О.А. ВОЙЦЕХОВСЬКИЙ
Н.Б.ДУБОВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ УСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Міністерство освіти і науки України

Вінницький державний технічний університет

О.А. ВОЙЦЕХОВСЬКИЙ
Н.Б.ДУБОВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник з вищої математики для студентів усіх спеціальностей . Протокол № 10 від 31 травня 2001р.

ВІННИЦЯ ВДТУ 2002

УДК 512.64
В 65

Рецензенти:

П.М.Зузяк, доктор фізико-математичних наук, професор
В.Л. Карпенко, кандидат фізико-математичних наук, професор
В.М. Михайлевич, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Войцеховський О.А., Дубова Н.Б.
В 65 **Вища математика в прикладах і задачах. Лінійна алгебра.**
Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 100с.

В посібнику розглянуті основні питання розділу “Лінійна алгебра” курсу вищої математики. З кожної теми наводяться короткі теоретичні відомості і пропонуються конкретні питання, які сприяють засвоєнню теоретичного матеріалу; наводяться приклади розв‘язування стандартних задач; даються задачі і вправи для самостійної роботи з відповідями; наведено приклади застосування системи MathCAD до розв‘язування обчислювальних задач; запропоновано задачі для індивідуальних домашніх завдань.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей усіх форм домашніх завдань.

УДК 512.64

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник написаний відповідно до діючої програми з вищої математики і призначений для студентів вищих навчальних закладів.

В посібнику розглядаються основні питання лінійної алгебри.

Мета цього посібника – забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичного матеріалу, сприяти формуванню навичок у застосування відомих методів, допомоги студентам при самостійному розв'язанні задач.

Зміст і порядок викладання матеріалу в посібнику підпорядковані цій меті. Матеріал кожного параграфу розбито, як правило на чотири пункти.

В п. I – "Основні поняття" – наводяться основні теоретичні відомості і формули, які необхідні для розв'язування задач.

В п. II – "Контрольні питання та завдання" – містяться питання з теорії і прості задачі, які ілюструють вузлові питання теоретичних положень. Основна робота над теорією ведеться студентами за підручником і конспектами лекцій. Однак для розв'язування задач часто достатньо розуміння суті теореми чи формули. З п. II викладач може брати питання для перевірки готовності студента до практичного заняття.

В п. III – "Приклади розв'язування задач" – наводяться детальні розв'язування типових задач з теми, що вивчається. Кількість прикладів варіюється в залежності від об'єму і важливості теми.

В п. IV – "Завдання для самостійної роботи" – міститься невелика кількість різноманітних за змістом вправ, які необхідні для закріплення набутих на практичних заняттях навиків розв'язування задач. До кожної вправи наведено відповіді.

В посібнику розглядається використання системи комп'ютерної математики MathCAD для розв'язування задач лінійної алгебри.

Наприкінці посібника наведено задачі для індивідуальних домашніх завдань.

Розв'язування прикладу починається зі знаку Δ і закінчується знаком ▲.

Матриці та операції над ними

1. Основні поняття

Прямокутна таблиця, яка складена з $m \times n$ елементів a_{ij} $(i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n})$ деякої множини називається *матрицею* і записується у вигляді

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ або } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Перший індекс елемента a_{kl} означає номер рядка, а другий – номер стовпця на перетині яких знаходиться цей елемент матриці. Якщо матриця складається з m рядків і n стовпців, то за означенням вона має розмірність $m \times n$. Матриця називається *числовою*, якщо всі її елементи a_{ij} – числа; *функціональною*, якщо a_{ij} – функції; *векторною*, якщо a_{ij} – вектори і т.д. Матриці A і B називаються рівними, якщо всі їх відповідні елементи a_{ij} і b_{ij} рівні, тобто $a_{ij} = b_{ij}$. Отже, рівними можуть бути тільки матриці однакової розмірності.

Матриця $B = (a_1, a_2, \ \dots \ , a_n)$ розмірності $(1 \times n)$ називається *матрицею – рядком* або *вектором-рядком*.

Матриця розмірності $(m \times 1)$ називається *матрицею – стовпцем* або *вектором-стовпцем*:

$$A = \begin{pmatrix} a_1, \\ a_2, \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці кількість рядків і стовпців збігається, то вона називається *квадратною*, при цьому число рядків (стовпців) називається *порядком* квадратної матриці.

Так, наприклад, квадратна матриця порядку 3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В квадратній матриці елементи, які розташовані на уявній прямій, що проходить з лівого верхнього кутка в правий нижній, утворюють *головну діагональ*, а елементи, які розташовані на уявній прямій, що проходить з верхнього правого кутка у лівий нижній, утворюють *другорядну діагональ*.

Якщо в квадратній матриці всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю, то така квадратна матриця називається *одиничною* і позначається символом E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нульовою*

Якщо в матриці (1.1) поміняти місцями рядки і стовпці, то одержимо нову матрицю розмірністю $n \times m$, яка називається *транспонованою* до матриці A і позначається A^{T}:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Добутком числа α *на матрицю* A називається матриця αA, яка одержується з даної множенням кожного її елемента на число α

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сумою двох матриць однакової розмірності називається матриця цієї ж самої розмірності, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів доданків

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\ 5 & 4 & 2\end{pmatrix}$, то

$$A+B=\begin{pmatrix}2+0 & -1-3 & 3+2\\ 4-5 & 0+4 & 2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 5\\ -1 & 4 & 4\end{pmatrix}.$$

Добутком матриць A і B називається матриця $C=AB$, кожний елемент якої дорівнює сумі добутків відповідного рядка першої матриці на відповідний стовпець другої

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_k a_{ik}b_{kj}.$$

Звідси випливає, що добуток AB існує тоді і тільки тоді, коли перший множник A має число стовпців, рівне числу рядків другого множника B. Далі, число рядків матриці AB дорівнює числу рядків A, а число стовпців – числу стовпців B. З існування добутку AB не випливає існування добутку BA. У випадку його існування, як правило $AB\neq BA$. Якщо ж $AB=BA$, то матриці A і B називаються *переставними* (або *комутівний*).

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 3\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$, то

$$A\times B=\begin{pmatrix}2\cdot1+(-1)\cdot(-2)+3\cdot5 & 2\cdot0+(-1)\cdot1+3\cdot3 & 2\cdot2+(-1)\cdot3+3\cdot2\\ 4\cdot1+0\cdot(-2)+1\cdot5 & 4\cdot0+0\cdot1+1\cdot1 & 4\cdot2+0\cdot3+1\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-19 & 2 & 7\\ 9 & 1 & 10\end{pmatrix}.$$

Властивості дій над матрицями:

1. $A+B=B+A$;
2. $\alpha A=A\alpha$;
3. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)=(\alpha A)\beta$;
4. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
5. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
6. $A\cdot E=E\cdot A$, E – одинична матриця;
7. $A\cdot B\neq B\cdot A$;
8. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;
9. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається матрицею? Які матриці називаються рівними?
2. Дайте означення квадратної матриці, одиничної. Наведіть приклади.

3. Що розуміється під операцією транспонування матриці? Чи існує транспонована матриця до матриці $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$?
4. Доведіть такі співвідношення: а) $(A^T)^T = A$; б) $(A+B)^T = A^T + B^T$; в) $(AB)^T = B^T A^T$.
5. У якому сенсі стовпці і рядки матриці рівноправні?
6. У чому полягають операції множення матриці на число і додавання матриць? Наведіть приклади.
7. Сформулюйте правило множення матриць. За яких умов матрицю A можна помножити на матрицю B? Наведіть приклади.
8. Якої розмірності матриця A, якщо відомо, що $(1\ 2\ 3)A = (0\ 1)$?
9. Наведіть приклади рядка A і стовпця B, для яких існує добуток: а) AB; б) BA; в) AB і BA; г) AB, BA і $AB = BA$.
10. Сформулюйте властивості дій над матрицями. Наведіть приклади.
11. Знайти $(AB)C$ і $A(BC)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

12. Дано

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Показати, що $AC = BC$, хоча $A \neq B$.

III. Приклади розв'язування задач

1. Знайти $3A - 2B$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Δ Маємо

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 9 & -3 & 0 \end{bmatrix},\ 2B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 9 & -3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -18 \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix}. ▲$$

2. Знайти AB і BA, якщо

$$A=\begin{bmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -2 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Δ Маємо

$$AB=\begin{bmatrix}4(-1)+(-5)(-2)+8\cdot 3 & 4\cdot 5+(-5)(-3)+8\cdot 4\\ 1(-1)+3(-2)+(-1)3 & 1\cdot 5+3(-3)+(-1)4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & 67\\ -10 & -8\end{bmatrix}.$$

Далі знаходимо

$$BA=\begin{bmatrix}(-1)4+5\cdot 1 & (-1)(-5)+5\cdot 3 & (-1)8+5(-1)\\ (-2)4+(-3)1 & (-2)(-5)+(-3)3 & (-2)8+(-3)(-1)\\ 3\cdot 4+4\cdot 1 & 3(-5)+4\cdot 3 & 3\cdot 8+4(-1)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 20 & -13\\ -11 & 1 & -13\\ 16 & -3 & 20\end{bmatrix}.$$

Отже, $AB \neq BA$. ▲

3. Знайти значення матричного многочлена $2A^2+3A+5E$ при $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$, якщо E – одинична матриця третього порядку.

Δ Маємо

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 6 & 5\\ 8 & 11 & 6\\ 9 & 8 & 10\end{bmatrix},$$

$$2A^2=\begin{bmatrix}20 & 12 & 10\\ 16 & 22 & 12\\ 18 & 16 & 20\end{bmatrix},\ 3A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 6\\ 3 & 9 & 3\\ 12 & 3 & 3\end{bmatrix},\ 5E=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix},$$

$$2A^2+3A+5E=\begin{bmatrix}28 & 15 & 16\\ 19 & 36 & 15\\ 30 & 19 & 28\end{bmatrix}.\ ▲$$

IV. Завдання для самостійної роботи

1.Задамо матриці A і B. Знайти AB і BA, якщо:

$$а)\ A=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 3 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 4 & 7\end{bmatrix};\ б)A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}0 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix};$$

$$в)A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & -4 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 4 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix};\ г)A=\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}6 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

Відповіді: $а)\ AB=\begin{bmatrix}14 & 46\\ 35 & 29\end{bmatrix}; BA=\begin{bmatrix}-16 & 20\\ 13 & 59\end{bmatrix}$

$$б)AB=\begin{bmatrix}11 & 8 & 11\\ 2 & -1 & -1\\ 9 & 6 & 7\end{bmatrix}; BA=\begin{bmatrix}2 & 10 & 11\\ 3 & 8 & 14\\ 2 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

$$в)\ AB=\begin{bmatrix}-14 & 4\\ -2 & -3\end{bmatrix}; BA=\begin{bmatrix}3 & -17 & 25\\ 10 & -20 & 10\\ 6 & -9 & 0\end{bmatrix};$$

$$г)\ AB=\begin{bmatrix}6 & -2 & 3\\ 24 & -8 & 12\\ 30 & -10 & 15\end{bmatrix}; BA=\begin{bmatrix}13\end{bmatrix}$$

2. Дано матриці:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 4 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 7 & 4\\ -8 & 5 & 2\\ 3 & -6 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Знайти ті з добутків $AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC,$ які мають зміст.

Відповіді: $BA=\begin{bmatrix}-2 & 28 & 36 & 13\\ -11 & 0 & 24 & -2\\ 10 & -3 & -22 & 6\end{bmatrix}; CD=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & 0 & -3\end{bmatrix}$

$$DA=\begin{bmatrix}0 & 11 & 14 & 8\\ 1 & 6 & 4 & 2\end{bmatrix}, DB=\begin{bmatrix}-8 & -15 & 3\\ -6 & 19 & 10\end{bmatrix}$$

3. Для заданих матриць $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 7\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}3 & 7 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ знайти

$$2A-\left(A^2+B\right)B,\ A(2A+B)-B(A-B),\ B(A+2B)-3AB.$$

Відповіді: $\begin{bmatrix} -84 & -157 & 109 \\ -111 & -235 & 80 \\ 27 & 12 & -167 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 63 & 76 & 4 \\ 73 & 111 & 25 \\ -21 & -5 & 139 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 41 & 48 & -16 \\ -35 & -85 & 3 \\ 12 & 13 & -32 \end{bmatrix}$

4. Дано:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Показати, що

$а)\ A^T B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & -1 \\ -15 & -6 & -12 & 9 \end{bmatrix}$; $б)\ \left(A+A^T\right)B = AB + A^T B$;

$в)\ C^T B^T BC = [164]$; $г)\ D^T A^T AD = [981]$.

5. Знайти значення *f(A)* від матриці *A*:

$а)\ f(A)=2A^2-4A+3E,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$

$б)\ f(A)= A\ -4A-3E,\ A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

Відповіді: $а)\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$; $б)\begin{pmatrix} 4 & -17 & -1 \\ 4 & -12 & -2 \\ 8 & -16 & -11 \end{pmatrix}$

2 Визначники та їх властивості

I. Основні поняття

Визначником квадратної матриці другого порядку або просто визначником другого порядку називається число:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Визначником третього порядку (або *визначником квадратної матриці третього порядку*) називається число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \tag{2}$$

Рівність (2) можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Мінором елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник, який одержується з даного викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця і позначається M_{ij}.

Враховуючи це означення, рівність (3) можна записати у вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}.$$

Визначником n-го порядку називається число, яке визначається за правилом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j}. \tag{4}$$

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність її визначник, який позначається символом $|A|$ або $\det A$.

Квадратна матриця A називається невиродженою, якщо її визначник відмінний від нуля $(\det A \neq 0)$.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника (квадратної матриці) називається число, яке визначається рівністю

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{5}$$

Враховуючи це означення, рівність (4) можна записати так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \cdot \quad (6)$$

Властивості визначників:

1. Для будь-якої квадратної матриці A має місце рівність

$$\det A = \det A^T$$

2. Якщо у визначнику поміняти місцями два будь-яких стовпці (рядки), то визначник змінить свій знак на протилежний, а абсолютна величина його не зміниться.

3. Якщо у визначнику збігаються два стовпці (рядки), то цей визначник дорівнює нулю.

4. Сталий множник всіх елементів будь-якого стовпця (рядка) можна винести за знак визначника.

5. Якщо кожний елемент будь-якого стовпця (рядка) є сумою двох доданків, то даний визначник дорівнює сумі двох визначників, в першому з яких замість суми стоїть перший доданок, в другому другий доданок, а всі інші елементи залишаються без змін.

6. Якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж саме число, то значення визначника не зміниться.

Теорема. (про розкладання визначника за елементами довільного рядка або стовпця). *Якщо A - квадратна матриця n-го порядку, то її визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення, тобто*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad \text{(за рядком)}$$

$$\det A = a_{1j}A_{1J} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad \text{(за стовпцем)}$$

Теорема. (про анулювання визначника) *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на відповідні алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю*

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0,$$

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots\ldots + a_{nj}A_{nk} = 0.$$

Визначники другого порядку обчислюються за означенням, третього – звичайно за правилом трикутника (Саррюса, схематичний запис якого наведено на рис.1), більш високих порядків – розкладення за рядком або стовпцем

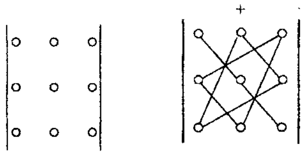

рис. 1

Найбільш раціональний спосіб обчислення – зведення до трикутного вигляду, оскільки визначник трикутного вигляду дорівнює добутку діагональних елементів. Метод зведення до трикутного вигляду такий же, як і для матриць, з тією різницею, що на кожному кроці визначник ділиться на розв'язувальний елемент з показником степеня, що дорівнює числу перетворюваних рядків.

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається визначником другого, третього порядків? Наведіть приклади.
2. Наведіть означення визначника n – го порядку. Чи можна сказати, що визначник n – го порядку є число?
3. Сформулюйте і доведіть основні властивості визначників. Наведіть приклади.
4. *Трикутною матрицею* називається матриця, у якій всі елементи по одну сторону від головної або другорядної діагоналі дорівнюють нулю. Чому дорівнює визначник трикутної матриці?
5. Що таке мінор елемента a_{ij} визначника $\det\|a_{ij}\|_{nn}$?
6. Що таке алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника $\det\|a_{ij}\|_{nn}$?
7. Що значить розкласти визначник за елементами стовпця (рядка)?

III. Приклади розв'язування задач

1. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Δ За формулою (3) маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1-2) - 3(0-(-6)) + (0-(-3)) = -6+8-3 = -27. \blacktriangle$$

2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$$

Δ Використовуючи властивості визначників одержуємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 15 & 23 & 0 & 19 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 24 & 34 & 0 & 19 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 15 & 23 & 19 \\ 3 & -2 & 5 \\ 24 & 34 & 19 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\begin{vmatrix} 5 & 23 & 19 \\ 1 & -2 & 5 \\ 8 & 34 & 19 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 5 & 33 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 50 & -21 \end{vmatrix} = -3 \quad 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 33 & -6 \\ 50 & -21 \end{vmatrix} =$$

$$= 9\begin{vmatrix} 33 & -2 \\ 50 & -7 \end{vmatrix} = 9(-231+100) = 9(-131) = -1179. \blacktriangle$$

IV. Завдання для самостійної роботи

1. За допомогою правила Саррюса обчислити визначники:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; б)\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}; в)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Відповіді: а) 7; б) –5; в) –3.

