. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $x=3(\cos t+t\sin t)$, $y=3(\sin t-t\cos t)$, $y=0$. *Відп.* 29,25.

20. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $x=3\cos t$, $y=2\sin t$. *Відп.* 6π.

21. Обчислити площу фігури, яка обмежена кривою $\rho=a\cos 2\varphi$. *Відп.* $\pi a^2/2$.

22. Обчислити площу фігури, яка міститься між першим і другим витками спіралі Архімеда $\rho=a\varphi$ $(a>0)$. *Відп.* $28a^2\pi^3/3$.

23. Обчислити площу фігури, яка обмежена кривою $r=5\sin 5\varphi$. *Відп.* $\pi a^2/4$.

24. Обчислити площу фігури, яка обмежена кривими $\rho^2=2\cos 2\varphi$, $r=1$, $(r\ge 1)$. *Відп.* $(3\sqrt{3}-\pi)/3$.

25. Перейшовши до полярних координат, обчислити площу фігури, яка обмежена замкненою кривою $(x^2+y^2)^3 4x^2y^2$.

Обчислення об'ємів тіл

26. Обчислити об`єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}$, $z=1$. *Відп.* $\pi\sqrt{2}$.

27. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$. *Відп.* $\dfrac{2}{3}ab^2$.

28. Обчислити об`єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=1$ і $x^2+y^2=x$. *Відп.* $(6\pi-8)/9$.

29. Обчислити об'єм тіла, обмеженого площинами координат, площиною $x=a$ і параболічним циліндром $z=4-y^2$. *Відп.* $16a/3$.

30. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням навколо осі Ox фігури, яка лежить в площині xOy і обмежена лініями $y=x^2$ і $x=y^2$. *Відп.* $3\pi/10$.

31. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням навколо Ox фігури, яка обмежена лініями $y=x^2/2$ і $y=x^3/8$. *Відп.* $4\pi/35$.

32. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням навколо осі ординат криволінійної трапеції, яка обмежена дугою параболи $y=4x-x^2$ і віссю абсцис. *Відп.* $512\pi/15$.

33. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням навколо осі абсцис

фігури, яка обмежена віссю Ox і першою аркою циклоїди $x = a(t - \cos t)$, $y = a(1 - \sin t)$. *Відп.* $5a^2\pi^2$.

34. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням навколо осі абсцис фігури, яка обмежена лінією $x = 2\cos t$, $y = 5\sin t$. *Відп.* 83,73.

35. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням навколо полярної осі кривої $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. *Відп.* $6a^3\pi^3$.

Обчислення довжин дуг плоских кривих

36. Обчислити довжину дуги параболи $y = 2\sqrt{x}$ між точками з абсцисами $x_0 = 0$ і $x_1 = 1$. *Відп.* $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$.

37. Обчислити довжину дуги лінії $y = 1 - \ln\cos x$ $(0 \le x \le \pi/6)$. *Відп.* 0,55.

38. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = x^3$, яка відтинається прямою $x = 4/3$. *Відп.* 112/27.

39. Знайти довжину ланцюгової лінії $y = 2(e^{x/4} + e^{-x/4})$ $(0 \le x \le 4)$. *Відп.* $2(e - e^{-1})$.

40. Обчислити довжину дуги кривої $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, яка міститься між точками з ординатами $y = 1$, $y = 2$. *Відп.* $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$.

41. Знайти довжину замкненої кривої $x = 4\sqrt{2}a\sin t$, $y = a\sin 2t$. *Відп.* $8a\pi$.

42. Обчислити довжину дуги циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. *Відп.* $8a$.

43. Обчислити довжину дуги лінії $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $(0 \le t \le \pi)$. *Відп.* $2a\pi^2$.

44. Обчислити довжину дуги лінії $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$. *Відп.* 4.

45. Обчислити довжину дуги кривої $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$. *Відп.* $16a$.

46. Обчислити довжину дуги кардіоїди $\rho = a(1 - \cos\varphi)$. *Відп.* $8a$.

47. Обчислити довжину дуги лінії $\rho = 4\cos\varphi$. *Відп.* 4π.

48. Обчислити довжину дуги лінії $\rho = 2\cos^3(\varphi/3)$. *Відп.* 3π.

