

517.4(078)

B65

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.А. ВОЙЦЕХОВСЬКИЙ

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ УСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ



ВІННИЦЯ ВДТУ 2000

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.А. ВОЙЦЕХОВСЬКИЙ

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

НТБ ВНТУ



400891

517.4(075)

В 65

2000

Войцеховський О.А. Операційне числення

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник з вищої математики для студентів усіх спеціальностей. Протокол №10 від 24 червня 1999р.

ВІННИЦЯ ВДТУ 2000.

УДК 517.44

Операційне числення. Навчальний посібник /О.А. Войцеховський. – В.: ВДТУ, 2000. – с. 148. Укр. мовою/.

В навчальному посібнику з операційного числення розглядаються основні теоретичні питання даного курсу, а також основні застосування: розв'язування лінійних звичайних диференціальних рівнянь та їх систем; крайових задач математичної фізики, інтегральних рівнянь типу згортки, диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується прикладами розв'язання задач. З метою закріплення навчального матеріалу пропонуються завдання для самостійної роботи.

Навчальний посібник призначено для студентів технічних вузів усіх форм навчання та спеціальностей.

Бібліограф. 13 назв, табл.2, іл. 21.

Рецензенти: П. М. Зузяк, д. ф. – м. н. проф. ВДТУ
В. М. Михалевич, д. т. н. проф. ВДТУ
Ю. М. Поздняков, к. ф. – м. н. ст. викл. ВДТУ

400891



ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА	8
1.1 Оригінал і зображення	8
1.2. Одинична функція Хевісайда	10
1.3. Зображення деяких функцій	11
1.4. Основні властивості перетворення Лапласа	12
1.4.1. Теореми єдиності і лінійності	12
1.4.2. Теорема подібності	13
1.4.3. Теорема запізнювання	16
1.4.4. Теорема випередження	20
1.4.5. Теорема зміщення	21
1.4.6. Зображення періодичного оригіналу	22
1.4.7. Диференціювання оригіналу	25
1.4.8. Інтегрування оригіналу	28
1.4.9. Диференціювання зображення	30
1.4.10. Інтегрування зображення	32
1.4.11. Згортка функцій	33
1.4.12. Інтеграл Дюамеля	36
РОЗДІЛ 2. ОБЕРНЕНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА	39
2.1. Формули обернення	39
2.2. Теореми розвинення	46
2.3. Зображення деяких спеціальних функцій	51
2.3.1. Гамма-функція	51
2.3.2. Функції Бесселя	56
2.3.3. Функція імовірності помилок	61
2.3.4. Імпульсна функція	63
РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ	67
3.1 Розв'язування диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь	67
3.1.1. Лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами	67
3.1.2. Застосування інтеграла Дюамеля до розв'язування диференціальних рівнянь	76
3.1.3. Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь операційним методом	80

3.1.4. Лінійні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами	84
3.2. Розв'язування деяких задач математичної фізики	88
3.3. Інтегральні рівняння типу згортки	97
3.4. Рівняння із запізнюючим аргументом	103
3.5. Застосування операційного числення у електротехніці	108
3.6. Застосування операційного числення в теорії автоматичного регулювання	128
<i>Відповіді до вправ</i>	136
<i>Додатки</i>	143
<i>Список літератури</i>	147

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник призначений для студентів вищих технічних навчальних закладів, які вивчають операційне числення в рамках курсу вищої математики.

В посібнику розглядаються необхідні теоретичні положення, а також основні застосування операційного числення. До таких застосувань відносяться: розв'язування лінійних диференціальних рівнянь та їх систем; розв'язування крайових задач математичної фізики, інтегральних рівнянь типу згортки, диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом; розрахунки перехідних процесів в електричних колах; застосування до дослідження систем автоматичного регулювання.

Посібник складається з трьох розділів: в перших двох розділах розглядаються і доводяться основні теореми і формули, в третьому – наведено основні застосування операційного числення. Нумерація формул зроблена по розділах. При посиланнях на формули в даному розділі вказується тільки номер формули, наприклад (3), при посиланнях на формулу іншого розділу – номер розділу і номер формули, наприклад (2.5).

Доведення теорем і формул супроводжуються докладно розібраними прикладами. Розв'язування прикладу починається зі знаку Δ і закінчується знаком \blacktriangle . Початок і кінець доведення теореми відмічаються відповідно знаками \square і \blacksquare . До кожного пункту наведено задачі для самостійного розв'язування.

Автор висловлює подяку доктору педагогічних наук В. І. Ключко, професору В. Л. Карпенко, а також рецензентам: доктору фізико – математичних наук, професору П. М. Зузяку, доктору технічних наук професору В. М. Михалевичу і кандидату фізико – математичних наук Ю. М. Позднякову за цінні рекомендації та зауваження.

ВСТУП

Операційне (символьне) числення застосовується до розв'язання лінійних диференціальних рівнянь звичайних і з частинними похідними, диференціально-різницевих рівнянь і лінійних інтегральних рівнянь типу згортки. До цих рівнянь зводяться задачі дослідження перехідних процесів лінійних фізичних систем електротехніки, радіотехніки, теорії автоматичного керування, імпульсної техніки та інших галузей науки та техніки.

Метод операційного числення ґрунтується на тому, що над оператором диференціювання $\frac{d}{dt} = p$ і деякою функцією (зображенням) $X(p)$ від цього оператора, якій ставиться у відповідність функція (оригінал) $x(t)$ (відповідність функцій позначають так: $x(t) \rightarrow X(p)$) виконуються такі дії, що диференціюванню функції $x(t)$ відповідає множення оператора p на функцію $X(p)$:

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow pX(p), \quad \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow p^2X(p), \dots,$$

а інтегруванню – ділення функції $X(p)$ на оператор p :

$$\int_0^t x(t) dt \rightarrow \frac{X(p)}{p}, \quad \int_0^t dt \int_0^t x(t) dt \rightarrow \frac{X(p)}{p^2}, \dots$$

За допомогою методу операційного числення лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами шуканої функції $x(t)$ зводяться до алгебраїчних рівнянь відносно функції $X(p)$.

Операційне числення почали розвивати в своїх роботах Г. В. Лейбніц (1646 – 1716), Л. Ейлер (1707 – 1783), Ж. Л. Лагранж (1736 – 1813), П. С. Лаплас (1749 – 1827), Ж. Б. Ж. Фур'є (1768 – 1830) та інші.

Англійський інженер – електрик О. Хевісайд (1850 – 1925) вводить в операційне числення правила дій з оператором $\frac{d}{dt} = p$ і функціями цього оператора. Застосовуючи операційне числення до розв'язування диференціальних рівнянь, він одержав (1887 – 1912 рр.) низку важливих результатів зі складних проблем теорії електромагнітних коливань у дротах. Створення операційного числення звичайно пов'язують з ім'ям О. Хевісайда, який поклав початок його систематичному застосуванню до розв'язування фізико-технічних задач. Однак початкова розробка методу операційного числення була виконана задовго до появи робіт О. Хевісайда в працях математиків Л. Арбогаста (1759 – 1803), Ж. Франсе (1775 – 1833), Р. Лобатто (1797 – 1866), Д. Грегорі (1813 – 1844), Р. Кармайкла (1879 – 1967).

Операційне числення в Росії вперше розробив професор Київського університету М. Є. Ващенко-Захарченко (1825 – 1912). В своїй книзі «Символічне числення і застосування його до інтегрування лінійних диференціальних рівнянь» він розглядає символи та їх властивості, застосування символічного числення до розв'язування лінійних звичайних і з частинними похідними диференціальних рівнянь із сталими і змінними коефіцієнтами, виводить формулу розкладу для випадку простих і кратних коренів, яка ввійшла в літературу як формула розкладу О. Хевісайда.

Операційне числення, яке застосовував О. Хевісайд в своїх працях, не було математично обґрунтовано. Строге обґрунтування і розвиток операційне числення одержало на основі інтегральних перетворень в роботах Дж. Карсіна (1926 р.), Т. Бромвича (1916 р.), П. Леві (1926 р.), Б. Ван-дер-Поля (1929 – 1932 рр.) та інших.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

1.1. ОРИГІНАЛ І ЗОБРАЖЕННЯ

Означення 1. Оригіналом називається комплексна функція $f(t) = u(t) + iv(t)$ дійсної змінної t , що задовольняє умови:

- 1) $f(t)$ – однозначна неперервна або кусково-неперервна функція разом зі своїми похідними n -го порядку в інтервалі $(-\infty; +\infty)$;
- 2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- 3) існують такі числа $M > 0$ і $s > 0$ такі, що для всіх $t > 0$

$$|f(t)| < Me^{st}.$$

Число $s_0 \geq 0$ для якого нерівність в умові 3) виконується при будь-якому $s = s_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) і не виконується при $s = s_0 - \varepsilon$, називається показником зростання функції $f(t)$.

Функції-оригінали при $t \rightarrow \infty$ є або обмеженими, або такими, що прямують до нескінченності, але не швидше за показникову функцію $e^{s_0 t}$; вони називаються *функціями експоненціального типу*.

Означення 2. Зображенням функції – оригіналу $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = \sigma + i\omega$ що визначається інтегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

Має місце теорема.

Теорема. Якщо функція $f(t)$ – оригінал з показником зростання s_0 , то інтеграл Лапласа (1) збігається рівномірно в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ і функція $F(p)$ є аналітичною в цій півплощині.

□ Нехай $p = \sigma + i\omega$ – будь-яка точка в півплощині $\operatorname{Re} p = \sigma > s_0$.

Тоді знайдуться числа σ_1 і σ_2 такі, що $\sigma > \sigma_1 > \sigma_2 > s_0$.

Згідно з означенням показника зростання, маємо $|f(t)| \leq C e^{\sigma_2 t}$ і, отже,

$$\left| e^{-pt} f(t) \right| \leq e^{-\sigma t} C e^{\sigma_2 t} = C e^{-(\sigma - \sigma_2)t}.$$

Використовуючи це співвідношення, знайдемо оцінку залишку інтеграла (1) в півплощині $\operatorname{Re} p \geq \sigma_1$:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \left| e^{-pt} f(t) \right| dt &\leq C \int_a^{+\infty} e^{-(\sigma - \sigma_2)t} dt = \\ &= -C \frac{e^{-(\sigma - \sigma_2)t}}{\sigma - \sigma_2} \Big|_a^{+\infty} = \frac{C}{\sigma - \sigma_2} e^{-(\sigma - \sigma_2)a} \leq \frac{C e^{-(\sigma_1 - \sigma_2)a}}{\sigma_1 - \sigma_2}. \end{aligned}$$

Таким чином, залишок інтеграла (1) при $a \rightarrow +\infty$ як завгодно малий рівномірно по p , де $\operatorname{Re} p = \sigma \geq \sigma_1$, а це і доводить абсолютну і рівномірну збіжність інтеграла при $\operatorname{Re} p = \sigma \geq \sigma_1 > s_0$.

За доведеним інтеграл (1) збігається рівномірно в будь-якій півплощині $\operatorname{Re} p = \sigma \geq \sigma_1 > s_0$, а, отже, функція $F(p)$ неперервна в будь-якій точці \tilde{p} півплощини збіжності $\operatorname{Re} p > s_0$, оскільки завжди знайдеться число σ_1 таке, що $\operatorname{Re} \tilde{p} = \tilde{\sigma} > \sigma_1 > s_0$. Нехай U – окіл точки \tilde{p} , розташований в півплощині $\operatorname{Re} \tilde{p} = \tilde{\sigma} > \sigma_1$ і Γ – простий замкнений контур такий, що $\Gamma \subset U$. Тоді

$$\int_{\Gamma} F(p) dp = \int_{\Gamma} \left(\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right) dp = \int_0^{\infty} f(t) \left(\int_{\Gamma} e^{-pt} dp \right) dt = 0.$$

Тут порядок інтегрування можна змінити в силу рівномірної збіжності, а внутрішній інтеграл справа дорівнює нулю за теоремою Коші. Звідси за теоремою Морера випливає, що $F(p)$ – регулярна функція в околі U будь-якої точки \tilde{p} півплощини збіжності. ■

У формулі (1) функції $f(t)$ ставиться у відповідність певна функція $F(p)$, аналітична в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$. Ця відповідність називається перетворенням Лапласа.

Відповідність між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$ будемо записувати таким чином: $f(t) \rightarrow F(p)$ (або $f(t) \neq F(p)$).

В операційному численні користуються ще зображенням за Карсоном – Хевісайдом, що визначається рівністю

$$\Phi(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt,$$

і відрізняється від зображення за Лапласом тільки множником p .

Але в сучасній технічній літературі в основному користуються зображенням за Лапласом, оскільки фізичний зміст зображення за Лапласом $F(s + iv)$ – це спектральна функція згасаючої функції $e^{-st} f(t)$, для якої змінна v є частотою.

1.2. ОДИНИЧНА ФУНКЦІЯ ХЕВІСАЙДА

Функція-оригінал

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$\left(\eta(0) = \frac{1}{2}, \lim_{t \rightarrow 0+0} \eta(t) = 1 \right)$ називається одиничною функцією Хевісайда

(рис. 1).

Якщо функція $f(t)$ задовольняє умови 1) і 3), то функція

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

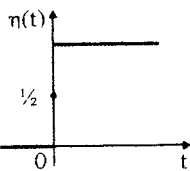


Рис. 1

задовольняє умови оригіналу.

Для скорочення запису будемо замість $f(t)\eta(t)$ писати $f(t)$, домовившись, що всі функції, які задовольняють умови оригіналу 1) і 3), дорівнюють нулю при $t < 0$. Це пояснюється фізичним змістом задач, що приводять до диференціальних рівнянь з початковими умовами. Оскільки немає значення, який фізичний процес описує шукана функція до початкового моменту при $t < 0$, то процес досліджується тільки в інтервалі $(0 \leq t < \infty)$.

Зауважимо, що ввівши позначення оператора Лапласа L , зображення деякого оригіналу $f(t)$ буде записано $Lf(t)$. Символічній рівності

$$f(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

буде відповідати звичайна рівність

$$Lf(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

1.3. ЗОБРАЖЕННЯ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ

1. Зображення одиничної функції. За формулою (1) одержуємо

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \eta(t) dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-pt} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pa} \right).$$

Якщо $\text{Re} p > 0$, то $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-pa} = 0$. Отже,

$$1 \rightarrow \frac{1}{p}, \quad \text{Re} p > 0. \quad (3)$$

2. Зображення функції $e^{\alpha t}$. За формулою (1) маємо

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(p-\alpha)t} dt = - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^a}{p-\alpha} =$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{e^{-(p-\alpha)a}}{p-\alpha} \right).$$

Якщо $\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0$, то $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-(p-\alpha)a} = 0$.

Таким чином,

$$e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha. \quad (4)$$

Аналогічно одержуємо

$$e^{-\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p+\alpha}, \quad \operatorname{Re} p + \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (5)$$

1.4. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

1.4.1. Теорема єдиності і лінійності

Теорема єдиності. Якщо два зображення $F_1(p)$ і $F_2(p)$ співпадають, то співпадають між собою і відповідні оригінали у всіх точках за винятком, можливо, точок розриву, тобто, якщо $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$ і $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$ і при цьому $F_1(p) = F_2(p)$, то $f_1(t) = f_2(t)$ у всіх точках неперервності.

Прийmemo цю теорему без доведення.

Теорема лінійності. Якщо

$$f_1(t) \rightarrow F_1(p), \quad f_2(t) \rightarrow F_2(p), \quad \dots, \quad f_n(t) \rightarrow F_n(p)$$

і $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - деякі числа, то

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) \rightarrow \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p) + \dots + \alpha_n F_n(p).$$

□ Дійсно, нехай

$$f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) \text{ і } f(t) \rightarrow F(p),$$

тоді

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_n f_n(t)) dt = \\ &= \alpha_1 \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) dt + \alpha_2 \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt + \dots + \alpha_n \int_0^{\infty} e^{-pt} f_n(t) dt = \\ &= \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p) + \dots + \alpha_n F_n(p). \blacksquare \end{aligned}$$

Приклади. Користуючись теоремою лінійності і рівностями (4) і (5), знайдемо зображення функцій:

$$1. \sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) \rightarrow \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right), \quad \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2+1}.$$

$$2. \operatorname{ch} t = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \right), \quad \operatorname{ch} t \rightarrow \frac{1}{p^2-1}.$$

ВПРАВИ

Знайти зображення функцій:

$$1. \cos t. \quad 2. \operatorname{sh} t. \quad 3. \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t + \cos t). \quad 4. \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t + \sin t).$$

$$5. \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t - \sin t). \quad 6. \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t - \cos t).$$

1.4.2. Теорема подібності

Теорема. Якщо функція $f(t)$ – оригінал, $f(t) \rightarrow F(p)$ і $\alpha > 0$ – число, $\operatorname{Re} p > \max(s, \alpha s)$, то

$$f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (6)$$

□ Застосуємо перетворення Лапласа до функції $f(\alpha t)$:

$$L f(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(\alpha t) dt$$

і введемо нову змінну $\alpha t = \tau$; тоді, очевидно,

$$L f(\alpha t) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\alpha} p \tau} f(\tau) \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \blacksquare$$

Таким чином, якщо оригіналу $f(t)$ відповідає зображення $F(p)$, то операції множення аргументу в просторі оригіналів на додатній множник відповідає операція ділення зображення і комплексного аргументу в просторі зображень на цей же множник.

Приклади. Користуючись теоремою подібності знайдемо зображення функцій:

$$1. \sin \alpha t \rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + 1}, \quad \sin \alpha t \rightarrow \frac{1}{p^2 + \alpha^2}.$$

$$2. i \operatorname{sh} \alpha t = \sin i \alpha t \rightarrow \frac{i \alpha}{p^2 + (i \alpha)^2}, \quad \operatorname{sh} \alpha t \rightarrow \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}.$$

$$3. \cos^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha t) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4\alpha^2} \right) = \frac{p^2 + 2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}.$$

$$4. \operatorname{ch}^2 \alpha t = \cos^2 i \alpha t \rightarrow \frac{p^2 + 2i^2 \alpha^2}{p(p^2 + 4i^2 \alpha^2)}, \quad \operatorname{ch}^2 \alpha t \rightarrow \frac{p^2 - 2\alpha^2}{p(p^2 - 4\alpha^2)}.$$

$$5. \sin \alpha t \cos \beta t = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta)t + \sin(\alpha + \beta)t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + (\alpha - \beta)^2)(p^2 + (\alpha + \beta)^2)}.$$

$$6. f(t) = \sin \alpha t \operatorname{ch} \beta t \quad \text{і} \quad f(t) = \cos \alpha t \operatorname{sh} \beta t.$$

Δ Маємо

$$\sin(\alpha + i\beta)t \rightarrow \frac{\alpha + i\beta}{p^2 + (\alpha + i\beta)^2} = \frac{(\alpha + i\beta)(p^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2i\alpha\beta)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2},$$

або

$$\sin \alpha t \operatorname{ch} \beta t + i \cos \alpha t \operatorname{sh} \beta t \rightarrow \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 + \beta^2) + i\beta(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}.$$

Звідки

$$\sin \alpha t \operatorname{ch} \beta t \rightarrow \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}$$

і

$$\cos \alpha t \operatorname{sh} \beta t \rightarrow \frac{\beta(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}. \blacktriangle$$

7. $\cos^3 t$

Δ За формулою Ейлера маємо

$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{4} \left(\frac{3(e^{it} + e^{-it})}{2} + \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} \right) = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t.$$

Отже,

$$\cos^3 t \rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{p^2 + 9} = \frac{p(p^2 + 7)}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)} \blacktriangle$$

ВПРАВИ

Знайти зображення функцій:

7. $\cos \alpha t$. 8. $\operatorname{ch} \alpha t$. 9. $\sin^2 \alpha t$. 10. $\operatorname{sh}^2 \alpha t$. 11. $\sin \alpha t \sin \beta t$.

12. $\cos \alpha t \cos \beta t$. 13. $\operatorname{sh} \alpha t \operatorname{ch} \beta t$. 14. $\operatorname{ch} \alpha t \operatorname{ch} \beta t$. 15. $\operatorname{sh} \alpha t \operatorname{sh} \beta t$.

16. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha t + \cos \alpha t)$. 17. $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} \alpha t + \sin \alpha t)$. 18. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha t - \cos \alpha t)$.

19. $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} \alpha t - \sin \alpha t)$. 20. $\cos \alpha t \operatorname{ch} \beta t$. 21. $\sin \alpha t \operatorname{sh} \beta t$. 22. $\sin^4 t$

1.4.3. Теорема запізнювання

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $t_0 > 0$, то

$$f(t-t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p). \quad (7)$$

□ Маємо

$$f(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ f(t-t_0), & t > t_0. \end{cases}$$

Зсувом графіка функції $f(t)$ (рис. 2, а) праворуч на відрізок $[0; t_0]$, одержуємо графік функції $f(t-t_0)$ (рис. 2, б).

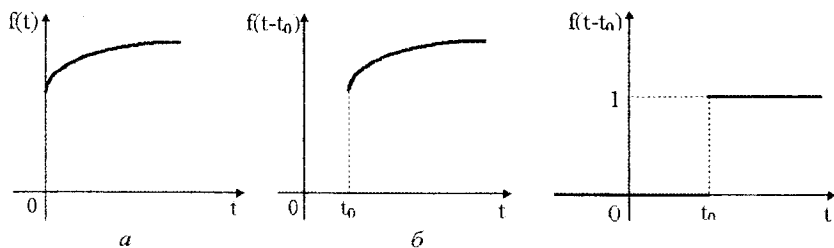


Рис. 2

Рис. 3

Зображення оригіналу

$$L f(t-t_0) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt.$$

Зробивши заміну $t-t_0 = \tau$, одержуємо

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \int_0^{\infty} e^{-p(\tau+t_0)} f(\tau) d\tau = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau.$$

Таким чином,

$$f(t-t_0) \rightarrow e^{-pt_0} F(p), \quad t > t_0.$$

Множення зображення $F(p)$ на e^{-pt_0} зсуває графік його оригіналу $f(t)$ праворуч на відрізок $[0; t_0]$. Ця геометрична властивість зсуву відома у фізиці як запізнення явища на час t_0 .

Застосовуючи теорему подібності і запізнення, можна знайти зображення для оригіналу $f(\alpha t - t_0)$, де $t_0 > 0, \alpha > 0$.

Маємо $f(t) \rightarrow F(p)$, тоді за теоремою подібності $f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

За теоремою запізнення знаходимо

$$f(\alpha t - t_0) = f\left(\alpha \left(t - \frac{t_0}{\alpha}\right)\right) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) e^{-\frac{t_0}{\alpha} p} \quad (8)$$

Функція

$$\eta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0, \end{cases} \quad (9)$$

називається узагальненою одиничною функцією (рис. 3); її зображення має вигляд

$$\eta(t - t_0) \rightarrow \frac{e^{-pt_0}}{p} \quad (10)$$

Приклади. Користуючись рівністю (8), знайдемо зображення функцій ($\omega, \varphi_0, a, b > 0, \alpha \in \mathbb{R}$):

1. $\sin(\omega t - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

2. $\text{sh}(\omega t - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$.

3. $\cos(\omega t - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$.

4. $\text{ch}(\omega t - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \frac{p}{p^2 - \omega^2}$.

Користуючись теоремою запізнення, зручно знаходити зображення кусково-неперервних функцій.

Приклади. Знайти зображення кусково-неперервних функцій:

$$1. f(t) = \begin{cases} a, & 0 < t < \tau, \\ 0, & t < 0, t > \tau, \end{cases} \quad a > 0, \quad (\text{рис. 4})$$

Δ Функцію $f(t)$ за допомогою узагальненої одиничної функції можна записати формулою

$$f(t) = a\eta(t) + \varphi(t)\eta(t - \tau)$$

з поки ще невідомою функцією $\varphi(t)$, яку визначаємо з умови:

$f(t) = 0$ при $t > \tau$. Маємо

$$f(t) = a + \varphi(t) = 0,$$

звідки $\varphi(t) = -a$. Отже, $f(t) = \eta(t)a - \eta(t - \tau)a$, або

$$f(t) = (\eta(t) - \eta(t - \tau))a.$$

Зображення оригіналу $f(t)$ має вигляд

$$f(t) \rightarrow a \frac{1 - e^{-p\tau}}{p},$$

оскільки $\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}$ і $\eta(t - \tau) \rightarrow e^{-p\tau} \frac{1}{p}$. ▲

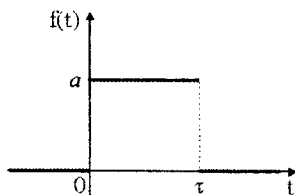


Рис. 4

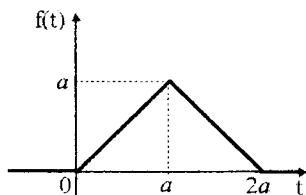


Рис. 5

$$2. f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < a, \\ 2a - t, & a < t < 2a, \\ 0, & t > 2a, t < 0. \end{cases} \quad (\text{рис. 5})$$

Δ Оригінал $f(t)$ можна записати формулою

$$f(t) = t\eta(t) + \varphi_1(t)\eta(t - a) + \varphi_2(t)\eta(t - 2a)$$

з поки що невідомими функціями $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$.

Функцію $\varphi_1(t)$ знайдемо з умови $f(t) = 2a - t$ при $a < t < 2a$.

Маємо

$$f(t) = t + \varphi_1(t) = 2a - t,$$

звідки

$$\varphi_1(t) = 2a - 2t = -2(t - a).$$

Аналогічно, функцію $\varphi_2(t)$ знаходимо з умови $f(t) = 0$ при $t > 2a$:

$$f(t) = t - 2(t - a) + \varphi_2(t) = 0,$$

звідки

$$\varphi_2(t) = t - 2a.$$

Отже, остаточно

$$f(t) = t\eta(t) - 2(t - a)\eta(t - a) + (t - 2a)\eta(t - 2a).$$

Зображення функції $f(t)$ має вигляд

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{p^2} - 2\frac{1}{p^2}e^{-ap} + \frac{1}{p^2}e^{-2ap},$$

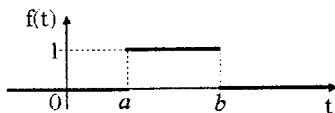
або

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{p^2}(1 - e^{-ap})^2.$$

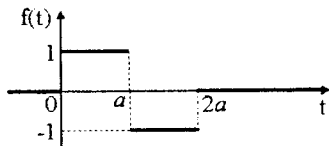
ВПРАВИ

Знайти зображення кусково-неперервних функцій:

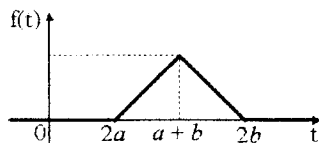
$$23. f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, t > b, \\ 1, & a < t < b. \end{cases}$$



$$24. f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, t > 2a, \\ 1, & 0 < t < a, \\ -1, & a < t < 2a. \end{cases}$$



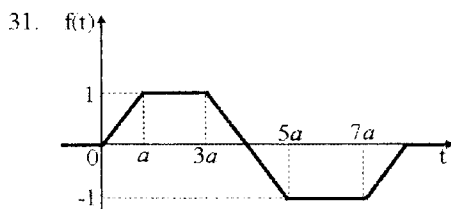
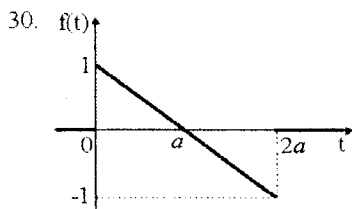
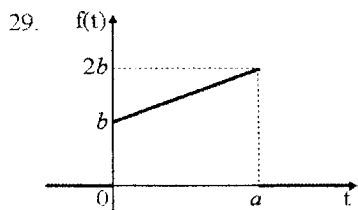
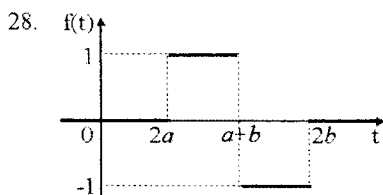
$$25. f(t) = \begin{cases} t - 2a, & 2a < t < a + b, \\ 2b - t, & a + b < t < 2b, \\ 0, & t > 2b, t < 2a. \end{cases}$$



$$26. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a, \\ e^{-b(t-a)}, & t > a. \end{cases}$$

$$27. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a, \\ 1 - e^{-b(t-a)}, & t > a. \end{cases}$$

Знайти зображення функцій, заданих графічно.