2. Методом зниження порядку обчислити визначники:

$$a)\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}; б)\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 & 4 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}; в)\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{10} & \sqrt{3} \\ \sqrt{10} & \sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & \sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix};$$

$$г)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix};$$

Відповіді: а)-288; б)-748; в)0; г)$2x^3y\,(x-y)^6$

3. Не розкриваючи визначник, доведіть рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-c)(c-b)(c-a).$$

Обернена матриця. Ранг матриці

І. Основні поняття

Нехай задано квадратну невироджену матрицю A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, (|A| \neq 0).$$

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до невиродженої квадратної матриці A якщо

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E \tag{7}$$

Теорема. *Кожна квадратна невироджена (неособлива) матриця порядку n має обернену матрицю (теж порядку n), причому*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A.

Теорема. (Про єдиність оберненої матриці) *Якщо квадратна матриця має обернену, то вона єдина.*

Мінором k-го порядку матриці A називається визначник, який одержується з даної матриці вибором довільних k рядків і k стовпців (він складається з елементів, які знаходяться на перетині цих рядків і стовпців).

Якщо A – квадратна матриця, то визначники

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \; k = \overline{1,n},$$

називаються *головними* або *кутовими* мінорами матриці A.

Рангом матриці називається найвищий порядок мінору матриці, відмінного від нуля.

На практиці ранг матриці звичайно обчислюють двома основними методами:

1) *методом елементарних перетворень матриці,*

2) *методом обвідних мінорів.*

В основі *методу елементарних перетворень* матриці лежить така теорема.

Теорема. *Ранг матриці не зміниться, якщо над її рядками (стовпцями) виконуються наступні елементарні перетворення:*

1. *Міняються місцями будь-які два рядки (стовпці).*
2. *Будь-який рядок (стовпець) множиться на число, відмінне від нуля.*
3. *До будь-якого рядка (стовпця) додається інший рядок (стовпець) помножений попередньо на деяке число.*
4. *Викреслюється рядок (стовпець), який складається з самих нулів.*

На практиці намагаються шляхом елементарних перетворень звести дану матрицю до одиничної. Порядок одержаної одиничної матриці і дорівнює рангу матриці.

2. *Метод обвідних мінорів* :

1. *Вибираємо будь-який мінор 2–го порядку, відмінний від нуля (найчастіше, якщо можливо, який знаходиться у лівому верхньому кутку матриці.*
2. *Обчислюємо мінори третього порядку, які містять в собі як складову частину вибраний мінор другого порядку.*
3. *Якщо всі можливі такі мінори третього порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює двом. Якщо ж знайшовся хоча б один мінор третього порядку відмінний від нуля, то переходять до обчислення всіх можливих мінорів четвертого порядку, які містять в собі відмінний від нуля мінор третього порядку. Якщо всі мінори четвертого порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює трьом і обчислення припиняється. Якщо ж хоча б один з мінорів четвертого порядку відмінний від нуля, то процес продовжують аналогічно попередньому.*

Можна дати і таке означення невиродженої матриці: матриця A називається *невиродженою*, якщо ранг її дорівнює порядку.

II. Контрольні питання та завдання

1. Яка матриця називається оберненою до даної матриці?
2. Чи завжди існує обернена матриця? Як можна знайти обернену матрицю?
3. Що називається рангом матриці?
4. Назвіть елементарні перетворення над рядками (стовпцями) матриці. В чому полягає метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці.
5. В чому полягає метод обвідних мінорів знаходження рангу матриці.

III. Приклади розв'язування задач

1. Обчислити ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Δ Застосовуючи метод елементарних перетворень, одержуємо

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & -57 & -3 & -16 \\ 0 & -34 & -4 & -18 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 57 & -3 & -16 \\ 0 & -34 & -4 & -18 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -57 & -16 \\ 0 & -4 & -34 & -18 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -57 & -16 \\ 0 & 2 & 17 & 0 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 19 & \frac{16}{3} \\ 0 & 2 & 17 & 9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 19 & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & -21 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, ранг матриці A дорівнює 3. ▲

2. Обчислити ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 9 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Δ Застосовуючи метод обвідних мінорів, маємо

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,\ M_3' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

$$M_4' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2(-6+6) = 0$$

$$M_4'' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Отже, $\operatorname{rang} A = 3$. ▲

3. Дана матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти обернену матрицю.

Обчислюємо визначник матриці A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4+4 = 8.$$

Для побудови оберненої матриці знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 7,\ A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 6,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -4.$$

Отже, за формулою (8) одержуємо:

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}7&-3&2\\5&-1&-2\\6&2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{8}&-\frac{3}{8}&\frac{1}{4}\\\frac{5}{8}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}. \blacktriangle$$

IV Завдання для самостійної роботи

1. Знайти матрицю, обернену до даної:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\1&0&4\end{pmatrix};\ б)\ A=\begin{pmatrix}4&-8&-5\\-4&7&-1\\-3&5&1\end{pmatrix}$$

$$в)\ A=\begin{pmatrix}1&1&3&2\\2&2&1&2\\1&2&3&4\\1&1&2&3\end{pmatrix};\ г)\ A=\begin{pmatrix}1&-3&2&0\\-2&4&5&1\\6&1&1&-3\\8&-5&5&-3\end{pmatrix}$$

Відповіді: $a)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{11}&-\frac{8}{11}&\frac{7}{11}\\\frac{2}{11}&\frac{7}{11}&-\frac{2}{11}\\-\frac{1}{11}&\frac{2}{11}&\frac{1}{11}\end{pmatrix};\ б)A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{12}{13}&\frac{17}{13}&-\frac{43}{13}\\-\frac{7}{13}&\frac{11}{13}&-\frac{24}{13}\\-\frac{1}{13}&-\frac{4}{13}&\frac{4}{13}\end{pmatrix}$

$в)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}&\frac{3}{7}&-1&\frac{6}{7}\\-\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&1&-\frac{10}{7}\\\frac{4}{7}&-\frac{1}{7}&0&-\frac{2}{7}\\-\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&0&\frac{5}{7}\end{pmatrix};$ г) оберненої матриці не існує.

2. Обчислити ранг матриці:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix};\ б)\ A=\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&1&4&1\end{pmatrix}$$

$$в)\ A=\begin{pmatrix}1&2&3&-2\\2&-3&1&-4\\1&9&8&-2\\1&-12&-7&-2\end{pmatrix};\ г)\ A=\begin{pmatrix}2&3&1&-1\\3&1&4&2\\1&2&3&-1\\1&-4&-7&5\end{pmatrix}.$$

Відповіді:

а) $r(A)=2$; б) $r(A)=3$; в) $r(A)=2$; в) $r(A)=3$

3. Розв'язати матричні рівняння:

$$a)\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix};\ б)\,X\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 9\\ 16 & 10\end{pmatrix};$$

$$в)\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 10 & 10\\ -3 & 2 & 7\\ 0 & 7 & 8\end{pmatrix};$$

$$г)\,X\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix}.$$

Відповіді: $a)\begin{pmatrix}31 & 55\\ -18 & -32\end{pmatrix};\ б)\begin{pmatrix}19 & 21{,}5\\ 22 & 25\end{pmatrix};$

$$в)\begin{pmatrix}20 & -105 & -152\\ -15 & 77 & 112\\ 16 & -58 & -87\end{pmatrix};\ г)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}.$$

Системи лінійних рівнянь

І. Основні поняття

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Система (9) називається *сумісною*, якщо вона має принаймні один розв'язок, в іншому випадку вона називається *несумісною.*

Введемо в розгляд матриці

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n}\\ a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{mn}\end{pmatrix},B=\left(\begin{array}{c|c}a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n} & b_1\\ a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2n} & b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\\ a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{mn} & b_m\end{array}\right).$$

Теорема (Кронекера – Капеллі). *Для того, щоб система* (9) *була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці системи дорівнював рангу матриці системи,* тобто rang A = rang $B = r$.

Далі, якщо rang A = rang B і $r = n$, то система (9) має єдиний розв'язок; якщо $r < n$, то система (9) має нескінченну множину розв'язків, яка лежить від $r - n$, довільних параметрів.

Система (9) називається *однорідною,* якщо всі її вільні члени $b_i = 0, \left(i = \overline{1,m}\right)$. Якщо принаймні одне з чисел b_i відмінне від нуля, то система називається *неоднорідною*. Очевидно, однорідна система завжди сумісна, оскільки вона має нульовий розв'язок $x_1, x_2 = 0, ..., x_n = 0$, який називається *тривіальним розв'язком однорідної системи.*

1. Матричний метод (метод оберненої матриці).

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Якщо ввести в розгляд матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то систему рівнянь (10) можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$AX = B \tag{11}$$

Припустимо, що матриця A коефіцієнтів системи (10) неособлива, $\det A \neq 0$. Помноживши обидві частини рівняння (11) зліва на матрицю A^{-1} – обернену матрицю до матриці A, одержимо $A^{-1}AX = A^{-1}B$, звідки $EX = X = A^{-1}B$.

Отже, матриця-розв'язок X легко знаходиться як добуток матриць A^{-1} і B.

2. Метод Крамера (формули Крамера).

Якщо для системи (10) $m = n$ і $\det A \neq 0$, то мають місце формули Крамера для знаходження невідомих x_i $(i = \overline{1,n})$

$$x_i = \Delta_i / \Delta \ \ (i = \overline{1,n}), \tag{12}$$

де $\Delta = \det A$, а визначники Δ_i одержуються з визначника Δ заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів вихідної системи.

Зауваження. Якщо $\Delta = 0$, а серед визначників $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ є нерівні нулю, то система не має розв'язку.

Нехай $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0$, причому один з мінорів $(n-1)$-го порядку визначника Δ не дорівнює нулю. Тоді система зводиться до $(n-1)$ рівняння; одне з рівнянь є наслідком інших. Одному з невідомих можна надати довільне значення. Інші $(n-1)$ невідомі визначаються єдиним способом з системи $(n-1)$ рівнянь.

У випадку, коли всі визначники $(n-1)$-го порядку, які є мінорами визначника Δ, дорівнюють нулю, система може не мати розв'язку, а може зводитися до $(n-2)$ рівнянь або до меншого їх числа.

3. Метод Гаусса.

Метод Гаусса полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система зводиться до трикутного або трапецеїдного вигляду, з якого всі розв'язки системи знаходяться безпосередньо.

До *елементарних перетворень системи* відносяться такі: 1) *перестановка будь-яких двох рівнянь системи*; 2) *множення будь-якого рівняння системи на відмінне від нуля число*; 3) *вилучення рівняння, всі коефіцієнти якого дорівнюють нулю*; 4) *додавання до будь-якого рівняння системи будь-якого іншого, помноженого на відмінне від нуля число.*

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{13}$$

Припустимо, що в першому рівнянні системи (13) $a_{11} \neq 0$ (якщо це не так, то переставивши місцями рівняння завжди можна добитись, щоб коефіцієнт при невідомому x_1 був відмінний від 0. Помножимо послідовно перше рівняння на числа $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \ \ldots \ , -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ і додамо відповідно до другого, третього і т. д. рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 + \ldots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n = b_2 - \frac{b_1a_{21}}{a_{11}}, \\ \left(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 + \ldots + \left(a_{3n} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n = b_3 - \frac{b_1a_{31}}{a_{11}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(a_{m2} - \frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{m2} - \frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 + \ldots + \left(a_{mn} - \frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n = b_m - \frac{b_1a_{m1}}{a_{11}}. \end{cases} \tag{14}$$

В системі (14) всі рівняння, крім першого, не містять невідомого x_1, тобто її можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{15}$$

Домножуючи друге рівняння системи (15) на числа $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}, -\frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \ldots, -\frac{a'_{n2}}{a'_{22}}$ і додаючи відповідно до третього, четвертого і т.д. рівнянь, зведемо систему (15) до вигляду, де рівняння, починаючи з третього, не містять невідоме x_2, тобто до вигляду :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a''_{m3}x_3 + \ldots + a''_{mn}x_n = b''_m. \end{cases} \tag{16}$$

Якщо при виконанні цих перетворень одержимо рівняння вигляду

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0,$$

то ми його відкидаємо, а якщо одержуємо рівняння вигляду

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b_3,$$

то система розв'язків не має.

Продовжуючи процес вилучення невідомих ми можемо звести систему (13) до трикутного, або трапецеїдного вигляду (коли кількість невідомих більша за кількість рівнянь). Якщо систему (13) зведено до трикутного вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(S)}x_n = b_n^{(S)}, \end{cases} \tag{17}$$

то з останнього рівняння знаходимо x_n. Підставляючи це значення в попереднє рівняння, знайдемо x_{n-1}; продовжуючи цей процес послідовно знаходимо всі інші невідомі і тим самим єдиний розв'язок системи (13). Описаний процес називається *зворотнім ходом* метода Гаусса.

Якщо ж в результаті виключення невідомих система (13) перейшла в систему трапецеїдного вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{rr}^{(S)}x_r + \ldots + a_{rn}^{(S)}x_n = b_r^{(S)}, \end{cases} \tag{18}$$

то з останнього рівняння системи (18) знаходимо x_n, виражаючи його через $b_n^{(S)}$ і базисні невідомі $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{n-1}$. Підставляючи знайдене значення x_n в попередні рівняння системи, послідовно виражаємо невідомі x_1, $x_2, \ldots, x_{k-1}$ через вільні члени і базисні невідомі. В цьому випадку система має безліч розв'язків.

То в результаті зворотного ходу r невідомих можна лінійно виразити через решту $n-r$ невідомих. Ці r невідомих будуть базисними, а решта $n-r$ – вільними. В результаті одержимо загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n, \\ x_2 = c_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = c_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n. \end{cases} \tag{19}$$

Групу базисних невідомих назвемо *базисом системи невідомих*. Загальний розв'язок (19) записано відносно базису $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Зрозуміло, що загальний розв'язок модна записати відносно і інших базисів, яких може бути не більше C_n^r.

Щоб одержати будь-який частинний розв'язок, достатньо надати вільним невідомим деякі числові значення. Очевидно, при $r < n$ система (13) має нескінченну множину розв'язків.

На практиці зручно перетворювати не рівняння системи, а розширену матрицю системи за такими правилами: на першому кроці перший рядок розширеної матриці лишається без змін, всі елементи першого стовпця матриці за винятком a_{11} замінюються 0. Елемент a_{11} приймається за базисний, всі інші елементи матриці перераховуються за правилом прямокутника (добуток по головній діагоналі мінус добуток по побічній діагоналі).

На другому кроці перші два рядки матриці лишаються без змін, а елементи другого стовпця, що знаходяться під елементом a_{22}, замінюються нулями. Елемент a_{22} вибирається за базисний і всі елементи матриці, що знаходяться під другим рядком, перераховуються за правилом прямокутника. Продовжуючи цей процес зводимо основну матрицю системи до трикутного (або трапецеїдного) вигляду.

Використовуючи останню матрицю записуємо відповідну їй систему рівнянь і, використовуючи зворотний хід Гауса, знаходимо розв'язки системи.

Крім описаної схеми методу Гауса існують різні модифікації цього методу. Однією з них є *метод повного вилучення* (метод Жордана – Гаусса). В цьому методі виключення невідомого виконується не тільки з рівнянь чергової підсистеми, але і із головних рівнянь попередніх кроків. Наведемо алгоритм цього методу.

Перший крок (відповідає виключенню невідомого x_1) виконується з головним елементом $a_{11} \neq 0$ за правилами прямого ходу.

Загальний крок (відповідає послідовному вилученню невідомих x_1, x_2, …) виконується за такими правилами:

1) назначається головний елемент; ним буде коефіцієнт при невідомому, що виключається;

2) елементи головного рядка залишаються незмінними;

3) всі елементи головного стовпця (крім головного елемента) замінюються нулями і замикаються такими до кінця перетворень;

4) всі інші елементи матриці перераховуються за правилом прямокутника.

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається розв'язком системи лінійних рівнянь? Які системи називаються сумісними, а які несумісними?
2. Що називається матрицею і розширеною матрицею системи лінійних рівнянь?
3. Сформулюйте і доведіть теорему Кронекера – Капеллі.
4. Запишіть формули Крамера. У якому випадку вони застосовні?
5. За якої умови система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?
6. Що можна сказати про систему лінійних рівнянь, якщо її визначник дорівнює нулю?
7. За якої умови однорідна система n лінійних рівнянь з n невідомими має нетривіальний розв'язок?
8. Викладіть метод Гаусса розв'язування і дослідження систем лінійних

рівнянь. Які різновиди метода Гаусса ви знаєте?

9. Які невідомі в системі лінійних рівнянь і в якому випадку називаються вільними, а які базисними? Що називається загальним розв'язком системи лінійних рівнянь?

10. В чому полягає матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.