49. Знайти довжину логарифмічної спіралі $\rho = e^{a\varphi}$ від полюсу до змінної точки $(\rho; \varphi)$. *Відп.* $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\varphi} = \frac{\rho}{a}\sqrt{1 + a^2}$.

50. Знайти довжину замкненої кривої $\rho = 2a(\sin\varphi + \cos\varphi)$. *Відп.* $2\sqrt{2}a\pi$.

Обчислення площ поверхні обертання

51. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги синусоїди $y = \sin 2x$ від $x = 0$ до $x = \pi/2$. *Відп.* $\frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)\right]$.

52. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox частини кривої $y^2 = 4 + x$, яка відтинається прямою $x = 2$. *Відп.* $62\pi/3$.

53. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy еліпса $4x^2 + y^2 = 4$. *Відп.* $2\pi\left(1 + 4\pi/(3\sqrt{3})\right)$.

54. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ від $y = 1$ до $y = e$. *Відп.* $\frac{\pi}{3}(e-1)(e^2+e+4)$.

55. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. *Відп.* $64\pi a^2/3$.

56. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy дуги кривої $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$, $0 \le t \le \pi/2$. *Відп.* $24\pi a^2$.

57. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кардіоїди $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$. *Відп.* $12\pi a^2/5$.

58. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кола $\rho = 2a\sin\varphi$ навколо полярної осі. *Відп.* $4\pi^2 a^2$.

59. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі лемніскати $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. *Відп.* $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$.

60. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. *Відп.* $32\pi a^2/5$.

Застосування визначеного інтеграла до задач механіки та фізики

61. Визначити силу тиску води на вертикальний прямокутний шлюз з основою $18\,м$ і висотою $6\,м$. *Відп.* 3,18 МН.

62. Визначити силу тиску води на вертикальний параболічний сегмент, основа якого дорівнює $4\,м$ і розташована на поверхні води, а вершина знаходиться на глибині $4\,м$. *Відп.* 167 кН.

63. Визначити силу тиску води на поверхню кулі діаметром $4\,м$, якщо її центр знаходиться на глибині $3\,м$ від поверхні води. *Відп.* 471 кН.

64. Обчислити роботу, яку необхідно виконати, щоб викачати рідину із вертикального циліндричного резервуара висотою $H = 6\,м$ і радіусом основи $R = 2\,м$. Питома густина рідини $\delta = 0{,}9$. *Відп.* 637 кДж.

65. Обчислити роботу, яку необхідно виконати, щоб запустити ракету масою 1500кг з поверхні Землі на висоту $H = 2000\,км$. *Відп.* $2{,}24 \cdot 10^7$ кДж.

66. Прямий круговий конус з вертикальною віссю занурено у воду так, що його вершина знаходиться на поверхні води. Обчислити роботу, яку необхідно виконати, щоб витягнути конус з води, якщо його висота $0{,}1\,м$, діаметр основи $0{,}2\,м$, питома вага 3. *Відп.* 23,1 кН.

67. Знайти центр мас однорідного півкруга $x^2 + y^2 \le a^2$, який розташова-

но над віссю Ox. *Відп.* $(0;4a/3\pi)$.

68. Знайти момент інерції дуги кола $x^2+y^2=R^2$, яка розташована в першому квадранті, відносно осі Oy. *Відп.* $0,25\pi R^3$.

69. Знайти статичні моменти дуги параболи $y^2=2x$ відносно осей Ox і Oy від $x=0$ до $x=2$ $(y>0)$. *Відп.* $M_x=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$, $M_y=\frac{9\sqrt{5}}{8}+\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{16}$.

70. Знайти центр мас дуги першої арки дуги циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$. *Відп.* $x_c=\pi a$, $y_c=4a/3$.

Таблиця диференціалів елементарних функцій

1. $dC = 0$, 2. $dx = 1$,

3. $d(u^{\alpha}) = \alpha u^{\alpha-1}du$, 4. $d(\sqrt{u}) = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$,

5. $d(a^u) = a^u \ln a du$, 6. $d(e^u) = e^u du$,

7. $d(\log_a u) = \dfrac{du}{u \ln a}$, 8. $d(\ln u) = \dfrac{du}{u}$,

9. $d(\sin u) = \cos u du$, 10. $d(\cos u) = -\sin u du$,

11. $d(\operatorname{tg} u) = \dfrac{du}{\cos^2 u}$, 12. $d(\operatorname{ctg} u) = -\dfrac{du}{\sin^2 u}$,

13. $d(\arcsin u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, 14. $d(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$,

15. $d(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{du}{1+u^2}$, 16. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\dfrac{du}{1+u^2}$,

17. $d(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u du$, 18. $d(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u du$,

19. $d(\operatorname{th} u) = \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u}$, 20. $d(\operatorname{cth} u) = -\dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u}$.