1.4.4. Теорема випередження

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $t_0 > 0$, то

$$f(t+t_0) \rightarrow e^{t_0 p} \left(F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right). \quad (11)$$

□ Графік функції $f(t+t_0)$ одержуємо зсувом графіка $f(t)$ ліворуч на відрізок $[0; t_0]$ (рис. 6, а). Зміщена частина графіка функції $f(t)$ в інтервалі $(-t_0; 0)$ вироджується у відрізок осі t , а відтята частина при $t > 0$ є графіком функції $f(t+t_0)$ (рис. 6, б). Маємо

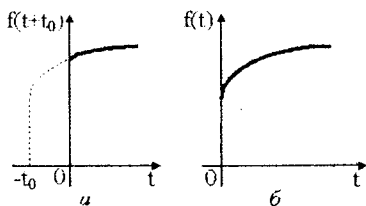


Рис. 6

$$f(t+t_0) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t+t_0) dt.$$

Зробивши заміну $t+t_0=u$, $t_0 \leq u < \infty$, одержуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t+t_0) dt &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-p(u-t_0)} f(u) du = e^{pt_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-pu} f(u) du = \\ &= e^{pt_0} \left(\int_{t_0}^0 e^{-pu} f(u) du + \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$f(t+t_0) \rightarrow e^{pt_0} \left(F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right). \blacksquare$$

1.4.5. Теорема зміщення

Теорема. Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, то $F(p+\alpha)$ є зображенням функції $e^{-\alpha t} f(t)$, тобто якщо, $f(t) \rightarrow F(p)$, то

$$e^{-\alpha t} f(t) \rightarrow F(p+\alpha). \quad (12)$$

□ Дійсно, за формулою (1) маємо

$$e^{-\alpha t} f(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt = F(p+\alpha). \blacksquare$$

Теорему зміщення застосовують при розгляді фізичних явищ, по-

в'язаних із згасаючими коливаннями.

Приклади. Користуючись теоремою зміщення, знайдемо зображення таких функцій:

$$1. e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad e^{-\alpha t} \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

$$2. e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \omega t, \quad \operatorname{sh} \omega t \rightarrow \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \omega t \rightarrow \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}.$$

$$3. e^{-\alpha t} \cos \omega t, \quad \cos \omega t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad e^{-\alpha t} \cos \omega t \rightarrow \frac{p}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

$$4. e^{-\alpha t} \operatorname{ch} \omega t, \quad \operatorname{ch} \omega t \rightarrow \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad e^{-\alpha t} \operatorname{ch} \omega t \rightarrow \frac{p}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}.$$

ВПРАВИ

Знайти зображення функцій:

$$32. e^{-4t} \sin 3t \cos 2t. \quad 33. e^{3t} \cos 3t \cos 4t. \quad 34. \operatorname{sh} t \cos 2t \sin 3t.$$

$$35. \operatorname{ch} 2t \sin t \sin 3t. \quad 36. \operatorname{sh} 5t \cos^2 t. \quad 37. \operatorname{ch} 3t \sin^2 4t. \quad 38. e^{at} \sin bt.$$

$$39. \frac{1}{2}(\operatorname{ch} at \sin at + \operatorname{sh} at \cos at). \quad 40. \frac{1}{2}(\operatorname{ch} at \sin at - \operatorname{sh} at \cos at)$$

1.4.6. Зображення періодичного оригіналу

Теорема. Якщо $f(t)$ – функція-оригінал з періодом $\omega > 0$, то її зображення має вигляд

$$F(p) = \frac{\varphi(p)}{1 - e^{-\omega p}}, \quad \text{де } \varphi(p) = \int_0^{\omega} e^{-pt} f(t) dt. \quad (13)$$

□ Згідно з формулою (1) маємо

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\omega} e^{-pt} f(t) dt + \int_{\omega}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \varphi(p) + \int_{\omega}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну $t = \tau + \omega$ і скористаємося рів-

ністю $f(\tau+\omega) = f(\tau)$. Тоді

$$\begin{aligned} F(p) &= \varphi(p) + \int_0^{\infty} e^{-p(\tau+\omega)} f(\tau+\omega) d\tau = \varphi(p) + e^{-p\omega} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \\ &= \varphi(p) + e^{-p\omega} F(p). \end{aligned}$$

Звідки

$$F(p) = \frac{\varphi(p)}{1 - e^{-p\omega}}. \blacksquare$$

Приклади. Знайти зображення періодичних функцій:

$$1. f(t) = |\sin t|.$$

Δ Оскільки $|\sin t|$ – періодична функція з періодом $\omega = \pi$, то її

$$\text{зображення } F(p) = \frac{\varphi(p)}{1 - e^{-p\pi}}, \text{ де } \varphi(p) = \int_0^{\pi} e^{-pt} |\sin t| dt.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-pt} |\sin t| dt &= \int_0^{\pi} \underbrace{e^{-pt}}_u \underbrace{\sin t}_{dv} dt = -e^{-pt} \cos t \Big|_0^{\pi} - p \int_0^{\pi} \underbrace{e^{-pt}}_u \underbrace{\cos t}_{dv} dt = \\ &= -e^{-pt} \cos t \Big|_0^{\pi} - p \left(e^{-pt} \sin t \Big|_0^{\pi} + p \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t dt \right) = \\ &= -e^{-pt} \cos t \Big|_0^{\pi} - p e^{-pt} \sin t \Big|_0^{\pi} - p^2 \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t dt. \end{aligned}$$

Звідки

$$(1 + p^2) \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t dt = -e^{-pt} (\cos t + p \sin t) \Big|_0^{\pi} = e^{-p\pi} + 1.$$

Отже,

$$\varphi(p) = \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t dt = \frac{e^{-p\pi} + 1}{p^2 + 1}.$$

Таким чином,

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{e^{-p\pi} + 1}{1 - e^{-p\pi}} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \operatorname{cth} \frac{\pi p}{2}. \blacktriangle$$

2 Знайти зображення прямокутного імпульсу з періодом $2l$ (рис.7):

$$\psi(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leq l; \\ 0, & l < t \leq 2l. \end{cases}$$

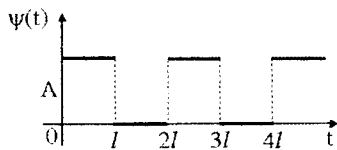


Рис. 7

Δ Оскільки $\psi(t)$ — періодична функція з періодом $\omega = 2l$, то її зображення $F(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - e^{-2pl}}$, де

$\Phi(p) = \int_0^l e^{-pt} A dt = -A \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^l = \frac{A}{p} (1 - e^{-pl})$.

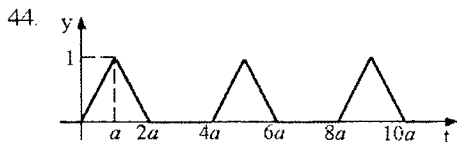
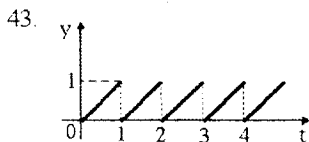
Таким чином,

$$\psi(t) \rightarrow \frac{A}{p} (1 - e^{-pl}) \cdot \frac{1}{1 - e^{-2pl}} = \frac{A}{p(1 + e^{-pl})}. \blacktriangle$$

ВПРАВИ

Знайти зображення таких періодичних функцій:

$$41. f(t) = \begin{cases} \sin t, & 2k\pi < t < (2k+1)\pi, \\ 0, & (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi, \end{cases} \quad 42. f(t) = \arccos(\cos t)$$



$$45. f(t) = \begin{cases} \frac{\pi - 2t}{\pi} & (0 < t < \pi), \\ \frac{2t - 3\pi}{\pi} & (\pi < t < 2\pi). \end{cases}$$

$$46. f(t) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t).$$

1.4.7. Диференціювання оригіналу

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $f'(t)$ є оригіналом, то

$$f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0+), \quad (14)$$

де $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$.

□ Використовуючи означення перегворення Лапласа і інтегруючи частинами, одержуємо:

$$L f'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Але $\lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t) e^{-pt}] = 0$, оскільки, покладаючи показник зростання $f(t)$ рівним s_0 , а $\operatorname{Re}(p) = s > s_0$, при $t \rightarrow +\infty$ будемо мати:

$$|f(t) e^{-pt}| < M e^{s_0 t} e^{-st} = M e^{-(s-s_0)t} \rightarrow 0.$$

Звідси

$$f'(t) \rightarrow -f(0) + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0). \blacksquare$$

Зокрема, при $f(0) = 0$, одержимо $f'(t) \rightarrow pF(p)$, тобто в цьому випадку диференціювання оригіналу призводить до множення зображення на величину p .

Якщо існує $f^n(t)$ і є оригіналом, то, використовуючи тільки що одержаний результат, знайдемо:

$$f''(t) \rightarrow p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Провівши аналогічні міркування, одержимо загальну формулу

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Якщо початкові умови $f(t)$ нульові, тобто

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0,$$

то

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p).$$

Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і функції $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то

$$f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \rightarrow p^2 F(p) - pf'(0) - f''(0),$$

.....

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

де $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t)$, $k=0, 1, \dots, n-1$.

Приклади.

Користуючись теоремою про диференціювання оригіналу, знайти зображення функцій:

1. $f(t) = \cos \alpha t$ (використовуючи формулу $\sin \alpha t \rightarrow \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$)

Δ Оскільки $(\sin \alpha t)' = \alpha \cos \alpha t$ і $\sin 0 = 0$, то

$$\alpha \cos \alpha t \rightarrow \frac{\alpha p}{p^2 + \alpha^2} \quad \text{або} \quad \cos \alpha t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \alpha^2}. \blacktriangle$$

2. $f(t) = \sin^2 t$.

Δ Нехай $f(t) \rightarrow F(p)$. Тоді

$$f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0).$$

Але $f(0) = 0$, а $f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \rightarrow \frac{2}{p^2 + 4}$. Отже,

$$\frac{2}{p^2 + 4} = pF(p),$$

звідки

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)} \leftarrow \sin^2 t \blacktriangle$$

3. Знайти зображення диференціального виразу

$$x^{IV}(t) - 4x'''(t) + 5x''(t) + 3x'(t) - 2x(t) - 4$$

при умовах $x(0) = 4$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$, $x'''(0) = -2$.

Δ Введемо позначення $x(t) \rightarrow X(p)$. Тоді за теоремою диференціювання оригіналу маємо

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - 4, \quad x''(t) \rightarrow p^2X(p) - 4p,$$

$$x'''(t) \rightarrow p^3X(p) - 4p^2 - 1, \quad x^{IV}(t) \rightarrow p^4X(p) - 4p^3 - p + 2.$$

Звідси, за властивістю лінійності, одержимо

$$\begin{aligned} & x^{IV}(t) - 4x'''(t) + 5x''(t) + 3x'(t) - 2x(t) - 4 \rightarrow \\ \rightarrow & p^4X(p) - 4p^3 - p + 2 - 4(p^3X(p) - 4p^2 - 1) + 5(p^2X(p) - 4p) + \\ & + 3(pX(p) - 4) - 2X(p) - \frac{4}{p} = (p^4 - 4p^3 + 5p^2 + 3p - 2)X(p) - \\ & - 4p^3 + 16p^2 - 21p + 10 - \frac{4}{p}. \blacktriangle \end{aligned}$$

ВІПРАВИ

Користуючись теоремою диференціювання оригіналу, знайти зображення таких функцій:

$$47. f(t) = \cos^2 t. \quad 48. f(t) = \sin^3 t. \quad 49. f(t) = t \sin \omega t.$$

$$50. f(t) = t \cos \omega t. \quad 51. f(t) = \cos^4 t. \quad 52. f(t) = te^t.$$

Знайти зображення диференціальних виразів з початковими умовами:

$$53. x^{IV}(t) + 4x'''(t) + 3x''(t), \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x''(0) = -2, \quad x'''(0) = 3.$$

$$54. 2x'''(t) - 3x''(t) + 4, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 2.$$

$$55. 3x^{IV}(t) - x''(t) - x(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 0, \quad x'''(0) = -1.$$

1.4.8. Інтегрування оригіналу

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > s_0. \quad (15)$$

□ Неважко впевнитись, що функція $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ задовольняє умови 1) і 2) функції-оригіналу, а також умову 3), оскільки

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| < \int_0^t M e^{s_0 \tau} d\tau = \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1) < M_1 e^{s_0 t},$$

де $M_1 = \frac{M}{s_0}$. Отже, функція $\varphi(t)$ є оригінал з показником зростання s_0 .

Нехай $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, тоді за теоремою диференціювання оригіналу маємо

$$\varphi'(t) \rightarrow p\Phi(p), \quad \varphi(0) = 0,$$

оскільки $\varphi'(t) = f(t)$, то $F(p) = p\Phi(p)$. Звідси

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Таким чином,

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}. \quad \blacksquare$$

Приклади.

1. Знайти зображення функції $\int_0^t e^{-\tau} d\tau$.

Δ Маємо $e^{-t} \rightarrow \frac{1}{p+1}$. За теоремою інтегрування оригіналу

$$\int_0^t e^{-\tau} d\tau \rightarrow \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}. \quad \blacktriangle$$

2. Знайти зображення степеневої функції t^n , де $n \in \mathbb{N}$.

Δ Із рівності $1 \rightarrow \frac{1}{p}$ користуючись теоремою інтегрування оригіналу одержимо

$$\int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)} d\tau = \frac{t^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \rightarrow \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Звідки

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}. \blacktriangle$$

3. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 4p + 5)}.$$

Δ Спочатку перетворимо дане зображення до однієї з вже відомих формул. Помітивши, що в знаменнику міститься квадратний тричлен, виділимо повний квадрат:

$$\frac{1}{p^2 + 4p + 5} = \frac{1}{(p+2)^2 + 1}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{(p+2)^2 + 1} \rightarrow e^{-2t} \sin t,$$

то, застосувавши теорему інтегрування оригіналу, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(p^2 + 4p + 5)} &\leftarrow \int_0^t e^{-2u} \sin u du = \frac{-e^{-2u}(2 \sin u + \cos u)}{5} \Big|_0^t = \\ &= \frac{1 - e^{-2t}(2 \sin t + \cos t)}{5}. \blacktriangle \end{aligned}$$

ВПРАВИ

Знайти зображення таких функцій:

$$56. f(t) = \int_0^t \cos \tau \, d\tau.$$

$$57. f(t) = \int_0^t (\tau + 1) \sin \omega \tau \, d\tau.$$

$$58. f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau \, d\tau.$$

$$59. f(t) = \int_0^t \cos^2 \omega \tau \, d\tau.$$

$$60. f(t) = \int_0^t \operatorname{ch} \omega \tau \, d\tau.$$

$$61. f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} \, d\tau.$$

Користуючись теоремою інтегрування, знайти оригінали за їх зображеннями:

$$62. F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 6p + 13)}.$$

$$63. F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 2p - 3)}$$

1.4.9. Диференціювання зображення

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$F^{(n)}(p) \leftarrow (-1)^n t^n f(t). \quad (16)$$

□ Дійсно, маємо

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) \, dt.$$

Оскільки інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) \, dt$ збігається рівномірно, то його можна

диференціювати за параметром. Тому

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dp} &= \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} (e^{-pt} f(t)) \, dt = \\ &= \int_0^{+\infty} (-te^{-pt} f(t)) \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} (-tf(t)) \, dt \leftarrow -tf(t). \blacksquare \end{aligned}$$

Застосовуючи операцію диференціювання зображення n раз, можна показати, що

$$F^{(n)}(p) \leftarrow (-1)^n t^n f(t).$$

Приклади. Користуючись рівностями

$$\sin \alpha t \rightarrow \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2},$$

$$\cos \alpha t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \alpha^2},$$

$$\operatorname{sh} \alpha t \rightarrow \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2},$$

$$\operatorname{ch} \alpha t \rightarrow \frac{p}{p^2 - \alpha^2}$$

і теоремою диференціювання зображення, знайдемо зображення функцій:

$$1. -t \sin \alpha t \rightarrow \left(\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \right)' = \frac{-2p\alpha}{(p^2 + \alpha^2)^2} \Rightarrow t \sin \alpha t \rightarrow \frac{2p\alpha}{(p^2 + \alpha^2)^2}.$$

$$2. -t \cos \alpha t \rightarrow \left(\frac{p}{p^2 + \alpha^2} \right)' = \frac{\alpha^2 - p^2}{(p^2 + \alpha^2)^2} \Rightarrow t \cos \alpha t \rightarrow \frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2}.$$

$$3. -t \operatorname{sh} \alpha t \rightarrow \left(\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} \right)' = \frac{-2p\alpha}{(p^2 - \alpha^2)^2} \Rightarrow t \operatorname{sh} \alpha t \rightarrow \frac{2p\alpha}{(p^2 - \alpha^2)^2}.$$

$$4. -t \operatorname{ch} \alpha t \rightarrow \left(\frac{p}{p^2 - \alpha^2} \right)' = \frac{-p^2 - \alpha^2}{(p^2 - \alpha^2)^2} \Rightarrow t \operatorname{ch} \alpha t \rightarrow \frac{p^2 + \alpha^2}{(p^2 - \alpha^2)^2}.$$

5. Знайти зображення функції $f(t) = t^n e^{\alpha t}$, де n – натуральне.

Δ З формули $e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p - \alpha}$ n -кратним застосуванням теореми диференціювання зображення послідовно одержуємо:

$$e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p - \alpha} \Rightarrow -t e^{\alpha t} \rightarrow \frac{-1}{(p - \alpha)^2} \Rightarrow t^2 e^{\alpha t} \rightarrow \frac{(-1)(-2)}{(p - \alpha)^3} = \frac{(-1)^2 \cdot 1 \cdot 2}{(p - \alpha)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^3 e^{\alpha t} \rightarrow \frac{(-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{(p - \alpha)^4} \Rightarrow \dots \Rightarrow (-t)^n e^{\alpha t} \rightarrow \frac{(-1)^n \cdot n!}{(p - \alpha)^{n+1}}.$$

Звідки

$$t^n e^{\alpha t} \rightarrow \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}} \cdot \blacktriangle$$

ВПРАВИ

Знайти зображення таких функцій:

64. $f(t) = t^2 \cos \alpha t$.

65. $f(t) = t(e^t + \cosh t)$.

66. $f(t) = (t + 1) \sin 2t$.

67. $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$.

68. $f(t) = t \sin \alpha t \operatorname{sh} \alpha t$.

69. $f(t) = t \cos \alpha t \cosh \alpha t$.

1.4.10. Інтегрування зображення

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ і інтеграл $\int_0^{\infty} F(p) dp$ збігається в півплощині $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$, то

$$\int_0^{\infty} F(p) dp \rightarrow \frac{f(t)}{t}, \quad \operatorname{Re} p > s_1 > s_0. \quad (17)$$

□ Дійсно, змінюючи порядок інтегрування, одержуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F(p) dp &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right) dp = \int_0^{+\infty} \left(\int_p^{\infty} e^{-pt} dp \right) f(t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{t} \Big|_p^{\infty} \right) f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt \rightarrow \frac{f(t)}{t}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклади. Знайти зображення функцій:

1. $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Δ Оскільки $\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$, то

$$\frac{\sin t}{t} \rightarrow \int_p^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} - \arctg p = \operatorname{arctg} p. \quad \blacktriangle$$

2. $f(t) = \operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ (інтегральний синус).

Δ Оскільки $\frac{\sin t}{t} \rightarrow \operatorname{arctg} p$ і $\operatorname{si} 0=0$, то застосувавши теорему

інтегрування оригіналу, одержимо:

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \rightarrow \frac{\operatorname{arctg} p}{p} \quad \blacktriangle$$

ВПРАВИ

Знайти зображення функцій:

70. $\frac{e^{-\alpha t} \sin t}{t}$

71. $\frac{\operatorname{sh}^2 t}{t}$

72. $\frac{\sin 7t \sin 3t}{t}$

73. $\frac{\operatorname{ch} at - \operatorname{ch} bt}{t}$

74. $\frac{1 - \cos t}{t} e^{-t}$

75. $\frac{\cos bt - \cos at}{t}$

76. $\frac{1 - e^{\alpha t}}{te^t}$

77. $\frac{e^{-at} \sin^2 bt}{t}$

1.4.11. Згортка функцій

Згорткою неперервних функцій $\varphi(t)$ і $f(t)$, $0 \leq t < \infty$ (позначається $\varphi(t) * f(t)$), називається інтеграл

$$\int_0^t \varphi(t - \tau) f(\tau) d\tau = \varphi * f. \quad (18)$$

Згортка є дія, яка парі функцій із деякої множини ставить у відповідність певну функцію із цієї множини.

Наведемо без доведення деякі властивості згортки:

1. *Комутативність*: $\varphi * f = f * \varphi$.

2. *Асоціативність*: $(\varphi * f) * \phi = \varphi * (f * \phi)$.

3. *Дистрибутивність*: $\varphi * (f + \phi) = \varphi * f + \varphi * \phi$.

4. $|\varphi * f| \leq |\varphi| * |f|$.

5. Якщо $\varphi(t)$ і $f(t)$ – неперервні функції при $t \geq 0$, то і їх згортка $\varphi(t)*f(t)$ також є неперервною функцією при $t \geq 0$.
6. Якщо $\varphi(t)$ і $f(t)$ – неперервні функції при $t \geq 0$ і $\varphi * f = 0$, то, принаймні, одна з цих функцій при $t \geq 0$ рівна нулю.

Має місце

Теорема. Якщо $\varphi(t)$ і $f(t)$ – оригінали, то згортка $\varphi * f$ є також оригінал.

□ Для функції $f * \varphi = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$ умови 1) і 2) означення

оригіналу, очевидно, виконуються. Доведемо, що функція $\varphi * f$ задовольняє і умову 3) оригіналу. Оскільки

$$|f(t)| < M_0 e^{s_0 t} \quad \text{і} \quad |\varphi(t)| < M_1 e^{s_1 t},$$

то

$$|f * \varphi| = \int_0^t |f(\tau)| |\varphi(t-\tau)| d\tau < \int_0^t M_0 e^{s_0 \tau} M_1 e^{s_1 (t-\tau)} d\tau.$$

Позначимо $M_0 M_1 = M_2$, і нехай $s_0 > s_1$, тоді

$$|f * \varphi| < M_2 \int_0^t e^{s_0 \tau} e^{s_1 (t-\tau)} d\tau = M_2 t e^{-\alpha t} e^{(s_0 + \alpha)t},$$

де $\alpha > 0$ – мале число.

Функція $M_2 t e^{-\alpha t}$ при $t > 0$ має єдиний максимум $M > 0$, тому $M_2 t e^{-\alpha t} < M$. Тоді $|f * \varphi| < M e^{(s_0 + \alpha)t}$ або $|f * \varphi| < M e^{s_0 t}$, оскільки s_0 – точна нижня межа чисел $s_0 + \alpha$.

Отже, згортка $\varphi * f$ є оригіналом з показником зростання s_0 при $s_0 > s_1$. ■

Теорема Бореля (теорема множення). Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ і $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_1$, то $f * \varphi \rightarrow F(p)\Phi(p)$.

□ Масмо

$$f * \varphi \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f * \varphi dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

В цій рівності двократний інтеграл по області $D: 0 \leq t < \infty, 0 \leq \tau \leq t$ (рис. 8) збігається абсолютно, оскільки зображення оригіналу $f * \varphi$ визначено в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ при $s_0 > s_1$. Тому в двократному інтегралі можна змінити порядок інтегрування ($0 \leq \tau < \infty, \tau \leq t < \infty$):

$$f * \varphi \rightarrow \int_0^{\infty} \varphi(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt.$$

Поклавши $t - \tau = u$, одержимо

$$f * \varphi \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \varphi(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du,$$

або

$$f * \varphi \rightarrow F(p)\Phi(p). \quad (19)$$

Отже, згортання в просторі оригіналів відповідає множенню функцій в просторі зображень. ■

Приклади.

1. Знайти оригінал $g(t)$ за його зображенням $G(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}$.

Δ Оскільки $\frac{p}{p^2 + 1} \rightarrow \cos t$, то поклавши в теоремі множення

$F(p) = \Phi(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$ і $f(t) = g(t) = \cos t$, одержимо

$$g(t) = f(t) * \varphi(t) = \int_0^t \cos \tau \cos(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\cos t + \cos(2\tau - t)) d\tau =$$

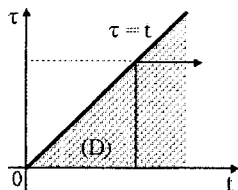


Рис. 8

$$= \frac{1}{2} (\tau \cos t + \frac{1}{2} \sin(2\tau - t)) \Big|_0^t = \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t) \quad \blacktriangle$$

2. Знайти оригінал $g(t)$ за його зображенням

$$G(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$$

△ Оскільки $\frac{1}{p-1} \rightarrow e^t$ і $\frac{1}{p^2+1} \rightarrow \sin t$, то поклавши в теоремі мно-

ження $F(p) = \frac{1}{p-1}$, $\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1}$ і $f(t) = e^t$, $\varphi(t) = \sin t$, одержимо

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) * \varphi(t) = \int_0^t e^\tau \sin(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{t-u} \sin u du = \\ &= e^t \int_0^t e^{-u} \sin u du = e^t \frac{e^{-u}(-\sin u - \cos u)}{2} \Big|_0^t = \frac{e^t - \sin t - \cos t}{2} \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

ВПРАВИ

Користуючись теоремою Бореля, знайти оригінали, що відповідають зображенням:

$$78. \frac{1}{(p+1)(p+2)^2} \quad 79. \frac{p}{(p^2+1)(p^2+9)} \quad 80. \frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$$

1.4.12. Інтеграл Дюамеля

При застосуванні операційного числення до розв'язування диференціальних рівнянь часто користуються наслідком теореми множення, відомим як інтеграл Дюамеля.

Теорема. Нехай $f(t)$ і $g(t)$ – функції-оригінали, причому похідна $g'(t)$ також функція-оригінал. Тоді має місце співвідношення

$$pF(p)G(p) \rightarrow f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau) d\tau \quad (20)$$

□ Маємо

$$F(p)G(p) \rightarrow \int_0^t f(\tau)g'_i(t-\tau)d\tau.$$

Звідси за теоремою диференціювання оригіналу одержуємо:

$$pF(p)G(p) \rightarrow \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right)' = f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'_i(t-\tau)d\tau.$$

Зауваження 1. Тут диференціювання по параметру t , що входить в підінтегральну функцію і у верхню межу інтегрування, виконується за формулою:

$$\left(\int_a^t f(x,t)dx \right)' = f(t,t) + \int_a^t f'_i(x,t)dx.$$

Зауваження 2. Користуючись властивістю комутативності згортки функцій, оригінал для зображення $pF(p)G(p)$ можна представити в одному з таких видів:

$$\begin{aligned} pF(p)G(p) &\rightarrow f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'_i(t-\tau)d\tau = \\ &= f(t)g(0) + \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau = \\ &= f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau = \\ &= f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau. \blacksquare \end{aligned} \tag{21}$$

Приклади.

1. Користуючись інтегралом Дюамеля, знайти оригінал для функції $\Phi(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$.

Δ Маємо

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)} = p \cdot \frac{1}{p^4} \cdot \frac{1}{p^2+1}$$

Покладемо

$$F(p) = \frac{1}{p^4} \rightarrow \frac{t^3}{6} = f(t) \quad \text{і} \quad G(p) = \frac{1}{p^2+1} \rightarrow \sin t = \varphi(t)$$

За формулою (20)

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-\tau)^3}{6} \sin \tau d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^2}{2} \sin \tau d\tau$$

Двічі інтегруючи частинами останній інтеграл, знаходимо

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \rightarrow \frac{1}{2} \left[(t-\tau)^2 (-\cos \tau) - 2(t-\tau) \sin \tau + 2 \cos \tau \right]_0^t,$$

або

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \rightarrow \frac{t^2}{2} + \cos t - 1. \blacktriangle$$

2. Знайти оригінал $\varphi(t)$ зображення $\Phi(p) = \frac{p^2}{(p^2+4)^2}$.

△ Оскільки

$$\Phi(p) = p \cdot \frac{p}{p^2+4} \cdot \frac{1}{p^2+4},$$

то, поклавши

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4} \rightarrow \cos 2t = f(t) \quad \text{і} \quad G(p) = \frac{1}{p^2+4} \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2t = g(t),$$

за формулою (20) одержуємо

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{p^2}{(p^2+4)^2} \rightarrow \frac{1}{2} \left[\int_0^t 2 \cos(2t-2\tau) \cos 2\tau d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(2t-4\tau) + \cos 2t] dt = \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2} t \cos 2t. \blacktriangle \end{aligned}$$

ОБЕРНЕНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

2.1 ФОРМУЛИ ОБЕРНЕННЯ

Користуючись формулами, які доведені в попередніх пунктах, правилами і теоремами операційного числення, можна знайти як зображення за оригіналом, так і оригінал за зображенням. Коли цих формул недостатньо для одержання зображення, можна скористатись інтегралом Лапласа. Але як поступити, якщо за їх допомогою неможливо знайти оригінал? Виявляється, що існує формула, яка для досить широкого класу функцій $F(p)$ дає можливість за зображенням $F(p)$ знайти відповідний оригінал. Для її одержання скористаємося відомою з курсу вищої математики *формулою Фур'є*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-iq(\tau-t)} d\tau$$

де зовнішній інтеграл розуміють в сенсі головного значення.