III. Приклади розв'язування задач

1. Розв'язати методом оберненої матриці систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Δ Маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $|A| = 8 \neq 0$ і

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(див. приклад 3, с. 24), то

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, одержуємо розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -1. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

2. Використовуючи правило Крамера, розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Δ Маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&-5&3\\2&-4&1\end{vmatrix}=8\neq 0,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&-5&3\\3&-4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&-6&4\\3&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&4\\-1&-2\end{vmatrix}=16,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&-1&3\\3&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-2&2\\2&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&2\\1&-1\end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&-5&-1\\2&-4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-4&-2\\2&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&-2\\-2&1\end{vmatrix}=-8.$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{16}{8}=2,\\ x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{0}{8}=0,\\ x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{-8}{8}=-2.\end{cases}\qquad\blacktriangle$$

3. Використовуючи метод Гаусса, розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x_1-4x_2+3x_3=-22,\\ 2x_1+3x_2+5x_3=\ \ 12,\\ 3x_1-x_2-2x_3=\ \ \ 0.\end{cases}$$

Δ Використовуючи класичну схему методу Гаусса, матимемо:

$$\begin{cases}x_1-4x_2+3x_3=-22,\\ 2x_1+3x_2+5x_3=\ \ 12,\\ 3x_1-x_2-2x_3=\ \ \ 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-4x_2+3x_3=-22,\\ 11x_2-x_3=\ \ 56,\\ 11x_2-11x_3=\ \ 66,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1-4x_2+3x_3=-22,\\ 11x_2-x_3=\ \ 56,\\ -10x_3=\ \ 10,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-4x_2-3=-22,\\ 11x_2+1=\ \ 56,\\ x_3=\ \ -1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=5,\\ x_3=1.\end{cases}\qquad\blacktriangle$$

4. Розв'язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

Δ Використовуючи матричний запис методу Гаусса, маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Таким чином, приходимо до системи

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 6x_2 + 5x_3 = 4, \\ x_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2, \\ 6x_2 + 10 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_1 = 1. \end{cases} \blacktriangle$$

5. Використовуючи метод Жордана – Гаусса, розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Δ Маємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -6 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 39 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -39 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}26&0&0&0&22\\0&26&0&0&-26\\0&0&26&0&12\\0&0&0&13&3\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&\frac{11}{13}\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&\frac{6}{13}\\0&0&0&1&\frac{3}{13}\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{11}{13},\\x_2=-1,\\x_3=\frac{6}{13},\\x_4=\frac{3}{13}.\end{cases}\ \blacktriangle$$

6. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x_1-4x_2+3x_3=-22,\\2x_1+3x_2+5x_3=12,\\3x_1-x_2+8x_3=-10,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-4x_2+3x_3=-22,\\11x_2-x_3=56,\\11x_2-x_3=56,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1-4x_2+3x_3=-22,\\11x_2-x_3=56,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-4x_2=-22-3x_3,\\11x_2=56+x_3,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_2=\dfrac{56+x_3}{11},\\x_1=-22-3x_3+4\dfrac{56+x_3}{11},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-16-29x_3}{11},\\x_2=\dfrac{56+x_3}{11},\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-16-29a}{11},\\x_2=\dfrac{56+a}{11},\\x_3=a,\qquad a\in R.\end{cases}$$

7. Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases}4x_1+3x_2-3x_3-x_4=4,\\3x_1-x_2+3x_3-2x_4=1,\\3x_1+x_2\qquad\quad-x_4=4,\\5x_1+4x_2-2x_3+x_4=4.\end{cases}$$

Δ Випишемо розширену матрицю даної системи і знайдемо ранги основної і розширеної матриць. Маємо:

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c}4&3&-3&-1&4\\3&-1&3&-2&1\\3&1&0&-1&0\\5&4&-2&1&3\end{array}\right].$$

Не будемо переставляти стовпець вільних членів з іншими стовпцями матриці, щоб зразу обчислити ранги основної і розширеної матриць. Другий стовпець матриці B помножимо на -3 і додамо до першого, а також додамо другий стовпець до четвертого. В результаті в третьому рядку одержимо всі нулі за винятком одиниці в другому стовпці:

$$B \approx \left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right].$$

Тоді легко можна всі інші елементи другого стовпця перетворити в нулі. Одержимо

$$B \approx \left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right].$$

Тепер другий рядок додамо до першого і четвертого:

$$B \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right],$$

а потім в одержаній матриці перший стовпець додамо до четвертого:

$$B \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Далі третій стовпець останньої матриці помножимо на -1 і додамо до четвертого і одночасно додамо до першого. Маємо:

$$B \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 9 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Одержаний перший стовпець помножимо на -5 і додамо до п'ятого. Тоді, очевидно

$$B \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 9&0&3&0&-44\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&0&3&0&-44\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-56\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{array}\right]$$

Одержали $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang} B = 4$, звідки $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} B$, тобто дана система рівнянь несумісна. ▲

8. Методом Жордана – Гаусса показати, що дана система має нескінченну множину розв'язків, які залежать від двох параметрів, і знайти ці розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad = 5. \end{cases}$$

Δ Складаємо розширену матрицю системи B і знаходимо за допомогою елементарних перетворень рядків $\operatorname{rang} A$ і $\operatorname{rang} B$:

$$\overline{B} = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&1&5\\ 0&1&1&1&3\\ 1&1&0&0&2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&1&5\\ 0&1&1&1&3\\ 0&-1&-1&-1&-3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&1&5\\ 0&1&1&1&3\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right]$$

Отже, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2 < n = 4$. Тому система сумісна і має нескінченну множину розв'язків, які залежать від двох $(n - r = 4 - 2 = 2)$ параметрів.

Останній матриці, яка еквівалентна даній матриці B, відповідає система рівнянь
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

яка еквівалентна вихідній. Оскільки $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то за базисні невідомі беремо x_1 і x_2, а x_3 і x_4 приймаємо за вільні невідомі (параметри). Тоді з другого рівняння останньої системи маємо $x_2 = 3 - x_3 - x_4$. Підставивши вираз для x_2 в перше рівняння, знайдемо

$$x_1 = 5 - 2(3 - x_3 - x_4) - x_3 - x_4 = -1 + x_3 + x_4. \blacktriangle$$

9. Розв'язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + \qquad 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Δ Маємо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 & 7\\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 3 & 1 & 5\\ 5 & -2 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 & 7\\ 0 & -16 & -11 & -3 & -19\\ 0 & 16 & 11 & 3 & 19\\ 0 & -32 & -22 & -6 & -38 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 & 7\\ 0 & -16 & -11 & -3 & -19\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, одержуємо систему $\begin{cases} x_1+6x_2=-4x_3-x_4-7x_5,\\ 3x_1+2x_2=-x_3-2x_5. \end{cases}$

Покладаючи $x_3=1,\ x_4=0,\ x_5=0$, одержуємо систему

$$\begin{cases} x_1+6x_2=-4,\\ 3x_1+2x_2=-1. \end{cases}$$

розв'язуємо цю систему, наприклад, за правилом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 6\\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-16,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} -4 & 6\\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-2,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -4\\ 3 & -1 \end{vmatrix}=11$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{8},\ \ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{11}{16}.\ \ X_1^0=\begin{pmatrix} \frac{1}{8}\\ -\frac{11}{16}\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}.$$

Покладаючи $x_3=0, x_4=1, x_5=0$, одержуємо систему $\begin{cases} x_1+6x_2=-1,\\ x_1+6x_2=\ \ 0, \end{cases}$

розв'язками якої є $\quad x_1=\frac{1}{8},\ x_2=-\frac{3}{16},\ X_2^0=\begin{pmatrix} \frac{1}{8}\\ -\frac{3}{16}\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}.$ ▲

Зауваження. За базисні невідомі можна було прийняти також x_1, x_3, або x_1, x_4, або x_2, x_3, або x_2, x_4, але не x_3, x_4, оскільки визначник, який складений з коефіцієнтів при x_3 і x_4, дорівнює нулю, і тому x_3 і x_4 неможливо виразити через x_1 і x_2.

Особливу роль в застосуваннях, зокрема в математичному програмуванні, відіграють базисні розв'язки невизначеної системи лінійних рівнянь. Базисний розв'язок невизначеної системи лінійних рівнянь (13) одержується з загального розв'язку (19) цієї системи, якщо вільним невідомим надавати нульові значення, тобто покласти $x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=0,\ \dots,x_n=0$. В цьому випадку базисні невідомі будуть дорівнювати відповідним вільним членам, а саме $x_1=c_1,\ x_2=c_2,\ \dots,\ x_r=c_r$. Одержаний базисний розв'язок $(c_1;\ c_2;\dots;\ c_r;\ 0;\ 0;\dots;0)$ відповідає базису $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_r)$. Якщо загальний розв'язок записати в іншому базисі, то одержимо і інший базисний розв'язок. Оскільки з системи n невідомих можна утворити не більше C_n^r базисів, то і базисних розв'язків у системи лінійних рівнянь (13) може бути не більше C_n^r.

IV Завдання для самостійної роботи

1.Довести сумісність систем за допомогою теореми Кронегкра – Капеллі, записати системи в матричній формі і розв'язати їх матричним способом:

$$а)\begin{cases}5x_1-3x_2+2x_3=7\\ x_1+5x_2-x_3=23\\ x_1+2x_2+3x_3=4\end{cases};\qquad б)\begin{cases}2x_1-3x_2+4x_3=0\\ -x_1+5x_3=11\\ 4x_1-2x_2-3_3=-14\end{cases};$$

$$в)\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=13\\ 3x_1+5x_2-2x_3=-5;\\ x_1-x_3=4\end{cases}\qquad г)\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=-3\\ -x_1+3x_2-5x_3=2\\ 2x_1+x_2-3x_3=-3\end{cases};$$

$$д)\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3+x_4=-2\\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=1\\ 4x_1-2x_2-2x_3+x_4=2\\ x_1+x_2+x_3+5x_4=3\end{cases};\qquad е)\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=4\\ -2x_1+x_2+2x_3-5x_4=-4\\ 3x_1-x_2+x_3+5x_4=1\end{cases}.$$

Відповіді: а) (3;2;-1); б)(-1;2;2); в)(3;-2;2); г)(-1;2;1); д)(0,5;0;-1,5;1); е)(20,05;20,05;-1,35;-1,75)

2. Розв'язати системи рівнянь, використовуючи формули Крамера:

$$а)\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3=-15\\ -x_1-3x_2-x_3=-10;\\ x_1+4x_2=5\end{cases}\qquad б)\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=-2\\ 3x_1+4x_2-7x_3=17;\\ 6x_1-5x_2+2x_3=5\end{cases}$$

$$в)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 14 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}; \qquad г)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Відповіді: а) (-85/7;30/7;65/7); б) (2;1;-1); в) (2;-1;2;1); г) (2;-3;-1,5;0,5)

4. Розв'язати методом Гаусса (Жордана – Гаусса) такі системи рівнянь:

$$а)\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases} \qquad б)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

$$в)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2\ ; \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases} \qquad г)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

$$д)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}; \qquad е)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases};$$

$$є)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}; \qquad ж)\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases};$$

$$з)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}; \qquad і)\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}.$$

Відповіді: а) (3;1;1); б) (3;4;5); в) $x_1 = 1/16(8 + 24x_2 - x_4)$, $x_3 = -11/8x_4$; г) $x_3 = 2x_2 - x_1$, $x_4 = 1$; д) $x_1 = -11/7x_3$, $x_2 = -1/7x_3$; е) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5$; є) $x_1 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$; ж) система не сумісна; з) (1;2;3;4); і) (8;6;4;2).

5. Встановити, за яких умов дана система рівнянь має єдиний розв'язок, знайти його:

$$а)\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases} \qquad б)\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases};$$

Відповіді: а) $(\lambda-1)^2(\lambda+2)\neq 0, x_1=x_2=x_3=1/(\lambda+2)$;

б) $(\lambda-1)^3(\lambda+3)\neq 0, x_1=x_2=x_3=x_4=1/(\lambda+3)$.

5 Лінійні простори

I Основні поняття

Ми вже зустрічали множини різної природи, в яких були визначені операції додавання і множення на число. Так в просторі векторів (напрямлених відрізків) двом векторам за правилом трикутника (або паралелограма) було зіставлено вектор, який називається їх сумою. Вектору $\vec{a}$ і числу α зіставлено вектор, який називається добутком $\vec{a}$ на α.

У множині матриць однієї і тієї ж самої розмірності було введено операцію додавання, при цьому сумою матриць називається матриця, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів доданків. Для матриць було введено і операцію множення на число: добутком матриці на число являється матриця, елементи якої – добуток елементів вихідної матриці на число. Властивості цих операцій збігаються з властивостями тих самих операцій з векторами.

В кожній з цих множин операції визначаються по-своєму, але мають ті ж самі властивості: комутативність і асоціативність додавання, дистрибутивність множення на число по відношенню до додавання чисел і т.д. При обчисленнях з векторами або матрицями ми не згадуємо означення операцій, а користуємося тільки цими властивостями.

Природно виникає необхідність дослідити множину, яка складається з елементів будь-якої природи, в якій визначені операції додавання двох елементів і множення елемента на число. Ці операції можуть бути визначені яким завгодно способом, аби вони мали певний набір властивостей.

Розглянемо множину $\mathfrak{R}$ елементів $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$, в якій для будь-яких двох елементів $\boldsymbol{x}\in\mathfrak{R}$ і $\boldsymbol{y}\in\mathfrak{R}$ визначена сума $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathfrak{R}$ і для будь-якого елемента $\boldsymbol{x}\in\mathfrak{R}$ і кожного дійсного числа α визначений добуток $\alpha\boldsymbol{x}\in\mathfrak{R}$.

Означення 1. Множина $\mathfrak{R}$ називається *лінійним* (*векторним*) *простором*, а її елементи – *векторами*, якщо додавання елементів множини $\mathfrak{R}$ і множення елементів цієї множини на дійсне число задовольняє таким умови:

1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$.
2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$.
3) Існує нульовий елемент $\mathbf{0}$ такий, що для кожного $\boldsymbol{x}$ з $\mathfrak{R}$ виконується рівність $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$.
4) Для кожного $\boldsymbol{x}$ існує протилежний елемент $-\boldsymbol{x}$ такий, що $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.
5) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ для довільного елемента з $\mathfrak{R}$.
6) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$.
7) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$.
8) $\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}$.

Приклади конкретних лінійних просторів:

1. Множини дійсних чисел.

2. Множина векторів на площині.

3. Множина векторів у просторі.

4. Множина всіх матриць однакової розмірності.

5. Множина всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.

6. Множина всіх многочленів, степені яких не перевищують заданого натурального числа n.

Приклади множин, які не являються лінійними просторами.

1. Множина всіх векторів простору, з якої вилучено вектори, що паралельні деякій прямій l.

2. Множина всіх многочленів, степені яких точно дорівнюють заданому натуральному числу n.

Поняття лінійної залежності елементів лінійного простору. Множина векторів $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ лінійного простору $\Re$ називається *лінійно залежною системою векторів*, якщо існують такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, серед принаймні одне відмінне від нуля, що виконується рівність:

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \dots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}. \tag{20}$$

В іншому випадку, тобто коли рівність (20) виконується лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, система векторів $x_1, x_2, \dots, x_k$ називається *лінійно незалежною.*

Вираз, що стоїть ліворуч у рівності (20) називається *лінійною комбінацією векторів* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$.

Базис і координати. Розмірність лінійного простору. Множина лінійно незалежних векторів $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ лінійного простору $\Re$ називається *базисом* цього простору, якщо для кожного елемента $\boldsymbol{x}$ простору $\Re$ знайдуться числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такі, що виконується рівність

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n. \tag{21}$$

При цьому рівність (21) називається *розкладом вектора* $\boldsymbol{x}$ за елементами базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ називаються координатами вектора $\boldsymbol{x}$ (відносно даного базису).

Теорема. *Кожний елемент* $\boldsymbol{x}$ *лінійного простору* $\Re$ *може бути розкладеним за елементами базису єдиним способом.*

Лінійний простір $\Re$ називається n*-вимірним*, якщо в ньому існує n лінійно незалежних елементів, а будь-яка система, що складається з $n+1$ елементів, лінійно залежна. При цьому число n називається *розмірністю простору* $\Re$.

Перетворення координат вектора при заміні базису. Нехай

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n, \tag{22}$$

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_n \tag{23}$$

– два довільно вибраних базиси n-вимірного лінійного простору $\Re$. Кожний вектор базису (23), як і будь-який вектор простору $\Re$, однозначно лінійно виражається через вектори базису (22). Нехай

$$\begin{aligned} e'_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \dots + \alpha_{1n}e_n, \\ e'_2 &= \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{2n}e_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n &= \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{24}$$

У такому разі кажуть, що перехід від базису (22) до базису (23) задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тобто матрицею системи (24).

Записавши систему (24) у вигляді матричного рівняння і розв'язавши його відносно матриці

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

легко встановлюємо, що обернений перехід, тобто перехід від базису (23) до базису (22), задається матрицею A^{-1}, оберненою до матриці A.