21. $d(u \pm v) = du \pm dv$, 22. $d(uv) = vdu + udv$,

23. $d(c \cdot u) = c \cdot du$, 24. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$,

25. $d\left(\dfrac{c}{v}\right) = -\dfrac{c \cdot dv}{v^2}$.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0\cdot du = C$, 2. $\int du = u + C$,

3. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, 4. $\int \frac{du}{u^{\alpha}} = \frac{-1}{(\alpha+1)u^{\alpha-1}} + C$,

5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$, 6. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$,

7. $\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$, 8. $\int e^{u}du = e^{u} + C$,

9. $\int \sin u du = -\cos u + C$, 10. $\int \cos u du = \sin u + C$,

11. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$, 12. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$,

13. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$, 14. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$,

15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$, 16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$,

17. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$, 18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$,

19. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$, 20. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$,

21. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$, 22. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$,

23. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$, 24. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$, 25. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$,

26. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}$,

27. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{a^2+u^2}\right| + C$.

Огляд методів інтегрування
(основних видів інтегралів)

	Вигляд інтеграла	Метод інтегрування
1	$\int F\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx$	Підстановка $\varphi(x) = t$
2	$\int f(x)\varphi'(x)dx$	Інтегрування частинами $\int f(x)\varphi'(x)dx = f(x)\varphi(x) - \int \varphi(x) f'(x)dx$ Метод інтегрування частинами застосовується, наприклад, до інтегралів виду $\int p(x) f(x)dx$, де $p(x)$ – многочлен, а $f(x)$ одна з поданих нижче функцій: e^{ax}; $\cos ax$; $\sin ax$; $\ln x$; $\mathrm{arctg}\, x$; $\arcsin x$, а також до інтегралів, що містять добуток показникової функції на косинус або синус.
3	$\int f(x)\varphi^{(n)}(x)dx$	Зводиться до інтегрування добутку $f^{(n)}(x)\varphi(x)$ за допомогою формули кратного інтегрування частинами: $\int f(x)\varphi^{(n)}(x)dx = f(x)\varphi^{(n-1)}(x) - f'(x)\varphi^{(n-2)}(x) + f''(x)\varphi^{(n-3)}(x) - \ldots + (-1)^{(n-1)} f^{(n-1)}(x)\varphi(x) + (-1)^n \int f^{(n)}(x)\varphi(x)dx$
4	$\int e^{ax} p_n(x)dx$, де $p_n(x)$ – многочлен степеня n.	Застосовуючи формулу кратного інтегрування частинами, одержимо $\int e^{ax} p_n(x)dx = e^{ax}\left[\frac{p_n(x)}{a} - \frac{p'_n(x)}{a^2} + \frac{p''_n(x)}{a^3} - \ldots + (-1)^n \frac{p_n^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right] + C$
5	$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $p^2 - 4q < 0$	Підстановка $x + \frac{p}{2} = t$
6	$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$	Застосування рекурентної формули $I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$
7	$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, де $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб.	Підінтегральний дріб представляємо у вигляді суми найпростіших дробів $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_l}{(x-x_1)^l} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-x_2)^m} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k} + \ldots$

8 $\int R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s})dx$

де R – раціональна функція своїх аргументів.

Зводиться до інтеграла від раціональної функції підстановкою $x = t^k$, де k – спільний знаменник дробів $m/n, \dots, r/s$.

9 $\int R\left[x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right]dx$

де R – раціональна функція своїх аргументів.

Зводиться до інтеграла від раціональної функції підстановкою

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

10 $\int \dfrac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Підстановкою $x + \dfrac{b}{2a} = t$ інтеграл зводиться до суми двох інтегралів:

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = M_1 \int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+m}} + N_1 \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}.$$

Перший інтеграл зводиться до інтеграла від степеневої функції, а другий інтеграл – табличний.

11 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$

де R - раціональна функція від x і $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Приводиться до інтеграла від раціонального дробу підстановкою Ейлера:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a} \quad (a > 0),$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c} \quad (c > 0),$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1) \quad (4ac - b^2 < 0),$$

де x_1 – корінь тричлена ax^2+bx+c.