Для подання функції $\varphi(t)$ за допомогою формули Фур'є достатні такі умови:

1) функція $\varphi(t)$ неперервна в будь-якому скінченному інтервалі, за винятком, можливо, скінченного числа точок, в яких вона має розриви першого роду;

2) в точках неперервності існує похідна $\varphi'(t)$;

3) функція $\varphi(t)$ абсолютно інтегровна в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, тобто існує інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt$$

В точках розриву функції $\varphi(t)$ ліва частина формули Фур'є повинна бути заміненою

$$\frac{\varphi(t-0) + \varphi(t+0)}{2}$$

Нехай $f(t)$ – оригінал з показником зростання s_0 , а $F(p)$ – його зображення, так що

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Оскільки добуток $e^{-st} f(t)$, де стала $s > s_0$, очевидно можна подати формулою Фур'є, то поклавши в ній $\varphi(t) = e^{-st} f(t)$ і враховуючи рівність $f(t) = 0$ для $t < 0$, одержимо

$$e^{-st} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau) e^{-iq(\tau-t)} d\tau.$$

Звідси знайдемо

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{st} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau) e^{-iq(\tau-t)} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{(s+iq)t - (s+iq)\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(s+iq)t} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(s+iq)\tau} f(\tau) d\tau \right) dq. \end{aligned}$$

Позначимо $s+iq = p$ і скористаємося інтегралом Лапласа для $f(t)$. Це дає

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{pt} \left(\int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \right) dq = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{pt} F(p) dq.$$

Переходячи тепер від змінної інтегрування q до змінної інтегру-

вання p , помітимо, що при фіксованому s одержимо $dp=idq$, а шлях інтегрування буде прямою l , яка паралельна уявній осі і знаходиться від неї на відстані $s > s_0$. Тому будемо мати:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_l e^{p't} F(p) dp,$$

або

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{p't} F(p) dp,$$

де

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{p't} F(p) dp = \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_{s-iq}^{s+iq} e^{p't} F(p) dp.$$

Звідси випливає, що якщо два оригінали $f(t)$ і $f_1(t)$ мають одне і теж саме зображення $F(p)$, то в точках неперервності вони рівні, тому що вони виражаються через $F(p)$ за допомогою одного і того ж інтеграла. Це і доводить теорему єдиності оригінала, яка наведена в пункті 1.4.1.

Як тільки що було доведено, якщо $f(t)$ – оригінал, а $F(p)$ його зображення, тобто якщо

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p't} f(t) dt, \quad (1)$$

то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{p't} F(p) dp. \quad (2)$$

Ці формули називаються *формулами обернення Рімана – Мелліна*.

Однак із попереднього доведення випливає лише, що якщо $f(t)$ задовольняє перше рівняння і умови застосування формули Фур'є, то

для неї має місце і друга формула, яка “обертає” інтеграл Лапласа. Відносно оберненого твердження, то у нас немає ніяких підстав вважати, що для довільної функції $F(p)$ функція $f(t)$, яка визначається другою рівністю, буде задовольняти умови, що накладаються на оригінал, і отже, буде задовольняти перше рівняння. Але якщо на $F(p)$ накласти деякі обмеження, то це буде мати місце. В наведеній нижче без доведення теоремі вказуються достатні умови, які накладаються на $F(p)$, при яких із формули (2) випливає формула (1).

Теорема. Якщо регулярна в півплощині $\operatorname{Re}(p) > s_0 > 0$ функція $F(p)$ прямує до нуля, коли $|p| \rightarrow \infty$ рівномірно відносно $\arg p$ в будь-якій півплощині $\operatorname{Re}(p) \geq s > s_0$, і абсолютно інтегровна вздовж будь-якої прямої $\operatorname{Re}(p) = s$, де $s > s_0$, то функція

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp$$

є оригіналом для $F(p)$.

При $t < 0$ ця формула дає $f(t) = 0$.

Абсолютна інтегрованість $F(p)$ вздовж прямої $\operatorname{Re}(p) = s$ означає абсолютну збіжність інтеграла

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) dp$$

або, що те ж саме, — збіжність інтеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(s+iq)| dq.$$

При використанні формули (2) часто поступають так: записують її у формі

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_{s-iq}^{s+iq} e^{pt} F(p) dp \quad (3)$$

і шлях інтегрування по відрізку прямої, обмеженому точками $p_1 = s - iq$ і $p_2 = s + iq$, замінюють деяким контуром, в який як частина його входить і вказаний відрізок. Тим самим виникає можливість застосування теореми про лишки. Наприклад, якщо $F(p)$ має скінченне число особливих точок і всі вони є полюсами, то за контур інтегрування можна прийняти контур сегмента круга з основою AB (рис. 9) обмеженою точками $p_1 = s - iq$ і $p_2 = s + iq$, і дугою l_R кола настільки великого радіуса R , щоб усі полюси $F(p)$ опинилися всередині цього сегменту.

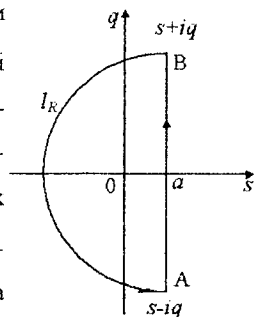


Рис. 9

Дійсно, розглянемо інтеграл

$$\int_{\gamma} e^{pt} F(p) dp \quad (t > 0),$$

де γ – контур, складений з відрізка AB і дуги l_R . Представимо цей інтеграл у вигляді суми інтегралів по AB і l_R і використовуючи основну теорему про лишки, одержимо

$$\int_{AB} e^{pt} F(p) dp + \int_{l_R} e^{pt} F(p) dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} [F(p_k) e^{p_k t}] \quad (4)$$

В цій рівності перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$. Вказаний граничний перехід здійснюється на підставі леми Жордана, яку наводимо без доведення у такому формулюванні: якщо в лівій півплощині і на уявній осі функція $F(p)$ регулярна для всіх p , достатньо великих за модулем, і якщо при $|p| \rightarrow \infty$ функції $F(p) \rightarrow 0$ рівномірно відносно

$\arg p$, то $\int_{l_R} e^{pt} F(p) dp \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, де $t > 0$ і l_R — ліве півколо

радіуса R з центром у початку координат.

Аналогічне формулювання леми Жордана можна навести і для правої півплощини, але там $\int_{l_R} e^{pt} F(p) dp \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ для $t < 0$.

Отже, при $n \rightarrow \infty$ перший інтеграл зліва в рівності (4) прямує до нуля. Другий інтеграл зліва при $n \rightarrow \infty$, очевидно, прямує до інтегралу вздовж прямої $\operatorname{Re} p = s$. Таким чином, в наслідок формули (2) з рівності (4) в границі при $n \rightarrow \infty$ одержуємо

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [F(p_k) e^{p_k t}]. \quad (5)$$

Ця формула визначає оригінал $f(t)$ для мероморфного зображення $F(p)$ (нагадаємо, що функція називається мероморфною, якщо її можна представити у вигляді частки двох цілих функцій, тобто функцій однозначних і аналітичних у всій комплексній площині). Оскільки

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

де $A(p)$ і $B(p)$ — цілі функції, то використовуючи формулу для обчислення лишку функції в простому полюсі, одержимо:

$$\operatorname{Res} [F(p_k) e^{p_k t}] = \frac{A(p_k) e^{p_k t}}{B'(p_k)},$$

після чого формулу (5) можна записати у вигляді

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A(p_k) e^{p_k t}}{B'(p_k)} \quad (6)$$

Приклад. Знайти оригінал для функції $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 - 1)}$.

Δ Функція $F(p)$ регулярна в будь-якій півплощині $\operatorname{Re} p > 1$ і

$F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Легко бачити також, що $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{p^2(p^2 - 1)} \right| dq$

збігається (тут $p = s + iq$, причому $s > 1$). Функція має особливими точками $p_1 = -1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$, які є її полюсами. Отже, можна застосувати рівність (5). Покладаючи $\Phi(p) = e^{pt} F(p)$, знайдемо:

$$\operatorname{Res} \Phi(0) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left[\frac{p^2 e^{pt}}{p^2(p^2 - 1)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pt} t(p^2 - 1) - 2pe^{pt}}{(p^2 - 1)^2} = -t,$$

$$\operatorname{Res} \Phi(\pm 1) = \frac{e^{pt}}{[p^2(p^2 - 1)]'} \Big|_{p=\pm 1} = \frac{e^{pt}}{4p^3 - 2p} \Big|_{p=\pm 1} = \frac{e^{\pm t}}{\pm 2},$$

$$f(t) = -t + \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} = -t + \operatorname{sh} t. \blacktriangle$$

На практиці іноді приходиться стикатися із зображеннями, які не є мероморфними функціями; перехід від них до оригіналів не можна здійснити ні за допомогою формули (6), ні тим паче за допомогою теорем попереднього розділу. Це перш за все відноситься до багатозначних зображень $F(p)$ з особливостями у вигляді точок розгалуження. В цьому випадку для відшукування оригіналу безпосередньо застосовується формула

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_{s-iq}^{s+iq} e^{pt} F(p) dp.$$

Замість інтегрування вздовж відрізка, обмеженого точками $s - iq$ і $s + iq$, спочатку інтегрують вздовж замкнутого контуру, що містить

згаданий відрізок. Якщо $F(p)$ має скінченне число особливих точок, і всі вони – полюси, то звичайно замкнений контур вибирається так, що всі ці полюси містяться всередині нього. Якщо ж, крім того, $F(p)$ має точки розгалуження, то потрібно провести відповідні розрізи.

Зауваження. Теорема обернення 1 показує, що якщо для функції-оригіналу $f(t)$ відомо зображення $F(p)$, то в точках неперервності $f(t)$ визначається за формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp,$$

де інтеграл в сенсі головного значення береться вздовж будь-якої прямої $\operatorname{Re}(p) = s > s_0$, $s - \text{const}$, в півплощині збіжності, s_0 – показник зростання функції $f(t)$.

2.2 ТЕОРЕМИ РОЗВИНЕННЯ

В деяких випадках обчислення інтеграла обернення (2) можна спростити. Розглянемо деякі теореми, які відносяться до оберненої задачі – відшукуванні оригіналу за його зображенням. Ці теореми звичайно називають *теоремами розвинення*, наведемо їх без доведення.

Теорема 1. Якщо ряд

$$\frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p^3} + \dots + \frac{a_n}{p^{n+1}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$$

збігається для деякого скінченного p , то ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

збігається для всіх $t > 0$ і сума $F(p)$ першого ряду є зображенням суми $f(t)$ [точніше $f(t)\eta(t)$] другого.

Теорема 2. Якщо функція $F(p)$ є правильний нескоротний раціональний дріб, тобто

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + a_2 p^{m-2} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n},$$

то оригінал для $F(p)$ можна знайти, розклавши дріб $F(p)$ на найпростіші дроби і скориставшись формулою

$$\frac{A}{(p-\alpha)^n} \rightarrow A \cdot \frac{t^{n-1} e^{\alpha t}}{(n-1)!}.$$

Ця теорема встановлює форму оригіналу $f(t)$ для дроби $F(p)$.

Зауваження. Теорему 2 можна сформулювати і так: Якщо зображення є дробово-раціональна функція $F(p) = F_1(p)/F_2(p)$, то оригіналом є функція $\eta(t)f(t)$, де $\eta(t)$ – функція Хевісайда, а

$$f(t) = \sum_{p_k} \operatorname{Res} \left[F(p) e^{pt} \right],$$

причому сума лишків береться за всіма полюсами p_k функції $F(p)$.

Зокрема,

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \left\{ F(p) e^{pt} (p - p_k)^{n_k} \right\}, \quad (7)$$

де p_k – полюси $F(p)$ кратності n_k і сума в (7) береться за всіма полюсами $F(p)$.

Якщо всі полюси $F(p)$ прості, то формула (7) спрощується і приймає вигляд

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2(p_k)} e^{p_k t} \quad (8)$$

Приклади. Знайти оригінал за його зображенням.

$$1. F(p) = \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right).$$

Δ Користуючись розвиненням

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots,$$

одержимо

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3} - \frac{1}{4p^4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{np^n} + \dots$$

Це розвинення для $F(p)$ має місце для $|p| > 1$. За першою теоремою розвинення оригіналом для $F(p)$ є

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{2!} - \frac{1}{4} \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} - \frac{t^3}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^{n-1}}{n!} + \dots = \\ &= \frac{1}{t} \left[t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^n}{n!} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{t} \left\{ 1 - \left[1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{t^n}{n!} + \dots \right] \right\} = \frac{1}{t} (1 - e^{-t}). \blacktriangle \end{aligned}$$

$$2. F(p) = \frac{p^3 - 5p + 4}{p^2(p-1)^2}$$

Δ Для знаходження оригіналу застосуємо другу теорему розвинення, попередньо розклавши правильний дріб на найпростіші дроби:

$$F(p) = \frac{p^3 - 5p + 4}{p^2(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{(p-1)^2}$$

Зведемо дроби до спільного знаменника і зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях p ; одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення A, B, C, D : $A + C = 1, -2A + B - C + D = 0, A - 2B = -5, B = 1$, звідки $A = -3, B = 1, C = 4, D = -3$. Таким чином,

$$\hat{F}(p) = -3 \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + 4 \cdot \frac{1}{p-1} - 3 \cdot \frac{1}{(p-1)^2}$$

Отже,

$$f(t) = -3 + t + 4e^t - 3te^t. \blacktriangle$$

$$3. F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$$

Δ Розкладаємо $F(p)$ на суму найпростіших дробів:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$$

Знайшовши коефіцієнти A, B, C, D , одержуємо

$$F(p) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{20} \cdot \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p^2+4},$$

звідси

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t. \blacktriangle$$

$$4. F(p) = \frac{p}{(p^2-1)^2}$$

Δ Функція $F(p)$ має полюси $p_1 = 1, p_2 = -1$, кожний другого порядку. За формулою (7) одержуємо

$$f(t) = \lim_{p \rightarrow 1} \left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2} \right]'_p + \lim_{p \rightarrow -1} \left[\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2} \right]'_p = \frac{1}{2}t \operatorname{sh} t. \blacktriangle$$

$$5. F(p) = \frac{1}{(p^2-4p+8)^3}$$

$\Delta F(p) = \frac{1}{((p-2)^2+4)^3}$. Розглянемо функцію $\Phi(p) = \frac{1}{(p^2+4)^3}$.

Корені її знаменника $p_1 = 2i$ і $p_2 = -2i$ – третьої кратності. Оскільки p_1 і p_2 комплексно спряжені числа, то сума лишків функції

$\Phi(p)e^{pt}$ в цих точках дорівнює подвійній дійсній частині лишку в точці p_1 . Отже, маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[\Phi(p)e^{pt}] &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{(p-2i)^3 e^{pt}}{(p^2+4)^3} \right]_{p=2i} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} [e^{pt} (p+2i)^{-3}]_{p=2i} = \\ &= \frac{1}{2} [e^{pt} t^2 (p+2i)^{-3} - 6e^{pt} t (p+2i)^{-4} + 12e^{pt} (p+2i)^{-5}]_{p=2i} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{(4i)^3} - \frac{6t}{(4i)^4} + \frac{12}{(4i)^5} \right] e^{pt} = \frac{ie^{2it}}{512} (4t^2 + 6ti - 3) = \\ &= \frac{i}{512} (\cos 2t + i \sin 2t) (4t^2 + 6ti - 3). \end{aligned}$$

Очевидно, що

$$\operatorname{Re} \operatorname{Res}[\Phi(p)e^{pt}, p=2i] = \frac{1}{512} [(3-4t^2) \sin 2t - 6t \cos 2t].$$

Тоді

$$\varphi(t) = \frac{1}{256} [(3-4t^2) \sin 2t - 6t \cos 2t].$$

Користуючись теоремою зміщення, остаточно одержуємо

$$\varphi(t) = \frac{e^{2t}}{256} [(3-4t^2) \sin 2t - 6t \cos 2t].$$

ВПРАВИ.

Знайти оригінал за даним зображенням.

$$81. F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)} \quad 82. F(p) = \frac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$$

$$83. F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)} \quad 84. F(p) = \frac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$$

$$85. F(p) = \frac{3-p}{p(p+1)(p^2+4)} \quad 86. F(p) = \frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$$

$$87. F(p) = \frac{p^2 + 1}{(p-1)(p^2 + 2)(p+3)} \quad 88. F(p) = \frac{3p+2}{(p+1)(p-5)(p^2 + 4)}$$

$$89. F(p) = \frac{3p-2}{(p^2 + 1)(p+5)(p^2 + 4)} \quad 90. F(p) = \frac{6p+2}{(p^2 + 1)(p^2 - 4)}$$

2.3. ЗОБРАЖЕННЯ ДЕЯКИХ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

2.3.1. Гамма - функція

Нагадаємо означення і деякі властивості гамма - функції. Ця функція визначається за допомогою рівності

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (9)$$

Інтеграл, що стоїть в правій частині рівності, називається *інтегралом Ейлера другого роду*. Легко показати, що інтеграл Ейлера збігається тільки при $x > 0$. Ця функція неелементарна, відіграє велику роль в математиці і, поряд з деякими іншими функціями, які найчастіше зустрічаються в прикладних задачах, відноситься до числа *спеціальних функцій*.

Розглянемо найважливіші властивості функції $\Gamma(x)$. Інтегрування частинами дає

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

тобто

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (10)$$

Ця формула називається *формулою зведення*. Якщо $x = n$, $n \in \mathbb{N}$ то,

беручи до уваги, що $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, одержимо:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Записавши формулу зведення у вигляді

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad (11)$$

можна визначити функцію $\Gamma(x)$ при $-1 < x < 0$.

Дійсно, оскільки $x+1 > 0$, то $\Gamma(x+1)$ визначається однозначно через інтеграл Ейлера, а тим самим однозначно визначається і $\Gamma(x)$ за допомогою рівності (11). Тепер за допомогою тієї ж рівності (11) визначається $\Gamma(x)$ при $-2 < x < -1$. Аналогічно можна визначити функцію $\Gamma(x)$ для всіх від'ємних x , за винятком $x = -1, -2, \dots$. При цих виключених значеннях x , а також при $x = 0$ функція $\Gamma(x)$ не визначена, що безпосередньо випливає з формули (11). Більш детальне вивчення показує, що $\Gamma(x)$ у всіх точках x , за винятком $x = 0, -1, -2, \dots$, не тільки неперервна, але і диференційована.

До гамма-функції зводиться бета-функція, яка визначається за допомогою рівності

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (12)$$

Інтеграл, що стоїть в правій частині рівності, називається інтегралом Ейлера першого роду. Можна показати, що він збігається лише при $x > 0$ і $y > 0$. Зв'язок між функціями гамма і бета встановлюється формулою

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (13)$$

яку наводимо без доведення.

Обчислимо величину $B(x, 1-x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)$. Маємо:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(x, 1-x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x} dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x \frac{dt}{t}.$$

Зробимо заміну змінної $\tau = \frac{t}{1-t}$. Звідси $t = \frac{\tau}{1+\tau}$, $dt = \frac{d\tau}{(1+\tau)^2}$, а нові межі інтегрування будуть 0 і $+\infty$. Тому одержуємо

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{x-1}}{1+\tau} d\tau.$$

Останній інтеграл, як відомо, дорівнює $\frac{\pi}{\sin \pi x}$. Отже,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \quad (14)$$

Ця рівність називається *формулою доповнення*. З неї при $x = \frac{1}{2}$ випливає, що $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

В комплексній області гамма-функцію можна також визначити через інтеграл Ейлера, тобто рівністю

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

де $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

Можна довести, що цей інтеграл збігається лише при $\operatorname{Re} z > 0$. В цій області $\Gamma(z)$ -регулярна функція і для неї мають місце функціональні рівняння (11) і (14). Вона аналітично продовжується на всю площину комплексної змінної, після чого $\Gamma(z)$ виявляється *регулярною на всій площині z за винятком точок $z = -n = 0, -1, -2, \dots$* , в яких вона має полюси першого порядку з лишками

$$\operatorname{Res} \Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Насамкінець відмітимо, що для $\Gamma'(z)$, окрім функціональних рівнянь (11) і (14), існує ще таке

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{2z-1}} \Gamma(2z).$$

Це співвідношення має назву *формули Лежандра*. Можна довести, що функція $\Gamma'(z)$ єдина функція, яка одночасно задовольняє усі три рівняння

Використовуючи гамма-функцію знайдемо зображення степеневій функції $f(t) = t^\lambda$, $\lambda > -1$. Запишемо для функції $f(t) = t^\lambda$ інтеграл Лангласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^\lambda dt.$$

Він є функцією комплексної змінної p . Будемо спочатку вважати p додатною величиною і зробивши заміну змінної інтегрування за допомогою формули $\tau = pt$, одержимо

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^\lambda dt = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \left(\frac{\tau}{p}\right)^\lambda \frac{d\tau}{p} = \frac{1}{p^{\lambda+1}} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \tau^\lambda d\tau = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}.$$

Звідси випливає, що при $\lambda > -1$ і $p > 0$ записаний інтеграл має зміст, причому повинно бути $p^{\lambda+1} > 0$. Покладемо тепер p комплексним. Оскільки регулярна функція $F(p)$ внаслідок теореми єдиності цілком визначена її значеннями на будь-якому відрізку додатної осі, то

$$t^\lambda \rightarrow \frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}, \quad (15)$$

де $p^{\lambda+1} = e^{(\lambda+1)\ln p}$.

Ця формула узагальнює одержану раніше формулу $t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Дійсно, якщо $\lambda = n$ — натуральне число, то $n! = \Gamma(n+1)$. Відмітимо, що при $-1 < \lambda < 0$ формула (15) має місце, як це випливає з доведення, але функція $f(t) = t^\lambda$ не є оригіналом в сенсі основного означення оригіналу, оскільки $t^\lambda \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$, однак інтеграл

$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^\lambda dt$ збігається. В цьому випадку оригінал і зображення називають *узгальненими*.

Приклади. Знайти зображення функцій:

1. $f(t) = t^{n+\frac{1}{2}}$.

Δ Згідно з (15) маємо:

$$t^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+n)}{p^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{(2n+1)! \sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \cdot \frac{1}{p^{n+\frac{3}{2}}},$$

бо

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{3}{2}+n) &= \Gamma(\frac{2n+1}{2}+1) = \frac{2n+1}{2} \Gamma(\frac{2n+1}{2}) = \frac{2n+1}{2} \Gamma(\frac{2n-1}{2}+1) = \\ &= \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2} \Gamma(\frac{2n-1}{2}) = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2} \Gamma(\frac{2n-3}{2}+1) = \dots = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \Gamma(\frac{1}{2}). \blacktriangle \end{aligned}$$

2. а) $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, б) $f(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$.

Δ Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}},$$

то за теоремою зміщення знайдемо

$$\frac{e^{it}}{\sqrt{t}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p-i}}, \quad \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+i}}.$$

Користуючись формулами Ейлера, одержимо

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i\sqrt{t}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} - \frac{1}{\sqrt{p+i}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \cdot \frac{\sqrt{p+i} - \sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \cdot \frac{\sqrt{(\sqrt{p+i} - \sqrt{p-i})^2}}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\sqrt{p^2+1} - p}}{\sqrt{2} \sqrt{p^2+1}};$$

$$\frac{\cos t}{\sqrt{t}} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2i\sqrt{t}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} + \frac{1}{\sqrt{p+i}} \right) = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\sqrt{p^2+1} + p}}{\sqrt{2} \sqrt{p^2+1}} \blacktriangle$$

3. Знайти зображення інтегралів Френеля, тобто функцій

$$S(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} dt \quad \text{і} \quad C(t) = \int_0^t \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} dt.$$

Користуючись теоремою інтегрування оригіналу і зображенням функцій $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ і $\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$, знайдемо:

$$S(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} dt \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\sqrt{p^2+1} - p}}{\sqrt{2} \sqrt{p^2+1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1} - p}}{2p \sqrt{p^2+1}},$$

$$C(t) = \int_0^t \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} dt \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\sqrt{p^2+1} + p}}{\sqrt{2} \sqrt{p^2+1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1} + p}}{2p \sqrt{p^2+1}} \blacktriangle$$

2.3.2. Функції Бесселя

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння виду

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \lambda^2)y = 0 \quad (16)$$

яке називається рівнянням Бесселя. Тут t – дійсний аргумент, y – невідома функція, λ – дійсний параметр, який називається *індексом* рівняння. Будемо шукати розв'язок рівняння Бесселя у вигляді степене-

вого ряду:

$$y = t^r (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots) \quad (17)$$

Підставивши цей ряд в ліву частину рівняння (16) і прирівнявши до нуля коефіцієнти при різних степенях t , одержимо систему рівнянь для визначення значень $r, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$:

$$\begin{array}{l|l} t^r & [r^2 - \lambda^2] a_0 = 0; \\ t^{r+1} & [(r+1)^2 - \lambda^2] a_1 = 0; \\ t^{r+2} & [(r+2)^2 - \lambda^2] a_2 + a_0 = 0; \\ \cdot & \dots \dots \dots \\ t^{r+s} & [(r+s)^2 - \lambda^2] a_s + a_{s-2} = 0; \\ \cdot & \dots \dots \dots \end{array} \quad (18)$$

Прийнявши $a_0 \neq 0$, знайдемо з першого рівняння $r = \pm \lambda$. Взявши спочатку $r = \lambda$ і обчислюючи із системи (18) послідовно значення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, \dots , знайдемо

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k(2\lambda + 2)(2\lambda + 4) \dots (2\lambda + 2k)} = \\ &= \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + k)} \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів в (17), одержимо наступний розв'язок рівняння Бесселя:

$$y(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+\lambda}}{2^{2k} \cdot k! (\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + k)} \quad (19)$$

За допомогою ознаки Даламбера можна показати, що цей ряд збігається для всіх дійсних t і, отже, дає розв'язок рівняння Бесселя при будь-якому значенні a_0 . Якщо покласти $a_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)}$, то одержуємо розв'язок рівняння Бесселя, яке називається *функцією Бесселя*

λ -го порядку, або циліндричною функцією першого роду і позначається символом $J_\lambda(t)$. Отже,

$$J_\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda+k+1)} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\lambda}$$

Якщо $\lambda \neq 0$, то, покладаючи $r = -\lambda$, також знайдемо

$$J_{-\lambda}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\lambda+k+1)} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\lambda}$$

Якщо λ дорівнює натуральному числу n , то, очевидно,

$$J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t). \quad (20)$$

Для інших значень $\lambda \neq 0$ функції $J_{-\lambda}(t)$ і $J_\lambda(t)$ лінійно незалежні. Вкажемо без доведення, що циліндричні функції першого роду виражаються через елементарні функції тоді і тільки тоді, коли $\lambda = n + \frac{1}{2}$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. З рівності (20) випливає, що розв'язки $J_{-n}(t)$ і $J_n(t)$ рівняння (16) лінійно залежні і при цілому λ загальний розв'язок рівняння (16) має вигляд

$$y(t) = c_1 J_n(t) + c_2 N_n(t),$$

де $N_n(t)$ – функція Неймана або Бесселева функція 2-го роду n -го порядку. Для будь-якого нецілого λ функція $N_\lambda(t)$ визначається формулою

$$N_\lambda(t) = \frac{J_\lambda(t) \cos \lambda \pi - J_{-\lambda}(t)}{\sin \lambda \pi},$$

а при $\lambda = n$ вона визначається формулою

$$N_n(t) = \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{\partial J_\lambda(t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=n} - (-1)^n \left. \frac{\partial J_{-\lambda}(t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=n} \right)$$

Можна довести, що функція $N_\lambda(t)$ також є розв'язком рівняння (16)

і що $J_\lambda(t)$ і $N_\lambda(t)$ лінійно незалежні розв'язки.

Рекурентна формула циліндричних функцій має вигляд

$$J_{\lambda+1}(t) = J_{\lambda-1}(t) - 2J_\lambda(t). \quad (21)$$

Зокрема, при $\lambda = 0$ маємо

$$J_1(t) = J_{-1}(t) - 2J_0(t)$$

або

$$J_1(t) = -J_0(t). \quad (22)$$

оскільки за формулою (20) $J_1(t) = -J_{-1}(t)$.

Зображення функції $J_\lambda(t)$. Знайдемо оцінку $J_\lambda(t)$ для $t > 0$ і $\lambda \geq 0$. Маємо

$$|J_\lambda(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\lambda} \leq t^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$$

Позначимо $\frac{1}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = b_k$, $k \in N_0$. Тоді

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{t^2}{4(k+1)^2} < \frac{t^2}{(2k+2)(2k+1)}$$

Звідси

$$b_1 < b_0 \frac{t^2}{2 \cdot 1}, \quad b_2 < b_1 \frac{t^2}{4 \cdot 3} < b_0 \frac{t^4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad \dots, \quad b_k < \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \quad b_0 = 1,$$

тому

$$|J_\lambda(t)| < t^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = t^\lambda e^t.$$

Із цього випливає, що при $t > 0$ неперервна циліндрична функція $J_\lambda(t)$, $\lambda \in N_0$, є оригіналом.