Нехай

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

і нехай x – довільний елемент лінійного простору $\Re$, який у базисі (22) має координати $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а в базисі (23) – $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$, тобто виконуються рівності

$$x = \lambda'_1 e'_1 + \lambda'_2 e'_2 + \dots + \lambda'_n e'_n = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n. \tag{25}$$

Підставляючи в (25) замість $e_1, e_2, \dots, e_n$ їхні значення з розкладів за базисом (23), дістанемо

$$x = \lambda'_1 e'_1 + \lambda'_2 e'_2 + \dots + \lambda'_n e'_n = \lambda_1(b_{11}e'_1 + b_{12}e'_2 + \dots + b_{1n}e'_n) +$$

$$+\lambda_2(b_{21}\boldsymbol{e}'_1+b_{22}\boldsymbol{e}'_2+\ldots+b_{2n}\boldsymbol{e}'_n)+\ldots+\lambda_n(b_{n1}\boldsymbol{e}'_1+b_{n2}\boldsymbol{e}'_2+\ldots+b_{nn}\boldsymbol{e}'_n).$$

Звідси, прирівнюючи множники при $\boldsymbol{e}'_i$ $(i=\overline{1,n})$, матимемо систему

$$\begin{cases}\lambda'_1 &= b_{11}\lambda_1+b_{12}\lambda_2+\ldots+b_{1n}\lambda_n,\\ \lambda'_2 &= b_{21}\lambda_1+b_{22}\lambda_2+\ldots+b_{2n}\lambda_n,\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda'_v &= b_{n1}\lambda_1+b_{n2}\lambda_2+\ldots+b_{nn}\lambda_n,\end{cases}$$

або матричне рівняння

$$\begin{pmatrix}\lambda'_1\\ \lambda'_2\\ \vdots\\ \lambda'_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix},$$

де $B=(A^{-1})^T$.

Отже, якщо перехід від базису (22) до базису (23) здійснюється за допомогою невиродженої матриці A, то перехід від координат довільного елемента в базисі (22) до координат цього елемента в базисі (23) здійснюється за допомогою матриці $(A^{-1})^T$, транспонованої відносно матриці A^{-1}.

Приклад. Нехай $\mathfrak{R}$ – множина векторів на площині з декартовим базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$. Повернувши даний базис на кут φ, дістанемо новий базис $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$. Знайти формули перетворення координат.

Виразимо $\vec{i}\,'$ та $\vec{j}\,'$ через вектори $\vec{i}$ і $\vec{j}$. Для цього знайдемо координати x, y вектора $\vec{i}\,'$. З рис. (2) видно, що $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$. Отже,

$$\vec{i}\,'=\cos\varphi\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cdot\vec{j}.$$

Аналогічно

$$\vec{j}\,'=-\sin\varphi\cdot\vec{i}+\cos\varphi\cdot\vec{j}.$$

Тому

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

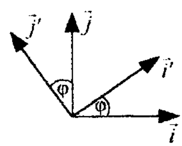

Рисунок 2

Звідси

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},\ (A^{-1})^T=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Таким чином, якщо деякий вектор $\vec{a}$ в базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$ має координати λ_1, λ_2, а в базисі $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$ – координати λ'_1, λ'_2, то

$$\lambda_1' = \lambda_1 \cos\varphi + \lambda_2 \sin\varphi;$$
$$\lambda_2' = -\lambda_1 \sin\varphi + \lambda_2 \cos\varphi.$$

Поняття евклідового простору

Лінійний простір $\mathfrak{R}$ називається *евклідовим*, якщо виконані такі дві умови:

1). Існує закон за допомогою якого будь-яким двом елементам $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ цього простору ставиться у відповідність дійсне число, яке називається скалярним добутком цих елементів і позначається символом $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

2). Вказаний закон знаходження скалярного добутку підпорядкований таким аксіомам:

1°. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

2°. $((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

3°. $(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для будь-якого дійсного числа λ.

4°. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$, якщо $\boldsymbol{x}$ – ненульовий елемент; $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, якщо $\boldsymbol{x}$ – нульовий елемент.

Число $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ називається *нормою* елемента $\boldsymbol{x}$ евклідового простору.

Норма має таки властивості:

1°. $\|\boldsymbol{x}\| > 0$, якщо $\boldsymbol{x}$ – ненульовий елемент;

2°. $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, якщо $\boldsymbol{x}$ – нульовий елемент;

3°. $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{x}|$ для будь-якого дійсного числа λ.

У звичайному тривимірному просторі E^3 норма вектора – це його довжина.

Елементи $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ евклідового простору називаються *ортогональними*, якщо $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

Теорема Піфагора. Якщо елементи $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ евклідового простору ортогональні, то

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

6 Лінійні оператори

I Основні поняття

Поняття лінійного оператора. Нехай V і W деякі лінійні простори. Якщо кожному елементу $\boldsymbol{x}$ з простору V ставиться у відповідність елемент $\boldsymbol{y}$ з простору W, то кажуть, що задано *оператор* (*відображення*) A, що діє з V у W. При цьому використовується позначення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$.

Оператор A, що діє з V у W, називається *лінійним*, якщо для будь-яких елементів $\boldsymbol{x}_1$ і $\boldsymbol{x}_2$ простору V і будь-якого числа λ виконуються співвідношення

1) $A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=A\boldsymbol{x}_1+A\boldsymbol{x}_2$ (властивість адитивності);

2) $A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A\boldsymbol{x}$ (властивість однорідності).

Якщо W – множина дійсних чисел, то лінійний оператор, що діє з V у W, називається *функціоналом*.

Якщо $V=W$, то лінійний оператор називається лінійним перетворенням простору V.

Операції над лінійними операторами. Нехай A і B – деякі лінійні оператори, що діють з V у W. *Сумою* цих операторів називається лінійний оператор $A+B$, що визначається рівністю

$$(A+B)\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x}.$$

Добутком лінійного оператора A на число λ називається лінійний оператор λA, який визначається рівністю

$$(\lambda A)\boldsymbol{x}=\lambda(A\boldsymbol{x}).$$

Нульовим лінійним оператором називається оператор, що визначається рівністю

$$0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

(тут $\boldsymbol{x}$ – довільний елемент простору V).

Протилежним оператором до оператора A називається оператор $-A$, який визначається рівністю

$$-A\boldsymbol{x}=(-1)A\boldsymbol{x},$$

для будь-якого елемента $\boldsymbol{x}\in V$.

Лінійне перетворення E простору V, що визначається рівністю

$$E\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x},$$

де $\boldsymbol{x}$ – довільний елемент простору V, називається одиничним (тотожним) оператором простору V.

Добутком лінійних операторів A і B, що діють з V у W, називається лінійний оператор AB, який визначається рівністю

$$(AB)\boldsymbol{x}=A(B\boldsymbol{x}).$$

Лінійні перетворення простору V мають такі властивості:

1) $\lambda(AB)=(\lambda A)B$;

2) $(A+B)C=AC+BC$;

3) $A(B+C)=AB+AC$;

4) $(AB)C=A(BC)$.

Ядро, образ, ранг лінійного перетворення. Розглянемо лінійні перетворення простору V, тобто лінійні оператори, що діють з V у V.

Лінійний оператор B простору V називається оберненим до оператора A, якщо

$$AB=BA=E,$$

де E – одиничний оператор. Оператор, обернений до оператора A, позначається символом A^{-1}.

Ядром лінійного оператора A називається множина всіх тих елементів

$\boldsymbol{x}$ простору V, для яких $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Ядро оператора A позначається символом $\ker A$.

Можна довести, що рівність $\ker A = \boldsymbol{0}$ є необхідною і достатньою умовою для того, щоб існував оператор A^{-1}, обернений до оператора A.

Образом лінійного оператора A називається множина (позначається $\operatorname{im} A$) всіх елементів $\boldsymbol{y}$ простору V, які можна подати у вигляді $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in V$.

Якщо розмірність $\dim V$ простору V дорівнює n, то можна переконатися у вірності такої рівності:

$$\dim(\operatorname{im} A) + \dim(\ker A) = n.$$

Рангом оператора A (позначається $\operatorname{rang} A$) називається розмірність його образу, тобто

$$\operatorname{rang} A = \dim(\operatorname{im} A).$$

Власні значення і власні вектори. Будь-який ненульовий вектор-стовпець $\boldsymbol{x} \in L$ називається *власним вектором лінійного перетворення* (квадратної матриці A), якщо знайдеться таке число λ, що буде виконуватися рівність

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}. \tag{26}$$

Число λ називається *власним значенням лінійного перетворення* (матриці A), що відповідає вектору $\boldsymbol{x}$.

Зауваження. Якщо простір L дійсний, то власне значення λ повинно бути дійсним; якщо L комплексний, то власні значення можуть бути і комплексними числами.

Оскільки $\lambda\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x}$, де E – одинична матриця, то рівняння (26) модна записати у вигляді $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0$ або в координатній формі

$$\left.\begin{array}{rrr} (a_{11} - \lambda)x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots + & a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + & & a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + \ldots + & (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{array}\right\} \tag{27}$$

Ненульові розв'язки системи (27) існують тоді і тільки тоді, коли визначник цієї системи дорівнює нулю, тобто

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

Рівняння (28) називається *характеристичним рівнянням матриці* A, многочлен $|A - \lambda E|$ – *характеристичним многочленом матриці* A, а його корені – *характеристичними числами* або *власними значеннями матриці* A.

Сукупність всіх характеристичних чисел матриці A називається її *спектром*, причому кожне характеристичне число входить в спектр стільки раз, яка його кратність в рівнянні (28). Якщо характеристичне рівняння (28) має лише прості корені, то спектр матриці A називається *простим*. Якщо власні вектори $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k$ відповідають попарно різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, то вони лінійно незалежні.

Нехай квадратна матриця A n-го порядку має n лінійно незалежних власних векторів, а матриця S має стовпцями ці власні вектори. Тоді матриця $\Lambda = S^{-1}AS$ має діагональний вигляд, причому на діагоналі знаходяться власні значення матриці A, тобто

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Якщо квадратна матриця A n-го порядку має власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_s$ кратності $m_1, m_2, m_3, ..., m_s$ відповідно, причому $\sum_{k=1}^{s} m_k = n$, то для представлення матриці A у діагональному вигляді $\Lambda = S^{-1}AS$ необхідно і достатньо виконання умови

$$rang(A - \lambda_k E) = n - m_k \quad (k = \overline{1, s}). \tag{30}$$

При виконанні умов (30) можна побудувати m_k лінійно незалежних власних векторів, які відповідають кожному кратному кореню λ_k рівняння (28). Якщо ж умова (30) порушується хоча б для одного індексу k, то матрицю A не можна звести до діагонального вигляду, хоча вона і має власні значення.

Дійсна квадратна матриця A називається *ортогональною*, якщо її стовпці утворюють ортонормовану систему векторів (довжина кожного вектора дорівнює одиниці, всі попарні скалярні добутки векторів дорівнюють нулю). Для того щоб квадратна матриця A була ортогональною, необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна з умов: $A'A = E$; $AA' = E$; $A' = A^{-1}$. Відмітимо, що визначник ортогональної матриці дорівнює ± 1.

Нехай A – дійсна симетрична матриця $(a_{ij} = a_{ji})$. Тоді:

1) всі власні значення матриці A дійсні;

2) власні вектори матриці A, що відповідають різним власним значенням, ортогональні;

3) довільна матриця A зводиться до діагонального вигляду за допомогою ортогональної діагоналізувальної матриці S, причому в цьому випадку перетворення $S^{-1}AS = \Lambda$ переходить в перетворення $S'AS = \Lambda$ і не потрібно знаходити обернену матрицю S^{-1}. Стовпцями матриці S є ортонормовані власні

вектори.

II Контрольні питання та завдання

1. Що називається лінійним оператором?
2. Наведіть означення лінійного перетворення простору.
3. Як визначається матриця лінійного оператора?
4. Як зміниться матриця оператора A при переході від одного базису до другого?
5. Які оператори називаються рівними?
6. Як вводяться лінійні операції над операторами?
7. Що таке добуток лінійних операторів?
8. Чому дорівнює матриця добутку лінійних операторів?
9. Які властивості притаманні операції множення операторів?
10. Що таке обернений оператор? Коли він існує?
11. Як зв'язані між собою елементи матриць лінійних операторів A і A^{-1} в деякому базисі?
12. Що таке власне значення лінійного оператора (перетворення)?
13. Що називається власним вектором лінійного перетворення?
14. Чи залежать власні значення лінійного оператора від вибору базису в лінійному просторі, в якому діє цей оператор?
15. Як знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора?

III. Приклади розв'язування задач.

1. Задано два лінійних перетворення

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3, \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3, \\ y_3 = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = y_1 + 4y_2 + 3y_3, \\ z_2 = 5y_1 - y_2 - y_3, \\ z_3 = 3y_1 + 6y_2 + 7y_3; \end{cases}$$

Знайти перетворення, яке виражає z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3.

Δ Перетворення визначаються матрицями A і B відповідно, де

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Шукане перетворення є добуток даних перетворень з матрицею

$$C = BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{bmatrix}.$$

Отже, шукане перетворення має вигляд

$$\begin{cases} z_1 = 15x_1 & & + 7x_3, \\ z_2 = 6x_2 & - 4x_2 & + 24x_3, \\ z_3 = 33x_1 & - 14x_2 & + 23x_3. \end{cases} ▲$$

2. Знайти власні вектори матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Чи можна звести цю матрицю до діагонального вигляду?

Δ Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0$. Розв'язавши яке, робимо висновок, що $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ – власні значення матриці A. Для знаходження власних векторів, що відповідають $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ і $\lambda_3 = 3$, складаємо систему (28), яка набуває вигляду

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 &= 0, \\ x_2 + (2-\lambda)x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Підставивши сюди $\lambda = 3$, одержимо систему

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 \quad &= 0, \\ x_2 - x_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

яка має розв'язок $x_1 = c,\ x_2 = c,\ x_3 = c$, де $c \in R$. Відкинувши $c = 0$, одержимо, що власний вектор матриці A, що відповідає значенню $\lambda = 3$, має вигляд $\boldsymbol{x} = (c; c; c)$, де c – будь-яке число, відмінне від нуля. Підставивши значення $\lambda = 1$, будемо мати систему

$$\left.\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 \quad &= 0, \\ x_2 + x_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

яка має розв'язок $x_1 = c,\ x_2 = -c,\ x_3 = c$, $c \in R$; тоді власний вектор, що відповідає значенню $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, є $\boldsymbol{x} = (c; -c; c)$, де $c \neq 0$.

Перевіримо умову (30). Для цього при $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ обчислимо $\mathrm{rang}(A - \lambda E)$. Маємо

$$[A-\lambda E]=\begin{bmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 2-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

тобто $\operatorname{rang}(A-\lambda E)=2$, але $n-m_k=n-2=1$ (тут $m_k=2$ – кратність кореня $\lambda=1$), отже, умова (30) порушується. Матриця A незвідна до діагонального вигляду. ▲

IV Завдання для самостійної роботи

1. Для заданих двох лінійних перетворень знайти $3A-2B$.

$$(A):\begin{cases}x_1=x+2y+3z,\\ y_1=4x+5y+6z,\\ z_1=7x+8y+9z;\end{cases}\text{ і } (B):\begin{cases}x_1=\quad x+\ 3y+4{,}5z,\\ y_1=\quad x+\ 7y+\ 9z,\\ z_1=10{,}5x+12y+13z\end{cases}$$

Відповідь: E

2. Для заданих двох лінійних перетворень знайти перетворення, яке виражає x_1'',x_2'',x_3'' через x_1,x_2,x_3:

$$\text{а)}\begin{cases}x_1'=4x_1+6x_2+9x_3,\\ x_2'=3x_1+7x_2+x_3,\\ x_3'=5x_1+x_2+8x_3;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1''=-x_1'+3x_2'-2x_3',\\ x_2''=-4x_1'+x_2'+2x_3',\\ x_3''=3x_1'-4x_2'+5x_3'.\end{cases}$$

$$\text{б)}\begin{cases}x_1'=x_1-x_2-x_3,\\ x_2'=-x_1+4x_2+7x_3,\\ x_3'=8x_1+x_2-x_3;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1''=4x_1'+3x_2'+x_3',\\ x_2''=3x_1'+2x_2'-2x_3',\\ x_3''=x_1'+2x_2'+x_3'.\end{cases}$$

Відповідь: а) $\begin{cases}x_1''=-5x_1+13x_2-22x_3,\\ x_2''=-3x_1-15x_2-19x_3,\\ x_3''=25x_1-5x_2+63x_3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1''=9x_1+9x_2+16x_3,\\ x_2''=-14x_1-x_2-6x_3,\\ x_3''=7x_1+8x_2+12x_3.\end{cases}$

3. Встановити, які з даних векторів x_1,x_2,x_3 є власними векторами матриці A і знайти їх власні значення, якщо:

$$a)\ A=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 6 & -5\end{bmatrix},\ x_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ x_2=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix},\ x_3=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix};$$

$$б)\ A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ x_1=\begin{bmatrix}0\\ -2\\ 2\end{bmatrix},\ x_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix},\ x_3=\begin{bmatrix}4\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$$

Відповіді: а) x_1, $\lambda_1=1$; x_2, $\lambda_2=-1$; б) x_1, $\lambda_1=0$; x_2, $\lambda_2=0$.

4. Знайти власні числа і власні вектори матриці A :

а) $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$; в) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

Відповіді: а) $\lambda_1=1, x_1=(c;c), c\neq 0; \lambda_2=-1, x_2=(2c;c), c\neq 0;$

б) $\lambda_1=0, x_1=(c;0;c), c\neq 0; \lambda_2=1, x_2=(c;c;c), c\neq 0; \lambda_3=2, x_3=(c;0;-c), c\neq 0;$

в) $\lambda_1=1, x_1=(c;0;0;0), c\neq 0; \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2, x=(-c_2;c_2;-c_1;c_1), c_1^2+c_2^2\neq 0.$

7 Квадратичні форми

I Основні поняття

Квадратичною формою $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається многочлен другого степеня відносно цих змінних, що не містить вільного члена і членів першого степеня.