Для обчислення вказаного інтеграла застосовуються також тригонометричні підстановки:

$$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sin t, \\ \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cos t, \end{cases} \quad (a < 0,\ 4ac - b^2 < 0);$$

$$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sec t, \\ \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\csc t, \end{cases} \quad (a > 0,\ 4ac - b^2 < 0);$$

$$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{tg} t, \\ \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{ctg} t, \end{cases} \quad (a > 0,\ 4ac - b^2 > 0).$$

12	$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n.	Записуємо рівність $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степеня $n-1$. Диференціюючи цю рівність і домножуючи на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, одержимо тотожність $P_n(x) \equiv Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+k$ яка дає систему $n+1$ лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів $Q_{n-1}(x)$ і множника k. Інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ береться згідно з п. 10.
13	$\int \frac{dx}{(x-x_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Цей інтеграл приводиться підстановкою $x-x_1=1/t$ до інтеграла, який розглянуто вище.
14	$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$	Інтеграл від біноміального диференціала виражається через елементарні функції тільки в трьох випадках: 1) якщо p – ціле число; а) якщо p – ціле додатне число, то потрібно розкрити дужки $(a+bx^n)^p$ за біномом Ньютона і обчислити інтеграли від степенів; в) якщо p – ціле від'ємне число, то підстановка $x=t^k$, де k – спільний знаменник дробів m і n, приводить до інтегралу від раціонального дробу. 2) якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, то застосовується підстановка $a+bx^n=t^k$, де k знаменник дробу p. 3) якщо $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число, то застосовується підстановка $a+bx^n=x^n t^k$, де k знаменник дробу p.
15	$\int R(\sin x, \cos x)dx$	Універсальна тригонометрична підстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. При цьому $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Якщо $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то підстановка $\cos x=t$. Якщо $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то підстановка $\sin x=t$. Якщо $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то підстановка $\operatorname{tg}x=t$.
16	$\int R(\operatorname{sh}x, \operatorname{ch}x)dx$	Застосовується підстановка $\operatorname{th}\frac{x}{2}=t$. При цьому $\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1-t^2}$.

17	$\int \sin ax \sin bx dx$ $\int \sin ax \cos bx dx$ $\int \cos ax \cos bx dx$	Необхідно перетворити добуток тригонометричних функцій в суму або різницю за формулами $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$ $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$ $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$
18	$\int \sin^m x \cos^n x dx$	Якщо m – непарне додатне, то підстановка $\cos x = t$. Якщо n – непарне додатне, то підстановка $\sin x = t$. Якщо $m+n$ – парне від'ємне, то підстановка $\operatorname{tg} x = t$. Якщо m і n – парні невід'ємні, то застосовуються формули: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.
19	$\int \sin^p x \cos^q x dx$ $(0 < x < \pi/2)$, p і q – раціональні	Підстановкою $\sin x = t$ зводиться до інтеграла від біноміального диференціала $\int \sin^p x \cos^q x dx = \int t^p (1-t^2)^{q-1} dt$
20	$\int R(e^{ax})dx$	Підстановкою $e^{ax} = t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: 1981.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление.– М.: Наука. 1980; 1988.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Задачник.– М.: Наука,1982.
5. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. /За ред. Г. Л. Кулініча – К.: 1992.
6. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 – х ч. М.: Высш. шк., 1986.
7. Ефимов А. В. Математический анализ (специальные разделы). Ч.1. Общие функциональные ряды и их приложение: Учеб. пособие для втузов.– М.: Высш. шк. 1980.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу (для втузов) /Под ред. Демидовича Б. П. – М.: Наука,1968.
9. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989.
10. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В.М. Высшая математика, – К.: Вища школа, 1987.
11. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996.
12. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Ч. 1. – М.: Наука, 1985.
13. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. /Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.– М.: Наука, 1986.
14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. 1,2. /Под ред. Рябушко А. П. – Минск: Вышэйш. шк., 1990.
15. Фролов С. В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк. 1973.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчальне видання

Олександр Андрійович Войцеховський

Інтегральне числення
функції однієї змінної

Навчальний посібник

Вінниця ВДТУ 2000

Редактор В. О. Дружиніна

Тираж 60 прим. Зам № 2000 - 0023

ВДТУ. 21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе 95.