За означенням функція $J_0(t)$ задовольняє рівняння (16) при

$\lambda = 0$. Маємо

$$tJ_0''(t) + J_0'(t) + tJ_0(t) = 0.$$

Позначимо $J_0(t) \rightarrow L_0(p)$. Тоді за теоремою диференціювання оригіналу

$$J_0'(t) \rightarrow pL_0(p) - 1, \quad J_0(0) = 0 \quad \text{і} \quad J_0''(t) \rightarrow p^2L_0(p) - p, \quad J_0'(0) = 0.$$

За теоремою диференціювання зображення

$$tJ_0(t) \rightarrow -L_0(p) \quad \text{і} \quad tJ_0'(t) \rightarrow -2pL_0(p) - p^2L_0(p) + 1.$$

Отже,

$$tJ_0''(t) + J_0'(t) + tJ_0(t) \rightarrow -(p^2 + 1)L_0'(p) - pL_0(p),$$

або

$$(p^2 + 1)L_0'(p) - pL_0(p) = 0.$$

Звідси

$$\frac{L_0'(p)}{L_0(p)} = -\frac{p}{p^2 + 1}.$$

Інтегруючи, одержуємо $\ln L_0(p) = -\frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) + C_1$ або

$$L_0(p) = \frac{C_1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Користуючись граничною теоремою, визначимо C_1 . Маємо

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{C_1}{\sqrt{p^2 + 1}} = \lim_{t \rightarrow 0} J_0(t).$$

Звідси $C_1 = J_0(0) = 1$. Отже,

$$J_0(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

З формули (22) за теоремою інтегрування оригіналу

$$J_1(t) = J_0(t) \rightarrow -p \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} + J_0(0), \quad J_0(t) = 1,$$

або

$$J_1(t) \rightarrow \frac{\sqrt{p^2 + 1} - p}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

За формулою (21) при $\lambda = 1$ одержуємо

$$J_2(t) = J_0(t) - 2J_1'(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} - 2p \frac{\sqrt{p^2 + 1} - p}{\sqrt{p^2 + 1}},$$

або

$$J_2(t) \rightarrow \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^2}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$J_n(t) \rightarrow \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad n \in N_0.$$

2.3.3. Функція імовірності помилок

Функція $\Phi(t)$, яка визначена рівністю

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du,$$

називається *функцією імовірності помилок* або *інтегралом імовірності* і позначається $\text{erf } t$. Ця функція не виражається через елементарні функції. Якщо в рівності

$$e^\zeta = 1 + \frac{\zeta}{1!} + \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^3}{3!} + \dots$$

покласти $\zeta = -u^2$, проінтегрувати почленно одержаний степеневий

ряд в межах від 0 до t і помножити результат на $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, то одержимо розвинення $\operatorname{erf} t$ в степеневий ряд

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[t - \frac{t^3}{1!3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \dots \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

Очевидно, цей ряд збігається при всіх скінченних t , і отже, $\operatorname{erf} t$

— ціла функція. Відмітимо також, що функція $\operatorname{erf} t$ (рис.10) в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ — неперервна зростаюча:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} > 0;$$

непарна:

$$\operatorname{erf}(-t) = -\operatorname{erf} t \text{ і } \operatorname{erf} 0 = 0; \quad \operatorname{erf} \infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

При великих значеннях аргументу t іноді розглядають функцію

$$\operatorname{Erf} t = 1 - \operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Очевидно, $\operatorname{Erf} t$ — неперервна спадна функція при $t \geq 0$.

Приклади. Знайти зображення функцій:

$$1. f(t) = e^{-t^2}.$$

Δ Маємо

$$e^{-t^2} \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-(t^2+pt)} dt = \int_0^{\infty} e^{-\left(t+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4}} dt = e^{\frac{p^2}{4}} \int_0^{\infty} e^{-\left(t+\frac{p}{2}\right)^2} dt.$$

Поклавши $t + \frac{p}{2} = \tau$, одержимо

$$e^{-t^2} \rightarrow e^{\frac{p^2}{4}} \int_{\frac{p}{2}}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \quad \text{або} \quad e^{-t^2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right). \blacktriangle$$

$$2. f(t) = \operatorname{erf} t.$$

Δ Користуючись рівністю $e^{-t^2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right)$ і теоремою інтегрування оригіналу, одержимо:

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau \rightarrow \frac{1}{p} e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right). \blacktriangle$$

$$3. \text{ Знайти оригінал за зображенням } F(p) = \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}}.$$

Δ Помічаючи, що $\frac{1}{\sqrt{p}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$, $\frac{1}{p-1} \rightarrow e^t$ і користуючись теоремою множення, одержимо:

$$\frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} \rightarrow \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} \cdot e^{t-\tau} d\tau = \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\tau} d\tau = e^t \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du,$$

де покладено $\tau = u^2$. Отже,

$$\frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} \rightarrow e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}). \blacktriangle$$

2.3.4. Імпульсна функція

Розглянемо функцію $\delta(t, h)$, яка при $t < 0$ і $t > h$ дорівнює нулю, а при $0 < t < h$ дорівнює $\frac{1}{h}$. Користуючись одиничною функцією $\eta(t)$, її можна записати так:

$$\delta(t, h) = \frac{1}{h} [\eta(t) - \eta(t-h)]. \quad (23)$$

Враховуючи, що $\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}$ і $\eta(t-h) \rightarrow \frac{e^{-hp}}{p}$, одержимо

$$\delta(t, h) \rightarrow \frac{1 - e^{-hp}}{ph}.$$

Якщо тепер необмежено зменшувати h , то величина $\delta(t, h)$ буде необмежено збільшуватися, але при цьому як б не було h для всіх t , що задовольняють співвідношення $0 < t < h$, має місце рівність

$h \cdot \delta(t, h) = 1$. При $h \rightarrow 0$ функція $\delta(t, h) \rightarrow \infty$. Проте виявляється корисно розглядати величину $\delta(t)$, яка визначається рівністю

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta(t, h).$$

Її називають *одиничною імпульсною функцією нульового порядку*, або *функцією Дірака*. Функція $\delta(t)$ дорівнює нулю для всіх $t \neq 0$ і дорівнює ∞ при $t = 0$. Множення одиничної імпульсної функції $\delta(t)$ на сталу u_0 дає імпульсну функцію $u_0 \delta(t)$ величини u_0 .

Введення такої незвичайної функції виправдовується тією користю, яку вона приносить при розв'язуванні прикладних задач, коли дія деяких фізичних величин має характер миттєвого поштовху – удар тіла або підключення до електричного кола великої електрорушійної сили на дуже короткий проміжок часу.

Якщо врахувати рівність (23) і означення $\delta(t)$, то зображення $\delta(t)$ природно означити за допомогою співвідношення

$$\delta(t, h) \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-hp}}{ph};$$

а оскільки

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-hp}}{ph} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - ph + \frac{p^2 h^2}{2!} - \dots)}{ph} = 1,$$

то принаймні формально маємо

$$\delta(t) \rightarrow 1.$$

Нехай $f(t)$ – неперервна функція. За теоремою про середнє одержимо:

$$\int_0^{+\infty} f(t) \delta(t, h) dt = \frac{1}{h} \int_0^h f(t) dt = f(\xi),$$

де $0 < \xi < h$. При цьому враховано, що $\delta(t, h) = \frac{1}{h}$ при $0 < t < h$, а

в інших випадках $\delta(t, h) = 0$.

Якщо покласти за означенням

$$\int_0^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f(t)\delta(t, h)dt,$$

то одержимо

$$\int_0^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = f(0).$$

Тепер можна говорити про інтеграл Лапласа для $\delta(t)$; отже, будемо мати

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)dt = e^0 = 1,$$

що узгоджується з прийнятим для $\delta(t)$ означенням зображення.

Легко впевнитись, що для $\delta(t)$ мають місце теорема заізнання [тобто $\delta(t - \tau) \rightarrow e^{-p\tau}$], теорема множення і ряд інших теорем операційного числення.

Розглядаються також імпульсні функції першого, другого порядків і т.д. Так, функцію першого порядку $\delta_1(t)$ і її зображення означають за допомогою рівностей

$$\delta_1(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta(t, h) - \delta(t - h, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta(t) - 2\eta(t - h) + \eta(t - 2h)}{h^2};$$
$$\delta_1(t) \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2e^{-ph} + e^{-2ph}}{ph^2} = p.$$

Приклади. Проінтегрувати рівняння руху.

1. $x''(t) = \delta(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Δ Масмо

$$x(t) \rightarrow X(p), \quad x''(t) \rightarrow p^2 X(p), \quad \delta(t) \rightarrow 1.$$

Операторне рівняння

$$p^2 X(p) = 1.$$

Звідси

$$X(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Знаходимо $x(t) = t$, $x'(t) = 1$.

Отже, δ – функцію можна інтерпретувати як миттєво нескінченно велику силу з імпульсом, рівним одиниці, яка надає матеріальній точці з масою $m = 1$ при $t = 0$ швидкість $v = 1$. ▲

$$2. \quad x''(t) = \delta'(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Δ З операторного рівняння

$$p^2 X(p) = p$$

знаходимо

$$X(p) = \frac{1}{p}.$$

Закон руху

$$x(t) = \eta(t).$$

Функцію $\delta'(t)$ механічно можна інтерпретувати як силу, яка надає матеріальній точці з масою $m = 1$ при $t = 0$ миттєве переміщення $x(t) = 1$, при цьому не надаючи їй ні швидкості, ні прискорення. ▲

ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

3.1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1.1. Лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами

Нехай потрібно знайти розв'язок лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$, яке задовольняє початкові умови $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$.

Припустимо, що шукана функція $y(t)$, її похідні $y', y'', \dots, y^{(n)}$, а також дана функція $f(t)$ є оригіналами. Позначимо зображення функцій $y(t)$ і $f(t)$ відповідно через $Y(p)$ і $F(p)$. Користуючись ними і теоремою диференціювання оригіналу, будемо мати: $y(t) \rightarrow Y(p)$, $y' \rightarrow pY(p)$, \dots , $y^{(n)} \rightarrow p^n Y(p)$, $f(t) \rightarrow F(p)$, а на підставі властивості лінійності одержимо рівняння в зображеннях

$$p^n Y(p) + a_1 p^{n-1} Y(p) + \dots + a_n Y(p) = F(p),$$

яке відповідає даному диференціальному рівнянню. Знайдемо з нього зображення $Y(p)$ шуканого розв'язку

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Якщо ми зможемо знайти зображення $F(p)$ даної функції $f(t)$, то тоді буде знайдено зображення $Y(p)$ і тоді питання зведеться до

відшукання відповідного йому оригіналу, який і буде розв'язком даного диференціального рівняння, що задовольняє поставлені початкові умови.

Зауважимо, що якщо б початкові умови були б не нульовими, то це відбилося тільки на тому, що у виразі для $Y(p)$ чисельник мав би ще деякі відомі доданки, оскільки зображення похідних мали б інший вигляд. Наприклад, при $y(0) \neq 0$ мали б не $y'(t) \rightarrow pY(p)$, а $y'(t) \rightarrow pY(p) - y(0)$.

Отже, для розв'язування розглядуваних рівнянь потрібно вміти знаходити за даним оригіналом його зображення і за даним зображенням – оригінал.

Приклади. Знайти розв'язки рівнянь:

1. $y'' - y' = 1$ при початкових умовах $y(0) = y'(0) = 0$.

Δ Покладемо $y(t) \rightarrow Y(p)$. Тоді $y' \rightarrow pY(p)$, $y'' \rightarrow p^2Y(p)$, а оскільки $1 \rightarrow \frac{1}{p}$, то рівняння в зображеннях матиме вигляд

$$p^2Y(p) - pY(p) = \frac{1}{p}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{p(p^2 - p)} = \frac{1 - p^2 + p^2}{p^2(p - 1)} = \frac{-1 - p}{p^2} + \frac{1}{p - 1} = \\ &= -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p - 1}. \end{aligned}$$

Але $\frac{1}{p^2} \rightarrow t$, $\frac{1}{p} \rightarrow 1$, $\frac{1}{p - 1} \rightarrow e^t$, тому $y(t) = -t - 1 + e^t$. Легко

перевірити, що знайдена функція задовольняє рівняння і початкові умови. \blacktriangle

2. $x'' + x = 2 \cos t$ при початкових умовах $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

Δ. Маємо:

$$x(t) \rightarrow X(p), \quad x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \rightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1, \quad \cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1},$$

так що операторне рівняння має вигляд

$$p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2 + 1};$$

звідси

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Знаходимо оригінал для $X(p)$. Оригінал для функції $\frac{1}{p^2 + 1}$:

$$\frac{1}{p^2 + 1} \rightarrow \sin t.$$

Для знаходження оригіналу для функції $\frac{2p}{(p^2 + 1)^2}$ скористаємося, наприклад, теоремою диференціювання зображення:

$$\frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = - \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)'_p \rightarrow t \sin t.$$

Значить, $X(p) \rightarrow t \sin t - \sin t = (t - 1) \sin t$.

Отже, $x(t) = (t - 1) \sin t$. ▲

3. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Δ Перейшовши до зображень, одержимо

$$y(t) \rightarrow Y(p), \quad y'(t) \rightarrow pY(p) + 1, \quad y''(t) \rightarrow p^2Y(p) + p - 1,$$

$$\cos t + 2\sin t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} + 2 \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{p + 2}{p^2 + 1},$$

і за теоремою зміщення

$$e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) \rightarrow \frac{p+4}{(p+2)^2+1}$$

Операторне рівняння має вигляд

$$p^2 X(p) + p - 1 + 4pX(p) + 4 + 4X(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}$$

Звідси

$$X(p) = -\frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{((p+2)^2+1)(p+2)^2}$$

Розкладемо зображення $X(p)$ на елементарні дробі. Маємо

$$\begin{aligned} -\frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{((p+2)^2+1)(p+2)^2} &= \frac{Ap+B}{(p+2)^2+1} + \frac{C}{(p+2)^2} + \frac{D}{p+2}, \\ -p^3 - 7p^2 - 16p - 11 &= (Ap+B)(p+2)^2 + \\ &+ C(p^2+4p+5) + D(p+2)(p^2+4p+5). \end{aligned}$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях p , знаходимо

$A = -1$, $B = -4$, $C = 1$, $D = 0$. Тоді

$$X(p) = -\frac{p+4}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2}$$

Переходячи до оригіналу, користуючись теоремами лінійності і зміщення, одержуємо розв'язок

$$x(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t) \quad \blacktriangle$$

ВІПРАВИ.

Розв'язати такі диференціальні рівняння при заданих початкових умовах:

$$91. \quad x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$92. \quad x'' + 2x' = t \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$93. \quad x''' - x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

$$94. \quad x'' - 2x' + 5x = 1 - t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

95. $x'''+x'=e^t$, $x(0)=0, x'(0)=2, x''(0)=0$.
96. $x^{IV}+2x''+x=t \sin t$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$.
97. $x'''+3x''+3x'+x=1$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.
98. $x''+2x'+x=e^{-t}(\cos t+t)$, $x(0)=1, x'(0)=-1$.
99. $x'''-3x'+2x=8te^{-t}$, $x(0)=x'(0)=0, x''(0)=1$.
100. $x'''-x''+4x'-4x=5e^{-t} \sin t$, $x(0)=0, x'(0)=x''(0)=1$.

Вимога, щоб початкові умови були задані в точці $t=0$, неістотна, оскільки лінійною заміною незалежної змінної t задача Коші при $t=t_0 \neq 0$ зводиться до задачі з початковими в точці $t=0$. Покажемо це на прикладі диференціального рівняння другого порядку.

Нехай потрібно знайти розв'язок рівняння

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \quad (1)$$

що задовольняє початкові умови $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1$, де $t_0 \neq 0$.

Покладемо

$$t = \tau + t_0; \quad x(t) = x(\tau + t_0) = \tilde{x}(\tau); \quad f(t) = f(\tau + t_0) = \tilde{f}(\tau).$$

Тоді

$$x'(t) = x'(\tau + t_0) = \tilde{x}'(\tau), \quad x''(t) = x''(\tau + t_0) = \tilde{x}''(\tau),$$

і рівняння (1) і початкові умови приймуть вигляд

$$a_0 \tilde{x}''(\tau) + a_1 \tilde{x}'(\tau) + a_2 \tilde{x}(\tau) = \tilde{f}(\tau), \quad \tilde{x}(0) = x_0, \quad \tilde{x}'(0) = x_1. \quad (2)$$

Ми одержали задачу Коші для рівняння (2) з початковими умовами, заданими в точці $\tau=0$.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $x''(t) + x'(t) = t$, що задовольняє початкові умови $x(1) = 1, x'(1) = 0$.

Δ Покладемо $t = \tau + 1$ і $x(t) = x(\tau + 1) = \tilde{x}(\tau)$. Тоді дане рівняння і початкові умови приймуть вигляд

$$\tilde{x}''(\tau) + \tilde{x}'(\tau) = \tau + 1 \quad \tilde{x}(0) = 1, \quad \tilde{x}'(0) = 0,$$

оскільки значенню $t = 1$ відповідає значення $\tau = 0$.

Складемо операторне рівняння для одержаного рівняння. Нехай $\tilde{x}(t) \rightarrow X(p)$. Тоді

$$\tilde{x}'(\tau) \rightarrow pX(p) - 1, \quad \tilde{x}''(\tau) \rightarrow p^2X(p) - p,$$

і операторним рівнянням буде

$$p^2X(p) - p + pX(p) - 1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Розв'язавши його відносно $X(p)$, знайдемо

$$X(p) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p}.$$

Перейшовши до оригіналів, одержимо

$$\tilde{x}(\tau) = 1 + \frac{\tau^2}{2}.$$

Замінивши тут τ на $t - 1$, будемо мати шуканий розв'язок задачі Коші

$$x(t) = 1 + \frac{(t-1)^2}{2}. \blacktriangle$$

ВПРАВИ.

Розв'язати такі диференціальні рівняння при заданих початкових умовах:

$$101. x''(t) + x(t) = 0; \quad x(\pi) = 1, \quad x'(\pi) = 0.$$

$$102. x''(t) + x'(t) = 2t; \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = -1.$$

$$103. x''(t) + x(t) = -2\sin t; \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$104. x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2e^{1-t}; \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = -1.$$

Рівняння, права частина яких – кусково-неперервна функція. Операційний метод розв'язування диференціальних рівнянь можна застосовувати і до рівнянь, права частина яких є кусково-неперервною функцією. *Неперервну функцію будемо називати розв'язком таких рівнянь, якщо підстановка цієї функції в рівняння обертає його в то-*

можність при всіх тих значеннях аргументу, при яких функція неперервна.

Приклад Знайти частинні розв'язки рівняння:

$$x''' + 6x'' + 11x' + 6x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = x''(0) = 1, \quad \text{де}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \\ t^2 - 4t + 5, & t > 2. \end{cases}$$

За допомогою одиничної функції $\eta(t)$ і теореми запізнення функцію $f(t)$ запишемо формулою

$$f(t) = \eta(t-1) + (t-2)^2 + \eta(t-2).$$

Маємо

$$x(t) \rightarrow X(p), \quad x'(t) \rightarrow pX(p), \quad x''(t) \rightarrow p^2X(p) - 1,$$

$$x'''(t) \rightarrow p^3 - p - 1, \quad f(t) \rightarrow \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-2p}}{p^3}.$$

Операторне рівняння

$$p^3X(p) - p - 1 + 6p^2X(p) - 6 + 11pX(p) + 6X(p) = \frac{e^{-p}}{p} + \frac{2e^{-2p}}{p^3},$$

або

$$(p^3 + 6p^2 + 11p + 6)X(p) = p + 7 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{2e^{-2p}}{p^3}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{p+7}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \frac{e^{-p}}{p(p+1)(p+2)(p+3)} + \\ &+ \frac{2e^{-2p}}{p^3(p+1)(p+2)(p+3)} = X_1(p) + X_2(p) + X_3(p). \end{aligned}$$

Оригінал для зображення $X(p)$ знайдемо за теоремою розвинення.

$X_1(p)$ має полюси $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3$, тому

$$\begin{aligned}
 X_1(p) &\rightarrow \sum_{k=1}^3 \left(\frac{p+7}{((p+1)(p+2)(p+3))' } e^{pt} \right)_{p=-k} = \\
 &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{p+7}{3p^2+12p+11} e^{pt} \right)_{p=-k},
 \end{aligned}$$

або

$$X_1(p) \rightarrow 3e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t}.$$

Функція $X_2(p)$ має прості полюси $p_0 = 0$, $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3$.

Тому маємо

$$\begin{aligned}
 X_2(p) &\rightarrow \left(\frac{e^{-p}}{(p+1)(p+2)(p+3)} \right)_{p=0} + \\
 &+ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{e^{-p}}{(p(p+1)(p+2)(p+3))' } e^{pt} \right)_{p=-k} = \\
 &= \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{e^{p(t-1)}}{p(3p^2+12p+11)} \right)_{p=-k},
 \end{aligned}$$

або

$$X_2(p) \rightarrow \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} e^{-(t-1)} + \frac{1}{2} e^{-2(t-1)} - \frac{1}{6} e^{-3(t-1)} \right) \eta(t-1).$$

Функція $X_3(p)$ має полюс 3-го порядку $p_0 = 0$ і прості полюси $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3$. Тому одержуємо

$$\begin{aligned}
 X_3(p) &\rightarrow \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{d^2}{dp^2} \left(p^3 \frac{2e^{-2p}}{p^3(p+1)(p+2)(p+3)} e^{pt} \right) \right) + \\
 &+ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{2e^{-2p}}{(p^3(p+1)(p+2)(p+3))' } e^{pt} \right)_{p=-k} =
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{e^{p(t-2)}}{(p+1)(p+2)(p+3)} \right)'' + \\ + 2 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{e^{p(t-2)}}{6p^5 + 30p^4 + 44p^3 + 18p^2} \right)_{p=-k}$$

Звідси знайдемо

$$X_3(p) \rightarrow \left(0,85 - \frac{11}{18}(t-2) + \frac{1}{6}(t-2)^2 \right) \eta(t-2) + \\ + \left(-e^{-(t-2)} + \frac{1}{4}e^{-2(t-2)} - \frac{1}{27}e^{-3(t-2)} \right) \eta(t-2).$$

Таким чином, шуканий розв'язок

$$x(t) = 3e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t} + \\ + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} - \frac{1}{6}e^{-3(t-1)} \right) \eta(t-1) + \\ + \left(0,85 - \frac{11}{18}(t-2) + \frac{1}{6}(t-2)^2 \right) \eta(t-2) + \\ + \left(-e^{-(t-2)} + \frac{1}{4}e^{-2(t-2)} - \frac{1}{27}e^{-3(t-2)} \right) \eta(t-2).$$

ВПРАВИ

Знайти частинні розв'язки рівнянь:

105. $x'' + 2x' + 5x = 1 - \eta(t-1)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

106. $x'' + 4x' + 4x = 2e^{-t}(1 - \eta(t-1))$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

107. $x'' + 4x = (1 - \eta(t - \pi)) \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

108. $x'' + 7x' + 6x = e^{-2t} \operatorname{sh} t + \eta(t-1)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

109. $x'''' + 4x''' + 5x'' + 2x = 2e^{-2t}(1 - \eta(t-3))$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

$$110. x''+x'=f(t), \quad x(0)=x'(0)=0, \quad f(t)=\begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & t < 0, t > 2. \end{cases}$$

$$111. x''+4x'=f(t), \quad x(0)=x'(0)=0, \quad f(t)=\begin{cases} 2t, & 0 < t < 1, \\ -2t+2, & 1 < t < 2, \\ 0, & t < 0, t > 2. \end{cases}$$

$$112. x''+x'=f(t), \quad x(0)=x'(0)=0, \quad f(t)=\begin{cases} 2, & 0 < t < 1, \\ 4, & t > 1, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$113. x''+9x'=f(t), \quad x(0)=0, \quad x'(0)=1, \quad f(t)=\begin{cases} t-1, & 1 < t < 2, \\ -t+3, & 2 < t < 3, \\ 0, & t < 0, t > 3. \end{cases}$$

3.1.2. Застосування інтеграла Дюамеля до розв'язування диференціальних рівнянь

Нехай потрібно розв'язати лінійне диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами n -го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad (3)$$

яке задовольняє початкові умови $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$.

Припустимо, що відомий розв'язок рівняння

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 1,$$

з тією ж лівою частиною і правою частиною рівною одиниці при заданих початкових умовах. Позначивши зображення розв'язку $z(t)$ цього рівняння через $Z(p)$, одержимо рівняння в зображеннях:

$$p^n Z(p) + a_1 p^{n-1} Z(p) + \dots + a_n Z(p) = \frac{1}{p},$$

звідки

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)}$$

З іншого боку, покладаючи $y(t) \rightarrow Y(p)$ і $f(t) \rightarrow F(p)$, одержимо для вихідного рівняння (3) наступне рівняння в зображеннях:

$$p^n Y(p) + a_1 p^{n-1} Y(p) + \dots + a_n Y(p) = F(p).$$

З нього знаходимо

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}$$

Зіставлення $Y(p)$ і $Z(p)$ дає

$$Y(p) = pF(p)Z(p),$$

звідки, користуючись інтегралом Дюамеля, одержимо:

$$y = \int_0^t f(\tau) z'_t(t - \tau) dt \quad \text{або} \quad y = \int_0^t z(\tau) f'_t(t - \tau) dt. \quad (4)$$

Таким чином, виявляється, що якщо відомо розв'язок рівняння (1) при $f(t) = 1$ і нульових початкових умовах, то можна зразу знайти в квадратурах розв'язок цього рівняння для будь-якої функції $f(t)$ за тих же початкових умов.

Приклад 1. Використовуючи інтеграл Дюамеля, розв'язати рівняння при заданих початкових умовах

$$y''(t) - y(t) = \frac{1}{1 + e^t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Δ Розглянемо допоміжну задачу

$$z''(t) - z(t) = 1, \quad z(0) = z'(0) = 0.$$

Застосовуючи операційний метод, знаходимо

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)},$$

звідки

$$z(t) = \int_0^t \operatorname{sh} \tau d\tau = \operatorname{ch} t - 1.$$

За формулою (4)

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau} \operatorname{sh}(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \left(e^t - te^t - 1 \right) + \operatorname{sh} t \cdot \ln \frac{1+e^t}{2}.$$

Вимога, щоб початкові умови були нульовими неістотна, оскільки простою заміною шуканої функції задача з ненульовими початковими умовами зводиться до задачі з нульовими початковими умовами. Покажемо це на прикладі диференціального рівняння другого порядку.

Нехай потрібно знайти розв'язок рівняння

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \quad (5)$$

що задовольняє початкові умови $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Покладемо

$$y(t) = x(t) - x_0 - x_1 t. \quad (6)$$

Тоді

$$y'(t) = x'(t) - x_1, \quad y''(t) = x''(t),$$

і рівняння (5) прийме вигляд

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f_1(t),$$

де

$$f_1(t) = f(t) - a_1 x_1 - a_2 x_0 - a_2 x_1 t.$$

Далі, внаслідок (6)

$$y(0) = x(0) - x_0 = 0, \quad y'(0) = x'(0) - x_1 = 0.$$

Таким чином, приходимо до такої задачі Коші:

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f_1(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Приклад 2. За допомогою формули Дюамеля, розв'язати задачу

Коші

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2} + t, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1.$$

Δ Зведемо цю задачу до задачі з нульовими початковими умовами. Для цього покладемо

$$x(t) = y(t) + 2 - t.$$

Тоді

$$x'(t) = y'(t) - 1, \quad x''(t) = y''(t),$$

і задача зводиться до такої задачі Коші:

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Розв'язуючи останню задачу за допомогою інтеграла Дюамеля, знаходимо

$$x(t) = e^{-t} [t - \ln(1-t)].$$

Тоді розв'язок вихідної задачі

$$y(t) = e^{-t} [t - \ln(1-t)] - 2 + t. \blacktriangle$$

ВПРАВИ.

За допомогою інтеграла Дюамеля знайти розв'язки рівнянь, що задовольняють дані початкові умови:

$$114. \quad x'' - x' = \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$115. \quad x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{1+t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$116. \quad x'' - x' = \frac{e^{2t}}{2+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$117. \quad x'' - x = \operatorname{th} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$118. \quad x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

$$119. \quad x'' + x = \frac{1}{2 + \cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$120. \quad x'' + x = \frac{1}{2 + \sin^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$121. \quad x''' + x' = \frac{1}{2 + \sin t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

3.1.3. Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь операційним методом

Розв'язування системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами операційним методом проводиться за тією ж схемою, що і розв'язування одного диференціального рівняння.

Нехай потрібно розв'язати систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$\sum_{k=1}^n \left(a_{ik} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + b_{ik} \frac{dx_k}{dt} + c_{ik} x_k \right) = f_i(t) \quad (7)$$

$$(i=1, 2, \dots, n).$$

де $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} = \text{const}$, при початкових умовах

$$x_k(0) = \alpha_k, \quad x'_k(0) = \beta_k. \quad (8)$$

Позначивши через $X_k(p)$ і $F_i(p)$ зображення $x_k(t)$ і $f_i(t)$, від системи (7) із урахуванням (8) перейдемо до операторної системи

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} p^2 + b_{ik} p + c_{ik}) X_k(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^n [(a_{ik} p + b_{ik}) \alpha_k + a_{ik} \beta_k] \quad (9)$$

$$(i=1, 2, \dots, n).$$

Розв'язуючи систему (9) як лінійну алгебраїчну систему рівнянь відносно $X_k(p)$, знайдемо $X_k(p)$, а потім їх оригінали $x_k(t)$ ($i = \overline{1, n}$).