Позначимо коефіцієнт при x_i^2 через a_{ii}, а коефіцієнт при добутку $x_i x_k = x_k x_i \ (i\neq k)$ – через $a_{ik}+a_{ki}$, причому $a_{ik}=a_{ki}$. Член $(a_{ik}+a_{ki})x_i x_k$ запишемо у вигляді $a_{ik}x_i x_k + a_{ki}x_k x_i$. Тепер квадратичну форму Q можна подати в такому вигляді

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{1n}x_1x_n+\ldots+$$
$$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\ldots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,. \qquad (31)$$

Якщо ввести в розгляд матрицю A і стовпець X

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1,\\ x_2,\\ \ldots\\ x_n\end{bmatrix},$$

то квадратичну форму можна записати в матричному вигляді $Q=X^TAX$.

Симетрична матриця $A=(a_{ij})$ називається *матрицею квадратичної форми* Q. Ранг матриці A називається *рангом квадратичної форми.*

Приклад. Записати матрицю квадратичної форми

$$Q(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-4x_1x_2+2x_2x_3-3x_2^2+10x_3^2\,.$$

Δ Тут $a_{11}=1$, $a_{12}=a_{21}=-2$, $a_{13}=a_{31}=0$, $a_{22}=-3$, $a_{23}=a_{32}=1$, $a_{33}=10$. Отже,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}. \ \blacktriangle$$

Очевидно, матриці $B=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ відповідає квадратична форма

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_2^2.$$

Квадратична форма (31) називається канонічною, якщо $a_{ij} = 0$ для всіх $i \neq j$, тобто канонічна квадратична форма має вигляд

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2.$$

Відмітимо, що матриця канонічної квадратичної форми є діагональною. Питання про приведення квадратичної форми до канонічного вигляду має важливе значення для дослідження кривих і поверхонь другого порядку. Будь-яка квадратичну форму за допомогою ортогонального перетворення можна привести до канонічного вигляду:

$$Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – власні значення матриці A квадратичної форми. Оскільки матриця A симетрична, то всі її власні значення дійсні і квадратична форма в базисі, який складається з нормованих власних векторів матриці A, приводиться до канонічного вигляду.

Квадратична форма (31) називається *нормальною*, якщо вона являє собою суму квадратів декількох змінних з коефіцієнтами $+1$ або -1. Будь-яку дійсну квадратичну форму (31) можна звести не виродженим лінійним перетворенням до нормального вигляду:

$$Q(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - z_{k+2}^2 - \ldots - z_n^2,$$

причому загальне число квадратів, що сюди входять, дорівнює рангу форми.

Має місце ***закон інерції*** дійсних квадратичних форм: *число додатних і число від'ємних коефіцієнтів у нормальному вигляді, до якого дана квадратична форма з дійсними коефіцієнтами зводиться лінійним перетворенням, не залежить від вибору перетворення.*

Число додатних квадратів в тій нормальній формі, до якої зводиться дана квадратична форма Q, називається *додатним індексом інерції* цієї форми, а число від'ємних квадратів – *від'ємним індексом інерції.* Різниця між додатним і від'ємним індексами інерції називається *сигнатурою* форми Q. *Дві квадратичні форми від* ***n*** *змінних з дійсними коефіцієнтами тоді і тільки тоді зводяться в одну не виродженими дійсними лінійними перетвореннями, коли ці форми мають рівні ранги і сигнатури.*

Квадратичну форму можна привести до канонічного вигляду, використовуючи метод Лагранжа, який полягає в послідовному виділенні в квадратичній формі повних квадратів, або метод Якобі, який застосовують, коли всі головні мінори матриці квадратичної форми відмінні від нуля: $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, ... , $\Delta_n \neq 0$. Тоді перетворення

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 + \ldots + \alpha_{n1}y_n, \\ x_2 &= \qquad\quad y_2 + \alpha_{31}y_3 + \ldots + \alpha_{n1}y_n, \\ x_3 &= \qquad\qquad\qquad y_3 + \ldots + \alpha_{n1}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y_n \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

приводить квадратичну форму до канонічного вигляду

$$\beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \ldots + \beta_n y_n^2, \qquad (33)$$

де $\beta_1 = \Delta_1$, $\beta_2 = \Delta_2/\Delta_1$, $\beta_3 = \Delta_3/\Delta_2$, ... ,$\beta_n = \Delta_n/\Delta_{n-1}$.

Коефіцієнти α_{ij} перетворення (32) знаходять за формулами

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{j-1,i}/\Delta_{j-1}, \qquad (34)$$

де через $\Delta_{j-1,i}$ позначено мінор матриці A, який розташований на перетині рядків цієї матриці з номерами $1, 2, \ldots, j-1$ і стовпців з номерами $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j$.

Квадратична форма (31) називається *позитивною* (*негативною*) *визначеною*, якщо для будь-якого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,(x \neq 0)$ виконується нерівність $Q(x) > 0$ (<0). Відповідно матриця A називається *позитивною* (*негативною*) *визначеною матрицею*. Для того, щоб квадратична форма $Q(x) = x'Ax$ була *позитивно* (*негативно*) *визначеною*, необхідно і достатньо, щоб спектр матриці A складався тільки з додатних (від'ємних) чисел. Має місце критерій Сільвестра: *для того, щоб квадратична форма $Q(x) = x'Ax$ була позитивно визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори матриці A були додатними: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$. Матриця A негативно визначена тоді і тільки тоді, коли головні мінори матриці A мають знаки, що чергуються:* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$.

II Контрольні питання та завдання

1.Що називається квадратичною формою і її матрицею? В якому випадку говорять, що квадратична форма має канонічний вигляд?

2.Запишіть матрицю квадратичної форми $6x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$.

3.Запишіть квадратичну форму, якщо її матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 22 \\ 2 & -1 & 3 \\ 22 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4.Як зміниться матриця квадратичної форми при лінійному перетворенні змінних? Покажіть, що нова матриця є симетрична.

5.Чи зберігається число відмінних від нуля канонічних коефіцієнтів квадратичної форми при не виродженому перетворенні змінних?

6.В чому суть методу Лагранжа зведення квадратичної форми до канонічного вигляду?

7.Чи будь-яку квадратичну форму можна звести до канонічного вигляду методом Лагранжа?

8.В чому суть методу Якобі зведення квадратичної форми до канонічного вигляду?

9.Нехай задано квадратичну форму ***n*** змінних. Яка розмірність матриці не виродженого перетворення змінних, яке зводить її до канонічного вигляду?

10.Наведіть означення знаковизначеної квадратичної форми.

11.Сформулюйте критерій Сільвера знаковизначеності квадратичної форми.

III Приклади розв'язування задач

1. Звести квадратичну форму

$$Q(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+2x_1x_2+6x_1x_3+4x_2x_3-8x_3^2$$

до канонічного вигляду методом Лагранжа.

Δ Представимо дану квадратичну форму у вигляді

$$Q(x_1,x_2,x_3)=-(x_1^2-2x_1x_2-6x_1x_3)+4x_2x_3-8x_3^2=$$

$$=-(x_1^2-2x_1(x_2+3x_3)+(x_2+3x_3)^2-(x_2+3x_3)^2)+4x_2x_3-8x_3^2=$$

$$=-(x_1-(x_2+3x_3))^2+(x_2+3x_3)^2+4x_2x_3-8x_3^2=$$

$$=-(x_1-x_2-3x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3+9x_3^2+4x_2x_3-8x_3^2=$$

$$=-(x_1-x_2-3x_3)^2+x_2^2+10x_2x_3+x_3^2=$$

$$=-(x_1-x_2-3x_3)^2+(x_2+5x_3)^2-24x_3^2.$$

Невироджене перетворення

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1-x_2-3x_3,\\ y_2 &= \qquad\ \ x_2+5x_3,\\ y_3 &= \qquad\qquad\quad\ x_3 \end{aligned}\right\}$$

приводить дану квадратичну форму до канонічного вигляду

$$Q(y_1,y_2,y_3)=-y_1^2+y_2^2-24y_3^2. \ \blacktriangle$$

2. Звести в квадратичну форму

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$$

до канонічного вигляду методом Якобі і записати відповідне перетворення.

Δ Матриця даної квадратичної форми має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо її головні мінори

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -16.$$

Оскільки всі головні мінори відмінні від нуля, метод Якобі можна застосувати, і з допомогою співвідношення (33) знаходимо $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -5$, $\beta_3 = 3,2$. В даному випадку перетворення (32) набуде вигляду

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \alpha_{21} y_2 + \alpha_{31} y_3, \\ x_2 &= \qquad\quad y_2 + \alpha_{32} y_3, \\ x_3 &= \qquad\qquad\qquad y_3, \end{aligned}\right\},$$

де числа $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{32}$ знаходимо згідно з формулами (34):

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1} = -\frac{2}{1} = -2,$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \frac{\Delta_{21}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = -0,4,$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+2} \frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = 0,2.$$

Отже, перетворення

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 - 2y_2 - 0,4y_3, \\ x_2 &= \qquad\ y_2 + 0,2y_3, \\ x_3 &= \qquad\qquad\quad y_3 \end{aligned}\right\}$$

Зводить дану квадратичну форму до канонічного вигляду
$Q(y_1, y_2 y_3) = y_1^2 - 5y_2^2 + 3,2y_3^2$. ▲

3. Знайти ортогональну матрицю, яка зводить квадратичну форму
$Q(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$
до канонічного вигляду, і записати вигляд квадратичної форми.

Δ Матриця даної квадратичної форми має вигляд

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Складемо і розв‘яжемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 98 = 0,$ звідки $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 7.$

Знайдемо власні вектори, які відповідають значенню $\lambda = -2$; одержуємо систему

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

яка рівносильна системі

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

Звідки знайдемо : $x_3 = 2c, \ x_2 = 2c, \ x_1 = -c$. Власний вектор, який відповідає $\lambda = -2$, має вигляд $x_1 = (-c;2c;2c)$, де $c \neq 0$. Поклавши, наприклад, с = –1, одержимо власний вектор $x_1 = (1;-2;-2)$. Пронормувавши його, будемо мати

$$\overline{v_1} = x_1 / |x_1| = (1/3;-2/3;-2/3).$$

Знайдемо тепер власні вектори, які відповідають $\lambda_2 = \lambda_3 = 7$. Система для знаходження координат власного вектора матиме вигляд

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

Покладаючи $x_3 = c_1, x_2 = c_2$, маємо $x_1 = 2c_1 + 2c_2$. Таким чином, множина власних векторів, які відповідають значенню $\lambda_2 = \lambda_3 = 7$, представляє собою двопараметричне сімейство: $x_2 = (2c_1 + 2c_2; c_1; c_2)$,

де $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. З цього сімейства виділимо два ортогональних вектори. Поклавши, наприклад, $c_1 = 0, c_2 = 1$, будемо мати $x_2 = (2;0;1)$. Власний вектор $x_3 = (2\overline{c_1} + 2\overline{c_2}; \overline{c_1}; \overline{c_2})$ будемо шукати з умови, що вектори x_2 і x_3 ортогональні, тобто з умови $2(2\overline{c_1} + 2\overline{c_2}) + 0 \cdot \overline{c_1} + \overline{c_2} = 0$ або $4\overline{c_1} + 5\overline{c_2} = 0$. Нормуючи вектори x_2 і x_3, одержуємо ортонормовані власні вектори

$$\overline{v_1} = (2/\sqrt{5};0;1/\sqrt{5}) \text{ і } \overline{v_1} = (2/(3\sqrt{5});5/(3\sqrt{5});-4/(3\sqrt{5}))$$

Тоді ортогональна матриця, яка зводить квадратичну форму до канонічного вигляду, набуде вигляду

$$S=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/(3\sqrt{5}) \\ -2/3 & 0 & 5/(3\sqrt{5}) \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/(3\sqrt{5}) \end{bmatrix}.$$

Застосувавши не вироджене лінійне перетворення

$$\begin{cases} x_1 = 1/3y_1 + 2/\sqrt{5}y_2 + 2/(3\sqrt{5})y_3, \\ x_2 = -2/3y_1 \qquad\qquad + 2/(3\sqrt{5})y_3, \\ x_3 = -2/3y_1 + 1/\sqrt{5}y_2 + 4/(3\sqrt{5})y_3, \end{cases}$$

одержимо шукану канонічну форму

$$Q(y_1, y_2 y_3) = -2y_1^2 + 7y_2^2 + 7y_3^2. \blacktriangle$$

IV Завдання для самостійної роботи

1. Записати матрицю кожної з квадратичних форм:

а) $Q(x_1,x_2) = 5x_1x_2$; б) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$;

в) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$;

г) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = 4x_1^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + x_1x_2 + 8x_1x_4 - 10x_2x_3$;

д) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 - 6x_1x_3 + 9x_2x_3$.

Відповіді: а) $\begin{bmatrix} 0 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 0 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$,

г) $\begin{bmatrix} 4 & 0{,}5 & 0 & 4 \\ 0{,}5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, д) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4{,}5 & 0 \\ -3 & 4{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Записати квадратичну форму за даною матрицею A:

а) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$; в) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$;

г) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; д) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 8 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Відповіді: а) $Q(x_1,x_2) = -x_1^2 + 6x_1x_2$;

б) $Q(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_2x_3$;

в) $Q(x_1,x_2,x_3) = 2x_2^2 - x_3^2 - 6x_2x_3$;

г) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3$;

д) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=-x_1^2+x_2^2-x_4^2+6x_1x_2-4x_1x_4+16x_2x_4-6x_3x_4$.

3. Знайти ранг квадратичної форми:

а) $Q(x_1,x_2)=x_1^2+16x_2^2-8x_1x_2$;

б) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3$;

в) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$.

Відповіді: а) 1; б) 3; в) 3.

4. Знайти ортогональне перетворення, яке зводить до канонічного вигляду квадратичну форму $Q(x_1,x_2...x_n)$; записати відповідний канонічний вигляд квадратичної форми; вказати додатний і від‘ємний індекси інерції і сигнатуру, якщо:

а) $Q(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_2^2+2\sqrt{2}x_1x_2$;

б) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

в) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2+2x_1x_2-4x_3x_4-2x_4^2$.

Відповіді: а) $y_1^2+4y_2^2$; б) $5y_1^2-y_2^2-y_3^2$; в) $y_1^2-2y_2^2$.

5. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду методом Якобі (якщо можливо) і записати відповідне перетворення:

а) $Q(x_1,x_2)=3x_1^2+3x_2^2+6x_1x_2$;

б) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$;

в) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$;

Відповіді: а) не зводиться;

б) $2y_1^2+5y_2^2+3y_3^2$, $x_1=y_1+y_2$, $x_2=y_2$, $x_3=y_3$;

в) $y_1^2+4y_2^2-9y_3^2$, $x_1=y_1-y_2-3{,}5y_3$, $x_2=y_2+0{,}5y_3$, $x_3=y_3$.

6. Дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

а) $\mathrm{Q}(x_1,x_2)=2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$; б) $\mathrm{Q}(x_1,x_2)=x_1^2-12x_1x_2+2x_2^2$;

в) $\mathrm{Q}(x_1,x_2,x_3)=-3x_1^2+x_2^2+3x_3^2-x_1x_2+2x_2x_3$;

г) $\mathrm{Q}(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+6x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

Відповіді: а) позитивно визначена; б) не є знаковизначеною; в) не є знаковизначеною; г) позитивно визначена.

7. При яких значеннях k квадратична форма $Q(x_1,x_2...x_n)$ є позитивно визначеною:

а) $\mathrm{Q}(x_1,x_2,x_3)=kx_1^2+2x_2^2+3x_3^2$;

б) $\mathrm{Q}(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2kx_1x_3$.

Відповіді: а) $k>0$; б) $|k|<\sqrt{2}$.

8 Використання системи MathCAD

В наш час особливий розвиток одержали системи комп'ютерної математики (СКМ) для персональних комп'ютерів такі як Mathematica, Maple, MathCAD. Системи класу MathCAD є одними з кращих для користувачів, які працюють в області техніки або природничих наук, а також для студентів, викладачів і навіть школярів. MathCAD вигідно відрізняється від інших систем комп'ютерної математики можливістю вільно компонувати робочий лист і легкістю у вивченні. Останні версії MathCAD 2000 PRO і Premium мають потужні засоби для реалізації чисельних методів розрахунків і математичного моделювання в поєднанні з можливістю виконання багатьох операцій символьної математики. Все це доповнюється неперевершеними засобами візуалізації обчислень – від представлення вихідних даних і результатів обчислень в природному математичному вигляді до потужної багатоколірної графіки, включаючи анімаційну графіку і можливість побудови в 3-D просторі відразу кількох поверхонь і фігур.

Системи комп'ютерної алгебри забезпечуються спеціальним процесором для виконання аналітичних (символьних) обчислень. Його основою є ядро, що зберігає всю сукупність формул і формульних перетворень, за допомогою яких провадяться аналітичні обчислення. Чим більше цих формул у ядрі, тим надійніша робота символьного процесора і тим імовірніше, що поставлена задача буде вирішена, зрозуміло, якщо такий розв'язок існує в принципі (що буває далеко не завжди).

Ядро символьного процесора системи MathCAD трохи спрощений варіант ядра відомої системи символьної математики Maple V фірми Waterloo Maple Software, у якої MathSoft (розробник MathCAD) придбала ліцензію на його застосування, завдяки чому MathCAD стала (починаючи з версії 3.0) системою символьної математики.

Операції, що відносяться до роботи символьного процесора, містяться в підменю позиції **Symbolics** (Символічний) головного меню.

Щоб символьні операції виконувалися, процесору необхідно вказати, над яким виразом ці операції повинні виконуватися, тобто треба виділити вираз (правила виділення неодноразово описувалися вище). Для ряду операцій варто не тільки вказати вираз, до якого вони відносяться, але і відмітити змінну, щодо якої виконується та чи інша символьна операція. Сам вираз в такому випадку не виділяється, адже і так ясно, що якщо маркер вводу виділяє змінну якогонебудь виразу, те цей вираз вже відмічений.

Виділення пунктирною лінією використовується для переміщення об'єктів у вікні. Для цього досить всередину відміченого об'єкта (виразу) помістити курсор миші, натиснути праву клавішу і, утримуючи її натиснутої, переміщати мишу. При цьому об'єкт (чи відразу кілька об'єктів) буде переміщатися по екрану і його можна залишити (відпустивши клавішу миші) на новому місці. Нагадаємо, що натискання клавіші F3 веде до перенесення виразів у буфер обміну і видалення їх у вікні. Натискання клавіші F4 переносить вираз з буфера обміну на місце, вказане курсором. Курсор можна переміщати як мишею, так і звичайними клавішами керування ним.

Для виконання операцій із символьним процесором потрібно виділити об'єкт (цілий вираз чи його частину) суцільними лініями, синіми на екрані кольорового дисплея. Для виділення деякої змінної в об'єкті потрібно підвести до її кінця курсор миші і натиснути ліву клавішу. Змінна буде відзначена жирною рискою (синьої на екрані кольорового дисплея), розташованою відразу після змінної. Переміщуючи курсор по полю об'єкта і натискаючи ліву клавішу повторно, можна виділити окремі частини виразу чи вираз повністю.

При розв'язанні багатьох задач в математиці та її застосувань потрібно оперувати багатовимірними об'єктами, розглядати їх лінійні комбінації і т. ін. Методи адекватного опису таких об'єктів і співвідношень між ними були розроблені математиками у рамках векторного і матричного числення, а також лінійної алгебри. Область застосування векторного і матричного числення значно розширилась, коли виявилося, що розв'язання багатьох нелінійних задач досягається способом лінеаризації.

Потужні можливості виконання з матрицями операцій як символьних, так і чисельних, безумовно належать до сильних сторін MathCAD.

Вектори можна розглядати як матриці, які складаються з одного стовпця. В MathCAD введення векторів виконується аналогічно введенню матриць.

Матрицю можна задати, використовуючи команду **Matrix** (Матриця) меню **Insert** (Вставка) (комбінація клавіш [Ctrl+M]) або відповідної піктограми панелі **Matrix** (Матриця). У всіх трьох випадках з'явиться діалогове вікно, у відповідних полях якого необхідно задати число рядків і стовпців матриці. Задані таким чином матриці не мають імен. Якщо потрібно ввести матрицю, що має ім'я, то потрібно спочатку задати ім'я матриці, потім оператор присвоєння (комбінація клавіш [Shift+;]) і в порожню комірку ввести матрицю одним із наведених вище способів.

З матрицями і векторами можна виконувати як чисельні, так і символьні обчислення.

Для символьного виконання операцій з матрицями (як правило, з безіменними операндами) можна використовувати панель **Symbolics** (Символічний) або меню **Symbolics** (Символи). Вся операції, за винятком транспонування і обертання матриці, а також знаходження й визначника, виконуються (після виділення виразу, що обчислюється, курсором формул) командою **Symbolically** (Символічні) підменю **Evaluate** (Розрахунки) меню **Symbolics** (Символи). Наступне виконання команди **Simplify** (Спростити) дозволяє зробити результат обчислень менш громіздким. Для трьох вище згаданих винятків у меню **Symbolics** (Символи) передбачено окреме підменю **Matrix** (Матриці), що містить команди **Transpose** (Транспонувати), а також тільки для квадратних матриць **Invert** (Обернути) і **Determinant** (Визначник).

Для роботи з векторами і матрицями система MathCAD містить ряд операторів і функцій. Розглянемо спочатку оператори, ввівши такі позначення: **V** - вектор, **M** - матриця, ***a*** - скаляр. В табл. 1 наведено оператори для роботи з векторами і матрицями.

Зазначимо, що більшість наведених вище операцій можуть викликатися з палітри матричних операцій.

MathCAD робить роботу з матрицями і векторами такою ж простою, як і з звичайними числами і змінними. Це, безумовно, сприяє застосуванню векторних і матричних методів математичних обчислень в практику науковотехнічних розрахунків. На рис. 3 наведені приклади застосування найбільш поширених векторних операторів, про які говорилось вище.

Таблиця 1 - Операції з векторами і матрицями

Операція	Запис	Клавіші	Дія
Додавання скаляра	$M+a$	[+]	Додавання скаляра до кожного елемента матриці
Віднімання скаляра	$M-a$	Н	Віднімання скаляра від кожного елемента матриці
Множення на скаляр	$M\ a$	[*]	Моження кожного елемента матриці на скаляр
Від'ємне значення	$-M$	[–]	Поелементне множення на –1
Ділення на скаляр	M/a	[/]	Поелементне ділення на скаляр
Спряжена матриця	$\overline{M}$	["]	Заміна кожного елемента на спряжений
Транспонування	M^T	[Ctrl+1]	Міняє місцями рядки і стовпці
Скалярний добуток	$V_1 \cdot V_2$	[*]	Скалярний добуток двох векторів однакової розмірності.
Векторний добуток	$V_1 \times V_2$	[Ctrl+8]	Векторний добуток в просторі R^3.
Додавання матриць	M_1+M_2	[+]	Поелементне додавання матриць однакової розмірності
Віднімання матриць	M_1-M_2	Н	Поелементне віднімання матриць однакової розмірності
Множення матриць	$M_1 \cdot M_2$	[*]	Множення матриць (число стовпців M_1 повинно збігатись з числом рядків M2)
Піднесення матриці до степеня	M^n	[^]	n – й степінь квадратної матриці
Обертання матриці	M^{-1}	[^]	Обернена матриця
Модуль	$\|V\|$	[|]	Обчислення модуля вектора
Визначник	$\|M\|$	[|]	Обчислення визначника матриці
Сума	$\sum V$	[Ctrl+4]	Сума компонент вектора
Стовпець матриці	$M^{<n>}$	[Ctrl+6]	Вилучення n - го стовпця матриці
Компонента вектора	V_n	[[]	Вилучення n — ї компоненти вектора
Елемент матриці	$M_{m.n}$	[[]	Вилучення елемента $a_{n,m}$ матриці
Векторизація	$\overrightarrow{A \cdot B}$	[Ctrl+-]	Дає вектор з елементами $a_i\ b_i$.

Приклади векторних операцій

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad u := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad w := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Задання трьох векторів

$$3u - 2 \cdot v = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Множення вектора на скаляр і додавання векторів

$$u \cdot v = -7$$

Скалярний добуток векторів

$$u \times v = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Векторний добуток векторів

$$(w \times u) \cdot v = 8$$

Змішаний добуток векторів

$$(w \times u) \times v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Подвійний векторний добуток

Рисунок 3

На рис. 4 показано застосування операторів для роботи з матрицями.

Приклади дій з матрицями

$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad rows(A) = 2 \quad cols(A) = 3$ — Задання матриці A розмірності 2x3

$B := A^T \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ — Транспонування матриці A

$C := identity(3) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — Створення одиничної матриці

$tr(C) = 3 \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 \\ -1 & 24 & -1 \\ 36 & 5 & 22 \end{pmatrix}$ — Обчислення сліду матриці A

$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B := A^{-1} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$ — Задання і обертання матриці A

$B := \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ — Задання і множення матриць

$D := |A| \qquad D = -19$ — Обчислення визначника матриці

$A := \begin{pmatrix} 1-2i & 1 \\ 0 & 4+3i \end{pmatrix} \qquad B := \overline{A}$ — Задання матриці A з комплексними елементами

$B = \begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 0 & 4-3i \end{pmatrix}$ — Одержання комплексно спряженої матриці B

Рисунок 4

Для роботи з матрицями також існує ряд вбудованих функцій.

Матричні функції.

augment(M1,M2) - об'єднує в одну матрицю матриці M і M2, що мають однакове число рядків (об'єднання йде "пліч о пліч");

identity(n) - створює одиничну квадратну матрицю розміром $n \times n$;

stack(M1,M2) - об'єднує дві матриці M1 і M2, що мають однакове число стовпців, розташовуючи M1 над M2;

submatrix (A, *ir,jr, ic, jc)* - повертає блок матриці A, який складається із всіх елементів, що містяться в рядках від *ir* до *jr* і стовпцях з *ic* по *jc*

diag(V) – створює діагональну матрицю, елемент головної діагоналі якої - вектор V;

matrix (m,n,f) - повертає матрицю, в якій (i,j) – елемент містить $f(i,j)$, де i=0,...,m і j=1,0,...,n.

Re(M) - повертає матрицю дійсних частин матриці M з комплексними елементами;

Im(M) - повертає матрицю уявних частин матриці M з комплексними елементами.

cholesky(M) - повертає трикутну матрицю **L** для трикутного розкладу симетричної матриці **M** методом Халецького.

csort (*A*,*n*) - матриця A, відсортована за стовпцем *n* перестановкою рядків у порядку зростання значень елементів в стовпці *n*.

diag(v) - діагональна матриця, елементи головної діагоналі якої - вектор **v**.

rsort (*A*,*n*) - матриця A, відсортована за рядком *n* перестановкою стовпців у порядку зростання значень елементів у рядку *n*.

sort (v) - вектор v, відсортований за спаданням.

Функції, які повертають спеціальні характеристики матриць.

cols(M) - повертає число стовпців матриці M;

rows(M) - повертає число рядків матриці M;

rank(M) - повертає ранг матриці M;

tr(M) - повертає слід (суму діагональних елементів) квадратної матриці M;

mean(M) - повертає середнє значення елементів масиву M;

median(M) - повертає медіану елементів масиву M;

cond1(M) - повертає число обумовленості матриці, яке обчислене в нормі L1;

cond2(M) - повертає число обумовленості матриці, яке обчислене в нормі L2;

conde(M) - повертає число обумовленості матриці, яке обчислене в нормі евклідового простору;

condi(M) - повертає число обумовленості матриці, яке базується на рівномірній нормі;

norm1(M) - повертає L1, норму матриці M;

norm2(M) - повертає L2, норму матриці M;

norme(M) - повертає евклідову норму матриці M;

normi(M) - повертає невизначену норму матриці M;

eigenvec(M,z) - повертає нормований власний вектор матриці M, що відповідає її власному значенню *z*.;

eigenvals(M) - повертає вектор, елементами якого є власні значення матриці M;

eigenvecs(M) - матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці M (порядок розташування власних векторів відповідає порядку власних значень, що повертаються функцією **eigenvals**);

rref(A) - ступінчастий вид матриці A.

На рис. 5 наведено приклади застосування матричних функцій.

Застосування матричних функцій

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Задання матриці A розмірності 3x3

$$V := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{augmen}(A,V) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Задання вектора V і приєднання його до матриці A

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{augment}(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задання матриці B і приєднання її до матриці A

$$CM := \begin{pmatrix} 1+2i & 2-3i & i \\ 2 & 0 & 3-i \\ 1-i & 2+4i & 0 \end{pmatrix} \qquad i := \sqrt{-1}$$

Задання матриці CM, комплексними елементами

$$R := \mathrm{Re}(CM) \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Виділення матриці R – дійсної частини матриці CM

$$MC := R + J\cdot i \qquad J := \mathrm{Im}(CM) \qquad J = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Виділення матриці J – уявної частини матриці CM

$$MC = \begin{pmatrix} 1+2i & 2-3i & i \\ 2 & 0 & 3-i \\ 1-i & 2+4i & 0 \end{pmatrix}$$

Відновлення матриці з комплексними елементами за матрицями R і J

Рисунок 5

Додатково до вбудованих функцій система MathCAD дає можливість визначати і функції користувача, які використовують векторні і матричні вирази як аргументи. При цьому означення їх можуть носити як локальний, так і глобальний характер.

В системі MathCAD введено незвичне для математичної літератури поняття "векторизація", яке припускає одночасне виконання деякої скалярної операції над всіма елементами вектора чи матриці. Якщо, наприклад, A і B - вектори, то $A \cdot B$ дає скалярний добуток цих векторів. Векторизація може змінити зміст математичних виразів і навіть перетворити неприпустимий в попередніх версіях MathCAD вираз в цілком припустимий. Наприклад, якщо V - вектор, то вираз cos(V) буде неприпустимим, оскільки аргументом функцій cos може бути тільки скалярна змінна. Однак зі знаком векторизації функція cos(V) повертає вектор, кожний елемент якого є косинус відповідного елемента вектора V. В MathCAD 2000 операція векторизації в подібних випадках виконується автоматично.

Отже, векторизація дозволяє використовувати скалярні оператори для роботи з масивами. Це значно спрощує запис математичних алгоритмів, особливо для забезпечення паралельних обчислень.

Розв'язування систем лінійних рівнянь. Векторні і матричні функції системи MathCAD дозволяють розв'язати широке коло задач лінійної алгебри. Наприклад, якщо задані матриця A і вектор B для системи лінійних рівнянь в матричній формі $A \cdot B = X$, то вектор розв'язку можна одержати з очевидної рівності $X = A^{-1} \cdot B$. На рис. 6 наведено приклад розв'язування системи лінійних рівнянь.

Розв'язвання системи лінійних рівнянь

$$A := \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 6.6 & -1.1 \\ 4.5 & -1.8 & -0.3 & 6.5 \\ -7.3 & 9.7 & 10.9 & -4.1 \\ 8.1 & -2.7 & 8.7 & 8.9 \end{pmatrix}$$

Матриця коефіцієнтів

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

Вектор вільних членів

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} -3.937 \\ -2.975 \\ 0.746 \\ 1.952 \end{pmatrix}$$

Розв‘язок системи

Рисунок 6

Оскільки розв'язування систем лінійних рівнянь досить поширена задача, то для цього в MathCAD, починаючи з шостої версії, введено вбудовану функцію **Isolve,** яка повертає вектор **X** при заданій матриці коефіцієнтів **A** і векторі вільних членів **B**. Якщо рівнянь *n,* то розмірність вектора B повинна бути *n*, а матриці A- $n \times n$ (рис. 7).

Розв'вязування системи лінійних рівнянь з Використанням функції Isolve

Матриця коефіцієнтів систем

$$A := \begin{pmatrix} 4.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 5.3 & 0.9 & -0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 3.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & -9.1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок системи

$$B := \begin{pmatrix} 21.14 \\ -17.82 \\ 9.02 \\ 17.08 \end{pmatrix}$$

Вектор вільних членів

$$X := \text{Isolve}(A, B) \qquad X = \begin{pmatrix} 5.2 \\ -4.2 \\ 3 \\ -1.8 \end{pmatrix}$$

Рисунок 7

Для розв'язування системи рівнянь і (або) нерівностей в середовищі пакета MathCAD використовується спеціальна конструкція, яка називається розв'язувальним блоком. Блок складається із заголовка (ключове слово GIVEN), його тіла (визначення, система рівнянь і (або) нерівностей) і кінця блоку (функція FIND або MINERR).

Блок завжди відкривається словом GIVEN, за яким йдуть необхідні визначення, рівняння і (або) нерівності, які складають його тіло. Блок не має обмежень по горизонталі, а по вертикалі всі рядки, розташовані нижче рядка, що містить слово GIVEN, і вище рядка з функцією FIND або MINERR, відносяться до тіла. Кінцем блоку є перший прийнятний вираз, що містить функцію FIND або MINERR, які мають такий формат:

FIND ("Список головних змінних")

MINERR ("Список головних змінних"),

де "Список змінних" включає перелік змінних блоку (ці змінні називатимемо *головними*), відносно яких повинна була розв'язана система рівнянь і (або) нерівностей, що входить в його тіло. При цьому будь-яка з цих функцій повертає розв'язувальний вектор-стовпець значень з кількістю елементів, яке дорівнює числу елементів "Списку головних елементів" функції завершення блоку. Відмінність функцій FIND або MINERR полягає в тому, що перша намагається одержати наближений розв'язок блоку тоді як друга замість розв'язку повертає значення ведучих змінних, що мінімізують величину |ERR| вектора відхилення від точного розв'язку. При наявності у блоці розв'язку, значення і зміст функцій FIND або MINERR збігаються.

Як головні, так і інші змінні блоку повинні бути завчасно визначені до початку блоку. Пакет використовує значення головних змінних в якості перших наближень при чисельному розв'язуванні блоку. Змінні можна визначати і в середині самого блоку, але тільки глобально. На рис. 8 наведено приклади розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою розв'язувального блоку.