Ці останні і будуть розв'язками задачі Коші для системи (7).

Приклади.

Розв'язати системи рівнянь при даних початкових умовах.

$$1. \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = z + x, \\ z' = x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = 0.$$

Δ Позначимо $x(t) \rightarrow X(p)$, $y(t) \rightarrow Y(p)$, $z(t) \rightarrow Z(p)$. Система рівнянь в зображеннях буде мати вигляд

$$\begin{cases} pX(p) - Y(p) - Z(p) = 1, \\ -X(p) + pY(p) - Z(p) = 0, \\ -X(p) - Y(p) + pZ(p) = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему, наприклад, за правилом Крамера. Знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ -1 & -1 & p \end{vmatrix} = p^3 - 3p - 2 = (p+1)^2(p-2).$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & p & -1 \\ 0 & -1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1.$$

Аналогічно знаходимо $\Delta_y = \Delta_z = p+1$. Звідси

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{p^2 - 1}{(p+1)^2(p-2)} = \frac{p-1}{(p+1)(p-2)} = \\ &= \frac{2(p-2) + (p+1)}{3(p+1)(p-2)} = \frac{2}{3(p+1)} + \frac{1}{3(p-2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(p) = Z(p) &= \frac{p+1}{(p+1)^2(p-2)} = \frac{1}{(p+1)(p-2)} = \\ &= \frac{(p+1) - (p-2)}{3(p+1)(p-2)} = \frac{1}{3(p-2)} - \frac{1}{3(p+1)}. \end{aligned}$$

Переходячи від зображень $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$ до їх оригіналів,

одержимо:

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}; \quad y(t) = z(t) = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}. \blacktriangle$$

$$2. \begin{cases} y' - 2y - 4z = \cos t, \\ z' + y + 2z = \sin t, \end{cases} \quad y(0) = z(0) = 0.$$

Δ Система рівнянь в зображеннях має вигляд:

$$\begin{cases} (p-2)Y(p) - 4Z(p) = \frac{p}{p^2+1}, \\ Y(p) + (p+2)Z(p) = \frac{1}{p^2+1}. \end{cases}$$

Зображення $Y(p)$ і $Z(p)$ визначаємо за формулами Крамера:

$$\Delta = (p-2)(p+2) + 4 = p^2;$$

$$\Delta_y = \frac{p(p+2)}{p^2+1} + \frac{4}{p^2+1} = \frac{p^2+2p+4}{p^2+1},$$

$$\Delta_z = \frac{p-2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} = -\frac{2}{p^2+1}.$$

Звідси

$$Y(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)} = \frac{4}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{2p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1},$$

$$Z(p) = -\frac{2}{p^2(p^2+1)} = -\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}.$$

Отже,

$$\begin{cases} y(t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t, \\ z(t) = -2t + 2\sin t. \end{cases} \blacktriangle$$

$$3. \begin{cases} x'' = x' + 2y' + x - y + e^{3x}, \\ y' = x - y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

Δ Згідно з попереднім, в класі зображень дістаємо алгебраїчну систему

$$\begin{cases} (p^2 - p - 1)X(p) - (2p - 1)Y(p) = \frac{4 - p}{p - 3}, \\ -X(p) + (p + 1)Y(p) = -1. \end{cases}$$

За допомогою другої теореми розвинення та теореми про лишки знаходимо розв'язок системи

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{12} + \frac{4}{15}e^{3t} - \frac{9}{8}e^{2t} + \frac{31}{40}e^{-2t}, \\ y(t) = \frac{1}{12} + \frac{1}{15}e^{3t} - \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{31}{40}e^{-2t}. \end{cases} \blacktriangle$$

ВПРАВИ

Розв'язати системи рівнянь при даних початкових умовах.

$$122. \begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

$$123. \begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

$$124. \begin{cases} x' + 2x + y = \sin t, \\ y' - 4x - 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$125. \begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z + 2e^{-t}, \\ z' = z - x, \end{cases} \quad x(0) = z(0) = 0, \quad y(0) = 0,5.$$

$$126. \begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$$

$$127. \begin{cases} 3tx' = 2x + y - z, \\ 2ty' = x + 3y + z, \\ 6tz' = -x + 7y + 5z, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1.$$

$$128. \begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, & x(0) = x'(0) = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, & y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

3.1.4. Лінійні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами

Коротко спинимося на питанні про можливість застосування операційного числення для розв'язування лінійних рівнянь і систем із змінними коефіцієнтами. Для рівнянь із змінними коефіцієнтами цей метод реалізується дуже рідко й суто індивідуально. Він придатний, наприклад, для рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами. Проте схема методу не така проста як для рівнянь із сталими коефіцієнтами, і операційний метод мало ефективний.

Нехай треба розв'язати рівняння

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) = f(t), \quad (10)$$

де $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ – многочлени від t степеня $\leq m$, а $f(t)$ – функція - оригінал. Припустимо, що задача Коші

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

для рівняння (10) має розв'язок.

Нехай

$$y(t) \rightarrow Y(p).$$

Згідно з теоремою диференціювання зображення

$$\begin{aligned} t^k y^{(s)}(t) &\rightarrow (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} [L(y^{(s)}(t))] = \\ &= (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} [p^s Y(p) - p^{s-1} y_0 - \dots - y_0^{(n-1)}] \end{aligned}$$

Тут $L(y^{(s)}(t))$ – зображення функції $y^{(s)}(t)$.

Таким чином, застосовуючи до обох частин рівняння (10) пере-

творення Лапласа, ми перетворимо (10) в диференціальне рівняння m -го порядку відносно зображення $Y(p)$ функції $y(t)$. Якщо $m < n$, то задача інтегрування рівняння (10) спрощується. Проілюструємо це на прикладах.

Приклади.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння $ty'' - 2y' = 0$.

Δ Нехай $y(t) \rightarrow Y(p)$. Тоді

$$y'(t) \rightarrow pY(p) - y(0), \quad y''(t) \rightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0),$$

$$ty''(t) \rightarrow -\frac{d}{dp} [p^2Y(p) - py(0) - y'(0)] = -p^2 \frac{dY(p)}{dp} - 2pY(p) + y(0).$$

І рівняння в зображеннях матиме вигляд

$$-p^2 \frac{dY(p)}{dp} - 2pY(p) + y(0) - 2pY(p) + 2y(0) = 0$$

або

$$\frac{dY(p)}{dp} + \frac{4}{p}Y(p) = \frac{3y(0)}{p^2}.$$

Інтегруючи це рівняння як лінійне неоднорідне рівняння відносно $Y(p)$, знайдемо

$$Y(p) = \frac{y(0)}{p} + \frac{C}{p^4},$$

звідки

$$y(t) = y(0) + C \frac{t^3}{3!}$$

є розв'язком вихідного рівняння.

2. Розглянемо рівняння Бесселя

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - n^2)x(t) = 0 \quad (t > 0, n \in Z)$$

і будемо шукати розв'язок цього рівняння, що задовольняє початкові умови $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Δ Нехай $x(t) \rightarrow X(p)$. Тоді

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x_0, \quad x''(t) \rightarrow p^2X(p) - px_0 - x_1.$$

Далі за теоремою диференціювання зображень

$$tx'(t) \rightarrow -\frac{d}{dp}[pX(p) - x_0] = -\frac{d}{dp}[pX(p)],$$

$$tx''(t) \rightarrow \frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p) - px_0 - x_1] = \frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p)],$$

і рівняння Бесселя в зображеннях матиме вигляд:

$$\frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p)] - \frac{d}{dp}[pX(p)] + \frac{d^2X(p)}{dp^2} - n^2X(p) = 0$$

або

$$(1 + p^2) \frac{d^2X(p)}{dp^2} + 3p \frac{dX(p)}{dp} + (1 - n^2)X(p) = 0. \quad (*)$$

Для розв'язування рівняння (*) введемо нову незалежну змінну і нову шукану функцію формулами

$$p = \operatorname{sh} u, \quad X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u}.$$

Рівняння (*) перейде при цьому в наступне

$$z''(u) - n^2z(u) = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$z(u) = C_1 e^{nu} + C_2 e^{-nu}.$$

Оскільки $p = \operatorname{sh} u$, то одержимо $\operatorname{ch} u = \sqrt{p^2 + 1}$. Враховуючи вирази для $\operatorname{sh} u$ і $\operatorname{ch} u$ через показникові функції, знаходимо

$$e^u = \sqrt{p^2 + 1} + p, \quad e^{-u} = \sqrt{p^2 + 1} - p.$$

так що

$$z(u) = C_1 (\sqrt{p^2 + 1} + p)^n + C_2 (\sqrt{p^2 + 1} - p)^n.$$

Отже, для $X(p)$ одержуємо

$$X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u} = \frac{C_1(\sqrt{p^2+1}+p)^n + C_2(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$$

Знайдемо сталі інтегрування C_1 і C_2 . Покладаючи $n=0$ і $n=1$, відповідно одержуємо

$$X(p) = \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{p^2+1}} \rightarrow J_0(t) \quad \text{і} \quad X(p) = C_1 + C_2 + \frac{p(C_1 - C_2)}{\sqrt{p^2+1}} \rightarrow J_1(t).$$

Користуючись граничною теоремою і враховуючи, що $J_0(0) = 1$ і $J_1(0) = 0$, маємо

$$C_1 + C_2 = 1, \quad C_1 + C_2 + C_1 - C_2 = 0.$$

Звідси $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Тоді

$$X(p) = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Таким чином, $x(t) = J_n(t)$. ▲

ВІПРАВИ

Знайти розв'язки рівнянь:

129. $tx''(t) + (2t-1)x'(t) + (t-1)x(t) = 0$.

130. $(2t+1)x''(t) + (4t-2)x'(t) - 8x(t) = 0$.

131. $x''(t) + (t+1)x'(t) + tx(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

132. $x''(t) + tx'(t) - (t+1)x(t) = 0$, $x(0) = x'(0) = 1$.

133. $x''(t) - tx'(t) + nx(t) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ (рівняння Чебишова – Ерміта):

а) $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $n = 2k$;

б) $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $n = 2k + 1$.

3.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Поставимо задачу знайти розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними

$$\begin{aligned}
 & a_{11} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + a_{22} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \\
 & + 2a_{13} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + 2a_{23} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a_{33} u(x,t) = f(x,t), \quad (11)
 \end{aligned}$$

яке задовольняє деякі початкові умови (фіксовано t) і граничні умови (фіксовано x). Тут a_{11} , a_{12} , a_{22} , a_{13} , a_{23} , a_{33} – сталі коефіцієнти; $f(x,t)$ – задана функція двох дійсних змінних x і t , яка задовольняє умови функції-оригіналу.

Припускаємо, що шуканий розв'язок $u(x,t)$, а також його похідні, що входять в рівняння (11), задовольняють умовам існування перетворення Лапласа по t , причому показник зростання по t функції $u(x,t)$ і її похідних не залежить від x .

Нехай $u(x,t) \rightarrow U(x,p)$. Помножимо обидві частини рівняння (11) на e^{-pt} . Інтегруючи одержане рівняння за змінною t в межах від 0 до ∞ , одержимо

$$\begin{aligned}
 & a_{11} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-pt} dt + 2a_{12} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} e^{-pt} dt + a_{22} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} e^{-pt} dt + \\
 & + 2a_{13} \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} e^{-pt} dt + 2a_{23} \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-pt} dt + \quad (12) \\
 & + a_{33} \int_0^{\infty} u(x,t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(x,t) e^{-pt} dt.
 \end{aligned}$$

Знайдемо зображення кожного з членів рівності (12).

Зображення $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-pt} dt = u(x,t) e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + p \int_0^{\infty} u(x,t) e^{-pt} dt = \\ &= -u(x,0) + pU(x,p). \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \rightarrow pU(x,p) - u(x,0). \quad (13)$$

Зображення $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + p \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-pt} dt = \\ &= -\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + pu(x,t) e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + p^2 \int_0^{\infty} u(x,t) e^{-pt} dt = \\ &= p^2 U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \rightarrow p^2 U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}. \quad (14)$$

Зображення $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [u(x,t) e^{-pt}] dt = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u(x,t) e^{-pt} dt = \frac{\partial U(x,p)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial U(x,p)}{\partial x} \quad (15)$$

Зображення $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x,t)e^{-pt}] dt = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} u(x,t)e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} \quad (16)$$

Зображення $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} &\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-pt} \right] dt = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-pt} dt = p \frac{\partial U(x,p)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,0)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \rightarrow p \frac{\partial U(x,p)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} \quad (17)$$

Враховуючи формули (13) – (17), одержимо наступне операторне рівняння для рівняння (11):

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} + 2a_{12} p \frac{\partial U(x,p)}{\partial x} + a_{22} p^2 U(x,p) + 2a_{13} \frac{\partial U(x,p)}{\partial x} + \\ + 2a_{23} p U(x,p) + a_{33} U(x,p) - 2a_{12} \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} - a_{22} p u(x,0) - \end{aligned}$$

$$-a_{22} \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} - 2a_{23} u(x,0) = F(x, p), \quad (18)$$

де $f(x, t) \rightarrow F(x, p)$.

Операторне рівняння (18) є звичайним диференціальним рівнянням відносно зображення $U(x, p)$. Інтегруючи будь-яким способом одержане операторне рівняння, знайдемо зображення $U(x, p)$, а потім і шукану функцію $u(x, t)$.

Зауваження. При доведенні формул (15) – (17) передбачалась можливість диференціювання за параметром x інтеграла Лапласа, що можливо в силу умов, які накладені на функцію $u(x, t)$ і її частинні похідні.

Приклади.

1. Знайти розподіл температури $u(x, t)$ в стрижні: $(0 \leq x < \infty)$, якщо на його кінці $x = 0$ підтримується задана температура $f(t)$, а початкова температура стрижня дорівнює нулю.

Δ Процес теплопровідності описується математичною моделлю

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad D = \{(x, t) : 0 < x < \infty, t > 0\}, \quad (19)$$

початкова умова

$$u(x, 0) = 0, \quad (20)$$

гранична умова

$$u(0, t) = f(t). \quad (21)$$

Застосовуючи до функції $u(x, t)$ по змінній t перетворення Лапласа:

$$u(x, t) \rightarrow U(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt$$

і враховуючи, що функція $u(x, t)$ обмежена і її похідні $u_t(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ є оригіналами по змінній t , приходимо згідно з формулами (13), (16) і (18) в просторі зображень до задачі

$$U_{xx}(x, p) - \frac{p}{a^2} U(x, p) = 0, \quad (22)$$

$$U(0, p) = F(p). \quad (23)$$

Розв'язок рівняння (22) має вигляд

$$U(x, p) = c_1(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + c_2(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Функція $U(x, p)$ обмежена при $x \rightarrow \infty$, тому $c_2(p) = 0$. Користуючись (23), знаходимо, що $c_1(p) = F(p)$. Розв'язок задачі (22), (23)

$$U(x, p) = F(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} = pF(p)\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \quad (24)$$

Використовуючи інтеграл Дюамеля і формулу $\text{Erf} \frac{a}{2\sqrt{t}} \rightarrow \frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$, з (24) одержуємо

$$u(x, t) = \int_0^t \left(\text{Erf} \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) f(t-\tau) d\tau + f(t) \text{Erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} \Big|_{t=0}. \quad (25)$$

Тут

$$\text{Erf} \frac{x}{2a\sqrt{\tau}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}} e^{-u^2} du, \quad \text{Erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} \Big|_{t=0} = \text{Erf}(\infty) = 0$$

і

$$\left(\text{Erf} \frac{x}{2a\sqrt{\tau}} \right) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}.$$

Підставляючи ці значення в (25), одержимо розв'язок задачі:

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau.$$

Шуканий розв'язок $u(x, t)$ задовольняє початкові і граничні умови. Запишемо цей розв'язок у вигляді

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t f(t-\tau) e^{-\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)^2} d\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4a^2u^2}\right) e^{-u^2} du,$$

де $\frac{x}{2a\sqrt{\tau}} = u$. Тоді

$$u(0,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) e^{-u^2} du = f(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = f(t), \quad u(x,0) = 0.$$

Тут $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ – інтеграл Пуассона. ▲

2. Стрижень довжини l знаходиться в стані спокою. Один його кінець закріплено, а до вільного кінця прикладена сила $A \sin \omega t$, яка направлена по осі стрижня. Знайти повздовжнє коливання стрижня $u(x,t)$ при заданих початкових і граничних умовах:

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad \text{і} \quad u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{A}{E} \sin \omega t, \quad (26)$$

де E – модуль пружності (за законом Гука сила, що діє вздовж стрижня, дорівнює $A \sin \omega t = E \frac{\partial u}{\partial x}$, тому $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{A}{E} \sin \omega t$).

Δ Рівняння коливань стрижня має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (27)$$

де a – коефіцієнт, який залежить від матеріалу стрижня. Маємо

$$u(x,t) \rightarrow U(x,p),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \rightarrow p^2 U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p^2 U(x,p).$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \rightarrow \frac{d^2 U(x,p)}{dx^2}.$$

Операторне рівняння, що відповідає рівнянню (27), має вигляд

$$\frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U(x,p) = 0. \quad (28)$$

З (26) одержуємо граничні умови для рівняння (28):

$$u(0,t) = 0 \rightarrow U(0,p) = 0,$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{A}{E} \sin \omega t \rightarrow \frac{\partial U(l,p)}{\partial x} = \frac{A}{E} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (29)$$

Інтегруючи рівняння (28), одержуємо

$$U(x,p) = c_1 \operatorname{ch} \frac{p}{a} x + c_2 \operatorname{sh} \frac{p}{a} x.$$

Користуючись граничними умовами (29), визначаємо довільні сталі

$$c_1 = 0 \quad \text{і} \quad c_2 = \frac{Aa\omega}{E} \frac{1}{p(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l}$$

Таким чином, операторне рівняння (28) має розв'язок

$$U(x,p) = \frac{Aa\omega}{E} \frac{\operatorname{sh} \frac{p}{a} x}{p(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l}$$

Позначимо

$$A_1(p) = \operatorname{sh} \frac{p}{a} x \quad \text{і} \quad A_2(p) = p(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l.$$

Тоді

$$U(x,p) = \frac{Aa\omega}{E} \frac{A_1(p)}{A_2(p)}$$

і

$$A_2'(p) = (p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l + 2p^2 \operatorname{ch} \frac{p}{a} l + \frac{p}{a} p(p^2 + \omega^2) \operatorname{sh} \frac{p}{a} l.$$

Розв'язуючи рівняння $A_2(p) = 0$ і беручи до уваги, що $\operatorname{ch} \frac{p}{a} l = \operatorname{ch} i \frac{p}{a} l$, знаходимо нулі функції $A_2(p)$. Маємо $p = 0$, $p_k = \pm i\omega_k$, де $\omega_k = \frac{\pi a}{l} \left(k - \frac{1}{2}\right)$, $p = \pm i\omega$ при $k \in N$.

Функція $U(x,p)$ має прості полюси $p = 0$, $p = \pm i\omega$, $p_k = \pm i\omega_k$, $k \in N$ (припускаємо, що умова резонансу відсутня, тобто $\omega_k \neq \omega$). Оригінал $u(x,t)$ для зображення $U(x,p)$ знаходимо за теоремою розкладу:

$$u(x,t) = \frac{Aa\omega}{E} \left(\left(\frac{A_1(p)}{A_2'(p)} e^{pt} \right)_{p=0} + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{A_1(i\omega)}{A_2'(i\omega)} e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_1(i\omega_k)}{A_2'(i\omega_k)} e^{i\omega_k t} \right) \right)$$

Підставляючи в цю рівність значення функцій $A_1(p)$ і $A_2(p)$ в полюсах, одержуємо

$$u(x,t) = \frac{Aa\omega}{E} 2 \operatorname{Re} \left(-\frac{i \sin \frac{\omega}{a} x}{2\omega^2 \cos \frac{\omega}{a} l} e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i \sin \frac{\omega_k}{a} x}{l i \omega_k (\omega^2 - \omega_k^2) i \sin \frac{l}{a} \omega_k} e^{i\omega_k t} \right)$$

Таким чином, шуканий розв'язок має вигляд

$$u(x,t) = \frac{Aa\omega}{E} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\omega^2 \cos \frac{\omega}{a} l} + \frac{2a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{\omega_k}{a} x \sin \omega_k t}{(\omega_k^2 - \omega^2) \omega_k} \right),$$

де $\omega_k = \frac{\pi a}{l} \left(k - \frac{1}{2} \right) \blacktriangle$

3 Знайти розв'язок лінійного рівняння з частинними похідними

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y),$$

якій задовольняє початкові умови

$$0 < x < \infty, 0 < y < \infty, a > 0, b > 0, u(0, y) = 0, u(x, 0) = \varphi(x).$$

Δ Застосуємо до даного рівняння перетворення Лапласа відносно змінної x , покладаючи

$$u(x, y) \rightarrow U(p, y) \text{ і } f(x, y) \rightarrow F(p, y).$$

Маємо

$$apU(p, y) + b \frac{\partial U(p, y)}{\partial y} + cU(p, y) = F(p, y).$$

Застосуємо до одержаного рівняння ще раз перетворення Лапласа відносно змінної y , покладаючи

$$U(p, y) \rightarrow \bar{U}(p, q) \text{ і } F(p, y) \rightarrow \bar{F}(p, q).$$

Одержимо

$$ap\bar{U}(p, q) + bq\bar{U}(p, q) - bU(p, 0) + c\bar{U}(p, q) = \bar{F}(p, q).$$

Якщо до даного рівняння застосувати двічі перетворення Лапласа в іншому порядку (спочатку відносно y , а потім відносно x), то

одержимо

$$ap\bar{U}(p, q) - aU(0, q) + bq\bar{U}(p, q) - b\Phi(p) + c\bar{U}(p, q) = \bar{F}(p, q).$$

Із порівняння одержаних результатів випливає, що

$$U(0, q) = 0 \text{ і } U(p, 0) = \Phi(p) \rightarrow \varphi(x).$$

Отже, після двократного застосування перетворення Лапласа маємо

$$ap\bar{U}(p, q) + bq\bar{U}(p, q) - b\Phi(p) + c\bar{U}(p, q) = \bar{F}(p, q).$$

Звідси

$$\bar{U}(p, q) = \frac{b\Phi(p) + \bar{F}(p, q)}{ap + bq + c}.$$

Повертаючись до оригіналу $U(p, y)$, одержимо

$$U(p, y) = e^{-\frac{ap+c}{b}y} \Phi(p) + \frac{1}{b} \int_0^y e^{-\frac{ap+c}{b}t} F(p, y-t) dt.$$

Повертаючись до оригіналу $u(x, y)$, одержимо, враховуючи теорему запізнення:

при $x > \frac{a}{b}y$

$$u(x, y) = e^{-\frac{c}{b}y} \varphi\left(x - \frac{a}{b}y\right) + \frac{1}{b} \int_0^y e^{-\frac{c}{b}t} f\left(x - \frac{a}{b}t, y-t\right) dt,$$

при $x < \frac{a}{b}y$

$$u(x, y) = \frac{1}{b} \int_0^{\frac{bx}{a}} e^{-\frac{c}{b}t} f\left(x - \frac{a}{b}t, y-t\right) dt. \blacktriangle$$

ВПРАВИ

134. Важкий розтяжний стрижень, довжина якого в нерозтягнутому стані дорівнює l , підвішений за кінець $x=0$, а кінець $x=l$ залишений вільним. Знайти змушені коливання стрижня.

135. Струна довжиною l закріплена на кінцях $x=0$ і $x=l$. У момент часу $t=0$ вона відтягнута в точці $x=c$ ($0 < c < l$) на від-

стань рівну одиниці від осі Ox , потім струна відпущена без надання її точкам початкової швидкості. Визначити відхилення $u(x, t)$ точок струни для будь-якого моменту часу.

136. Знайти розподіл температури в однорідному тонкому напівобмеженому стрижні $0 < x < \infty$, коли початкова температура стрижня дорівнює нулю, а температура його лівого кінця підтримується рівною $u_0 = \text{const}$. Бічна поверхня стрижня теплоізолювана.

137. Кругла однорідна пластинка радіусом R нагріта до постійної температури $u_0 > 0$. Контур пластинки під час спостереження підтримується при нульовій температурі. Знайти температуру пластинки в будь-який момент часу.

138. Однорідна струна, закріплена на кінцях $x = 0$ і $x = l$, має в початковий момент часу форму параболи, симетричної щодо перпендикуляра, проведеного через точку $x = l/2$. Визначити зсув струни від прямолінійного положення рівноваги, припускаючи, що початкові швидкості відсутні.

3.3. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТИПУ ЗГОРТКИ

Рівняння виду

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (30)$$

де $f(t)$ – невідома функція, $\varphi(t)$ і $k(t, \tau)$ – задані функції, $a, \lambda, \alpha, \beta$ – сталі, називається *лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма* 1-го роду, якщо $a = 0$, або 2-го роду, якщо $a \neq 0$.

Функція $k(t, \tau)$, яка визначена на площині (t, τ) в квадраті $t > \alpha$, $\tau < \beta$, називається *ядром інтегрального рівняння*. Якщо $\varphi(t) = 0$, то рівняння називається *однорідним*.

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_{\alpha}^t k(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

називається *лінійним інтегральним рівнянням Вольтерра* 1-го роду, якщо $a = 0$, або 2-го роду, якщо $a \neq 0$.

Якщо ядро рівняння $k(t, \tau)$ залежить тільки від різниці $t - \tau$, тобто $k(t, \tau) = k(t - \tau)$, то

$$\int_0^t k(t - \tau) f(\tau) d\tau = k(t) * f(t).$$

В цьому випадку рівняння Вольтерра

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t k(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad (31)$$

буде рівнянням типу згортки і його розв'язок можна знайти операційним методом, користуючись теоремою множення.

Дійсно, нехай $f(t)$ є оригіналом, а $F(p)$ — його зображенням і зображенням $\varphi(t)$ є $\Phi(p)$. Тоді за теоремою про згортку

$$\int_0^t k(t - \tau) f(\tau) d\tau \rightarrow K(p)F(p)$$

і рівняння (31) в операторній формі матиме вигляд

$$aF(p) = \lambda K(p)F(p) + \Phi(p),$$

звідки

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{a - \lambda K(p)}.$$

Залишилось перейти в простір оригіналів, що робиться або за допомогою таблиць зображень, або за формулою обернення.

Приклад. Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 y(\tau) d\tau + \sin t.$$

Δ Запишемо дане рівняння в просторі зображень. Маємо

$$y(t) \rightarrow Y(p), \int_0^t (t-\tau)^2 y(\tau) d\tau = t^2 * y(t) \rightarrow \frac{2}{p^3} Y(p), \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2+1}$$

Операторне рівняння запишеться у вигляді

$$Y(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^3} Y(p) + \frac{1}{p^2+1} \quad \text{або} \quad Y(p) \left(1 - \frac{1}{p^3} \right) = \frac{1}{p^2+1},$$

звідки

$$Y(p) = \frac{p^3}{(p^3-1)(p^2+1)} = \frac{p^3}{(p-1)(p^2+p+1)(p^2+1)}.$$

Розклавши на елементарні дроби і визначивши коефіцієнти, одержимо

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{6(p-1)} + \frac{p+1}{2(p^2+1)} - \frac{2p+1}{3(p^2+p+1)} = \\ &= \frac{1}{6(p-1)} + \frac{p}{2(p^2+1)} + \frac{1}{2(p^2+1)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Переходом в простір оригіналів матимемо

$$y(t) = \frac{1}{6} e^t + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t. \blacktriangle$$

Інтегральному рівнянню Вольтерра 1-го роду

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^t k(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (32)$$

відповідає операторне рівняння

$$\Phi(p) = \lambda K(p) F(p),$$

розв'язок якого

$$F(p) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{K(p)} \Phi(p)$$

неможна перевести за допомогою теореми множення в простір оригіналів, оскільки функція $\frac{1}{K(p)}$ не є зображенням ($\lim_{p \rightarrow \infty} K(p) = 0$ – необ-

Хідна умова існування зображення). Однак в деяких випадках розв'язок рівняння (32) можна знайти. Якщо функції $k(t)$ і $\varphi(t)$ диференційовані і $k(t) \neq 0$, то, продиференціювавши (32), одержимо інтегральне рівняння 2-го роду:

$$\varphi'(t) = \lambda \int_0^t k'(t-\tau) f(\tau) d\tau + k(0) f(t),$$

розв'язок якого існує.