$x1 := 1 \quad x2 := 1 \quad x3 := 1 \quad x4 := 1$

Given

$$3.15x1 + 2.72x2 - 3.34x3 + 0.65x4 = 3.29$$
$$1.22x1 + 3.83x2 + 4.24x3 + 2.42x4 = 14.71$$
$$2.31x1 + 1.15x2 + 3.72x3 + 1.11x4 = 10.20$$
$$0.42x1 + 2.51x2 - 2.05x3 + 3.42x4 = 5.67$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3, x4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0859881799171099375 \\ 1.1805623106707523712 \\ 1.2777173441873808220 \\ 1.4239748889577064502 \end{pmatrix}$$

$x1 := 1 \quad x2 := 1 \quad x3 := 1 \quad x4 := 1$

Given

$$2x1 + x2 - x3 + x4 = 9$$
$$-x1 + x2 - x3 + x4 = 3$$
$$3x1 - x2 + x3 - x4 = 1$$
$$x1 - 2x2 + 3x3 + 2x4 = 5$$

$$\mathrm{Minerr}(x1, x2, x3, x4) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \cdot x4 + 18 \\ -4 \cdot x4 + 13 \\ x4 \end{pmatrix}$$

Рисунок 8

8. Індивідуальні домашні завдання

1. Виконати дії над матрицямя.

1. $2(A+B)(2B-A)$, де $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

2. $3A-(A+2B)B$, де $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

3. $2(A-B)(A^2+B)$, де $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $(A^2-B^2)(A+B)$, де $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $(A-B^2)(2A+B)$, де $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $(A-B)A+2B$, де $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. $2(A-0{,}5B)+AB$, де $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $(A-B)A+3B$, де $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

9. $2A-(A^2+B)B$, де $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\2&1&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&6&-2\\4&10&1\\2&4&-5\end{pmatrix}$.

10. $3(A^2-B^2)-2AB$, де $A=\begin{pmatrix}4&2&1\\3&-2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&0&2\\5&-7&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

11. $(2A-B)(3A+B)-2AB$, де $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&0&1\\-1&3&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7&5&2\\0&1&2\\-3&-1&-1\end{pmatrix}$.

12. $A(A^2-B)-2(B+A)B$, де $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&2&4\\5&3&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&7&13\\-1&0&5\\5&13&21\end{pmatrix}$.

13. $(A+B)A-B(2A+3B)$, де $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&3&5\\1&4&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&11&3\\1&6&1\\2&2&16\end{pmatrix}$.

14. $A(2A+B)-B(A-B)$, де $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}9&8&7\\2&7&3\\4&3&5\end{pmatrix}$.

15. $3(A+B)(AB-2A)$, де $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&-2&0\\4&-3&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}22&-14&3\\6&-7&0\\11&3&15\end{pmatrix}$.

16. $2AB-(A+B)(A-B)$, де $A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\1&1&2\\3&-2&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&-2&6\\2&4&3\\0&-3&4\end{pmatrix}$.

17. $2A+3B(AB-2A)$, де $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&3&1\\-1&2&0\\-3&0&0\end{pmatrix}$.

18. $(A-B)(A+B)-2AB$, де $A=\begin{pmatrix}3&4&5\\-1&0&2\\-2&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&1&2\\3&-1&0\end{pmatrix}$.

19. $2A-AB(B-A)+B$, де $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\0&-1&2\\5&7&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&-1&2\\-3&1&4\end{pmatrix}$.

20. $A^2-(A+B)(A-3B)$, де $A=\begin{pmatrix}4&5&6\\-1&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&-2\\3&1&2\end{pmatrix}$.

21. $B(A+2B)-3AB$, де $A=\begin{pmatrix}7&3&0\\1&-1&0\\2&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&2&1\\1&0&1\\3&2&1\end{pmatrix}$.

22. $3(A+B)-(A-B)A$, де $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\-1&2&0\\2&3&-1\end{pmatrix}$.

23. $A(A-B)+2B(A+B)$, де $A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&1&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&5\\4&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$.

24. $(2A+B)B-0,5A$, де $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&2\\2&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&1&1\\-2&0&1\end{pmatrix}$.

25. $AB-2(A+B)A$, де $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&0&1\\3&1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&1\\1&3&-1\end{pmatrix}$.

26. $(A+2B)(3A-B)$, де $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

27. $2AB+A(B-A)$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

28. $(3A+0.5B)(2B-A)$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

29. $2A(A+B)-3AB$, де $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

30. $3AB+(A-B)(A+2B)$, де $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методами Гауса, оберненої матриці і за правилом Крамера.

1. 1) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1;\\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4;\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6;\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4.\end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+8y-z=-7,\\ x+2y+3z=1,\\ 2x-3y+2z=9.\end{cases}$

2. 1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6,\\ x_1-x_2-2x_3-3x_4=8,\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4,\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8.\end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y+z=4,\\ 3x-5y+3z=1,\\ 2x+7y-z=8.\end{cases}$

3. 1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5,\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1,\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2y+z=5,\\ 2x+3y+z=1,\\ 2x+y+3z=11.\end{cases}$

4. 1) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

5. 1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$

6. 1) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9, \\ 3x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

7. 1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

8. 1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$

9. 1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

10. 1) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7, \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$

11. 1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

12. 1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$

13. 1) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16, \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

14. 1) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8. \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 16, \\ 3x - 2y - 5z = 12. \end{cases}$

15. 1) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

16. 1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

17. 1) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

18. 1) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

19. 1) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

20. 1) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 11x + 3y - z = 2, \\ 2x + 5y - 5z = 0, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

21. 1) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18, \\ x - y - z = 3, \\ x + y + 2z = -2. \end{cases}$

22. 1) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -4, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x + z = 0, \\ x - y - z = 2. \end{cases}$

23. 1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y - 2z = 3, \\ x + y - 2z = 0, \\ x - y - z = 1. \end{cases}$

24. 1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 28, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

25\. 1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -15. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$

26\. 1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 8, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

27\. 1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

28\. 1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

29\. 1) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

30\. 1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

3\. Розв'язати матричне рівняння.

1\. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix};$

2. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix};$

3. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix};$

4. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix};$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix};$

6. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ 17 & 1 & 7 \end{pmatrix};$

7. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$

8. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix};$

9. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix};$

10. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix};$

11. $X\cdot\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$;

12. $\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}$;

13. $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -8 & 5\\ -1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -2 & 6\\ 0 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 0\end{pmatrix}$;

14. $\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 4 & 16\\ -3 & -2 & 0\\ 5 & 7 & 2\end{pmatrix}$;

15. $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$;

16. $\begin{pmatrix}12 & 15 & -6\\ 9 & -3 & 0\\ 12 & 0 & 21\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}8 & 7 & -4\\ 3 & 1 & 6\\ 16 & 16 & 16\end{pmatrix}$;

17. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 6 & 6 & 5\\ -1 & -2 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -3 & 11\\ 0 & -3 & 4\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}$;

18. $\begin{pmatrix}8 & -5 & -1\\ -4 & 7 & -1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

19. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}$;

20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix}$;

21. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 14 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

23. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

24. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

25. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

26. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

27. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

28. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

29. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

30. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

4. Дослідити системи лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності розв'язати.

1\. 1) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

2\. 1) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 5 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

3\. 1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

4\. 1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 + 6 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - 5x_3 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

5\. 1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

6\. 1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 10x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_4 = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 5. \end{cases}$

7. 1) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 3. \end{cases}$

8. 1) $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

9. 1) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 14, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

10. 1) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

11. 1) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

12. 1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

13. 1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

14. 1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

15. 1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

16. 1) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 12x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 8x_2 - x_3 + 2x_4 = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

17. 1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

18. 1) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 12x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$

19. 1) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

20. 1) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

21. 1) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

22. 1) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 16x_4 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

23. 1) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 10x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 6x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

24. 1) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6x_3 = 5, \\ 6x_1 - 2x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

25. 1) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

26. 1) $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

27. 1) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1, \\ -x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

28. 1) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

29. 1) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 10x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 6x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

30. 1) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -6x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

5. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 \quad x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 + x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -5x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ -6x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

6. Визначити, при яких значеннях a і b система рівнянь: 1) має єдиний розв'язок, 2) не має розв'язку, 3) має нескінченну множину розв'язків.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 2, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = b, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = b. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = b, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + ax_3 = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + ax_2 - 5x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = b. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + ax_2 - 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = b, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + ax_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + ax_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = b, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = b, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + ax_3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + ax_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b, \\ 3x_1 - ax_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + ax_2 + 5x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = b. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = b, \\ 3x_1 - 2x_2 + ax_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = b, \\ 3x_1 - 5x_2 + ax_3 = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = b. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + ax_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = b. \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + ax_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + ax_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = b, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - x_3 = b, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + ax_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = b. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1. \\ 4x_1 - 2x_2 + ax_3 = -2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = b, \\ 3x_1 + ax_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + ax_2 - x_3 = -1. \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = b. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = b. \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + ax_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = b, \\ 3x_1 + ax_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3. \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = b. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1, \\ ax_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = b. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = b, \\ 2x_1 + ax_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = b, \\ -3x_1 + x_2 + ax_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

7. Визначити, при якому значенні a система однорідних лінійних рівнянь має ненульові розв'язки. Знайти ці розв'язки.

1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + ax_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + ax_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ ax_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + ax_3 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -4x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + ax_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + ax_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ ax_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + ax_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} ax_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ ax_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + ax_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + ax_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + ax_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + ax_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + ax_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + ax_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

8. Для заданих лінійних перетворень

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{33}x_3, \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{31}x_2 + a_{33}x_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3', \\ x_3'' = b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3', \\ x_3'' = b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3' \end{cases}$$

знайти перетворення, яке виражає x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

1. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3, \\ x_2' = 6x_1 + 7x_2 + x_3, \\ x_3' = 9x_1 + x_2 + 8x_3; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1'' = -x_1' + 3x_2' - 2x_3', \\ x_3'' = -4x_1' + x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 3x_1' - 4x_2' + 5x_3'. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - x_3, \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 + 7x_3, \\ x_3' = 8x_1 + x_2 - x_3; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1'' = -9x_1' + 3x_2' + 5x_3', \\ x_3'' = 2x_1' + 3x_3', \\ x_3'' = x_2' - x_3'. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 5x_3, \\ x_2' = 4x_2 - 9x_3, \\ x_3' = x_1 + 3x_2 + x_3; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1'' = x_2' - 6x_3', \\ x_3'' = 3x_1' + 7x_3', \\ x_3'' = x_1' + x_2' - x_3'. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1' = 2x_2, \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ x_3' = 4x_1 - x_2 + 5x_3; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1'' = -3x_1' + x_3', \\ x_3'' = 2x_2' + x_3', \\ x_3'' = -x_2' + 3x_3'. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + 5x_3, \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + 4x_3, \\ x_3' = 3x_1 + 2x_2 - x_3; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 3x_2' + x_3', \\ x_3'' = 3x_1' + x_2' + 2x_3'. \\ x_3'' = x_1' - 2x_2' + x_3'. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ x_2' = -2x_1 + x_2 - x_3, \\ x_3' = 3x_1 + x_2 + x_3; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1'' = -x_1' + 3x_2' - x_3', \\ x_3'' = 3x_1' + x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = x_1' + 2x_2' + 2x_3'. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3, \\ x_2' = 6x_1 + 9x_2 + x_3, \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + 8x_3; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1'' = -x_1' + 8x_2' - 2x_3', \\ x_3'' = -4x_1' + 3x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 3x_1' - 8x_2' + 5x_3'. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 4x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - 5x_3, \\ x_3' = -3x_1 + 5x_2 + x_3; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 5x_2' - 3x_3', \\ x_3'' = x_1' - x_2' + x_3', \\ x_3'' = 7x_1' + 4x_3'. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 5x_3, \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3, \\ x_3' = x_2 - 6x_3; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1'' = 2x_1' - x_2' - 5x_3', \\ x_3'' = 7x_1' + x_2' + 4x_3', \\ x_3'' = 6x_1' + 4x_2' - 7x_3'. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ x_2' = \quad -3x_2 + x_3, \\ x_3' = 2x_1 + \quad 3x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2', \\ x_3'' = x_1' - 2x_2' - x_3', \\ x_3'' = \quad 3x_2' + 2x_3'. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1' = \quad x_2, \\ x_2' = -3x_1 + 4x_2, \\ x_3' = -2x_1 + x_2 + 2x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = \quad x_1' - 3x_2' + 3x_3', \\ x_3'' = -2x_1' - 6x_2' + 13x_3', \\ x_3'' = -x_1' - 4x_2' + 8x_3'. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 5x_2 + 7x_3, \\ x_2' = x_1 - 4x_2 + 9x_3, \\ x_3' = -4x_1 + \quad 5x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 5x_1' + 6x_2' - 3x_3', \\ x_3'' = -x_1' + \quad x_3', \\ x_3'' = x_1' + 2x_2' - x_3'. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 5x_2 + 2x_3, \\ x_2' = 5x_1 - 7x_2 + 3x_3, \\ x_3' = 6x_1 - 9x_2 + 4x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 5x_1' - 3x_2' + 3x_3', \\ x_3'' = -x_1' - \quad 2x_3'. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1' = 7x_1, \\ x_2' = 10x_1 - 19x_2 + 10x_3, \\ x_3' = 12x_1 - 24x_2 + 13x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2', \\ x_3'' = -4x_1' - x_2', \\ x_3'' = 4x_1' - 8x_2' - 2x_3'. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 4x_3, \\ x_2' = 4x_1 - 7x_2 + 8x_3, \\ x_3' = 6x_1 - 7x_2 + 7x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = \quad 7x_2' + 4x_3', \\ x_3'' = \quad 7x_2', \\ x_3'' = x_1' + 13x_2'. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3, \\ x_2' = 4x_1 + 5x_2 - x_3. \\ x_3' = x_1 + 2x_2 + 3x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - 3x_2' - 4x_3', \\ x_3'' = -x_1' + \quad 5x_3', \\ x_3'' = 4x_1' - 2x_2' - 3x_3'. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 - 6x_3, \\ x_2' = x_1 - 3x_2 + 3x_3, \\ x_3' = 2x_1 - 5x_2 - x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 2x_2' + 3x_3', \\ x_3'' = 3x_1' + 5x_2' - 2x_3', \\ x_3'' = 4x_1' - \quad 4x_3'. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 5x_2 + 2x_3, \\ x_2' = -x_1 - 3x_2 - x_3, \\ x_3' = x_1 + 4x_2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' - 7x_2' - 4x_3', \\ x_3'' = x_1' - 2x_2', \\ x_3'' = 2x_1' - 4x_2' + 3x_3'. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 2x_2 - 4x_3, \\ x_2' = 7x_2 + 3x_3, \\ x_3' = x_1 - 3x_2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 5x_1' - 2x_2' + 4x_3', \\ x_3'' = x_1' + x_2' - 3x_3', \\ x_3'' = 2x_1' - 3x_2' + 5x_3'. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1' = 4x_2 - 5x_3, \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3, \\ x_3' = -3x_1 - 2x_2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' - 2x_2' + 4x_3', \\ x_3'' = -x_1' + 3x_2' - 5x_3', \\ x_3'' = 2x_1' + x_2' - 3x_3'. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 + 3x_3, \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3, \\ x_3' = x_1 - 3x_2 + 2x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' - 2x_2' - x_3', \\ x_3'' = x_1' + 4x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = -3x_1' + x_2' + 5x_3'. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1' = 6x_1 - 3x_2 - x_3, \\ x_2' = x_1 + 2x_2 - 3x_3, \\ x_3' = -3x_1 + x_2 + 4x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 4x_1' - 3x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 2x_1' + x_2' - 4x_3', \\ x_3'' = 3x_1' - 8x_2' + 5x_3'. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 3x_2 - 5x_3, \\ x_2' = 4x_1 + 5x_2 - x_3, \\ x_3' = 3x_1 + 2x_2 - x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 3x_2' + x_3', \\ x_3'' = 3x_1' + 4x_2' - 7x_3', \\ x_3'' = 6x_1' - 5x_2' + 2x_3'. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 5x_2 - 3x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + x_3, \\ x_3' = x_1 - 2x_2 + 5x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' - 2x_2' + 6x_3', \\ x_3'' = 5x_1' + 7x_2' - 2x_3', \\ x_3'' = 4x_1' - 5x_2' + x_3'. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 2x_2 - 7x_3, \\ x_2' = 3x_1 - 5x_2 + 4x_3, \\ x_3' = 2x_1 + x_2 - 3x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 11x_1' - 3x_2' - 4x_3', \\ x_3'' = x_1' + 3x_2' - 5x_3', \\ x_3'' = 2x_1' + 4x_2' + 7x_3'. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1' = 9x_1 - 3x_2 + 4x_3, \\ x_2' = 5x_1 + 2x_2 - 7x_3, \\ x_3' = 3x_1 + x_2 - 4x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 7x_1' + 3x_2' - 4x_3', \\ x_3'' = 2x_1' - 5x_2' + 3x_3', \\ x_3'' = x_1' + 6x_2' - 4x_3'. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 5x_2 - 6x_3, \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \\ x_3' = 3x_1 - x_2 + 5x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -2x_1' + 3x_2' + 4x_3', \\ x_3'' = 5x_1' + 2x_2' - 3x_3', \\ x_3'' = x_1' - 7x_2' + 2x_3'. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3, \\ x_2' = x_1 + 3x_2 + 3x_3, \\ x_3' = 2x_1 - x_2 + 4x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' - 2x_2' + 4x_3', \\ x_3'' = -x_1' + 4x_2' - 5x_3', \\ x_3'' = 2x_1' + x_2' - x_3'. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2 - 3x_3, \\ x_2' = 5x_1 + 3x_2 - 6x_3, \\ x_3' = x_1 + x_2 + x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 3x_2' + x_3', \\ x_3'' = -2x_1' - 4x_2' + 3x_3', \\ x_3'' = -2x_2' + 3x_3'. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 7x_2 - 2x_3, \\ x_2' = -3x_1 + x_2 + 3x_3, \\ x_3' = x_1 - 4x_2 + 6x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -x_1' + 4x_2' + 3x_3', \\ x_3'' = 3x_1' + 2x_2' - 4x_3', \\ x_3'' = -2x_1' - 7x_2' + x_3'. \end{cases}$