Якщо $k(0) = k'(0) = \dots = k^{(n-1)}(0) = 0$, а $k^{(n)}(0) \neq 0$, то після $(n+1)$ -кратного диференціювання рівняння (32) одержимо інтегральне рівняння 2-го роду:

$$\varphi^{(n+1)}(t) = \lambda \int_0^t k^{(n+1)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + k^{(n)}(0) f(t).$$

Приклад. Знайти розв'язок інтегрального рівняння 1-го роду

$$1 - \cos t = \int_0^t \text{sh}(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Δ Оскільки ядро $k(t) = \text{sh} t$ є диференційованою функцією, причому $k'(0) \neq 0$, то дане рівняння має розв'язок. Переходячи до зображень, одержимо

$$1 - \cos t \rightarrow \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$$

і

$$\int_0^t \text{sh}(t-\tau) f(\tau) d\tau = \text{sh} t * f(t) \rightarrow \frac{1}{p^2 - 1} F(p).$$

Операторне рівняння матиме вигляд

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2 - 1} F(p).$$

Звідси

$$F(p) = \frac{p^2 - 1}{p(p^2 + 1)} = \frac{2p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p}$$

Переходячи в простір оригіналів, знайдемо шуканий розв'язок

$$f(t) = 2\cos t - 1. \blacktriangle$$

Наведений метод розв'язування рівнянь типу згортки можна також застосовувати і до систем інтегральних рівнянь Вольєрра виду

$$f_i(t) = \Phi_i(t) + \sum_{k=1}^n \int_0^t k_{ik}(t-\tau) f_k(\tau) d\tau \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (33)$$

Застосовуючи до обох частин (33) перетворення Лапласа, одержимо

$$F_i(p) = \Phi_i(p) + \sum_{k=1}^n K_{ik}(p) F_k(p) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, лінійну відносно $F_i(p)$, знайдемо $F_i(p)$ ($i=1, 2, \dots, n$), оригінали для яких і будуть розв'язками вихідної системи інтегральних рівнянь (33).

Приклад.

Розв'язати систему інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \Phi_1(t) = t + \int_0^t e^{-(t-\tau)} \Phi_1(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau) \Phi_2(\tau) d\tau, \\ \Phi_2(t) = 1 + \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau) \Phi_1(\tau) d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)} \Phi_2(\tau) d\tau. \end{cases}$$

Δ Переходячи до зображень і використовуючи теорему про згортку, одержимо ($\Phi_1(t) \rightarrow \Phi_1(p)$, $\Phi_2(t) \rightarrow \Phi_2(p)$)

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1} \Phi_1(p) + \frac{1}{p^2} \Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2-1} \Phi_1(p) - \frac{1}{p-1} \Phi_2(p), \end{cases}$$

звідки

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_1(p) &= \frac{p^2 + p - 1}{p(p-1)(p^2+1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1}, \\ \Phi_2(p) &= \frac{p^3 - p^2 + 1}{(p-1)(p+1)(p^2+1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}. \end{aligned} \right.$$

Знаходячи оригінали для $\Phi_1(p)$ і $\Phi_2(p)$, одержуємо розв'язок вихідної системи інтегральних рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1(t) &= 1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{3}{2}\cos t, \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \sin t. \end{aligned} \right. \blacktriangle$$

ВПРАВИ

Розв'язати інтегральні рівняння:

$$139. \varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt \quad 140. \varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t) dt.$$

$$141. \varphi(x) = e^x - 2 \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t) dt \quad 142. \varphi(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t) dt.$$

$$143. \varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt. \quad 144. \int_0^x e^{x-t}\varphi(t) dt = x.$$

$$145. \varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t) dt. \quad 146. \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t) dt = \operatorname{sh} x.$$

$$147. \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t) dt = x + x^2. \quad 148. \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t) dt = \sin x$$

$$149. \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(t) &= 1 - 2 \int_0^t e^{2(t-\tau)} \varphi_1(\tau) d\tau + \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau, \\ \varphi_2(t) &= 4t + \int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)\varphi_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \right.$$

$$150. \begin{cases} \varphi_1(t) = t + 2 \int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau) \varphi_2(\tau) d\tau, \\ \varphi_2(t) = 1 - \int_0^t e^{(t-\tau)} \varphi_1(\tau) d\tau + \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau. \end{cases}$$

$$151. \begin{cases} \varphi_1(t) = e^t - \int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau + 4 \int_0^t e^{(t-\tau)} \varphi_2(\tau) d\tau, \\ \varphi_2(t) = 1 - \int_0^t e^{-(t-\tau)} \varphi_1(\tau) d\tau + \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau. \end{cases}$$

3.4. РІВНЯННЯ ІЗ ЗАПІЗНЮЮЧИМ АРГУМЕНТОМ

Диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється, особливо з аргументом, що запізнюється, застосовуються при розв'язуванні задач теорії автоматичного регулювання, автоматики і телемеханіки, радіолокації, радіозв'язку, в дослідженнях з теоретичної кібернетики і т. ін. Рівняння із запізнюючим аргументом з'являється, наприклад, завжди, коли в розглядуваній фізичній або технічній задачі сила, яка діє на матеріальну точку, залежить від швидкості і положення цієї точки не тільки в даний момент, але і в деякий момент, що передре даному. В одних системах, наприклад, системах автоматичного регулювання, запізненням є проміжок часу, який потрібен системі для регулювання на вхідний імпульс. Запізнювання в авторегульованій системі може викликати появу самозбуджуваних коливань, збільшення перерегулювання і нестійкість системи.

Розгляд коливань молоточка електромагнітного переривника показує, що наявність запізнення є необхідною умовою роботи приладу. Явище запізнення викликається самоіндукцією в колі переривника: діючи на молоточок магнітна сила не виникає і не зникає миттєво в момент спрацювання контакту. На використанні ефекту запізнювання сигналу за час його руху від передавача до відбиваючого об'єкта і

назад до приймача будується принцип радіометрії. Таким чином, в деяких системах запізнювання є властивістю, яка внутрішньо притаманна їм.

В радіотехнічних пристроях запізнювання зумовлено наявністю визначеного часу носіїв електричних зарядів, а також проходженням електромагнітними хвилями великих відстаней. В низькочастотних радіотехнічних пристроях запізнювання електричних сигналів, внаслідок дуже великих швидкостей їх поширення, дуже малі і ними можна знехтувати, в високочастотних же радіотехнічних пристроях, особливо радіолокаційних і радіонавігаційних, запізнювання сигналу вже можна порівняти з природною одиницею виміру для таких систем – періодом коливань – і цим запізненням неможна знехтувати.

В найпростіших випадках диференціальні рівняння із запізнюючим аргументом мають вигляд

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau))$$

або

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau)),$$

де τ – сталие або змінне додатне запізнення. Більш складні диференціальні рівняння із запізнюючим аргументом можуть містити похідні більш вищих порядків, а також кілька різних сталих або змінних додатних запізнень τ_i .

Нехай дано диференціальне рівняння із запізнюючим аргументом і сталими коефіцієнтами:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t - \tau_k) + f(t), \quad (34)$$

де $a_k = \text{const}$, $\tau_k = \text{const} \geq 0$ ($0 < t < +\infty$). Для спрощення візьмемо нульові початкові умови

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0 \quad (35)$$

При цьому покладаємо

$$x(t) = x'(t) = \dots = x^{(n-1)}(t) \equiv 0 \text{ при } t < 0.$$

Застосовуючи до обох частин (34) перетворення Лапласа і користуючись при цьому теоремою запізнення, одержимо операторне рівняння для $X(p) \rightarrow x(t)$:

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p) e^{-\tau_k p} + F(p), \text{ де } F(p) \rightarrow f(t) \quad (36)$$

звідки

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}}. \quad (37)$$

Знаходячи $x(t)$ – оригінал для $X(p)$, що визначається формулою (37), одержимо розв'язок рівняння (33) який задовольняє початкові умови (34).

Приклад Розв'язати рівняння

$$x'(t) = x(t-1) + 1, \quad x(0) = 0.$$

Δ Перейшовши до зображень, одержимо

$$pX(p) = X(p)e^{-p} + \frac{1}{p},$$

звідки

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p - e^{-p}} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p}} = \\ &= \frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \dots + \frac{e^{-np}}{p^n} + \dots \right). \end{aligned}$$

Для $x(t)$ одержимо

$$\begin{aligned} x(t) &= t\eta(t) + \frac{1}{2!}(t-1)^2\eta(t-1) + \dots + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}(t-1)^{n+1}\eta(t-n) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \eta(t-k). \blacktriangle \end{aligned}$$

Для диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом, що описують процес з післядією, часто зустрічаються задачі в такій постановці.

Знайти розв'язок рівняння $x(t)$ для $t \geq t_0$, причому для всіх $t \leq t_0$, для яких значення $x(t)$ впливають на наступні значення розв'язку при $t \geq 0$, функція $x(t)$ задається.

Так, наприклад, ставиться задача: знайти неперервний розв'язок $x(t)$ при $t \geq t_0$ рівняння

$$x(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \tau > 0 = \text{const},$$

якщо дано, що $x(t) = \varphi(t)$ для $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$.

Тут $\varphi(t)$ — задана неперервна функція, яка називається *початковою функцією*. Відрізок $[t_0 - \tau; t_0]$, на якому задається функція $\varphi(t)$, називається *початковою множиною*.

Розв'язок лінійного рівняння (34) з сталими коефіцієнтами і сталим запізненням у випадку, коли початкова функція відмінна від тогочасного нуля, також можна шукати, використовуючи перетворення Лапласа.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x'(t) = x(t - 1), \quad \varphi(t) \equiv 1, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Δ Маємо

$$x(t) \rightarrow X(p), \quad x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1.$$

Застосовуючи до обох частин вихідного рівняння перетворення Лапласа, знайдемо

$$pX(p) - 1 = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t - 1) dt.$$

Зробивши заміну змінних, $t - 1 = z$, одержимо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t-1) dt &= \int_{-1}^{\infty} e^{-p(z+1)} x(z) dz = \\ &= e^{-p} \int_{-1}^0 e^{-pz} x(z) dz + e^{-p} \int_0^{\infty} e^{-pz} x(z) dz = e^{-p} \frac{e^{-pz}}{-p} \Big|_{z=-1}^{z=0} + e^{-p} X(p), \end{aligned}$$

оскільки $x(z) \equiv 1$ для $-1 \leq z \leq 0$. Остаточно одержуємо

$$pX(p) - 1 = \frac{1 - e^{-p}}{p} + e^{-p} X(p).$$

Звідси

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p - e^{-p}} + \frac{1 - e^{-p}}{p(p - e^{-p})} = \frac{1}{p \left(1 - \frac{e^{-p}}{p}\right)} + e^{-p} \frac{1 - e^{-p}}{p^2 \left(1 - \frac{e^{-p}}{p}\right)} = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \dots + \frac{e^{-kp}}{p^k} + \dots\right) + \\ &+ \frac{1 - e^{-p}}{p^2} \left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \dots + \frac{e^{-kp}}{p^k} + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^3} + \dots + \frac{e^{-kp}}{p^{k+2}} + \dots \end{aligned}$$

Знаходячи оригінал для $X(p)$, одержуємо розв'язок вихідного рівняння

$$x(t) = (1+t)\eta(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(t-k+1)^k}{k!} \eta(t-k+1). \blacktriangle$$

ВПРАВИ.

Розв'язати такі диференціальні рівняння із запізнюючим аргументом при заданих початкових умовах:

$$152. \quad x''(t) - x(t-1) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

153. $x''(t) - 2x'(t-1) = t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
154. $x''(t) = 2x'(t-2) - x(t-2) + 1$, $x(0) = x'(0) = 0$.
155. $x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-2) = t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
156. $x'(t) = x(t-1)$, $\varphi(t) = t$, $-1 \leq t \leq 0$.
157. $x'(t) = x(t-1) + t$, $\varphi(t) \equiv 1$, $-1 \leq t \leq 0$.
158. $x'(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) = 0$, $\varphi(t) = \cos t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$.
159. $x''(t) + x'(t) + x(t - \pi) = 0$, $\varphi(t) = \sin t$, $-\pi \leq t \leq 0$,
 $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

3.5 ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ У ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ

Найбільше застосування в електротехніці операційне числення одержало при дослідженні перехідних процесів в лінійних колах із зосередженими параметрами R , L і C . Це пояснюється тим, що явища, які відбуваються в таких колах, описуються лінійними диференціальними рівняннями та їх системами, які легко розв'язуються за допомогою операційного числення.

Насамперед розглянемо основні особливості і закони перехідних процесів в електричних колах.

Перехідним процесом називається явище, яке спостерігається в колі при переході від одного усталеного режиму до іншого.

Перехідні процеси виникають в електричних колах в результаті комутацій (включення або вимкнення е.р.с., різних перемикачів, короткого замикання в колі, раптової зміни параметрів в колі і т. ін.). Ці процеси в електричних колах завжди є електромагнітними. Вони звичайно відбуваються з дуже великою швидкістю. При цьому можливі випадки, коли напруга і струм в колі або на окремих його елементах при перехідному процесі значно перевищують їх значення в усталеному режимі. Останнє може привести до виходу з ладу деяких

елементів кола. При перебігу перехідних процесів в електричних колах завжди виконуються закони комутації (закони перехідних процесів). Вони твердять:

а). *Струм в індуктивності L не може змінитися стрибком.* В початковий момент (безпосередньо після комутації) він зберігає те значення, яке було в момент, що безпосередньо передував комутації:
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0).$$

б). *Напруга на ємності C не може змінитися стрибком.* В початковий момент (безпосередньо після комутації) вона зберігає те значення, яке було в момент, що безпосередньо передував комутації:
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0).$$

Значення струмів в індуктивностях і напруг на обкладинках конденсаторів в момент часу, безпосередньо передуючий комутації в колі, $i_L(0)$ і $u_C(0)$, визначають початкові умови перехідного процесу. При розрахунках перехідного процесу в електричному колі ці умови необхідно визначити до виконання всіх інших обчислень. Якщо всі $i_L(0)$ і $u_C(0)$ дорівнюють нулю, то в колі мають місце нульові початкові умови, а струми в індуктивностях і напруги на конденсаторах почнуть змінюватись від нульових значень. При ненульових початкових умовах для визначення знаків $i_L(0)$ і $u_C(0)$ потрібно задати напрямки обходу контурів кола, в яких буде відбуватися перехідний процес. Додатні знаки $i_L(0)$ і $u_C(0)$ зберігаються, якщо їх напрямок співпадає з напрямком обходу контуру. У протилежному випадку знаки $i_L(0)$ і $u_C(0)$ змінюються на протилежні. Тут струми в індуктивностях і напруги на конденсаторах в перехідному процесі почнуть змінюватись від значень, які вони мали в момент, безпосередньо передуючий комутації (із урахуванням встановлених знаків відповідних величин).

Нехай в електричному колі (рис.11) рубильник P переключиться із положення "1" в положення "2". Тоді в контурі R, L, C виникає перехідний процес. Припустимо, що його початкові умови ненульові: $i_L(0) \neq 0$ і $u_C(0) \neq 0$. При напрямку струму в індуктивності і напруги на обкладках конденсатора в початковий момент перехідного процесу, показаних на рис.11, і вибраному напрямку обходу контуру маємо $i_L(0) > 0$ і $u_C(0) > 0$. За напрямком миттєвого значення струму перехідного процесу $i = i(t)$ візьмемо напрямком обходу контуру. Оскільки напрямок джерела е.р.с. $e = e(t)$, що діє в контурі R, L, C під час перехідного процесу, співпадає з напрямком обходу цього контуру, то за другим законом Кірхгофа одержимо рівняння

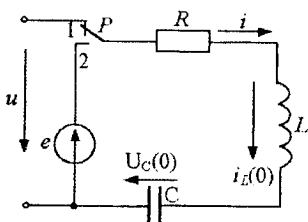


Рис. 11

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = e \quad (38)$$

Позначимо: $i = i(t) \rightarrow I(p)$ – зображення струму перехідного процесу в контурі; $e = e(t) \rightarrow E(p)$ – зображення зовнішньої е.р.с., що діє в контурі. Тоді рівняння (38) кола R, L, C в операторній формі матиме вигляд:

$$RI(p) + L(pI(p) - i_L(0)) + \frac{1}{Cp} I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = E(p). \quad (39)$$

Це рівняння можна переписати так

$$\left(R + pL + \frac{1}{Cp} \right) I(p) = E(p) + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p},$$

звідки знаходимо вираз для зображення струму перехідного процесу:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{R + pL + \frac{1}{Cp}} \quad (40)$$

Одержана залежність представляє собою закон Ома в операторній формі. Його можна записати так:

$$I(p) = \frac{\mathcal{E}(p)}{Z(p)} \quad (41)$$

де $\mathcal{E}(p) = E(p) + Li_L(0) + \frac{-u_C(0)}{p}$ — зображення всіх (зовнішніх і внутрішніх) е.р.с., що діють в контурі; $Z(p) = R + pL + \frac{1}{Cp}$ — операторний опір контуру R, L, C ; $\frac{-u_C(0)}{p}$ — зображення початкової е.р.с. ємності, що врівноважує початкову напругу на обкладинках конденсатора і напрямлене назустріч $u_C(0)$.

Закон Ома в операторній формі дозволяє безпосередньо досліджувати перехідні процеси тільки в нерозгалужених електричних колах. При розгляді перехідних процесів в розгалужених і складних електричних колах необхідно використовувати перший і другий закони Кірхгофа, які в операторній формі мають відповідно вигляд:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0 \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^n Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k(p)$$

При складанні рівнянь кола за цими законами “правила знаків” залишаються тими ж, що і при розрахунку ustalених режимів в електричних колах постійного і змінного струму. Зокрема, якщо миттєве значення струму перехідного процесу $i_n(t)$, який відбувається у вітці n , прийнято напрямленим до заданого вузла (для якого складається рівняння за першим законом Кірхгофа), то зображення цього струму $I_n(p)$ береться з одним знаком (наприклад, зі знаком “+”). Якщо ж

струм $i_m(t)$ напрямлено від вузла, то його зображення $I_m(p)$ бере-
ється з іншим знаком (зі знаком “-”).

Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа, треба пам’яту-
вати, що окрім зовнішніх е.р.с. $e_k(t) = e_k$ в контурах, що містять інду-
ктивності і ємності при ненульових початкових умовах, будуть діяти
ще і внутрішні е.р.с. (початкові е.р.с. самоіндукції і ємності). Причो-
му, якщо напрямок $i_{L_k}(0)$ співпадає з напрямком обходу контуру, то
доданок $L_k i_{L_k}(0)$ слід брати зі знаком “+”, якщо ж і $u_{C_k}(0)$ наприя-
млено за обходом контуру, то результируючий знак доданку $\frac{u_{C_k}(0)}{p}$ по-
винен бути “-”, оскільки початкова е.р.с. ємності завжди напрямлена
назустріч початковій напрузі на обкладинках конденсатора $u_C(0)$.

Відмітимо, що закони Ома і Кірхгофа в операторній формі мають
той же вигляд, що і при усталених режимах в колах постійного і
змінного струму. Тому, застосовуючи операційне числення для розра-
хунку перехідних процесів, в принципі можна використовувати всі
методи розрахунку складних лінійних електричних кіл зі сталими па-
раметрами. При дослідженні перехідних процесів в складних і розга-
лужених електричних колах (в останньому випадку при ненульових
початкових умовах) найбільше застосування одержали *метод рівнянь
Кірхгофа, метод контурних струмів і метод накладання*. При
розрахунку перехідних процесів в нерозгалужених колах, а також в
простих розгалужених колах при початкових нульових умовах засто-
совується *закон Ома в операторній формі*. При цьому в розгалу-
женому колі безпосередньо визначається тільки струм перехідного ре-
жиму у вітці, що містить джерело е.р.с. (все коло спочатку зводиться
до простого нерозгалуженого кола).

У всіх випадках розрахунку перехідних процесів в електричних

колах операційним методом зберігається така послідовність операцій: спочатку визначаються початкові умови, потім записується рівняння або система рівнянь для даного кола в операторній формі, що дозволяє знайти зображення шуканих струмів або напруг. І, нарешті, за одержаними зображеннями відшукуються оригінали – миттєві значення струмів або напруг перехідного режиму.

Застосування операційного числення до розрахунку перехідних процесів в лінійних електричних колах із зосередженими сталими параметрами покажемо на прикладах.

Приклади.

1. В початковий момент $t = 0$ в електричне коло, яке складається із послідовно з'єднаних самоіндукції L , опору R і ємності C , включається стала електрорушійна сила u_0 . Струм в колі і заряд конденсатора в початковий момент дорівнюють нулю. Знайти силу струму $i(t)$ в колі.

Δ Оскільки $i(0) = 0$ і $q(0) = 0$, то операторний опір і операторна напруга мають відповідно вигляд:

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{Cp} \quad \text{і} \quad U(p) = \frac{u_0}{p}$$

Користуючись законом Ома, одержимо, що операторний струм

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{u_0}{p \left(Lp + R + \frac{1}{Cp} \right)} = \frac{u_0}{L \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right)} = \\ &= \frac{u_0}{L \left[\left(p + \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right]} = \frac{u_0}{L \left[(p + \alpha)^2 + \omega^2 \right]}, \end{aligned}$$

де $\alpha = \frac{R}{2L}$ і $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$.

Користуючись формулами

$$\frac{1}{p^2 + k^2} \rightarrow \frac{1}{k} \sin kt, \quad \frac{1}{p^2 - k^2} \rightarrow \frac{1}{k} \operatorname{sh} kt, \quad \frac{1}{p^2} \rightarrow t$$

і теоремою зміщення, одержимо: $i(t) = \frac{u_0}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t$, якщо $\omega^2 > 0$;

$i(t) = \frac{u_0}{L\gamma} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \gamma t$, якщо $\omega^2 = -\gamma^2 < 0$ і $i(t) = \frac{u_0}{L} t e^{-\alpha t}$, якщо $\omega = 0$.

Враховуючи, що $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$, можна сказати, що перший результат одержимо при $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$; другий – при $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ і третій – при $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. В першому випадку в колі відбувається *згасаючий коливний процес*. Число α називається *коефіцієнтом згасання*; при наявності R він не дорівнює нулю, і чим він більший, тим швидше зменшується струм. Число ω називається *круговою частотою*; вона дорівнює числу коливань, які відбувається в колі за час 2π секунд. ▲

2. В коло, зображене на рис.12, в момент $t = 0$ включається е.р.с. $u(t) = u_0 \sin \beta t$. Знайти силу струму $i(t)$ у випадку коливального процесу ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$), якщо $i(0) = 0$ і $q(0) = 0$.

Δ Оскільки в цій задачі початкові умови нульові, то можна спочатку визначити струм $i_1(t)$ в даному колі при $u(t) = 1$, а потім знайти $i(t)$ за допомогою інтеграла Дюамеля. Для $u(t) = 1$ результат одержимо, користуючись прикладом 1:

$$i(t) = \frac{1}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t,$$

де $\alpha = \frac{R}{2L}$ і $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0$.

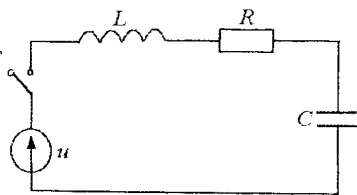


Рис. 12

Переходячи до випадку $u(t) = u_0 \sin \beta t$ і скориставшись інтегралом Дюамеля (див. формули (1.21) і (4)), можемо записати

$$y = z(t)f(0) + \int_0^t z(\tau)f'(t - \tau)d\tau.$$

Поклавши в останній рівності $y = i(t)$, $z(t) = i_1(t)$, $f(t) = u(t)$ і помітивши, що $f(0) = u(0) = 0$, знайдемо:

$$i(t) = \int_0^t \frac{1}{L\omega} e^{-\alpha\tau} \sin \omega\tau \cdot u_0\beta \cos \beta(t - \tau)d\tau = \\ = \frac{u_0\beta}{2L\omega} \left\{ \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin[(\omega - \beta)\tau + \beta t]d\tau + \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin[(\omega + \beta)\tau - \beta t]d\tau \right\}.$$

Обидва інтеграли, що знаходяться у фігурних дужках, беруться інтегруванням частинами, застосованим двічі. Остаточний результат матиме вигляд:

$$i(t) = \frac{u_0\beta}{2L\omega} \left[\frac{\alpha \sin \beta t + (\omega - \beta) \cos \beta t}{(\omega - \beta)^2 + \alpha^2} + \frac{-\alpha \sin \beta t + (\omega + \beta) \cos \beta t}{(\omega + \beta)^2 + \alpha^2} \right] - \\ - \frac{u_0\beta}{2L\omega} e^{-\alpha t} \left[\frac{\alpha \sin \omega t + (\omega - \beta) \cos \omega t}{(\omega - \beta)^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha \sin \omega t + (\omega + \beta) \cos \omega t}{(\omega + \beta)^2 + \alpha^2} \right].$$

Після очевидних алгебраїчних перетворень, одержимо:

$$i(t) = \frac{u_0}{\rho^2} (R \sin \beta t - X \cos \beta t) - \frac{u_0}{\omega \rho^2} e^{-\alpha t} (\alpha X_1 \sin \omega t - \omega X \cos \omega t),$$

де $X = L\beta - \frac{1}{C\beta}$, $X_1 = L\beta + \frac{1}{C\beta}$, $\rho^2 = X^2 + R^2$.

Величини X і X_1 в електротехніці називають *реактивними опорами*, а величину ρ — *повним опором кола*.

Вираз $i(t)$ можна представити у більш компактному вигляді. Для цього зауважимо, що

$$R \sin \beta t - X \cos \beta t = R \left(\sin \beta t - \frac{X}{R} \cos \beta t \right) = R (\sin \beta t - \operatorname{tg} \gamma \cos \beta t) = \\ = \frac{R}{\cos \gamma} (\sin \beta t \cos \gamma - \cos \beta t \sin \gamma) = \sqrt{X^2 + R^2} \sin(\beta t - \gamma) = \rho \sin(\beta t - \gamma),$$

$$\text{де } \operatorname{tg} \gamma = \frac{X}{R}.$$

Аналогічно одержимо:

$$\alpha X_1 \sin \omega t - \omega X \cos \omega t = \frac{\rho}{\sqrt{LC}} \sin(\omega t - \delta),$$

$$\text{де } \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega X}{\alpha X_1}.$$

Отже,

$$i(t) = \frac{u_0}{\rho} \sin(\beta t - \gamma) - \frac{u_0}{\omega \rho \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \delta).$$

Із цієї форми запису сили струму $i(t)$ видно, що другий доданок із зростанням часу t швидко зменшується, і починаючи з деякого моменту ним можна нехтувати. Після цього моменту сила струму визначається одним першим доданком одержаної формули, при цьому відбуваються вимушені незгасаючі коливання сили струму, кругова частота β яких співпадає з частотою включеної напруги $u(t) = u_0 \sin \beta t$. Процес, який від-

бувається в колі, і струм в той проміжок часу, коли ще не можна нехтувати другим доданком у формулі для $i(t)$, називають перехідним, а по закінченні цього проміжку часу – усталеним. ▲

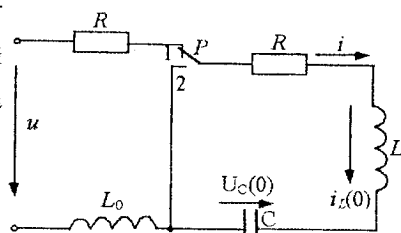


Рис. 13

3. Знайти перехідні значення струму і напруг (i , u_R , u_C , u_L) в колі, що зображено на рис. 13, якщо переключення рубильника із положення "1" в положення "2" відбувається в момент часу $t = 0$ і $u = 141 \sin(2500t + 1,833)$ В, $R = 1000$ Ом, $L = 1$ Гн, $L = 1,2$ Гн, $C = 0,4$ мкФ.

▲ До переключення рубильника в колі протікав синусоїдальний струм

$$i = I_m \sin(2500t + 105^\circ - \varphi) \text{ A},$$

а на обкладинках конденсатора була напруга:

$$u_c = x_c I_m \sin(2500t + 105^\circ - \varphi - 90^\circ) \text{ В}.$$

Тут $\omega = 2500 \text{ рад/с}$ – кутова частота напруги джерела струму електричної енергії; $\varphi = \arctg \frac{x}{R}$ – кут зсуву фаз між напругою джерела і струмом в колі;

$$x = x_L - x_C = \omega(L + L_0) - \frac{1}{\omega C} = 2500(1 + 0,2) - \frac{10^6}{2500 \cdot 0,4} = 2000 \text{ Ом} -$$

коло має індуктивний характер, причому $x_C = 1000 \text{ Ом}$;

$$\varphi = \arctg \frac{x}{R} = \arctg \frac{2000}{2 \cdot 1000} = \arctg 1 = 45^\circ;$$

$$I_m = \frac{U_m}{z}; \quad U_m = 141 \text{ В};$$

$$z = \sqrt{(2R)^2 + x^2} = \sqrt{(2000)^2 + (2000)^2} = 2\sqrt{2} \cdot 10^3 \text{ Ом};$$

$$I_m = \frac{141}{2\sqrt{2} \cdot 10^3} = 0,05 \text{ А}; \quad x_C I_m = 1000 \cdot 0,05 = 50 \text{ В}.$$

Тому маємо:

$$i = 0,05 \sin(2500t + 105^\circ - 45^\circ) \text{ А} = 0,05 \sin(2500t + 60^\circ) \text{ А},$$

$$u_c = 50 \sin(2500t + 105^\circ - 45^\circ - 90^\circ) \text{ В} = 50 \sin(2500t - 30^\circ) \text{ В}.$$

При $t = 0$ (у момент, що безпосередньо передуює комутації) одержуємо:

$$i_L = 0,05 \sin 60^\circ \text{ А} = 0,0433 \text{ А}, \quad u_c = 50 \sin(-30^\circ) \text{ В} = -25 \text{ В}.$$

На рис. 13 показано істинний напрямок напруги $u_c(0)$.

Після переключення рубильника перехідний процес буде протікати у контурі, що містить опір R , індуктивність L і ємність C . Зовнішнього джерела е.р.с. в контурі немає. Виберемо обхід контуру за

рухом годинникової стрілки. Тоді маємо: $i_L(0) = 0,0433 \text{ А}$ і $u_C = -25 \text{ В}$, а зображення внутрішньої е.р.с. запишуться у вигляді:

$$\mathcal{E}(p) = E(p) + Li_L(0) + \frac{-u_C(0)}{p} = 0,0433 + \frac{25}{p}.$$

Операторний опір контуру: $Z(p) = R + pL + \frac{1}{Cp}$. Закон Ома в операторній формі прийме вид:

$$I(p) = \frac{0,0433 + \frac{25}{p}}{R + pL + \frac{1}{Cp}} = \frac{C(0,0433p + 25)}{LCp^2 + RCp + 1}.$$

Застосуємо другу теорему розкладу, оскільки одержали правильний раціональний і нескоротний дріб з простими коренями знаменника.

$$P(p) = C(0,0433p + 25) = 0,4 \cdot 10^{-6} (0,0433p + 25);$$

$$\begin{aligned} Q(p) &= LCp^2 + RCp + 1 = 1 \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} p^2 + 1000 \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} p + 1 = \\ &= 0,4 \cdot 10^{-6} p^2 + 0,4 \cdot 10^{-3} p + 1. \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = -500 + j1500, \quad \alpha_2 = -500 - j1500;$$

$$Q'(p) = 0,4 \cdot 10^{-6} (2p + 1000);$$

$$P(\alpha_1) = 0,4 \cdot 10^{-6} (0,35 + j64,95), \quad P(\alpha_2) = 0,4 \cdot 10^{-6} (0,35 - j64,95)$$

$$Q'(\alpha_1) = 0,4 \cdot 10^{-6} j3000, \quad Q'(\alpha_2) = -0,4 \cdot 10^{-6} j3000.$$

При цьому

$$\begin{aligned} i &= i(t) = \frac{0,4 \cdot 10^{-6} (3,35 + j64,95)}{0,4 \cdot 10^{-6} j3000} e^{(-500 + j1500)t} + \\ &+ \frac{0,4 \cdot 10^{-6} (3,35 - j64,95)}{-0,4 \cdot 10^{-6} j3000} e^{(-500 - j1500)t} = \\ &= e^{-500t} \left(\frac{3,35 + j64,95}{j3000} e^{j1500t} - \frac{3,35 - j64,95}{j3000} e^{-j1500t} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-500t} \left(\frac{3,35}{1500} \left(\frac{e^{j1500t} - e^{-j1500t}}{2j} \right) + \frac{64,95}{1500} \left(\frac{e^{j1500t} + e^{-j1500t}}{2} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{1500} e^{-500t} (3,35 \sin 1500t + 64,95 \cos 1500t) = \\
&= \frac{\sqrt{3,35^2 + 64,95^2}}{1500} e^{-500t} \left(\frac{3,35}{\sqrt{4230}} \sin 1500t + \frac{64,95}{\sqrt{4230}} \cos 1500t \right) = \\
&= 0,0434 e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5').
\end{aligned}$$

Таким чином, миттєве значення струму перехідного процесу дорівнює:

$$i = 0,0434 e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5') \text{ А.}$$

Знайдемо перехідні напруги на активному опорі і на індуктивності контуру:

$$\begin{aligned}
u_r &= ri = 1000 \cdot 0,0434 e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5') = \\
&= 43,4 e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5') \text{ В.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_L &= L \frac{di}{dt} = L \cdot 0,0434 \cdot 500 e^{-500t} (3 \cos(1500t + 87^\circ 5') - \\
&- \sin(1500t + 87^\circ 5')) = 1 \cdot 21,7 e^{-500t} \sqrt{10} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \cos(1500t + 87^\circ 5') - \right. \\
&- \left. \frac{1}{\sqrt{10}} \sin(1500t + 87^\circ 5') \right) = 68,7 e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5' + 108^\circ 27') = \\
&= 68,7 e^{-500t} \sin(1500t + 195^\circ 32') \text{ В.}
\end{aligned}$$

Тепер можна визначити за другим законом Кірхгофа і миттєве значення напруги на обкладинках конденсатора в перехідному режимі:

$$\begin{aligned}
u_C &= -u_r - u_L = -43,4 e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5') - \\
&- 68,7 e^{-500t} \sin(1500t + 195^\circ 32') = 68,7 e^{-500t} \sin(1500t - 21^\circ 22') \text{ В.}
\end{aligned}$$

Виконаємо перевірку розрахунку для моменту часу $t = 0$. Одержимо:

$$i(0) = i_L(0) = 0,0434 \sin 87^\circ 5' = 0,0433 \text{ А.}$$

$$u_C(0) = 68,7 \sin(-21^\circ 22') = -25 \text{ В,}$$

що підтверджує правильність одержаних результатів. ▲

На всіх ділянках реального електричного кола існують електричні і магнітні поля і відбувається перетворення електричної енергії в теплову. Але нерідко ці поля не тільки нерівномірно розподілені вздовж кола, але і так що на одній ділянці різко проявляє себе лише електричне поле, на другому – магнітне, а на третьому відбувається виділення тепла. В цьому випадку практично доцільно вважати, що на першій ділянці зосереджені тільки електричне поле, на другій – тільки магнітне і на третій – тільки перетворення електричної енергії в теплову. Такі електричні кола називаються *колами із зосередженими сталими*. Інакше відбувається в *довгих лініях*, які використовуються для передачі енергії, а також в телеграфних і телефонних лініях. В них електричні і магнітні поля і виділення тепла не можуть бути зосередженими на окремих ділянках, а розподілені вздовж всієї лінії. Такі електричні кола називаються *електричними колами із розподіленими сталими*.

Розглянемо двопровідну довгу лінію. Внаслідок наявності вздовж лінії магнітного поля, вона має індуктивність, її проводи мають опір, а існування електричного поля між проводами зобов'язує розглядати лінію як конденсатор, обкладинками якого є її проводи. Окрім того, внаслідок недосконалості ізоляції, існує виток. Якщо опір, індуктивність, ємність і виток розподілені вздовж лінії рівномірно, то лінія називається *однорідною*. Нехай в однорідній довгій лінії опір, індуктивність, ємність і виток, що розраховані на одиницю довжини, позначені, відповідно, R , L , C і G . Тоді рівняння довгої лінії, як відомо з електротехніки, мають вигляд:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t} + Gu, \end{cases}$$

де u і i – напруга між проводами і струм у проводах. Вони є функціями часу t і відстані x розглядуваної точки лінії від початкової.

Для лінії *без втрат*, тобто коли $R = G = 0$, рівняння приймають більш простий вигляд:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases}$$

Покажемо, як можна застосовувати методи операційного числення до розв'язування цих рівнянь з частинними похідними.

Позначимо операторний струм і операторну напругу (тобто зображення i і u) відповідно, через $I(p, x) = I$ і $U(p, x) = U$. Нехай початковий струм $i(x, 0) = i_0$, а початкова напруга $u(x, 0) = u_0$. Тоді рівнянням лінії буде відповідати така система в зображеннях:

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx} = L(pI - i_0) + RI, \\ -\frac{dI}{dx} = C(pU - u_0) + GU, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{dU}{dx} = -(Lp + R)I + Li_0, \\ \frac{dI}{dx} = -(Cp + G)U + Cu_0. \end{cases}$$

Ця система складається із звичайних диференціальних рівнянь (величину p , що входить в I і U розглядаємо як параметр). Щоб знайти U , продиференціюємо по x перше рівняння останньої системи, помножимо друге рівняння на $Lp + R$ і віднімемо від першого результату другий. Це приведе до рівняння для U :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \gamma^2 U + L \frac{di_0}{dx} - C(Lp + R)u_0,$$

де $\gamma^2 = (Cp + G)(Lp + R)$.

Для визначення I можна звернутись до першого рівняння системи, в якому величина U вважається відомою. Це дасть

$$I = -\frac{1}{Lp + R} \left(\frac{dU}{dx} - Li_0 \right).$$

Якщо початкові умови нульові, тобто $i_0 = 0$ і $u_0 = 0$, то рівняння для визначення U і I приймають вигляд:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \gamma^2 U = 0, \quad I = -\frac{1}{Lp + R} \cdot \frac{dU}{dx}.$$

Розв'язуючи перше рівняння, знайдемо:

$$U = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}. \quad (42)$$

Підставляючи це значення U в рівняння для визначення I , одержимо:

$$I = -\frac{\gamma}{Lp + R} (Ae^{\gamma x} - Be^{-\gamma x}) = -\frac{1}{Z} (Ae^{\gamma x} - Be^{-\gamma x}), \quad (43)$$

$$\text{де } Z = \frac{Lp + R}{\gamma} = \sqrt{\frac{Lp + R}{Cp + G}}.$$

Величини γ і Z виражаються через двозначні функції і тому слід вказати про які вітки цих функцій йде мова. Для величини γ будемо брати те значення відповідного її кореня, яке має невід'ємну дійсну частину, тобто $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$. Зокрема, якщо $p \geq 0$, то це дасть звичайний арифметичний корінь. Цей вибір значення кореня для γ однозначно визначає величину Z , тому що

$$Z = \frac{Lp + R}{\gamma}.$$

Величина γ називається *коефіцієнтом розповсюдження хвилі*, а величина Z — *характеристичним, або хвильовим, опором лінії*.

Для остаточного визначення операторного струму I і операторної напруги U потрібно ще знайти значення довільних сталих A і B . Слід мати на увазі, що вони сталі відносно x , але залежать від p . Їх значення визначаються з умов лінії на її кінцях (граничні умови задачі). Після того як будуть визначені I і U , залишається знайти відповідні їм оригінали, які і дадуть $i(x, t)$ і $u(x, t)$.

Розглянемо докладніше тільки найбільш простий випадок нескінченно довгої лінії $0 \leq x < +\infty$. Це означає, що відбитими від кінця хвилями можна знехтувати. Вважаючи, що I і U скрізь обмежені, слід прийняти $A = 0$. З рівностей (42) і (43) знаходимо

$$U = Be^{-\gamma x}, \quad I = \frac{B}{Z} e^{-\gamma x}. \quad (44)$$

У випадку лінії без втрат $R = G = 0$ маємо $\gamma = p\sqrt{LC} = p/v$, де $v = 1/\sqrt{LC}$ – швидкість поширення хвилі, $Z = \sqrt{L/C}$. Формули (44) в цьому випадку дають

$$U = Be^{-\frac{x}{v}p}, \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}} Be^{-\frac{x}{v}p}.$$

Для B одержимо вираз $B = U(0, p)$, і, отже, якщо е.р.с. дорівнює $E(t)$, то за теоремою запізнення знаходимо

$$u(x, t) = E(t - \frac{x}{v}), \quad i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} E(t - \frac{x}{v}),$$

тобто вздовж лінії без втрат хвилі струму і напруги поширюються без зміни форми.

Лінія без спотворень характеризується умовою $R/L = G/C = k$; звідси $\gamma = (p+k)/v$, $v = 1/\sqrt{LC}$, $Z = \sqrt{L/C}$. Зображення знаходимо у вигляді

$$U = Be^{-\frac{x}{v}(p+k)}, \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}} Be^{-\frac{x}{v}(p+k)}.$$

Отже, якщо е.р.с. дорівнює $E(t)$, то маємо

$$u(x,t) = e^{-k\frac{x}{v}} E(t - \frac{x}{v}), \quad i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-k\frac{x}{v}} E(t - \frac{x}{v}),$$

тобто вздовж лінії без спотворень хвилі струму і напруги поширюються зі швидкістю $v = 1/\sqrt{LC}$, але має місце стале згасання.

Приклади.

1. Нескінченно довга однорідна лінія без індуктивності і витоків має лівий кінець в точці $x=0$ і необмежено простирається вздовж додатної частини осі Ox . На початку лінії $x=0$ включається стала електрорушійна сила $u = m$. Початкові умови нульові. Знайти $u(x,t)$ і $i(x,t)$.

Δ Оскільки $L = G = 0$ і $i_0 = 0$ і $u_0 = 0$, то рівняння для визначення U матиме вигляд:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \gamma^2 U = 0, \quad \text{де } \gamma = \sqrt{CR\rho}.$$

З нього знаходимо, що $U = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}$. При необмеженому зростанні x , тобто при необмеженому віддаленні по лінії від джерела е.р.с., не може необмежено збільшуватися ні напруга $u(x,t)$ (це ясно з фізичних міркувань), ні його зображення $U(p,x)$ (це впливає із властивостей зображення). Тому слід вважати $A = 0$, що призводить до рівності $U = Be^{-\gamma x}$. Покладаючи в ній $x=0$ і враховуючи, що $U(p,t) = \frac{m}{p}$, одержуємо:

$$U = \frac{m}{p} e^{-\gamma x} = \frac{m}{p} e^{-x\sqrt{CR}\sqrt{p}}.$$

Оригінал $u(x,t)$ для цього зображення знайдемо за допомогою

формули $\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}} \rightarrow \text{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$, покладаючи в ній $a = x\sqrt{CR}$. Це дає

$$u(x,t) = m\text{Erf}\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right).$$

Підставивши у формулу (42) $A = 0$; $B = \frac{m}{p}$; $Z = \frac{R}{\gamma} = \frac{R}{\sqrt{CRp}}$,

знайдемо, що операторний струм

$$I = -\frac{1}{Z}(Ae^{\gamma x} - Be^{-\gamma x}) = m\sqrt{\frac{C}{R}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-x\sqrt{CR}\sqrt{p}}.$$

Звідси шуканий струм

$$i(x,t) = m\sqrt{\frac{C}{R}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{RCx^2}{4t}}. \blacktriangle$$

2. В момент $t = 0$ до кінця $x = 0$ лінії без втрат довжини l прикладена стала е.р.с. $E(t) = m$. На кінці $x = l$ лінія розімкнута. Початковий струм і потенціал дорівнюють нулю. Знайти $u(x,t)$.

Δ З рівняння $\frac{d^2U}{dx^2} - \gamma^2 U = 0$ знайдемо операторну напругу

$$U = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}.$$

Щоб знайти значення сталих A і B , скористаємося граничними умовами задачі: $u(x,t) = m$ при $x = 0$ і $i(x,t) = 0$ при $x = l$.

Останню умову на підставі рівняння лінії $-\frac{\partial u}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t}$ можна заміни-

ти умовою $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $x = l$. Тоді одержимо граничні умови для опе-

раторної напруги: $U = \frac{m}{p}$ при $x = 0$ і $\frac{dU}{dx} = 0$ при $x = l$. Покладаючи

$x = 0$ в рівності

$$U = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}$$

і $x = l$ в рівності

$$\frac{dU}{dx} = A\gamma e^{\gamma x} - B\gamma e^{-\gamma x}$$

і використовуючи граничні умови для U , одержимо наступну систему рівнянь: $A + B = \frac{m}{p}$; $Ae^{\gamma l} - Be^{-\gamma l} = 0$. З неї знайдемо:

$$A = \frac{m}{p} \cdot \frac{e^{-2\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l}}; \quad B = \frac{m}{p} \cdot \frac{1}{1 + e^{-2\gamma l}}.$$

Звідси

$$U = \frac{m}{p} \cdot \frac{e^{-2\gamma l} e^{\gamma x}}{1 + e^{-2\gamma l}} + \frac{m}{p} \cdot \frac{e^{-\gamma x}}{1 + e^{-2\gamma l}} = \frac{m}{p} e^{-\gamma x} \cdot \frac{1 + e^{-2(l-x)\gamma}}{1 + e^{-2\gamma l}},$$

де $\gamma = \sqrt{LCp} = \alpha p$.

Оскільки вважаємо $R(\gamma) > 0$, то $0 < |e^{-2\gamma l}| < 1$, і для відшукування оригіналу можна скористатися методом розкладання зображення U за степенями показникових функцій.

Розглядаючи $\frac{1}{1 + e^{-2\gamma l}}$ як суму нескінченно спадної прогресії з першим членом, рівним 1, і із знаменником, рівним $-e^{-2\gamma l}$, і покладаючи $\gamma = \alpha p$, одержимо:

$$\begin{aligned} U &= \frac{m}{p} e^{-\gamma x} \cdot \frac{1 + e^{-2(l-x)\gamma}}{1 + e^{-2\gamma l}} = \\ &= \frac{m}{p} e^{-\alpha p x} \left[1 + e^{-2(l-x)\alpha p} \right] \left[1 - e^{-2l\alpha p} + e^{-4l\alpha p} - e^{-6l\alpha p} + \dots \right] = \\ &= \frac{m}{p} \left[e^{-\alpha p x} + e^{-(2l-x)\alpha p} - e^{-(2l+x)\alpha p} - e^{-(4l-x)\alpha p} + e^{-(4l+x)\alpha p} + e^{-(6l-x)\alpha p} - \dots \right] \end{aligned}$$

Користуючись теоремою запізнення, згідно якої $\frac{1}{p} e^{-\theta p} \rightarrow \eta(t - \theta)$, одержимо для U оригінал у вигляді

$$u(x,t) = \{ \eta(t - \alpha x) + \eta[t - (2l - x)\alpha] - \eta[t - (2l + x)\alpha] - \\ - \eta[t - (4l - x)\alpha] + \eta[t - (4l + x)\alpha] + \eta[t - (6l - x)\alpha] + \dots \}$$

Отже,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \alpha x \\ m & \text{при } \alpha x < t < (2l - x)\alpha \\ 2m & \text{при } (2l - x)\alpha < t < (2l + x)\alpha \\ m & \text{при } (2l + x)\alpha < t < (4l - x)\alpha \\ 0 & \text{при } (4l - x)\alpha < t < (4l + x)\alpha \\ m & \text{при } (4l + x)\alpha < t < (6l - x)\alpha \\ \dots & \dots \end{cases}$$

ВПРАВИ.

160. Знайти умови існування коливного процесу при підключенні контуру (рис. 14) до сталої е.р.с. E_0 .

161. У схемі (рис. 15) при включеному рубильнику на конденсаторі була на-

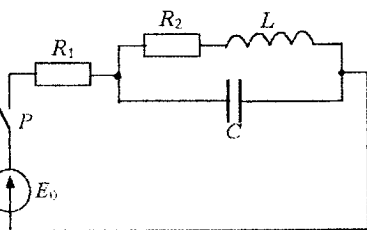


Рис. 14

пруга E_0 , а струм через котушку індуктивності дорівнював $\frac{E}{R_2}$. При

включеному рубильнику починається розрядження конденсатора. Передбачається в конденсаторі наявність аперіодичних розрядів. Знайти напругу на конденсаторі в момент часу t .

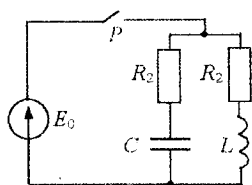


Рис. 15

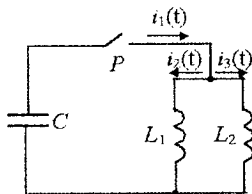


Рис. 16

162. В схемі (рис. 16) при замиканні рубильника P конденсатор C з початковою напругою U_{c0} розряджається на дві паралельно включені індуктивності L_1 і L_2 . Знайти вирази перехідних струмів.

163. До лівого кінця $x = 0$ лінії довжиною l без втрат ($R = G = 0$) підключена е.р.с. $E_0 \sin \omega t$. Знайти величину напруги $u(x, t)$ після закінчення часу t від початкового моменту, якщо на другому кінці лінія накоротко замкнена і в момент підключення е.р.с. напруга і сила струму в лінії дорівнюють нулю.

164. Лінія довжиною l без втрат ($R = G = 0$) заряджена до напруги u_0 . В момент часу $t = 0$ лівий кінець її (x) замикається накоротко. Знайти величину напруги $u(x, t)$ після закінчення часу t .

165. До лівого кінця $x = 0$ нескінченної ізолюваної електричної лінії без спотворень $R/L = G/C$ підключена е.р.с. $E(t)$. Знайти величину напруги $u(x, t)$ після закінчення часу t від початкового моменту, якщо в момент підключення напруга і сила струму в лінії дорівнюють нулю.

3.6. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ В ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ

Регулятор – це пристрій, який забезпечує вироблення певних значень деякої величини. Сама величина називається регульованою. В системах автоматичного регулювання виділяють об'єкт керування і пристрій керування або регулятор.

Наприклад, в процесі руху літак або судно відхиляється від заданого курсу. На літаку (судні) звичайно ставиться автоматичний пристрій для вироблення сигналу, за яким літак (судно) кожен раз по-

вертається на заданий курс. Величина, яка попадає на об'єкт керування, називається *вхідним сигналом*, а величина, яка визначає положення об'єкта керування, – *вихідним сигналом*.

Позначимо вхідний сигнал через $x(t)$, а вихідний – $y(t)$. Автоматична система регулювання звичайно поділяється на ряд простих ланок, кожна з яких має свої вхідний і вихідний сигнали. Ці сигнали в системі можуть бути зв'язані послідовно і паралельно як всередині ланки (зворотний зв'язок), так і між ланками. Кожна ланка окремо має певний зв'язок між вхідною і вихідною величинами, тому

$$y(t) = A(t)x(t), \quad (45)$$

де $A(t)$ – деяка матрична функція або оператор, а $x(t)$, $y(t)$ – матриці-стовпці, які визначають положення відповідного об'єкта керування і пристрою керування (регулятора) або вхідний і вихідний сигнали.

В багатьох практичних задачах $A(t)$ є лінійний або нелінійний диференціальний оператор.

У випадку лінійного диференціального оператора рівняння (45) можна записати у вигляді

$$P(D)y(t) = Q(D)x(t), \quad (46)$$

де $P(D)$, $Q(D)$ – поліноми від D ; D – оператор диференціювання

$$D = \frac{d}{dt} \quad (47)$$

Якщо до (46) приєднати нульові початкові умови, ввести в розгляд простір оригіналів $x(t)$, $y(t)$ і простір зображень

$$X(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} x(t) dt; \quad Y(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} y(t) dt, \quad (48)$$

то в просторі зображень рівняння (46) можна записати

$$P(p)Y(p) = Q(p)X(p), \quad (49)$$

звідки

$$Y(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} X(p). \quad (50)$$

Позначимо

$$\frac{Q(p)}{P(p)} = W(p). \quad (51)$$

Функція $W(p)$ називається *передаточною функцією ланки*. Із виразу (51) видно, що передаточна функція являє собою відношення зображення за Лапласом вихідної координати системи до зображення за Лапласом вхідного дії при нульових початкових умовах. Якщо система регулювання складається з кількох ланок, то таких передаточних функцій буде кілька. Сукупність ланок, що визначає дану систему регулювання, називається *структурною схемою* системи регулювання.

Побудуємо, наприклад, структурну схему системи регулювання, що забезпечує рух судна за заданою траєкторією. Система регулювання, що забезпечує рух об'єкта за заданою траєкторією, називається *стежною*.

На рис. 17 величина $z(t)$ задає траєкторію. Вихідний сигнал $y(t)$ поступає по зворотному зв'язку на регулятор (вхід системи), де утворюється вхідний сигнал, наприклад, у формі $x(t) = z(t) - y(t)$. Цей сигнал і поступає на об'єкт керування. Нехай об'єкт керування

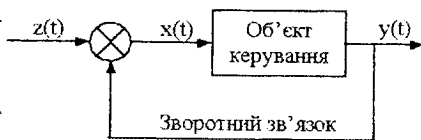


Рис. 17

характеризується передаточною функцією $\frac{k_1}{W(p)}$. Призначення системи стеження полягає в тому, щоб $y(t)$ мало відрізнялося від $z(t)$, тобто $x(t)$ повинно бути якомога менше. Зв'язок між величинами $x(t)$ і $y(t)$ через передаточну функцію в просторі зображень можна записати у вигляді

$$\frac{k_1}{W(p)}X(p)=Y(p) \quad \text{або} \quad \frac{k_1}{W(p)}X(p)=Z(p)-X(p);$$

$$k_1X(p)+W(p)X(p)=W(p)Z(p) \quad (52)$$

$$X(p)=\frac{W(p)}{W(p)+k_1}Z(p). \quad (53)$$

В просторі оригіналів $x(t)=B(t)z(t)$.

Якщо $X(p) \rightarrow 0$, то і $x(t) \rightarrow 0$, а тому можна замість дослідження рівняння $x(t)=B(t)z(t)$ в просторі оригіналів дослідити рівняння (53) в просторі зображень, наприклад при $k_1 \rightarrow \infty$, $X(p) \rightarrow 0$ і $x(t) \rightarrow 0$.

Параметр k_1 звичайно називають *коефіцієнтом підсилення системи*.

Висновок: для зменшення сигналу $x(t)$ потрібно збільшувати параметр системи k_1 .

Приклади.

1. При нульових початкових умовах знайти передаточну функцію для основних ланок системи автоматичного регулювання:

- | | |
|-----------------|---------------------|
| 1) інерційної, | 4) диференціальної, |
| 2) інтегровної, | 5) пружної, |
| 3) коливної, | 6) запізнювальної. |

Δ 1). Інерційна ланка описується диференціальним рівнянням

$$y(t)+T \dot{y}(t)=kx(t),$$

де $x(t)$ – вхідний сигнал, а $y(t)$ – вихідний сигнал. Перетворимо це рівняння в операторне, для чого помножимо обидві частини цього рівняння на $e^{-pt} dt$ і проінтегруємо по t в межах від 0 до ∞ . Позначивши $x(t) \rightarrow X(p)$, одержимо

$$Y(p)+T \cdot pY(p)=kX(p).$$

Звідси знаходимо

$$Y(p) = \frac{kX(p)}{1 + pT}$$

Передаюча функція $W(p)$ визначається формулою

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Отже,

$$W(p) = \frac{k}{1 + pT}$$

2). Інтегровна ланка описується інтегральним рівнянням

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t x(t) dt$$

Використовуючи теорему інтегрування оригіналу, одержуємо

$$Y(p) = \frac{1}{T} \cdot \frac{X(p)}{p}$$

Звідки знаходимо

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{pT}$$

3). Коливальна ланка описується диференціальним рівнянням

$$T_0^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = k_1 x(t),$$

або

$$\ddot{y}(t) + 2d\omega_0 \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = k x(t),$$

де $\omega_0^2 = \frac{1}{T_0^2}$ (резонансна частота), $d = \frac{T_1}{2T_0^2 \omega_0} = \frac{T_1 \omega_0}{2}$ (ступінь згасання),

$k = \frac{k_1}{T_0^2} = k_1 \omega_0^2$.

Переходячи до зображень, одержуємо операторне рівняння

$$p^2 Y(p) + 2d\omega_0 p Y(p) + \omega_0^2 Y(p) = k X(p),$$

або

$$Y(p)(p^2 + 2d\omega_0 p + \omega_0^2) = kX(p).$$

Отже,

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{p^2 + 2d\omega_0 p + \omega_0^2}.$$

4). Диференціальна ланка описується диференціальним рівнянням

$$y(t) + T\dot{y}(t) = kT_0\dot{x}(t).$$

Отже, аналогічно попередньому, одержуємо:

$$W(p) = \frac{kpT_0}{1 + pT}.$$

5). Пружна ланка описується диференціальним рівнянням

$$y(t) + T\dot{y}(t) = k[x(t) + T_0\dot{x}(t)],$$

яке в просторі зображень має вигляд

$$Y(p) + TpY(p) = k[X(p) + T_0pX(p)],$$

або

$$Y(p)(1 + T) = kX(p)(1 + pT_0).$$

Отже,

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k(1 + pT_0)}{1 + pT}.$$

6). Запізнювальна ланка описується рівнянням

$$y(t) = x(t - \tau).$$

Отже,

$$W(p) = \frac{1}{e^{-p\tau}}. \blacktriangle$$

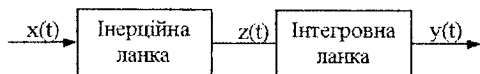


Рис. 18

2. Визначити загальну передаточну функцію послідовного з'єднання інерційної та інтегровної ланок (рис. 18)

Δ Враховуючи приклад 1 (п. 1 і 2), одержуємо два рівняння

$$z(t) + T_1 \dot{z}(t) = k_1 x(t); \quad y(t) = \frac{1}{T_2} \int_0^t z(t) dt.$$

Перейшовши до операторних рівнянь, одержимо

$$Z(p) + T_1 p Z(p) = k_1 X(p); \quad Z(p) = \frac{k_1 X(p)}{1 + p T_1}.$$

$$Y(p) = \frac{1}{p T_2} Z(p); \quad Y(p) = \frac{k_1 X(p)}{p T_2 (1 + p T_1)}.$$

Отже,

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k_1}{p T_2 (1 + p T_1)}. \quad \blacktriangle$$

3. Визначити загальну передаточну функцію замкненої системи ланок (рис.19) з від'ємним зворотним зв'язком при нульових початкових умовах.