9. Для даної матриці A знайти власні значення і власні вектори.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 3 & -11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ 14. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 15. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ 17. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ 18. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ 20. $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ 21. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 23. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 24. $\begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ 26. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ 27. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 29. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 30. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. Розв'язати систему лінійних рівнянь $AX = B$ з точністю до 10^{-8}.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}2 & -2 & 2{,}1 & 1 \\ 1{,}2 & 2 & 1 & 2{,}8 & 4 \\ 3 & 1{,}2 & 1 & 1{,}6 & 1 \\ 1{,}5 & 2 & 4 & 1{,}4 & 1{,}25 \\ 1 & 1 & 2{,}1 & 1{,}5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix};$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1{,}2 & -1 & 2{,}2 & 1 \\ 1{,}4 & 3 & 1 & 2{,}6 & 4 \\ 3 & 1{,}4 & 1 & 1{,}6 & 1 \\ -2{,}5 & 2 & 4 & 1{,}8 & 1{,}5 \\ -3 & 1 & 2{,}2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1{,}5 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix};$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1,2 & 0 & 2,3 & 1 \\ 1,6 & 4 & 1 & 2,4 & 4 \\ 3 & 1,6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 3,5 & 2 & 4 & 2,2 & 1,75 \\ 5 & 1 & 2,3 & 0,5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix};$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1,2 & -2 & 2.1 & 0 \\ 1,2 & 3 & 2 & 2,8 & 4 \\ 3 & 2,2 & 1 & 1,6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2,4 & 1,25 \\ 0 & 1 & 2,1 & 1,5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1,5 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix};$

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1,2 & -1 & 2,2 & 0 \\ ,12 & 4 & 2 & 2,6 & 4 \\ 3 & 2,4 & 1 & 1,6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2,8 & 1,5 \\ 2 & 1 & 2,2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix};$

6. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1,2 & 0 & 2,3 & 0 \\ 1,6 & 5 & 2 & 2,4 & 4 \\ 3 & 2,6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 3,2 & 1,75 \\ 6 & 1 & 2,3 & 0,5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 2,5 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix};$

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1,2 & -2 & 2,1 & -1 \\ 1,2 & 4 & 3 & 2,8 & 4 \\ 3 & 3,2 & 1 & 1,6 & 1 \\ 2,5 & 2 & 4 & 3,4 & 1,25 \\ -1 & 1 & 2,1 & 1,5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix};$

8. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1,2 & -1 & 2,2 & -1 \\ 1,4 & 5 & 3 & 2,6 & 4 \\ 3 & 3,4 & 1 & 1,6 & 1 \\ 3,5 & 2 & 4 & 3,8 & 1,5 \\ 1 & 1 & 2,2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 2,5 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}$;

9. $A=\begin{bmatrix} 4 & 1,2 & 0 & 2,3 & -1 \\ 1,6 & 6 & 3 & 2,4 & 4 \\ 3 & 3,6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 4,5 & 2 & 4 & 4,2 & 1,75 \\ 3 & 1 & 2,3 & 0,5 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$;

10. $A=\begin{bmatrix} 5 & 1,2 & -2 & 2,4 & 1 \\ 1,8 & 5 & 1 & 2.2 & 4 \\ 3 & 1.8 & 1 & 1,6 & 1 \\ 4,5 & 2 & 4 & 2,6 & 2 \\ 7 & 1 & 2,4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 2,5 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$;

11. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1,2 & -2 & 2,1 & -2 \\ 1,2 & 5 & 4 & 2,8 & 4 \\ 3 & 4,2 & 1 & 1,6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4,4 & 1,25 \\ -2 & 1 & 2,1 & 1,5 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 2,5 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$;

12. $A=\begin{bmatrix} 5 & 1,2 & 1 & 2,4 & 0 \\ 1,8 & 6 & 2 & 2,2 & 4 \\ 3 & 2,8 & 1 & 1,6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 3,6 & 2 \\ 6 & 1 & 2,4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix}$;

13. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1,2 & -1 & 2,2 & -2 \\ 1,4 & 6 & 4 & 2,6 & 4 \\ 3 & 4,4 & 1 & 1,6 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 4,8 & 1,5 \\ 0 & 1 & 2,2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}$;

14. $A=\begin{bmatrix} 5 & 1,2 & 1 & 2,4 & -1 \\ 1,8 & 7 & 3 & 2,2 & 4 \\ 3 & 3,8 & 1 & 1,6 & 1 \\ 5,5 & 2 & 4 & 4,6 & 2 \\ 5 & 1 & 2,4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix} 9 \\ 13 \\ 3,5 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}$;

15. $A=\begin{bmatrix} 4 & 1,2 & 0 & 2,3 & -2 \\ 1,6 & 7 & 4 & 2,4 & 4 \\ 3 & 4,6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 5,2 & 1,75 \\ 2 & 1 & 2,3 & 0,5 & 8 \end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix} 7 \\ 15 \\ 3,5 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix}$;

16. $A=\begin{bmatrix} 5 & 1,2 & 1 & 2,4 & -2 \\ 1,8 & 8 & 4 & 2,2 & 4 \\ 3 & 4,8 & 1 & 1,6 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 5,6 & 2 \\ 4 & 1 & 2,4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix} 9 \\ 16 \\ 4 \\ 12 \\ -8 \end{bmatrix}$;

17. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1,2 & -2 & 2,1 & -3 \\ 1,2 & 6 & 5 & 2,8 & 4 \\ 3 & 5,2 & 1 & 1,6 & 1 \\ 3,5 & 2 & 4 & 5,4 & 1,25 \\ -3 & 1 & 2,1 & 1,5 & 8 \end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix} 3 \\ 16 \\ 3 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}$;

18. $A=\begin{bmatrix} 6 & 1,2 & 2 & 2,5 & -3 \\ 2 & 10 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 7,5 & 2 & 4 & 7 & 2,25 \\ 5 & 1 & 2,5 & -0,5 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 11 \\ 20 \\ 5 \\ 15 \\ -8 \end{bmatrix}$;

19. $A=\begin{bmatrix} 4 & 1,2 & 0 & 2,3 & -3 \\ 1,6 & 8 & 5 & 2,4 & 4 \\ 3 & 5,6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 5,5 & 4 & 6,2 & 1,75 & 1 \\ 1 & 1 & 2,3 & 0,5 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 7 \\ 18 \\ 4 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}$;

20. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1,2 & -1 & 2,2 & -3 \\ 1,4 & 7 & 5 & 2,6 & 4 \\ 3 & 5,4 & 1 & 1,6 & 1 \\ 4,5 & 2 & 4 & 5,8 & 1,5 \\ -3 & 1 & 2,2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 \\ 17 \\ 2,5 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$;

21. $A=\begin{bmatrix} 3 & 0,7 & 0,2 & 0,2 \\ 0,6 & 5 & 0,5 & 0,5 \\ 1,3 & 0,3 & 3,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$;

22. $A=\begin{bmatrix} 5 & 0,9 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 8 & 0,7 & 0,5 \\ 1,0 & 0,3 & 5,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$;

23. $A=\begin{bmatrix} 4 & 0,7 & 0,3 & 0,4 \\ 0,6 & 7 & 0,8 & 0,7 \\ 1,3 & 0,6 & 4 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 0,5 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$;

24. $A=\begin{bmatrix}14 & 1{,}5 & 0{,}9 & 0{,}8\\ -1 & 23 & 2{,}2 & 1{,}7\\ 0{,}4 & 1{,}2 & 13 & 0{,}7\\ 1{,}1 & 1{,}1 & 1{,}9 & 18\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}16\\ 24\\ -11\\ 12\end{bmatrix}$;

25. $A=\begin{bmatrix}9 & 1{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2\\ -0{,}6 & 14 & 1{,}1 & 0{,}7\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 9{,}5 & 0{,}6\\ 0 & 0{,}9 & 1{,}3 & 10\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}13\\ 17\\ -5\\ 8\end{bmatrix}$;

26. $A=\begin{bmatrix}6 & 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}8\\ 0{,}6 & 11 & 3{,}4 & 1{,}3\\ 1{,}5 & 1{,}2 & 5 & 0{,}3\\ 1{,}5 & 0{,}3 & 0{,}7 & 10\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4\\ 8\\ -11\\ 8\end{bmatrix}$;

27. $A=\begin{bmatrix}12 & 1{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4\\ -1 & 19 & 1{,}6 & 1{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}6 & 12 & 0{,}7\\ 0{,}3 & 1{,}1 & 1{,}7 & 14\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}16\\ 22\\ -7\\ 10\end{bmatrix}$;

28. $A=\begin{bmatrix}7 & 1{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2\\ -0{,}2 & 11 & 0{,}9 & 0{,}6\\ 0{,}7 & 0{,}3 & 7{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0{,}7 & 1 & 12\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}10\\ 13\\ -5\\ 7\end{bmatrix}$;

29. $A=\begin{bmatrix}11 & 1{,}3 & 0{,}7 & 0{,}6\\ -0{,}6 & 18 & 1{,}7 & 1{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}9 & 10{,}5 & 0{,}6\\ 0{,}8 & 0{,}9 & 1{,}5 & 14\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}13\\ 19\\ -9\\ 10\end{bmatrix}$;

30. $A=\begin{bmatrix}6 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 10 & 1{,}2 & 0{,}8\\ 1{,}1 & 0{,}6 & 6 & 0{,}4\\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}8 & 8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7\\ 10\\ -7\\ 7\end{bmatrix}$.

11. Для даної матриці A визначити перше власне число матриці (найбільше по модулю) з шістьма вірними цифрами. Потім знайти відповідний йому власний вектор, що має першу норму, рівну 1 (координати вектора обчислити з трьома десятковими знаками).

1. $A=\begin{pmatrix}2{,}1 & 1 & 1{,}1\\ 1 & 2{,}6 & 1{,}1\\ 1{,}1 & 1{,}1 & 3{,}1\end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix}2{,}4 & 1 & 1{,}4\\ 1 & 2{,}9 & 1{,}4\\ 1{,}4 & 1{,}4 & 3{,}4\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5\\ 0{,}4 & 1{,}3 & 0{,}3\\ 0{,}5 & 0{,}3 & 1{,}3\end{pmatrix}$. 4. $A=\begin{pmatrix}1{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8\\ 0{,}7 & 1{,}6 & 0{,}3\\ 0{,}8 & 0{,}3 & 1{,}6\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}2{,}2 & 1 & 1{,}2\\ 1 & 2{,}7 & 1{,}2\\ 1{,}2 & 1{,}2 & 3{,}2\end{pmatrix}$. 6. $A=\begin{pmatrix}2{,}5 & 1 & 1{,}5\\ 1 & 3 & 1{,}5\\ 1{,}5 & 1{,}5 & 3{,}5\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}1{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 1{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}3 & 1{,}4\end{pmatrix}$. 8. $A=\begin{pmatrix}1{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9\\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}9 & 0{,}3 & 1{,}7\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}2{,}3 & 1 & 1{,}3\\ 1 & 2{,}8 & 1{,}3\\ 1{,}3 & 1{,}3 & 3{,}3\end{pmatrix}$. 10. $A=\begin{pmatrix}2{,}6 & 1 & 1{,}6\\ 1 & 3{,}1 & 1{,}6\\ 1{,}6 & 1{,}6 & 3{,}6\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}3{,}5 & 1 & 2{,}5\\ 1 & 4 & 2{,}5\\ 2{,}5 & 2{,}5 & 4{,}5\end{pmatrix}$. 12. $A=\begin{pmatrix}1{,}8 & 0{,}9 & 1\\ 0{,}9 & 1{,}8 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}3 & 1{,}8\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}1{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7\\ 0{,}6 & 1{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}7 & 0{,}3 & 1{,}5\end{pmatrix}$. 14. $A=\begin{pmatrix}2{,}7 & 1 & 1{,}7\\ 1 & 3{,}2 & 1{,}7\\ 1{,}7 & 1{,}7 & 3{,}7\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix} 1,4 & 1,2 & -1,3 \\ 1,2 & 0,9 & 0,4 \\ -1,3 & 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix} 3,2 & 1 & 2,2 \\ 1 & 3,7 & 2,2 \\ 2,2 & 2,2 & 4,2 \end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix} 2,8 & 1 & 1,8 \\ 1 & 3,3 & 1,8 \\ 1,8 & 1,8 & 3,8 \end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix} 2,4 & 1,2 & -0,3 \\ 1,2 & 1,9 & 1,4 \\ -0,3 & 1,4 & 0,8 \end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix} 1,6 & 1,2 & -1,1 \\ 1,2 & 1,1 & 0,6 \\ -1,1 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix} 3,3 & 1 & 2,3 \\ 1 & 3,8 & 2,3 \\ 2,3 & 2,3 & 4,3 \end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix} 2,9 & 1 & 1,9 \\ 1 & 3,4 & 1,9 \\ 1,9 & 1,9 & 3,9 \end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix} 2,6 & 1,2 & -0,1 \\ 1,2 & 2,1 & 1,6 \\ -0,1 & 1,6 & 0,8 \end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix} 1,8 & 1,2 & -0,9 \\ 1,2 & 1,3 & 0,8 \\ -0,9 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix} 3,4 & 1 & 2,4 \\ 1 & 3,9 & 2,4 \\ 2,4 & 2,4 & 4,4 \end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix} 3,1 & 1 & 2,1 \\ 1 & 3,6 & 2,1 \\ 2,1 & 2,1 & 4,1 \end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix} 2,8 & 1,2 & 0,1 \\ 1,2 & 2,3 & 1,8 \\ 0,1 & 1,8 & 0,8 \end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1,2 & -0,7 \\ 1,2 & 1,5 & 1 \\ -0,7 & 1 & 0,8 \end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix} 1,6 & 2,3 & -0,5 \\ 2,3 & 2 & 1,2 \\ -0,5 & 1,2 & 0,6 \end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix} 2,2 & 1,2 & -0,5 \\ 1,2 & 1,7 & 1,2 \\ -0,5 & 1,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix} 2,4 & 1,2 & 2,5 \\ 1,2 & 3,5 & 1,4 \\ 2,5 & 1,4 & 4,2 \end{pmatrix}$.

12. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду і записати відповідне перетворення.

1. $Q(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;

2. $Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;

3. $Q(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

4. $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

5. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

6. $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$;

7. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

8. $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

9. $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$;

10. $Q(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

11. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

12. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

13. $Q(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

14. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

15. $Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 7x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

16. $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3$;

17. $Q(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$;

18. $Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3$;

19. $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_2x_3$;

20. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_3$;

21. $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3$;

22. $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 12x_1x_3 + 8x_2x_3$;

23. $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_4 + 2x_3x_4$;

24. $Q(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2x_3$;

25. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

26. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$;

27. $Q(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 8x_2^2 + 8x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3$;

28. $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$;

29. $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_4^2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_3x_4$;

30. $Q(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

ОСНОВНА

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-М.: Наука. 1980; 1981; 1988.

2. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. / За ред. Г.Л. Кулініча -К.,1992.

3. Волков Ю.І.. Найко ДА. Лінійна алгебра і аналітична геометрія.-К.,1991.

4. Данко П. Е., Попов А. Г., Кужевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях й задачах. В 2 х ч. -М.: Высш. шк., 1986.

5. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. - М.: Наука, 1989.

6. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике /типовые расчеты/. - М.: Высш. шк., 1983.

7. Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В.М. Высшая математика.- К.: Вища школа, 1987.

8. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика. -К.: Либідь, 1996.

9. Сборник задач по математике для втузов. 4.1. Линейная алгебра и основы математического анализа. / Под ред. А В. Ефимова и Б. П. Демидовича.-М.: Наука, 1986.

10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. / Под ред. Рябушко А.П.-Минск: Высш. шк., 1990.

11. Фролов С. В., Шостак Р. Я. Курс высшей математики. - М.:Высш. шк. 1973.

12. Шнейдер В.Е. Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч. 1,2.-М.: Высш. шк., 1978.

13. Щипачев В. С. Высшая математика.-М.: Высш. шк., 1985.

ДОДАТКОВА

1. Беклемишев Л. А. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: 1984.

2. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учеб. пособие. -М.: Высш. шк., 1985.

3. Мантуров О. В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики.-М.: Высш. шк.., 1986.

4. Плис А. Й., Сливина Н. А. Лабораторний практикум по высшей математике. -М.: Высш. шк., 1983.

5. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: Учеб. пособие /А. В. Кузнецов и др. - Мн.: Выш. шк., 1994.

Навчальне видання

Олександр Андрійович Войцеховський

Надія Борисівна Дубова

Вища математика

в прикладах і задачах

Лінійна алгебра

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами
Редактор В.О. Дружиніна

Навчально-методичний відділ ВДТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
Серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,ВДТУ

Підписано до друку 8.01.03р Гарнітура Times New Roman

Формат 29,7×42 1/4 Папір офсетний

Друк різографічний Ум. др. арк 4.17

Тираж 100 прим.

Замовлення №2002-262

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького державного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
Серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95