Δ Тут $\Delta_{xp}(t)$ – "керуюча неузгодженість", $z(t)$ – сигнал "зворотного зв'язку". Враховуючи приклад 1 (п.1 і 5), маємо рівняння

$$\Delta_{xp} = x(t) - z(t);$$

$$y(t) + T_1 \dot{y}(t) = k_1 \Delta_{xp}; \quad z(t) + T_2 \dot{z}(t) = k_2 (y(t) + T_0 \dot{y}(t)).$$

Нехай $D(p) \rightarrow \Delta_{xp}(t)$. Тоді операторні рівняння матимуть вигляд

$$D(p) = X(p) - Z(p);$$

$$Y(p) + T_1 p Y(p) = k_1 D(p);$$

$$Z(p) + T_2 p Z(p) = k_2 (Y(p) + T_0 p Y(p)).$$

Запишемо цю систему таким чином

$$D(p) + Z(p) = X(p);$$

$$-k_1 D(p) + (1 + p T_1) Y(p) = 0;$$

$$(1 + p T_2) Z(p) - k_2 (1 + p T_0) Y(p) = 0.$$



Рис. 19

Знайдемо визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -k_1 & 0 & 1+pT_1 \\ 0 & 1+pT_2 & -k_2(1+pT_0) \end{vmatrix} = -(1+pT_1)(1+pT_2) - k_1k_2(1+pT_0)$$

$$Y(p) = X(p) \cdot \frac{k_1(1+pT_2)}{k_1k_2(1+pT_0) + (1+pT_1)(1+pT_2)}$$

Отже,

$$W(p) = \frac{k_1(1+pT_2)}{k_1k_2(1+pT_0) + (1+pT_1)(1+pT_2)} \blacktriangle$$

ВПРАВИ

166. Визначити загальну передаточну функцію паралельного з'єднання інерційної і диференціальної ланок (рис. 20).

167. Визначити загальну передаточну функцію замкненої системи ланок (рис. 21) з додатним зворотним зв'язком при нульових початкових умовах.

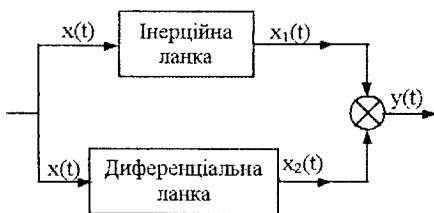


Рис. 20



Рис. 21

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

1. $\frac{p}{p^2+1}$ 2. $\frac{1}{p^2-1}$ 3. $\frac{p^3}{p^4-1}$ 4. $\frac{p^2}{p^4-1}$ 5. $\frac{1}{p^4-1}$ 6. $\frac{p}{p^4-1}$
7. $\frac{p}{p^2+\alpha^2}$ 8. $\frac{p}{p^2-\alpha^2}$ 9. $\frac{2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$ 10. $\frac{2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}$
11. $\frac{2\alpha\beta p}{(p^2+(\alpha-\beta)^2)(p^2+(\alpha+\beta)^2)}$ 12. $\frac{p(p^2+\alpha^2+\beta^2)}{(p^2+(\alpha-\beta)^2)(p^2+(\alpha+\beta)^2)}$
13. $\frac{p(p^2-\alpha^2+\beta^2)}{(p^2-(\alpha-\beta)^2)(p^2+(\alpha+\beta)^2)}$ 14. $\frac{p(p^2-\alpha^2-\beta^2)}{(p^2-(\alpha-\beta)^2)(p^2-(\alpha+\beta)^2)}$
15. $\frac{2\alpha\beta p}{(p^2-(\alpha-\beta)^2)(p^2-(\alpha+\beta)^2)}$ 16. $\frac{p^3}{p^4-\alpha^4}$ 17. $\frac{\alpha p^2}{p^4-\alpha^4}$
18. $\frac{\alpha^2}{p^4-\alpha^4}$ 19. $\frac{\alpha^3}{p^4-\alpha^4}$ 20. $\frac{p(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$
21. $\frac{2\alpha\beta p}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$ 22. $\frac{1}{8}\left(\frac{p}{p^2+16}-\frac{4p}{p^2+9}+\frac{3}{p}\right)$
23. $\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p}$ 24. $\frac{(1-e^{-ap})^2}{p}$ 25. $\frac{(e^{-ap}-e^{-bp})^2}{p^2}$ 26. $\frac{e^{-ap}}{p+b}$
27. $\frac{be^{-ap}}{p(p+b)}$ 28. $\frac{(e^{-ap}-e^{-bp})^2}{p}$ 29. $\frac{b}{ap^2}(1-e^{-ap})+\frac{b}{p}(1-2e^{-ap})$
30. $\frac{1}{p}(1+e^{-2ap})-\frac{1}{ap}(1-e^{2ap})$ 31. $\frac{(1-e^{-ap})(1-e^{-3ap})(1-e^{-4ap})}{ap^2}$

32. $\frac{2,5}{p^2 + 8p + 41} + \frac{0,5}{p^2 + 8p + 17}$ 33. $\frac{1}{2} \left(\frac{p-3}{(p-3)^2 + 49} + \frac{p-3}{(p-3)^2 + 1} \right)$
34. $\frac{p}{p^4 + 4} + \frac{5p}{p^4 + 48p^2 + 676}$ 35. $\frac{p}{2} \left(\frac{p^2 + 8}{p^4 + 64} - \frac{p^2 + 20}{p^4 + 24p^2 + 400} \right)$
36. $\frac{1}{2} \left(\frac{5}{p^2 - 25} + \frac{10p^2 + 29}{p^4 + 8p^2 - 9} \right)$ 37. $\frac{1}{2} \left(\frac{5}{p^2 - 9} + \frac{p^3 + 55p}{p^4 + 110p^2 + 721} \right)$
38. $\frac{1}{(p-a)^2 + b^2}$ 39. $\frac{ap^2}{p^4 + 4a^4}$ 40. $\frac{a^3}{p^4 + 4a^4}$ 41. $\frac{1}{(p^2 + 1)(1 - e^{-\pi p})}$
42. $\frac{1}{p^2} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2}$ 43. $\frac{1 + p - e^{-p}}{p^2(e^p - 1)}$ 44. $\frac{(1 - e^{-ap})^2}{ap^2(1 - e^{-4ap})}$ 45. $\frac{1}{p} - \frac{2 \operatorname{th} \pi p}{\pi p^2}$
46. $\frac{1}{p^2} - \frac{\pi}{2 \operatorname{psh} \frac{\pi p}{2}}$ 47. $\frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 4)}$ 48. $\frac{6}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}$ 49. $\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
50. $\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$ 51. $\frac{p^4 + 16p^2 + 24}{p(p^2 + 4)(p^2 + 16)}$ 52. $\frac{1}{(p-1)^2}$
53. $(p^4 + 4p^3 + 3p^2)X(p) - p^3 - 5p^2 - 5p + 2$
54. $(2p^3 - 2p^2)X(p) + 2p^2 + 3p - 4 + \frac{4}{p}$
55. $(3p^4 - p^2 - 1)X(p) - 6p^2 + 3$ 56. $\frac{1}{p^2 + 1}$ 57. $\frac{p^2\omega + 2p\omega + \omega^3}{(p^2 + 4\omega^2)^2}$
58. $\frac{4}{(p^2 - 4)^2}$ 59. $\frac{p^2 + 2\omega^2}{p^2(p^2 + 4\omega^2)}$ 60. $\frac{1}{p^2 - \omega^2}$ 61. $\frac{2}{p(p+1)^3}$
62. $\frac{e^{3t}}{26}(3\sin 2t - 2\cos 2t)$ 63. $\frac{1}{4}(e^t + \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{4}{3})$ 64. $\frac{2p(p^2 - 3\alpha^2)}{(p^2 + \alpha^2)^3}$
65. $\frac{2(p^2 + p + 1)}{(p^2 - 1)^2}$ 66. $\frac{2(p^2 + 2p + 4)}{(p^2 + 4)^2}$ 67. $\frac{6p}{(p^2 - 9)^2}$
68. $\frac{2\alpha^2(3p^4 - 4\alpha^4)}{(p^4 + 4\alpha^4)^2}$ 69. $\frac{p^2(p^4 - 12\alpha^4)}{(p^4 + 4\alpha^4)^2}$ 70. $\operatorname{arctg} \frac{1}{p + \alpha}$

71. $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2}{p^2 - 4}$. 72. $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 100}{p^2 + 16}$. 73. $\frac{1}{2} \ln \frac{p^2 - b^2}{p^2 - a^2}$. 74. $\frac{1}{2} \ln \frac{(p+1)^2 + 1}{(p+1)^2}$.
75. $\frac{1}{2} \ln \frac{p^2 + a^2}{p^2 + b^2}$. 76. $\ln \frac{p - \alpha + 1}{p + 1}$. 77. $\frac{1}{4} \ln \frac{(p+a)^2 + 4b^2}{(p+a)^2}$.
78. $e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t}$. 79. $\frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$. 80. $\frac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t)$.
81. $f(t) = -\frac{1}{15}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t$. 82. $f(t) = e^{-t}(1 - t^2)$
83. $f(t) = \frac{1}{3}te^t - \frac{1}{9}e^t + \frac{1}{9}e^{-2t}$.
84. $f(t) = 2e^t - e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$
85. $f(t) = \frac{3}{4} - \frac{4}{5}e^{-t} + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{4}{5}e^{\frac{1}{2}t} \sin 2t$.
86. $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t$.
87. $f(t) = \frac{1}{6}e^t - \frac{5}{22}e^{-3t} + \frac{2}{33}\cos \sqrt{3}t + \frac{5}{11\sqrt{3}}\sin \sqrt{3}t$.
88. $f(t) = \frac{1}{30}e^{-t} + \frac{17}{174}e^{5t} - \frac{19}{145}\cos 2t - \frac{33}{145}\sin 2t$.
89. $f(t) = -\frac{17}{754}e^{-5t} - \frac{17}{87}\cos 2t - \frac{1}{87}\sin 2t + \frac{17}{78}\cos t - \frac{7}{78}\sin t$
90. $f(t) = \frac{7}{20}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{6}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t$. 91. $x(t) = \frac{1}{8}(3e^t - e^{-3t} - 2e^{-t})$.
92. $x(t) = \frac{2}{25}e^{-2t} - \frac{2}{25}\cos t + \frac{14}{25}\sin t - \frac{1}{5}t \sin t - \frac{2}{5}t \cos t$.
93. $x(t) = \frac{1}{2}e^t - t - 1 + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$.
94. $x(t) = \frac{3}{25} - \frac{1}{5}t - \frac{1}{25}e^t(3\cos 2t - 4\sin 2t)$.
95. $x(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\sin t - 1$. 96. $x(t) = \frac{1}{24}t(3t \cos t + (t^2 - 3)\sin t)$
97. $x(t) = 1 - (e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 + t + 1)$. 98. $x(t) = \frac{1}{6}e^{-t}(t^3 - 6\cos t + 12)$.
99. $x(t) = 2te^{-t} + te^t - e^t + e^{-2t}$.
100. $x(t) = \frac{13}{20}\sin 2t - \frac{1}{5}\cos 2t + \frac{1}{10}e^t(12 - 10\cos t - 5\sin t)$

101. $x(t) = -\cos t$. 102. $x(t) = (t-1)^2 + e^{1-t}$. 103. $x(t) = (t-1 - \pi/2) \cos t$

104. $x(t) = (t^2 - 2t - 1) + e^{1-t}$.

105. $x(t) = 0,4e^{-t}(2 \cos 2t + \sin 2t) + 0,2 + 0,08 \cos(t-1)\eta(t-1) -$
 $- 0,06 \sin 2(t-1)e^{-(t-1)}\eta(t-1) + 0,2(t-1)\eta(t-1) - 2\eta(t-1)$.

106. $x(t) = e^{-2t} + 2e^{-t} - 2(e^{-t} - te^{-2(t-1)})\eta(t-1)$.

107. $x(t) = \frac{1}{3}(\sin 2t + \sin t + (\sin t + 0,5 \sin 2t)\eta(t-1))$.

108. $x(t) = 1,13e^{-t} - \frac{13}{25}e^{-6t} + \frac{1}{12}e^{-3t} + \frac{1}{10}te^{-t} + \frac{1}{30}e^{-6(t-1)}\eta(t-1) -$
 $- \frac{1}{5}e^{-(t-1)}\eta(t-1) + \frac{1}{6}\eta(t-1)$.

109. $x(t) = -0,4t + 0,52 - e^{-2t} + 0,16e^{-2t}(3 \cos t - 4 \sin t)$.

110. $x(t) = 2\left(\sin^2 \frac{t}{2} \eta(t) - 2 \sin^2 \frac{t-1}{2} \eta(t-1) + \sin^2 \frac{t-2}{2} \eta(t-2)\right)$.

111. $x(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2} \sin 2t\right)\eta(t) - \left((t-1) - \frac{1}{2} \sin 2(t-1)\right)\eta(t-1) +$
 $+ \frac{1}{2}\left((t-2) - \frac{1}{2} \sin 2(t-2)\right)\eta(t-2)$.

112. $x(t) = (2 - \cos t)\eta(t) + 2(-\cos(t-1))\eta(t-1)$.

113. $x(t) = \frac{1}{3} \sin 3t \eta(t) + \frac{1}{9} \left((t-1) - \frac{1}{3} \sin 3(t-1) \right) \eta(t-1) -$
 $- \frac{2}{9} \left((t-2) - \frac{1}{3} \sin 3(t-2) \right) \eta(t-2) + \frac{1}{9} \left((t-3) - \frac{1}{3} \sin 3(t-3) \right) \eta(t-3)$.

114. $x(t) = \frac{1}{2}(e^t - 1) - \ln \frac{1+e^t}{2}$. 115. $x(t) = e^{-t}((t+1) \ln(t+1) - t)$.

116. $x(t) = (e^t + 2) \ln \frac{e^t + 2}{3} - e^t + 1$ 117. $x(t) = -\operatorname{sh} t + 2 \operatorname{ch} t (\operatorname{arctg} e^t - \pi/4)$

118. $x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t + 1) + (e^t + 1) \ln(e^t + 1)$.

119. $x(t) = \sin t \left(t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\sqrt{3}} \right) + \cos t \ln(2 + \cos t) - \ln 3 \cos t$.

120. $x(t) = \sin t \operatorname{arctg}(\sin t) + \frac{\cos t}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{2} + \cos t}{\sqrt{2} - \cos t} \right| - \ln(3 + 2\sqrt{2}) \right]$.

121. $x(t) = \ln 2 \cos t + \cos t \ln(2 + \sin t) - t \sin t + \frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}) \times$
 $\times (2 \sin t + 1).$ 122. $x(t) = e^t, y(t) = -e^t.$ 123. $x(t) = e^t, y(t) = e^t$
124. $x(t) = 2 \sin t - 3t, y(t) = 6t + 3 - 2 \cos t - 3 \sin t.$
125. $x(t) = 0,5(\cos t - 2 \sin t - e^{-t})$
 $y(t) = 0,5(e^t - 1,5e^{-t} + 1,5 \cos t - 0,5 \sin t),$
 $z(t) = 0,5(e^t - 0,5e^{-t} - 0,5 \cos t - 1,5 \sin t).$
126. $x(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t}, y(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t}, z(t) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t}.$
127. $x(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t, y(t) = \frac{5}{4}t^2 - \frac{1}{4}, z(t) = \frac{5}{3}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{5}{12}.$
128. $x(t) = \frac{1}{3}(e^t + 2 \cos 2t + \sin 2t), y(t) = \frac{1}{3}(2e^t - \cos 2t - \sin 2t).$
129. $x(t) = (C_1 + C_2 t^2)e^{-t}.$ 130. $x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2(4t^2 + 1).$
131. $x(t) = e^{-t}.$ 132. $x(t) = e^t.$
133. а) $x(t) = \sum_{s=0}^n (-1)^s 2^s s! C_k^s \frac{t^{2s}}{(2s)!},$ б) $x(t) = \sum_{s=0}^n (-1)^s 2^s s! C_k^s \frac{t^{2s+1}}{(2s+1)!}$
134. $u(x, t) = \frac{gx(2l-x)}{2a^2} - \frac{16gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{2l}}{(2n+1)^2}.$
135. $u(x, t) = \frac{2l^2}{a(l-a)\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi t}{l} \cos \frac{a\pi t}{l}}{n^2}.$
136. $u(x, t) = u_0 \operatorname{Erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2} du.$
137. $u(x, t) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) e^{-\left(\frac{\alpha \mu_n}{R}\right)^2 t}}{\mu_n J_1(\mu_n)},$ де μ_n корені функції $J_0(x)$

$$138. u(x, t) = \frac{32l^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{2l}}{(2n+1)^3}$$

$$139. \varphi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x + \frac{1}{2} \sin x. \quad 140. \varphi(x) = x + \frac{1}{6} x^3. \quad 141. \varphi(x) = \operatorname{ch} x - x e^{-x}$$

$$142. \varphi(x) = \frac{2}{5} e^{2x} + \frac{3}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

$$143. \varphi(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$$

$$144. \varphi(x) = 1 - x. \quad 145. \varphi(x) = x - \frac{1}{6} x^3. \quad 146. \varphi(x) \equiv 1.$$

$$147. \varphi(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3. \quad 148. \varphi(x) = J_0(x).$$

$$149. \varphi_1(x) = e^{-x}(1-x), \quad \varphi_2(x) = \frac{8}{9} e^{2x} + \frac{1}{3} x e^{-x} - \frac{8}{9} e^{-x}.$$

$$150. \varphi_1(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{3x}{2}} \left(\sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} + 2 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) - \frac{1}{3},$$

$$\varphi_2(x) = e^{\frac{3x}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right).$$

$$151. \varphi_1(x) = (x+2) \sin x + (2x+1) \cos x,$$

$$\varphi_2(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cos x - \left(\frac{1}{2} + x\right) \sin x.$$

$$152. x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!} \eta(t-k). \quad 153. x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (t-k)^{k+3}}{(k+3)!} \eta(t-k)$$

$$154. x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(t-k)^{k+2}}{(k+2)!} \eta(t-k).$$

$$155. x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)(t-2k)^{k+3}}{(k+3)!} \eta(t-2k).$$

$$156. x(t) = \left(\frac{1}{2} t^2 - t\right) \eta(t) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(t-k+2)^{k-1}}{k!} (t-3k+2) \eta(t-k+2)$$

$$157. x(t) = \left(\frac{t^2}{2} - t\right) \eta(t) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \eta(t-k) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+2}}{(k+2)!} \eta(t-k).$$

158. $x(t) = \cos t$. 159. $x(t) = \sin t + \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (t - k\pi)^{k+1,5}}{(k+1)! 2^{k+1,5}} J_{k+1,5}(t - k\pi)$
160. $\frac{1}{R_1 C} - 2\sqrt{\frac{L}{C}} < R_2 < \frac{1}{R_1 C} + 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.
161. $u_0(t) = -\frac{E_0}{A} e^{-bt} \left[A \operatorname{ch} At + \left(b - \frac{1}{R_2 C} \right) \operatorname{sh} At \right]$, где $b = \frac{R_1 + R_2}{2L}$,
 $A^2 = b^2 - \frac{1}{LC}$
162. $i_1(t) = \frac{L u_{c_0}}{\omega_0} \sin \omega_0 t$, $i_2(t) = \frac{u_{c_0}}{L_2 \omega_0} \sin \omega_0 t$, $i_3(t) = \frac{u_{c_0}}{L_3 \omega_0} \sin \omega_0 t$.
163. $u(x, t) = E \left[\frac{\sin \frac{\omega(l-x)}{a} \sin \omega t}{\sin \frac{\omega l}{a}} + \frac{2a\omega}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{a n \pi t}{l}}{\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} - \omega^2} \right]$.
164. $u(x, t) = \frac{2u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{2l\sqrt{LC}}}{2n+1}$.
165. $u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < ax, \\ e^{-amx} E(t - ax), & \text{при } t > ax \end{cases}$, $m = \frac{CR + LG}{2LC}$.
166. $W(p) = \frac{k_1}{1 + pT_1} + \frac{k_2 p T_0}{1 + pT_2}$.
167. $W(p) = \frac{k_1 T_0 (1 + pT_2)}{(1 + pT_1)(1 + pT_2) - k_1 k_2 T_0 (1 + pT_0)}$.

Основні правила і теореми операційного числення

Найменування	Умова	Висновок
Властивість лінійності	$f_1(t) \rightarrow F_1(p), f_2(t) \rightarrow F_2(p),$ C_1, C_2 – сталі.	$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \rightarrow$ $C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)$
Диференціювання оригіналу	$f(t) \rightarrow F(p)$	$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) -$ $- p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
Інтегрування оригіналу	$f(t) \rightarrow F(p)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}$
Диференціювання зображення	$F(p) \rightarrow f(t)$	$F^{(n)}(p) \rightarrow (-t)^n f(t)$
Інтегрування зображення	$F(p) \rightarrow f(t)$	$\int_0^\infty F(u) du \rightarrow \frac{f(t)}{t}$
Теорема подібності	$f(t) \rightarrow F(p)$ $\lambda > 0$	$f(\lambda t) \rightarrow \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
Теорема зміщення	$F(p) \rightarrow f(t)$	$F(p + \alpha) \rightarrow e^{-\alpha t} f(t)$
Теорема запізнення	$f(t) \rightarrow F(p), t_0 > 0$	$f(t - t_0) \rightarrow e^{-p t_0} F(p)$
Зображення періодичного оригіналу	$f(t) \rightarrow F(p), f(t) = f(t + \omega)$ $\Phi(p) = \int_0^\omega e^{-pt} f(t) dt$	$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - e^{-p\omega}}$
Теорема множення	$f_1(t) \rightarrow F_1(p), f_2(t) \rightarrow F_2(p)$	$F_1(t) \cdot F_2(t) \rightarrow$ $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$
I теорема розвинення	$f(t) \rightarrow F(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots +$ $+\frac{a_n}{p^{n+1}} + \dots$	$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots +$ $+\frac{a_n}{n!} t^n + \dots$
II теорема розвинення	$f(t) \rightarrow \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = F(p);$ p_1, p_2, \dots, p_n – корені $F_2(p)$ (всі різні)	$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}$
II теорема розвинення	$f(t) \rightarrow \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = F(p)$ p_k – корені $F_2(p); k = \overline{1, \dots, l}$	$f(t) = \sum_{k=1}^l \text{Res}[F(p_k) e^{p_k t}]$
Теорема обернення	$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp$

Основні оригінали та їх зображення

№ п/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t - t_0)$	$\frac{1}{p} e^{-pt_0}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
4	$t^\alpha \ (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}$
5	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
6	$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p - \alpha)^{n+1}}$
7	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$
8	$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$
9	$\operatorname{sh} \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$
10	$\operatorname{ch} \alpha t$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$
11	$\sin^2 \alpha t$	$\frac{2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}$
12	$\cos^2 \alpha t$	$\frac{p^2 + 2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}$
13	$\operatorname{sh}^2 \alpha t$	$\frac{2\alpha^2}{p(p^2 - 4\alpha^2)}$
14	$\operatorname{ch}^2 \alpha t$	$\frac{p^2 - 2\alpha^2}{p(p^2 - 4\alpha^2)}$
15	$\sin \alpha t \cos \beta t$	$\frac{p(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + (\alpha - \beta)^2)(p^2 + (\alpha + \beta)^2)}$

16	$\text{sh}\alpha t \text{ch}\beta t$	$\frac{p(p^2 - \alpha^2 + \beta^2)}{(p^2 - (\alpha - \beta)^2)(p^2 - (\alpha + \beta)^2)}$
17	$\cos\alpha t \cos\beta t$	$\frac{p(p^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{(p^2 + (\alpha - \beta)^2)(p^2 + (\alpha + \beta)^2)}$
18	$\text{ch}\alpha t \text{ch}\beta t$	$\frac{p(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 - (\alpha - \beta)^2)(p^2 - (\alpha + \beta)^2)}$
19	$\sin\alpha t \sin\beta t$	$\frac{2\alpha\beta p}{(p^2 + (\alpha - \beta)^2)(p^2 + (\alpha + \beta)^2)}$
20	$\sin\alpha t \text{ch}\beta t$	$\frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}$
21	$\text{sh}\alpha t \text{sh}\beta t$	$\frac{2\alpha\beta p}{(p^2 - (\alpha - \beta)^2)(p^2 - (\alpha + \beta)^2)}$
22	$\cos\alpha t \text{sh}\beta t$	$\frac{\beta(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}$
23	$\cos\alpha t \text{ch}\beta t$	$\frac{p(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}$
24	$\sin\alpha t \text{sh}\beta t$	$\frac{2\alpha\beta p}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}$
25	$\sin(\omega t - \varphi_0)$	$e^{\frac{-\varphi_0 p}{\omega}} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
26	$\cos(\omega t - \varphi_0)$	$e^{\frac{-\varphi_0 p}{\omega}} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
27	$\text{sh}(\omega t - \varphi_0)$	$e^{\frac{-\varphi_0 p}{\omega}} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
28	$\text{ch}(\omega t - \varphi_0)$	$e^{\frac{-\varphi_0 p}{\omega}} \frac{p}{p^2 - \omega^2}$
29	$e^{-\alpha t} \sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
30	$e^{-\alpha t} \cos\omega t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
31	$e^{-\alpha t} \text{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}$

32	$e^{-\alpha} \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}$
33	$\frac{t^n}{n!} \sin \alpha t$	$\frac{1}{2i} \frac{(p + \alpha i)^{n+1} - (p - \alpha i)^{n+1}}{(p^2 + \alpha^2)^{n+1}}$
34	$\frac{t^n}{n!} \operatorname{sh} \alpha t$	$\frac{1}{2} \frac{(p + \alpha)^{n+1} - (p - \alpha)^{n+1}}{(p^2 - \alpha^2)^{n+1}}$
35	$\frac{t^n}{n!} \cos \alpha t$	$\frac{1}{2} \frac{(p + \alpha)^{n+1} + (p - \alpha)^{n+1}}{(p^2 + \alpha^2)^{n+1}}$
36	$\frac{t^n}{n!} \operatorname{ch} \alpha t$	$\frac{1}{2} \frac{(p + \alpha)^{n+1} + (p - \alpha)^{n+1}}{(p^2 - \alpha^2)^{n+1}}$
37	$S(t)$	$\frac{\sqrt{\sqrt{p^2 + 1} - p}}{2p\sqrt{p^2 + 1}}$
38	$C(t)$	$\frac{\sqrt{\sqrt{p^2 + 1} + p}}{2p\sqrt{p^2 + 1}}$
39	$\operatorname{Si}(t)$	$\frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{1}{p}$
40	$\operatorname{si}(t)$	$-\frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{1}{p}$
41	$\operatorname{Ci}(t)$	$\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$
42	$\operatorname{erf} \sqrt{t}$	$\frac{1}{p\sqrt{p+1}}$
43	$\operatorname{Erf} \sqrt{t}$	$\frac{1}{p+1 + \sqrt{p+1}}$
44	$\operatorname{erf} t$	$\frac{1}{p} e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf} \frac{p}{2}$
45	$\frac{1}{p} e^{-\alpha \cdot t}$	$\operatorname{Erf} \frac{\alpha}{2\sqrt{p}}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: 1981.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: 1981; 1985.
3. Высшая математика. Специальные главы. / Под ред. Чинаева П.И. – М.: 1977.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высш. шк. 1965
5. Иванов В. А. и др. Математические основы теории автоматического регулирования. – М.: Высш. шк. 1971.
6. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука: 1981.
7. Мартыненко В. С. Операционное исчисление. – К.: Вища школа, 1990.
8. Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В.М. Высшая математика, – К.: Вища школа, 1987.
9. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996.
10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. Ч. 2. – М.: Наука, 1985.
11. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1967.
12. Пчелин Б. К. Специальные разделы высшей математики. – М.: Высш. шк. 1973.
13. Шелковников Ф. А., Такайшвили К. Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. – М.: Высш. шк. 1968.

МНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчальне видання

Олександр Андрійович Войцеховський

Операційне числення

Навчальний посібник

Вінниця ВДТУ 2000

Редактор В. О. Дружиніна

Коректор З. В. Поліщук

Тираж 70 прим. Зам № 2000-0024

ВДТУ, 21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.